Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ESFUERZOS ELASTICOS EN DISCOS EN ROTACION CUYO ESPESOR VARIA CON EL RADIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A:

JOAQUIN FLORES MENDEZ

MEXICO, D. F. NOV. 1982

CONTENIDO

INTRODUCCION

Actualmente, los sistemas de cómputo juegan un papel preponderante en la solución de los problemas generados por la física. El trabajo que se presenta, se avoca a la solución de uno de éllos, el cual está relacionada con la teoría de esfuerzos, en particular la elasticidad. Este trabajo forma parte del programa de "Ultracentrífugas", del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El objetivo fundamental es el cálculo de las deformaciones que sufre un disco sujeto a la acción de fuerzas al girar a grandes velocidades, este disco, se usa como tapa de un cilindro; sus deformaciones son tales que no rebasan un cierto valor permitido por el cilindro mismo. El problema se resuelve en base a métodos desarrollados a principios de este siglo, los cuáles obtienen resultados aproximados, a partir de diferentes hipótesis.

El programa que se propone, es capaz de predecir las deformaciones que sufre el disco al rotar, asociándole un perfil condicionado al original, bajo ciertas relaciones matemáticas.

ELASTICIDAD

"La elasticidad[2] es una propiedad fundamental de todas las substancias de la naturaleza". La elasticidad de los cuerpos ha sido usada sin bases matemáticas desde los tiempos prehistóricos en muchos tipos de construcciones y en todos los instrumentos y herramientas de la vida diaria. A pesar de que la utilización de las propiedades elásticas se remonta a tiempos inmemoriables, el primer intento científico para fundamentarlas lo encontramos hasta 1638 en el libro de Galileo Galilei, titulado: "Diálogos acerca de dos Nuevas Ciencias", porteriormente el inglés Robert Hooke, solucionando el anagrama "CEIIINOSSSTUV": UT TENSIO SIC VIS (para tu conocimiento y para quién lo comprenda, la tensión si lo deseas, puedes hacerla), encontró la ley fundamental de la elasticidad, años después Daniel Bernoulli y Euler dieron las ecuaciones que actualmente son usadas en los cálculos de elasticidad.

En 1818 el francés Navier dió la teoría general de la elasticidad y postuló las ecuaciones de equilibrio y movimiento; esta teoría fué desarrollada por Cauchy y Poisson, aplicándola al estudio de la propagación de ondas sonoras en medios elásticos. A principios del siglo XIX, Lagrange y Sophie Germaîn, resolvieron el problema de la curvatura y vibraciones de platos elásticos delgados, valiéndose de algunas características de ese tipo de cuerpos; simplificaron considerablemente la formulación y solución de los problemas debidos a las deformaciones producidas por la acción de fuerzas externas, sin profundizar en la esencia de los fenómenos microscópicos que ocurrían en el material.

Deformaciones Elásticas.

"Toda estructura posee en un cierto grado, la propiedad de la elasticidad".

Las deformaciones elásticas de una estructura, son aquéllas que desaparecen completamente una vez que se han suprimido las fuerzas externas que las producen; las deformaciones que no cumplen con este principio son llamadas deformaciones plásticas.

La deformación elástica de un sólido puede estudiarse, determinando la relación esfuerzo-deformación, en muchos casos, las pequeñas deformaciones son proporcionales al esfuerzo (Ley Hooke), matemáticamente se expresa como:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \qquad (1\text{-}1)$$

donde

l = longitud
Δl = incremento de longitud,
σ = esfuerzo,
E = módulo de elasticidad.

Otra característica elástica es la tensión máxima que puede aplicarse a un objeto, antes de que se deforme plásticamente; esta tensión, esfuerzo de rompimiento o valor de rompimiento, dado en la Figura 1, para un metal ha probado estar influenciado por las condiciones de las pruebas para su determinación por lo que se convierte en una característica "proceso de memoria" de menor importancia teórica.

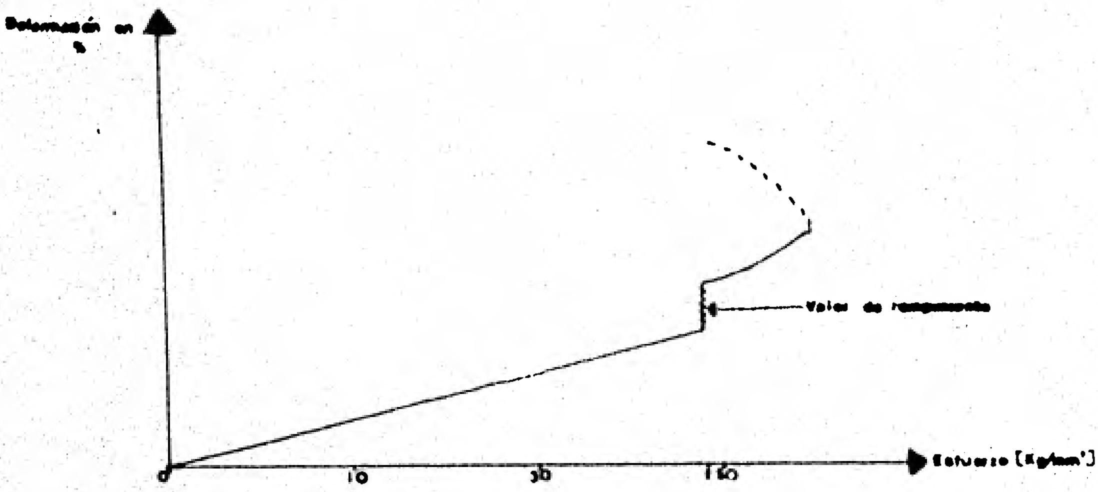

Figura 1. Deformación porcentual en función del esfuerzo para el acero.

Aquí supondremos que la materia de un cuerpo elástico, es homogénea, de tal manera que el elemento mas pequeño sacado del cuerpo, posea las mismas propiedades físicas que el cuerpo mismo, para simplificar la discusión aún mas, consideraremos que el cuerpo es isotrópico, es decir, que las propiedades elásticas son las mismas en todas direcciones.

Las estructuras materiales, usualmente, no satisfacen las suposiciones anteriores, un material importante como el acero, cuando se estudia con el microscopio, parece estar formado de cristales de varios tipos y con diferentes orientaciones, el material está lejos de ser homogéneo, sin embargo, la experiencia demuestra que soluciones de la teoría de elasticidad basadas en las suposiciones de homogeneidad e isotropía, pueden ser usadas en estructuras de acero con gran exactitud. La explicación de ésto, es que los cristales son pequeños, y mientras que las propiedades elásticas de un sólo cristal pueden ser distintas en las diferentes direcciones, los cristales están normalmente distribuidos al azar y con ésto, las propiedades elásticas de grandes piezas, representan promedios de las propiedades de cada uno de éllos, tanto más grande sea la diferencia entre las dimensiones geométricas que definen la forma de cuerpo, y las dimensiones de un sólo cristal, mejor será el éxito que tenga la proposición de homogeneidad usada, asi mismo, si los cristales están orientados al azar, el material puede ser usado como isotrópico.

Cuando debido a ciertos procesos tecnológicos como el balanceo, prevalece una cierta orientación de los cristales del metal, las propiedades elásticas del mismo, son distintas en las diferentes direcciones y la condición de anisotropía debe considerarse. Este tipo de condición se tiene sobre el cobre rolado.

Fuerzas Externas.

Existen dos tipos de fuerzas externas que pueden actuar sobre un cuerpo:

i) Se les llama fuerzas superficiales a las fuerzas distribuidas sobre la superficie; como la presión de un cuerpo sobre el otro, la presión hidrostática, etc.

ii) Se les denomina fuerzas de cuerpo a las fuerzas distribuidas sobre el volumen de un cuerpo; como las fuerzas gravitacionales, magnéticas, ó en el caso de un cuerpo en movimiento, la fuerza inercial.

Además, las fuerzas llamadas superficiales al proyectarse sobre los ejes coordenados, son denotados por F_x, F_y, F_z, dependiendo del eje que se trate; a las componentes de las fuerzas por unidad de volumen, se les denota por: $F_{\bar{x}}$, $F_{\bar{y}}$ y $F_{\bar{z}}$.

Componentes de Esfuerzo.

En general, el esfuerzo en un elemento de superficie, no actúa normalmente a élla, pero tiene componentes tanto nor males como tangenciales al plano; consideremos un elemento de volumen en un sistema de referencia, de ejes "x", "y", "z", mutuamente ortogonales, los esfuerzos que actúan en los tres planos normales a éstos, los cuáles pasan a través de un punto en el centro del elemento de volumen, nos darán nuevos componentes de esfuerzos, éstas se denotarán por las letras σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}...etc., donde la primera letra en el subíndice denota la dirección del esfuerzo y la segunda, define el plano en el cual actúa, la notación que se usará en este trabajo, la presentamos en la tabla I.

Consideremos ahora como cúbico, al elemento de volumen alrededor del punto P y con sus caras normales a sus ejes. Figura 2.

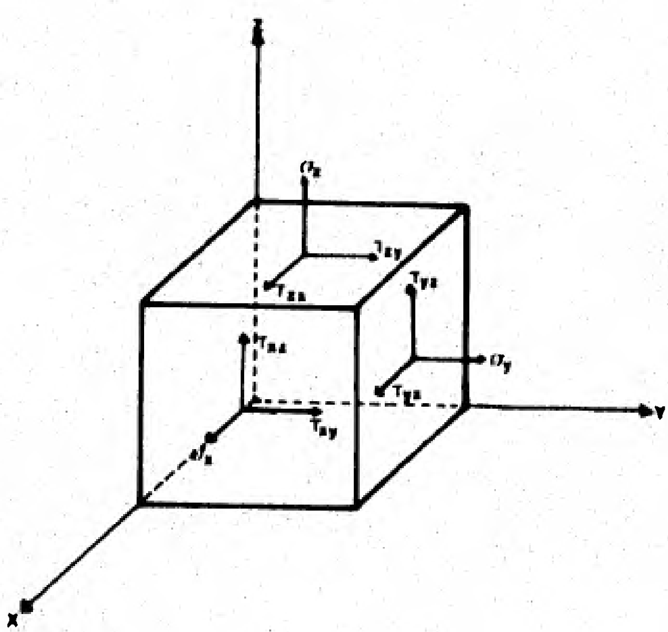

Figura 2. Diagrama de las direcciones de los esfuerzos en un elemento sólido.

TABLA I

NOMECLATURA USADA A LO LARGO DE ESTE TRABAJO

NOMBRE	SÍMBOLO
Coordenadas cartesianas	
Esfuerzo normal	σ_x, σ_y, σ_z
Esfuerzo transversal	τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy}
Deformacion normal	ε_x, ε_y, ε_z
Deformación transversal	γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy}
Dilatación	Δ
Coordenadas cilíndricas	
Esfuerzo normal	σ_r, σ_θ, σ_z
Esfuerzo transversal	$\tau_{\theta z}$, τ_{zr}, τ_r
Deformación normal	ε_r, ε_θ, ε_z
Constantes elásticas	
Módulo de Young	E
Constante de Poisson	ν
Módulo de rigidez	G

Por ejemplo para los lados perpendiculares al eje "Y", la componente normal de esfuerzo que actúa, se denota por σ_y donde, el subíndice y, indica que el esfuezo está actuando en un plano normal al eje. El esfuezo normal es tomado como positivo cuando produce tensión y negativo cuando produce compresión.

El esfuerzo cortante se divide en dos componentes paralelas a los ejes coordenados; por ejemplo; si consideramos otra vez los lados perpendiculares al eje "y", la componente en la dirección x, es denotada por τ_{yx} y en la dirección z por τ_{yz}.

Las direcciones de las componentes del esfuerzo cortante son tomadas como positivas en el sentido de los ejes coordenados. Siguiendo con esta regla, la dirección positiva de todas las componentes de esfuerzo que actúan en el lado derecho del elemento de volúmen, Figura 2, coinciden con las direcciones positivas de los ejes coordenados; todas las direcciones tomadas como positivas en el lado derecho del elemento, serían tomadas como negativas, en el lado izquierdo del mismo.

De lo anterior, vemos que para cada par de lados paralelos de un elemento de volúmen, Figura 2, sólo es necesario un símbolo para denotar las componentes normales de esfuerzo de corte. Para describir los esfuerzos que actúan en los seis lados del elemento de volumen, son necesarios tres símbo los para esfuerzos normales σ_x, σ_y, σ_z y seis mas para esfuerzos de corte (τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz}, τ_{zy}). Mediante consideraciones de equilibrio, la cantidad de símbolos para esfuerzos de corte puede ser reducida a tres(1), ya que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, ... etc.

Al discutir la deformación de un cuerpo elástico, se deberá suponer que hay suficientes restricciones como para prevenir que el cuerpo se mueva como un cuerpo rígido, de tal forma que no puedan existir desplazamientos de partículas, sin una deformación del mismo.

Aquí sólo trataremos deformaciones pequeñas como las que ocurren en estructuras fabricadas. Los pequeños desplazamientos de partículas de un cuerpo deformado, serán descompuestas en componentes u, v, w paralelas a los ejes coordenados. Se supondrá que estas componentes, son cantidades pequeñas que varían en forma contínua sobre el volumen del cuerpo.

Consideremos un elemento diferencial dxdydz de un cuerpo elástico, Figura 3.

Si el cuerpo sufre una deformación, en donde u, v, w son las componentes de desplazamiento del punto O, el desplazamiento en la dirección x de un punto adyacente A en el eje x es:

$$u + \frac{\delta u}{\delta x} dx$$

donde el incremento $\frac{\delta u}{\delta x}$ dx de la función u, se efectúa en la coordenada "x", entonces el incremento de longitud del elemento OA, debido a la deformación, es $\frac{\delta u}{\delta x}$ dx, de ahí que la elongación unitaria del punto O en la dirección x es $\frac{\delta u}{\delta x}$, así puede demostrarse que las elongaciones unitarias en las direcciones "y"y"z", están dadas por las derivadas $\frac{\delta v}{\delta y}$ y $\frac{\delta w}{\delta z}$

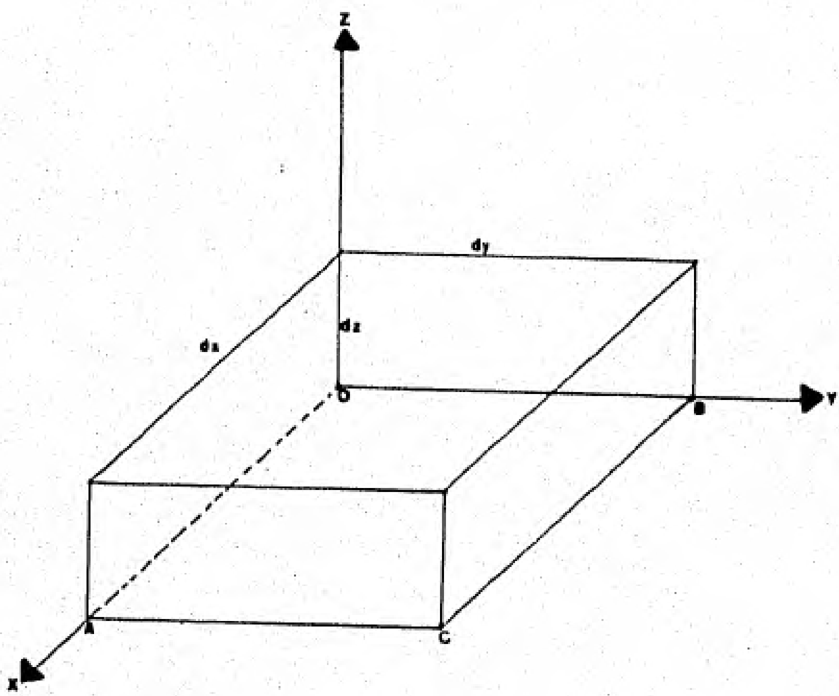

Figura 3. Elemento diferencial de un cuerpo elástico.

Consideremos ahora, la distorsión del ángulo entre los elmentos "OA" y "OB", Figura 4. Si u, v son los desplazamientos del punto O en las direcciones "x","y", los desplazamientos del punto "A" en la dirección "y" y del punto "B" en la dirección "x" son $v + \frac{\delta v}{\delta x}$ dx, $u + \frac{\delta u}{\delta y}$ dy respectivamente, debi do a estos desplazamientos, la nueva dirección O' A' del elemento IA, está inclinada respecto a su dirección inicial por el ángulo indicado en la Figura 4, es igual $\frac{\delta v}{\delta x}$; de igual forma, la dirección O'B' está inclinada con respecto a OB por el ángulo $\frac{\delta u}{\delta y}$.

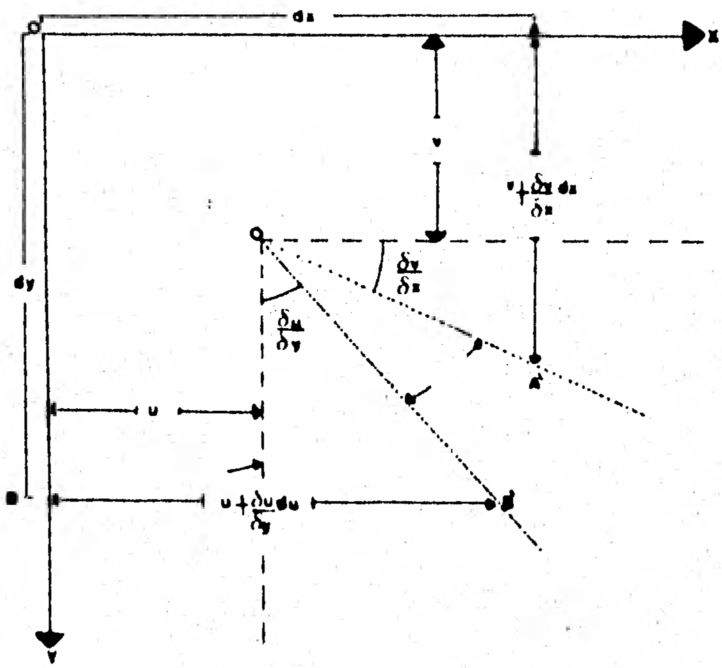

Figura 4. Diagrama de desplazamientos en las direcciones x, y.

De lo anterior se deduce que el ángulo inicial AOB, entre los dos elementos OA y OB varía, debido al incremento del ángulo $\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$. Esta es la deformación de corte entre los planos xz y yz.

Las deformaciones de corte entre los planos xy y xz ó yx y yx pueden obtenerse de igual forma.

Usaremos la letra ε para elongaciones unitarias y la letra γ para deformaciones de corte unitaria. Para indicar las direcciones de deformación, usaremos los mismos subíndices para estas letras, que los usados para los componentes de esfuerzo.

De lo anterior:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \tag{1-2}$$

Las seis cantidades anteriores, son conocidas como las componentes de deformación.

Ley de Hooke

A las relaciones entre las componentes de esfuerzo y las de deformación, que han sido establecidas experimentalmente, se les conoce como Ley de Hooke.

Imaginemos un paralelepípedo rectangular con sus lados paralelos a los ejes coordenados y sometido a la acción del esfuerzo normal σ distribuido uniformemente sobre dos lados opuestos; se puede demostrar[(1)] que en el caso de un material isotrópico, estos esfuerzos normales, no producen distorsión en los ángulos del elemento. La magnitud de la elongación unitaria del elemento, está dada por la ecuación:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \tag{1-3}$$

Esta ecuación define el módulo elástico E. Un aumento del elemento en la dirección "x", está acompañado por contracciones laterales; lo que define la razón de Poisson ν

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \tag{1-4}$$

Para el aluminio, dicha constante se toma como 0.33[7].

Las ecuaciones anteriores, pueden ser usadas para compresiones simples. Dentro de los límites elásticos, el módulo de elasticidad y la constante de Poisson en la compresión son los mismos que en la tensión.

Ahora, si el elemento anterior está sujeto a la acción de esfuerzos normales σ_x, σ_y, σ_z distribuidos uniformemente a los lados, las componentes resultantes de deformación, se pueden obtener usando las ecuaciones (1-3) y (1-4).

Experimentalmente se ve que para obtenerlas, se tienen que superponer las componentes de deformación producidas por cada uno de los tres esfuerzos, mediante este método se encuentran las ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\ (\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\ (\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\ (\sigma_x + \sigma_y)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}5)$$

Posteriormente, usando este método, se calculan las deformaciones totales y los esfuerzos producidos por algunas fuerzas.

Este método es válido, en tanto las deformaciones sean pequeñas y los correspondientes desplazamientos sean tan pequeños que no afecten esencialmente, la acción de las fuerzas externas. En forma tensorial, se escribe $\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl}\,\varepsilon_{kl}$ de donde las ecucaciones (1-5) son la expresión general de la Ley de Hooke en el caso de materiales isotrópicos.

Teoremas Generales

Ecuaciones Diferenciales de Equilibrio.

En los incisos anteriores, hemos considerado el esfuerzo en un punto del cuerpo elástico, consideremos ahora la variación de los esfuerzos al cambiar la posición del punto; para este propósito se estudiaran las condiciones de equilibrio de un paralelepípedo rectangular de lados δx, δy, δz, Figura 5. Las componentes de esfuerzo que actúan en los lados de este elemento, están consideradas en el centro de cada lado y sus direcciones positivas se ven en la figura.

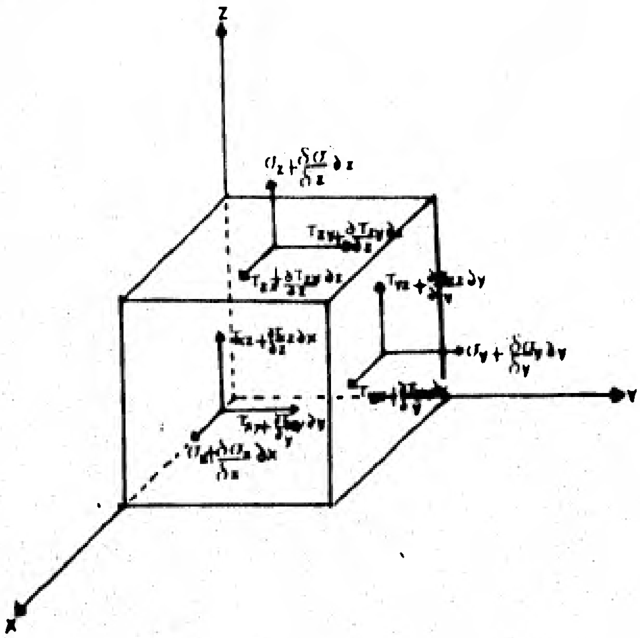

Figura 5. Diagrama de las componentes de esfuerzo en un elemento de volumen.

Aquí tomamos en cuenta los pequeños cambios de las componentes de esfuerzos debidos a los incrementos δ_x, δ_y, δ_z de las coordenadas, al calcular las fuerzas que actúan sobre los elementos, consideramos los lados también como pequeños; la fuerza se obtiene multiplicando al esfuerzo en el centro del lado, por el área del lado mismo, si denotamos por $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ a las componentes de esta fuerza por unidad de volúmen del elemento, entonces la ecuación de equilibrio que se obtiene al sumar todas las fuerzas que actúan en la dirección "x", es:

$$\left(\sigma_x + \frac{\delta \sigma_x}{\delta x}\delta x - \sigma_x\right)\delta y\,\delta z + \left(\tau_{xy} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y}\delta y - \tau_{xy}\right)\delta x\,\delta z + \left(\tau_{xz} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z}\delta z - \tau_{xz}\right)\delta x\,\delta y + X\,\delta x\,\delta y\,\delta z = 0$$

Las otras dos ecuaciones de equilibrio se encuentran bajo el mismo criterio; estas ecuaciones se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} + X = 0 \\ &\frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta z} + Y = 0 \\ &\frac{\delta \sigma_z}{\delta z} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} \quad \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta y} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}6)$$

estas ecuaciones deben satisfacerse en cualquier punto del volúmen del cuerpo, ya que como los esfuerzos varían sobre el volúmen del mismo y en su superficie, éstos deben estar en equilibrio con las fuerzas externas que actúan sobre la superficie del cuerpo.

Condiciones de Compatibilidad

Las seis componentes de deformación (ε_x, ε_y, ..., γ_{xy}) en cada punto, están totalmente determinadas por las tres funciones u, v, w que representan las componentes de desplazamiento, de aquí que las componentes de deformación no pueden ser tomadas arbitrariamente como funciones de x, y, z ya que estan sujetas a las relaciones que se siguen de las ecuaciones (1-2). Así, de esas ecuaciones se tiene:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \; ; \; \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (1\text{-}7)$$

Se pueden obtener dos ecuaciones mas, mediante el intercambio cíclico de las letras x, y, z.

Derivando estas ecuaciones y luego sumándolas(1), obtenemos:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \qquad (1\text{-}8)$$

Se encuentran dos relaciones más de este tipo intercambiando cíclicamente a x,y,z. Así, llegamos a seis ecuaciones diferenciales (1-7) y (1-8), entre las componentes de deformación, las cuáles se deben cumplir en base a las ecuaciones (1-2).

A estas ecuaciones diferenciales, se les denomina condiciones de compatibilidad. Usando la Ley de Hooke, ecuación

(1-5), estas condiciones pueden ser transformadas a relaciones entre las componentes de esfuerzo, tomando por ejemplo la condición

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta z^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 \gamma_{yz}}{\delta y \delta z} \qquad (1\text{-}9)$$

y usando las ecuaciones (1-5) y la relación[1]:

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_z = \frac{2(1+\nu) z}{E} \qquad (1\text{-}10)$$

encontramos:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)\tau_{yz}}{E}$$

Las condiciones de compatibilidad contienen sólo derivadas de segundo orden de las componentes de esfuerzo, de aquí que si las fuerzas externas son tales que las ecuaciones de equilibrio (1-6) junto con las condiciones de frontera (1-7) se pueden satisfacer, ya sea tomando las componentes de esfuerzo como constantes ó como funciones lineales de las coordenadas, entonces las ecuaciones de compatibilidad quedan satisfechas identicamente y ese sistema de esfuerzos, es la solución correcta del conjunto de ecuaciones.

Determinación de Desplazamientos

Una vez encontradas las componentes de esfuerzo de las ecuaciones anteriores, se calculan las componentes de deformación[1], mediante la Ley de Hooke (1-5) y (1-10); las ecuaciones (1-2) se usan para calcular los desplazamientos u, v, w; derivándolas con respecto a x, y, z obtenemos dieciocho ecuaciones con dieciocho segundas derivadas. Para u, por ejemplo, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \qquad (1\text{-}11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right]$$

Mediante intercambio cíclico de las letras x, y, z, se obtienen las otras dos componentes de desplazamiento v, w. Es obvio, que u, v, w pueden obtenerse mediante una doble integración de estas ecuaciones. Las constantes de integración no serán otra cosa que la suma de funciones lineales en x, y, z; evidentemente, esas funciones pueden sumarse a u, v, w, sin que esto afecte a ecuaciones del tipo (1-11).

ELASTICIDAD EN DISCOS QUE ROTAN

Ecuaciones Generales en Coordenadas Polares

En la discusión de esfuerzos en anillos circulares y discos, es ventajoso el uso de las coordenadas polares; la posición de un punto en el plano medio de un plato, queda ahí definida tan sólo por la distancia al origen O, por el ángulo o y por un cierto eje Ox definido en el plano, Figura 6.

Consideremos el equilibrio de un pequeño elemento abcd cortado al plato, por las secciones radiales Oc y Ob perpendiculares al mismo y por dos superficies cilíndricas ad y bc

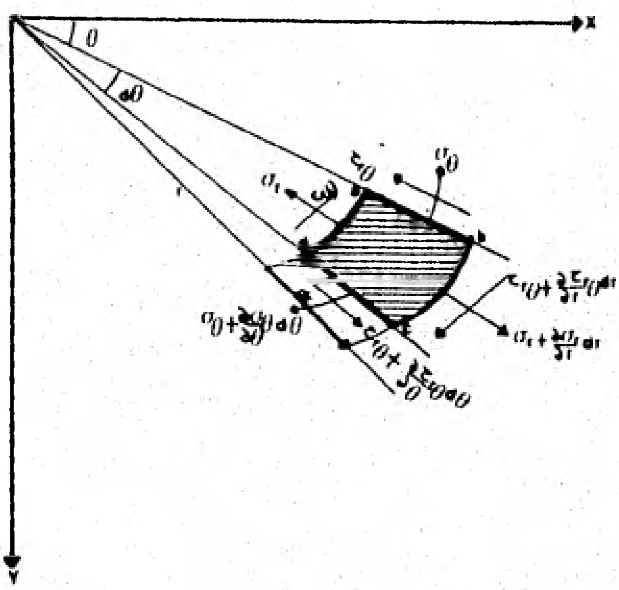

Figura 6. Esfuerzos y deformaciones en un corte de disco.

Con radios r y r + dr, normales al plato. Las componentes de esfuerzo normal en la dirección radial se donotaran por σ_r y las componentes de esfuerzo normal en la dirección tangencial, por σ_θ. Para la componente de esfuerzo cortante se usará $\tau_{r\theta}$. Las direcciones positivas de las componentes de esfuerzo, están indicadas en la figura anterior.

Suponiendo que los esfuerzos están uniformemente distribuidos sobre los lados de un pequeño elemento, la fuerza normal en la dirección radial que actúa en el lado "ad" del elemento, es $\sigma_r r d\theta$ (el grosor del plato está tomado como unitario). La fuerza normal en el lado "bc" del elemento, tomando en cuenta la variación de la componente de esfuerzo σ_r, es:

$$\left(\sigma_r + \frac{\delta \sigma_r}{\delta r} dr\right)(r + dr)\, d\theta$$

Las fuerzas normales que actúan en los lados "ab" y "cd" son: $\sigma_\theta dr$ y $(\sigma_\theta + \frac{\delta \sigma_\theta}{\delta \theta} d\theta)\, dr$, respectivamente, dando una resultante en la dirección radial, igual a $\sigma_\theta dr d\theta$ (donde ha sido despreciada una pequeña cantidad de orden superior), las fuerzas cortantes que actúan en los lados "ab" y "cd" del elemento, dan una fuerza resultante en la dirección radial igual a:

$$\frac{\delta \tau_{r\theta}}{\delta \theta} d\theta\, dr$$

También, se ha supuesto que hay una fuerza de cuerpo R por unidad de volumen actuando en la dirección radial; entonces, la fuerza de cuerpo que actúa en el elemento abcd es $Rrdrd\theta$, sumando todas las fuerzas en la dirección radial encontramos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right)(r+dr)\,d\theta - \sigma_r r\,d\theta -$$

$$- \sigma_\theta\, dr\,d\theta + \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - Rr\right) dr\,d\theta = 0$$

En forma análoga, se puede encontrar la ecuación de equilibrio del elemento en la dirección tangencial; despreciando pequeñas cantidades de orden mayor y cancelando el factor $drd\theta$, las dos ecuaciones se reducen a:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

Si no existe fuerza de cuerpo R, la función de esfuerzo $\phi(r,\theta)$, se usará en la solución de las ecuaciones (2-1). Sustituyendo, se puede probar que estas ecuaciones se satisfacen tomando:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \qquad (2\text{-}2)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r\,\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)$$

Cualquier función ϕ de r y θ sustituida en las ecuaciones (2-2), dan las componentes de esfuerzo que satisfacen las ecuaciones de equilibrio (2-1) cuando R = 0; para obtener una distribución de esfuerzos en un cuerpo elástico, se debe satisfacer también, la condición de compatibilidad, en el caso de coordenadas cartesianas, esta condición requiere que la función de esfuerzos satisfaga la ecuación:

$$\frac{\delta^4\phi}{\delta x^4}+2\frac{\delta^4\phi}{\delta x^2\delta y^2}+\frac{\delta^4\phi}{\delta y^4}=0 \qquad (2\text{-}3)$$

Para nuestro propósito, necesitamos transformar esta ecuación a coordenadas polares, la relación entre coordenadas polares y cartesianas es:

$$r^2=x^2+y^2 \quad ; \quad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

de donde:

$$\frac{\delta\theta}{\delta x}=-\frac{y}{r^2}=\frac{-\operatorname{Sen}\theta}{r} \qquad \frac{\delta\theta}{\delta y}=\frac{x}{r^2}=\frac{\operatorname{Cos}\theta}{r}$$

$$\frac{\delta r}{\delta x}=\frac{x}{r}=\operatorname{Cos}\theta \qquad \frac{\delta r}{\delta y}=\frac{y}{r}=\operatorname{Sen}\theta$$

Dado esto, y considerando a ϕ como función de r, θ se tiene:

$$\frac{\delta\phi}{\delta x}=\frac{\delta\phi}{\delta r}\frac{\delta r}{\delta x}+\frac{\delta\phi}{\delta\theta}\frac{\delta\theta}{\delta x}=\frac{\delta\phi}{\delta r}\operatorname{Cos}\theta-\frac{1}{r}\frac{\delta\phi}{\delta\theta}\operatorname{Sen}\theta$$

Para encontrar la segunda derivada con respecto a x, sólo repetimos la operación anterior, con ésto la ecuación (2-3) se transforma en[7]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) \tag{2-4}$$

De algunas soluciones de esta ecuación diferencial parcial, obtenemos soluciones a problemas de dos dimensiones en coordenadas polares para diferentes condiciones de frontera.

Distribución Simétrica de Esfuerzos Alrededor de un Eje

Si la distribución de esfuerzos es simétrica con respecto al eje perpendicular al plano xy, Figura 6, las componentes de esfuerzo no dependen de θ y son funciones de r solamente, de la simetría se sigue también que el esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}$, debe desaparecer, entonces, solamente la primera de las dos ecuaciones de equilibrio (2-1) permanece, y se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0 \tag{2-5}$$

Si la fuerza de cuerpo R es 0, debemos usar la función de esfuerzo ϕ, tomando en cuenta la simetría, esta función depende sólo de r y la ecuación de compatibilidad (2-4) se convierte en:

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\right)\left(\frac{\delta^2\phi}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta\phi}{\delta r}\right)=$$

(2-6)

$$=\frac{\delta^4\phi}{\delta r^4}+\frac{2}{r}\frac{\delta^3\phi}{\delta r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2\phi}{\delta r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\delta\phi}{\delta r}=0$$

La solución(13) a esa ecuación tiene cuatro constantes de integración, que deben de ser determinadas de las condiciones de frontera, sustituyendo, se puede comprobar(7) que:

$$\phi=A\log r+Br^2\log r+Cr^2+D \qquad (2\text{-}7)$$

es la solución general. Las soluciones a todos los problemas de distribución de esfuerzos simétricos, sin fuerzas de cuerpo, pueden ser obtenidas de aquí. Las componentes de esfuerzo correspondientes de las ecuaciones (2-2) son:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\delta\phi}{\delta r}=\frac{A}{r^2}+B(1+2\log r)+2C$$

$$\sigma_\theta=\frac{\delta^2\phi}{\delta r^2}=\frac{A}{r^2}+B(3+2\log r)+2C \qquad (2\text{-}8)$$

$$\tau_{r\theta}=0$$

Si no existe ningún agujero en el origen de las coordenadas, las constantes A, B desaparecen, ya que de no ser así, las componentes de esfuerzo (2-8), se volverían infinitas cuando r = 0.

Si existe un agujero en el origen, se pueden obtener soluciones diferentes a las obtenidas para funciones uniformes o compresiones, a partir de las ecuaciones (2-8).

Por ejemplo, tomando B = 0, se tiene:

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C \qquad \sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C \tag{2-9}$$

Esta solución se podría adaptar a que representara la distribución de esfuerzos en un cilindro hueco sometido a presión uniforme en las caras externa e interna.

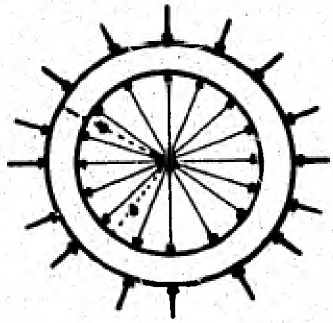

Figura 7. Distribución de esfuerzos en un corte lateral de cilindro.

Sean a y b los radios interior y exterior del cilindro, y P_i y P_o las presiones, uniformes tanto internas como externas, entonces, las condiciones de frontera son:

$$\sigma_r \Big|_{r=a} = -P_i \qquad\qquad \sigma_r \Big|_{r=b} = -P_o \tag{2-10}$$

Sustituyendo ésto en la primera de las ecuaciones (1-9), se tienen los valores de A y C tales que:

$$-P_i = \frac{A}{a^2} + 2C \quad ; \quad -P_o = \frac{A}{b^2} + 2C$$

de donde:

$$A = \frac{a b^2 (P_o - P_i)}{b^2 \; a^2} \quad ; \quad 2C = \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2}$$

Reemplazando ésto en las ecuaciones (2-9), se obtienen las siguientes expresiones para las componentes de esfuerzo:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2 (P_o - P_i)}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2 (P_o - P_i)}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \tag{2-11}$$

Es interesante notar que la suma $\sigma_r + \sigma_\theta$ es constante, a través del grosor de la pared del cilindro. De aquí que los esfuerzos σ_r y σ_θ produzcan contracción o extensión uniforme en la dirección de los ejes del cilindro, mientras que secciones perpendiculares a estos ejes, permanecen iguales, por lo que la deformación producida por los esfuerzos (2-11) en un elemento del cilindro cortado por dos secciones adyacentes, no interfiere con la deformación de dos elementos vecinos, y es justificable, considerar al elemento bajo las condiciones de esfuerzo plano como lo hicimos en la discusión anterior.

En el caso particular, cuando $P_o = 0$, es decir, el cilindro está solamente sometido a presión interna, las ecuaciones (2-11) dan:

$$\sigma_r = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad (2\text{-}12)$$

Estas ecuaciones demuestran que σ_r es siempre un esfuerzo de compresión y σ_θ es un esfuerzo de tensión. El último es el mas grande en la superficie interior del cilindro, donde:

$$(\sigma_\theta)_{MAX} = \frac{P_i(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \qquad (2\text{-}13)$$

$(\sigma_\theta)_{max}$ es siempre numéricamente mayor que la presión inter na y se aproxima a esta cantidad, cuando b aumenta de tal forma que no se puede reducir a un valor menor P_i, no importando la cantidad de material agregado en la superficie del cilindro[7].

Componentes de Deformación en Coordenadas Polares.

Sean u y v las componentes de los desplazamientos en las direcciones radial y tangencial respectivamente. Si u es el desplazamiento radial de lado "ad" del elemento "abcd", Figura 6, el desplazamiento radial de lado "bc" es $u + \frac{\delta u}{\delta r} du$, entonces la elongación unitaria del elemento "abcd" en la dirección radial, es:

$$\varepsilon_r = \frac{\delta u}{\delta r} \tag{2-14}$$

Se debe hacer notar que la deformación en la dirección tangencial no depende solamente del desplazamiento "v", sino también del desplazamiento radial "u". Suponiendo por ejemplo, que los puntos "a" y "d" del elemento "abcd", Figura 6, tienen solamente el desplazamiento radial "u", la nueva longitud del arco ad es $(r + u)d\theta$ y la deformación en la dirección tangencial es:

$$\frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}$$

La diferencia entre los desplazamientos tangenciales de los lados "ab" y "cd" del elemento "abcd" es $\frac{\delta v}{\delta\theta}\,d\theta$ y la deformación tangencial debido al desplazamiento "v" es en consecuencia $\frac{\delta v}{r\delta\theta}$. La deformación tangencial es

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta\theta} \qquad (2\text{-}15)$$

Consideremos ahora la deformación transversal o distorsión, sea a'b'c'd' la posición del elemento después de la deformación, Figura 8

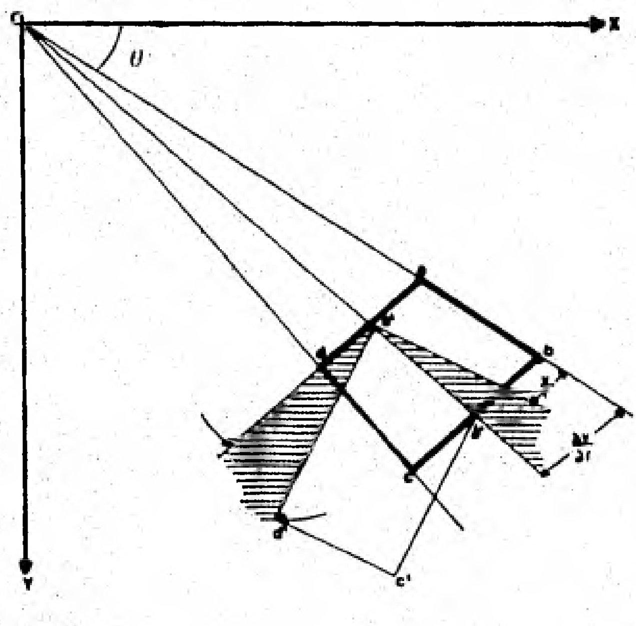

Figura 8. Componentes de deformación en un elemento de cilindro.

El ángulo entre las direcciones ad y a'd' es debido al desplazamiento radial u y es igual a $\frac{\delta u}{r\delta\theta}$, de igual manera, el ángulo entre a'b' es igual a $\frac{\delta v}{\delta r}$.

Nótese que sólo parte de este ángulo (sombreado en la Figura) contribuye a la deformación transversal, y la otra parte, $\frac{v}{r}$ representa el desplazamiento angular debido a la rotación del elemento "abcd", tomado como cuerpo rígido, alrededor del eje que pasa por O; entonces, el cambio total en el ángulo "dab", que representa la deformación transversal es:

$$\gamma_{r\theta}=\frac{\delta u}{\delta\theta}+\frac{\delta v}{\delta r}-\frac{v}{r} \qquad (2\text{-}16)$$

Sustituyendo ahora estas expresiones para las componentes de deformación, ecuaciones (2-14), (2-15) y (2-16) en las ecuaciones (se supone que el esfuerzo es plano y no existe componente z, perpendicular al plano del plato), de la Ley de Hooke (1-5), se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r-\nu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta-\nu\sigma_r) \qquad (2\text{-}17) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\tau_{r\theta} \end{aligned}$$

Con lo cual, finalmente, tenemos suficientes ecuaciones para determinar a u y v.

METODOS USADOS PARA CALCULAR DEFORMACIONES DE DISCOS EN ROTACION

El problema ha sido enfocado de diferentes maneras, que van desde el intentar resolver ecuaciones en derivadas parciales mediante desarrollos en series hasta hacer aproximaciones por medio de gráficas y consideraciones de tipo físico; en el siguiente capítulo; se presentan los métodos mas usuales.

Método de M. Grübler

Este método[1,6] supone que el espesor de las paredes del disco en rotación, es pequeño en comparación con su radio. Si los esfuerzos no varían sobre el grosor en cada sección del disco, el análisis para discos de espesor constante, se puede aplicar a aquéllos de espesor variable.

Si el grosor es constante, se aplica la ecuación (2-11), igualando la fuerza del cuerpo R a la fuerza inicial (despreciando el peso del disco), entonces

$$R = \rho w^2 r \qquad (3\text{-}1)$$

esta ecuación se puede escribir en la forma:

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho w^2 r^2 = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

y se satisface, si derivamos[1] las componentes de una función de esfuerzos F de la siguiente manera:

$$F = r\sigma_r \qquad \sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + \rho\omega^2 r^2 \qquad (3\text{-}3)$$

Ahora, las componentes de deformación en el caso simétrico son:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \Rightarrow \frac{d\,r\,\varepsilon_\theta}{dr}$$

eliminando u de estas ecuaciones, se obtiene

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \qquad (3\text{-}4)$$

sustituyendo para las componentes de deformación, sus expresiones en términos de las componentes de esfuerzo, ecuación (2-5) y aplicando la ecuación (3-3), encontramos que la función de esfuerzos F debe satisfacer:

$$r^2\frac{d^2F}{dr} + r\frac{dF}{dr} - F + (3+\nu)\rho\,\omega^2 r^3 = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

puede verificarse por sustitución, que la solución general de esta ecuación es:

$$F = Cr + \frac{D}{r^2} - \left(\frac{3+\nu}{8}\right)\rho\omega^2 r^3 \qquad (3\text{-}6)$$

y de las expresiones (3-3) encontramos que:

$$\sigma_r = C + \frac{D}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = C - \frac{D}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\,\rho\,\omega^2 r^2 \qquad (3\text{-}7)$$

las constantes de integración C y D se determinan de las condiciones de frontera.

En el caso de un disco de radio b con un agujero circular de radio a en el centro, las constantes de integración se obtienen de las condiciones de frontera interiores y exteriores, si no existen fuerzas que actúen en éllas, tenemos:

$$\sigma_r \Big|_{r=a} = 0 \; ; \; \sigma_r \Big|_{r=b} = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

mediante un desarrollo matemático(7), se encuentra que el esfuerzo radial máximo se obtiene en $r = \sqrt{ab}$, donde:

$$(\sigma_r)_{MAX} = \frac{3+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2 (b-a)^2$$

y el esfuerzo tangencial máximo en la frontera interna donde:

$$(\sigma_\theta)_{MAX} = \frac{3+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2 \left(b^2 + \left(\frac{1-\nu}{3+\nu}\right)a^2\right) \qquad (3\text{-}10)$$

este esfuerzo es mayor que $(\sigma_r)_{max}$. Cuando el radio a se aproxima a 0, el esfuerzo tangencial máximo se acerca a un valor dos veces más grande que para el disco sólido, es decir, haciendo un hoyo circular en el centro de un disco que rote se duplica el esfuerzo máximo. Aplicando ahora estas consideraciones a un disco de grosor variable h, y de radio r, la ecuación de equilibrio de un elemento(1) como se muestra en la Figura 6 es:

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

esta ecuación se resuelve poniendo:

$$F = hr\sigma_r \qquad h\sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + h\rho\omega^2 r^2$$

donde F es llamada función de esfuerzos.

Sustituyendo estas expresiones para las componentes de esfuerzo en la ecuación de compatibilidad (3-4), se llega a la siguiente forma para la función F:

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2} + r\frac{dF}{dr} - F + (3+\nu)\rho\omega^2 h r^3 - \qquad (3\text{-}12)$$

$$-\frac{r}{h}\frac{dh}{dr}\left[r\frac{dF}{dr} - \nu F\right] = 0$$

en el caso particular cuando el grosor varia de acuerdo con la ecuación:

$$h = Cr^n \qquad (3\text{-}13)$$

Con C, n constantes, la ecuación (3-12), tiene la siguiente solución general[7]:

$$F = m r^{n+8} + A r^{\alpha} + B r^{\beta} \tag{3-14}$$

donde:

$$m = \frac{-(3+\nu)\rho\omega^2 C}{\nu n + 3n + 8}$$

y α, β son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + \nu n - nx - 1 = 0$$

A y B son constantes de integración determinadas por las condiciones de frontera.

La deformación radial está dada por la ecuación (2-14)

$$\mu = \varepsilon_\theta r \tag{2-14}$$

y como no depende del ángulo θ, no existirá elongación tangencial.

Finalmente, usando las relaciones (3-12), se tiene:

$$\sigma_r = \frac{F_i}{h_i r}$$

y

$$\sigma_\theta = \frac{1}{h_i}\frac{dF_i}{dr} + \rho\omega^2 r^2$$

y con la Ley de Hooke

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta)$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \qquad (3\text{-}15)$$

donde ε_r y ε_θ son las componentes de esfuerzo radial y tangencial respectivamente.

El método pues; consiste en asignar a un perfil dado, otro que se le aproximé, formado por secciones de la forma $h = Cr^n$, a cada sección se le asignará una función de esfuerzos, ecuación (3-12), la cual, en base a la suposición de continuidad en la distribución de esfuerzos, se obliga a cumplir que para cada intersección de curvas $h = Cr^n$, se tenga:

$$F_i \Big|_{r_1} = F_{i+1} \Big|_{r_1} ; \quad F_{i+1} \Big|_{r_2} = F_{i+2} \Big|_{r_2} \ldots \text{etc.}$$

en forma análoga para $\frac{dF_i}{dr}$

Usando finalmente la suposición de carencia de esfuerzos radiales en centro y periferia del disco, ecuación (3-8) se llega a una matríz de K-funciones con K-incognitas, con ayuda del resultado de esta matríz y la teoría de esfuerzos obtenida anteriormente para perfiles constantes, se calculan los esfuerzos y deformaciones tangenciales y radiales.

Método de H. Haerle y Donath

H. Haerle y Donath[4], intentan generalizar la solución del problema de esfuerzos y deformaciones de discos en rotación, mediante el desarrollo de gráficas que redujesen el trabajo matemático y cuyos resultados fuesen apropiados para fines prácticos.

Usa las fórmulas generales para esfuerzo elástico, obtenidas por Stodola[10], éstas son las siguientes:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(3+\nu)Kr^2 + (\alpha+\nu)Ar^{\alpha-1} + (\beta+\nu)Br^{\beta-1}\right] \qquad (3\text{-}16)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(1+3\nu)Kr^2 + (1+\alpha\nu)Ar^{\alpha-1} + (1+\beta\nu)Br^{\beta-1}\right]$$

$$u = Kr^3 + Ar + Br^{-1}$$

A, B son constantes de integración dadas por las condiciones de frontera. y α, β raíces de la ecuación:

$$x^2 + nx - (\nu n + 1) = 0$$

Con n, exponente de la ecuación (3-13). El valor de K viene dado por:

$$K = \frac{-(1-\nu^2)\, m\omega^2}{E\,(8 - n(3+n))}$$

En el caso especial de este trabajo, las unidades para los esfuerzos, son libras por pulgada cuadrada.

Este método, aproxima cualquier tipo de perfil de la forma de la ecuación (3-13), escalones de grosor constante, tal que la deformación que sufren estos escalones, es cercana a la que sufre el disco real. Figura 9

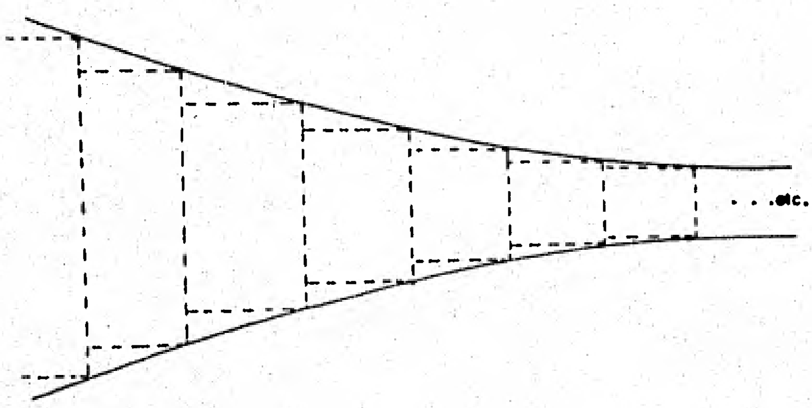

Figura 9. Aproximación mediante discos de perfil constante a un disco de perfil del tipo exponencial.

Es obvio que entre mas pequeños sean los escalones, mejor será la aproximación al resultado correcto.

Por lo que, analizando el tratamiento desde este punto de vista, para discos de perfil constante, se tiene n = 0, entonces $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y:

$$K = \frac{-(1-\nu)^2 m \omega^2}{8E}$$

sustituyendo ésto en la ecuación (3-16) se tiene:

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(1+3\nu)\,K r^2 + (1+\nu)\,A + (1-\nu)\,B r^{-2}\right]$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(3+\nu)\,K r^2 + (1+\nu)\,A - (1-\nu)\,B r^{-2}\right] \qquad (3\text{-}17)$$

Sumando y restando las ecuaciones anteriores, y sustituyendo el valor de K se tiene:

$$\sigma_\theta + \sigma_r = \frac{4E}{1-\nu}\left[-\frac{(1-\nu^2)\,m w^2 r^2}{8E} + \frac{A}{2}\right]$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2E}{1-\nu}\left[\frac{(1-\nu^2)\,m w^2 r^2}{8E} + B r^{-2}\right]$$

Ahora, sea $wr = v$, es decir, la velocidad de rotación de un punto del disco al radio r y denotemos:

$\sigma_\theta + \sigma_r = S$ = suma de esfuerzos principales

$\sigma_\theta - \sigma_r = D$ = diferencia de esfuerzos principales

entonces:

$$S = (1+\nu)\frac{m}{2}\left[-v^2 + \frac{4EA}{(1-\nu^2)\,m}\right]$$

$$(3\text{-}18)$$

$$D = (1-\nu)\frac{m}{4}\left[v^2 + \frac{8Ew^2}{(1-\nu^2)\,m} B r^{-2}\right]$$

Para un disco dado, ν, m, w, E, A, B, son constantes, entonces podemos escribir:

$$K_1 = \frac{4EA}{(1-\nu^2)\,m} \quad ; \quad K_2 = \frac{8Ew^2B}{(1-\nu^2)\,m}$$

Sustituyendo ésto en la ecuación anterior, llegamos a:

$$S = (1+\nu)\frac{m}{2}(-u^2 + K_1)$$
$$D = (1-\nu)\frac{m}{4}(u^2 + K_2 u^{-2}) \qquad (3\text{-}19)$$

Aquí, debemos notar que si S, D son conocidos en cualquier punto del disco, los esfuerzos σ, quedan determinados en cualquier punto, ya que:

$$\frac{S+D}{2} = \frac{(\sigma_\theta + \sigma_r) + (\sigma_\theta - \sigma_r)}{2} = \sigma_\theta$$
$$\frac{S-D}{2} = \frac{(\sigma_\theta + \sigma_r) - (\sigma_\theta - \sigma_r)}{2} = \sigma_r \qquad (3\text{-}20)$$

Entonces, el problema de obtener los esfuerzos de un disco de grosor constante, se reduce a determinar los valores S y D para los cuáles se han deducido las ecuaciones (3-19), las únicas variables en estas dos ecuaciones son las constantes K_1 K_2, de ahí que si graficamos curvas de estas ecuaciones para diferentes valores de K_1 y K_2, simplificamos el problema a elegir la curva o grupo de curvas apropiadas, de acuerdo a los detalles específicos del disco en consideración.

En la Figura 10, hay dos series de curvas dibujadas, llamadas S y D, las cuáles contienen términos en v^2 y v^{-2}, como se ve en la ecuación (3-18), los esfuerzos están dibujados en las abscisas y las velocidades tangenciales como ordenadas.

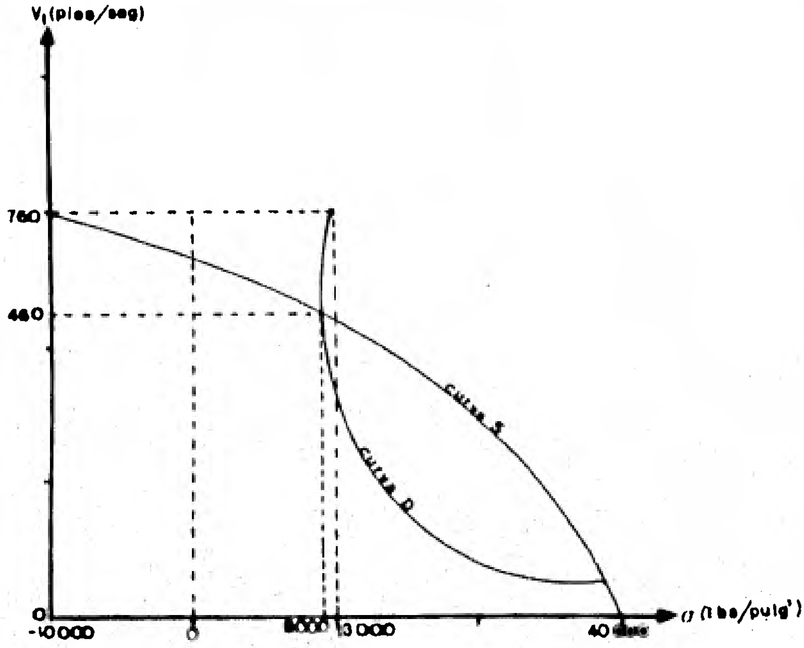

Figura 10. Gráfica de las curvas S,D en función de los esfuerzos y las velocidades aplicadas.

El siguiente paso, lógico, sugiere la aplicación de este método, a discos de grosor variable, reemplazando el perfil $h = Cr^n$ original, por un disco escalonado consistente en un cierto número de anillos concéntricos, siendo cada sección del anillo, de grosor constante, Figura 11.

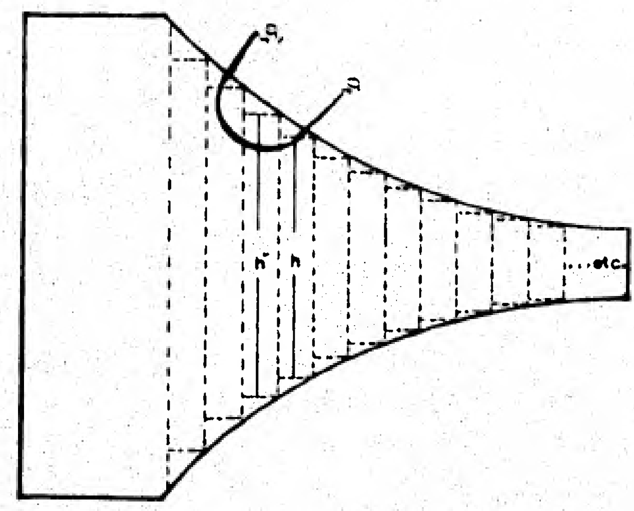

Figura 11. Diagrama de un perfil escalonado superpuesto a otro hiperbólico, se anota también, el esfuerzo en cada escalón.

La suposición está hecha de tal forma que la condición de que los escalones sean relativamente pequeños es tal que los esfuerzos en anillos adyacentes concéntricos a cada lado del escalón, son inversamente proporcionales a las dimensiones h y h', tal que podamos escribir:

$$\frac{h}{h'} = \frac{\sigma_r'}{\sigma_r} = \frac{\sigma_\theta'}{\sigma_\theta} \qquad (3\text{-}21)$$

(ésto no se cumple del todo, ver conclusiones)

Sea $\Delta\sigma_r$ lo que denote el incremento del esfuerzo radial en el escalón, así:

$$\Delta\sigma_r = \sigma_r - \sigma_r' = \sigma_r \left(1 - \frac{\sigma_r'}{\sigma_r}\right)$$
$$\Delta\sigma_r = \sigma_r \left(1 - \frac{h}{h'}\right) \qquad (3\text{-}22)$$

Esto nos permitirá expresar σ_r en términos de S ó D y con ello hacer la gráfica aplicable al caso del disco escalonado, evidentemente, la deformación radial u en cualquier escalón considerado, debe ser idéntica en secciones adyacentes. Mediante un desarrollo algebraico(2), llegamos a la ecuación:

$$u = \frac{r}{2E}\left[S(1-\nu) + D(1+\nu)\right] \qquad (3\text{-}23)$$

De aquí que para cualquier escalón con anchos axiales adyacentes h y h' se tenga:

$$S'(1-\nu)+D'(1+\nu)=S(1-\nu)+D(1+\nu)$$

desarrollando esta expresión[2] llegamos a:

$$\nu\,\Delta\sigma_r=\Delta\sigma_\theta \qquad (3\text{-}24)$$

combinando las ecuaciones (3-21) y (3-24) se obtiene:

$$\Delta\sigma_\theta=\nu\,\sigma_r\left(1-\frac{h}{h'}\right) \qquad (3\text{-}25)$$

Ahora, sumando las ecuaciones (3-22) y (3-25) se llega a:

$$\Delta S=(1+\nu)\,(\sigma_r-\sigma_r')$$
$$\Delta D=(\nu-1)\,(\sigma_r-\sigma_r') \qquad (3\text{-}26)$$

Esta última ecuación, junto con la ecuación (3-22) nos permiten aplicar la gráfica de la Figura 10 al caso del disco escalonado Figura 12. Los resultados obtenidos con este método, son válidos en la medida que el disco tenga una homogeneidad perfecta, así como el tipo de curva del perfil lo sea también; si sustituimos un disco escalonado, los esfuerzos deberán necesariamente variar dentro de ciertos límites sobre la extensión radial de cada sección paralela, esto es, que debemos seleccionar una serie de curvas S, D del diagrama tales que intersecten las líneas de esfuerzos, en puntos correspondientes a la velocidad de rotación v en el centro de cada sección paralela.

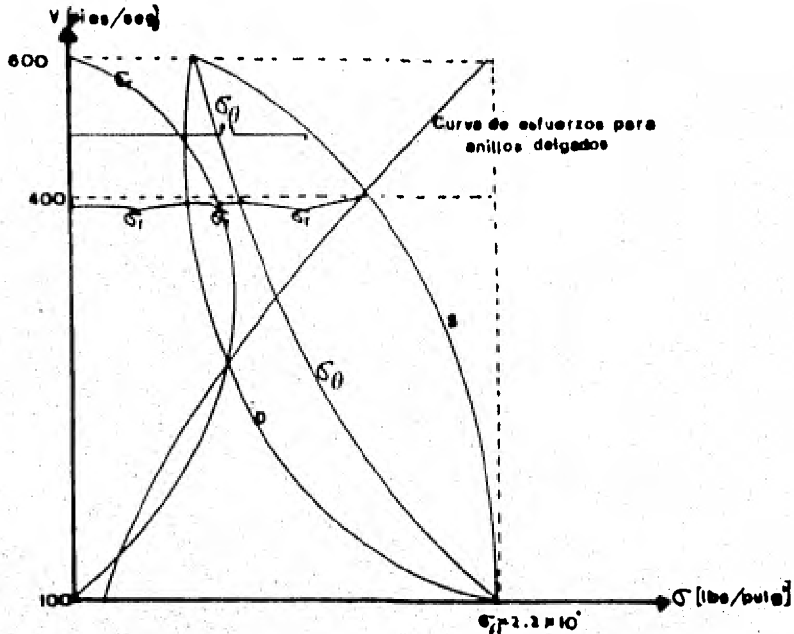

Figura 12. Gráfica de esfuerzos y velocidades para un disco de grosor uniforme con un hoyo al centro.

A pesar de ésto, los resultados así obtenidos para esfuerzos y deformaciones son aceptables, al hacer una gráfica con una escala suficientemente grande, e incrementar el número de curvas de tal forma de hacer dicha gráfica más útil, evitando hasta donde sea posible, errores que pudieran ser introducidos al interpolar las curvas.

Método de H. M. Martin y Fischer.

Este método[3] consiste en adaptar modelos semigráficos a las ecuaciones obtenidas por Stodola[10], estas dan soluciones a diferentes discos de perfiles de disco.

Cuando el grosor del disco varia de acuerdo con la ecuación $h = Cr^n$, el perfil resultante es como en la Figura 13a, las curvas límite, son difíciles de trabajar, en contraposición a ésto, ha existido una fuerte tendencia a la adopción de perfiles rectos, Figura 13b, si se toman los lados rectos como se indica por las lineas punteadas, al cortar los ejes de rotación en a y b, el disco resultante entre esta líneas, consiste entonces de dos conos empalmados base con base; si podemos calcular los esfuerzos a esta forma "generalizada", entonces podremos resolver aquéllos de cualquier forma generada por ésta.

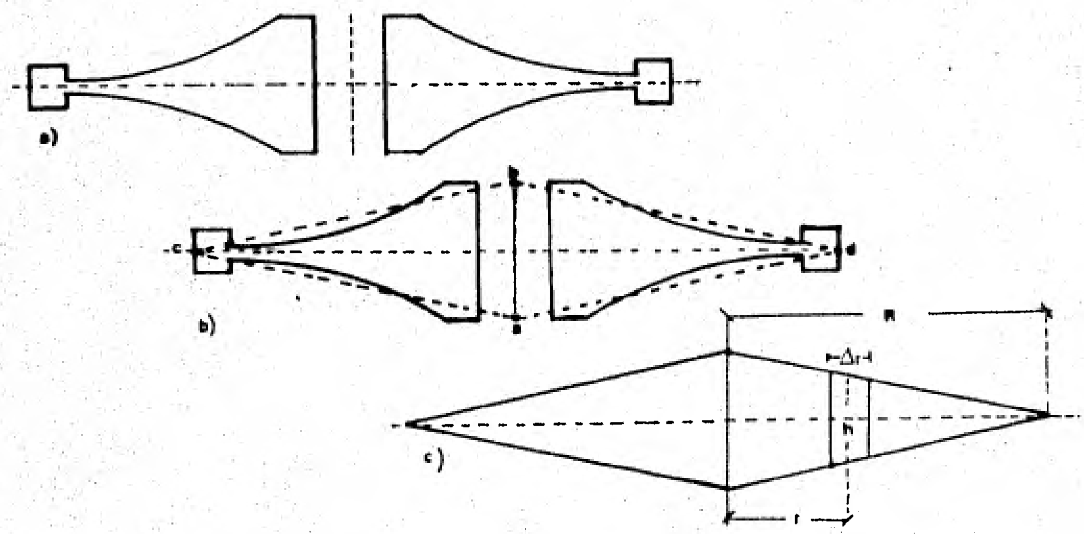

Fig.13. Al perfil original (a) le asignamos un perfil recto (b) y nos concretamos a resolver este último (c).

Desde el punto de vista matemático, el problema se reduce a la determinación de los esfuerzos producidos, en el cono sólido doble a,d,b,c, por diferentes grupos de fuerzas:

i) fuerzas centrífugas actuando por si mismas,

ii) presión a lo largo de la periferia del disco.

Sea 2R el diámetro del disco, Figura 13, y r cualquier otro radio, consideremos un anillo delgado de este radio, de grosor radial Δr, si este anillo estuviera completamente aislado y en rotación, el esfuerzo tangencial debido a las fuerzas centrífugas, está dado por[3]:

$$\Gamma = 2\left(\frac{d}{10}\right)^2 \left(\frac{R.P.M}{100}\right)^2$$

Donde d es el diámetro promedio del anillo delgado. El esfuerzo tangencial total, es igual al esfuerzo σ multiplicado por la sección transversal del anillo, ésto es $\sigma h \Delta r$. Como el anillo forma parte del disco, entonces esta sujeto a tensiones radiales, tanto en el centro como en la periferia, denotemos estas tensiones por σ_r en la superficie interna; ahora, en base a la fórmula para resitencia de cascos de caldera[6], esta presión producirá una fuerza tangencial total en el anillo igual a $\sigma_r hr$, el esfuerzo σ_r, siendo de tensión causará que la fuerza tangencial resultante, esté dada en forma de empuje.

Regresando ahora a la cara externa del anillo, notamos que $\sigma_r hr$ es función de r por lo que, desarrollando en series de Taylor alrededor de r, tenemos:

$$\sigma_r h_r + \frac{d}{dr}(\sigma_r h_r)\,\Delta_r + \ldots$$

donde, los demás términos para Δr de mayor orden, se desprecian; esta fuerza tangencial resultante sobre el anillo, es la suma algebraica de estos tres términos, si el esfuerzo resultante se denota por σ_θ, la fuerza tangencial resultante será $\sigma_\theta h\Delta r$ y se llega a la siguiente expresión[6]:

$$\sigma_\theta h = \frac{d}{dr}(\sigma_r h_r) + t\,h \qquad (3\text{-}27)$$

Esta expresión da una relación entre el esfuerzo radial y el esfuerzo tangencial; haciendo la identificación de t con $\frac{Tr^2}{R^2}$, donde $T = 2\,(\frac{D}{10})^2$, D es el diámetro externo del disco, de ésto y de (3-27) tenemos:

$$\sigma_\theta h = \frac{d}{dr}(\sigma_r h r) + \frac{T}{R^2}\,r^2 h \qquad (3\text{-}28)$$

Aquí se supone que σ_r, σ_θ están uniformemente distribuidos sobre las secciones en las cuáles actúan, esta condición aún muy cerca de los límites elásticos, se satisface, siempre y cuando las caras del cono doble, no formen un ángulo grande apreciable, esto puede aceptarse, tomando en cuenta a todos los esfuerzos que actúan sobre el disco.

Existen varias formas de eliminar de las ecuaciones (3-28) a σ_θ.

Una de éllas, está basada en el teorema de Castigliano[13], toda estructura elástica cuando esta sometida a esfuerzos, actúa como un resorte, y en virtud de estar en un estado de esfuerzo, almacena una cierta energía potencial, por el principio de Castigliano, los esfuerzos siempre se ajustan de tal forma que esta "energía potencial de deformación" es un mínimo, consistente con el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre la estructura.

Sea u la deformación radial en cualquier punto del disco, donde la tensión radial σ_r actúa, entonces la energía[8] de deformación almacenada en el metal, debida al esfuerzo σ_r es $\frac{\sigma_r u}{2}$, analogamente si v es la deformación tangencial, el trabajo almacenado debido al esfuerzo tangencial, es $\frac{\sigma_\theta v}{2}$, dado que el volumen total de nuestro anillo delgado es $2\pi rhdr$, el trabajo total almacenado en él es:

$$dw = 2\pi rh\left(\frac{\sigma_r u}{2} + \frac{\sigma_\theta v}{2}\right)dr$$

Por Ley de Hooke ecuación (1-8)

$$u = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)$$

$$v = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \qquad (1\text{-}8)$$

se obtiene:

$$dw = \frac{rh\pi}{E}\left(\sigma_r^2 - 2\sigma_r\sigma_\theta\nu + \sigma_\theta^2\right)dr$$

mediante un desarrollo algebraico, se llega a[8]

$$(1-\nu)\sigma_r + (3-2x)\frac{d\sigma_r}{dx} + x(1-x)\frac{d^2\sigma_r}{dx^2} = 0 \qquad (3\text{-}29)$$

las soluciones[13] a ésto, se encuentran en series infinitas, una de éllas. válida para todos los valores de x entre 0 y 1 es: $\sigma_{r_1} = A\left(1 - \frac{(1-\nu)}{3}x - \frac{(1-\nu)}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{8}\right)x^2 - \right.$

$$\left. - \frac{(1-\nu)}{3}\left(\frac{1\cdot 5}{8}\right)\left(\frac{5\cdot 3}{15}\right)x^3 \cdots\right)$$

A es constante arbitraria. Los correspondientes esfuerzos tangenciales son iguales a:

$$\sigma_{\theta_1} = \sigma_{r_1} + x\frac{d\sigma_{r_1}}{dx}$$

De estas dos últimas ecuaciones, se hacen gráficas, las cuáles para cualquier valor de r, nos determinan sus correspondientes valores de σ_r y σ_θ.

Los resultados así obtenidos, son usados con éxito en la práctica, en cuanto mayor sea el número de elementos del desarrrollo en serie tomados en cuenta.

Método de B. Hodkinson

Este método[5] calcula para cualquier tipo de fuerza sobre un disco de grosor variable, los esfuerzos de frontera y con ésto, obtiene la solución completa del disco.

Sea P la presión en la superficie externa del disco y P_o la presión en el hoyo del disco; el esfuerzo total de un anillo en su orilla[7], es:

$$\frac{P r_3}{\delta_3} + \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{g} - \frac{h_2\sigma_{r_2} r_3}{\delta_3 h_3} \qquad (3\text{-}30)$$

donde

$$\frac{Pr_3}{\delta_3} = \text{Fuerza centrífuga en las caras}$$

$$\frac{\rho w^2 r_3^2}{g} = \text{Fuerza centrífuga sobre la orilla}$$

$$\frac{h_2 \sigma_{r_2} r_3}{\delta_3 h_3} = \text{Limitación dada por el disco.}$$

Esto sirve también, para perfiles del tipo de la Figura 14.

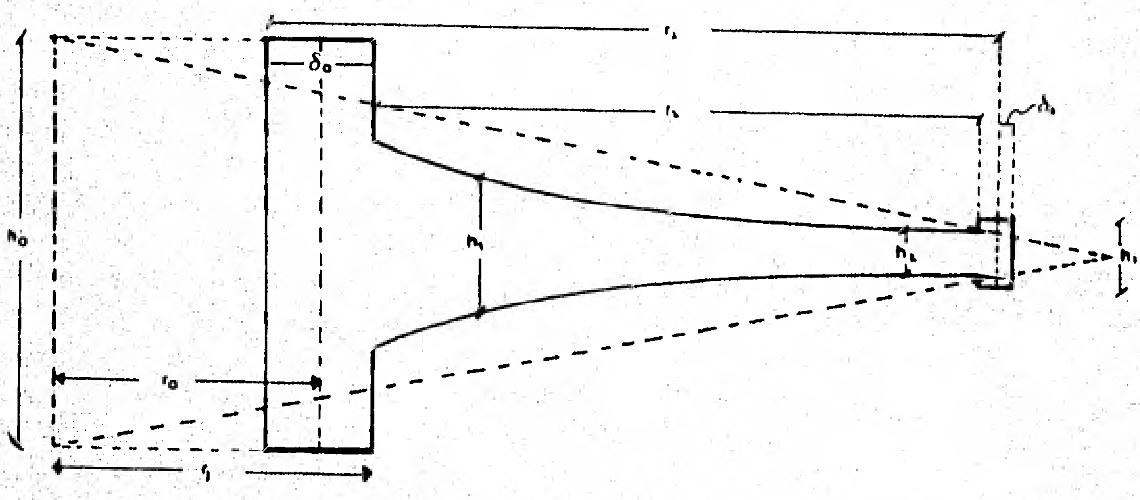

Figura 14. Perfil en forma cónica aproximado a un perfil dado. Con línea punteada se nota el perfil superpuesto.

Veamos como podemos aproximar a este perfil, la solución dada por la ecuación (3-30); dividamos el aro, Figura 15 en mitades por cualquier plano diametral, se notará que el efecto debido a una presión σ que actúe sobre la mitad superior, será soportada por el metal en las dos áreas sombreadas que están cargando una presión total de $2fh\delta$, donde f es el esfuerzo de tensión.

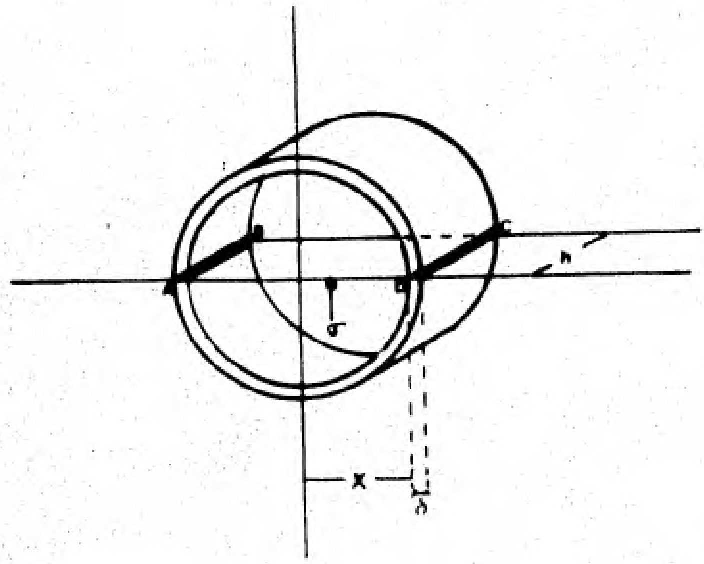

Figura 15. Esfuerzo sobre la mitad superior de un anillo delgado.

El efecto de la presión radial, es uniforme sobre el área plana ABCD, con ésto, equivalente a la fuerza total $2rh\delta$ por lo tanto:

$$2fh\delta = 2rh\sigma$$

de aquí que:

$$f = \frac{x\sigma}{\delta}$$

Ahora, supongamos que el anillo es la orilla de un disco, la cantidad σ, estará formada por: la presión de los bordes P, por unidad de área, junto con la fuerza centrífuga de la orilla misma, $\frac{\rho w^2 r_3 \delta_3}{g}$ por unidad de área, menos la restricción del disco a cambiar su forma $\sigma_{r_2}(\frac{h_2}{h_3})$, donde el factor $\frac{h_2}{h_3}$ aparece porque el esfuerzo radial σ_{r_2} sobre el grosor h_2 es sostenido por el grosor h_3 de la orilla, así pués, el esfuerzo f del anillo en la orilla del metal es:

$$\frac{r\sigma}{\delta} = \frac{r_3}{\delta_3}\left[P + \frac{\rho\omega^2 r_3 \delta_3}{g} - \frac{\sigma_{r_2} h_2}{h_3}\right]$$

Usando la ecuación (1-6), la deformación tangencial es:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \qquad (1\text{-}6)$$

De donde, la deformación del aro en la orilla, es igual a la deformación tangencial del disco, la cuál es otra vez:

$$\frac{1}{E}\left(\sigma_{\theta_2} - \nu\sigma_{r_2}\right)$$

multiplicando por E y acomodando términos, se encuentra que para los esfuerzos en el anillo, se tiene:

$$\sigma_{\theta_2} = \left(\frac{P r_2}{\delta_3} + \frac{\rho\omega^2 r_3^2}{g}\right) - \sigma_{r_2}\left(\frac{h_2 r_3}{h_3 \delta_3} - \nu\right) \qquad (3\text{-}31)$$

Análogamente en el centro, que otra vez es un anillo de sección rectangular, el esfuerzo total de éste debido a las fuerzas externas, fuerza centrífuga en el centro y el empuje propio del disco es:

$$\frac{\sigma_0 r_0}{\delta} + \frac{\rho \omega^2 r_0^2}{g} + \frac{\sigma_{r_1} h_1 r_1}{\delta_0 h_0}$$

es decir

$$\sigma_r = \frac{E u_1}{r_0} = \sigma_\theta = \sigma_{\theta_1} - \nu \sigma_{r_1}$$

El problema ahora, consiste en encontrar los valores de δ_{r_1} y δ_{r_2}, los cuáles se hallan mediante sustituciones algebraicas entre las ecuaciones ya obtenidas(5).

Se podría objetar de este método que los términos iniciales de las condiciones de frontera, deberían de leerse como:

$$\frac{P r_3'}{\delta_3} \quad y \quad \frac{P_o r_o'}{\delta_o} \quad \text{en vez de} \quad \frac{P r_3}{\delta_3} \quad y \quad \frac{P_o r_o}{\delta_o}$$

ya que los símbolos r_3 y r_o son los radios promedio en la orilla y en el centro, mientras que en el desarrollo, son reemplazados por r_3' y r_o' que son los radios externo e interno de la orilla, en el borde, donde la tensión δ_o es aplicada, el autor hace sus cálculos con los datos del centro, afortunadamente, la alteración es mínima al hacerlo con los otros datos; aquí se desprecian las deformaciones debidas a la anchura del centro y orilla.

USO DE LA COMPUTADORA EN EL CALCULO DE DEFORMACIONES DE DISCOS EN ROTACION.

Al analizar los métodos descritos en el capítulo anterior, se llega a la conclusión de que cualquiera de éllos, se soluciona con mayor facilidad, si adaptamos los sistemas de cómputo a estos desarrollos; con esa idea, y basándonos en las hipótesis de algunos de éllos[2,3,4,6], se hizo un programa de cómputo que soluciona todo tipo de perfil de disco.

Desarrollo de un Programa que Soluciona Todo Tipo de Perfil de Disco.

El problema a solucionar, consitía en calcular la deformación y esfuerzos que sufría un cierto disco al rotar a velocidades del orden de 1000 rev/seg, de tal forma que el perfil de dicho disco, cumpliera con ciertos requísitos: uno de éllos exigía el no sobrepasar un cierto valor de esfuerzo[9], en todo punto, el otro, era hacer un tipo de perfil que cubriera ciertas necesidades prácticas[11], es decir, que tuviera cierta forma.

Se partió de un diseño propuesto por Cruz Manjarréz[12] que presentamos en la Figura 16. Al intentar solucionar los esfuerzos y deformaciones de este disco, aplicando los métodos conocidos, se observó que ninguno de los desarrollos anteriores, englobaba perfiles de este tipo, por lo que se vió la necesidad de hacer algunas hipótesis nuevas a estos métodos ya obtenidos.

Se intento primero ajustar un perfil cónico, siguiendo el método de H. M. Martin y Fischer[3], lo cuál estaba demasiado lejos de ser consistente con el perfil original, en la Figura 16 se presenta con una línea punteada.

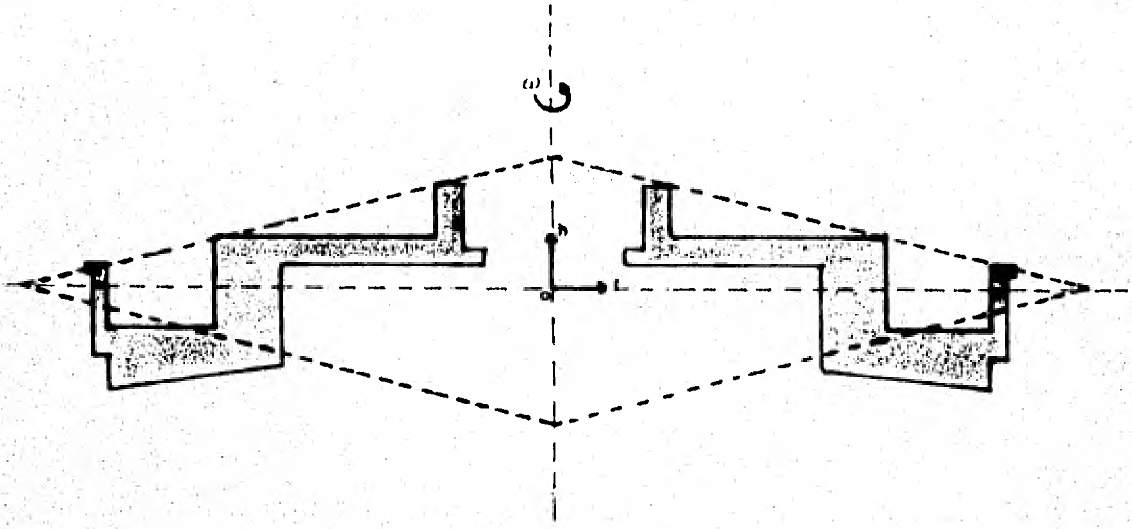

Figura 16. Diseño propuesto como perfil óptimo, con línea punteada se muestra el perfil cónico superpuesto.

El método de B. Hodkinson, fue desechado de antemano porque no toma en consideración efectos de borde, los cuáles eran indispensables para los propósitos que se perseguían. Posteriormente, se intento utilizar el método de H. Haerle[4], el cuál consite básicamente en la asignación de escalones al perfil cónico en cuestión, ésto lo mostramos en la Figura 9, este tipo de asignación de escalones, implica una cierta simetría del disco, con respecto al eje r, de la cual carece por completo este perfil, lo podemos ver en la Figura 16, podriamos decir, que la base de este método, la cuál es la suposición de la existencia de una relación entre la altura de los escalones asignados y el esfuerzo que actúa en cada uno de éllos, suposición hecha por Grübler[1,6], ecuación (3-21), la cuál como veremos más adelante no se cumple del todo, pero resulta útil en el resultado del programa de cómputo.

Así, llegamos al método de M. Grübler[1,6], el cual se basa fundamentalmente en la suposición de homogeneidad e isotropía del material, así como en la idea de dependencia exclusiva con el radio, cuando el grosor del disco es pequeño comparado con éste[1,2,3,4], la dificultad aquí, estribaba en el tipo de curva $h = Cr^n$ que se le debía de asociar a cada guión del perfil, ya que el comportamiento de este tipo de curvas en los escalones, se va a infinito; otro problema era, que para cada sección del disco, se podían proponer dos tipos de curvas exponenciales: una para la parte negativa del eje de las h y otro para la parte positiva Figura 16.

Estos problemas se solucionaron con dos nuevas hipótesis, la primera de éllas, consistió en asignarle un perfil con ciertas características, las cuales consisten en aplanar al perfil en uno de sus lados, Figura 17, cuidando que el grosor de cada sección en ambos perfiles, fuese el mismo, ésto lo podriamos fundamentar en la homogeneidad e isotropía del material, para una mejor aproximación a ésto, utilizamos aluminio con ν = 0.33.

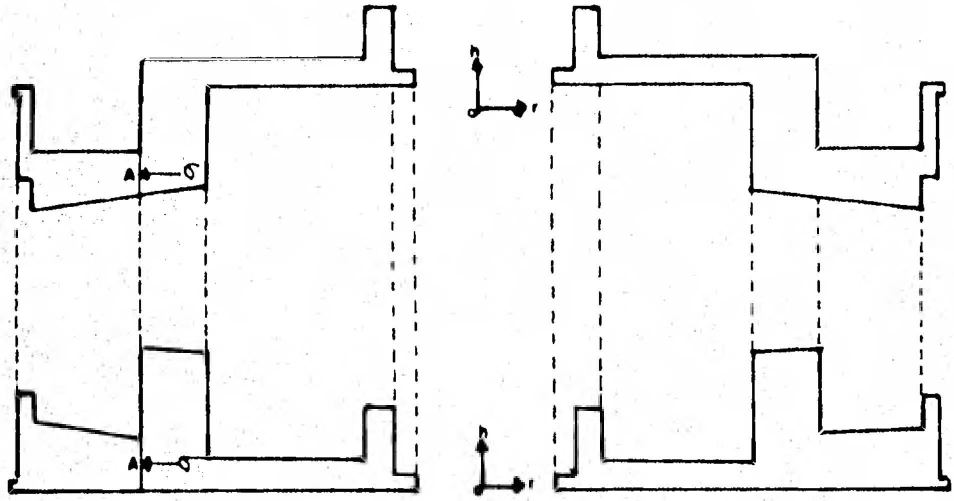

Figura 17. Para cada sección A del disco original, se tiene un esfuerzo σ aplicado, de manera análoga para el perfil condicionado.

Otra forma de reforzar nuestras hipótesis se basa en la definición de esfuerzo, la cuál nos dice que el esfuerzo es la fuerza aplicada por unidad de área, y si esta área, así como la fuerza se mantienen constantes, entonces el esfuerzo resultante no varía, por lo tanto, si la superficie en contacto, en cualquier corte vertical del disco de aluminio, se conserva, el esfuerzo será el mismo, con lo que nuestro problema queda parcialmente resuelto. Figura 17.

Lo único que restaba, era determinar el tipo de curva que le correspondía a cada escalón, ya que entre mayor fuese la diferencia entre peldaños, mayor sería el valor del exponente de la ecuación exponencial asignada a esa parte del disco, así que debía existir un límite para ésto, encontramos ese límite en base a otra suposición consistente en aproximar otro tipo de perfil al escalón, Figura 18.

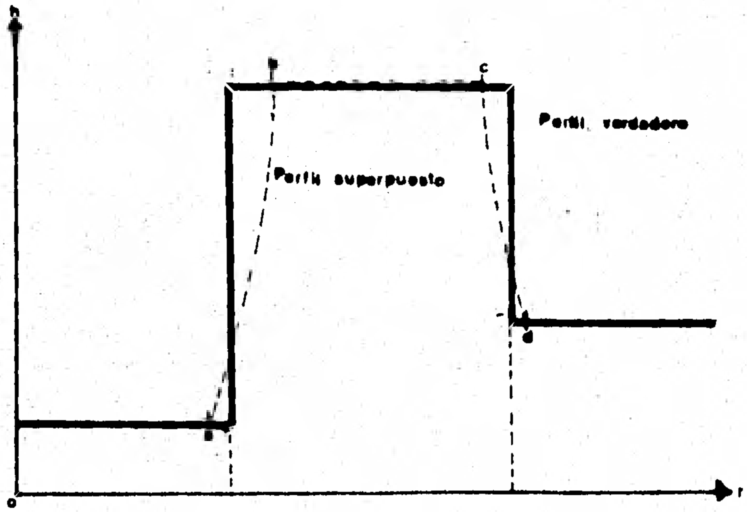

Figura 18. Se presenta la función $\bar{h} = Cr^n$ superpuesta al escalón, con línea punteada.

En donde, la distancia entre los puntos $\overline{ar_1}$, es igual a la existente entre $\overline{r_1b}$, análogamente, para $\overline{cr_2}$ y $\overline{r_2d}$; de aquí observamos, que para escalones cercanos al orificio central, las distancias anteriores, son del orden de un milímetro, mientras que para valores de r alejados del centro, estas distancias son del orden de 2 milímetros, ésto es con el fin de que por muy grande que sea la diferencia entre peldaños del escalón, siempre existe un valor para el exponente de la ecuación (3-13), tal que ésta sea finita.

Así pues, utilizando básicamente el método de Grübler, aunado a nuestras hipótesis, desarrollamos un programa de cómputo el cuál está escrito en el lenguaje BASIC, que es adaptable a cualquier computadora.

El programa consite en asignar a un perfil dado, otro condicionado que se le aproxime, y que tenga un lado (base) recto y el otro formado por secciones de la forma $h = Cr^n$, asignándole a cada sección una función de esfuerzos F; valiéndonos además de la continiudad de esta función, se hizo que para cada intersección de curvas $h = Cr^n$, se cumpliera que:

$$F_i\big|_{r_1} = F_{i+1}\big|_{r_1} \; ; \; F_{i+1}\big|_{r_2} = F_{i+2}\big|_{r_2} \cdots \text{etc.} \tag{4-1}$$

en forma análoga para $\frac{dF_i}{dr}$.

Suponiendo que tanto en el centro como en la periferia del disco, se tiene que el esfuerzo radial se anula, obtenemos un conjunto de K-funciones con K-incognitas, lo cuál nos da una matríz de KxK elementos; una vez calculada la matríz, el programa utiliza los valores generados por ella, para cal cular los esfuerzos y deformaciones en cada punto r del disco[7].

Entonces, nos basta dar los datos C, n de las ecuaciones exponenciales para cada sección en que se ha dividido el disco, así como los valores de r en donde se logra la condición (4-1), para obtener los resultados deseados. Es interesante mencionar que la matríz se puede redimensionar a cualquier tamaño.

```
10     OPTION BASE 1
20     FLOAT 4
30 ! ESFUERZOS ELASTICOS EN DISCOS EN ROTACION, CUYO ESPESOR VARIA CON EL RADIO.
40     DIM C(12),H(12),N(12),Alfa(12),Beta(12),M(12),F(12),Fp(12),Esf(24,24),Vec(
24),Tr(12),Tta(12),Er(12),Eta(12),A(12),B(12),Sol(24,24),U(12)
50     DIM P(24),Rs(12),R(24)
60     INTEGER Ip(24)
70 ! Constantes necesarias para el cálculo de las deformaciones,las unidades son
: [Ro]=gr/cm3,[Omega]=rad/seg
80     Nu=.33
90     Ro=2.8
100    Omega=6280
```

```
110    E=7.173E11
120    FOR I=1 TO 12
130 ! C(I) son los valores de las constantes de las funciones exponenciales de c
ada sección en que se divide el disco.
140    C(1)=1
150    C(2)=3.2629387E-36
160    C(3)=2
170    C(4)=1.2139379E59
180    C(5)=.8
190    C(6)=4.3079131E-51
200    C(7)=1.49402
210    C(8)=1.0141565E79
220    C(9)=.3796644
230    C(10)=6.0857754E-55
240    C(11)=1.4
250    C(12)=1.5542870E84
260 ! N(I) son los valores de los exponentes de las ecuaciones de tipo exponenci
al en que se ha dividido el perfil del disco.
270    N(1)=0
280    N(2)=88.029235
290    N(3)=0
300    N(4)=-130.11273
310    N(5)=0
320    N(6)=87.046817
330    N(7)=.2176285
340    N(8)=-115.80903
350    N(9)=.4738914
360    N(10)=68.483838
370    N(11)=0
380    N(12)=-104.42749
390 ! Rs(I) son los puntos en los cuales se quieren evaluar los esfuerzos radial
es, tangenciales y deformaciones radiales.
400    Rs(1)=.635
410    Rs(2)=2.54
420    Rs(3)=2.7
430    Rs(4)=2.84
440    Rs(5)=3.52
450    Rs(6)=3.82
460    Rs(7)=3.95
470    Rs(8)=4.82
480    Rs(9)=5.50
490    Rs(10)=6.22
500    Rs(11)=6.40
510    Rs(12)=6.5
520    NEXT I
530    FOR I=1 TO 24
540 ! R(I) son los puntos en los cuales las funciones de esfuerzo y sus derivada
s, son iguales por condiciones de frontera.
550    R(1)=.635
560    R(2)=2.53
570    R(3)=2.55
580    R(4)=2.83
590    R(5)=2.85
600    R(6)=3.78
610    R(7)=3.82
620    R(8)=4.78
630    R(9)=4.82
640    R(10)=6.18
650    R(11)=6.22
660    R(12)=6.38
670    R(13)=6.5
680    R(14)=2.53
690    R(15)=2.55
700    R(16)=2.83
710    R(17)=2.85
720    R(18)=3.78
730    R(19)=3.82
740    R(20)=4.78
750    R(21)=4.82
760    R(22)=6.18
770    R(23)=6.22
```

```
780   R(24)=6.38
790   NEXT I
800   FOR I=1 TO 12
810   H(I)=C(I)*Rs(I)^N(I)
811   NEXT I
820   PRINT "C(I)",LIN(1)
830   MAT PRINT C;
840   PRINT "H(I)",LIN(1)
850   MAT PRINT H;
870   FOR I=I TO 12
880   Alfa(I)=(N(I)+SQR(N(I)^2-4*(N(I)*Nu-1)))/2
890   Beta(I)=(N(I)-SQR(N(I)^2-4*(N(I)*Nu-1)))/2
900   NEXT I
910   PRINT "Alfa",LIN(1)
920   MAT PRINT Alfa;
930   PRINT "Beta",LIN(1)
940   MAT PRINT Beta;
950   FOR I=1 TO 12
960   M(I)=-(3+Nu)*Ro*Omega^2*C(I)/(Nu*N(I)+3*N(I)+8)
970   NEXT I
980   PRINT "M",LIN(1)
990   MAT PRINT M;
1000  Esf(1,1)=R(1)^Alfa(1)
1010  Esf(1,2)=R(1)^Beta(1)
1020  Esf(1,3)=0
1030  Esf(1,4)=0
1040  Esf(1,5)=0
1050  Esf(1,6)=0
1060  Esf(1,7)=0
1070  Esf(1,8)=0
1080  Esf(1,9)=0
1090  Esf(1,10)=0
1100  Esf(1,11)=0
1110  Esf(1,12)=0
1120  Esf(1,13)=0
1130  Esf(1,14)=0
1140  Esf(1,15)=0
1150  Esf(1,16)=0
1160  Esf(1,17)=0
1170  Esf(1,18)=0
1180  Esf(1,19)=0
1190  Esf(1,20)=0
1200  Esf(1,21)=0
1210  Esf(1,22)=0
1220  Esf(1,23)=0
1230  Esf(1,24)=0
1240  Esf(2,1)=-R(2)^Alfa(1)
1250  Esf(2,2)=-R(2)^Beta(1)
1260  Esf(2,3)=R(2)^Alfa(2)
1270  Esf(2,4)=R(2)^Beta(2)
1280  Esf(2,5)=0
1290  Esf(2,6)=0
1300  Esf(2,7)=0
1310  Esf(2,8)=0
1320  Esf(2,9)=0
1330  Esf(2,10)=0
1340  Esf(2,11)=0
1350  Esf(2,12)=0
1360  Esf(2,13)=0
1370  Esf(2,14)=0
1380  Esf(2,15)=0
1390  Esf(2,16)=0
1400  Esf(2,17)=0
1410  Esf(2,18)=0
1420  Esf(2,19)=0
1430  Esf(2,20)=0
1440  Esf(2,21)=0
1450  Esf(2,22)=0
1460  Esf(2,23)=0
1470  Esf(2,24)=0
1480  Esf(3,1)=0
```

```
1490 Esf(3,2)=0
1500 Esf(3,3)=-R(3)^Alfa(2)
1510 Esf(3,4)=-R(3)^Beta(2)
1520 Esf(3,5)=R(3)^Alfa(3)
1530 Esf(3,6)=R(3)^Beta(3)
1540 Esf(3,7)=0
1550 Esf(3,8)=0
1560 Esf(3,9)=0
1570 Esf(3,10)=0
1580 Esf(3,11)=0
1590 Esf(3,12)=0
1600 Esf(3,13)=0
1610 Esf(3,14)=0
1620 Esf(3,15)=0
1630 Esf(3,16)=0
1640 Esf(3,17)=0
1650 Esf(3,18)=0
1660 Esf(3,19)=0
1670 Esf(3,20)=0
1680 Esf(3,21)=0
1690 Esf(3,22)=0
1700 Esf(3,23)=0
1710 Esf(3,24)=0
1720 Esf(4,1)=0
1730 Esf(4,2)=0
1740 Esf(4,3)=0
1750 Esf(4,4)=0
1760 Esf(4,5)=-R(4)^Alfa(3)
1770 Esf(4,6)=-R(4)^Beta(3)
1780 Esf(4,7)=R(4)^Alfa(4)
1790 Esf(4,8)=R(4)^Beta(4)
1800 Esf(4,9)=0
1810 Esf(4,10)=0
1820 Esf(4,11)=0
1830 Esf(4,12)=0
1840 Esf(4,13)=0
1850 Esf(4,14)=0
1860 Esf(4,15)=0
1870 Esf(4,16)=0
1880 Esf(4,17)=0
1890 Esf(4,18)=0
1900 Esf(4,19)=0
1910 Esf(4,20)=0
1920 Esf(4,21)=0
1930 Esf(4,22)=0
1940 Esf(4,23)=0
1950 Esf(4,24)=0
1960 Esf(5,1)=0
1970 Esf(5,2)=0
1980 Esf(5,3)=0
1990 Esf(5,4)=0
2000 Esf(5,5)=0
2010 Esf(5,6)=0
2020 Esf(5,7)=-R(5)^Alfa(4)
2030 Esf(5,8)=-R(5)^Beta(4)
2040 Esf(5,9)=R(5)^Alfa(5)
2050 Esf(5,10)=R(5)^Beta(5)
2060 Esf(5,11)=0
2070 Esf(5,12)=0
2080 Esf(5,13)=0
2090 Esf(5,14)=0
2100 Esf(5,15)=0
2110 Esf(5,16)=0
2120 Esf(5,17)=0
2130 Esf(5,18)=0
2140 Esf(5,19)=0
2150 Esf(5,20)=0
2160 Esf(5,21)=0
2170 Esf(5,22)=0
2180 Esf(5,23)=0
2190 Esf(5,24)=0
```

```
2200  Esf(6,1)=0
2210  Esf(6,2)=0
2220  Esf(6,3)=0
2230  Esf(6,4)=0
2240  Esf(6,5)=0
2250  Esf(6,6)=0
2260  Esf(6,7)=0
2270  Esf(6,8)=0
2280  Esf(6,9)=-R(6)^Alfa(5)
2290  Esf(6,10)=-R(6)^Beta(5)
2300  Esf(6,11)=R(6)^Alfa(6)
2310  Esf(6,12)=R(6)^Beta(6)
2320  Esf(6,13)=0
2330  Esf(6,14)=0
2340  Esf(6,15)=0
2350  Esf(6,16)=0
2360  Esf(6,17)=0
2370  Esf(6,18)=0
2380  Esf(6,19)=0
2390  Esf(6,20)=0
2400  Esf(6,21)=0
2410  Esf(6,22)=0
2420  Esf(6,23)=0
2430  Esf(6,24)=0
2440  Esf(7,1)=0
2450  Esf(7,2)=0
2460  Esf(7,3)=0
2470  Esf(7,4)=0
2480  Esf(7,5)=0
2490  Esf(7,6)=0
2500  Esf(7,7)=0
2510  Esf(7,8)=0
2520  Esf(7,9)=0
2530  Esf(7,10)=0
2540  Esf(7,11)=-R(7)^Alfa(6)
2550  Esf(7,12)=-R(7)^Beta(6)
2560  Esf(7,13)=R(7)^Alfa(7)
2570  Esf(7,14)=R(7)^Beta(7)
2580  Esf(7,15)=0
2590  Esf(7,16)=0
2600  Esf(7,17)=0
2610  Esf(7,18)=0
2620  Esf(7,19)=0
2630  Esf(7,20)=0
2640  Esf(7,21)=0
2650  Esf(7,22)=0
2660  Esf(7,23)=0
2670  Esf(7,24)=0
2680  Esf(8,1)=0
2690  Esf(8,2)=0
2700  Esf(8,3)=0
2710  Esf(8,4)=0
2720  Esf(8,5)=0
2730  Esf(8,6)=0
2740  Esf(8,7)=0
2750  Esf(8,8)=0
2760  Esf(8,9)=0
2770  Esf(8,10)=0
2780  Esf(8,11)=0
2790  Esf(8,12)=0
2800  Esf(8,13)=-R(8)^Alfa(7)
2810  Esf(8,14)=-R(8)^Beta(7)
2820  Esf(8,15)=R(8)^Alfa(8)
2830  Esf(8,16)=R(8)^Beta(8)
2840  Esf(8,17)=0
2850  Esf(8,18)=0
2860  Esf(8,19)=0
2870  Esf(8,20)=0
2880  Esf(8,21)=0
2890  Esf(8,22)=0
2900  Esf(8,23)=0
```

```
2910  Esf(8,24)=0
2920  Esf(9,1)=0
2930  Esf(9,2)=0
2940  Esf(9,3)=0
2950  Esf(9,4)=0
2960  Esf(9,5)=0
2970  Esf(9,6)=0
2980  Esf(9,7)=0
2990  Esf(9,8)=0
3000  Esf(9,9)=0
3010  Esf(9,10)=0
3020  Esf(9,11)=0
3030  Esf(9,12)=0
3040  Esf(9,13)=0
3050  Esf(9,14)=0
3060  Esf(9,15)=-R(9)^Alfa(8)
3070  Esf(9,16)=-R(9)^Beta(8)
3080  Esf(9,17)=R(9)^Alfa(9)
3090  Esf(9,18)=R(9)^Beta(9)
3100  Esf(9,19)=0
3110  Esf(9,20)=0
3120  Esf(9,21)=0
3130  Esf(9,22)=0
3140  Esf(9,23)=0
3150  Esf(9,24)=0
3160  Esf(10,1)=0
3170  Esf(10,2)=0
3180  Esf(10,3)=0
3190  Esf(10,4)=0
3200  Esf(10,5)=0
3210  Esf(10,6)=0
3220  Esf(10,7)=0
3230  Esf(10,8)=0
3240  Esf(10,9)=0
3250  Esf(10,10)=0
3260  Esf(10,11)=0
3270  Esf(10,12)=0
3280  Esf(10,13)=0
3290  Esf(10,14)=0
3300  Esf(10,15)=0
3310  Esf(10,16)=0
3320  Esf(10,17)=-R(10)^Alfa(9)
3330  Esf(10,18)=-R(10)^Beta(9)
3340  Esf(10,19)=R(10)^Alfa(10)
3350  Esf(10,20)=R(10)^Beta(10)
3360  Esf(10,21)=0
3370  Esf(10,22)=0
3380  Esf(10,23)=0
3390  Esf(10,24)=0
3400  Esf(11,1)=0
3410  Esf(11,2)=0
3420  Esf(11,3)=0
3430  Esf(11,4)=0
3440  Esf(11,5)=0
3450  Esf(11,6)=0
3460  Esf(11,7)=0
3470  Esf(11,8)=0
3480  Esf(11,9)=0
3490  Esf(11,10)=0
3500  Esf(11,11)=0
3510  Esf(11,12)=0
3520  Esf(11,13)=0
3530  Esf(11,14)=0
3540  Esf(11,15)=0
3550  Esf(11,16)=0
3560  Esf(11,17)=0
3570  Esf(11,18)=0
3580  Esf(11,19)=-R(11)^Alfa(10)
3590  Esf(11,20)=-R(11)^Beta(10)
3600  Esf(11,21)=R(11)^Alfa(11)
3610  Esf(11,22)=R(11)^Beta(11)
```

```
3620  Esf(11,23)=0
3630  Esf(11,24)=0
3640  Esf(12,1)=0
3650  Esf(12,2)=0
3660  Esf(12,3)=0
3670  Esf(12,4)=0
3680  Esf(12,5)=0
3690  Esf(12,6)=0
3700  Esf(12,7)=0
3710  Esf(12,8)=0
3720  Esf(12,9)=0
3730  Esf(12,10)=0
3740  Esf(12,11)=0
3750  Esf(12,12)=0
3760  Esf(12,13)=0
3770  Esf(12,14)=0
3780  Esf(12,15)=0
3790  Esf(12,16)=0
3800  Esf(12,17)=0
3810  Esf(12,18)=0
3820  Esf(12,19)=0
3830  Esf(12,20)=0
3840  Esf(12,21)=-R(12)^Alfa(11)
3850  Esf(12,22)=-R(12)^Beta(11)
3860  Esf(12,23)=R(12)^Alfa(12)
3870  Esf(12,24)=R(12)^Beta(12)
3880  Esf(13,1)=0
3890  Esf(13,2)=0
3900  Esf(13,3)=0
3910  Esf(13,4)=0
3920  Esf(13,5)=0
3930  Esf(13,6)=0
3940  Esf(13,7)=0
3950  Esf(13,8)=0
3960  Esf(13,9)=0
3970  Esf(13,10)=0
3980  Esf(13,11)=0
3990  Esf(13,12)=0
4000  Esf(13,13)=0
4010  Esf(13,14)=0
4020  Esf(13,15)=0
4030  Esf(13,16)=0
4040  Esf(13,17)=0
4050  Esf(13,18)=0
4060  Esf(13,19)=0
4070  Esf(13,20)=0
4080  Esf(13,21)=0
4090  Esf(13,22)=0
4100  Esf(13,23)=R(13)^Alfa(12)
4110  Esf(13,24)=R(13)^Beta(12)
4120  Esf(14,1)=-Alfa(1)*R(14)^(Alfa(1)-1)
4130  Esf(14,2)=-Beta(1)*R(14)^(Beta(1)-1)
4140  Esf(14,3)=Alfa(2)*R(14)^(Alfa(2)-1)
4150  Esf(14,4)=Beta(2)*R(14)^(Beta(2)-1)
4160  Esf(14,5)=0
4170  Esf(14,6)=0
4180  Esf(14,7)=0
4190  Esf(14,8)=0
4200  Esf(14,9)=0
4210  Esf(14,10)=0
4220  Esf(14,11)=0
4230  Esf(14,12)=0
4240  Esf(14,13)=0
4250  Esf(14,14)=0
4260  Esf(14,15)=0
4270  Esf(14,16)=0
4280  Esf(14,17)=0
4290  Esf(14,18)=0
4300  Esf(14,19)=0
4310  Esf(14,20)=0
4320  Esf(14,21)=0
```

```
4330  Esf(14,22)=0
4340  Esf(14,23)=0
4350  Esf(14,24)=0
4360  Esf(15,1)=0
4370  Esf(15,2)=0
4380  Esf(15,3)=-Alfa(2)*R(15)^(Alfa(2)-1)
4390  Esf(15,4)=-Beta(2)*R(15)^(Beta(2)-1)
4400  Esf(15,5)=Alfa(3)*R(15)^(Alfa(3)-1)
4410  Esf(15,6)=Beta(3)*R(15)^(Beta(3)-1)
4420  Esf(15,7)=0
4430  Esf(15,8)=0
4440  Esf(15,9)=0
4450  Esf(15,10)=0
4460  Esf(15,11)=0
4470  Esf(15,12)=0
4480  Esf(15,13)=0
4490  Esf(15,14)=0
4500  Esf(15,15)=0
4510  Esf(15,16)=0
4520  Esf(15,17)=0
4530  Esf(15,18)=0
4540  Esf(15,19)=0
4550  Esf(15,20)=0
4560  Esf(15,21)=0
4570  Esf(15,22)=0
4580  Esf(15,23)=0
4590  Esf(15,24)=0
4600  Esf(16,1)=0
4610  Esf(16,2)=0
4620  Esf(16,3)=0
4630  Esf(16,4)=0
4640  Esf(16,5)=-Alfa(3)*R(16)^(Alfa(3)-1)
4650  Esf(16,6)=-Beta(3)*R(16)^(Beta(3)-1)
4660  Esf(16,7)=Alfa(4)*R(16)^(Alfa(4)-1)
4670  Esf(16,8)=Beta(4)*R(16)^(Beta(4)-1)
4680  Esf(16,9)=0
4690  Esf(16,10)=0
4700  Esf(16,11)=0
4710  Esf(16,12)=0
4720  Esf(16,13)=0
4730  Esf(16,14)=0
4740  Esf(16,15)=0
4750  Esf(16,16)=0
4760  Esf(16,17)=0
4770  Esf(16,18)=0
4780  Esf(16,19)=0
4790  Esf(16,20)=0
4800  Esf(16,21)=0
4810  Esf(16,22)=0
4820  Esf(16,23)=0
4830  Esf(16,24)=0
4840  Esf(17,1)=0
4850  Esf(17,2)=0
4860  Esf(17,3)=0
4870  Esf(17,4)=0
4880  Esf(17,5)=0
4890  Esf(17,6)=0
4900  Esf(17,7)=-Alfa(4)*R(17)^(Alfa(4)-1)
4910  Esf(17,8)=-Beta(4)*R(17)^(Beta(4)-1)
4920  Esf(17,9)=Alfa(5)*R(17)^(Alfa(5)-1)
4930  Esf(17,10)=Beta(5)*R(17)^(Beta(5)-1)
4940  Esf(17,11)=0
4950  Esf(17,12)=0
4960  Esf(17,13)=0
4970  Esf(17,14)=0
4980  Esf(17,15)=0
4990  Esf(17,16)=0
5000  Esf(17,17)=0
5010  Esf(17,18)=0
5020  Esf(17,19)=0
5030  Esf(17,20)=0
```

```
5040  Esf(17,21)=0
5050  Esf(17,22)=0
5060  Esf(17,23)=0
5070  Esf(17,24)=0
5080  Esf(18,1)=0
5090  Esf(18,2)=0
5100  Esf(18,3)=0
5110  Esf(18,4)=0
5120  Esf(18,5)=0
5130  Esf(18,6)=0
5140  Esf(18,7)=0
5150  Esf(18,8)=0
5160  Esf(18,9)=-Alfa(5)*R(18)^(Alfa(5)-1)
5170  Esf(18,10)=-Beta(5)*R(18)^(Beta(5)-1)
5180  Esf(18,11)=Alfa(6)*R(18)^(Alfa(6)-1)
5190  Esf(18,12)=Beta(6)*R(18)^(Beta(6)-1)
5200  Esf(18,13)=0
5210  Esf(18,14)=0
5220  Esf(18,15)=0
5230  Esf(18,16)=0
5240  Esf(18,17)=0
5250  Esf(18,18)=0
5260  Esf(18,19)=0
5270  Esf(18,20)=0
5280  Esf(18,21)=0
5290  Esf(18,22)=0
5300  Esf(18,23)=0
5310  Esf(18,24)=0
5320  Esf(19,1)=0
5330  Esf(19,2)=0
5340  Esf(19,3)=0
5350  Esf(19,4)=0
5360  Esf(19,5)=0
5370  Esf(19,6)=0
5380  Esf(19,7)=0
5390  Esf(19,8)=0
5400  Esf(19,9)=0
5410  Esf(19,10)=0
5420  Esf(19,11)=-Alfa(6)*R(19)^(Alfa(6)-1)
5430  Esf(19,12)=-Beta(6)*R(19)^(Beta(6)-1)
5440  Esf(19,13)=Alfa(7)*R(19)^(Alfa(7)-1)
5450  Esf(19,14)=Beta(7)*R(19)^(Beta(7)-1)
5460  Esf(19,15)=0
5470  Esf(19,16)=0
5480  Esf(19,17)=0
5490  Esf(19,18)=0
5500  Esf(19,19)=0
5510  Esf(19,20)=0
5520  Esf(19,21)=0
5530  Esf(19,22)=0
5540  Esf(19,23)=0
5550  Esf(19,24)=0
5560  Esf(20,1)=0
5570  Esf(20,2)=0
5580  Esf(20,3)=0
5590  Esf(20,4)=0
5600  Esf(20,5)=0
5610  Esf(20,6)=0
5620  Esf(20,7)=0
5630  Esf(20,8)=0
5640  Esf(20,9)=0
5650  Esf(20,10)=0
5660  Esf(20,11)=0
5670  Esf(20,12)=0
5680  Esf(20,13)=-Alfa(7)*R(20)^(Alfa(7)-1)
5690  Esf(20,14)=-Beta(7)*R(20)^(Beta(7)-1)
5700  Esf(20,15)=Alfa(8)*R(20)^(Alfa(8)-1)
5710  Esf(20,16)=Beta(8)*R(20)^(Beta(8)-1)
5720  Esf(20,17)=0
5730  Esf(20,18)=0
5740  Esf(20,19)=0
```

```
5750 Esf(20,20)=0
5760 Esf(20,21)=0
5770 Esf(20,22)=0
5780 Esf(20,23)=0
5790 Esf(20,24)=0
5800 Esf(21,1)=0
5810 Esf(21,2)=0
5820 Esf(21,3)=0
5830 Esf(21,4)=0
5840 Esf(21,5)=0
5850 Esf(21,6)=0
5860 Esf(21,7)=0
5870 Esf(21,8)=0
5880 Esf(21,9)=0
5890 Esf(21,10)=0
5900 Esf(21,11)=0
5910 Esf(21,12)=0
5920 Esf(21,13)=0
5930 Esf(21,14)=0
5940 Esf(21,15)=-Alfa(8)*R(21)^(Alfa(8)-1)
5950 Esf(21,16)=-Beta(8)*R(21)^(Beta(8)-1)
5960 Esf(21,17)=Alfa(9)*R(21)^(Alfa(9)-1)
5970 Esf(21,18)=Beta(9)*R(21)^(Beta(9)-1)
5980 Esf(21,19)=0
5990 Esf(21,20)=0
6000 Esf(21,21)=0
6010 Esf(21,22)=0
6020 Esf(21,23)=0
6030 Esf(21,24)=0
6040 Esf(22,1)=0
6050 Esf(22,2)=0
6060 Esf(22,3)=0
6070 Esf(22,4)=0
6080 Esf(22,5)=0
6090 Esf(22,6)=0
6100 Esf(22,7)=0
6110 Esf(22,8)=0
6120 Esf(22,9)=0
6130 Esf(22,10)=0
6140 Esf(22,11)=0
6150 Esf(22,12)=0
6160 Esf(22,13)=0
6170 Esf(22,14)=0
6180 Esf(22,15)=0
6190 Esf(22,16)=0
6200 Esf(22,17)=-Alfa(9)*R(22)^(Alfa(9)-1)
6210 Esf(22,18)=-Beta(9)*R(22)^(Beta(9)-1)
6220 Esf(22,19)=Alfa(10)*R(22)^(Alfa(10)-1)
6230 Esf(22,20)=Beta(10)*R(22)^(Beta(10)-1)
6240 Esf(22,21)=0
6250 Esf(22,22)=0
6260 Esf(22,23)=0
6270 Esf(22,24)=0
6280 Esf(23,1)=0
6290 Esf(23,2)=0
6300 Esf(23,3)=0
6310 Esf(23,4)=0
6320 Esf(23,5)=0
6330 Esf(23,6)=0
6340 Esf(23,7)=0
6350 Esf(23,8)=0
6360 Esf(23,9)=0
6370 Esf(23,10)=0
6380 Esf(23,11)=0
6390 Esf(23,12)=0
6400 Esf(23,13)=0
6410 Esf(23,14)=0
6420 Esf(23,15)=0
6430 Esf(23,16)=0
6440 Esf(23,17)=0
6450 Esf(23,18)=0
```

```
6460  Esf(23,19)=-Alfa(10)*R(23)^(Alfa(10)-1)
6470  Esf(23,20)=-Beta(10)*R(23)^(Beta(10)-1)
6480  Esf(23,21)=Alfa(11)*R(23)^(Alfa(11)-1)
6490  Esf(23,22)=Beta(11)*R(23)^(Beta(11)-1)
6500  Esf(23,23)=0
6510  Esf(23,24)=0
6520  Esf(24,1)=0
6530  Esf(24,2)=0
6540  Esf(24,3)=0
6550  Esf(24,4)=0
6560  Esf(24,5)=0
6570  Esf(24,6)=0
6580  Esf(24,7)=0
6590  Esf(24,8)=0
6600  Esf(24,9)=0
6610  Esf(24,10)=0
6620  Esf(24,11)=0
6630  Esf(24,12)=0
6640  Esf(24,13)=0
6650  Esf(24,14)=0
6660  Esf(24,15)=0
6670  Esf(24,16)=0
6680  Esf(24,17)=0
6690  Esf(24,18)=0
6700  Esf(24,19)=0
6710  Esf(24,20)=0
6720  Esf(24,21)=-Alfa(11)*R(24)^(Alfa(11)-1)
6730  Esf(24,22)=-Beta(11)*R(24)^(Beta(11)-1)
6740  Esf(24,23)=Alfa(12)*R(24)^(Alfa(12)-1)
6750  Esf(24,24)=Beta(12)*R(24)^(Beta(12)-1)
6760  Vec(1)=-M(1)*R(1)^(N(1)+3)
6770  Vec(2)=M(1)*R(2)^(N(1)+3)-M(2)*R(2)^(N(2)+3)
6780  Vec(3)=M(2)*R(3)^(N(2)+3)-M(3)*R(3)^(N(3)+3)
6790  Vec(4)=M(3)*R(4)^(N(3)+3)-M(4)*R(4)^(N(4)+3)
6800  Vec(5)=M(4)*R(5)^(N(4)+3)-M(5)*R(5)^(N(5)+3)
6810  Vec(6)=M(5)*R(6)^(N(5)+3)-M(6)*R(6)^(N(6)+3)
6820  Vec(7)=M(6)*R(7)^(N(6)+3)-M(7)*R(7)^(N(7)+3)
6830  Vec(8)=M(7)*R(8)^(N(7)+3)-M(8)*R(8)^(N(8)+3)
6840  Vec(9)=M(8)*R(9)^(N(8)+3)-M(9)*R(9)^(N(9)+3)
6850  Vec(10)=M(9)*R(10)^(N(9)+3)-M(10)*R(10)^(N(10)+3)
6860  Vec(11)=M(10)*R(11)^(N(10)+3)-M(11)*R(11)^(N(11)+3)
6870  Vec(12)=M(11)*R(12)^(N(11)+3)-M(12)*R(12)^(N(12)+3)
6880  Vec(13)=-M(12)*R(13)^(N(12)+3)
6890  Vec(14)=M(1)*(N(1)+3)*R(14)^(N(1)+2)-M(2)*(N(2)+3)*R(14)^(N(2)+2)
6900  Vec(15)=M(2)*(N(2)+3)*R(15)^(N(2)+2)-M(3)*(N(3)+3)*R(15)^(N(3)+2)
6910  Vec(16)=M(3)*(N(3)+3)*R(16)^(N(3)+2)-M(4)*(N(4)+3)*R(16)^(N(4)+2)
6920  Vec(17)=M(4)*(N(4)+3)*R(17)^(N(4)+2)-M(5)*(N(5)+3)*R(17)^(N(5)+2)
6930  Vec(18)=M(5)*(N(5)+3)*R(18)^(N(5)+2)-M(6)*(N(6)+3)*R(18)^(N(6)+2)
6940  Vec(19)=M(6)*(N(6)+3)*R(19)^(N(6)+2)-M(7)*(N(7)+3)*R(19)^(N(7)+2)
6950  Vec(20)=M(7)*(N(7)+3)*R(20)^(N(7)+2)-M(8)*(N(8)+3)*R(20)^(N(8)+2)
6960  Vec(21)=M(8)*(N(8)+3)*R(21)^(N(8)+2)-M(9)*(N(9)+3)*R(21)^(N(9)+2)
6970  Vec(22)=M(9)*(N(9)+3)*R(22)^(N(9)+2)-M(10)*(N(10)+3)*R(22)^(N(10)+2)
6980  Vec(23)=M(10)*(N(10)+3)*R(23)^(N(10)+2)-M(11)*(N(11)+3)*R(23)^(N(11)+2)
6990  Vec(24)=M(11)*(N(11)+3)*R(24)^(N(11)+2)-M(12)*(N(12)+3)*R(24)^(N(12)+2)
7000  PRINT "MATRIZ Esf",LIN(1)
7010  MAT PRINT Esf;
7020  PRINT "MATRIZ Vec",LIN(1)
7030  MAT PRINT Vec;
7040  MAT Sol=INV(Esf)
7050  MAT P=Sol*Vec
7060  PRINT "MATRIZ P,LOS VALORES DE A(I) Y B(I):",P(*)
7070  FOR I=0 TO 11
7080  A(I+1)=P(I*2+1)
7090  B(I+1)=P(I*2+2)
7100  NEXT I
7110  FOR I=1 TO 12
7120  F(I)=M(I)*Rs(I)^(N(I)+3)+A(I)*Rs(I)^Alfa(I)+B(I)*Rs(I)^Beta(I)
7130  Fp(I)=M(I)*(N(I)+3)*Rs(I)^(N(I)+2)+A(I)*Alfa(I)*Rs(I)^(Alfa(I)-1)+B(I)*Bet
a(I)*Rs(I)^(Beta(I)-1)
7140  Tr(I)=F(I)/(H(I)*Rs(I))
7150  Tta(I)=Fp(I)/H(I)+Ro*Omega^2*Rs(I)^2
```

```
7160  Er(I)=(Tr(I)-Nu*Tta(I))/E
7170  Eta(I)=(Tta(I)-Nu*Tr(I))/E
7180  U(I)=Rs(I)*Eta(I)
7190  NEXT I
7200  PRINT "F",LIN(1)
7210  MAT PRINT F;
7220  PRINT "Fp",LIN(1)
7230  MAT PRINT Fp;
7240  PRINT "Tr",LIN(1)
7250  MAT PRINT Tr;
7260  PRINT "Tta",LIN(1)
7270  MAT PRINT Tta;
7280  PRINT "Er",LIN(1)
7290  MAT PRINT Er;
7300  PRINT "Eta";
7310  MAT PRINT Eta;
7320  PRINT "U",LIN(1)
7330  MAT PRINT U
7340  MAT Sol=INV(Esf)
7350  END
```

Aplicación del Programa a un Perfil Determinado.

Se aplica el programa descrito anteriormente, para encontrar la solución del perfil que lo generó, este perfil es el propuesto por Cruz Manjarréz(12), al cuál le asignamos primeramente el perfil plano condicionado, y luego, el perfil dado por nuestras relaciones matemáticas. Figura 19.

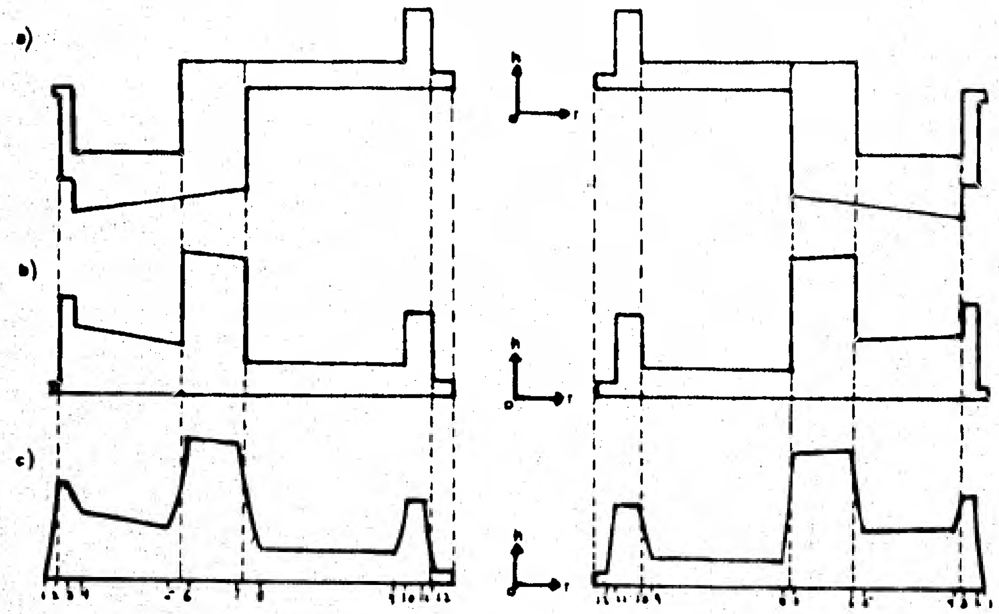

Figura 19. En (a) vemos el perfil problema, en (b) el perfil condicionado al perfil original y finalmente, en la figura (c), el perfil propuesto matemáticamente.

En la Figura 19a, se tiene el perfil problema, a este le asignamos el perfil condicionado Figura 19b y finalmente le asignamos el perfil dado por las ecuaciones (3-13), Figura 19c. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$h_1 = (.2)r^{\circ}$$
$$h_2 = (11.440679 \times 10^{-8})r^{58.22759}$$
$$h_3 = (1.2)r^{\circ}$$
$$h_4 = (3.9684001 \times 10^{10})r^{-46.688863}$$
$$h_5 = (.4)r^{\circ}$$
$$h_6 = (4.2623552 \times 10^{-92})r^{157.53022}$$
$$h_7 = (1.5133624)r^{0.2088487}$$
$$h_8 = (1.0141565 \times 10^{79})r^{-115.80903}$$
$$h_9 = (0.3796644)r^{0.4748914}$$
$$h_{10} = (6.0857754 \times 10^{-55})r^{68.483838}$$
$$h_{11} = (1.4)r^{\circ}$$
$$h_{12} = (1.5542878 \times 10^{84})r^{-104.42749}$$

y:

TABLA II

r (cms)	$\sigma_r(\frac{dinas}{cm^2})$	$\sigma_\theta(\frac{dinas}{cm^2})$	u (cms)
1.00	- .2	5.0106×10^9	6.9853×10^{-3}
1.30	4.1392×10^8	3.7788×10^9	6.6010×10^{-3}
1.70	1.4242×10^9	3.1326×10^9	6.3103×10^{-3}
2.50	2.5688×10^9	3.1235×10^9	7.9317×10^{-3}
2.70	2.5523×10^9	3.0636×10^9	8.3613×10^{-3}
3.00	2.5094×10^9	2.9808×10^9	9.0035×10^{-3}
3.80	1.0095×10^9	2.3391×10^9	1.0627×10^{-2}
4.50	3.8897×10^8	1.8053×10^9	1.0520×10^{-2}
4.80	5.1889×10^8	1.7310×10^9	1.0437×10^{-2}
5.50	5.3405×10^8	1.5537×10^9	1.0562×10^{-2}
6.00	2.8988×10^8	1.3528×10^9	1.0516×10^{-2}
6.20	1.4891×10^8	1.2594×10^9	1.0461×10^{-2}
6.50	- .0001	1.1387×10^9	1.0479×10^{-2}

En la Figura 20, se presentan en forma gráfica, los resultados encontrados.

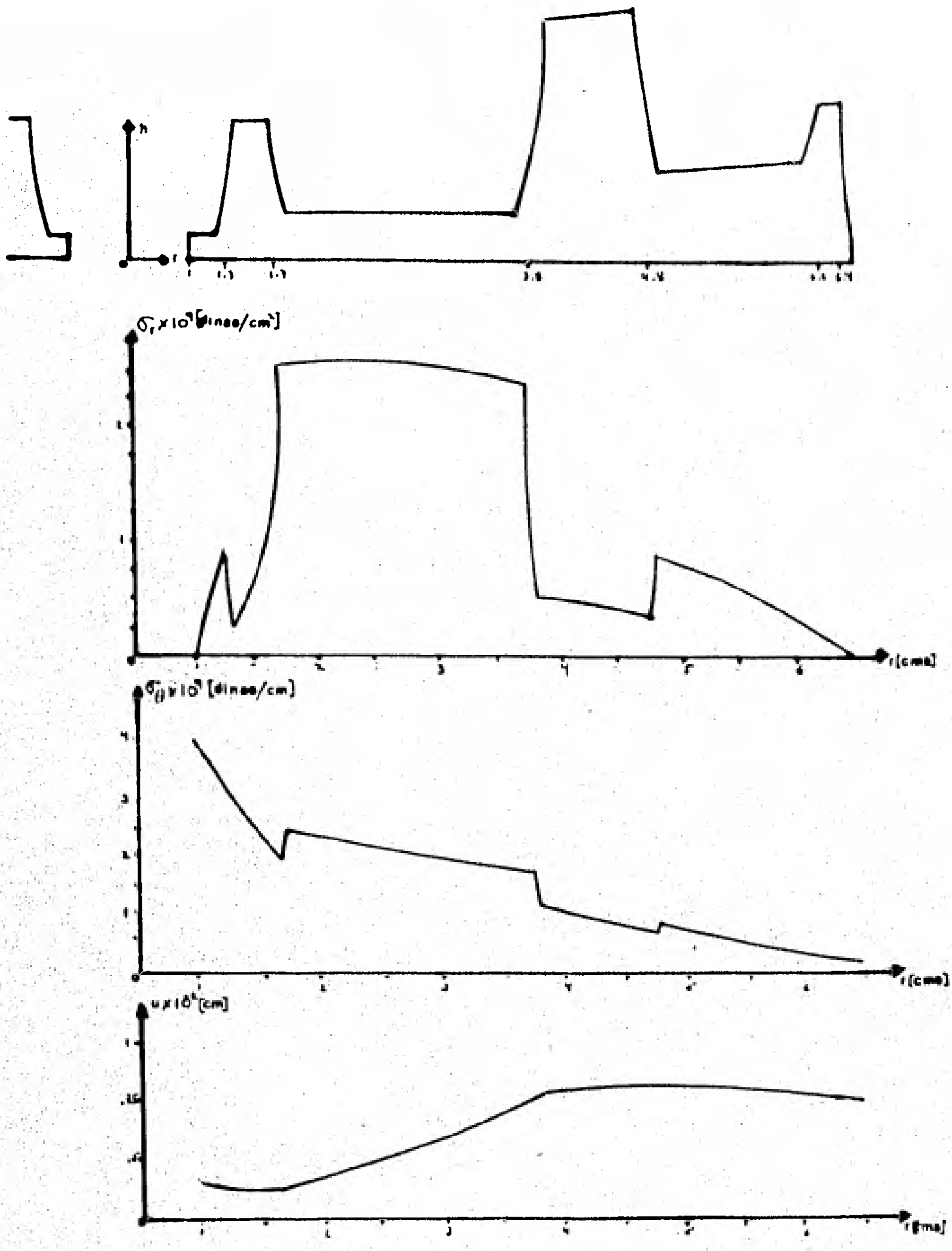

Figura 20. Deformaciones y esfuerzos del perfil condicionado. En el inciso (a), vemos el perfil superpuesto al perfil original, en la figura (b) se encuentra el esfuerzo radial en función del radio. En la Figura (c) se observa el esfuerzo tangencial en función del radio y en la Figura (d) observamos la deformación radial del disco.

En la figura 20, presentamos los resultados de los esfuerzos y deformaciones que se obtuvieron por el método de cómputo, para un perfil determinado.

En (a) presentamos el perfil del disco de aluminio obtenido mediante nuestras relaciones matemáticas, en él se observan los puntos en donde se hicieron los cortes (1.28, 1.32, 1.68, 1.72, 3.78, 3.82, 4.78, 4.82, 6.18, 6.22, 6.38, 6.42). El origen del sistema de coordenadas se localiza en el centro del hoyo.

En la misma figura, inciso (b), presentamos la gráfica del esfuerzo radial en función del radio del disco, el esfuerzo máximo lo localizamos en la región comprendida entre 1.7 y 3.8 cms.

El esfuerzo tangencial máximo se encuentra cerca del hoyo del disco, ésto lo ilustramos en la Figura 20c.

Como se aprecia en la gráfica, inciso (d), la deformación u, aumenta conforme nos alejamos del centro del disco, y a partir de 5 cms se comporta casi como una constante.

Como consecuencia de los resultados obtenidos en la Figura anterior, el disco aumenta radialmente .010 cms., es decir, .020 cms. de diámetro.

Aplicación del Programa a un Perfil Propuesto.

En base a los resultados obtenidos en el perfil determinado, se observa que rebasan los valores permitidos(11), ya que tanto la deformación como los esfuerzos del disco de aluminio, son mayores a los que resiste el cilindro al rotar; estos discos se usarán como tapas de dicho cilindro. Por todo ésto, fue necesario mejorar esas condiciones de esfuerzo, para lo cuál, se propuso el perfil que se presenta en la Figura 21. Siguiendo el método desarrollado anteriormente, se le asignó primeramente un perfil aplanado en uno de sus lados (Figura 21b), posteriormente se le asoció un perfil matemático (c).

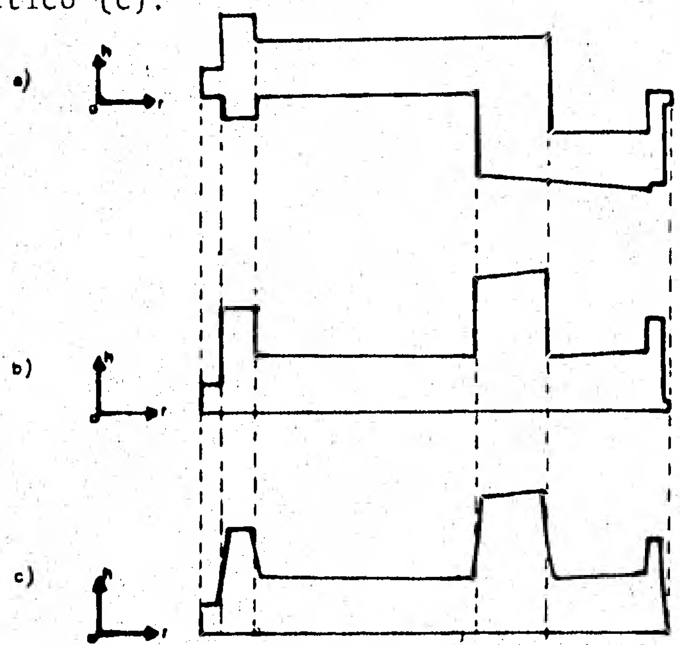

Figura 21. Asociación a un perfil real (a), de un perfil aplanado (b), y de un perfil matemático (c).

Aplicando el programa de cómputo anterior fueron encontrados los esfuerzos y deformaciones para diferentes radios propuestos. Esta información se presenta en la Tabla III, y en forma gráfica en la figura 22.

$h_1 = (1)r^{\circ}$

$h_2 = (3.2629387 \times 10^{-36})r^{88.029235}$

$H_3 = (2)r^{\circ}$

$h_4 = (1.2139379 \times 10^{59})r^{-130.11273}$

$h_5 = (.8)r^{\circ}$

$h_6 = (4.4079131 \times 10^{-51})r^{87.046817}$

$h_7 = (1.5133624)r^{0.2088487}$

$h_8 = (1.0141565 \times 10^{79})r^{-115.80903}$

$h_9 = (0.3796644)r^{0.4738914}$

$h_{10} = (6.0857754 \times 10^{-55})r^{68.483838}$

$h_{11} = (1.4)r^{\circ}$

$h_{12} = (1.5542878 \times 10^{84})r^{-104.42749}$

TABLA III

r (cms)	$\sigma_r(\frac{dinas}{cm^2})$	$\sigma_\theta(\frac{dinas}{cm^2})$	u (cms)
.635	0	4.0734×10^9	3.6061×10^{-3}
2.54	1.1507×10^9	1.8430×10^9	5.1815×10^{-3}
2.70	0.8212×10^9	1.6634×10^9	5.2411×10^{-3}
2.84	1.2964×10^9	1.7661×10^9	5.2987×10^{-3}
3.52	1.8175×10^9	1.9265×10^9	6.5705×10^{-3}
3.82	0.6821×10^9	1.5313×10^9	6.9560×10^{-3}
3.95	0.6496×10^9	1.4831×10^9	6.9866×10^{-3}
4.82	0.9774×10^9	1.3787×10^9	7.0951×10^{-3}
5.50	0.6039×10^9	1.1704×10^9	7.4461×10^{-3}
6.22	0.1216×10^9	0.9048×10^9	7.4981×10^{-3}
6.40	0.1944×10^9	0.8405×10^9	7.4436×10^{-3}
6.50	0	0.8175×10^9	7.4080×10^{-3}

Graficando, se tiene:

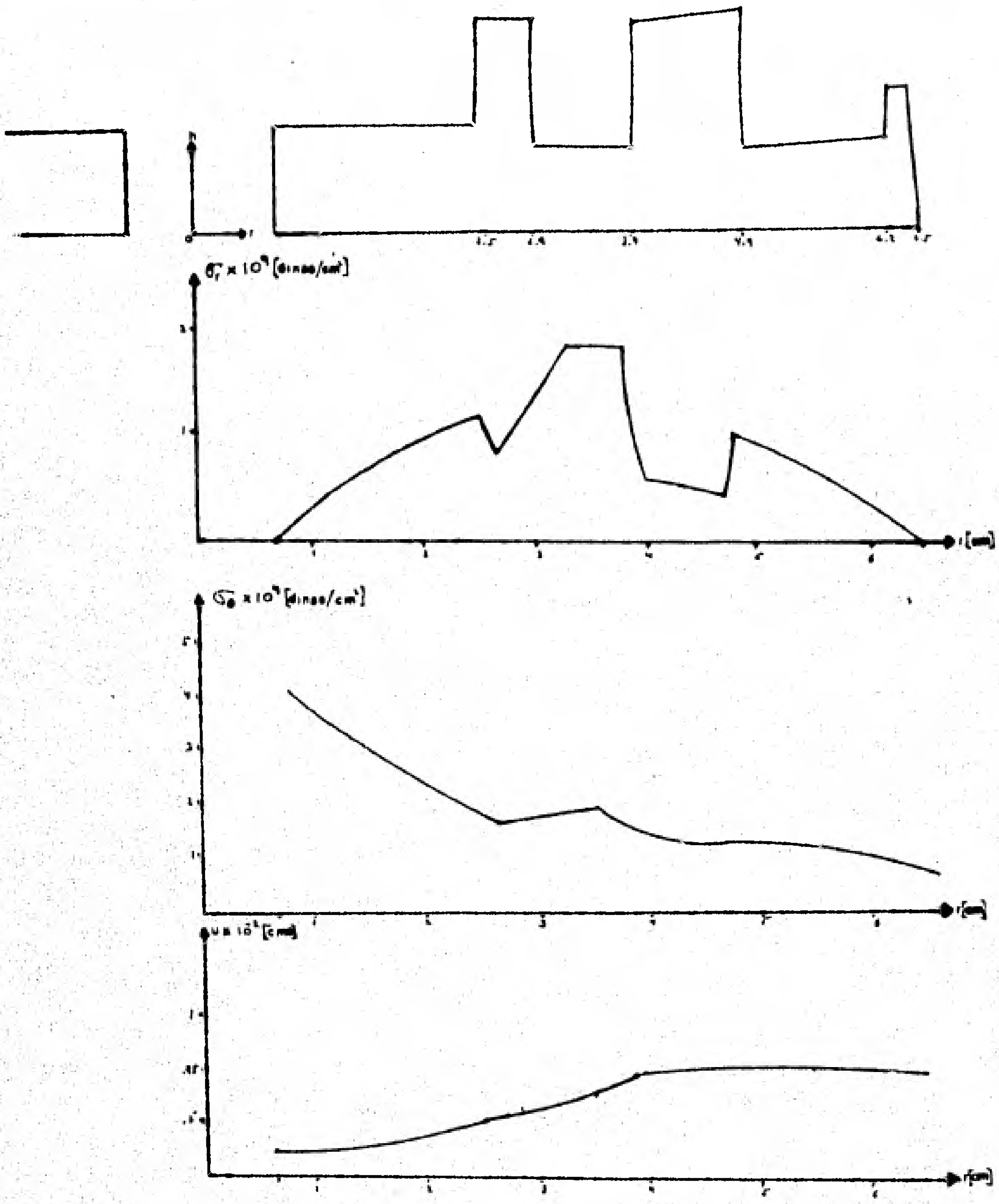

Figura 22. Deformaciones y esfuerzos del perfil propuesto. En el inciso (a), vemos el perfil superpuesto al perfil original, en la Figura (b) se encuentra el esfuerzo radial en función del radio. En la Figura (c) se observa el esfuerzo tangencial en función del radio y en la Figura (d) observamos la deformación radial del disco.

En la Figura 22, se presentan los resultados de los esfuerzos y deformaciones que se obtuvieron por el método de cómputo, para el perfil propuesto.

En la Figura 22a, presentamos la aproximación al perfil del disco de aluminio, obtenido mediante nuestras relaciones matemáticas, en éllas se observan los puntos en donde se hicieron los cortes (2.48, 2.52, 2.88, 2.92, 3.88, 3.92, 4.88, 4.92, 6.18, 6.22, 6.38, y 6.42), el origen del sistema de coordenadas se localiza, como en el caso anterior, en el centro del hoyo.

En la misma Figura (b), se observa el comportamiento del esfuerzo radial en función del radio del disco, el esfuerzo máximo se localiza en la región comprendida entre 2.9 y 3.7 cms.

El esfuerzo tangencial máximo del modelo propuesto, se encuentra cerca del hoyo del disco, ésto se puede ver en la Figura 22c.

Finalmente en el inciso d de la misma Figura, se aprecia que la deformación u, aumenta conforme nos alejamos del centro del disco, y a partir de 5.5 cms. se comporta casi como una constante.

Como consecuencia de los resultados obtenidos de la Figura anterior, el disco aumenta radialmente .007 cms., es decir, .014 cms. de diámetro.

Al analizar los resultados obtenidos en el caso del disco determinado y del disco propuesto, observamos una notable mejoría en los resultados encontrados en el segundo caso.

Una comparación entre ellos la presentamos en la Tabla III.

TABLA IV

Comparación de los resultados obtenidos en el caso del perfil determinado y del perfil propuesto.

ESFUERZOS Y DEFORMACIÓN	PERFIL DETERMINADO	PERFIL PROPUESTO
σ_r MAXIMA $\left(\frac{dinas}{cm^2}\right)$	3.4582×10^{9}	1.8175×10^{9}
σ_θ MAXIMA $\left(\frac{dinas}{cm^2}\right)$	5.0106×10^{9}	4.0734×10^{9}
u MAXIMA (cms)	1.0479×10^{-2}	0.7408×10^{-2}

De esta última Tabla, podemos decir, que los valores para los esfuerzos y deformaciones en el caso del perfil propuesto, son menores que aquellos para el perfil determinado. Es posible comparar los esfuerzos radiales y tangenciales así como las deformaciones entre sí, debido a que estas condiciones son características del tipo de perfil de que se trate.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En base al análisis de los resultados de los discos estudiados y a las hipótesis propuestas durante el desarrollo de este trabajo, podemos concluir lo siguiente:

- Dado el método que seguimos en el programa, éste se puede aplicar a todo tipo de perfil de disco, cualquiera que sea el material que lo constituya.

- Los valores obtenidos con el perfil propuesto, resultaron óptimos, ya que satisfacen las condiciones exigidas por el cilindro en rotación; logrando abatir tanto el esfuerzo radial máximo como el tangencial máximo, en un 54 y 30% respectivamente. La elongación radial máxima (u), resulto también óptima, mejorando en un 29% la deformación del disco.

- En función de las gráficas y tablas obtenidas con este método, se observa que la suposición formulada por Haerle[3]:

$$\frac{h}{h'} = \frac{\sigma_r'}{\sigma_r} = \frac{\sigma_\theta'}{\sigma_\theta} \qquad (3\text{-}21)$$

no se cumple del todo, ya que en nuestro caso:

$$\frac{h}{h'} = \frac{\sigma_r'}{\sigma_r} \neq \frac{\sigma_\theta'}{\sigma_\theta}$$

si revisamos aquí el tratamiento matemático que Haerle da a su desarrollo, veremos que nunca toma en cuenta a la relación $\sigma_\theta/\sigma_\theta'$ en su método, ya que siempre lo hace en base a la relación σ_r/σ_r' .

A pesar de ésto, su hipótesis es buena en la práctica.

- Aplicando la teoría presentada en este trabajo, podemos afirmar que el programa desarrollado es válido también para discos sin agujero central, tan sólo considerando que los esfuerzos se duplican al hacer un hoyo en el centro del disco(1,3,7).

- La deformación radial máxima (u), a partir de un cierto valor, el cuál depende de la longitud inicial del disco, se comporta como si no existiera hoyo en el centro del mismo.

- La matríz es fácilmente redimensionable, porque los únicos elementos que aparecen en élla diferentes de cero, son los correspondientes a la diagonal principal, y no son otra cosa que las funciones de esfuerzo F, evaluadas en los puntos de corte del disco.

- Después de haber trabajado con nuestro programa, notamos que aún puede ser posible la optimización del mismo, tratando de disminuir los datos C, n necesarios, a sólo uno de éllos, haciendo los exponentes $n = \pm 100$ ó, manteniendo a C con un valor fijo. Sería conveniente asignar a este programa, una subruti na que grafique al mismo tiempo los resultados obtenidos.

Es interesante mencionar que con las características encontradas mediante nuestro estudio, actualmente se están maquinando dos discos de aluminio, que serán utilizados como tapas de un cilindro. Este cilindro es la etapa piloto de la construcción de ultracentrífugas.

BIBLIOGRAFIA

1. Filomenko, M. Theory of Elasticity. First Edition. Scientific Publishers, Moscow (1953).

2. Love, M.E.H. A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Fourth Edition. Universal Press, Cambridge (1927).

3. Martin, H.M. Rotating Discs of Conical Profile, Engineering, Vol CXV, pp. 1-4, January 1923.

4. Haerle, H. The Strength of Rotating Discs, Engineering, Vol. CVI, pp. 130-135. July 1918.

5. Hodkinson. Rotating Discs of Conical Profile, Engineering, Vol. CXVI, pp.274-275. July 1923.

6. Timoshenko, S.P. Theory of Plates and Shell. First Edition. Mac Graw Hill, Stanford (1940).

7. Timoshenko, S.P. Theory of Elasticity. First Edition. Mac Graw Hill, New York (1934)

8. Southewell. Theory of Elasticity. Second Edition. Oxford University Press, Oxford (1941).

9. Pisarenko, G.J. Et. Al. Manual de Resistencia de Materiales. Primera Edición. MIR, Moscú (1979).

10. Stodola. Steam Turbines. First Edition, Oxford University Press, Oxford (1912).

11. Alba, F. Comunicación personal (1981).

12. Cruz Manjarréz, H. Comunicación personal (1981).

13. Courant, R. Et. Al. Métodos de la Física Matemática. Tercera Edición, Aguilar. California (1978)

14. Royo, M.C. Síntesis Histórica de la Física Contemporánea. Primera Edición. UIA (1982).

Mi agradecimiento al Dr.
Fernando Alba Andrade por su
dirección y paciencia en la
elaboración de la presente tesis.

Agradezco fraternalmente a:

Act. Miguel Mireles Padilla
Fís. Héctor Cruz Manjarréz Flores
M.en C. Esbaide Adem Chahin
Fís. Andrés Porta Contreras
Lic. Jesús Lara Olvera

Por sus oportunas y desinteresadas
aportaciones.

Agradezco a todas las demás
personas que de una u otra
forma, ayudaron en la reali-
zación de este trabajo.