

7 Ejecut.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS



**CLASIFICACION ALGEBRAICA DE PETROV DEL
TENSOR DE DUREZA DE LA MECANICA
DEL MEDIO CONTINUO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A

GUSTAVO MAURICIO BASTIEN MONTOYA

MEXICO, D. F.

1981



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	4

CAPITULO I

1.- Esfuerzos	7
2.- Equilibrio de fuerzas y simetría del tensor de esfuerzos	11
3.- Ejes principales, invariantes y tensores distorsional y esférico	14
4.- Deformaciones	18

CAPITULO II

1.- Sólido elástico y fluido viscoso ideal	26
2.- Tensor isotrópico y energía de deformación	32
3.- Caso de un plano de simetría	38
4.- Caso de tres planos de simetría	43
5.- Caso Isotrópico	45

CAPITULO III

1.- Clasificación de Petrov del Tensor de Dureza	53
2.- El espinor fundamental	56
3.- Conexión entre espinores y tensores	59
4.- Teorema de Sachs	64

	Pág.
5.- Clasificación del tensor de dureza.....	71
6.- Conclusiones.....	81
 BIBLIOGRAFIA.....	 83

INTRODUCCION

A diferencia de la mecánica de la partícula y del cuerpo rígido, la mecánica del medio continuo estudia materiales sometidos a flexiones, tensiones, torsiones, compresiones o bien, flujos de líquidos y gases; sobre ellos hemos adoptado la convención de considerarlos continuos debido a -- que la separación entre moléculas es despreciable macroscópicamente; -- además suponemos que estos medios continuos gozan de otra propiedad -- llamada isotropía; o sea que no existen direcciones preferenciales en ellos, esta propiedad la supondremos a lo largo de este trabajo a menos que se especifique lo contrario.

La mecánica del medio continuo estudia esfuerzos y deformaciones sobre gases, líquidos y sólidos, así como la relación entre estas dos magnitudes, al aplicar una fuerza sobre un material provocamos un esfuerzo que a su vez le produce una deformación, lo que nos permite ver que en efecto existe una relación causal que se reflejará como una relación matemática entre esfuerzos y deformaciones.

Ahora bien la relación entre estas magnitudes recibe el nombre de ecuaciones constitutivas de la mecánica del medio continuo y forman parte de la familia más amplia de ecuaciones llamadas ecuaciones constitutivas, en general que podríamos decir, son las relaciones empíricas que nos permiten conocer agentes externos, que representan a los elementos axiomáticos de toda teoría dinámica, cuya realidad objetiva se postula pero que -

no es posible medirlos directamente sino solamente a través de los efectos que provocan sobre la materia.

Sin tanto rigor las ecuaciones constitutivas nos permiten conocer a los agentes externos a través de sus efectos, veamos algunos ejemplos que ilustran esto.

La ecuación de Newton

$$F = - \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

es claramente de este tipo ya que nos permite conocer a la fuerza -agente externo- a través de un parámetro mucho muy distinto a ella como es la distancia entre dos cuerpos, de esta manera establecemos una función entre la magnitud de la fuerza y la separación entre los cuerpos que sienten esta -- atracción.

La ecuación de Fourier para el flujo de calor en la materia nos ofrece otra ecuación constitutiva.

$$\vec{q} = -K \nabla \theta$$

Donde \vec{q} es el flujo de calor que no podemos medir directamente, lo que si podemos medir y con precisión es el cambio de la temperatura, representada matemáticamente por θ , siendo K una constante. Establecemos así una función entre el flujo de calor y el gradiente de temperatura.

Por último llegamos a las ecuaciones que nos interesan sin nombre -

especial asociado a ellas y conocidas simplemente como ecuaciones constitutivas de la mecánica del medio continuo, la notación usual es la siguiente.

$$\sigma_{ij} = E^{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Donde σ^{ij} es el tensor de esfuerzos que no se puede medir directamente; en cambio si podemos medir las deformaciones representadas por el tensor ϵ_{kl} , estas ecuaciones contienen al tensor de cuarto orden E^{ijkl} , conocido como tensor de dureza y es el factor que nos dice la manera en que responde un material a determinado esfuerzo.

Conocer el tensor de dureza nos permite conocer las ecuaciones de balance, lo que a su vez nos permite conocer un determinado material. Claramente el número de ecuaciones constitutivas es grande pero aún así podemos preguntarnos ¿Cuántas ecuaciones constitutivas de la mecánica del medio continuo existen?, ¿Se puede decir algo de ellas en general antes de experimentar?.

Es precisamente el objeto de éste trabajo el efectuar un estudio teórico acerca del tensor de dureza E^{ijkl} , con el fin de establecer la forma de las ecuaciones constitutivas de la mecánica del medio continuo.

Cabe señalar un punto acerca de las ecuaciones constitutivas que hemos visto, todas ellas tienen la característica de ser o bien lineales o cuadráticas lo que nos da idea de la dificultad de las ecuaciones constitutivas, en este trabajo nos restringiremos únicamente a las ecuaciones constitutivas lineales de la mecánica del medio continuo.

CAPITULO I

1.- Esfuerzos.

Ya que el trabajo se refiere a ecuaciones en las que intervienen es - fuerzos y deformaciones, haremos una revisión de estos conceptos desta - cando los aspectos fundamentales unicamente.

Sobre un material deformable pueden actuar dos tipos de fuerzas: - De cuerpo y de superficie, las de cuerpo actúan sobre toda la masa contenida - en el cuerpo, de ahí su nombre, como ejemplo de estas fuerzas podemos - mencionar la fuerza de gravedad. Las fuerzas de superficie actúan sobre - la frontera del cuerpo y son regularmente fuerzas de contacto. Introduzca - mos una notación conveniente para su estudio.

Dependiendo del dominio de acción, las variables pueden ser clasifica - das como intensivas y extensivas, si actúan sobre todo el cuerpo se deno - minan extensivas mientras que si lo hacen por unidad de volumen o superfi - cie -es decir si no dependen de todo el volumen- se denominan intensivas, - trataremos de utilizar variables intensivas con el fin de abstraernos del vo - lumen total.

Definiremos a \bar{b} como la fuerza de cuerpo por unidad de volumen - en un punto dado, esto tiene varias implicaciones matemáticas; sea \bar{f} la - fuerza de cuerpo y $\Delta\bar{f}$ la fuerza de cuerpo que actúa en el volumen - postulamos que

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{f}}{\Delta V} = \bar{b} \quad \dots\dots\dots I-1-1$$

y esto para cada punto del medio continuo, de tal manera que la integral - sobre el volumen total nos dará la fuerza total sobre el cuerpo, si \bar{f} es la fuerza total

$$\bar{f} = \hat{e}_x \int_V \rho b_x dv = \int_V \rho \bar{b} dv \quad \dots\dots\dots I-1-2$$

donde ρ es la densidad, y en general

$$\bar{b} \equiv \bar{b}(\bar{r}, t)$$

Por lo tanto la integral anterior es la suma vectorial en un instante.

En cuanto a las fuerzas superficiales podemos definir \bar{t} como:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \bar{t} \quad \dots\dots\dots I-1-3$$

donde ΔS es el elemento de superficie.

Considerando al igual que en la fuerza por unidad de volumen que el límite existe y que podemos obtenerlo en cualquier punto; como este vector está asociado a una dirección definida por la normal a ΔS , escribiremos $\bar{t}^{(n)}$ para recalcar el hecho de que \bar{t} está asociado a la dirección \bar{n} . En un punto del medio continuo existe un infinito de parejas $\bar{t}^{(n)}$ y \bar{n} que nos describen el estado de esfuerzos en ese punto, pero para conocer este estado de esfuerzos solo necesitamos conocer tres parejas de este tipo, -

eligiremos los tres planos perpendiculares a los tres ejes coordenados y con sus vectores de esfuerzo $t^{(e_i)}$ describiremos el estado de esfuerzos en un punto dado.

Consideremos entonces que por cada uno de los planos perpendiculares que contiene el punto que nos interesa pasa un vector de esfuerzo - que por supuesto tiene una descomposición en componentes ortogonales.

$$t^{(e_i)} = t_1^{(\hat{e}_i)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_i)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_i)} \hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_i)} \hat{e}_j$$

etc.

De tal manera que podemos escribir las nueve componentes de los tres vectores de la siguiente manera

$$t_j^{(e_i)} = \sigma_{ij} \quad * \quad \dots\dots\dots 1-1-5$$

σ_{ij} se conoce como el tensor de esfuerzos y veremos enseguida como nos permite conocer cualquier vector $t^{(n)}$.

Consideremos dentro del cuerpo deformable un pequeño tetraedro en equilibrio formado por los tres planos coordenados y un cuarto que une a los anteriores con vector normal unitario \hat{n} , mientras que para las - - otras tres caras serán $-\hat{e}_1, -\hat{e}_2$ y $-\hat{e}_3$, $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ serán las áreas respectivas de estas caras y ΔS el área de la cara que no pasa por - el vértice. Sea ΔV su volumen y Δh su altura.

* Aquí ya no haremos la distinción entre índices covariantes y contravariantes.

El tetraedro esta sujeto a la fuerza \bar{F} por lo que podemos escribir

$$\bar{F} = m\bar{a} = \rho \Delta V \bar{a} = -\frac{1}{3} \rho (\Delta h \Delta S) \bar{a} \dots\dots\dots I-1-6$$

que debe equilibrarse con las fuerzas superficiales que calcularemos a - -
continuación:

Para calcularlas démonos cuenta que

$$\Delta S_i = \Delta S (\hat{n} \cdot \hat{e}_i) = \Delta S \cos(\hat{n}, \hat{e}_i) \dots\dots\dots I-1-7a$$

$$\Delta S_i = \Delta S \hat{n}_i \dots\dots\dots I-1-7b$$

Como el tetraedro está en equilibrio debemos escribir

$$t_i^{(n)} \Delta S - t_i^{(\hat{e}_1)} \Delta S_1 - t_i^{(\hat{e}_2)} \Delta S_2 - t_i^{(\hat{e}_3)} \Delta S_3 + \frac{1}{3} \rho (\Delta h \Delta S) \bar{a} = 0 \dots\dots\dots I-1-8$$

o bien de acuerdo a I-1-8 y dividiendo entre ΔS

$$t_i^n - t_i^{(\hat{e}_1)} n_1 - t_i^{(\hat{e}_2)} n_2 - t_i^{(\hat{e}_3)} n_3 = -\frac{1}{3} \rho \Delta h \bar{a} \dots\dots\dots I-1-9$$

Reduzcamos las dimensiones del tetraedro en la misma proporción,
obtenemos que $\Delta h \rightarrow 0$ por lo que en el limite tenemos:

$$t_i^{(n)} = t_i^{(\hat{e}_1)} n_1 + t_i^{(\hat{e}_2)} n_2 + t_i^{(\hat{e}_3)} n_3$$

Y si recordamos la definición I-1-5 la identidad anterior nos que
da

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j \dots\dots\dots 1-1-10$$

expresión que nos dice como obtener el vector de esfuerzo en dirección de la normal \hat{n} a partir del tensor de esfuerzos σ_{ij} :

Como ejemplo podemos calcular la primer componente de la manera siguiente:

$$t_1^{(n)} = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31} \dots\dots\dots 1-1-11$$

2. - Equilibrio de Fuerzas y simetría del tensor de esfuerzos.

En un volumen arbitrario V de un medio continuo existen fuerzas superficiales y de cuerpo que si estan en equilibrio deben cumplir ciertas ecuaciones llamadas ecuaciones de equilibrio.

La suma de fuerzas de cuerpo y superficiales es

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dv = 0 \dots\dots\dots 1-2-1$$

igualada a cero por condiciones de equilibrio, la podemos escribir como -

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho b_i dv \dots\dots\dots 1-2-2-$$

recordando el teorema de Gauss :

$$\int_S T_{ij} \dots n_j dS = \int_V T_{ij} \dots P dv \dots\dots\dots I-2-3$$

yaplicando este teorema a I-2-2 obtenemos

$$\int_V \nabla_j \sigma_{ij} dv + \int_V \rho b_i dv = 0 \dots\dots\dots I-2-4$$

o bien agrupando términos

$$\int (\nabla_j \sigma_{ij} + \rho b_i) dv = 0$$

pero como la integral es sobre un volumen arbitrario del cuerpo obtenemos.

$$\nabla_j \sigma_{ij} + \rho b_i = 0 \dots\dots\dots I-2-5$$

Conocidas como ecuaciones de equilibrio. de un medio continuo.

El equilibrio de momentos requiere otras condiciones.

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{jk} n_k + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dv = 0 \dots\dots\dots I-2-6$$

\vec{x} es el vector de posición de los elementos de superficie y de volumen y aplicando I-2-3 y I-2-5 obtenemos

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dv = 0 \dots\dots\dots I-2-7$$

y como la integral es válida en un volumen arbitrario tenemos que

$$\epsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

pero $\epsilon_{ijk} T_{jk}$ es el vector dual del tensor T_{jk} que solo depende de su parte antisimétrica, podemos entonces concluir que la igualdad 1-2-8 implica que T_{jk} es un tensor simétrico, hecho que será de primera importancia en nuestro estudio de las ecuaciones constitutivas.

Veamos ahora las distintas clases de notaciones para este tensor, una de las más comunes es la siguiente.

$$\|T_{ji}\| = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

De donde podemos escribir

$$t^{(e_1)} = \sigma_x e_1 + \tau_{xy} e_2 + \tau_{xz} e_3$$

para interpretar físicamente los términos de este tensor multipliquemos - escalarmente por \hat{e}_1 , la ecuación 1-2-10

$$t^{(e_1)} \cdot \hat{e}_1 = \sigma_x$$

es decir σ_x es la componente normal del esfuerzo sobre el plano per-

pendicular al eje x , de la misma manera $\tau_{y_1 y_2}$ son los esfuerzos normales paralelos al eje y_1 respectivamente, mientras que si la ecuación 1-2-10 la multiplicamos por \hat{e}_2 obtenemos

$$t^{(e)} \cdot \hat{e}_2 = \tau_{xy} \dots\dots\dots 1-2-12$$

ecuación que nos dice que τ_{xy} es la componente tangencial del esfuerzo sobre un elemento de superficie normal al eje X y dirigida en sentido del eje y , lo mismo puede hacerse para los demás términos τ que son llamados esfuerzos tangenciales o cortantes en los que el primer subíndice indica a que eje es perpendicular el plano sobre el que actúa, mientras que el segundo nos indica la dirección del esfuerzo.

3. - Ejes Principales, Invariantes y Tensores Distorsional y Esférico.

Siempre es posible encontrar un sistema de ejes en un punto de tal manera que desaparezcan los esfuerzos normales, cuando los esfuerzos se refieran a este sistema de ejes. Este sistema especial de ejes se llama de ejes principales. En un plano perpendicular a un eje principal el vector de esfuerzo es normal, los planos que pasan por el punto perpendiculares a los tres ejes se llaman planos principales, a continuación veremos el método para encontrar los ejes principales: como no hay esfuerzos tangenciales podemos escribir el vector de esfuerzo como: $t^{(n)} = \lambda \hat{n}$, o bien usando lo visto en el capítulo anterior

$$\sigma_{rs} n_r = \lambda n_s \quad \dots\dots\dots 1-3-1$$

o equivalentemente: $(\sigma_{rs} - \lambda \delta_{rs}) n_r \quad \dots\dots\dots 1-3-2$

estas son tres ecuaciones con cuatro incógnitas que son los tres cosenos-directores y λ , conocida esta última variable como valor del esfuerzo principal.

Pero además tenemos que se debe satisfacer la ecuación.

$$n_i n_i = 1 \quad \dots\dots\dots 1-3-3$$

ya que los vectores n_i , por definición son unitarios para las soluciones de la ecuación 1-3-2 distintas de la trivial debe ocurrir que

$$|\sigma_{rs} - \lambda \delta_{rs}| = 0 \quad \dots\dots\dots 1-3-4$$

que desarrollada nos da un polinomio de grado 3 en λ

$$\lambda^3 - I_T \lambda^2 - II_T \lambda - III_T = 0 \quad \dots\dots\dots 1-3-5$$

donde I_T, II_T, III_T son conocidos como primer, segundo y tercer invariante de tensión, respectivamente que tienen el siguiente significado:

$$I_T = \bar{\sigma}_{kk} \dots\dots\dots I-3-6a$$

$$II_T = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ii} \bar{\sigma}_{jj}) \dots\dots\dots I-3-6b$$

$$III = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} \bar{\sigma}_{ip} \bar{\sigma}_{jq} \bar{\sigma}_{ra} \dots\dots\dots I-3-6c$$

las tres raíces de I-3-5 son los valores de los esfuerzos principales y asociado a cada una de ellas hay una dirección principal quedando especificadas por la ecuación:

$$(\sigma_{ij} - \lambda_{(n)} \delta_{ij}) n_j^{(k)} = 0 \dots\dots\dots I-3-7$$

desde luego en un sistema de ejes principales el tensor de esfuerzos es diagonal, un procedimiento alternativo para la solución de I-3-5 consiste en utilizar el tensor esférico y distorsional.

Denotemos con $\bar{\sigma}$ el esfuerzo medio normal y con p a la presión normal media

$$\bar{\sigma} = -p = \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}) = \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{kk} \dots\dots\dots I-3-8$$

esto nos permite escribir el tensor de esfuerzos como la suma de dos tensores, uno en el que cada esfuerzo normal sea $-p$ y el esfuerzo tangencial cero y el otro, llamado tensor de esfuerzos distorsional $\bar{\sigma}'$, el tensor $\bar{\sigma}_{ij}$ es

$$\sigma \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \dots\dots\dots \text{I-3-9}$$

y el distorsional τ' es

$$\tau'_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} - \sigma & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma \end{pmatrix} \dots\dots \text{I-3-10}$$

de tal manera que podemos escribir al tensor σ_{ij} como

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3} + \tau'_{ij} \dots\dots\dots \text{I-3-11}$$

o bien

$$\tau'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} \dots\dots\dots \text{I-3-12}$$

es interesante notar que las direcciones principales del tensor distorsional son las mismas que las del tensor de esfuerzos, los esfuerzos distorsionales principales son

$$\tau'_k = \sigma_k - \sigma = \sigma_k + p \dots\dots\dots \text{I-3-13}$$

en problemas tridimensionales es más fácil encontrar los esfuerzos principales para σ' y después usar I-3-13 para calcular los de τ'_{ij} ya que en la ecuación cúbica para λ , desaparece el término cuadrático y es más fácil resolverla, la forma que presenta es:

$$\lambda^3 - \text{II}_T \lambda - \text{III}_T = 0 \dots\dots\dots \text{I-3-14}$$

donde $\text{I}_T = 0$, II_T , III_T son los invariantes del tensor τ^{-1} .

4. - Deformaciones.

Asi como existe un tensor de esfuerzos que nos indica la fuerza ejercida en cada punto del medio continuo, también existe el tensor de deformación unitaria que nos dice como se deforma -por unidad de longitud- el medio es decir como cambia la forma del cuerpo.

Consideremos un cuerpo que ocupa un volumen V y un sistema de coordenadas con origen \bar{O} .

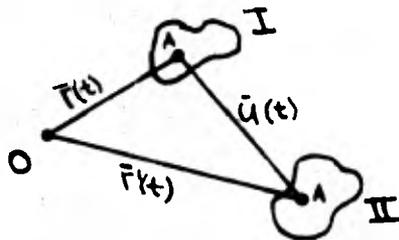


Figura I

El cuerpo antes de la deformación ocupa un cierto volumen y tiene la forma I, después de la deformación tendrá la forma II. En ambos casos podemos tener el vector de posición del punto A, $\bar{r}(t)$ antes de la deformación y $\bar{r}'(t)$ después de ella, de la figura I se tiene que los vectores $\bar{r}(t)$ y $\bar{r}'(t)$ de la partícula A se pueden ligar mediante la ecuación

$$\bar{r}'(t) = \bar{r}(t) + \bar{u} \dots\dots\dots \text{I-4-1}$$

donde $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$ es el vector de deformación que claramente depende del punto que estemos tratando así como del instante en que lo hagamos.

El vector \bar{u} es un campo vectorial que necesitamos conocer para describir adecuadamente la deformación del medio pero como solo nos interesa la forma inicial y la final sin importar la causa que produjeron el cambio, dejaremos a un lado el problema de encontrar \bar{u} .

Consideremos una deformación infinitesimal en la que puntos próximos* antes de ésta queden igualmente próximos después de ella; sean sus vectores de posición \bar{r}_1 y \bar{r}_2 si son próximos tenemos que $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \Delta \bar{r}$ es muy pequeño, igualmente $\bar{r}'_2 - \bar{r}'_1 = \Delta \bar{r}'$ es muy pequeño de tal manera que

$$\Delta \bar{r}' = \Delta \bar{r} + \Delta \bar{u} \dots\dots\dots 1-4-2$$

si tomamos el límite cuando los puntos son muy próximos obtenemos.

$$d\bar{r}' = d\bar{r} + (d\bar{r} \cdot \nabla) \bar{u} \dots\dots\dots 1-4-3$$

Podemos pensar que estamos frente a una transformación de coordenadas de tal manera que la ecuación anterior nos queda

$$dy^i = dx^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k \dots\dots\dots 1-4-4$$

* Más adelante quedara claro el significado de esta frase.

o bien

$$dy^i = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) dx^k$$

recordemos que en una transformación de coordenadas $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \dots\dots\dots 1-4-6$$

de donde concluimos que 1-4-5 es una transformación de coordenadas - -
donde.

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) \dots\dots\dots 1-4-7$$

En este punto es conveniente introducir el concepto de distancia ya-
que al compararla entre dos puntos antes y después de la deformación nos-
da una medida de esta.

$$dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \dots\dots\dots 1-4-8$$

Sea

$$dl'^2 = \delta_{ij} dy^i dy^j \dots\dots\dots 1-4-9$$

y

Donde la prima refleja la posición deformada. Para llegar a una -
medida escribamos 1-4-9 como sigue:

$$dl'^2 = \delta_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} dx^k dx^l \dots\dots\dots 1-4-10$$

y utilizando I-4-7 obtenemos la siguiente expresión para dl'^2

$$dl'^2 = \delta_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right) \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x^l} \right) dx^k dx^l \dots\dots\dots I-4-11$$

Llevando a cabo las operaciones obtenemos

$$dl'^2 = \delta_{kl} dx^k dx^l + \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right) dx^k dx^l + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \frac{\partial u_j}{\partial x^l} dx^k dx^l \dots\dots\dots I-4-12$$

Si despreciamos el último término de la ecuación anterior ya que implica variaciones de segundo orden, que no estamos tomando en cuenta en éste estudio, obtenemos

$$dl' = dl^2 + 2\epsilon_{kl} dx^k dx^l \dots\dots\dots I-4-13$$

donde

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right) \dots\dots\dots I-4-14$$

es el tensor de deformación unitario, también podemos escribir

$$dl'^2 = (\delta_{ij} + 2\epsilon_{ij}) dx^i dx^j \dots\dots\dots I-4-15$$

más aún si hacemos $g_{ij} = (\delta_{ij} + 2\epsilon_{ij})$; un tensor métrico podemos escribir finalmente la expresión I-4-9

$$dl'^2 = g_{ij} dx^i dx^j \dots\dots\dots I-4-16$$

Expliquemos ahora el significado de la frase "puntos próximos", en la igualdad I-4-12 despreciamos el último término por ser de segundo orden, si los puntos no hubiesen estado lo suficientemente próximos no lo hubiéramos podido hacer. El razonamiento anterior es válido para transformarlo.

nes infinitesimales, aunque de ningún modo nos restringimos solo a esta -
clase de transformaciones ya que cualquier otra la podemos expresarla en -
términos de una familia de infinitesimales.

La manera de hacerlo es la siguiente: Pensemos en un punto del - -
cuerpo para facilidad en nuestro razonamiento pero es claro que lo pode - -
mos ampliar para todos los que se quieran. Definamos una "Linea de de - -
formación" como aquella trayectoria que sigue una partícula para pasar de
una posición inicial a una final.



Fig. 2

Cualquier transformación o deformación del cuerpo la podemos es -
cribir como un mapeo que constará de dos partes: una que describa las ro -
taciones y deformaciones que el cuerpo sufra y otra que nos describa las -
traslaciones que puedan existir, de tal manera que podemos escribir.

$$M(x_i) : X_0^i \rightarrow x^i$$

Si \bar{r} es el vector de posición del punto x^i tenemos

$$\bar{r} = M \cdot \bar{r}_0 + \bar{b} \cdot \bar{r}_0 \dots\dots\dots 1-4-17$$

donde M al ser aplicada sobre \bar{r}_0 nos describe las rotaciones y -
las deformaciones y \bar{b} nos describe las traslaciones, como vemos M -

depende de una serie de parámetros α_i ; cuyo número depende generalmente de la dimensión del espacio en que se realice el mapeo.

Veamos por último como toda deformación del cuerpo se puede escribir mediante aplicaciones sucesivas cuerpo se puede escribir mediante aplicaciones sucesivas de mapeos de la siguiente manera:

sea $\epsilon = \frac{\alpha}{N} \times$ I-4-18

donde α es el o los parámetros de que depende la transformación, denotado así por comodidad en la escritura, N es un número natural y \times nos representa una parte infinitesimal de la transformación.

sea $\bar{\Delta} = \frac{\alpha}{N} \bar{x}$ I-1-1a

Al sustituir la expresión I-4-8 y I-14-19 en la I-4-17 obtenemos:

$$\bar{r}' = (\mathbb{1} + \epsilon) \cdot \bar{r}_0 + \bar{\Delta} \bar{r}_0$$

Ahora si aproximamos la línea de deformación mediante un polígono de deformación con sucesivos rectores de posición $\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''$ etc.,

obtenemos $\bar{r}' = (\mathbb{1} + \epsilon) \cdot \bar{r}_0 + \bar{\Delta} \cdot \bar{r}_0$

$$\bar{r}' = (\mathbb{1} + \frac{\alpha}{N} \times + \frac{\alpha}{N}) \cdot \bar{r}_0 \quad \text{o bien}$$

$$\bar{r}'' = (\mathbb{1} + \frac{\alpha}{N} \times + \frac{\alpha}{N}) \cdot \bar{r}' \quad \text{o bien}$$

$$\bar{r}'' = (\mathbb{1} + \frac{\alpha}{N} \times + \frac{\alpha}{N}) \cdot \bar{r}_0$$

Esto como ya vimos es una aproximación poligonal a la línea de de-
formación y podemos aproximarla a nuestras necesidades, más aún si ha-
cemos que tienda a infinito logramos una igualdad entre la línea y el po-
ligono

$$\bar{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{N} x + \frac{\alpha}{N} x \right)^N \cdot \bar{r}_0$$

que podemos describir como:

$$\bar{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{N} [x + x] \right)^N \cdot \bar{r}_0$$

Esto nos servirá para llegar a la expresión final ya que por defini-
ción

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

entonces

$$\bar{r} = \exp[\alpha (x + x)] \cdot \bar{r}_0$$

de donde

$$\bar{r} = e^{\alpha x} \cdot \bar{r}_0 + \bar{b}$$

en la que

$$\bar{b} = e^{\alpha x} \cdot \bar{r}_0 - 1$$

es decir

$$M = e^{\alpha x}$$

Con lo que demostramos que cualquier deformación se puede escri-
bir en términos de una sucesión de transformaciones infinitesimales en la -
que ϵ representa la parte infinitesimal.

Hasta aquí el estudio que haremos de esfuerzos y deformaciones, en la siguiente sección nos ocuparemos de las ecuaciones constitutivas - de la mecánica del medio continuo

CAPITULO II

1. - Sólido elástico y fluido viscoso ideal.

En el capítulo anterior nos ocupamos de esfuerzos-deformaciones por separado, ahora consideraremos materiales específicos en los que estableceremos relaciones entre estos dos conceptos, las ecuaciones que caracterizan un material individual y su respuesta a las fuerzas aplicadas se llaman ecuaciones constitutivas, debido a que describen la conducta macroscópica del medio a partir de su constitución interna.

La conducta de los medios continuos es mucho muy compleja y depende del dominio de los esfuerzos y de la temperatura por lo que es posible únicamente establecer ecuaciones constitutivas en pequeños intervalos de respuesta y temperatura, así aun material le asociamos varias ecuaciones constitutivas o bien abstraemos aspectos del comportamiento de un material y formulamos ecuaciones sobre medios ideales para tener una primera aproximación y más tarde introducir modificaciones para adecuarnos al caso real.

Ilustraremos esto último con algunas ecuaciones sencillas.

Comencemos con la elasticidad lineal que es la propiedad que tienen los cuerpos cuyas deformaciones son proporcionales a los esfuerzos locales; desde luego esta afirmación es válida sólo en cierto dominio que depende del material, pero si trabajamos con esfuerzos muy pequeños podemos conside-

rar que casi todos los materiales son elásticos; existe un factor que nos relaciona las deformaciones con los esfuerzos y depende fundamentalmente del material y la temperatura.

Apliquemos un esfuerzo isotrópico $d\tau$ a un volumen V de sustancia, recordemos que los esfuerzos isotrópicos tienen como único efecto cambiar el volumen del medio, si el cambio fue dV tenemos

$$d\tau = E \frac{dV}{V}$$

donde E es el factor de proporcionalidad llamado en este caso módulo de elasticidad. Para llegar a una relación entre el esfuerzo y la deformación hagamos lo siguiente: Sea $\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$ la deformación longitudinal unitaria, ahora supongamos que un paralelepípedo sufra deformaciones longitudinales unitarias $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ siendo sus lados a, b, c , de tal manera que el nuevo volumen es

$$\begin{aligned} a(1 + \epsilon_a) b(1 + \epsilon_b) c(1 + \epsilon_c) &\approx \\ \approx abc(1 + \epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) \end{aligned}$$

suponiendo esto último a partir de que las ϵ 's son muy pequeñas, si el cambio lo obtenemos a partir de una deformación isotrópica ϵ tendríamos

$$abc(1 + \epsilon)^3 \approx abc(1 + 3\epsilon) \dots\dots\dots 2-1-2$$

esta última expresión la podemos escribir como

$$\frac{V+dv}{V} = (1 + d\epsilon)^3 \approx 1 + 3d\epsilon \dots\dots\dots 2-1-3$$

regresando a nuestro problema original, si escribimos 2-1-3 como

$$\frac{dv}{V} = 3d\epsilon \dots\dots\dots 2-1-4$$

y la reemplazamos en 2-1-1 obtenemos

$$d\sigma = 3 E d\epsilon \dots\dots\dots 2-1-5$$

lo mismo se puede hacer para las deformaciones distorsionales que designaremos momentaneamente por ϵ' y obtenemos

$$d\sigma' = 2 G d\epsilon' \dots\dots\dots 2-1-6$$

G es llamado módulo elástico distorsional,

las ecuaciones 2-1-5 y 2-1-6 pueden generalizarse y escribirse en forma tensorial de la siguiente manera la ecuación 2-1-5 nos queda.

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \dots\dots\dots 2-1-7$$

mientras que la 2-1-6 nos queda

$$\sigma'_{ij} = 2 G \epsilon'_{ij} \dots\dots\dots 2-1-8$$

En este caso las primas significan deformaciones y esfuerzos distorsionales únicamente, posteriormente ampliaremos esta discusión.

Pasemos ahora al fluido Newtoniano ideal. La formula 2-1-6 se aplica a sólidos pero no a líquidos debido a que si un fluido se somete a un esfuerzo distorsional -es decir que ocasione cambios- se deforma indefinidamente lo que pone de manifiesto que hay que tomar en cuenta no solo la magnitud del esfuerzo sino también el tiempo durante el cual se aplica lo que nos llevará a tomar en cuenta la velocidad de deformación.

Así como para conocer el esfuerzo que actúa sobre un medio hay que conocer el módulo elástico o de elasticidad y la deformación, así también en un fluido para conocer el esfuerzo hay que conocer la velocidad de deformación y un módulo llamado de viscosidad como veremos enseguida.

Para obtener las ecuaciones que nos describen el comportamiento de un fluido pensemos en un fluido limitado por dos láminas separadas una distancia h ; si movemos la lámina

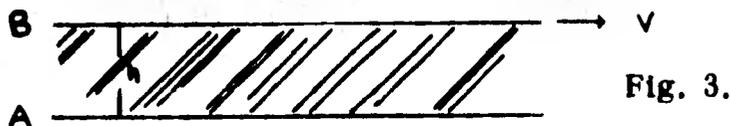


Fig. 3.

con una velocidad V hay una capa superficial del fluido que se adhiere, V depende de la lámina A y del fluido interpuesto así como de la distancia h ; si h es pequeña la lámina del fondo tendrá un efecto muy importante y si es grande casi no tendrá efecto si en un caso experimentamos con agua y-

en otro con aceite veremos que el efecto de la lámina A aumenta con aceite y si reemplazamos estos fluidos por aire el avance de B se hará más fácil, esto se debe a fin de cuentas a que la fuerza de atracción molecular es diferente en cada fluido, esta característica es lo que se llama viscosidad.

Al aplicar un esfuerzo τ_0 para mover la lámina B producimos una velocidad V que crece al aumentar h y disminuir la viscosidad, podemos escribir en primera aproximación

$$v = \frac{\tau_0 h}{\mu} \dots\dots\dots 2-1-9$$

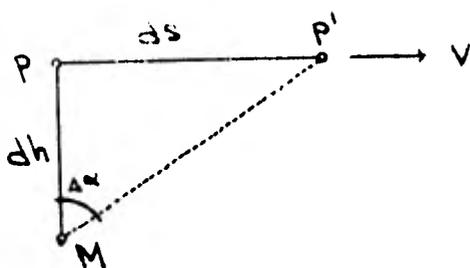
donde μ es el coeficiente de viscosidad, relación que es válida cuando h es muy pequeña por lo que escribimos

$$dv = \frac{\tau_0 dh}{\mu}$$

o bien

$$\tau_0 = \mu \frac{dv}{dh}$$

relacionemos ahora el esfuerzo cortante τ_0 con las deformaciones, sea δ el desplazamiento de una partícula P, podemos escribir de acuerdo a la figura 4



$$\frac{dv}{dh} = \frac{d}{dh} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \tan \Delta\alpha$$

y si definimos la deformación angular como $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \tan \Delta\alpha$ escribiremos

$$\frac{dv}{dh} = \frac{2 d\epsilon_0}{dt} = 2 \dot{\epsilon}_0$$

que al ser reemplazada en 2-1-11 nos da,

$$\tau = 2 \dot{\epsilon}_0 \mu$$

$$\tau_0 = 2 \mu D$$

ya que se acostumbra definir $D = \dot{\epsilon}_0$

Esto no agota el tipo de materiales que existen, es decir no solo hay dos tipos, los que dependen de la deformación y los que dependen de la velocidad de deformación, los hay que dependen de ambos, como son los sólidos viscoelásticos que no trataremos por ser irrelevantes en nuestro estudio.

2.- Tensor isotrópico y energía de deformación.

Comencemos este párrafo con una breve descripción de un tensor isotrópico y sus propiedades. Un tensor cuyas componentes cartesianas - rectangulares permanecen inalteradas frente a cualquier transformación ortogonal de los ejes se llama isotrópico, todos los tensores de orden --- cero (escalares) son isotrópicos, el unico tensor de orden 1 isotrópico es el vector nulo, el tensor $\delta_{ij}\lambda$ es isotrópico asi como cualquiera otro del tipo $\lambda\delta_{ij}$ en los de cuarto orden que son las que nos interesan, el tensor - más general isotrópico tiene componentes cartesianas de la forma

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) + \nu (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) \dots\dots\dots 2-2-1$$

donde λ, μ y ν son escalares cuando el tensor C_{ijrs} son coeficientes en una ecuación como

$$T_{ij} = C_{ijrs} E_{rs}$$

donde al menos uno de T_{ij} o E_{rs} es simétrico podemos hacer una simplificación. Supongamos simetría en rs , entonces podemos escribir

$$C_{ijrs} = \frac{C_{ijrs} + C_{ijsr}}{2} \dots\dots\dots 2-2-3$$

y lo mismo para ij en ambos casos concluimos que la expresión 2-2-1 se convierte en

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \dots\dots\dots 2-2-4$$

vayamos ahora a casos más generales, primero veremos la ley de Hooke - generalizada.

Un material es llamado idealmente elástico cuando recobra su forma original al desaparecer las fuerzas que lo deformaban y existe además una función inyectiva entre el estado de esfuerzos y el de deformaciones. Los coeficientes de la ecuación constitutiva que nos describen la relación entre deformación y esfuerzo, dependen de la temperatura aunque de una manera débil, por lo que la variación de temperatura durante la deformación puede ser despreciada. Si las variaciones de temperatura son pequeñas podemos tomar en cuenta sus efectos mediante la adición de un término que contenga los efectos térmicos a la ecuación constitutiva elástica - por el momento despreciaremos el efecto térmico de expansión o contracción.

Las ecuaciones constitutivas elásticas clásicas llamadas ley de Hooke generalizada son,

$$\overset{\vee}{T}_{ij} = C_{ijrs} \overset{\vee}{E}_{rs} \dots\dots\dots 2-2-5$$

cuando las variables son el tensor $\overset{\vee}{T}$ de Piola Kirchoff y el tensor $\overset{\vee}{E}$ de deformaciones finitas pero si trabajamos con deformaciones pequeñas puede -

mos escribir en lugar de 2-2-5,

$$\sigma_{ij} = E_{ijrs} \epsilon_{rs} \dots\dots\dots 2-2-6$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos desarrollado en la segunda sección del capítulo I y ϵ_{rs} es el tensor de deformación unitaria desarrollado en la cuarta sección del capítulo I y

Estas nueve ecuaciones 2-2-6 contienen 81 constantes pero como - vimos en 1-2-8 σ_{ij} es simétrico y podemos escribir $E_{ijrs} = E_{jirs}$ y como ϵ_{rs} es simétrico - se puede ver apartir de la ecuación 1-4-14 también $E_{ijrs} = E_{ijsr}$

Cuando no existen direcciones preferenciales en el material se dice que es elasticamente isótropo y las constantes elásticas son las mismas en cualquier sistema coordinado cartesiano, es decir que E_{ijrs} es un tensor isotrópico de cuarto orden simétrico en ij y rs de acuerdo a la ecuación 2-2-4 la 2-2-6 se convierte en:

$$\sigma_{ij} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})] \epsilon_{rs} \dots\dots 2-2-7$$

y de aquí obtenemos la ley de Hooke isotrópica

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \dots\dots\dots 2-2-8$$

en la que λ y μ son conocidas como constantes elásticas de lamé, si escribimos ϵ_{ij} en la ecuación anterior

$$\sigma_{ij} = (3\lambda + 2\mu)\epsilon_{ij} \dots\dots\dots 2-2-9$$

y si sustituimos $\epsilon_{kk} = \sigma_{kk} / (3\lambda + 2\mu)$ obtenida de la expresión anterior en la 2-2-8 tenemos

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \dots\dots\dots 2-2-10$$

que es la inversa de 2-2-8; estas dos constantes λ y μ están relacionadas con el módulo distorsional G con el módulo de Young E y la razón de poisson ν como sigue:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dots\dots\dots 2-2-11$$

si queremos expresar ϵ_{ij} en función de E y ν solo hay que sustituir las igualdades anteriores en 2-2-10.

Esta ley se vuelve simple si se usan los tensores distorsionales σ'_{ij} y ϵ'_{ij} tenemos

$$\sigma'_{ij} = 2G \epsilon'_{ij} \quad \text{y} \quad p = -ke \dots\dots\dots 2-2-12$$

donde $p = -\sigma_{kk}/3 \quad e = \epsilon_{kk} \quad k = \lambda + \frac{2}{3}G \dots\dots\dots 2-2-13$

Ahora veamos la forma matricial de la ley de Hooke generalizada. Ya que σ_{ij} y ϵ_{rs} son simétricos, las ecuaciones 2-2-6 representan únicamente seis ecuaciones independientes con un total de 36 constantes elásticas en lugar de las 81, es conveniente para nuestro estudio representar esto en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{35} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \dots\dots 2-2-14$$

hacemos la renumeración

$$\begin{array}{ll} 11 \leftrightarrow 1 & 23 \leftrightarrow 4 \\ 22 \leftrightarrow 2 & 31 \leftrightarrow 5 \dots\dots\dots 2-2-15 \\ 33 \leftrightarrow 3 & 12 \leftrightarrow 6 \end{array}$$

podemos reducir aún más la ecuación 2-2-14 hasta tenerla como:

$$\sigma_m = E_{mn} \epsilon_n \quad ; \quad m, n = 1, 2, \dots, 6 \dots\dots\dots 2-2-16$$

Una de las definiciones de material elástico fue postulada por Green hacia 1840 y estaba basada en la existencia de una función llamada energía de deformación, si tomamos en cuenta esta función podemos redu-

dir el número de constantes a 21.

En un medio continuo tienen lugar dos tipos de deformaciones - si nos atenemos a una clasificación térmica- las que son isotérmicas y las que no, pensemos en las primeras es decir en las que el cambio de temperatura es despreciable, podemos atribuirle, al medio continuo, una energía de deformación, U tal que:

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \dots\dots\dots 2-2-17$$

y podemos escribir

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \dots\dots\dots 2-2-18$$

ya que de esta ecuación obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \dots\dots\dots 2-2-19$$

de la ecuación 2-2-18 se sigue una simetría de índices por parejas que en efecto nos reduce el número de constantes independientes de

$$\frac{(3)(4)}{2} \times \frac{(3)(4)}{2} = 36$$

en el caso de simetría en ij y rs a

$$\frac{\frac{(3)(4)}{2} \times \left[\frac{(3)(4)}{2} + 1 \right]}{2} = 21$$

en el caso de simetría en ij y rs y además simetría por parejas.

3. - Caso de un plano de simetría.

Pasemos ahora a un aspecto muy importante en la teoría de los me dios continuos: La Simetría, importante por varias razones, en especial - por la ayuda que presta para determinar las constantes elásticas E_{ijkl} - ya que por lo general E_{ijkl} depende de la orientación de los ejes coordenados con respecto al cuerpo, cuando no dependen de la orientación se dice que el material es isotrópico, en otro caso se llama anisotrópico, ya vi - mos como la función de energía de deformación nos reduce el número de - constantes independientes de 36 a 21 veremos ahora como la simetría nos - va reduciendo este número, si existe un plano de simetría elástica se redu ciran a 13, en el caso de tres planos mutuamente perpendiculares - caso or totrópico - se reducen a nueve y finalmente en el caso de isotropía las - - constantes se reducen a dos.

El grupo de isotropía de un material se define como el grupo de - - transformaciones de las coordenadas que dejan a las ecuaciones constituti - vas invariantes, el grupo depende en general del estado de referencia que - fue escogido por ejemplo un material isotrópico es aquel que posee al me - nos un estado de referencia llamado estado no distorsionado, para el cual - su grupo de simetría contiene el grupo completo de transformaciones que - en ese estado nos permite rotar los ejes reflejarlos en un plano o bien en un punto y en todos estos casos E_{ijkl} permanecen iguales.

Un material que tiene algunas simetrias pero que no contiene al grupo completo se llama anisotrópico, este es el caso de algunos cristales.

Cuando las constantes elásticas tienen los mismos valores para un par de coordenadas cada una de las cuales es imagen especular de la otra, se dice que existe un cierto plano llamado plano de simetría elástica que no siempre coincide con un plano de simetría geométrica, consideraremos primero la existencia de un plano de simetría elástica cuando un plano coordenado es paralelo a él.

Consideremos dos sistemas de coordenadas X_k y \bar{X}_j con los ejes \bar{X}_1 y \bar{X}_2 coincidiendo con los X_1 y X_2 que a su vez son paralelos al plano de simetría elástica pero $\bar{X}_3 = -X_3$ por lo que son sistemas especulares a partir del plano de simetría la matriz de transformación es:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2-3-1$$

que de acuerdo a las leyes de transformación, $\bar{\sigma}_{ij}$ quedará como

$$\bar{\sigma}'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} \dots\dots\dots 2-3-2$$

de donde obtenemos

$$\bar{\sigma}_{23} = -\sigma_{23} \qquad \bar{\sigma}_{31} = -\sigma_{31} \dots\dots\dots 2-3-3$$

como únicas componentes de σ_{ij} alteradas, las demás quedan igual, lo mismo ocurre con el tensor ϵ_{ij} solo cambian ϵ_{23} y ϵ_{32}

$$\bar{\epsilon}_{23} = -\epsilon_{23} \quad \text{y} \quad \bar{\epsilon}_{32} = -\epsilon_{32} \dots\dots 2-3-4$$

la primera ecuación de 2-2-14 nos da $\bar{\sigma}_{11}$ en terminos de $\bar{\epsilon}$

$$\bar{\sigma}_{11} = E_{11} \bar{\epsilon}_{11} + E_{12} \epsilon_{22} + E_{13} \bar{\epsilon}_{33} + 2E_{14} \epsilon_{23} + 2E_{15} \bar{\epsilon}_{31} + 2E_{16} \epsilon_{12}$$

si sustituimos en la ecuación anterior las ecuaciones 2-3-3 y 2-3-4 obtenemos

$$\bar{\sigma}_{11} = E_{11} \epsilon_{11} + E_{12} \epsilon_{22} + E_{13} \epsilon_{33} - 2E_{14} \epsilon_{23} - 2E_{15} \epsilon_{31} + 2E_{16} \epsilon_{12} \dots\dots 2-3-5$$

pero por otro lado la primera ecuación 2-2-14 nos da

$$\sigma_{11} = E_{11} \epsilon_{11} + E_{12} \epsilon_{22} + E_{13} \epsilon_{33} + 2E_{14} \epsilon_{23} + 2E_{15} \epsilon_{31} + 2E_{16} \epsilon_{12} \dots\dots 2-3-6$$

substrayendo una expresión de la otra obtenemos

$$-4E_{14} \epsilon_{23} - 4E_{15} \epsilon_{31} = 0 \dots\dots\dots 2-3-7$$

por supuesto esta ecuación es válida para todos los valores de E_{14} y E_{15} , por lo que deben ser idénticamente cero i.e.

$$E_{14} = 0 \quad E_{15} = 0$$

Consideremos ahora $\bar{\sigma}_{22}$ a partir de la ecuación 2-2-14,

$$\bar{\sigma}_{22} = E_{21} \bar{\epsilon}_{11} + E_{22} \bar{\epsilon}_{22} + E_{23} \bar{\epsilon}_{33} + 2E_{24} \bar{\epsilon}_{23} + 2E_{25} \bar{\epsilon}_{31} + 2E_{26} \bar{\epsilon}_{12}$$

y sustituyendo resultados de 2-3-3 y 2-3-4 obtenemos

$$\sigma_{22} = E_{21} \epsilon_{11} + E_{22} \epsilon_{22} + E_{23} \epsilon_{33} - 2E_{24} \epsilon_{23} - 2E_{25} \epsilon_{31} + 2E_{26} \epsilon_{12}$$

y por otro lado de 2-2-14 obtenemos

$$\bar{\sigma}_{22} = E_{21} \epsilon_{11} + E_{22} \epsilon_{22} + E_{23} \epsilon_{33} + 2E_{24} \epsilon_{23} + 2E_{25} \epsilon_{31} + 2E_{26} \epsilon_{12}$$

que si restamos obtenemos

$$-4E_{24} \epsilon_{23} - 4E_{25} \epsilon_{31} = 0$$

de donde

$$E_{24} = 0 \quad \text{y} \quad E_{25} = 0$$

y si seguimos haciendo lo mismo para las demás componentes obtenemos -
una nueva matriz para E_{ij} a saber:

$$\begin{bmatrix}
 E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & E_{16} \\
 E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & E_{26} \\
 E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & E_{36} \\
 \cdot 0 & 0 & 0 & E_{44} & E_{45} & 0 \\
 \cdot 0 & 0 & 0 & E_{54} & E_{55} & 0 \\
 \cdot E_{61} & E_{62} & E_{63} & 0 & 0 & E_{66}
 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2-3-8$$

Así llegamos a que la matriz de coeficientes cuando el plano $X_1 X_2$ es de simetría elástica tiene 13 constantes independientes si $E_{ij} = E_{ji}$ o bien 20 si no existe esta simetría, en este caso podemos tener

$$\sigma_{11} = 2 E_{16} \epsilon_{12}$$

es decir esfuerzo tangencial puede dar lugar a una deformación normal si todas los demás esfuerzos son cero. Hemos visto entonces como la existencia de un plano de simetría elástica nos reduce el número de constantes a 13 si existe la función energía de deformación. En caso de que este plano no coincida con alguno de los coordenados el número de constantes diferentes de cero aumento aunque surgen relaciones algebraicas entre ellas de tal manera que siguen siendo 13 las independientes.

4. - Caso de 3 planos de simetría.

Veamos el caso de tres planos de simetría, llamado caso ortotrópico, usaremos argumentos análogos a los del caso anterior para mostrar - que solo existen 9 constantes independientes.

Sea el plano $X_1 X_2$ o bien como vimos en el caso anterior $X'_1 X'_2$ un plano de simetría elástica, aplicando 2-3-2 con a_{ij} :

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2-4-1$$

tenemos nuevamente la matriz 2-3-8, ahora si $X_2 X_3$ o $\bar{X}_2 \bar{X}_3$ es otro plano de simetría tenemos que a_{ij} es

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2-4-3$$

y de 2-3-2 tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11} \\ \bar{a}_{22} &= a_{22} \\ \bar{a}_{33} &= a_{33} \\ \bar{a}_{23} &= a_{23} \\ \bar{a}_{12} &= -a_{12} \\ \bar{a}_{13} &= -a_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= E_{11} \\ \bar{E}_{22} &= E_{22} \\ \bar{E}_{33} &= E_{33} \\ \bar{E}_{23} &= E_{23} \dots\dots\dots 2-4-3 \\ \bar{E}_{13} &= -E_{13} \\ \bar{E}_{12} &= -E_{12} \end{aligned}$$

y repitiendo las ecuaciones de la matriz 2-2-14 obtenemos por ejemplo

$$\bar{\sigma}_{31} = E_{51} \bar{\epsilon}_{11} + E_{52} \bar{\epsilon}_{22} + E_{53} \bar{\epsilon}_{33} + 2E_{54} \bar{\epsilon}_{23} + 2E_{55} \epsilon_{31} + 2E_{56} \epsilon_{12}$$

si sustituimos las igualdades 2-4-3 en la ecuación anterior obtenemos

$$\bar{\sigma}_{31} = -E_{51} \bar{\epsilon}_{11} - E_{52} \bar{\epsilon}_{22} - E_{53} \bar{\epsilon}_{33} - 2E_{54} \bar{\epsilon}_{23} + 2E_{55} \epsilon_{31} + 2E_{56} \epsilon_{21}$$

y por otro lado

$$\bar{\sigma}_{31} = E_{51} \epsilon_{11} + E_{52} \epsilon_{22} + E_{53} \epsilon_{33} + 2E_{54} \epsilon_{23} + 2E_{55}$$

restando las dos últimas expresiones y tomando en cuenta que el resultado es válido para toda ϵ_{ij} obtenemos

$$E_{51} = 0 \quad E_{52} = 0 \quad E_{53} = 0 \quad E_{54} = 0$$

repetiendo este argumento para las demás ecuaciones y para el plano de simetría $X_2 X_3$ o bien $X'_2 X'_3$ con matriz de transformación:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & \circ & \circ & \circ \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & \circ & \circ & \circ \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & E_{44} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & E_{55} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & E_{55} \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2-4-4$$

Como matriz de los coeficientes cuando existe simetría en tres planos mutuamente perpendiculares, donde hay 9 constantes independientes si $E_{ij} = E_{ji}$ si no la hay las constantes independientes aumentan a 12.

5. - Caso isotrópico.

En este caso las constantes son independientes de la orientación de los ejes coordenados lo que trae como consecuencia que el número de constantes independientes se reduzca a dos. Para mostrar esto pensemos en - - que además de los tres planos mutuamente perpendiculares podemos girar 90° y 45° permaneciendo invariables las constantes elásticas, sea \bar{x}_j un sistema que se obtiene al girar 90° alrededor del eje x_3 ; la dirección del eje \bar{x}_1 coincide con la del eje x_2 la del \bar{x}_2 con la de $-x_1$ y por supuesto x_2 y \bar{x}_3 coinciden, la matriz de transformación es

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 2-5-1$$

aplicándola a 2-3-2 obtenemos las relaciones

$$\begin{array}{ll} \bar{\sigma}_{11} = \sigma_{22} & \bar{\epsilon}_{22} = \epsilon_{11} \\ \bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33} & \bar{\epsilon}_{11} = \epsilon_{22} \dots\dots\dots 2-5-2 \\ \sigma_{22} = \sigma_{11} & \bar{\epsilon}_{33} = \epsilon_{33} \end{array}$$

Ahora bien un material isotrópico es ortotrópico por lo que podemos utilizar la matriz 2-4-4 en las ecuaciones 2-2-14 para poder eliminar las constantes, por ejemplo:

$$\bar{\sigma}_{22} = E_{21} \bar{\epsilon}_{11} + E_{22} \bar{\epsilon}_{22} + E_{23} \bar{\epsilon}_{33}$$

utilizando las igualdades 2-5-2 la ecuación anterior nos queda:

$$\sigma_{11} = E_{21} \epsilon_{22} + E_{22} \epsilon_{11} + E_{23} \epsilon_{33}$$

desde luego si aplicamos la matriz 2-4-4 a los esfuerzos y deformaciones en el sistema original obtenemos

$$\sigma_{11} = E_{11} \epsilon_{11} + E_{12} \epsilon_{22} + E_{13} \epsilon_{33}$$

sustrayendo las dos expresiones anteriores:

$$(E_{22} - E_{11}) \epsilon_{11} + (E_{21} - E_{12}) \epsilon_{22} + (E_{23} - E_{13}) \epsilon_{33} = 0$$

de donde $E_{22} = E_{11}$ $E_{21} = E_{12}$ $E_{23} = E_{13}$ 2-5-3

aplicando una argumentación análoga obtenemos:

$$E_{22} = E_{33} \quad E_{12} = E_{21} = E_{13} = E_{31} = E_{23} = E_{32} = \lambda \dots\dots\dots 2-5-4$$

esto último para distinguirlas de las otras constantes, además

$$E_{44} = E_{55} = E_{66} = \mu \dots\dots\dots 2-5-5$$

Podemos considerar rotaciones de 45° y las constantes seguirán - -
siendo las mismas, su matriz de transformación es:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de aquí obtenemos $2E_{44} = E_{11} - E_{12}$ es decir

$$E_{11} = E_{12} + 2E_{44} \quad \text{ó} \quad \dots\dots\dots 2-5-6$$

$$E_{11} = 2\mu + \lambda$$

reuniendo 2-5-3, 2-5-4, 2-5-5 y 2-5-6 obtenemos la matriz

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \dots\dots 2-5-7$$

Es decir la matriz de coeficientes en la ecuación 2-2-14 se reduce a la 2-5-7, que además demostramos su simetría en ij y si recordamos las definiciones 2-2-15 veremos que hablamos en realidad de simetría por parejas en rs y pq en el tensor de cuarto orden E_{pqrs} y como además es un tensor que permanece inalterado frente a transformaciones ortogonales de los ejes cartesianos, tiene que ser del tipo 2-2-4 es decir :

$$E_{ij} \equiv E_{pqrs} = \lambda \delta_{pq} \delta_{rs} + \mu (\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr}) \dots\dots\dots 2-5-8$$

Con este tensor podemos escribir la ecuación constitutiva es decir los esfuerzos en función de las deformaciones, de la siguiente manera:

$$\sigma_{pq} = E_{pqrs} \epsilon_{rs}$$

sabemos en el caso de la ley generalizada de Hooke, ahora bien si introducimos la ecuación 2-5-8 obtenemos

-49-

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{pq} &= \lambda \delta_{pq} \delta_{rs} \epsilon_{rs} + \mu (\delta_{pq} \delta_{rs} + \delta_{ps} \delta_{qr}) \epsilon_{rs} \\ &= \lambda \delta_{pq} \epsilon_{rr} + \mu (\delta_{pq} \delta_{rs} + \delta_{ps} \delta_{qr}) \epsilon_{rs} \\ &= \lambda \delta_{pq} \epsilon_{rr} + \mu (\epsilon_{pq} + \epsilon_{qp})\end{aligned}$$

y debido a 1-4-14 podemos escribir finalmente:

$$\sigma_{pq} = \lambda \delta_{pq} \epsilon_{rr} + 2\mu \epsilon_{pq}$$

si en la ecuación anterior hacemos $p=q$

$$\sigma_{qq} = (3\lambda + 2\mu) \epsilon_{rr}$$

y como son indices mudos:

$$\sigma_{qq} = (3\lambda + 2\mu) \epsilon_{qq}$$

pero de acuerdo a 2-5-9

$$2\mu \epsilon_{pq} = \sigma_{pq} - \lambda \delta_{pq} \frac{\sigma_{qq}}{3\lambda + 2\mu}$$

que podemos escribir finalmente

$$\epsilon_{pq} = \frac{\sigma_{pq}}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{pq} \sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \dots\dots\dots 2-5-10$$

si estamos en un caso de esfuerzo en un solo eje, por ejemplo sobre el eje x_1 podemos introducir las conocidas constantes E y ν , módulo de Young y coeficiente de Poisson respectivamente con las siguientes definiciones

$$\sigma_{11} = E \epsilon_{11} \dots\dots\dots 2-5-11$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11} \dots\dots\dots 2-5-12$$

utilizando estas dos ecuaciones la 2-5-9 nos queda:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right) \dots\dots\dots 2-5-13$$

o bien la 2-5-10 nos queda

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \dots\dots\dots 2-5-14$$

Todo lo hecho hasta ahora fue sin tomar en cuenta efectos térmicos, si los tomamos en cuenta, el tensor de deformación ϵ_{ij} se alteraría, en primera aproximación. Podemos pensar que este tensor tiene dos contribuciones: una debida a los esfuerzos y otra debida a la temperatura por lo

que podemos escribir

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(e)} + \epsilon_{ij}^{(T)} \dots\dots\dots 2-5-15$$

donde $\epsilon_{ij}^{(e)}$ es la contribución a la deformación debida a los esfuerzos mientras que $\epsilon_{ij}^{(T)}$ es la debida a la temperatura a partir de una cierta temperatura T_0 de referencia hasta otra temperatura T los componentes del tensor de deformación debido a la temperatura quedan

$$\epsilon_{ij}^{(T)} = \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \dots\dots\dots 2-5-16$$

donde α es el coeficiente de dilatación lineal, que si introducimos en la ecuación 2-5-15 obtendremos:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

ecuación conocida con el nombre de Duhamel - Newmann, que desde luego podemos invertir para obtener la ecuación constitutiva termoelástica

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0) \dots\dots\dots 2-5-17$$

que desde luego nos permite obtener mayor precisión en los cálculos y podemos obtenerlas en función de otros parámetros incluso la energía interna de deformación nos queda por ejemplo:

$$U = \frac{\lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj}}{2} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left[(3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \epsilon_{ii} \right] \dots\dots 2-5-18$$

CAPITULO III

1.- Clasificación de Petrov del Tensor de dureza.

El tensor de dureza nos dice cual es el comportamiento de un material, es decir, cual es el esfuerzo necesario para causar determinada deformación. Así que una clasificación de las ecuaciones constitutivas - del medio continuo, debe hacerse sobre este tensor, la experiencia demuestra que trabajar con tensores no conduce a una clasificación, pues las ecuaciones resultantes, a pesar de ser algebraicas, son de 4° orden, con coeficientes que son funciones de otros, lo que complica su solución.

Otro camino lo constituye la descomposición de un espinor, que - se lleva a cabo con el teorema de Sachs; siguiendo el método de Petrov; desde luego, nosotros no tenemos un espinor, pero existen artificios que nos permitirán pasar el tensor E_{ikl} en un espacio euclideo a - un espinor definido en un espacio bidimensional complejo, que es donde haremos la clasificación.

Consideremos entonces objetos geométricos, llamados espinores; - que definiremos en un espacio complejo bidimensional \mathbb{P} , para los que existen cuatro posibilidades. Representemos estos objetos como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_A &\equiv \text{espinor covariante y su complejo conjugado } \phi_{\dot{A}} \\ \phi^A &\equiv \text{espinor contravariante y su complejo conjugado } \phi^{\dot{A}} \end{aligned}$$

Una pareja de números complejos ordenados representa a tales espinores y se pueden transformar en general como

$$(u, v) \longrightarrow (u', v')$$

o equivalentemente

$$\phi^A \longrightarrow \phi^{A'}$$

los espinores siguen la regla de transformación llamada lineal

$$\psi'_A = t^B_A \psi_B,$$

donde $\|t^A_B\|$ es en general compleja y no singular, sin embargo para aplicaciones físicas que son las que nos interesan, nos restringiremos a matrices unimodulares $\|L^A_B\|$, aunque si construimos una matriz unimodular a partir de t^A_B tendremos

$$L^A_B = t^A_B t^{-1/2}$$

donde $t = |t^A_B|$; en realidad hay dos tipos de transformaciones. En general denotaremos a los espinores como:

$$\psi_{A_1 \dots A_n \dot{C}_1 \dots \dot{C}_p} \\ B_1 \dots B_m \dot{D}_1 \dots \dot{D}_q$$

los índices A, B corren de 1 a 2 y se llaman contra y coíndices - mientras que \dot{C}, \dot{D} corren de 1 a 2 y se llaman contra-punto y co-punto-índices, respectivamente y nuevamente en general tenemos que la operación de "complejo conjugado" es:

$$\left[\psi_{A_1 \dots A_n \dot{C}_1 \dots \dot{C}_p}^{B_1 \dots B_m \dot{D}_1 \dots \dot{D}_q} \right]^* = \psi_{\dot{B}_1 \dots \dot{B}_m \dot{D}_1 \dots \dot{D}_q}^{A_1 \dots A_n C_1 \dots C_p}$$

establezcamos las reglas de transformación para los cuatro tipos de espinores

$$\psi^{A'} = L^A_B \psi^B$$

$$\psi^A = L^{-1A}_B \psi^{A'}$$

$$\psi_{A'} = L^A_B \psi^B$$

$$\psi^A = L^{-1A}_B \psi^{B'}$$

$$\chi'_A = \chi^B_L L^{-1B}_A$$

$$\chi_A = \chi'^B_L L^B_A$$

...3-1-1

$$\chi'_{A'} = \chi^B_L L^{-1B}_{A'}$$

$$\chi_{A'} = \chi'^B_L L^B_{A'}$$

L^A_B es la compleja conjugada de L^A_B y si a estas matrices -- añadimos la pieza espinorial antilineal 2-D compleja que nos dice como transformar un espinor con un índice punto en uno sin punto entonces ya podemos dar la regla de transformación de cualquier espinor.

Por ejemplo ϕ^{ABC}_{DEF} se transforma como:

$$\phi^{PQR}_{ST} = L^P_L L^Q_A L^R_B L^C_L \eta^{ABC}_{DEF} L^{-1D}_S L^{-1E}_T$$

donde L^P_L es parte del conjunto de la pieza espinorial 2-D compleja.

2.- El espinor fundamental.

De manera análoga al álgebra tensorial, debemos poder asociar de forma única, espinores covariantes con espinores contravariantes, para esto necesitamos un espinor "métrico" que nos permita hacerlo.*

Definimos entonces el espinor métrico completamente antisimétrico

$$R_{[AB]} \equiv R_{AB} \quad \dots 3-2-1$$

con él podemos escribir la forma bilineal

$$R_{AB} \chi^B \psi^A = R'_{AB} \chi^{B'} \psi^{A'}$$

pero como

$$\chi_A \psi^A = \chi'_A \psi^{A'}$$

obtenemos que

$$\chi_A = R_{AB} \chi^B \quad \dots 3-2-2$$

definimos ahora un R^{AB} , con índices contravariantes

$$\chi_A \psi_C = R_{AB} R_{CD} \chi^B \psi^D$$

de acuerdo a 3-2-2 . De la misma manera otro espinor de segundo rango

$$R_{AC} = R_{AB} R_{CD} R^{BD} = -R_{AB} R^{BD} R_{DC}$$

entonces obtenemos

$$R_{AB} R^{BD} = -\delta_A^D$$
$$R^{BD} R_{DC} = -\delta_C^B$$

* En el sentido de la geometría afín se dice que el espacio spinorial es un espacio con métrica nula.

que debido a la antisimetría podemos reescribir como:

$$R_{AB} R^{DB} = \delta_A^D \quad \text{y} \quad R^{BD} R_{CD} = \delta_C^B$$

con lo que ya podemos escribir la regla para subir índices:

$$\phi^A = \phi_B R^{BA}$$

como R_{AB} tiene solo una componente independiente, puede escribirse como:

$$R_{AB} = R \epsilon_{AB}$$

donde $R = |R_{AB}|$ y ϵ_{AB} es el símbolo de Levi-Civita; pero siempre es factible encontrar un marco de referencia donde $R=1$, entonces, si trabajamos en ese marco

$$R_{AB} = R^{AB} = \epsilon^{AB}$$

entonces para subir o levantar índices tenemos

$$\chi_A = \epsilon_{AB} \chi^B = -\chi^B \epsilon_{BA}$$

$$\psi^A = \chi_B \epsilon^{BA} = -\epsilon^{AB} \chi_B$$

Ahora mostraremos que ϵ^{AB} es un espinor doblemente covariante, para esto hagamos la transformación

$$\epsilon^{A'B'} = L_C^A L_D^B \epsilon^{CD} = L_1^A L_2^B \epsilon^{12} - L_2^A L_1^B \epsilon^{21}$$

$$\epsilon^{A'B'} = \epsilon^{FG} L_F^A L_G^B = \epsilon^{AB} \det \|L_B^A\| = \epsilon^{AB}$$

como el espinor métrico es antisimétrico entonces

$$\psi^A \phi_A = \epsilon^{AB} \psi_B \phi_A = -\epsilon^{AB} \psi_B \phi_A = -\psi_B \phi^B = -\psi_A \phi^A$$

es decir

$$\psi^A \phi_A = -\psi_A \phi^A$$

y si hacemos $\psi^A = \phi^A$ obtenemos

$$\psi^A \psi_A = 0$$

en general

$$\psi^{A_1 \dots A_{2n+1}} \psi_{A_1 \dots A_{2n+1}} = 0$$

Por otro lado la contracción de un espinor simétrico es cero, en efecto

$$\chi^A_A = \chi_{AB} \epsilon^{AB} = -\chi_{BA} \epsilon^{BA} = -\chi^B_B = 0$$

El orden de un espinor depende del número de índices; así tenemos que el orden del espinor

$$\psi^{A_1 \dots A_{2l}} \dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2k}$$

es $S = l + k$ y se le llama el "spín" del espinor; así por ejemplo el spín u orden del espinor

$$\phi^A$$

es $S = \frac{1}{2}$, en general si un espinor tiene spín $S = k + l$ se dice que pertenece a la representación $D(k, l)$.

3.- Conexión entre espinores y tensores.

Lo que haremos en esta parte es encontrar una asociación entre tensores y espinores, ya que nuestra clasificación se realizará en un espacio espinorial y debemos llevarla a un espacio tensorial 3-D, en donde se representa el tensor E^{ijkl} de dureza de la elasticidad clásica. Sea una cantidad híbrida con índices tensoriales y espinoriales - con características vectoriales en el espacio-tiempo llano de Minkowski y espinoriales en el espacio 2-D complejo

$$g_{\alpha}^{\beta x}$$

Una manera de encontrar las componentes y el significado de este spín-tensor, es la siguiente: El elemento diferencial de arco en el espacio-tiempo de Minkowski es:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

considérese la siguiente manipulación algebraica

$$ds^2 = (c^2 dt^2 - dz^2) - (dx^2 + dy^2)$$

$$ds^2 = (cdt + dz)(cdt - dz) - (dx^2 + dy^2) \\ - (dx^2 + dy^2)(dx - idy)$$

$$ds^2 = \begin{vmatrix} c dt + dz & dx + i dy \\ dx - i dy & c dt - dz \end{vmatrix}$$

$$ds^2 = \begin{vmatrix} \frac{c dt + dz}{dx} & \frac{dx + i dy}{dx} \\ \frac{dx - i dy}{dx} & \frac{c dt - dz}{dx} \end{vmatrix}$$

entonces

$$ds^2 = \det \left\{ dx \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + dy \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix} + dz \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + c dt \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$ds^2 = \det (g_{\mu\nu} dx^\mu),$$

donde $g_{\mu\nu}$ cumple con

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = g_{\nu\alpha} g_{\alpha\beta} = (g_{\mu\nu})^t$$

y representa al conjunto de entes matriciales:

$$\|g_{\mu\nu}\| = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

es claro de aquí, que $\|g_{\mu\nu}\|$ no son otras que las matrices de Pauli y de lo anterior podemos establecer:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \equiv dX_{\nu\alpha}$$

donde dx^μ es un objeto real; es el elemento del vector $d\hat{r}$ en 4-D y $dX_{\nu\alpha}$ es un objeto espinorial. Para pasar a $g^{\mu\nu}$ tenemos que utilizar la métrica de Minkowski y la métrica espinorial; - cada una para levantar los índices respectivos:

$$g^{\mu\dot{A}B} = \eta^{\mu\nu} \epsilon^{\dot{H}A} \epsilon^{NB} g_{\nu\dot{H}N} \quad \dots\dots 3-3-1$$

donde $\eta^{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski

$$\| \eta^{\mu\nu} \| \equiv \| \text{Diag} (+1, -1, -1, -1) \|$$

Entonces ya se puede construir la parte real como:

$$dx^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\dot{A}B} dX_{\dot{A}B}$$

se cumple además que $g^{\mu\dot{A}B} g_{\nu\dot{A}B} = 2 \delta_\nu^\mu$,

tenemos entonces que

$$\| g_{1\dot{A}B} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\| g_{2\dot{A}B} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{matrix} \right\|$$

..... 3-3-2

$$\| g_{3\dot{A}B} \| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|$$

$$\| g_{4\dot{A}B} \| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Ahora de la ecuación 3-3-1 obtenemos $g^{\mu\dot{A}B}$ levantando

índices con el tensor y espinor métrico

$$\| g^{1\dot{A}B} \| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\| g^{2\dot{A}B} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

..... 3-3-3

$$\| g^{3\dot{A}B} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\| g^{4\dot{A}B} \| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|$$

de ahora en adelante haremos la renumeración

$$1 \leftrightarrow 1, \quad 2 \leftrightarrow 2, \quad 3 \leftrightarrow 3, \quad 4 \leftrightarrow 0$$

Es importante hacer notar que con este spín-tensor se obtienen imágenes espinoriales de tensores, por ejemplo

$$\psi_{B\dot{N}} \dots \psi_{A\dot{M}} \dots g_{\alpha}^{\mu} g_{\beta}^{\nu} \dots = \psi_{\beta}^{\mu}$$

Con esto ya podemos obtener equivalencias entre tensores y -- espinores, por ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Si } g_{A\dot{M}}^{\alpha} g_{\alpha}^{C\dot{N}} &= \delta_A^C \delta_{\dot{M}}^{\dot{N}} \\ \delta_{\beta}^{\alpha} g_{A\dot{M}}^{\beta} g_{\alpha}^{C\dot{N}} &= \delta_A^C \delta_{\dot{M}}^{\dot{N}} \end{aligned}$$

entonces obtenemos nuestra primera equivalencia entre espinores y tensores

$$\delta_{\beta}^{\alpha} \longleftrightarrow \delta_A^C \delta_{\dot{M}}^{\dot{N}}$$

otro ejemplo es:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} g_{A\dot{M}}^{\mu} g_{C\dot{N}}^{\nu} &= \eta_{\mu\nu} g_{A\dot{M}}^{\mu} \epsilon_{BC} \epsilon_{\dot{D}\dot{N}} g^{\nu\dot{B}\dot{D}} \\ &= g_{A\dot{M}}^{\mu} \epsilon_{BC} \epsilon_{\dot{D}\dot{N}} g^{\nu\dot{B}\dot{D}} = \delta_A^B \delta_{\dot{M}}^{\dot{D}} \epsilon_{BC} \epsilon_{\dot{D}\dot{N}} \\ &= \epsilon_{AC} \epsilon_{\dot{M}\dot{N}} \end{aligned}$$

entonces

$$\eta_{\mu\nu} \longleftrightarrow \epsilon_{AC} \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}$$

Existen otras maneras de pasar de espinores a tensores, por ejemplo con el llamado spin-tensor de Ruse, que es otra cantidad -- con índices espinoriales y tensoriales definida como

$$S_{\mu\nu AB} \equiv \frac{1}{4} \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} (g_{\mu\dot{A}A} g_{\nu\dot{B}B} - g_{\nu\dot{A}A} g_{\mu\dot{B}B}) \quad \dots 3-3-4$$

este spin-tensor cumple con las siguientes simetrías

$$S_{\mu\nu AB} = S_{[\mu\nu](AB)}$$

sus valores son

$$S_{01AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_{02AB} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_{03AB} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{12AB} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{13AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_{23AB} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Con este spín-tensor también podemos encontrar imágenes espinoriales; por ejemplo, en el caso del tensor electromagnético en donde tenemos que

$$F^{\mu\nu} \equiv F^{[\mu\nu]}$$

su imagen espinorial es un espinor de orden uno simétrico

$$F^{\mu\nu} \leftrightarrow f_{AB}$$

Para obtener el valor se calcula de la siguiente manera:

Dado $F^{\mu\nu}$ existe su "imagen" espinorial f_{AB} , tal que:

$$f_{AB} = g_{\mu PA} g_{\nu QB} F^{\mu\nu} \epsilon^{PQ}$$

$$f_{AB} = \frac{1}{2} \epsilon^{PQ} (g_{\mu PA} g_{\nu QB} - g_{\nu PA} g_{\mu QB}) F^{\mu\nu}$$

es decir

$$f_{AB} = 2 S_{\mu\nu AB} F^{\mu\nu}$$

3-3-6

4.- Teorema de Sachs

La clasificación de Petrov del tensor de Riemann está basada en el

Teorema de Sachs, nosotros seguiremos su razonamiento en el caso del tensor de dureza; este teorema nos dice como descomponer un espinor en sus raíces no triviales y por supuesto demuestra que es posible, en el caso de $\mathcal{Q}(l, 0)$ o $\mathcal{Q}(0, k)$ o bien en el caso de $\mathcal{Q}(l, k)$ con $l = k$

Teorema de Sachs

Sea el espinor $\Psi_{A_1 \dots A_{2k} \dot{A}_{2k+1} \dots \dot{A}_{4k}} \in \mathcal{Q}(k, k)$

siempre se puede descomponer como:

$$\Psi_{A_1 \dots A_{2k} \dot{A}_{2k+1} \dots \dot{A}_{4k}} = \alpha_{A_1}^{(1)} \dots \alpha_{A_{2k}}^{(2k)} \alpha_{\dot{A}_{2k+1}}^{(2k+1)} \dots \alpha_{\dot{A}_{4k}}^{(4k)}$$

donde $\alpha_{A_i}^{(i)}$; son espinores arbitrarios de orden $1/2$, de modo que la multiplicación de todos ellos nos da un espinor de orden $2k$.

Demostración:

Sea $\|\Sigma^A\| = (u, v)$ donde $u, v \in \mathbb{C}$ un espinor indeterminado -

que podemos escribir como

$$\|\Sigma^A\| = (1, z) \quad \text{donde} \quad z = \frac{u}{v}$$

y con tal que: $u \neq 0 + i0$

construyamos ahora el invariante

$$\Omega = \Psi_{A_1 \dots A_{2k} \dot{A}_{2k+1} \dots \dot{A}_{4k}} \Sigma^A \dots \Sigma^{A_{2k}} \dots \Sigma^{\dot{A}_{4k}}$$

desde luego $\xi^1 = u$ y $\xi^2 = v$

este es un polinomio de grado $4k$ en Z , que por el teorema fundamental - del álgebra se puede factorizar.

$$\begin{aligned} \Omega &= [a|z|^{4k} + \dots + d|z| + e] |u|^4 \\ &= |u|^{4k} a \left[|z|^{4k} + \frac{b}{a} |z|^{4k-2} z + \dots + \frac{p}{a} \right] \\ &= |u|^{4k} a (z - z_1) \dots (z - z_k) (z^* - z_1^*) \dots (z^* - z_{2k}^*) \end{aligned}$$

el hecho de que las últimas $2k$ raíces sean complejas conjugadas de las - primeras $2k$ se deriva del hecho de la simetría índices con punto y sin punto; por otro lado, la última expresión, recurriendo a la definición de Z , - la podemos escribir como:

$$a(v - u z_1)(v - u z_2) \dots (v - u z_{2k}) \dots (v^* - u^* z_{2k}^*)$$

definimos

$$\|\alpha_i\| \equiv \begin{vmatrix} -z_i \\ 1 \end{vmatrix}$$

y tenemos que

$$(v - u z_i) \equiv (u, v) \begin{pmatrix} -z_i \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \sum \lambda_i \alpha_i$$

lo mismo para los factores conjugados

$$(v^* - u^* z_i^*) \equiv (u^*, v^*) \begin{pmatrix} -z_i^* \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \sum \lambda_i^* \alpha_i^*$$

donde $\alpha_{A_i} \equiv \left\| \begin{matrix} -z_i \\ 1 \end{matrix} \right\|$

entonces

$$\psi_{A_1 \dots A_{4k}} \xi^{A_1} \dots \xi^{A_{4k}} = (\alpha_{A_1}^{(1)} \xi^{A_1}) \dots (\alpha_{A_{4k}}^{(4k)} \xi^{A_{4k}}) \eta$$

como las ξ^i son arbitrarios, podemos aplicar la Ley del cociente

para obtener

$$\psi_{A_1 \dots A_{2k} A_{2k+1} \dots A_{4k}} = \alpha_{A_1}^{(1)} \alpha_{A_2}^{(2)} \dots \alpha_{A_{2k}}^{(2k)} \alpha_{A_{2k+1}}^{(2k+1)} \dots \alpha_{A_{4k}}^{(4k)}$$

que es la descomposición buscada

Con este teorema ya podemos clasificar el tensor de dureza, pero antes veamos que quiere decir clasificar.

El teorema de Sachs es el análogo del teorema fundamental del álgebra; es decir, descomponer un espinor significa encontrar sus raíces, que pueden tener cierta multiplicidad o bien ser cero; precisamente nos basaremos en el tipo de raíces para hacer la clasificación, así por ejemplo las raíces pueden ser distintas entre sí y además cada una de ellas -

distinta de cero; otra posibilidad es que cada raíz tenga multiplicidad dos y además distintas de cero todas ellas. En fin, hay toda una gama de posibilidades para la combinación de raíces; cada caso, algebraicamente distinto, da origen a un espinor con ciertas características, lo que nos interesa es conocer precisamente estas características para mediante una serie de transformaciones poder "heredarlas" al tensor de dureza en el espacio real 3-D como un sencillo ejemplo tomemos al espinor de orden uno y por tanto elemento de la representación $\mathcal{D}(\lambda, 0)$

Este espinor se puede descomponer en otros dos, como la descomposición contiene sus dos raíces, tendremos cinco casos posibles de descomposición aunque solo cuatro algebraicamente distintos.

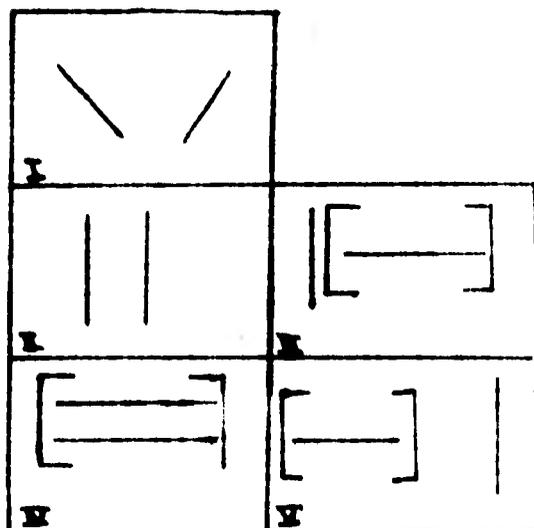


figura 3

De los cinco casos el III y el IV son distintos, pero dan origen a las mismas características en el espinor ψ_{AB} que se está descomponiendo; por lo que solo clasificamos cuatro casos distintos al descomponer este espinor; el caso V es el menos importante, pues da origen a un espinor nulo.

Esta es en breves palabras la manera de clasificar un espinor; los casos algebraicamente distintos son independientes, y esta independencia se conserva al regresar al tensor de donde proviene el espinor, si es el caso.

Antes de clasificar el tensor que nos interesa, es decir, el de dureza de las ecuaciones constitutivas, sigamos con el ejemplo anterior de un espinor de orden uno, solo que en lugar de trabajar en abstracto, escojamos al tensor de Maxwell F^{uv} para comprender mejor la clasificación de Petrov.

El tensor de segundo orden F^{uv} es antisimétrico, es decir, que cumple con

$$F^{uv} \equiv -F^{vu}$$

Con el spín-tensor de Ruse podemos encontrar la imagen espinorial de F^{uv} tal como lo indica la ecuación 3-3 - 6, haciendo la expansión adecuada encontramos por ejemplo f_{11}

$$f_{11} = 2(2 S_{0111} F^{01} + 2 S_{0211} F^{02} + 2 S_{0311} F^{03} + 2 S_{1211} F^{12} + 2 S_{1311} F^{13} + 2 S_{2311} F^{23})$$

y así sucesivamente, el escalar Ω en este caso es

$$\Omega = f_{AB} \xi^A \xi^B = \alpha_A \alpha_B \xi^A \xi^B = \alpha_A \beta_B \xi^A \xi^B \dots\dots\dots 3-4-3$$

es decir $f_{AB} = \alpha_A \beta_B$ y siguiendo el teorema de Sachs

$$\alpha_A = (-z_1, 1) \quad , \quad \beta_B = (-z_2, 1)$$

solo falta encontrar las raíces, para esto desarrollamos 3 - 4 - 3 y -
obtenemos

$$f_{AB} \xi^A \xi^B = f_{11} (\xi^1)^2 + 2 f_{12} \xi^1 \xi^2 + f_{22} (\xi^2)^2$$

que podemos factorizar como

$$(\xi^1)^2 [f_{11} + 2 f_{12} z + f_{22} z^2]$$

cuyas raíces son

$$(\xi^1)^2 \left\{ \left[z + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} + \sqrt{\left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)^2 - \frac{f_{11}}{f_{22}}} \right) \right] \left[z - \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} - \sqrt{\left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)^2 - \frac{f_{11}}{f_{22}}} \right) \right] \right\}$$

entonces

$$z_{1,2} = \frac{1}{f_{22}} \left(f_{12} \pm \sqrt{f_{12}^2 - (f_{11} f_{22})} \right)$$

El paso siguiente es encontrar las imágenes espinoriales, para poder encontrar las relaciones entre términos del tensor de Maxwell.

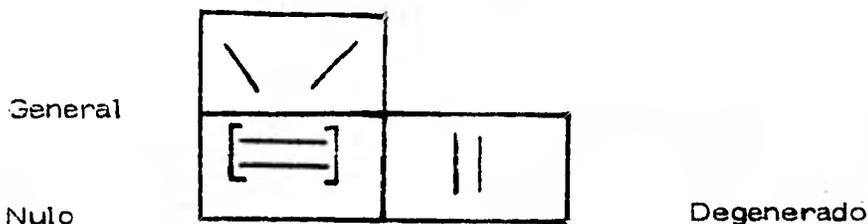
Encontraremos tres casos:

General con $\alpha_A \neq \alpha_B$

Nulo con $\alpha_A = 0 \cdot \beta_B = 0$ y $\alpha_A = \beta_B = 0$

Degenerado con $\alpha_A = \beta_B \neq 0$

que podemos representar gráficamente de la siguiente manera:



5.- Clasificación del Tensor de Dureza

Vayamos ahora al caso que nos interesa es decir al tensor de dureza E^{ijkl} . Este tensor tiene 21 componentes independientes que cuyo número debe de conservarse al transformarlo en espinor, de esta manera el tensor E^{ijkl} se transforma en el espinor $\epsilon_{ABCD\Phi\alpha\beta\gamma\delta}$, con este ya podemos hacer la clasificación utilizando el teorema de Sachs y después transformar el espinor al tensor E^{ijkl} que resultará clasificado en el espacio euclideo.

Para pasar del tensor E^{ijkl} al espinor $\epsilon_{ABCD\Phi\alpha\beta\gamma\delta}$ tenemos que hacer la siguiente transformación.

$$\epsilon_{ABCD\Phi\alpha\beta\gamma\delta} = (g_{iA} g_{jB} + g_{iB} g_{jA}) (g_{kC} g_{lD} + g_{kD} g_{lC}) (g_{m\Phi} g_{n\alpha} + g_{m\alpha} g_{n\Phi}) (g_{p\beta} g_{q\gamma} + g_{p\gamma} g_{q\beta}) E^{ijkl}$$

3-5-1

Con esta transformación encontramos que de las 256 componentes posibles solo existen 21 independientes, las mostramos enseguida y el número entre paréntesis indica su multiplicidad.

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| (1) E_{1111} $iiii$ | (32) E_{1112} $izzz$ | (16) E_{1122} $izzz$ |
| (8) E_{1111} $iiiz$ | (8) E_{1111} $izzz$ | (4) E_{1122} $zzzz$ |
| (4) E_{1111} $izzz$ | (2) E_{1111} $zzzz$ | (32) E_{1212} $izzz$ |
| (8) E_{1111} $iziz$ | (8) E_{1112} $zzzz$ | (8) E_{1212} $zzzz$ |
| (16) E_{1112} $iiii$ | (4) E_{1122} $iiii$ | (16) E_{1222} $izzz$ |
| (16) E_{1112} $izzz$ | (16) E_{1212} $iziz$ | (8) E_{1222} $zzzz$ |
| (32) E_{1112} $iziz$ | (16) E_{1122} $iziz$ | (1) E_{2222} $zzzz$ |

Este es, en efecto, el mismo número de componentes independientes que tiene E_{ijkl} ; la transformación que nos permite regresar al tensor de dureza partiendo de estas componentes es la siguiente:

$$E_{ijkl} = \frac{1}{64} \left[(g_{ia}b g_{jb}a + g_{ja}b g_{ib}a) (g_{kc}d g_{ld}c + g_{kdc} g_{lck}) + (g_{ic}a g_{jd}c + g_{jca} g_{id}c) (g_{kpb} g_{lba} + g_{kba} g_{lpb}) \right] E_{abcdpqr}$$

Ahora bien para aplicar el teorema de Sachs y obtener la clasificación necesitamos trabajar con las componentes espinoriales por lo que haremos una reenumeración; tomando en cuenta que solo son 21 podemos asociarlas a una matriz simétrica de 6x6 A_{ij} de la siguiente forma

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $1111 \leftrightarrow 1$ | $1122 \leftrightarrow 3$ | $1222 \leftrightarrow 5$ |
| $1112 \leftrightarrow 2$ | $1212 \leftrightarrow 4$ | $2222 \leftrightarrow 6$ |
- 3-5-2

En las mismas condiciones aplicar el Teorema de Sachs para la descomposición espinorial, esto dará origen a un cierto número de casos que podemos representar gráficamente de la siguiente manera:

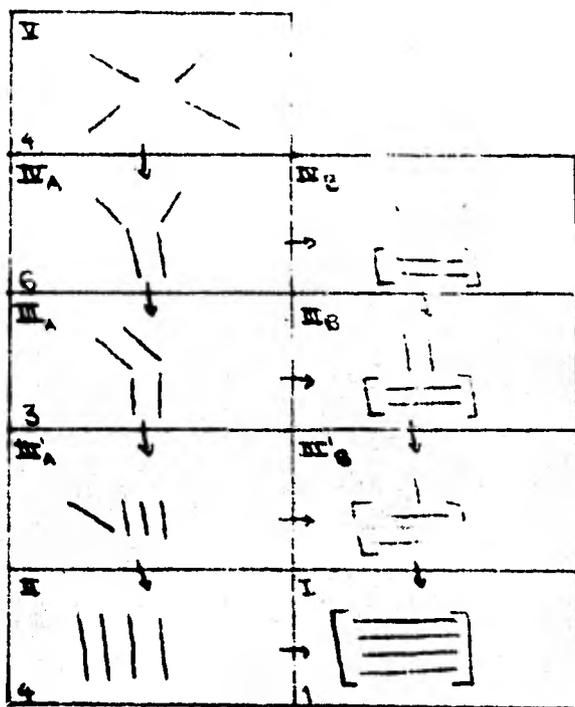


figura 7

En la figura 7 mostramos las posibles combinaciones de cuatro de las raíces del espinores \mathcal{E}_{ABCD} ; no es necesario mostrar la manera en que se combinan las raíces conjugadas puesto que todo lo que se diga para unas será válida para las otras. Para explicar el digrama, tomemos el caso V; este tiene 4 raíces distintas -esto lo indican cuatro rayas en distintas posiciones- su multiplicidad es 4 - lo indica el número arábico-

que en el ángulo inferior izquierdo. En otros casos, aparecen paréntesis cuadrados, lo cual indica que las raíces dentro de ellos son nulas; por otro lado las flechas nos muestran la "genealogía" de las diferentes combinaciones.

En la figura 7 tenemos la clasificación del espinor $\epsilon_{ABCDPQR\dot{S}}$ y como existe una función biyectiva entre este espinor y el tensor de dureza, podemos decir que esta clasificación lo es también del tensor $E^{ijk\dot{a}}$, solo es necesario aclarar un punto, al tomar las diferentes combinaciones de raíces debemos utilizar el Teorema de Sachs para cada caso particular y una vez hecho esto regresar a nuestro tensor original para tener el caso concreto de la mecánica del medio continuo.

Apliquemos lo dicho anteriormente al caso más sencillo, es decir al caso 1 de la clasificación de Petrov.

En este caso tenemos una cuádruple degeneración de las raíces, todas son nulas, pues si cuatro de ellas lo son, las otras cuatro conjugadas lo son también.

En primer lugar construyamos el invariante

$$\Omega = \epsilon_{ABCDPQR\dot{S}} \xi^A \xi^B \xi^C \xi^D \xi^P \xi^Q \xi^R \xi^{\dot{S}}$$

recordemos que:

$$\xi_{i\dot{s}2k}^i = (u, v) \quad u, v \in \mathbb{C}$$

$$\xi_{i\dot{s}2k}^i = (\bar{u}, \bar{v})$$

desarrollando el invariante obtenemos, después de factorizar en $|u|^8$ y definir

$$z = \frac{v}{u} \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{u}}$$

$$\Omega = |u|^8 \left\{ A_{11} + \dots + A_{66} z^4 \bar{z}^4 \right\} \quad 3-5-3$$

Debemos hacer notar lo siguiente, en la expresión 3-5-3, aparece como factor de $z^4 \bar{z}^4$ el término A_{66} , pero más adelante tendremos - que igualar expresión a una multiplicación de binomios en la que el término de grado superior es $z^4 \bar{z}^4$ con coeficiente igual a 1; de este modo estaremos forzando al término A_{66} a tomar el valor 1; si recordamos las equivalencias 3-5-2 veremos que $A_{66} = \epsilon_{2222} z z z z$ la cual no tiene el valor 1 a priori, entonces factorizamos también esta componente para no fijar ningún valor antes del desarrollo, la expresión 3-5-3 nos queda:

$$\Omega = A_{66} |u|^8 \left\{ \frac{A_{11}}{A_{66}} + \dots + z^4 \bar{z}^4 \right\}$$

Ahora si podemos hacer la igualación con las raíces del polinomio entre paréntesis. El caso I nos dice que todas las raíces son nulas es - decir:

$$z_1 = z_2 = \dots = \bar{z}_3^* = \bar{z}_4^* = 0$$

igualando las dos últimas expresiones adecuadamente

$$A_{66} |u|^8 \left\{ \frac{A_{11}}{A_{66}} + \dots + z^4 \bar{z}^4 \right\} = \beta |u|^8 \left\{ (z-0)^4 (\bar{z}-0)^4 \right\}$$

$$\Rightarrow A_{66} |u|^8 \left\{ \frac{A_{11}}{A_{66}} + \dots + z^4 \bar{z}^4 \right\} = \beta |u|^8 z^4 \bar{z}^4 \quad \beta \in \mathbb{C}$$

de aquí se observa que el último término es el único que no se anula y tenemos

$$A_{66} |u|^6 z^4 \bar{z}^4 = \beta |u|^6 z^4 \bar{z}^4$$

de donde deducimos que:

$$A_{ij} = 0 \quad \text{excepto} \quad A_{66} = \beta$$

3-5-4

es claro que en este caso

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \dots = \alpha_4^{(4)} \quad \alpha_1 = (1, 0)$$

recordemos que en el caso general $\alpha_1 = (1, -z; i)$

obtenemos así que la única componente distinta de cero es

$$A_{66} = \epsilon_{zzzz} z^4 \bar{z}^4 = \beta$$

Con esta información podemos hacer la transformación inversa, para obtener E^{ijkl} a partir de $\epsilon_{ABCDPQRS}$, es decir

$$E^{ijkl} = \frac{1}{64} (g^{iA} g^{jB} + g^{iB} g^{jA}) (g^{kC} g^{lD} + g^{kD} g^{lC}) + (g^{iC} g^{jD} + g^{iD} g^{jC}) (g^{kA} g^{lB} + g^{kB} g^{lA}) \epsilon_{ABCDPQRS} + C.C.$$

... 3-5-5

pero si recordamos 3-5-4, esta expresión se reduce a

$$\frac{1}{64} (g^{i\alpha} g^{j\beta} (z)) (g^{k\gamma} g^{l\delta} (z)) + (g^{i\gamma} g^{j\delta} (z)) (g^{k\alpha} g^{l\beta} (z)) \epsilon_{ABCDPQRS}$$

se reduce más aun si observamos que $g^{\alpha\alpha} = 0$ excepto si $\alpha = 4$ o $\alpha = 3$, $\alpha = 4$ no tiene significado en el espacio euclideo y $g^{33} = -1$ entonces la expresión 3-5-5 la podemos escribir finalmente:

$$E^{ijkl} \rightarrow E^{3333} = \frac{1}{64} \delta(q^{122} q^{322} q^{522} q^{522}) \epsilon_{22222222} + c.c.$$

como $\epsilon_{22222222} = \beta$

entonces $E^{3333} = \frac{1}{8} \beta + c.c.$

si definimos que $\beta = 4(-\kappa + i\mu)$

obtenemos $E^{3333} = -\kappa$

De modo que la ecuación fundamental

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \epsilon_{kl}$$

nos queda

$$\sigma^{33} = -\kappa \epsilon_{33}$$

3-5-6

Esto no es otra cosa que la ley de Hooke en una dimensión, es el caso físico más sencillo y responde al caso algebraico más sencillo de la clasificación, al caso que llamamos Petrov-I. No es únicamente una vuelta en círculo, la idea es otra, tomamos al tensor E^{ijkl} con sus simetrías lo transformamos en un espinor al que clasificamos de acuerdo al esquema seguido por Petrov al clasificar los espacios riemannianos, hasta aquí es solo un procedimiento matemático, pero resulta que al explorar los casos, estos tienen significado físico como ya hemos visto.

Si esto lo hubiéramos hecho para un caso más complicado, digamos el caso Petrov-II se haría lo siguiente:

Nuevamente construir el invariante Ω

$$\Omega = \epsilon_{ABCDPQRS} \xi^A \xi^B \xi^C \xi^D \xi^P \xi^Q \xi^R \xi^S$$

donde $\sum_{i=2k}^i = (u, v)$

$$\sum_{i=2k}^i = (\bar{u}, \bar{v})$$

$$\Omega = |u|^8 \left\{ A_{11} + 8A_{12} \bar{z} + 16A_{22} \bar{z} \bar{z} + \dots \right. \\ \left. + 8A_{56} z^3 \bar{z}^4 + A_{66} \bar{z}^4 z^4 \right\}$$

donde las A_{ij} están dadas en la expresión 3-5-2, nuevamente debemos factorizar también al término A_{66} para evitar fijarlo a priori.

$$\Omega = A_{66} |u|^8 \left\{ \frac{A_{11}}{A_{66}} + \frac{8A_{12}}{A_{66}} \bar{z} + \dots + \bar{z}^4 z^4 \right\} \dots \dots \dots 3-5-7$$

el caso Petrov -II consiste en una sola raíz diferente de cero degenerada cuatro veces, por lo que

$$\Omega = \beta |u|^8 \left\{ (z - z_0)^4 (\bar{z} - \bar{z}_0)^4 \right\}$$

$$= A_{66} |u|^8 \left\{ z^4 \bar{z}^4 + \dots + (-4z_0^3 \bar{z}_0^4 - 4z_0^4 \bar{z}_0^3) \bar{z} + z_0^4 \bar{z}_0^4 \right\} \quad 3-5-8$$

Con las expresiones 3-5-7 y 3-5-8 podemos efectuar la igualación y así obtener valores para las A_{ij} en términos de combinaciones de \bar{z}_0 , \bar{z}_1 y sus potencias hasta de orden 4. Esto nos daría las componentes de $\epsilon_{ABCD} p_{\alpha R \beta}$ en términos de cuatro parámetros.

Esta última parte es para mostrar como se puede aplicar este método en caso de que las raíces no sean nulas.

CONCLUSIONES

En los dos primeros capítulos de este trabajo se da un marco de trabajo a la ecuación $\sigma^{ij} = E^{ijkl} \epsilon_{kl}$ que como toda ecuación constitutiva relaciona un elemento axiomático $-\sigma^{ij}-$ con una cantidad medible $-\epsilon_{kl}-$ a través del tensor de dureza E^{ijkl} , que es nuestro sujeto de estudio.

En el tercero se presenta un resumen del álgebra espinorial, donde una de las secciones más importantes es la referente al espinor métrico que nos permite subir y bajar índices espinoriales; en ella presentamos el Teorema de Sachs, meollo de este problema, y planteamos asimismo una clasificación del tensor -electromagnético, que aunque superficial, aclara las ideas respecto al método de Petrov para clasificar tensores, por otro lado este es un caso físico que vale la pena estudiarse con detenimiento.

La última parte es fundamental, escogimos el caso en que el invariante Ω del Teorema de Sachs tenía sus raíces iguales a cero. Con esto pudimos obtener un tensor de dureza que da origen, en la ecuación que nos liga el esfuerzo con la deformación, a la conocida Ley de Hooke.

Con esto mostramos cómo, una descomposición espinorial nos lleva a todos los tipos posibles del tensor dureza, que son 9, así podemos decir que el caso del tensor que nos reproduce la Ley de Hooke es algebraicamente independiente de otros casos; del mismo modo puede darse la siguiente situación:

Tensores de dureza distintos pueden pertenecer al mismo tipo de Petrov. Más aún al desarrollar el invariante e igualarlo a la combinación de raíces que se haya escogido, se obtienen ciertas condiciones que nos permitirán hacer la clasificación de un tensor dado, simplemente transformandolos en un espinor y verificando si se cumplen.

Siguiendo esta línea de razonamiento, se puede estudiar la ecuación constitutiva de un material recurriendo simplemente a las condiciones previamente establecidas. De este modo conocer el caso del tensor E^{ijkl} , nos dice, finalmente que tipo de material estamos tratando.

Logramos no solo conocer que son nueve el número de casos posibles en la clasificación de Petrov sino también mostrar E^{ijkl} en el caso más sencillo, correspondiente a raíces nulas.

Dependiendo del caso que escojamos, es claro que se obtendrán distintos tipos de tensores de dureza que aumenten el grado de complejidad conforme aumente el número de raíces distintas de cero y disminuya su multiplicidad, de este modo era de esperarse que si quitamos casi todos los parámetros, al hacer las raíces iguales a cero, y solo dejamos un parámetro complejo β , el tensor fuera muy específico y la ecuación esfuerzo-deformación también lo fuera.

Los casos siguientes tienen importancia física, incluso es muy posible que algunos de ellos no esten totalmente estudiados y esta clasificación arroje luz para su mejor comprensión.

BIBLIOGRAFIA

CORSON, E.M.: INTRODUCTION TO TENSORS, SPINORS
AND RELATIVISTIC WAVE-EQUATIONS
(RELATIONS STRUCTURE) BLACKIE AND
SON LIMITED, LONDON, 2a. REIMP., 1955.

MALVERN, LAWRENCE E.: INTRODUCTION TO THE MECHANICS
OF CONTINUOUS MEDIUM, PRENTICE-HALL
INC., ENGLEWOOD CLIFFS, 1969.

PETROV, ZINOV'EVICH: EINSTEIN SPACES, PERGAMON PRESS,
OXFORD, 1969.

PRAGER, WILLIAM: INTRODUCTION TO MECHANICS OF CONTINUA,
DOVER PUBLICATIONS INC., NEW YORK, 1973.