44 2 ejem

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECCION DE HAMILTONIANOS COLECTIVOS DE PROBLEMAS DE MUCHOS CUERPOS MOVIENDOSE EN UNA DIMENSION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

JORGE PIEKAREWICZ SIGAL

México, D. F. 1981

I N D I C E

I. INTRODUCCION

Desde el inicio de la teoría nuclear, a partir del descubrimiento del neutrón en 1932, dos puntos de vista, al parecer contradictorios, se han utilizado en la descripción de los fenómenos nucleares. En el primero de ellos, el núcleo es una colección de A nucleones (Z protones y N=A-Z neutrones) interaccionando por medio de fuerzas de corto alcance. Dada la complejidad de este problema, se ha considerado en un primer paso, que los nucleones se mueven en un potencial común y las interacciones residuales se consideran como perturbaciones. Esto lleva al modelo de capas del núcleo, que después de una breve aparición en 1934 (1), alcanza su desarrollo maduro en 1948 en la obra de Goeppert Mayer y Jensen (2) y se ha continuado hasta el presente.

Simultáneamente, surge la idea de movimientos colectivos en los núcleos a través del modelo de la gota de líquido introducido por Niels Bohr en 1936 (3) y que alcanza su madurez con las investigaciones de Aage Bohr y Ben Mottelson en el inicio de la década de los cincuenta (4).

A pesar de que se realizaron varios esfuerzos por derivar modelos colectivos de descripciones microscópicas en términos de nucleones, estos generalmente no fructificaron. Recientemente, sin embargo, ha habido un reavivamiento de estos esfuerzos gracias a la introducción de coordenadas colectivas de un sistema de A nucleones debidos a Zickendraht (5) y a Dzublik et al. (6). En particular Vanagas (7) ha propuesto un Hamiltoniano colectivo que se puede derivar del Hamiltoniano de A nucleones si se toma la parte escalar de este último con respecto al grupo ortogonal de A-1 dimensiones O(A-1) asociado con A-1 vectores de Jacobi. Filippov (8) en cambio, ha considerado la posibilidad de derivar este Hamiltoniano colectivo de la proyección del Hamiltoniano de A nucleones en estados asociados con la representación más baja de O(A-1) consistente con el principio de Pauli.

Los procedimientos seguidos por Vanagas y Filippov, cuando las partículas se mueven en el espacio físico de tres dimensiones, son muy complejos desde el punto de vista matemático. Por ello en el presente trabajo se ha implementado el programa de los autores antes mencionados para un problema hipotético en que se tienen

A nucleones en una dimensión interaccionando por medio de potenciales gaussianos.-- Todos los pasos del programa pueden entonces implementarse analíticamente y los resultados son de interés para la confrontación entre modelos colectivos macroscópicos y microscópicos, en el espacio de dos y tres dimensiones, que desarrollan actualmente Moshinsky y sus colaboradores (9).

En el siguiente capítulo indicaremos las coordenadas relevantes a nuestro problema y en particular introduciremos la variable colectiva ρ. En los capítulos-- III y IV discutiremos en detalle las hipótesis de Vanagas y Filippov y su implementación detallada en problemas de A cuerpos moviéndose en una dimensión. Finalmente en el capítulo V indicaremos nuestras conclusiones y en particular la relevancia de nuestros resultados para problemas en que el movimiento se efectúa en espacios de dos y tres dimensiones.

II. LAS COORDENADAS DE JACOBI, LAS COORDENADAS HIPERSFERICAS Y LA VARIABLE COLECTIVA ρ

Para la resolución de nuestro problema, resulta apropiado introducir un nuevo sistema de coordenadas el cual definimos de la siguiente manera:

$$X_s = \left[s(s+1)\right]^{-1/2}\left[\sum_{t=1}^{s} X'_t - sX'_{s+1}\right] \quad ; \quad (s=1,2,\ldots,A-1) \tag{2.1a}$$

$$X_A = A^{-1/2}\sum_{t=1}^{A} X'_t \tag{2.1b}$$

donde las primeras A-1 se conocen con el nombre de coordenadas de Jacobi, mientras que la última es esencialmente la coordenada del centro de masa.

Se puede probar (10), que la transformación de coordenadas resulta ser una transformación ortogonal, por lo que existe una matriz $\|J\|$ de AxA tal que:

$$X = \|J\|\, X'$$

donde se han definido los vectores

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_A \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_A' \end{bmatrix}$$

y $\|J\|$ resulta ser la matriz Jacobiana asociada a la transformación, de aquí que:

$$x_s = \sum_{t=1}^{A} J_{st}\, x'_t \quad y \quad J_{st} = \frac{\partial x_s}{\partial x'_t}$$

$$x'_t = \sum_{s=1}^{A} (J^{-1})_{ts}\, x_s \quad y \quad (J^{-1})_{ts} = \frac{\partial x'_t}{\partial x_s}$$

Del hecho que $\|J\|$ es una transformación ortogonal, i.e. $\|J\|^{-1} = \|J\|^{T}$ obtenemos:

$$\frac{\partial x'_t}{\partial x_s} = (J^{-1})_{ts} = (J^{T})_{ts} = J_{st} = \frac{\partial x_s}{\partial x'_t} \ ,$$

lo que nos lleva a concluir que los momentos se transforman de manera idéntica a las coordenadas ya que:

$$P_s = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_s} = \frac{1}{i}\sum_{t=1}^{A}\frac{\partial}{\partial x'_t}\frac{\partial x'_t}{\partial x_s} = \sum_{t=1}^{A}\frac{\partial x_s}{\partial x'_t}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x'_t}\right) = \sum_{t=1}^{A} J_{st} P'_t ,$$

por lo que:

$$P_s = [s(s+1)]^{-1/2}\left[\sum_{t=1}^{s} P'_t - s P'_{s+1}\right] \tag{2.2a}$$

$$y \qquad P_A = A^{-1/2}\sum_{t=1}^{A} P'_t \tag{2.2b}$$

donde nuevamente P_A está asociado esencialmente al momento del centro de masa y hemos usado unidades en las que $\hbar = 1$.

Dos cálculos que resultan de mucha importancia en la transformación del Hamiltoniano, y los cuales se han realizado en (10), son los siguientes:

$$\sum_{s=1}^{A-1} x_s^2 = \frac{1}{A}\sum_{s=2}^{A}\sum_{t=1}^{s-1}(x'_s - x'_t)^2 = \frac{1}{A}\sum_{t<s=2}^{A}(x'_s - x'_t)^2 \tag{2.3}$$

$$\sum_{s=1}^{A} x_s^2 = \sum_{s=1}^{A} x_s'^2 \tag{2.4}$$

Tomando esto en consideración y del hecho que los momentos se transforman de manera idéntica a las coordenadas, veamos de que manera se transforma el Hamiltoniano del sistema:

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A} P_s'^2 + \sum_{t<s=2}^{A} V(|x'_s - x'_t|) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A} P_s^2 + \sum_{t<s=2}^{A} V(|x'_s - x'_t|) + \left[\frac{1}{2A}\sum_{t<s=2}^{A}(x'_s - x'_t)^2 - \frac{1}{2A}\sum_{t<s=2}^{A}(x'_s - x'_t)^2\right]$$

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A} P_s^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A-1} x_s^2 + \sum_{t<s=2}^{A}\left[V(|x_s'-x_t'|) - \frac{1}{2A}(x_s'-x_t')^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A-1}(P_s^2+x_s^2) + \frac{1}{2}P_A^2 + \sum_{t<s=2}^{A}\left[V(|x_s'-x_t'|) - \frac{1}{2A}(x_s'-x_t')^2\right]$$

eliminando la parte asociada al centro de masa, el Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$H = H_0 + \sum_{t<s=2}^{A}\left[V(|x_s'-x_t'|) - \frac{1}{2A}(x_s'-x_t')^2\right] \qquad (2.5)$$

donde

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A-1}(P_s^2 + x_s^2) \qquad (2.6)$$

Como se observa Ho resulta ser el Hamiltoniano asociado a un sistema de A-1 osciladores armónicos desacoplados de frecuencia unitaria. En el desarrollo anterior hemos usado unidades en las que la masa de las partículas es unitaria, de hecho a lo largo de todo el trabajo usaremos unidades en las que la masa de las partículas, la frecuencia de los osciladores y $\hbar$ sean iguales a uno.

Para hacer relevante el comportamiento colectivo del sistema, es necesario efectuar una segunda transformación de coordenadas que nos relacione, las coordenadas de Jacobi con las coordenadas hiperesféricas $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{A-2}$, donde ρ resultará ser la variable colectiva de nuestro problema. La transformación está definida de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\alpha_1 \\
x_2 &= \rho \,\mathrm{sen}\,\alpha_1 \cos\alpha_2 \\
x_3 &= \rho \,\mathrm{sen}\,\alpha_1 \,\mathrm{sen}\,\alpha_2 \cos\alpha_3 \\
&\;\vdots \\
x_{A-2} &= \rho \,\mathrm{sen}\,\alpha_1 \,\mathrm{sen}\,\alpha_2 \quad \mathrm{sen}\,\alpha_{A-3} \cos\alpha_{A-2} \\
x_{A-1} &= \rho \,\mathrm{sen}\,\alpha_1 \,\mathrm{sen}\,\alpha_2 \cdots \mathrm{sen}\,\alpha_{A-3} \,\mathrm{sen}\,\alpha_{A-2}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

donde

$$0 \le \rho < \infty$$
$$0 \le \alpha_s < \pi \quad \text{para} \quad 1 \le s \le A-3$$
$$0 \le \alpha_{A-2} < 2\pi$$

En el apéndice A se ha probado que $\rho^2 = \sum_{s=1}^{A-1} x_s^2$, usando este resultado y la ecuación (2.3) tenemos que:

$$\rho^2 = \sum_{s=1}^{A-1} x_s^2 = \frac{1}{A} \sum_{t<s=2}^{A} (x_s' - x_t')^2 \tag{2.8}$$

de donde observamos la invariancia de la ρ ante permutaciones, propiedad fundamental que caracteriza a cualquier variable colectiva. Nótese también que la ρ^2 es la invariante del grupo ortogonal de A-1 dimensiones asociada con las A-1 coordenadas de Jacobi del problema.

III. LA HIPOTESIS DE VANAGAS

Como se ha mencionado en la introducción el problema colectivo se analizará dentro del marco de dos esquemas distintos, uno de ellos debido a Vanagas y el otro debido a Filippov. En este capítulo se hará el análisis usando la hipótesis de Vanagas, la cual consiste en proyectar el Hamiltoniano colectivo del sistema de A partículas tomando la representación escalar del Hamiltoniano de las mismas con respecto al grupo ortogonal O(A-1).

El tratamiento del problema general se llevará a cabo en varias etapas. En la primera de ellas resolveremos el problema colectivo usando interacciones de oscilador armónico, i.e. resolveremos el problema proyectando la parte colectiva del Hamiltoniano Ho (2.6). Una vez que se hayan obtenido los eigenestados asociados al problema anterior proyectaremos la parte colectiva de la interacción realizando un promedio sobre los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{A-2}$; para finalmente obtener en el caso general el Hamiltoniano colectivo como una ecuación diferencial ordinaria en ρ la cual puede ser resuelta directamente, o a través de su representación matricial en algún conjunto completo de eigenfunciones. En nuestro análisis usaremos este último criterio, por lo que calcularemos explícitamente los elementos de matriz del Hamiltoniano colectivo general, usando las eigenfunciones obtenidas en el problema colectivo con interacciones de oscilador armónico.

Consideremos el Hamiltoniano H_0 (2.6) el cual contiene interacciones de oscilador armónico y viene dado por la siguiente expresión:

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A-1}(P_s^2 + x_s^2) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A-1} -\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A-1} x_s^2 \qquad (2.6)$$

la cual haciendo uso de (2.8) se transforma en:

$$H_0 = -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}\rho^2 \qquad (3.1)$$

Para proyectar la parte colectiva del Hamiltoniano es conveniente expresar al Laplaciano en coordenadas hiperesféricas, el cual como se ha hecho ver en el Apéndice A toma la siguiente forma:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^{A-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{A-2}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\sum_{t=1}^{A-2}\left[\left(\prod_{s=1}^{t-1}\operatorname{sen}^2\alpha_s\right)^{-1}\frac{1}{\operatorname{sen}^{A-2-t}\alpha_t}\frac{\partial}{\partial\alpha_t}\operatorname{sen}^{A-2-t}\alpha_t\frac{\partial}{\partial\alpha_t}\right] \qquad (3.2)$$

donde $\prod_{s=1}^{0}\operatorname{sen}^2\alpha_s = 1$; ó equivalentemente

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^{A-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{A-2}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\Lambda^2}{\rho^2} \qquad (3.3)$$

donde de (3.2) y (3.3) se tiene que:

$$\Lambda^2 = -\sum_{t=1}^{A-2}\left[\left(\prod_{s=1}^{t-1}\operatorname{sen}^2\alpha_s\right)^{-1}\frac{1}{\operatorname{sen}^{A-2-t}\alpha_t}\frac{\partial}{\partial\alpha_t}\operatorname{sen}^{A-2-t}\alpha_t\frac{\partial}{\partial\alpha_t}\right] \qquad (3.4)$$

Al operador Λ^2 se le conoce como el operador de Casimir de segundo grado, el cual resulta ser una generalización del operador de momento angular $\hat{L}^2$, a un espacio de (A-1) dimensiones. El operador de Casimir satisface la siguiente ecuación de eigenvalores, la cual ha sido tratada en (11)

$$\Lambda^2 \mathcal{D}^{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{A-2}) = \omega(\omega+A-3)\mathcal{D}^{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{A-2}) \qquad (3.5)$$

donde $\mathcal{D}^{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{A-2})$ son armónicos hiperesféricos y $\omega(\omega+A-3)$ es el eigenvalor del operador. Analicemos brevemente lo que sucede para A=4. La ecuación (3.4) se transforma en:

$$\Lambda^2 = -\sum_{t=1}^{2}\left[\left(\prod_{s=1}^{t-1}\operatorname{sen}^2\alpha_s\right)^{-1}\frac{1}{\operatorname{sen}^{2-t}\alpha_t}\frac{\partial}{\partial\alpha_t}\operatorname{sen}^{2-t}\frac{\partial}{\partial\alpha_t}\right] = -\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right]$$

mientras que (3.5) resulta estar dada por la siguiente expresión:

$$\Lambda^2 \mathcal{D}^{\omega}(\alpha_1,\alpha_2) = \omega(\omega+1)\mathcal{D}^{\omega}(\alpha_1,\alpha_2)$$

la cual expresada en un lenguaje más familiar se convierte en:

$$\hat{L}^2 Y_l(\theta,\varphi) = l(l+1) Y_l(\theta,\varphi)$$

expresión que, resulta ser, como es bien conocido la ecuación de eigenvalores del momento angular $\hat{L}^2$ en tres dimensiones.

La ecuación de Schrödinger asociada al Hamiltoniano H_0 viene dada por:

$$H_0 \Phi_n^M(\rho,\alpha_1,\ldots,\alpha_{A-2}) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\rho^{A-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{A-2}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\Lambda^2}{\rho^2} + \rho^2\right]\Phi_n^M(\rho,\alpha_1,\ldots,\alpha_{A-2}) = E_n^M \Phi_n^M(\rho,\alpha_1,\ldots,\alpha_{A-2}) \quad (3.6)$$

donde se ha hecho uso de (3.1), (3.3) y M es una función de ω que se definirá más adelante. Del análisis realizado anteriormente, encontramos apropiado proponer como solución, de la ecuación diferencial asociada al Hamiltoniano H_0, a:

$$\Phi_n^M(\rho,\alpha_1,\ldots,\alpha_{A-2}) = F_n^M(\rho)\, D^\omega(\alpha_1,\ldots,\alpha_{A-2}) = \rho^{1-\frac{A}{2}} f_n^M(\rho)\, D^\omega(\alpha_1,\ldots,\alpha_{A-2}) \quad (3.7)$$

la cual sustituyéndose en (3.6) transforma al Hamiltoniano en:

$$H_0^\omega f_n^M(\rho) = \frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{M^2-1/4}{\rho^2} + \rho^2\right] f_n^M(\rho) = E_n^M f_n^M(\rho) \quad (3.8)$$

donde

$$M = M(\omega) = \omega + \frac{1}{2}(A-3) \quad (3.9a)$$

El operador H_0^ω es el Hamiltoniano colectivo asociado con interacciones de oscilador armónico, sin embargo hasta este momento, el desarrollo se ha realizado independientemente de la hipótesis de Vanagas, la cual se hace relevante al tomar $\omega=0$, condición que representa el hecho de tomar la parte escalar del Hamiltoniano con respecto al grupo ortogonal $O(A-1)$. Tomando la condición $\omega=0$ y definiendo:

$$\mu = M(0) = \frac{1}{2}(A-3) \quad (3.9b)$$

obtenemos el Hamiltoniano deseado, dado por la siguiente expresión:

$$H_0^c f_n^\mu(\rho) = \frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\mu^2-1/4}{\rho^2} + \rho^2\right] f_n^\mu(\rho) = E_n^\mu f_n^\mu(\rho) \quad (3.10)$$

Esta ecuación ha sido tratada y resuelta en (12), obteniéndose los siguientes resultados:

$$f_n^\mu(\rho) = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(\mu+n+1)}\right]^{1/2} e^{-\rho^2/2} \rho^{\mu+\frac{1}{2}} L_n^\mu(\rho^2) \quad (3.11a)$$

$$E_n^\mu = 2n+\mu+1 \quad (3.11b)$$

donde $\{f_n^{\mu}(\rho)\}$ es un conjunto completo de funciones ortonormales y $L_n^{\mu}(\rho^2)$ son polinomios asociados de Laguerre.

Para proyectar la parte colectiva de la interacción en (2.5), notamos que ésta resulta ser simétrica bajo permutaciones de las partículas, por lo que podemos sustituir la interacción por $\frac{1}{2}A(A-1)$ veces el término para el cual $t=1$ y $s=2$, donde $\frac{1}{2}A(A-1)$ es el número de parejas distintas que se pueden formar, i.e.

$$\sum_{t<s=2}^{A}\left[V(|x_s'-x_t'|)-\frac{1}{2A}(x_s'-x_t')^2\right]=\frac{1}{2}A(A-1)\left[V(|x_2'-x_1'|)-\frac{1}{2A}(x_2'-x_1')^2\right] \qquad (3.12a)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (2.1a) y (2.7) observamos que:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'-x_2')=\rho\cos\alpha_1 \qquad (3.13)$$

por lo que (3.12a) se transforma en:

$$\sum_{t<s=2}^{A}\left[V(|x_s'-x_t'|)-\frac{1}{2A}(x_s'-x_t')^2\right]=\frac{1}{2}A(A-1)\left[V(\sqrt{2}\rho|\cos\alpha_1|-A^{-1}\rho^2\cos^2\alpha_1\right] \qquad (3.12b)$$

Como se mencionó al inicio del capítulo, la parte colectiva de la interacción se obtendrá promediando ésta sobre los ángulos $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{A-2}$, por lo que definimos

$$W(A,\rho)=\frac{1}{2}A(A-1)\frac{\int_{\tau_\alpha}\left[V(\sqrt{2}\rho|\cos\alpha_1|)-A^{-1}\rho^2\cos^2\alpha_1\right]d\tau_\alpha}{\int_{\tau_\alpha}d\tau_\alpha} \qquad (3.14)$$

donde, como se ha mostrado en el apéndice A, $d\tau_\alpha$ viene dado por la siguiente expresión:

$$d\tau_\alpha=\operatorname{sen}^{A-3}\alpha_1\operatorname{sen}^{A-4}\alpha_2\ldots\operatorname{sen}\alpha_{A-3}\,d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_{A-3}\,d\alpha_{A-2}.$$

Por completez del desarrollo creemos conveniente realizar un cálculo particular para el caso en que la interacción a considerar entre las partículas, sea atractiva y de tipo Gaussiana, esta interacción resulta ser de corto alcance y puede tomarse como punto de partida en ciertos problemas de Física Nuclear, de aquí que definamos:

$$V(|x_t'-x_s'|)=-V_0\,e^{-(x_t'-x_s')^2/2b^2} \qquad (3.15)$$

donde V_0 es una constante mayor que cero y b un parámetro de ajuste.

Haciendo uso de (3.13) el potencial se transforma en:

$$V(|x_2'-x_1'|)=V(\sqrt{2}\rho|\cos\alpha_1|)=-V_0\,e^{-\rho^2\cos^2\alpha_1/b^2} \qquad (3.16)$$

el cual sustituido en (3.14), da como resultado:

$$W(A,\rho)=\frac{1}{2}A(A-1)\frac{\left[-V_0\int_{\alpha_1=0}^{\pi}e^{-\rho^2\cos^2\alpha_1/b^2}\operatorname{sen}^{A-3}\alpha_1\,d\alpha_1-A^{-1}\rho^2\int_{\alpha_1=0}^{\pi}\cos^2\alpha_1\operatorname{sen}^{A-3}\alpha_1\,d\alpha_1\right]}{\int_{\alpha_1=0}^{\pi}\operatorname{sen}^{A-3}\alpha_1\,d\alpha_1}$$

Finalmente ayudados de el valor de las integrales evaluadas en el apéndice B, obtenemos la interacción asociada a la variable colectiva ρ para una interacción Gaussiana, la cual viene dado por la siguiente expresión:

$$W(A,\rho) = V(A,\rho) - \frac{1}{2}\rho^2 \qquad (3.17a)$$

donde

$$V(A,\rho) = -\frac{1}{2}A(A-1)V_0\, e^{-\rho^2/b^2}\, \Phi\left(\frac{A}{2}-1, \frac{A-1}{2}; \frac{\rho^2}{b^2}\right) \qquad (3.17b)$$

ó equivalentemente

$$V(A,\rho) = -\frac{1}{2}A(A-1)V_0\, \Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{A-1}{2}; -\frac{\rho^2}{b^2}\right). \qquad (3.17c)$$

$\Phi\left(\frac{A}{2}-1, \frac{A-1}{2}; \frac{\rho^2}{b^2}\right)$ es la función hipergeométrica confluente, cuyo comportamiento asintótico viene dado de acuerdo a la fórmula (9.12.8) de la referencia (13) como:

$$\Phi\left(\frac{A}{2}-1, \frac{A-1}{2}; \frac{\rho^2}{b^2}\right) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{A-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{A}{2}-1\right)}\, e^{\rho^2/b^2}\, \frac{1}{(\rho/b)}$$

Usando este resultado en (3.17b), obtenemos el comportamiento asintótico de la interacción colectiva $V(A,\rho)$, el cual viene dado por:

$$V(A,\rho) = -\frac{1}{2}A(A-1)V_0\, \frac{\Gamma\left(\frac{A-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{A}{2}-1\right)} \cdot \frac{1}{(\rho/b)} \qquad (3.18)$$

De este resultado observamos un hecho muy interesante; ya que no obstante que la interacción que consideramos, entre las partículas, es de corto alcance, el comportamiento colectivo de la interacción resulta ser de largo alcance. Sospechamos que este resultado es más general de lo que podría parecer, ya que hemos efectuado otros dos cálculos, en el apéndice C, obteniéndose en ambos casos potenciales colectivos de largo alcance.

El último punto a desarrollar, dentro del esquema de Vanagas, será el de la obtención de los elementos de matriz del Hamiltoniano colectivo general con respecto a los eigenestados f_n^{μ} (3.11a) del Hamiltoniano colectivo de oscilador armónico (3.10).

El Hamiltoniano colectivo general viene dado, haciendo uso de (3.10), (3.17a) y (3.17b), por la siguiente ecuación diferencial en ρ:

$$H^c = \frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\mu^2 - 1/4}{\rho^2} + \rho^2 - A(A-1)V_0\, e^{-\rho^2/b^2}\, \Phi\left(\frac{A}{2}-1, \frac{A-1}{2}; \frac{\rho^2}{b^2}\right) - \rho^2\right] = H_0^c + W(A,\rho) \qquad (3.19)$$

por lo que los elementos de matriz a calcular son:

$$H_{nm}^c = \langle f_n^{\mu}(\rho)|H^c|f_m^{\mu}(\rho)\rangle = \langle f_n^{\mu}(\rho)|H_0^c|f_m^{\mu}(\rho)\rangle + \langle f_n^{\mu}(\rho)|-\tfrac{1}{2}\rho^2|f_m^{\mu}(\rho)\rangle + \langle f_n^{\mu}(\rho)|V(A,\rho)|f_m^{\mu}(\rho)\rangle \qquad (3.20)$$

donde $V(A,\rho)$ se ha definido en (3.17b) y (3.17c).

El problema se resolverá, calculando separadamente los siguientes elementos de matriz:

$$\langle f_n^\mu(\rho) | H_0^c | f_m^\mu(\rho) \rangle \tag{3.21a}$$

$$\langle f_n^\mu(\rho) | -\tfrac{1}{2}\rho^2 | f_m^\mu(\rho) \rangle \tag{3.21b}$$

$$\langle f_n^\mu(\rho) | V(a,\rho) | f_m^\mu(\rho) \rangle \tag{3.21c}$$

El cálculo de (3.21a) resulta inmediato, debido a que el conjunto de funciones ortonormales $\{f_n^\mu(\rho)\}_{n=0}^{\infty}$, constituyen los eigenestados del operador H_0^c, por lo que de acuerdo con (3.10), (3.11a) y (3.11b) se tiene que:

$$\langle f_n^\mu(\rho) | H_0^c | f_m^\mu(\rho) \rangle = (2n+\mu+1)\delta_{nm} \tag{3.22a}$$

Para el cálculo de (3.21b) usamos explícitamente la forma de la función $f_n^\mu(\rho)$ (3.11a), obteniéndose:

$$\langle f_n^\mu(\rho) | -\tfrac{1}{2}\rho^2 | f_m^\mu(\rho) \rangle = -\left[\frac{(n!)(m!)}{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\mu+m+1)}\right]^{1/2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{2\mu+3} L_n^\mu(\rho^2) L_m^\mu(\rho^2)\, d\rho$$

introduciendo el cambio de variable $x=\rho^2$, el elemento de matriz se transforma en:

$$\langle f_n^\mu(\rho) | -\tfrac{1}{2}\rho^2 | f_m^\mu(\rho) \rangle = -\frac{1}{2}\left[\frac{(n!)(m!)}{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\mu+m+1)}\right]^{1/2} \int_0^\infty e^{-x} x^{\mu+1} L_n^\mu(x) L_m^\mu(x)\, dx.$$

Para evaluar la integral, resulta conveniente usar una relación de recurrencia entre los polinomios de Laguerre, la cual encontramos en la fórmula 8.971 (5) de la referencia (14) y la cual viene dada por:

$$L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x)$$

introduciendo esta relación funcional en la integral con $\alpha=\mu+1$ y usando las fórmulas 7.414(3) y 8.331 de la misma referencia, obtenemos:

$$\langle f_n^\mu(\rho) | -\tfrac{1}{2}\rho^2 | f_m^\mu(\rho) \rangle = -\frac{1}{2}\left\{(2n+\mu+1)\delta_{nm} - \left[(n+1)(\mu+n+1)\right]^{1/2}\delta_{n,m-1} - \left[n(\mu+n)\right]^{1/2}\delta_{n-1,m}\right\} \tag{3.22b}$$

Para poder evaluar el elemento de matriz (3.21c), es conveniente hacer uso de la representación en serie de los polinomios de Laguerre, la cual viene dada por:

$$L_n^\mu(x) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n+\mu}{n-s} \frac{x^s}{s!} \tag{3.23}$$

donde

$$\binom{n+\mu}{n-s} = \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-s+1)\Gamma(\mu+s+1)} \tag{3.24}$$

de tal manera que:

$$\langle f_n^{\mu}(\rho)|V(A,\rho)|f_m^{\mu}(\rho)\rangle = 2\left[\frac{(n!)(m!)}{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\mu+m+1)}\right]^{1/2}\int_0^{\infty}\rho^{2\mu+1}e^{-\rho^2}V(A,\rho)L_n^{\mu}(\rho^2)L_m^{\mu}(\rho^2)\,d\rho$$

$$= 2\left[\frac{(n!)(m!)}{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\mu+m+1)}\right]^{1/2}\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}\frac{(-1)^{s+t}\binom{n+\mu}{n-s}\binom{m+\mu}{m-t}}{(s!)(t!)}\int_0^{\infty}\rho^{2(s+t+\mu-\frac{1}{2})}e^{-\rho^2}V(A,\rho)\rho^2\,d\rho$$

Introducir el cambio de índices:

$$k = s$$
$$p = t+s+\mu-\tfrac{1}{2}$$

resulta particularmente útil, ya que el elemento de matriz puede desarrollarse en una serie de integrales de Talmi I_p de orden p, i.e.

$$\langle f_n^{\mu}(\rho)|V(A,\rho)|f_m^{\mu}(\rho)\rangle = \sum_{p=\mu-\frac{1}{2}}^{m+n+\mu-\frac{1}{2}} B(n,\mu-\tfrac{1}{2}:m,\mu-\tfrac{1}{2};p)\,I_p \qquad (3.25)$$

donde

$$I_p = \frac{2}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}\int_0^{\infty}\rho^{2p}e^{-\rho^2}V(A,\rho)\rho^2\,d\rho \qquad (3.26)$$

y los coeficientes $B(n,\mu-\frac{1}{2};m,\mu-\frac{1}{2};p)$ de la expansión vienen dados por la siguiente expresión:

$$B(n,\mu-\tfrac{1}{2}:m,\mu-\tfrac{1}{2};p) = (-1)^{p-\mu+\frac{1}{2}}\Gamma(p+\tfrac{3}{2})\left[(n!)(m!)\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\mu+m+1)\right]^{1/2}$$

$$\times\sum_{k=d_1}^{d_2}\left[(k!)(n-k)!(m-p+k+\mu-\tfrac{1}{2})!(p-k-\mu+\tfrac{1}{2})!\,\Gamma(\mu+k+1)\Gamma(p-k+\tfrac{3}{2})\right]^{-1} \qquad (3.27)$$

donde los límites de la suma sobre k son:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = \max\left[0,\ p-m-\mu+\frac{1}{2}\right] \\ d_2 = \min\left[n,\ p-\mu+\frac{1}{2}\right] \end{array}\right\} \qquad (3.28)$$

Vale la pena hacer notar que p puede resultar un índice entero ó semi-entero dependiendo si el número de partículas A sea par o impar respectivamente, ya que como hemos visto, μ viene dado por la expresión $\mu = \frac{1}{2}(A-3)$. En el caso que A sea un número par los coeficientes $B(n,\mu-\frac{1}{2};m,\mu-\frac{1}{2};p)$ han sido calculados numéricamente y pueden encontrarse en la referencia (15).

Para el caso particular de nuestro potencial colectivo $V(A,\rho)$, las integrales de Talmi (3.26), toman la siguiente forma:

$$I_p = \frac{-A(A-1)V_0}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}\int_0^{\infty}\rho^{2(p+1)}e^{-\left(\frac{1+b^2}{b^2}\right)\rho^2}\,\Phi\left(\frac{A}{2}-1,\frac{A-1}{2};\frac{\rho^2}{b^2}\right)d\rho \qquad (3.29a)$$

las cuales se transforman, introduciendo el cambio de variable $t = \rho^2$, en:

$$I_p = -\frac{A(A-1)V_0}{2\Gamma(p+\frac{3}{2})} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1+b^2}{b^2}\right)t}\, t^{[(p+\frac{3}{2})-1]}\, \Phi\left(\frac{A}{2}-1, \frac{A-1}{2}; \frac{t}{b^2}\right) dt \qquad (3.29b)$$

y las cuales, de acuerdo a la fórmula 7.621(5) de la referencia (14), toman el siguiente valor:

$$I_p = -\frac{1}{2} A(A-1)V_0 \left(\frac{b^2}{1+b^2}\right)^{p+\frac{3}{2}} F\left(\frac{A}{2}-1, p+\frac{3}{2}; \frac{A-1}{2}; \frac{1}{1+b^2}\right) \qquad (3.30)$$

donde $F\left(\frac{A}{2}-1, p+\frac{3}{2}; \frac{A-1}{2}; \frac{1}{1+b^2}\right)$, es la función hipergeométrica. Usando (3.25) y (3.30), obtenemos:

$$\langle R_n^\mu(\rho) | V(A,\rho) | R_m^\mu(\rho) \rangle = -\frac{A(A-1)V_0}{2} \sum_{p=\mu-\frac{1}{2}}^{n+m+\mu-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{b^2}{1+b^2}\right)^{p+\frac{3}{2}} B(n,\mu-\tfrac{1}{2}; m,\mu-\tfrac{1}{2}; p) F\left(\frac{A}{2}-1, p+\frac{3}{2}; \frac{A-1}{2}; \frac{1}{1+b^2}\right)\right] \qquad (3.22c)$$

para que finalmente, a partir de (3.20), (3.22a), (3.22b) y (3.22c), obtengamos los elementos de matriz del hamiltoniano colectivo general con respecto a los eigenestados $R_n^\mu(\rho)$:

$$H^c_{nm} = \langle R_n^\mu(\rho) | H^c | R_m^\mu(\rho) \rangle = (2n+\mu+1)\delta_{nm} - \frac{1}{2}\left\{(2n+\mu+1)\delta_{nm} - [(n+1)(\mu+n+1)]^{1/2}\delta_{n,m-1} - [n(\mu+n)]^{1/2}\delta_{n-1,m}\right\}$$

$$- \frac{1}{2} A(A-1)V_0 \sum_{p=\mu-\frac{1}{2}}^{n+m+\mu-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{b^2}{1+b^2}\right)^{p+\frac{3}{2}} B(n,\mu-\tfrac{1}{2}; m,\mu-\tfrac{1}{2}; p) F\left(\frac{A}{2}-1, p+\frac{3}{2}; \frac{A-1}{2}; \frac{1}{1+b^2}\right)\right] \qquad (3.31)$$

IV. LA HIPOTESIS DE FILIPPOV

El propósito de este capítulo, será el análisis del problema colectivo dentro de el esquema de Filippov. Consideraremos al sistema formado por A partículas -- con spin cero y las cuales obedecen la estadística de Fermi Dirac. El problema para partículas con spin 1/2 dentro de este esquema, es muy similar al que trataremos, -- por lo que oportunamente indicaremos las modificaciones que habrán de realizarse.

Para proyectar la parte colectiva del Hamiltoniano del sistema de A partículas, restringiremos el Hamiltoniano de éstas a una representación definida del grupo ortogonal O(A-1), ésta quedará definida conforme a la hipótesis de Filippov, la - cual consiste en tomar la representación más baja del grupo O(A-1) consistente con - el Principio de exclusión de Pauli. Tomando este hecho en consideración, construiremos lo que llamaremos el estado compacto correspondiente al Hamiltoniano con interac

ciones de oscilador armónico, este estado el cual se encuentra asociado con la mínima energía del sistema, se construirá colocando una partícula en cada nivel energético por debajo del nivel correspondiente a A cuantas. Los estados colectivos, loscuales se obtendrán como solución a la ecuación de Schrodinger para el problema con interacciones de oscilador, resultarán ser el producto de excitaciones colectivas - sobre el estado compacto, una vez eliminada su dependencia de la coordenada del centro de masa.

Finalmente, y al igual que en el capítulo anterior, calcularemos los elementos de matriz del Hamiltoniano con interacción gaussiana, a partir de los estados colectivos obtenidos en el problema con interacciones de oscilador armónico.

Consideremos a las A partículas del sistema sujetas a un potencial comúnde oscilador armónico. El Hamiltoniano del sistema quedará entonces definido por la siguiente expresión:

$$H_0' = \sum_{s=1}^{A} \frac{1}{2}\left(p_s'^2 + x_s'^2\right) \tag{4.1}$$

por lo que el comportamiento estacionario del sistema, vendrá dado por la ecuaciónde Schrodinger independiente del tiempo asociada al Hamiltoniano (4.1), i.e.

$$H_0' \Psi_n(x_1', x_2', \ldots, x_A') = E_n \Psi_n(x_1', x_2', \ldots, x_A') \tag{4.2}$$

el problema es claramente separable, por lo que tomando en consideración que las -- partículas tienen spin cero y obedecen la estadística de Fermi Dirac, el estado compacto del sistema toma la siguiente forma:

$$\Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') = (A!)^{-1/2} \begin{vmatrix} \psi_0(x_1') & \psi_0(x_2') \cdots & \psi_0(x_A') \\ \psi_1(x_1') & \psi_1(x_2') \cdots & \psi_1(x_A') \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{A-1}(x_1') & \psi_{A-1}(x_2') \cdots & \psi_{A-1}(x_A') \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

donde

$$\psi_{n'}(x_s') = \left[2^{n'}(n'!)\pi^{1/2}\right]^{-1/2} e^{-x_s'^2/2} H_{n'}(x_s') \qquad (s=1,2,\ldots A) \tag{4.4}$$

y $H_{n'}(x_s')$ son los polinomios de Hermite de orden n'.

La energía asociada al estado compacto, la cual resulta ser la energía más baja del sistema consistente con el Principio de exclusión de Pauli viene dada por:

$$E_0 = \sum_{n=0}^{A-1} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} A(A-1) + \frac{A}{2} = \omega + \frac{A}{2} \tag{4.5a}$$

donde

$$\omega = \frac{1}{2} A(A-1) \tag{4.5b}$$

ES LA REPRESENTACIÓN DEFINIDA DEL GRUPO ORTOGONAL $O(A-1)$ QUE CONSIDERAREMOS DE ACUERDO A LA HIPÓTESIS DE FILIPPOV. FÍSICAMENTE ω SE ENCUENTRA ASOCIADA AL NÚMERO DE CUANTAS DEL ESTADO COMPACTO.

EN LA REFERENCIA (16) SE RESUELVE DETALLADAMENTE EL PROBLEMA DEL OSCILADOR ARMÓNICO UNIDIMENSIONAL DENTRO DE EL ESQUEMA DE LOS OPERADORES DE ANIQUILACIÓN Y CREACIÓN, OBTENIÉNDOSE RESULTADOS DE LOS CUALES HAREMOS USO CONSTANTEMENTE DURANTE EL DESARROLLO. LOS OPERADORES DE ANIQUILACIÓN Y CREACIÓN SE DEFINEN RESPECTIVAMENTE COMO:

$$\xi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_s + i p_s) \tag{4.6a}$$

$$\eta_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_s - i p_s) \tag{4.6b}$$

DE TAL MANERA QUE LAS EIGENFUNCIONES (4.4) DEL PROBLEMA UNIDIMENSIONAL, TOMAN DENTRO DE ESTE ESQUEMA, LA SIGUIENTE FORMA:

$$\psi_{n'}(x_s') = (n'!)^{-1/2} (\eta_s')^{n'} \psi_0(x_s') \tag{4.7}$$

donde $\psi_0(x_s')$ viene dado, DE ACUERDO A (4.4), POR LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$\psi_0(x_s') = \pi^{-1/4} e^{-x_s'^2/2} \tag{4.8}$$

APLICANDO EL HAMILTONIANO (4.1) A LA FUNCIÓN $\xi_A \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A')$

$$\begin{aligned} H_0' \xi_A \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') &= \xi_A H_0' \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') + [H_0', \xi_A] \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') \\ &= \xi_A E_0 \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') - \xi_A \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') = (E_0 - 1) \xi_A \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') \end{aligned}$$

OBSERVAMOS QUE ÉSTA, RESULTA SER UNA EIGENFUNCIÓN DEL HAMILTONIANO H_0', CON UNA ENERGÍA $(E_0 - 1)$ MENOR QUE LA ENERGÍA E_0 ASOCIADA AL ESTADO COMPACTO, PERO POR CONSTRUCCIÓN E_0 ES LA ENERGÍA MÍNIMA DEL SISTEMA, LO QUE NOS LLEVA A CONCLUIR QUE:

$$\xi_A \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') = 0 \tag{4.9}$$

EXPRESEMOS AL ESTADO COMPACTO DEL SISTEMA COMO UNA EXPANSIÓN DE FUNCIONES DEPENDIENTES DE LAS $(A-1)$ COORDENADAS DE JACOBI Y DE LA COORDENADA DEL CENTRO DE MASA, DE TAL FORMA QUE:

$$\Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{A-1}) \psi_n(x_A) \tag{4.10}$$

donde $\psi_n(x_A)$ quedan definidas de acuerdo a la ecuación (4.4) y $\Phi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{A-1})$ son funciones arbitrarias de las coordenadas de Jacobi, entonces mediante el uso de (4.9), resultado que se acaba de obtener observamos que:

$$\xi_A \Psi_0(x_1',x_2',\ldots,x_A') = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{A-1})\sqrt{n}\,\psi_{n-1}(x_A) = 0 \tag{4.11}$$

y dado que $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ resulta ser un conjunto de funciones linealmente independientes, concluimos que

$$\Phi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{A-1}) = 0 \quad \text{para} \quad n=1,2,\ldots$$

por lo que el estado compacto quedará expresado como:

$$\Psi_0(x_1',x_2',\ldots,x_A') = \Phi_0(x_1,x_2,\ldots,x_{A-1})\,\psi_0(x_A) \tag{4.12}$$

De esta última expresión observamos que la coordenada del centro de masa contribuye únicamente con un estado de cero cuantas y dado que $\psi_0(x_A)$ queda definida según (4.8) por:

$$\psi_0(x_A) = \pi^{-1/4} e^{-x_A^2/2}$$

entonces $\Delta(A)$, la cual definimos como $\Phi_0(x_1,x_2,\ldots,x_{A-1})$ vendrá dada por:

$$\Delta(A) = \pi^{1/4} e^{x_A^2/2}\, \Psi_0(x_1',x_2',\ldots,x_A'). \tag{4.13}$$

Al igual que en el capítulo III resulta apropiado introducir en el desarrollo al operador de Casimir de segundo grado, el cual queda definido de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\Lambda^2 = \frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{A-1} \Lambda_{st}^2 \tag{4.14a}$$

donde

$$\Lambda_{st} = x_s p_t - x_t p_s \tag{4.14b}$$

El operador de Casimir se puede expresar de una manera más conveniente para nuestro análisis, en términos de los operadores de aniquilación y creación tomando la siguiente forma:

$$\Lambda^2 = -\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{A-1} (\eta_s \xi_t - \eta_t \xi_s)^2 \tag{4.15}$$

ya que resulta fácil probar que:

$$\Lambda_{st} = -i\,(\eta_s \xi_t - \eta_t \xi_s) \tag{4.16}$$

HACIENDO UN DESARROLLO ALGEBRÁICO DE LA EXPRESIÓN (4.15) Y UTILIZANDO LA RELACIÓN $[\xi_t, \eta_s] = \delta_{ts}$, OBTENEMOS LA SIGUIENTE EXPRESIÓN PARA EL OPERADOR DE CASIMIR:

$$\Lambda^2 = -\eta^2\xi^2 + \hat{N}(\hat{N} + A - 3) \tag{4.17}$$

donde SE HAN DEFINIDO LOS SIGUIENTES OPERADORES:

$$\eta^2 = \sum_{s=1}^{A-1} \eta_s^2 \tag{4.18a}$$

$$\xi^2 = \sum_{s=1}^{A-1} \xi_s^2 \tag{4.18b}$$

$$\hat{N} = \sum_{s=1}^{A-1} \eta_s \xi_s \tag{4.18c}$$

SERÁ DE MUCHA IMPORTANCIA PARA EL DESARROLLO CONOCER DE QUÉ MANERA SE COMPORTA EL ESTADO $\Delta(A)$ ANTE LOS OPERADORES QUE ACABAMOS DE DEFINIR, PARA ESTO OBSERVAMOS QUE EL HAMILTONIANO DEL SISTEMA H_0' (4.1) QUEDA EXPRESADO CON LA AYUDA DE LA ECUACIÓN (2.4) DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$H_0' = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{A}(p_s^2 + x_s^2) = \sum_{s=1}^{A} \eta_s\xi_s + \frac{A}{2} \tag{4.19}$$

por lo QUE:

$$\sum_{s=1}^{A} \eta_s \xi_s \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') = \left(H_0' - \frac{A}{2}\right)\Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') = \omega \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') = \omega\Delta(A)\Psi_0(x_0) \tag{4.20a}$$

DE MANERA SIMILAR

$$\sum_{s=1}^{A} \eta_s \xi_s \Psi_0(x_1', x_2', \ldots, x_A') = \hat{N}\Delta(A)\Psi_0(x_0) \tag{4.20b}$$

lo QUE NOS LLEVA A CONCLUIR, A PARTIR DE ESTAS DOS RELACIONES QUE:

$$\hat{N}\Delta(A) = \omega\Delta(A) \tag{4.21}$$

APLICANDO EL OPERADOR $\hat{N}$ (4.18c) A LA FUNCIÓN $\xi^2\Delta(A)$, HACIENDO USO DE (4.21) Y DE EL HECHO QUE $[\hat{N}, \xi^2] = -2\xi^2$

$$\hat{N}\xi^2\Delta(A) = \xi^2\hat{N}\Delta(A) + [\hat{N}, \xi^2]\Delta(A) = (\omega - 2)\xi^2\Delta(A)$$

OBSERVAMOS QUE $\xi^2\Delta(A)$ RESULTA SER UN ESTADO CON UN NÚMERO DE CUANTAS $(\omega-2)$, CLARAMENTE MENOR QUE ω. LO QUE NOS LLEVA A CONCLUIR, QUE:

$$\xi^2 \Delta(A) = 0 \tag{4.22}$$

Finalmente haciendo uso de las relaciones (4.17), (4.21) y (4.22) observamos que $\Delta(A)$, resulta ser eigenfunción del operador de Casimir de segundo orden con eigenvalor $\omega(\omega+A-3)$ i.e.

$$\Lambda^2 \Delta(A) = \omega(\omega+A-3)\Delta(A) \tag{4.23}$$

El estado $\Delta(A)$, el cual ha sido obtenido a partir del estado compacto, eliminando de éste la dependencia de la coordenada del centro de masa, toma de acuerdo a las ecuaciones (4.3) y (4.13) la siguiente forma:

$$\Delta(A) = (A!)^{-1/2}\pi^{1/4} e^{\eta_0^2/2} \begin{vmatrix} \psi_0(\eta_1') & \psi_0(\eta_2') & \cdots & \psi_0(\eta_A') \\ \psi_1(\eta_1') & \psi_1(\eta_2') & \cdots & \psi_1(\eta_A') \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{A-1}(\eta_1') & \psi_{A-1}(\eta_2') & \cdots & \psi_{A-1}(\eta_A') \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

la cual se transforma, dentro de el esquema de los operadores de aniquilación y creación en:

$$\Delta(A) = [2!\,3!\cdots(A-1)!\,A!]^{-1/2}\pi^{1/4} e^{\eta_0^2/2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \cdots & \eta_A' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\eta_1')^{A-1} & (\eta_2')^{A-1} & \cdots & (\eta_A')^{A-1} \end{vmatrix} \psi_0(\eta_1')\psi_0(\eta_2')\cdots\psi_0(\eta_A') =$$

$$= [2!\,3!\cdots(A-1)!\,A!]^{-1/2}\pi^{1/4} e^{\eta_0^2/2}\, P(\eta_j')\chi_0 \tag{4.25}$$

donde se ha definido el polinomio $P(\eta_j')$, como:

$$P(\eta_j') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \cdots & \eta_A' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\eta_1')^{A-1} & (\eta_2')^{A-1} & \cdots & (\eta_A')^{A-1} \end{vmatrix} \tag{4.26a}$$

y $$\chi_0 = \psi_0(\eta_1')\psi_0(\eta_2')\cdots\psi_0(\eta_A') \tag{4.26b}$$

El estado $\Delta(A)$ adquiere una forma particularmente útil para nuestro análisis haciendo uso de un teorema debido a Dragt (17), el cual establece, que si el estado $P(\eta_j')\chi_0$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{s=1}^{A} \xi_s'^2 P(\eta_j')\chi_0 = 0 \tag{4.27a}$$

y
$$\sum_{s=1}^{A} \eta_s' \xi_s' P(\eta_j')\chi_0 = \omega P(\eta_j')\chi_0 \qquad (1.27b)$$

ENTONCES ÉSTE PUEDE ESCRIBIRSE DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$P(\eta_j')\chi_0 = \pi^{-A/4}\, 2^{\omega/2}\, P(\chi_j')\exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{A}\chi_s'^2\right) \qquad (1.28)$$

Aplicando los operadores $\sum_{s=1}^{A}\xi_s'^2$ y $\sum_{s=1}^{A}\eta_s'\xi_s'$ al estado $P(\eta_j')\chi_0$ definido por (1.25) y haciendo uso de (1.21) y (1.22)

$$\sum_{s=1}^{A}\xi_s'^2 P(\eta_j')\chi_0 = \sum_{s=1}^{A}\xi_s^2 P(\eta_j')\chi_0 = [2!\,3!\cdots A!]^{1/2}\left\{\psi_0(\chi_A)\xi^2\Delta(A) + \Delta(A)\xi_A^2\psi_0(\chi_A)\right\} = 0$$

$$\sum_{s=1}^{A}\eta_s'\xi_s' P(\eta_j')\chi_0 = \sum_{s=1}^{A}\eta_s\xi_s P(\eta_j')\chi_0 = [2!\,3!\cdots A!]^{1/2}\left\{\psi_0(\chi_A)\hat{N}\Delta(A) + \Delta(A)\eta_A\xi_A\psi_0(\chi_A)\right\} = \omega P(\eta_j')\chi_0$$

OBSERVAMOS QUE EL ESTADO $P(\eta_j')\chi_0$ SATISFACE LAS CONDICIONES IMPUESTAS POR EL TEOREMA DE DRAGT, POR LO QUE $\Delta(A)$ QUEDA EXPRESADO, DE ACUERDO CON (1.25), COMO:

$$\Delta(A) = [2!\,3!\cdots A!]^{-1/2}\,\pi^{-(A-1)/4}\,2^{\omega/2}\,e^{-\rho^2/2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \chi_1' & \chi_2' & \cdots & \chi_A' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\chi_1')^{A-1} & (\chi_2')^{A-1} & \cdots & (\chi_A')^{A-1}\end{vmatrix} \qquad (1.29)$$

donde de acuerdo con (2.8), $\rho^2 = \sum_{s=1}^{A-1}\chi_s^2$.

LA VENTAJA QUE SE OBTIENE DE HABER LOGRADO EXPRESAR A $\Delta(A)$ DE ESTA ÚLTIMA FORMA, RADICA EN EL HECHO QUE SE PUEDE CONOCER DE MANERA INMEDIATA LA DEPENDENCIA DE $\Delta(A)$ CON RESPECTO A LA VARIABLE COLECTIVA ρ; YA QUE DEBIDO A QUE LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE JACOBI ES LINEAL Y ÉSTAS, A SU VEZ DEPENDEN LINEALMENTE DE ρ, OBSERVAMOS HACIENDO USO DE (1.29), QUE $\Delta(A)$ ADOPTA LA SIGUIENTE FORMA:

$$\Delta(A) = \left[\frac{2}{\Gamma(\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2}\rho^{\omega}\,e^{-\rho^2/2}\,\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_{A-2}) \qquad (1.30)$$

DONDE $\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_{A-2})$ ES UNA FUNCIÓN DEFINIDA DE LOS ÁNGULOS Y LA RAZÓN DE HABER INTRODUCIDO EL COEFICIENTE $\left[\frac{2}{\Gamma(\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2}$ SE VERÁ MÁS ADELANTE.

LOS ESTADOS COLECTIVOS, DENTRO DE EL ESQUEMA DE FILIPPOV, SERÁN OBTENIDOS COMO SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER ASOCIADA AL HAMILTONIANO H_0 (2.6), LA CUAL EN COORDENADAS HIPERESFÉRICAS TOMA DE ACUERDO A LA ECUACIÓN (3.6) LA siguiente forma:

$$H_0\Psi_\nu^{M}(\rho,\alpha_1,\dots\alpha_{A-2}) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\rho^{A-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{A-2}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\Lambda^2}{\rho^2}+\rho^2\right]\Psi_\nu^{M}(\rho,\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2}) = E_\nu^{M}\Psi_\nu^{M}(\rho,\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2}) \qquad (4.31)$$

donde M viene definido, de acuerdo a (3.9a), como:

$$M = \omega + \frac{1}{2}(A-3) \qquad (3.9a)$$

Aprovechando el hecho, que $\Delta(A)$ resulta ser eigenfunción del Operador de Casimir, proponemos como solución de (4.31) a:

$$\Psi_\nu^{M}(\rho,\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2}) = \rho^{1-\frac{A}{2}}\mathcal{L}_\nu^{M}(\rho)\Delta(A) = \rho^{1-\frac{A}{2}}\mathcal{L}_\nu^{M}(\rho)\left[\frac{2}{\Gamma(\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2}\rho^{\omega}e^{-\rho^2/2}\,\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2})$$
$$= \rho^{1-\frac{A}{2}}F_\nu^{M}(\rho)\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2}) \qquad (4.32)$$

donde hemos definido

$$F_\nu^{M}(\rho) = \left[\frac{2}{\Gamma(\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2}\rho^{\omega}e^{-\rho^2/2}\mathcal{L}_\nu^{M}(\rho) \qquad (4.33)$$

sustituyendo (4.32) en (4.31), obtenemos una ecuación diferencial en ρ para $F_\nu^{M}(\rho)$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{M^2-1/4}{\rho^2}+\rho^2\right]F_\nu^{M}(\rho) = E_\nu^{M}F_\nu^{M}(\rho) \qquad (4.34)$$

la cual ha sido resuelta en (12), obteniéndose los siguientes resultados:

$$F_\nu^{M}(\rho) = \left[\frac{2(\nu!)}{\Gamma(M+\nu+1)}\right]^{1/2}e^{-\rho^2/2}\rho^{M+\frac{1}{2}}L_\nu^{M}(\rho^2) \qquad (4.35a)$$

$$E_\nu^{M} = 2\nu+M+1 \qquad (4.35b)$$

Vale la pena detenerse por un momento en esta etapa del desarrollo y comparar las ecuaciones (4.34), (4.35a) y (4.35b) que se acaban de obtener, con las ecuaciones (3.10), (3.11a) y (3.11b), las cuales se obtuvieron en el capítulo II dentro de el esquema de Vanagas, para hacer notar que la única diferencia significativa entre éstas, radica en el valor que ha adoptado la ω, lo cual constituye un fiel reflejo del hecho de haber tomado dos representaciones distintas del grupo $O(A-1)$.

Los estados colectivos, a los cuales denotaremos por $|\nu\rangle$, vienen dados de acuerdo a las ecuaciones (3.9a), (4.32) y (4.35a) como:

$$|\nu\rangle = \left[\frac{2(\nu!)}{\Gamma(\nu+\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2}e^{-\rho^2/2}\rho^{\omega}L_\nu^{\omega+\frac{A-3}{2}}(\rho^2)\,\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2}) \qquad (4.36)$$

ó expresados en función del estado base $\Delta(A) = |0\rangle$, toman la siguiente forma:

$$|\nu\rangle = \left[\frac{(\nu!)\Gamma(\omega+\frac{A-1}{2})}{\Gamma(\nu+\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2} L_\nu^{\omega+\frac{A-3}{2}}(\rho^2)\,\Delta(A) \tag{4.37a}$$

y donde

$$E_\nu = 2\nu+\omega+\frac{A-1}{2} \tag{4.37b}$$

es la energía asociada al estado colectivo $|\nu\rangle$.

Los estados colectivos $|\nu\rangle$ se han obtenido esencialmente como solución de una ecuación diferencial en ρ. Sin embargo, estamos interesados en saber si de manera análoga al caso del oscilador armónico unidimensional, el cual ha sido resuelto dentro de el esquema de los operadores de aniquilación y creación (16), los estados colectivos $|\nu\rangle$ pueden obtenerse como el producto de excitaciones colectivas sobre el estado base $\Delta(A)$, para ésto aplicamos el Hamiltoniano H_0 (2.6) al estado $\eta^2|\nu\rangle$, donde η^2 ha sido definido en (4.18a), y haciendo uso de la relación $[H_0, \eta^2] = 2\eta^2$

$$H_0\eta^2|\nu\rangle = \eta^2 H_0|\nu\rangle + [H_0,\eta^2]|\nu\rangle = \left[2(\nu+1)+\omega+\frac{A-1}{2}\right]\eta^2|\nu\rangle \tag{4.38}$$

observamos que $\eta^2|\nu\rangle$ resulta ser eigenfunción del Hamiltoniano H_0 con el mismo eigenvalor $E_{\nu+1} = \left[2(\nu+1)+\omega+\frac{A-1}{2}\right]$ que el estado $|\nu+1\rangle$. Y de el hecho, que el espectro de energías es no degenerado, nos vemos obligados a concluir:

$$|\nu+1\rangle = C_{\nu+1}\,\eta^2|\nu\rangle \tag{4.39}$$

Haciendo un análisis un poco más exhaustivo, encontramos que el operador η^2 puede escribirse en función de la variable colectiva ρ y el Hamiltoniano H_0, de la siguiente forma:

$$\eta^2 = \rho^2 - \rho\frac{\partial}{\partial\rho} - H_0 - \frac{(A-1)}{2} \tag{4.40}$$

por lo que introduciendo el cambio de variable $x=\rho^2$, obtenemos:

$$\eta^2|\nu\rangle = \left[x - 2x\frac{d}{dx} - 2(\nu+\omega+A-1)\right]\left\{\left[\frac{2(\nu!)}{\Gamma(\nu+\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2} e^{-x/2}\, x^{\omega/2} L_\nu^{\omega+\frac{A-3}{2}}(x)\,\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2})\right\} \tag{4.41}$$

Resulta fácil probar, después de realizar ciertos cálculos, que esta última expresión, toma la siguiente forma:

$$\eta^2|\nu\rangle = -2\left[\frac{2(\nu!)}{\Gamma(\nu+\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2} e^{-x/2}\, x^{\omega/2}\,\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2})\left\{x\frac{dL_\nu^{\omega+\frac{A-3}{2}}(x)}{dx} + \left[\nu+\left(\omega+\frac{A-3}{2}+1\right)-x\right]L_\nu^{\omega+\frac{A-3}{2}}(x)\right\} \tag{4.42a}$$

lo cual, con ayuda de la ecuación 8.971 (3) de la referencia (16), se transforma en:

$$\eta^2|\nu\rangle = -2\left[\frac{2(\nu!)}{\Gamma(\nu+\omega+\frac{A-1}{2})}\right]^{1/2} e^{-x/2}\, x^{\omega/2}\,\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{A-2})(\nu+1)L_{\nu+1}^{\omega+\frac{A-3}{2}}(x) \tag{4.42b}$$

Esta última expresión, se puede reescribir utilizando la ecuación (4.36), obteniéndose la siguiente ecuación:

$$|\nu+1\rangle = -\frac{1}{2}\left[(\nu+1)\left(\nu+\omega+\frac{A-1}{2}\right)\right]^{-1/2}\eta^2|\nu\rangle \tag{4.43}$$

la cual resulta fundamental, ya que nos permite identificar al operador η^2 como el responsable de las excitaciones colectivas del sistema.

Una vez obtenidos los estados colectivos asociados al Hamiltoniano H_0 (2.6), nos encontramos en posibilidad de evaluar los elementos de matriz correspondientes al Hamiltoniano H definido a través de la ecuación (2.5); el cual queda expresado tomando en cuenta la simetría de la interacción ante permutaciones como:

$$H = H_0 + \frac{1}{2}A(A-1)\left[V(|x_2'-x_1'|) - \frac{1}{2A}(x_2'-x_1')^2\right] \tag{4.44}$$

y el cual se transforma, para el caso particular de una interacción gaussiana (3.15), en:

$$H = H_0 + W(A, |x_2'-x_1'|) \tag{4.45}$$

donde

$$W(A,|x_2'-x_1'|) = \frac{1}{2}A(A-1)\left[-V_0\, e^{-(x_2'-x_1')^2/2b^2} - \frac{1}{2A}(x_2'-x_1')^2\right] \tag{4.46}$$

Por lo que los elementos de matriz vendrán dados de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\langle\nu'|H|\nu\rangle = \langle\nu'|H_0|\nu\rangle + \langle\nu'|W(A,|x_2'-x_1'|)|\nu\rangle = \left(2\nu+\omega+\frac{A-1}{2}\right)\delta_{\nu\nu'} + \langle\nu'|W(A,|x_2'-x_1'|)|\nu\rangle \tag{4.47}$$

donde hemos hecho uso de la ortonormalidad de los estados colectivos.

Debido a lo extenso del cálculo, hemos optado por realizar la evaluación de los elementos de matriz en el apéndice D, sin embargo consideramos oportuno señalar los puntos más sobresalientes del desarrollo.

Para evaluar los elementos de matriz asociados a la interacción $W(A,|x_2'-x_1'|)$, haremos uso de un número finito de coeficientes analíticos $B(nl,n'l',p)$, los cuales hemos utilizado en el capítulo III y han sido tratados detalladamente en la referencia (15), estos coeficientes quedan definidos a través de la siguiente ecuación:

$$\int_0^\infty R_{n'l'}(\rho)V(\rho)R_{nl}(\rho)\rho^2\,d\rho = \sum_{p=d_1}^{d_2} B(nl,n'l',p)\,I_p \tag{4.48}$$

donde las funciones $R_{nl}(\rho)$ (12), constituyen la parte radial de los eigenestados del oscilador armónico, las integrales de Talmi I_p se han definido en (3.26) y los límites d_1 y d_2 de la suma vienen dados por (3.28).

Las funciones $R_{nl}(\rho)$ quedan expresadas en términos de los polinomios de Laguerre, lo que nos permite expresar a éstos últimos con ayuda de la ecuación (4.48), en términos de los coeficientes $B(nl,n'l',p)$ de la siguiente forma:

$$\left[\frac{(n!)(n'!)}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})\Gamma(n'+l'+\frac{3}{2})}\right]^{1/2} L_n^{l+\frac{1}{2}}(\rho^2)\, L_{n'}^{l'+\frac{1}{2}}(\rho^2) = \sum_{p=\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{B(nl,n'l';p)}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}\rho^{2[p-\frac{1}{2}(l+l')]} \tag{4.49}$$

De tal manera, que introduciendo los cambios de índices

$$l=l'=\omega+\frac{A-4}{2} \tag{4.50a}$$

$$n=\nu \tag{4.50b}$$

$$n'=\nu' \tag{4.50c}$$

los elementos de matriz asociados a la interacción quedarán expresados como:

$$\langle\nu'|W(A,|\chi_2'-\chi_1'|)|\nu\rangle=\sum_{p=\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\Gamma(\omega+\frac{A-1}{2})}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}B(\nu,\omega+\tfrac{A-4}{2};\nu',\omega+\tfrac{A-4}{2};p)\int_\tau[\Delta(A)]^2W(A,|\chi_2'-\chi_1'|)\rho^{2(p-\omega-\frac{A-4}{2})}d\tau \tag{4.51}$$

donde

$$d\tau=d\chi_1\,d\chi_2\ldots d\chi_{A-1} \tag{4.52}$$

Resultará conveniente introducir las siguientes definiciones:

$$I(\alpha)=\int_\tau[\Delta'(A)]^2W(A,|\chi_2'-\chi_1'|)e^{-\alpha\rho^2}d\tau \tag{4.53}$$

donde

$$\Delta'(A)=\Delta(A)e^{\frac{1}{2}\rho^2} \tag{4.54}$$

y α es un parámetro arbitrario; en términos de los cuales el elemento de matriz se convierte en:

$$\langle\nu'|W(A,|\chi_2'-\chi_1'|)|\nu\rangle=\sum_{p=\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\Gamma(\omega+\frac{A-1}{2})}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}B(\nu,\omega+\tfrac{A-4}{2};\nu',\omega+\tfrac{A-4}{2};p)(-1)^{p-\omega-\frac{A-4}{2}}\left[\frac{d^{(p-\omega-\frac{A-4}{2})}}{d\alpha^{(p-\omega-\frac{A-4}{2})}}I(\alpha)\right]_{\alpha=1} \tag{4.55}$$

La dificultad central que se nos presenta en la evaluación de $I(\alpha)$, radica en el hecho que tenemos expresada a ésta en términos de una combinación de las coordenadas de las partículas, las coordenadas de Jacobi y las coordenadas hiperesféricas; sin embargo el problema lo hemos podido solucionar, introduciendo una serie de cambios de variables y definiciones, que detallamos en el apéndice D, y los cuales nos permiten expresar a $I(\alpha)$, exclusivamente en función de las coordenadas de las partículas, de tal forma que:

$$I(\alpha)=\left[\alpha^{\omega+\frac{A-1}{2}}\right]^{-1}\int_{\tau'}\left[\Psi_0(x_1',x_2',\dots,x_A')\right]^2 W\left(A,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|\right)dx_1'\,dx_2'\cdots dx_A' \qquad (4.56)$$

donde $\Psi_0(x_1',x_2',\dots,x_A')$ es el estado compacto del sistema, definido en (4.3) y el cual podemos expresar en términos del símbolo de Levi-Civita de la siguiente forma:

$$\Psi_0(x_1',x_2',\dots,x_A')=(A!)^{-1/2}\,\varepsilon_{n_1'n_2'\dots n_A'}\,\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\cdots\psi_{n_A'}(x_A') \qquad (4.57)$$

$$(n_i'=0,1,\dots,A-1)$$

donde hemos adoptado la convención usual de sumar sobre índices repetidos. De esta manera (4.56) puede escribirse como:

$$I(\alpha)=\left[(A!)\alpha^{\omega+\frac{A-1}{2}}\right]^{-1}\varepsilon_{n_1'n_2'\dots n_A'}\,\varepsilon_{m_1'm_2'\dots m_A'}\int_{\tau'}\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\cdots\psi_{n_A'}(x_A')\,W\left(A,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|\right)\psi_{m_1'}(x_1')\psi_{m_2'}(x_2')\cdots\psi_{m_A'}(x_A')\,d\tau' \qquad (4.58)$$

expresión que se transforma, usando la ortonormalidad de las funciones (4.4), en:

$$I(\alpha)=\left[A(A-1)\alpha^{\omega+\frac{A-1}{2}}\right]^{-1}\sum_{n_1',n_2'=0}^{A-1}\left[J_{n_1'n_2'}-K_{n_1'n_2'}\right] \qquad (4.59)$$

donde $J_{n_1'n_2'}$ y $K_{n_1'n_2'}$ se conocen como la integral directa y la integral de intercambio respectivamente y vienen dadas por:

$$J_{n_1'n_2'}=\iint_{-\infty}^{\infty}\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\,W\left(A,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|\right)\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\,dx_1'\,dx_2' \qquad (4.60a)$$

$$K_{n_1'n_2'}=\iint_{-\infty}^{\infty}\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\,W\left(A,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|\right)\psi_{n_2'}(x_1')\psi_{n_1'}(x_2')\,dx_1'\,dx_2' \qquad (4.60b)$$

El problema se simplifica considerablemente, observando que es posible realizar una expansión de los eigenestados $\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')$ asociados al Hamiltoniano H_0' (4.1), para $A=2$, en términos de los eigenestados $\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)$ del Hamiltoniano expresado en coordenadas relativas y del centro de masa mediante la introducción de unos paréntesis de transformación, los cuales se definen de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\langle n_1n_2|n_1'n_2'\rangle=\sum_{s=\max(0,n_1-n_2')}^{\min(n_1,n_1')}(-1)^{n_1-s}\binom{n_1'}{s}\binom{n_2'}{n_1-s}\left[\frac{(n_1)!\,(n_2)!}{2^{n_1'+n_2'}(n_1')!\,(n_2')!}\right]^{1/2}\delta_{n_1+n_2,\,n_1'+n_2'} \qquad (4.61)$$

Y SATISFACEN LA SIGUIENTE RELACIÓN DE SIMETRÍA:

$$\langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle = (-1)^{n_1} \langle n_1 n_2 | n_2' n_1' \rangle \tag{4.62}$$

DE TAL FORMA QUE:

$$\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2') = \sum_{n_1,n_2=0}^{n_1'+n_2'} \langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) \tag{4.63}$$

INTRODUCIR LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS (2.10,b) (PARA EL CASO A=2), LO CUAL CONSISTE ESENCIALMENTE EN PASAR A LAS COORDENADAS RELATIVA Y DEL CENTRO DE MASA.

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' - x_2') \tag{4.64a}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \tag{4.64b}$$

TAMBIÉN RESULTA PARTICULARMENTE ÚTIL, DEBIDO A QUE LA INTERACCIÓN QUEDA EXPRESADA EXCLUSIVAMENTE EN FUNCIÓN DE LA COORDENADA RELATIVA x_1. TOMANDO ESTOS HECHOS EN CONSIDERACIÓN Y DESPUÉS DE CIERTA MANIPULACIÓN, RESULTARÁ CLARO QUE $I(\alpha)$ PUEDE ESCRIBIRSE COMO:

$$I(\alpha) = \left[A(A-1)\alpha^{\omega+\frac{A-1}{2}}\right]^{-1} \sum_{n_1',n_2'=0}^{A-1} \sum_{n_1,n_2,m_1=0}^{n_1'+n_2'} \left[1+(-1)^{m_1+n_1}\right] \langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \langle m_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n_1}(x_1) W\left(A, \sqrt{\tfrac{2}{\alpha}}|x_1|\right) \psi_{m_1}(x_1)\, dx_1 \tag{4.65}$$

REDUCIÉNDOSE DE ESTA MANERA EL PROBLEMA, A EVALUAR LA INTEGRAL CONTENIDA EN ESTA ÚLTIMA EXPRESIÓN. EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL, SE HA REALIZADO EN EL APÉNDICE D, QUEDANDO $I(\alpha)$ EXPRESADA DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{n_1',n_2'=0}^{A-1} \sum_{n_1,n_2,m_1=0}^{n_1'+n_2'} \left[1+(-1)^{m_1+n_1}\right] \left[2^{n_1+m_1}(n_1)!(m_1)!\right]^{-1/2} \langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \langle m_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \left\{ \sum_{k=0}^{\min(m_1,n_1)} \left[L_k(m_1,n_1,\alpha)\right] + N(m_1,n_1)\alpha^{-\left(\omega+\frac{A-1}{2}\right)} \right\} \tag{4.66}$$

donde los coeficientes $L_k(m_1,n_1,\alpha)$ y $N(m_1,n_1)$, quedan definidos de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$L_k(m_1,n_1,\alpha) = \begin{cases} (-1)^{k+1}(-2)^{\frac{m_1+n_1}{2}}(V_0 b)(k!)\binom{m_1}{k}\binom{n_1}{k}(m_1+n_1-2k-1)!!\,\alpha^{-\left(\omega+\frac{A-2}{2}\right)}(1+\alpha b^2)^{-\left(\frac{m_1+n_1+1}{2}-k\right)} & \text{si } (m_1+n_1) \text{ es par} \\ 0 & \text{si } (m_1+n_1) \text{ es impar} \end{cases} \tag{4.67a}$$

donde $(m_1+n_1-2k-1)!! = 1\cdot 3 \cdots (m_1+n_1-2k-1)!!$

$$N(m_1,n_1) = -\frac{2^{n_1-2}}{A}\left[2(2n_1+1)(n_1)!\,\delta_{n_1,m_1} + 4(n_1+2)!\,\delta_{n_1+2,m_1} + (n_1)!\,\delta_{n_1-2,m_1}\right] \tag{4.67b}$$

EN ESTE MOMENTO NOS ENCONTRAMOS EN POSIBILIDAD DE ENCONTRAR EL VALOR DE EL ELEMENTO DE MATRIZ (4.55) ASOCIADO A LA INTERACCIÓN, YA QUE:

$$\left[\frac{d^{(p-\omega-\frac{A-4}{2})}}{d\alpha^{(p-\omega-\frac{A-4}{2})}} I(\alpha)\right]_{\alpha=1} = \frac{1}{2}\sum_{n_1',n_2'=0}^{A-1}\ \sum_{n_1,n_2,m_1=0}^{n_1'+n_2'} (-1)^{p-\omega-\frac{A-4}{2}}\left[1+(-1)^{m_1+1}\right]\left[2^{n_1+m_1}(n_1)!\,(m_1)!\right]^{-1/2}\langle n_1 n_2|n_1' n_2'\rangle\langle m_1 n_2|n_1' n_2'\rangle$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{\min(m_1,n_1)}\left[L_k(m_1,n_1,p)\,M_k(m_1,n_1,p)\right] + N(m_1,n_1)\left(\omega+\frac{A+1}{2}\right)_{p-\omega-\frac{A-4}{2}}\right\}_{\alpha=1} \qquad (4.68)$$

donde

$$M_k(m_1 n_1 p) = \sum_{i=0}^{p-\omega-\frac{A-4}{2}} \binom{p-\omega-\frac{A-4}{2}}{i}\left(\omega+\frac{A-2}{2}\right)_{p-\omega-\frac{A-4}{2}-i}\left(\frac{m_1+n_1+1}{2}-k\right)_i\left(\frac{b^2}{1+b^2}\right)^i \qquad (4.69)$$

y $(\gamma)_i$ se conoce como el símbolo de Pochhammer (18).

Finalmente con ayuda de las ecuaciones (4.47), (4.55) y (4.68) encontramos el valor de los elementos de matriz del Hamiltoniano (4.45), con respecto a los estados colectivos $|\nu\rangle$, los cuales vienen dados de acuerdo a la siguiente expresión.

$$\langle \nu'|H|\nu\rangle = \left(2\nu+\omega+\frac{A-1}{2}\right)\delta_{\nu\nu'} + \frac{1}{2}\sum_{p=d_1}^{d_2}\frac{\Gamma(\omega+\frac{A-1}{2})}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}B\left(\nu,\omega+\frac{A-4}{2};\nu',\omega+\frac{A-4}{2};p\right)$$

$$\times\sum_{n_1',n_2'=0}^{A-1}\ \sum_{n_1,n_2,m_1=0}^{n_1'+n_2'}\left[1+(-1)^{m_1+1}\right]\left[2^{n_1+m_1}(n_1)!\,(m_1)!\right]^{-1/2}\langle n_1 n_2|n_1' n_2'\rangle\langle m_1 n_2|n_1' n_2'\rangle\left\{\sum_{k=0}^{\min(m_1,n_1)}\left[L_k(m_1,n_1)M_k(m_1,n_1,p)\right]\right.$$

$$\left. + N(m_1,n_1)\left(\omega+\frac{A+1}{2}\right)_{p-\omega-\frac{A-4}{2}}\right\} \qquad (4.70)$$

Como mencionamos al inicio de la sección, considerar al sistema formado por A partículas con spin 1/2 y las cuales obedecen la estadística de Fermi-Dirac, solamente introduce ligeras modificaciones al desarrollo que acabamos de realizar. El hecho que las partículas tengan spin 1/2 nos permitirá, de acuerdo al principio de Pauli, colocar a dos de ellas en cada nivel energético, por lo que la representación más baja del grupo ortogonal O(A-1) consistente con el principio de exclusión de Pauli, la cual denotaremos como $\tilde{\omega}$, vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\tilde{\omega} = 2\sum_{n=0}^{\frac{A}{2}-1} n = \frac{A(A-2)}{4} \qquad (4.71)$$

EN TANTO QUE EL ESTADO COMPACTO, ADOPTARÁ LA SIGUIENTE FORMA:

$$\tilde{\Psi}_0(x_1',x_2',\ldots,x_A',\sigma_1',\sigma_2',\ldots,\sigma_A') = (A!)^{-1/2}\begin{vmatrix} \psi_0(x_1')\delta_{\sigma_1',\frac{1}{2}} & \psi_0(x_2')\delta_{\sigma_2',\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_0(x_A')\delta_{\sigma_A',\frac{1}{2}} \\ \psi_0(x_1')\delta_{\sigma_1',-\frac{1}{2}} & \psi_0(x_2')\delta_{\sigma_2',-\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_0(x_A')\delta_{\sigma_A',-\frac{1}{2}} \\ \psi_1(x_1')\delta_{\sigma_1',\frac{1}{2}} & \psi_1(x_2')\delta_{\sigma_2',\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_1(x_A')\delta_{\sigma_A',\frac{1}{2}} \\ \psi_1(x_1')\delta_{\sigma_1',-\frac{1}{2}} & \psi_1(x_2')\delta_{\sigma_2',-\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_1(x_A')\delta_{\sigma_A',-\frac{1}{2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{\frac{A}{2}-1}(x_1')\delta_{\sigma_1',\frac{1}{2}} & \psi_{\frac{A}{2}-1}(x_2')\delta_{\sigma_2',\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_{\frac{A}{2}-1}(x_A')\delta_{\sigma_A',\frac{1}{2}} \\ \psi_{\frac{A}{2}-1}(x_1')\delta_{\sigma_1',-\frac{1}{2}} & \psi_{\frac{A}{2}-1}(x_2')\delta_{\sigma_2',-\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_{\frac{A}{2}-1}(x_A')\delta_{\sigma_A',-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} \qquad (4.72)$$

Ó ESCRITO DE MANERA MÁS COMPACTA EN TÉRMINOS DEL SÍMBOLO DE LEVI-CIVITA:

$$\tilde{\Psi}_0(y_1',y_2',\ldots,y_A') = (A!)^{-1/2}\,\varepsilon_{\tau_1'\tau_2'\ldots\tau_A'}\,\tilde{\psi}_{\tau_1'}(y_1')\,\tilde{\psi}_{\tau_2'}(y_2')\cdots\tilde{\psi}_{\tau_A'}(y_A') \qquad (4.73)$$

DONDE HEMOS DEFINIDO UNA VARIABLE CONJUNTA DE POSICIÓN Y SPIN, Y UN ÍNDICE CONJUNTO

$$y_i' = (x_i', \sigma_i') \qquad (i=1,2,\ldots,A) \qquad (4.74a)$$

$$\tau_i' = n_i' m_i' \qquad (m_i' = -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \qquad (4.74b)$$

DE TAL MANERA QUE:

$$\tilde{\psi}_{\tau_i'}(y_i') = \psi_{n_i'}(x_i')\,\delta_{\sigma_i',m_i'}$$

EN ESTE CASO, LA EXPRESIÓN EQUIVALENTE PARA $\tilde{I}(\alpha)$, VENDRÁ DADA COMO:

$$\tilde{I}(\alpha) = \left[A(A-1)\alpha^{\tilde{\omega}+\frac{q'}{2}}\right]^{-1}\sum_{\tau_1',\tau_2'}\Big\{\iint \tilde{\psi}_{\tau_1'}(y_1')\tilde{\psi}_{\tau_2'}(y_2')\,W\!\left(A,\tfrac{1}{\sqrt{2}}|x_2'-x_1'|\right)\tilde{\psi}_{\tau_1'}(y_1')\,\tilde{\psi}_{\tau_2'}(y_2')\,dy_1'\,dy_2'$$

$$-\iint \tilde{\psi}_{\tau_1'}(y_1')\tilde{\psi}_{\tau_2'}(y_2')\,W\!\left(A,\tfrac{1}{\sqrt{2}}|x_2'-x_1'|\right)\tilde{\psi}_{\tau_2'}(y_1')\,\tilde{\psi}_{\tau_1'}(y_2')\,dy_1'\,dy_2'\Big\} \qquad (4.75)$$

LA CUAL DESARROLLANDO SE TRANSFORMA EN:

$$\tilde{I}(\alpha) = \left[A(A-1)\alpha^{\tilde{\omega}+\frac{q'}{2}}\right]^{-1}\sum_{n_1',n_2'=0}^{\frac{A}{2}-1}\ \sum_{m_1',m_2'=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ \sum_{\sigma_1',\sigma_2'=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\delta_{\sigma_1',m_1'}\delta_{\sigma_2',m_2'}J_{n_1'n_2'} - \delta_{\sigma_1',m_1'}\delta_{\sigma_2',m_2'}\delta_{\sigma_1',m_2'}\delta_{\sigma_2',m_1'}K_{n_1'n_2'}\right) \qquad (4.76)$$

donde $J_{n_1'n_2'}$ y $K_{n_1'n_2'}$ HAN SIDO DEFINIDOS EN (4.60a) y (4.60b) RESPECTIVAMENTE. FINALMENTE, DESPUÉS DE REALIZAR CIERTOS CÁLCULOS SENCILLOS, OBTENEMOS:

$$\tilde{I}(\alpha) = \left[A(A-1)\alpha^{\tilde{\omega}+\frac{q'}{2}}\right]^{-1} 2\sum_{n_1',n_2'=0}^{\frac{A}{2}-1}\left[2J_{n_1'n_2'} - K_{n_1'n_2'}\right] \qquad (4.77)$$

expresión que resulta muy similar a la ecuación (4.59) que obtuvimos para partículas con spin cero. El procedimiento, para obtener los elementos de matriz correspondientes al Hamiltoniano (4.45), será idéntico a el usado en el caso de partículas con -- spin cero, tomando únicamente en consideración la nueva forma que adoptan tanto la - representación $\tilde{\omega}$, como $\tilde{I}(\alpha)$.

V. CONCLUSIONES

En relación con la hipótesis de Vanagas, en la que el Hamiltoniano colectivo H^c se obtiene de la parte escalar con respecto al grupo ortogonal O(A-1) del Hamiltoniano de A nucleones, se vio que éste viene dado por (3.19). La ecuación diferencial ordinaria en la variable colectiva ρ no es soluble analíticamente si el potencial entre los nucleones es gaussiano. Afortunadamente se pueden conocer, en cambio, las eigenfunciones de H^c_o cuando las interacciones entre los nucleones son de tipo de oscilador armónico. Utilizando estas eigenfunciones, dadas en (3.11a) se pueden obtener los elementos de matriz del Hamiltoniano H^c y de allí, por diagonalización cuando el análisis se hace hasta cierto número de cuantos, los eigenvalores y - eigenestados de H^c.

Visualizando el programa en esta forma, su generalización del espacio de - una al de dos o tres dimensiones se ve con claridad. De hecho ya se ha implementado- en el caso de dos dimensiones (Chacón y Moshinsky) (9) y actualmente se está trabajando en el de tres, amén de un análisis con un punto de vista ligeramente diferente al del propio Vanagas (Lectures Elaf).

El programa de Filippov, que se ha implementado detalladamente para el problema unidimensional en el capítulo IV, es más difícil de generalizar para los casos de dos y tres dimensiones por la complejidad involucrada en la determinación de los- estados cuando la interacción es del tipo de oscilador armónico, y en el cálculo de- los elementos de matriz. Sin embargo, un grupo que incluye a Moshinsky, Chacón, Castaños, Frank y Hess está trabajando actualmente sobre el problema y es de esperar -- que el análisis unidimensional guíe, en algunos aspectos, el ataque planeado para el problema general.

Apéndice A.

Las coordenadas hiperesféricas (2.7), las cuales se introdujeron en el capítulo II fueron utilizadas a lo largo de todo el desarrollo, al igual que varias relaciones que las involucraban. El objetivo de este apéndice será la obtención de estas relaciones las cuales resultaron fundamentales en el análisis.

En un espacio de N dimensiones, las coordenadas hiperesféricas $\rho, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}$ vienen definidas de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos\alpha_1 \\ x_2 &= \rho \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 \\ x_3 &= \rho \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_3 \\ &\vdots \\ x_{N-1} &= \rho \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \cdots \operatorname{sen}\alpha_{N-2} \cos\alpha_{N-1} \\ x_N &= \rho \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \cdots \operatorname{sen}\alpha_{N-2} \operatorname{sen}\alpha_{N-1} \end{aligned}\right\} \qquad (A.1)$$

donde

$$0 \leq \rho < \infty$$

$$0 \leq \alpha_s < \pi \quad \text{para } 1 \leq s \leq N-2$$

$$0 \leq \alpha_{N-1} < 2\pi$$

Se puede observar de inmediato que la transformación de coordenadas satisface la siguiente relación:

$$\rho^2 = \sum_{s=1}^{N} x_s^2 \qquad (A.2)$$

la cual se puede demostrar fácilmente, empezando a sumar las coordenadas a partir de aquellas que contengan un subíndice mayor.

Resultará apropiado, para facilitar las demostraciones, introducir una nueva notación para designar las coordenadas hiperesféricas, de tal manera que éstas quedarán expresadas de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= q_1 \\ \alpha_s &= q_{s+1} \; ; \quad s = 1, 2, \ldots, N-1 \end{aligned}\right\} \qquad (A.3)$$

Supongamos que x_s y $x_s + ds$ son las coordenadas de dos puntos cercanos, entonces la distancia ds entre ellos vendrá dada por la siguiente ecuación:

$$ds^2 = \sum_{s=1}^{N} dx_s^2 \qquad (A.4)$$

LA CUAL SE TRANSFORMA DE ACUERDO CON (A.1), EN:

$$ds^2 = \sum_{t,r=1}^{N} \left[\sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_s}{\partial q_r} \frac{\partial x_s}{\partial q_t} \right] dq_r \, dq_t = \sum_{t,r=1}^{N} g_{rt} \, dq_r \, dq_t \qquad (A.5)$$

donde SE HA DEFINIDO EL TENSOR MÉTRICO FUNDAMENTAL

$$g_{rt} = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_s}{\partial q_r} \frac{\partial x_s}{\partial q_t} \qquad (A.6)$$

EL CUAL CLARAMENTE RESULTA SER SIMÉTRICO.

LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ JACOBIANA J ASOCIADA A LA TRANSFORMACIÓN VIENEN DEFINIDOS COMO:

$$J_{st} = \frac{\partial x_s}{\partial q_t} \qquad (A.7)$$

por lo QUE:

$$(J^T J)_{rt} = \sum_{s=1}^{N} J^T_{rs} J_{st} = \sum_{s=1}^{N} J_{sr} J_{st} = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_s}{\partial q_r} \frac{\partial x_s}{\partial q_t} = g_{rt} \qquad (A.8)$$

DE DONDE OBSERVAMOS QUE LA MATRIZ $\|g_{rt}\|$ NO RESULTA SER MÁS QUE EL PRODUCTO $J^T J$.

PARA $N=3$, i.e. EN EL CASO TRIDIMENSIONAL, RESULTA FÁCIL PROBAR QUE:

$$\|g_{rt}\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2 \end{bmatrix} \qquad (A.9)$$

NUESTRA META SERÁ LA GENERALIZACIÓN DE ESTA ÚLTIMA EXPRESIÓN AL CASO N-DIMENSIONAL. PARA PODER LOGRAR ÉSTO, DEMOSTRAREMOS PRIMERO QUE LA SUBMATRIZ DE $(N-1) \times (N-1)$ DE $\|g_{rt}^{(N)}\|$ $(1 \le r, t \le N-1)$, RESULTARÁ IDÉNTICA A LA MATRIZ $\|g_{rt}^{(N-1)}\|$ EN UN ESPACIO DE $(N-1)$ DIMENSIONES, DONDE DISTINGUIREMOS CON UN SUPERÍNDICE, YA SEA N Ó $(N-1)$, A LOS ELEMENTOS DE LOS RESPECTIVOS ESPACIOS.

EN UN ESPACIO DE $(N-1)$ DIMENSIONES, LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS ANÁLOGA A (A.1), VIENE DADA POR:

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{(N-1)} &= q_1 \cos q_2 \\
x_2^{(N-1)} &= q_1 \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 \\
x_3^{(N-1)} &= q_1 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 \cos q_4 \\
&\vdots \\
x_{N-2}^{(N-1)} &= q_1 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 \cdots \operatorname{sen} q_{N-2} \cos q_{N-1} \\
x_{N-1}^{(N-1)} &= q_1 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 \cdots \operatorname{sen} q_{N-2} \operatorname{sen} q_{N-1}
\end{aligned}\right\} \qquad (A.10)$$

DE DONDE A PARTIR DE ÉSTA, DE (A.1) Y (A.3) OBTENEMOS LAS SIGUIENTES RELACIONES:

$$\chi_s^{(N)} = \chi_s^{(N-1)} \qquad (s=1,2,\ldots,N-2) \tag{A.11}$$

$$\chi_{N-1}^{(N)} = \cos q_N \, \chi_{N-1}^{(N-1)} \tag{A.12}$$

PARA PODER GENERALIZAR LA EXPRESIÓN (A.9), CONVIENE DEFINIR:

$$Q = q_1 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 \cdots \operatorname{sen} q_{N-1} \tag{A.13}$$

YA QUE ENTONCES $\chi_{N-1}^{(N)}$ Y $\chi_N^{(N)}$ PODRÁN ESCRIBIRSE DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\chi_{N-1}^{(N)} = Q \cos q_N \tag{A.14}$$

$$\chi_N^{(N)} = Q \operatorname{sen} q_N \tag{A.15}$$

DE DONDE RESULTARÁ CLARO QUE:

$$\chi_N^{(N)} = \operatorname{tg} q_N \, \chi_{N-1}^{(N)} \tag{A.16}$$

TOMANDO ESTAS RELACIONES EN CONSIDERACIÓN, TENEMOS PARA EL CASO $1 \le r,t \le N-1$, LO SIGUIENTE:

$$\begin{aligned} g_{rt}^{(N)} &= \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial \chi_s^{(N)}}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_s^{(N)}}{\partial q_t} = \sum_{s=1}^{N-2} \frac{\partial \chi_s^{(N-1)}}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_s^{(N-1)}}{\partial q_t} + \frac{\partial \chi_{N-1}^{(N)}}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_{N-1}^{(N)}}{\partial q_t} + \frac{\partial \chi_N^{(N)}}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_N^{(N)}}{\partial q_t} \\ &= g_{rt}^{(N-1)} - \operatorname{tg}^2 q_N \frac{\partial \chi_{N-1}^{(N)}}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_{N-1}^{(N)}}{\partial q_t} + \frac{\partial \chi_N^{(N)}}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_N^{(N)}}{\partial q_t} = g_{rt}^{(N-1)} \end{aligned} \tag{A.17}$$

LO QUE NOS LLEVA A CONCLUIR, COMO HABÍAMOS PROPUESTO, QUE LA MATRIZ $\| g_{rt}^{(N-1)} \|$ RESULTA SER IDÉNTICA A LA SUBMATRIZ $\| g_{rt}^{(N)} \|$, PARA $1 \le r,t \le N-1$.

EL CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS RESTANTES g_{rN}, PARA LOS CUALES ELIMINAREMOS EL SUPERÍNDICE, LO EFECTUAREMOS EN DOS PASOS, EN EL PRIMERO ANALIZAREMOS EL CASO EN QUE r ES MENOR QUE N Y EN EL SEGUNDO r SERÁ IGUAL A N, POR LO QUE:

a) SI $1 \le r \le N-1$, ENTONCES

$$g_{rN} = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial \chi_s}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_s}{\partial q_N} = \frac{\partial \chi_{N-1}}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_{N-1}}{\partial q_N} + \frac{\partial \chi_N}{\partial q_r} \frac{\partial \chi_N}{\partial q_N} = -Q \operatorname{sen} q_N \frac{\partial \chi_{N-1}}{\partial q_r} + Q \operatorname{tg} q_N \cos q_N \frac{\partial \chi_{N-1}}{\partial q_r} = 0 \tag{A.18}$$

b) SI $r=N$, ENTONCES

$$g_{NN} = \sum_{s=1}^{N} \left(\frac{\partial \chi_s}{\partial q_N}\right)^2 = \left(\frac{\partial \chi_{N-1}}{\partial q_N}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_N}{\partial q_N}\right)^2 = (-Q \operatorname{sen} q_N)^2 + (Q \cos q_N)^2 = Q^2 \tag{A.19}$$

Haciendo uso de las ecuaciones (A.9), (A.15), (A.17), (A.18) y (A.19), obtenemos:

$$\|g_{rt}\| = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & q_1^2 & & & \bigcirc \\ & & q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & \bigcirc & & & q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2 \operatorname{sen}^2 q_3 \cdots \operatorname{sen}^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (A.20)$$

o de manera equivalente:

$$\left.\begin{aligned} g_{1t} &= \delta_{1t} \\ g_{rt} &= q_1^2 \left[\prod_{s=1}^{r-2} \operatorname{sen}^2 q_{s+1} \right] \delta_{rt} \qquad (r=2,\dots,N) \end{aligned}\right\} \qquad (A.21)$$

donde $\prod_{s=1}^{0} \operatorname{sen}^2 q_{s+1} = 1$.

Nos encontramos ahora en posibilidad de conocer la forma que adopta el operador laplaciano, ya que en general éste viene expresado según la fórmula (43.8) de la referencia (19), como:

$$\nabla^2 = \sum_{r,t=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_r} \sqrt{g}\, g^{rt} \frac{\partial}{\partial q_t} \qquad (A.22)$$

donde

$$g = \det \|g_{rt}\| \qquad (A.23)$$

$$\|g^{rt}\| = \|g_{rt}\|^{-1} \qquad (A.24)$$

Las expresiones (A.23) y (A.24) adoptan, en nuestro caso particular, la siguiente forma:

$$g = \left[q_1^{(N-1)} \left(\prod_{s=2}^{N-1} \operatorname{sen}^{(N-s)} q_s \right) \right]^2 \qquad (A.25)$$

$$\left.\begin{aligned} g^{1t} &= \delta_{1,t} \\ g^{rt} &= \left[q_1^2 \left(\prod_{s=1}^{r-2} \operatorname{sen}^2 q_{s+1} \right) \right]^{-1} \delta_{r,t} \qquad (r=2,\dots,N) \end{aligned}\right\} \qquad (A.26)$$

por lo que después de efectuar ciertos cálculos sencillos, obtenemos:

$$\nabla^2 = \frac{1}{q_1^{N-1}} \frac{\partial}{\partial q_1} q_1^{N-1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{q_1^2} \sum_{t=1}^{N-1} \left[\left(\prod_{s=1}^{t-1} \operatorname{sen}^2 q_{s+1} \right)^{-1} \frac{1}{\operatorname{sen}^{N-t-1} q_{t+1}} \frac{\partial}{\partial q_{t+1}} \operatorname{sen}^{N-t-1} q_{t+1} \frac{\partial}{\partial q_{t+1}} \right] \qquad (A.27)$$

expresión que se transforma usando (A.3) y el hecho que para nuestro problema $N = A-1$, en:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^{A-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{A-2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \sum_{t=1}^{A-2} \left[\left(\prod_{s=1}^{t-1} \operatorname{sen}^2 \alpha_s \right)^{-1} \frac{1}{\operatorname{sen}^{A-2-t} \alpha_t} \frac{\partial}{\partial \alpha_t} \operatorname{sen}^{A-2-t} \alpha_t \frac{\partial}{\partial \alpha_t} \right] \qquad (A.28)$$

EVALUAR EL ELEMENTO DE VOLUMEN RESULTA AHORA PARTICULARMENTE SENCILLO, YA QUE:

$$dV = \sqrt{g}\, dq_1 dq_2 \cdots dq_N = q_1^{N-1} \operatorname{sen}^{N-2} q_2 \operatorname{sen}^{N-3} q_3 \cdots \operatorname{sen} q_{N-1}\, dq_1 dq_2 dq_3 \cdots dq_{N-1} dq_N \qquad (A.29)$$

EL CUAL PARA NUESTRO CASO, ADOPTA LA SIGUIENTE FORMA:

$$dV = \rho^{A-2} d\rho\, d\tau_\alpha \qquad (A.30)$$

donde

$$d\tau_\alpha = \operatorname{sen}^{A-3}\alpha_1 \operatorname{sen}^{A-4}\alpha_2 \cdots \operatorname{sen}\alpha_{A-3}\, d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_{A-3} d\alpha_{A-2} \qquad (A.31)$$

OTRA EXPRESIÓN QUE RESULTÓ DE MUCHA UTILIDAD EN EL DESARROLLO, FUE EL PODER ESCRIBIR AL OPERADOR LAPLACIANO EN TÉRMINOS DEL OPERADOR DE CASIMIR DE SEGUNDO GRADO Λ^2, EL CUAL FUE DEFINIDO EN EL CAPÍTULO IV, DE ACUERDO A LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$\Lambda^2 = \frac{1}{2} \sum_{s,t=1}^{A-1} \Lambda_{st}^2 \qquad (A.32)$$

donde

$$\Lambda_{st} = x_s p_t - x_t p_s \qquad (A.33)$$

MEDIANTE UN MANIPULEO DE ESTAS EXPRESIONES Y DEL HECHO QUE $[x_s, p_t] = x_s p_t - p_t x_s = i\delta_{st}$ RESULTA FÁCIL PROBAR QUE EL OPERADOR DE CASIMIR ADOPTA LA SIGUIENTE FORMA:

$$\Lambda^2 = \sum_{s=1}^{A-1} x_s^2 \sum_{t=1}^{A-1} p_t^2 - \sum_{s=1}^{A-1} x_s p_s \left[\sum_{t=1}^{A-1} x_t p_t - i(A-3) \right] \qquad (A.34)$$

LA CUAL, CONSIDERANDO LA ECUACIÓN (A.2) Y EL HECHO QUE:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} = \rho \sum_{s=1}^{A-1} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial \rho} = \rho \sum_{s=1}^{A-1} \frac{x_s}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^{A-1} x_s \frac{\partial}{\partial x_s} \qquad (A.35)$$

$$p_s = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_s} \qquad (A.36)$$

SE TRANSFORMA EN:

$$\Lambda^2 = -\rho^2 \nabla^2 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + (A-3) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \qquad (A.37)$$

DE DONDE FINALMENTE OBTENEMOS:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^{A-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{A-2} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\Lambda^2}{\rho^2} \qquad (A.38)$$

Apéndice B

En este apéndice, señalaremos los pasos básicos que hemos seguido en la evaluación de las integrales que dieron lugar al potencial colectivo $W(A,\rho)$ (3.17a) y las cuales vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^{A-3}\alpha_1 \cos^2\alpha_1 \, d\alpha_1 \tag{B.1}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^{A-3}\alpha_1 \, d\alpha_1 \tag{B.2}$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} e^{-\rho^2\cos^2\alpha_1/b^2} \mathrm{sen}^{A-3}\alpha_1 \, d\alpha_1 \tag{B.3}$$

las dos primeras integrales pueden evaluarse si observamos que la integral

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^{\mu-1}x \cos^{\nu-1}x \, dx \tag{B.4}$$

puede escribirse como:

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{\mu-1}x \cos^{\nu-1}x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{sen}^{\mu-1}x' \cos^{\nu-1}x' \, dx' \tag{B.5}$$

la cual se transforma, introduciendo el cambio de variable $x = x' - \frac{\pi}{2}$, en:

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{\mu-1}x \cos^{\nu-1}x \, dx + (-1)^{\mu-1} \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{\nu-1}x \cos^{\mu-1}x \, dx \tag{B.6}$$

Esta integral puede evaluarse con ayuda de la fórmula 3.621 (5) de la referencia (14) obteniéndose, para el caso en que $Re\,\mu > 0$ y $Re\,\nu > 0$, el siguiente resultado:

$$I = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{\nu-1}\right] B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \tag{B.7}$$

donde la función Beta $B(x,y)$ se define en términos de la función Gamma de la siguiente manera:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{B.8}$$

de aquí que:

$$I_1 = B\left(\frac{3}{2}, \frac{A-2}{2}\right) \tag{B.9}$$

$$I_2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{A-2}{2}\right) \tag{B.10}$$

La integral I_3 (B.3), se resolverá introduciendo un par de cambios de variables. El primero que consideraremos será el de definir $y = \cos\alpha$, el cual transforma a I_3 en:

$$I_3 = 2\int_0^1 e^{-\frac{\rho^2}{b^2}y^2}(1-y^2)^{\frac{A-4}{2}}\,dy \qquad (B.11)$$

y la cual, a su vez se modifica, introduciendo la nueva variable $x = y^2$, en:

$$I_3 = \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{\frac{A-4}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{b^2}x}\,dx \qquad (B.12)$$

Esta última expresión puede ser evaluada, mediante la ecuación 3.383 (1) de la referencia (14), tomando el siguiente valor:

$$I_3 = \Phi\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{A-1}{2}; -\tfrac{\rho^2}{b^2}\right)B\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{A-2}{2}\right) \qquad (B.13)$$

donde $\Phi(\alpha,\gamma;z)$ es la función hipergeométrica confluente.

Apéndice C.

El propósito de este apéndice será el de mostrar que al igual que en el caso del potencial gaussiano, utilizado en el capítulo III, los dos potenciales que consideraremos en este apéndice se comportan de manera idéntica a éste, es decir son potenciales de corto alcance cuyo comportamiento colectivo resulta ser de largo alcance.

La primera interacción a considerar será tipo pozo cuadrado, la cual analíticamente representamos de la siguiente forma:

$$V(|x_j'-x_i'|) = -V_0\,\Theta(a-|x_j'-x_i'|) \qquad (C.1)$$

donde la función $\Theta(a-|x_j'-x_i'|)$ se define como:

$$\Theta(a-|x_j'-x_i'|) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x_j'-x_i'| < a \\ 0 & \text{si } |x_j'-x_i'| \geq a \end{cases} \qquad (C.2)$$

Este potencial nos indica que las partículas solamente interaccionan, de manera constante, cuando se encuentran a una distancia menor que una distancia característica a.

La parte colectiva de la interacción, la cual se obtiene promediando sobre los ángulos, viene dada por la siguiente expresión:

$$V(A,\rho) = -\frac{A(A-1)V_0}{2B(\frac{1}{2}, \frac{A-2}{2})} I(A,\rho) \qquad (C.3)$$

donde

$$I(A,\rho) = \int_0^{\pi} \Theta(a - \sqrt{2}\rho|\cos\alpha_1|)\, sen^{A-3}\alpha_1\, d\alpha_1 \qquad (C.4)$$

y hemos usado el hecho que:

$$|x_2' - x_1'| = \sqrt{2}\rho\,|\cos\alpha_1| \qquad (C.5)$$

La integral (C.4) puede escribirse como:

$$I(A,\rho) = \int_0^{\pi/2} \Theta(a - \sqrt{2}\rho\cos\alpha_1)\, sen^{A-3}\alpha_1\, d\alpha_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Theta(a + \sqrt{2}\rho\cos\alpha_1')\, sen^{A-3}\alpha_1'\, d\alpha_1' \qquad (C.6)$$

la cual al introducir el cambio de variable $\alpha_1 = \pi - \alpha_1'$, se transforma en:

$$I(A,\rho) = 2\,\tilde{I}(A,\rho) \qquad (C.7)$$

donde

$$\tilde{I}(A,\rho) = \int_0^{\pi/2} \Theta(a - \sqrt{2}\rho\cos\alpha_1)\, sen^{A-3}\alpha_1\, d\alpha_1 \qquad (C.8)$$

Nos encontramos interesados en conocer el comportamiento del potencial a grandes distancias, el cual claramente depende del comportamiento asintótico de la integral $\tilde{I}(A,\rho)$, la cual evaluaremos dividiendo el cálculo en dos casos:

i) Si $\rho < \frac{a}{\sqrt{2}}$, entonces:

$a > \sqrt{2}\rho \geq \sqrt{2}\rho\cos\alpha_1$, por lo que $\Theta(a - \sqrt{2}\rho\cos\alpha_1) = 1$

y por lo tanto

$$\tilde{I}(A,\rho) = \int_0^{\pi/2} sen^{A-3}\alpha_1\, d\alpha_1 = B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{A-2}{2}) \qquad (C.9)$$

donde la integral ha sido evaluada en el apéndice B.

ii) Si $\rho > \frac{a}{\sqrt{2}}$

En este caso conviene separar la integral $\tilde{I}(A,\rho)$ en dos partes de tal forma que ésta pueda escribirse de la siguiente manera.

$$\tilde{I}(A,\rho) = \int_0^{\arccos\frac{a}{\sqrt{2}\rho}} \Theta(a - \sqrt{2}\rho\cos\alpha_1)\, sen^{A-3}\alpha_1\, d\alpha_1 + \int_{\arccos\frac{a}{\sqrt{2}\rho}}^{\pi/2} \Theta(a - \sqrt{2}\rho\cos\alpha_1)\, sen^{A-3}\alpha_1\, d\alpha_1 \qquad (C.10)$$

Resultará claro, debido al hecho que el coseno es una función decreciente en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, que para el primer sumando:

$$\alpha_1 < \arccos \frac{a}{\sqrt{2}\rho} \Rightarrow \cos\alpha_1 > \frac{a}{\sqrt{2}\rho} \Rightarrow \Theta(a-\sqrt{2}\rho\cos\alpha_1) = 0$$

en tanto que para el segundo sumando:

$$\alpha_1 > \arccos \frac{a}{\sqrt{2}\rho} \Rightarrow \cos\alpha_1 < \frac{a}{\sqrt{2}\rho} \Rightarrow \Theta(a-\sqrt{2}\rho\cos\alpha_1) = 1$$

por lo que (C.10) se transforma en:

$$\tilde{I}(A,\rho) = \int_{\arccos\frac{a}{\sqrt{2}\rho}}^{\pi/2} \text{sen}^{A-3}\alpha_1 \, d\alpha_1 \qquad (C.11)$$

Introducir el cambio de variable $x=\cos\alpha_1$ resultará particularmente útil para investigar el comportamiento asintótico de $\tilde{I}(A,\rho)$, ya que ésta podrá escribirse como:

$$\tilde{I}(A,\rho) = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}\rho}} (1-x^2)^{\frac{A-4}{2}} \, dx \qquad (C.12)$$

la cual en el límite de ρ muy grande adopta, de acuerdo al teorema del valor medio para integrales, la siguiente forma:

$$\tilde{I}(A,\rho) \sim (1-x^2)^{\frac{A-4}{2}}\Big|_{x=0} \frac{a}{\sqrt{2}\rho} = \frac{a}{\sqrt{2}\rho} \qquad (C.13)$$

Usando (C.3), (C.7) y (C.13) observamos que el potencial $V(A,\rho)$

$$V(A,\rho) \sim \left[\frac{-A(A-1)V_0\, a}{\sqrt{2}\, B(\frac{1}{2}, \frac{A-2}{2})}\right] \frac{1}{\rho} \qquad (C.14)$$

resulta ser un potencial de largo alcance.

El segundo potencial que consideraremos será un potencial exponencial, el cual claramente es de corto alcance y viene dado por la siguiente expresión:

$$V'(|x_2'-x_1'|) = -V_0' \exp(-|x_2'-x_1'|/\sqrt{2}b) \qquad (C.15)$$

donde b es un parámetro arbitrario. La parte colectiva de la interacción, podrá escribirse como:

$$V'(A,\rho) = \frac{-A(A-1)V_0}{2B(\frac{1}{2}, \frac{A-2}{2})} I'(A,\rho) \qquad (C.16)$$

donde

$$I'(A,\rho) = \int_0^{\pi} e^{-\rho|\cos\alpha_1|/b} \, \text{sen}^{A-3}\alpha_1 \, d\alpha_1 \qquad (C.17)$$

es una integral que, de manera análoga al caso anterior, se transforma en:

$$I'(A,\rho)= 2\tilde{I}(A,\rho) \qquad (c.18)$$

donde

$$\tilde{I}'(A,\rho)=\int_0^{\pi/2} e^{-\rho\cos\alpha/6}\,\mathrm{sen}^{A-3}\alpha\, d\alpha \qquad (c.19)$$

La integral (c.19) se modifica, mediante el cambio de variable $y=\cos\alpha$, en:

$$\tilde{I}'(A,\rho)=\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{A-4}{2}} e^{-\frac{\rho}{6}x}\,dx \qquad (c.20)$$

cuyo valor, de acuerdo a la fórmula 3.387(5) de la referencia (14), será:

$$\tilde{I}'(A,\rho)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{36}{\rho}\right)^{\frac{A-3}{2}}\Gamma\left(\frac{A-2}{2}\right)\left[I_{\frac{A-3}{2}}\left(-\frac{\rho}{6}\right)+L_{\frac{A-3}{2}}\left(-\frac{\rho}{6}\right)\right] \qquad (c.21)$$

donde $I_\nu(x)$ es la función de Bessel de argumento complejo y $L_\nu(x)$ se conoce como la función modificada de Struve.

Para investigar el comportamiento asintótico de (c.21) haremos uso de varias fórmulas de la referencia (14), por lo que a partir de este momento señalaremos únicamente el número de la fórmula omitiendo la referencia. La ecuación (c.21) se transforma, definiendo

$$\nu= \frac{A-3}{2} \qquad (c.22)$$

$$\xi= \frac{\rho}{6} \qquad (c.23)$$

y usando el hecho que:

$$I_\nu(-z)=(-1)^\nu I_\nu(z) \qquad (8.476-4)$$

$$L_\nu(-z)=(-1)^{\nu+1}L_\nu(z) \qquad (8.550-2)$$

en:

$$\tilde{I}'(A,\rho)= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{\xi}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left[I_\nu(\xi)-L_\nu(\xi)\right] \qquad (c.24)$$

El comportamiento asintótico de la función modificada de Struve viene dado por:

$$L_\nu(\xi)\sim (-i)^{\nu+1}\left[N_\nu(i\xi)+\frac{(i)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\nu-1}\right] \qquad (8.554)$$

donde $N_\nu(z)$ es la función de Neumann, la cual para valores grandes de $|z|$, puede escribirse como:

$$N_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (8.451\text{-}2)$$

Y LA CUAL PARA EL CASO $z = i\xi$, ADOPTA LA SIGUIENTE FORMA:

$$N_\nu(i\xi) = \frac{i}{2}\left(\frac{2}{\pi i \xi}\right)^{1/2} e^{\xi} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+\frac{1}{2})} \qquad (C.25)$$

MEDIANTE UN RAZONAMIENTO ANÁLOGO, ENCONTRAMOS QUE LA FUNCIÓN DE BESSEL, CUYO COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO VIENE DADO POR:

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (8.451\text{-}1)$$

SE TRANSFORMA, TOMANDO EN CONSIDERACIÓN QUE $z = i\xi$, EN:

$$J_\nu(i\xi) \sim \left(\frac{2}{\pi i \xi}\right)^{1/2} \frac{1}{2} e^{\xi} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+\frac{1}{2})} \qquad (C.26)$$

POR LO QUE DE (C.25) Y (C.26), OBSERVAMOS QUE PARA VALORES GRANDES DE ξ, SE SATISFACE:

$$N_\nu(i\xi) = i\, J_\nu(i\xi) \qquad (C.27)$$

EXPRESIÓN QUE A SU VEZ SE MODIFICA, USANDO EL HECHO QUE:

$$I_\nu(\xi) = (-i)^\nu J_\nu(i\xi) \qquad (8.406\text{-}1)$$

EN:

$$N_\nu(i\xi) = i^{\nu+1} I_\nu(\xi) \qquad (C.28)$$

SUSTITUYENDO ESTA ÚLTIMA ECUACIÓN, OBTENEMOS PARA EL COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE $L_\nu(\xi)$, LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$L_\nu(\xi) \sim I_\nu(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\nu-1} \qquad (C.29)$$

LA CUAL A SU VEZ SUSTITUIDA EN (C.24) NOS DA EL SIGUIENTE RESULTADO PARA $\tilde{I}'(A,\rho)$

$$\tilde{I}'(A,\rho) = \frac{1}{\xi} \qquad (C.30)$$

FINALMENTE, HACIENDO USO DE ESTE ÚLTIMO RESULTADO JUNTO CON (C.16), (C.18) Y (C.23), OBTENEMOS EL COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL POTENCIAL $V'(A,\rho)$

$$V'(A,\rho) = \left[-\frac{A(A-1)V_0 b}{B(\frac{1}{2}, \frac{A-2}{2})}\right]\frac{1}{\rho} \qquad (C.31)$$

EL CUAL CLARAMENTE RESULTA SER DE LARGO ALCANCE.

Apéndice D.

En el capítulo IV hemos demostrado que para la evaluación de los elementos de matriz (4.55) asociados a la interacción $W(A, |x_2' - x_i'|)$ (4.46) en términos de los estados colectivos del Hamiltoniano de oscilador armónico, resulta fundamental la evaluación de la integral $I(\alpha)$ la cual se ha definido en (4.53) de acuerdo a la siguiente expresión:

$$I(\alpha) = \int_{\tau} [\Delta'(A)]^2 \, W(A, |x_2' - x_i'|) \, e^{-\alpha\rho^2} \, d\tau \qquad (D.1)$$

donde $\Delta'(A)$ se define en términos del estado base $\Delta(A)$ (4.24) como:

$$\Delta'(A) = \Delta(A) \, e^{+\frac{1}{2}\rho^2} \qquad (D.2)$$

El objetivo de este apéndice será el cálculo de esta integral.

Mediante el uso del Teorema de Dragt, el cual hemos utilizado en el capítulo IV, la expresión (D.2) queda expresada en términos del símbolo de Levi-Civita y adoptando la convención de suma sobre índices repetidos, como:

$$\Delta'(A) = [2!\,3! \cdots A!]^{-1/2} \, \pi^{-(A-1)/4} \, 2^{\omega/2} \, \varepsilon_{m_1' m_2' m_3' \cdots m_A'} \, x'_{m_2'} \, (x'_{m_3'})^2 \cdots (x'_{m_A'})^{A-1} \qquad (D.3)$$

$$(m_i' = 1, 2, \ldots, A)$$

la cual introduciendo el cambio de variable:

$$\bar{x}_s' = \alpha^{1/2} x_s' \quad (s = 1, 2, \ldots, A) \qquad (D.4)$$

se transforma en:

$$\Delta'(A) = [2!\,3! \cdots A!]^{-1/2} \, \pi^{-(A-1)/4} \, 2^{\omega/2} \, \varepsilon_{m_1' m_2' m_3' \cdots m_A'} \, \alpha^{-\omega/2} \, \bar{x}'_{m_2'} \, (\bar{x}'_{m_3'})^2 \cdots (\bar{x}'_{m_A'})^{A-1} = \alpha^{-\omega/2} \, \bar{\Delta}'(A) \qquad (D.5)$$

donde $\bar{\Delta}'(A)$ queda definida de manera obvia. Introduciendo esta última expresión en (D.1) junto con el cambio de variable análogo a (D.4) para las coordenadas de Jacobi, i.e.

$$\bar{x}_s = \alpha^{1/2} x_s \quad (s = 1, 2, \ldots, A-1) \qquad (D.6)$$

obtenemos:

$$I(\alpha) = \alpha^{-(\omega + \frac{A-1}{2})} \int_{\bar{\tau}} [\bar{\Delta}'(A)]^2 \, W\!\left(A, \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} |\bar{x}_2' - \bar{x}_i'|\right) e^{-\bar{\rho}^2} \, d\bar{\tau} \qquad (D.7)$$

EXPRESIÓN QUE SE TRANSFORMA, USANDO (D.2) Y EL HECHO QUE LAS VARIABLES DE INTEGRACIÓN SON MUDAS, EN:

$$I(\alpha)=\alpha^{-(\omega+\frac{A-1}{2})}\int_{\tau'}[\Delta(A)]^2\, W(A,\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|)\,d\tau' \qquad (D.8)$$

EL ESTADO BASE $\Delta(A)$ SE DEFINIÓ A PARTIR DEL ESTADO COMPACTO $\Psi_0(x_1',x_2',\ldots,x_A')$ (4.3), DE TAL MANERA QUE:

$$\Delta(A)=\pi^{1/4}\, e^{x_A^2/2}\, \Psi_0(x_1',x_2',\ldots,x_A') \qquad (D.9)$$

SUSTITUYENDO ESTA ÚLTIMA EXPRESIÓN EN (D.8), USANDO EL HECHO QUE LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE JACOBI ES ORTOGONAL Y EL HECHO QUE:

$$\pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_A^2}\, dx_A = 1 \qquad (D.10)$$

OBTENEMOS LA SIGUIENTE EXPRESIÓN PARA $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=\alpha^{-(\omega+\frac{A-1}{2})}\int_{\tau'}[\Psi_0(x_1',x_2',\ldots,x_A')]^2\, W(A,\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|)\,dx_1'\,dx_2'\ldots dx_A' \qquad (D.11)$$

LA CUAL SE ENCUENTRA EXPRESADA ÚNICAMENTE EN TÉRMINOS DE LAS COORDENADAS DE LAS PARTÍCULAS. EXPRESANDO AL ESTADO COMPACTO $\Psi_0(x_1',x_2'\ldots,x_A')$ EN TÉRMINOS DEL SÍMBOLO DE LEVI-CIVITA, LA INTEGRAL $I(\alpha)$ ADOPTA LA SIGUIENTE FORMA:

$$I(\alpha)=\left[\alpha^{\omega+\frac{A-1}{2}}(A!)\right]^{-1}\varepsilon_{n_1'n_2'\ldots n_A'}\,\varepsilon_{m_1'm_2'\ldots m_A'}\int_{\tau'}\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\ldots\psi_{n_A'}(x_A')\, W(A,\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|)\,\psi_{m_1'}(x_1')\psi_{m_2'}(x_2')\ldots\psi_{m_A'}(x_A')\,d\tau' \qquad (D.12)$$

LA CUAL SE TRANSFORMA, USANDO LA ORTONORMALIDAD DE LOS ESTADOS, EN:

$$I(\alpha)=\left[\alpha^{\omega+\frac{A-1}{2}}(A!)\right]^{-1}\left[(A-2)!\,(\delta_{n_1'm_1'}\delta_{n_2'm_2'}-\delta_{n_1'm_2'}\delta_{n_2'm_1'})\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\, W(A,\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|)\,\psi_{m_1'}(x_1')\psi_{m_2'}(x_2')\,dx_1'\,dx_2' \qquad (D.13)$$

EXPRESIÓN QUE A SU VEZ PUEDE ESCRIBIRSE COMO:

$$I(\alpha)=\left[A(A-1)\alpha^{\omega+\frac{A-1}{2}}\right]^{-1}\sum_{n_1',n_2'=0}^{A-1}(J_{n_1'n_2'}-K_{n_1'n_2'}) \qquad (D.14)$$

donde $J_{n_1'n_2'}$ y $K_{n_1'n_2'}$ SE CONOCEN COMO LA INTEGRAL DIRECTA Y LA INTEGRAL DE INTERCAMBIO RESPECTIVAMENTE Y SE DEFINEN A CONTINUACIÓN:

$$J_{n_1'n_2'}=\iint_{-\infty}^{\infty}\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\, W(A,\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}|x_2'-x_1'|)\,\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')\,dx_1'\,dx_2' \qquad (D.15)$$

$$K_{n_1' n_2'} = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2') W(A, \tfrac{1}{\sqrt{2}}|x_2'-x_1'|)\psi_{n_2'}(x_1')\psi_{n_1'}(x_2')\, dx_1' dx_2' \tag{D.16}$$

DENTRO DE EL ESQUEMA DE LOS OPERADORES DE ANIQUILACIÓN Y CREACIÓN, PODEMOS ESCRIBIR, DE ACUERDO CON (4.7), AL PRODUCTO $\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')$ DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2') = [(n_1')!\,(n_2')!]^{-1/2} (\eta_1')^{n_1'} (\eta_2')^{n_2'} \Psi_{00}'(x_1', x_2') \tag{D.17}$$

donde

$$\Psi_{00}'(x_1', x_2') = \psi_0(x_1')\psi_0(x_2') = \pi^{-1/2} e^{-(x_1'^2 + x_2'^2)/2} \tag{D.18}$$

Si INTRODUCIMOS LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS (2.1a)(2.1b) PARA A=2, LO QUE ESENCIALMENTE CONSISTE EN INTRODUCIR LAS COORDENADAS RELATIVA Y DEL CENTRO DE MASA, i.e.

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' - x_2') \tag{D.19}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \tag{D.20}$$

RESULTA FÁCIL PROBAR, LA SIGUIENTE RELACIÓN ENTRE LOS OPERADORES DE CREACIÓN:

$$\eta_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_2) \tag{D.21}$$

$$\eta_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\eta_1 + \eta_2) \tag{D.22}$$

LO CUAL SUMADA AL HECHO QUE

$$\Psi_{00}'(x_1', x_2') = \pi^{-1/2} e^{-(x_1'^2 + x_2'^2)/2} = \pi^{-1/2} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2} = \Psi_{00}(x_1, x_2) \tag{D.23}$$

NOS PERMITIRÁ REALIZAR UNA EXPANSIÓN DE LOS ESTADOS $\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2')$ EN TÉRMINOS DE LOS ESTADOS $\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)$. PARA REALIZAR LA EXPANSIÓN OBSERVAMOS QUE LA RELACIÓN (D.17) ADOPTA, CON AYUDA DE LAS RELACIONES QUE ACABAMOS DE OBTENER, LA SIGUIENTE FORMA:

$$\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2') = [2^{n_1'+n_2'}(n_1')!\,(n_2')!]^{-1/2} (\eta_1 + \eta_2)^{n_1'} (-\eta_1 + \eta_2)^{n_2'} \Psi_{00}(x_1, x_2) \tag{D.24}$$

la cual puede escribirse como:

$$\psi_{n_1'}(x_1')\psi_{n_2'}(x_2') = [2^{n_1'+n_2'}(n_1')!\,(n_2')!]^{-1/2} \sum_{s_1=0}^{n_1'} \sum_{s_2=0}^{n_2'} (-1)^{s_2} \binom{n_1'}{s_1}\binom{n_2'}{s_2} \eta_1^{s_1+s_2} \eta_2^{n_1'+n_2'-s_1-s_2} \Psi_{00}(x_1, x_2) \tag{D.25}$$

Y LA CUAL FINALMENTE SE TRANSFORMA, INTRODUCIENDO LAS SIGUIENTES DEFINICIONES

$$n_1 = s_1 + s_2 \tag{D.26}$$

$$n_2 = n_1' + n_2' - s_1 - s_2 \tag{D.27}$$

EN,

$$\psi_{n_1'}(x_1)\psi_{n_2'}(x_2) = \sum_{n_1, n_2 = 0}^{n_1'+n_2'} \langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) \tag{D.28}$$

donde los paréntesis de transformación $\langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle$ se definen como:

$$\langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle = \sum_{s=\max(0, n_1 - n_2')}^{\min(n_1, n_1')} (-1)^{n_1 - s} \binom{n_1'}{s} \binom{n_2'}{n_1 - s} \left[\frac{(n_1)!\,(n_2)!}{2^{n_1+n_2}(n_1')!\,(n_2')!} \right]^{1/2} \delta_{n_1+n_2,\, n_1'+n_2'} \tag{D.29}$$

y satisfacen la siguiente relación de simetría:

$$\langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle = (-1)^{n_1} \langle n_1 n_2 | n_2' n_1' \rangle \tag{D.30}$$

Relación que se puede probar fácilmente, efectuando el cambio de índice

$$t = n_1 - s \tag{D.31}$$

Mediante el uso de estos resultados, la integral $I(\alpha)$ (D.14) adoptará la siguiente forma:

$$I(\alpha) = \alpha^{-(\omega + \frac{A-1}{2})} \sum_{n_1', n_2' = 0}^{A-1} \sum_{n_1, n_2, m_1 = 0}^{n_1'+n_2'} [1 + (-1)^{m_1+1}] \langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \langle m_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \tilde{I}_{m_1 n_1}^{(\alpha)} \tag{D.32}$$

donde

$$\tilde{I}_{m_1 n_1}^{(\alpha)} = \frac{1}{A(A-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n_1}(x_1) W\left(0, \sqrt{\tfrac{2}{\alpha}}\,|x_1|\right) \psi_{m_1}(x_1)\, dx_1 \tag{D.33}$$

Introduciendo las formas funcionales de los eigenestados $\psi_{n_1}(x_1)$ (4.4) y del potencial (4.46), la integral (D.33) puede escribirse como:

$$\tilde{I}_{m_1 n_1}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\left[2^{n_1+m_1}(n_1)!\,(m_1)!\,\pi\right]^{-1/2}\left[-V_0 \tilde{I}_1 - \frac{1}{\alpha A}\tilde{I}_2\right] \tag{D.34}$$

donde

$$\tilde{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+\frac{1}{\alpha b^2})x_1^2} H_{n_1}(x_1) H_{m_1}(x_1)\, dx_1 \tag{D.35}$$

$$\tilde{I}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-x_1^2} H_{n_1}(x_1) H_{m_1}(x_1)\, dx_1 \tag{D.36}$$

PARA EVALUAR (D.35), DEFINIMOS:

$$a = \left(1 + \frac{1}{\alpha b^2}\right)^{-1/2} \qquad (D.37)$$

$$x = \frac{x_1}{a} \qquad (D.38)$$

DE TAL FORMA QUE:

$$\tilde{I}_1 = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n_1}(ax)\, H_{m_1}(ax)\, dx \qquad (D.39)$$

LA CUAL, DE ACUERDO A LA FÓRMULA 7.374 (9) DE LA REFERENCIA (14), TOMA EL SIGUIENTE VALOR:

$$\tilde{I}_1 = a\pi^{1/2} \sum_{k=0}^{\min(m_1,n_1)} 2^k (k!) \binom{m_1}{k}\binom{n_1}{k} (1-a^2)^{\frac{m_1+n_1}{2}-k} H^{(0)}_{m_1+n_1-2k} \qquad (D.40)$$

donde $H^{(0)}_{m_1+n_1-2k}$ ES EL POLINOMIO DE HERMITE DE ORDEN m_1+n_1-2k EVALUADO EN CERO, CUYO VALOR PUEDE CONOCERSE USANDO LAS FÓRMULAS 8.956 (6) y (3) DE LA REFERENCIA ANTERIOR; ESTE HECHO JUNTO CON LA ECUACIÓN (D.37) TRANSFORMA LA INTEGRAL (D.40) EN:

$$\tilde{I}_1 = (-1)\frac{\pi^{1/2}}{V_0} \alpha^{\omega + \frac{\rho - 1}{2}} \sum_{k=0}^{\min(m_1,n_1)} L_k(m_1,n_1,\alpha) \qquad (D.41)$$

donde LOS COEFICIENTES $L_k(m_1,n_1,\alpha)$ HAN SIDO DEFINIDOS EN EL CAPITULO IV, A TRAVÉS DE LA ECUACIÓN (4.67a)

PARA EVALUAR LA INTEGRAL $\tilde{I}_2$ (D.36) USAREMOS LA FÓRMULA (13.1.11) DE LA REFERENCIA (18), LA CUAL EN TÉRMINOS DE LOS COEFICIENTES $N(m_1,n_1)$ (4.67b), DEFINIDOS TAMBIÉN EN EL CAPITULO IV, TOMA EL SIGUIENTE VALOR:

$$\tilde{I}_2 = (-1)\pi^{1/2} A\, N(m_1,n_1) \qquad (D.42)$$

SUSTITUYENDO (D.41) y (D.42) EN (D.34), OBTENEMOS EL SIGUIENTE VALOR PARA $\tilde{I}_{m_1n_1}(\alpha)$, i.e.

$$\tilde{I}_{m_1n_1}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[2^{n_1+m_1}(n_1)!(m_1)!\right]^{-1/2} \left\{ \alpha^{\omega + \frac{\rho-1}{2}} \sum_{k=0}^{\min(m_1,n_1)} \left[L_k(m_1,n_1,\alpha)\right] + \alpha^{-1} N(m_1,n_1) \right\} \qquad (D.43)$$

EL CUAL A SU VEZ SUSTITUIDO EN (D.32), NOS PERMITE FINALMENTE CONOCER EL VALOR DE

LA INTEGRAL $I(\alpha)$, EL CUAL VIENE DADO POR:

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{n_1' n_2' = 0}^{A-1} \sum_{n_1 n_2 m_1 = 0}^{n_1' + n_2'} [1 + (-1)^{m_1+1}] \left[2^{n_1+m_1} (n_1)! (m_1)! \right]^{-1/2} \langle n_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \langle m_1 n_2 | n_1' n_2' \rangle \left\{ \sum_{k=0}^{\min(m_1, n_1)} [L_k(m_1, n_1, \alpha)] + \alpha^{-(\omega + \frac{A+1}{2})} N(m_1, n_1) \right\} \quad (D.44)$$

REFERENCIAS

1. W Elsasser, J Phys Radium 5, 625 (1934).
2. MG Mayer y JHD Jensen, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure (John Wiley-New York, 1955).
3. N Bohr, Nature (London) 137, 344 (1936); N Bohr y F Kalckar, K Dan Vidensk Selsk Mat Fys Medd 14, 10 (1937).
4. A Bohr y B Mottelson, K Dan Vidensk Selsk, Mat Fys Medd 27, 16 (1953).
5. W Zickendraht, J Math Phys 12, 1663 (1971).
6. A Ya Dzublik, VI Ovcharenko, AI Steshenko y G Filippov, Yad Fiz 15, 869 (1972),- Sov J Nucl Phys 15, 487 (1972).
7. V Vanagas, The Microscopic Nuclear Theory, Lecture Notes, Dept of Physics, Uni-- versity of Toronto, 1977.
8. G Filippov, Fiz Elem Chastits, At Yadra 4, 992 (1973), Sov J Part Nucl 4, 405, - (1974).
9. E Chacón, M Moshinsky y V Vanagas, J Math Phys (Sujeto a publicación).
   M Moshinsky y TH Seligman, J Math Phys (Sujeto a publicación).
   E Chacón y M Moshinsky, Kinam (Sujeto a publicación).
10. P Kramer y M Moshinsky, artículo contenido en Group Theory and its Applications- Vol I, editado por EM Loebl (Academic Press, 1968).
11. E Chacón, M Moshinsky y P Winternitz, Kinam 1, 259 (1979).
12. M Moshinsky, TH Seligman y KB Wolf, J Math Phys 13, 901 (1972).
13. NN Lebedev, Special Functions and their Applications (Dover Publ Inc, New York,- 1972).
14. IS Gradshteyn y M Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products (Academic Pr.- New York, 1980).
15. TA Brody y M Moshinsky, Tables of Transformation Brackets, second edition (Gor-- don and Breach Science Publishers, New York, 1969).
16. E Merzbacher, Quantum Mechanics, second edition (John Wiley, New York, 1970).
17. AJ Dragt, J Math Phys 6, 533 (1965).
18. G Arfken, Mathematical Methods for Physicist, second edition (Academic Press, -- New York, 1970).
19. D Lawden, An Introduction to Tensor Calculus and Relativity (Chapman and Hall, - London, 1975).