UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA DE FISICO

SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MECANICA SIMPLECTICA

(Interacciones Estacionarias)

T E S I S

Joaquin Delgado Fernández

México, D. F. 1983

INDICE

INTRODUCCION

El presente es un intento de formular a la Mecánica Analítica dentro de un esquema lógicamente consistente, con tendencias a una formulación axiomática.
Esta no es, sin embargo, una presentación matemática de la Física o algo por el estilo. Hemos tratado en lo posible de enmarcar la formulación dentro de un contexto físico con una amplia discución al respecto. Así por ejemplo, en la sección 1.1 hacemos un breve resumen (una miniformulación) de la Mecánica de Newton, poco usual en los textos de Física.(Las ideas de esta sección con algunas modificaciones se deben enteramente al Profesor Mario Rosales y aún cuando hemos estado en desacuerdo en pequeños detalles, esta sección merece una atención especial).

Un aspecto importante de esta tesis es la notación utilizada. Nuestra convicción es que a grandes males grandes remedios; y dada la frecuencia con que nos hemos enfrentado a descifrar galimatías tanto de la literatura para los físicos como para los matemáticos, la notación introducida posee la virtud de no dejar ninguna duda al respecto de su significado. Creemos que a este nivel es necesario tener la mayor precisión posible de lo que se está diciendo a fin de evitar las ambigüedades tan frecuentes. Con el objeto de aligerar el trabajo al lector hemos hecho una breve explicación de la notación utilizada.

La formulación que hemos adoptado se remota a Poincaré y D. Birkhoff. Siendo Poincaré el primero en reconocer la idea del espacio de estados como un ente geométrico esencial en la descripción de los sistemas mecánicos. La formulación intrínseca o abstracta de las variedades se debe a E. Cartan y en forma primitiva al pedante de Gauss. Más recientemente Mackey ha conribuído en gran parte a este aspecto de la formulación de la Mecánica Analítica y de la Mecánica Cuántica.A últimas fechas, J. M. Soriau ha propuesto un cambio cualitativo en la forma de ver a un sistema mecánico en base a la geometría simpléctica.

Basados en el trabajo de estos grandes señores hemos escogido esta formulación diferenciable de la Mecánica Analítica. Cabe aclarar que este es tan solo un aspecto de la Mecánica y seguramente hemos dejado de lado aspectos más prácticos, pero antes de eso era necesario reafirmar las bases teóricas de la Mecánica Analítica.

La tesis está dividida en tres capítulos. En el primer capítulo planteamos dentro de un esquema formal, el objetivo central de la Mecánica Analítica. Ello requiere primeramente introducir primeramente la noción de variedad diferenciable y en particular las variedades involucradas en la formulación, los haces tangente y cotangente, como una herramienta previa. En seguida pasamos a delimitar con bastante precisión nuestro objeto de estudio y hacemos una clasificación de los sistemas mecánicos. En el resto de los capítulos se estudiará una clase particular de sistemas mecá nicos, los así llamados estacionarios o independiente del tiempo.
El capítulo II es una introducción propiamente dicho a lo que comunmente se conoce como Mecánica Analítica- aunque nosotros proponemos una visión más amplia de ella -.
Aquí desarrollamos primeramente la Mecánica de Hamilton y en seguida de la Mecánica de Lagrange en el contexto de la geometría simpléctica. Al final hacemos una discución acerca de la relación entre las formulaciones anteriores y de Newton.
En el capítuloIII se empieza por hacer una breve introducción a lo que hemos llamado "estado natural de movimiento de un sistema mecánico" y hemos propuesto una definición precisa tentativa enunciando tres conjeturas en relación a ello. En el resto del capítulo se tratan algunos ejemplos clásicos y algunos nuevos que ilustran las consecuencias del concepto de estado naturla de movimiento.
Al final hemos puesto algunos apéndices sobre algún resultado específico. Creemos que esta es una parte muy importante del trabajo, desde el punto de vista matemático, ya que algunos resultados son realmente nuevos.

En todo esto, uno de los méritos de esta tesis, si acaso lo tiene, radica en que nuestros resultados son válidos en el caso de variedades de dimensión infinita o sea para sistemas con una infinidad de "grados de libertad".

Finalmente escribo de "nosotros" porque la infraestructura necesaria para llevar a cabo este trabajo requirió de la paciencia de los profesores M. Rosales, A. Aldama y F. Uribe sintetizado en sus notas y resultados.

SIMBOLOGIA

$\mathbb{Z}^+$ El conjunto de los enteros positivos.

$\bar{n}$ Para $n \in \mathbb{Z}^+$, hacemos $\bar{n} \equiv \{m \in \mathbb{Z}^+ / m \leq n\}$

$\mathbb{R}^+$ El conjunto de los reales positivos.

B^A Para dos conjuntos A y B, definimos B^A como el conjunto de las funciones en $A \times B$ (A se llama dominio y B contradominio). Además, si $f \in B^A$ y $(a,b) \in f$, convenimos en hacer $b \equiv f(a)$, llamándolo "valor de a bajo f".
Para $f \in B^A$ y $E \subseteq A$, hacemos $f^{id}(E) = \{f(a) \mid a \in E\}$ y lo llamamos "imágen directa de E bajo f". En ocasiones se abrevia poniendo $f(E) \equiv f^{id}(E)$.
Para $f \in B^A$ y $E \subseteq B$, hacemos $f^{ii}(E) \equiv \{a \in A \mid f(a) \in E\}$ y se le llama "imágen inversa de E bajo f."

$\prod_{i \in I} A_i$ Para una familia de conjuntos $\{A_i \mid i \in I\}$, hacemos $\prod_{i \in I} A_i \equiv \{\alpha \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^I / \alpha(i) \in A_i \ \forall i \in I\}$ y se le llama "producto cartesiano de la familia". Obsérvese que cuando $A_i = A \ \forall i \in I$, tenemos que $\prod_{i \in I} A_i = A^I$.

$P_j^{\prod_{i \in I} A_i}$ $P_j^{\prod_{i \in I} A_i} \equiv \{(\alpha, \alpha(j)) / \alpha \in \prod_{i \in I} A_i\} \in (A_j)^{\prod_{i \in I} A_i}$, se le llama "función proyección j-ésima en $\prod_{i \in I} A_i$". Así, $P_j^{\prod_{i \in I} A_i}(\alpha) = \alpha(j)$.

$\theta_j^{\prod_{i \in I} A_i}$ Para una familia de espacios vectoriales $\{A_i \mid i \in I\}$ hacemos

$$\theta_j^{\prod_{i \in I} A_i} \equiv \left\{\left(v, \{(i,0) \in I \times A_i / i \in I \setminus \{j\}\} \cup \{(j,v)\}\right) \mid v \in A_j\right\}$$

Teniéndose que $\theta_j^{\prod_{i\in I} A_i} \in (\prod_{i\in I} A_i)^{A_j}$ y además

$$[P_K^{\prod_{i\in I} A_i} \circ \theta_j^{\prod_{i\in I} A_i}](v) = \begin{cases} v & \text{si } K = i \\ 0 \in V_K & \text{si } K \neq i \end{cases}$$

f_a — Si $f \in (\prod_{i\in I} A_i)^E$, $f_a \equiv P_a^{\prod_{i\in I} A_i} \circ f \in A_a^E$ es la función componente a-ésima de f.

$\delta_{(a)}^{(n)} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ — Delta de Kronecker a-ésima en $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ $\delta^{(n)} \in (\mathbb{R}^{\bar{n}})^{\bar{n}}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^{\bar{n}}$

$I_A, i_{A'}$ — Para un conjunto A y $A' \subseteq A$ hacemos

$$i_{A'} \equiv \{(a,a) \mid a \in A'\} \in A^{A'}$$

si $A = A'$, hacemos $I_A \equiv i_A$, i_A es la función inclusión y I_A la función identidad.

$g \circ f$ — Para $f \in B^A$ y $g \in D^C$, hacemos

$$g \circ f \equiv \{(a, g(f(a))) / a \in f^{''}(C \cap B)\}$$, por lo cual $g \circ f \in D^{f^{''}(C \cap B)}$ y se llama "g composición f".

$\dot{\bar{k}}$ — Para un conjunto X y $k \in X$, hacemos

$$\dot{\bar{k}} \equiv \{(c,k) \mid c \in C\} \in X^C$$

donde el conjunto C está definido por el contexto de la expresión en que aparece. A $\dot{\bar{k}}$ se le conoce como "función constante k".

$\ddot{\bar{k}}$ — Para $k \in X$ hacemos

$$\ddot{\bar{k}} \equiv \{(c, \dot{\bar{k}}) \mid c \in C'\} \in (X^D)^{C'}$$

donde C' y D están especificados por el contexto.

$\dot{\bar{f}}$ Para $f \in B^A$, hacemos

$$\dot{\bar{f}} \equiv \{(a, \dot{\overline{f(a)}}) \mid a \in A\} \in (B^C)^A$$

donde C lo especifica el contexto.

$\overline{\ddot{f}}$ Para $f \in (C^B)^A$, hacemos

$$\overline{\ddot{f}} \equiv \{(a, \overline{\dot{\overline{f(a)}}}) \mid a \in A\} \in ((C^D)^B)^A$$

$\ddot{\bar{f}}$

$$\ddot{\bar{f}} \equiv (\overline{\dot{\bar{f}}})$$

$\bar{\bar{\dot{f}}}$

$$\bar{\bar{\dot{f}}} = (\overline{\dot{\bar{f}}})$$

. Nótese que $\bar{\bar{\dot{f}}}(a) = \ddot{\overline{f(a)}}$

$g \odot f$ Para $f \in (C^B)^A$ y $g \in (D^B)^E$, hacemos

$$g \odot f \equiv \{(a, g(a) \circ f(a)) \mid a \in A \cap E\}$$ y por tanto

$$g \odot f \in (D^B)^{A \cap E}$$

$g \circledcirc f$ Para $f \in ((C^B)^A)^F$ y $g \in ((D^C)^E)^G$, hacemos

$$g \circledcirc f \equiv \{(a, g(a) \odot f(a)) \mid a \in F \cap G\}$$ y por tanto

$$g \circledcirc f \in ((D^B)^{A \cap E})^{F \cap G}.$$

$g \vartriangle f$ Para $f \in B^A$ y $g \in C^B$, hacemos

$$g \vartriangle f \equiv \{(a, g(a)(f(a))) \mid a \in A \cap E\}$$ y

resulta que $g \vartriangle f \in C^{A \cap E}$.

$g \circledast f$ Para $f \in (C^B)^A$ y $g \in ((D^C)^B)^E$, hacemos

$$g \circledast f \equiv \{(a, g(a) \vartriangle f(a)) \mid a \in A \cap E\}$$ por lo que

$$g \circledast f \in (D^B)^{A \cap E}.$$

$L(V,W)$	Para V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, hacemos $$L(V,W) \equiv \{ f \in W^V / f \text{ lineal} \}$$
$Hom(V,W)$	Para V y W espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$, hacemos $Hom(V,W) = \{ f \in L(V,W) / f$ lineal y continua$\}$. Una condición equivalente para que $f \in Hom(V,W)$ es que $f \in L(V,W)$ y satisfaga la condición de Lipschitz: $\exists\ k \in \mathbb{R}^+ \ni$ $$\| f(v) \|_W \leq k \| v \|_V \quad \forall\ v \in V .$$
$L_n^{ac}(V)$	Para V espacio normado, hacemos $$L_n^{ac}(V) \equiv \{ \omega \in \mathbb{R}^{(V^{\bar{n}})} / \omega \text{ multilineal y continua} \}$$ Equivalentemente, $\omega \in L_n^{ac}(V)$ si $$\omega \circ (\theta_j^{V\bar{n}} + \overline{\sum_{i \in \bar{n} \sim \{j\}} \theta_i^{V\bar{n}} (w(i))}) \in L(V,\mathbb{R})$$ y además ω es acotado; i.e. $\exists\ k \in \mathbb{R}^+ \ni$ $$| \omega(w) | \leq k \| w(1) \|_V \cdots \| w(n) \|_V \quad \forall\ w \in V^{\bar{n}} .$$ A los elementos de $L_n^{ac}(V)$ se les llama tensores (contravariantes) de orden n, acotados.
$\mathcal{S}_n^{ac}(V)$	Conjunto de tensores acotados de orden n y simétricos: $\omega \in \mathcal{S}_n^{ac}(V)$ si $\omega \in L_n^{ac}(V)$ y $$\omega \circledcirc \dot{\bar{\sigma}} = \omega \quad \forall\ \sigma \in S_n \quad \text{donde}$$ $$S_n \equiv \{ \sigma \in \bar{n}^{\bar{n}} / \sigma \text{ inyectiva} \}$$ son las permutaciones en $\bar{n}$.
$\mathcal{A}_n^{ac}(V)$	Conjunto de tensores acotados de orden n y antisimétricos: $\omega \in \mathcal{A}_n^{ac}(V)$ si $\omega \in L_n^{ac}(V)$ y $\omega \circledcirc \dot{\bar{\sigma}} = sgn(\sigma)\, \omega \quad \forall\ \sigma \in S_n$, siendo $sgn(\sigma)$ el signo de la permutación σ.

$g \times f$	Para $f \in B^A$ y $g \in C^D$, hacemos $$g \times f = \{(a, \{(1, g(a)), (2, f(a))\}) \mid a \in A \cap D\}$$ Teniéndose que $g \times f \in (\prod_{i \in 2} X_i)^{A \cap D}$ con $X_1 \equiv B, X_2 \equiv C$. $g \times f$ es el producto cartesiano (restringido) de g y f. Si $A_1 \equiv A$, $A_2 \equiv D$, $g \circ P_1^{\prod_{i \in 2} A_i} \times f \circ P_2^{\prod_{i \in 2} A_i} \in (\prod_{i \in 2} X_i)^{\prod_{i \in 2} A_i}$ es el producto cartesiano de g y f. Cuando el contexto sea claro, denotaremos ambos productos con el mismo símbolo $g \times f$.
$\mathcal{P}(M)$	Para un conjunto M, $\mathcal{P}(M)$ es el conjunto formado por los subconjuntos de M. Si $f \in \mathcal{P}(M)^I$ y $M = \bigcup_{i \in I} f(i)$ decimos que f es una "cubierta de M".
$R \subseteq A \times B$	Un subconjunto de un producto cartesiano se llama una relación en el producto. Toda función es una relación.
Df ; $D^2 f$	Para $f \in V^E$, con V un espacio normado y $E \subseteq \mathbb{R}$ $Df \in V^{E'}$ es la derivada de f donde E' es el subconjunto de E donde f es derivable. $D^2 f$ denota a la segunda derivada de f y así sucesivamente.
$\\| \\|_V$	Para un espacio normado V, $\\| \\|_V$ denota a la función norma en V. $\\| \\|_V \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^V$.
R_q^M	Para una variedad M. y $q \in M$ R_q^M es una relación de equivalencia específica entre curvas que pasan por q. C_q ; si $c \in C_q$, su clase de equivalencia se denota por C/R_q^M.
$(M, \mathcal{a}^{(n)}(M,V))$	Variedad diferenciable de clase $C^{(n)}$. Def. 1.1 p. 2.

$T_q(M)$	Espacio tangente a la variedad M en q.
$\Xi^{F(i)}$	Para cada q en el dominio de la carta $F(i)$ $\Xi^{F(i)}_{(q)} \in Hom(T_q(M), V)$ es el isomorfismo entre el espacio tangente y el espacio de modelación $\Xi^{F(i)}_{(q)}(\xi) = D(F(i) \circ c)(0)$ con $c \in \xi \in T_q(M)$.
$inv_\Delta\, \Xi^{F(i)}$	Para cada $q \in M$ $(inv_\Delta\, \Xi^{F(i)})(q) \equiv \Xi^{F(i)\,-1}_{(q)} \in Hom(V, T_q(M))$.
$(T(M), \mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M), V^{\bar{2}})})$	Haz tangente con la estructura usual de variedad diferenciable. Secc. 1.2 p.p. 12-16.
$(T(M)^*, \mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M)^*, \prod_{i \in \bar{2}} V_i)})$	Haz cotangente con la variedad usual de variedad diferenciable. Secc. 1.2 p.p. 12-16. $V_1 \equiv V$, $V_2 \equiv Hom(V, \mathbb{R})$.
$F(i)$, $TF(i)$, $\overset{*}{T}F(i)$ $T(i)$, $\overset{*}{T}(i)$.	Cartas típicas en M, $T(M)$ y $T(M)^*$ respectivamente. $TF(i)$ y $\overset{*}{T}F(i)$ son cartas inducidas por la carta $F(i)$ en M. secc. 2. p.p. 12-16. En ocasiones se abrevia la notación haciendo $T(i) \equiv TF(i)$, $\overset{*}{T}(i) \equiv \overset{*}{T}F(i)$. Los dominios de estas cartas se denotan por $f(i)$, $Tf(i)$ y $\overset{*}{T}f(i)$. Así, f es una cubierta de M, Tf una cubierta de $T(M)$ y $\overset{*}{T}f$ una cubierta de $T(M)^*$. $F \in \mathcal{A}^{(n)}(M, V)$, $TF \in \mathcal{A}^{(n-1)}(T(M), V)$, $\overset{*}{T}F \in \mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M)^*, \prod_{i \in \bar{2}} V_i)}$
$T'F(i) \equiv T'(i)$, $\overset{*}{T}'F(i) \equiv \overset{*}{T}'(i)$	$T'F \in \mathcal{A}^{(n-1)}(T(M), \mathbb{R}^{\overline{2m}})$, $\overset{*}{T}'F \in \mathcal{A}^{(n-1)}(T(M)^*, \mathbb{R}^{\overline{2m}})$ Son los atlas que modelan a $T(M)$ y $T(M)^*$ sobre $\mathbb{R}^{\overline{2m}}$ siendo m la dimensión de M y $F \in \mathcal{A}^{(n)}(M, \mathbb{R}^{\bar{m}})$
$\overset{*}{I}F(i) \equiv \overset{*}{I}(i)$	$\overset{*}{I}F \in \mathcal{A}^{(n-1)}(T(M)^*, (\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}})$ es el atlas que modela a $T(M)^*$ sobre $(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}$.
ρ, π	$\rho \in M^{T(M)}$; $\pi \in M^{T(M)^*}$ Son las proyecciones. Secc. 2 p.p. 12-16.

$\partial_a^{F(i)}$ Campo vectorial básico en una variedad. p. 15.

$d\,F(i)_a$ Campo covectorial básico en una variedad p. 15.

$\varphi \in \prod_{t \in \mathbb{R}} (S^S)^{[t,\infty)}$ Función de evolución de un sistema mecánico. Véase la clasificación en la p. 22.

$c^{\prime}$ Para $c \in M^I$ con $I \in \mathcal{N}_0$ o $\in \mathbb{R}$, una curva diferenciable, hacemos

$$c^{\prime} \equiv \{(t, c_0(\hat{t} + I_{\mathbb{R}}) / R^M_{c(t)}) \mid t \in I\} \in \prod_{t \in I} T_{c(t)}(M).$$

Algunos autores prefieren la notación $\dot{c}$, $\frac{dc}{dt}$, etc.

X_Φ Generador infinitesimal (campo vectorial) asociado al flujo Φ p. 26.

$\mathcal{N}_a$ Conjunto de vecindades de un punto $a \in E$ en un espacio topológico E. Con frecuencia se considera $E = \mathbb{R}$ y $a \equiv 0$ el cero, $\mathcal{N}_0$ son entonces las vecindades del origen.

ϕ Conjunto vacío.

$X^{F(i)}$ Si $X \in \prod_{q \in M} T_q(M)$ es un campo vectorial y M está modelada sobre V, $X^{F(i)} \in V^{[F(i)]^{\mathrm{Id}}(\mathcal{S}(i))}$ es la representación local de X en la carta $F(i)$:

$$X^{F(i)} \circ F(i) = \Xi^{F(i)} \wedge X .$$ p. 33.

ω, P : Forma simpléctica en una variedad simpléctica P.

f_* "Subestrella de f". Si $f \in N^M$ (M y N variedades) $f_*(q) \in \mathrm{Hom}(T_q(M), T_{f(q)}(N))$ está definido como

$$f_*(q)(\xi) = f \circ c / R^M_{f(q)} \qquad \forall\, q \in M, \xi \in T_q(M).$$

$\tilde{\theta}$, θ	1-forma y campo covectorial básicos en $T(M)^*$. Son esencialmente idénticos: $\tilde{\theta} \in \prod_{\alpha \in T(M)^*} \mathcal{A}_1^{ac}(T_\alpha(T(M)^*))$; $\theta \in \prod_{\alpha \in T(M)^*} \mathrm{Hom}(T_\alpha(T(M)^*), \mathbb{R})$ siendo $\mathcal{A}_1^{ac}(T_\alpha(T(M)^*)) \simeq \mathrm{Hom}(T_\alpha(T(M)^*), \mathbb{R})$ isomorfos, aunque se distinguen. $\theta(\alpha)(\xi(1)) = \tilde{\theta}(\alpha)(\xi)$ $\forall \xi \in T_\alpha(T(M)^*)^{\bar{1}}$, $\alpha \in T(M)^*$.
$\Lambda_K^{(S)}(M)$	Conjunto de K-formas de clase $C^{(S)}$ en M. Si $\omega \in \Lambda_K^{(S)}(M)$ entonces $\omega \in \prod_{q \in M} \mathcal{A}_K^{ac}(T_q(M))$ y $\omega^{F(i)} \in \mathcal{A}_K^{ac}(V)^{[F(i)](\xi(1))}$, su representación local, es de clase $C^{(S)}$.
$\omega^{F(i)}$	Representación local de ω, definida como $\omega^{F(i)}(F(i)(q))(v) \equiv \omega(q)\left(\sum_{i \in \bar{K}} \theta_i^{T_q(M)^{\bar{K}}}\left(\Xi_{(q)}^{F(i)^{-1}}(v(i))\right)\right)$ $\omega^{F(i)} \in \mathcal{A}_K^{ac}(V)^{[F(i)](\xi(1))}$.
$P_i^{(K)}$, $\Theta_i^{(K)}$	Para cada $q \in M$ $P_i^{(K)}(q) \equiv P_i^{T_q(M)^{\bar{K}}}$; $\Theta_i^{(K)}(q) \equiv \theta_i^{T_q(M)^{\bar{K}}}$ $\forall i \in \bar{K}$. Podemos escribir por ejemplo $\omega^{F(i)} = \left[\omega \circledcirc \left(\sum_{i \in \bar{K}} \Theta_i^{(K)} \circledcirc (\mathrm{inv}_\alpha \Xi^{F(i)}) \circledcirc \dot{P}_i^{V^{\bar{K}}}\right)\right] \circ F(i)^{-1}$
$\overset{*}{T}(h)$	Levantamiento de $h \in Q^M$ a $T(Q)^{T(M)}$ p. 41.
$X \lrcorner\, \omega$	Producto interior de un campo X con una K-forma resultando una K-1 <u>forma</u> $X \lrcorner\, \omega = \omega \circledcirc \left(\Theta_1^{(K)} \cdot X + \sum_{i \in \overline{K-1}} \Theta_{i+1}^{(K)} \circledcirc P_i^{(K-1)}\right)$ Se le conoce también como la contracción de X con ω y se denota también como $i_X \omega$. Si ω es una 2-forma simpléctica y X un campo Hamiltoniano, la 1-forma $X \lrcorner\, \omega$ es exacta, i.e. es la derivada de una 0-forma (función) llamada Hamiltoniano del campo X.

Υ	(Ipsilon) Función inducida por un campo tensorial de orden 2, i.e. un elemento en $\prod_{q\in M} L_2^{ac}(T_q(M))$, entre los diversos espacios tangentes y sus duales topológicos; así $$\Upsilon \in \prod_{q\in M} \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R})).$$ Dos casos de interés ocurren cuando el campo tensorial es una pseudométrica de Riemann (secc. 2.4) o una forma simpléctica (p.p. 45, 60).
$\mathcal{L}$	$$\mathcal{L} \equiv (\Upsilon \circ \rho) \wedge I_{T(M)} \in T(M)^{*T(M)}$$ Transformación inducida en los haces. por un campo tensorial de orden 2. Cuando se trata de una métrica de Riemann, $\mathcal{L}$ se conoce como una transformación de Legendre.
$d\omega$, $\mathfrak{d}f$	$d\omega$ denota la derivada exterior de una k-forma ω ($k\geq 0$). Para una 0-forma f, se tiene $\mathfrak{d}f$ un campo covectorial, relacionado con la 1-forma df por $$df = \mathfrak{d}f \circledcirc P_1^{(4)}$$ (véase la nota referente a $\tilde{\theta}$ y θ).
$[X, Y]$	Paréntesis de Lie de campos p. 46.
$\mathfrak{X}^{(s)}(M)$	Campos vectoriales de clase $C^{(s)}$ en M.
$\mathcal{H}^{(s)}(P)$	Campos vectoriales Hamiltonianos en una variedad simpléctica P, p. 46
$\mathcal{P}^{(s)}(P)$	Funciones Hamiltonianas. p. 46
$\{f, g\}$	Paréntesis de Poisson
X_H, H_X	X_H es un campo Hamiltoniano con Hamiltoniano H y H_X es un Hamiltoniano de un campo Hamiltoniano X.

$D_X \omega$ — Derivada de Lie de una k-forma ω respecto a un campo X. $D_X\omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega)$ p. 47.

$f^*\omega$ — Si $f \in N^M$ y $\omega \in \Lambda_K(N)$, $f^*\omega \in \Lambda_K(M)$ y

$$(f^*\omega)(q)(\xi) = \omega(f(q))\Big(\sum_{i\in\bar{K}} \theta_i^{T_{f(q)}(M)^{\bar{K}}} \big(f_*(q)(\xi(i))\big)\Big)$$

$\forall\ \xi \in T_q(M)^{\bar{K}}$, $q \in M$. $f^*\omega$ es el "retroversor" de ω

f^*X — Si $f \in N^M$ es un difeomorfismo y $X \in \mathfrak{X}(N)$ f^*X es el retroversor de X y

$$(f^*X)(f^{-1}(p)) = (f^{-1})_*(p)(X(p))$$

$\alpha \otimes \beta$ — Producto tensorial de formas

$\alpha \wedge \beta$ — Producto exterior de formas. También llamado "producto cuco"

$\overset{*}{T}(Y)$ — Levantamiento de un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ al haz cotangente $\overset{*}{T}(Y) \in \mathfrak{X}(T(M)^*)$

$\mathcal{P}(Y)$ — Hamiltoniano de $\overset{*}{T}(Y)$, también conocida como función momento del campo $\underline{Y}$.

$(G)'_1$, $(G)'_2$ — Si $G \in W^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i}$ (V_i, W espacios normados)

$(G)'_i \equiv G' \circledcirc \overset{-}{\theta}_i^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \in \mathrm{Hom}(V_i, W)^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i}$ es la diferencial parcial i-ésima $\forall\, i \in \bar{2}$.

$(G)^{(2)}_{ij}$ — Denota la 2ª parcial ij-ésima definida por

$$(G)^{(2)}_{ij} \equiv ((G)'_i)'_j \in \mathrm{Hom}(V_j, \mathrm{Hom}(V_i, W))^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i}.$$

λ — Mapeo reflexivo, $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}))$

inv — Si H es una función tal que para cada $q \in H$, $H(q)$ es una función invertible, $\mathrm{inv}\, H \equiv \{(q, H(q)^{-1}) \mid q \in M\}$ inv es el "inversor".

INV	Inversor en la estructura vectorial $\mathrm{INV}(f) = f^{-1} \quad \forall\, f \in \mathrm{Hom}(v,w)$ invertible. Siendo v, w espacios normados
$GL(v,w)$	Funciones lineales continuas invertibles en $\mathrm{Hom}(v,w)$.
FL	Derivada fibrada de $L \in \Lambda(T(M))$ p. 58.
$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_{ab}$	$\tilde{\mathcal{B}}$ Denota una pseudométrica de Riemann y $\mathcal{B}_{ab}$ son sus componentes en alguna base. P. 61.
A_L, E_L	Acción de L, Energía de L. p. 63.
$\frac{\partial}{\partial q}$, $\frac{\partial}{\partial \dot{q}}$	Notación especial para los campos vectoriales básicos en $T(M)$ modelada sobre $\mathbb{R}^{2m}$ p. 70.
K, T	Energía cinética en $T(M)$ y $T(M)^*$ respectivamente. $K \in \mathbb{R}^{T(M)}$, $T \in \mathbb{R}^{T(M)^*}$
x, y, z	Componentes de la carta identidad en $M = \mathbb{R}^{\bar{3}}$.
$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	Componentes de la carta $T'(I_{\mathbb{R}^{\bar{3}}})$ en $T(M)$ modelada sobre $\mathbb{R}^{\bar{6}}$.
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, P_x, P_y, P_z	Componentes de la carta $\overset{*}{T}{}'(I_{\mathbb{R}^{\bar{3}}})$ en $T(M)^*$ modelada sobre $\mathbb{R}^{\bar{6}}$.
q, $\dot{q}$	Componentes de la carta $T'F(i)$
q, p	Componentes de la carta $\overset{*}{T}{}'F(i)$

1.1 ESPACIO DE CONFIGURACION. ESPACIO DE ESTADOS.

La diferencia fundamental entre la Física y la Matemática radica en el tipo de objetos con los que cada disciplina trata. Aún cuando esta observación resulta por demás obvia, los planteamientos usuales de las diversas Teorías Físicas que se presentan en los textos resultan generalmente obscuros por el descuido de esta observación.

En la rama de la Física- Matemática, se hace necesario ante todo, hacer una distinción clara entre los objetos de la realidad que cada Teoría Física describe y la estructura formal que se plantea como descriptora de dicha realidad. En segundo término, es necesario establecer el vínculo entre los objetos de la realidad y los objetos de la estructura formal, con el objeto de que las predicciones o resultados de la teoría sean suceptibles de interpretarse en la realidad. Esto trae consigo un estrecho vínculo realidad - formalismo presente en toda Teoría Física, y que de hacer caso omiso de éste, se presenta la posibilidad de confundir objetos descritos con objetos descriptores, planteándose un panorama pobre para el entendimiento claro de los conceptos físicos y su disposición dentro de la Teoría Física.

Dado el desarrollo de la Matemática moderna, se hace necesario replantear este vínculo realidad - formalismo a la luz de los nuevos conceptos matemáticos, con el propósito de exhibir un desarollo lógicamente consistente de cada Teoría Física. Esto trae como consecuencia, casi inevitablemente, la omisión de los aspectos históricos de la evolución de los conceptos tanto físicos como formales.

Cada Teoría Física trae consigo cierto formalismo en su planteamiento y ésto en parte determina la riqueza o limitación de la realidad que describe (por otra parte las limitaciones propias que cada teoría impone sobre los objetos de su interés delimitan esta descripción). Esta clase de objetos o sistemas en la realidad, capaces de ser descritos por determinada teoría es lo que convenimos en llamar la "realidad accesible" a la teoría. Así pues, los objetos de la realidad accesible a cada Teoría Física admiten una descripción en términos de un formalismo específico, adoptado implícita o explícitamente en su formulación.

Aún cuando la realidad accesible a dos teorías posean objetos comunes, no es inmediato plantear la incompatibilidad o consistencia de ambas teorías en términos de esta realidad común, debido a que las descripciones formales (y por tanto su interpretación física) son en general diferentes.

E n las siguientes secciones daremos un planteamiento de la Mecánica Analítica , en el que se intenta hacer ver la importancia de los puntos que hemos señalado con anterioridad. El planteamiento formal que daremos de esta teoría será en el marco de las variedades diferenciables, y la razón de ello radica en que nos brinda una estructura suficientemente rica para describir una gran variedad de fenómenos de su realidad accesible. Esta estructura matemática incluso supera el campo de la Mecánica Analítica, pues el mismo tratamiento sistemático es aplicable en otras ramas. Aún cuando esto parece tentador, lo hemos omitido por estar fuera de los propósitos de la presente tesis.

En nuestro planteamiento de la Mecánica Analítica el concepto de variedad diferenciable es de fundamental importancia pues en el se apoya su formalismo. Ya que habremos de hacer referencia a esta noción, es conveniente dar una definición precisa(1).

1.1 <u>DEFINICION</u>. Sean M un conjunto, V un espacio vectorial normado sobre R, y $n \in Z^{+} \cup \{0\}$.

Si existe $f \in P(M)^{I}$ y $F \in \prod_{i \in I} V^{f(i)}$,siendo I algún conjunto de índices, tales que:

a) $\bigcup_{i \in I} f(i) = M$

b) $(F(i))^{id}(f(j) \cap f(i)) \in \tau_V \quad \forall i,j \in I$

c) $F(i)$ es inyectiva $\forall\, i \in I$

d) $F(i) o F(j)^{-1} \in C^{n}(F(j)^{id}(f(j) \cap f(i))) \quad \forall\, i,j \in I.$

decimos que F es un atlas de M de clase C^n en V y a los términos de la familia $\{F(i) \,/\, i \in I\}$ se les llama cartas de F.

Considerando al conjunto de todos los atlas de M de clase C^n en V, al cual denotamos por $\mathbb{A}^{(n)}_{(M,V)}$, se define una relación $R^{n}_{(M,V)}$ en $\mathbb{A}^{(n)}_{(M,V)} \times \mathbb{A}^{(n)}_{(M,V)}$, haciendo

$(F,G) \in R^{n}_{(M,V)}$ si

1) $F(i)^{id}(f(i) \cap g(j)) \in \tau_V$, $\forall\, i \in I_F$, $\forall\, j \in I_G$

2) $F(i) o G(j)^{-1}$ y $G(j) o F(i)^{-1}$ son de clase C^n $\forall\, i \in I_F$ $\forall\, j \in I_G$

la cual resulta ser una relación de equivalencia en $\mathbb{A}^{(n)}_{(M,V)}$.

---

(1) Véase (13) pags. 58-62.

A l adoptar una clase de equivalencia $\alpha^n_{(M,V)} \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)} / R^n_{(M,V)}$, decimos que $(M, \alpha^n_{(M,V)})$ es una variedad diferenciable(i) de clase C^n en V y en tal caso diremos, abusando de la notación , que M es una variedad diferenciable de clase C^n modelada sobre V.

Con el propósito de mantener un carácter general de la teoría que aquí se desarrolla y la posibilidad de extender este tratamiento formal a otras Teorías Físicas (como Mecánica de Fluídos o Electromagnetismo), todos nuestros resultados se basan en la consideración de variedades diferenciables modeladas sobre espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$, de dimensión arbitraria(ii) , y solo en casos específicos habremos de suponer que los espacios son de dimensión finita.

Empezaremos por establecer el vínculo entre el formalismo de la Mecánica Analítica y su realidad accesible.

Cuando un observador considera un sistema físico en la realidad, cuya posición pretende describir en el tiempo(iii), deberá ante todo adoptar un procedimiento experimental que determine la posición (configuración) del sistema respecto a su sistema de referencia. Para ello requiere de la elección de un conjunto, digamos M, que represente los valores posibles que obtendría (directa o indirectamente) como consecuencia de ejecutar el procedimiento experimental adoptado para determinar su posición.
Puesto que el sistema físico en consideración es en principio arbitrario, no existe un método canónico de hacer ésto(iv) ; entonces, dependiendo del observador, éste elige un procedimiento experimental y al conjunto M que considere suficiente para describir la posición del sistema físico respecto a su sistema de referencia en todo instante.

En la presentación que aquí adoptamos, suponemos que el conjunto M siempre admite una estructura de variedad diferenciable de clase C^2 (la justificación aparecerá más adelante) y se le denomina espacio de configuración.

En base a lo anterior, el espaio de configuración es una descripción de la región de la realidad accesible al sistema físico de interés, y hacemos énfasis en que esta representación involucra un procedimiento específico de descripción.

(i) En general el término diferenciable se aplica cuando $n \geq 1$.
(ii) En ocasiones será necesario suponer que el espacio de modelación es un espacio de Banach. Cuando esta condición sea requerida, la haremos explícita.
(iii) Esto delimita en parte los sistemas físicos de interés para la Mecánica a aquéllos en los que se requiere describir su posición.
(iv) En el capítulo III veremos algunos ejemplos.

Otra suposición básica de la Mecánica Analítica consiste en que dado un espacio de configuración M asociado a un sistema físico, el haz cotangente del espacio de configuración, $T(M)^*$, contiene toda la información mecánicamente relevante del sistema, razón por la cual se le llama espacio de estados.

La justificación de esta última suposición fundamental que se presenta en los textos(i), de ninguna manera es clara, y en la mayoría de los casos se omite.
En términos matemáticos, cuando el espacio de configuración es una variedad de clase C^n con $n \geq 2$, obtenemos que $T(M)^*$ hereda una estructura de variedad diferenciable de clase C^{n-1}, y en tal caso podemos dotar a $T(M)^*$ de una estructura simpléctica en una forma canónica, lo cual es fundamental en la Mecánica de Hamilton.(ii)

Como un ejemplo de las dificultades que existen para justificar la suposición mencionada respecto al espacio de estados, exhibiremos brevemente la situación de la Mecánica de Newton. Para ello, en primer lugar mostraremos por qué ciertos conceptos son los mecánicamente relevantes para la descripción de la realidad accesible a la Mecánica de Newton. Hecho ésto, habremos de ver que, formalmente, esta presentación es consistente con la presentación más general de la Mecánica Analítica.(iii)
Cabe hacer énfasis en que todas las dificultades que se presenten para justificar al haz cotangente como el espacio de estados de los sistemas físicos de interés para la Mecánica de Newton, habrán de presentarse en los sistemas físicos de interés para la Mecánica Analítica.

Concientes de las dificultades que existen para dar un planteamiento consistente de la Mecánica de Newton - a pesar de los esfuerzos que aparecen ocasionalmente para resolver esta situación(iv) daremos una presentación que creemos suficientemente coherente como para tratar los problemas antes mencionados con cierta claridad.

En la Mecánica de Newton tenemos una fuerte limitación: Los sistemas físicos de interés consisten fundamentalmente de un finito de cuerpos que pueden ser calificados como partículas; donde, desde luego, ésto depende del juicio del observador, de la escala adoptada, la precisión deseada, etc.(v)

(i) Véanse (8) pags 509-511; (10) pags 1-2.
(ii) Esto será tratado en las secciones 1 y 2 del capítulo II.
(iii) En la secc. 7 del cap. II veremos que ante sistemas físicos muy particulares, el planteamiento de la Mecánica Analítica resulta compatible con el Newtoniano.
(iv) Véase por ejemplo la referencia (5).
(v) Esto ejemplifica por qué la realidad accesible a cada Teoría Física no está perfectamente delimitada.

Ante esta situación, es claro que para cualquier elección de sistema de referencia, es suficiente tomar a $M \equiv R^n$, como espacio de configuración (por comodidad consideraremos el caso de una partícula, de modo que $M \equiv R^3$.)
Veamos como se plantean los conceptos "mecánicamente relevantes" para este tipo particular de sistemas físicos.

Consideremos tres sistemas de referencia S, S´y S´´con mismos patrones de longitud y tiempo, relojes sincronizados, ejes perpendiculares e igualmente orientados(i). Los sistemas S, S´y S" son tales que los orígenes de S´ y S" coinciden en todo momento; los ejes de S y S" se mantienen siempre paralelos; los ejes de S y S" se rotulan de tal forma que el eje i-ésimo de S sea paralelo al eje i-ésimo de S" (véase fig. 1)

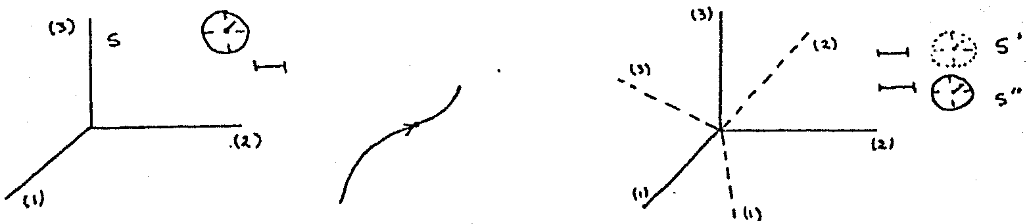


FIG. 1

Si adoptamos en cada uno de los sistemas el método cartesiano para describir puntos de la realidad, obtenemos que las funciones de posición de una partícula, desde cada uno de los sistemas están relacionadas según la expresión(ii)

$$r = r_o + R \wedge r' \in (R^3)^A \qquad \ldots (1.1)$$

donde $A \subseteq R$ corresponde al intervalo de tiempo en el que se describe la función de posición de la partícula.

$r \in (R^3)^A$ corresponde a la función de posición de la partícula desde el sistema S.

$r_o \in (R^3)^A$ corresponde a la función de posición del origen de S´desde el sistema S.

$r' \in (R^3)^A$ corresponde a la función de posición de la partícula desde el sistema S´.

$R \in Hom(R^3, R^3)^A$ nos brinda para cada $t \in A$, la descripción de puntos des de S" a partir de su descripción desde S´(de hecho R(t) es una rotación para cada $t \in A$).

(i) Podríamos orientarlos mediante la regla de la mano derecha dado que los sistemas están en la realidad.
(ii) Véase ref. (15).

Si el modelo de las funciones de posición r, r_o , r' son tales que permiten la existencia de sus segundas derivadas y el movimiento del sistema S´ respecto a S" es tal que D^2R existe, obtenemos de (1.1) que(i)

$$Dr = Dr_o + R \wedge Dr' + DR \wedge r' \qquad \ldots (1.2)$$

$$D^2r = D^2r_o + 2DR \wedge Dr' + D^2R \wedge r' + R \wedge D^2r' \qquad \ldots (1.3)$$

La expresión (1.2) nos brinda la relación entre las descripciones de la velocidad de la partícula descrita desde S y S´; la expresión (1.3) nos da la relación entre las aceleraciones, y es claro que incrementando el orden de derivación de la expresión (1.3), cuando es posible, se complica la relación entre las derivadas del correspondiente orden de las funciones de posición.

Para obtener una relación sencilla entre las derivadas de las funciones de posición con un movimiento no trivial de los sistemas de referencia,(ii) basta hacer $Dr_o = \bar{k}$ y $DR = 0$. Esto es, el orígen del sistema S´ se mueve con velocidad constante respecto a S y S" no rota respecto a S".

Con este movimiento entre los sistemas, la expresión (1.3) se reduce finalmente a(iii)

$$D^2 r = R \wedge D^2 r' = R(t) o D^2 r' \quad \text{con } t \in A \qquad \ldots (1\text{-}4)$$

En otras palabras; la aceleración de una partícula resulta invariante (hasta una rotación) ante dos sistemas de referencia que satisfacen:

1) Los patrones de longitud y tiempo utilizados son iguales.
2) Los relojes están sincronizados.
3) Los ejes son perpendiculares en cada sistema.
4) La orientación de los ejes es la misma.
5) La descripción se hace mediante el método cartesiano.
6) El orígen de un sistema se mueve con velocidad constante respecto al segundo

---

(i) Las condiciones para la existencia de las derivadas de las expresiones (1.1) y (1.2) puede verse en la ref (13) pag. 21:

(ii) El movimiento mas trivial sería el reposo relativo.

(iii) Ante estas condiciones, claramente podríamos orientar los ejes de S y S", de tal suerte que los ejes respectivos coincidieran: $R(t) = I_{Hom(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)}$; obteniendo entonces que $D^2r = D^2r'$. En tal caso la expresión (1.1) se reduce a: $r = I_{\mathbb{R}} Dr_o(t) + r'$, que se conoce como la transformación de Calileo.

7) La rotación de los sistemas no cambia con el tiempo.

De entre todos los sistemas de referencia, las propiedades (1) a (7) caracterizan a diversas clases de sistemas de referencia, y para cada clase, la aceleración de una partícula resulta invariante hasta una rotación en cada sistema de referencia dentro de dicha clase. En otros términos, para describir la aceleración de una partícula, todos los sistemas de referencia dentro de una clase son equivalentes, lo cual resulta relevante para la descripción de su movimiento.

Si tomamos un sistema de referencia específico desde el cual el sol mantenga un movimiento uniforme (velocidad constante) y cuyos ejes mantengan cierta orientación respecto a las estrellas, generamos con las propiedades (1) a (7) a una clase de sistemas de referencia que se conviene en denominar "sistemas de referencia inerciales" (i). Desde esta clase de sistemas decimos que el "estado natural de movimiento" de las partículas es el que corresponde a un movimiento uniforme.

Puesto que movimiento uniforme y aceleración nula son conceptos equivalentes, se sigue por lo antes expuesto, que esta noción de estado natural de movimiento es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales.

En la presentación que aquí adoptamos, un sistema de referencia inercial no tiene un carácter especulativo sino bien concreto, a diferencia de la concepción Newtoniana de sistema de referencia inercial (aunque no en esta terminología) que se apoya en la noción de un espacio y tiempo absolutos...

La afirmación de que el movimiento natural de una partículadesde un sistema de referencia inercial es el movimiento uniforme, no es un resultado experimental sino más bien una definición.
Esta afirmación no es una ley física pues si lo fuera, sostendría como válida experimentalmente una correlación específica entre conceptos previamente definidos (ii); sin embargo, en este caso no se tienen nociones independientes de movimiento natural y movimiento uniforme.

Claramente podrían adoptarse otras definiciones de movimiento natural, y en cualquier caso, el afirmar que tal movimiento es el natural, sugiere que si el movimiento de una partícula no es ése, existe alguna razón por la cual su estado de movimiento no es el que "debería". Así pues, la afirmación de que el estado natural de movimiento es el movimiento uniforme, en realidad corresponde a una noción particular de lo que es natural o no; en síntesis, se trata de una posición filosófica.

(i) Esta definición de sist. inercial no es única. Véase p. ej. (24) pag.5
(ii) Existen corrientes que difieren francamente de esta concepción de ley física. Véase (23) pag. 71.

La no naturalidad del movimiento de una partícula se considera como equivalente a la existencia de alguna causa que provoca que su movimiento no sea uniforme, es decir acelerado. Por lo anterior, la aceleración de una partícula es el efecto que registramos como indicio de la presencia de alguna causa y a esta causa es a lo que se conviene en denominar fuerza que actúa sobre la partícula.

Esta definición cualitativa de fuerza que se apoya en: 1) nuestra posición "causalista", 2) en la consideración de los sistemas de referencia inerciales y 3) en la definición de lo que para nosotros es movimiento natural, puede enunciarse parcialmente en el siguiente enunciado que se conoce como la primera ley de Newton o ley de inercia:

" Todo cuerpo continúa en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en línea recta a menos de que sea obligado a cambiar ese estado por fuerzas impresas en él "

Del planteamiento que hemos dado parte toda la Mecánica de Newton, pues de la observación del movimiento de una partícula (aceleración) podemos concluir si su estado de movimiento es el natural o no, y en caso negativo proceder a la búsqueda de las causas (fuerzas) que provocan dicho efecto.

Ahora bien, observamos que ante medios ambientes distintos, una partícula se comporta en general distinto y aún ante un medio ambiente específico, dos partículas se comportan de modo diferente.
De la primera observación concluimos que el origen de las causas es el medio ambiente en el que la partícula está inmersa; la segunda observación sugiere que existe alguna propiedad intrínseca a cada partícula que determina su respuesta ante un medio ambiente específico. Por tanto, debemos ante todo cuantificar dicha respuesta antes de buscar una definición cuantitativa de las causas.

Para ello, elijamos un sistema de referencia inercial S, una partícula patrón y un experimento patrón (i.e un medio ambiente específico) tal, que dos partículas cualesquiera sujetas a tal procedimiento experimental con las mismas condiciones iniciales de posición y velocidad tengan aceleraciones paralelas, del mismo sentido y cuyo cociente de las magnitudes sea constante. Entonces, definimos la masa inercial de cualquier partícula como

$$m = \frac{\| \, \| \circ D^2 r_p}{\| \, \| \circ D^2 r}$$

donde r_p y r son las funciones de posición de la partícula patrón y de la partícula en cuestión con las mismas condiciones iniciales.

Observemos que la masa inercial asociada a cualquier partícula depende no solo de los patrones utilizados, sino también del sistema de referencia utilizado para su definición. Si deseamos cierta invariancia de la masa inercial, al menos para la clase de los sistemas de referencia inerciales, es necesario requerir que el dispositivo experimental esté en movimiento uniforme(i) desde el sistema de referencia en consideración. De esta forma la masa inercial, que se ha definido en términos de la aceleración, resulta invariante en todos los sistemas de referencia inerciales.

La masa de una partícula es una característica cuantitativa de su respuesta ante un medio ambiente específico: A mayor masa menor aceleración (menor efecto mecánico); a menor masa, mayor aceleración (mayor efecto mecánico). Es decir, la masa nos permite relacionar cuantitativamente el efecto mecánico sobre una partícula con respecto a un medio ambiente específico. Esta es la razón por la cual algunos autores afirman que la masa es una medida de la inercia de la partícula.

La relevancia de la masa como concepto mecánico estriba en que mediante ésta es posible distinguir el comportamiento dinámico (i.e. ante la presencia de causas) de dos partículas; además, la masa de una partícula nos permite definir cuantitativamente la fuerza (interacción) sobre ésta:
Si r es la función de posición de una partícula de masa inercial m desde un sistema de referencia inercial, la fuerza sobre la partícula se define como

$$\text{fuerza} \equiv m\, D^{(2)}r$$

Claramente esta definición cuantitativa de fuerza es compatible con su definición cualitativa dada con anterioridad, e implícitamente define las causas que provocan la alteración del estado natural de movimiento de una partícula. Naturalmente la forma explícita de la fuerza dependerá de las causas específicas a las que la partícula esté sujeta. En particular

---

(i) Podría suceder que la especificación del experimento requiriese que el dispositivo experimental estuviese en reposo desde el sistema de referencia en cuestión. En tal caso, si adoptamos el mismo procedimiento en otro sistema inercial que no esté en reposo relativo, necesariamente los experimentos son distintos (corresponden a eventos distintos). Sin embargo cuando se especifica que el dispositivo esté en movimiento uniforme, es posible definir la masa en ambos sistemas mediante el mismo experimento.

si dos partículas son sujetas al procedimiento experimental adoptado, con las mismas condiciones iniciales de posición y velocidad, se tiene que

$$m_1 D^{(2)} r_1 = m D^{(2)} r_2$$

dado que $m_1 D^{(2)} r_1 = D^{(2)} r_p$ y $m_2 D^{(2)} r_2 = D^{(2)} r_p$, donde r_p es la función de posición de la partícula patrón con las mismas condiciones iniciales. En esta situación la fuerza sobre cualquier partícula es la misma.

En la mayoría de los casos, la forma general de la interacción sobre una partícula es del tipo

$$\text{fuerza} = F \circ (\theta_1^{\prod_{i \in I} S_i} + \theta_2^{\prod_{i \in I} S_i} \circ (r \times Dr))$$

con $S_1 \equiv \mathbb{R}$, $S_2 \equiv (\mathbb{R}^3)^2$, $F \in (\mathbb{R}^3)^{\prod_{i \in I} S_i}$ y $r \times Dr \in ((\mathbb{R}^3)^2)^A$ es el producto cartesiano de la función de posición y la velocidad. Entonces para determinar la función de posición de la partícula es necesario resolver la ecuación diferencial

$$m D^{(2)} r = F \circ (\theta_1 + \theta_2 \circ (r \times Dr))$$

con ciertas condiciones iniciales dadas.(i)

En la Mecánica de Newton, las causas que afectan el estado natural de movimiento de una partícula, la fuerza, puede determinarse, al menos en principio, a partir de la observación de la función de posición de la partícula(ii) mediante un proceso de derivación y viceversa; conocidas las causas, es posible conocer la función de posición (y por tanto la velocidad de la partícula) si se conocen las condiciones iniciales de posición y velocidad. Esta última observación , muestra la naturaleza relevante de la posición y la velocidad de una partícula, además de su masa (que es lo que distingue en la Mecánica a una partícula de otra).

En resumen: Si elegimos un sistema de referencia inercial, podemos definir en forma única el estado de movimiento de una partícula si especificamos su masa, su posición y su velocidad a un instante dado. Esta información resulta suficiente (y necesaria) para describir la evolución del sistema en el tiempo, si además conocemos las causas que alteran su estado natural de movimiento. Por tanto podemos tomar a $S \equiv (\mathbb{R}^3)^2$ como el espacio de estados, donde cada $\alpha \in S$ corresponde al estado de movimiento de la partícula cuya posición es $\alpha(1)$ y su velocidad

(i) Las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de las soluciones puede verse en la ref. 8 pag. 271.
(ii) En realidad, a partir de la observación de un "ensamble" de sistemas.

es $\alpha(2)$ (conocida la masa de la partícula).

En el caso que nos ocupa de una partícula podemos mostrar la compatibilidad con el planteamiento de la Mecánica Analítica que ya hemos mencionado, como sigue:
Considerando a $M = \mathbb{R}^3$ como el espacio de configuración, podemos dotar a M de una estructura diferenciable (de clase C^∞) mediante la clase de equivalencia de los atlas en $\mathcal{A}^{(\infty)}(M, \mathbb{R}^3)$ que contiene al atlas $F = \{(M, I_{\mathbb{R}^3})\}$ cuya única carta es $I_{\mathbb{R}^3}$. Entonces el haz cotangente $T(M)^*$ hereda una estructura canónica de variedad diferenciable de clase $C^{(\infty)}$ (i) modelada sobre $\prod_{i=1}^{2} V_i$ con $V_1 = \mathbb{R}^3$ y $V_2 = (\mathbb{R}^3)^*$. Dado que $\prod_{i=1}^{2} V_i$ y $(\mathbb{R}^3)^2$ son espacios vectoriales isomorfos, podemos considerar otra estructura diferenciable en $T(M)^*$, llevándola a ser una variedad de clase C^∞ modelada sobre $(\mathbb{R}^3)^2$. Esto nos lleva a poder utilizar indistintamente a $T(M)^*$ o a $(\mathbb{R}^3)^2$ como espacio de estados, lo cual nos muestra que suponer a $T(M)^*$ como el espacio de estados es compatible con el planteamiento de la Mecánica de Newton. (ii)

La clase de sistemas físicos en consideración -partículas- es lo que nos ha permitido dar una justificación parcial de tomar el haz cotangente como el espacio de estados. Dada la generalidad de los sistemas físicos de interés para la Mecánica Analítica, es difícil decir qué conceptos resultan mecánicamente relevantes para cualquiera de ellos, y con ésto mostrar si el haz cotangente del espacio de configuración es capaz de contener esta información.

En nuestro planteamiento de la Mecánica Analítica admitiremos esta suposición como un primer postulado fundamental que delimita parcialmente la realidad accesible a ésta teoría, es decir nos brinda características necesarias para admitir un sistema físico como mecánico.

M.A.1 Para todo sistema mecánico es posible encontrar un espacio de configuración M que admite una estructura de variedad diferenciable de clase C^k con $k \geq 2$ y el espacio de estados viene dado por el haz cotangente $T(M)^*$ (con la estructuructura usual de variedad de clase C^{k-1}).

(i) En este caso puede mostrarse la existencia de un atlas con única carta. Véase sección 1.2.
(ii) Más adelante (secc. 2.8) veremos que la compatibilidad es más amplia cuando el espacio de configuración es una variedad Riemanniana.

1.2. HAZ TANGENTE Y HAZ COTANGENTE A UNA VARIEDAD.

Dada la relevancia que presentan el haz tangente y el haz cotangente del espacio de configuración en nuestro planteamiento de la Mecánica Analítica, resulta conveniente resumir brevemente sus propiedades. No pretendemos ser exhaustivos en el tema sino tan solo tener al alcance los antecedentes necesarios para las secciones posteriores. El lector familiarizado com las variedades diferenciables, haces vectoriales, etc., puede omitir esta sección, aunque cabe notar que la presentación que aquí adoptamos difiere ligeramente de la presentación usual en la literatura.

Empezaremos por definir el espacio tangente a un punto de una variedad diferenciable. Buscando cierta generalidad optamos por su definición en términos de clases de equivalencia de curvas (esta definición es aplicable a varidades de dimensión arbitraria y clase de diferenciabilidad finita (i)).
Consideremos una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)})$ con $n \geq 1$, y cualquier $p \in M$. Haciendo

$$C_p \equiv \{ c \in M^V / \ U \in \mathcal{N}_0 ; \ c(0) = p ; \ c \text{ diferenciable en } U \subseteq \mathbb{R} \}$$

definimos una relación de equivalencia en C_p, haciendo

$$R_p^M \equiv \{ (c,d) \in C_p \times C_p \ / \ D(F_{(i)} \circ c)(0) = D(F_{(i)} \circ d)(0) \}$$

donde $F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$ y $p \in f_{(i)}$, la cual resulta independiente del atlas elegido en $\mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$.(i)

Las clases de equivalencia generadas por R_p^M, C_p / R_p^M, se denominan vectores tangentes a M en p. Es decir, un vector tangente a M en p es un conjunto de curvas, tales que la derivada de $F_{(i)}$ a lo largo de cualquiera de ellas es la misma en el punto p.
Podemos hacer que C_p / R_p^M sea un espacio vectorial normado considerando un atlas cualquiera $F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$ y algún $i \in I_F$ tal que $p \in f_{(i)}$.
En efecto, definiendo a

$$\Xi^{F(i)}_{(p)} \equiv \{ (\xi , D(F_{(i)} \circ c)(0)) \in C_p/R_p^M \times V \ / \ c \in \xi \} \in V^{C_p/R_p^M}$$

es fácil ver que $\Xi^{F(i)}_{(p)}$ es una biyección, donde para cada clase de curvas $\xi \in C_p/R_p^M$, $[\Xi_{(p)}](\xi)$ es precisamente el valor común de

(i) Véase (13) pags. 66- 72.

$D(F(i)\circ c)(0)$ para todas las curvas $c \in \xi$. La estructura de espacio vectorial normado de C_p/R_p^M (i) es la única que hace a $\Xi_{(p)}^{F(i)}$ un isomorfismo isométrico; es decir

$$\Xi_{(p)}^{F(i)} \in L(C_p/R_p^M, V) \quad y \quad \| \, \|^{F(i)}_{C_p/R_p^M} = \| \, \|_V \cdot \Xi_{(p)}^{F(i)}$$

de lo cual resulta que $\Xi_{(p)}^{F(i)} \in Hom(C_p/R_p^M, V)$.

Puede demostrarse (i) que la estructura de espacio vectorial dada a C_p/R_p^M no depende de la carta, ni del atlas elegido en $\mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$ y la estructura de espacio normado resulta la misma hasta normas equivalentes (en otras palabras, la estructura de espacio vectorial topológico resulta independiente del atlas y la carta elegida).

Al conjunto C_p/R_p^M con esta estructura de espacio vectorial (topológico) se denota por $T_p(M)$ y se denomina espacio tangente a M en p.

Para cada $p \in M$ definimos EL ESPACIO COTANGENTE EN p como

$$Hom(T_p(M), \mathbb{R}) \equiv \{ z \in \mathbb{R}^{T_p(M)} \, / \, z \text{ lineal y continua} \}$$

con la estructura usual de espacio vectorial(topológico).

Obsérvese que una condición necesaria y suficiente para que $z \in Hom(T_p(M), \mathbb{R})$, es que para alguna norma en $T_p(M)$ dada en términos de una carta, digamos $\| \, \|^{F(i)}_{T_p(M)}$, z satisfaga la condición de Lipschitz:

$$| \, | \circ z \leq k \, \| \, \|^{F(i)}_{T_p(M)} \quad \text{para alguna } k \in \mathbb{R}^1$$

lo cual es sencillo de demostrar dada la equivalencia de las normas $\{ \| \, \|^{F(i)}_{T_p(M)} \, / \, p \in S(i) \}$. En el caso en que M sea de dimensión finita, puede demostrarse que si $z \in \mathbb{R}^{T_p(M)}$ y es lineal, entonces z es continua, por lo que

$$Hom(T_p(M), \mathbb{R}) = L(T_p(M), \mathbb{R})$$

Una vez construidos el espacio tangente y el espacio cotangente en cada punto de la variedad, podemos proceder a la construcción de las variedades apropiadas para la descripción de los sistemas mecánicos.

Considerando a $T(M) \equiv \bigcup_{p \in M} T_p(M)$; o sea, el conjunto de todos

(i) Op. Cit.

los vectores tangentes a la variedad en todos los puntos de ésta, podemos dar a $T(M)$ una estructura de variedad diferenciable en forma canónica, de la siguiente manera:

Si definimos a la proyección canónica en $T(M)$:

$$\rho \equiv \{(\xi, q) \in T(M) \times M \,/\, \xi \in T_q(M)\} \in M^{T(M)}$$

podemos construir una cubierta de $T(M)$ mediante algún $F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$, haciendo $$Tf \equiv \{(i, \rho^{\leftarrow}(\xi(i))) \,/\, i \in I_F\} \in \mathcal{P}(T(M))^{I_F}$$
El que $T(M) = \bigcup\limits_{i \in I_F} t(i)$ se sigue de la suprayectividad de ρ y de que $M = \bigcup\limits_{i \in I_F} \xi(i)$.

Ahora, para cada $i \in I_F$ podemos definir a

$$TF(i) \equiv T(i) \equiv \Theta_1^{V^{\bar{2}}} \circ F(i) \circ \rho + \Theta_2^{V^{\bar{2}}} \circ ((\Xi^{F(i)} \circ \rho) \vartriangle I_{T(M)}) \in (V^{\bar{2}})^{T\xi(i)}$$

obteniendo que $TF \equiv T$ es un atlas de clase $C^{(n-1)}$ en $V^{\bar{2}}$, como puede verificarse de las igualdades (i)

$$T(j)^{-1} = ((\mathrm{inv} \vartriangle \Xi^{F(j)}) \circ F(j)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar{2}}}) \vartriangle P_2^{V^{\bar{2}}}$$

$$T(i) \circ T(j)^{-1} = \Theta_1^{V^{\bar{2}}} \circ F(i) \circ F(j)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar{2}}} + \Theta_2^{V^{\bar{2}}} \circ (((F(i) \circ F(j)^{-1})' \circ P_1^{V^{\bar{2}}}) \vartriangle P_2^{V^{\bar{2}}})$$

Si $\mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M),V^{\bar{2}})}$ denota a la clase de equivalencia del atlas así construído (ii), $(T(M), \mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M),V^{\bar{2}})})$ resulta ser una variedad diferenciable de clase $C^{(n-1)}$ modelada sobre $V^{\bar{2}}$ a la cual llamamos HAZ TANGENTE A LA VARIEDAD M (iii).

El haz cotangente a la variedad M se construye de una manera análoga. Haciendo $T(M)^* \equiv \bigcup\limits_{q \in M} \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R})$, basta considerar algún $F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$ y definiendo a

$$\overset{*}{T}f \equiv \{(i, \pi^{\leftarrow}(\xi(i))) \,/\, i \in I_F\} \in \mathcal{P}(T(M)^*)^{I_F}$$

donde π es la proyección canónica en $T(M)$:

$$\pi \equiv \{(\varsigma, q) \in T(M)^* \times M \,/\, \varsigma \in \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R})\} \in M^{T(M)^*}$$

y haciendo

$$\overset{*}{T}F(i) \equiv \overset{*}{T}(i) \equiv \Theta_1^{\prod\limits_{i \in \bar{2}} V_i} \circ F(i) \circ \pi + \Theta_2^{\prod\limits_{i \in \bar{2}} V_i} \circ (I_{T(M)^*} \circledcirc ((\mathrm{inv} \vartriangle \Xi^{F(i)}) \circ \pi)) \in \Big(\prod_{i \in \bar{2}} V_i\Big)^{\overset{*}{T}\xi(i)}$$

para todo $i \in I_F$, con $V_1 \equiv V$ y V_2 $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.

(i) La diferenciabilidad de orden superior de $T(i) \circ T(j)^{-1}$ puede verse en la ref. 16.
(ii) Puede demostrarse que la clase es independiente del atlas.
(iii) La nomenclatura proviene de que $T(M)$ es un ejemplo de lo que se conoce como un haz vectorial.

Puede verse que $T(M)^* = \bigcup_{i \in I_F} \overset{*}{T}f(i)$ y que $\overset{*}{T}F$ es un atlas para $T(M)^*$ de clase $C^{(n-1)}$ en $\prod_{i \in \bar{z}} V_i$. Esto último se sigue de las observaciones (i)

$$\overset{*}{T}(j)^{-1} = P_2^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} \circledcirc \left(\underline{\overline{H}}^{F(j)} \circ F(j)^{-1} \circ P_1^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} \right)$$

$$\overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(j)^{-1} = \theta_1^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} \circ F(i) \circ F(j)^{-1} \circ P_1^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} + \theta_2^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} \circ \left(P_2^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} \circledcirc \left((F(i) \circ F(j)^{-1})' \circ F(j) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} \right) \right)$$
$$\forall\, i, j \in I_F$$

Entonces, si consideramos a la clase de equivalencia (ii) $\mathcal{A}^{(n-1)}(T(M)^*, \prod_{i\in\bar{z}} V_i)$ que contiene al atlas $\overset{*}{T}F$ que hemos construído, resulta ser una variedad diferenciable de clase $C^{(n-1)}$ modelada sobre $\prod_{i\in\bar{z}} V_i$ a la cual denominamos <u>Haz cotangente</u> (iii) a la variedad M.

<u>Caso de dimensión finita</u> .- Cuando M es una variedad de dimensión finita, supondremos que el espacio de modelación es $\mathbb{R}^{\bar{m}}$ a menos de que especifiquemos lo contrario. En tal caso, si $F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M, \mathbb{R}^{\bar{m}})}$ tenemos que

$$F(i) = \sum_{a \in \bar{m}} F(i)_a \, \bar{\delta}^{(m)}_{(a)} \quad \forall\, i \in I_F \text{, donde } F(i)_a \equiv P_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circ F(i).$$

y los atlas TF Y $\overset{*}{T}F$ toman una forma particularmente sencilla.

$$TF(i) = \theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \circ \left(\sum_{a \in \bar{m}} F(i)_a \, \bar{\delta}^{(m)}_{(a)} \right) + \theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \circ \left(\sum_{a \in \bar{m}} \left((\mathcal{D}F(i)_a \circ f) \wedge I_{T(M)} \right) \bar{\delta}^{(m)}_{(a)} \right)$$

$$\overset{*}{T}F(i) = \theta_1^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} \circ \left(\sum_{a \in \bar{m}} F(i)_a \, \bar{\delta}^{(m)}_{(a)} \right) + \theta_2^{\prod_{i\in\bar{z}} V_i} \circ \left(\sum_{a \in \bar{m}} \left(I_{T(M)^*} \wedge \left(\partial_a^{F(i)} \circ \pi \right) \right) \bar{P}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \right)$$

$\forall\, i \in I_F$, donde

$$\partial_a^{F(i)} \equiv \left(inv \wedge \underline{\overline{H}}^{F(i)} \right) \wedge \bar{\delta}^{(m)}_{(a)} \in \prod_{q \in f(i)} T_q(M) \subseteq T(M)^{f(i)}$$

$$\mathcal{D}F(i)_a \equiv \bar{P}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circledcirc \underline{\overline{H}}^{F(i)} \in \prod_{q \in f(i)} Hom(T_q(M), \mathbb{R}) \subseteq T(M)^{*\, f(i)}$$

y para cada $q \in f(i)$, $\{ \partial_a^{F(i)}(q) \mid a \in \bar{m} \}$ y $\{ \mathcal{D}F(i)_a(q) \mid a \in \bar{m} \}$ generan bases de los espacios tangente y cotangente a M en q respectivamente.

Puesto que $\mathbb{R}^{\bar{m}}$ y $(\mathbb{R}^{\bar{m}})^*$ son isomorfos, podemos alternativamente dotar a $T(M)^*$ de una estructura de variedad diferenciable modelada sobre $(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}$ mediante

$$\hat{T}F(i) \equiv \hat{T}(i) \equiv \theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \circ \left(\sum_{a \in \bar{m}} F(i)_a \, \bar{\delta}^{(m)}_{(a)} \right) + \theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \circ \left(\sum_{a \in \bar{m}} \left(I_{T(M)^*} \wedge \left(\partial_a^{F(i)} \circ \pi \right) \right) \bar{\delta}^{(m)}_{(a)} \right)$$

(i) La diferenciabilidad de orden superior de $\overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(j)^{-1}$ puede verse en la referencia (16)
(ii) Esta clase resulta independiente del atlas elegido.
(iii) Este es otro ejemplo de haz vectorial.

$\forall i \in I_F$ y tomando la clase de equivalencia del atlas $\overset{*}{I}F$ (bajo la relación $R^{(n+1)}_{(T(M)^*, (\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}})}$).

Dado que T(M) y T(M)* son variedades de dimensión finita, es posible modelar estos haces vectoriales sobre $\mathbb{R}^{\overline{2m}}$ con la consideración de los atlas $T'F$ y $\overset{*}{T}'F$ definidos como

$$T'F(i) \equiv T'(i) \equiv \sum_{a\in\bar{m}} F(i)_a \, \dot{\bar{\delta}}^{(m)}_{(a)} + \sum_{a\in\bar{m}} (dF(i)_a \circ \rho)_\wedge \, I_{T(M)} \, \dot{\bar{\delta}}^{(m)}_{(m+a)}$$

$$\overset{*}{T}'F(i) \equiv \overset{*}{T}'(i) \equiv \sum_{a\in\bar{m}} F(i)_a \, \dot{\bar{\delta}}^{(m)}_{(a)} + \sum_{a\in\bar{m}} \left(I_{T(M)^*} \wedge \left(\partial^{F(i)}_a \circ \pi\right)\right) \dot{\bar{\delta}}^{(m)}_{(m+a)}$$

$$\forall i \in I_F$$

1.3 EVOLUCION DE LOS SISTEMAS MECANICOS. CLASIFICACION.

Hemos visto que una vez planteado el espacio de configuración de un sistema mecánico - hasta el momento el único criterio que tenemos para clasificar a un sistema físico como mecánico, es el postulado M.A.1 -, su espacio de estados viene dado por el haz cotangente, y como naturalmente nos interesa la descripción de la evolución del sistema con el tiempo, esta descripción deberá hacerse en términos del haz cotangente del espacio de configuración. Aquí se plantea la siguiente suposición fundamental: Dado un sistema mecánico, su evolución a partir de un instante dado (que podemos llamar instante inicial) está unívocamente determinada por cada estado del sistema en dicho instante (los cuales pueden llamarse estados iniciales): es decir, para un sistema mecánico dado, suponemos que conocido su estado a un instante inicial, esta información es suficiente para determinar en forma única cualquier estado posterior. Esto significa que para cada sistema mecánico es posible plantear una función de evolución del estado del sistema

$$\varphi \in \prod_{t\in\mathbb{R}} (S^S)^{[t,\infty)} \qquad \text{con} \quad S \equiv T(M)^*$$

donde cada $t \in \operatorname{Dom}\varphi$ corresponde a un posible instante de tiempo a partir del cual se inicia la descripción del sistema y $[[\varphi(t_1)](t_2)](\alpha)$ corresponde al estado del sistema al instante t_2 cuando su estado al instante t_1 es α .

De acuerdo a ésto, la función φ nos permite describir tan solo el estado futuro del sistema una vez conocido su estado inicial, y el que $\operatorname{Dom}\varphi(t) = [t,\infty)$ nos dice que es posible describir <u>toda su evolución futura</u> a partir de un instante cualquiera t. Esta suposición puede parecer muy restrictiva para describir los sistemas mecánicos reales; sin embargo resulta útil, si tomamos en cuenta que φ es un modelo, i.e. una aproximación del comportamiento real del sistema.

Existen características adicionales de los sistemas mecánicos que podemos plantear en base a la función de evolución que los describe. La forma de expresar estas características son sugeridas por el siguiente argumento heurístico:

Consideremos tres instantes sucesivos de tiempo $t_1 < t_2 < t_3$. Supongamos que el estado del sistema al instante t_1 es α ; entonces los estados en los instantes posteriores t_2 y t_3 son $[[\varphi(t_1)](t_2)](\alpha)$ y $[[\varphi(t_1)](t_3)](\alpha)$ respectivamente, de acuerdo a la interpretación que hemos dado de φ . Si la descripción empezara al instante t_2 , el estado del sistema sería entonces $[[\varphi(t_1)](t_2)](\alpha)$; y $[[\varphi(t_1)](t_3)]([[\varphi(t_1)](t_2)](\alpha))$ sería el estado al instante t_3 . Si la evolución del sistema no depende del instante en el que se inicia la descripción, debe tenerse que

$$[[\varphi(t_1)](t_3)](\alpha) = [[\varphi(t_2)](t_3)]([[\varphi(t_1)](t_2)](\alpha))$$

Obsérvese que esta propiedad de la función de evolución es adicional, es decir; no se sigue de que un estado inicial determine en forma única a todo estado posterior, ya que aún cuando los estados $[[\varphi(t_1)](t_3)](\alpha)$ y $[[\varphi(t_2)](t_3)]([[\varphi(t_1)](t_2)](\alpha))$ son únicos, dado que φ es función, no son necesariamente iguales.

Esta propiedad (i) resulta de fundamental importancia en el planteamiento que damos de la Mecánica Analítica y nosotos la adoptaremos como nuestro segundo postulado fundamental:

M.A.2 .- Para todo sistema mecánico existe una función de evolución $\varphi \in \prod_{t \in \mathbb{R}} (SS)^{[t,\infty)}$ donde S es el espacio de estados con las siguientes propiedades:

1) $\varphi \wedge I_{\mathbb{R}} = \dot{\bar{I}}_S$

2) $\varphi(t_2) \circledcirc \overline{\dot{[\varphi(t_1)](t_2)}} = \varphi(t_1) \circ i_{[t_2,\infty)} \quad \forall\, t_1 \in \mathbb{R}, \forall\, t_2 \in [t_1,\infty)$

La propiedad (1) es consistente con laainterpretación que hemos dado a φ , pues si al instante t el estado del sistema es α , entonces $[[\varphi(t)](t)](\alpha)$ es el estado del sistema al instante t, es decir α ; luego $[[\varphi(t)](t)](\alpha) = [[\varphi \wedge I_{\mathbb{R}}](t)](\alpha) = [[\dot{\bar{I}}_S](t)](\alpha)$ $\forall\ t \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in S$, que es la propiedad (1). La propiedad (2) ya ha sido mencionada con anterioridad. Observemos que $[\varphi(t_1)](t_2)$ hace corresponder a cada estado inicial α al instante t_1 , el estado que debe tomarse como inicial en el instante t_2 para determinar cualquier estado posterior del sistema; ésto puede apreciarse en la forma en que hemos escrito la propiedad (2).

El postulado M.A.2 junto con el postulado M.A. 1 , delimitan parcialmente la realidad accesible de la Mecánica Analítica y de hecho caracterizan a los sistemas físicos que se consideran en esta Teoría. Formalmente, los sistemas mecánicos poseen un espacio de configuración del cual el haz cotangente

(i) Algunos autores afirman que esta propiedad refleja el carácter determinista de la teoría. Véase (1) pag. 61, (2) pag. 1-4.

es el espacio de estados (postulado M.A. 1) y la evolución del sistema viene descrita por una función de evolución de la forma especificada en el postulado M.A. 2.

Las propiedades que hemos impuesto a la función de evolución de un sistema mecánico son puramente algebraicas. Naturalmente son necesarias ciertas condiciones de diferenciabilidad sobre ella para que sea de trascendencia en el contexto de las variedades que habremos de manejar (i). Estas condiciones serán analizadas detalladamente en la siguiente sección y la razón de éstas serán más claras hasta entonces.

Dada la generalidad de los sistemas mecánicos, resulta conveniente clasificarlos de acuerdo a propiedades adicionales de las funciones de evolución que los describen. La clasificación que proponemos resulta adecuada a nuestros propósitos.

I. <u>SISTEMAS REVERSIBLES</u>. Para este tipo de sistemas se tiene que $[\varphi(t_1)](t_2) \in S^S$ es biyectiva, $\forall\ t_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\ t_2 \in [t_1, \infty)$

II. <u>SISTEMAS IRREVERSIBLES</u>. Existen $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in [t_1, \infty)$ tales que $[\varphi(t_1)](t_2)$ no es biyectiva (i.e. un sistema no reversible).

Nuestro interés se centra en los sistemas mecánicos reversibles y la propiedad que los define es sencilla de interpretar físicamente: Puesto que $[\varphi(t_1)](t_2)$ es biyectiva $\forall\ t_1 \in \mathbb{R}$ y $\forall\ t_2 \in [t_1, \infty)$ se tiene que para todo $\beta \in S$ existe un único $\alpha \in S$ tal que $\beta = [[\varphi(t_1)](t_2)](\alpha)$; todo posible estado al instante t_2 posterior a t_1, puede ser alcanzado por un único estado inicial al instante t_1.

Para los sistemas irreversibles, sucede que para algunos instantes de tiempo sucesivos $t_1 < t_2$, existe un estado que al instante t_2 no puede ser alcanzado por estado alguno al instante t_1, o bien que puede ser alcanzado por más de un estado a ése instante t_1.

La interpretación que podemos dar a $[\varphi(t_2)](t_1)^{-1}$, cuando exista, solo es posible darla en términos de la interpretación que hemos dado a $[\varphi(t_2)](t_1)$. En la Mecánica Analítica, el tiempo es un parámetro que transcurre inevitablemente, por lo que la definición que a veces se encuentra de sistema reversible, como aquél en el que a partir de su observación no es posible deducir el "transcurso del tiempo" queda totalmente fuera de nuestro planteamiento.

<u>El siguiente teorema</u> nos da una caracterización muy útil

(i) De clase mayor o igual a 1.

de los sistemas reversibles. La demostración puede verse en el apéndice A.1.

3.1 TEOREMA. Sea $\varphi \in \prod_{t\in\mathbb{R}} (S^S)^{[t,\infty)}$ la función de evolución de un sistema mecánico. El sistema es reversible si y solo si existe una función

$$\Psi \in \left((S^S)^{\mathbb{R}}\right)^{\mathbb{R}}$$

con las siguientes propiedades:

1) $\Psi \wedge I_{\mathbb{R}} = \dot{\bar{I}}_S$

2) $\Psi(t_2) \odot \overline{[\Psi(t_1)](t_2)} = \Psi(t_1) \quad \forall\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

3) $\Psi(t) \circ i_{[t,\infty)} = \varphi(t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$

Este teorema nos permite definir una relación de equivalencia Z_Ψ en el espacio de eventos $\mathbb{R} \times S$, haciendo

$$Z_\Psi \equiv \left\{ ((t_1,\alpha),(t_2,\beta)) \in (\mathbb{R}\times S)\times(\mathbb{R}\times S) \ / \ \beta = [[\varphi(t_1)](t_2)](\alpha) \right\}$$

cuya interpretación física es sencilla: 1) Para $t_1 \leq t_2$ tenemos que $((t_1,\alpha),(t_2,\beta)) \in Z_\Psi$, si con un estado inicial α al instante t_1, el estado del sistema al instante t_2 es β y, 2) Para $t_2 < t_1$, tenemos que $((t_1,\alpha),(t_2,\beta)) \in Z_\Psi$, si al instante t_1, α es un estado que el sistema puede alcanzar a partir de un estado inicial β al instante t_2.
Es sencillo demostrar que en efecto Z_Ψ es una relación de equivalencia, con lo cual generamos una partición en el espacio de eventos $\mathbb{R} \times S$. Para cada evento $(t,\alpha) \in \mathbb{R} \times S$, su clase de equivalencia representa los eventos posteriores que el sistema puede alcanzar a partir del estado α al instante t, y a los eventos anteriores al estado presente α. Convenimos en denominar a una de estas clases una órbita del sistema en el espacio de eventos.

Cada uno de los grupos de sistemas mecánicos a los que hemos hecho referencia (reversibles e irreversibles) pueden a su vez clasificarse en:

A. <u>SISTEMAS ESTACIONARIOS</u>. Para éste tipo de sistemas existe $\chi \in (SS)^{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$ que satisface la propiedad(i)

$$\varphi = \dot{\bar{\chi}} \circledcirc (in_{\mathbb{R}} - \bar{I}_{\mathbb{R}})$$

donde $in_{\mathbb{R}} \equiv \{ (t, i_{[t,\infty)}) / t \in \mathbb{R} \} \in \prod_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{R}^{[t,\infty)}$

B. <u>SISTEMAS NO ESTACIONARIOS</u>.

El calificativo de estacionario proviende de que la evolución del estado de este tipo de sistemas no depende del instante en el que se fijen las condiciones iniciales. En efecto, si t_1 y t_2 corresponden a dos instantes cualesquiera y α S, $\varphi(t_1) \wedge \dot{\bar{\alpha}}$ describe la evolución del estado a partir del estado inicial α al instante t_1, mientras que $\varphi(t_2) \wedge \dot{\bar{\alpha}}$ describe su evolución a partir del estado inicial α al instante t_2. Después de un tiempo Δt, el estado del sistema en cada caso es $[[\varphi(t_1)](t_1+\Delta t)](\alpha)$ y $[[\varphi(t_2)](t_2+\Delta t)](\alpha)$, que de acuerdo a la propiedad enunciada son iguales:

$$[[\varphi(t_1)](t_1+\Delta t)](\alpha) = [\chi(\Delta t)](\alpha) = [[\varphi(t_2)](t_2+\Delta t)](\alpha)$$

Para los sistemas mecánicos reversibles, podemos caracterizar de una forma más sencilla a los sistemas estacionarios. Esto se muestra en el siguiente corolario:

3.2 <u>COROLARIO</u>. Sea $\varphi \in \prod_{t \in \mathbb{R}} (SS)^{[t,\infty)}$ la función de evolución de un sistema mecánico. El sistema es reversible y estacionario si y solo si existe $\eta \in (SS)^{\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades(ii):

1) $\eta(0) = I_S$

2) $\eta(t_2) \circ \eta(t_1) = \eta(t_2 + t_1) \quad \forall \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

3) $\eta \circ i_{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}} = \varphi(t) \circ (\dot{\bar{t}} + I_{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}})$

La demostración es inmediata del teorema 3.1 y de la definición de sistema estacionario.

La relación de equivalencia Z_φ que es posible generar en un sistema reversible, induce una relación de equivalencia Z_η cuando el sistema es además estacionario. Tal relación viene

(i) Lo cual es equivalente a $\dot{\bar{\chi}} = \varphi \circledcirc (\bar{I}_{\mathbb{R}} + \dot{\bar{I}}_{\mathbb{R}})$

(ii) De ésto se sigue que $\eta^{ia}(\mathbb{R})$ es un grupo abeliano bajo la composición, razón por la cual se dice en ocasiones que es un grupo de un parámetro.

dada por (i)

$$Z_\eta = \{(\alpha,\beta) \in S\times S \;/\; \exists\, t\in\mathbb{R} \ni \beta = [\eta(t)](\alpha)\} \subseteq S\times S$$

Teniéndose que para cada $\alpha \in S$, su clase de equivalencia es el conjunto de todos los estados que el sistema puede alcanzar a partir de α , así como el conjunto de estados a partir de los cuales se llega al estado α .
Cada clase de equivalencia es lo que se conoce como una órbita del sistema en el espacio de estados y claramente la imágen de una órbita bajo la proyección canónica en S = T(M)* corresponde a una trayectoria del sistema en el espacio de configuración: i.e. la imagen de la función de posición.

En la mayor parte de este trabajo consideramos sistemas mecánicos reversibles y estacionarios. Cuando los resultados sean aplicables a sistemas no estacionarios haremos mención explícita de ello. En la presente tesis quedan excluídos los sistemas mecánicos irreversibles, así como la mayor parte de los no estacionarios.
El siguiente cuadro resume nuestra clasificación propuesta.

- SISTEMAS MECANICOS $\exists\, \varphi \in \prod_{t\in\mathbb{R}} (S^S)^{[t,\infty)}$
  - REVERSIBLES $\exists\, \Psi \in ((S^S)^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}} \ni \Psi(t)\circ i_{[t,\infty)} = \varphi(t)$
    - ESTACIONARIOS $\exists\, \eta \in (S^S)^{\mathbb{R}} \ni \eta = \Psi(t)\circ(\dot{t} + I_{\mathbb{R}})$
    - NO ESTACIONARIOS $\exists\, \Psi \in ((S^S)^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}}$
  - IRREVERSIBLES $\exists\, \varphi \in \prod_{t\in\mathbb{R}} (S^S)^{[t,\infty)}$
    - ESTACIONARIOS $\exists\, \chi \in (S^S)^{\mathbb{R}^+\cup\{0\}} \ni \chi = \varphi(t)\circ(\dot{t} + I_{\mathbb{R}^+\cup\{0\}})$
    - NO ESTACIONARIOS $\exists\, \varphi \in \prod_{t\in\mathbb{R}} (S^S)^{[t,\infty)}$

(i) Puede verificarse que $Z_\eta = P \circ Z_\Psi P^{-1}$, con $P = \{((t,\beta),\beta)\} \subseteq (\mathbb{R}\times S)\times S$

1.4 CAMPOS VECTORIALES. FLUJOS. CURVAS INTEGRALES.

El objetivo fundamental de la Mecánica Analítica consiste en determinar la función de evolución de un sistema mecánico. Aún cuando hemos postulado su existencia, en la generalidad de los casos desconocemos su forma explícita, aunque es factible suponer que, en analogía con la Mecánica de Newton, podamos determinarla si conocemos la forma de las "interacciones" a las que el sistema está sujeto.

En esta sección haremos énfasis en las condiciones adicionales de diferenciabilidad que habremos de imponer a la función de evolución de un sistema mecánico reversible para introducir la noción de campo vectorial, que resulta ser el objeto formal apropiado para la descripción de las "interacciones", cuestión que haremos plausible en la siguiente sección.

Adicionalmente veremos la relación que existe entre los campos vectoriales y flujos, siendo el concepto de flujo el más adecuado para la función de evolución. Finalmente demostraremos el teorema fundamental de unicidad del flujo asociado a un campo vectorial (teo. 4.6), el cual nos permitirá concluir que resulta equivalente la descripción de un sistema mecánico mediante la especificación de la función de evolución que lo describe o bien mediante el campo vectorial asociado. Entonces, si un campo vectorial puede describir las "interacciones" a las que el sistema está sujeto, podemos plantear en términos formales el problema fundamental de la Mecánica Analítica: Conocido un campo vectorial que describe las causas, determinar el comportamiento del sistema especificando su función de evolución.

Como señalamos al final de la sección anterior, consideraremos tan solo sistemas mecánicos reversibles para los cuales es posible plantear una función de evolución $\Psi \in ((S^S)^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}}$ con las propiedades que ya hemos mencionado (veáse teo. 3.1).

Haciendo $\bar{S} = \prod_{i \in I} S_i$, con $S_1 = \mathbb{R}$, $S_2 = S = T(M)^*$ (al cual podríamos llamar espacio de eventos) y con $a \in \bar{S}$, podemos considerar a

$$\Psi(a(1)) \wedge \dot{\overline{a(2)}} \in S^{\mathbb{R}}$$

la cual nos describe la evolución (pasada y futura) del estado del sistema a partir de un estado $a(2)$ al instante $a(1)$. En términos de la relación de equivalencia Z_Ψ que define Ψ, (véase secc. 1.3), $\lfloor \Psi(a(1)) \wedge \dot{\overline{a(2)}} \rfloor^{id}(\mathbb{R})$ es la órbita en el espacio de eventos que contiene al evento a. Si suponemos que $\Psi(a(1)) \wedge \dot{\overline{a(2)}}$

es diferenciable en una vecindad de $a(1) \in \mathbb{R}$, $(\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}) \circ (\dot{\overline{a(1)}} + I_{\mathbb{R}})$ es una curva en S que es diferenciable en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}$ y además

$$[(\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}) \circ (\dot{\overline{a(1)}} + I_{\mathbb{R}})](0) = [[\Psi(a(1))](a(1))](a(2)) = a(2)$$

dado que $\Psi \blacktriangle I_{\mathbb{R}} = \dot{I}_S$.
Por lo tanto, si $\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}$ es diferenciable en una vecindad de $a(1) \in \mathbb{R}$, para cualquier $a \in \overline{S}$, podemos definir a (i)

$$X_\Psi = \left\{ (a, (\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}) \circ (\dot{\overline{a(1)}} + I_{\mathbb{R}}) / R^S_{a(2)}) \mid a \in \overline{S} \right\} \in \prod_{a \in \overline{S}} T_{a(2)}(S) \subseteq T(S)^{\overline{S}}$$

De su definición, $X_\Psi(a)$ es un vector tangente a la variedad S en el punto $a(2)$, que describe localmente la razón de cambio del estado del sistema cuando inicialmente éste es $a(2)$ al instante $a(1)$. (ii).

En particular, para un sistema estacionario tenemos que $\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}$ es diferenciable en una vecindad de $a(1)$ $\forall$ $a \in \overline{S}$ si $\eta \blacktriangle \dot{\alpha}$ es diferenciable en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}$ $\forall$ $\alpha \in S$; dado que (corolario 3.2) $\dot{\eta} = \dot{\Psi} \odot (\dot{I}_{\mathbb{R}} + \dot{I}_{\mathbb{R}})$, luego $(\eta \blacktriangle \dot{\alpha}) \circ (I_{\mathbb{R}} - \dot{t}) = \Psi(t) \blacktriangle \dot{\alpha}$ $\forall t \in \mathbb{R}, \forall$ $\alpha \in S$.
Entonces, de acuerdo a lo anterior, para un sistema estacionario tenemos que si $\eta \blacktriangle \dot{\alpha}$ es diferenciable en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}$ para cualquier $\alpha \in S$, podemos definir a $X_\Psi \in \prod_{a \in \overline{S}} T_{a(2)}(S)$ con la propiedad de que

$$X_\Psi \circ (\dot{t} \times I_S) = X_\Psi \circ (\dot{r} \times I_S) \qquad \forall t, r \in \mathbb{R}$$

y en este caso podemos generar un campo vectorial en S, haciendo(iii)

$$X_\eta \equiv X_\Psi \circ (\dot{0} \times I_S)$$

(i) Véase secc. 1.2 para la definición del espacio tangente.
(ii) Algunos autores ((19) pags. 27, 41, 46; (19) pags. 8, 9) consideran que las funciones $\theta \in \mathbb{R}^S$ diferenciables corresponden a "observables" o "variables dinámicas" del sistema mecánico. De acuerdo a esta concepción. $X_\Psi(a)$ es un vector tangente a la variedad S en $a(2)$ que describe la razón de cambio en el tiempo (precisamente la derivada) de cualquier observable a lo largo de la curva de evolución del sistema $\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}$ en el instante $a(1)$ mediante $[D(\theta \circ (\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}) \circ (\dot{\overline{a(1)}} + I_{\mathbb{R}})](0) = [D(\theta \circ (\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}))](a(1))$, donde $(\Psi(a(1)) \blacktriangle \dot{\overline{a(2)}}) \circ (\dot{\overline{a(1)}} + I_{\mathbb{R}})$ es una curva en la clase $X_\Psi(a)$.
(iii) Puede definirse a X_η directamente, haciendo $X_\eta = \{(\alpha, \eta \blacktriangle \dot{\alpha} / R^S_\alpha) \mid \alpha \in S\}$. Ambas definiciones son equivalentes.

Por razones obvias, a X_Ψ se le denomina un campo vectorial no estacionario, y a X_η se le denomina campo vectorial estacionario.

Aún cuando X_Ψ no es estrictamente un campo vectorial, podemos modificar ligeramente las cosas con el objeto de poder construir un campo vectorial en una nueva variedad. En efecto, a partir de Ψ definimos a $\bar{\Psi} \in (\bar{S}^{\bar{S}})^{\mathbb{R}}$, haciendo (i)

$$\bar{\Psi}(t) = (\dot{\bar{t}} + P_1^{\bar{S}}) \times (((\Psi \circ P_1^{\bar{S}}) \wedge (\dot{\bar{t}} + P_1^{\bar{S}})) \wedge P_2^{\bar{S}}) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

con lo que $\bar{\Psi}$ satisface las mismas propiedades de grupo que η :

1) $\bar{\Psi}(0) = I_{\bar{S}}$

2) $\bar{\Psi}(t_2) \circ \bar{\Psi}(t_1) = \bar{\Psi}(t_1 + t_2) \qquad \forall\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$

Luego en ambos casos (estacionario o simplemente no estacionario) podemos definir a los campos vectoriales asociados a los sistemas, haciendo

$$X_\eta = \{(\alpha,\ \eta \wedge \dot{\alpha} / R^S_\alpha) / \alpha \in S\} \in \prod_{\alpha \in S} T_\alpha(S) \subseteq T(S)^S.$$

$$X_{\bar{\Psi}} = \{(a,\ \bar{\Psi} \wedge \dot{a} / R^{\bar{S}}_a) / a \in \bar{S}\} \in \prod_{a \in \bar{S}} T_a(\bar{S}) \subseteq T(\bar{S})^{\bar{S}}$$

pues llevamos a ser a $\bar{S}$ una variedad diferenciable en forma canónica (ii).

Observemos que en cualquier caso, las funciones η y $\bar{\Psi}$ que describen (directamente o indirectamente) la evolución del estado del sistema, están relacionadas con los campos vectoriales X_η y $X_{\bar{\Psi}}$ en la forma

$$X_\eta \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = (\eta \wedge \dot{\alpha})'$$

$$X_{\bar{\Psi}} \circ (\bar{\Psi} \wedge \dot{a}) = (\bar{\Psi} \wedge \dot{a})'$$

donde (iii)

(i) Es decir $\bar{\Psi} = (\bar{I}_{\mathbb{R}} + \dot{\bar{P}}_1^{\bar{S}}) \otimes (((\Psi \circ P_1^{\bar{S}}) \odot (\bar{I}_{\mathbb{R}} + \dot{\bar{P}}_1^{\bar{S}})) \odot \dot{\bar{P}}_2^{\bar{S}})$

(ii) Véase (7) pag 300.

(iii) En general, si M es una variedad diferenciable y $c \in M^I$ es diferenciable en I, donde $I \in \mathcal{X}_0$, definimos a

$$c^0 = \{(t,\ c \circ (\dot{t} + I_{\mathbb{R}}) / R^M_{c(t)}) / t \in I\} \in \prod_{t \in I} T_{c(t)}(M) \subseteq T(M)^I$$

$$(\eta\Delta\dot{\alpha})^{\ell}(t) = (\eta\Delta\dot{\alpha})\circ(\dot{t}+I_{\mathbb{R}})/R^{S}_{\alpha}$$

$$(\bar{\Psi}\Delta\dot{a})^{\ell}(t) = (\bar{\Psi}\Delta\dot{a})\circ(\dot{t}+I_{\mathbb{R}})/R^{\bar{S}}_{a} \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

lo cual resulta inmediato de su definición. Dada la importancia de este comportamiento, es conveniente introducir algunos conceptos nuevos.

4.1 DEFINICION. Sea M una variedad diferenciable, X un campo vectorial en M. Si $c\in M^{I}$ es diferenciable en I, con $I\in\mathcal{N}_0$ y satisface

$$X\circ c = c'$$

se dice que c es una curva integral del campo X, y en tal caso a $c(o)\in M$ se le denomina condición inicial.

De acuerdo a ésta definición, podemos reformular lo dicho con anterioridad, diciendo que $\eta\Delta\dot{\alpha}$ es una curva integral de X_η para toda condición inicial $\alpha\in S$, y análogamente para $\bar{\Psi}$.

4.2 DEFINICION. Sea M una varidad diferenciaole, $\Phi\in(M^{M})^{I}$ con I una vecindad abierta de $0\in\mathbb{R}$. Si Φ satisface:

1) $(\Phi\circ P_1^{\bar{M}})\Delta P_2^{\bar{M}} \in M^{\bar{M}}$ es diferenciable, donde $\bar{M} = \prod_{i\in\bar{2}} M_i$, $M_1 = I$, $M_2 = M$

2) $\Phi(0) = I_M$

3) $\Phi(t_2)\circ\Phi(t_1) = \Phi(t_1+t_2) \quad \forall\, t_1,t_2\in I \ni t_1+t_2\in I.$

se dice que Φ es un flujo en M.

Obsérvese que las funciones η y $\bar{\Psi}$, que describen la evolución de los sistemas mecánicos, resultan ser flujos en S y $\bar{S}$ respectivamente cuando satisfacen adicionalmente la condición (1) de la definición anterior.

Naturalmente un flujo da origen a un campo vectorial en forma análoga a η y Ψ, pues de la condición (1) se sigue la diferenciabilidad de $\Phi\Delta\dot{q} = ((\Phi\circ P_1^{\bar{M}})\Delta P_2^{\bar{M}})\circ(i_I\times\dot{q})$ en I, $\forall\, q\in M$. Luego podemos construir un campo vectorial en M, haciendo

$$X_\Phi = \{(q,\ \Phi\Delta\dot{q}/R^{M}_{q}) / q\in M\} \in \prod_{q\in M} T_q(M) \subseteq T(M)^{M}$$

al cual convenimos en llamar "generador infinitesimal" del flujo.
Así pues, todo flujo tiene asociado un generador infinitesimal(i) y resulta natural preguntarse si la afirmación recíproca es cierta; ésto es, si dado cualquier campo vectorial, existe un flujo cuyo generador infinitesimal coincida con el campo. La respuesta en general es no, y las condiciones suficientes para ello nos las brinda el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en la referencia (9) pag. 86.

4.3 TEOREMA. Sea M una varidad de clase $C^{(k)}$ con $k \geqslant 2$, modelada sobre un espacio de Banach. Si X es un campo vectorial de clase $C^{(k-1)}$ ($\therefore$ $k-1 \geqslant 1$), entonces existe un flujo de clase $C^{(k-1)}$ cuyo generador infinitesimal es X.

Conviene mencionar que aunque este teorema nos brinda las condiciones suficientes para la existencia de un flujo asociado a un campo vectorial, no especifica una forma explícita de calcularlo pues su demostración se basa en el teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

En ocasiones es suficiente encontrar curvas integrales para condiciones iniciales dadas, lo cual se reduce ante la elección de un atlas, a encontrar la solución de cierta ecuación diferencial.
En efecto, si q es la condición inicial requerida y F(i) una carta con dominio f(i) que contenga a q; la condición

$$X \circ c \circ i_{c^{-1}(f(i))} = c' \circ i_{c^{-1}(f(i))} \qquad \text{con} \quad c(0) = q$$

es equivalente a resolver la ecuación diferencial

$$X^{F(i)} \circ F(i) \circ c = D(F(i) \circ c) \qquad \text{con} \quad F(i) \circ c\,(0) = F(i)(q)$$

donde $X^{F(i)} \in V^{[F(i)](f(i))}$ es la representación local del campo X (V es el espacio de modelación de la variedad).

(i) Puede demostrarse que si $(\Phi \circ p_1^{\bar{M}}) \vartriangle p_2^{\bar{M}}$ es dos veces diferenciable (en cuyo caso M debe ser al menos de clase $C^{(2)}$), entonces X resulta ser un campo vectorial diferenciable (véase (13) pag. 81)
Más áun , puede demostrarse que si M es de clase C^{k} con $k \geqslant 2$ y Φ un flujo de clase C^{k-1}, entonces X_{Φ} es de clase C^{k-2} (op. cit.)

Una vez conocidas las condiciones suficientes que dan lugar a la existencia de flujos, podemos preguntarnos acerca de la unicidad de éste. Para ello son necesarias ciertas condiciones topológicas en la variedad, las cuales se tienen en la clase de variedades que hemos considerado.

La topología que se le ha dado a una variedad $(M, \mathcal{a}^{(k)}_{(M,V)})$ es la definida por

$$\tau_M = \left\{ U \in \mathcal{P}(M) \;/\; [F(i)](\,f(i) \cap U) \in \tau_V \quad \forall\, i \in I_F \right\}$$

donde $F \in \mathcal{a}^{(k)}(M,V)$, y esta topología resulta independiente del atlas elegido dentro de la clase (véase (13) pag. 58). Obsérvese que ante esta topología, $F(i)$ es continua $\forall\, i \in I_F$

4.4 <u>PROPOSICION</u>. Sea $(M, \mathcal{A}^{(k)}(M,V))$ una variedad diferenciable modelada sobre un espacio vectorial normado (i). Entonces la topología canónica en M, τ_M, es una topología de Hausdorff.

<u>Demostración</u>. Probaremos que M es Fréchet y regular (ii). Sean $q \in M$, $F \in \mathcal{a}^{(k)}(M,V)$, $i \in I_F \ni q \in f(i)$.

Como V es Fréchet $\Rightarrow [F(i)]^{-1}(\{q\}) = \{[F(i)](q)\}$ es cerrado $\Rightarrow \{q\}$ es cerrado en τ_M $\therefore$ M es Fréchet.

Tomemos $A \in \mathcal{N}_q \therefore \exists\, U \in \tau_M \ni q \in U \subseteq A$.

Como $U \in \tau_M$, $[F(i)](f(i) \cap U) \in \tau_V$, y además

$$[F(i)](q) \in [F(i)](f(i) \cap U) \subseteq [F(i)](f(i) \cap A)$$

luego $[F(i)](f(i) \cap A) \in \mathcal{N}_{F(i)(q)}$. Como V es regular, $\exists\, N \in \mathcal{N}_{F(i)(q)}$ cerrado, tal que $N \subseteq [F(i)](f(i) \cap A)$.

Por tanto

$$q \in [F(i)]^{-1}(N) \subseteq [F(i)]^{-1}\left([F(i)]^{-1}(f(i) \cap A)\right) = A \cap f(i) \subseteq A$$

donde $[F(i)]^{-1}(N) \in \mathcal{N}_q$ y es cerrado de la continuidad de $F(i)$.

$\therefore$ M es regular.

Ahora podemos avanzar en la cuestión de unicidad de curvas integrales:

4.5 <u>LEMA</u>. Sea $(M, \mathcal{a}^{(k)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable $(k \geq 2)$ X un campo vectorial en M de clase $C^{(k-1)}$. Si $\gamma \in M^I$, $\beta \in M^J$ son dos curvas integrales de X, con $I, J \in \mathcal{N}_0$ abiertos y conexos (intervalos abiertos) y satisfacen la condición inicial $\gamma(0) = \beta(0) = q$ entonces $\gamma \circ i_J = \beta \circ i_I$

(i) De acuerdo a nuestra demostración, aparentemente no es suficiente que V sea de Hausdorff.

(ii) Fréchet y regular implica Hausdorff, (ref. 6 pag. 57).

Una vez conocidas las condiciones suficientes que dan lugar a la existencia de flujos, podemos preguntarnos acerca de la unicidad de éste. Para ello son necesarias ciertas condiciones topológicas en la variedad, las cuales se tienen en la clase de variedades que hemos considerado.

La topología que se le ha dado a una variedad $(M, \mathcal{A}^{(k)}_{(M,V)})$ es la definida por

$$\tau_M = \left\{ U \in \mathcal{P}(M) \,/\, [F(i)](f(i) \cap U) \in \tau_V \quad \forall\, i \in I_F \right\}$$

donde $F \in \mathcal{A}^{(k)}(M,V)$, y esta topología resulta independiente del atlas elegido dentro de la clase (véase (13) pag. 58). Obsérvese que ante esta topología, $F(i)$ es continua $\forall\, i \in I_F$

4.4 <u>PROPOSICION</u>. Sea $(M, \mathcal{A}^{(k)}(M,V))$ una variedad diferenciable modelada sobre un espacio vectorial normado (i). Entonces la topología canónica en M, τ_M, es una topología de Hausdorff.

<u>Demostración</u>. Probaremos que M es Fréchet y regular (ii). Sean $q \in M$, $F \in \mathcal{A}^{(k)}(M,V)$, $i \in I_F \ni q \in f(i)$.

Como V es Fréchet $\Rightarrow$ $[F(i)]^{id}(\{q\}) = \{[F(i)](q)\}$ es cerrado $\Rightarrow$ $\{q\}$ es cerrado en τ_M $\therefore$ M es Fréchet.

Tomemos $A \in \mathcal{N}_p \therefore \exists\, U \in \tau_M \ni q \in U \subseteq A$.
Como $U \in \tau_M$, $[F(i)](f(i) \cap U) \in \tau_V$, y además

$$[F(i)](q) \in [F(i)](f(i) \cap U) \subseteq [F(i)](f(i) \cap A)$$

luego $[F(i)](f(i) \cap A) \in \mathcal{N}_{F(i)(q)}$. Como V es regular, $\exists\, N \in \mathcal{N}_{F(i)(q)}$ cerrado, tal que $N \subseteq [F(i)](f(i) \cap A)$.

Por tanto

$$q \in [F(i)]^{\leftarrow}(N) \subseteq [F(i)]^{\leftarrow}\left([F(i)]^{id}(f(i) \cap A)\right) = A \cap f(i) \subseteq A$$

donde $[F(i)]^{\leftarrow}(N) \in \mathcal{N}_q$ y es cerrado de la continuidad de $F(i)$.
$\therefore$ M es regular.

Ahora podemos avanzar en la cuestión de unicidad de curvas integrales:

4.5 <u>LEMA</u>. Sea $(M, \mathcal{A}^{(k)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable $(k \geq 2)$ X un campo vectorial en M de clase $C^{(k-1)}$. Si $\gamma \in M^I$, $\beta\ M^J$ son dos curvas integrales de X, con $I, J \in \mathcal{N}_0$ abiertos y conexos (intervalos abiertos) y satisfacen la condición inicial $\gamma(0) = \beta(0) = q$ entonces $\gamma \circ i_J = \beta \circ i_I$

(i) De acuerdo a nuestra demostración, aparentemente no es suficiente que V sea de Hausdorff.
(ii) Fréchet y regular implica Hausdorff, (ref. 6 pag. 57).

Demostración.

$$\text{Sea} \quad E = \{ t \in I \cap J \ / \ \gamma(t) = \beta(t) \}$$

Mostraremos que E es cerrado y abierto en $I \cap J$. Como M es Hausdorff, se sigue[(i)] que E es cerrado en $I \cap J$. Para ver que E es abierto, sea $s \in E$. Hagamos

$$\gamma_s = \gamma \circ (\dot{\bar{s}} + i_{(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(I)})$$

$$\beta_s = \beta \circ (\dot{\bar{s}} + i_{(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(J)})$$

donde $(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(I)$, $(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(J) \in \mathcal{N}_0$ son intervalos abiertos. Además

$$\gamma_s' = \gamma' \circ (\dot{\bar{s}} + i_{(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(I)}) = X \circ \gamma \circ (\dot{\bar{s}} + i_{(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(I)}) = X \circ \gamma_s$$

$$\beta_s' = \beta' \circ (\dot{\bar{s}} + i_{(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(J)}) = X \circ \beta \circ (\dot{\bar{s}} + i_{(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(J)}) = X \circ \beta_s$$

y $\gamma_s(0) = \beta_s(0)$.

Pero $\quad X \circ \gamma_s = \gamma_s' \Rightarrow X^{F(i)} \circ F(i) \circ \gamma_s = D(F(i) \circ \gamma_s)$

$\quad\quad\; X \circ \beta_s = \beta_s' \Rightarrow X^{F(i)} \circ F(i) \circ \beta_s = D(F(i) \circ \beta_s)$

donde $F \in A^{(k)}_{(M,V)}$ y $\gamma_s(0) = \beta_s(0) \in f(i)$.

Luego $F(i) \circ \gamma_s$ y $F(i) \circ \beta_s$ son soluciones de la misma ecuación diferencial con la misma condición inicial. De la unicidad de las soluciones se sigue que

$$F(i) \circ \gamma_s \circ i_{\beta_s^{\ddot{\mu}}(f(i))} = F(i) \circ \beta_s \circ i_{\gamma_s^{\ddot{\mu}}(f(i))}$$

donde $\beta_s^{\ddot{\mu}}(f(i))$, $\gamma_s^{\ddot{\mu}}(f(i)) \in \mathcal{N}_0 \Rightarrow A = \beta_s^{\ddot{\mu}}(f(i)) \cap \gamma_s^{\ddot{\mu}}(f(i)) \in \mathcal{N}_0$
por lo que

$$\gamma \circ (\dot{\bar{s}} + i_{(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(I)}) \circ i_A = \gamma_s \circ i_A = \beta_s \circ i_A = \beta \circ (\dot{\bar{s}} + i_{(\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(J)}) \circ i_A$$

Entonces, si hacemos (ii)

$$W = (\{s\} + (\dot{\bar{s}} + I_{\mathbb{R}})^{\ddot{\mu}}(I \cap J)) \cap A$$

(i) Véase el ejercicio 1.1B pag 17 de la referencia (1)
(ii) Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$: $A + B = \{ a + b \ / \ a \in A \text{ y } b \in B \}$

$W \in \mathcal{N}_s$ y $W \subseteq E$; es decir, $s \in int(E)$ $\therefore$ E es abierto.

Como $I \cap J$ es conexo y E es un subconjunto cerrado y abierto de $I \cap J$, se sigue que $E = \emptyset$ o $E = I \cap J$. Pero $E \neq \emptyset$ ya que $0 \in I \cap J$, por lo tanto $E = I \cap J$. ∎

La generalización de este lema es inmediata:

4.6 TEOREMA. Sean M, V como en el lema 4.5 . Si $\Phi_1 \in (M^M)^I$, $\Phi_2 \in (M^M)^J$ con $I, J \in \mathcal{N}_0$ abiertos y conexos, son dos flujos cuyo generador infinitesimal es X, entonces

$$\Phi \circ i_J = \Phi \circ i_I$$

Demostración. Sea $q \in M$; como $\Phi_1 \wedge \dot{q}$ y $\Phi_2 \wedge \dot{q}$ son dos curvas integrales de X con la misma condición inicial, del lema anterior se sigue que

$$(\Phi_1 \wedge \dot{q}) \circ i_J = (\Phi_2 \wedge \dot{q}) \circ i_I$$

$$\therefore \quad [\Phi_1(t)](q) = [\Phi_2(t)](q) \quad \forall q \in M \quad ; \quad \forall \in I \cap J$$

$$\therefore \quad \Phi_1(t) = \Phi_2(t) \quad \forall t \in I \cap J$$

$$\therefore \quad \Phi_1 \circ i_J = \Phi_2 \circ i_J$$ ∎

El teorema (4.6) nos permite concluir lo siguiente: Si $\eta \in (S^S)^{\mathbb{R}}$ es la función de evolución de un sistema mecánico (estacionario) - cuya existencia postulamos - y X es el campo vectorial asociado al sistema(i) entonces su flujo asociado, en caso de satisfacer las condiciones del teo. 4.6, es precisamente $\eta \circ i_I$ donde I es el dominio del flujo. En otras palabras, la descripción del sistema ya sea mediante la función de evolución o bien mediante su campo vectorial asociado, es equivalente; en el sentido de que uno es especificado de manera única por el otro.

Finalmente tenemos los antecedentes matemáticos necesarios para mostrar que es factible describir las interacciones mediante campos vectoriales, con la consecuente interpretación física de ellos.

(i) Es decir X es el generado mediante η . Véase pag. 25.

1.5 INTERPRETACION DEL CAMPO. INTERPRETACION DEL FLUJO.

En la sección anterior vimos una forma alternativa (y equivalente desde un punto de vista formal) de describir la evolución del estado de un sistema mecánico mediante su campo vectorial asociado. Es natural entonces cuestionarse sobre el significado físico del campo; y al respecto veremos que en cierta medida es factible representar a las "interacciones" sobre el sistema mediante campos vectoriales. Para ello retomamos el planteamiento que hemos dado de la Mecánica de Newton.

Consideremos una partícula de masa m descrita desde un sistema de referencia inercial. La forma general de la interacción sobre una partícula (en el caso estacionario) viene dada por un campo de fuerzas de la forma

$$F \in (\mathbb{R}^3)^{\left((\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}\right)}$$

para el cual tenemos que

$$m\, D^2 r = F \circ (\theta_1 \circ r + \theta_2 \circ Dr) \text{ donde } \quad \theta_i = \theta_i^{(\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}}$$

y r es la función de posición de la partícula.
En términos del momento,

$$p = m\, Dr \qquad \ldots(5.1)$$

tendríamos

$$Dp = G \circ (\theta_1 \circ r + \theta_2 \cdot p) \qquad \ldots (5.2)$$

donde obviamente

$$G = F \circ \left(\theta_1 \circ P_1^{(\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}} + \theta_2 \circ \tfrac{1}{m} P_2^{(\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}}\right)$$

Como ya hemos hecho ver, podemos considerar a $(\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}$ una estructura suficiente para contener la información mecánicamente relevante del sistema; es decir, podemos considerarlo como un espacio de estados, donde cada $\alpha \in (\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}$ corresponde a un estado de posición $\alpha(1)$ y velocidad $\alpha(2)$ (sobreentendida la masa). O alternativamente; posición $\alpha(1)$ y momento $\alpha(2)$. Claramente ambas interpretaciones son factibles y equivalentes para la descripción del estado del sistema considerado.

Propongamos esta última interpretación de $(\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}$. A partir de los principios generales ya enunciados, tenemos:

De acuerdo al postulado M.A.2, la evolución del estado viene descrita por una función de evolución $\eta \in (T(M)^{*\,T(M)^*})^{\mathbb{R}}$, donde M es un espacio de configuración ($(\mathbb{R}^{\bar{3}})$ en este caso) y $T(M)^*$ el espacio de estados, con la estructura usual de variedad modelada sobre $\prod_{i\in\bar{2}} V_i$ con $V_1 \equiv \mathbb{R}^{\bar{3}}$ y $V_2 \equiv (\mathbb{R}^{\bar{3}})^*$.

Podemos dar una interpretación física a $T(M)^*$ en base a la interpretación que hemos dado a $(\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}}$, pues si tomamos la estructura diferenciable en M dada por el atlas con carta única $\{(1, I_{\mathbb{R}^{\bar{3}}})\}$, la estructura canónica en $T(M)^*$ viene dada por una carta única $\{(1,\tilde{f}(1))\} \in \mathcal{A}^{(K)}_{(T(M)^*,\prod_{i\in\bar{2}} V_i)}$, donde

$$\tilde{f}(1) = \theta_1^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \circ \pi + \theta_2^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \circ \left(I_{T(M)^*} \otimes \left(\mathrm{inv} \circ \underline{\mathrm{H}}^{\,f(1)} \right) \circ \pi \right)$$

Alternativamente podemos modelar a $T(M)^*$ sobre $(\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}}$ y en este caso también es posible mostrar la existencia de una carta única $\{(1,\tilde{I}(1))\} \in \mathcal{A}^{(K)}_{(T(M)^*,\prod_{i\in\bar{2}} V_i)}$: (i)

$$\tilde{I}(1) = \theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ \pi + \theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ \left(\sum_{a\in\bar{3}} \left(I_{T(M)^*} \circ \left(\partial_a^{I_{\mathbb{R}^{\bar{3}}}} \circ \pi \right) \right) \dot{\bar{\delta}}^{(3)}_{(a)} \right)$$

véase fig. 1.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "I_{\mathbb{R}^{\bar{3}}}"'] & & T(M)^* \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[d, "\tilde{f}(1)"] \arrow[drr, "\tilde{I}(1)"] & & \\
V \equiv \mathbb{R}^{\bar{3}} & & \prod_{i\in\bar{2}} V_i \arrow[ll, "P_1^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i}"'] \arrow[rr, shift left, "\phi"] & & (\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}} \arrow[ll, shift left, dashed, "\phi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$V_1 \equiv \mathbb{R}^{\bar{3}}$, $V_2 \equiv (\mathbb{R}^{\bar{3}})^*$

Fig. 1

Dado que $\tilde{I}(i)$ resulta ser una biyección podemos considerar que $T(M)^*$ y $(\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}}$ representan las mismas cantidades físicas del sistema, es decir cada $\alpha \in T(M)^*$ corresponde a un estado de la partícula cuya posición es $[\tilde{I}(1)(\alpha)](1)$ y momento $[\tilde{I}(1)(\alpha)](2)$ (ii).

Ahora, si X_η es el campo asociado al sistema,

(i) Obsérvese que $\tilde{I}(1) = \phi \circ T(1)$ donde $\phi = \theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ P_1^{\prod V_i} + \theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ \left(\sum_{a\in\bar{3}} \left(P_2^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \circ \dot{\bar{\delta}}^{(3)}_{(a)}\right) \dot{\bar{\delta}}^{(3)}_{(a)} \right)$ con $\phi^{-1} = \theta_1^{\prod V_i} \circ P_1^{(\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}}} + \theta_2^{\prod V_i} \circ \left(\sum_{b\in\bar{3}} \left(P_b^{\mathbb{R}^{\bar{n}}} \circ P_2^{(\mathbb{R}^{\bar{n}})^{\bar{2}}}\right) \dot{\bar{P}}_b^{\mathbb{R}^{\bar{n}}} \right)$, luego $\phi \in \mathrm{Hom}(\prod_{i\in\bar{2}} V_i, (\mathbb{R}^{\bar{3}})^{\bar{2}})$

(ii) Dado que dos espacios vectoriales isomorfos son indistinguibles en cuanto a su estructura, podemos interpretar a $[\tilde{f}(1)(\alpha)](1)$ como posición y a $[\tilde{f}(1)(\alpha)](2)$ como momento, aunque con otra nomenclatura.

$$X_\eta \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = (\eta \wedge \dot{\alpha})' \qquad \forall\, \alpha \in T(M)^*$$

de lo cual se sigue que

$$X_\eta^{\bar{T}(1)} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = D(\bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}))$$

o en términos de sus componentes,

$$\theta_1^{\pi V_i} \circ P_1^{\pi V_i} \circ X_\eta^{\bar{T}(1)} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) + \theta_2^{\pi V_i} \circ P_2^{\pi V_i} \circ X_\eta^{\bar{T}(1)} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) =$$

$$\theta_1^{\pi V_i} \circ D(P_1^{\pi V_i} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})) + \theta_2^{\pi V_i} \circ D(P_2^{\pi V_i} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}))$$

$$\therefore \quad P_1^{\pi V_i} \circ X_\eta^{\bar{T}(1)} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = D(P_1^{\pi V_i} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})) \qquad \ldots (5.3)$$

$$P_2^{\pi V_i} \circ X_\eta^{\bar{T}(1)} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = D(P_2^{\pi V_i} \circ \bar{T}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})) \qquad \ldots (5.4)$$

lo cual es equivalente a (i)

$$P_1^{(R^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ X_\eta^{\bar{I}(1)} \circ \bar{I}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = D(P_1^{(R^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ \bar{I}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})) \qquad \ldots (5.3)'$$

$$P_2^{(R^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ X_\eta^{\bar{I}(1)} \circ \bar{I}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = D(P_2^{(R^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ \bar{I}(1) \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})) \qquad \ldots (5.4)'$$

En efecto, hagamos $A \equiv \bar{I}(1)$, $B \equiv \bar{T}(1)$; luego $A = \Phi \circ B$ y

$$X_\eta^A(w) = (\overleftarrow{\Xi}^A \wedge X) \circ A^{-1}(w)$$

$$= D(A \circ g)(0) \qquad \text{con} \quad w \in X(A^{-1}(w))$$

$$= D(\Phi \circ B \circ g)(0)$$

$$= \Phi(D(B \circ g)(0)) \qquad \text{con} \quad g \in X(A^{-1}(w))$$

$$= \Phi((\overleftarrow{\Xi}^B \wedge X)(A^{-1}(w))) \qquad \forall\, w \in (R^{\bar{3}})^{\bar{2}}$$

$$\therefore \quad X_\eta^A = \Phi \circ X_\eta^B \circ \Phi^{-1} \qquad \ldots (5.5)$$

$$\therefore \quad P_1^{(R^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ X_\eta^A \circ A \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = P_1^{\pi V_i} \circ X_\eta^B \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})$$

y como $P_1^{(R^{\bar{3}})^{\bar{2}}} \circ A \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = P_1^{\pi V_i} \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})$, se sigue que (5.3) y (5.3)'son equivalentes.

(i) Puesto que $(R^{\bar{3}})^{\bar{2}}$ y $\prod_{i \in \bar{2}} V_i$ son isomorfos la definición del espacio tangente a un punto de la variedad es independiente del espacio de modelación utilizado, luego las representaciones locales $X_\eta^{\bar{T}(1)}$ y $X_\eta^{\bar{I}(1)}$ se refieren al mismo campo vectorial (el generado por η en forma canónica)

De igual forma, a partir de (5.4)′ y (5.5) tenemos que

$$P_2^{(\mathbb{R}^{\bar 3})^{\bar 2}} \circ \phi \circ X^B_\eta \circ \phi^{-1} \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = D(P_2^{(\mathbb{R}^{\bar 3})^{\bar 2}} \circ \phi \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}))$$

$$\Rightarrow \sum_{a \in \bar 3} ((P_2^{\Pi V_i} \circ X^B_\eta \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})) \wedge \vec{\delta}^{(3)}_{(a)})\, \dot{\vec{\delta}}^{(3)}_{(a)} = D\Big(\sum_{a \in \bar 3} ((P_2^{\Pi V_i} \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})) \wedge \vec{\delta}^{(3)}_{(a)})\, \dot{\vec{\delta}}^{(3)}_{(a)}$$

$$= \sum_{a \in \bar 3} ((D(P_2^{\Pi V_i} \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})) \wedge \vec{\delta}^{(3)}_{(a)})\, \dot{\vec{\delta}}^{(3)}_{(a)}$$

$$\Rightarrow \quad P_2^{\Pi V_i} \circ X^B_\eta \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) = D(P_2^{\Pi V_i} \circ B \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}))$$

Análogamente podemos verificar que de (5.4) y (5.5) se sigue (5.4)′ Con lo cual hemos mostrado la equivalencia de las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.3)′, (5.4)′

Las ecuaciones (5.3)′ y (5.4)′ tienen una interpretación física de acuerdo a la interpretación física de $(\mathbb{R}^{\bar 3})^{\bar 2}$:

$P_1^{(\mathbb{R}^{\bar 3})^{\bar 2}} \circ A \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) \in (\mathbb{R}^{\bar 3})^{\mathbb{R}}$ es la función de posición de la partícula,

$P_2^{(\mathbb{R}^{\bar 3})^{\bar 2}} \circ A \circ (\eta \wedge \dot{\alpha}) \in (\mathbb{R}^{\bar 3})^{\mathbb{R}}$ es su momento,

a partir de un estado inicial α . Entonces, podemos decir que:

$P_1^{(\mathbb{R}^{\bar 3})^{\bar 2}} \circ X^A_\eta \circ A \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})$ es la velocidad de la partícula y

$P_2^{(\mathbb{R}^{\bar 3})^{\bar 2}} \circ X^A_\eta \circ A \circ (\eta \wedge \dot{\alpha})$ es la fuerza neta sobre ésta, a partir de un estado inicial α .

Dada la equivalencia de las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.3)′, (5.4)′ es factible proponer interpretaciones análogas para las componentes del campo asociado a un sistema mecánico en el caso más general, aunque cabe aclarar que tal interpretación se reduce a una analogía con el caso conocido de la Mecánica de Newton. En muchos casos puede suceder que algunos conceptos que tienen sentido para la descripción de una partícula no lo tengan en el problema específico.

Debido a la interpretación que es posible dar al campo X_η en el caso de dimensión finita, convenimos en denominar al generador infinitesimal de "el campo de interacciones". La nomenclatura resulta en parte adecuada pues la ecuación (5.4) nos brinda una pauta para la definición implícita de las causas (i), en analogía con la Mecánica de partículas.

(i) En realidad es un abuso hablar de "causas" pues no hemos dado una definición de "estado natural de movimiento".

Aparentemente, la ecuación (5.3) describe el aspecto cinemático del sistema; vgr., la relación entre el momento y la velocidad de la partícula. Esto se ve más evidente si reescribimos la ecuación (5.3) en la forma sugestiva

$$P_1^{\Pi V_i} \circ X_\eta^{\dot f(1)} \circ (\Theta_1^{\Pi V_i} \circ P_1^{\Pi V_i} \circ f(1) \circ (\eta \wedge \dot\alpha)) + \Theta_2^{\Pi V_i} \circ P_2^{\Pi V_i} \circ \dot f(1) \circ (\eta \wedge \dot\alpha) =$$
$$D(P_1^{\Pi V_i} \circ \dot f(1) \circ (\eta \wedge \dot\alpha))$$

donde (omitiendo superíndices), $P_1 \circ f(1) \circ (\eta \wedge \dot\alpha)$ corresponde a la posición de la partícula, $P_2 \circ \dot f(1) \circ (\eta \wedge \dot\alpha)$ a su momento y $D(P_1^{\Pi V_i} \circ \dot f(1) \circ (\eta \wedge \dot\alpha))$ a su velocidad. Luego, la expresión anterior es una relación implícita entre estas magnitudes.

La segunda interpretación física que nos concierne dentro de nuestro planteamiento es la referente al flujo asociado a un campo vectorial que describa la "interacción" sobre el sistema. Para ello es necesario adoptar ciertas condiciones adicionales sobre la función de evolución que lo describe, y que de hecho ya hemos manejado implícitamente al hablar de su campo asociado. Nosotros la haremos explícita incluyendola dentro del postulado fundamental M.A.2 (recuérdese que estamos considerando sistemas mecánicos reversibles)

-- La función de evolución de un sistema mecánico reversible $\Psi \in ((S^S)^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}}$ satisface la condición: $\Psi(\alpha) \wedge \tilde{\imath} \in S^{\mathbb{R}}$ es diferenciable en una vecindad de $t \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall \alpha \in S$. --

En el caso estacionario nos planteamos el siguiente problema: Si X es un campo vectorial que describe la interacción sobre el sistema, ¿ qué relación existe entre su flujo asociado, bajo las condiciones apropiadas de diferenciabilidad, y la función de evolución que lo describe? Los antecedentes necesarios para solucionar el problema ya se han visto en la sección anterior y podemos razonar de la siguiente manera:

Supongamos que X describe la interacción sobre el sistema; en tal caso $X = X_\eta$, y si $\Phi \in (S^S)^U$ es el flujo asociado a X, donde U es un intervalo abierto que contenga a $0 \in \mathbb{R}$. Como la función de evolución $\eta \in (S^S)^{\mathbb{R}}$ satisface ser un flujo en U entonces $\eta \circ \imath_U = \Phi$, de acuerdo al teorema (4.6). Es decir, el flujo asociado al campo de interacciones es precisamente la función de evolución del sistema.

Así pues, el problema fundamental de la Mecánica Analítica - determinar la evolución del sistema a partir del conocide las interacciones a las que está sujeto- tiene solución satisfactoria al menos en el planteamiento formal. En el capítulo siguiente haremos resaltar los aspectos relevantes que distinguen la estructura del espacio de estados de un sistema mecánico, lo cual nos permitirá plantear la solución para un tipo muy específico de interacciones.

Para finalizar esta sección haremos una observación que nos parece interesante en su aspecto conceptual. Resulta de una aplicación directa del teorema (4.6):

Supongamos que habiendo postulado la existencia de la función de evolución con las propiedades de flujo, proponemos a cierto campo vectorial como la descripción de las interacciones; si fuera posible determinar su flujo y las predicciones del modelo resultaran incompatibles con ciertas observaciones experimentales de la función de evolución, existen dos posibles razones para ello: La primera sería que el campo vectorial admite dos flujos distintos; la segunda, que el modelo propuesto de interacciones es incorrecto. De acuerdo al teorema (4.6) la primera posibilidad no puede darse, luego el modelo es incorrecto a fortiori.

Este razonamiento nos brinda una secuela lógicamente consistente en la búsqueda de las leyes de movimiento....

2.1 VARIEDADES SIMPLECTICAS

El postular al haz cotangente del espacio de configuración de un sistema mecánico como el espacio de estados, trae consigo que el espacio de estados posea canónicamente una estructura simpléctica, lo cual es un resultado importante. Su trascendencia se debe a que permite considerar a cierta clase de campos vectoriales en $T(M)^*$, conocidos como campos Hamiltonianos, lo cual es fundamental en la rama de la Mecánica Analítica llamada Mecánica de Hamilton.

Posteriormente veremos que cuando es posible situar al sistema dentro de la Mecánica de Hamilton, i.e. cuando el campo de interacciones satisface ser un campo Hamiltoniano, podemos generar ciertas ecuaciones diferenciales parciales (ecuaciones de Hamilton) cuya solución nos permite obtener curvas integrales, lo cual constituye esencialmente la solución a nuestro problema fundamental.

La generalidad del tratamiento Hamiltoniano de la Mecánica permite dar planteamientos análogos en otras ramas de la Física, como Mecánica Cuántica y Teorías de Campo, incluso algunos autores (i) proponen que los sistemas mecánicos sean caracterizados por la propiedad de que su espacio de estados constituya una variedad simpléctica, lo cual no deja de ser interesante desde un punto de vista formal pero difícil de concebir en la Mecánica...

Esta concepción de sistema mecánico conduce a dos ideas realmente relevantes:

a) Describir a un sistema mecánico por una clase de variedades simplécticas difeomorfas, tales que bajo estos difeomorfismos la estructura simpléctica se preserve.

Más adelante veremos que los planteamientos de Hamilton y Lagrange son consistentes con esta concepción.

b) Dado un sistema mecánico, alterar la forma simpléctica de tal modo que el problema original sea equivalente a uno cuya solución sea conocida .

Este punto de vista es relativamente nuevo y resulta bastante atractivo para su investigación. Desgraciadamente queda fuera de nuestros propósitos debido a su complejidad sobre todo en el aspectos de sus fundamentos.

(i) Véase p. ej. el artículo de Sternberg.(19)

En esta sección mostraremos que efectivamente el haz cotangente a una variedad dada posee una estructura simpléctica canónica. Veremos además algunos resultados referentes a difeomorfismos entre variedades que preservan la simplecticidad. Los resultados desarollados en la sección presente serán básicos, y haremos referencia a ellos con frecuencia.

Así pues, empezaremos por definir lo que habremos de entender por una variedad simpléctica en el contexto más general.

1.1 <u>DEFINICION</u>. Sea $(P, \mathcal{Q}^{(n)}_{(P,V)})$ una variedad diferenciable (i) con $n \geq 2$. $\omega \in \Lambda_2(P)$. Si ω satisface

1) $d\omega = 0$

2) ω es débilmente no degenerada (ii),

decimos que ω es una forma débilmente simpléctica en P.

La no degeneración débil o fuerte de ω es trascendente en las variedades de dimensión infinita. La siguiente definición hace énfasis en esta distinción.

1.1' <u>DEFINICION</u>. Sea $(P, \mathcal{Q}^{(n)}_{(P,V)})$ una variedad diferenciable con $n \geq 2$. $\omega \in \Lambda_2(P)$. Si ω satisface

1) $d\omega = 0$

2) ω es fuertemente no degenerada (iii)

decimos que ω es una forma fuertemente simpléctica en P. O simplemente una forma simpléctica.

Cuando en la variedad P adoptamos una forma débilmente(fuertemente) simpléctica, hablamos de una variedad débilmente (fuertemente) simpléctica. Es importante hacer notar que una variedad diferenciable puede tener más de una estructura simpléctica, y en general la simplecticidad fuerte o débil dependerá en gran medida del espacio de modelación de la variedad.

(i) Para la existencia de una forma diferenciable es necesario que $n \geq 2$.

(ii) Es decir $\overline{\dot{\omega}(P)} \circledcirc (\bar{\dot{\theta}}_1^{T_p(P)^{\bar{2}}} + \dot{\theta}_2^{T_p(P)^{\bar{2}}}) \in \mathrm{Hom}(T_p(P), \mathrm{Hom}(T_p(P), \mathbb{R}))$ es inyectiva $\forall p \in P$

(iii) Es decir $\overline{\dot{\omega}(P)} \circledcirc (\bar{\theta}_1 + \dot{\bar{\theta}}_2) \in \mathrm{Hom}(T_p(P), \mathrm{Hom}(T_p(P), \mathbb{R}))$ es biyectiva $\forall p \in P$. Si V es de Banach, $(\overline{\dot{\omega}(P)} \circledcirc (\bar{\theta}_1 + \dot{\bar{\theta}}_2))^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T_p(P), \mathbb{R}), T_p(P))$.

Por el momento, el caso de interés para nosotros es el espacio de estados de un sistema mecánico, $T(M)^*$, donde M es el espacio de configuración.
Como ya hemos visto (secc.1.2), $T(M)^*$ posee una estructura canónica de variedad diferenciable modelada sobre $\prod_{i \in \bar{2}} V_i$,con $V_1 \equiv V$ y $V_2 \equiv Hom(V, \mathbb{R})$, siendo V el espacio de modelación de M. Si M es una variedad de clase $C^{(n)}$, $T(M)^*$ resulta ser una variedad de clase $C^{(n-1)}$. En lo que sigue supondremos que M es de clase $C^{(n)}$ con $n \geq 3$, de modo que $T(M)^*$ es de clase $C^{(n-1)}(n-1 \geq 2)$.

La estructura simpléctica que podemos dar a $T(M)^*$ es muy particular. Se construye en base a la proyección natural en $T(M)$, $\pi \in M^{T(M)^*}$. Definiendo primero la 1-forma fundamental (i) en el haz cotangente:

$$\tilde{\Theta} \equiv I_{T(M)^*} \odot (\pi)_* \odot P_1^{(1)} \quad \in \prod_{\alpha \in T(M)^*} \mathcal{L}_1^{ac}(T_\alpha(T(M)^*))$$

con $\quad P_1^{(1)} \equiv \{(\alpha, P_1^{T_\alpha(T(M)^*)^{\bar{1}}}) / \alpha \in T(M)^*\}$

Tenemos que

$$\tilde{\Theta}^{\dot{T}(i)} = P_2^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \odot \dot{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \odot \dot{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in\bar{2}} V_i)^{\bar{1}}} \quad \in \left(\mathcal{L}_1^{ac}(\prod_{i\in\bar{2}} V_i)\right)^{\dot{T}(i)(\ell(i))}$$

pudiéndose verificar que $\tilde{\Theta}^{\dot{T}(i)} \in C^{(\omega)}\ \forall i \in I_F$, y dado que $T(M)^*$ es de clase $C^{(n-2)}$, $\tilde{\Theta} \in \Lambda_1^{(n-2)}(T(M)^*)$. Ahora podemos considerar a su derivada exterior (ii)

$$\omega \equiv d\tilde{\Theta} \quad \in \prod_{\alpha \in T(M)^*} \mathcal{L}_2^{ac}(T_\alpha(T(M)^*))$$

y de su representación local en base a una carta T(i):

$$\omega^{\dot{T}(i)} = \left(\left(\dot{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \odot \dot{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in\bar{2}} V_i)^{\bar{2}}}\right) \odot \left(\dot{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \odot \dot{\bar{P}}_2^{(\prod_{i\in\bar{2}} V_i)^{\bar{2}}}\right) - \left(\dot{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \odot \dot{\bar{P}}_2^{(\prod_{i\in\bar{2}} V_i)^{\bar{2}}}\right) \odot \left(\dot{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \odot \dot{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in\bar{2}} V_i)^{\bar{2}}}\right)\right) \cdot I_{\dot{T}(i)(\ell(i))}$$

$$\in \left(\mathcal{L}_2^{ac}(\prod_{i\in\bar{2}} V_i)\right)^{\dot{T}(i)(\ell(i))}$$

se sigue (iii) que $\omega^{\dot{T}(i)} \in C^{(\omega)}\ \forall i \in I_F$; luego $\omega \in \Lambda_2^{(n-2)}(T(M)^*)$

De su definición tenemos que $d\omega = 0$, es decir ω es cerrada, y la no degeneración débil de ω puede verse en el apéndice 3,

---

(i) $\Theta \equiv I_{T(M)^*} \odot \pi_* \in \prod_{\alpha \in T(M)^*} Hom(T_\alpha(T(M)^*), \mathbb{R})$ es el campo covectorial básico.
(ii) Véase la referencia (17) para la definición de la derivada exterior.
(iii) Debido a que su representación local es constante.

por lo que ω es débilmente simpléctica. En el apéndice mencionado se hace ver que para tener la simplecticidad fuerte de ω es necesario que el espacio de modelación de M sea un espacio reflexivo; i.e. $V \approx \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})$, lo cual sucede por ejemplo cuando V es de dimensión finita o cuando V es un espacio de Hilbert. De hecho, la condición de que V sea reflexivo es equivalente a la no degeneración fuerte de ω (véase el teo. A.3.4).

En el caso de dimensión finita, la 1-forma canónica en $T(M)^*$ adquiere una expresión particularmente simple en términos de un atlas $\overset{*}{T}{}'F \in \mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M)^*,\ \mathbb{R}^{2m})}$ pues en este caso

$$\tilde{\theta} \circ i_{\xi(i)} = \sum_{a \in \bar{m}} \overset{*}{T}{}'F(i)_{a+m} \wedge d(\overset{*}{T}{}'F(i)_a)$$

$$\omega \circ i_{\xi(i)} = \sum_{a \in \bar{m}} d(\overset{*}{T}{}'F(i)_{a+m}) \wedge d(\overset{*}{T}{}'F(i)_a) \qquad \forall\ i \in I_F$$

Cuando una variedad simpléctica es de dimensión finita, es natural preguntarse si es posible encontrar un atlas dentro de la clase adoptada, en términos del cual la forma simpléctica tenga una expresión particularmente simple. La respuesta es afirmativa (teorema de Darboux) y en particular puede demostrarse que la dimensión del espacio de modelación es de dimensión par, como consecuencia de la no degeneración de la forma simpléctica (ii).

<u>TEOREMA DE DARBOUX</u>. Sean, $(P, \mathcal{A}^{(n)}_{(P,V)})$ una variedad diferenciable con $n \geq 2$ y $\omega \in \Lambda_2(P)$ una forma simpléctica en P. Si P es de dimensión finita, digamos m, entonces la dimensión de P es par y además existe $F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(P,V)}$ tal que

$$\omega \circ i_{\xi(i)} = \sum_{a \in \overline{(\frac{m}{2})}} d(F(i)_{a+\frac{m}{2}}) \wedge d(F(i)_a) \qquad \forall\ i \in I_F$$

A las cartas de F se les denomina cartas simplécticas, o bien, se dice que F es una atlas simpléctico. En el caso de $T(M)^*$, obtenemos que $\overset{*}{T}{}'F$ es un atlas simpléctico para todo atlas F en $\mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$

Existe un método particularmente sencillo de generar variedades simplécticas a partir de una dada: Si $(P, \mathcal{A}^{(n)}_{(P,V)}$)

(i) Véase la sección 1.2.
(ii) Véase la ref.(1) pags. 165 - 175.

es una variedad simpléctica, $(N, \mathfrak{a}^{(r)}_{(N,W)})$ una variedad diferenciable $(n, r \geq 2)$, y $f \in P^N$ un difeomorfismo de clase $C^{(2)}$ (i), entonces

$$f_*(q) \in \mathrm{Hom}(T_q(N), T_{f(q)}(P))$$

es un isomorfismo $\forall\ q \in N$, y podemos considerar a $f^*(\omega) \in \Lambda_2(N)$, donde ω es la forma (débilmente) simpléctica en P. No es difícil ver que $f^*(\omega)$ es cerrada y (débilmente) no degenerada, luego $f^*(\omega)$ es una forma (débilmente) simpléctica.
Dadas dos variedades (débilmente simplécticas $(P, \mathfrak{a}^{(n)}_{(M,V)}, \omega)$ y $(N, \mathfrak{a}^{(r)}_{(N,W)}, \alpha)$ y $f \in P^N$ un difeomorfismo de clase $C^{(2)}$ tal que $f^*(\omega) \equiv \alpha$ se dice que f es un mapeo simpléctico o bien una transformación canónica. En el caso que manejamos anteriormente, la estructura simpléctica dada a N es la que hace al $C^{(2)}$- difeomorfismo un mapeo simpléctico.

Una clase importante de mapeos simplécticos entre dos haces cotangentes $T(M)^*$ y $T(Q)^*$ (con las estructuras simplécticas canónicas) son generadas a partir de difeomorfismos entre las variedades M y Q, que de tratarse de espacios de configuración de un sistema mecánico, pueden interpretarse como un "cambio en la descripción". La forma de construir estos mapeos es la siguiente:
Sean $(M, \mathfrak{a}^{(n)}_{(M,E)})$, $(Q, \mathfrak{a}^{(n)}_{(Q,F)})$ variedades diferenciables con $n \geq 3$ y $h \in Q^M$ un difeomorfismo de clase $C^{(n)}$; entonces

$$\overset{*}{T}(h) \equiv I_{T(M)^*} \circledcirc \left((h^{-1})_* \circ h \circ \pi_{T(M)^*} \right) \in T(Q)^{*\,T(M)^*}$$

es el levantamiento (ii) de h sobre los haces cotangentes. Dado que $\overset{*}{T}(h \circ h) = \overset{*}{T}(h) \circ \overset{*}{T}(h')$, se sigue que el levantamiento de h es una biyección. Si $G \in \mathfrak{a}^{(n)}_{(M,E)}$ y $H \in \mathfrak{a}^{(n)}_{(Q,F)}$, la representación local de $\overset{*}{T}(h)$ es

$$\overset{*}{T}_{H(l)} \circ \overset{*}{T}(h) \circ \overset{*}{T}_{G(j)}^{-1} = \theta_1^{\prod_{i\in 2} F_i} \circ H(l) \circ h \circ G(j)^{-1} \circ P_1^{\prod_{i\in 2} E_i} + \theta_2^{\prod_{i\in 2} F_i} \circ \left(P_2^{\prod_{i\in 2} E_i} \circledcirc \left((G(j) \circ h^{-1} \circ H(l)^{-1})' \circ H(l) \circ h \circ G(j)^{-1} \circ P_1^{\prod_{i\in 2} E_i} \right) \right)$$

con $E_1 \equiv E$, $E_2 \equiv \mathrm{Hom}(E, \mathbb{R})$; $F_1 \equiv F$, $F_2 \equiv \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$

(i) Si $\omega \in \Lambda_2(P)$ y $f \in C^{(2)} \Rightarrow f^*(\omega) \in \Lambda_2(N)$

(ii) Algunos autores definen a $\overset{*}{T}(h)$ como $\overset{*}{T}(h^{-1})$.

de lo cual puede verse oue $\overset{*}{T}(h) \in C^{(n-1)}$.
Podemos verificar que(i)

$$(\overset{*}{T}(h))^{*}(\tilde{\theta}_Q) = \tilde{\theta}_M$$

donde $\tilde{\theta}_Q$ y $\tilde{\theta}_M$ son las 1-formas fundamentales en $T(Q)^*$ y $T(M)^*$ respectivamente. Para ésto basta ver que

$$(\overset{*}{T}(h))^{*}(\theta_Q) = \theta_M$$

donde ahora $(\overset{*}{T}(h))^*$ denota el retroversor de campos covectoriales (ii). En efecto,

$$\begin{aligned}
(\overset{*}{T}(h))^{*}(\theta_Q) &= (\theta_Q \circ \overset{*}{T}(h)) \circledcirc (\overset{*}{T}(h))_* \\
&= ((I_{T(Q)^*} \circledcirc (\pi_{T(Q)^*})_*) \circ \overset{*}{T}(h)) \circledcirc (\overset{*}{T}(h))_* \\
&= \overset{*}{T}(h) \circledcirc (\pi_{T(Q)^*} \circ \overset{*}{T}(h))_* \\
&= \overset{*}{T}(h) \circledcirc (h \circ \pi_{T(M)^*})_* \\
&= I_{T(M)^*} \circledcirc ((h^{-1})_* \circ h \circ \pi_{T(M)}) \circledcirc (h \circ \pi_{T(M)^*})_* \\
&= I_{T(M)^*} \circledcirc (h^{-1} \circ h \circ \pi_{T(M)^*})_* \\
&= I_{T(M)^*} \circledcirc (\pi_{T(M)^*})_* = \theta_M
\end{aligned}$$

De este resultado se sigue que $\overset{*}{T}(h)$ es un mapeo simpléctico pues $d\tilde{\theta}_M = d((\overset{*}{T}(h))^{*}(\tilde{\theta}_Q)) = (\overset{*}{T}(h))^{*}(d\tilde{\theta}_Q)$

donde $\omega_M \equiv d\tilde{\theta}_M$ y $\omega_Q \equiv d\tilde{\theta}_Q$ son las formas (débilmente) simplécticas en $T(M)^*$ y $T(Q)^*$, luego

---

(i) Si $\overset{*}{T}(h) \in C^{(n-1)}$ y $\tilde{\theta}_Q \in \Lambda_1^{(n-2)}(T(Q)^*) \Rightarrow (\overset{*}{T}(h))^{*}(\tilde{\theta}_Q) \in \Lambda_2^{(n-2)}(T(Q)^*)$ que es consistente con $\tilde{\theta}_M \in \Lambda_2^{(n-1)}(T(M)^*)$

(ii) En inglés : "pull-back"

Las transformaciones canónicas que se generan de esta forma se conocen como transformaciones canónicas de punto en los textos clásicos de Mecánica, y la razón del nombre proviene de que los elementos de un espacio de configuración se piensan como "puntos en la realidad". Cuando una transformación canónica entre haces cotangentes preserva las 1-formas fundamentales, en particular es una transformación canónica y se dice que es homogénea. Así pues, $\overset{*}{T}(h)$ es una transformación canónica de punto homogénea.

2.2 CAMPOS HAMILTONIANOS.

Nos avocaremos ahora a estudiar con cierto detalle la clase de campos vectoriales (Hamiltonianos) que la estructura simpléctica de una variedad nos permite considerar. Su importancia puede ejemplificarse por el hecho de que generalmente en la Física se concibe a la Mecánica Analítica como la Mecánica de Hamilton, sin hacer distinción alguna. Es conveniente empezar con la definición más general de campos Hamiltonianos debido a que en ocasiones habremos de considerar otras variedades simplécticas además del haz cotangente de un espacio de configuración de una sistema mecánico.

Los resultados de esta sección tomarán una forma más familiar para el lector cuando el espacio de configuración sea de dimensión finita. Este caso será tratado en la siguiente sección.

2.1 <u>DEFINICION</u>. Sean $(P, a^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable con $n \geq 2$, y $\omega \in \Lambda_2^{(n-1)}(P)$ una forma (débilmente) simpléctica. Si para $X \in \mathfrak{X}^{(n-2)}(P)$ existe $H \in \Lambda^{(n-1)}(P)$ tal que (i)

$$X \lrcorner \omega = -dH \qquad \text{(ii)}$$

decimos que X es un campo Hamiltoniano en P y a H se le llama Hamiltoniano de X .

Dado que en ocasiones no es importante que un campo sea globalmente Hamiltoniano, es decir en toda la variedad, es conveniente introducir la definición de campo localmente Hamiltoniano.

2.1' <u>DEFINICION</u>. Sean P, X como en la definición 2.1. Si para cada $p \in P$ existen U vecindad abierta de p y $H \in \Lambda^{(n-1)}(U)$ tales que

$$(X \lrcorner \omega) \circ i_U = -dH$$

decimos que X es un campo localmente Hamiltoniano.

(i) Obsérvese que $dH \in \Lambda_1^{(n-1)}(P)$ de acuerdo a la ref. (13). Si $X \in \mathfrak{X}^{(n-2)}(P)$ y $\omega \in \Lambda_2^{(n-1)}(P)$ entonces $X \lrcorner \omega \in \Lambda_1^{(n-1)}(P)$, por lo que la definición es consistente. En otras palabras, el Hamiltoniano de un campo de clase $C^{(n-2)}$ es de clase $C^{(n-1)}$.

(ii) $X \lrcorner \omega$ es el producto interior de X con ω :

$$X \lrcorner \omega \equiv \omega \circledcirc (\overline{\Theta_1^{(2)} \mathbin{\dot\wedge} X} + \Theta_2^{(1)} \circledcirc P_1^{(1)})$$

Antes de ver las consecuencias de las definiciones anteriores, analicemos las condiciones suficientes para que un campo sea localmente Hamiltoniano. Para ésto, tomemos $p \in P$ y alguna carta $F(i)$ tal que $p \in f(i)$ con $F \in \mathcal{Q}^{(n)}_{(P,V)}$
Como

$$(X \lrcorner \omega)^{F(i)} = \omega^{F(i)} \circledcirc (\dot{\Theta}_1^{V^2} \circledcirc \bar{\dot{X}}^{F(i)} + \bar{\dot{\Theta}}_2^{V^2} \circledcirc \dot{P}_1^{V^1})$$

donde $\omega^{F(i)} \in (\mathcal{A}_2^{ac}(V))^{F(i)(f(i))}$ es la representación local de ω y $X^{F(i)} \in V^{F(i)(f(i))}$ es la representación local de X, obtenemos que $(X \lrcorner \omega)^{F(i)} \in (\mathcal{A}_1^{ac}(V))^{F(i)(f(i))}$ es de clase $C^{(n-2)}$. Luego, del lema de Poicaré (i), se sigue que si $n \geq 3$ y $X \lrcorner \omega$ es una 1-forma cerrada, entonces para cada $p \in P$ existen U vecindad abierta de p y $H \in \Lambda^{(n-1)}(U)$ tales que

$$(X \lrcorner \omega) \circ i_U = - dH$$

es decir, X es localmente Hamiltoniano.

Veamos ahora las consecuencias de las definiciones anteriores. De la definición 2.1 se sigue que si H es un Hamiltoniano de X y g una 0-forma cerrada, entonces H + g es un Hamiltoniano de X, luego el Hamiltoniano de un campo está determinado hasta una 0-forma (función) cerrada (ii). Sin embargo al contrario la situación es diferente pues una vez dada $H \in \Lambda^{(n-1)}(P)$ Hamiltoniano de un campo, entonces, como consecuencia de la no degeneración débil de ω, dicho campo es único.

Cuando ω es fuertemente no degenerada y el espacio de modelación de P es un espacio de Banach, podemos afirmar que toda función $H \in \Lambda^{(n-1)}(P)$ es el Hamiltoniano de un único campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^{(n-2)}(P)$. En efecto, la forma simpléctica induce una función

$$\Upsilon \equiv \bar{\omega} \circledcirc (\bar{\ddot{\Theta}}_1^{(2)} + \bar{\dot{\Theta}}_2^{(2)}) \in \prod_{p \in P} \mathrm{Hom}(T_p(P), \mathrm{Hom}(T_p(P), \mathbb{R}))$$

$$\text{con} \quad \mathrm{inv}_\wedge \Upsilon \in \prod_{p \in P} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T_p(P), \mathbb{R}), T_p(P))$$

Puede demostrarse (iii) que si $\omega \in \Lambda^{(n-1)}(P)$ entonces $\Upsilon \in C^{(n-1)}$ e $\mathrm{inv}_\wedge \Upsilon \in C^{(n-1)}$. Por tanto, si $H \in \Lambda^{(n-1)}(P)$, dH es un campo covectorial de clase $C^{(n-2)}$ y el campo vectorial asociado a

(i) Véanse p. ej. (1) pag. 118; (9) pag. 124.
(ii) En particular si P es conexo, g es una función constante.
(iii) Véase el apéndice A.2.

$dH = \delta H \circledcirc P_1^{(1)}$ sería

$$-X = (\mathrm{inv} \vartriangle \Upsilon) \vartriangle \delta H \quad \in \prod_{p \in P} T_p(P)$$

cuya representación local es

$$-X^{F(i)} = (\mathrm{inv} \vartriangle \Upsilon)^{F(i)} \vartriangle (\delta H)^{F(i)}$$

y dado que X , $(\mathrm{inv} \vartriangle \Upsilon)^{F(i)} \in C^{(n-1)}$, $(\delta H)^{F(i)} \in C^{(n-2)}$ se sigue que $X^{F(i)}$ $C^{(n-2)}$. Además

$$- X \lrcorner \omega = \omega \circledcirc (\overline{\Theta_1^{(1)} \vartriangle X} + \Theta_2^{(2)} \circledcirc P_1^{(1)})$$

$$= ((\bar{\omega} \circledcirc (\bar{\Theta}_1^{(1)} + \bar{\Theta}_2^{(1)})) \vartriangle X) \circledcirc P_1^{(1)}$$

$$= (\Upsilon \vartriangle ((\mathrm{inv} \vartriangle \Upsilon) \vartriangle \delta H)) \circledcirc P_1^{(1)}$$

$$= ((\Upsilon \circledcirc (\mathrm{inv} \vartriangle \Upsilon)) \vartriangle \delta H) \circledcirc P_1^{(1)}$$

$$= \delta H \circledcirc P_1^{(1)} = dH$$

$$\therefore \quad X \lrcorner \omega = - dH$$

Lo cual nos dice que $X \in \mathfrak{X}^{(n-2)}(P)$, puesto que la variedad es de clase $C^{(n)}$ con $n \geqslant 2$.
Denotaremos a los campos Hamiltonianos de clase $C^{(n-2)}$ en P por $\mathcal{H}^{(n-2)}(P)$ y a las funciones en $\Lambda^{(n-1)}(P)$ que resulten ser Hamiltonianos de campos en $\mathcal{H}^{(n-2)}(P)$ las denotaremos por $\mathcal{P}^{(n-1)}(P)$.
El campo asociado a un Hamiltoniano $H \in \mathcal{P}^{(n-1)}(P)$ lo denotaremos por X_H , y al Hamiltoniano de un campo $X \in \mathcal{H}^{(n-2)}(P)$ (hablando con propiedad, algún Hamiltoniano) por H_X .

Es conveniente citar algunos otros resultados concernientes a los campos Hamiltonanos que en ciertos casos nos permitirán analizar su comportamiento desde un punto de vista algebraico.
Dados $X, Y \in \mathcal{H}^{(n-2)}(P)$ con $n \geqslant 3$, la derivada de Lie de Y respecto a X es un campo vectorial en P, cuya representación local es (i)

$$[X, Y]^{F(i)} = (Y^{F(i)})' \vartriangle X^{F(i)} - (X^{F(i)})' \vartriangle Y^{F(i)} \quad \in \quad V^{F(i)(\xi(i))}$$

de lo cual puede verse que $[X,Y] \in \mathfrak{X}^{(n-3)}(P)$ y podemos cuestionarnos si $[X,Y]$ es un campo Hamiltoniano. Denotando con D_X la

(i) Véase (13) pag.80.

derivada de Lie (respecto a X) de formas (i), tenemos que

$$[X,Y] \lrcorner\, \omega = D_X(Y \lrcorner\, \omega) - Y \lrcorner\, D_X\, \omega \qquad \text{(ii)}$$
$$= D_X(-dH_Y)$$
$$= -d(D_X H_Y)$$

pues $D_X\omega = 0$ ya que $X \lrcorner\, \omega = -dH$ y $d\omega = 0$; además, $D_X(-dH_Y) = -d(D_X H_Y)$ y como $X \in \mathcal{X}^{(n-2)}(P)$ y $H_Y \in \Lambda^{(n-1)}(P)$ se sigue que $D_X H_Y \in \Lambda^{(n-2)}(P)$, es decir $D_X H_Y \in \mathcal{P}^{(n-2)}(P)$.

Si definimos para f, $g \in \mathcal{P}^{(n-1)}$

$$\{f, g\} \equiv D_{X_g} f = -X_g \lrcorner\, (X_f \lrcorner\, \omega) = X_f \lrcorner\, (X_g \lrcorner\, \omega) = -\{g, f\}$$

llamado paréntesis de Poison de f y g, tenemos que $\{f, g\} \in \mathcal{P}^{(n-1)}(P$ y

$$H_{[X,Y]} = \{H_X, H_Y\}$$

En particular, si P es de clase $C^{(\infty)}$ y está modelada sobre un espacio de Banach, $\omega \in C^{(\infty)}$ es simpléctica y consideramos a $\mathcal{H}(P) \equiv \mathcal{H}^{(\infty)}(P)$, $\mathcal{P}(P) \equiv \mathcal{P}^{(\infty)}(P)$; $\mathcal{H}(P)$ y $\mathcal{P}(P)$ resultan ser álgebras de Lie (con las operaciones definidas por $[\,,]$ y $\{\,,\}$, y las operaciones usuales de espacio vectorial real) donde la función

$$\{(H, X_H) \in \mathcal{P}(P) \times \mathcal{X}(P) \;/\; X \lrcorner\, \omega = -dH\} \in \mathcal{H}(P)^{\mathcal{P}(P)}$$

es un monomorfismo de álgebras de Lie.

Consideremos ahora un campo Hamiltoniano $X \in \mathcal{H}^{(n-1)}(P)$. Podemos preguntarnos la relación que guardan las curvas integrales de X y su Hamiltoniano H. Si $c \in P^{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ es una curva integral de X, tenemos

$$D(H \circ c) = (\delta H \circ c) \wedge c'$$
$$= (\delta H \wedge X) \circ c$$
$$= -(X \lrcorner\, dH) \circ c$$
$$= -(X \lrcorner\, (X \lrcorner\, \omega)) \circ c = 0$$

debido a la antisimetría de ω . Luego, $H \circ c$ es constante. Esta propiedad de los campos Hamiltonianos es un resultado

(i) $D_X\omega = d(X \lrcorner\, \omega) + X \lrcorner\, d\omega$

(ii) Véase p. ej. (1) pag 121

general, que se basa únicamente en el hecho de que P sea una variedad simpléctica y X un campo Hamiltoniano. No depende, por ejemplo, de que P sea un haz vectorial, por lo que podríamos decir que es una propidad "geométrica". En Mecánica, el Hamiltoniano de una campo puede identificarse frecuentemente con la energía mecánica del sistema y el resultado anterior se conoce como la "Ley de conservación de la energía".

Notemos que la constancia de H a lo largo de curvas integrales de X puede deducirse de la relación

$$D_X H = 0$$

pues $D_X H = 0 \Rightarrow \quad \delta H \wedge X = 0$, luego si $c \in P^I$ es una curva integral de X,

$$(\delta H \wedge X) \circ c = (\delta H \circ c) \wedge c'$$
$$= D(H \circ c) = 0$$

La generalización de este tipo de "constantes de movimiento" como el Hamiltoniano resulta inmediata y la idea resulta interesante. Esta generalización puede apreciarse en la siguiente definición.

<u>DEFINICION</u> Sean $(P, \alpha^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable con $n \geq 3$ y $X \in \mathcal{X}^{(n-2)}(P)$. Si $\alpha \in \Lambda^{(n-1)}_k(P)$ satisface

$$D_X \alpha = 0$$

decimos que α es una k- forma invariante respecto a X.

La razón de esta nomenclatura proviene del siguiente resultado (i):

Si $\eta \in (P^P)^I$ es el flujo asociado a X (con V un espacio de Banach), entonces

$$D_X \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta(t)^* \alpha = \alpha \quad \forall\, t \in I$$

Hemos visto ya un caso particular de esta condición cuando consideramos un campo Hamiltoniano $X \in \mathcal{X}^{(n-2)}(P)$ en la variedad (débilmente) simpléctica P : $D_X \omega = 0$, donde ω es la forma simpléctica en P.

En particular, si V es Banach y $\eta \in (P^P)^I$ el flujo asociado a X, tenemos del resultado antes mencionado que

$$\eta(t)^* \omega = \omega \qquad \forall\, t \in I$$

lo cual resulta relevante, ya que de este modo obtenemos que $\{\eta(t) \,/\, t \in I\}$ es un grupo de transformaciones canónicas en P.

La importancia de considerar formas invariantes respecto a campos aparece cuando consideramos sistemas mecánicos que

(i) Su demostración puede verse en la ref. (1) pag. 90.

presentan cierta simetría, en cuyo caso podemos obtener información cualitativa del sistema sin necesidad de determinar explícitamente el flujo del campo vectorial que lo describe. (i) Además las formas invariantes respecto a un campo satisfacen ciertas propiedades algebraicas que nos permiten determinar nuevas formas invariantes respecto al campo. Estas propiedades las resumimos en la siguiente proposición (ii)

2.3 PROPOSICION Sean $(P, \mathfrak{a}^{(n)}_{(M,V)})$ con $n \geq 3$, $X \in \mathcal{X}^{(n-2)}(P)$. Si $\alpha \in \Lambda^{(n-1)}_k(P)$ y $\beta \in \Lambda^{(n-1)}_s(P)$ son formas invariantes respecto a X, entonces:

1) $X \lrcorner \alpha \in \Lambda^{(n-2)}_{k-1}(P)$
2) $d\alpha \in \Lambda^{(n-2)}_{k+1}(P)$
3) $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{(n-1)}_{k+s}(P)$

son formas invariantes respecto a X.

4) Si además $Y \in \mathcal{X}^{(n-2)}(P)$ satisface $[X,Y] = 0$, entonces α y β son formas invariantes respecto a Y. En particular $Y \lrcorner \alpha$, $d\alpha$ y $\alpha \wedge \beta$ son formas invariantes respecto a Y.

Como una aplicación inmediata de la proposición 2.3, consideremos una varidad (débilmente) simpléctica $(P, \mathfrak{a}^{(n)}_{(M,V)})$ con $n \geq 3$. Si $X \in \mathcal{H}^{(n-2)}(P)$, entonces como ya hemos visto la forma simpléctica (débil) ω es invariante respecto a X y de acuerdo al inciso 1) se sigue que $dH = - X \lrcorner \omega$ es una forma invariante respecto a X, lo cual puede considerarse como la versión de que H es constante a lo largo de curvas integrales de X. En particular, si P es de dimensión finita (digamos m con m par)

$$\Omega = \bigwedge_{a \in \overline{m/2}} \omega_a \in \Lambda^{(n-1)}_m(P) \quad \text{con } \omega_a = \omega \ \forall a \in \overline{m/2}$$

es un volumen en P (iii) y de acuerdo al inciso 3), Ω es invariante respecto a X; luego, si $\eta \in (P^P)^I$ es el flujo asociado a X, $\eta(t)$ es un difeomorfismo que preserva la orientación $\forall\ t \in I$, lo cual resulta relevante en teoría de integración en variedades.

De acuerdo al inciso 4), basta verificar que si X es Hamiltoniano y $[X,Y] = 0$, entonces Y es localmente Hamiltoniano pues de $D_X \omega = 0$ se sigue que $D_Y \omega = 0$, es decir, Y es localmente Hamiltoniano.

(i) Véase p. ej. (11) pags. 149 - 163.
(ii) Véase (1) pag. 202 para su demostración.
(iii) Esto significa que Ω es una m- forma en la variedad P (de dimensión m) que es no nula en ningún punto. Equivalentemente P es orientable. Véase (1) pag. 123.

Concretemos ahora los resultados que hemos expuesto cuando P es la variedad $T(M)^*$ donde M es el espacio de configuración. En lo que sigue supondremos que M es una variedad de clase C^n con $n \geq 3$, de tal forma que $T(M)^*$ sea una variedad de clase C^{n-1} y $n-1 \geq 2$ (en realidad no es necesario que $n \geq 4$ para lo que sigue, como podría pensarse según 2.3). Los espacios de modelación de M y $T(M)^*$ los denotaremos por V y $\prod_{i \in 2} V_i$ donde $V_1 \equiv V$ y $V_2 \equiv \mathrm{Hom}(V_1, \mathbb{R})$, como lo hemos hecho usualmente. Supondremos también que V es un espacio de Banach.

El hecho de tener específicamente a $T(M)^*$ como la variedad simpléctica nos permite considerar a cierta clase de campos Hamiltonianos en el haz cotangente que son generados a partir de campos vectoriales en el espacio de configuración. Este tipo de campos resultan adecuados para describir propiedades geométricas del sistema mecánico, y el procedimiento es el siguiente:

Si $Y \in \mathfrak{X}^{(n-1)}(M)$ es un campo vectorial en M, podemos construir el levantamiento de Y al haz cotangente $T(M)^*$, haciendo

$$\overset{*}{T}(Y) \circ i_{\dagger F(i)} \equiv (\mathrm{inv} \vartriangle \Xi^{\dagger F(i)}) \vartriangle \left(\theta_1^{\prod_{i \in 2} V_i} \circ Y^{F(i)} \circ p_1^{\prod_{i \in 2} V_i} - \theta_2^{\prod_{i \in 2} V_i} \circ \left(p_2^{\prod_{i \in 2} V_i} \circledcirc \left((Y^{F(i)})' \circ p_1^{\prod_{i \in 2} V_i} \right) \right) \right)$$

$$\forall\, i \in I_F$$

y puede demostrarse que en efecto, la expresión anterior define un campo $\overset{*}{T}(Y) \in \mathfrak{X}^{(n-2)}(T(M)^*)$. Es fácil ver que $\overset{*}{T}(Y)$ es un campo Hamiltoniano cuyo Hamiltoniano es precisamente

$$H_{\overset{*}{T}(Y)} = \overset{*}{T}(Y) \lrcorner \tilde{\theta}$$

o bien

$$H_{\overset{*}{T}(Y)} = I_{T(M)^*} \vartriangle (\pi_* \vartriangle \overset{*}{T}(Y))$$
$$= I_{T(M)^*} \vartriangle (Y \circ \pi)$$

puesto que $\pi_* \vartriangle \overset{*}{T}(Y) = Y \circ \pi$.

En general, dado un campo vectorial en M, digamos $Y \in \mathfrak{X}^{(n-1)}(M)$ se define la función momento asociada a Y como

$$P(Y) \equiv I_{T(M)^*} \vartriangle (Y \circ \pi) \in \mathbb{R}^{T(M)^*}$$

En estos términos vemos que P(Y) es el Hamiltoniano de $\overset{*}{T}(Y)$

La consideración de las funciones momento nos brinda la posibilidad de determinar otras constantes de movimiento además del Hamiltoniano del sistema H_X cuando el sistema presenta cierta simetría. Veamos como se presenta esta relación. Sabemos que si $Y \in \mathfrak{X}^{(n-1)}(M)$ y $X \in \mathfrak{X}^{(n-2)}(T(M)^*)$ satisfacen $[\overset{*}{T}(Y), X] = 0$ entonces se sigue que H_X es constante a lo largo de las curvas integrales de $\overset{*}{T}(Y)$ y que P(Y) es constante a lo largo

de las curvas integrales de X. Esto último nos dice que P(Y) es una constante de movimiento del sistema (i).
La relación $[\overset{*}{T}(Y), X] = 0$ refleja cierta simetría del sistema como podemos ver:
Si $U \in (T(M)^{*}, T(M)^{*})^{I}$ es el flujo asociado a $\overset{*}{T}(Y)$ entonces (ii)

$$U(t)^{*}\ X = X \qquad \forall\ t \in I$$

donde el difeomorfismo U(t) puede interpretarse como un cambio de coordenadas en $T(M)^{*}$. En efecto, si $\overset{*}{T}F \in \mathcal{a}^{(n-1)}_{(T(M)^{*},\ \Pi V_i)_{i \in I}}$ entonces $G \equiv \overset{*}{T}F \circledcirc \bar{\bar{U}}(t) \in \mathcal{a}^{(n-1)}_{(T(M)^{*},\ \Pi V_i)_{i \in I}}$ y para cualquier $i \in I_F$

$$(U(t)^{*} X)^{G(i)} = (((\Xi^{G(i)} \circ U(t)^{-1}) \circledcirc (U(t)^{-1})_{*}) \triangle X) \circ U(t) \circ G(i)^{-1}$$

$$= ((((G(i) \circ U(t)^{-1} \circ \overset{*}{T}F(i)^{-1})' \circ \overset{*}{T}F(i)) \circledcirc \Xi^{\overset{*}{T}F(i)}) \triangle X) \circ U(t) \circ G(i)^{-1}$$

$$= (\bar{\bar{I}}_{\Pi V_i,\ i \in I} \triangle (\Xi^{\overset{*}{T}F(i)} \triangle X)) \circ \overset{*}{T}F(i)^{-1}$$

$$= (\Xi^{\overset{*}{T}F(i)} \triangle X) \circ \overset{*}{T}F(i)^{-1} = X^{\overset{*}{T}F(i)}.$$

Resumiendo: De $U(t)^{*} X = X$ se sigue que

$$X^{G(i)} = X^{\overset{*}{T}F(i)} \qquad \forall\ i \in I_F$$

en otras palabras, la descripción de la interacción es la misma en términos de los atlas TF y TF $\circledcirc$ $\overline{U(t)}$.
Más adelante veremos algunos ejemplos concretos de sistemas mecánicos en los que se presenta la situación que hemos expuesto anteriormente y su relevancia en la descripción del sistema.

(i) Cabe hacer notar que los campos Hamiltonianos $\overset{*}{T}(Y)$ y X tienen un carácter esencialmente distinto desde un punto de vista físico, pues $\overset{*}{T}(Y)$ describe "acciones geométricas" sobre el sistema, como "rotaciones infinitesimales", "traslaciones infinitesimales", etc., mientras que X describe interacciones sobre el sistema.

(ii) Véanse las refs. (8) pag. 107 y (1) pag. 99, ej. 2.2.G.

2.3 ECUACIONES DE HAMILTON

Consideremos concretamente la variedad (débilmente) simpléctica $(T(M)^*, \alpha^{(n-1)}_{(T(M)^*, \prod_{i\in I} V_i)})$ donde M es de clase $C^{(n)}$ con $n \geq 3$. Analicemos la representación local de un campo Hamiltoniano $X \in \mathcal{X}^{(n-3)}(T(M)^*)$ con Hamiltoniano $H \in \mathcal{F}^{(n-2)}(T(M)^*)$; es decir, satisface la relación

$$X \lrcorner\, \omega = - dH \qquad \ldots (3.1)$$

La representación local de la 2 - forma canónica en términos de una carta $\overset{*}{T}(i)$ es, (i)

$$\omega^{\overset{*}{T}(i)} = \left(\bar{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{2}}}\right) \circledast \left(\bar{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_2^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{2}}}\right) - \left(\bar{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_2^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{2}}}\right) \circledast \left(\bar{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{2}}}\right)$$

$$\in \left(\mathcal{L}_2^{ac}\left(\prod_{i\in I} V_i\right)\right)^{\overset{*}{T}(i)\,(\overset{*}{T}(i))}$$

las representaciones locales de X y dH son

$$X^{\overset{*}{T}(i)} = \Theta_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circ X_1^{\overset{*}{T}(i)} + \Theta_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circ X_2^{\overset{*}{T}(i)} \in \left(\prod_{i\in I} V_i\right)^{\overset{*}{T}(i)\,(\overset{*}{T}(i))}$$

donde $X_1^{\overset{*}{T}(i)} = P_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circ X$; $X_2^{\overset{*}{T}(i)} \doteq P_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circ X^{\overset{*}{T}(i)}$

$$(dH)^{\overset{*}{T}(i)} = \left(H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1}\right)' \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}$$

$$= \left(\left(H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1}\right)'_1 \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} + \left(H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1}\right)'_2 \circledcirc \bar{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i}\right) \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}$$

donde $\left(H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1}\right)'_j \equiv \left(H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1}\right)' \circledcirc \hat{\bar{\Theta}}_j^{\prod_{i\in I} V_i} \in \mathrm{Hom}(V_j, \mathbb{R})^{\overset{*}{T}(i)\,(\overset{*}{T}(i))}$ es la diferencial parcial j-ésima $\forall\, j \in \bar{2}$. (ii)

De la condición (3.1) se sigue que

$$\left(X \lrcorner\, \omega\right)^{\overset{*}{T}(i)} = - (dH)^{\overset{*}{T}(i)}$$

donde $(X \lrcorner\, \omega)^{\overset{*}{T}(i)} = \omega^{\overset{*}{T}(i)} \circledcirc \left(\bar{\bar{\Theta}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{2}}} \circledcirc \bar{\bar{X}}^{\overset{*}{T}(i)} + \bar{\bar{\Theta}}_2^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{2}}} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}\right)$, luego

$$(X \lrcorner\, \omega)^{\overset{*}{T}(i)} = \left(\bar{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{X}}^{\overset{*}{T}(i)}\right) \circledast \left(\bar{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}\right) - \left(\bar{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}\right) \circledcirc \left(\bar{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{X}}^{\overset{*}{T}(i)}\right)$$

$$= \left(\overline{P_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circ X^{\overset{*}{T}(i)}}\right) \circledast \left(\bar{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}\right) - \left(\bar{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}\right) \circledast \left(\overline{P_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circ X^{\overset{*}{T}(i)}}\right)$$

$$= X_2^{\overset{*}{T}(i)} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}} - \left(\bar{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circledcirc \bar{\bar{X}}_1^{\overset{*}{T}(i)}\right) \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}$$

$$= \left(X_2^{\overset{*}{T}(i)} \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} - \left(\left(\bar{\bar{I}}_{\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})} \circledast \bar{I}_V\right) \circ X_1^{\overset{*}{T}(i)}\right) \circledcirc \bar{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i}\right) \circledcirc \bar{\bar{P}}_1^{(\prod_{i\in I} V_i)^{\bar{1}}}$$

(i) Véase secc. 2.1 pag. 39.
(ii) Véase ref. (8) pag. 153.

$$(X \lrcorner \omega)^{\overset{*}{T}(i)} = \left(X_2^{\overset{*}{T}(i)} \otimes \bar{\bar{\rho}}_1^{\pi V_i \, i \in \mathcal{I}} - (\lambda \circ X_2^{\overset{*}{T}(i)}) \otimes \bar{\bar{\rho}}_2^{\pi V_i \, i \in \mathcal{I}} \right) \otimes \rho_1^{(\pi V_i)_{i \in \mathcal{I}}^{T}}$$

con (i) $\lambda = \bar{\bar{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})} \otimes \bar{I}_V \quad \epsilon \quad Hom(V, Hom(Hom(V,\mathbb{R}), \mathbb{R}))$

De la expresión para $(dH)^{\overset{*}{T}(i)}$ obtenemos que

$$\left.\begin{aligned} \lambda \circ X_1^{\overset{*}{T}(i)} &= (H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})_2' \\ X_2^{\overset{*}{T}(i)} &= - (H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})_1' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (3.2)$$

y en el caso en que V sea reflexivo, las expresiones anteriores son equivalentes a

$$\left.\begin{aligned} X_1^{\overset{*}{T}(i)} &= \lambda^{-1} \circ (H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})_2' \\ X_2^{\overset{*}{T}(i)} &= - (H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})_1' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (3.2)'$$

En este caso, la existencia de λ^{-1} nos permite identificar a $Hom(Hom(V,\mathbb{R}), \mathbb{R})$ con V y como

$$(H \circ \overset{*}{T}(i))_2' \; \epsilon \; Hom(Hom(V,\mathbb{R}), \mathbb{R})^{[\overset{*}{T}(i)](\overset{*}{T}(i))}$$

algunos autores prefieren omitir el isomorfismo λ^{-1} en las expresiones (3.2)' y reescribirlas simplemente como

$$\begin{aligned} X_1^{\overset{*}{T}(i)} &= (H \circ \overset{*}{T}(i))_2' \\ X_2^{\overset{*}{T}(i)} &= - (H \circ \overset{*}{T}(i))_1' \end{aligned}$$

aunque nosotros preferimos escribir explícitamente el isomorfismo.

Las ecuaciones de Hamilton se siguen de la expresión (3.2) pues si $C \in T(M)^{*I}$ con $I \in \mathcal{X}_0$ es una curva integral de X y $\overset{*}{T}(i)$ una carta en T(M) tal que $C(I) \cap \overset{*}{T}(i) \neq \phi$, obtenemos de la condición de curva integral

$$X \circ C = C'$$

la ecuación diferencial

$$X^{\overset{*}{T}(i)} \circ \overset{*}{T}(i) \circ C = D(\overset{*}{T}(i) \circ C) \qquad \ldots (3.3)$$

Ahora, dado que

$$X^{\overset{*}{T}(i)} \circ \overset{*}{T}(i) \circ C = \theta_1^{\pi V_i \, i \in \mathcal{I}} \circ X_1^{\overset{*}{T}(i)} \circ \overset{*}{T}(i) \circ C + \theta_2^{\pi V_i \, i \in \mathcal{I}} \circ X_2^{\overset{*}{T}(i)} \circ \overset{*}{T}(i) \circ C$$

$$D(\overset{*}{T}(i) \circ C) = \theta_1^{\pi V_i \, i \in \mathcal{I}} \circ D(\overset{*}{T}(i)_1 \circ C) + \theta_2^{\pi V_i \, i \in \mathcal{I}} \circ D(\overset{*}{T}(i)_2 \circ C)$$

(i) Véase definición 3.1 del apéndice A.3

se sigue que
$$X_1^{\overset{*}{T}(i)} \circ \overset{*}{T}(i) \circ C = D(\overset{*}{T}(i)_1 \circ C)$$
$$X_2^{\overset{*}{T}(i)} \circ \overset{*}{T}(i) \circ C = D(\overset{*}{T}(i)_2 \circ C) .$$

y de (3.3) obtenemos finalmente
$$\left.\begin{aligned} (H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_2 \circ \overset{*}{T}(i)\circ C &= \lambda\circ D(\overset{*}{T}(i)_1\circ C) \\ -(H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_1 \circ \overset{*}{T}(i)\circ C &= D(\overset{*}{T}(i)_2\circ C) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (H)$$
siempre que $C \in T(M)^{*\,I}$ sea una curva integral de X y $\overset{*}{T}(i)$ una carta tal que $C(I) \cap \overset{*}{T}\{(i) \neq \phi$. Las expresiones (H) son las ecuaciones de Hamilton en su forma más general (en el sentido de que son válidas en una variedad de dimensión infinita inclusive).

Nótese que hasta el momento estas ecuaciones sólamente establecen una condición necesaria para que una curva diferenciable sea una curva integral del campo Hamiltoniano X; veamos ahora que también es posible plantear una condición suficiente.

Supongamos que $C \in T(M)^{*I}$ satisface las ecuaciones de Hamilton para toda carta $\overset{*}{T}(i)$ tal que $C(I) \cap \overset{*}{T}\{(i) \neq \phi$. Suponiendo que I es un intervalo abierto (i.e. conexo y abierto), hagamos
$$E \equiv \{ \ t \in I \ / \ [X\circ C](t) = C^{\theta}(t) \} \subseteq I$$
Naturalmente E es cerrado en I ya que $T(M)^*$ es Hausdorff. Para ver que también es abierto, sea $t \in E$ y $\overset{*}{T}(i)$, $C(t) \in \overset{*}{T}\{(i)$. Por hipótesis
$$(H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_2 \circ \overset{*}{T}(i)\circ C = \lambda\circ D(\overset{*}{T}(i)\circ C)$$
$$-(H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_1 \circ \overset{*}{T}(i)\circ C = D(\overset{*}{T}(i)_2 \ C)$$
donde H es el Hamiltoniano de X,. por tanto
$$(H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_2 = X_1^{\overset{*}{T}(i)} \quad \text{y} \quad -(H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_1 = X_2^{\overset{*}{T}(i)}$$
es decir $\quad X^{\overset{*}{T}(i)} \circ \overset{*}{T}(i)\circ C = D(\overset{*}{T}(i)\circ C)$

por tanto
$$((\mathrm{inv} \Delta \Xi^{\overset{*}{T}(i)}) \circ C) \Delta (X^{\overset{*}{T}(i)} \circ \overset{*}{T}(i) \circ C) = ((\mathrm{inv} \Delta \Xi^{\overset{*}{T}(i)}) \circ C) \Delta (D(\overset{*}{T}(i)\circ C))$$

o bien
$$X\circ C\circ i_{C^{\cdot\cdot}(\overset{*}{T}\{(i))} = C^{\theta}\circ i_{C^{\cdot\cdot}(\overset{*}{T}\{(i))}$$

es decir $C^{\cdot\cdot}(\overset{*}{T}\{(i)) \subseteq E$ y claramente $C^{\cdot\cdot}(\overset{*}{T}\{(i)) \in \mathcal{N}_t$ lo cual nos dice que E es abierto. Debido a la conexidad de I,.

tenemos finalmente que

$$X \circ C = C'$$

Formalmente, lo que hemos hecho ha sido demostrar la equivalencia del sistema de ecuaciones diferenciales "ordinarias" (3.3) y el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (H). Esto demuestra la importancia de las ecuaciones de Hamilton dentro de nuestro planteamiento, pues a partir de su solución podemos encontrar curvas integrales con condiciones iniciales arbitrarias y eventualmente el flujo del campo, lo cual se traduce en resolver nuestro problema original.

Cuando M es de dimensión finita, digamos m. podemos ver la forma que toman las ecuaciones de Hamilton en términos del atlas mediante el cual podemos modelar a $T(M)^*$ mediante ,

$$\overset{*}{T}F = \dot{\overline{\phi}} \circledcirc \overset{*}{T}F \quad \in \mathcal{Q}^{(n-1)}_{(T(M)^*, \mathbb{R}^{2\bar{m}})}$$

con $$\phi = \sum_{a\in\bar{m}} \theta_a^{\mathbb{R}^{2\bar{m}}} \circ \rho_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circ \rho_1^{\prod_{i\in 2} V_i} + \sum_{a\in\bar{m}} \theta_{a+m}^{\mathbb{R}^{2\bar{m}}} \circ (\rho_2^{\prod_{i\in 2} V_i} \blacktriangle \delta_{(a)}^{(m)}) \in \mathrm{Hom}(\prod_{i\in 2} V_i, \mathbb{R}^{2\bar{m}})$$

y $$\phi^{-1} = \theta_1^{\prod_{i\in 2} V_i} \circ (\sum_{a\in\bar{m}} \theta_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circ \rho_a^{\mathbb{R}^{2\bar{m}}}) + \theta_2^{\prod V_i} \circ (\sum_{a\in\bar{m}} \rho_{a+m} \quad \dot{\overline{\rho}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}}) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{2\bar{m}}, \prod_{i\in 2} V_i)$$

Así pues

$$\begin{aligned}
(H\circ \overset{*}{T}(1)^{-1})'_1 &= (H\circ \overset{*}{T}(1)^{-1})' \circledcirc \dot{\overline{\theta}}_1^{\prod_{i\in 2} V_i} \\
&= ((H\circ \overset{*}{T}(1)^{-1})' \circ \phi^{-1}\circ \phi) \circledcirc \dot{\overline{\phi}}^{-1} \circledcirc \dot{\overline{\phi}} \circledcirc \dot{\overline{\theta}}_1^{\prod_{i\in 2} V_i} \\
&= ((((H\circ \overset{*}{T}(1)^{-1})' \circ \phi^{-1}) \circledcirc \dot{\overline{\phi}}^{-1} \circledcirc \dot{\overline{\phi}} \circledcirc \dot{\overline{\theta}}_1^{\prod_{i\in 2} V_i}) \circ \phi \\
&= ((H\circ \overset{*}{T}'(1)^{-1})' \circledcirc \dot{\overline{\Phi}} \circledcirc \dot{\overline{\theta}}_1^{\prod_{i\in 2} V_i}) \circ \phi \\
&= ((H\circ \overset{*}{T}'(1)^{-1})' \circledcirc \sum_{a\in\bar{m}} \dot{\overline{\theta}}_a^{\mathbb{R}^{2\bar{m}}} \circledcirc \dot{\overline{\rho}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}}) \circ \phi \\
&= (\sum_{a\in\bar{m}} (H\circ \overset{*}{T}'(1)^{-1})'_a \circledcirc \dot{\overline{\rho}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}}) \circ \phi \\
&= \sum_{a\in\bar{m}} \dot{\overline{\rho}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} D_a(H\circ \overset{*}{T}'(1)^{-1})' \circ \phi
\end{aligned}$$

luego $$(H\circ \overset{*}{T}(1)^{-1})'_1 \circ \overset{*}{T}(1)\circ C = \sum_{a\in\bar{m}} \dot{\overline{\rho}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} D_a(H\circ \overset{*}{T}'(1)^{-1}) \circ \overset{*}{T}'(1)\circ C$$

Análogamente tenemos que

$$\begin{aligned}
(H\circ \overset{*}{T}'(1)^{-1})'_2 &= ((H\circ \overset{*}{T}'(1)^{-1})' \circledcirc \dot{\overline{\phi}} \circledcirc \dot{\overline{\theta}}_2^{\prod_{i\in 2} V_i}) \circ \phi \\
&= (H\circ \overset{*}{T}(1)^{-1})' \circ (\sum_{a\in\bar{m}} \dot{\overline{\theta}}_{a+m}^{\mathbb{R}^{2\bar{m}}} \circledcirc (\dot{\overline{I}}_{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^*} \circledcirc \ddot{\overline{\delta}}_{(a)}^{(m)}))
\end{aligned}$$

$$(H \circ \check{T}'(1)^{-1})'_2 = \sum_{a \in \bar{m}} (H \circ \check{T}'(1)^{-1})'_{a+m} \circ \overline{\dot{\lambda}(\delta^{(m)}_{(a)})}$$

$$\therefore \; X' \circ (H \circ \check{T}(1)^{-1}) = \sum_{a \in \bar{m}} (H \circ \check{T}'(1)^{-1}) \, \dot{\bar{\delta}}^{(m)}_{(a)}$$

Por otro lado también podemos obtener que

$$D(\check{T}(1)_1 \circ C) = \sum_{a \in \bar{m}} \theta_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circ D(\check{T}'(1)_a \circ C)$$

$$D(\check{T}(1)_2 \circ C) = \sum_{a \in \bar{m}} \dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \, D(\check{T}'(1)_{a+m} \circ C)$$

y de las ecuaciones de Hamilton :

$$D(\check{T}'(1)_{a+m} \circ C) = - D_a (H \circ \check{T}'(1)^{-1}) \circ \check{T}(1) \circ C$$

$$D(\check{T}'(1)_a \circ C) = D_{a+m} (H \circ \check{T}'(1)^{-1}) \circ \check{T}'(1) \circ C \qquad \forall \, a \in \bar{m}$$

que es su expresión más familiar al lector.

2.4 DERIVADA FIBRADA. VARIEDADES RIEMANNIANAS.

En esta sección introducimos algunos conceptos fundamentales para nuestro tratamiento de la Mecánica Lagrangiana. La noción de derivada fibrada nos permitirá considerar ciertos difeomorfismos entre $T(M)^*$ y $T(M)$ de tal forma que podamos copiar la estructura simpléctica de $T(M)^*$ a $T(M)$. En particular, cuando M sea una variedad Riemanniana podemos definir a la energía cinética, un elemento en $\mathbb{R}^{T(M)}$, la cual induce un difeomorfismo entre dichos haces, vía la derivada fibrada, que se conoce como una transformación de Legendre. La estructura simpléctica generada en $T(M)$ nos permitirá mostrar hasta qué punto se da la compatibilidad- en el contexto de las variedades simplécticas- entre los planteamientos de Hamilton y Lagrange. (i)

La importancia de considerar variedades Riemannianas (vagamente hablando son aquéllas en las que se tiene una noción de "elemento de longitud") se verá más adelante. Por lo pronto podríamos decir que en la mayoría de los sistemas mecánicos, es posible dar a su espacio de configuración una estructura Riemanniana, y es factible describir el "estado natural de movimiento" del sistema mediante las geodésicas asociadas a la métrica de Riemann. Naturalmente habría que precisar la noción de "estado natural de movi miento" de un sistema mecánico y en qué medida es posible describirlo mediante las geodésicas asociadas a la métrica. Este resulta ser un problema realmente nuevo y no es nuestro objetivo resolverlo, aunque aportaremos algunas ideas al respecto en las secciones siguientes.

La noción de derivada fibrada puede plantearse en un contexto más general que el que aquí introducimos (ii), pero para nuestros propósitos éste es suficiente.

Sea $(M, \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable con $n \geq 2$, y consideremos los haces asociados $(T(M), \mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M), V^i)})$, $(T(M)^*, \mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M)^*, \pi^*_{\gamma_i})})$. Si $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$, podemos restringir L a una fibra sobre algún q M; i.e.

$$L \circ i_{T_q(M)} \in \mathbb{R}^{T_q(M)}$$

Como $T_q(M)$ tiene estructura de espacio normado (iii). podemos

---

(i) Véase secc. 2.7

(ii) Véase ref. (1) pag. 218

(iii) Cualquier norma $\| \|^{F(i)}_{T_q(M)}$ definida en términos de una carta $F(i)$, $q \in f(i)$ es factible, dado que todas ellas son equivalentes.

interrogarnos acerca de la diferenciabilidad de $L\circ i_{T_q(M)}$. Para ésto consideremos a $F\in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$ y una carta $F(i)$ tal que $q\in f(i)$ luego $T_q(M)\subset Tf(i)$ y

$$L\circ i_{T_q(M)} = L\circ TF(i)\circ TF(i)^{-1}\circ I_{T_q(M)}$$

con $TF(i) = \theta_1^{V^2}\circ F(i)\circ \rho + \theta_2^{V^2}\circ((\Xi^{F(i)}\circ \rho)\wedge I_{T(M)}) \in V^{2\ T f(i)}$; entonces

$$L\circ i_{T_q(M)} = L\circ TF(i)^{-1}\circ\left(\overline{\theta_1^{V^2}([F(i)](q))} + \theta_2^{V^2}\circ \Xi^{F(i)}(q)\right) \qquad \ldots (4.1)$$

de lo cual se sigue la diferenciabilidad de la restricción de L a cualquier fibra.

4.1 DEFINICION. Sean $(M, \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)})$ con $n\geq 2$, $L\in\Lambda^{(n-1)}(T(M))$. La derivada fibrada de L se define como

$$FL = \{(\xi, (L\circ i_{T_q(M)})'(\xi)) \mid \xi\in T(M) \text{ y } \rho(\xi)=q\}$$

De su definición se sigue que $FL(\xi)\cdot HOM(T_q(M), \mathbb{R})$ si $\xi\in T_q(M)$. Es decir $FL\in T(M)^{*\,T(M)}$ y $\pi\circ FL = \rho$ (FL preserva las fibras)

De la expresión (4.1) se sigue que

$$FL(\xi) = (L\circ TF(i)^{-1})'(\theta_1([F(i)](\rho(\xi))) + \theta_2([\Xi^{F(i)}(\rho(\xi))](\xi)))\circ\theta_2\circ \Xi^{F(i)}(\rho(\xi))$$

$$= [((L\circ TF(i)^{-1})'\circ TF(i))\circledcirc \bar{\theta}_2^{V^2}\circledcirc(\Xi^{F(i)}\circ\rho)](\xi) \qquad \forall\ \xi\in Tf(i)$$

lo que podemos reescribir como

$$FL\circ i_{Tf(i)} = ((L\circ TF(i)^{-1})'_2\circ TF(i))\circledcirc[\Xi^{F(i)}\circ\rho] \qquad \ldots (4.2)$$

Con ésto podemos encontrar la representación local de FL en base a las cartas $TF(i)$ y $\overset{*}{T}F(i)$ en $T(M)$ y $T(M)^*$:

$$\overset{*}{T}F(i)\circ FL\circ TF(i)^{-1} = \overset{*}{T}F(i)\circ((L\circ TF(i)^{-1})'_2\circledcirc(\Xi^{F(i)}\circ F(i)^{-1}\circ P_1^{V^2}))$$

pues $\quad TF(i)^{-1} = ((inv\circ\Xi^{F(i)})\circ F(i)^{-1}\circ P_1^{V^2})\wedge P_2^{V^2}$

Ahora, como

$$\overset{*}{T}F(i) = \theta_1^{\Pi V_i^{i\in 2}}\circ F(i)\circ\pi + \theta_2^{\Pi V_i^{i\in 2}}\circ(I_{T(M)^*}\circledcirc((inv\circ\Xi^{F(i)})\circ\pi))$$

obtenemos que

$$\overset{*}{T}F(i)\circ FL\circ TF(i)^{-1} = \theta_1^{\Pi V_i^{i\in 2}}\circ P_1^{V^2} + \theta_2^{\Pi V_i^{i\in 2}}\circ(L\circ TF(i)^{-1})'_2 \qquad \ldots (4.3)$$

<u>Entonces (i), si $n\geq 2$</u> se tiene que $FL\in C^{(n-2)}$ si $L\in\Lambda^{(n-1)}(T(M))$.

(i) Es suficiente analizar la diferenciabilidad de $\overset{*}{T}F(i)\circ FL\circ TF(i)^{-1}$ pues $\overset{*}{T}F(j)\circ FL\circ TF(j)^{-1} = \overset{*}{T}F(j)\circ\overset{*}{T}F(i)^{-1}\circ(\overset{*}{T}F(i)\circ FL\circ TF(i))\qquad \forall\ i\in I_F$

Para proseguir en nuestro desarrollo debemos suponer que $n \geq 4$, pues en tal caso podemos considerar a $\omega_L \equiv FL^*\omega$ donde $\omega \in \Lambda_2^{(n-1)}(T(M)^*)$ es la 2- forma canónica en $T(M)^*$. Además obtenemos que ω_L es una forma cerrada, pues FL es al menos de clase C^2 y ω es diferenciable (i); mientras que las características de no degeneración dependen de L.

Para determinar las condiciones suficientes para la no degeneración (débil) de ω_L, consideremos un $\xi \in T(M)$. Dado que

$$\omega_L(\xi) = \omega(FL(\xi)) \circ \Big(\sum_{k \in \bar{2}} \theta_k^{T_{FL(\xi)}(T(M)^*)^{\bar{2}}} \circ (FL)_*(\xi) \circ \rho_k^{T_\xi(T(M))^{\bar{2}}}\Big)$$

se sigue que

$$\overline{\dot{\omega_L(\xi)}} \circledcirc \Big(\bar{\dot{\theta}}_1^{T_\xi(T(M))^{\bar{2}}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{T_\xi(T(M))^{\bar{2}}}\Big) =$$

$$\overline{\dot{\omega(FL(\xi))}} \circledcirc \Big(\bar{\dot{\theta}}_1^{T_{FL(\xi)}(T(M)^*)^{\bar{2}}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{T_{FL(\xi)}(T(M)^*)^{\bar{2}}}\Big) \circledcirc (FL)_*(\xi)$$

luego ω_L es débilmente simpléctica (débilmente no degenerada) si $(FL)_*(\xi)$ es inyectiva $\forall\, \xi \in T(M)$. Si ω es fuertemente no degenerada, es necesario añadir que $(FL)_*(\xi)$ sea además sobre $\forall\, \xi \in T(M)$, para tener la no degeneración fuerte de ω_L.

Se acostumbra la siguiente nomenclatura para L de acuerdo a las propiedades anteriores.

4.2 <u>DEFINICION</u> Si $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ y $n \geq 4$, se dice que L es:

<u>Débilmente regular</u> si $(FL)_*(\xi)$ es inyectiva $\forall\, \xi \in T(M)$

<u>Fuertemente regular</u> SI $(FL)_*(\xi)$ es biyectiva $\forall\, \xi \in T(M)$.

Nótese que si V es de Banach (p. ej. si V es reflexivo (ii)) y L fuertemente regular se sigue que FL es un difeomorfismo local. En ocasiones nos interesará considerar el caso en que FL sea un difeomorfismo global; en tal caso decimos que L es <u>hiperregular</u>.

Ahora bien, el que $(FL)_*(\xi)$ sea inyectiva (biyectiva) es equivalente a la inyectividad (biyectividad) de $(\check{T}F(l) \circ FL \circ TF(l)^{-1})'([TF(l)](\xi))$ con $\xi \in T\xi(l)$, puesto que (i)

$$(FL)_*(\xi) = \Xi_{(FL(\xi))}^{\check{T}F(l)\;-1} \circ (\check{T}F(l) \circ FL \circ TF(l)^{-1})'([TF(l)](\xi)) \circ \Xi^{TF(l)}(\xi)$$

Analicemos entonces la expresión para $(\check{T}F(l) \circ FL \circ TF(l)^{-1})'([TF(l)](\xi))$ De acuerdo a (4.3) tenemos que

---

(i) Véase ref. 12.
(ii) Véase ref. 6 pag. 221.

$$(\overset{*}{T}F(i)\circ FL\circ TF(i)^{-1})' = \bar{\Theta}_1^{\Pi V_1 \, i\in\bar{I}} \circledcirc \bar{P}_1^{\,v\bar{z}} + \bar{\Theta}_2^{\Pi V_1\, i\in\bar{I}} \circledcirc \left[(((L\circ TF(i)^{-1})_2')_1' \circledcirc \bar{P}_1^{\,v\bar{z}} + ((L\circ TF(i)^{-1})_2')_2' \circledcirc \bar{P}_2^{\,v\bar{z}} \right]$$

$$= \bar{\Theta}_1^{\Pi V_1\, i\in\bar{I}} \circledcirc \bar{P}_1^{\Pi V_1\, i\in\bar{I}} + \bar{\Theta}_2^{\Pi V_1\, i\in\bar{I}} \circledcirc \left[(L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \bar{P}_1^{\,v\bar{z}} + (L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{P}_1^{\,v\bar{z}} \right]$$

donde hemos hecho

$(L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \equiv ((L\circ TF(i)^{-1})_2')_1'$

$(L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \quad ((L\circ TF(i)^{-1})_2')_2'$

Luego, $\forall\ v \in TF(i)(T\xi(i))$ se tiene

$$(\overset{*}{T}F(i)\circ FL\circ TF(i)^{-1})'(v) = \Theta_1\circ P_1 + \Theta_2\circ\left[(L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;1}(v)\circ P_1 + (L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)\circ P_2\right] \quad \ldots (4.4)$$

y es claro que $(TF(i)\circ FL\circ TF(i)^{-1})'(v)$ inyectiva (biyectiva) $\Leftrightarrow$ $(L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)$ inyectiva (biyectiva). Hemos demostrado así la siguiente proposición.

4.3 <u>PROPOSICION</u> Si $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ y $n \geq 4$, entonces

L es débilmente regular $\Leftrightarrow$ $(L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)$ es inyectiva $\forall\ v\in TF(i)(T\xi(i))\quad \forall i\in I_F$

L es fuertemente regular $\Leftrightarrow$ $(L\circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)$ es biyectiva $\forall\ v\in TF(i)(T\xi(i))\quad \forall i\in I_F$

De esta proposición y de lo discutido anteriormente se sigue la siguiente

4.4 <u>PROPOSICION</u> Si $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ y $n \geq 4$ entonces

ω_L es débilmente no degenerada si L es débilmente regular.
ω_L es fuertemente no degenerada si L es fuertemente regular y ω es fuertemente no degenerada.

Cuando ω es fuertemente no degenerada y L fuertemente regular podemos aplicar los resultados del apéndice A.2, teniéndose la siguiente proposición.

4.5 <u>PROPOSICION</u> Sea $(M, \mathfrak{a}^{(n)}_{(M,V)})$ y $n \geq 4$ y V reflexivo. Para $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ hacemos

$$\mathfrak{X}_L = \bar{\omega}_L \circledcirc (\bar{\Theta}_1^{(2)} + \bar{\Theta}_2^{(2)}) \in \prod_{\xi\in T(M)} Hom(T_\xi(T(M)), Hom(T_\xi(T(M)), \mathbb{R}))$$

$$\mathcal{L}_L \equiv (\Upsilon_L \circ \rho) \wedge I_{T(M)} \quad \in \quad T(M)^{T(M)}$$

donde $\quad \Theta_j^{(2)} \equiv \{(\xi, \theta_j^{T_\xi(T(M))^{\bar{2}}}) \mid \xi \in T(M)\}$

Si L es fuertemente regular, entonces $\mathcal{L}_L$ es un difeomorfismo de clase $C^{(n-2)}$.

Esta proposición nos permite garantizar que toda función $E \in \Lambda^{(n-2)}(T(M))$ es el Hamiltoniano - en la estructura simpléctica $(T(M), \omega_L)$ - de un único campo vectorial en $T(M)$; vgr. $\mathcal{L}_L^{-1} \circ dE \in \mathcal{X}^{(n-3)}_{(T(M))}$, o en la notación de la sección anterior: $\quad {}^{(n-2)}(T(M)) = \Lambda^{(n-2)}(T(M))$

Aplicaremos ahora los resultados anteriores al caso en que tengamos una variedad pseudo- Riemanniana (i), pero antes necesitamos definir lo que entendemos por ello.

4.6 <u>DEFINICION</u> Sean $(M, \mathcal{a}^{(n)}_{(M,V)})$ con $n \geqslant 2$ y $g \in \prod_{q \in M} \mathcal{A}_2^{uc}(T_q(M))$ un campo tensorial simétrico de clase $C^{(n-1)}$

Si
$$\bar{g}(q) \circledcirc (\bar{\theta}_1^{T_q(M)^{\bar{2}}} + \bar{\theta}_2^{T_q(M)^{\bar{2}}}) \in \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}))$$

es inyectiva (biyectiva) $\forall \; q \in M$, decimos que g es una pseudo-métrica de Riemann débilmente (fuertemente) no degenerada. Si $g(q)$ es definido positivo $\forall \; q \in M$, decimos que g es una métrica de Riemann en M (en este caso se sigue la no degeneración débil de g). Así cuando hemos dotado a M de una (pseudo-) métrica de Riemann, hablamos de una variedad (pseudo-)Riemanniana.

Si M es de clase C^n con $n \geqslant 4$, una pseudométrica de Riemann nos define una función $K \in \mathbb{R}^{T(M)}$, haciendo

$$K = \tfrac{1}{2}(g \circ \rho) \wedge ((\Theta_1^{(2)} \circ \rho) \wedge I_{T(M)} + (\Theta_2^{(2)} \circ \rho) \wedge I_{T(M)}) \qquad \ldots (4.5)$$

$$\text{con } \Theta_j^{(2)} \equiv \{(q, \theta_j^{T_q(M)^{\bar{2}}}) / q \in M\}$$

en particular si g es una métrica, $K \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^{T(M)}$ y se le acostumbra llamar la energía cinética asociada a la métrica. La derivada fibrada de K es

$$FK(\xi) = \tfrac{1}{2}(\bar{g}(q) \wedge (\bar{\theta}_1^{T_q(M)^{\bar{2}}} \wedge I_{T_q(M)} + \bar{\theta}_2^{T_q(M)^{\bar{2}}} \wedge I_{T_q(M)}))'(\xi)$$

$$= \tfrac{1}{2}(g(q) \circ (\theta_1 + \theta_2))'(\xi)$$

$$= g(q) \circ (\theta_1(\xi) + \theta_2) \qquad \forall \; \xi \in T(M), \text{ con } \rho(\xi) = q$$

(i) La teoría de la relatividad puede enmarcarse en el contexto de las variedades pseudoriemannianas.

$$\therefore\ FK = (g \circ \rho) \circledcirc ((\overline{\circledcirc}_1^{(2)} \circ \rho) \vartriangle I_{T(M)} + \overline{\circledcirc}_2^{(1)}) \circ \rho) \vartriangle I_{T(M)}$$

$$= ((\bar{g} \circledcirc (\bar{\bar{\circledcirc}}_1^{(2)} + \bar{\circledcirc}_2^{(1)})) \circ \rho) \vartriangle I_{T(M)}$$

$$\equiv \mathcal{L}_g$$

En este caso a $\mathcal{L}_g$ se le conoce como una transformación de Legendre.
En particular tenemos que

$$[FK(\xi)](\xi) = 2K(\xi) \qquad \forall\, \xi \in T(M)$$

es decir $\qquad FK \vartriangle I_{T(M)} = 2K \qquad \ldots (4.6)$
un resultado que será importante más adelante.

Con esto último finalizamos la sección habiendo desarrollado los antecedentes necesarios para abordar el tratamiento de la Mecánica de Lagrange. Los resultados mostrados en la sección no son exhaustivos, y el lector interesado en una discusión más profunda puede consultar las referencias (1), (11) y (12).

2.5. CAMPOS LAGRANGIANOS

En nuestro planteamiento de la Mecánica Analítica, la evolución de un sistema mecánico se describe en base al haz cotangente de su espacio de configuración, lo cual nos ha conducido a estudiar a la clase de campos Hamiltonianos en $T(M)^*$. Esta es la idea principal de la mecánica de Hamilton. En el planteamiento alternativo de Lagrange, el haz tangente es la arena de evolución de los sistemas mecánicos, y al estudio de este plantemiento es lo que se le denomina Mecánica de Lagrange.

Una justificación a este punto de vista nuevo nos llevaría al punto original de tratar de justificar al haz cotangente como el espacio de estados. Por las mismas razones que antes, una justificación puede ser factible ante un problema concreto.

Si el postulado A.1 es aceptado, podríamos decir que, formalmente hablando, la descripción del estado de un sistema mediante $T(M)$ O $T(M)^*$ es viable, siempre y cuando exista una regla de correspondencia entre estos haces, y naturalmente la equivalencia de las descripciones dependerá de la correspondencia.

El estudio del nuevo plantemiento resultará provechoso (y es la razón de introducirlo) si aporta más ideas para la comprensión del plantemiento original. Al respecto podemos adelantar que en la mecánica de Lagrange es posible introducir cierta noción acorde a nuestra concepción de "estado natural de movimiento", cosa que no es posible en principio dentro de la mecánica de Hamilton. Eventualmente, aunque no lo haremos, se puede mostrar la compatibilidad de la mecánica Lagrangiana con los así llamados "principios variacionales".

Veamos algunos resultados desarrollados en la sección anterior:
Si $(M, \mathcal{O}^{(n)}_{(M,V)})$ es una variedad diferenciable con $n \geq 4$ y $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$, la derivada fibrada de L es una función

$$FL \quad T(M)^{*T(M)} \quad \text{de clase } C^{n-2}$$

Definimos:

La acción de L: $A_L = FL \wedge I_{T(M)} \in \Lambda^{(n-2)}(T(M))$

La energía de L: $E_L = A_L - L \in \Lambda^{(n-2)}(T(M))$

El orden de diferenciabilidad de A_L y E_L se sigue de que la representación local de L es

$$
\begin{aligned}
(A_L)^{T(i)} &= (FL \wedge I_{T(M)}) \circ T(i)^{-1} \\
&= (FL \circ T(i)^{-1}) \wedge T(i)^{-1} \\
&= \left((L \circ T(i)^{-1})'_2 \circledcirc \left(\Xi^{F(i)} \circ \underline{F(i)}^{-1} \circ P_1^{V^2} \right) \right) \wedge \left(\left((\mathrm{int} \wedge \Xi^{F(i)}) \circ \bar{T}(i)^{-1} \circ P_1^{V^2} \right) \wedge P_2^{V^2} \right) \\
&= (L \circ T(i)^{-1})'_2 \wedge p_2^{V^2} \qquad \ldots (5.1)
\end{aligned}
$$

Luego $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M)) \Rightarrow (L \circ T(i)^{-1})'_2 \wedge p_2^{V^2} \in C^{n-2} \Rightarrow (A_L)^{T(i)} \in C^{(n-2)} \; \forall i \in I_F$.

y puesto que la variedad T(M) es de clase $C^{(n-1)}$ entonces $A_L \in C^{(n-2)}$ y $L \in C^{(n-2)} \Rightarrow E_L = A_L - E_L \in C^{(n-2)}$ que es lo que se afirmaba.

Ahora, si L es débilmente regular $\omega_L \equiv FL^*(\omega)$ es débilmente simpléctica (donde $\omega \in \Lambda_2^{(n-2)}(T(M)^*)$ es la 2-forma canónica en $T(M)^*$), y podemos hablar de campos Hamiltonianos en esta estructura simpléctica.

5.1 <u>DEFINICION</u>.- Sea $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ débilmente regular, $\omega_L \equiv FL^*(\omega)$ siendo $\omega \in \Lambda_2^{(n-2)}(T(M))$ la 2-forma canónica en T(M). Si existe $Y_L \in \mathcal{X}^{(n-2)}_{(T(M))}$ tal que

$$Y_L \lrcorner\, \omega_L = -\, dE_L$$

decimos que Y_L es un campo Lagrangiano para L.

En general, no es posible asegurar la existencia de un campo Lagrangiano para cualquier L a menos que ω sea fuertemente no degenerada y L regular. En caso de existir $Y_L \in \mathcal{X}^{(n-2)}(T(M))$ que satisfaga la condición enunciada en la definición, dicho campo es único debido a la no degeneración débil de ω_L (véase la proposición 4.2). Supongamos pues que Y es un campo Lagrangiano para L, $TF \in \mathcal{Q}^{(n-1)}(T(M), V^2)$, entonces

$$(Y \lrcorner\, \omega_L)^{T(i)} = -(dE_L)^{T(i)}$$

El desarrollo expuesto en el apéndice A.6 muestra que la expresión anterior toma la forma

$$((L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)}) \circledast \bar{\dot{P}}_2^{v\bar{z}} + ((L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \dot{\bar{Y}}_2^{T(i)}) \circledast \bar{\dot{P}}_1^{v\bar{z}}$$

$$- ((L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{v\bar{z}}) \circledast \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)} - ((L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{\dot{P}}_2^{v\bar{z}}) \circledast \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)} =$$

$$-\left[((L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \dot{\bar{P}}_2^{v\bar{z}}) \circledast \bar{\dot{P}}_2^{v\bar{z}} + ((L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{v\bar{z}}) \circledast \bar{\dot{P}}_2^{v\bar{z}} - (L\circ T(i)^{-1})'_1 \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{v\bar{z}} \right. \quad \ldots (5.2)$$

De lo cual se sigue que(dobleboleando con $\bar{\dot{\theta}}_1^{v\bar{z}}$ y $\bar{\dot{\theta}}_2^{v\bar{z}}$ sucesivamente)

$$(L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledast \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)} = (L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledast \bar{\dot{P}}_2^{v\bar{z}} \quad \ldots (5.3)$$

$$(L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \wedge Y_1^{T(i)} + (L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \wedge Y_2^{T(i)} - (L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledast \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)} =$$

$$- (L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledast \bar{\dot{P}}_2^{v\bar{z}} + (\dot{L}\circ T(i)^{-1})'_1 \quad \ldots (5.4)$$

y de la expresión (5.3) se tiene que $Y_1^{T(i)} = p_2^{v\bar{z}} \circ i_{[T(i)](T\xi(i))}$ de la no degeneración débil de ω_L. Llevando esta igualdad a (5.4) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} (L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \wedge Y_1^{T(i)} + (L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \wedge Y_2^{T(i)} &= (L\circ T(i)^{-1})'_1 \\ Y_1^{T(i)} &= p_2^{v\bar{z}} \circ i_{[T(i)](T\xi(i))} \end{aligned}\right\} \ldots (5.5)$$

Ahora, si $C \in T(M)^I$ es una curva integral de Y y $C(0) \in T\xi(i)$

$$\left.\begin{aligned} Y_1^{T(i)} \circ T(i) \circ C &= D(T(i)_1 \circ C) \\ Y_2^{T(i)} \circ T(i) \circ C &= D(T(i)_2 \circ C) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5.6)$$

y de acuerdo a (5.5)

$$((L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}\circ T(i)\circ c)\wedge D(T(i)_1\circ c) + (L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}\circ T(i)\circ c)\wedge D(T(i)_2\circ c) =$$

$$\left.\begin{array}{r} (L\circ T(i)^{-1})'_1\circ T(i)\circ c \\ D(T(i)_1\circ c) = T(i)_2\circ c \end{array}\right\}$$

que podemos reescribir como

$$\left.\begin{array}{r} D((L\circ T(i)^{-1})'_2\circ(\theta_1^{V^{\bar{2}}}\circ T(i)_1\circ c + \theta_2^{V^{\bar{2}}}\circ T(i)_2\circ c) = (L\circ T(i)^{-1})'_1\circ T(i)\circ c \\ D(T(i)_1\circ c) = T(i)_2\circ c \end{array}\right\}\cdots(L)$$

o sea $$\left.\begin{array}{r} D((L\circ T(i)^{-1})'_2\circ T(i)\circ c) = (L\circ T(i)^{-1})'_1\circ T(i)\circ c \\ D(T(i)_1\circ c) = T(i)_2\circ c \end{array}\right\}\cdots(L)$$

esta es la forma más general de las ecuaciones de Lagrange.

Obsérvese que en el transcurso del desarrollo demostramos que la hipótesis de regularidad débil de L implica $Y_1^{T(i)} = P_2^{V^{\bar{2}}}\circ 1_{[T(i)](T_2(U))}$ $\forall i\in I_F$ o en términos globales

$$\rho_* \wedge Y = I_{T(M)} \qquad \cdots (5.7)$$

lo cual no es difícil de demostrar. Un campo vectorial en T(M) que satisfaga la condición (5.7) se conoce como una ecuación de segundo orden y la razón del nombre es que sus curvas integrales dan orígen a una ecuación diferencial de segundo orden para la función de posición del sistema. Esto sucede en el caso de las ecuaciones de Lagrange, por ejemplo, ya que si L es regular y V un espacio de Banach la expresión (L) es equivalente a

$$D^2(T(i)_1\circ c) = [INV\circ(L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}\circ T(i)\circ c]\wedge((L\circ T(i)^{-1})'_1\circ T(i)\circ c -$$
$$((L\circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1}\circ T(i)\circ c)\wedge D(T(i)_1\circ c)$$

donde (i) INV $\in GL(Hom(V,\mathbb{R}),V)^{GL(V,\,Hom(V,\mathbb{R}))}$ es el "inversor"

---

(1) Véase apéndice A.2.

$INV(f) \equiv f^{-1} \quad \forall f \in GL(V, Hom(V,\mathbb{R})) \equiv \{ f \in Hom(V, Hom(V,\mathbb{R})) \,/\, f \text{ es invertible} \}$

Veamos ahora el caso en que g es una pseudo-métrica de Riemann en M, de clase $C^{(n-1)}$. Entonces la "energía cinética" es (i)

$$K = \frac{1}{2}(g\circ\rho)\wedge\left((\Theta_1^{(1)}\circ\rho)\wedge I_{T(M)} + (\Theta_2^{(1)}\circ\rho)\wedge I_{T(M)}\right) \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$$

su acción

$$A_K = 2K$$

y su energía

$$E_K = A_K - K = K$$

La representación local de E_K en términos de una carta $TF(i) = T(i)$ es entonces

$$E_K\circ T(i)^{-1} = \frac{1}{2}\Big[\big(((g^{F(i)}\circ F(i))\otimes(\dot{\theta}_1^{v\bar{2}}\otimes \Xi^{F(i)}\otimes P_1^{(2)} + \dot{\theta}_2^{v\bar{2}}\otimes\Xi^{F(i)}\otimes P_2^{(2)}))\circ\rho\big)\wedge$$

$$\left((\Theta_1^{(1)}\circ\rho)\wedge I_{T(M)} + (\Theta_2^{(1)}\circ\rho)\wedge I_{T(M)}\right)\Big]\circ T(i)^{-1}$$

dado que

$$g^{F(i)} = \left(g\otimes(\Theta_1^{(2)}\otimes(inv\wedge\Xi^{F(i)})\otimes\dot{P}_1^{v\bar{2}} + \Theta_2^{(2)}\otimes(inv\wedge\Xi^{F(i)})\otimes\dot{P}_2^{v\bar{2}})\right)\circ F(i)^{-1}$$

y como $TF(i)^{-1} \equiv T(i)^{-1} = \left(((inv\wedge\Xi^{F(i)})\circ F(i)^{-1}\circ P_1^{v\bar{2}})\wedge P_2^{v\bar{2}}\right)$

$$E_K\circ T(i)^{-1} = \frac{1}{2}\Big[(g^{F(i)}\circ F(i)^{-1})\wedge\big(\dot{\theta}_1^{v\bar{2}}\wedge((\Xi^{F(i)}\circ\rho)\wedge I_{T(M)} + \dot{\theta}_2^{v\bar{2}}\wedge((\Xi^{F(i)}\circ\rho)\wedge I_{T(M)})\big)\Big]\circ T(i)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(g^{F(i)}\circ F(i)^{-1})\wedge\Big(\theta_1^{v\bar{2}}\circ\big(((\Xi^{F(i)}\circ F(i)^{-1}\circ P_1^{v\bar{2}})\wedge(((inv\wedge\Xi^{F(i)})\circ F(i)^{-1}\circ P_1^{v\bar{2}})\wedge P_2^{v\bar{2}})\big)$$

$$+ \quad \theta_2^{v\bar{2}}\circ\big(((\Xi^{F(i)}\circ F(i)^{-1}\circ P_1^{v\bar{2}})\wedge(((inv\wedge\Xi^{F(i)})\circ F(i)^{-1}\circ P_1^{v\bar{2}})\wedge P_2^{v\bar{2}})\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}(g^{F(i)}\circ P_1^{v\bar{2}})\wedge(\theta_1^{v\bar{2}}\circ P_2^{v\bar{2}} + \theta_2^{v\bar{2}}\circ P_2^{v\bar{2}})$$

en el apéndice A.5 se muestra que las expresiones para

$(E_K\ T(i)^{-1})$, $(E_K\ T(i)^{-1})$ y $(E_K\ T(i)^{-1})$ son:

(i) Véanse las expresiones (4.5) y (4.6), sección 2.4

$$\left.\begin{aligned}
(E_K \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} &= \tfrac{1}{2}(g^{\bar{f}(i)} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \circledcirc (\ddot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \ddot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}}) \\
(E_K \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} &= \tfrac{1}{2}(g^{\bar{f}(i)'} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \circledcirc (\ddot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \overline{\overline{\dot{\theta}_2^{v\bar{z}} \circ \rho_2^{v\bar{z}}}}) \\
(E_K \circ T(i)^{-1})'_1 &= \tfrac{1}{2}(g^{\bar{f}(i)'} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \circledcirc (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} \otimes \bar{\rho}_2^{v\bar{z}} + \bar{\theta}_2^{v\bar{z}} \otimes \bar{\rho}_2^{v\bar{z}})
\end{aligned}\right\} \cdots (5.7)$$

y de acuerdo a la expresión (5.5)

$$((g^{\bar{f}(i)'} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \circledcirc (\ddot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \dot{\theta}_2^{v\bar{z}} \circ \rho_2^{v\bar{z}})) \wedge Y_1^{T(i)} + ((g^{\bar{f}(i)} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \circledcirc (\ddot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \ddot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}})) \wedge Y_2^{T(i)}$$

$$= \tfrac{1}{2}(g^{\bar{f}(i)'} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \circledcirc (\overline{\dot{\theta}_1^{v\bar{z}} \circ \rho_2^{v\bar{z}}} + \overline{\dot{\theta}_2^{v\bar{z}} \circ \rho_2^{v\bar{z}}})$$

$$Y_1^{T(i)} = \rho_2^{v\bar{z}} \circ \dot{i}_{[T(i)](Tf(i))}$$

Donde Y es un campo Lagrangiano para K. Simplificando,

$$\left.\begin{aligned}
((g^{\bar{f}(i)'} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \wedge \rho_2^{v\bar{z}}] \circledcirc (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \overline{\dot{\theta}_2^{v\bar{z}} \circ \rho_2^{v\bar{z}}}) + (g^{\bar{f}(i)} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \circledcirc (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \overline{\dot{\theta}_2^{v\bar{z}} \circ Y_2^{T(i)}}) & \\
= \tfrac{1}{2}(g^{\bar{f}(i)'} \circ \rho_1^{v\bar{z}}) \circledcirc (\overline{\dot{\theta}_1^{v\bar{z}} \circ \rho_2^{v\bar{z}}} + \overline{\dot{\theta}_2^{v\bar{z}} \circ \rho_2^{v\bar{z}}}) & \\
Y_1^{T(i)} = \rho_2^{v\bar{z}} \circ \dot{i}_{[T(i)](Tf(i))} &
\end{aligned}\right\} (G)'$$

Ahora, si C $T(M)^I$ es una curva integral de Y y $C(0) \in Tf(i)$

$$Y_1^{T(i)} \circ T(i) \circ C = D(T(i)_1 \circ C)$$

$$Y_2^{T(i)} \circ T(i) \circ C = D(T(i)_2 \circ C)$$

y de la expresión anterior tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
&((g^{F(1)})'\circ T(1)_1\circ C)\blacktriangle(T(1)_2\circ C))\odot\left(\bar{\dot\theta}_1^{v\bar 2}+\overline{\theta_2^{v\bar 2}\circ \dot T(1)_2\circ C}\right)+\left(g^{F(1)}\circ T(1)_1\circ C\right)\odot\left(\dot\theta_1^{v\bar 2}+\overline{\theta_2^{v\bar 2}\circ \dot D(T(1)_2\circ C)}\right)\\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\left((g^{F(1)})'\circ T(1)_2\circ C\right)\odot\left(\overline{\theta_1^{v\bar 2}\circ \dot D(T(1)_2\circ C)}+\overline{\theta_2^{v\bar 2}\circ \dot D(T(1)_2\circ C)}\right)\\
&\qquad D(T(1)_1\circ C) = T(1)_2\circ C
\end{aligned}\right\}\ (G)$$

En el caso en que la pseudo-métrica no dependa de la posición $(g^{F(1)})' = 0$ (ésto sucede en los espacios de curvatura nula), las ecuaciones se reducen a

$$\left(g^{F(1)}\circ T(1)_1\circ C\right)\odot\left(\bar{\dot\theta}_1^{v\bar 2}+\overline{\theta_2^{v\bar 2}\circ \dot D(T(1)_2\circ C)}\right) = 0$$

$$D(T(1)_1\circ C) = T(1)_2\circ C$$

como g es no degenerada (débilmente al menos), se sigue que

$$D(T(1)_2\circ C) = 0 \qquad \therefore\ D^2(T(1)_1\circ C)$$
$$D(T(1)_1\circ C) = T(1)_2\circ C$$

En la siguiente sección veremos la forma que toman las ecuaciones (L) y (G) en el caso de dimensión finita. En las primeras habrán de reconocerse las ecuaciones de Lagrange y también se verá que las ecuaciones (G) son las ecuaciones de geodésicas según la pseudo-métrica g; el caso que nos condujo a concluir $D^2(T(1)_1\circ C) = 0$ es el caso extremo de la generalización de la ley de Inercia.
El análisis en dimensión finita nos permitirá ver la trascendencia del concepto de estado natural de movimiento.

2.6 ECUACIONES DE LAGRANGE

En esta sección veremos la expresión de las ecuaciones (L) y (G) cuando la variedad M es de dimensión finita, digamos m. En este caso podemos comparar nuestros resultados con las expresiones más conocidad de las ecuaciones de Lagrange y de las geodésicas que aparecen en los textos clásicos de Mecánica.

Supondremos que M es una variedad al menos de clase C^4 modelada sobre $\mathbb{R}^{\bar{m}}$. Si $F \in \mathcal{a}^{(n)}(M, \mathbb{R}^{\bar{m}})$, una carta característica de T(M) es

$$TF(i) \equiv T(i) \equiv \theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \circ F(i) \circ \rho + \theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \circ \Big(\sum_{a \in \bar{m}} ((\partial F(i)_a \circ \rho) \wedge I_{T(M)})\, \delta_{(a)}^{(m)} \Big)$$

Eventualmente nos interesará modelar a T(M) sobre $\mathbb{R}^{\overline{2m}}$, y mediante el isomorfismo canónico entre $(\mathbb{R}^{\bar{m}})^2$ y $\mathbb{R}^{\overline{2m}}$

$$\phi = \sum_{a \in \bar{m}} \theta_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} \circ \rho_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circ \rho_1^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} + \sum_{a \in \bar{m}} \theta_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} \circ \rho_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circ \rho_2^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \in \mathrm{Hom}((\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}, \mathbb{R}^{\overline{2m}})$$

$$\phi^{-1} = \theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \circ \Big(\sum_{a \in \bar{m}} \theta_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circ \rho_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} \Big) + \theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}}} \circ \Big(\sum_{a \in \bar{m}} \theta_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \circ \rho_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} \Big) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{\overline{2m}}, (\mathbb{R}^{\bar{m}})^{\bar{2}})$$

obtenemos un atlas (i) $T'F \in \mathcal{a}^{(n-1)}(T(M), \mathbb{R}^{\overline{2m}})$

En tal caso se acostumbra hacer las siguientes convenciones

$$q_a \equiv F(i)_a \circ \rho \qquad \in \mathbb{R}^{Tf(i)}$$

$$\dot{q}_a \equiv (\partial F(i)_a \circ \rho) \wedge \dot{I}_{T(M)} \in \mathbb{R}^{Tf(i)}$$

$$\partial_a^{T'F(i)} \equiv \frac{\partial}{\partial q_a} \equiv (\mathrm{inv} \wedge \underline{H}^{T'f(i)}) \wedge \delta_{(a)}^{(2m)} \in \prod_{\xi \in Tf(i)} T_\xi(T(M))$$

$$\partial_{a+m}^{T'F(i)} \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \equiv (\mathrm{inv} \wedge \underline{H}^{T'F(i)}) \wedge \delta_{(a+m)}^{(2m)} \in \prod_{\xi \in Tf(i)} T_\xi(T(M))$$

$$\frac{\partial}{\partial q_a}[f] \equiv D\, \partial_a^{T'F(i)} f$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}[f] \equiv D\, \partial_{a+m}^{T'F(i)} f \qquad \text{para } f \in \Lambda(Tf(i)) \quad \forall a \in \bar{m}$$

(i) Véase Sección 1.2 pag. 16

Sea $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ débilmente regular, $Y \in \mathcal{X}^{(n-2)}_{(T(M))}$ un campo Lagrangiano para L y $C \in T(M)^{I}$ una curva integral de Y con $C(0) \in T(1)$. De acuerdo a las ecuaciones (L)

$$\left.\begin{aligned} D((L\circ T(1)^{-1})'_2 \circ (\theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} \circ T(1)_1 \circ C + \theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} \circ T(1)_2 \circ C)) &= (L\circ T(1)^{-1})'_1 \circ T(1) \circ C \\ D(T(1)_1 \circ C) &= T(1)_2 \circ C \end{aligned}\right\} \cdots (L)$$

Para obtener su expresión en dimensión finita, notemos que

$$\begin{aligned} (L\circ T(1)^{-1})' &= (L \circ T'(1)^{-1} \circ \phi)^{-1} \\ &= ((L\circ T'(1)^{-1})' \circ \phi) \circledcirc \dot{\bar{\phi}} \\ &= \Big(\Big(\sum_{a\in\bar m} D_a(L\circ T'(1)^{-1})\, \dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} + \sum_{a\in\bar m} D_{a+m}(L\circ T'(1)^{-1})\, \dot{\bar{P}}_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\Big)\circ\phi\Big) \circledcirc \\ &\quad \Big(\sum_{a\in\bar m} \dot{\bar{\theta}}_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} \circledcirc \dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}} \circledcirc \dot{\bar{P}}_1^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} + \sum_{a\in\bar m} \dot{\bar{\theta}}_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} \circledcirc \dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}} \circledcirc \dot{\bar{P}}_2^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}}\Big) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(L\circ T(1)^{-1})'_2 = (L\circ T(1)^{-1})' \circledcirc \dot{\bar{\theta}}_2^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} = \sum_{a\in\bar m} ((D_{a+m}(L\circ T'(1)^{-1}))\circ\phi)\, \dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}$$

$$(L\circ T(1)^{-1})'_1 = (L\circ T(1)^{-1})' \circledcirc \dot{\bar{\theta}}_1^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} = \sum_{a\in\bar m} ((D_a(L\circ T'(1)^{-1}))\circ\phi)\, \dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}} \qquad \forall a \in \bar m$$

También podemos hacer $\quad T(1)\circ C = \phi^{-1}\circ T'(1)\circ C$

$$\begin{aligned} \therefore \qquad T(1)_1 \circ C &= P_1^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} \circ T'(1)\circ C \\ &= \sum_{a\in\bar m} \theta_a^{\mathbb{R}^{\bar m}} \circ P_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} \circ T'(1)\circ C \\ &= \sum_{a\in\bar m} \theta_a^{\mathbb{R}^{\bar m}} \circ T'(1)_a \circ C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1)_2 \circ C &= P_2^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} \circ T'(1)\circ C \\ &= \sum_{a\in\bar m} \theta_a^{\mathbb{R}^{\bar m}} \circ P_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}} \circ T'(1)\circ C \\ &= \sum_{a\in\bar m} \theta_a^{\mathbb{R}^{\bar m}} \circ T'(1)_{a+m} \circ C \end{aligned}$$

Entonces,

$$(L\circ T(1)^{-1})'_2 \circ (\theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} \circ T(1)_1 \circ c + \theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}} \circ T(1)_2 \circ c) =$$

$$(\sum_{a\in \bar m}((D_{a+m}(L\circ T'(1)^{-1})\circ\phi))\bar{\bar p}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}})\circ(\theta_1^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}}\circ T(1)_1\circ c+\theta_2^{(\mathbb{R}^{\bar m})^{\bar 2}}\circ T(1)_2\circ c)$$

$$=(\sum_{a\in\bar m}((D_{a+m}(L\circ T'(1)^{-1})\circ\phi)\,\bar{\bar p}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}})\circ(\sum_{a\in\bar m}\theta_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ p_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(1)_1\circ c+\sum_{a\in\bar m}\theta_{a+m}\circ p_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(1)_2\circ c)$$

$$=(\sum_{a\in\bar m}D_{a+m}(L\circ T'(1)^{-1})\,\bar{\bar p}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}})\circ(\sum_{a\in\bar m}\theta_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ T'(1)_a\circ c+\sum_{a\in\bar m}\theta_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ T'(1)_{a+m}\circ c)$$

y además

$$(L\circ T(1)^{-1})'_1\circ T(1)\circ c = (\sum_{a\in\bar m}D_a(L\circ T'(1)^{-1})\,\bar{\bar p}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}})\circ(\sum_{a\in\bar m}\theta_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ T'(1)_a\circ c+\sum_{a\in\bar m}\theta_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ T'(1)_{a+m}\circ c)$$

$$D(T(1)_1\circ c) = \sum_{a\in\bar m}\theta_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ D(T'(1)_a\circ c)$$

$$D(T(1)_2\circ c) = \sum_{a\in\bar m}\theta_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T'(1)_{a+m}\circ c$$

Finalmente, de acuerdo a la expresión (L), tenemos para cada $b\in\bar m$

$$\left.\begin{aligned} &D(D_{b+m}(L\circ T'(1)^{-1})\circ(\sum_{a\in\bar m}\theta_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ q_a\circ c+\sum_{a\in\bar m}\theta_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ \dot q_a\circ c) = \\ &\qquad D_b(L\circ T'(1)^{-1})\circ(\sum_{a\in\bar m}\theta_a^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ q_a\circ c+\sum_{a\in\bar m}\theta_{a+m}^{\mathbb{R}^{\overline{2m}}}\circ\dot q_a\circ c) \\ &\qquad D(q_b\circ c) = \dot q_b\circ c \end{aligned}\right\}\ (L.D.F.)$$

que son las ecuaciones de Lagrange en dimensión finita.

Podemos reescribir las ecuaciones (L.DF.) en una forma más sugestiva si observamos que

$$D_b(L\circ T'(1)^{-1})\circ T'(1) = \frac{\partial}{\partial q_a}[L\circ i_{Tf(1)}]$$

$$D_{b+m}(L\circ T'(1)^{-1})\circ T'(1) = \frac{\partial}{\partial \dot q_a}[L\circ i_{Tf(1)}]$$

$$T'(1)\circ c = (\sum_{a\in\bar m}\theta_a\circ q_a\circ c+\sum_{a\in\bar m}\theta_{a+m}\circ\dot q\circ c)$$

Entonces,

$$\left.\begin{aligned} &D(\frac{\partial}{\partial\dot q_b}[L\circ i_{Tf(1)}]\circ c) = \frac{\partial}{\partial q_b}[L\circ i_{Tf(1)}]\circ c \\ &D(q_b\circ c) = \dot q_b\circ c\end{aligned}\right\}\ (L.D.F.)'$$

Cuando tenemos una pseudométrica de Riemann en M de clase $C^{(n-1)}$ podemos proceder de la siguiente manera:
Para cualquier i I_F ,

$$g \circ i_{f(1)} = \sum_{a,b \in \bar{m}} g_{ab}^{f(1)} \, dq^a \otimes dq^b$$

donde $g_{ab}^{f(1)} \equiv g \triangle (\bigcirc_1^{(1)} \triangle \partial_a^{f(1)} + \bigcirc_2^{a1} \circ \partial_b^{f(1)}) \in \mathbb{R}^{f(1)}$ son funciones de clase $C^{(n-1)}$

Recordemos la expresión (G)' de un campo Lagrangiano para la energía cinética:

$$\left.\begin{aligned} ((g^{f(1)})' \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \triangle P_2^{\nu\bar{2}}) \otimes (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \otimes \bar{P}_2^{\nu\bar{2}}) + (g^{f(1)} \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \otimes (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \otimes \bar{Y}_2^{T(1)}) & \\ = \frac{1}{2} ((g^{f(1)})' \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \otimes (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} \otimes \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \otimes \bar{P}_2^{\nu\bar{2}}) & \\ Y_1^{T(1)} = P_2^{\nu\bar{2}} \circ i_{[T(1)](Tf(1))} & \end{aligned}\right\} (G)'$$

El cálculo directo muestra que los términos que aparecen en la expresión anterior toman la forma

$$(((g^{f(1)})' \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \triangle P_2^{\nu\bar{2}}) \otimes (\dot{\bar{\theta}}_1 + \dot{\bar{\theta}}_2 \otimes \bar{P}_2) = \sum_{a,b \in \bar{m}} (((g_{ab}^{f(1)} \circ \dot{f}(1)^{-1})' \circ P_1^{\nu\bar{1}}) \triangle P_2^{\nu\bar{2}})(\dot{P}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}})(\dot{\bar{P}}_b^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \otimes \bar{P}_2^{\nu\bar{2}})$$

$$\frac{1}{2}((g^{f(1)})' \circ P_1) \otimes (\dot{\bar{\theta}}_1 \otimes \bar{P}_2 + \dot{\bar{\theta}}_2 \otimes \bar{P}_2) = \frac{1}{2} \sum_{a,b \in \bar{m}} ((g_{ab}^{f(1)} \circ f(1)^{-1})' \circ P_1)(\dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \otimes \bar{P}_2)(\dot{\bar{P}}_b^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \otimes \bar{P}_2)$$

$$(g^{f(1)} \circ P_1) \otimes (\dot{\bar{\theta}}_1 + \dot{\bar{\theta}}_2 \otimes \bar{Y}_2^{T(1)}) = \sum_{a,b \in \bar{m}} \overline{(g_{ab}^{f(1)} \circ \dot{f}(1)^{-1} \circ P_1)}(\dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}})(\dot{\bar{P}}_b^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \otimes \bar{Y}_2^{T(1)})$$

donde hemos hecho $\theta_j \equiv \theta_j^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})\bar{2}}$; $P_j \equiv P_j^{(\mathbb{R}^{\bar{m}})\bar{2}}$ $\forall j \in \bar{2}$
Sustituyendo en la expresión (G)'

$$\sum_{a,b \in \bar{m}} \overline{(((g_{ab}^{f(1)} \circ \dot{f}(1)^{-1})' \circ P_1) \triangle P_2)}(\dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}})(\dot{\bar{P}}_b^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \otimes \bar{P}_2) + \sum_{a,b \in \bar{m}} \overline{(g_{ab}^{f(1)} \circ \dot{f}(1)^{-1} \circ P_1)}(\dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}})(\dot{\bar{P}}_b^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \otimes \bar{Y}_2^{T(1)})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a,b \in \bar{m}} ((g_{ab}^{f(1)} \circ f(1)^{-1})' \circ P_1)(\dot{\bar{P}}_a^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \otimes \bar{P}_2)(\dot{\bar{P}}_b^{\mathbb{R}^{\bar{m}}} \otimes \bar{P}_2)$$

$$Y_1^{T(1)} = P_2 \circ i_{[T(1)](Tf(1))}$$

Equivalentemente, para cada $d \in \bar{m}$ tenemos

$$\sum_{b\in\bar m} \overline{(((g_{db}^{F(i)}\circ F(i)^{-1})'\circ P_1)\wedge \dot{P}_2)}\,(\dot{P}_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circledcirc \bar{P}_2)+\sum_{b\in\bar m}(\overline{g_{db}^{F(i)}\circ F(i)^{-1}\circ P_1})(P_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ Y_2^{T(i)})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\bar m}((g_{ab}^{F(i)}\circ F(i)^{-1})'\circ P_1)\circledcirc \dot{\theta}_d^{\mathbb{R}^{\bar m}})(\dot{P}_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circledcirc \bar{P}_2)(\dot{P}_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circledcirc \bar{P}_2)$$

$$Y_1^{T(i)} = P_2\circ i_{[T'(i)](Tf(i))}$$

Si $C\in T(M)^I$ es una curva integral con $C(0)\in Tf(i)$

$$\sum_{b\in\bar m}\overline{(((g_{db}^{F(i)}\circ F(i)^{-1})'\circ T(i)_1\circ C)\wedge T(i)_2\circ C)}\,\overline{(P_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_2\circ C)}+\sum_{b\in\bar m}\overline{(g_{db}^{F(i)}\circ F(i)^{-1}\circ T(i)_1\circ C)}\,\overline{(P_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ D(T(i)_2\circ C)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\bar m}(((g_{ab}^{F(i)}\circ F(i)^{-1})'\circ T(i)_1\circ C)\circledcirc \dot{\theta}_d^{\mathbb{R}^{\bar m}})\,\overline{(P_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_2\circ C)}\,\overline{(P_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_2\circ C)}$$

$$D(T(i)_1\circ C) = T(i)_2\circ C$$

sustituyendo , llegamos a

$$\sum_{b\in\bar m}\Big\{\sum_{f\in\bar m}((D_f(g_{db}^{F(i)}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ C)(P_f^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_2\circ C)(P_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_2\circ C)+(g_{db}^{F(i)}\circ F(i)^{-1}\circ T(i)_1\circ C)(D(P_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_2\circ C)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\bar m}\{((D_d(g_{ab}^{F(i)}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ C)(P_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_2\circ C)(P_b^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_2\circ C)$$

$$D(T(i)_1\circ C) = T(i)_2\circ C$$

Rearreglando: (omitiendo superíndices)

$$\sum_{b\in\bar m}(g_{ab}\circ F(i)^{-1}\circ T(i)_1\circ C)(D^2(P_b\circ T(i)_1\circ C)) = \frac{1}{2}\sum_{b\in\bar m}\Big\{\sum_{a\in\bar m}((D_d(g_{ab}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ C)(D(P_a\circ T(i)_1\circ C)(D(P_b\circ T(i)_1\circ C)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{b\in\bar m}\Big\{\sum_{f\in\bar m}((D_f(g_{db}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ C)(D(P_f\circ T(i)_1\circ C))(D(P_b\circ T(i)_1\circ C))\Big\}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{b\in\bar m}\Big\{\sum_{h\in\bar m}((D_d(g_{dh}\circ F(i)^{-1})))\circ T(i)_1\circ C)(D(P_h\circ T(i)_1\circ C)(D(P_b\circ T(i)_1\circ C))\Big\}$$

$$\sum_{b\in\bar m}(g_{db}\circ F(i)^{-1}\circ T(i)_1\circ c)(D^2(P_b\circ T(i)_1\circ c)) = \frac{1}{2}\sum_{b\in\bar m}\Big\{\sum_{a\in\bar m}((D_d(g_{ab}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ c)(D(P_a\circ T(i)_1\circ c))$$

$$-\sum_{f\in\bar m}((D_f(g_{db}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ c)(D(P_f\circ T(i)_1\circ c)$$

$$-\sum_{h\in\bar m}((D_b(g_{dh}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ c)(D(P_h\circ T(i)_1\circ c))\Big\}D(P_b\circ T(i)_1\circ c)$$

observemos que $\quad P_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ T(i)_1\circ c = P_a^{\mathbb{R}^{2\bar m}}\circ T'(i)\circ c = q_a\circ c \quad \forall\, a\in\bar m$

y $\quad T(i)_1\circ c = \sum_{f\in\bar m}\theta_f^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ q_f\circ c$

Por tanto(i)

$$D^2(q^k\circ c) = \sum_{a,b\in\bar m}\frac{1}{2}\Big\{\sum_{d\in\bar m}(g^{kd}\circ F(i)^{-1}\circ T(i)\circ c)(D_d(g_{ab}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ c\ -$$

$$(D_a(g_{db}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ c - (D_b(g_{da}\circ F(i)^{-1}))\circ T(i)_1\circ c\Big\}(D(q_a\circ c))(D(q_b\circ c))$$

y haciendo

$$\Gamma^k_{ab} \equiv -\frac{1}{2}\sum_{d\in\bar m}(g^{kd}_{F(i)}\circ F(i)^{-1})(D_d(g^{F(i)}_{ab}\circ F(i)^{-1}) - D_a(g^{F(i)}_{db}\circ F(i)^{-1}) - D_b(g^{F(i)}_{da}\circ F(i)^{-1}))$$

podemos reescribir la ecuación anterior como

$$D^2(q_k\circ c) + \sum_{a,b\in\bar m}\Big(\Gamma^k_{ab}\circ\Big(\sum_{d\in\bar m}\theta_a^{\mathbb{R}^{\bar m}}\circ q_d\circ c\Big)\Big)(D(q_a\circ c))(D(q_b\circ c)) = 0 \quad \ldots(G.D.F.)$$

Que se conoce como la ecuación de las geodésicas.

(i)Las funciones $g^{kd}_{F(i)}\in\mathbb{R}^{f(i)}$ son las únicas funciones de clase $C^{(n-1)}$ que satisfacen $\sum_{d\in\bar m} g^{kd}_{F(i)}(q)\, g^{F(i)}_{db}(q) = \delta_{(k)(b)} \quad \forall\ q\in f(i)$

2.7 RELACION ENTRE LAS DESCRIPCIONES DE HAMILTON, LAGRANGE Y NEWTON.

Resumamos nuestro planteamiento de la Mecánica Analítica hasta ahora: Hemos partido de dos postulados fundamentales MA.1 y M.A.2. Suponiendo que el campo de interacciones de un sistema mecánico reversible y estacionario satisfaga ser un campo Hamiltoniano (aquí hemos explotado la estructura simpléctica del espacio de estados) obtuvimos las ecuaciones de Hamilton como una posible solución - al menos formal - al problema de determinar la función de evolución del sistema. Esto lo hemos desarrollado en las secciones 2.1 a 2.3. El suponer que el campo de interacciones es un campo Hamiltoniano es una característica o propiedad adicional que en caso de darse nos lleva a catalogar al sistema dentro de la mecánica de Hamilton; de aquí que no se vea la necesidad de introducir esta propiedad como un postulado más en la teoría.

Las secciones 2.4 a 2.6 nos presentan el desarrollo formal de la mecánica de Lagrange, aunque no hemos mostrado su relación con nuestro planteamiento original. Esta dificultad la podemos plantear en el contexto de la geometría simpléctica de la siguiente forma:

Dado un campo Hamiltoniano en el haz cotangente X_H, determinar un Lagrangiano L, tal que FL sea una transformación canónica (i) y podamos asociar a X_H un campo Lagrangiano para L en forma natural. En estas condiciones, mostrar qué relación hay entre las curvas integrales de los campos y en consecuencia de sus flujos. Recíprocamente, dado un Lagrangiano L y un campo Lagrangiano para L, ¿ es posible asociarle un campo HamiltonianO? ¿ es único? En otras palabras: ¿ Hasta qué punto son equivalentes los planteamientos de Hamilton y Lagrange?

Empezaremos por abordar esta cuestión para posteriormente comparar estos planteamientos con el de la mecánica de Newton. Podemos hacerlo con cierto detalle dado que hemos desarrollado los antecedentes necesarios para ello.

Si $(M, \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)})$ es el espacio de configuración de un sistema mecánico con $n \geq 3$ y V es un espacio reflexivo, entonces $(T(M)^*, \mathcal{A}^{(n-1)}_{(T(M)^*, \Pi_{i\in I}^{V_i})})$ es fuertemente simpléctica.

(i) Véase sección 2.5, def. 5.1 pag. 64 para la definición de la forma $\omega_L = FL^*(\omega)$. Esto significa que FL es una transformación canónica. Véase también secc. 2.1 pag. 41

Si el campo de interacciones X_H es Hamiltoniano, podemos construir (i) la derivada fibrada de H

$$FH \quad T(M)^{T(M)^*}$$

cuya representación local es

$$(FH)^{F(i)} = \theta_1^{V^{\bar{i}}} \circ P_{1\ i\in\bar{i}}^{\ \Pi V_i} + \theta_2^{V^{\bar{i}}} \circ \lambda^{-1} \circ (H \circ \check{T}F(i)^{-1})'_2 \quad \in \quad (V^{\bar{i}})^{[\check{T}F(i)](\check{T}f(i))}$$

con $F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$ y $\lambda \in Hom(V, Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}))$ el isomorfismo canónico ($\lambda^{-1} \in Hom(Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}),V)$ pues V es reflexivo)
Ahora, si FH es un C^{n-1}- difeomorfismo global, podemos construir a

$$A \equiv (X_H \lrcorner\ \tilde{\theta}\ ) \circ FH^{-1}$$

$$E = H \circ FH^{-1}$$

y definir el Lagrangiano

$$L = A - E$$

Mostraremos que $FL = FH^{-1}$. Basta demostrarlo en cartas.

7.1 PROPOSICION.- Sea $(M, \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)})$ modelada sobre un espacio reflexivo V, $H \in \Lambda^{(n-1)}(T(M)^*)$ tal que FH es un difeomorfismo . Haciendo

$$L = (\ X_H \lrcorner\ \tilde{\theta}\ ) \circ FH^{-1} - H \circ FH^{-1}$$

entonces $FL \in T(M)^{T(M)^*}$ es un difeomorfismo y además $FL = FH^{-1}$

Demostración.-

Sea $F \in \mathcal{A}^{(n)}(M,V)$, $i \in I_F$. Mostraremos que $(FL)^{F(i)} \circ (FH)^{F(i)} = 1_{[\check{T}F(i)](\check{T}f(i))}$

$$L \circ FH \circ \check{T}F(i)^{-1} = L \circ TF(i)^{-1} \circ (FH)^{F(i)} = L \circ TF(i)^{-1} \circ (\theta_1^{V^{\bar{i}}} \circ P_{1\ i\in\bar{i}}^{\ \Pi V_i} + \theta_2^{V^{\bar{i}}} \circ \lambda^{-1} \circ (H \circ \check{T}F(i)^{-1})'_2\ )$$

$$(L \circ FH \circ \check{T}F(i)^{-1})' = ((L \circ TF(i)^{-1})' \circ (FH)^{F(i)}) \circledcirc (\dot{\theta}_1^{V^{\bar{i}}} \circledcirc \dot{\bar{P}}_{1\ i\in\bar{i}}^{\ \Pi V_i} + \dot{\bar{\theta}}_2^{V^{\bar{i}}} \circledcirc \dot{\bar{\lambda}}^{-1} \circledcirc (H \circ \check{T}F(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \dot{\bar{P}}_{1\ i\in\bar{i}}^{\ \Pi V_i}$$
$$+ \dot{\bar{\theta}}_2^{V^{\bar{i}}} \circledcirc \dot{\bar{\lambda}}^{-1} \circledcirc (H \circ \check{T}F(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \dot{\bar{P}}_{2\ i\in\bar{i}}^{\ \Pi V_i}$$

$$\therefore\ (L \circ FH \circ \check{T}F(i)^{-1})'_2 = ((L \circ TF(i)^{-1})'_2 \circ (FH)^{F(i)}) \circledcirc \dot{\bar{\lambda}}^{-1} \circledcirc (H \circ \check{T}F(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \quad \ldots (7.1)$$

(i) Véase apéndice A.4

Por otro lado

$$L \circ FH \circ \mathring{T}F(1)^{-1} = (A \circ TF(1)^{-1} - E \circ TF(1)^{-1}) \circ (FH)^{F(1)}$$

$$= (X \lrcorner \tilde{\theta}) \circ \mathring{T}F(1)^{-1} - H \circ \mathring{T}F(1)^{-1}$$

donde(i) $(X \lrcorner \tilde{\theta}) \circ \mathring{T}F(1)^{-1} = P_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I} \wedge X_1^{\mathring{T}F(1)} = (\lambda \circ X_1^{\mathring{T}F(1)}) \wedge P_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I}$

Luego

$$(L \circ FH \circ \mathring{T}F(1)^{-1})' = (\lambda \circ X_1^{\mathring{T}F(1)}) \circledcirc \dot{P}_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I} + (\lambda \circ X_1^{\mathring{T}F(1)})' \circledcirc \bar{P}_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I} - (H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})'$$

pero H es el Hamiltoniano de X (ii) , luego

$$\lambda \circ X_1^{\mathring{T}F(1)} = (H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_2'$$

$$(L \circ FH \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_2' = (((H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_2')' \circledcirc \dot{\theta}_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I}) \circledcirc \bar{P}_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I} \quad \ldots (7.2)$$

Igualando (7.1) con (7.2) tenemos

$$(((H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_{2;1}^{(2)} \circledcirc \dot{P}_1^{\Pi V_i}{}_{i \in I} + (H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_{2;2}^{(2)} \circledcirc \dot{P}_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I}) \circledcirc \dot{\theta}_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I}) \circledcirc \bar{P}_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I} =$$

$$((L \circ TF(1)^{-1})_2' \circ (FH)^{F(1)}) \circledcirc \dot{\lambda}^{-1} \circledcirc (H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_{2;2}^{(2)}$$

$$\Rightarrow \quad (H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_{2;2}^{(2)} \circledcirc \bar{P}_2^{\Pi V_i}{}_{i \in I} = ((L \circ TF(1)^{-1})_2' \circ (FH)^{F(1)}) \circledcirc \dot{\lambda}^{-1} \circledcirc (H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_{2;2}^{(2)}$$

Pero FH difeomorfismo $\Rightarrow$ $(FH)^{F(1)}$ difeomorfismo $\Rightarrow$

$(H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_{2;2}^{(2)}(w)$ invertible $\forall$ $w \in [\mathring{T}F(1)](\mathring{T}\{1\})$

Entonces

$$(H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_{2;2}^{(2)}(w) \wedge \overline{w(2)} = (L \circ TF(1)^{-1})_2' ((FH)^{F(1)}(w)) \circ \lambda^{-1} \circ (H \circ \mathring{T}F(1)^{-1})_{2;2}^{(2)}(w)$$

(i) Véase secc. 2.2 pag. 39
(ii) Secc. 2.3 pag. 54

$$\Rightarrow \quad I_{Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})} \wedge \overline{\dot{w(2)}} = (L \circ TF(1)^{-1})'_2 ((FH)^{F(1)}(w_1)) \circ \lambda^{-1} \quad \forall\ w \in [\dot{T}F(1)](\dot{T}f(1))$$

que podemos reescribir como

$$\lambda_{Hom(V,\mathbb{R})}(w(2)) = (L \circ TF(1)^{-1})'_2 ((FH)^{F(1)}(w_1)) \circ \lambda^{-1} \quad \ldots (7.3)$$

donde $\lambda_{Hom(V,\mathbb{R})} \equiv \dot{\bar{I}}_{Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})} \circledcirc \bar{\bar{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})} \in$

$$Hom(Hom(V,\mathbb{R}), Hom(Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}),\mathbb{R}))$$

Notemos que como V es reflexivo, $I_{Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})} = \lambda \circ \lambda^{-1}$

$$\therefore \quad \lambda_{Hom(V,\mathbb{R})} = \overline{\dot{\lambda \circ \lambda^{-1}}} \circledcirc \bar{\bar{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})} = (\dot{\lambda} \circledcirc \bar{\bar{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})}) \circledcirc \dot{\lambda}^{-1}$$

Luego podemos reescribir (7.3) como

$$(\lambda \wedge \overline{\dot{w(2)}}) \circ \lambda^{-1} = (L \circ TF(1)^{-1})'_2 ((FH)^{F(1)}(w_1)) \circ \lambda^{-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda \wedge \overline{\dot{w(2)}} = (L \circ TF(1)^{-1})'_2 ((FH)^{F(1)}(w_1))$$

Por lo tanto tenemos $\forall\ v \in V$

$$[\lambda \wedge \overline{\dot{w(2)}}](v) = [\lambda(v)](w(2)) = [I_{Hom(V,\mathbb{R})} \wedge \dot{\bar{v}}](w(2)) = [w(2)](v)$$

$$\therefore \qquad w(2) = (L \circ TF(1)^{-1})'_2 ((FH)^{F(1)}(w_1)) \quad \forall\ w \in [\dot{T}F(1)](\dot{T}f(1))$$

$$\therefore \qquad P_2^{\prod_{i \in \bar{2}} V_i} \circ i_{[\dot{T}F(1)](\dot{T}f(1))} = (L \circ TF(1)^{-1})'_2 \circ (FH)^{F(1)}$$

Finalmente

$$(FL \circ FH)^{F(1)} = (FL)^{F(1)} \circ (FH)^{F(1)} = (\theta_1^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \circ P_1^{V\bar{2}} + \theta_2^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \circ (L \circ TF(1)^{-1})'_2) \circ (FH)^{F(1)}$$

$$= \theta_1^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \circ P_1^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} + \theta_2^{\prod_{i\in\bar{2}} V_i} \circ (L \circ TF(1)^{-1})'_2 \circ (FH)^{F(1)} = \dot{i}_{[\dot{T}F(1)](\dot{T}f(1))}$$

Es decir $FL \circ FH = I_{T(M)^{2*}}$.

Ahora, puesto que FH es un difeomorfismo,

$$\begin{aligned} FL &= FL \circ (FH \circ FH^{-1}) \\ &= (FL \circ FH) \circ FH^{-1} \\ &= FH^{-1} \end{aligned}$$

es decir, $FL = FH^{-1}$. En particular, FL es un difeomorfismo.

De esta forma, cuando el espacio de modelación de M es un espacio reflexivo, a cada $H \in \Lambda^{(n-1)}(T(M)^*)$ tal que FH es un difeomorfismo, podemos asociarle un Lagrangiano $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ y entonces L resulta ser un difeomorfismo; siendo FL el inverso de FH.

Veamos el caso contrario en el que partimos de un Lagrangiano $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ fuertemente regular – FL es un difeomorfismo – . Podemos entonces definir el Hamiltoniano

$$H = E_L \circ FL^{-1}$$

donde E_L es la energía de L. Para poder considerar a FH es necesario suponer que M está modelada sobre un espacio reflexivo; supongamos que ésto se da. La relación entre FL y FH se especifica en la siguiente proposición

7.2 <u>PROPOSICION</u> Sea $(M, \mathcal{a}^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad modelada sobre un espacio reflexivo V, $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ fuertemente regular. Haciendo

$$H = E_L \circ FL^{-1}$$

entonces $FH \in T(M)^{T(M)^*}$ es un difeomorfismo y además $FH = FL^{-1}$.

<u>Demostración:</u> La línea de la demostración es análoga a la proposición 7.1.

$$H \circ FL \circ TF(1)^{-1} = H \circ \overset{*}{T}F(1)^{-1} \circ (FL)^{F(1)} = H \circ \overset{*}{T}F(1)^{-1} \circ \left(\theta_1^{\Pi V_i \atop i \in I} \circ P_1^{V\bar{i}} + \theta_2^{\Pi V_i \atop i \in I} \circ (L \circ TF(1)^{-1})_2'\right)$$

$$\therefore\ (H \circ FL \circ TF(1)^{-1})' = \left((H \circ \overset{*}{T}F(1)^{-1})' \circ (FL)^{F(1)}\right) \circledcirc \left(\bar{\theta}_1^{\Pi V_i \atop i \in I} \circledcirc \bar{P}_1^{V\bar{i}} + \bar{\theta}_2^{\Pi V_i \atop i \in I} \circledcirc (L \circ TF(1)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \bar{P}_1^{V\bar{i}} + \bar{\theta}_2^{\Pi V_i \atop i \in I} \circledcirc (L \circ TF(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{P}_2^{V\bar{i}}\right)$$

$$\therefore\ (H \circ FL \circ TF(1)^{-1})_2' = \left((H \circ \overset{*}{T}F(1)^{-1})_2' \circ (FL)^{F(1)}\right) \circledcirc (L \circ TF(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} \quad \ldots (7.3)$$

Por otro lado

$$H \circ FL \circ TF(1)^{-1} = E_L \circ TF(1)^{-1}$$

$$\therefore\ (H \circ FL \circ TF(1)^{-1})_2' = (E_L \circ TF(1)^{-1})' \circledcirc \bar{\theta}_2^{V\bar{i}}$$

y de acuerdo a la expresión para $(E_L \circ T(i)^{-1})'$ (véase el apéndice A.5)

$$(E_L \circ TF(i)^{-1})' = ((L \circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{\dot{P}}_2^{v\bar{z}}) \circledcirc \bar{P}_2^{v\bar{z}} + ((L \circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{v\bar{z}}) \circledcirc \bar{P}_2^{v\bar{z}}$$

$$- (L \circ TF(i)^{-1})'_1 \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{v\bar{z}}$$

$$(H \circ FL \circ TF(i)^{-1})'_2 = (L \circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{P}_2^{v\bar{z}} \qquad \ldots (7.4)$$

Igualando las expresiones (7.3) y (7.4) llegamos a

$$(L \circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{\dot{P}}_2^{v\bar{z}} = ((H \circ \dot{T}F(i)^{-1})'_2 \circ (FL)^{F(i)}) \circledcirc (L \circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}$$

pero FL difeomorfismo $\Rightarrow$ $(FL)^{F(i)}$ difeomorfismo $\Rightarrow$

$(L \circ TF(i)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)$ invertible $\forall$ $v \in [TF(i)](T_{\zeta}(i))$, luego

$$(\dot{\bar{I}}_{Hom(V;\mathbb{R})} \circledcirc \bar{P}_2^{v\bar{z}}) \circ I_{[TF(i)](T_{\zeta}(i))} = (H \circ \dot{T}F(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circ (FL)^{F(i)}$$

que podemos reescribir como

$$\lambda \circ P_2^{v\bar{z}} \circ I_{[TF(i)](T_{\zeta}(i))} = (H \circ \dot{T}F(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circ (FL)^{F(i)}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
(FH \circ FL)^{F(i)} &= (FH)^{F(i)} \circ (FL)^{F(i)} \\
&= (\theta_1^{v\bar{z}} \circ P_1^{m v \bar{z}} + \theta_2^{v\bar{z}} \circ \lambda^{-1} \circ (H \circ \dot{T}F(i)^{-1})'_2) \circ (FL)^{F(i)} \\
&= \theta_1^{v\bar{z}} \circ P_1^{v\bar{z}} + \theta_2^{v\bar{z}} \circ \lambda^{-1} \circ (H \circ \dot{T}F(i)^{-1})'_2 \circ (FL)^{F(i)} \\
&= \theta_1^{v\bar{z}} \circ P_1^{v\bar{z}} + \theta_2^{v\bar{z}} \circ \lambda^{-1} \circ \lambda \circ P_2^{v\bar{z}} \circ I_{[\dot{T}F(i)](\dot{T}_{\zeta}(i))} = \dot{I}_{[\dot{T}F(i)](\dot{T}_{\zeta}(i))}
\end{aligned}$$

Es decir $FH \circ FL = I_{T(M)}$

Ahora, como FL es un difeomorfismo

$$\begin{aligned}
FH &= FH \circ (FL \circ FL^{-1}) \\
&= (FH \circ FL) \circ FL^{-1} \\
&= FL^{-1}
\end{aligned}$$

es decir $FH = FL^{-1}$

Cuando el espacio de modelación de M es reflexivo, la forma de construir Hamiltonianos a partir de Lagrangianos y viceversa - cuando las derivadas fibradas correspondientes resulten ser difeomorfismos - es en cierta forma canónica

Veámos por qué: Dada $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ podemos construir el Hamiltoniano $H \in \Lambda^{(n-1)}(T(M)^*)$ y a partir de este construir un nuevo Lagrangiano L'. Lo que se afirma es que en este procedimiento ni se gana ni se pierde información. En efecto, el Hamiltoniano asociado a L es

$$
\begin{aligned}
H &= E_L \circ FL^{-1} \\
&= (A_L - L) \circ FL^{-1} \\
&= A_L \circ FL^{-1} - L \circ FL^{-1} \qquad \ldots (7.5)
\end{aligned}
$$

para calcular $A_L \circ FL^{-1}$, tomamos un campo Hamiltoniano para H, X_H (cuya existencia podemos garantizar dada la no degeneración fuerte de ω).

$$
\begin{aligned}
(X_H \lrcorner \tilde{\theta}) \circ FL &= FL^*(X_H) \lrcorner FL^*(\tilde{\theta}) \\
&= FL^*(\theta) \wedge FL^*(X_H) \\
&= ((\theta \circ FL) \otimes (FL)_*) \wedge FL^*(X_H) \\
&= (((I_{T(M)^*} \otimes \pi_*) \circ FL) \otimes (FL)_*) \wedge FL^*(X_H) \\
&= (FL \otimes (\pi_* \circ FL) \otimes (FL)_*) \wedge FL^*(X_H) \\
&= FL \wedge (\rho_* \wedge FL^*(X_H)) \qquad \ldots (7.6)
\end{aligned}
$$

Si $FL^*(X_H)$ es una ecuación de segundo orden, tenemos que $\rho_* \wedge FL^*(X_H) = I_{T(M)}$, luego

$$(X_H \lrcorner \tilde{\theta}) \circ FL = FL \wedge I_{T(M)} = A_L$$

$$\therefore \quad A_L \circ FL^{-1} = X_H \lrcorner \tilde{\theta}$$

Entonces, sustituyendo en la expresión (7.5),

$$H = X_H \lrcorner \tilde{\theta} - L \circ FL^{-1}$$

Ahora, si a partir de H construimos el nuevo Lagrangiano asociado L':

$$
\begin{aligned}
L' &= (X_H \lrcorner \tilde{\theta}) \circ FH^{-1} - H \circ FH^{-1} \\
&= H \circ FH^{-1} + L \circ FL^{-1} \circ FH^{-1} - H \circ FH^{-1} \\
&= L \circ FL^{-1} \circ FH^{-1}
\end{aligned}
$$

Pero hemos visto que $FL = FH^{-1}$. Por tanto $L = L'$.

En el desarrollo anterior tuvimos que hacer la suposición de que $FL^*(X_H)$ fuese una ecuación de segundo orden. Esto se deduce de un resultado más general: $FL^*(X_H)$ es un campo Lagrangiano para $H \circ FL$, lo cual es inmediato pues

$$X_H \lrcorner\, \omega = -dH \;\Rightarrow\; FL^*(X_H) \lrcorner\, \omega_L = -d(H \circ FL)$$

donde $H \circ FL = E_L \circ FL^{-1} \circ FL = E_L$

$$\therefore \qquad FL^*(X_H) \lrcorner\, \omega_L = -dE_L$$

es decir $FL^*(X_H)$ es un campo Lagrangiano para $H \circ FL$. Y como FL es un difeomorfismo, en particular L es débilmente regular lo cual implica que $FL^*(X_H)$ es una ecuación de segundo orden.

Podemos proceder de idéntica manera en el proceso inverso. Supongamos dada $H \in \Lambda^{(n-1)}(T(M)^*)$ y construyamos el Lagrangiano asociado

$$L = (X_H \lrcorner\, \tilde{\theta}) \circ FH^{-1} - H \circ FH^{-1}$$

A partir de L construimos un nuevo Hamiltoniano H'

$$\begin{aligned} H' &= E_L \circ FL^{-1} \\ &= (A_L - L) \circ FL^{-1} \\ &= (FL \wedge I_{T(M)} - (X_H \lrcorner\, \tilde{\theta}) \circ FH^{-1} + H \circ FH^{-1}) \circ FL^{-1} \end{aligned}$$

donde $FL = FH^{-1}$ de acuerdo a la proposición (7.1), luego

$$\begin{aligned} H' &= (FL \wedge I_{T(M)}) \circ FL^{-1} - (X_H \lrcorner\, \tilde{\theta}) + H \\ &= I_{T(M)^*} \wedge FH - X_H \lrcorner\, \tilde{\theta} + H \qquad \ldots (7.6) \end{aligned}$$

Mostraremos que $I_{T(M)^*} \wedge FH = X_H \lrcorner\, \tilde{\theta} = I_{T(M)^*} \wedge (\pi_* \wedge X_H)$ y para ello es suficiente mostrar que $FH = \pi_* \wedge X_H$.
Si $TF(i) = T(i)$, $\overset{*}{T}F(i) = \overset{*}{T}(i)$ son cartas en $T(M)$ y $T(M)^*$ respectivamente,

$$\begin{aligned} T(i) \circ (\pi_* \wedge X_H) \circ \overset{*}{T}(i)^{-1} &= T(i) \circ ((\pi_* \circledcirc (\mathrm{inv} \wedge \Xi^{\overset{*}{T}(i)}) \circledcirc \Xi^{\overset{*}{T}(i)}) \wedge X_H) \circ \overset{*}{T}(i)^{-1} \\ &= T(i) \circ (((\pi_* \circledcirc (\mathrm{inv} \wedge \Xi^{\overset{*}{T}(i)})) \circ \overset{*}{T}(i)^{-1}) \wedge X_H^{\overset{*}{T}(i)} \\ &= T(i) \circ (((((\mathrm{inv} \wedge \Xi^{F(i)}) \circ \pi) \circledcirc ((T(i) \circ \pi \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})' \circ \overset{*}{T}(i))) \circ \overset{*}{T}(i)^{-1}) \wedge X_H^{\overset{*}{T}(i)}) \\ &= T(i) \circ ((((\mathrm{inv} \wedge \Xi^{F(i)}) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{\Pi \vee i}) \circledcirc \bar{P}_1^{\Pi \vee i}) \wedge X_H^{\overset{*}{T}(i)} \\ &= T(i) \circ (((\mathrm{inv} \wedge \Xi^{F(i)}) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{\Pi \vee i}) \wedge (P_1^{\Pi \vee i} \circ X_H^{\overset{*}{T}(i)}) \end{aligned}$$

$$T(i)\circ(\pi_* \wedge X_H)\circ \overset{*}{T}(i)^{-1} = \left(\theta_1^{V_{\bar i}}\circ F(i)\circ \rho + \theta_2^{V_{\bar i}}\circ\left(\left(\boxminus^{F(i)}\circ\rho\right)\wedge I_{T(M)}\right)\right)\circ\left(\left(\left(\mathrm{inv}\wedge\boxminus^{F(i)}\right)\circ F(i)^{-1}\circ p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i}\right)\wedge \cdots \right.$$
$$\left.\cdots\left(p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i}\circ X_H^{\overset{*}{T}(i)}\right)\right)$$

$$= \theta_1^{V_{\bar i}}\circ p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i} + \theta_2^{V_{\bar i}}\circ\left(\left(\boxminus^{F(i)}\circ F(i)^{-1}\circ p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i}\right)\wedge\left(\left(\left(\mathrm{inv}\wedge\boxminus^{F(i)}\right)\circ F(i)^{-1}\circ p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i}\right)\wedge\left(p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i}\circ X_H^{\overset{*}{T}(i)}\right)\right)\right)$$

$$= \theta_1^{V_{\bar i}}\circ p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i} + \theta_2^{V_{\bar i}}\circ\left(p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i}\circ X_H^{\overset{*}{T}(i)}\right)$$

$$= \theta_1^{V_{\bar i}}\circ p_1^{\prod_{i\in\bar i}V_i} + \theta_2^{V_{\bar i}}\circ\lambda^{-1}\circ\left(H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1}\right)'_2 = (FH)^{F(i)}$$

dado que H es el Hamiltoniano de X_H. En conclusión :

$T(i)\circ(\pi_*\wedge X_H)\circ\overset{*}{T}(i)^{-1} = T(i)\circ FH\circ\overset{*}{T}(i)^{-1}$ $\quad \forall\, i \in I_F$ con $F \in \mathcal{Q}^{(n)}_{(M,V)}$

luego $\qquad \pi_*\wedge X_H = FH$

De lo cual se sigue que $H = H'$ según (7.6).

La forma de asociar un Hamiltoniano a un Lagrangiano dado es en cierto modo obvia, no así la asociación contraria. La razón de hacer tal construcción es que entonces la relación entre campos Lagrangianos y Hamiltonianos correspondientes se torna bastante sencilla, en particular sus curvas integrales.

7.2 PROPOSICION.– Sea $L \in \Lambda^{(n-1)}(T(M))$ un Lagrangiano hiperregular; Y_L un campo Lagrangiano para L, H el Hamiltoniano asociado a L y X_H un campo con Hamiltoniano H. Entonces

$$Y_L = FL^*(X_H)$$

Dem.– Como X_H es Hamiltoniano

$$X_H \lrcorner\, \omega = -\, dH$$

y dado que FL es un difeomorfismo

$$FL^*(X_H)\lrcorner\, FL^*(\omega) = -\, d(H\circ FL)$$

o bien

$$FL^*(X_H)\lrcorner\, \omega_L = -\, dE_L$$. Puesto que ω_L es débilmente no degenerada (véase prop. 4.2 secc. 2.4) $\Rightarrow$ $FL^*(X_H) = Y_L$.

7-3 PROPOSICION.- Sea $H \in \Lambda^{(m+1)}(T(M)^*)$ un Hamiltoniano hiperregular (i), X_H su campo Hamiltoniano, $L \in \Lambda^{(m+1)}(T(M))$ el Lagrangiano asociado a H y Y_L un campo Lagrangiano para L; entonces

$$X_H = FH^*(Y_L)$$

Dem.- Como Y_L es Lagrangiano

$$Y_L \lrcorner \omega_L = -dE_L$$

y dado que FH es un difeomorfismo

$$FH^*(Y_L) \lrcorner FH^*(FL^*(\omega)) = -d(E_L \circ FH)$$

pero $FL = FH^{-1}$ $\therefore$ $FH^*(FL^*(\omega)) = \omega$ y además $E_L \circ FH = H$, de la definición de L .

$$\therefore \quad FL^*(Y_L) \lrcorner \omega = -dH$$

Lo cual muestra que $FL^*(Y_L)$ es un campo Hamiltoniano con Hamiltoniano H, y debido a la no degeneración débil de ω, $FL^*(Y_L) = X_H$.

Notemos que la condición de que V sea reflexivo ha sido crucial en todo el desarrollo anterior y partiendo de esta suposición hemos mostrado que la correspondencia entre Hamiltonianos y Lagrangianos - para los que sus derivadas FL, FH son difeomorfismos , o sea L y H hiperregulares- es canónica. La equivalencia se da pues cuando consideramos Hamiltonianos y Lagrangianos hiperregulares.

Si V no es reflexivo, la correspondencia Lagrangiano hiperregular $\longrightarrow$ Hamiltoniano sigue siendo posible, aún cuando no es posible mostrar que la asociación es canónica (o sea 1-1) ya que en el procedimiento contrario no es posible hablar de Hamiltonianos hiperregulares debido a que no es posible definir su derivada fibrada.

La conclusión a la que nos conducen las observaciones anteriores es la siguiente: Si de alguna manera es posible asegurar que un Lagrangiano dado describe al sistema, i.e. las curvas integrales del campo Lagrangiano se proyectan a funciones de posición del sistema (en particular es suficiente T(M) para especificar su estado); entonces si L es hiperregular, podemos asegurar que T(M) basta para especificar el estado del sistema y el campo de interacciones

(i) H es hiperregular si FH (véase A. 4) es un difeomorfismo.

viene dado por el campo Lagrangiano trasladado a $T(M)^*$ vía FL: $X_H = FL^{-1*}(Y_L)$. En otro caso, el que el campo de interacciones sea Hamiltoniano, no garantiza la posibilidad de su descripción en $T(M)$.

En este sentido podríamos decir que la descripción de Hamilton es más general que la descripción Lagrangiana, porque comprende sistemas mecánicos más generales.

Analicemos un poco más la relación entre las curvas integrales de los campos Y_L y X_H. Supongamos por el momento que L describe al sistema.

Como Y_L es una ecuación de segundo orden, toda curva integral satisface la condición

$$(\rho \circ c)' = c$$

si en la clase de equivalencia $\mathcal{A}^{(n)}(M,V)$ existe un atlas con carta única $\{(1,F(1))\}$, tenemos que $F(1) \circ \rho \circ c \in \bar{V}^I$ y además

$$D(F(1) \circ \rho \circ c) = (\Xi^{F(1)} \circ \rho \circ c) \wedge (\rho \circ c)'$$

$$= (\Xi^{F(1)} \circ \rho \circ c) \cdot \wedge c$$

donde podemos identificar a $D(F(1) \circ \rho \circ c)$ con la velocidad del sistema dado que $F(1) \circ \rho \circ c$ corresponde a la función de posición y F(1) es una carta única.

La carta única F(1) induce una carta única en $T(M)$ dada por

$$T(1) = \theta_1^{V^2} \circ F(1) \circ \rho + \theta_2^{V^2} \circ ((\Xi^{F(1)} \circ \rho) \wedge I_{T(M)})$$

y podemos resumir lo anterior, notando que

$$T(1) \circ c = \theta_1^{V^2} \circ (F(1) \circ \rho \circ c) + \theta_2^{V^2} \circ ((\Xi^{F(1)} \circ \rho \circ c) \wedge c)$$

es decir, la representación local de C en términos de una carta única tiene dos componentes, siendo la primera la representación local de la función de posición y la segunda, lo que podríamos llamar la velocidad del sistema.

En este punto cabe hacer una observación: Dada la existencia de una carta única F(1) en M, tanto M como $[F(1)](M) = \bar{V}$ son conjuntos suficientes para describir la posición del sistema en todo instante. Además, podemos generar un método específico de descripción de puntos de la realidad mediante $[F(1)](M)$ en base al método de descripción adoptado implícitamente en M, cuando lo hemos calificado como "espacio de configuración". En otras palabras, $[F(1)](M)$ es otro posible espacio de configuración del sistema, y en el caso que

nos ocupa es viable denominar "función de posición" ya sea a $\rho \circ C$ o bien a $F(1) \circ \rho \circ C$, según el formalismo adoptado. Sin embargo cuando consideramos a la velocidad, surge la interrogante de lo que entendemos por ello: Es en este momento en el que la estructura del espacio de configuración trasciende, pues los contradominios de $\rho \circ C$ y $F(1) \circ \rho \circ C$ son de distinta "categoría". En el primer caso, podemos considerar a $(\rho \circ C)^{\prime}$ como la definición más adecuada de la velocidad, mientras que en el segundo caso lo natural sería definir a la velocidad como $D(F(1) \circ \rho \circ C)$. El hecho de tener una carta única F(1) nos permite identificar a $(\rho \circ C)^{\prime}$ y $D(F(1) \circ \rho \circ C)$ mediante la relación

$$D(F(1) \circ \rho \circ C) = \left(\overset{\mapsto}{\Xi}{}^{F(1)} \circ \rho \circ C\right) \wedge (\rho \circ C)^{\prime} \qquad \ldots (7.7)$$

es decir, hay una forma canónica de relacionar ambos conceptos posibles de velocidad #

Si $C \in T(M)^{I}$ es una curva integral de Y_L, $FL \circ C \in T(M)^{*\,I}$ es una curva integral de X_H; además $\pi \circ FL \circ C = \rho \circ C$, es decir las funciones de posición son las mismas. Sin embargo la relación entre la función de posición $\pi \circ C$ y la curva integral $FL \circ C$ ya no es tan simple. De hecho $FL \circ (\pi \circ FL \circ C)^{\prime} = FL \circ C$ o bien $FL \circ (\pi \circ \gamma)^{\prime} = \gamma$ para cualquier curva integral de X_H. Así, para pasar de la función de posición del sistema ρ a una curva integral del campo Lagrangiano basta tomar $c^{\prime}$; y de hecho podemos tomar esta propiedad como necesaria para que un campo en T(M) describa en efecto al sistema y por tanto también L. A partir de ésto, el paso de la función de posición a una curva integral del campo de interacciones se hace mediante FL a través de la "velocidad".

En los párrafos anteriores hemos admitido la posibilidad de describir a un sistema mediante un campo Lagrangiano. Esto no resulta contradictorio y en las siguientes líneas abordaremos el por qué de esta posibilidad. Ello amerita introducir la noción de estado natural de movimiento de un sistema mecánico general, concepto motivado en la mecánica de Newton.

Supongamos que una partícula de masa m es descrita desde un sistema de referencia inercial. En ausencia de interacción sabemos que su función de posición viene dada por

$$r = v\, I_{\mathbb{R}} + r_0 \qquad \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}}$$

donde v y r_o corresponden a la velocidad y posición iniciales de la partícula. Este resultado puede deducirse en el contexto de las variedades de la siguiente forma: Tomemos a $M = \mathbb{R}^3$ como el espacio de configuración, con la adopción del método cartesiano, con la clase de equivalencia del atlas $\mathcal{A}^{(\infty)}(M,\mathbb{R}^3)$ que contiene al atlas con carta única $\{(1, 1_{\mathbb{R}^3})\}$ consideremos la métrica de Riemann

$$g = m(dp_1^{\mathbb{R}^3} \otimes dp_1^{\mathbb{R}^3} + dp_2^{\mathbb{R}^3} \otimes dp_2^{\mathbb{R}^3} + dp_3^{\mathbb{R}^3} \otimes dp_3^{\mathbb{R}^3})$$

cuya representación local es $g^{I_{\mathbb{R}^3}} = m\langle , \rangle$, siendo $\langle , \rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$. Con ésto, $(g^{I_{\mathbb{R}^3}})' = 0$, y de acuerdo a lo dicho en la última parte de la sección 2.5, si $C \in T(M)^I$ es una curva integral del campo Lagrangiano para la energía cinética según g, tenemos que

$$D(\pi(1)_2 \circ C) = 0$$

$$D(\pi(1)_1 \circ C) = \pi(1)_2 \circ C \quad ; \text{ es decir } \quad D^2(\pi(1)_1 \circ C) = 0$$

cuya solución general es

$$\pi(1)_1 \circ C = I_{\mathbb{R}^3} \circ \rho \circ C = v\, I_{\mathbb{R}} + \dot{r}_0 \quad \text{con} \quad v, r_0 \in \mathbb{R}^3$$

que corresponde a la función de posición de una partícula con velocidad inicial v y posición inicial r_o. Naturalmente $\pi(1)_2 \circ C = D(\pi(1)_1 \circ C)$ corresponde a la velocidad de la partícula como ya habíamos visto (expresión 7.7); en este caso,

$$\begin{aligned} \dot{v} &= D(I_{\mathbb{R}^3} \circ \rho \circ C) \\ &= \pi(1)_2 \circ C \end{aligned}$$

O en otras palabras; toda curva integral $C \in T(M)^I$ del campo Lagrangiano asociado a la energía cinética según la métrica de Riemann(i)

$$g = m(dp_1 \otimes dp_1 + dp_2 \otimes dp_2 + dp_2 \otimes dp_3),$$

satisface las siguientes propiedades:

1) La proyección de C al espacio de configuración M corresponde a la función de posición de una partícula en estado natural de movimiento, y es precisamente

---

(i) Nótese que en el razonamiento no se utilizó el que la partícula tuviese masa m sino tan solo que fuese constante; luego el argumento es válido para cualquier partícula, de otro modo: Hay una indeterminación hasta una constante positiva de la métrica de Riemann con las propiedades que se enuncian.

$T(1)_1^{\circ}C$, la primera componente de su representación local.

2) La segunda componente de la representación local de ς, $T(1)_2^{\circ}C$, es una constante igual a la velocidad de la partícula. De tal forma que se tiene

$$T(1)\circ C = \theta_1^{(\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}} \circ (I_{\mathbb{R}^3}\circ \rho \circ C) + \theta_2^{(\mathbb{R}^3)^{\bar{2}}} \circ (D(I_{\mathbb{R}^3}\circ \rho \circ C))$$

$$\text{con} \quad I_{\mathbb{R}^3}\circ \rho\circ C = v\, I_{\mathbb{R}} + \bar{r}_0 \qquad y \quad D(I_{\mathbb{R}^3}\circ \rho\circ C) = \bar{v}$$

Lo que se puede concluir de este par de observaciones, es que es posible describir el estado natural de movimiento de una partícula mediante el campo Lagrangiano de la energía cinética según una métrica de Riemann específica - determinada hasta una constante positiva y a la cual podríamos llamar euclídea - . El movimiento de la partícula corresponde entonces a geodésicas en esta métrica.

En realidad el movimiento por geodésicas es el más natural que podríamos esperar en un sistema mecánico general, dado que este movimiento está determinado únicamente por las características geométricas del espacio de configuración. Podemos admitir pues, que si en un sistema mecánico tiene sentido hablar de estado natural de movimiento, éste viene descrito por una (pseudo)métrica de Riemann. En la ecuación de las geodésicas (G) puede verse que la pseudométrica está indeterminada hasta una constante multiplicativa no nula.

A la energía cinética $K = \frac{1}{2}(g\circ\rho)\wedge((\Theta_1^{(2)}\circ\rho)\wedge I_{T(M)} + (\Theta_2^{(2)}\circ\rho)\wedge I_{T(M)}) \in \mathbb{R}^{T(M)}$ asociada a una pseudométrica g , le corresponde un Hamiltoniano dado por

$$T = K\circ FK^{-1}$$

(siempre que g sea fuertemente no degenerada).
Este Hamiltoniano describe efectivamente la evolución natural del sistema, en vista de su relación con el campo Lagrangiano Y_K y podríamos llamarlo el Hamiltoniano natural. En dimensión finita podemos dar una forma explícita del Hamiltoniano Natural como sigue:

Supongamos que la energía cinética es

$$K\circ i_{Tf(i)} = \frac{1}{2}\sum_{a,b\in\bar{m}} (g_{ab}^{F(i)}\circ\rho)((dF(i)_a\circ\rho)\wedge I_{T(M)})((dF(i)_b\circ\rho)\wedge I_{T(M)})$$

entonces

$$FK\circ i_{Tf(i)} = \sum_{a,b\in\bar{m}} (g_{ab}^{F(i)}\circ\rho)((dF(i)_a\circ\rho)\wedge I_{T(M)})(dF(i)_b\circ\rho)$$

$$\therefore \quad (FK)^{-1} \circ i_{\mathcal{T}(1)} = \sum_{a,b \in \bar{m}} (g^{ab}_{\mathcal{T}(1)} \circ \pi)((I_{T(M)^*} \triangle (\partial^{\mathcal{T}(1)}_a \circ \pi)) (\partial^{\mathcal{T}(1)}_b \circ \pi)$$

Luego

$$H \circ i_{\mathcal{T}(1)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b \in \bar{m}} (g^{ab}_{\mathcal{T}(1)} \circ \pi)(I_{T(M)^*} \triangle (\partial^{\mathcal{T}(1)}_a \circ \pi))(I_{T(M)^*} \triangle (\partial^{\mathcal{T}(1)}_b \circ \pi))$$

En muchos casos, cuando consideremos un sistema mecánico específico, es posible dar una métrica de Riemann que describa el estado natural de movimiento del sistema - que al igual que en la mecánica de Newton, está intimamente ligado a nuestra concepción de "naturalidad" - . Si el estado natural viene descrito por un campo Lagrangiano para la energía cinética, cabe esperar que el sistema sujeto a interacción pueda ser descrito en muchos casos por un campo Lagrangiano (naturalmente, la interacción deberá ser suficientemente "suave").

Si $K \in \mathbb{R}^{T(M)}$ es la energía cinética y L es el Lagrangiano que describe al sistema ante una interacción dada, definimos a la " energía potencial" como

$$U \equiv K - L \qquad \in \quad \mathbb{R}^{T(M)}$$

Si K describe el estado natural de movimiento del sistema y L al sistema en interacción, entonces U describe el comportamiento del sistema <u>relativo</u> a dicho estado natural. Veámos esto con más detalle:

Supongamos que Y_K es un campo Lagrangiano para la energía cinética, de tal forma que sus curvas integrales son geodésicas según la métrica. Y_L es un campo Lagrangiano para L, entonces

$$\left.\begin{aligned} Y_K \lrcorner\, \omega_K &= - dE_K \\ Y_L \lrcorner\, \omega_L &= - dE_L \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (7.7)$$

Consideremos una clase de sistemas mecánicos particular, aquéllos en que existe $\bar{U} \in \mathbb{R}^M$ tal que

$$U = \bar{U} \circ \rho$$

Estos son los sistemas mecánicos simples para los cuales la energía potencial "depende solo de la posición" . En tal caso es fácil ver que

$$FL = FK$$

$$A_L = A_K$$

y por tanto $\qquad E_L = E_K + U = K + U$

Luego, de acuerdo a (7.7) (i)

$$Y_K \lrcorner\, \omega_K = - dE_K$$

$$Y_L \lrcorner\, \omega_K = - dE_L$$

$$\therefore \quad (Y_L - Y_K) \lrcorner\, \omega_K = - dU = - d(\bar{U} \circ \rho) \quad \ldots(7.8)$$

Esta última expresión es consistente con la afirmación que habíamos hecho anteriormente referente a que U describe el comportamiento del sistema <u>relativo</u> a cierto estado natural de movimiento; en efecto, supongamos que $\bar{U}$ es una función constante. Entonces $dU = 0$ y de la no degeneración débil de ω_K tenemos que

$$Y_L = Y_K$$

En particular, las curvas integrales de Y_L son las curvas integrales de Y_K, i.e. geodésicas según la métrica g.

La descripción de sistemas ante una interacción puede traducirse al formalismo de Hamilton de manera análoga. Un sistema en estado natural de movimiento vendría descrito por un Hamiltoniano natural $T = K \circ FK^{-1}$, siempre que la métrica sea no degenerada fuertemente.

Si $X_H \in \mathfrak{X}(T(M)^*)$ es el campo de interacciones del sistema, podemos definir la energía potencial en T(M) como

$$V \equiv H - T$$

Ahora, independientemente de si se trata de un sistema mecánico simple, V describe el comportamiento relativo al <u>estado natural</u> de movimiento ya que si

(i) Obsérvese la importancia de tratarse de un sistema mecánico simple pues entonces $FL = FK \therefore \omega_K = \omega_L$. Si el sitema no es simple parece haber cierta indeterminación del estado natural de movimiento.

$$X_H \lrcorner\, \omega = -dH \quad y \quad X_T \lrcorner\, \omega = -dT$$

entonces

$$(X_H - X_T) \lrcorner\, \omega = -d(H - T) = -dV$$

y cuando V es una función constante, $dV = 0$ $\therefore$

$$X_H = X_T$$

y las curvas integrales de X_H son las que corresponden al sistema en estado natural de movimiento.

Bajo estos supuestos, un sitema mecánico puede especificarse en la formulación de Lagrange una vez dada su energía cinética (pseudométrica) y su energía potencial. El sistema podrá especificarse de esta manera en la formulación Hamiltoniana siempre que la pseudométrica sea fuertemente no degenerada.
Tratándose de sistemas mecánicos simples en los que la energía potencial sólo depende de la configuración del sistema - y no de su estado de movimiento- aparece intimamente ligado el concepto de campo de fuerza. Este es el campo covectorial definido como $F^* = -\, \delta \bar{V}$ o bien la 1-forma $F' = -\, dV$. Correspondiendo a F está el campo vectorial en M

$$F = FK^{-1}_{\circ}\, F^*$$

es decir $\quad \langle F(q), \xi_q \rangle_{T_q(M)} = -\, \delta \bar{V}(q)(\xi_q) \qquad \forall\, \xi_q \in T_q(M) \quad \forall\, q \in M$

Por otro lado tenemos que, haciendo $X_I = X_H - X_T$,

$$X_I \lrcorner\, \omega = -\, dV = -(\delta \bar{V} \circ \pi) \circledcirc \pi_* \circledcirc P_1^{(1)}$$

luego $\quad \omega(z)\left(\theta_1(X_I(z)) + \theta_2(Y_z)\right) = -\left[\delta \bar{V}(\pi(z))\right]\left(\pi_*(z)(Y_z)\right)$

$$\forall\, Y_z \in T_z(T(M)^*) \qquad \forall\, z \in T(M)^*$$

$$\therefore \quad \langle F(\pi(z)), \pi_*(z)(Y_z) \rangle_{T_q(M)} = \omega(z)\left(\theta_1(X_I(z)) + \theta_2(Y_z)\right)$$

que relaciona el campo F (geométrico) con el campo X_I (dinámico).

Mostraremos ahora de qué manera aparece la formulación Newtoniana de la Mecánica dentro del formalismo de las variedades diferenciables.
Consideremos una partícula de masa m descrita desde un

sistema inercial. Vamos a hacer explícitas las hipótesis de las que habremos de partir.

1) El espacio de configuración es $M = \mathbb{R}^3$ con la estructura usual de variedad diferenciable.
2) El estado natural de movimiento viene descrito por la métrica euclídea, que en términos de la carta única $F(1) = I_{\mathbb{R}^3}$ se expresa como

$$g = m(dx\otimes dx + dy\otimes dy + dz\otimes dz)$$

Notación: $x \equiv F(1)_1$; $y = F(1)_2$; $z \equiv F(1)_3$

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_1^{F(1)} \;;\; \frac{\partial}{\partial y} \equiv \partial_2^{F(1)} \;;\; \frac{\partial}{\partial z} \equiv \partial_3^{F(1)} \;; \text{ entonces } \; g^{F(1)} = \overline{m\langle\,,\rangle}$$

3) $T(M)$ y $T(M)^*$ tienen las estructuras diferenciables modeladas sobre $\mathbb{R}^6$ siendo $T'F(1) = T'(1)$, $\mathring{T}'F(1) = \mathring{T}'(1)$ cartas globales en $T(M)$ y $T(M)^*$.

Notación:
$$\tilde{x} = x\circ\rho = T'(1), \text{ etc.} \qquad \dot{x} = (\partial x\circ\rho)\wedge I_{T(M)} = T'(1)_1, \text{ etc.}$$
$$\bar{x} = x\circ\pi = \mathring{T}'(1), \text{ etc.} \qquad p_x = I_{T(M)^*}\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x}\circ\pi\right) = \mathring{T}'(1)_1, \text{ etc.}$$

4) El campo de interacciones es Hamiltoniano de clase C^n $n \geq 1$.
5) Se trata de un sistema mecánico simple.

La función energía cinética asociada a la métrica euclídea es

$$K = \frac{1}{2}m\left(((\partial x\circ\rho)\wedge I_{T(M)})^2 + ((\partial y\circ\rho)\wedge I_{T(M)})^2 + ((\partial z\circ\rho)\wedge I_{T(M)})^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

La derivada fibrada de K es

$$FK = m(\dot{x}\,(\partial x\circ\rho) + \dot{y}\,(\partial y\circ\rho) + \dot{z}\,(\partial z\circ\rho))$$

$$FK^{-1} = \frac{1}{m}\left(p_x\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\circ\pi\right) + p_y\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\circ\pi\right) + p_z\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z}\circ\pi\right)\right)$$

Obsérvese que el paso de las componentes de "velocidad" a las componentes de "momento" $(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \longrightarrow (p_x, p_y, p_z)$ se lleva a cabo mediante FK !

$$P_x \circ FK = m\dot{x} \qquad\qquad \dot{x} \circ FK^{-1} = \frac{1}{m} P_x$$

$$P_y \circ FK = m\dot{y} \quad \text{y recíprocamente} \quad \dot{y} \circ FK^{-1} = \frac{1}{m} P_y$$

$$P_z \circ FK = m\dot{z} \qquad\qquad \dot{z} \circ FK^{-1} = \frac{1}{m} P_z$$

La energía cinética en $T(M)^*$ es entonces

$$T = K \circ FK^{-1} = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m}$$

El Hamiltoniano es entonces $H = T + \bar{V} \circ \pi$ con $\bar{V} \in \Lambda^{(n|1)}(M)$
Las ecuaciones de Hamilton para una curva integral $C \in T(M)^{*A}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ nos dan

$$D(\bar{x} \circ C) = \frac{1}{m} P_x \circ C \qquad D(P_x \circ C) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}[\bar{V}]\right) \circ \pi \circ C$$

$$D(\bar{y} \circ C) = \frac{1}{m} P_y \circ C \qquad D(P_y \circ C) = -\left(\frac{\partial}{\partial y}[\bar{V}]\right) \circ \pi \circ C$$

$$D(\bar{z} \circ C) = \frac{1}{m} P_z \circ C \qquad D(P_z \circ C) = -\left(\frac{\partial}{\partial z}[\bar{V}]\right) \circ \pi \circ C$$

Donde hemos denotado a la derivada de Lie, $D_{[\partial F^{(1)}_1]} \bar{V} = \frac{\partial}{\partial x}[\bar{V}]$, etc.
Haciendo $r = \bar{x} \circ C\ \delta^{(3)}_{(1)} + \bar{y} \circ C\ \delta^{(3)}_{(2)} + \bar{z} \circ C\ \delta^{(3)}_{(3)}$ la función de posición de la partícula; podemos reescribir las ecuaciones de Hamilton como (i)

$$m\, D^2 r = -(D_1\bar{V} \circ r\ \delta_{(1)} + D_2\bar{V} \circ r\ \delta_{(2)} + D_3\bar{V} \circ r\ \delta_{(3)})$$

es decir

$$m\, D^2 r = -\nabla \bar{V} \circ r$$

que es la expresión de Newton para un campo de fuerzas conservativo, el cual puede identificarse con el campo (covectorial) de fuerzas $F^* = -d\bar{V}$. El campo vectorial en M correspondiente al campo covectorial de fuerzas F^* es

$$F = FK^{-1} \circ F^* = FK^{-1} \circ (-d\bar{V}) = -\frac{D_1\bar{V}}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{D_2\bar{V}}{m}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{D_3\bar{V}}{m}\frac{\partial}{\partial z}$$

Las componentes de F corresponden entonces a las componentes de la función aceleración de acuerdo a la expresión

$$D^2 r = -\frac{\nabla\bar{V}}{m} \circ r$$

(i) Recuérdese que $\frac{\partial}{\partial x}[V] \circ F^{(1)^{-1}} = D_1(V \circ F^{(1)^{-1}})$, etc.
$= D_1 V$

3.1 SOBRE EL ESTADO NATURAL DE MOVIMIENTO.

Los ejemplos que se muestran en esta sección tienen como objetivo justificar ciertas conjeturas relativas a la noción de estado natural de movimiento. Estas conjeturas pueden calificarse como "empíricas", las cuales enriquecen los fundamentos de nuestro planteamiento de la Mecánica Analítica. La relevancia de estas conjeturas podrá juzgarse en cuanto a su consistencia dentro de nuestro esquema formal de la Mecánica.

La noción de "estado natural de movimiento" de la que aquí hablamos es en cierta manera restringida. Por ello entendemos cierta evolución del sistema en el tiempo que para un observador específico le resulta natural como consecuencia de la concepción misma del sistema mecánico. Es decir, a falta de evolución del sistema de acuerdo a cierto comportamiento calificado como natural, las desviaciones de tal comportamiento se interpretan como existencia de causas cuyo efecto es tal desviación.

Hasta ahora hemos considerado sistemas mecánicos reversibles y estacionarios, características que están dadas en base al espacio de configuración que le asocia un observador. No sabemos si la noción de sistema reversible dependa del observador, aunque es factible suponer que ésto no ocurre en los sistemas mecánicos. La característica de estacionario claramente depende del observador. Así, cuando nos referimos a un sistema estacionario (reversible) nos estaremos refiriendo a algún observador específico en lo que ésto se da.

La primera conjetura que enunciamos define la noción de estado natural de movimiento para los sistemas mecánicos en el formalismo de las variedades diferenciables.

C.1 <u>CONJETURA</u> .— Para todo sistema mecánico estacionario y reversible existe una métrica de Riemann en el espacio de configuración propuesto, de modo que las geodésicas asociadas a la métrica describen el estado natural de movimiento del sistema.

Implícitamente estamos aceptando que en todo sistema mecánico es posible hablar de un estado natural de movimiento y que tal estado de movimiento puede ser descrito por una

<u>métrica en el espacio de configuración</u>. El enunciado específico de "métrica en el espacio de configuración" es importante y el debilitar estas condiciones podría incluir sistemas no mecánicos, por ejemplo si el estado natural fuese descrito por una pseudométrica; o bien a sistemas mecánicos no estacionarios, como por ejemplo con una métrica de Riemann no en el espacio de configuración sino en $M \times \mathbb{R}$ ...

La noción de estado natural de movimiento tiene sentido si existe cierta universalidad al menos para cierta clase de observadores de un sistema estacionario y reversible- es decir, que de acuerdo a sus respectivos espacios de configuración el sistema resulte ser estacionario y reversible-[(i)] lo menos que podemos esperar es que las descripciones de la posición del sistema resulten ser equivalentes. En otras palabras, que los respectivos espacios de configuración resulten ser variedades difeomorfas. Dicha equivalencia en la descripción de la posición trae consigo una equivalencia en las nociones de estado natural de movimiento; de ahí nuestra siguiente conjetura.

C.2 <u>CONJETURA</u> Si M es un espacio de configuración de un sistema mecánico, g la métrica del estado natural de movimiento y $\Psi \in M^N$ un difeomorfismo de la variedad N al espacio de configuración M, entonces N es otro posible espacio de configuración en el que el estado natural de movimiento viene descrito por $\Psi^*(g)$ y la correspondencia, posiciones del sistema $\longleftrightarrow$ N se hace mediante el cambio de descripción que define Ψ :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & q \ \text{posición} & \\ \text{espacio de configuración} \ M \arrow[ur, "\text{descripción}"] & & N \ \text{nuevo espacio de configuración} \arrow[ll] \arrow[ul, dashed, "\text{descripción}"'] \end{tikzcd}$$

O sea que $n \in N$ corresponde a una posición q del sistema si $\Psi(n)$ corresponde a una posición q del sistema de acuerdo al método de descripción adoptado en M.

Puede verse que la función energía cinética $K' \in \mathbb{R}^{T(N)}$ en el nuevo espacio fase $T(N)$ satisface

$$K' = K \circ T(\Psi)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{T(M)}$ es la función energía cinética en $T(M)$

(i) Esto restringe en parte la universalidad de los observadores.

y $$T(\Psi) \equiv (\Psi_* \circ \rho) \triangle I_{T(N)} \in T(M)^{T(N)}$$

La siguiente conjetura se refiere a sistemas constreñidos y a la descripción de su estado natural de movimiento ante la constricción impuesta.

C.3 <u>CONJETURA</u>.– Supongamos que M es el espacio de configuración de un sistema mecánico y g la métrica de Riemann asociada al estado natural de movimiento en M. Si el sistema es constreñido a moverse en una subvariedad $N \subseteq M$ entonces el estado natural de movimiento en N viene descrito por la restricción de la métrica a N: $i^*(g)$ donde $i \in M^N$ es la inclusión.

La proposición anterior se utiliza con mucha **frecuencia** aunque sin hacer mención explícita de ella. En pocas palabras nos dice que toda noción de estado natural de movimiento trae consigo una noción bien definida de estado natural de movimiento ante una restricción.

El tipo de restricciones a las que aquí aludimos podrían llamarse geométricas u holonómicas. Para otro tipo de restricciones no es tan directa una noción de estado natural de movimiento <u>relativo</u>, aunque de acuerdo a la conjetura C.1 debe tenerse alguna noción intrínseca a la concepción misma del sistema#

La función energía cinética en el "medio ambiente" M $K \in \mathbb{R}^{T(M)}$ induce una función energía cinética en el "subambiente" $N \subseteq M$. $K' \in \mathbb{R}^{T(N)}$. En términos invariantes tenemos que

$$K' = K \circ T(i) \qquad \text{donde } i \in M^N \text{ es la inclusión}$$

y

$$T(i) = (i_* \circ \rho) \triangle I_{T(N)}$$

No es difícil comprobar que esta función energía cinética K' es la asociada a la métrica inducida en N, $i^*(g)$.

Empecemos por estudiar algunos ejemplos sencillos que corroboran lo acertado de la conjetura C.1 referente a la descripción del estado natural de movimiento mediante una métrica de Riemann.

<u>EJEMPLO 1</u>.– Consideremos un sistema de referencia <u>inercial</u> y dos partículas de masas m_1 y m_2. En este caso por tratarse de un sistema de referencia inercial existe una noción de estado natural de movimiento, el movimiento uniforme, como ya señalamos al principio de esta tesis.

Si omitimos la descripción de los choques de las partículas, podemos tomar como espacio de configuración a

$M \equiv \mathbb{R}^{\bar{6}} \setminus \{ x \in \mathbb{R}^{\bar{6}} \ / \ x(1) = x(4),\ x(2) = x(5),\ x(3) = x(6) \}$

Dado un punto $x \in M$, las primeras tres componentes $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$ corresponden a las coordenadas cartesianas de la partícula 1 y las componentes restantes $x(4)$, $x(5)$, $x(6)$ corresponden a las coordenadas cartesianas de la partícula 2. Así pues, si $C \in M^A$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ es la función de posición del sistema, las funciones de posición (cartesianas) de las partículas 1 y 2 son

$$r_1 = C_1 \delta^{(3)}_{(1)} + C_2 \delta^{(3)}_{(2)} + C_3 \delta^{(3)}_{(3)} \text{ y } r_2 = C_4 \delta^{(3)}_{(1)} + C_5 \delta^{(3)}_{(2)} + C_6 \delta^{(3)}_{(3)}$$

donde $C_a = p_a^{\mathbb{R}^{\bar{6}}} \circ C \in \mathbb{R}^A$ son las componentes de C.

M es un abierto de $\mathbb{R}^{\bar{6}}$ y por tanto una variedad de clase $C^{(\infty)}$ modelada sobre $\mathbb{R}^{\bar{6}}$. Las cartas en M y en $T(M)$ las denotaremos como sigue:

en M

$$q_a = p_a^{\mathbb{R}^{\bar{6}}} \circ i$$

donde $i \in (\mathbb{R}^{\bar{6}})^M$ es la carta inclusión.

en $T(M)$

$$\tilde{q}_a = p_a^{\mathbb{R}^{\bar{6}}} \circ T'(i) = q_a \circ \rho$$

$$\dot{q}_a = p_{6+a}^{\mathbb{R}^{\bar{6}}} \circ T'(i)$$

$$\forall \ a \in \bar{6}$$

En M proponemos a la métrica de Riemann

$$g = m_1(dq_1 \otimes dq_1 + dq_2 \otimes dq_2 + dq_3 \otimes dq_3) + m_2(dq_4 \otimes dq_4 + dq_5 \otimes dq_5 + dq_6 \otimes dq_6)$$

como la descriptora del estado natural de movimiento. La función energía cinética asociada a g es

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2)$$

El nombre de "energía cinética" proviene de que al considerar la composición de K con una trayectoria del sistema $\gamma \in T(M)^A$ tenemos que

$$K \circ \gamma = \frac{1}{2} m_1 \sum_{a \in \bar{3}} (\dot{q}_a \circ \gamma)^2 + \frac{1}{2} m_2 \sum_{a \in \bar{3}} (\dot{q}_a \circ \gamma)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \sum_{a \in \bar{3}} (D(q_a \circ C))^2 + \frac{1}{2} m_2 \sum_{a \in \bar{3}} (D(q_a \circ C))^2$$

donde $C = \rho \circ \gamma$ es la función de posición del sistema en la descripción cartesiana, o sea que $K \circ \gamma$ es en efecto la energía cinética del sistema. #

Una curva integral $\gamma \in T(M)^A$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, del campo

Lagrangiano para la energía cinética se proyecta a M como una geodésica según la métrica g. Como los coeficientes g_{ij} no dependen de la posición, la curva integral satisface

$$D(\tilde{q}_a \circ \gamma) = \dot{q}_a \circ \gamma \qquad \forall\, a \in \bar{6}$$
$$D(\dot{q}_a \circ \gamma) = 0$$

o sea, $D^2(\tilde{q}_a \circ \gamma) = D^2(q_a \circ C) = 0$, donde $C = \rho \circ \gamma$ es la función de posición del sistema. Esto implica que

$$D^2 r_1 = 0 \qquad y \qquad D^2 r_2 = 0 \quad ,$$

ambas partículas se mueven uniformemente, lo cual es acorde con nuestra noción de estado natural de movimiento.
En las figs. 1 y 2 se muestra una imagen pictórica de las soluciones en $M \simeq (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus I_{\mathbb{R}^3}$ y $T(M) \simeq (\mathbb{R}^6 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^6$ con $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^6 \,/\, x(1) = x(4), x(2) = x(5), x(3) = x(6)\}$

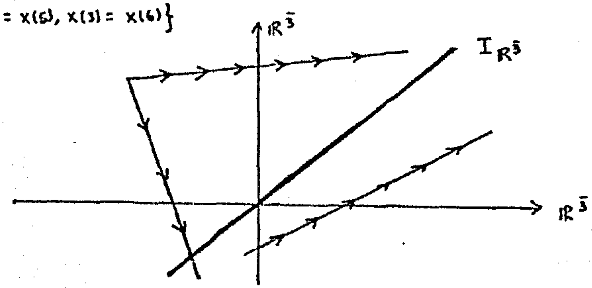


FIG.1 Trayectorias en el espacio de configuración para el estado natural de movimiento.

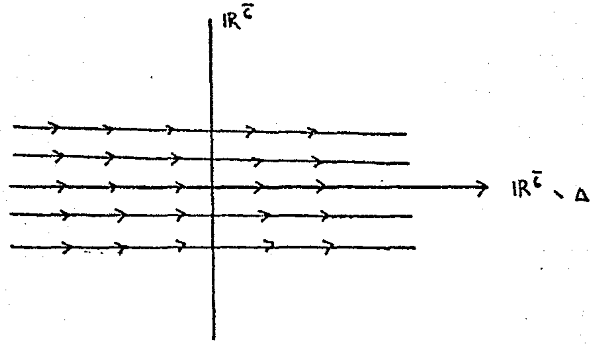


FIG.2 Trayectorias en el espacio fase T(M) . Estas son curvas integrales del campo Lagrangiano para la energía cinética.

En la fig. 1 puede observarse que la función de posición del sistema en general no está definida en todo $\mathbb{R}$. Esto significa que para ciertas condiciones iniciales de posición y velocidad el sistema tiende a salirse del espacio de configuración. Las partículas tienden a chocar.

<u>EJEMPLO 2</u> Vamos a plantear un nuevo espacio de configuración para el sistema de dos partículas. Hagamos

$$N \equiv \mathbb{R}^{\bar 6} \setminus \{ x \in \mathbb{R}^{\bar 6} / \ x(4) = x(5) = x(6) = 0 \}$$

Quisieramos ahora describir al sistema ya no mediante las coordenadas cartesianas de cada partícula sino mediante las coordenadas cartesianas del centro de masa y de la separación entre las partículas (i). Este ejemplo ilustra el por qué de la conjetura C.2. Definamos el cambio de descripción $h \in M^N$ por

$$\left.\begin{aligned} p_a^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ h &= p_a^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ i_N - t\, p_{3+a}^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ i_N \\ p_{3+a}^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ h &= p_a^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ i_N + s\, p_{3+a}^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ i_N \end{aligned}\right\} \quad \forall\, a \in \bar 3 \ .$$

donde $s \equiv \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$, $t \equiv \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Entonces h es un difeomorfismo y además

$$\left.\begin{aligned} p_a^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ h^{-1} &= s\, p_a^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ i_M + t\, p_{3+a}^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ i_M \\ p_{3+a}^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ h^{-1} &= p_{3+a}^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ i_M - p_a^{\mathbb{R}^{\bar 6}} \circ i_M \end{aligned}\right\} \quad \forall\, a \in \bar 3$$

Si $x \in M$ corresponde a una posición de coordenadas cartesianas $(x(1), x(2), x(3))$ y $(x(4), x(5), x(6))$ de cada partícula entonces

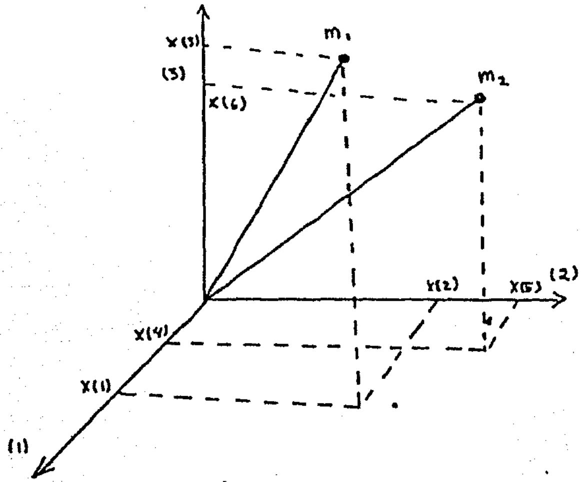
$$h^{-1}(x) = \left(\frac{m_1\, x(1)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2\, x(4)}{m_1 + m_2}\right)\delta_{(1)}^{(6)}$$

$$\left(\frac{m_1\, x(2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2\, x(5)}{m_1 + m_2}\right)\delta_{(2)}^{(6)} + \left(\frac{m_1\, x(3)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2\, x(2)}{m_1 + m_2}\right)\delta_{(3)}^{(6)}$$

$$+ (x(4) - x(1))\,\delta_{(4)}^{(6)} + (x(5) - x(2))\,\delta_{(5)}^{(6)} + (x(6) - x(3))\,\delta_{(6)}^{(6)}$$

(i) Las tres últimas coordenadas $(x(4),x(5),x(6))$ nos dan la separación entre las partículas de ahí que ésta nunca es cero. Es por ésto la elección de N

Las primeras tres componentes de $h^{-1}(x)$ corresponden a la posición del centro de masa de las partículas y las tres últimas corresponden a la diferencia en las posiciones de las partículas. Véase fig. 3.



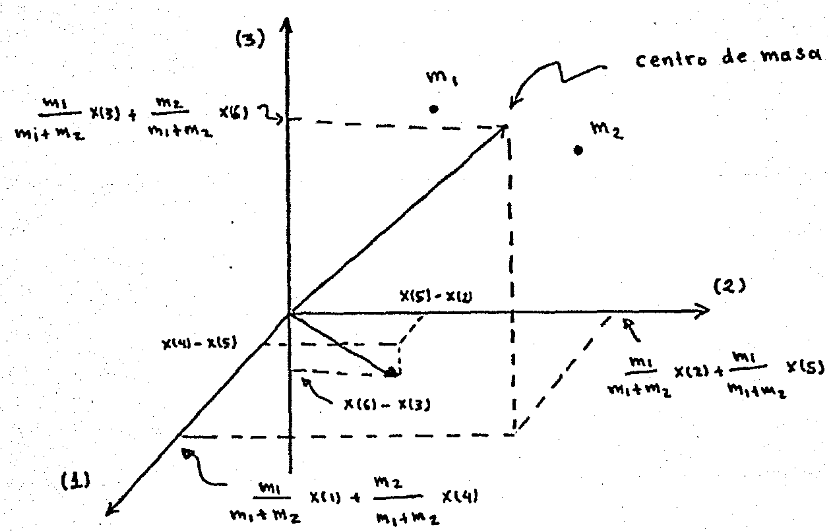


Fig. 3

Denotemos las cartas globales en N y T(N) como sigue

en N

$Q_a \equiv p_a^{\mathbb{R}^6} \circ i_N$

donde $i_N \in (\mathbb{R}^6)^N$ es la carta inclusión.

en T(N)

$\tilde{Q}_a \equiv p_a^{\mathbb{R}^6} \circ T(i_N) = Q_a \circ \rho$

$\dot{Q}_a \equiv p_{a+6}^{\mathbb{R}^6} \circ T(i_N)$

$\forall\ a \in \overline{6}$

El difeomorfismo h puede escribirse entonces como

$$q_a \circ h = Q_a + t\, Q_{a+3}$$

$$q_{a+3} \circ h = Q_a - s\, Q_{a+3} \qquad \forall\ a \in \overline{3}$$

$$\therefore \quad \dot{q}_a \circ T(h) = \dot{Q}_a - t\, \dot{Q}_{a+3}$$

$$\dot{q}_{a+3} \circ T(h) = \dot{Q}_a - s\, \dot{Q}_{a+3} \qquad \forall\ a \in \overline{3}$$

Entonces la función energía cinética en T(N) asociada a la métrica $h^*(g)$ es

$$K' = K \circ T(h) = \frac{1}{2} m_1((\dot{q}_1 \circ T(h))^2 + (\dot{q}_2 \circ T(h))^2 + (\dot{q}_3 \circ T(h))^2\ ) +$$

$$= \frac{1}{2} m_2((\dot{q}_4 \circ T(h))^2 + (\dot{q}_5 \circ T(h))^2 + (\dot{q}_6 \circ T(h))^2\ )$$

$$= \frac{1}{2} m_1((\dot{Q}_1 + t\dot{Q}_4)^2 + (\dot{Q}_2 + t\dot{Q}_5)^2 + (\dot{Q}_3 + t\dot{Q}_6)^2\ ) +$$

$$\frac{1}{2} m_2((\dot{Q}_1 - s\dot{Q}_4)^2 + (\dot{Q}_2 - s\dot{Q}_5)^2 + (\dot{Q}_3 - s\dot{Q}_6)^2\ )$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 + \dot{Q}_3^2) + \frac{m_1\, m_2}{2(m_1 + m_2)}(\dot{Q}_4^2 + \dot{Q}_5^2 + \dot{Q}_6^2\ )$$

Que es lo que esperaríamos de la función energía cinética en el nuevo espacio fase T(N) : La energía cinética de las partículas es la suma de la energía cinética del centro de masa y de la energía cinética de la masa reducida del sistema.

Veamos el movimiento natural que describe la métrica $h^*(g)$. Dada una curva integral $\Gamma \in T(N)^A$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, del campo Lagrangiano para la energía cinética K', tenemos que

$$D(\tilde{Q}_a \circ \Gamma\ ) = D(Q_a \circ \rho \circ \Gamma\ ) = \dot{Q}_a \circ \Gamma \quad \forall\ a \in \overline{3}$$

$$D(\dot{Q}_a \circ \Gamma\ ) = 0$$

$$\therefore \qquad D^2(Q_a \circ \rho \circ \Gamma) = 0$$

o bien, haciendo

$$R_{c.m} = Q_1 \circ \rho \circ \Gamma\ \delta^{(3)}_{(1)} + Q_2 \circ \rho \circ \Gamma\ \delta^{(3)}_{(2)} + Q_3 \circ \rho \circ \Gamma\ \delta^{(3)}_{(3)}$$

$$R_{1-2} = Q_4 \circ \rho \circ \Gamma\ \delta^{(3)}_{(1)} + Q_5 \circ \rho \circ \Gamma\ \delta^{(3)}_{(2)} + Q_6 \circ \rho \circ \Gamma\ \delta^{(3)}_{(3)}$$

que son las funciones de posición del centro de masa $R_{c.m}$ y de la separación entre las partículas R_{1-2},

$$D^2 R_{c.m} = 0 = D^2 R_{1-2}$$

Esto significa que el centro de masa se mueve con velocidad constante y la separación entre las partículas crece(o disminuye) uniformemente (en magnitud y dirección) con el tiempo. Claramente ambas descripciones del estado natural de movimiento del sistema de partículas son equivalentes.

Veamos ahora un ejemplo que muestra la utilidad de la conjetura C.3.

EJEMPLO # 3 Vamos a imponer ahora una restricción al sistema que hemos estudiado anteriormente. Las partículas son obligadas a mantener su distancia constante, digamos a. En este caso es conveniente introducir coordenadas apropiadas en el espacio de configuración N para introducir la constricción de manera sencilla.

Definamos una carta en N como sigue

$$G^{-1} = p_1 \delta^{(6)}_{(1)} + p_2 \delta^{(6)}_{(2)} + p_3\ \delta^{(6)}_{(3)} +$$
$$p_6 \cdot \text{sen} \circ p_4 \cdot \cos \circ p_5\ \delta^{(6)}_{(4)} + p_6 \cdot \text{sen} \circ p_4 \cdot \text{sen} \circ p_5 \delta^{(6)}_{(5)} + p_6 \cdot \cos \circ p_4\ \delta^{(6)}_{(6)}$$

$$G^{-1} \in N^U \qquad U \subseteq \mathbb{R}^6 \qquad \text{con } p_i \equiv p_i^{\mathbb{R}^6}$$

$$\text{y} \qquad U \simeq \mathbb{R}^3 \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, \infty)$$

Las primeras tres componentes de $G^{-1}(y)$ son

$$G^{-1}(y) = y(1)\ \delta^{(6)}_{(1)} + y(2)\ \delta^{(6)}_{(2)} + y(3)\ \delta^{(6)}_{(3)} + \ldots$$

y corresponden a las coordenadas cartesianas del centro de masa. El resto de las coordenadas son

$$G^{-1}(y) = \ldots + y(6)\cdot \text{sen } x(4)\cdot \cos x(5)\ \delta^{(6)}_{(4)} +$$

$$y(6)\cdot \text{sen } x(4)\cdot \text{sen } x(5)\ \delta^{(6)}_{(5)} + y(6) \cos x(4)\ \delta^{(6)}_{(6)}$$

luego para las tres últimas componentes de $G^{-1}(y)$, $y(4)$, $y(5)$, $y(6)$ son coordenadas esféricas del segmento dirigido que une a las partículas. Véase fig. 4.

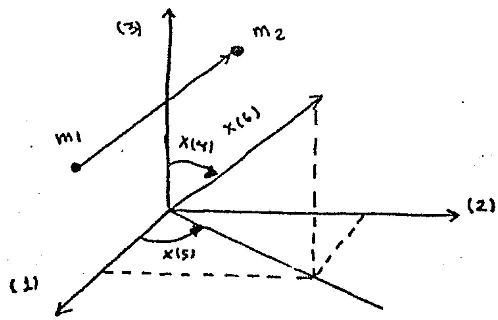


Fig. 4. Coordenadas esféricas del segmento $\underline{12}$.

La subvariedad sobre la que el sistema es obligado a moverse tiene una expresión simple en la carta G: Los puntos de esta subvariedad satisfacen

$$y \quad V \subseteq N \quad \Rightarrow \quad G_6(y) = a \qquad (G_6 = p_6^{\mathbb{R}^{\bar{6}}}\circ G)$$

Esto es, la distancia entre las partículas es constante. Inclusive tenemos una carta natural en V:

$$\theta^{-1} = p_1^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\ \delta^{(6)}_{(1)} + p_2^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\delta^{(6)}_{(2)} + p_3^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\ \delta^{(6)}_{(3)} +$$

$$a(\text{sen}\circ p_4\cdot\cos\circ p_5\ \delta^{(6)}_{(4)} + \text{sen}\circ p_4\cdot\text{sen}\circ p_5\ \delta^{(6)}_{(5)} + \cos\circ p_4\ \delta^{(6)}_{(6)}$$

$$\therefore \quad \theta \in V^E \quad \text{con } E \subset \mathbb{R}^{\bar{5}}\ ,\ p_a \equiv p_a^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\ \ \forall a \in \bar{5} \quad y$$

$$E \approx \mathbb{R}^{\bar{3}} \times (0, \pi\ ) \times (0,\ 2\pi\ )$$

Denotemos las componentes de la carta θ como sigue

$$X \equiv p_1^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\circ\theta \qquad \Theta \equiv p_4^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\circ\theta$$

$$Y \equiv p_2^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\circ\theta$$

$$Z \equiv p_3^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\circ\theta \qquad \phi \equiv p_5^{\mathbb{R}^{\bar{5}}}\circ\theta$$

y análogamente en $T(V)$: $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$, $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$.

La energía cinética inducida en la subvariedad $T(V)$ es $K' = K\circ T(i_V)$

donde

$\dot{Q}_1 \circ T(i_V) = \dot{X}$; $\dot{Q}_2 \circ T(i_V) = \dot{Y}$; $\dot{Q}_3 \circ T(i_V) = \dot{Z}$

$\dot{Q}_4 \circ T(i_V) = a(\cos\circ\theta \cdot \cos\circ\phi \cdot \dot{\theta} - \operatorname{sen}\circ\theta \cdot \operatorname{sen}\circ\phi \cdot \dot{\phi})$

$\dot{Q}_5 \circ T(i_V) = a(\cos\circ\theta \cdot \operatorname{sen}\circ\phi\ \dot{\theta} + \operatorname{sen}\circ\theta \cdot \cos\circ\phi\ \dot{\phi})$

$\dot{Q}_6 \circ T(i_V) = -a \operatorname{sen}\circ\theta \cdot \dot{\theta}$

Luego

$$K' = \frac{1}{2}(m_1+m_2) \sum_{a\in\bar{3}} (\dot{Q}_a \circ T(i_V))^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2} \sum_{b\in\bar{6}\setminus\bar{3}} (\dot{Q}_b\ T(i_V))$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2) + \frac{1}{2(m_1+m_2)} m_1 \cdot m_2\ a^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\circ\theta)$$

Veamos como se ve el estado natural de movimiento en la métrica de Riemann inducida en V. Primeramente,

$$D(\tilde{X}\circ\Gamma) = \dot{X}\circ\Gamma \qquad D(\dot{X}\circ\Gamma) = 0$$

$$D(\tilde{Y}\circ\Gamma) = \dot{Y}\circ\Gamma \qquad D(\dot{Y}\circ\Gamma) = 0$$

$$D(\tilde{Z}\circ\Gamma) = \dot{Z}\circ\Gamma \qquad D(\dot{Z}\circ\Gamma) = 0$$

o sea, $D^2(X\circ\rho\circ\Gamma) = D^2(Y\circ\rho\circ\Gamma) = D^2(Z\circ\rho\circ\Gamma) = 0$. Esto significa que el centro de masa se mueve con velocidad constante (recuérdese que X, Y, Z son las coordenadas cartesianas del centro de masa).

Para el resto de las coordenadas apliquemos las ecuaciones de Lagrange cuando el Lagrangiano es la energía cinética K.

$$D(\tilde{\theta}\circ\Gamma) = \dot{\theta}\circ\Gamma \qquad D\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}[K']\circ\Gamma\right) = \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}}[K']\circ\Gamma \quad \ldots(1)$$

$$D(\tilde{\phi}\circ\Gamma) = \dot{\phi}\circ\Gamma \qquad D\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}[K']\circ\Gamma\right) = \frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}}[K']\circ\Gamma \quad \ldots(2)$$

donde $\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}[K'] = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2} a^2\ \dot{\theta}$; $\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}}[K'] = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} a^2 \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\circ\theta \cos\circ\theta$

$$\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}[K'] = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} a^2\ \dot{\phi} \operatorname{sen}^2\circ\theta \ ; \quad \frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}}[K'] = 0$$

Luego en (1) y (2) tenemos

$$D(\tilde{\phi}\circ\Gamma) = \dot{\phi}\circ\Gamma \ ; \quad \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} a^2\ D(\dot{\phi}\circ\Gamma \cdot \operatorname{sen}^2\circ\tilde{\theta}\circ\Gamma) = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$D(\tilde{\theta}\circ\Gamma) = \dot{\theta}\circ\Gamma \quad ; \quad \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} a^2 D(\dot{\theta}\circ\Gamma) = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\, a^2 (\tilde{\phi}\circ\Gamma)^2 \;\text{sen}\circ\tilde{\theta}\circ\Gamma \;\cos\circ\tilde{\theta}\circ\Gamma \quad \ldots(2)$$

Simplificando, tenemos

$$D^2(\tilde{\theta}\circ\Gamma) = (\tilde{\phi}\circ\Gamma)^2 \;\text{sen}\circ\tilde{\theta}\circ\Gamma \;\cos\circ\tilde{\theta}\circ\Gamma$$

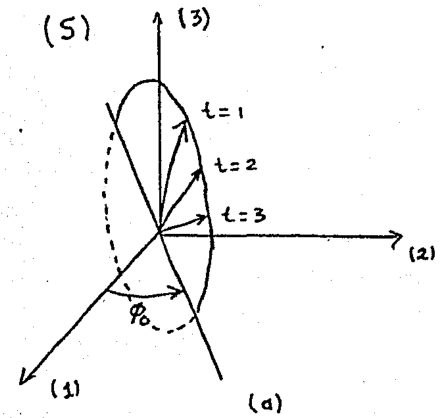
$$D(\tilde{\phi}\circ\Gamma)\;\text{sen}^2\circ\tilde{\theta}\circ\Gamma = \text{cte.}$$

Si inicialmente $D(\tilde{\phi}\circ\Gamma)(0)_2 = 0$, entonces el valor de la constante es cero. Como $\text{sen}\circ\theta\circ\Gamma$ nunca es cero, ésto obliga a que $D(\tilde{\phi}\circ\Gamma) = 0$ y las ecuaciones se simplifican a

$$D^2(\tilde{\theta}\circ\Gamma) = 0 \qquad \tilde{\theta}\circ\Gamma = m\, I_{\mathbb{R}} + \dot{\bar{b}}$$

$$D(\tilde{\phi}\circ\Gamma) = 0 \qquad \tilde{\phi}\circ\Gamma = \dot{\bar{\phi}}_0$$

La trayectoria del segmento dirigido que une a las partículas se realiza sobre un meridiano con una velocidad angular constante. Véase fig. 5a



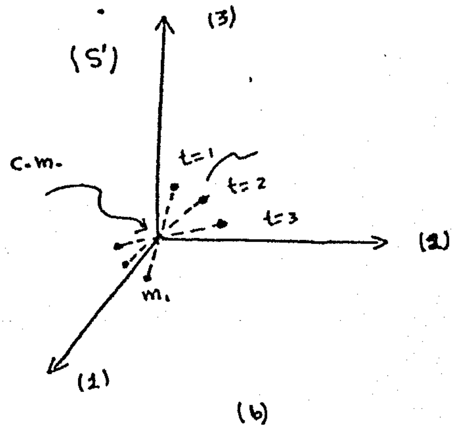


Fig. 5 Trayectorias geodésicas de las partículas. Se ha supuesto que el centro de masa c.m. está en reposo desde S, así que las partículas giran uniformemente alrededor del centro de masa. El sistema inercial S'mantiene su orígen en el centro de masa.

Podemos interpretar directamente la ecuación (1) como

sigue:
Como

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2^{\,2}}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^{\,2}}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= m_1 \, t^2 + m_2 \, s^2$$

entonces

$$\frac{1}{2}\, m_1 (at)^2 \; D(\tilde{\phi} \circ \Gamma) \operatorname{sen}^2 \circ \theta \; + \frac{1}{2}\, m_2 (as)^2 \; D(\phi \circ \Gamma) \operatorname{sen}^2 \circ \theta \; = \text{cte}.$$

Si consideramos un sistema inercial S´con orígen en el centro de masa, tal como se muestra en la fig. 5b, entonces cada término es la componente del momento angular a lo largo del eje 3 de este sistema.

CAMPO CENTRAL

Consideremos el problema de una partícula de masa m sujeta a una fuerza central; por ejemplo un planeta atraído por el sol, un objeto sujeto a la acción de un resorte o una partícula cargada en un campo eléctrico. En cualquier caso supondremos que el modelo nos permite considerar que el objeto de atracción o repulsión está situado en el orígen de algún sistema de referencia inercial.

En algunos caso es preferible omitir la descripción del orígen de coordenadas por no estar definida la interacción en ése punto (ésto sucede por ejemplo en el caso de la fuerza gravitacional). Podemos tomar entonces a $M \equiv \mathbb{R}^3 - \{0\}$ como un espacio de configuración apropiado. Con la estructura usual de M como variedad diferenciable sobre $\mathbb{R}^3$ podemos modelar a $T(M)$ y $T(M)^*$ sobre $\mathbb{R}^6$. Las cartas correspondientes se denotarán como sigue:

En M: $x \equiv p_1^{\mathbb{R}^3} \circ i_M$ $\qquad y \equiv p_2^{\mathbb{R}^3} \circ i_M$ $\qquad z \equiv p_3^{\mathbb{R}^3} \circ i_M$

En T(M): $\dot{x} = p_4^{\mathbb{R}^6} \circ T'(i_M)$ $\qquad \dot{y} = p_5^{\mathbb{R}^6} \circ T'(i_M)$ $\qquad \dot{z} = p_6^{\mathbb{R}^6} \circ T'(i_M)$

En $T(M)^*$: $p_x = p_4^{\mathbb{R}^{6*}} \circ T'(i_M)$, $p_y = p_5^{\mathbb{R}^{6*}} \circ T'(i_M)$, $p_z = p_6^{\mathbb{R}^{6*}} \circ T'(i_M)$

y las coordenadas x, y, z como funciones en $T(M)$ y $T(M)^*$ las denotaremos por $\tilde{x} = x \circ \rho$, $\bar{x} = x \circ \pi$, etc.

Como el sistema de referencia es inercial, la métrica euclídea describe el estado natural de movimiento de la partícula.

$$g = m(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz)$$

($\otimes$ denota el producto tensorial)

Conviene expresar a la energía cinética $K \in \mathbb{R}^{T(M)}$ asociada a g en términos de la carta de coordenadas esféricas $E \in (\mathbb{R}^3)^U$ donde U se obtiene de M al omitir el eje (3) y el rayo formado por el semieje (1) positivo. Véase fig. 1

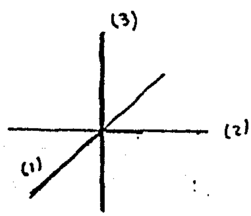


Fig. 1 U no contiene a la parte sombreada.

E viene dada por:

$$r \equiv p_1 \circ E = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2} \circ i_U$$

$$\phi \equiv p_2 \circ E = \cos^{-1} \circ \left(\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}\right) \circ i_U$$

$$\theta = p_3 \circ E = \cos^{-1} \circ \left(\frac{p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}\right) \circ i_U$$

Con $p_i \equiv p_i^{\mathbb{R}^3} \qquad \forall\, i \in \overline{3}$

En la carta $T(E)$ tenemos la expresión para la energía cinética

$$K \circ i_{T(U)} = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + \tilde{r}^2 \operatorname{sen}^2 \circ \tilde{\theta}\, \dot{\phi}^2 + \tilde{r}^2 \dot{\theta}^2) \quad \in \quad \mathbb{R}^{T(U)}$$

El campo de fuerzas es un campo en $\dot{M}$, que por ser central, podemos escribir como

$$F \circ i_U = R \frac{\partial}{\partial r}$$

para alguna función R real de clase C^n en U, $n \geq 2$ y que solo depende de la coordenada r; i.e. $D_2(R \circ E^{-1}) = 0 = D_3(R \circ E^{-1})$, o equivalentemente $\frac{\partial}{\partial \theta}[R] = 0 = \frac{\partial}{\partial \phi}[R]$; luego podemos poner $R = f \circ r$ para alguna función $f \in \mathbb{R}^{(0,\infty)}$ de clase $C^{(n)}$ (i)

Afirmamos que el campo de fuerzas es conservativo. Para verificarlo necesitamos ver que la 1 - forma correspondiente al campo de fuerzas es cerrada.

El campo covectorial correspondiente sería $F^{\#} = FK \circ F \in \mathcal{X}(U)^{*M}$ donde

$$FK = m(\dot{r}\, \delta r \circ \rho + \tilde{r}^2 \operatorname{sen}^2 \circ \tilde{\theta}\, \dot{\phi}\, \delta \phi \circ \rho + \tilde{r}^2 \dot{\theta}\, \delta \theta \circ \rho)$$

$$\therefore \quad F^{\#} = m R\, \delta r$$

y la 1- forma correspondiente es

$$\tau = mR\, dr$$

$$\therefore \quad d\tau = m \frac{\partial}{\partial r}[R]\, dr \wedge dr = 0$$

(i) En el caso del campo gravitacional, $f = - \frac{GM}{i_{\mathbb{R}^+}^2}$

$\therefore \quad R = - \frac{GM}{r^2}$, para un resorte de Hooke,

$f = -k\, i_{\mathbb{R}^+}^2 \quad \therefore \quad R = -k\, r^2$.

Del teorema de Stokes, si $d\tau = 0$, la integral de línea es independiente de la trayectoria (i). La integral de τ a lo largo de una curva $\gamma \in M^{[0,1]}$ es

$$\int_\gamma \tau = \int_0^1 (\tau \circ \gamma) \wedge \gamma' = m \int_0^1 (R \circ \gamma) D(r \circ \gamma)$$

$$= m \int_0^1 (f \circ r \circ \gamma) D(r \circ \gamma)$$

En el formalismo vectorial de la Mecánica, el campo de fuerzas sería

$$F' = m\, f \circ \| \, \|_{\mathbb{R}^3} \frac{I_{\mathbb{R}^3}}{\| \, \|_{\mathbb{R}^3}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}$$

y la integral de F' sobre γ representa el trabajo realizado por el campo de fuerzas. Por definición

$$\int_\gamma F' \equiv \int_0^1 \langle F' \circ \gamma \, , \, D\gamma \rangle$$

siendo $\langle \, , \rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$ y

$$\langle F' \circ \gamma \, , \, D\gamma \rangle = m\, f \circ \| \, \| \circ \gamma \left\langle \frac{\gamma}{\| \, \| \circ \gamma}, D\gamma \right\rangle = m\, f \circ r \circ \gamma D(r \circ \gamma)$$

Entonces podemos interpretar a la integral de línea de τ sobre γ como el trabajo realizado por el campo de fuerzas a lo largo de γ.

El lema de Poincaré nos asegura la existencia local de una función V tal que $\tau = -dV$. En algunos casos importantes podemos exhibir a V como una función global en todo M. Por ejemplo en el caso gravitacional podemos definir a V como sigue: Si $\gamma \in M^{[-\infty, 0]}$ es una curva del "infinito" a un punto p de coordenadas r_0, ϕ_0, θ_0 ; ésto es que $\lim_{-\infty} r \circ \gamma = \infty$ y $E(\gamma(1)) = r_0 \delta_{(1)} + \phi_0 \delta_{(2)} + \theta_0 \delta_{(3)}$. Definamos

$$V(p) = -\int_\gamma \tau = -\int_{-\infty}^{0} m f \circ r \circ \gamma \, D(r \circ \gamma) = -\int_{-\infty}^{r_0} m f = \int_{-\infty}^{r_0} \frac{GMm}{i^2_{\mathbb{R}^+}}$$

$$= -\frac{GMm}{r_0}$$

En otras palabras $V \circ E^{-1} = \dfrac{GMm}{r}$.

La definición de V pudo darse sin recurrir al argumento anterior, aunque éste está más de acuerdo con la idea intuitiva de definir el potencial como el trabajo realizado

(i) Naturalmente se trata de trayectorias continuamente diferenciables por tramos. Nótese la importancia de que pueda integrarse sobre una subvariedad de dimensión 2 que no contenga al orígen. Esto es imposible en $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

contra el campo (de ahí el signo $-$), para mover una partícula desde muy lejos. En el caso de un resorte de Hooke, se prefiere tomar la posición de reposo como la de potencial cero. Por un argumento similar, si $\gamma \in M^{[0,1]}$ es una curva del orígen a un punto p de coordenadas r_o, ϕ_o, θ_o ($\lim_{o^+} r\circ\gamma = 0$, $\gamma(1) = p$), entonces

$$V(p) = \int_o^{r_o} k\, i_{\mathbb{R}^+} = \frac{1}{2}kr_o^2 \quad \text{o sea} \quad V\circ E^{-1} = \frac{1}{2}kr^2$$

En los casos de interés hemos podido definir a V globalmente. Siendo éste el caso podemos poner $V = Q\circ r$ para alguna función $Q \in \mathbb{R}^{(0,\infty)}$ de clase $C^{(n+1)}$.
El Lagrangiano es entonces

$$L\circ i_{T(U)} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \tilde{r}^2 \mathrm{sen}^2\circ\tilde{\theta}\ \dot{\tilde{\phi}}^2 + \tilde{r}^2\dot{\theta}^2) - (Q\circ r)\circ \rho$$

y la energía de L

$$E_L\circ i_{T(U)} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \tilde{r}^2 \mathrm{sen}^2\circ\tilde{\theta}\ \dot{\tilde{\phi}}^2 + \tilde{r}^2\circ\dot{\theta}^2) + (Q\circ r)\circ \rho$$

como puede verificarse,

$$(FK)^{-1}_\circ i_{T(U)} = \frac{1}{m}\left(p_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\circ\pi\right) + \frac{p_\phi}{\tilde{r}^2 \mathrm{sen}^2\circ\tilde{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\circ\pi\right) + \frac{p_\theta}{\tilde{r}^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\circ\pi\right)\right)$$

$$\therefore \quad H\circ i_{T(U)} = E_L\circ(FK)^{-1}\circ i_{T(U)}$$

$$= \frac{p_r}{2m} + \frac{p_\phi}{2m\tilde{r}^2 \mathrm{sen}^2\circ\tilde{\theta}} + \frac{p_\theta^2}{2m\tilde{r}^2} + Q\circ\tilde{r}$$

Las ecuaciones de movimiento de Hamilton nos dan, para una trayectoria $C \in T(M)^{*(t_1,t_2)}$ del sistema

$$D(\bar{r}\circ C) = \frac{p_r\circ C}{m} \qquad D(p_r\circ C) = mf\circ\bar{r}\circ C \quad \text{(i)}$$

$$D(\bar{\phi}\circ C) = \frac{p_\phi\circ C}{m\bar{r}^2\circ C\ \mathrm{sen}^2\circ\bar{\theta}\circ C} \qquad D(p_\phi\circ C) = 0$$

$$D(\bar{\theta}\circ C) = \frac{p_\theta\circ C}{m\bar{r}^2\circ C} \qquad D(p_\theta\circ C) = \frac{(p_\phi\circ C)^2}{m(\bar{r}^2\circ C)(\mathrm{sen}^3\circ\bar{\theta}\circ C)}$$

(i) En realidad, $D(p_r\circ C) = -\left(\frac{\partial}{\partial\bar{r}}(V\circ\pi)\right)\circ C = -\left(\frac{\partial}{\partial\bar{r}}[V]\right)\circ\pi\circ C = mf\circ r\circ\pi\ C = mf\circ\bar{r}\circ C$. También: $D(p_r\circ C) = -\left(\frac{\partial}{\partial\bar{r}}[V]\right)\circ\pi\circ C = -DQ\circ r\circ\pi\circ C = -DQ\circ\bar{r}\circ C$; i.e $-DQ = m\,f$.

con

$$\frac{p_r^2\circ C}{2m} + \frac{p_\phi^2\circ C}{2m\bar{r}^2\circ C\ \mathrm{sen}^2\circ\bar{\theta}\circ C} + \frac{p_\theta^2\circ C}{2m\bar{r}^2\circ C} + Q\circ\bar{r} = \dot{\bar{e}}$$

De la ecuación $D(p_\phi\circ C) = 0$, tenemos que

$$m\bar{r}^2\circ C\ \mathrm{sen}^2\circ\bar{\theta}\circ C\ D(\bar{\phi}\circ C) = \dot{\bar{k}}$$

La magnitud $P_\phi\circ C$ puede interpretarse como el momento angular de la partícula respecto al eje (3) y mantiene un valor constante k. Véase fig. 2

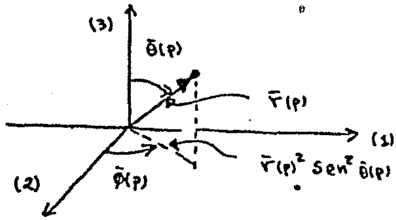


Fig. 1 Posición de la partícula
al instante t, C(t) = p

En realidad $P_\phi \in \mathbb{R}^{T(U)}$ es la función momento asociada al campo vectorial $\frac{\partial}{\partial\phi}$ en U (véase secc. 2.2), pues $p_\phi = I_{T(M)^*}\,\measuredangle(\frac{\partial}{\partial\phi}\circ\pi)$. Así la conservación del momento angular es consecuancia de la simetría del sistema en relación al campo $\frac{\partial}{\partial\phi}$, vgr $[X, \frac{\partial}{\partial\phi}] = 0$ o equivalentemente con los Hamiltonianos H y p_ϕ : $\{H, p_\phi\} = 0$.

Si inicialmente $\theta(C(t_1)) = 0$, entonces el valor constante del momento angular k es cero y se presentan dos posibilidades : 1) $\theta\circ C = 0$ en (t_1, t_2). La partícula se mueve entonces sobre el eje (3); 2) $\theta\circ C \neq 0$ en (t_1, t_2) . Entonces dado que $\bar{r}^2\circ C\ \mathrm{sen}^2\circ\bar{\theta}\circ C \neq 0$ entonces $D(\bar{\phi}\circ C) = 0$. Esto significa que el movimiento se realiza en un plano que pasa por el eje (3) y no hay pérdida de generalidad si suponemos que el plano es el plano (1)-(3). Esto incluye los casos (1) y (2) que mencionamos antes.

Bajo esta suposición las ecuaciones de Hamilton quedan

$$D(\bar{r}\circ C) = \frac{p_r \circ C}{m} \qquad D(p_r \circ C) = m\, f\circ\bar{r}\circ C$$

$$D(\bar{\theta}\circ C) = \frac{p_\theta \circ C}{m\bar{r}^2\circ C} \qquad D(p_\theta\circ C) = 0$$

con -----

$$\frac{p_r^2\circ C}{2m} + \frac{p_\theta^2\circ C}{2m\bar{r}^2\circ C} + Q\circ\bar{r}\circ C = \dot{\bar{e}}$$

La segunda ecuación nos da de inmediato que $p_\theta\circ C$ = cte.

$m\bar{r}^2\circ C\ D(\bar{\theta}\circ C) = p_\theta\circ C = \dot{\bar{A}}$.[1] Al sustituir este valor en la expresión de la conservación de la energía tenemos que

$$\frac{p_r^2\circ C}{2\ m} + \frac{A^2}{2m\bar{r}^2\circ C} + Q\circ\bar{r}\circ C = \dot{\bar{e}} \qquad \ldots (1.1)$$

y derivando tenemos

$$\frac{(p_r\circ C)D(p_r\circ C)}{m} - \frac{A^2 D(\bar{r}\circ C)}{m\ \bar{r}^3\circ C} + D(Q\circ\bar{r}\circ C) = 0$$

o bien dado que $D(Q\circ\bar{r}\circ C) = (DQ\circ\bar{r}\circ C)\ D(\bar{r}\circ C) = -(mf\circ\bar{r}\circ C)D(\bar{r}\circ C)$

$$D(\bar{r}\circ C)D(p_r\circ C) = \frac{A^2 D(\bar{r}\circ C)}{m\bar{r}^3\circ C} + (m\ f\circ\bar{r}\circ C)\ D(\bar{r}\circ C)$$

si $D(\bar{r}\circ C) = 0$ en (t_1, t_2) tendríamos que $\bar{r}\circ C = \dot{\bar{r}}_0$ y la partícula se movería en un círculo de radio r_0 sobre el plano 1-3 . Si $D(\bar{r}\circ C) \neq 0$, entonces $D(\bar{r}\circ C) \neq =$ en $(a,b) \subseteq (t_1, t_2)$ y

$$m\ D(\bar{r}\circ C) = \frac{A^2}{m\bar{r}^3\circ C} + m\ f\circ\bar{r}\circ C$$

Puede observarse que esta ecuación es la que correspondería a la de una partícula de masa m moviéndose en una dirección y sujeta a una fuerza $A^2/m\bar{r}^3\circ C + m\ f\circ\bar{r}\circ C$, siendo r C su función de posición.

Debido a ésto se conviene en denominar a

---

(1) La cantidad $p_\theta\circ C$ corresponde al momento angular respecto al eje (2) como puede verse en la fig.1.

$$P = Q + \frac{A^2}{2\, m \circ i^2_{IR^+}}$$

el potencial centrífugo, aunque para ser consistentes debía llamarse energía potencial centrífuga. En realidad $A^2 / m\bar{r} \circ C$ es la fuerza centrífuga sobre la partícula desde un sistema de referencia que gira alrededor del eje (2) con una velocidad angular $D(\bar{e} \circ C)$ de tal forma que desde este sistema la partícula se mueve en una dirección Véase fig. 3

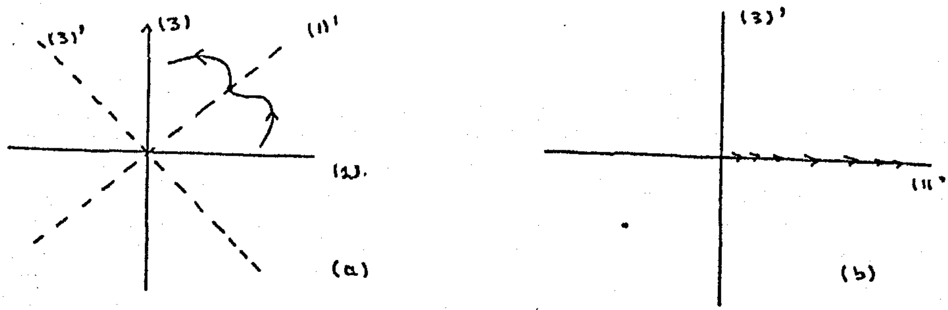


Fig. 3 a) Aspecto del movimiento desde el sistema inercial. b) Desde el sistema que gira.

Con esto podemos reescribir la conservación de la energía como

$$\frac{p_r^2 \circ C}{2m} + P \circ \bar{r} \circ C = \dot{\bar{e}} \qquad \ldots (1.2)$$

Formalmente, el sistema mecánico original es equivalente al de una partícula cuyo estado natural de movimiento es el rectilíneo uniforme en una dirección dada con energía potencial P y energía mecánica e . Véase fig. 4

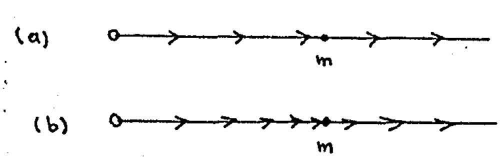
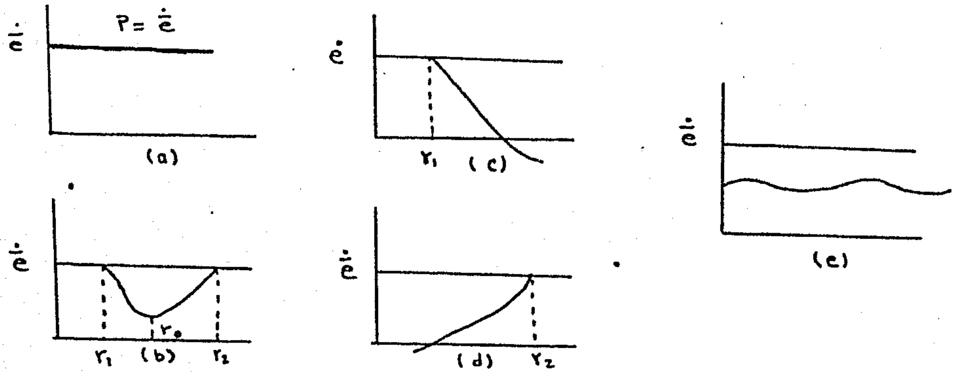


Fig. 4. Esquema del sistema mecánico equivalente a) En estado natural de movimiento. b) ante una función de energía potencial P.

De (1.2) tenemos

$$D(\bar{r}\circ C) = \pm\sqrt{2/M}\cdot\sqrt{\dot{e} - P\circ\bar{r}\circ C}$$

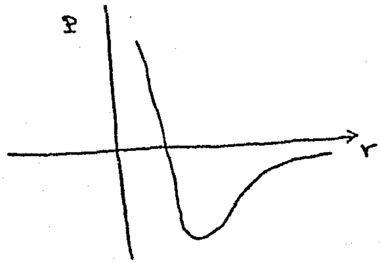
y de aquí se ve que si la partícula está en la región $S \equiv \{q \in M \,/\, P(\bar{r}(q))\}$ e entonces $D(\bar{r}\circ C) > 0$ ó $D(\bar{r}\circ C) < 0$
Hagamos un análisis cualitativo de la situación. Las posibilidades que se muestran para la región accesible S , físicamente, se muestran esquemáticamente así:



En cada caso la partícula se comporta como sigue:

a) $p_r\circ C = 0$ y la partícula se mueve en un círculo.
b) La partícula oscila entre los círculos de radios r_1 y r_2 alrededor del círculo de equilibrio estable de radio r_o , siendo r_o el radio de mínima energía potencial.
c) El movimiento se realiza fuera de un círculo de radio r_1. El orígen se comporta como un repulsor.
d) La partícula está "atada" al orígen, dentro de un círculo de radio r_2. El orígen se comporta como un atractor.
e) El movimiento es indiferente. El sistema es topológicamente equivalente a un sistema con potencial centrífugo constante; i.e. con un campo de fuerza nulo.

Como es bien sabido, a pesar de que las ecuaciones no tienen una solución explícita en general, puede obtenerse información cualitativa de las órbitas en el espacio de configuración, como por ejemplo el período de oscilación de las órbitas en el caso b o incluso la forma de las órbitas. Por ejemplo, en el caso del campo gravitatorio la forma del potencial centrífugo es más o menos de la forma que se muestra abajo y dependiendo de la energía de la partícula se presentan los casos (b) o (c) que hemos señalado y puede demostrarse que las trayectorias son cónicas.



Potencial centrifugo para el campo gravitacional.

3.3. PROBLEMA DE UNA CUERDA

En este ejemplo consideramos un sistema mecánico en el que su espacio de configuración es de dimensión infinita. Se acostumbra decir en casos como éste que el sistema tiene una infinidad de grados de libertad. En nuestro ejemplo, el sistema tiene una infinidad no numerable de grados de libertad.

Consideremos una cuerda con densidad de masa σ - más adelante veremos la forma explícita de σ -. El ancho de la cuerda se supone pequeño en relación a su longitud total, de tal suerte que σ es la densidad lineal de la cuerda (g/cm).

Tomemos un sistema de referencia inercial como se muestra en la fig. 1

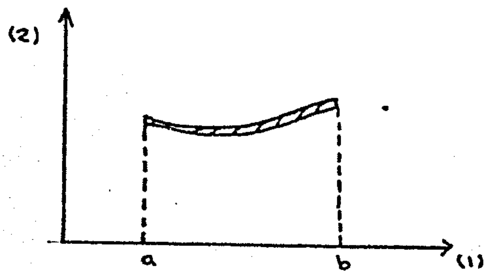


Fig. 1

Vamos a suponer que los extremos de la cuerda se deslizan sobre un par de varillas verticales situadas en a y b. Por ejemplo, podría pensarse que los extremos de la cuerda están sujetos a las varillas mediante anillos o bien que estamos observando una parte de la cuerda. Véanse figs. 2.a y 2.b.

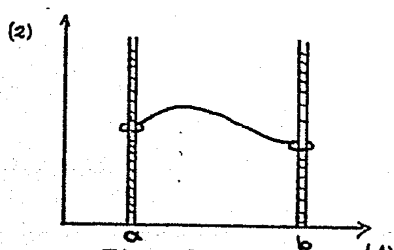


Fig. 2.a

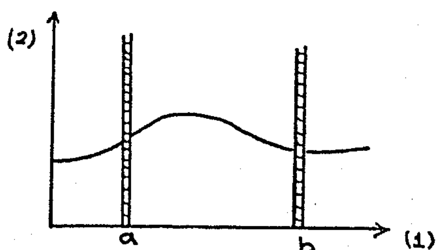


Fig. 2.b.

Podemos escoger la escala en los ejes del sistema de tal forma que a = 0 y b = 1; luego basta especificar la forma de la cuerda para determinar su posición respecto al sistema de referencia. Una elección apropiada para el espacio de configuración es tomar a $M \equiv C^2[0,1]$, las funciones continuamente diferenciables hasta orden dos en $[0,1]$. La convención que adoptaremos para la descripción de la posición es la natural: Si $\alpha \in M$, entonces las coordenadas cartesianas de los puntos de la cuerda son

$$\{(x, \alpha(x)) \ / \ x \in [0,1]\}$$

En otras palabras, las posiciones de la cuerda vienen descritas por gráficas de funciones en $C^2[0,1]$

Al tomar a $M \equiv C^2[0,1]$ como el espacio de configuración estamos suponiendo implícitamente que la cuerda no tiene "picos" e incluso que las concavidades de la cuerda son continuas. Por ejemplo, una configuración como se muestra en la figura 3 no estaría permitida.

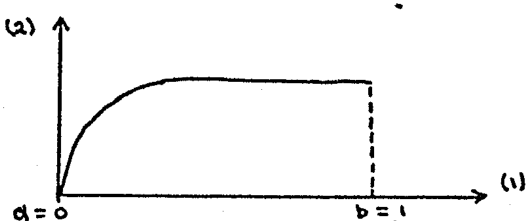


Fig. 3. Configuración prohibida.

Si modelamos a $M \equiv C^2[0,1]$ sobre el espacio vectorial $V \equiv C^2[0,1]$ normado con

$$\|\alpha\|^{(2)} \equiv \sup_{t\in[0,1]} |\alpha(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |D\alpha(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |D^2\alpha(t)|$$

entonces en la topología dada a M, dos curvas estarán cercanas si ellas y sus pendientes, e incluso sus concavidades están uniformemente cercanas (i). Ahora veremos que sentido tiene la noción de "estado natural de movimiento" en nuestro problema particular, ante ciertas hipótesis concretas.

HIPOTESIS I.- La densidad de la cuerda es independiente de la configuración, si bien es variable a lo largo de la cuerda.

(i) Eventualmente necesitaremos de los espacios $K \equiv C^0[0,1]$ y $S \equiv C^1[0,1]$. Las normas que habremos de utilizar son $\|f\|^{(0)} \equiv \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ y $\|g\|^{(1)} \equiv \|g\|^{(0)} + \|Dg\|^{(0)}$ respectivamente.

(p. sgt.)

Si en dos configuraciones la longitud de la cuerda en la primera es menor que en la segunda, al no depender la densidad de la configuración, necesari mente la masa total de la cuerda cambia. Como veremos más adelante, esta hipótesis en ocasiones es razonable y veremos algún caso típico.

Una métrica de Riemann "natural" en M es la definida por el producto escalar en V:

$$(u\,,\,v) \equiv \int_0^1 \sigma\cdot u\cdot v \qquad \forall\, u,v \in V$$

y σ es la densidad de la cuerda $(\sigma \in V)$.
Este es un producto escalar acotado ya que

$$|(u\,,\,v)| \leq \|\sigma\|^{(2)}\,\|u\|^{(1)}\,\|v\|^{(2)}$$

y débilmente no degenerado ya que si $\alpha \in V$ y

$$\int_0^1 \sigma\cdot u\cdot v = 0 \quad \forall\, v \in V \;\Rightarrow\; u = 0$$

Sin embargo (,) no es fuertemente no degenerado ya que $(V, \|\ \|^{(2)})$ no es un espacio de Hilbert - puesto que la norma $\|\ \|^{(2)}$ no puede definirse mediante algún producto escalar -. Esto nos previene de hablar de la energía en $T(M)^*$, $T = K\circ(FK)^{-1}$ donde $K \in \mathbb{R}^{T(M)}$ es la energía cinética en $T(M)$, ya que la definición de FK^{-1} involucra la no degeneración fuerte de la métrica de Riemann#

Veamos el significado de la energía cinética en $T(M)$. Para ésto consideremos una trayectoria del sistema $C \in T(M)^A$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces $\Gamma \equiv P_1^{V\times\bar{I}}\circ T(I_V)\circ C$ es la función de posición de la cuerda y $D\Gamma = P_2^{V\times\bar{I}}\circ T(I_V)\circ C$.
La energía cinética de la cuerda a un instante $t \in A$, sería

$$\begin{aligned} K\circ C(t) &= \frac{1}{2}\,(\,T(I)_2 C(t),\; T(I)_2 C(t)\,) \\ &= \frac{1}{2}\,(\,D\Gamma(t),\; D\Gamma(t)\,) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma\cdot(D\Gamma(t))^2 \end{aligned}$$

En realidad $D\Gamma(t)$ V es la distribución de velocidades a lo largo de la cuerda ya que la velocidad del punto de

(i) (cont.) Con ésto logramos que el producto de funciones en K, S y V sea continuo y también las inclusiones naturales $V \hookrightarrow S \hookrightarrow K$.

la cuerda de abscisa x es precisamente $D\Gamma(t)(x)$.
Como una aproximación a la integral tendríamos

$$1/2 \sum \sigma(x_n)\,(D\Gamma(t)(x_n))^2 \cdot \Delta x_n$$

para una partición $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n = 1$ del intervalo $[0,1]$ y donde

$\sigma(x_n)\,\Delta x_n \approx$ masa del segmento de cuerda entre x_{n-1} y x_n.

$D\Gamma(t)(x_n) \approx$ velocidad del segmento de cuerda.

En este sentido es que la métrica de Riemann que hemos definido es "natural".

Como la métrica de Riemann no depende de la configuración - al ser definido vía un producto escalar en el espacio de modelación -, las curvas integrales del campo Lagrangiano para la energía cinética se proyectan a M como "geodésicas rectas" en la carta identidad I_V

$D^2\Gamma = 0$ donde $\Gamma = T(I)_1 \circ C$ y $C \in T(M)^{\mathbb{R}}$ una curva integral del campo Lagrangiano para K.(1)

La solución general a la ecuación anterior es

$\Gamma(t) = t\,u + \beta$ donde $u, \beta \in V$ son "constantes"

Las constantes u y β son funciones en $C^2[0,1]$ y para cada $x \in [0,1]$

$$\Gamma \wedge \dot{x} = I_{\mathbb{R}}\, u(x) + \beta(x) \quad \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

es la función de posición del punto de la cuerda de abscisa x. La solución general nos dice pues que cada punto de la cuerda se mueve con una velocidad (vertical) uniforme $u(x)$ a partir de una posición inicial $\beta(x)$, siendo x la abscisa del punto. Así los puntos en los que $u(x)$ es grande se mueven más rápidamente, la cuerda se hace más cóncava en esos puntos al transcurrir el tiempo. Nótese un punto interesante: La continuidad de u y β asegura que la cuerda no se rompe e incluso aseguran el cambio continuo de la pendiente y la concavidad a lo largo de la cuerda.

---

(1) Nótese que es posible garantizar la existencia de las soluciones en todo $\mathbb{R}$

La diferencia de considerar al conjunto $C^2[0,1]$ como espacio vectorial y variedad diferenciable, radica en que desde el punto de vista de la segunda estructura no hay un elemento distinguido como orígen de coordenadas (el cero en la estructura vectorial). De este modo, dada una curva geodésica $\Gamma \in M^{\mathbb{R}}$ siempre es posible encontrar una carta $F \in \mathcal{A}^{(\infty)}(M, V)$ tal que Γ tenga la expresión local

$$(F \circ \Gamma)(t) = t\, u \qquad \text{con } u \in V \text{ una constante } \forall\, t \in \mathbb{R}$$
$$(F \circ \Gamma)(0) = \dot{\bar{0}}$$

Obviamente, si $\Gamma(0) = \beta$, $F = I_V - \dot{\bar{\beta}}$.

La estructura diferenciable es más rica aún ya que si $u(x) \neq 0 \ \forall\ x \in [0,1]$ podemos encontrar una carta en $T(M)$, $U \in \mathcal{A}^{(\infty)}(T(M), V^{\bar{2}})$ tal que la expresión local de $C \in T(M)^{\mathbb{R}}$ sea

$$U_2 \circ C = \dot{\bar{1}}$$
$$U_1 \circ C = \dot{\bar{0}}$$

De hecho, supóngase que $T(I_V)_1 \circ C\ (0) = \dot{\bar{0}}$ y $T(I_V)_2 \circ C\ (0) = \dot{\bar{u}}$ entonces si hacemos

$$U_1 = T(I_V)_1$$
$$U_2 = \frac{1}{u}\, T(I_V)_2$$

tenemos que $K \circ U^{-1} = K \circ T(I_V)^{-1} \circ T(I_V) \circ U^{-1}$

con
$$T(I_V)_1 \circ U^{-1} = p_1^{V^{\bar{2}}}$$
$$T(I_V)_2 \circ U^{-1} = \frac{1}{u}\, p_2^{V^{\bar{2}}}$$

luego $K \circ U^{-1} = K \circ T(I_V)^{-1} \circ \left(\theta_1^{V^{\bar{2}}} \circ p_1^{V^{\bar{2}}} + \frac{1}{u}\, \theta_2^{V^{\bar{2}}} \circ p_2^{V^{\bar{2}}} \right)$

$$\text{i.e.} \quad K \circ U^{-1}\,(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma \left(\frac{v}{u}\right)^2 \qquad \forall\ v \in V$$

Veamos las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Para ello calculamos

$$(K \circ U^{-1})_1'(W)(v) = 0, \qquad \forall\ W \in V^{\bar{2}}, \forall\, v \in V$$
$$(K\ U^{-1})_2'(W)(v) = \int_0^1 \sigma \frac{W(2)\ v}{u} \qquad \forall\ W\ \ V^{\bar{2}}, \forall\, v \in V$$

Luego $D((K \circ U^{-1})_2' \circ U \circ C) = (K \circ U^{-1})_2' \circ C = 0$

$$\int_0^1 \sigma \frac{(U_2 \circ C)(t)\ v}{u} = \int_0^1 \sigma \frac{(U_2 \circ C)(0)\ v}{u} = \int_0^1 \sigma \cdot \frac{v}{u}$$

ya que $(U_2 \circ C)(0) = \frac{1}{u} T(I_V)_2 \circ C\ (0) = \frac{u}{u} = 1$

$$\therefore \qquad \int_0^1 \sigma \left(\frac{U_2 \circ C\ (t)}{u} - \frac{1}{u} \right) w = 0, \forall w \in V, \forall\ t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad U_2 \circ C\ (t) = \dot{1}$$

y como hemos supuesto, $U_1 \circ C = T(I_V)_1 \circ C = \dot{0}$

Para ilustrar la observación que hemos hecho pensemos que inicialmente la cuerda yace sobre el eje horizontal, de modo que $\beta = 0$, y que inicialmente se tiene una distribución de velocidades u como se muestra en la fig. 4b Comparamos las descripciones de la misma curva integral del campo Lagrangiano para K según las cartas $T(I_V)$ y U.

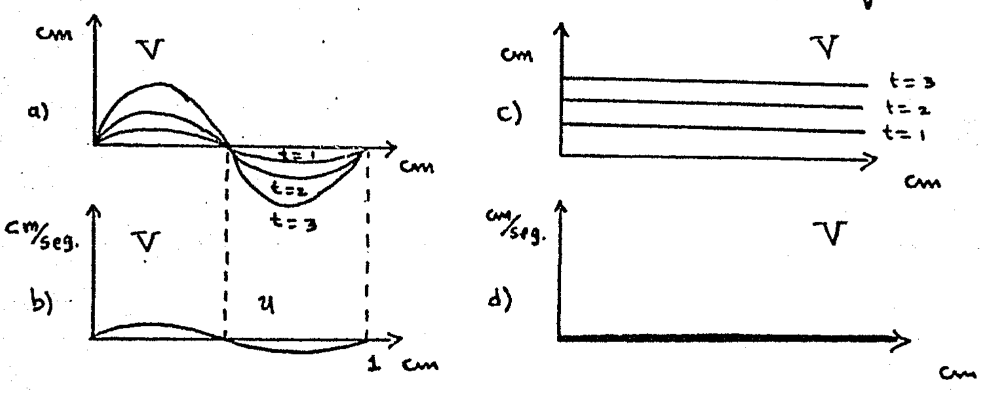


Fig. 4. En las gráficas de la izquierda se muestra la descripción del estado natural de movimiento según la carta $T(I_V)$. Inicialmente se tiene una distribución de velocidades u como se muestra en la fig. b. En la fig. a la curva $T(I_V)_1 \circ C$ en V se muestra a tiempos sucesivos. A la derecha se tienen las gráficas correspondientes con la carta U. Nótese que la gráfica a) puede identificarse con el movimiento mismo de la cuerda dado el método de descripción adoptado, no así la gráfica c).

Esta noción de estado natural de movimiento es razonable en algunos casos. Por ejemplo, supongamos que la densidad de la cuerda es constante a lo largo de ella (un número) y que estamos en el caso de la fig. 2b), en el que el intervalo $[0,1]$ $(a=0,\ b=1)$ marca sobre nuestro sistema de referencia la parte de la cuerda que estamos observando. En realidad puede entrar o salir cuerda en la banda determinada por las varillas y no debe extrañar que la masa total de la cuerda varíe. Este es el caso pues, de una cuerda "libre" y totalmente extensible.

Esta noción de estado natural de movimiento no es sin embargo la única posible, pues en ocasiones no es tan "natural" sostener la hipótesis 1 en la que se supone que la masa total de la cuerda no es constante.
Antes de proseguir necesitamos el siguiente lema técnico aunque el lector presuroso puede omitir éste detalle.

LEMA TECNICO.- Sea $G \in \mathbb{R}^A$ de clase C^k con $k \geq 1$ y A un abierto en $\mathbb{R}$. Entonces

1) $E \equiv \{ f \in C^0[0,1] / \ f([0,1]) \subseteq A \}$ es un abierto en $C^0[0,1]$

2) $Y(G) \equiv \dot{\bar{G}} \odot I_K \ \in K^A$ es diferenciable y además

$$Y(G)'(f) = \overline{\dot{DG} \circ f} \odot I_K \qquad (i)$$

3) $Y(G)$ es de clase C^k si G es de clase C^k.

Dem. 1) Sea $f \in E$; $m \equiv \inf_{t \in [0,1]} |f(t)|$, $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.
$\therefore$ $[m, M] \subset A$.

Como A es abierto $\exists\ r > 0 \ni [m-r, M+r] \subset A$

$\therefore \|g - f\|^{(0)} < r \Rightarrow \forall\ t \in [0,1]\ \ m-r \leq f(t)-r \leq f(t) \leq f(t)+r \leq \cdots$
$\cdots M+r$

$\Rightarrow\ \ g[0,1] \subset [m-r, M+r] \subset A \Rightarrow g \in E.$

Dem. 2) Sean $f \in E$, $s > 0$, $t \in [0,1]$ y $h \in K \ni \|h\|^{0} < r$.

$\therefore\ f + h \in E$ y $G \circ (f+h) - G \circ f - (DG \circ f) \cdot h \in K.$

Como G es derivable en $f([0,1])$, $\exists \xi \ni |\xi - f(t)| < |h(t)|$ y
$G(f(t)+h(t)) - G(f(t)) = DG(\xi).$

De la continuidad uniforme de DG en $[m-r, M+r]$ $\exists\ d > 0 \ni$

$t, t' \in [m-r, M+r] \ni: |h(t')| < \delta \Rightarrow |\xi - f(t')| < \delta \Rightarrow |DG(\xi) - DG(f(t))| < s$

(i) si $F, G \in C^2[0,1]^E$ $\ F \odot G(x) \equiv F(x) \cdot G(x)\ \ \forall x \in E$

$$\therefore \quad \|h\|^{(0)} < \min(r,d) \Rightarrow \forall \quad t\in[0,1] \quad |G(f(t)+h(t))-G(F(t)) - DG(f(t))\,h(t)|$$

$$= |DG(\xi) - DG(f(t))|\,|h(t)| < s|h(t)|$$

$$\Rightarrow \quad \| G\circ(f+h) - G\circ f - (DG\circ f)\cdot h\|^{(0)} < r\,\|h.\|^{(0)}.$$

Dem. 3) Basta ver que podemos reescribir a $Y(G)'$ como

$$Y(G)' = (\bar{\dot{I}}_K \circledcirc \dot{\bar{I}}_K)\circ Y(DG)$$

donde $(\bar{\dot{I}}_K \circledcirc \dot{\bar{I}}_K) \in \mathrm{Hom}(K, \mathrm{Hom}(K,K))$. En particular se tiene que

$$Y(G)''(f)\ (h)\ (g) = (D^2 G\circ f)\cdot h\cdot g\ .$$

Pasamos ahora a analizar otra posible noción de estado natural de movimiento. Esta se basa en la siguiente hipótesis.

<u>HIPOTESIS 2</u>.– Originalmente se tiene una densidad de la cuerda $\sigma_0 \in C^2[0,1]$. La densidad en otra configuración cambia de suerte que localmente la masa es constante.

El siguiente argumento aclara la hipótesis anterior:

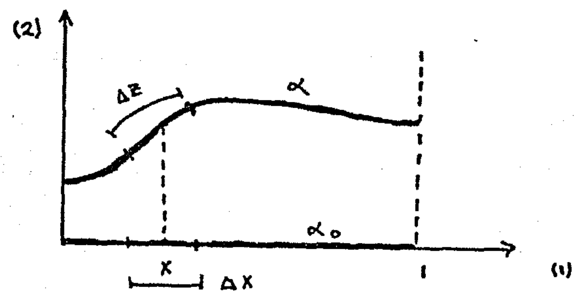


Fig. 5. En la configuración original α se tiene una densidad de la cuerda $\sigma_0 \in C^2[0,1]$. En la configuración α, la densidad es $\sigma(\alpha) \in C^2[0,1]$.

Originalmente la cuerda yace sobre el eje (1) y tiene una densidad σ_0. Para un punto de la cuerda de abscisa x, la masa comprendida en el segmento Δx es aproximadamente $\sigma_0(x)\cdot\Delta x$. En la configuración α; ésta es la masa total dentro del segmento Δz, hipótesis 2, cuya longitud es aproximadamente

$$\Delta z = (\ (\Delta x)^2 + (\Delta x\ D\alpha(x))^2)^{\frac{1}{2}} = \Delta x(1 + (D\alpha(x))^2)^{1/2}$$

luego la densidad en el punto x es

$$\sigma(\alpha)(x) = \frac{\sigma_0(x)\cdot \Delta x}{\Delta x\,(1 + (D\alpha(x)^2)^{1/2}} \qquad \forall \quad x \in [0,1]$$

i.e. $$\sigma(\alpha) = \frac{\sigma_0}{(1 + (D\alpha)^2)^{1/2}}$$

La métrica de Riemann con este modelo de densidad tendría por representación local, en la carta identidad I_V

$$g^{I_V}(\alpha)\ (W) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma(\alpha)\cdot W(1)\cdot W(2) \quad \forall \alpha \in V\ ,\ W \in V^{\bar{2}}$$

en este caso g ya no está definida por un producto escalar en el espacio de modelación.

Si $C \in T(M)^A$ es una trayectoria del sistema y $\Gamma = T(I_V)\circ C$ la función de posición, la energía cinética de la cuerda a un instante t es

$$K\circ C(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma(\Gamma(t))(D\Gamma(t))^2$$

Aquí $\sigma(\Gamma(t))$ es la densidad de la cuerda cuando su configuración es $\Gamma(t)$ y $D\Gamma(t) \in C^2[0,1]$ es la distribución de velocidades de los puntos de la cuerda, así que esencialmente la energía cinética es el total de las contribuciones de cada segmento de la cuerda las cuales dependen del punto y del estiramiento local.

Para la energía cinética se tiene que (1)

$$K\circ T(I_V)^{-1}(W) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma\ (W(1))\ W(2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \circ\{\sigma\circ p_1^{V^{\bar{2}}} \odot (Y(I^2) \odot p_2^{V^{\bar{2}}}) \qquad p_i = p_i^{V^{\bar{2}}}$$

y del lema técnico

$$(K\circ T(I_V)^{-1})'_2(W) = \int_0^1 \circ\ \overline{\sigma(W(1))} \odot (W(2)) \odot I_V)$$

$$(K\ T(I_V)^{-1})'_1(W) = \int_0^1 \circ\ \ \sigma'(W(1)) \odot W(2)^2$$

Nótese que $(K\circ T(I_V)^{-1})'_2(W)(\alpha) = \int_0^1 \sigma(W(1))\cdot W(2)\cdot \alpha$

---

(1) $f\cdot g$ denota el producto de funciones en $C^1[0,1]$. Si $F, G \in C^2[0,1]^E$ $(F \odot G)(s) = F(s)\cdot G(s)\ \ \forall\ s \in E$.

es la densidad de momento a lo largo de la cuerda, $\sigma(W(1))\cdot W(2)$, promediada con la función α , cuando su configuración es $W(1)$ y su distribución de velocidades $W(2)$.
Veamos las ecuaciones de movimiento:

$$D((K\circ T(I_V)^{-1})_2'\circ T(I_V)\circ C)(t) =$$

$$(((K\circ T(I_V)^{-1})_2')'(T(I_V)\circ C(t)))(D(T(I_V)\circ C)(t))$$

donde $(K\circ T(I_V)^{-1})_2' = \int_0^1 \odot\{\overline{(\sigma\circ P_1)}\odot(\gamma(I)\circ P_2)\}\qquad P_i \equiv P_i^{V^2}$.

$$((K\circ T(I_V)^{-1})_2')(w)(v) = \int_0^1 \overline{\sigma'(w(1))(w(1))}\odot(\overline{\dot{w}(2)}\odot I_V)$$

$$+ \int_0^1 \overline{\sigma(\dot{w}(1))}\odot(\overline{\dot{v}(2)}\odot I_V)$$

de las ecuaciones de Lagrange tenemos que para una curva integral $C\in T(M)^A$ con $A\subseteq\mathbb{R}$ (i)

$$D(T(I_V)_1\circ C) = T(I_V)_2\circ C$$

$$D((K\circ T(I_V)^{-1})_2'\circ T(I_V)\circ C)(t) = (K\circ T(I_V)^{-1})_1'\circ T(I_V)\circ C\ (t)$$

Pongamos $\Gamma \equiv T(I_V)_1 C \in M^A$ la función de posición de la cuerda. En la segunda ecuación se tiene

$$\int_0^1 \sigma'((T(I_V)_1\circ C)(t))(D(T(I_V)_1\circ C)(t))\cdot T(I_V)_2\circ C(t)\cdot\alpha +$$

$$\int_0^1 \sigma((T(I_V)_1\circ C)(t))\cdot D(T(I_V)_2\circ C)(t)\cdot\alpha = \int_0^1 \sigma'((T(I_V)_1\circ C)(t))(\alpha)\cdot(T(I_V)_2\circ C)(t)^2$$

o sustituyendo $T(I_V)_1\circ C\ (t) = \Gamma(t)$, $T(I_V)_2\circ C\ (t) = \cdots$

$$\int_0^1\{\sigma'(\Gamma(t))(\dot{\Gamma}(t))\cdot\dot{\Gamma}(t)+\sigma(\Gamma(t))\cdot\ddot{\Gamma}(t)\}\cdot\alpha = \qquad \cdots D(T(I_V)_1 C)(t) = \dot{\Gamma}\ (t)$$

$$\int_0^1 \sigma'(\Gamma(t))(\alpha)\cdot\dot{\Gamma}(t)^2\quad\forall\ \alpha\in C^1[0,1].$$

(i) Ahora ya no es posible garantizar la existencia de las soluciones en todo $\mathbb{R}$.

Hasta aquí podemos llegar, sin requerir la forma explícita de σ. Argumentemos un poco al respecto.
Nuestro modelo de densidad es

$$\sigma(\alpha) = \frac{\sigma_0}{(1+(D\alpha)^2)^{1/2}}$$

Nótese que si α = cte. $\sigma(\alpha) = \sigma_0$; la densidad de la cuerda es la que tenía originalmente.
Haciendo un desarrollo de Taylor alrededor de α = cte.- que podemos tomar como $\alpha = 0$ - , se obtiene

$$\sigma(\alpha) = \sigma_0\left(1 - \frac{1}{2}(D\alpha)^2 + \frac{3}{8}(D\alpha)^4 - \ldots\right)$$

Si tomamos el primer término en el desarrollo de Taylor, la densidad no depende de la configuración α y tiene un valor "constante" $\sigma_0 \in C^2[0,1]$. Este es precisamente el caso que acabamos de considerar de acuerdo a la Hipótesis 1).
Tomando el segundo término en el desarrollo,

$$\sigma(\alpha) = \sigma_0\left(1 - \frac{1}{2}(D\alpha)^2\right)$$

$$\therefore \qquad \sigma'(\alpha)(\beta) = -\sigma_0\, D\alpha \cdot D\beta$$

y las ecuaciones de Lagrange toman la forma

$$\int_0^1 \left\{-\sigma_0\, D(\Gamma(t)) \cdot D(\dot\Gamma(t)) \cdot \dot\Gamma(t) + \sigma_0\left(1-\tfrac{1}{2}D(\Gamma(t))^2\right) \cdot \ddot\Gamma(t)\right\} \cdot \alpha =$$

$$- \int_0^1 \sigma_0\, D(\Gamma(t)) \cdot D\alpha \cdot \dot\Gamma(t)^2$$

integrando por partes en el segundo miembro:

$$-\int_0^1 \sigma_0\, D(\Gamma(t)) \cdot D\alpha \cdot \dot\Gamma(t)^2 = -\sigma_0\, D(\Gamma(t)) \cdot \dot\Gamma(t)^2 \cdot \alpha\Big|_0^1 + \int_0^1 D\left(\sigma_0\, D(\Gamma(t))\, \dot\Gamma(t)^2\right) \cdot \alpha$$

Si consideramos todas las $\alpha \in C^2_{[0,1]}$ tales que $\alpha(1) = \alpha(0) = 0$ se sigue que (i)

(i) Ref. (1) pag. 249.

$$-\sigma_o D(\Gamma(t)) \cdot D(\dot{\Gamma}(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t) + \sigma_o (1 - \tfrac{1}{2} D(\Gamma(t))^2)\, \ddot{\Gamma}(t) =$$

$$D(\sigma_o D(\Gamma(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t)^2)$$

podemos simplificar, si vemos que en el primer miembro tenemos a la derivada (respecto "al tiempo") de la densidad de momento

$$\underbrace{D((\sigma_o \Gamma) \odot \dot{\Gamma})(t)}_{\text{razón de cambio de la densidad de momento respecto al tiempo, al instante } t.} = D(\sigma_o D(\Gamma(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t)^2) \qquad \ldots (1)$$

En el segundo miembro aparece la derivada de la cantidad $\sigma_o D(\Gamma(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t)^2$. La razón de cambio de la densidad de momento a un instante es cero, solo si $\sigma_o D(\Gamma(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t)^2$ es constante a lo largo de la cuerda. Esta cantidad varía si la densidad original σ_o no es constante a lo largo de la cuerda, o si $D(\Gamma(t))$ no es constante a lo largo de ella, en cuyo caso la cuerda no está recta, o bien si la distribución de velocidades de los puntos de la cuerda en ése instante no es uniforme.
Reescribamos la ecuación anterior en una forma ligeramente distinta. Definamos la "función de onda"

$$\Psi \equiv (\Gamma \circ P_1^{\mathbb{R}^{\bar{2}}}) \wedge P_2^{\mathbb{R}^{\bar{2}}} \in \mathbb{R}^{\bar{A}}$$

donde $\bar{A}$ es isomorfo a $A \times [0,1]$; la primera componente de $a \in \bar{A}$ se asocia al tiempo y la segunda a la abscisa de los puntos de la cuerda. Entonces la ecuación queda

$$D_1((\hat{\sigma} \circ \Psi) \cdot D_1 \Psi) = D_2(\sigma_o D_2 D_1 \Psi \cdot (D_1 \Psi)^2)$$

donde $\hat{\sigma}(s) = \dfrac{\sigma_o}{(1+s^2)^{1/2}} \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$..
Esta es una ecuación diferencial parcial cuya solución no intentaremos dar dada la dificultad técnica que presenta.

Nótese que la energía cinética es invariante ante la acción del grupo de difeomorfismos

$$f(t) = I_M + \dot{t} \qquad \forall\; t \in \mathbb{R}.$$

Esto representa una simetría del sistema ante traslaciones verticales de la cuerda, lo cual es obvio. Veamos la versión infinitesimal de esta simetría: El campo en M inducido por el grupo de difeomorfismos $\{f(t)\}$ es:

$$X(\alpha) = \alpha + \bar{\bar{1}}_{\mathbb{R}} / R_\alpha^M$$

o en su representación local

$$X^{I_V}(v) = \dot{\bar{1}} \in \bar{V} \qquad \forall v \in V$$

el levantamiento de X a T(M) tiene la representación local (i)

$$p_1^{\bar{V}^2} \circ T(X)\ (v) = \dot{\bar{1}}$$

$$p_2^{\bar{V}^2} \circ T(X)\ (v) = \dot{\bar{0}} \qquad \forall\ v \in V$$

Calculemos el paréntesis de Poisson del Hamiltoniano del campo T(X), P, y del campo Lagrangiano para K, E_K :

$$T(X) \lrcorner\ Y_K \lrcorner\ \omega_K = -\ T(X) \lrcorner\ dE_K = \{P, E_K\}$$

localmente, $\quad (T(X) \lrcorner\ dE_K)^{T(I_V)} = E_K^{T(I_V)\prime}\ T(X)^{T(I_V)}$

donde $\quad E_K^{T(I_V)}(V) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sigma_0\ V(2)^2}{(1+D(V(1))^2)^{1/2}}$

$$\therefore \quad E_K'(V)(W) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sigma_0\ D(V(1)) . D(W(1)) . V(2)^2}{(1+D(V(1))^2)^{3/2}} + \int_0^1 \frac{\sigma_0\ V(2) . W(2)}{(1+D(V(1))^2)^{1/2}}$$

$$\therefore \quad E_K'(V)(T(X)^{T(I_V)}(V)) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sigma_0\ D(V(1)) \cdot D(\dot{\bar{1}})\ V(2)^2}{(1+D(V(1))^2)^{3/2}} + \int_0^1 \frac{\sigma_0\ V(2) \cdot \dot{\bar{0}}}{(1+D(V(1))^2)^{1/2}} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} T(X)^{T(I_V)}(V)(1) = \dot{\bar{1}} \\ T(X)^{T(I_V)}(V)(2) = \dot{\bar{0}} \end{array} \right)$$

$$\therefore \qquad \{P, E_K\} = 0$$

Luego P es una constante de movimiento del sistema.

(i) Véase la ref. (8) pag. 514. Aún cuando el levantamiento de X se definió en $T(M)^*$, secc. 2.2 pag. 50, las propiedades de T(X) son análogas.

Veamos el Hamiltoniano de T(X) según la forma simpléctica ω_K . La representación local de ω_K es (véase apéndice A.6)

$$\omega_K^{T(I_V)}(v)\left(\theta_1^{(V^2)^{\bar{2}}}(w)+\theta_2^{(V^2)^{\bar{2}}}(z)\right)=$$

$$(K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;1}(v)(w(1))(Z(1)) + (K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)(w(2))(Z(1))$$

$$-(K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;1}(v)(Z(1))(w(1)) - (K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)(Z(2))(w(1))$$

Luego sustituyendo W por $\underset{=}{T}(X)^{T(I_V)}$, ésto es poniendo en la expresión anterior W(1) = $\bar{1}$, W(2) = $\bar{0}$ tenemos

$$\left[\left(T(X)^{T(I_V)} \lrcorner\, \omega_K^{T(I_V)}\right)(v)\right](Z) = (K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;1}(v)(\dot{\bar{1}})(Z(1)) - (K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;1}(v)(Z(1))(\dot{\bar{1}})$$

$$-(K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)(Z(2))(\dot{\bar{1}})$$

pero (véase pag.) $((K\circ T(I_V)^{-1})'_2)' \in \mathrm{Hom}(V^{\bar{2}}, \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}))^{V^{\bar{2}}}$ es

$$((K\circ T(I_V)^{-1})'_2)'(v)(w)(\beta) = \int_0^1 \sigma'(v(1))(w(1))\cdot v(2)\cdot\beta + \int_0^1 \sigma(v(1))\cdot w(2)\cdot\beta$$

$\therefore$ $(K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;1}$, $(K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;2} \in \mathrm{Hom}(V,\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}))^{V^{\bar{2}}}$ son

$$(K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;1}(v)(\alpha)(\beta) = ((K\circ T(I_V)^{-1})'_2)'(v)(\theta_1(\alpha))(\beta) = \int_0^1 \sigma'(v(1))\cdot(\alpha)\cdot v(2)\cdot\beta$$

$$(K\circ T(I_V)^{-1})^{(2)}_{2;2}(v)(u)(\beta) = ((K\circ T(I_V)^{-1})'_2)'(v)(\theta_2(u))(\beta) = \int_0^1 \sigma(v(1))\cdot u\cdot\beta$$

pero $\sigma'(u)(\alpha) = \dfrac{\sigma_0\, Du\cdot D\alpha}{(1+(Du)^2)^{3/2}}$ $\therefore$

$$\left[\left(T(X)^{T(I_V)} \lrcorner\, \omega_K^{T(I_V)}\right)(v)\right](Z) = \int_0^1 \frac{\sigma_0\, D(v(1))\cdot D(\dot{\bar{1}})\, v(2)\cdot Z(1)}{(1+D(v(1))^2)^{3/2}} - \int_0^1 \frac{D(v(1))\cdot D(Z(1))\cdot V(2)\cdot\dot{\bar{1}}}{(1+D(v(1))^2)^{3/2}}$$

$$-\int_0^1 \frac{\sigma_0\, D(v(1))\cdot D(Z(1))\cdot V(2)}{(1+D(v(1))^2)^{3/2}} - \int_0^1 \frac{\sigma_0\, Z(2)}{(1+D(v(1))^2)^{1/2}}$$

Si $T(X)^{T(I_V)} \lrcorner\, \omega_K^{T(I_V)}$ ha de ser exacta, existe $-P \in \mathbb{R}^{V^{\bar{2}}}$ tal que

$$P_1'(V)(Z(1)) = \int_0^1 \frac{\sigma_0 D(v(1))\cdot D(z(1))\cdot v(2)}{(1+D(v(1))^2)^{3/2}} \quad \text{y.}$$

$$P_2'(V)(Z(2)) = \int_0^1 \frac{\sigma_0 \cdot z(2)}{(1+D(v(1))^2)^{1/2}} \quad \text{luego}$$

$$P(V) = \int_0^1 \frac{\sigma_0 v(2)}{(1+D(v(1))^2)^{1/2}}$$

Entonces P es constante a lo largo de las trayectorias $C \in T(M)^I$ del sistema. Si hacemos $\Gamma \equiv \mathcal{T}(I_V)_1 \circ C$

$$\Rightarrow \quad \dot{C} \equiv DC = \mathcal{T}(I_V)_2 \circ C$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{\sigma_0 \dot{c}(t)}{(1+D(c(t))^2)^{1/2}} = \text{constante} \quad \forall \; t \in I$$

La cantidad $\dfrac{\sigma_0 \; \dot{c}(t)}{(1+D(c(t))^2)^{1/2}}$ puede interpretarse como la densidad de – – momento a lo largo de la cuerda, por lo que la integral de arriba representa el momento total de la cuerda.

La forma simpléctica ω_K es también una constante de movimiento del sistema.

$$\omega_K^{\mathcal{T}(I_V)}(v)\left(\theta_1(w)+\theta_2(z)\right) = \int_0^1 \frac{\sigma_0 D(v(1))\cdot D(w(1))\cdot v(2)\cdot z(1)}{(1+D(v(1))^2)^{3/2}} - \int_0^1 \frac{\sigma_0 w(2)\cdot z(1)}{(1+D(v(1))^2)^{1/2}}$$

$$+ \int_0^1 \frac{\sigma_0 D(v(1))\cdot D(z(1))\cdot v(2)\cdot w(1)}{(1+D(v(1))^2)^{3/2}} - \int_0^1 \frac{\sigma_0 z(2)\cdot w(1)}{(1+D(v(1))^2)^{1/2}} =$$

$$\int_0^1 \frac{\sigma_0 D(v(1))\cdot v(2)}{(1+D(v(1))^2)^{3/2}} \left\{ D(w(1))\, z(1) - D(z(1))\cdot w(1) \right\} + \int_0^1 \frac{\sigma_0}{(1+D(v(1))^2)^{1/2}} \left\{ w(2)\, z(1) - z(2)\cdot w(1) \right\}$$

i.e.

$$\int_0^1 \frac{\sigma_0 D(c(t))\cdot \dot{c}(t)}{(1+D(c(t))^2)^{3/2}} \left\{ Dw_1 z_1 - Dz_1 w_1 \right\} + \int_0^1 \frac{\sigma_0}{(1+D(c(t))^2)^{1/2}} \left\{ w_2 z_1 - z_2 w_1 \right\} = \text{cte.}$$

Por ejemplo, eligiendo w_1, z_1 constantes, $w_2 - z_2 \equiv \alpha$; y la condición inicial $C(0) = \text{cte.} \in V$,

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sigma_0}{(1+D(C(t))^2)^{1/2}} \cdot \alpha = \int_0^1 \sigma_0 \cdot \alpha \quad \forall \alpha \in V \Rightarrow \frac{\sigma_0}{(1+D(C(t))^2)^{1/2}} = \sigma_0$$

$$\Rightarrow \quad C(t) = \text{cte.}\, t \qquad \forall\, t \in I \qquad (\text{cte.} \in V)$$

Lo cual es consistente pues nos dice que si inicialmente la cuerda está horizontal, siempre estará horizontal y moviéndose uniformemente en la dirección vertical.

Si por ejemplo $\quad C(0)(x) = \operatorname{sen} 2\pi x \quad \forall\ x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sigma_0}{(1+D(C(t))^2)^{1/2}} \cdot \alpha = \int_0^1 \frac{\sigma_0}{(1+2\pi \cos^2 2\pi x)^{1/2}} \cdot \alpha \qquad \forall \alpha \in V$$

$$\Rightarrow \quad 1 + D(C(t))^2 = 1 + 2\pi \cos^2 2\pi x$$

$$D(C(t)) = \sqrt{2\pi} \cos 2\pi x$$

$$C(t) = \sqrt{2\pi}\; t \cos 2\pi x + \operatorname{sen} 2\pi x$$

$$= (2\pi t^2 + 1)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{2\pi}\; t}{2\pi t^2 + 1} \cos 2\ x + \frac{1}{2\pi t^2 + 1} \operatorname{sen} 2\ x \right)$$

$$= A(t) \cos(2\pi x - \phi(t))$$

donde $A(t) = (2\pi t^2+1)^{1/2}$, $\cos \phi(t) = \dfrac{\sqrt{2\pi}\, t}{2\pi t^2 + 1}$, $\operatorname{sen} \phi(t) = \dfrac{1}{2\pi t^2+1}$

Veamos ahora el efecto de un potencial sobre el sistema en relación a su estado natural de movimiento. La forma explícita del potencial se basa en la siguiente hipótesis:

<u>HIPOTESIS 3</u>.- La energía potencial de la cuerda depende de la longitud de la cuerda relativa a cierta posición natural.

En la práctica una posición natural es el reposo, por ejemplo cuando la cuerda yace sobre el eje (1). Dado que la energía potencial solo depende de la longitud de la cuerda y por tanto solo de la configuración, proponemos una energía potencial en $\mathbb{M}$, $\bar{V} \in \mathbb{R}^{M}$ y además

$$\bar{V} = F \circ \hat{L}$$

donde $F \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, y $\hat{L} \in \mathbb{R}^{M}$ es la función de longitud:

$$\hat{L}(\alpha) = \int_0^1 (1 + (D\alpha)^2_{\cdot})^{1/2}$$

Si F es al menos de clase C^2, podemos <u>aproximar</u> a $\bar{V}$ por su desarrollo de Taylor alrededor de la posición horizontal $\alpha_0 = \dot{\bar{o}}$, así

$$\bar{V}(\alpha) \approx \bar{V}(\alpha_0) + \bar{V}'(\alpha_0)(\alpha) + \frac{1}{2}\bar{V}''(\alpha_0)(\alpha)(\alpha)$$

$$= F(0) + (F\circ\hat{L})'(\alpha_0)(\alpha) + \frac{1}{2}(F\circ\hat{L})''(\alpha_0)(\alpha)(\alpha)$$

Desarrollando:

$$(F\circ\hat{L})'(\alpha_0) = F'(\hat{L}(\alpha_0))\circ\hat{L}'(\alpha_0) = ((F'\circ\hat{L})\odot\hat{L}')(\alpha_0)$$

$$(F\circ\hat{L})''(\alpha_0)(\alpha) = F'(\hat{L}(\alpha_0))\cdot\hat{L}'(\alpha_0)\odot\overline{\dot{\hat{L}'(\alpha_0)}} + \overline{\dot{F'(\hat{L}(\alpha_0))}}\odot\hat{L}''(\alpha_0)$$

Notemos que $\hat{L} = \int_0^1 \circ Y(G)\circ D$ donde $G = (1+I_V^2)^{1/2}$; por tanto $\hat{L}(\alpha_0) = 0$ y del lema técnico:

$$\hat{L}'(\alpha_0) = \int_0^1 \circ\ \overline{\dot{D\alpha_0}}\odot D \quad = 0 \text{ ya que } D\alpha_0 = 0$$

entonces podemos simplificar a

$$\bar{V}(\alpha) = \bar{V}(0) + \frac{1}{2}F'(0)(\hat{L}''(\alpha_0)(\alpha)\ (\alpha)\ )$$

$$= \bar{V}(0) + \frac{1}{2}DF(0)\ \hat{L}''(\alpha_0)(\alpha)\ (\alpha)$$

de nuevo del lema técnico y la regla de la cadena,

$$\hat{L}''(\alpha_0)(\alpha)\ (\alpha) = \int_0^1 (D^2G\circ D\alpha_0)\cdot D\alpha\cdot D\alpha$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{(1+(D\alpha_0)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(1+(D\alpha_0)^2)^{3/2}}\right]\cdot (D\alpha)^2$$

$$= \int_0^1 (D\alpha)^2$$

y dado que $\overline{V}(0)$ es una constante, podemos considerar que la energía potencial viene dada por

$$\overline{V}(\alpha) = \frac{E}{2}\int_0^1 (D\alpha)^2 = \left(\frac{E}{2}\int_0^1 Y(I^2)\circ D\right)(\alpha)$$

donde $E \equiv DF(0)$ puede interpretarse como el módulo de Young.

El Lagrangiano $L \in \mathbb{R}^{T(M)}$ tiene por representación local a

$$L\circ T(I_V)^{-1}(V) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma(V(1))\cdot V(2)^2 - \frac{E}{2}\int_0^1 D(V(1))^2$$

- Recuérdese que $V(1)$ se asocia a la configuración y $V(2)$ a la velocidad(densidad de velocidad)-

Aquí, $\sigma(V(1))$ depende de la noción de estado natural de movimiento. Primero supondremos que σ no depende de la configuración, aunque varía a lo largo de la cuerda, de tal suerte que $\sigma(V(1)) = \sigma_0 \in V \quad \forall\ V \in V^2$

$$\therefore \quad L\circ T(I_V)^{-1}(V) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma_0\, V(2)^2 - \frac{E}{2}\int_0^1 D(V(1))^2$$

Calculamos:

$$(L\circ T(I_V)^{-1})'_2(V)(\alpha) = \int_0^1 \sigma_0 V(2)\cdot\alpha$$

$$(L\circ T(I_V)^{-1})'_1(V)(v) = -E\int_0^1 D(V(1))\cdot Dv$$

En las ecuaciones de Lagrange

$$D(T(I_V)_1\circ C) = T(I_V)_2\circ C$$

$$D((L\circ T(I_V)^{-1})'_2\circ T(I_V)\circ C) = (L\circ T(I_V)^{-1})'_1\circ T(I_V)\circ C.$$

necesitamos calcular la derivada del "momento de la cuerda" $(L\circ T(I_V)^{-1})'_2 \circ T(I_V)\circ C$; para cualquier instante t.

$$D((L\circ T(I_V)^{-1})'_2\circ T(I_V)\circ C)(t)(\alpha) = \int_0^1 \sigma_0\, D(T(I_V)_2\circ C)\cdot\alpha \qquad \forall\, \alpha\in \bar{V}$$

Entonces, haciendo $\Gamma \equiv T(I_V)_1\circ C \in V^A$ la función de posición de la cuerda, obtenemos que

$$\int_0^1 \sigma_0\,(D^2\Gamma)(t)\cdot\alpha = -E\int_0^1 D(\Gamma(t))\cdot D\alpha \qquad \ldots (1)$$

$$= -E\left\{ D(\Gamma(t))\cdot\alpha\Big|_0^1 - \int_0^1 D^2(\Gamma(t))\cdot\alpha \right\} \quad \forall\,\alpha\in V.$$

y al igual que antes podemos concluir que

$$\boxed{\sigma_0\,(D^2\Gamma)(t) = E\; D^2(\Gamma(t))}$$

Esta es la ecuación de onda en una notación ligeramente distinta. Definamos la "función de onda"

$$\Psi \equiv (\Gamma\circ P_1^{\mathbb{R}^{\bar{2}}})\wedge P_2^{\mathbb{R}^{\bar{2}}} \qquad \in \mathbb{R}^{\bar{A}}$$

donde $\bar{A} \subset \mathbb{R}^{\bar{2}}$ es homeomorfo a $A\times[0,1]$, la primera componente de $a\in\bar{A}$ se asocia al tiempo, la segunda a la abscisa de los puntos de la cuerda.
Entonces

$$D^2(\Gamma(t))(x) = D_2^2\,\Psi(t,x) \quad ; \quad (D^2\Gamma)(t)(x) = D_1^2\,\Psi(t,x)$$

y podemos reescribir la ecuación de onda como

$$D_1^2\Psi = \frac{E}{\sigma_0} D_2^2\Psi$$

en notación clásica: $$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\sigma_0}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

Si cambiamos el modelo de densidad independiente de la configuración al de densidad dependiente de la configuración tendríamos el Lagrangiano

$$L\circ T(I_V)^{-1}(w) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma(w(1))\cdot w(2)^2 - \frac{E}{2}\int_0^1 D(w(1))^2 \qquad \forall\; w\in V^2$$

Dejamos al lector verificar los siguientes cálculos:

$$(L\circ T(I_V)^{-1})'_1(w)(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\sigma'(w(1))](\alpha)\cdot w(2)^2 - E\int_0^1 D(w(1))\cdot D\alpha$$

$$(L\circ T(I_V)^{-1})'_2(w)(v) = \int_0^1 \sigma(w(1))\cdot v\ .$$

$$[D((L\circ T(I_V)^{-1})'_2\circ T(I_V)\circ c)(t)](\alpha) = \int_0^1 [\sigma'((T(I_V)_1\circ c)(t))](D(T(I_V)_1\circ c)(t))\cdot (T(I_V)_2\circ c)(t)\cdot\alpha$$
$$+\int_0^1 \sigma((T(I_V)_1\circ c)(t))\cdot D(T(I_V)_2\circ c)(t)\cdot\alpha$$

o sustituyendo $\Gamma = T(I_V)_1\circ c$

$$\int_0^1 \left\{\sigma'(\Gamma(t))(D\Gamma(t))\cdot(D\Gamma)(t) + \sigma(\Gamma(t))\cdot(D^2\Gamma)(t)\right\}\alpha =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma'(\Gamma(t))(\alpha)\cdot(D\Gamma)(t)^2 - E\int_0^1 D(\Gamma(t))\cdot D\alpha \qquad \ldots (2)$$

Compárense en las ecuaciones (1) y (2) los términos adicionales que aparecen

$$\int_0^1 \sigma'(\Gamma(t))(D\Gamma(t))\cdot(D\Gamma)(t)\cdot\alpha \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma'(\Gamma(t))(\alpha)\cdot(D\Gamma)(t)^2$$

El primero involucra a $\sigma'(\Gamma(t))(D\Gamma(t)) = D(\sigma\circ\Gamma)(t)$ la rapidez con que cambia la densidad de la cuerda y

$$\int_0^1 \sigma'(\Gamma(t))(D\Gamma(t))\cdot\alpha$$

puede considerarse como el promedio, a lo largo de la cuerda, de la rapidez con que cambia la densidad de ésta al instante t, relativo (O promediado) a la función α .

El segundo término es más difiícil de interpretar pero puede pensarse así: Dada la configuración $\Gamma(t)$ al instante t, $\frac{1}{2}\sigma(\Gamma(t)).(D\Gamma)(t)^2$ es la densidad de energía cinética de la cuerda. Si esta sufre un pequeño desplazamiento (una variación infinitesimal dirían los físicos), la energía aumenta (o disminuye) debido tan solo a ese desplazamiento en la cantidad $\int_0^1 \sigma'(\Gamma(t))(\alpha).(D\Gamma)(t)^2$.

En la aproximación que hemos manejado, σ tiene la expresión

$$\sigma(\alpha) = \sigma_0\left(1 - \tfrac{1}{2}(D\alpha)^2\right)$$

$$\therefore \qquad \sigma'(\alpha)(\beta) = -\sigma_0 \cdot D\alpha \cdot D\beta$$

Entonces en el segundo miembro de la igualdad (2) tenemos

$$-\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma_0 D(\Gamma(t)) \cdot D\alpha \cdot (D\Gamma)(t)^2 + E\int_0^1 D(\Gamma(t)) \cdot D\alpha\right] =$$

$$-\left[\frac{1}{2}\sigma_0 D(\Gamma(t)) \cdot (D\Gamma)(t)^2 \cdot \alpha\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 D(\sigma_0 D(\Gamma(t)) \cdot (D\Gamma)(t)^2) \cdot \alpha + E \cdot \alpha\, D(\Gamma(t))\Big|_0^1 - E\int_0^1 D^2(\Gamma(t)) \cdot \alpha\right]$$

y podemos concluir entonces que

$$\sigma'(\Gamma(t))((D\Gamma)(t)) \cdot (D\Gamma)(t) + \sigma(\Gamma(t)) \cdot (D^2\Gamma)(t) =$$

$$\frac{1}{2} D(\sigma_0 \cdot (D\Gamma)(t) \cdot (D\Gamma)(t)^2) + E\, D^2(\Gamma(t))$$

o bien, si reconocemos en el miembro izquierdo a la derivada en t de la densidad de momento:

$$D((\sigma_0\Gamma) \cdot \dot{\Gamma})(t) = \frac{1}{2} D(\sigma_0 D(\Gamma(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t)^2) + E\, D^2(\Gamma(t))$$

o en la notación de la función de onda,

$$D_1\left[(\hat{\sigma} \circ \Psi) \cdot D_1\Psi\right] = \frac{1}{2} D_2(\sigma_0 \cdot D_2\Psi \cdot (D_1\Psi)^2] + E\, D_2^2\Psi \;;\; \hat{\sigma}(s) = \frac{\sigma_0}{(1+s^2)^{1/2}} \;\forall s \in \mathbb{R}.$$

Podríamos enfocar el problema desde otro punto de vista dada la dificultad que presenta resolver la ecuación diferencial parcial que hemos obtenidO. Por ejemplo, el Lagrangiano

$$L\circ T(1_U)^{-1}(A)=\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma(A(1))\cdot A(2)^2-\frac{E}{2}\int_0^1 D(A(1))^2$$

con el modelo de densidad $\sigma(A(1))=\dfrac{\sigma_0}{(1+D(A(1))^2)^{1/2}}$ sigue siendo invariante ante traslaciones (otro modo de decir lo mismo es que el potencial no rompió la simetría de traslación del sistema). Además por tratarse de un sistema mecánico simple $\omega_K=\omega_L$, luego tenemos un par de constantes de movimiento: El momento total de la cuerda y la forma simpléctica ω_L; en particular, la solución geodésica que obtuvimos anteriormente para el sistema libre sigue siendo una solución del sistema sujeto al potencial propuesto.

3.4. CADENA INFINITA DE OSCILADORES.

En este ejemplo estudiamos una serie "infinita" de partículas sujetas a interactuar entre ellas mediante resortes. Primeramente veremos cómo la definición de la energía cinética para el sistema infinito de partículas - que se basa obviamente en la definición para un finito de partículas - determina el estado natural de movimiento del sistema. En este punto nos enfrentaremos a lo "infinito" del sistema, y cuáles son los parámetros suficientes para definir la configuración del sistema. En la fig. 1 se muestra la disposición de nuestro sistema a estudiar

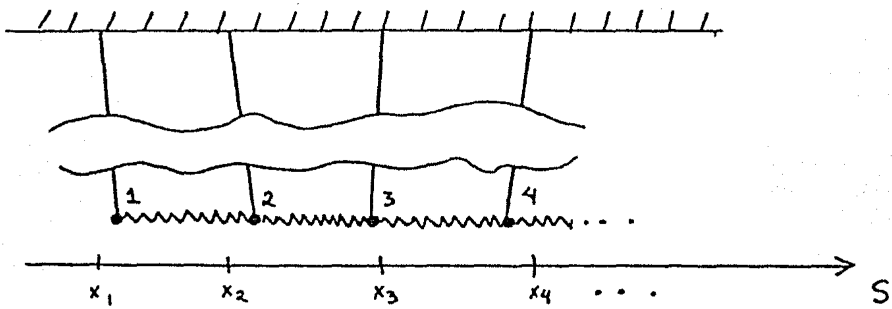


Fig. 1. Descripción del sistema.

Se tiene un gran número de partículas de tal suerte que el modelo nos permite hacer la suposición de que tenemos un numerable de partículas. Estas se numeran a partir de una que marca el extremo de la cadena. Las partículas cuelgan de hilos inextensibles de longitud l, las posiciones de equilibrio son x_1, x_2, etc. y sus masas m_1, m_2,... Las distancias $x_{i+1} - x_i$ no tienen por qué ser iguales en principio aunque más adelante haremos algunas suposiciones adicionales.

Comenzaremos por motivar la definición del espacio de configuración del sistema:

Si Ψ_i es el desplazamiento de la i-ésima partícula respecto a su posición de equilibrio, será suficiente conocer todos los desplazamientos $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$, para conocer la posición de cada partícula y por tanto la "configuración" del sistema. Si evitamos la descripción de los choques de las partículas, debemos exigir que

$$x_i + \Psi_i < x_{i+1} + \Psi_{i+1} \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Las condiciones anteriores no son sin embargo suficientes ya que los desplazamientos Ψ_i deben ser en cierto sentido "pequeños". Qué tan pequeños, puede argumentarse como sigue: Si $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el espacio de modelación del espacio de configuración M, entonces $T(M)$ es localmente difeomorfo a $V^{\bar{2}}$. Entonces si $u \in V^{\bar{2}}$ es la representación ante una carta, de algún elemento de $T(M)$, $u(1)$ se asocia a la configuración y $u(2)$ a la "velocidad" del sistema. Esta pareja $u \in V^{\bar{2}}$, puede considerarse como una condición inicial con $u(1)(i)$ la posición inicial de la i-ésima partícula y $u(2)(i)$ su velocidad inicial. En la mayor parte de los casos prácticos, cuando fijamos una condición inicial, solo un finito de estos números son distintos de cero y la energía cinética del sistema al instante inicial debe ser

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in I} m_i \, u(2)(i)^2$$

donde $I \subset \mathbb{N}$ indica a las partículas con velocidad no nula, I siendo finito.

La elección de las partículas a las que se les imparte una velocidad inicial no nula es en principio arbitraria en tanto que hemos podido formular el modelo de una infinidad de partículas; luego para una condición inicial dada $u \in V^{\bar{2}}$ $I \subset \mathbb{N}$ es en principio arbitrario con lo que $\frac{1}{2}\sum_{i \in I} m_i\, u(2)(i)^2$ debe tener sentido. Esto puede lograrse si solo consideramos las condiciones iniciales para las cuales $\sum_{i \in \mathbb{N}} m_i\, u(2)(i)^2$ converge. Por ejemplo podríamos suponer que $\sum_{i \in \mathbb{N}} u(2)(i)^2$ converge y que los valores de las masas están acotados, digamos $m_i \leq M$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Con esta hipótesis acerca de las masas podremos simplificar nuestro tratamiento.

Resumiendo: Vemos que el espacio de configuración viene dado por

$$M = \left\{ \psi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;/\; \sum_{i=1}^{\infty} \psi(i)^2 \text{ converge} \quad \text{y} \quad x_i + \psi(i) < x_{i+1} + \psi(i+1) \quad \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

al que podríamos modelar sobre (i)

$$V = \left\{ v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;|\; \sum_{i=1}^{\infty} v(i)^2 \text{ converge} \right\}$$

Bajo la hipótesis razonable de que para que M sea una variedad, debe ser un abierto de V, nos preguntamos qué condiciones son suficientes. Que M sea abierto no siempre se da ya que podría tenerse el caso que se muestra en la fig. 2

(i) V es un espacio de Hilbert, donde $\langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} v(i)w(i)$ es el producto escalar.

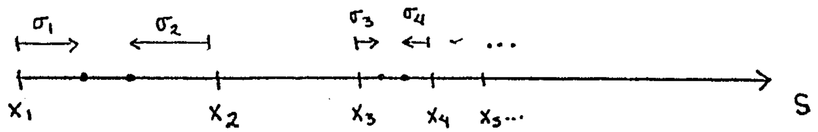


Fig. 2. Caso en que M no es abierto.

Aquí $x_{i+1} - x_i \longrightarrow 0$ cuadráticamente, i.e. $(x_{i+1}-x_i)^2 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ y $\sigma \in V$ satisface la condición $x_{i+1} + \sigma(i+1) > x_i + \sigma(i)$. Puede demostrarse que siempre es posible definir una sucesión tan cercana a σ como se quiera pero con $x_i + \gamma(i) \geq x_{i+1} + \gamma(i+1)$ para al menos un $i \in \mathbb{N}$. Esto mostraría que M no es un abierto.

La situación de nuestro interés se tiene cuando $x_{i+1} - x_i = d$ es constante, en cuyo caso M resulta ser un abierto de V.

Como los valores de las masas son acotadas, vamos a definir un nuevo producto escalar en V - luego un nuevo espacio de Hilbert - haciendo

$$\langle v, w\rangle \equiv \sum_{i=1}^{\infty} m_i\, v(i)\, w(i) \qquad \forall\, v, w \in V$$

al que seguiremos denotando por V. M es entonces una variedad C^∞ modelada sobre V, con las correspondientes cartas únicas en M y T(M), i_M , $T(i_M)$.

En este caso es equivalente trabajar en T(M) o $T(M)^*$ ya que V es reflexivo y por comodidad lo haremos en el haz tangente.

La función energía cinética en T(M) asociada al producto escalar en V, tiene por representación local

$$K \circ T(i_M)^{-1}(u) = \frac{1}{2}\langle u(2), u(2)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} m_i\, u(2)(i)^2$$

Ya que u(2) se asocia a la velocidad del sistema, u(2)(i) se asocia a la velocidad de la i-ésima partícula, así que podríamos decir que T(M) son las configuraciones y velocidades de energía cinética finita.

El estado natural de movimiento viene descrito por las geodésicas asociadas a la métrica, y dado que $K \circ T(i_M)^{-1}$ no depende de la configuración, pues $(K \circ T(i_M)^{-1})_1' = 0$, las trayectorias del sistema $\psi \in M^E$ $E \subset \mathbb{R}$, son de la forma

$$\psi(t) = v\,t + w \qquad \text{con } v, w \in V \;,\; \forall t \in E.$$

o bien en términos de la función de posición de la i-ésima partícula,

$$\psi_i(t) = v(i)\,t + w(i) \qquad \forall t \in E$$

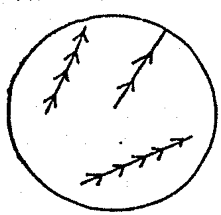
lo cual significa que ésta se mueve con velocidad constante v(i) a partir de un desplazamiento w(i) respecto de su posición de equilibrio x_i.

Topológicamente hablando, M es una variedad conexa ya que dados σ y $\gamma \in$ M podemos unir continuamente a σ con γ mediante la homotopía

$$u_t = t\,\sigma + (1-t)\gamma$$

(en realidad M es un subconjunto convexo de V)

Las geodésicas tienden a salirse de la variedad como es natural, pues en ausencia de interacción las partículas tienden a chocar. Véase la fig. 3.



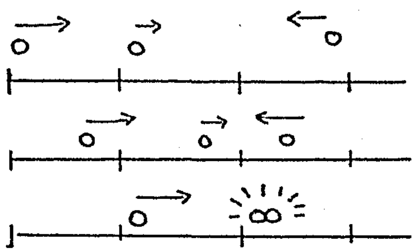


Fig. 3. Comportamiento cualitativo de las geodésicas en M.

Nótese también que la condición de que $\psi(t) \in V$, se satisface en todo instante $t \in E$. Esto significa que si inicialmente las partículas tienen condiciones iniciales pequeñas, entonces en todo momento son pequeñas. En particular, como las velocidades de las partículas deben decrecer cuadráticamente a lo largo de la cadena, necesariamente se producen choques a menos de que inicialmente todas las velocidades sean nulas.

Consideremos ahora al sistema en interacción. Si suponemos que los hilos que sujetan a las partículas son suficientemente largos y los resortes que unen a las partículas son lineales (resortes blandos), proponemos un potencial simple $V = \bar{V} \circ \rho \in \mathbb{R}^{T(H)}$ con

$$\bar{V} \circ T(i_H)^{-1}(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i(\sigma(i+1) - \sigma(i))^2 + m_i \frac{g}{l} \sigma(i)^2$$

siempre y cuando la expresión tenga sentido.

La constante del resorte que une a la partícula i e i+1 es k_i , g es la aceleración de la gravedad y l la longitud de los hilos. En la sumatoria aparecen términos de la forma $\frac{1}{2} k_i(\sigma(i+1) - \sigma(i))^2$. $\sigma(i+1) - \sigma(i)$ no es otra cosa que el alargamiento del i-ésimo resorte y $\frac{1}{2} k_i(\sigma(i+1) - \sigma(i))^2$ es su energía potencial. Véase fig. 4.

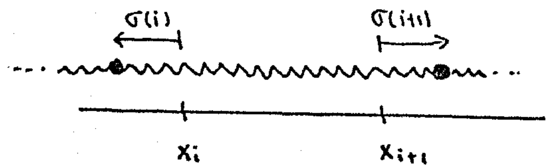


Fig. 4. Interacciones sobre el sistema.

El otro término $m_i(g/l)\,\sigma(i)^2$ se refiere a la energía potencial en relación a la posición de equilibrio, debido a la acción restauradora del péndulo. En la fig. 5 se ilustra cómo se deduce este término.

$$m_i \ddot{\sigma}_i = mg\,\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta = \frac{mg}{l}\, l\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{mg}{l}\sigma_i \cos\theta \simeq \frac{mg}{l}\sigma_i$$

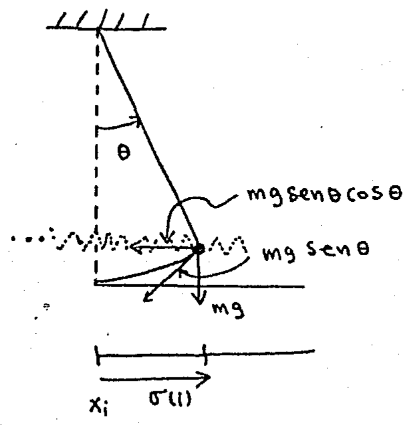


Fig. 5

Vamos a reescribir el potencial de una manera más conveniente. Definamos a $\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ y $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Estas son las frecuencias propias de los resortes y de cada uno de los péndulos. Entonces

$$\tilde{V}\circ T(i_M)^{-1}(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} m_i\omega_i^2(\sigma(i+1)-\sigma(i))^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} m_i\omega_0^2\,\sigma(i)^2$$

En general, dada una sucesión de números reales $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ acotada y para $\sigma \in V$ podemos definir el producto

$$\omega\cdot v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{como} \quad \omega\cdot v\,(i) = \omega(i)\cdot v(i) \quad \forall i\in\mathbb{N}$$

Como ω es acotada,

$$\|\omega\cdot v\|_V = \sum m_i\,\omega(i)^2\, v(i)^2 \leq k \sum m_i\, v(i)^2 = k\,\|v\|_V$$

entonces si ω es fija, $\omega\cdot 1_V \ni \omega\cdot 1_V(v) = \omega\cdot v \in$ Hom(V,V) y es diferenciable. También podemos definir el desplazamiento unitario a la derecha $U \in$ Hom(V,V) $\ni U(\sigma) = \sigma\circ(\bar{1}+1_{\mathbb{N}})$ o sea $U(\sigma)(i) = \sigma(i+1)$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Con esto, el potencial puede reescribirse como la composición de funciones diferenciables

$$\tilde{V}\circ T(i_M)^{-1} = \quad + \frac{1}{2}\|\ \|\circ(\omega\cdot 1_V)\circ(U-1_V) \quad + \frac{1}{2}\|\ \|^2\circ(\omega_0\cdot 1_V)$$

donde ω es la sucesión $\omega(i) = \omega_i$ y $\omega_0(i) = \omega_0$
El Lagrangiano puede escribirse entonces como

$$L\circ T(i_M)^{-1} = \frac{1}{2}\|\ \|^2\circ P_2^{V^2} - \frac{1}{2}\|\ \ \|^2\circ(\omega\cdot 1_V)\circ(U-1_V)\circ P_1^{V^2} - \frac{1}{2}\|\ \|^2\circ(\omega_0\cdot 1_V)\circ P_1^{V^2} \in \mathbb{R}^{(V^2)}$$

O sea

$$L\circ T(i_M)^{-1}(u) = \frac{1}{2}\langle u(2),u(2)\rangle - \frac{1}{2}\langle \omega\cdot(U(u(1))-u(1)),\omega\cdot(U(u(1)-u(1))\rangle$$
$$- \frac{1}{2}\langle \omega_0\cdot u(1),\omega_0\cdot u(1)\rangle$$

Por tanto

$$(L\circ T(i_M)^{-1})_2'(u)(\sigma) = \langle u(2),\sigma\rangle$$

$$(L\circ T(i_M)^{-1})_1'(u)(\sigma) = -\langle \omega\cdot(U(u(1))-u(1)),\omega\cdot(U(u(1))-u(1))\rangle - \langle\omega_0\cdot u(1),\omega_0\cdot u(1)\rangle$$

Nótese que

$$(L\circ T(i_M)^{-1})'_2(u)(\sigma) = \langle u(2), \sigma\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} m_i\, u(2)(i)\,\sigma(i)$$

es precisamente el momento total del sistema promediado con la sucesión σ. Por ejemplo, tomando a σ^i como

$$\sigma^i(j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

$(L\circ T(i_M)^{-1})'_2(u)(\sigma^i) = m_i u(2)(i) \equiv$ momento de la i-ésima partícula.

En cuanto a $(L\circ T(i_M)^{-1})'_1$

$$(L\circ T(i_M)^{-1})'_1(u)(\sigma) = -\sum m_i\,\omega_i^2\,(u(1)(i+1) - u(1)(i))(\sigma(i+1)-\sigma(i)) - \sum m_i\,\omega_0^2\,u(1)(i)\,\sigma(i)$$

Es la fuerza total sobre el sistema promediada con σ.
De nuevo, tomando a σ^i vemos que

$$(L\circ T(i_M)^{-1})'_1(u)(\sigma^i) = m_i\,\omega_i^2\,(u(1)(i+1) - u(1)(i)) - m_{i-1}\,\omega_{i-1}^2\,(u(1)(i) - u(1)(i-1)) - m_i\,\omega_0^2\,u(1)(i)$$

es la fuerza neta sobre la i-ésima partícula.
Considerando una curva integral $C \in T(M)^E$, tenemos

$$D((L\circ T(i_M)^{-1})'_2\circ T(i_M)\circ C) = (L\circ T(i_M)^{-1})'_1\circ T(i_M)\circ C$$

$$D(T(i_M)_1\circ C) = T(i_M)_2\circ C$$

con $D((L\circ T(i_M)^{-1})'_2\circ T(i_M)\circ C)(t)(\sigma) = \langle D(T(i_M)_2\circ C)(t), \sigma\rangle$
y haciendo $\psi \equiv T(i_M)_1\circ C \in V^E$ la función de posición del sistema, tenemos que

$$\langle D^2\psi(t), \sigma\rangle = -\langle \omega\cdot(U(\psi(t)) - \psi(t)), \omega\cdot(U(\sigma)-\sigma)\rangle - \langle \omega_0\cdot\psi(t), \omega_0\cdot\sigma\rangle$$

o bien desarrollando

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_i\,D^2\psi_i(t)\,\sigma(i) = -\sum_{i=1}^{\infty} m_i\,\omega_i^2\,(\psi_{i+1}(t) - \psi_i(t))(\sigma(i+1)-\sigma(i)) - \sum_{i=1}^{\infty} m_i\,\omega_0^2\,\psi_i(t)\cdot\sigma(i) \qquad \forall\ \sigma \in V$$

donde hemos hecho $\psi_i = \psi \triangle \dot{\overline{i}} \in \mathbb{R}^E$, la función de posición de la i-ésima partícula. Tomando σ^i para i = 1,2, etc. llegamos al sistema de ecuaciones

$$m_1 D^2\psi_1 = m_1\omega_1^2(\psi_2-\psi_1) - m_1\omega_0^2\psi_1$$
$$m_2 D^2\psi_2 = m_2\omega_2^2(\psi_3-\psi_2) - m_1\omega_1^2(\psi_2-\psi_1) - m_2\omega_0^2\psi_2$$
$$\vdots$$
$$m_n D^2\psi_n = m_n\omega_n^2(\psi_{n+1}-\psi_n) - m_{n-1}\omega_{n-1}^2(\psi_n-\psi_{n-1}) - m_n\omega_0^2\psi_n$$
$$\vdots$$

Simplificando:

$$m_1 D^2\psi_1 = -m_1(\omega_0^2+\omega_1^2)\psi_1 + m_1\omega_1^2\psi_2$$
$$m_2 D^2\psi_2 = m_1\omega_1^2\psi_1 - (m_1\omega_1^2 + m_2(\omega_0^2+\omega_2^2))\psi_2 + m_2\omega_2^2\psi_3$$
$$\vdots$$
$$m_n D^2\psi_n = m_{n-1}\omega_{n-1}^2\psi_{n-1} - (m_{n-1}\omega_{n-1}^2 + m_n(\omega_0^2+\omega_n^2))\psi_n + m_n\omega_n^2\psi_{n+1}$$
$$\vdots$$

Hemos llegado así a un sistema infinito de ecuaciones diferenciales acopladas cuya solución no es fácil. Intentaremos dar al menos una descripción cualitativa de las soluciones del sistema en vista de las dificulatades técnicas para determinar la solución general.

Para simplificar, supongamos que todas las masas tienen un mismo valor al igual que las constantes de los resortes, en cuyo caso el sistema se reduce a

$$D^2\psi_1 = -(\omega_0^2+\omega^2)\psi_1 + \omega^2\psi_2$$
$$D^2\psi_2 = \omega^2\psi_1 - (\omega_0^2+2\omega^2)\psi_2 + \omega^2\psi_3$$
$$\vdots$$
$$D^2\psi_n = \omega^2\psi_{n-1} - (\omega_0^2+2\omega^2)\psi_n + \omega^2\psi_{n+1}$$
$$\vdots$$

Obviamente $\psi_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ es una solución trivial en la que todas las partículas están en reposo. Analicemos una solución "formal" no trivial:

Tomemos $\psi_2 = \psi_4 = \psi_6 = \cdots = 0$
entonces $\psi_1, \psi_3, \psi_5 \cdots$, satisfacen

$$D^2\psi_1 = -(\omega_0^2+\omega^2)\psi_1 \ ; \ \psi_3 = -\psi_1 \ ; \ D^2\psi_5 = -(\omega_0^2+\omega^2)\psi_5 \ ; \ \psi_7 = -\psi_5 \ ; \cdots$$

En estas condiciones, las partículas pares no se mueven y las impares admiten las soluciones

$$\psi_1(t) = A_1 \cos((\omega_0^2+\omega^2)^{1/2} t) + B_1 \operatorname{sen}((\omega_0^2+\omega^2)^{1/2} t)$$

$$\psi_3 = -\psi_1$$

$$\psi_5(t) = A_5 \cos((\omega_0^2+2\omega^2)^{1/2} t) + B_5 \operatorname{sen}((\omega_0^2+2\omega^2)^{1/2} t)$$

$$\psi_7 = -\psi_5 \qquad \text{etc.}$$

Las partículas 1 y 3 oscilan con una frecuencia $(\omega_0^2+\omega^2)^{1/2}$ desfasadas 180° mientras que la partícula intermedia permanece en reposo. El siguiente bloque formado por las partículas 5,6 y 7 se mueven en forma parecida aunque la frecuencia de la oscilación es mayor: $(\omega_0^2+2\omega^2)^{1/2}$

La solución que hemos encontrado no es una solución físicamente aceptable; ni siquiera en el sentido formal estricto ya que $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_n(0)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}^2$ no necesariamente converge. Debido a ésto, solo las soluciones con las condiciones iniciales $\{A_{2n+1} / n \in \mathbb{N}\}$ que satisfagan $\sum A_{2n+1}^2 < \infty$ son aceptables. En particular $A_{2n+1} \to 0$ con $n \to \infty$ y por tanto las amplitudes de las oscilaciones deben tender a cero a lo largo de la cadena. En la fig. 6 se muestra la solución particular.

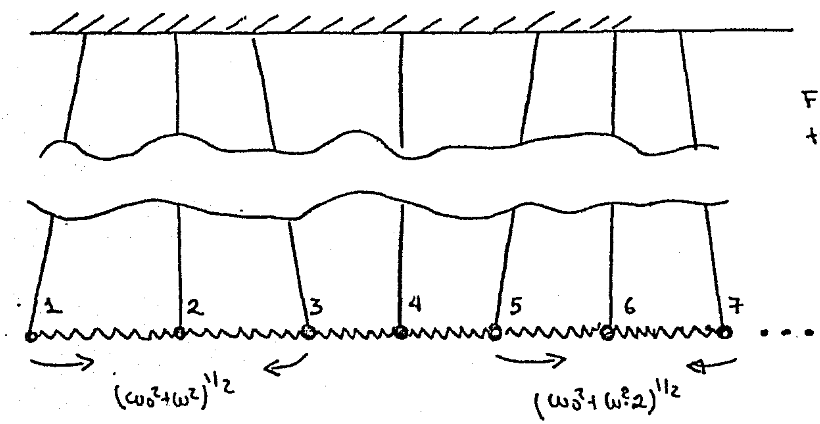


Fig 6. Solución no trivial del sistema.

Veamos si es posible la existencia de un "modo normal" de vibración en el que todas las partículas excepto la primera (dada su asimetría) oscilan con frecuencia Ω .
Pongamos $\quad \psi_n(t) = A_n e^{i\Omega t} \quad ; \; n \geq 2 \qquad$ (i)

llegamos entonces al sistema de ecuaciones algebraicas

$$-A_n\Omega^2 = \omega^2 A_{n+1} - (\omega_0^2 + 2\omega^2) A_n + \omega^2 A_{n-1}$$

Si no se tiene ningún nodo, es decir si $A_n \neq 0$ se sigue que

$$-\Omega^2 = \omega^2 \frac{A_{n+1}}{A_n} - (\omega_0^2 + 2\omega^2) + \omega^2 \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

$$= \omega^2 \left(\frac{A_{n+1}}{A_n} + \frac{A_{n-1}}{A_n} \right) - (\omega_0^2 + 2\omega^2) \qquad \forall \; n \geq 2$$

Esto sugiere que las amplitudes y fases consecutivas deben mantener una relación específica. Pongamos

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{(P+iR)d} = e^{Pd} \cdot e^{iRd} \qquad \forall \; n \geq 2 \quad y \quad A = A_2$$

La expresión para Ω^2 queda

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega^2 - \omega^2 (e^{Pd} \cdot e^{iRd} + e^{-Pd} \cdot e^{-iRd})$$

$$= \omega_0^2 + 2\omega^2 - 2\omega^2 (\cosh Pd \cdot \cos Rd + i \,\mathrm{Senh}\, Pd \;\mathrm{Sen}\, Rd)$$

o bien

$$\frac{\omega_0^2 + 2\omega^2 - \Omega^2}{2\omega^2} = \cosh Pd \cdot \cos Rd + i \,\mathrm{Senh}\, Pd \cdot \mathrm{Sen}\, Rd$$

en el miembro izquierdo tenemos un número real por lo que

$$\mathrm{Senh}\, Pd \cdot \mathrm{Sen}\, Rd = 0$$

lo cual es cierto siempre que pd = 0 ó Rd = 0, π , ...
Ahora bien, pd = 0 es imposible ya que entonces

$$A_n = A (e^{Pd} \cdot e^{iRd})^{(n-2)} \Rightarrow A_n = A \, e^{i(n-2)Rd}$$

y las amplitudes no decrecerían en magnitud como debe ser ya que $\sum \psi_n(t)^2 < \infty$ - Más aún , ya con Rd = 0, π , ... la condición asintótica para las soluciones exige que p< 0 , luego

---

(i) Se sobreentiende que las soluciones reales se obtienen tomando combinaciones apropiadas de las soluiones complejas.

$$\frac{\psi_{n+1}(t)}{\psi_n(t)} = e^{Pd} \Rightarrow P = \frac{1}{d}\ln\left(\frac{\psi_{n+1}(t)}{\psi_n(t)}\right) \Rightarrow 0 < \frac{\psi_{n+1}(t)}{\psi_n(t)} < 1$$

Con ésto tenemos que $\frac{\omega_0^2 + 2\omega^2 - \Omega^2}{2\omega^2} = \pm \cos Pd$

según sea $Rd = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ ó
$Rd = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$

Despejando a Ω^2 :

$$\Omega^2 = \begin{cases} \omega_0^2 + 4\omega^2 \cosh^2 \frac{Pd}{2} & Rd = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots \\ \omega_0^2 + 4\omega^2 \operatorname{senh}^2 \frac{Pd}{2} & Rd = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots \end{cases}$$

Esta es la llamada relación de dispersión.
Las soluciones para las partículas 2 en adelante vienen dadas por

$$\psi_2(t) = A e^{i\Omega t}, \; \psi_3(t) = A e^{Pd} \cdot e^{i\Omega t}, \; \psi_4(t) = A e^{2Pd} \cdot e^{i\Omega t}, \; \psi_5(t) = A e^{3Pd} \cdot e^{i\Omega t}, \ldots$$

ó

$$\psi_2(t) = A e^{i\Omega t}, \; \psi_3(t) = -A e^{Pd} \cdot e^{i\Omega t}, \; \psi_4(t) = A e^{2Pd} \cdot e^{i\Omega t}, \; \psi_5(t) = -A e^{3Pd} \cdot e^{i\Omega t}, \ldots$$

dependiendo de si $Rd = 0, 2\pi, \ldots$ o $Rd = \pi, 3\pi, \ldots$
pero si $Rd = \pi, 3\pi, \ldots$, la condición $0 < \frac{\psi_{n+1}(t)}{\psi_n(t)}$ se viola, luego $Rd = 0, 2\pi, \ldots$
En el único caso, podemos expresar las soluciones como

$$\psi_n(t) = e^{(n-2)Pd} (A \cos \Omega t + B \operatorname{sen} \Omega t) \quad n \geq 2; \; A, B \text{ constantes.}$$

para $n = 2$, tenemos

$$\psi_2(t) = A \cos \Omega t + B \operatorname{sen} \Omega t$$

La ecuación diferencial para la partícula 1 es entonces

$$D^2\psi_1 + (\omega_0^2 + \omega^2)\psi_1 = \omega^2 (A \cos \Omega t + B \operatorname{sen} \Omega t)$$

la ecuación de un oscilador armónico forzado a una frecuencia Ω, y la solución general es

$$\psi_1(t) = A_1 \cos((\omega_0^2 + \omega^2)^{1/2} t) + B_1 \operatorname{sen}((\omega_0^2 + \omega^2)^{1/2} t) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2 - \Omega^2}(A \cos \Omega t + B \operatorname{sen} \Omega t)$$

Resumiendo; una solución (particular) del sistema viene da da por

$$\psi_1(t) = A_1 \cos\left((\omega_0^2+\omega^2)^{1/2} t\right) + B_1 \operatorname{sen}\left((\omega_0^2+\omega^2)^{1/2} t\right) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2+\omega^2-\Omega^2}(A\cos\Omega t + B \operatorname{sen}\Omega t)$$

$$\psi_2(t) = A\cos\Omega t + B \operatorname{sen}\Omega t$$

$$\psi_3(t) = e^{Pd}(A\cos\Omega t + B\operatorname{sen}\Omega t)$$

$$\psi_4(t) = e^{2Pd}(A\cos\Omega t + B\operatorname{sen}\Omega t) \quad , \quad \text{etc.}$$

en la que disponemos de 4 constantes A_1, B_1, A y B;
y además la relación entre las fases de las partículas consecutivas, de la 2 en adelante, determina la relación de dispersión. Por ejemplo, si inicialmente preparamos al sistema de modo que las partículas 2,3,4,5,... estén desplazadas todas a la izquierda, en reposo y con las amplitudes consecutivas satisfaciendo $\frac{\psi_{n+1}(0)}{\psi_n(0)} = e^{Pd}$, $n \geq 2$
la relación de dispersión es

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + 4\omega^2 \cosh^2 \frac{Pd}{2}$$

y las soluciones quedan

$$\psi_1(t) = A_1 \cos\left((\omega_0^2+\omega^2)^{1/2} t\right) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2+\omega^2-\Omega^2} A \cos\Omega t$$

$$\psi_n(t) = A\, e^{(n-2)Pd} \cos\Omega t \qquad \forall\ n \geq 2.$$

En la fig. 7 se muestra la relación de dispersión y la forma de las soluciones para el único caso.

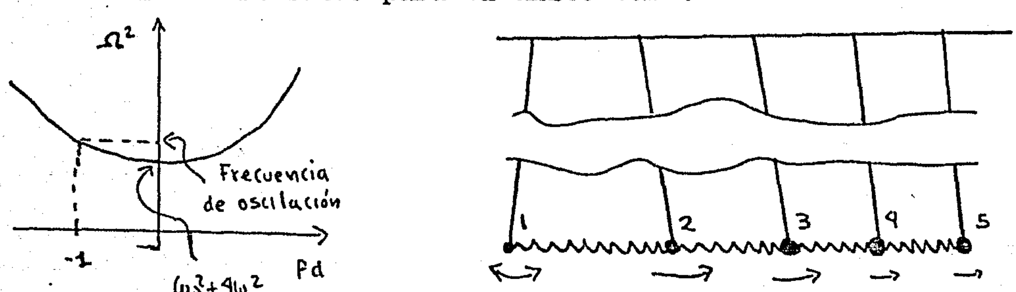


FIG 7.

La partícula 1 describe un movimiento peculiar. Por ejemplo, la amplitud del segundo término de la solución para no puede ser arbitrariamente grande variando Ω (i.e. variando la relación $\psi_{n+1}(0)/\psi_n(0)$) ya que $\left|\frac{\omega^2}{\omega_0^2+\omega^2-\Omega^2}\right| < \frac{1}{3}\omega^2$ en cambio podríamos reescribir la solución como

$$\psi_1(t) = A_1 \cos\left((\omega_0^2+\omega^2)^{1/2}t\right) + A_2(\Omega)\cos\Omega t \quad ; \text{ tomando } \quad B_1 = 0 = B$$

(donde $A_2(\Omega) = \frac{A\omega^2}{\omega_0^2+\omega^2-\Omega^2}$) . Tomando $A_1 = A_2(\Omega) = C$,

$$\psi_1(t) = C\left(\cos\left((\omega_0^2+\omega^2)^{1/2}t\right) + \cos\Omega t\right) = 2C\cos\left(\tfrac{1}{2}\left[(\omega_0^2+\omega^2)^{1/2}+\Omega\right]t\right)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\left[(\omega_0^2+\omega^2)^{1/2}-\Omega\right]t\right)$$

Como las frecuencias en cada uno de los factores es comparable, el movimiento consiste en una oscilación de frecuencia "rápida" $\frac{1}{2}\left[(\omega_0^2+\omega^2)^{1/2}-\Omega\right]$ modulada con una amplitud "lenta" de frecuencia $\frac{1}{2}\left[(\omega_0^2+\omega^2)^{1/2}+\Omega\right]$. Detrás del movimiento aparentemente caótico de la partícula hay un cierto orden...

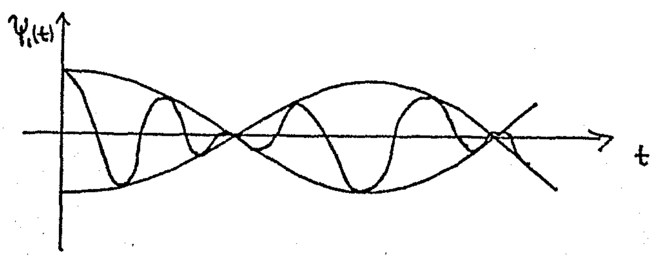


Fig. 8. Movimiento de la partícula 1.

APENDICE A.1

A.1.1 TEOREMA.- Sea $\varphi \in \prod_{t\in\mathbb{R}} (S^S)^{[t,\infty)}$ la función de evolución de un sistema mecánico. Para que el sistema sea reversible es necesario y suficiente que exista una función $\Psi \in ((S^S)^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades:

1) $\Psi \Delta I_{\mathbb{R}} = \dot{\bar{I}}_S$

2) $\Psi(t_2) \circ \overline{\dot{\Psi}(t_1)(t_2)} = \Psi(t_1) \qquad \forall\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

3) $\Psi(t) \circ i_{[t,\infty)} = \varphi(t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$

Demostración .- Las propiedades (1) a (3) obviamente implican la reversibilidad del sistema. Por el contrario, supongamos que el sistema es reversible; luego $\varphi(r)(t)$ es biyectiva $\forall\ r \in \mathbb{R}$ y $\forall\ t \in [r,\infty)$. Definamos a

$$\Psi = \{(r, \{(t, \varphi(r)(t)) \mid t \in [r,\infty)\} \cup \{(m, \varphi(m)(r)^{-1}) \mid m \in (-\infty, r)\}) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

es decir,

$$\Psi(r)(t) = \begin{cases} \varphi(r)(t) & \text{si } r \leq t \\ \varphi(t)(r)^{-1} & \text{si } t < r \end{cases}$$

$\forall\ r \in \mathbb{R}$.

Entonces es claro que $\Psi \in ((S^S)^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}}$
Las propiedades (1) y (3) son inmediatas; así pues, pasemos a demostrar la propiedad (2).
Sean t_o, t_1, t_2 , y consideremos los casos:

i) $t_o \leq t_1 \leq t_2$

ii) $t_2 \leq t_1 \leq t_o$

iii) $t_o \leq t_2 \leq t_1$

iv) $t_1 \leq t_2 \leq t_o$

v) $t_1 \leq t_o \leq t_2$

vi) $t_2 \leq t_o \leq t_1$.

Caso (i):

$$\Psi(t_1)(t_2) \circ \Psi(t_o)(t_1) = \varphi(t_1)(t_2) \circ \varphi(t_o)(t_1)$$
$$= \varphi(t_o)(t_2) = \Psi(t_o)(t_2).$$

Caso (ii):

$$\Psi(t_1)(t_2)\circ\Psi(t_o)(t_1) = \varphi(t_2)(t_1)^{-1}\circ\varphi(t_1)(t_o)^{-1}$$
$$=\left(\varphi(t_1)(t_o)\circ\varphi(t_2)(t_1)\right)^{-1}$$
$$= \varphi(t_2)(t_o)^{-1} = \Psi(t_o)(t_2).$$

Caso (iii):

$$\Psi(t_o)(t_1) = \varphi(t_o)(t_1);\ \Psi(t_1)(t_2) = \varphi(t_2)(t_1)^{-1};$$
$$\Psi(t_o)(t_2) = \varphi(t_o)(t_2);\ \varphi(t_o)(t_1) = \varphi(t_2)(t_1)\circ\varphi(t_o)(t_2)$$
$$\Rightarrow\quad \varphi(t_2)(t_1)^{-1}\circ\varphi(t_o)(t_1) = \varphi(t_o)(t_2)$$
$$\Rightarrow\quad \Psi(t_1)(t_2)\cdot\Psi(t_o)(t_1) = \Psi(t_o)(t_2).$$

Caso (iv):

$$\Psi(t_o)(t_1) = \varphi(t_1)(t_o)^{-1};\ \Psi(t_1)(t_2) = \varphi(t_1)(t_2);$$
$$\Psi(t_o)(t_2) = \varphi(t_2)(t_o)^{-1};\ \varphi(t_1)(t_o) = \varphi(t_2)(t_o)\circ\varphi(t_1)(t_2)$$
$$\Rightarrow\quad \varphi(t_1)(t_o)^{-1} = \varphi(t_1)(t_2)^{-1}\circ\varphi(t_2)(t_o)^{-1}$$
$$\Rightarrow\quad \varphi(t_1)(t_2)\circ\varphi(t_1)(t_o)^{-1} = \varphi(t_2)(t_o)^{-1}$$
$$\Rightarrow\quad \Psi(t_1)(t_2)\circ\Psi(t_o)(t_1) = \Psi(t_o)(t_2).$$

Caso (v):

$$\Psi(t_o)(t_1) = \varphi(t_1)(t_o)^{-1};\ \Psi(t_1)(t_2) = \varphi(t_1)(t_2);$$
$$\Psi(t_o)(t_2) = \varphi(t_o)(t_2);\ \varphi(t_1)(t_2) = \varphi(t_o)(t_2)\circ\varphi(t_1)(t_o)$$
$$\Rightarrow\quad \varphi(t_1)(t_2)\circ\varphi(t_1)(t_o)^{-1} = \varphi(t_o)(t_2)$$
$$\Rightarrow\quad \Psi(t_1)(t_2)\circ\Psi(t_o)(t_1) = \Psi(t_o)(t_2).$$

Caso (vi):

$$\Psi(t_o)(t_1) = \varphi(t_o)(t_1) \;;\; \Psi(t_1)(t_2) = \varphi(t_2)(t_1)^{-1};$$

$$\Psi(t_o)(t_2) = \varphi(t_2)(t_o)^{-1};$$

$$\varphi(t_2)(t_1) = \varphi(t_o)(t_1) \circ \varphi(t_2)(t_o)$$

$$\varphi(t_2)(t_1)^{-1} = \varphi(t_2)(t_o)^{-1} \circ \varphi(t_o)(t_1)^{-1}$$

$$\varphi(t_2)(t_1)^{-1} \circ \varphi(t_o)(t_1) = \varphi(t_2)(t_o)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(t_1)(t_2) \circ \Psi(t_o)(t_1) = \Psi(t_o)(t_2). \quad \blacksquare$$

APENDICE A.2

Si $\omega \in \prod_{q\in M} L_2^{ac}(T_q(M))$ es un campo tensorial de orden dos en M, se inducen funciones

$$\Upsilon_1 \equiv \overline{\overline{\omega}} \circledcirc (\overline{\ddot{\Theta}}_1^{(2)} + \overline{\ddot{\Theta}}_2^{(2)}) \in \prod_{q\in M} \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}))$$

$$\Upsilon_2 \equiv \overline{\overline{\omega}} \circledcirc (\overline{\ddot{\Theta}}_1^{(2)} + \overline{\ddot{\Theta}}_2^{(2)}) \in \prod_{q\in M} \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}))$$

con $\Theta_j^{(2)} \equiv \{(q, \theta_j^{T_q(M)^{\bar{2}}}) \mid q\in M\}$

Cuando $\Upsilon_1(q)$ y $\Upsilon_2(q)$ son inyectivas $\forall\ q\in M$, decimos que ω es débilmente no degenerada y de ser biyectivas - en cuyo caso diremos que ω es fuertemente no degenerada - podemos considerar a

$$\mathrm{inv}\vartriangle\Upsilon_1 \in \prod_{q\in M} L(\mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}), T_q(M))$$

$$\mathrm{inv}\vartriangle\Upsilon_2 \in \prod_{q\in M} L(\mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}), T_q(M))$$

donde $\mathrm{inv} \equiv \{(q, \{(f, f^{-1}) / f \in \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}))\ \text{inversible}\}) \mid q\in M\}$

La cuestión es determinar bajo qué condiciones las funciones inducidas en los haces sobre M,

$$\mathcal{L}_j \equiv (\Upsilon_1 \circ \rho)\vartriangle I_{T(M)} \in T(M)^{*\,T(M)}$$

$$\mathcal{L}_j^{-1} \equiv ((\mathrm{inv}\vartriangle\Upsilon_j)\circ\pi)\vartriangle I_{T(M)^*} \in T(M)^{T(M)^*} \qquad \forall\ j\in\bar{2}$$

resultan ser diferenciables.

La respuesta viene dada por el teorema A.2.4 , y para su demostración requerimos de algunas definiciones preliminares.

Consideremos la variedad diferenciable $(M, a^{(n)}_{(M,V)})$ con $n \geq 0$. Definimos las representaciones locales de Υ e $\mathrm{inv}\vartriangle\Upsilon$ como (i)

$$\Upsilon^{F(i)} \equiv ((\Upsilon \circledcirc (\mathrm{inv}\vartriangle \overset{\leftrightarrow}{\Xi}^{F(i)})) \circledcirc (\mathrm{inv}\vartriangle \overset{\leftrightarrow}{\Xi}^{F(i)})) \circ F(i)^{-1} \in \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}))^{F(i)(f(i))}$$

$$(\mathrm{inv}\vartriangle\Upsilon)^{F(i)} \equiv (\overset{\leftrightarrow}{\Xi}^{F(i)} \circledcirc (\mathrm{inv}\vartriangle\Upsilon)) \circledcirc (I_{\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})} \circledcirc \overset{\leftrightarrow}{\Xi}^{F(i)})) \circ F(i)^{-1} \in L(\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}), V)^{F(i)(f(i))}$$

(i) Suponemos que Υ se refiere a alguna de las dos funciones Υ_1 o Υ_2 . En caso de que ω sea simétrico $\Upsilon_1 = \Upsilon_2$; en caso de ser antisimétrico, $\Upsilon_1 = -\Upsilon_2$.

Aún cuando tiene sentido analizar la diferenciabilidad de la representación local de Υ , no sucede así con la representación local de $\mathrm{inv} \circ \Upsilon$ debido a que su contra dominio no es un espacio normado. Sin embargo, si V es un espacio de Banach, $T_q(M)$ es un espacio de Banach, de lo cual se sigue que

Si $\Upsilon(q) \in \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}))$ es biyectiva

entonces (i) $\Upsilon(q)^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}), T_q(M)) \quad \forall\ q \in M$,

es decir $\quad \mathrm{inv} \circ \Upsilon \in \prod_{q \in M} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}), T_q(M))$,

luego $\quad (\mathrm{inv} \circ \Upsilon)^{F(i)} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}), V)^{F(i)(f(i))}$

La trascendencia de estas definiciones "ad-hoc", radica en que mediante ellas podemos escribir las representaciones locales de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{-1}$ en el sentido usual de variedades(ii)

$$\overset{*}{T}F(i) \circ \mathcal{L} \circ TF(i)^{-1} = \Theta_1^{\prod_{i\in\bar I} V_i} \circ P_1^{V^{\bar\imath}} + \Theta_2^{\prod_{i\in\bar I} V_i} \circ \left(\left(\Upsilon^{F(i)} \circ P_1^{V^{\bar\imath}} \right) \wedge P_2^{V^{\bar\imath}} \right) \in \left(\prod_{i\in\bar I} V_i \right)^{[TF(i)](Tf(i))}$$

$$TF(i) \circ \mathcal{L} \circ \overset{*}{T}F(i)^{-1} = \Theta_1^{V^{\bar\imath}} \circ P_1^{\prod_{i\in\bar I} V_i} + \Theta_2^{V^{\bar\imath}} \circ \left(\left((\mathrm{inv} \circ \Upsilon)^{F(i)} \circ P_1^{\prod_{i\in\bar I} V_i} \right) \wedge P_2^{\prod_{i\in\bar I} V_i} \right) \in \left(V^{\bar\imath} \right)^{[\overset{*}{T}F(i)](\overset{*}{T}f(i))}$$

En efecto, mostremos lo anterior,

$$\overset{*}{T}F(i) \circ \mathcal{L} \circ TF(i)^{-1} = \Theta_1^{\prod_{i\in\bar I} V_i} \circ P_1^{\prod_{i\in\bar I} V_i} + \Theta_2^{\prod_{i\in\bar I} V_i} \circ \left(I_{T(M)^*} \otimes \left(\left(\mathrm{inv} \circ \Xi^{F(i)} \right) \circ \pi \right) \right) \circ \mathcal{L} \circ TF(i)^{-1}$$

$$= \Theta_1^{\prod_{i\in\bar I} V_i} \circ P_1^{V^{\bar\imath}} + \Theta_2^{\prod_{i\in\bar I} V_i} \circ \left(\mathcal{L} \circ TF(i)^{-1} \otimes \left(\left(\mathrm{inv} \circ \Xi^{F(i)} \right) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar\imath}} \right) \right)$$

desarrollando: $\quad \mathcal{L} \circ TF(i)^{-1} = \left((\Upsilon \circ \rho) \wedge I_{T(M)} \right) \circ TF(i)^{-1}$

$$= \left(\Upsilon \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar\imath}} \right) \wedge \left(\left(\left(\mathrm{inv} \circ \Xi^{F(i)} \right) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar\imath}} \right) \wedge P_2^{V^{\bar\imath}} \right)$$

$$= \left(\left(\Upsilon \otimes \left(\mathrm{inv} \circ \Xi^{F(i)} \right) \right) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar\imath}} \right) \wedge P_2^{V^{\bar\imath}}$$

(i) Se sigue del teorema del mapeo abierto, véase ref.(18) p. / 48 - 49.

(ii) Como $\pi \circ \mathcal{L} = \rho$ y $\rho \circ \mathcal{L}^{-1} = \pi$ basta analizar las representaciones locales de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{-1}$ en términos de las cartas $TF(i)$ y $\overset{*}{T}F(i)$ $\forall\ i \in I_F$.

Aún cuando tiene sentido analizar la diferenciabilidad de la representación local de Υ , no sucede así con la representación local de $\mathrm{inv}\circ\Upsilon$ debido a que su contradominio no es un espacio normado. Sin embargo, si V es un espacio de Banach, $T_q(M)$ es un espacio de Banach, de lo cual se sigue que

Si $\Upsilon(q) \in \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}))$ es biyectiva

entonces (i) $\Upsilon(q)^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}), T_q(M))$ $\forall\ q \in M$,

es decir $\mathrm{inv}\circ\Upsilon \in \prod_{q\in M} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T_q(M), \mathbb{R}), T_q(M))$,

luego $(\mathrm{inv}\circ\Upsilon)^{F(i)} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}), V)^{F(i)(f(i))}$

La trascendencia de estas definiciones "ad-hoc", radica en que mediante ellas podemos escribir las representaciones locales de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{-1}$ en el sentido usual de variedades(ii)

$$\check{T}F(i) \circ \mathcal{L} \circ TF(i)^{-1} = \theta_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circ P_1^{V^{\bar{2}}} + \theta_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circ \left((\Upsilon^{F(i)} \circ P_1^{V^{\bar{2}}}) \wedge P_2^{V^{\bar{2}}} \right) \in \left(\prod_{i\in I} V_i\right)^{[TF(i)](Tf(i))}$$

$$TF(i) \circ \mathcal{L} \circ \check{T}F(i)^{-1} = \theta_1^{V^{\bar{2}}} \circ P_1^{\prod_{i\in I} V_i} + \theta_2^{V^{\bar{2}}} \circ \left((\mathrm{inv}\circ\Upsilon)^{F(i)} \circ P_1^{\prod_{i\in I} V_i} \wedge P_2^{\prod_{i\in I} V_i} \right) \in (V^{\bar{2}})^{[\check{T}F(i)](\check{T}f(i))}$$

En efecto, mostremos la anterior,

$$\check{T}F(i) \circ \mathcal{L} \circ TF(i)^{-1} = \theta_1^{\prod V_i} \circ P_1^{\prod V_i} + \theta_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circ \left(I_{T(M)^*} \otimes ((\mathrm{inv}\circ\Xi^{F(i)}) \circ \pi) \right) \circ \mathcal{L} \circ TF(i)^{-1}$$

$$= \theta_1^{\prod_{i\in I} V_i} \circ P_1^{V^{\bar{2}}} + \theta_2^{\prod_{i\in I} V_i} \circ \left(\mathcal{L} \circ TF(i)^{-1} \otimes ((\mathrm{inv}\circ\Xi^{F(i)}) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar{2}}}) \right)$$

desarrollando: $\mathcal{L} \circ TF(i)^{-1} = ((\Upsilon \circ \rho) \wedge I_{T(M)}) \circ TF(i)^{-1}$

$$= (\Upsilon \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar{2}}}) \wedge (((\mathrm{inv}\circ\Xi^{F(i)}) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar{2}}}) \wedge P_2^{V^{\bar{2}}})$$

$$= ((\Upsilon \otimes (\mathrm{inv}\circ\Xi^{F(i)})) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{V^{\bar{2}}}) \wedge P_2^{V^{\bar{2}}}$$

(i) Se sigue del teorema del mapeo abierto, véase ref.(18) p. / 48 - 49.

(ii) Como $\pi \circ \mathcal{L} = \rho$ y $\rho \circ \mathcal{L}^{-1} = \pi$ basta analizar las representaciones locales de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{-1}$ en términos de las cartas $TF(i)$ y $\check{T}F(i)$ $\forall\ i \in I_F$.

Si E y F son espacios de Banach, sabemos que (i)

$$GL(E,F) = \{ f \in Hom(E,F) \mid f \text{ invertible} \}$$

es un abierto en la topología usual de Hom(E,F). Más aún,

$$INV = \{ (f, f^{-1}) \mid f \in GL(E,F) \} \in GL(F,E)^{GL(E,F)}$$

es un difeomorfismo de clase $C^{(\infty)}$.
Del teorema del mapeo abierto, si $f \in GL(E,F)$ entonces $f^{-1} \in GL(F,E)$. Claramente INV es inyectiva, y la supra-yectividad se sigue de que $INV(f^{-1}) = f$ con $f^{-1} \in GL(F,E)$. La diferenciabilidad de INV puede verse en la referencia (1) pag. 27.

Con estos antecedentes podemos proceder a la demostración de los siguientes resultados.

A.2.1. <u>LEMA</u>.- Sea $H = \dot{\bar{I}}_{L_2^{ac}(V)} \circledcirc (\bar{\bar{\dot{\theta}}}_1^{V^2} + \ddot{\bar{\theta}}_2^{V^2}) \in Hom(V, Hom(V,\mathbb{R}))^{L_2^{ac}(V)}$ entonces $H \in Hom(L_2^{ac}(V), Hom(V, Hom(V,\mathbb{R})))$. En particular H es C^{∞}.

<u>Dem</u>. Claramente $H \in Hom(L_2^{ac}(V), Hom(V, Hom(V,\mathbb{R})))$. El que H sea continua se sigue de la observación

$$| H(\alpha)(v)(w) | \leq k \, \|\alpha\|_{L_2^{ac}(V)} \|v\|_V \|w\|_V$$

para alguna $k \in \mathbb{R}^+$, $\forall \alpha \in L_2^{ac}(V)$, $\forall v, w \in V$

A.2.2 <u>LEMA</u>.- Sea $(M, \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable con $n \geq 0$, $\omega \in \prod_{q \in M} L_2^{ac}(T_q(M))$ un campo tensorial.
Entonces

$$\Upsilon^{F(i)} = H \circ \omega^{F(i)} \quad \forall i \in I_F, \text{ con } F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$$

<u>Dem</u>.:

$$\Upsilon^{F(i)} = (((\bar{\omega} \circledcirc (\bar{\bar{\dot{\Theta}}}_1^{(2)} + \bar{\dot{\Theta}}_2)) \circledcirc \overline{(inv_A \dot{\Xi}^{F(i)})}) \circledcirc \overline{(inv_A \dot{\Xi}^{F(i)})}) \circ F(i)^{-1}$$

$$= (\bar{\omega} \circledcirc (\overline{\Theta_1^{(2)} \circledcirc (inv_A \dot{\Xi}^{F(i)})} + \bar{\dot{\Theta}}_2^{(2)}) \circledcirc \overline{(inv_A \dot{\Xi}^{F(i)})}) \circ F(i)^{-1}$$

$$= (\ddot{\bar{\omega}} \circledcirc (\overline{\Theta_1^{(2)} \circledcirc (inv_A \dot{\Xi}^{F(i)})} + \overline{\Theta_2^{(2)} \circledcirc (inv_A \dot{\Xi}^{F(i)})})) \circ F(i)^{-1}$$

(i) Véase ref. (1) pag. 26

Si E y F son espacios de Banach, sabemos que (i)

$$GL(E,F) = \{f \in Hom(E,F) \mid f \text{ invertible}\}$$

es un abierto en la topología usual de Hom(E,F). Más aún,

$$INV = \{(f, f^{-1}) \mid f \in GL(E,F)\} \in GL(F,E)^{GL(E,F)}$$

es un difeomorfismo de clase $C^{(\infty)}$.
Del teorema del mapeo abierto, si $f \in GL(E,F)$ entonces $f^{-1} \in GL(F,E)$. Claramente INV es inyectiva, y la supra-yectividad se sigue de que $INV(f^{-1}) = f$ con $f^{-1} \in GL(F,E)$. La diferenciabilidad de INV puede verse en la referencia (1) pag. 27.

Con estos antecedentes podemos proceder a la demostración de los siguientes resultados.

A.2.1. LEMA.- Sea $H = \bar{\dot{I}}_{L_2^{ac}(V)} \circledS (\bar{\bar{\dot{\theta}}}_1^{V\bar{z}} + \ddot{\theta}_2^{V\bar{z}}) \in Hom(V, Hom(V,\mathbb{R}))^{L_2^{ac}(V)}$ entonces $H \in Hom(L_2^{ac}(V), Hom(V, Hom(V,\mathbb{R})))$. En particular H es C^{∞}.

Dem. Claramente $H \in Hom(L_2^{ac}(V), Hom(V, Hom(V,\mathbb{R})))$. El que H sea continua se sigue de la observación

$$|H(\alpha)(v)(w)| \leq k \, \|\alpha\|_{L_2^{ac}(V)} \|v\|_V \|w\|_V$$

para alguna $k \in \mathbb{R}^+$, $\forall \alpha \in L_2^{ac}(V)$, $\forall v, w \in V$

A.2.2 LEMA.- Sea $(M, \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable con $n \geq 0$, $\omega \in \prod_{q \in M} L_2^{ac}(T_q(M))$ un campo tensorial.

Entonces

$$\Upsilon^{F(i)} = H \circ \omega^{F(i)} \quad \forall i \in I_F, \text{ con } F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$$

Dem.:

$$\Upsilon^{F(i)} = (((\bar{\omega} \circledS (\bar{\bar{\dot{\Theta}}}_1^{(2)} + \dot{\bar{\Theta}}_2)) \circledS (\overline{\text{inva}\,\dot{\Xi}^{F(i)}})) \circledS (\overline{\text{inva}\,\dot{\Xi}^{F(i)}})) \circ F(i)^{-1}$$

$$= (\bar{\omega} \circledS (\overline{\dot{\Theta}_1^{(2)} \circledS (\text{inva}\,\dot{\Xi}^{F(i)})} + \bar{\dot{\Theta}}_2^{(2)}) \circledS (\overline{\text{inva}\,\dot{\Xi}^{F(i)}})) \circ F(i)^{-1}$$

$$= (\bar{\omega} \circledS (\overline{\Theta_1^{(2)} \circledS (\text{inva}\,\dot{\Xi}^{F(i)})} + \overline{\Theta_2^{(2)} \circledS (\text{inva}\,\dot{\Xi}^{F(i)})})) \circ F(i)^{-1}$$

(i) Véase ref. (1) pag. 26

$$\Upsilon^{F(i)} = \overline{\left(\left(\left(\omega^{F(i)} \circ F(i)\right) \circledcirc \left(\dot{\bar{\theta}}_1^{\vee\bar{z}} \circledcirc \Xi^{F(i)} \circledcirc \dot{P}_1^{(2)} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\vee\bar{z}} \circledcirc \Xi^{F(i)} \circledcirc P_2^{(2)}\right)\right) \circledcirc \left(\overline{\Theta_1^{(2)} \circledcirc (\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)})} + \overline{\Theta_2^{(2)} \circledcirc (\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)})}\right)\right)} \circ F(i)^{-1}$$

$$= \left(\left(\overline{\omega^{F(i)} \circ F(i)}\right) \circledcirc \left(\dot{\bar{\theta}}_1^{\vee\bar{z}} \circledcirc \bar{\Xi}^{F(i)} \circledcirc \bar{P}_1^{(2)} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\vee\bar{z}} \circledcirc \bar{\Xi}^{F(i)} \circledcirc \bar{P}_2^{(2)}\right) \circledcirc \left(\bar{\Theta}_1^{(1)} \circledcirc \left(\overline{\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)}}\right) + \bar{\Theta}_2^{(1)} \circledcirc \left(\overline{\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)}}\right)\right)\right) \circ F(i)^{-1}$$

$$= \left(\left(\overline{\omega^{F(i)} \circ F(i)}\right) \circledcirc \left(\dot{\bar{\theta}}_1^{\vee\bar{z}} \circledcirc \bar{\Xi}^{F(i)} \circledcirc \left(\overline{\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)}}\right) + \dot{\bar{\theta}}_2^{\vee\bar{z}} \circledcirc \bar{\Xi}^{F(i)} \circledcirc \left(\overline{\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)}}\right)\right)\right) \circ F(i)^{-1}$$

$$= \left(\left(\overline{\omega^{F(i)} \circ F(i)}\right) \circledcirc \left(\dot{\bar{\theta}}_1^{\vee\bar{z}} \circledcirc \dot{\bar{I}}_V + \dot{\bar{\theta}}_2^{\vee\bar{z}} \circledcirc \dot{\bar{I}}_V\right)\right) \circ F(i)^{-1}$$

$$= \bar{\omega}^{F(i)} \circledcirc \left(\left(\overline{\dot{\bar{\theta}}_1^{\vee\bar{z}} \circledcirc \dot{\bar{I}}_V} + \overline{\dot{\bar{\theta}}_2^{\vee\bar{z}} \circledcirc \dot{\bar{I}}_V}\right) \circ F(i)^{-1}\right)$$

$$= \bar{\omega}^{F(i)} \circledcirc \left(\dot{\bar{\theta}}_1^{\vee\bar{z}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\vee\bar{z}}\right)$$

$$= H \circ \omega^{F(i)}$$

A.2.3 <u>LEMA</u>.– Sea $(M, \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable modelada sobre un espacio de Banach, con $n \geq 0$; si $\omega \in \prod_{q\in M} L_2^{ac}(T_q(M))$ es no degenerado,

$$(\mathrm{inv}_\Delta \Upsilon)^{F(i)} = \mathrm{INV} \circ \Upsilon^{F(i)} \qquad \forall i \in I_F,\ \text{con } F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$$

<u>Dem</u>.: Sean $F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(M,V)}$, $i \in I_F$.

$$(\mathrm{inv}_\Delta \Upsilon)^{F(i)} = \left(\Xi^{F(i)} \circledcirc (\mathrm{inv}_\Delta \Upsilon) \circledcirc \left(\dot{\bar{I}}_{\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})} \circledcirc \bar{\Xi}^{F(i)}\right)\right) \circ F(i)^{-1}$$

$$= \left(\left(\mathrm{inv}_\Delta (\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)})\right) \circledcirc (\mathrm{inv}_\Delta \Upsilon) \circledcirc \left(\mathrm{inv}_\Delta \left(\mathrm{id}_{M^*} \circledcirc \left(\overline{\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)}}\right)\right)\right)\right) \circ F(i)^{-1}$$

donde $\mathrm{id}_{M^*} = \{(q, I_{\mathrm{Hom}(T_q(M),\mathbb{R})}) \mid q \in M\}$ y puede verificarse que

$$\mathrm{inv}_\Delta \left(\dot{\bar{I}}_{\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})} \circledcirc \bar{\Xi}^{F(i)}\right) = \mathrm{id}_{M^*} \circledcirc \left(\overline{\mathrm{inv}_\Delta \Xi^{F(i)}}\right)$$

luego

$$(\mathrm{inv}\circ\Upsilon)^{F(i)} = \mathrm{INV}\circ\left(\left(\overline{\mathrm{Id}_{H^*}\otimes(\mathrm{inv}\circ\Xi^{F(i)})}\right)\otimes\Upsilon\otimes(\mathrm{inv}\circ\Xi^{F(i)})\right)\circ F(i)^{-1}$$

$$= \mathrm{INV}\circ\left(\left(\Upsilon\otimes(\mathrm{inv}\circ\Xi^{F(i)})\right)\otimes\overline{(\mathrm{inv}\circ\Xi^{F(i)})}\right)\circ F(i)^{-1}$$

$$= \mathrm{INV}\circ\Upsilon^{F(i)} \qquad \blacksquare$$

A.2.3 <u>PROPOSICION</u>.- Sea $(M, \mathcal{a}^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable modelada sobre un espacio de Banach V con $n \geq 2$. ω un campo tensorial de orden 2 no degenerado, de clase $C^{(n-1)}$. Entonces

$$(\mathrm{inv}\circ\Upsilon)^{F(i)} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}),V)^{[F(i)]\,(f(i))} \quad \text{es de clase } C^{n-1}$$

<u>Dem.</u>: Del lema A.2.2 tenemos que $\Upsilon^{F(i)} = H\circ\omega^{F(i)}$ donde $H \in C^{(\infty)}$, del lema A.2.1, y $\omega^{F(i)} \in C^{(n-1)}$ $\therefore$ $\Upsilon^{F(i)} \in C^{(n-1)}$
Del lema A.2.2

$$(\mathrm{inv}\circ\Upsilon)^{F(i)} = \mathrm{INV}\circ\Upsilon^{F(i)}$$

con $\mathrm{INV} \in C^{(\infty)}$ y $\Upsilon^{F(i)} \in C^{(n-1)}$ $\therefore$ $(\mathrm{inv}\circ\Upsilon)^{F(i)} \in C^{(n-1)}$ $\forall i \in I_F$.

A.2.4 <u>TEOREMA</u>.- Sea $(M, \mathcal{a}^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable modelada sobre un espacio de Banach V, con $n \geq 2$. ω un campo tensorial de orden 2 (fuertemente) débilmente no degenerado de clase $C^{(n-1)}$. Entonces $\mathcal{L} \equiv (\Upsilon\circ\rho)\circ I_{T(M)} \in T(M)^{*\,T(M)}$ es (un difeomorfismo) de clase C^{n-1}.

<u>Dem.</u>; Se sigue de las expresiones para $\tilde{T}(i)\circ\mathcal{L}\circ T(i)^{-1}$ y $T(i)\circ\mathcal{L}^{-1}\circ\tilde{T}(i)^{-1}$ en términos de $\Upsilon^{F(i)}$ e $(\mathrm{inv}\circ\Upsilon)^{F(i)}$ con $F \in \mathcal{a}^{(n)}_{(M,V)}$, $TF \in \mathcal{a}^{(n-1)}_{(T(M),V^2)}$, $\tilde{T}F \in \mathcal{a}^{(n-1)}_{(T(M)^*,\prod_{i\in 2} V_i)}$ junto con el resultado de la referencia (16).

APENDICE A.3

La demostración de la no degeneración débil de la 2-forma canónica en $T(M)^*$ se basa en las siguientes consideraciones.

A.3.1 DEFINICION.- Sea V un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Hacemos

$$\lambda \equiv \dot{\overline{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})} \circledcirc \overline{I}_V \in Hom(V, Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}))$$

si λ es suprayectiva, decimos que V es un espacio reflexivo.

A.3.2 LEMA.- λ es inyectiva.

Dem.: Sea $w \in V - \{0\}$, hacemos $L_w = \|w\| \cdot (P_1^{\mathbb{R}^1} \circ L^{-1}_{\{1,w\}})$ donde $L_{\{1,w\}} = w \cdot p_1^{\mathbb{R}^1} \in Hom(\mathbb{R}^1, V)$ es inyectiva, luego $L_w \in Hom((wI_{\mathbb{R}})^{id}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ donde $(wI_{\mathbb{R}})^{id}(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de V y además

$$L_w(w) = \|w\| \quad \text{y} \quad \|L_w\|_{Hom((w \cdot I_{\mathbb{R}})^{id}(\mathbb{R}), \mathbb{R})} = 1$$

luego del teorema de Hahn-Banach tenemos que $\exists\, f_w\, Hom(V,\mathbb{R}) \ni \|f_w\|_{Hom(V,\mathbb{R})} = 1$ y $f_w(w) = \|w\|$.
Esto es posible para todo $w \in V$,[1] así pues hagamos

$$\Lambda_w \equiv \{ f \in Hom(V,\mathbb{R}) \,/\, \|f\|_{Hom(V,\mathbb{R})} = 1 \quad \text{y} \quad f(w) = \|w\| \}$$

Entonces

$$|\lambda(w)(f)| = |f(w)| = \|w\| = \|w\| \, \|f\|_{Hom(V,\mathbb{R})} \quad \forall f \in \Lambda_w$$

y dado que $\overline{B(0;1)} = \{ f \in Hom(V,\mathbb{R}) \,/\, \|f\|_{Hom(V,\mathbb{R})} = 1 \} \subseteq \Lambda_w$;

$$\|\lambda(w)\|_{Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})} = \sup.\{ |\lambda(w)(f)| \mid f \in \overline{B(0;1)} \} \geq$$

$$\sup.\{ |\lambda(w)(f)| \mid f \in \Lambda_w \} = \|w\|$$

es decir $\|\lambda(w)\|_{Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})} \geq \|w\| \quad \forall \; w \in V$.
Ahora es sencillo ver que λ es inyectiva pues $\lambda(w) = 0 \Rightarrow \|w\| = 0 \Rightarrow w = 0$.

A.3.3 TEOREMA.- La 2-forma canónica en $T(M)$ es débilmente no degenerada

---

(1) Si $w = 0$, basta tomar $f_w = I_{Hom(V,\mathbb{R})}$.

Dem.: Sea $\dot{T}F \in \mathcal{A}^{(n)}_{(T(M)^*,\ \prod_{i\in I} V_i)}$. Localmente tenemos que (i)

$$\omega \circ i_{\dot{T}F(1)} = \left(\dot{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \otimes \bar{\Xi}^{\dot{T}F(1)} \otimes P_1^{(2)}\right) \otimes \left(\dot{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} \otimes \bar{\Xi}^{\dot{T}F(1)} \otimes P_2^{(2)}\right)$$
$$- \left(\dot{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \otimes \bar{\Xi}^{\dot{T}F(1)} \otimes P_2^{(2)}\right) \otimes \left(\dot{\bar{P}}_1^{\prod_{i\in I} V_i} \otimes \bar{\Xi}^{\dot{T}F(1)} \otimes P_1^{(2)}\right)$$

con $\quad P_j^{(2)} = \{(z,\ P_j^{T_z(T(M)^*)^2}) \mid z \in T(M)^*\}$

Entonces debemos demostrar que (ii)

$$\Upsilon(z) = \overline{\dot{\omega}(z)} \otimes \left(\bar{\dot{\theta}}_1^{T_z(T(M)^*)^2} + \dot{\theta}_2^{T_z(T(M)^*)^2}\right) \in \mathrm{Hom}\left(T_z(T(M)^*), \mathrm{Hom}(T_z(T(M)^*), \mathbb{R})\right)$$

es inyectiva $\forall\ z \in T(M)^*$. Pero $\Upsilon(z)$ inyectiva $\Leftrightarrow$
$\ell(z) = \left(\Upsilon(z) \circ \bar{\Xi}^{\dot{T}F(1)}_{(z)}{}^{-1}\right) \otimes \left(\dot{\bar{\Xi}}^{\dot{T}F(1)-1}_{(z)}\right) \in \mathrm{Hom}\left(\prod_{i\in I} V_i, \mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} V_i, \mathbb{R})\right)$ es inyectiva

Podemos verificar que (iii)

$$\ell(z) = \bar{P}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \otimes \dot{P}_1^{\prod_{i\in I} V_i} - \dot{\bar{P}}_2^{\prod_{i\in I} V_i} \otimes \bar{P}_1^{\prod_{i\in I} V_i}$$

En efecto (omotiendo los superíndices $\prod_{i\in I} V_i$ y $\dot{T}F(1)$)

$$\Upsilon(z) = \left(\dot{\bar{P}}_2 \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z) \otimes \bar{I}_{T_z(T(M)^*)}\right) \otimes \left(\dot{\bar{P}}_1 \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z) \otimes \dot{\bar{I}}_{T_z(T(M)^*)}\right)$$
$$- \left(\dot{\bar{P}}_2 \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z) \otimes \dot{\bar{I}}_{T_z(T(M)^*)}\right) \otimes \left(\dot{\bar{P}}_1 \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z) \otimes \dot{\bar{I}}_{T_z(T(M)^*)}\right)$$

$\Rightarrow$
$$\ell(z) = \left(\dot{\bar{P}}_2 \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z) \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z)^{-1}\right) \otimes \left(\dot{\bar{P}}_1 \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z) \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z)^{-1}\right)$$
$$- \left(\dot{\bar{P}}_2 \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z) \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z)^{-1}\right) \otimes \left(\dot{\bar{P}}_1 \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z) \otimes \dot{\bar{\Xi}}(z)^{-1}\right)$$
$$= \left(\dot{\bar{P}}_2 \otimes \bar{I}_{\prod_{i\in I} V_i}\right) \otimes \left(\dot{\bar{P}}_1 \otimes \dot{\bar{I}}_{\prod_{i\in I} V_i}\right) - \left(\dot{\bar{P}}_2 \otimes \dot{\bar{I}}_{\prod_{i\in I} V_i}\right) \otimes \left(\dot{\bar{P}}_1 \otimes \dot{\bar{I}}_{\prod_{i\in I} V_i}\right)$$
$$= \bar{P}_2 \otimes \dot{\bar{P}}_1 - \dot{\bar{P}}_2 \otimes \bar{P}_1 = P_2 \otimes \dot{\bar{P}}_1 - \dot{\bar{P}}_2 \otimes \bar{P}_1$$

Ahora, si $\ell(z)(w) = 0 \Rightarrow w(2) \circ P_1 - P_2 \circ \dot{\overline{w(1)}} = 0$

$\Rightarrow \ell(z)(w) \circ \Theta_1 = w(2) = 0$

Además, $\ell(z)(w) = 0 \Rightarrow \ell(z)(w) \circ \Theta_2 = I_{\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})} \circ \dot{\overline{w(1)}} = 0$

$\Rightarrow \lambda(w(1)) = 0 \Rightarrow w(1) = 0$

(i) Véase la ref. (16) para la definición de la derivada /exterior.

(ii) Compárese con la def. de Υ al principio del apéndice A.3.

(iii) $\bar{\dot{A}} \otimes \bar{\dot{B}} = \overline{A \circ B}$; $\dot{A} \otimes \dot{\bar{B}} = \overline{\dot{A} \circ B}$; $\bar{A} \otimes \dot{\bar{B}} = A \otimes \dot{\bar{B}}$

donde λ está definida en A.2.1 y el que $w(1) = 0$ se sigue de la inyectividad de λ (lema A.2.2)

A.3.4 PROPOSICION. La 2-forma canónica en $T(M)^*$ es fuertemente no degenerada $\Leftrightarrow$ V es reflexivo.

Dem.: Supongamos V reflexivo. Mostraremos que $\ell(z)$ es suprayectiva, de lo cual se sigue la suprayectividad de $\Upsilon(z)$.

Sea $h \in \mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} V_i, \mathbb{R})$, $H = -\theta_1^{\prod_{i\in I} V_i}(\lambda^{-1}(h\circ\theta_2)) + \theta_2^{\prod_{i\in I} V_i}(h\circ\theta_1) \in \prod_{i\in I} V_i$ entonces

$$\ell(z)(H) = h\circ\theta_1\circ p_1 + p_2\triangle(\lambda^{-1}(h\circ\theta_2))$$

$$= h\circ\theta_1\circ p_1 + \lambda(\lambda^{-1}(h\circ\theta_2))\triangle p_2$$

$$= h\circ\theta_1\circ p_1 + h\circ\theta_2\circ p_2 = h$$

$\therefore$ $\ell(z) \in \mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} V_i, \mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} V_i, \mathbb{R}))$ es biyectiva.

Supongamos ω no degenerada. Debemos mostrar que λ es suprayectiva. Sea $h^+ \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ y hagamos

$$h = h^+\circ p_2^{\prod_{i\in I} V_i} \in \mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} V_i, \mathbb{R}).$$

como $\Upsilon(z)$ es sobre $\Rightarrow$ $\ell(z)$ es sobre $\therefore$ $\exists\, \alpha \in \prod_{i\in I} V_i \ni$

$\ell(z)(\alpha) = h$, i.e.

$$h = \alpha(2)\circ p_1^{\prod_{i\in I} V_i} - p_2^{\prod_{i\in I} V_i}\triangle \dot{\overline{\alpha(1)}}$$

$$\Rightarrow \quad h^+ = -\, I_{\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})}\triangle \dot{\overline{\alpha(1)}} = \lambda(-\alpha(1))$$

$\therefore$ $\exists\ -\alpha(1) \in V \ni h^+ = \lambda(-\alpha(1))$, lo cual significa que λ es suprayectiva luego V es reflexivo.

\# Cuando V es un espacio reflexivo, V es un espacio de Banach dado que V es normado; por tanto $\prod_{i\in I} V_i$ es un espacio de Banach. Del teorema del mapeo abierto, $\ell(z)^{-1}$ $\in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} V_i, \mathbb{R}), \prod_{i\in I} V_i)$. Equivalentemente $\Upsilon(z)^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T_z(T(M)^*), \mathbb{R}), T_z(T(M)^*))$. En particular, si M es de clase $C^{(n)}$ con $n \geq 3$, $T(M)^*$ es de clase $C^{(n-1)}$ con $n-1 \geq 2$ y de acuerdo al teorema A.2.4

$$\mathcal{L}_\omega \equiv (\Upsilon\circ \rho_{T(T(M)^*)})\triangle\, I_{T(T(M)^*)} \in T(T(M)^*)^{*\,T(T(M)^*)}$$

es un difeomorfismo de clase $C^{(n-2)}$. En tal caso podemos establecer una correspondencia biunívoca entre campo vectoriales en $T(M)^*$ y 1-formas en $T(M)^*$ de clase $C^{(n-2)}$

En efecto, si $\tilde{\Theta} \in \Lambda_1^{(n-2)}(T(M)^*)$ y $\Theta = \tilde{\Theta} \otimes \Theta_1^{(1)}$ con

$$\Theta_1 = \{(z, \theta_1^{T_z(T(M)^*)^*}) \mid z \in T(M)^*\}$$

entonces

$\Theta \in T(T(M)^*)^{*\,T(M)^*}$ y $\pi_{T(T(M)^*)^*} \circ \Theta = I_{T(M)^*}$; es decir

Θ es un campo covectorial en $T(M)^*$. Luego

$X = \mathcal{L}_\omega^{-1} \circ \Theta \in T(T(M)^*)^{T(M)^*}$ y $\rho_{T(T(M)^*)} \circ X = I_{T(M)^*}$

es decir $X \in \mathfrak{X}^{(n-1)}$. En estos términos

$$\mathcal{H}^{(n-2)}(T(M)^*) = \left\{ \mathcal{L}_\omega^{-1} \circ \theta \mid \tilde{\theta} = \theta \otimes P_1^{(1)} \in \Lambda_1^{(n-2)}(T(M)^*) \text{ es exacta} \right\}$$

APENDICE A.4

Eventualmente nos interesará definir la derivada fibrada de una función $H \in \mathbb{R}^{T(M)^*}$ cuando se vea la relación entre las descripciones de Lagrange y Hamilton. Desgraciadamente la construcción de la derivada fibrada para este tipo de funciones adolece del rigor necesario en los textos "serios" que la tratan o bien consideran el caso de dimensión finita (véanse p. ej. las refs. (1) pag. 218 -223 , (11) pag. 536). Las dificultades que se encuentran para entender con precisión lo que los autores entienden por FH - que parecen infranqueables - nos ha motivado para hacer un desarrollo ad-hoc pero consistente. La presentación del tema se hace en seguida.

Sea $(M, \mathcal{a}^{(n)}_{(M,V)})$ una variedad diferenciable con $n \geq 3$, modelada sobre un espacio reflexivo (en particular $T(M)^*$ es una variedad fuertemente simpléctica con la estructura usual). $H \in \Lambda^{(n-1)}(T(M)^*)$. Queremos definir a la derivada fibrada de H como una función

$$FH \in T(M)^{T(M)^*}$$

Notemos que para cada $\alpha \in T(M)^*$

$$H \circ i_{Hom(T_{\pi(\alpha)}(M),\mathbb{R})} \in \mathbb{R}^{Hom(T_{\pi(\alpha)}(M),\mathbb{R})}$$

y no es difícil ver que es diferenciable. Podríamos definir

$$\widetilde{FH}(\alpha) \equiv (H \circ i_{Hom(T_{\pi(\alpha)}(M),\mathbb{R})})'(\alpha) \in Hom(Hom(T_{\pi(\alpha)}(M),\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

con lo cual tendríamos

$$\widetilde{FH} \in \prod_{\alpha \in T(M)^*} Hom(Hom(T_{\pi(\alpha)}(M),\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

cuya estructura es muy complicada. Dado que V es reflexivo, $T_{\pi(\alpha)}(M)$ es reflexivo y podría intentarse redefinir a FH como

$$\widetilde{\widetilde{FH}}(\alpha) = \lambda^{-1}_{\pi(\alpha)}(\widetilde{FH}(\alpha)) \in T_{\pi(\alpha)}(M)$$

donde $\lambda_{\pi(\alpha)}$ es algún isomorfismo entre $T_{\pi(\alpha)}(M)$ y $Hom(Hom(T_{\pi(\alpha)}(M),\mathbb{R}),\mathbb{R})$ Sin embargo puede apreciarse la dificulatad para poder definir a FH globalmente pues en general $\lambda_{\pi(\alpha)}$ depende de una carta (podría elegirse por ejemplo

$$\lambda_{\pi(\alpha)} = (\lambda \circ \Xi^{F(i)\,-1}_{(\pi(\alpha))}) \otimes \Xi^{F(i)\,-1}_{(\pi(\alpha))} \qquad \text{con} \quad \pi(\alpha) \in f(i)$$

donde $\lambda \equiv \dot{\overline{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})} \otimes \overline{I}_V \in Hom(V, Hom(Hom(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}))$

A.4.1 DEFINICION.- Sea $F \in \mathcal{A}^{(n)}(M,V)$, $i \in I_F$. Hacemos

$$(FH)^{F(i)} = \theta_1^{V\bar{i}} \circ P_1^{\pi V_i}{}_{i\bar{i}} + \theta_2^{V\bar{i}} \circ \lambda^{-1} \circ (H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})'_2 \in (V^{\bar{i}})^{[\overset{*}{T}F(i)](\overset{*}{T}f(i))}$$

Si demostramos que

$$(FH)^{F(i)} \circ \dot{i}_{(\overset{*}{T}F(i))(\overset{*}{T}f(i))} = T(i) \circ T(k)^{-1} \circ (FH)^{F(k)} \circ \overset{*}{T}(k) \circ \overset{*}{T}(i)^{-1} \qquad \forall i,k \in I_F$$

podemos definir a $FH \in T(M)^{T(M)^*}$ haciendo

$$FH\ (\alpha) = [T(i)^{-1} \circ (FH)^{F(i)} \circ \overset{*}{T}(i)^{-1}](\alpha) \qquad \text{si} \quad \alpha \in \overset{*}{T}f(i)$$

A.4.2 LEMA.-

$$(H \circ \overset{*}{T}(k)^{-1})'_2 \circ \dot{i}_{\overset{*}{T}F(i)(\overset{*}{T}f(i))} = ((H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})'_2 \otimes (\dot{\overline{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})} \otimes (\overline{(F(k) \circ F(i)^{-1})' \circ P_1}))) \circ \overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1}$$

Dem.- Notemos las siguientes igualdades

$$T(i) \circ T(k)^{-1} = \theta_1^{V\bar{i}} \circ F(i) \circ F(k)^{-1} \circ P_1^{V\bar{i}} + \theta_2^{V\bar{i}} \circ (((F(i) \circ F(k)^{-1})' \circ P_1^{V\bar{i}}) \triangle P_2^{V\bar{i}})$$

$$\overset{*}{T}(k) \circ \overset{*}{T}(i)^{-1} = \theta_1^{\pi V_i}{}_{i\bar{i}} \circ F(i) \circ F(k)^{-1} \circ P_1^{\pi V_i}{}_{i\bar{i}} + \theta_2^{\pi V_i}{}_{i\bar{i}} \circ (P_2^{\pi V_i}{}_{i\bar{i}} \otimes ((F(i) \circ F(k)^{-1})' \circ F(k) \circ F(i)^{-1} \circ P_1^{\pi V_i}{}_{i\bar{i}}))$$

Ahora(se sobreentienden los superíndices)

$$\begin{aligned}
(H \circ \overset{*}{T}(k)^{-1})'_2 &= (H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1} \circ \overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1})' \otimes \dot{\overline{\theta}}_2^{\pi V_i}{}_{i\bar{i}} \\
&= ((H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})' \circ \overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1}) \otimes (\overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1})' \otimes \dot{\overline{\theta}}_2^{\pi V_i}{}_{i\bar{i}} \\
&= (((H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})'_1 \otimes \dot{\overline{P}}_1 + (H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})'_2 \otimes \dot{\overline{P}}_2) \circ \overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1}) \otimes (\overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1})' \otimes \dot{\overline{\theta}}_2 \\
&= ((H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})'_1 \otimes (\dot{\overline{P}}_1 \otimes (\overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1})' \otimes \dot{\overline{\theta}}_2) \circ \overset{*}{T}(k) \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})) \circ \overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1} + \\
&\quad ((H \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})'_2 \otimes (\dot{\overline{P}}_2 \otimes (\overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1})' \otimes \dot{\overline{\theta}}_2) \circ \overset{*}{T}(k) \circ \overset{*}{T}(i)^{-1})) \circ \overset{*}{T}(i) \circ \overset{*}{T}(k)^{-1}
\end{aligned}$$

donde

$$(\check{T}(i) \circ \check{T}(k)^{-1})' = \dot{\bar{\theta}}_1 \circledcirc ((F(i) \circ F(k)^{-1})' \circ P_1) \circledcirc \dot{\bar{P}}_1 +$$

$$\dot{\bar{\theta}}_2 \circledcirc [\, \dot{\bar{P}}_2 \circledcirc (((F(k) \circ F(i)^{-1})^{(2)} \circ F(i) \circ F(k)^{-1} \circ P_1) \circledcirc ((F(i) \circ F(k)^{-1})' \circ P_1) \circledcirc \dot{\bar{P}}_1 \,] +$$

$$\dot{\bar{\theta}}_2 \circledcirc [\, \dot{\bar{P}}_2 \circledcirc (\overline{(F(k) \circ F(i)^{-1})' \circ \dot{F}(i) \circ F(k)^{-1} \circ P_1} \,)]$$

por tanto $\quad \dot{\bar{P}}_1 \circledcirc (\check{T}(i) \circ \check{T}(k)^{-1})' \circledcirc \dot{\bar{\theta}}_2 = 0$

$$\dot{\bar{P}}_2 \circledcirc (\check{T}(i) \circ \check{T}(k)^{-1})' \circledcirc \dot{\bar{\theta}}_2 = \dot{\bar{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})} \circledcirc (\overline{(F(k) \circ F(i)^{-1})' \circ \dot{F}(i) \circ F(k)^{-1} \circ P_1})$$

Luego

$$(H \circ \check{T}(k)^{-1})'_2 \circ i_{[\check{T}(i)](\check{T}\mathfrak{f}(i))} = ((H \circ \check{T}(i)^{-1})'_2 \circledcirc (\dot{\bar{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})} \circledcirc ((F(k) \circ F(i)^{-1} \circ P_1)))) \circ \check{T}(i) \circ \check{T}(k)^{-1}$$

∎

Los siguientes lemas nos serán de utilidad.

A.4.3 <u>LEMA</u>.-

$$(I_{Hom(V,\mathbb{R})} \circledcirc (\overline{(F(k) \circ F(i)^{-1})'(v)}))^{-1} = I_{Hom(V,\mathbb{R})} \circledcirc (\overline{(F(i) \circ F(k)^{-1})'([F(k) \circ F(i)^{-1}](v))})$$

$$\in Hom(Hom(V,\mathbb{R}), Hom(V,\mathbb{R})) \qquad \forall\ v \in [F(i)](\mathfrak{f}(i) \cap \mathfrak{f}(j))$$

<u>Dem</u>.- Regla de la cadena.

A.4.4 <u>LEMA</u>.- Sea $w \in [\check{T}(i)](\check{T}\mathfrak{f}(i) \cap \check{T}\mathfrak{f}(j))$ entonces

$$I_{Hom(V,\mathbb{R})} \wedge (\overline{[(F(k) \circ F(i)^{-1})'(w(1))](\lambda^{-1}((H \circ \check{T}(i)^{-1})'_2(w)))}) =$$

$$(H \circ \check{T}(i)^{-1})'_2(w) \circ (I_{Hom(V,\mathbb{R})} \circledcirc (\overline{(F(k) \circ F(i)^{-1})'(w(1))})$$

<u>Dem</u>.- Del lema anterior

$$(I_{Hom(V,\mathbb{R})} \circledcirc (\overline{(F(i) \circ F(k)^{-1})'([F(k) \circ F(i)^{-1}](w(1)))})) \wedge (\overline{[(F(k) \circ F(i)^{-1})'(w(1))](\lambda^{-1}((H \circ \check{T}(i)^{-1})'_2(w)))})$$

$= \dots$

$$= I_{Hom(V,\mathbb{R})} \triangle \left(\overline{[(F(l)\circ F(k)^{-1})'([F(k)\circ F(l)^{-1}](w(l)))\circ(F(k)\circ F(l)^{-1})'(w(l))]}\left(\lambda^{-1}((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w))\right)\right)$$

$$= I_{Hom(V,\mathbb{R})} \triangle \ \overline{\lambda^{-1}((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w))} = \lambda(\lambda^{-1}((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w)))$$

$$= (H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w) \qquad \blacksquare$$

A.4.5 COROLARIO.- Sea $w \in [\bar{T}(l)](\bar{T}f(l)\cap \bar{T}f(j))$

$$[(F(l)\circ F(k)^{-1})'([F(k)\circ F(l)^{-1}](w(l)))]\left([(F(k)\circ F(l)^{-1})'(w(l))]\left(\lambda^{-1}((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w))\right)\right) =$$

$$\lambda^{-1}\left((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w)\circ\left(I_{Hom(V,\mathbb{R})}\otimes\left(\overline{(F(k)\circ F(l)^{-1})'(w(l))}\right)\right)\right)$$

Dem.- Podemos reescribir el resultado del lema A.4.4 como

$$\lambda([(F(k)\circ F(l)^{-1})'(w(l))](\lambda^{-1}((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w))) =$$

$$(H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w)\circ(I_{Hom(V,\mathbb{R})}\otimes(\overline{(F(k)\circ F(l)^{-1})'(w(l))})$$

Luego

$$[(F(l)\circ F(k)^{-1})'([F(k)\circ F(l)^{-1}](w(l)))]\left([(F(k)\circ F(l)^{-1})'(w(l))]\left(\lambda^{-1}((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w))\right)\right) =$$

$$\lambda^{-1}((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w)) = \lambda^{-1}\left((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2(w(l))\circ\left(I_{Hom(V,\mathbb{R})}\otimes\left(\overline{(F(k)\circ F(l)^{-1})'(w(l))}\right)\right)\right) \qquad \blacksquare$$

Ahora con los resultados anteriores podemos proceder a demostrar la igualdad

$$T(l)\circ T(k)^{-1}\circ (FH)^{F(k)}\circ \bar{T}(k)\circ \bar{T}(l)^{-1} = (FH)^{F(l)}\circ i_{[\bar{T}(l)](\bar{T}f(l)\cap \bar{T}f(j))}\ .$$

$$(FH)^{F(k)}\circ \bar{T}(k)\circ \bar{T}(l)^{-1} = (\theta_1\circ P_1 + \theta_2\circ\lambda^{-1}\circ(H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2)\circ \bar{T}(k)\circ \bar{T}(l)^{-1}$$

$$= \theta_1\circ F(k)\circ F(l)^{-1}\circ P_1 + \theta_2\circ\lambda^{-1}\circ(H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2\circ \bar{T}(k)\circ \bar{T}(l)^{-1}$$

En el segundo término tenemos

$$\lambda^{-1}\circ(H\circ \bar{T}(k)^{-1})'_2\circ \bar{T}(k)\circ \bar{T}(l)^{-1} = \lambda^{-1}\circ\left((H\circ \bar{T}(l)^{-1})'_2\otimes\left(\bar{I}_{Hom(V,\mathbb{R})}\otimes\left(\overline{(F(k)\circ F(l)^{-1})'\circ P_1}\right)\right)\right)$$

de acuerdo al lema A.4.2.

Por tanto,

$$T(i)\circ T(k)\circ (FH)^{F(k)}\circ \overset{*}{T}(k)\circ \overset{*}{T}(i)^{-1} =$$

$$\Big(\theta_1\circ F(i)\circ F(k)^{-1}\circ \rho_1 + \theta_2\circ\big((F(i)\circ F(k)^{-1})'_2\,\rho_1)\wedge\rho_2\big)\Big)\circ\Big[\theta_1\circ F(k)\circ F(i)^{-1}\circ\rho_1 +$$

$$\theta_2\circ\lambda^{-1}\circ\Big((H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_2\otimes\big(\dot{\bar{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})}\otimes\big(\overline{(F(k)\circ F(i)^{-1})'\circ\rho_1}\big)\big)\Big)\Big]$$

y del corolario A.4.5 tenemos que

$$\lambda^{-1}\circ\Big((H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_2\otimes\big(\dot{\bar{I}}_{Hom(V,\mathbb{R})}\otimes\big(\overline{(F(k)\circ F(i)^{-1})'\circ\rho_1}\big)\big)\Big) =$$

$$\lambda^{-1}\circ(H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_2\circ \dot{i}_{[\overset{*}{f}(i)](\overset{*}{f}(i)\cap\overset{*}{f}(j))}$$

Finalmente

$$T(i)\circ T(k)\circ (FH)^{F(k)}\circ\overset{*}{T}(k)\circ\overset{*}{T}(i)^{-1} = \theta_1^{V\hat{i}}\circ\rho_1^{\Pi V_i}+\theta_2^{V\hat{i}}\circ\lambda^{-1}\circ(H\circ\overset{*}{T}(i)^{-1})'_2\circ\dot{i}_{[\overset{*}{f}(i)](\overset{*}{f}(i)\cap\overset{*}{f}(j))}$$

$$= (FH)^{F(i)}\circ\dot{i}_{[\overset{*}{f}(i)](\overset{*}{f}(i)\cap\overset{*}{f}(j))} \qquad \blacksquare$$

APENDICE A.5

En este apéndice desarrollamos los pasos necesarios para obtener las expresiones para $(E_K\circ T(1)')^{(2)}_{2;1}$, $(E_K\circ T(1)')^{(2)}_{2;2}$ y $(E_K\circ T(1)')^{(2)}_{1}$ a partir de la expresión

$$E_K\circ T(1)' = \frac{1}{2}\left(g^{F(1)}\circ P_1^{V^2}\right)\wedge\left(\theta_1^{V^2}\circ P_2^{V^2}+\theta_2^{V^2}\circ P_2^{V^2}\right)$$

Desarrollamos una regla relativamente nueva de diferenciación para la expresión anterior.

Hacemos $X_1 \equiv L_2^{ac}(V)$; $X_2 \equiv X_3 \equiv V$.

$$h \equiv \frac{1}{2}\, P_1^{\prod_{i\leq 3} X_i}\wedge\left(\theta_1^{V^2}\circ P_2^{\prod_{i\leq 3} X_i}+\theta_2^{V^2}\circ P_3^{\prod_{i\leq 3} X_i}\right) \qquad \in \quad \mathbb{R}^{\prod_{i\leq 3} X_i}$$

$$l = \theta_1^{\prod_{i\leq 3} X_i}\circ g^{F(1)}\circ P_1^{V^2}+\theta_2^{\prod_{i\leq 3} X_i}\circ P_2^{V^2}+\theta_3^{\prod_{i\leq 3} X_i}\circ P_2^{V^2} \quad \in \left(\prod_{i\leq 3} X_i\right)^{[T(1)](T(1))}$$

Entonces $E_K\circ T(1)' = h\circ l$ donde h es trilineal y acotada (por tanto diferenciable) y l es diferenciable.

La diferencial de h es (omitiendo el superíndice $\prod_{i\leq 3} X_i$) ..(i)

$$\begin{aligned} h' = \ & \dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\dot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\dot{\bar{P}}_1+\dot{\bar{\theta}}_2\circledcirc\bar{P}_2+\dot{\bar{\theta}}_3\circledcirc\bar{P}_3\right)+\\ & \dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\dot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\bar{P}_1+\dot{\bar{\theta}}_2\circledcirc\dot{\bar{P}}_2+\dot{\bar{\theta}}_3\circledcirc\dot{\bar{P}}_3\right)+\\ & \dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\dot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\bar{P}_1+\dot{\bar{\theta}}_2\circledcirc\bar{P}_2+\dot{\bar{\theta}}_3\circledcirc\dot{\bar{P}}_3\right)\end{aligned}$$

y de acuerdo a la referencia (3)

$$\begin{aligned} h^{(2)}(w) = \ & \dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\dot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\bar{P}_1+\dot{\bar{\theta}}_2\circledcirc\bar{P}_2+\overline{\ddot{\theta}_3(w(3))}\right)+\dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\dot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\bar{P}_1+\overline{\ddot{\theta}_2(w(2))}+\dot{\bar{\theta}}_3\circledcirc\bar{P}_3\right)\\ & +\dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\dot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\bar{P}_1+\dot{\bar{\theta}}_2\circledcirc\bar{P}_2+\overline{\ddot{\theta}_3(w(3))}\right)+\dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\overline{\ddot{\theta}(w(1))}+\dot{\bar{\theta}}_2\circledcirc\bar{P}_2+\dot{\bar{\theta}}_3\circledcirc\bar{P}_3\right)\\ & +\dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\dot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\bar{P}_1+\overline{\ddot{\theta}_2(w(2))}+\dot{\bar{\theta}}_3\circledcirc\bar{P}_3\right)+\dot{\bar{h}}\circledcirc\left(\overline{\ddot{\theta}_1(w(1))}+\dot{\bar{\theta}}_2\circledcirc\bar{P}_2+\dot{\bar{\theta}}_3\circledcirc\bar{P}_3\right)\end{aligned}$$

De la definición de l tenemos

$$l' = \dot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\left(\left(g^{F(1)}\right)'\circ P_1^{V}\right)\circledcirc\bar{P}_1^{V^2}+\dot{\bar{\theta}}_2\circledcirc\dot{\bar{P}}_2^{V^2}+\theta_3\circledcirc P_2^{V^2}$$

$$l^{(2)} = \ddot{\bar{\theta}}_1\circledcirc\left(\left(\left(g^{F(1)}\right)^{(2)}\circ P_1^{V^2}\right)\circledcirc\bar{P}_1^{V^2}\right)\circledcirc\bar{P}_1^{V^2}$$

<u>Ahora, para calcular</u> $(E_K\circ T(1)')'$ vemos que

(i) En analogía con la diferencial de una función bilineal. Véase (8) pag. 156.

$(E_K \circ T(i)^{-1})' = (h' \circ l) \circ l'$ y sustituyendo las expresiones para h', l y l':

$$(E_K \circ T(i)^{-1})' = \Big[(\dot{\bar{h}} \circ (\dot{\bar{\theta}}_1 \circ \bar{P}_1 + \dot{\bar{\theta}}_2 \circ \bar{P}_2 + \dot{\bar{\theta}}_3 \circ \bar{P}_3) + \dot{\bar{h}} \circ (\dot{\bar{\theta}}_1 \circ \bar{P}_1 + \dot{\bar{\theta}}_2 \circ \bar{P}_2 + \dot{\bar{\theta}}_3 \circ \bar{P}_3) + \dot{\bar{h}} \circ (\dot{\bar{\theta}}_1 \circ \bar{P}_1 + \dot{\bar{\theta}}_2 \circ \bar{P}_2 + \dot{\bar{\theta}}_3 \circ \bar{P}_3)) \circ (\theta_1 \circ g^{F(i)} \circ P_1^{\nu \bar{2}} + \theta_2 \circ P_2^{\nu \bar{2}} + \theta_3 \circ P_2^{\nu \bar{2}}) \Big] \circ \Big[\dot{\bar{\theta}}_1 \circ ((g^{F(i)})' \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \circ \bar{P}_1^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_3 \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} \Big]$$

$$(E_K \circ T(i)^{-1})' = \dot{\bar{h}} \circ (\dot{\bar{\theta}}_1 \circ ((g^{F(i)})' \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \circ \bar{P}_1^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2 \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_3 \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}}) + \dot{\bar{h}} \circ (\dot{\bar{\theta}}_1 \circ (g^{F(i)} \circ P_1^{\nu\bar{2}}) + \dot{\bar{\theta}}_2 \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_3 \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}}) + \dot{\bar{h}} \circ (\dot{\bar{\theta}}_1 \circ (g^{F(i)} \circ P_1^{\nu\bar{2}}) + \dot{\bar{\theta}}_2 \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_3 \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}})$$

Sustituyendo $\dot{\bar{h}} = \frac{1}{2} \bar{P}_1 \cdot (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2 + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_3)$ tenemos

$$(E_K \circ T(i)^{-1})' = \frac{1}{2} (((g^{F(i)})' \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \circ \bar{P}_1^{\nu\bar{2}}) \circ (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}}) + \frac{1}{2} \cdot (\overline{g^{F(i)} \circ P_1^{\nu\bar{2}}}) \circ (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}}) + \frac{1}{2} (\overline{g^{F(i)} \circ P_1^{\nu\bar{2}}}) \circ (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}})$$

$$\underline{\underline{(E_K \circ T(i)^{-1})'}} = \frac{1}{2} (((g^{F(i)})' \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \circ \bar{P}_1^{\nu\bar{2}}) \circ (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}}) + (\dot{g}^{F(i)} \circ P_1^{\nu\bar{2}}) \circ (\dot{\bar{\theta}}_1^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} \circ \bar{P}_2^{\nu\bar{2}})$$

Para las segundas diferenciales parciales vemos que

$$(E_K \circ T(i)^{-1})^{(2)}(w) = (h \circ l)^{(2)}(w) = (h^{(2)}(l(w)) \circ l'(w)) \circ \dot{\overline{l'(w)}} + \dot{\overline{h'(l(w))}} \circ l^{(2)}(w)$$

$$(E_K \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2ij}(w) = ((E_K \circ T(i)^{-1})^{(2)}(w) \circ \dot{\bar{\theta}}_j^{\nu\bar{2}}) \circ \theta_j^{\nu\bar{2}} \quad \forall j \in \bar{2}, \quad \forall w \in [T(i)](T f(i))$$

donde

$$(E_K \circ T(i)^{-1})^{(2)}(w) \circ \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}} = (h^{(2)}(l(w)) \circ \dot{\overline{l'(w)}} \circ \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}}) \circ l'(w) + \dot{\overline{h'(l(w))}} \circ l^{(2)}(w) \circ \theta_2^{\nu\bar{2}}$$

$$= (h^{(2)}(l(w)) \circ \dot{\bar{\theta}}_2^{\nu\bar{2}}) \circ l'(w) \quad (\theta_2 = \theta_2{}^{\pi \times 1}_{i\in\bar{2}})$$

$$(E_K \circ T(1)^{-1})^{(2)}(w) \odot \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}} = (\dot{\bar{h}} \odot (\dot{\bar{\theta}}_1 \odot \bar{P}_1 + \bar{\bar{\theta}}_2 + \overline{\ddot{\theta}_3(I(w)(3))}) +$$

$$\dot{\bar{h}} \odot (\overline{\ddot{\theta}_1(I(w)(1))} + \dot{\bar{\theta}}_2 + \dot{\bar{\theta}}_3 \odot \bar{P}_3)) \circ I'(w)$$

$$= \dot{\bar{h}} \odot (\dot{\bar{\theta}}_1 \odot ((g^{F(1)})'(w(1)) \circ P_1^{v\bar{z}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}} + \overline{\theta_3(w(2))}) +$$

$$\dot{\bar{h}} \odot (\overline{\ddot{\theta}_1(g^{F(1)}(w(1)))} + \dot{\bar{\theta}}_2 + \dot{\bar{\theta}}_3 \odot \bar{P}_2^{v\bar{z}})$$

y sustituyendo $\dot{\bar{h}} = \frac{1}{2} \dot{\bar{P}}_1 \odot (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} \odot \dot{\bar{P}}_2 + \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}} \odot \dot{\bar{P}}_3)$

$$(E_K \circ T(1)^{-1})^{(2)}(w) \odot \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}} = \frac{1}{2}((g^{F(1)})'(w(1)) \circ P_1^{v\bar{z}}) \odot (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}} \odot \bar{P}_2^{v\bar{z}})$$

$$+ \frac{1}{2} \overline{\dot{g}^{F(1)}(w(1))} \odot (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}} \odot \bar{P}_2^{v\bar{z}})$$

Entonces,

$$((E_K \circ T(1)^{-1})^{(2)}(w) \odot \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}}) \circ \theta_1^{v\bar{z}} = (g^{F(1)})'(w) \odot (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \overline{\ddot{\theta}_2(w(2))})$$

$$((E_K \circ T(1)^{-1})^{(2)}(w) \odot \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}}) \odot \theta_2^{v\bar{z}} = g^{F(1)}(w) \odot (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}}) \quad \forall\, w \in [T(1)](\gamma f(1))$$

Resumiendo:

$$(E_K \circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} = (g^{F(1)} \circ P_1^{v\bar{z}}) \odot (\ddot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \ddot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}})$$

$$(E_K \circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;1} = ((g^{F(1)})' \circ P_1^{v\bar{z}}) \odot (\ddot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} + \overline{\overline{\dot{\theta}_2^{v\bar{z}}}})$$

$$(E_K \circ T(1)^{-1})'_1 = \frac{1}{2}((g^{F(1)})' \circ P_1^{v\bar{z}}) \odot (\dot{\bar{\theta}}_1^{v\bar{z}} \odot \dot{\bar{P}}_2^{v\bar{z}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{v\bar{z}} \odot \dot{\bar{P}}_2^{v\bar{z}})$$

APENDICE A.6

En este apéndice se presenta el desarrollo de la expresión (5.2) a partir de la condición $Y \lrcorner \omega_L = -dE_L$ de la definición (5.1). Para su obtención necesitamos las expresiones para

$$(E_L \circ T(1)^{-1})' = (A_L \circ T(1)^{-1})' - (L \circ T(1)^{-1})'$$

Siendo $A_L \circ T(1)^{-1} = (L \circ T(1)^{-1})'_2 \wedge P_2^{\nu \bar{z}}$, tenemos (omitiendo superíndices) ..(i)

$$(A_L \circ T(1)^{-1})' = (L \circ T(1)^{-1})'_2 \circledcirc \dot{\bar{P}}_2 + ((L \circ T(1)^{-1})'_2)' \circledcirc \bar{P}_2$$

$$= (L \circ T(1)^{-1})'_2 \circledcirc \dot{\bar{P}}_2 + (((L \circ T(1)^{-1})'_2)'_1 \circledcirc \dot{\bar{P}}_1) \circledcirc \bar{P}_2$$
$$+ (((L \circ T(1)^{-1})'_2)'_2 \circledcirc \dot{\bar{P}}_2) \circledcirc \bar{P}_2$$
$$= (L \circ T(1)^{-1})'_2 \circledcirc \dot{\bar{P}}_2 + ((L \circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \dot{\bar{P}}_1) \circledcirc \bar{P}_2 + ((L \circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \dot{\bar{P}}_2) \circledcirc \bar{P}_2$$

Además,

$$(L \circ T(1)^{-1})' = (L \circ T(1)^{-1})'_1 \circledcirc \dot{\bar{P}}_1 + (L \circ T(1)^{-1})'_2 \circledcirc \dot{\bar{P}}_2$$

Luego

$$(E_L \circ T(1)^{-1})' = (L \circ T(1)^{-1})'_2 \circledcirc \dot{\bar{P}}_2 + ((L \circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \dot{\bar{P}}_1) \circledcirc \bar{P}_2 +$$
$$((L \circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \dot{\bar{P}}_2) \circledcirc \bar{P}_2 - (L \circ T(1)^{-1})'_1 \circledcirc \dot{\bar{P}}_1 - (L \circ T(1)^{-1})'_2 \circledcirc \dot{\bar{P}}_2$$
$$= ((L \circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \dot{\bar{P}}_1) \circledcirc \bar{P}_2 + ((L \circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \dot{\bar{P}}_2) \circledcirc \bar{P}_2$$
$$- (L \circ T(1)^{-1})'_1 \circledcirc \dot{\bar{P}}_1$$

Para determinar la representación local de $Y \lrcorner \omega_L$, necesitamos calcular (ii)

$$\omega_L^{T(1)} = (\omega^{\check{T}(1)} \circ \check{T}(1) \circ FL \circ T(1)^{-1}) \circledcirc \Big(\sum_{j \in \bar{z}} \dot{\bar{\Theta}}_j^{(\pi \nu_{\bar{z}}^{i})^{\bar{z}}} \circledcirc (\check{T}(1) \circ FL \circ T(1)^{-1})' \circledcirc \dot{\bar{P}}_j^{(\nu^{\bar{z}})^{\bar{z}}}$$

(i) Recuérdese que $(f \wedge g)' = f \circledcirc g' + f' \circledcirc \bar{g}$

(ii) La representación local de ω, $\omega^{\check{T}(1)}$ puede verse en la pag. 39.

$$\omega_L^{T(i)} = ((\dot{\bar{p}}_2^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(\pi v_i)_{i\in 2}^{\bar{2}}}) \wedge (\dot{\bar{p}}_1^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{(\pi v_i)_{i\in 2}^{\bar{2}}}) - (\dot{\bar{p}}_2^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{(\pi v_i)_{i\in 2}^{\bar{2}}}) \wedge (\dot{\bar{p}}_1^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(\pi v_i)_{i\in 2}^{\bar{2}}})) \otimes$$

$$(\dot{\bar{\theta}}_1^{(\pi v_i)_{i\in 2}^{\bar{2}}} \otimes (\dot{T}(i) \circ FL \circ T(i)^{-1})' \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{2}}} + \dot{\bar{\theta}}_2^{(\pi v_i)_{i\in 2}^{\bar{2}}} \otimes (\dot{T}(i) \circ FL \circ T(i)^{-1})' \otimes \dot{\bar{p}}_2^{(v\bar{2})^{\bar{2}}})$$

$$= (\dot{\bar{p}}_2^{(\pi v_i)}{}_{i\in 2} \otimes (\dot{T}(i) \circ FL \circ T(i)^{-1})' \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{2}}}) \wedge (\dot{\bar{p}}_1^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes (\dot{T}(i) \circ FL \circ T(i)^{-1})' \otimes \dot{\bar{p}}_2^{(v\bar{2})^{\bar{2}}})$$

$$- (\dot{\bar{p}}_2^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes (\dot{T}(i) \circ FL \circ T(i)^{-1})' \otimes \dot{\bar{p}}_2^{(v\bar{2})^{\bar{2}}}) \wedge (\dot{\bar{p}}_1^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes (\dot{T}(i) \circ FL \circ T(i)^{-1})' \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{2}}})$$

donde (i)

$$\dot{\bar{p}}_1^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes (\dot{T}(i) \circ FL \circ T(i)^{-1})' = \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}}$$

$$\dot{\bar{p}}_2^{\pi v_i}{}_{i\in 2} \otimes (\dot{T}(i) \circ FL \circ T(i)^{-1})' = (L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} + (L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{v\bar{2}}$$

Luego

$$\omega_L^{T(i)} = (((L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} + (L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{v\bar{2}}) \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{2}}}) \wedge (\dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{(v\bar{2})^{\bar{2}}})$$

$$- (((L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} + (L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{v\bar{2}}) \otimes \dot{\bar{p}}_2^{(v\bar{2})^{\bar{2}}}) \wedge (\dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{2}}})$$

Entonces $\quad (Y \lrcorner \omega_L)^{T(i)} = \omega_L^{T(i)} \otimes (\dot{\bar{\theta}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{2}}} \otimes \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)} + \dot{\bar{\theta}}_2^{(v\bar{2})^{\bar{2}}} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{1}}})$

$$= (((L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} + (L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{v\bar{2}}) \otimes \dot{\bar{Y}}^{T(i)}) \wedge (\dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{(v\bar{2})^{\bar{1}}})$$

$$- (((L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} + (L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{v\bar{2}}) \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{1}}}) \wedge (\dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} \otimes \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)})$$

$$= [((L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \otimes \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)}) \wedge \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}} + ((L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \otimes \dot{\bar{Y}}_2^{T(i)}) \otimes \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}}$$

$$- ((L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;1} \otimes \dot{\bar{p}}_1^{v\bar{2}}) \wedge \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)} - ((L \circ T(i)^{-1})^{(2)}_{2;2} \otimes \dot{\bar{p}}_2^{v\bar{2}}) \wedge \dot{\bar{Y}}_1^{T(i)}] \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{1}}}$$

Finalmente, $\quad (Y \lrcorner \omega_L)^{T(i)} = -(dE_L)^{T(i)} = -(E_L \circ T(i)^{-1})' \otimes \dot{\bar{p}}_1^{(v\bar{2})^{\bar{1}}}$

$$\Rightarrow$$

(i) Véase la expresión (4.4) pag. 60

$$((L\circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \bar{\dot{Y}}_1^{T(1)}) \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{V\bar{z}} + ((L\circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{\dot{Y}}_2^{T(1)}) \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{V\bar{z}}$$

$$- ((L\circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{V\bar{z}}) \circledcirc \bar{\dot{Y}}_1^{T(1)} - ((L\circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{\dot{P}}_2^{V\bar{z}}) \circledcirc \bar{\dot{Y}}_1^{T(1)} =$$

$$- \left[((L\circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;2} \circledcirc \bar{\dot{P}}_2^{V\bar{z}}) \circledcirc \bar{\dot{P}}_2^{V\bar{z}} + ((L\circ T(1)^{-1})^{(2)}_{2;1} \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{V\bar{z}}) \circledcirc \bar{\dot{P}}_2^{V\bar{z}} - (L\circ T(1)^{-1})'_1 \circledcirc \bar{\dot{P}}_1^{V\bar{z}} \right]$$

que es la expresión (5.5)

EPILOGO

Las ideas que hemos presentado son el resultado de dos años de acumular información e intercambiar ideas. Es natural que esto se haya reflejado en la tesis misma y así quisieramos consignarlo, reafirmando implícitamente que el "trabajo científico" es el resultado de un proceso social (Materialismo experimental).

En cuanto al trabajo en sí, específicamente quisiera resaltar tres aspectos que considero que han surgido motivados por esta tesis.

Primeramente, la noción de estado natural de movimiento, quizá la más reciente y por tanto la menos acabada, es extremadamente rica desde un punto de vista conceptual y es de aquí de donde debe partir una formulación más depurada que ésta de la Mecánica Analítica (incluyendo a los sistemas no estacionarios) e inclusive, me atrevo a afirmar, en toda la rama de la física cuyo objeto de descripción sea la posición de un sistema físico.

En segundo lugar, la herramienta disponible para proceder al estudio de sistemas con una infinidad de grados de libertad, especialmente campos, está desarrollado en gran medida. El paso es natural hacia el estudio del electromagnetismo y de la Mecánica Cuántica.

Lo último y quizá lo más productivo sería estudiar sistemas con muchos grados de libertad desde un punto de vista topológico y diferenciable. En concreto cuestiones de hidrodinámica y estabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) Abraham, R. - Marsden J.E.
1978 Foundations of Mechanics. Benjamin/Cummings.

(2) Arnold, V.I.
1978 Mathematical Methods of Classical Mechanics.
Graduate Texts in Mathematics. Springer - Verlag.

(3) Delgado, J.
Proposición sobre la diferenciabilidad de $\omega \circledcirc G$ con $\omega \in (L_n^{ac}(V_1))^E$ y $G \in ((V^n)^{(X^{\overline{n-k}})})^E$. Preimpresión.
Comunicaciones Internas. Depto. de Mat. UNAM. Serie: Comunicaciones Técnicas e Investigación.

(4) Proposición sobre la diferenciabilidad de orden superior de $\omega \circledcirc G$ con $\omega \in (L_n^{ac}(V_1))^E$ y $G \in ((V^n)^{(X^{\overline{n-k}})})^E$. Preimpresión.
Com. Int. Depto. Mat. UNAM. Serie: Comunicaciones técnicas e investigación.

(5) Eisenbud, L.
1958. On the Classical Laws of Motion. Am Jour. of Phys. Vol. 26 pags. 144- 159.

(6) Hu Tze Tsen.
1966 Introducttion to General Topology.

(7) Landau, L.D.
1965 Mecánica. Roverté.

(8) Loomis, L.H. - Sternberg, S.
1968 Advanced Calculus. Addison-Wesley.

(9) Lang, S.
1972 Differential Manifolds. Addison-Wesley.

(10) Mackey, G. W.
1963 Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.
Benjamin-Cimmings.

(11) Marsden, J.
1974 Applications of Global Analysis in Mathematical Physics.
Publish or Perish.

(12) Marsden, J.E. – Chernoff, P. R.
1974 Properties of Infinite Hamiltonian Systems. Lectures Notes in Mathematics. Springer Verlag.

(13) Rosales, M. F.
1979 Notas de Cálculo Exterior, Segunda Parte. Variedades Diferenciables. Preimpresión. Com. Int. Depto. Mat. UNAM. Serie: Monografías.

(14) 1979 Notas de Cálculo Exterior. Primera Parte. Algebra Exterior. Com. Int. Depto. Mat. UNAM. no. 5. Serie: Monografías.

(15) 1978 Relación entre las Descripciones Clásicas del movimiento de una partícula desde sistemas de referencia en movimiento relativo. (Expresión de Coriolis). Com. Int. Depto. Mat. UNAM. no. 39. Serie: Comunicaciones Técnicas e Investigación.

(16) 1980 Proposiciones Sobre la diferenciabilidad de orden Superior para $g \circledcirc f$ y $g \wedge h$; donde $g \in Hom(X,Y)^A$, $f \in Hom(W,X)^B$ y $h \in X^C$. Com. Int. Depto. Mat. UNAM. no. 3. Serie: Comunicaciones Técnicas e Investigación.

(17) Rosales, M.F. – Delgado, J.
1981 La Derivada Exterior de Formas Diferenciales en Variedades de Dimensión Arbitraria. Preimpresión: Com. Int. Depto. Mat. UNAM. Serie: Comunicaciones Técnicas e Investigación.

(18) Rudin, W.
1973 Functional Analysis. McGraw – Hill.

(19) Sternberg, S.
1977 Differential Geometrical Methods in Math. Physics. Vol II. Lectures Notes in Mathematics. Springer Verlag.

(20) Sudarshan, M.
Classical Mechanics: A Modern Perspective. Wiley.

(21) Varadarajan, V. S.
1973 The Geometry of Quantum Theory. Van Nostrand.

(22) Warner, F. W.
1971 Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. SFC.

(23) Wheeler, J.A. - Thorne, S.K. - Misner, W.Ch.
1973 Gravitation. Freeman.

(24) Wheeler, J.A - Taylor, F.E.
1963 Spacetime Physics. Freeman.