Tej. 6

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTERPRETACION Y CALCULO DE CURVAS DE SONDEOS ELECTRICOS VERTICALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

GUILLERMO CAMPOS COY

MEXICO, D. F. NOVIEMBRE DE 1983

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTERPRETACION Y CALCULO DE CURVAS DE SONDEOS ELECTRICOS VERTICALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

GUILLERMO CAMPOS COY

MEXICO, D. F. NOVIEMBRE DE 1983

INDICE

INTRODUCCION

La explotación racional de los recursos naturales es de vital importancia para México, país que cuenta con una gran cantidad de éstos. Como es sabido la mayor parte de los recursos naturales no renobables se encuentran en el subsuelo, éste es el caso por ejemplo de las riquezas minera y petrolera, esta última la principal fuente de divisas para nuestro país. De no menor importancia son algunos recursos renobables como los mantos acuíferos cuyo aprovechamiento es indispensable en la producción de alimentos; o los yacimientos geotérmicos, importante fuente de energía.

Localizar estas riquezas y estimar su cuantía es el principal objetivo de la geofísica de exploración.

Para poder desentrañar los secretos del subsuelo, el geofísico trata de encontrar cambios (anomalías) en las propiedades físicas de éste que le puedan dar alguna información sobre su posible estructura y composición. Algunas de las propiedades físicas de las que se vale son: la densidad, las propiedades magnéticas, las propiedades elásticas y las propiedades eléctricas.

Los métodos que hacen uso de la densidad o mejor dicho de los contrastes de densidad en el subsuelo, son conocidos como métodos gravimétricos.

Los que hacen uso de los contrastes en las propiedades magnéticas son los llamados métodos magnéticos.

Los métodos sísmicos por su parte, utilizan en su investigación los cambios en las propiedades elásticas del medio.

Los métodos eléctricos como su nombre lo indica hacen uso de las propiedades eléctricas del subsuelo para tratar de determinar la configuración de éste.

Como en el resto de los métodos, en los métodos eléctricos existen dos formas de atacar el problema de obtener la información deseada a partir de los datos observados en el campo. Una es la resolución del problema directo y la otra, resolver el problema inverso. Por resolver el problema directo se entiende el poder determinar, para un tipo dado de subsuelo, qué tipo de respuesta se espera medir, en tanto que resolver el problema inverso consiste en tratar de saber que tipo de modelo sería el que ha generado una cierta respuesta obtenida.

Ahora bien, el subsuelo es en general un medio muy complicado ya que presenta heterogeneidades en todas direcciones, sin embargo existen regiones como por ejemplo las zonas sedimentàrias que muestran una estructura estratificada esto es, capas horizontales sobrepuestas una sobre la otra, cada una con propiedades físicas mas o menos uniformes. En este tipo de ambientes geológicos y en algunos otros un poco más complicados, tomando ésto como primera aproximación resulta apropiado imaginar al subsuelo a través de un modelo de capas horizontales de dimensión lateral infinita, con propiedades eléctricas completamente homogéneas e isotrópicas. A este tipo de modelo de subsuelo que sólo permite variación en las propiedades eléctricas con la profundidad se le conoce como modelo unidimensional, en contraste con el bidimensional que considera variaciones en dos direcciones y el tridimensional que considera cambios en las tres direcciones espaciales.

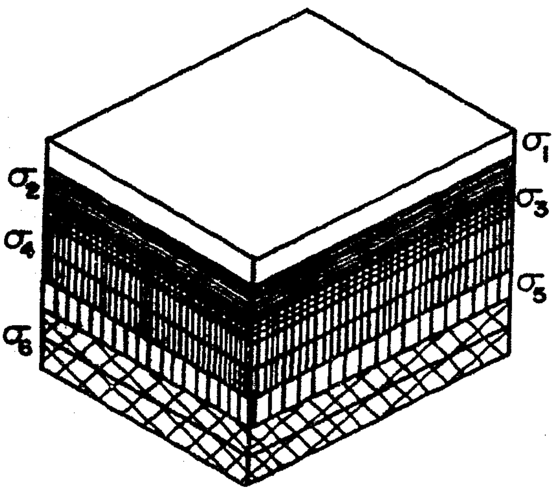


Fig. 1. a) Modelo unidimensional, cada una de las capas posee propiedades físicas homogéneas.

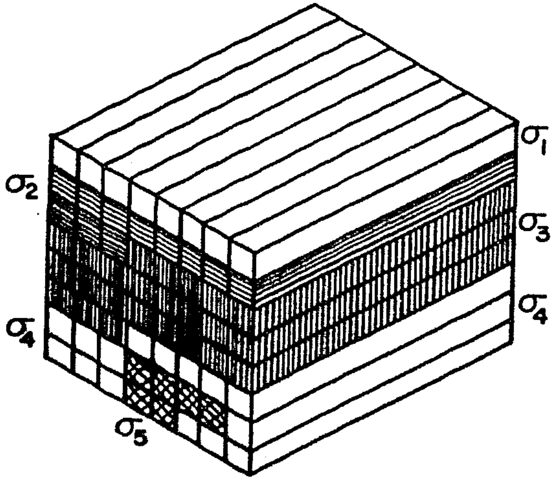


Fig 1. b) Modelo bidimensional, las propiedades físicas ya no se conservan en toda la capa, sino en cada uno de los paralelepípedos de largo infinito.

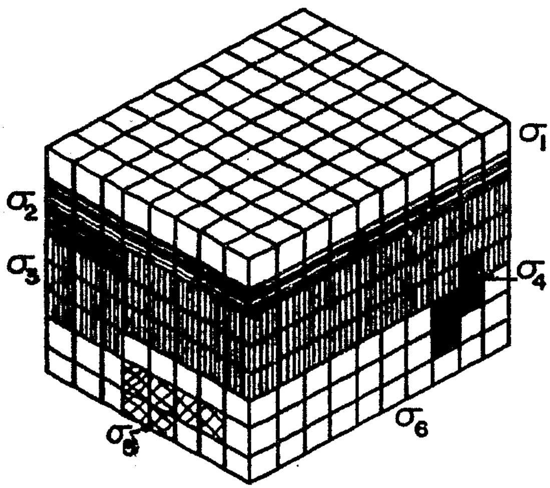


Fig. 1. c) Modelo tridimensional, considera cambios en el subsuelo en cualquier dirección.

El objetivo de este trabajo es presentar un nuevo método para resolver el problema directo en el caso de modelado unidimensional del subsuelo para métodos eléctricos de corriente contínua (Sondeos Eléctricos Verticales S.E.V.). La novedad estriba básicamente en la forma de calcular el valor numérico de la integral de Stefanescu que aparece en la fórmula de la resistividad aparente. Esto se logra aproximando por tramos la función característica $K_i^{n}(\lambda)$ mediante el uso de parábolas cúbicas de tipo spline numérico. La integral mencionada, queda entonces en términos de integrales cerradas.

El método ha mostrado superioridad con respecto a otros, (especialmente para modelos con altos contrastes de resistividad y espesor) ya que:

1.- Prácticamente no aparece ruido numérico, a veces muy notorio en otros métodos.

2.- Es bastante eficaz para dar información acerca de las capas más profundas del modelo, capas que incluso otros métodos no pueden resolver.

3.- Es lo suficientemente rápido para permitir el ajuste de curvas de Sondeos Eléctricos Verticales de campo a curvas de modelos teóricos.

4.- Permite simular las separaciones entre electrodos de corriente y de potencial de igual forma a su disposición en el trabajo de campo. (Esta es su principal ventaja sobre los métodos que utilizan la teoría de filtro lineal).

5.- Permite obtener curvas de S.E.V. para cualquier arreglo electródico usado en el campo, utilizando para ésto el mismo programa.

6.- Proporciona una serie de coeficientes que permitirán el desarrollo de una metodología de ajuste semiautomático de curvas de S.E.V. de campo a curvas teóricas.

Antecedentes

Los intentos para interpretar cuantitativamente los datos de campo obtenidos a través de Sondeos Eléctricos Verticales (S. E. V.) datan desde los años 30's. La idea de proponer modelos de subsuelo en capas horizontales con este fin, fue dada a conocer primeramente por Stefanescu y Schlumberger (1930). A partir de la publicación por ellos presentada ha habido una gran cantidad de publicaciones que proponen diferentes formas de integrar la función de resistividad aparente propuesta por los mencionados autores. Estas publicaciones pueden clasificarse de acuerdo al artificio de integración usado, en varios grupos.

A). - Artificios que utilizan el método de las imágenes.

La primera publicación dando a conocer este artificio es debida a Ehrenburg y Watson, (1932). Orellana y Mooney (1966) publicaron una colección de curvas maestras de resistividad aparente siendo Mooney y otros (1966) quienes publicaron detalladamente el método utilizado para el cálculo. Van Dam (1965) publicó la forma de aumentar la precisión del artificio de integración, el cual fue capitalizado por Rijksaaterstaat (1969).

B). - Artificios basados en la aproximación de la función kernel a funciones que permiten integración analítica.

Flathe (1965) y la Compagnie Generale de Geophysique (1955) dieron a conocer en sus respectivas publicaciones este artificio de integración. La Compagnie Generale de Geophysique publicó además una serie de curvas maestras cuyo uso fue muy difundido.

C). - Artificios basados en la aproximación de la función kernel por series integrables analíticamente.

Glogovsky y Katz (1960) propusieron aproximar la función kernel en series de potencias de la mitad de la diferencia relativa entre las resistividades de las capas adjuntas.

Onodera (1963) publicó un método que consiste en aproximar la función kernel en series de polinomios ortogonales.

Mooney y otros (1966), Argelo (1967), Ushijima y otros (1977) proponen métodos que básicamente consisten en descomponer la función kernel en series de potencias.

Lima (1979) propuso considerar el caso de un modelo de N capas agrupándolo en pseudomodelos de dos capas, y descomponer la función kernel de este pseudomodelo en series de potencias.

D). - Artificios de integración numérica.

Mooney y Wetzel (1956) propusieron aproximar por tramos la función kernel a polinomios cuadráticos y resolver analíticamente las integrales resultantes.

E). - Artificios que utilizan la teoría del Filtro Lineal.

Gosh (1971) introdujo la aplicación de la teoría del filtro lineal al cálculo de curvas de resistividad aparente. Este autor abrió una nueva escuela que ha tenido éxito y es la escuela dominante en la actualidad.

Koefoed (1979) hace una muy buena descripción y revisión de todo lo que hasta 1979 se había hecho en este sentido.

Aparte de estos esfuerzos dirigidos a la solución de la integral de resistividad aparente, el cálculo de curvas maestras de S. E. V., también se ha intentado por métodos numéricos con el fin de dar solución a la ecuación diferencial que gobierna el flujo de corriente eléctrica en un medio no uniforme Mufti (1960).

CAPITULO I

TEORIA DE SONDEOS ELECTRICOS VERTICALES.

En este capítulo se hace una breve descripción de la resistividad eléctrica de las rocas y se deducen las ecuaciones fundamentales que rigen la teoría de los sondeos eléctricos verticales.

I.A Resistividad de las Rocas

Para poder entender e interpretar los resultados de mediciones realizadas con métodos eléctricos, es necesario tener alguna idea sobre las propiedades eléctricas de las rocas y de los minerales que las constituyen. Estas propiedades se expresan básicamente por medio de dos magnitudes físicas que son:

a).- La conductividad eléctrica σ o su inversa la resistividad $\rho = \frac{1}{\sigma}$

b).- La constante dieléctrica ε Orellana(1982).

La unidad de ρ es el ohm*metro y la de σ el mho/metro donde evidentemente 1 mho = 1 / ohm.

En el caso de los métodos de corriente contínua y aún en el caso de campos y corrientes variables, en el intervalo de frecuencias de interés geofísico, la magnitud de mayor interés es la conductividad.

La conductividad en los materiales es debida a la presencia en estos de portadores de carga capaces de desplasarse. Los portadores pueden ser de dos tipos: electrones o iones. Los cuerpos con conductividad electrónica se clasifican a su vez en dos grupos: el de los conductores propiamente dichos o metales y el de los semiconductores.

A los cuerpos con conductividad iónica se les conoce como electrolitos. Dichos electrolitos pueden estar en estado sólido o líquido. Un electrolito puede considerarse en general como una solución conductora en la que el soluto proporciona cargas (iones) que se mueven a través del solvente. En el caso de los electrolitos sólidos la conductividad que presentan es en la gran mayoría de los casos bajísima, por lo que se les considera como aislantes (dieléctricos). Sin embargo hay sustancias sólidas que presentan electrólisis. En ellas los iones se mueven a través de la malla del "solvente" y hay consecuentemente un transporte de carga (i.e. corriente) apreciable.

Electrolitos Sólidos

Con excepción de los minerales metálicos, la mayoría de los minerales constituyentes de las rocas son materiales dieléctricos o aislantes cuya conductividad en forma cristalina pura si acaso puede medirse se encuentra en un intervalo entre 1.0 E -12 y 1.0 E -17 mho/metro Grant & West(1965). Esta extremadamente baja conductividad es posible, gracias a que las agitaciones térmicas pueden hacer que un ión se aleje tanto de su posición de equilibrio en la red cristalina que sea separado definitivamente de ella, quedando libre para desplasarse hasta encontrar un nuevo lugar vacante.

Estos movimientos son evidentemente aleatorios sin embargo en presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ existirá una dirección preferencial de desplazamiento paralela al campo, y por lo tanto habrá paso de corriente. Los minerales más abundantes en la naturaleza pertenecen al grupo de los dieléctricos, entre ellos podemos citar los siguientes:

Silicatos en general
Sales en general
Feldespatos
Calcita
Olivino
Micas

Parkhomenko (1967)

Semiconductores

Los semiconductores son materiales no metálicos en los cuales la conducción es de tipo electrónico. En ellos las dos bandas energéticas superiores, llamadas respectivamente banda de valencia y banda de conducción están separadas por una banda de niveles eneregéticos prohibidos a los electrones. El movimiento libre necesario para el paso de corriente sería posible si los electrones presentes en la banda llena de valencia pasaran a la banda de conducción. Esto puede conseguirse dando (a través de un aumento de la temperatura) suficiente energía a estos como para remontar la zona prohibida. Los semiconductores pues, presentan conductividad creciente con la temperatura (conductividad intrínseca).

Existe sin embargo otro efecto mucho más importante que el antes citado, el de la llamada conductividad extrínseca. Esta es debida a la presencia de impuresas en la red cristalina del material, estas impurezas sustituyen algunos átomos por otros de valencia diferente.

Los niveles energéticos de éstos pueden quedar dentro de la zona prohibida, y muy cerca del límite inferior de la banda de conducción, o del superior de la banda de valencia. De forma tal que si se aplica un campo exterior $\vec{E}$ un electrón puede pasar con facilidad de la banda de valencia a la de conducción (Orellana (1972)).

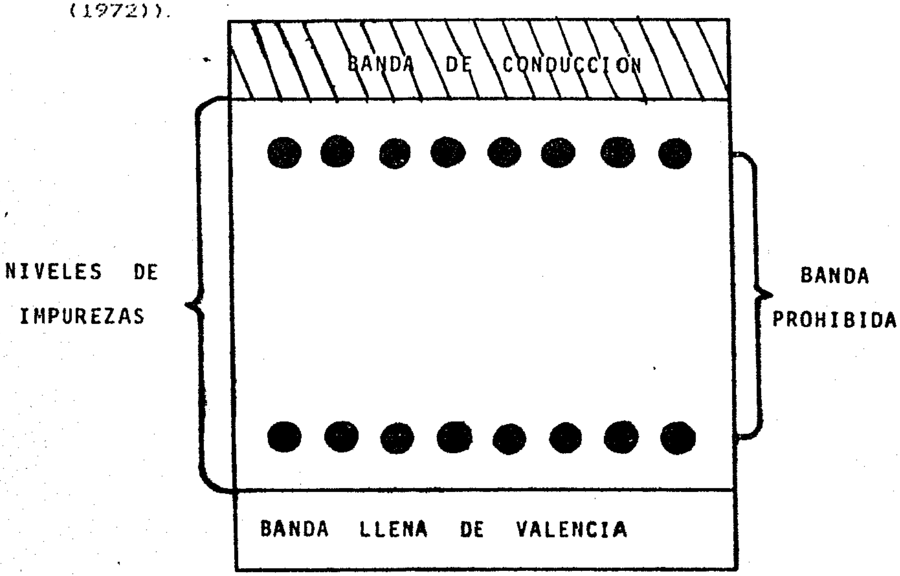


Fig. (1.1) **Niveles energéticos en semiconductores.**

La resistividad de los semiconductores depende de su contenido de impuresas, a veces en grado extremo. El germanio puro por ejemplo, aumenta su conductividad en 3 órdenes de magnitud con sólo adicionarle arsénico en una parte por millón. Algunos ejemplos de minerales semiconductores son los siguientes:

Mineral	Intervalo de Resistividades
Calcopirita ($Fe_2S_3Cu_2S$)	$(150 - 9000) * 10^{-6}$
Pirita (FeS_2)	$(1.2 - 600) * 10^{-3}$
Pirrotita (Fe_7S_8)	$(2 - 160) * 10^{-6}$
Allemonita ($SbAs_3$)	$(70 - 60000)$
Ilmenita ($FeTiO_3$)	$(0.001 - 4)$

Keller (1966)

Metales

La más grande conductividad que puede encontrarse en los elementos sólidos de una roca es la que se presenta en los minerales metálicos o conductores propiamente dichos. La alta conductividad de los metales, así como otras propiedades metálicas, es debida a la enorme cantidad de electrones libres o electrones de valencia, los cuales pueden moverse entre los átomos de la red cristalina, sin vinculación a ninguno determinado. Puede decirse que los conductores están constituídos por una red regular de iones positivos, entre los cuales se mueve un gas electrónico. Existen muchos minerales conductores, pero muy pocos se encuentran en cantidad suficiente como para cambiar de manera apreciable las propiedades eléctricas de la roca en que se hallan. Los minerales que ocasionalmente se encuentran en cantidad suficiente como para aumentar la conductividad de grandes volúmenes de roca son: la magnetita, la hematita especular, el grafito, la pirita y la pirrotita. Metales tales como el platino, iridio, osmio y hierro ocurren en forma elemental pero son extremadamente raros. Orellana (1972).

Conducción por Electrolitos Líquidos

Para la mayoría de las rocas en la superficie terrestre, la conducción es de tipo iónico, siendo el medio conductor una solución de sales comunes, distribuida a través de la estructura porosa de la roca. La conductividad de una roca con agua dependerá de la cantidad de agua presente, la salinidad del agua, y la forma en que ésta esté distribuída en la matriz rocosa. Las propiedades eléctricas de una roca con contenido de agua deben ser descritas en términos de las propiedades eléctricas del electrolito presente. Aún las rocas más compactas que puedan encontrarse cerca de la superficie contienen suficientes cantidades de agua como para permitir cierto paso de corriente.

Cuando una sal es disuelta en agua, los iones constituyentes de ésta, son separados, quedando libres para moverse independientemente en la solución. Cuando un campo eléctrico es aplicado a la solución, los cationes (iones positivos) son acelerados hacia el polo negativo, en tanto que los aniones se dirigen hacia el polo positivo. La conductividad de las rocas medida in situ es hasta 10 órdenes de magnitud mayor que la conductividad medida en rocas desecadas en el laboratorio. Grant y West (1972).

I.B Ecuaciones Fundamentales

Con el fin de explicar el comportamiento eléctrico de un medio estratificado se comenzará por considerar el caso más sencillo, de un medio homogéneo de espesor infinito. Este semiespacio tendrá una resistividad ρ_1, en tanto que el semiespacio complementario que representará a la atmósfera tendrá una resistividad infinita.

En el semiespacio de resistividad ρ_1 se establecerá un campo eléctrico $\vec{E}$ usando para ello un generador de corriente conectado al medio a través de dos electrodos A y B (denominados de corriente) Fig (1.2)

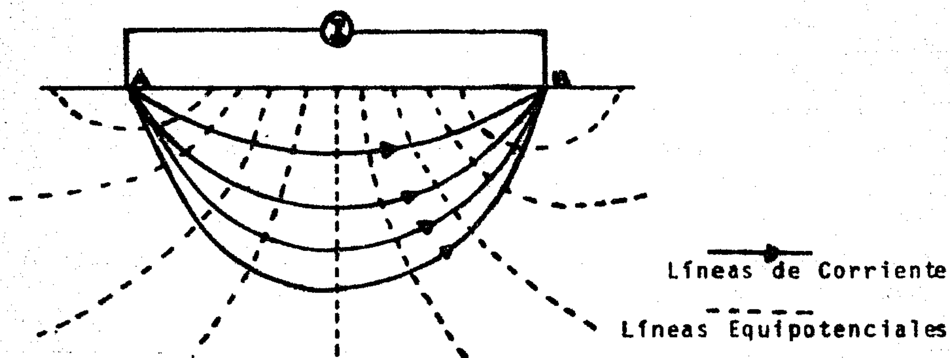


Fig. (1.2) Paso de corriente a través de un medio homogeneo.

Para establecer las leyes del fenómeno que se está considerando se parte de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \rho/\varepsilon \qquad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad (1.1b)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (1.1c)$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu \sigma \bar{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad (1.1d)$$

Lorrain y Corson (1970).

Ya que se esta considerando una fuente de corriente contínua, el fenómeno a describir será estacionario, lo que implica que las parciales con respecto al tiempo se anulen. La ecuación (1.1c) se convierte entonces en:

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

Si el rotacional de un campo vectorial es cero, entonces dicho campo es un campo conservativo y puede expresarse como el gradiente de un campo escalar. Esto es:

$$\bar{E} = -\nabla V \qquad (1.2)$$

Por otro lado, deberá cumplirse la ley de Ohm, que escrita en terminos de los vectores J y E toma la forma:

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \tag{1.3}$$

En ningún punto del semiespacio conductor existen fuentes o sumideros de carga, excepto en los electrodos A y B (fig 1.2). En cualquier región que no encierre a éstos se tendrá:

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0 \tag{1.4}$$

Sustituyendo la ecuación (1.2) en (1.3) y a su vez ésta en (1.4) se obtiene, para una región en que no existan electrodos de corriente la ecuación:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{1.5}$$

Esta es la ecuación de Laplace válida en toda región del semiespacio $(\mathcal{A})$ que no contenga fuentes o sumideros de campo.

Considérese ahora una región que contenga alguna fuente o sumidero, esto es que encierre un electrodo. En ésta región ya no será válida la ecuación de Laplace. En vez de ello tendremos la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = \Omega/\varepsilon \tag{1.6}$$

Que puesta en términos de la corriente I, y considerando que la fuente es una fuente puntual puede escribirse:

$$\nabla^2 V = I\rho\,\delta(\bar{r} - \bar{r}_0) \tag{1.7}$$

donde $\bar{r}_0$ es el vector de posición del electrodo.

Para encontrar V en este caso considérese una superficie semiesférica Fig. (1.3) que contenga al electrodo puntual A (el electrodo B se considera infinitamente alejado). Dada la homogeneidad del medio, $\bar{J}$ tendrá el mismo valor en cualquier punto de ésta superficie, y estará dirigido radialmente.

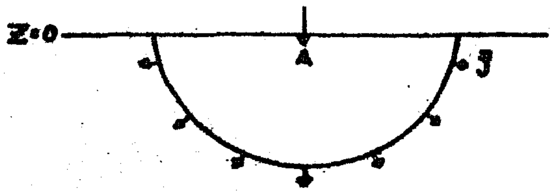


Fig. (1.3) **Vectores de densidad de corriente ($\bar{J}$) en un medio homogéneo originados en un electrodo puntual A.**

La integral de $\bar{J}$ sobre la superficie semiesférica es igual a la corriente I generada en A, esto es

$$I = \int_S \bar{J}\cdot ds = |\bar{J}|\int_S ds = |\bar{J}|(2\pi r^2) \Rightarrow \frac{I}{2\pi r^2} = |\bar{J}|$$

por otra parte

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \Rightarrow |\bar{J}| = \frac{1}{\rho}|\bar{E}| \Rightarrow |\bar{E}| = \rho|\bar{J}| \Rightarrow |\bar{E}| = \frac{I\rho}{2\pi r^2} \quad (1.8)$$

De la ecuación (1.2) se tiene que la diferencia de potencial entre dos puntos P_0 y P_1 está dada por

$$V_{P_0}^{P_1} = -\int_{P_0}^{P_1} \bar{E}\cdot d\ell \quad (1.9)$$

Como se mencionó anteriormente $\bar{E}$ es un campo conservativo por lo que la trayectoria de integración que se tome es irrelevante, de forma tal que si r_0 y r_1 son las distancias respectivas de P_0 y P_1 al electrodo, se tendrá:

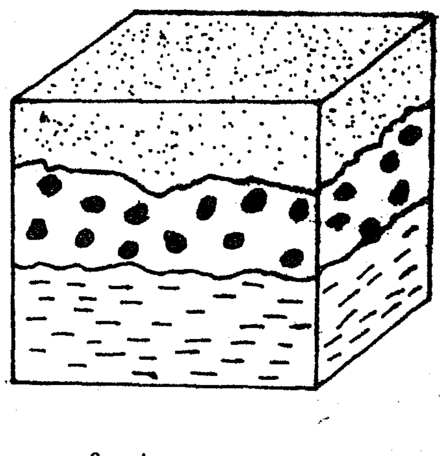
$$V_{P_0}^{R} = -\int_{r_1}^{r_0} \bar{E}\cdot d\,r = -\frac{I\rho}{2\pi}\int_{r_1}^{r_0} \frac{d\,r}{r^2} = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right) \qquad (1.10)$$

Por otro lado para asociar un potencial a un punto, debido al campo $\vec{E}$ generado por el electrodo de corriente, se debe tomar un punto de referencia al que se asocie un potencial cero.

Como suele hacerse, ya que las expresiones se simplifican, se asociará el potencial cero al punto en el infinito, de forma tal que el potencial en P_0 puede escribirse como:

$$V_{P_0} = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_0}\right) \qquad (1.11)$$

Hasta aquí se ha considerado el caso más sencillo en el que se tiene una sola capa homogénea de espesor infinito. Sin embargo como se dijo al principio de este trabajo se desea modelar la respuesta eléctrica de un medio compuesto por capas horizontales, cada una con distinta resistividad. Para ello es necesario resolver las ecuaciones que describen el comportamiento eléctrico de cada una de ellas para después unir las respuestas individuales en una global.



Se desea conocer la respuesta eléctrica global del medio.

Se debe ahora fijar el comportamiento en la interfase entre dos capas adyacentes de resistividades ρ_j y ρ_{j+1}. En primer lugar se verá qué sucede con el potencial.

Si P_0 y P_1 son dos puntos situados a uno y otro lado de la superficie de separación entre dos medios de distinta resistividad, la diferencia de potencial entre éstos, está dada por la ecuación (1.9). Haciendo tender a cero la distancia entre ellos, dado que $\bar{E}$ debe ser acotado, la diferencia de potencial tiende a cero, ya que el valor de la integral tiende a cero. Esto implica que el potencial es continuo en la interfase Fig(1.5a).

Para ver qué sucede con la densidad de corriente $\bar{J}$, considérese en la superficie límite un cilindro con sus bases paralelas a dicha superficie y situadas una en cada medio Fig. (1.5b)

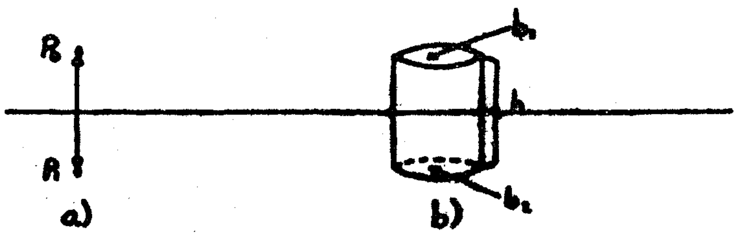


Fig. (1.5) **Determinación de condiciones de frontera en la interfase de dos medios electricamente homogéneos de resistividades.**

Si el área de cada base es pequeña y hacemos tender la altura del cilindro a cero, tendremos, aplicando la ley de Gauss a $\bar{J}$ en esta superficie:

$$\int_{SC} J\cdot ds = -\int_{b_1} J\cdot ds + \underbrace{\cancel{\int_{h} J\cdot ds}}_{0} + \int_{b_2} J\cdot ds = 0$$

ésto implica:

$$\int_{b_1} \bar{J}\cdot ds = \int_{b_2} \bar{J}\, ds \Rightarrow \int J_{1\perp} ds = \int J_{2\perp} ds \Rightarrow J_{1\perp} = J_{2\perp} \quad (1.12)$$

Esto significa que existe continuidad de la componente normal de $\bar{J}$ a través de la superficie de separación.

Habiendo establecido las condiciones de frontera, se procederá a analizar cuál es la ecuación que rige la respuesta eléctrica del medio estratificado. Para ello es necesario tener en cuenta los siguientes puntos, (algunos de los cuales se han mencionado ya):

1.- Se está considerando un medio estratificado en capas horizontales lateralmente infinitas, con propiedades de conducción eléctrica homogéneas e isotrópicas.

La variación de la resistividad ρ se da solamente en la dirección Z y en forma discreta.

2.- Los electrodos de corriente se encuentran en la primera capa, no existiendo ninguna clase de fuente o sumidero en alguna otra capa.

3.- En toda región en que no exista fuente o sumidero de carga, la ecuación que describe el potencial es la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0$$

Si en la región considerada existe alguna fuente o sumidero de carga, la ecuación que describe el potencial en ésta, es la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = I\rho\delta(\bar{x})$$

4.- Condiciones de frontera. Para expresar, éstas matemáticamente se hará uso de la siguiente notación:

N = número de capas
j = subíndice que indica la j-ésima capa (de arriba hacia abajo)
z = profundidad medida desde la superficie
z_j = profundidad tomada desde la frontera superior de la j-ésima capa
t_j = espesor de la j-ésima capa
V_j^N = potencial de la j-ésima capa en un modelo de N capas

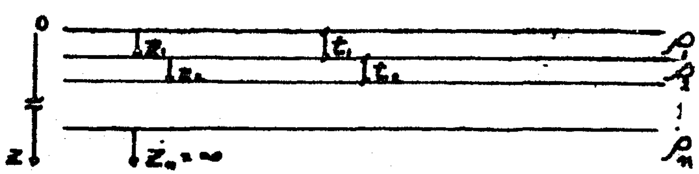


FIg. (1.6) **Representación esquemática de las variables utilizadas.**

De esta forma las condiciones de frontera se pueden expresar:

a). - No hay paso de corriente al aire.

$$\left.\frac{\partial V_1^N}{\partial Z_1}\right|_{z_1=0}=0 \qquad (1.13a)$$

b). - El potencial es contínuo en las interfases.

$$\left.V_j^N\right|_{z_j=t_j}=\left.V_{j+1}^N\right|_{z_{j+1}=0} \qquad (1.13b)$$

c). - La componente normal de la densidad de corriente es contínua en las interfases.

$$\frac{1}{\rho_j}\left.\frac{\partial V_j^N}{\partial Z_j}\right|_{z_j=t_j}=\frac{1}{\rho_{j+1}}\left.\frac{\partial V_{j+1}^N}{\partial Z_{j+1}}\right|_{z_{j+1}=0} \qquad (1.13c)$$

d). - El potencial a una profundidad infinita es cero.

$$\left.V_N^N\right|_{z_N=\infty}=0 \qquad (1.13d)$$

Se está considerando entonces la situación mostrada en la Fig. (1.7)

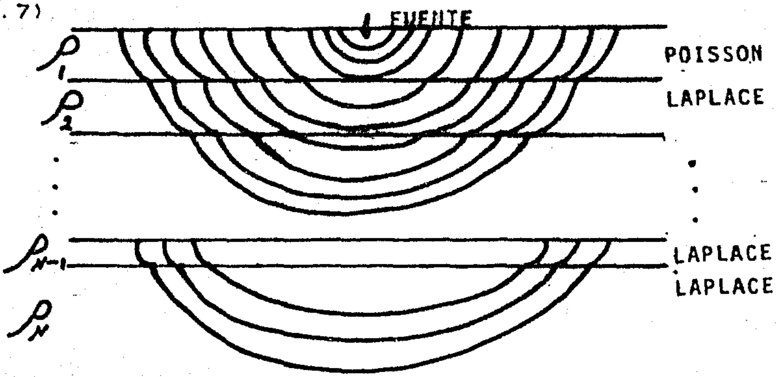


Fig. (1.7)

En este modelo la ecuación que rige al potencial en la primera capa es la ecuación de Poisson. Como es sabido la solución general de una ecuación no homogénea, está dada por la suma de una solución particular de la ecuación inhomogénea mas la solución general de la ecuación homogénea. Ya se ha mostrado la solución particular no homogénea en (1.11). Por otro lado la ecuación homogénea es precisamente la ecuación de Laplace.

Ecuación de Laplace

Para trabajar la ecuación de Laplace se escogerá el sistema de coordenadas cilíndricas, ya que en dicho sistema se trabaja en el sistema de referencia natural del modelo. Esto es debido al tipo de simetría radial que se tiene, y al hecho de que las fronteras coinciden con uno de los ejes, (éstas se encuentran en z = cte.)

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas toma la forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (1.14)$$

(Lima 1979)

Dada la simetría del modelo, no existe dependencia de V en θ y por lo tanto:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=0$$

Por lo que la ecuación (1.14) puede escribirse:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (1.15)$$

Ya que se está en el sistema natural de referencia del modelo, se puede aplicar la técnica de separación de variables y escribir:

$$V(r,z)=R(r)\cdot Z(z) \qquad (1.16)$$

Sustituyendo (1.16) en (1.15), efectuando la separación y llamando η_1 a la constante de separación, se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 Z_1(z)}{\partial z^2}+\eta_1 Z_1(z)=0 \qquad (1.17)$$

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{r}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}-\eta_1 r^2=0 \qquad (1.18)$$

Arfken (1970)

Hasta aquí el problema a sido resuelto de manera muy general. De acuerdo a las condiciones de frontera se tiene que decidir ahora el valor de la constante η_1

Comenzando con la ecuación (1.17)

1.- Supóngase $\eta_1<0 \Rightarrow \eta_1=-\lambda^2 \quad \lambda\in(0,\infty)$

se tendrá la ecuación:

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}-\lambda^2 Z(z)=0$$

cuya solución es de la forma:

$$Z(z)=Ae^{\lambda z}+Be^{-\lambda z}$$

2.- Si $\eta_1=0$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=0$$

con solución:

$$Z(z)=A+Bz$$

3. $\mathcal{Y}_1 > 0 \Rightarrow \mathcal{Y} = \lambda^2$ y se tiene:

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \lambda^2 Z(z) = 0$$

con solución:

$$Z(z) = A \quad (\lambda z) + B \quad (\lambda z)$$

La condición de frontera (1.13d) nos dice que $\lim_{z \to \infty} V_N^n = 0$

El valor de $\mathcal{Y}_1$ que puede satisfacer esta condición sin que A = B = 0 en la última capa es $\mathcal{Y} < 0$ (con $A_n = 0$, $B_n \neq 0$). Se toma entonces $\mathcal{Y}_1 = \lambda^2$ y por tanto se tiene.

$$Z(z) = A(\lambda) e^{\lambda z} + B(\lambda) e^{-\lambda z} \qquad (1.19)$$

Considérese ahora la ecuación: (1.18)

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r^2}{R(r)} \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} - \mathcal{Y}_1 r^2 = 0$$

que con el valor encontrado para $\mathcal{Y}_1$ queda:

$$\frac{r^2}{R(r)} \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \lambda^2 r^2 = 0 \qquad (1.20)$$

Esta ecuación es la ecuación de Bessel de orden cero con valor característico λ cuya solución general es de la forma:

$$R(r) = E\, J_0(\lambda r) + F\, Y_0(\lambda r)$$

donde

J (λr) = Función Bessel de primera clase y orden cero.
Y (λr) = Función Bessel de segunda clase y orden cero.

De acuerdo a al teoría de funciones Bessel $\lim_{x \to 0} Y_0(x) = \infty$, sin embargo se desea que el potencial V permanezca acotado cuando $r \to 0$ por lo que se debe tener:

$$F = 0 \Rightarrow R(r) = E\, J_0(\lambda r) \qquad (1.21)$$

Mc. Lachlan (1970)

Nótese que estamos resolviendo la ecuación de Laplace, ésto es estamos en una región en la que no existen fuentes y por lo tanto V debe ser acotado para toda r.

Se tiene entonces la solución para la ecuación (1.15)

$$V(r,\theta,z)=(Ae^{\lambda z}+Be^{-\lambda z})\,(E\,J_0(\lambda r))=$$
$$=(A'e^{\lambda z}+B'e^{\lambda z})\,(J_0(\lambda r)) \qquad (1.22)$$

donde

$$A'=A\cdot E$$
$$B'=B\cdot E$$

(por comodidad se escribirá A' = A , B' = B)

Entonces para la j-ésima capa con j = 2, 3, ... , N se tiene:

$$V_j''(r,\theta,z)=(A_j''e^{\lambda z_j}+B_je^{-\lambda z_j})\,J_0(\lambda r) \qquad (1.23)$$

En tanto que para la primera capa el potencial esta dado por:

$$V_1''(r,\theta,z)=\frac{I\rho}{2\pi r}+(A_1''e^{\lambda z_1}+B_1''e^{-\lambda z_1})\,J_0(\lambda r) \qquad (1.24)$$

Hasta aquí tenemos la forma general de las soluciones para cada una de las capas por un lado y las condiciones de frontera por el otro. El paso siguiente es concatenar las primeras haciendo para ello uso de las segundas.

Si se aplica la condición de frontera (1.13a) a la ecuación (1.24) se obtiene:

$$A_1''(\lambda)=B_1''(\lambda) \qquad (1.25)$$

La ec. (1.25) y las condiciones (1.13b) y (1.13a) en la primera interfase (entre la primera y segunda capas) dan como resultado el siguiente par de ecuaciones:

$$\left(e^{\lambda t_1}-e^{-\lambda t_1}\right)A_1^N(\lambda)-\frac{\rho_1}{\rho_2}A_2^N(\lambda)+\frac{\rho_1}{\rho_2}B_2^N(\lambda)=\frac{\rho_1 I}{2\pi}e^{-\lambda t_1} \qquad (1.26)$$

$$\left(e^{\lambda t_1}+e^{-\lambda t_1}\right)A_1^N(\lambda)-A_2^N(\lambda)-B_2^N(\lambda)=\frac{\rho_1 I}{2\pi}e^{-\lambda t_1} \qquad (1.27)$$

La aplicación de estas mismas condiciones de frontera, de la segunda a la última interfase, dan como resultado pares de ecuaciones cuya forma general es la siguiente:

$$\begin{aligned} &e^{\lambda t_j}A_j^N(\lambda)-e^{-\lambda t_j}B_j^N(\lambda)-\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}A_{j+1}^N(\lambda)+\\ &+\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}B_{j+1}^N(\lambda)=0 \end{aligned} \qquad (1.28)$$

$$e^{\lambda t_j}A_j^N(\lambda)+e^{-\lambda t_j}B_j^N(\lambda)-A_{j+1}^N(\lambda)-B_{j+1}^N=0 \qquad (1.29)$$

Por último aplicando la condición (1.13d) a la última capa se tiene:

$$A_N^N=0 \qquad (1.30)$$

De forma tal que para la última interfase, de las ecuaciones (1.28), (1.29) y (1.30) en realidad se tiene:

$$e^{\lambda t_{N-1}}A_{N-1}^N(\lambda)-e^{-\lambda t_{N-1}}B_{N-1}^N(\lambda)+\frac{\rho_{N-1}}{\rho_N}B_N^N(\lambda)=0 \qquad (1.31)$$

y

$$e^{\lambda t_{N-1}}A_{N-1}^N(\lambda)+e^{-\lambda t_{N-1}}B_{N-1}^N(\lambda)-B_N^N=0 \qquad (1.32)$$

Las ecuaciones (1.25), (1.26).....(1.30) considrando las ecuaciones (1.28) y (1.29) como el conjunto de 2(N-2) ecuaciones para las (N-2) interfases inferiores), forman un sistema bien condicionado de 2N ecuaciones con 2N incógnitas.

La manera más adecuada de resolver este sistema, dado que todas las ecuaciones siguen un patrón general, es por sustitución hacia atrás.

Se seguirá a continuación la forma de obtener ecuaciones recurrenciales para calcular las funciones $A_i(\lambda)$, $B_i(\lambda)$ propuesta por Lima 1979.

Despejando $B_N^N(\lambda)$ de (1.32) se obtiene:

$$B_N^N(\lambda) = e^{\lambda t_{N-1}} A_{N-1}^N(\lambda) + e^{-\lambda t_{N-1}} B_{N-1}^N(\lambda) \qquad (1.33)$$

Sustituyendo (1.33) en (1.31) se tiene:

$$A_{N-1}^N(\lambda) e^{\lambda t_{N-1}} \left[1 + \frac{\rho_{N-1}}{\rho_N}\right] + B_{N-1}^N(\lambda) e^{-\lambda t_{N-1}} \left[\frac{\rho_{N-1}}{\rho_N} - 1\right] = 0$$

lo que implica finalmente:

$$A_{N-1}^N(\lambda) = \frac{\rho_N - \rho_{N-1}}{\rho_N + \rho_{N-1}} e^{-2\lambda t_{N-1}} B_{N-1}^N(\lambda) \qquad (1.34)$$

Ahora bien el j-ésimo coeficiente de reflexión se define como:

$$k_j = \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{\rho_{j+1} + \rho_j} \qquad (1.35)$$

y la (N-1)-ésima función generadora como

$$L^N_{N-1}(\lambda)=k_{N-1}\,e^{-2\lambda t_{N-1}} \qquad (1.36)$$

de forma tal que la relación entre las eigenfunciones de la penúltima capa quedan expresadas como:

$$A^N_{N-1}(\lambda)=L^N_{N-1}(\lambda)B^N_{N-1}(\lambda) \qquad (1.37)$$

Sustituyendo (1.37) en (1.29) y (1.28) para j = N-2 se obtiene la relación:

$$A^N_{N-2}(\lambda)=L^N_{N-2}(\lambda)\,B^N_{N-2}(\lambda)$$

con

$$L^N_{N-2}(\lambda)=\frac{k_{N-2}+L^N_{N-1}(\lambda)}{1+k_{N-2}L^N_{N-1}(\lambda)}\,e^{-2\lambda t_{N-2}}$$

Dado el patrón general de los pares de ecuaciones para las interfases intermedias, puede demostrarse que si se escribe

$$A^N_{j+1}(\lambda)=L^N_{j+1}B^N_{j+1}(\lambda)$$

y se sustituye ésto en el par de ecuaciones para la j-ésima interfase, se obtiene la relación general.

$$A^N_j(\lambda)=L^N_j(\lambda)B_j(\lambda) \qquad (1.38)$$

donde

$$L^N_j(\lambda)=\frac{k_j+L_{j+1}(\lambda)}{1+k_jL_{j+1}(\lambda)}\,e^{-2\lambda t_j} \qquad (1.39)$$

j=1, 2, . . . N-1

Haciendo esta sustitución hacia atrás se llega a la primera interfase ecs. (1.26) y (1.27). Como se ve estas ecuaciones son distintas a las demás, ya que no son homogéneas. Sustituyendo $A_2^N(\lambda) = L_2^N(\lambda) B_2^N(\lambda)$ en (1.26) y (1.27), se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $A_1^N(\lambda)$ y $B_2^N(\lambda)$ cuya solución es:

$$A_1^N(\lambda) = \frac{\rho I}{2\pi} K_1^N(\lambda) \qquad (1.40)$$

$$B_2^N = \left(\frac{[e^{\lambda t_1} + e^{-\lambda t_1}] K_1^N(\lambda) + e^{-\lambda t_1}}{1 + L_2^N(\lambda)} \right) \frac{\rho I}{2\pi} \qquad (1.41)$$

donde

$$K_1^N(\lambda) = \frac{L_1^N(\lambda)}{1 - L_1^N(\lambda)} \qquad (1.42)$$

Se tiene ahora la forma general de los coeficientes $A_j^N(\lambda)$, $B_j^N(\lambda)$ que aparecen en la solución de las ecuaciones de Poisson y de Laplace (ecs. (1.23) y (1.24). Como se sabe si dos o mas funciones son solución de una ecuación diferencial lineal homogénea, la suma de todas las soluciones es también solución. Por lo tanto si se hace la suma sobre todos los valores de λ se obtiene la forma mas general de solución. Ahora bien λ es una variable contínua y por ello la suma sobre todas las lambdas, equivale a hacer una integración sobre éstas. Considerando ésto las ecuaciones (1.23) y (1.24) se transforman en:

$$V_j^N(r,\theta,z) = \int_0^\infty \left(A_j^N(\lambda) e^{\lambda z_j} + B_j^N(\lambda) e^{-\lambda z_j} \right) J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad (1.43)$$

para j = 2, 3, ... N

y para la primera capa

$$V_1^N(r,\theta,z) = \frac{\rho I}{2\pi r} + \int_0^\infty A_1^N(\lambda)\left(e^{\lambda z_1} + e^{-\lambda z_1}\right) J_0(\lambda r)\, d\lambda \quad (1.44)$$

Por último sustituyendo (1.40) en (1.44) se tiene:

$$V_1^N(r,\theta,z) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \int_0^\infty K_1^N(\lambda)\left(e^{\lambda z_1} + e^{-\lambda z_1}\right) J_0(\lambda r)\, d\lambda \quad (1.45)$$

I. C. Función de Resistividad Aparente para Diferentes Arreglos Electródicos

Las mediciones que se realizan en el campo son hechas en la superficie, esto es son hechas en $z_1 = 0$. Haciendo $z_1 = 0$ en la ecuación (1.45) se obtiene la distribución de voltajes en la superficie, la cual queda expresada por:

$$V_1^N(r) = \frac{\rho I}{2\pi}\left\{\frac{1}{r} + 2\int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda\right\} \quad (1.46)$$

Si se supone que el potencial en la superficie creado por un medio estratificado, fuese creado en un medio completamente homogéneo, podríamos calcular la resistividad ρ_a de este medio, que produciría para la misma corriente eléctrica I y el mismo arreglo electródico, el mismo potencial $V_1^N(r)$.

A la resistividad de este hipotético medio homogéneo (ρ_a) se le conoce como resistividad aparente.

Antes de deducir una expresión para la resistividad aparente, se analizará lo que se entiende por arreglo o dispositivo electródico.

Un dispositivo como el mostrado en la Fig. (1.8), recibe el nombre de dispositivo electródico. En general consta de cuatro electrodos (aunque no necesariamente). Dos de ellos A y B están conectados por medio de cables a un generador eléctrico, formando el llamado circuito de corriente o circuito emisor. Los electrodos M y N van unidos a un voltímetro, formando el circuito de potencial o de recepción, entre ellos se mide la diferencia de potencial, creada por los electrodos A y B.

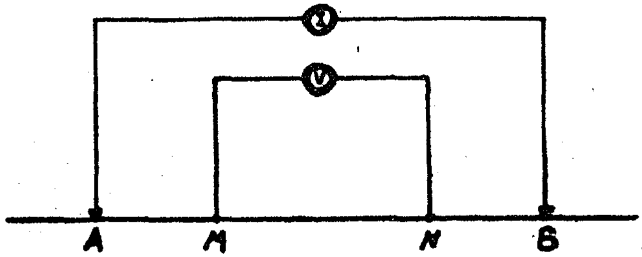
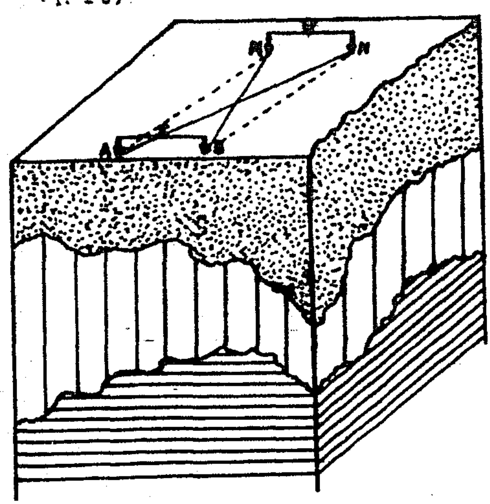


Fig. (1.8)

En el tipo de modelado unidimensional que se está considerando, los cuatro electrodos se encuentran en el mismo medio de resistividad ρ_1, en este caso es válido el principio de superposición para los potenciales, esto es el potencial en M producido por A y B es igual al potencial en M debido a A ($V_{M/A}$) más el potencial en M debidlo a B ($V_{M/B}$). Ahora bien si se considera a A como fuente y a B como sumidero se convendrá que A produce un potencial positivo en tanto que B produce un potencial negativo. Volviendo al problema de la resistividad aparente, supóngase que se tiene un arreglo cualquiera como el mostrado en la Fig. (1.19).



Diferencia de potencial medida por el circuito receptor debida a la corriente inyectada por el circuito emisor.

Fig. (1.9)

Sean:

$r_1 = \overline{AM}$

$r_2 = \overline{BM}$

$r_1' = \overline{AN}$

$r_2' = \overline{BN}$

La diferencia de potencial medida enre M y N es:

$$\Delta V = V_M - V_N = (V_{M/A} + V_{M/B}) - (V_{N/A} + V_{N/B})$$

De lo dicho anteriormente y de la fórmula para el potencial en un punto, producido por un electrodo a una distancia r ec. (1.11) se tiene:

$$\Delta V_H = V_M - V_N = \frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] - \frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right] =$$

$$= \frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'}\right] = \Delta V_H \qquad (1.47)$$

Para un medio estratificado de la ec. (1.45) se tiene:

$$\Delta V_1^N(r) = V_1^N\big|_M - V_1^N\big|_N = (V_{M/A} + V_{M/B}) - (V_{N/A} + V_{N/B}) = \left[\frac{I\rho}{2\pi}\left\{\frac{1}{r_1} + 2\int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r_1)\, d\lambda\right\} - \frac{I\rho}{2\pi}\left\{\frac{1}{r_2} + 2\int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r_2)\, d\lambda\right\}\right] -$$

$$- \left[\frac{I\rho}{2\pi}\left\{\frac{1}{r_1'} + 2\int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r_1')\, d\lambda\right\} - \frac{I\rho}{2\pi}\left\{\frac{1}{r_2'} + 2\int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r_2')\, d\lambda\right\}\right] =$$

$$= \frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} + 2\left(\int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r_1)\, d\lambda - \int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r_1')\, d\lambda + \int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r_2')\, d\lambda\right)\right]$$

Y por linealidad del operador integral se tiene finalmente:

$$\Delta V_1^N(r) = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} + 2\int_0^\infty K_1^N(\lambda)\left[J_0(\lambda r_1) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - J_0(\lambda r_2) - J_0(\lambda r_1') + J_0(\lambda r_2')\right] d\lambda\right) \qquad (1.48)$$

definiendo.

$$q=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1'}+\frac{1}{r_2'}\right) \qquad (1.49)$$

$$\Delta J_0(\lambda r)=[J_0(\lambda r_1)-J_0(\lambda r_2)-J_0(\lambda r_1')+J_0(\lambda r_2')] \qquad (1.50)$$

(1.48) puede escribirse como:

$$\Delta V_1''(\lambda)=\frac{I\rho}{2\pi}\left(q+2\int_0^{\infty}K_1''\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda\right) \qquad (1.51)$$

y (1.47) como:

$$\Delta V_H=\frac{I\rho}{2\pi}q \qquad (1.52)$$

Encontrar la resistividad aparente, es encontrar ρ_a tal que:

$$\Delta V_H=\Delta V_1''(\lambda)$$

Igualando las expresiones (1.51) y (1.52) se tiene:

$$\Delta V_H=\Delta V_1''(\lambda)\Rightarrow\frac{I\rho_a q}{2\pi}=\frac{I\rho}{2\pi}\left(q+2\int_0^{\infty}K_1''(\lambda)\Delta J_0\,d\lambda\right) \qquad (1.53)$$

y despejando ρ_a de la ecuación anterior se tiene:

$$\rho_a = \rho_1 \left\{ 1 + \frac{2}{q} \int_0^\infty K_1''(\lambda)\, \Delta J_0(\lambda r)\, d\lambda \right\} \qquad (1.54)$$

Para arreglos electródicos simétricos, q y $\Delta J_0(\lambda r)$ toman formas sencillas, así por ejemplo para Schlumberger ρ_a está dado por:

$$\rho_a^s = \rho_1 \left\{ 1 + \frac{L^2 - l^2}{l} \int_0^\infty K_1''(\lambda) \cdot [J_0((L-l)\lambda) - J_0((L+l)\lambda)]\, d\lambda \right\}$$

para Wenner ρ_a es:

$$\rho_a^w = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \int_0^\infty K_1''(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)]\, d\lambda \right.$$

Para arreglos dipolares véase Fig. (1.11)

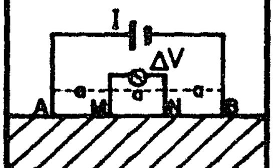
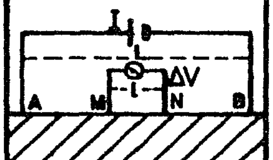
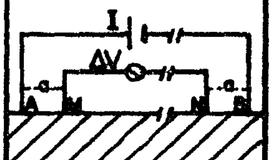
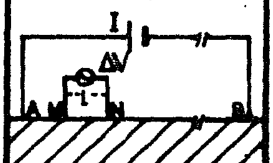
	NOMBRE	VISTA LATERAL	CARACTERISTICA PRINCIPAL	RESISTIV. APARENTE
SIMETRICOS	WENNER		Las separaciones AM, MN y NB entre los electrodos son iguales.	$\rho_a = 2\pi a \Delta V/I$
	SCHLUM-BERGER		Las separaciones entre los electrodos de potencial (ℓ) es mucho menor que la que hay entre los electrodos de corriente (L)	$\rho_a = \pi \frac{L^2 - l^2}{2l} \frac{\Delta V}{I}$
ASIMETRICOS	SEMI-WENNER		La separación entre los electrodos AM es la misma que NB; pero estos últimos se colocan muy alejados de los primeros (i.e. $MN \to \infty$)	$\rho_a = \pi a \Delta V/I$
	SEMI-SCHLUM-BERGER		El electrodo de corriente B se lleva a gran distancia de los demás, de modo que no influya sobre el valor ΔV observado (i.e. $BN \to \infty$)	$\rho_a = \pi \frac{L^2 - l^2}{l} \frac{\Delta V}{I}$

Fig. (1.10a) ARREGLOS ELECTRODICOS COLINEALES

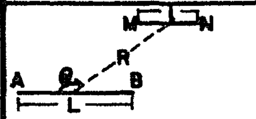
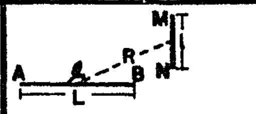
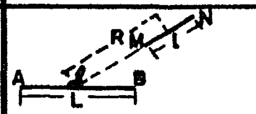
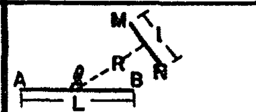
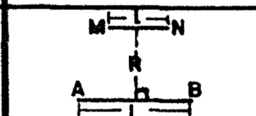
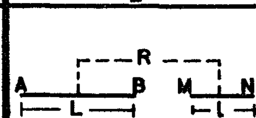
NOMBRE	VISTA EN PLANTA	CARACTERISTICA PRINCIPAL	RESISTIV. APARENTE
PARALELO		Los dipolos se colocan paralelos uno respecto del otro	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L\cdot l}\,\frac{(\Delta V/I)}{2\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}$
PERPENDI-CULAR		Los dipolos forman ángulo recto	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L\cdot l}\,\frac{4(\Delta V/I)}{3\,\text{sen}\,2\theta}$
RADIAL		El dipolo de electrodos de potencial MN está situado sobre la recta que une los centros de ambos dipolos	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L\cdot l}\,\frac{(\Delta V/I)}{\cos\theta}$
AZIMUTAL		El dipolo de electrodos de potencial MN es perpendicular a la recta que une los centros de ambos dipolos	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L\cdot l}\,\frac{(\Delta V/I)}{\text{sen}\,\theta}$
ECUATO-RIAL		El dipolo de potencial MN es paralelo al de corriente AB, a la vez que perpendicular a la línea que une los centros	$\rho_a = \frac{2\pi R^3}{L\cdot l}\,\frac{\Delta V}{I}$
AXIAL		Los dipolos se colocan colinealmente sin intersectarse	$\rho_a = \frac{\pi R^3}{L\cdot l}\,\frac{\Delta V}{I}$

Fig. (1.10b) ARREGLOS ELECTRODICOS DIPOLARES

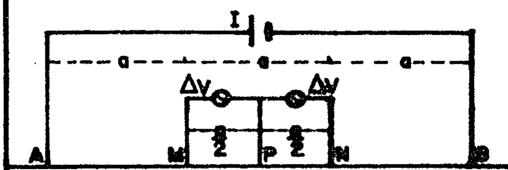
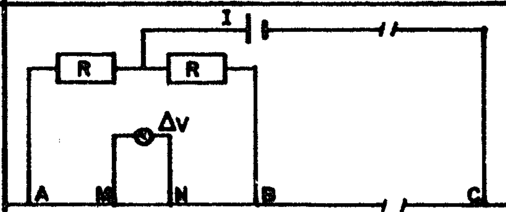
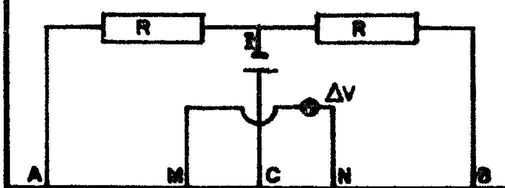
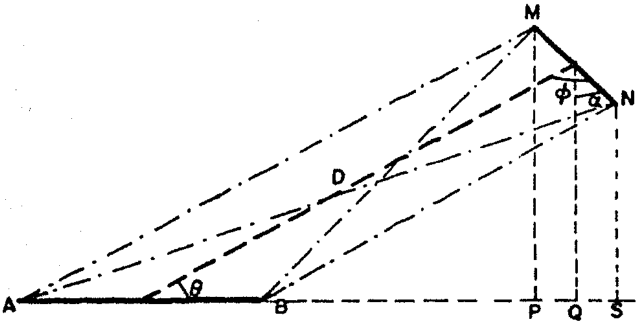
	NOMBRE	VISTA LATERAL	CARACTERISTICA PRINCIPAL
AGRUPACIÓN	LEE		Se deriva de un arreglo colineal tipo Wenner, con un electrodo adicional de potencial en el centro del arreglo, con el fin de tomar dos medidas de potencial, una entre M y P, y otra entre P y N
APANTALLAMIENTO	HOMOPO-LAR		Un electrodo adicional de corriente (C) se coloca alejado del arreglo (Wenner o Schlumberger). Las resistencias R sirven para compensar la resistencia de contacto y la de la línea a (C). Para un medio homogéneo isotrópico, $\Delta V = 0$
	DIFEREN-CIAL O BLOKH		Es similar al homopolar, sólo que el electrodo adicional de corriente (C) se coloca en el centro del arreglo. Nuevamente, las resistencias R tienen el objetivo de hacer pasar la misma corriente I por las líneas que van a A y a B

Fig. (1.10c): ARREGLOS ELECTRODICOS COMPUESTOS.

Fig.(1.11) Cálculo de resistividad aparente para arreglos dipolares



El factor geométrico que se considera en el cálculo de resistividad aparente depende de las distancias AM, AN, BM y BN. El algoritmo que aquí se describe tiene por objetivo encontrar esas distancias para cualquier posición de los electrodos, conociendo los parámetros - AB (separación entre electrodos de corriente), MN (separación entre electrodos de potencial), D (distancia entre los centros de los dipolos) y los ángulos θ y ϕ. Para tal efecto se define el ángulo α como

$$\alpha = (\phi - (\pi/2 - \theta)) = \phi + \theta - \pi/2,$$

con lo que

$$SN = |D\operatorname{sen}\theta - (MN/2)\cos\alpha| ;$$

$$BS = |D\cos\theta + (MN/2)\operatorname{sen}\alpha - (AB)/2 |$$

$BN = \{ BS^2 + SN^2 \}^{1/2}$, del triángulo BNS.

Del triángulo ANS se tiene que

$$AS = |D\cos\theta + (MN/2)\operatorname{sen}\alpha + (AB/2)|$$

$AN = \{ AS^2 + SN^2 \}^{1/2}$, y así $V_N = (I\rho/2\pi)(AN^{-1} - BN^{-1})$.

Análogamente, para el potencial en M, se tiene que

$MP = | D\operatorname{sen}\theta + (MN/2)\cos\alpha|$; $BP = | (AB/2) - (D\cos\theta - (MN/2)\operatorname{sen}\alpha|$

$$BM = \{ MP^2 + BP^2 \}^{1/2}$$

$AP = | (AB/2) + (D\cos\theta - (MN/2)\operatorname{sen}\alpha)|$, $AM = \{ AP^2 + MP^2 \}^{1/2}$

$V_M = (I\rho/2\pi)(AM^{-1} - BM^{-1})$; de donde, por último,

$$\Delta V = V_M - V_N \quad y \quad \rho_a = 2\pi(\Delta V/I)$$

CAPITULO II

METODO DE INTEGRACION NUMERICA DE LA FUNCION DE RESISTIVIDAD APARENTE.

En el capítulo anterior se llegó a una expresión para la resistividad aparente:

$$\rho_a = \rho_1\left\{1+2r\int_0^\infty K_1^N(\lambda)\,\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda\right\} \qquad (1.54)$$

Si se desea resolver el problema directo, debe encontrarse el valor numérico de la resistividad aparente ρ_a, para un cierto modelo propuesto y un arreglo electródico dado.

El problema es ahora evaluar la integral:

$$\int_0^\infty K_1^N(\lambda)\,\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

la cual no tiene expresión cerrada.

En este capítulo se presenta el método seguido para encontrar el valor numérico de dicha integral.

La Función Kernel

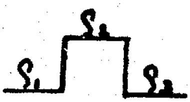
Ha quedado establecido en el capítulo I, en las ecuaciones (1.42), (1.39) y (1.35) que la función kernel ($K_1^N(\lambda)$) contiene información acerca de todas las capas del modelo (resistividades y espesores). Es por lo tanto conveniente establecer algunas consideraciones sobre su comportamiento.

1. - Puede demostrarse que el valor de $K_1^N(\lambda)$ en $\lambda=0$ es: (2.1)

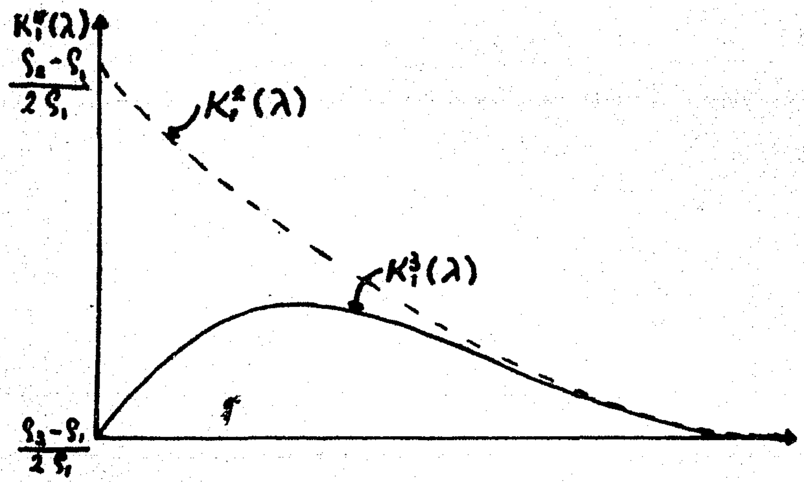
$$K_1^N(\lambda)\big|_{\lambda=0} = \frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_1}$$

(Lima 1979)

2. - Para valores crecientes de lambda se observa que la función kernel para un modelo de N capas $K_1^N(\lambda)$, tiende a paroximarse a la función kernel para un modelo de N-1 capas $K_1^{N-1}(\lambda)$, siendo éstas las N-1 capas superiores. Así por ejemplo al crecer lambda, la curva de la función kernel para un modelo de 3 capas se aproxima a la curva de la función kernel para un modelo de 2 capas y ésta a su vez al kernel de un semiespacio homogéneo $K_1^1(\lambda) = 0$. A continuación se muestran algunas gráficas de la función kernel obtenidas por Lima y Onodera (1979).

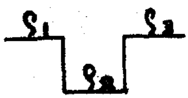


a)Gráfica de la distribución
de resistividades del modelo

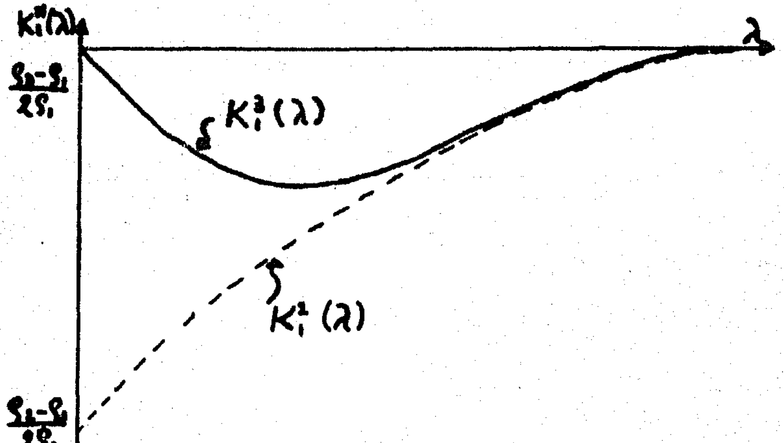


b)Gráfica de la curva de kernel.

Fig. (2.1.1)

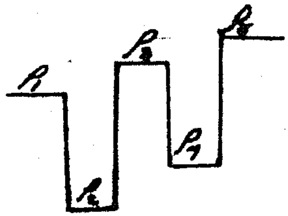


a)Gráfica de la distribución
de resistividades del modelo.

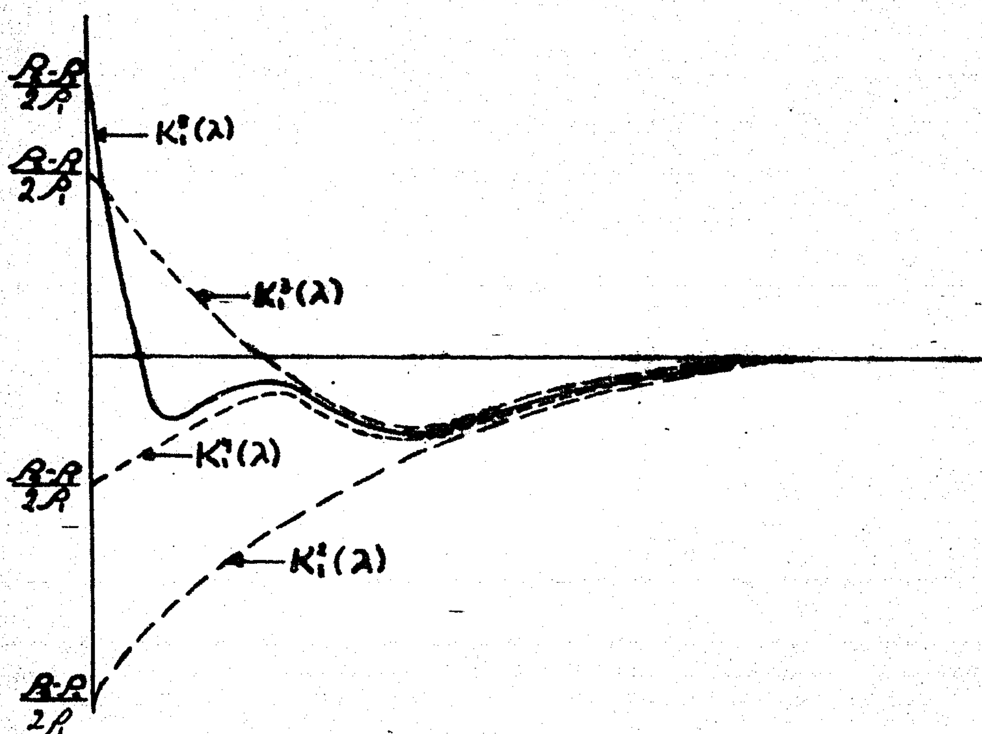


Gráfica de la curva de kernel.

Fig. (2.1.2)



Gráfica de la distribución de las resistividades.



Gráfica de la curva de kernel.

Fig. (2.2)

De lo mostrado anteriormente se induce que la información sobre las capas más profundas contenida en la función kernel, se encuentra en la región de lambdas mas pequeñas y la de las capas más someras en la región de lambdas grandes.

Habiendo hecho este breve análisis del comportamiento de la función $K_1''(\lambda)$ se pasará ahora a la descripción de la técnica seguida para encontrar el valor de:

$$\int_0^\infty K_1''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,dx$$

y con ello el valor de la resistividad aparente ρ_a.

Es evidente que si la teoría hasta aquí presentada es correcta, la integral:

$$\int_0^\infty K_1''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

existe, esto es:

$$\int_0^\infty K_1''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda = \lim_{\lambda'\to\infty}\int_0^{\lambda'} K_1''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda = Q$$

donde

$$|Q|<\infty$$

Dada la convergencia de la integral se tiene que:

Para toda ε mayor que cero, existe λ_m mayor que cero, tal que para toda λ' mayor que λ_m

$$\left|\int_0^\infty K_1''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda - \int_0^{\lambda'} K_1''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda\right|$$

es menor que

$$\varepsilon$$

Si se toma una λ_n mayor que λ_m con λ_n "suficientemente grande" se tiene

$$\int_0^\infty K_1''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda \approx \int_0^{\lambda_m} K_1''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

Se hace ahora una partición del intervalo

$$[0,\lambda_m],\ [0,\lambda_1],[\lambda_1,\lambda_2],[\lambda_2,\lambda_3],\ldots[\lambda_{m-1},\lambda_n]$$

De lo dicho anteriormente acerca de la función $K_i''(\lambda)$ se sigue que debe hacerse una partición muy fina en la región de lambdas pequeñas, y una bastante más burda hacia la región de lambdas grandes. Esto sugiere hacer una partición de tipo logarítmico. (Este hecho es muy importante ya que de él depende el poder resolver las capas más profundas).

Habiendo hecho esta partición logarítmica, puede escribirse lo siguiente

$$\int_0^\infty K_i''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)d\lambda \approx \int_0^{\lambda_n} K_i''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)d\lambda =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\lambda_1} K_i''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)d\lambda}_{I_1} + \cdots + \underbrace{\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} K_i''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)}_{I_i} + \qquad (2.2)$$

$$+ \cdots + \underbrace{\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} K_i''(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)d\lambda}_{I_n} \cdots$$

El problema es ahora evaluar cada una de las integrales I_j para $j = 1, 2, \ldots, n$. Para evaluar estas integrales se hace uso del siguiente hecho:

La integral:

$$\int \lambda^m J_0(b\lambda)d\lambda$$

tiene expresión cerrada y en consecuencia, dada la linealidad del operador integral

$$\int \lambda^m \Delta J_0(\lambda r)d\lambda$$

tiene también expresión cerrada (ver ecs. (1.48) y (1.50))

Lo anterior está basado en las siguientes fórmulas:

$$a) \int_{x_1}^{x_2} J_0(bx)\,dx = x_2 J_0(bx_2) - x_1 J_0(bx_1) -$$

$$- \pi/2 \left[x_2 \cdot BS(bx_2) - x_1 \cdot BS(bx_1) \right]$$

donde

$$BS(y) = J_0(y) H_1(y) - J_1(y) H_0(y)$$

$$b) \int_{x_1}^{x_2} x J_0(bx)\,dx = \frac{1}{b} \left[x_2 J_1(bx_2) - x_1 J_1(bx_1) \right]$$

$$c) \int_{x_1}^{x_2} x^i J_0(bx)\,dx = \frac{1}{b^2} \Big\{ \left[b x_2^i J_1(bx_2) + \right.$$

$$\left. + (i-1) x_2^{(i-1)} J_0(bx_2) \right] - \left[b x_1^i J_1(bx_1 + (i-1) x_1^{(i-1)} J_0(bx_1) \right] -$$

$$- (i-1)^2 \int_{x_1}^{x_0} x^{(i-2)} J_0(bx)\,dx \Big\}$$

Mc. Lachlan (1970)

De lo anteriormente dicho se ocurre aproximar por tramos a la función kernel a través de polinomios. Como es bien sabido una de las formas mas convenientes de aproximar una función por polinomios es usar la interpolación por splines cúbicos. Briggs (1976).

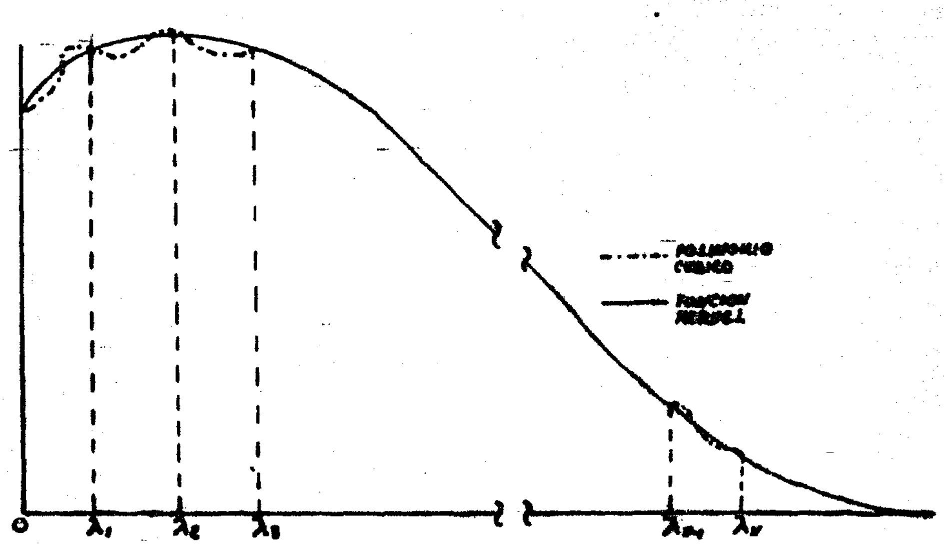


Fig. (2.3) **Aproximación de la función kernel por medio de Esplines cúbicos.**

$$K_1''(\lambda) \approx A_i\lambda^3 + B_i\lambda^2 + C_i\lambda + D_i = P_i(\lambda) \qquad \lambda_{i-1} \leq \lambda < \lambda_i \tag{2.4}$$

El polinomio cúbico $P_i(\lambda)$ que ha de interpolar a la función kernel en el j-ésimo intervalo queda determinado por los cuatro coeficientes A_i, B_i, C_i, D_i. Estas son cuatro incógnitas para las cuales se nesecitan cuatro ecuaciones o condiciones a cumplir. Estas cuatro condiciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 1.- R(\lambda_{i-1}) = K_1''(\lambda_{i-1}) \\ 2.- R(\lambda_i) = K_1''(\lambda_i) \\ 3.- R'(\lambda_{i-1}) = K_1'''(\lambda_{i-1}) \\ 4.- R'(\lambda_i) = K_1'''(\lambda_i) \end{array}\right\} \quad (2.5)$$

donde

$$R'(\lambda) = \frac{dR(\lambda)}{d\lambda}$$

y

$$K_1'''(\lambda) = \frac{dK_1''(\lambda)}{d\lambda} \;)$$

Puesto en forma matricial, el sistema de ecuaciones (2.5) toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i-1}^3 & \lambda_{i-1}^2 & \lambda_{i-1} & 1 \\ \lambda_i^3 & \lambda_i^2 & \lambda_i & 1 \\ 3\lambda_{i-1}^2 & 2\lambda_{i-1} & 1 & 0 \\ 3\lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1''(\lambda_{i-1}) \\ K_1''(\lambda_i) \\ K_1'''(\lambda_{i-1}) \\ K_1'''(\lambda_i) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones lineales, los coeficientes Ai, Bi, Ci, Di quedan como combinaciones lineales del kernel y su derivada en los puntos λ_{i-1} y λ_i. Esto es.

$$A_i = \alpha_1^i K_1^N(\lambda_{i-1}) + \beta_1^i K_1^N(\lambda_i) + \gamma_1^i K_1^{N'}(\lambda_{i-1}) + \delta_1^i K_1^{N'}(\lambda_i)$$

$$B_i = \alpha_2^i K_1^N(\lambda_{i-1}) + \beta_2^i K_1^N(\lambda_i) + \gamma_2^i K_1^{N'}(\lambda_{i-1}) + \delta_2^i K_1^{N'}(\lambda_i)$$

$$C_i = \alpha_3^i K_1^N(\lambda_{i-1}) + \beta_3^i K_1^N(\lambda_i) + \gamma_3^i K_1^{N'}(\lambda_{i-1}) + \delta_3^i K_1^{N'}(\lambda_i)$$

$$D_i = \alpha_4^i K_1^N(\lambda_{i-1}) + \beta_4^i K_1^N(\lambda_i) + \gamma_4^i K_1^{N'}(\lambda_{i-1}) + \delta_4^i K_1^{N'}(\lambda_i) \tag{2.7}$$

donde

$$\alpha_j^i,\ \beta_j^i,\ \gamma_j^i,\ \delta_j^i$$

para

j = 1, 2, 3, 4

e

i = 1, 2 . . N

son los coeficientes de λ_i y λ_{i-1}

Sustituyendo (2.4) en (2.[illegible]) se tiene

$$\int_0^{\infty} K_1^N(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda \simeq \int_0^{\lambda_n} K_1^N(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda =$$

$$= \int_0^{\lambda_1} K_1^N(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda + \cdots + \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} K_1^N(\lambda)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda \simeq$$

$$\simeq \underbrace{\int_0^{\lambda_1} (A_1\lambda^3 + B_1\lambda^2 + C_1\lambda + D_1)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda}_{I_1} + \cdots +$$

$$+ \underbrace{\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} (A_n\lambda^3 + B_n\lambda^2 + C_n\lambda + D_n)\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda}_{I_n} =$$

$$= A_1\int_0^{\lambda_1}\lambda^3\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda + B_1\int_0^{\lambda_1}\lambda^2\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda +$$

$$+ C_1\int_0^{\lambda_1}\lambda\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda + D_1\int_0^{\lambda_1}\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda + \cdots$$

$$\cdots + A_n\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}\lambda^3\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda + B_n\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}\lambda^2\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda +$$

$$+ C_n\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}\lambda\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda + D_n\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

Para simplificar la escritura se tendrá en adelante la siguiente notación:

$$a_j = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j}\lambda^3\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

$$b_j = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j}\lambda^2\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

$$c_j = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j}\lambda\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda \qquad (2.9)$$

$$d_j = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j}\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda \qquad j = 1, 2, \dots n \quad \lambda_0 = 0$$

De (2.8) y (2.9) puede escribirse.

$$\int_0^{\infty} K_i^N(\lambda)\,\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda \simeq \int_0^{\lambda_n} K_i^N(\lambda)\,\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda \simeq$$

$$\simeq A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 + D_1 d_1 + \cdots + A_j a_j + B_j b_j + C_j c_j + D_j d_j +$$

$$+ \cdots + A_n a_n + B_n b_n + C_n c_n + D_n d_n$$

Sustituyendo (2.7) en (2.10) y reagrupando con respecto al kernel $K_i^N(\lambda)$ y su derivada $K_i^{N'}(\lambda)$ en los nodos, se obtiene finalmente:

$$\int_0^{\infty} K_i^N(\lambda)\,\Delta J_0(\lambda r)\,d\lambda \simeq \underbrace{O_1 K_i^N(0) + P_1 K_i^N(\lambda_1) +}_{I_1}$$

$$\underbrace{+ R_1 K_i^{N'}(0) + S_1 K_i^{N'}(\lambda_1) +}_{I_1} \cdots + \underbrace{O_j K_i^N(\lambda_{j-1}) + P_j K_i^N(\lambda_j) +}_{I_j}$$

$$\underbrace{+ R_j K_i^{N'}(\lambda_{j-1}) + S_j K_i^{N'}(\lambda_j) +}_{I_j} \cdots + \underbrace{O_n K_i^N(\lambda_{n-1}) +}$$

$$\underbrace{+ P_n K_i^N(\lambda_n) + R_n K_i^{N'}(\lambda_{n-1}) + S_n K_i^{N'}(\lambda_n)}_{I_n}$$

$$O_j = \frac{2a_j - 3(\lambda_j + \lambda_{j-1})b_j + 6(\lambda_j \lambda_{j-1})c_j + (\lambda_j^3 - 3\lambda_j^2 \lambda_{j-1})d_j}{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^3}$$

$$P_j = \frac{-2a_j + 3(\lambda_j + \lambda_{j-1})b_j - 6(\lambda_j \lambda_{j-1})c_j - (\lambda_{j-1}^3 - 3\lambda_{j-1}^2 \lambda_j)d_j}{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^3}$$

$$R_j = \frac{a_j - (\lambda_{j-1} + 2\lambda_j)b_j + (2\lambda_j \lambda_{j-1} + \lambda_j^2)c_j - (\lambda_{j-1}\lambda_j^2)d_j}{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^2}$$

$$S_j = \frac{a_j - (2\lambda_{j-1} + \lambda_j)b_j + (2\lambda_j \lambda_{j-1} + \lambda_{j-1}^2)c_j - (\lambda_{j-1}^2 \lambda_j)d_j}{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^2}$$

Por último llamando:

$$\begin{aligned} D_0 &= O_1 \\ E_0 &= R_1 \\ \left.\begin{aligned} D_j &= P_j + O_{j+1} \\ E_j &= S_j + R_{j+1} \end{aligned}\right\} & j = 2, 3, \ldots N-1 \\ D_N &= O_N \\ E_N &= S_N \end{aligned}$$

La función de resistividad aparente (fórmula (1.54)) se transforma en:

$$\rho_a \simeq \rho_1 \left\{ 1 + \frac{2}{q} \sum_{i=0}^{N} \left[D_i K_1^N(\lambda_i) + E_i K_1^{N'}(\lambda_i) \right] \right\}$$

Un hecho importante que cabe hacer notar es que los coeficientes O_j, P_j, R_j, S_j y por lo tanto E_j y D_j no dependen en absoluto del modelo, dependen unicamente de las lambdas (λ) y del valor de las integrales a_j, b_j, c_j, d_j las cuales a su vez dependen solamente de las lambdas y de las separaciones entre electrodos. Toda la dependencia de la integral I_j (y por ende de ρ_a) con respecto al modelo de subsuelo propuesto, se encuentra en $K_1^N(\lambda_i)$, $K_1^N(\lambda_{i+1})$, $K_1^{N'}(\lambda_i)$, $K_1^{N'}(\lambda_{i+1})$.

De esta forma se han separado la dependencia del valor de ρ_a con respecto al modelo, de la dependencia con respecto al tipo de arreglo electródico. Así, para una serie de separaciones electródicas tomadas en el campo, pueden calcularse los coeficientes E_i, D_i y luego, haciendo uso de estos, probar diferentes modelos de subsuelo (que darán diferentes $K_1^N(\lambda)$) para obtener distintas curvas de resistividad aparente.

Se presenta a continuación una tabla comparativa de resultados.

Los resultados obtenidos por el método propuesto se comparan contra los obtenidos por:

1.-Método de Andersson,que utiliza la teoría de Filtro Lineal.

2.-Método Cubic,desarrollado por Lima.El método utiliza aproximación a la función kernel por tramos de parábolas cúbicas, tomando cuatro puntos de la función en vez de dos puntos con sus derivadas.

3.-Método Ushijima,que descompone la función kernel en series de potencias.

TABLA COMPARATIVA DE RESULTADOS

NUMERO DE CAPAS= 3

CAPA	RESISTIVIDAD	ESPESOR
1	1.000000	1.000
2	100.000000	50.000
3	0.100000	INFINITO

	AB/2	METODO PROPUESTO	ANDERSSON	CUBIC	USHIJIMA
1	0.20	1.00173	1.002310	1.00173	1.00217
2	0.40	1.01663	1.017793	1.01668	1.01758
3	0.70	1.08446	1.086426	1.08467	1.08600
4	1.00	1.21716	1.219741	1.17997	1.21924
5	2.00	1.98767	1.990493	1.94655	1.98982
6	4.00	3.85309	3.854631	3.83010	3.85468
7	7.00	6.56220	6.563155	6.55750	6.56728
8	10.00	9.13106	9.131615	9.09490	9.14411
9	20.00	16.77715	16.777750	16.62849	16.87669
10	40.00	28.39078	28.390368	28.33358	28.32602
11	70.00	38.17131	38 171745	37.91786	37.83561
12	100.00	41.02628	41.025391	40.59896	40.08451
13	200.00	28.61547	28.616802	29.54550	27.86496
14	400.00	5.71486	5.714548	10.65323	6.67959
15	700.00	0.35404	0.361018	0.62416	4.70820
16	1000.00	0.11245	0.112934	0.33915	-3.97579
17	2000.00	0.10171	0.100953	0.03273	10.77344
18	4000.00	0.10054	0.100252	0.16275	32.26324
19	7000.00	0.09991	0.100066	0.07815	48.96658
20	10000.00	0.09998	0.100022	0.03235	55.42330

TABLA COMPARATIVA DE RESULTADOS

NUMERO DE CAPAS= 3

CAPA	RESISTIVIDAD	ESPESOR
1	1.00	1.00
2	100.00	50.00
3	1.00	INFINITO

	AB/2	METODO PROPUESTO	ANDERSSON	CUBIC	USHIJIMA
1	0.20	1.00173	1.002310	1.00173	1.00217
2	0.40	1.01663	1.017793	1.01668	1.01758
3	0.70	1.08446	1.086426	1.08467	1.08600
4	1.00	1.21716	1.219741	1.17997	1.21924
5	2.00	1.98767	1.990496	1.94656	1.98982
6	4.00	3.85311	3.854655	3.83012	3.85468
7	7.00	6.56233	6.563282	6.55763	6.56729
8	10.00	9.13143	9.131986	9.09527	9.14414
9	20.00	16.78005	16.780653	16.63135	16.77329
10	40.00	28.41239	28.411970	28.35514	28.35059
11	70.00	38.26847	38.268887	38.01287	37.94814
12	100.00	41.25182	41.250935	40.81394	41.16051
13	200.00	29.35832	29.359634	30.25714	29.69090
14	400.00	6.82108	6.820766	11.69711	6.29019
15	700.00	1.35139	1.358172	1.63780	-1.12691
16	1000.00	1.05288	1.053393	1.28216	-4.95248
17	2000.00	1.01052	1.009722	0.94230	8.80986
18	4000.00	1.00265	1.002370	1.06471	24.52295
19	7000.00	1.00057	1.000746	0.97921	36.74951
20	10000.00	1.00031	1.000369	0.93322	41.47783

TABLA COMPARATIVA DE RESULTADOS

NUMERO DE CAPAS= 3

CAPA	RESISTIVIDAD	ESPESOR
1	1.00	1.00
2	0.01	50.00
3	100.00	INFINITO

	AB/2	METODO PROPUESTO	ANDERSSON	CUBIC	USHIJIMA
1	0.20	0.99870	0.998258	0.99870	0.99831
2	0.40	0.98758	0.986707	0.98757	0.98667
3	0.70	0.93853	0.937062	0.93848	0.93712
4	1.00	0.84794	0.846076	0.87501	0.84613
5	2.00	0.43835	0.436793	0.46166	0.43674
6	4.00	0.06222	0.062008	0.06532	0.06196
7	7.00	0.01183	0.011831	0.01066	0.01187
8	10.00	0.01038	0.010378	0.01240	0.01034
9	20.00	0.01025	0.010260	0.00982	0.01034
10	40.00	0.01130	0.011290	0.01156	0.01118
11	70.00	0.01499	0.014995	0.01491	0.01482
12	100.00	0.02025	0.020243	0.01977	0.01973
13	200.00	0.03998	0.039977	0.03894	0.03868
14	400.00	0.07992	0.079922	0.07110	0.07762
15	700.00	0.13978	0.139778	0.13379	0.13298
16	1000.00	0.19956	0.199562	0.19536	0.18955
17	2000.00	0.39833	0.398340	0.39677	0.32443
18	4000.00	0.79360	0.793583	0.79274	0.45581
19	7000.00	1.38075	1.380798	1.39271	0.51521
20	10000.00	1.96144	1.961433	1.96414	0.53377

Conclusiones

Se ha presentado en este trabajo un nuevo metodo para el calculo de curvas maestras de resistividad para Sondeos Electricos Verticales suponiendo un modelo unidimensional de subsuelo.

Los resultados obtenidos, muestran concordancia con los resultados proporcionados por el metodo de Anderson que es el mas utilizado actualmente.

El ruido numerico presente, es muy pequeno, aun para modelos con altos contrastes de resistividad, siendo sin embargo mayor que el presentado por el metodo de Andersson. Se esperan mejorar los resultados revisando cuidadosamente la presentacion de las ecuaciones.

Los contrastes de resistividad y espesor para los cuales este pequeno ruido aparece, no se encuentran en la naturaleza, por lo que puede decirse que el metodo se puede usar en forma muy confiable para fines de interpretacion real de datos geofiscos, ya que tiene la ventaja de poder simular las separaciones reales de los electrodos de corriente y de potencial.

Por otra lado se esta ya trabajando en la resolucion del problema inverso utilizando como base, la metodologia aqui desarrollada.

APENDICE I

Cálculo de las funciones Bessel

1. Función Bessel de primera clase orden cero

$0 \leq z \leq 13.0$ aproximadamente

$$J_0(z) = 1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{4}\right) - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{8}\right)^2 + \dots \quad \text{— } (A-1)$$

$13.0 < z < \infty$ se recomienda usar la aproximación asintótica.

$$J_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_0(z) \cos(z - \pi/4) - Q_0(z) \operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{4}) \right\} \text{ —} (A-2)$$

donde

$$P_0(z) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! \cdot 8^2 \cdot z^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4! \cdot 8^4 \cdot z^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2}{6! \cdot 8^6 \cdot z^6} + \dots \quad (A-3)$$

$$Q_0(z) = \frac{1}{1! \cdot 8 \cdot z} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! \cdot 8^3 \cdot z^3} + \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{5! \cdot 8^5 \cdot z^5} - \dots \quad (A-4)$$

2. Función Bessel de primera clase de orden uno

$0 \leq z \leq 13.0$

$$J_1(z) = \frac{z}{2} - \frac{z}{2} \cdot \frac{z^2}{2 \cdot 4} + \frac{z}{2} \cdot \frac{z^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^2}{4 \cdot 6} - \frac{z}{2} \cdot \frac{z^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{z^2}{6 \cdot 8} + \dots \quad (A-5)$$

$13.0 < z < \infty$ se recomienda usar la aproximación asintótica

$$J_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_0(z) \cos(z + \frac{\pi}{4}) - Q_0(z) \operatorname{sen}(z + \frac{\pi}{4}) \right\} \cdot\cdot (A-6)$$

donde

$$P_0(z) = 1 - \frac{(4-1^2) \cdot (4-3^2)}{2! \cdot 8^2 \cdot z^2} + \frac{(4-1^2) \cdot (4-3^2) \cdot (4-5^2) \cdot (4-7^2)}{4! \cdot 8^4 \cdot z^4} - \cdots (A-7)$$

$$Q_0(z) = \frac{(4-1^2)}{1! \cdot 8 \cdot z} - \frac{(4-1^2) \cdot (4-3^2) \cdot (4-5^2)}{3! \cdot 8^3 \cdot z^3} + \frac{(4-1)^2 \cdot (4-3^2) \cdot (4-5^2) \cdot (4-7^2) \cdot (4-9^2)}{5! \cdot 8^5 \cdot z^5} - \dots \quad (A-8)$$

3. Función de Struve de orden cero

$0 \leq z \leq 13.0$

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{z}{1^2} - \frac{z^3}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{z^5}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \cdots \right\} \qquad (A-9)$$

$13.0 < z < \infty$

$$H_0(z) = Y_0(z) + \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \frac{3^2}{z^5} - \frac{3^2 \cdot 5^2}{z^7} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{z^9} - \cdots + \right\} \qquad (A-10)$$

4. Función de Struve de orden uno

$0 \leq z \leq 13.0$

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{z^2}{1^2 \cdot 3} - \frac{z^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{z^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \cdots \right\} \qquad (A-11)$$

$13.0 < z < \infty$

$$H_1(z) = Y_1(z) + \frac{2}{\pi}\left\{ 1 + \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z^4} + \frac{3^2 \cdot 5}{z^6} - \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{z^8} + \cdots \right\} \qquad (A-12)$$

5. Funciones de Bessel de segunda clase orden cero

$0 \leq z \leq 13.0$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\left\{ X + \frac{z^2}{2^2}\left[1 - X\right] - \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2}\left[1 + \frac{1}{2} - X\right] + \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - X\right] \cdots \right\} \qquad (A-13)$$

$$X = \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \qquad (A-14)$$

$\gamma = 0.5772156649015\,33$: cte. de Euler (A-15)

$13 < z < \infty$

$$Y_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{ \rho_0(z) \cdot \text{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \xi_0(z) \cdot \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \qquad (A-16)$$

donde $\rho_0(z)$ y $\xi_0(z)$ son calculadas utilizando (A-3) y (A-4) respectivamente.

6. Funciones de Bessel de segunda clase de orden uno.

$0 \leq z \leq 13.0$

$$Y_1(z) = -\frac{2}{\pi z} + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{z}{2}\left[\frac{1}{2} - X\right] + \frac{z^3}{2^2 \cdot 4}\left[\frac{2+\frac{1}{2}}{2} - X\right] - \frac{z^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6}\left[\frac{2\cdot(1+\frac{1}{2})}{2} - X\right] \cdots\right\} \qquad (A-17)$$

donde X está definida en (A-14)

$13 < z \leq \infty$

$$Y_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \left\{ \xi_0(z) \cdot \operatorname{sen}(z + \tfrac{\pi}{4}) + \varrho_0(z) \cdot \operatorname{sen}(z + \tfrac{\pi}{4}) \right\} \qquad (A-18)$$

donde $\xi_0(z)$ y $\varrho_0(z)$ están definidas por (A-7) y (A-8) respectivamente.

[illegible]

Argelo, S. M., (1967), " Two computer programs for the calculation of standard graphs for resistivity prospecting ", Geophys. Prosp., V. 15, No. 1, pp 71-79.

Arfken, G., (1970). "Mathematical Methods for Physicists ". Academic Press, New York.

Ehrenburg, D. O. and Watson, R. J., (1932), "Mathematical teory of electrical flow in stratified media with horizontal, homogeneous and isotropical layers", Trans. Am. Inst. Min. Metall. Eng., pp. 423-442.

Glogovsky, V., and Katz, S., (1960), "Computataion of Theoretical V. E. S. curves with a high resistance bed in the section ". Inst. Neft. Gaz. Promy., No. 31, pp. 197-201.

Gosh, D. P., (1971) " The aplication of Linerar Filter Theory to the direct interpretation of Geoelectrical Resistivity Measurements ", Geoph. Prosp., V. 19, No. 2, pp. 192-217.

Grant, F. S. and West, G. F., (1976), "Interpretation Theory in Applied Geophysics. " International Series in the Earth Sciences.

Keller, G. V. and Frischknecht, F. C. (1966). " Electrical Methods in Geophisical Prospecting ". Pergamon Press Oxford, Londres.

Koefoed, O., (1979), " Geosoundig Principles, 1. Resistivity Sounding Measurements", Elsevier Scientific Publishing Company.

Lima, E. (1979), "A New Method for the Calculation of Apparent Resistivity Curves of Horizontal Multilayered Models", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ. Japan. V. 39, No. 3, pp. 115-128.

Lima, E. (1979) b) " Deriving Recurrence Formulas for the Eigenfinction for Each Layer of Horizontally Multilayered Earth Models", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ. Japan, V. 39, No. 4, pp. 183-192.

Lima, E. (1979) c) "Matching Kernel Function Curves in Order to Interprat Field Resistivity Data", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ. Japan, V. 40, No. 2, pp. 134-148.

Mc Lachlan, N. W., (1955), "Bessel Functions for Engineers", Oxford at the Clarendon Press.

Mooney, H. M. and Wetzel, W. W. (1956), "The Potential About a Point Electrode and Apparent Resistivity Curves for two-thee and fourth Layered Models of Earth, Uiversity of Minesota Press. pp. 146.

Orellana, E. (1982) "Prospeccion Electrica en Corriente Continua ", Paraninfo, Madrid.

Parkhomenko, E. I. (1967). "Electreal Properties of Rocks" Planum Press. New York.

Stefanescu, S. S. and Schlumberger, C. and M. (1930). "Sur la distribution electrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain a couches horizontales, homogenes et isotropes, Jour. Physique et le Radium , V. 1, pp. 132-140.

Van-Dam, J. C. , (1965) . "A simple method for the calculation of standard graphs to be used in geo-electrical prospecting ", Geophys. Prosp. V. 13, No 1, pp 37-65.