Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Desarrollo de Algunos Temas para la Enseñanza de la Geometría en el C.C.H

Tesis

Que para Obtener el Título de

Actuario

Presenta

Bertha Medina Flores

México D.F. 1986

Índice

Introducción

Geometría Euclidiana

Introducción

A través de 11 años de trabajo como profesor a nivel medio superior impartiendo la materia de matemáticas III (Geometría Euclideana, Geometría Analítica) me he enfrentado a diversos problemas entre los que considero importantes los siguientes:

a) El alumno es incapáz de repetir la demostración de un teorema la cual ha sido explicada con anterioridad en clase y el alumno ha asegurado haberla entendido.

b) Encontramos en la mayoría de los alumnos un rechazo hacia la materia.

Ante este panorama desfavorable surgió en mi la pregunta ¿Qué factores influyen para que se presenten estos problemas?

Pienso que algunas posibles respuestas podrían ser:

a) Considero que la enseñanza de las matemáticas ha consistido en la adquisición de técnicas en gran parte y no en la adquisición de conceptos que es lo que llevaría a discernir claramente el porque y como de las cosas que es mucho mas que entender como opera la técnica; y es esa falta de comprensión del concepto lo que impide que la mayoría de los alumnos entienda una demostración para así poderla repetir correctamente.

b) Deseo obtener una actitud positiva de los alumnos hacia la materia, pero partiendo de una actitud negativa "su rechazo" la cual impide llegar a algo positivo sea lo que fuese, pienso que ese rechazo se debe a la dificultad que ofrece su aprendizaje, debido esto en parte a la falta de motivación de nosotros los profesores, creo que si hallamos la "formula" que motive a nuestros alumnos para que ellos sientan la alegría de descubrir y construir y de esta manera entender; estaremos contribuyendo a disminuir ese "rechazo".

Pensando en lo anterior surgió en mi la idea de presentar este material el cual tiene la finalidad de ser una guía para el estudiante de bachillerato; el enfoque que se le ha dado, es el de no presentarlo con rigurosidad matemática exagerada, lo que permite de alguna manera hacerlo mas accesible, así como mostrar que las teorías deductivas en matemáticas son un sistema donde están bien explicitados los términos no definidos y las proposiciones no demostradas, siendo establecidas estas últimas como simples hipótesis a partir de las cuales las proposiciones del sistema pueden construirse según reglas lógicas expresamente determinadas.

En este trabajo además, la participación del alumno es fundamental, razón por la cual se han creado lo que llamamos "Talleres en Matemáticas" donde el propósito de éstos es que el alumno muestre en forma física con ayuda de material concreto las proposiciones que los ellos mismos inducen de acuerdo a sus observaciones; de esta forma el alumno primeramente manipula los objetos de conocimiento, lo cual hace que se cuestione, medite y trate de buscar mayores y mejores explicaciones en fin queremos alumnos de C.C.H críticos.

De esta manera después de abordar los temas que comprende el curso de matemáticas III (Geometría Euclideana, Geometría Analítica) de la forma antes expuesta espero que el alumno al finalizar el curso pueda explicar con sus propias palabras "En qué consiste el Método Teórico Deductivo" que es el propósito del mismo.

Unidad I

Geometría Euclideana

Tema I

Reseña Histórica

Bosquejo Histórico

Objetivo. - el alumno tendrá un panorama general de como surge y se desarrolla la Geometría Euclideana.

Los comienzos de la geometría se remontan a la prehistoria; a medida que la población crecía fue necesario construir refugios bastante grandes y con mucha resistencia, para construir un refugio de tamaño adecuado se tenían que comparar longitudes.

Los antiguos babilonios fueron pioneros en esta rama de las matemáticas; este pueblo logró drenar el pantano que existía entre el río Tigris y el Eufrates, haciéndolo habitable.

También los egipcios hicieron grandes aportaciones; las inundaciones anuales del Nilo, al hacer desaparecer las márgenes divisorias de las tierras de labor, hicieron necesario hacer comprobaciones con cierta frecuencia, de manera que pudieran distinguirse las distintas propiedades, estas comprobaciones dieron lugar a una serie de fórmulas geométricas las cuales se pudieron establecer por medio de las experiencias y a base de practicarlas constantemente, por eso muchas de estas fórmulas no eran sino meras aproximaciones.

Veamos a continuación un ejemplo de estos ensayos: Si nosotros quisiéramos encontrar la superficie de un terreno de forma rectangular o de un paralelogramo nos resultaría sencillo, puesto que tenemos fórmulas para encontrar áreas de distintas figuras geométricas, y ya que sabemos que la fórmula para encontrar el área de un paralelogramo es la misma que para encontrar el área de un rectángulo, bastaría aplicar la fórmula en cualquiera de los dos casos para encontrar el área correspondiente y estamos seguros de poder hacer ésto porque la validéz de la fórmula ya ha sido demostrada; pero veamos ahora que hicieron por ejemplo los egipcios para encontrar el área de terrenos como éstos:

Si el terreno era de forma rectangular, para encontrar el área lo que hacían los egipcios era observar cuantos cuadrados pequeños cabían en ese terreno y de ésta manera podían hacer comparaciones con otros terrenos que tuvieran la misma forma. Si el terreno tenía forma de paralelogramo volvían hacer lo mismo y observaron a base de medir muchas áreas de muchos paralelogramos y muchos rectángulos que casi siempre el área de un paralelogramo venía a ser igual a la de un rectángulo que tuviera la misma altura y longitud y que si había alguna ~~dis~~ discrepancia esta podría explicarse como debida a una medición defectuosa o a figuras trazadas defectuosamente.

Fue por ésto que la fama de los egipcios se extendió grandemente, sus métodos fueron estudiados cuidadosamente y al conjunto de ellos se les llamó "Geometría" que se deriva de la palabra griega:

-Geo- que significa tierra y -metron- que significa medir.

Sin embargo estos estudios, al ser puramente prácticos, no tenían otro interés que el de su utilidad y por lo tanto se le prestaba poco interés a su perfeccionamiento; sólo se le ponía interés en el caso que resultara algo útil en su aplicación. Algo así como lo que nos sucede a veces; nos interesamos únicamente si sabemos que obtendremos de algo alguna utilidad y aún no nos interesamos por ser inconcientes de la necesidad.

Fue hasta la antigua Grecia cuando los filósofos griegos se interesaron por conocer la geometría por ella misma y no por la utilidad que pudiera dar. Es entonces cuando la geometría comienza como Ciencia Deductiva y gracias a los esfuerzos de muchos y notables predecesores de Euclides, como Tales de Mileto (640 - 546 A. de C.), Pitágoras (580 - 500 A. de C.) y Eudoxio (408 - 355 A. de C.), se hicieron grandes descubrimientos geométricos.

Platón se interesó a fondo por la geometría y aunque realizó muy pocas contribuciones originales, subrayó la necesidad de demostraciones rigurosas, preparando así la escena para el papel que Euclides había de representar más adelante con su famoso libro: "Los Elementos". Este libro escrito entre los años 330 y 320 A. de C., ha tenido probablemente más influencia sobre la actual civilización que cualquier otra creación del genio griego.

Los Elementos que aunque están lejos de alcanzar la perfección aspirada por Euclides, han merecido la admiración de la humanidad durante mas de 2000 años.

Los Elementos de Euclides es el texto mas importante que se haya escrito, puesto que no solo se establece en forma permanente la índole de la geometría como Ciencia Deductiva, sino que son un modelo de organización lógica tan efectivo y elegante que actualmente la mayor parte de las matemáticas se edifica similarmente a ese modelo. En otras diciplinas tales como la biología; la química, la economía, la física y la psicología, la meta de los estudiosos es alcanzar una estructura lógica parecida. Es nuestro objetivo, entonces, al estudiar la Geometría Euclideana, superar la concepción tradicional de ésta como un conjunto de recetas prácticas y entenderla como ciencia raccional.

Ficha 1

Contesta el siguiente cuestionario en base a la lectura que realizaras acerca del desarrollo histórico de la geometría, la que podrás encontrar en el apéndice I-1

Cuestionario

1.- ¿ Por qué fueron indispensables los conocimientos de los geómetras en la antiguedad ?.

2.- Los científicos de la antigua Babilonia, Egipto, Grecia, India y China. ¿ Hacían uso ya de los términos axioma y teorema ?.

3.- ¿ Quiénes fueron los que demostraron los primeros teoremas ?

4.- ¿ Quién dió una forma de cálculo para predecir los eclipses de sol?.

5.- Además de Tales ¿ quiénes mas jugaron un papel importante en la elaboración de métodos de demostración de los primeros teoremas?.

6.- ¿ En que consistian los métodos de análisis y síntesis propuestos por Platón?.

7.- ¿ Qué significaba para los indúes demostrar una proposición geométrica?.

8.- ¿ Que papel juegan los dibujos (figuras) en la geometría?.

9.- Quien elaboró las leyes de la lógica en tiempos de Platón?.

10.- Según Aristóteles ¿ cuáles deberian ser las bases de la geometría?.

11.- ¿ En qué consiste el método de Aristóteles?.

12.- ¿ Cuál fue el gran mérito de Euclides?

13.- Menciona algunas de las obras de Euclides

14.- ¿ Qué obra se concidera la mas importante?

15.- El libro "Los Elementos" de ¿ cuántos capítulos consta?.

16.- Describe brevemente el contenido de cada uno de los capítulos de "Los Elementos".

17.- ¿ Qué papel juegan los axiomas y postulados en el libro "Los Elementos"?.

18.- ¿ Qué diferencia hizo Euclides entre un axioma y un postulado.

19.- Qué autor imita a Euclides en su obra ("Los Elementos").

20.- ¿ Cuál es la escencia del método axiomático actual ?.

21.- ¿ Cómo define Euclides "punto", y que error encuentras tu en esta definición?

22.- ¿ Qué opinión te deja esta lectura a-cerca de "Los Elementos".

Apéndice I - 1

Geometría (Desarrollo Histórico)

Como ya se dijo los primeros geómetras fueron medidores de tierras y constructores. Así la Geometría surgio en la mas profunda antigüedad y particularmente fue desarrollada en el Egypto antiguo, Babilonia, Grecia, India y China.

En las primeras etapas del Egipto esclavista, luego de la etapa del comunismo primitivo, donde lo producido o recolectado ya no era repartido equitativamente entre la comunidad, sino que los sobrantes eran acaparados por sacerdotes o personajes de la comunidad y por lo tanto la propiedad privada habia aparecido. La propiedad privada sobre la tierra, fuente de una de las principales riquezas, tenía que aparecer y paralelamente a ella la necesidad de efectivamente reestablecer anualmente los linderos de los diferentes terrenos enriquecidos por los fértiles lodos que arrastraban las inundaciones del Nilo. Pero llegó el momento en que la delgada franja beneficiada por las inundaciones no fue suficiente y tuvieron que abrir nuevas tierras al cultivo para las cuales hubo necesidad de dotarlas de algún sistema de irrigación artificial. En ésto, no podian de nuevo arreglarselas sin los geómetras.

Los conocimientos de los geómetras también fueron indispensables en la construcción de las pirámides, las esfinges de cantera, tumbas y casas habitación. Los geómetras medidores de tierras y los constructores conservaban sus conocimientos en secreto y eran socialmente - -

reconocidas.

En esos tiempos los científicos no usaban los términos "axioma" o "teorema", tampoco todo lo reducían a demostraciones lógicas, si en cambio se deleitaban con reglas dadas, obtenidas mediante experimentos en forma práctica, las cuales eran transmitidas de generación en generación oralmente.

Los autores de los primeros teoremas es usual considerar que fueron los griegos. En el siglo VI A.de C. vivió Tales que con sus discípulos puede decirse que demostraron los primeros teoremas. Teoremas sobre igualdad de ángulos, en particular el teorema de la igualdad del ángulo recto con el ángulo inscrito en la semicircunferencia, el teorema sobre la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo isósceles. En Astronomía fue Tales quien por primera vez dió una forma de cálculo para predecir los eclipses de sol. En particular el pronóstico emitido por él respecto de un eclipse solar ocurrió en el plazo y lugar predichos. Los historiadores de la antigüedad afirman que Tales podía calcular la altura de las velas de una embarcación, así como la distancia de una embarcación anclada a la orilla del mar con base a razonamientos geométricos sin necesidad de mediciones directas.

En la elaboración de los métodos de demostración de los primeros teoremas jugaron un papel importante tanto Platón como Aristóteles (siglo IV A.de C.). Platón organizó una escuela en Atenas que bautizó como "Academia". Se sabe que para su Academia Platón escogió un bello jardín que servía para descansar y desarrollar las discusiones de la nata de los intelectuales de Atenas (ricos ciudadanos libres). Debido a que Platón consideraba a la Geometría la base de todas las ciencias a la entrada de la "Academia" había una inscripción que rezaba — No entre si no sabe geometría — o algo similar. Platón exigía de los científicos que en las deducciones de las reglas geométricas no se conformaran y deleitaran con solamente las imágenes materiales y los razonamientos basados en experimentos, sino que demostraran dichas reglas a partir de propiedades admitidas como ciertas o previamente demostradas, guiadas por métodos de análisis y síntesis elaborados y propuestos a los matemáticos por el mismo Platón.

Esto parecería un idealismo a ultranza, pero no es solo eso, sino que la esencia de la matemática también esta relacionada con procesos tales como idealización y abstracción por la cual este tipo de plantiamientos no son trivialmente rechazables.

Se sabe que todo problema al menos de la matemática elemental consiste de algunos datos (en general numéricos) y de incognitas. Mediante razonamientos se trata de determinar a estos a partir de aquellos.

Incluso se empieza, si el problema es complicado, por separarlo en partes cada una de las cuales será mas simple. Buscando caminos correctos para la resolución de estos problemas se parte de lo que se desea hallar (de la incógnita) y se va de ésta a los datos. Este es el camino de busqueda de la solución consistente en pasar de la incógnita a los datos, a transitar de lo que hay que obtener a las condiciones dadas del problema y que

Platón llamaba análisis. Luego de realizar el análisis no es complicado completar el proceso para llegar a la solución mediante el tránsito inverso, es decir pasando de los datos del problema a las incógnitas. Esta parte cognocitiva del método basado en el tránsito ~~inverso~~ de los datos a la incógnita y que nos da el resultado final del problema Platón le llamaba síntesis. El análisis precede a la síntesis y el método analítico sintético es aplicable no solo a la geometría sino a toda la matemática elemental.

La necesidad en cuanto a las demostraciones surgió hace 4000 años cuando los indues intentaban deducir las reglas geométricas también necesarias en sus trabajos de medición de tierras y construcción a partir de representaciones visuales materializadas. Demostrar alguna proposición geométrica para ellos significaba verificar visualmente el cumplimiento de la misma a partir de lo explícito que fuera el dibujo o gráfica de la proposición.

Pero sabemos que confiarnos a nuestra vista en geometría nos puede llevar a errores pues se presentan múltiples ilusiones ópticas, es por esto que las representaciones visuales de los dibujos nos pueden llevar a resultados incorrectos. Debido a esto es que los dibujos en geometría deben jugar un papel auxiliar y su veracidad tiene que ser comprobada lógicamente.

Los griegos antiguos consideraban que para demostrar una nueva propiedad geométrica era insuficiente que se viera del dibujo, había que deducirla mediante razonamientos a través de ciertas leyes de la lógica (como ciencia de los razonamientos ciertos) como consecuencia de verdades seguras (los axiomas como verdades indiscutibles), cuya certeza se establece en base a la experiencia de muchos siglos y de hechos demostrados con anterioridad. Para esto era necesario dominar las leyes de la lógica formal.

En opinión de Aristóteles como bases de la geometría deberían aparecer los axiomas cuya verdad no podría ponerse en duda. Tales axiomas deberían ser un número finito y las restantes proposiciones geométricas entrarían en la categoría de teoremas (representaciones). Los axiomas no requieren de demostración mientras que los teoremas se demuestran mediante los axiomas usando las leyes de la lógica.

Demostrar un teorema según Aristóteles es obtenerlo mediante razonamientos lógicos de los axiomas previamente establecidos y de otros teoremas ya demostrados.

El método de Aristóteles consistente en ir de los axiomas a los teoremas, esto es de las verdades en su aspecto mas general a las verdades particulares él mismo lo llamó el método deductivo.

De lo dicho es consecuencia que la geometría vista con los ojos de Aristóteles debe construirse deductivamente y ser una diciplina matemática deductiva, como realmente lo es en la actualidad.

De Euclides se cuentan muchos anécdotas, pero uno que revela su no sometimiento a los poderosos fue la contestación al mandamás de su época de que en geometría no existen caminos fáciles para su estudio, en geometría no existen caminos reales, en la ciencia no existen caminos fáciles para reyes).

Euclides vivió en el siglo III A. de C. fue profesor de matemáticas en Alejandría. En esa época se había concentrado una buena cantidad de trabajos de los griegos antiguos predecesores inmediatos de Euclides y de sus contemporaneos.

A todo ese, no despreciable, material Euclides tuvo acceso. El gran mérito de Euclides, ante todo, parece haber sido el sistematizar todo ese material disperso de que dispuso.

Dicho material disperso lo unió en un todo unitario para obtener así una sólida construc-ción llamada "geometría". Tal diseño "arqui-tectónico" de la geometría como ciencia fue realizado por Euclides en su tratado "Los Elemen-tos de Geometría" que por comodidad mencionare-mos en lo sucesivo como "Los Elementos" (*).

Además de "Los Elementos" Euclides escribió o-tras obras: "Datos", "Sobre la división de figuras", "Óptica" "Secciones Cónicas" (esta última hasta no-sotros no trascendió) también dejó un Tratado de Astronomía.

Los 13 libros de "Los Elementos" estan escritos con un plan unitario expuestos a través del método deductivo.

(*) Se dice que la obra "Los Elementos" de Euclides esta formada por 13 "libros" aunque estos no son en el senti-do actual de ésta palabra, sino mas bien grandes capítulos o apartados de una obra unitaria.

"Los Elementos" estan escritos como una monografía científica, lo cual no obsta para que durante muchos siglos haya servido como libro de texto donde las nuevas generaciones se preparaban. Esto se dió no porque "Los Elementos" fuera el único libro sobre geometría pues inclusive desde la antigüedad hubo autores como Leon y Tezado de Magnesia cuyas obras no pudieron competir con "Los Elementos" quedando muy atras de éste en cuanto a comprensibilidad y claridad de exposición, por eso ocurrió que tarde o temprano fueron olvidados, mientras que la enorme autoridad acumulada de "Los Elementos" permitió que "Euclides y "Geometría" se convirtieran casi en sinónimos y que inclusive en la actualidad muchos de los textos de geometría sean casi copia o tengan una gran influencia de "Los Elementos".

Actualmente se llama Geometría Euclideana a la geometría contenida en "Los Elementos". Se considera que no toda la geometría que dominaban los griegos está contenida en "Los Elementos" pues temas geométricos como las cónicas no están incluidos en "Los Elementos" habiendo escrito al respecto un tratado especial sobre secciones cónicas que como ya dijimos no trascendió hasta nosotros desgraciadamente.

El contenido de "Los Elementos de Geometría" de Euclides es el siguiente:

En el libro I se exponen condiciones para la igualdad de triángulos, la teoría de las rectas paralelas, las relaciones entre los & lados y los ángulos de un triángulo, el estudio del área de triángulos y paralelogramos, se demuestra el teorema de Pitágoras en su formulación geométrica.

En el libro II se encuentra el álgebra geométrica consistente de una serie de identidades algebraicas demostradas geométricamente. Se termina con la solución geométrica de las ecuaciones cuadráticas.

El libro III contiene el estudio del círculo y la circunferencia, de las secantes y tangentes, así como de los ángulos formados por ellas y finalmente propiedades de puntos respecto de la circunferencia.

El libro IV contiene el estudio de los polígonos inscritos y circunscritos, así como la construcción de polígonos regulares (cuadrados, pentágonos, pentadecágonos).

En el libro V se expone en forma geométrica la teoría de números racionales e irracionales incluyendo las operaciones fundamentales sobre ellos, así como la teoría geométrica de las proporciones según Eudoxo, que los antiguos griegos dominaban a la perfección.

En el libro VI se estudia la semejanza de figuras y las magnitudes proporcionales como ampliación del algebra geométrica, y se aplica la teoría de proporciones expuesta en el libro V.

~~Elos~~ En los libros VII, VIII y IX se trata la teoría geométrica de los números que contiene el estudio del máximo común múltiplo y del mínimo común divisor (VII) conteniendo además el estudio de las proporciones continuas referidas a números y las relaciones entre las segundas y terceras potencias de los números (VIII y IX). En estos libros aparece el famoso teorema de Euclides sobre la infinidad del conjunto de números primos demostrado con el método de reducción al absurdo.

En el libro X se expone el ulterior desarrollo del algebra geométrica que incluye el estudio de las magnitudes inconmensurables y de las irracionalidades cuadráticas.

En los libros XI, XII y XIII se estudia la estereometría consistente de problemas sobre la determinación de relaciones entre áreas de círculos, volúmenes de pirámides y otros cuerpos.

En la resolución de éstos problemas se utiliza el método de exhaución de Eudoxo (XI y XII).

"Los Elementos" terminan con el estudio de los poliedros empezando con el tetraedro y siguiéndose con el octaedro, icosaedro (acotado por 20 triángulos equiláteros), octaedro (cubo) y el dodecaedro (limitado por 12 pentágonos regulares).

"Los Elementos" de Euclides durante 2000 años fueron considerados la construcción ideal para cualquier teoría científica. Esta categoría de "faro luminoso" le fue ganada debido a su sencillez y fortaleza, en base a la cual siempre causó asombro y admiración.

Esta gran obra comienza cada capítulo con definiciones y el primero inicia con un listado de "postulados" y "axiomas" admitidos por su evidencia sin demostración (en total son catorce) y son la base para la realización de cualquier demostración, donde además las gráficas y dibujos juegan estrictamente un papel auxiliar. El problema según Euclides lo resuelve no el esquema dibujado sino los razonamientos lógicos de la demostración deductiva. Toda proposición geométrica por simple que parezca debe ser demostrada, esto es, obtenida en forma deductiva como consecuencia de la lista mencionada de postulados y axiomas.

¿En qué se diferencia un "postulado" de un "axioma"?. Desde el punto de vista actual puede afirmarse que no hay diferencia, puesto que ambos son en esencia proposiciones geométricas admitidas sin demostración. Sin embargo una revisión detallada del contenido de los postulados y los axiomas en Euclides nos llevará a notar ciertas diferencias que en su época fueron importantes. Enunciaremos pues los postulados y los axiomas:

Postulados

I De cualquier punto a otro puede trazarse una recta.

II Todo segmento de recta puede prolongarse en ambos sentidos indefinidamente.

III De cualquier punto tomado como centro y con cualquier radio puede trazarse una circunferencia.

IV Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

V Cuando una recta intersecta a otras dos formando ángulos alternos internos, cuya suma es menor que dos ángulos rectos estas dos rectas se intersectarán del lado donde dicha suma de angulos es menor que dos ángulos rectos.

Axiomas

I Dos magnitudes iguales a una tercera son iguales entre sí.
II Si a magnitudes iguales se le agregan magnitudes iguales los resultados son iguales.
III Si a magnitudes iguales se le quitan otras magnitudes iguales, los resultados serán iguales.
IV Si a cosas desiguales les agregamos cosas iguales, entonces los resultados son desiguales (el sentido de la desigualdad no cambia).
V El doble de cosas iguales es igual.
VI La mitad de cosas iguales es igual.
VII Figuras susceptibles de sobreponerse son iguales entre sí.
VIII El todo es mayor que cualquiera de sus partes.
IX Dos rectas no pueden abarcar todo el espacio.

De la comparación de postulados y axiomas observamos que los postulados son efectivamente lo mismo que los axiomas, sin embargo también podemos apreciar que los postulados son de contenido exclusivamente geométrico y sirven solo en geometría, mientras que la mayoría de los axiomas salen fuera del dominio estricto de la geometría y fuera de los límites de la geometría pueden ser aplicados en otras ramas de la matemática y hasta fuera de ella como por ejemplo en la Física. En efecto, digamos por ejemplo que el axioma VIII (El todo es mayor que cualquiera de sus partes) es aplicable lo mismo en geometría que en otras ramas del conocimiento.

La diferencia señalada entre postulados y axiomas en la época de Euclides se sentía mucho mas fuerte debido a que en esa época no se tenía aún papel y los manuscritos se hacían en pergaminos y relativamente eran ejemplares raros, por esto también la principal forma de comunicación entre los científicos de esa época consistía en las disputas. Lo usual parece ser consistía en que una persona retaba a otra a medir su fuerza intelectual. Estas disputas ocurrían en un ambiente solemne con gran asistencia pública y forzosamente con la asistencia de jueces (notarios) que vigilaban la buena marcha de los debates. En esa época también estaban generalizados, a la par con otras, los temas de disputa matemáticos, donde generalmente se discutían problemas que esperaban su solución o demostración. En este tipo de disputas al vencedor le esperaba el honor y recompensas materiales

Imaginemos a Euclides en una de tales disputas invitado por otro contendiente geómetra.

Este le propone a Euclides resolver 5 problemas y viceversa Euclides le deberá proponer otros tantos a su contendiente; los problemas tenían que ser sobre el mismo tema (geometría) y sobre las "mismas" condiciones, digamos por ejemplo 5 problemas de construcción. Para conocer las condiciones de los problemas se daba un cierto tiempo luego de lo cual los conten-dientes tenían que llegar a un acuerdo sobre cuales axiomas y postulados podían usar. Usualmente la lista de axiomas era admitida sin discución y por regla general, por lo mismo (Una situación, mas difícil se presentaba cuando sólo se admitía la lista de postulados que recordando estaban relacionados con proposiciones estrictamente geométricas para directamente resolver el problema) Euclides al llamado de su contendiente estaba obligado a resolver públicamente los 5 problemas propuestos si, primero le permitían usar tales o cuales axiomas cuya validez por regla no se ponía en duda su contrincante también las podía usar; segundo si complementariamente podía usar sin demostración otras proposiciones geométricas restrictivas que no tienen un caracter general y son ciertas sólo en los límites de la geometría. Son precisamente estas restricciones complementarias, para la solución de problemas geométricos, que desde entonces se les llama postulados. Si el contrincante de Euclides está de acuerdo en todos los postulados que deseaba usar entonces Euclides daría el aval para que la disputa procediera. Si la parte contendiente no estaba de acuerdo al menos en uno de los postulados, entonces la disputa se aplazaba.

En lo sucesivo para nosotros los postulados y axiomas les llamaremos simplemente axiomas.

Como arriba indicamos debido a la gran autoridad adquirida por Euclides pues su obra era considerada como la cúspide del rigor científico tuvo muchos imitadores en diferentes lenguas que tan solo comentaban y explicaban sus proposiciones pero que no las sometían ni en su forma ni en su contenido, por principio, a crítica. Hubo incluso filósofos que elevaron a "Los Elementos" al rango de absolutos, es decir como el estudio impecable sobre las propiedades del espacio real que nos rodea.

Newton (1643-1727) estudió cuidadosamente "Los Elementos" y en base a ellos "construyó" su mecánica (que hoy en día identificamos como clásica).

Kant (1724-1804) consideraba que los axiomas de "Los Elementos" son de carácter puramente a priori (no experimentales) es decir no dependientes de la práctica de los hombres ni del desarrollo de la sociedad.

El holandés Benedicto Spinoza (1632-1677) escribió su obra "Ética" en forma análoga a "Los Elementos" de Euclides. Introduce los axiomas éticos y postulados como el fundamento fuerte y seguro de su tratado, desarrollándolo en forma de teoremas deducidos uno tras otro con sus demostraciones deductivas sostenidas en el sistema de axiomas propuesto y los teoremas previamente demostrados.*)

Pero como todo en esta vida quedó mostrado que la genial sistematización que constituyen "Los Elementos" también tiene sustanciales defectos.

Esto fue mostrado entre otros por Lobachevski quien reconociendo que Euclides está en lo

*) La manera deductiva de exposición, hubo época en Europa en que, se consideró casi el único método de exposición de toda ciencia.

correcto y expresa ciertamente el espacio real, sin embargo ni lejanamente es completo y en cierto y conocido sentido es arbitrario. De antemano puede aclararse que los "defectos" de "Los Elementos" no desmerecen las virtudes sistematizadoras de Euclides ni su personalidad acumulada. La mayoría de los defectos que padecen "Los Elementos" quedan explicadas por el nivel de desarrollo que habían alcanzado las ciencias en la época en que fueron escritas.

Para mejor entender estos defectos y poner bien los puntos sobre las i-es conviene introducirse en el actual método axiomático de las obras científicas en geometría, concebido éste como una generalización del método deductivo expuesto por Euclides en sus "Elementos".

La esencia del método axiomático actual consiste en lo siguiente:

i) Se escogen los conceptos fundamentales de la geometría, que en la mayoría de las exposiciones son: "punto", "recta", "plano" y relaciones entre ellos expresadas en frases como "el punto pertenece a la recta", "el punto está entre otros dos puntos", etc. Los conceptos fundamentales no se definen, pues quedan caracterizados por todas sus propiedades necesarias para construir la geometría, las cuales quedan expresadas en los axiomas.

ii) Se forma un listado finito de axiomas que deben cumplir los conceptos geométricos fundamentales mencionados (en lo sucesivo la naturaleza de los conceptos fundamentales es irrelevante). Es digno de mencionarse que el sistema de axiomas debe satisfacer las siguientes restricciones:

1.- Ser no contradictorio, o sea que ninguno de los axiomas del sistema debe contradecir a cualquier otro, y consecuentemente ninguna de sus conclusiones debe llevar a contradicciones.

2.- Ser independiente, es decir que ninguno de los axiomas puede obtenerse como consecuencia de cualquier otro.

3.- Ser completo, esto es que el ulterior proceso de construcción de la geometría no ocurra que se necesite completar el sistema con nuevos axiomas que no aparecían en la lista original.

Es así que la no contradictoriedad y completez del sistema de axiomas de la geometría permiten, sin basarnos en ninguna representación gráfica o experiencia práctica directa y sin convenciones adicionales, estrictamente mediante la lógica resolverse una proposición geométrica (teorema es demostrable o no. En otras palabras con base en un sistema completo de axiomas, de dos proposiciones geométricas contradictorias p y $\overline{p}$ (negación de p) una de ellas es siempre demostrable y la otra refutable.

iii) Luego de escoger los conceptos fundamentales y de dar el sistema de axiomas la subsiguiente construcción de los diferentes "pisos" del edificio de la geometría se realiza partiendo de dos restricciones:

1) Todo concepto geométrico (término, palabra) si no es uno de los conceptos fundamentales se define del concepto afín más próximo y de los criterios tipo necesarios. Definir algún concepto geométrico significa descubrir su contenido re

duciéndola a los conceptos fundamentales introducidos o a otros conceptos previamente definidos.

2) Toda proposición geométrica (teorema, lema, etc.) por más sencilla que parezca se demuestra a través de la lógica. Demostrar una proposición lógicamente (axiomaticamente) significa obtenerla deductivamente mediante razonamientos como consecuencia del sistema de axiomas introducidos y de los teoremas previamente demostrados. Las gráficas y dibujos en estos razonamientos juegan un papel estrictamente auxiliar. El problema lo resuelve la lógica de los razonamientos deductivos, mientras que la intuición y los dibujos explicativos se admiten solo como "voz consejera".

Lo usual en los textos de geometría es elaborarlos conforme al método deductivo de Euclides pero basados en una lista incompleta de axiomas donde los dibujos por lo tanto en ciertos casos dejan de ser axiliares y se convierten en "voz resolutiva", o sea sustituyen a la demostración del teorema. Esto ocurre precisamente debido a la falta de alguno (s) de los axiomas en el transcurso de la demostración.

La geometría como ciencia a diferencia de la geometría como asignatura escolar opera con un sistema completo de axiomas y no se ve en la necesidad de operar con axiomas implicitamente expresados que actuan en forma de dibujos o razonamientos intuitivos.

En general se concidera que un teorema está "rigurosamente" demostrado si tal demostración se realiza en el espíritu del método axiomática moderna, basada en un sistema axiomático completo.

Es por esto que el rigor de las demostraciones deductivas contenidas en "Los Elementos" de Euclides difieren significativamente del inmaculado rigor rigor usado por el método axiomático moderno. Inclusive el rigor en matemáticas cambia a lo largo del tiempo.

Brevemente detengamonos en los aspectos "negativos" de "Los Elementos" desde el punto de vista del método axiomático moderno que arriba hemos descrito.

El aspecto mas débil de "Los Elementos" es sin lugar a duda las definiciones de los conceptos geometricos, las cuales aparecen al principio de cada uno de los libros. Así en el primer libro se dan 23 definiciones en la primera de las cuales Euclides intenta definir "punto," "punto es aquello que no tiene partes". En la cuarta definición describe el contenido de recta; "recta es una línea igualmente dispuesta respecto de todos sus puntos". En la séptima se da la definición de "plano": "plano es una superficie igualmente dispuesta respecto de todas sus rectas", además de que con base en la definición "superficie es todo aquello que tiene solo longitud y anchura". Con las subsecuentes definiciones Euclides introduce "ángulo", "frontera", "figura", "circulo", "semicirculo", "triangulo", "cuadrilátero" y así hasta la definición 23 donde se da el concepto de rectas paralelas, "son rectas paralelas aquellas que encontrándose en un mismo plano y siendo prolongadas ilimitadamente en ambos lados, ni de uno ni del otro lado no se intersectan entre sí".

Salta a la vista inmediatamente que Euclides no separa los conceptos fundamentales como lo exige el método axiomático moderno. Por ésto se da la impresión de que Euclides preten de definir todos los conceptos geométricos con los que se enfrenta en el primer libro incluso "punto", "recta" y "plano" que en las construc ciones axiomáticas de la geometría se acostum bra considerar como los conceptos fundamentales (por ejemplo en la construcción de Hilbert se consideran los entes fundamentales).

Antes que nada señalemos que en prin cipio es imposible definir literalmente todos los conceptos geométricos dejando sin definir algunos de ellos considerados como primitivos o fundamentales. En efecto, supongamos que queremos definir "triángulo". Para ello se hace necesario externar algún par de con ceptos geométricos que muestren el género y criterio tipo y a su vez para definir estos dos conceptos es necesario al menos cuatro conceptos geométricos (respectivamente dos de género y dos de criterios tipo) que a su vez necesitan de al menos ocho, etc. hasta infinito; por lo tanto si desde el principio no se introducen los conceptos fundamentales a los cuales no se les pide ser definidos, entonces para definir cualquier ente, por ejemplo en el caso anterior, triángulo se requeriría de un conjunto infinito de conceptos geométricos (términos) que de hecho dejaría sin definir a tal concepto. De este modo no introducir los multicitados conceptos básicos o fundamentales nos llevaría a no poder introducir ningún otro concepto geométrico en forma satisfactoria, cayendo así en un "barril sin fondo" lógico. De acuerdo a lo anterior, definir un cierto concepto significa reducirlo a los conceptos fundamentales o a otros definidos previamente. Por esto los conceptos como "punto", "recta" y "plano" que deberían reducirse a los conceptos fundamentales en Euclides quedan en el "limbo", puesto que en "Los Elementos" no se introduce ningún concepto fundamental y por lo tanto los conceptos mencionados no puede reducirlos a algo que no introduce. Así pues definir todo, es imposible hay que partir de ciertos conceptos como primitivos, básicos, fundamentales no sujetos a definición.

Las definiciones euclideanas de punto, recta y plano resultan no ser correctas desde el punto de vista lógico. Por ejemplo punto se define como "aquello que no tiene partes". Aquí sólo tenemos la apariencia de una definición de recta (¡insistimos sólo la apariencia!), pues la lógica de las definiciones correctas exige que un concepto geométrico quede definido mediante el concepto geométrico genérico mas cercano. Euclides trata de definir "punto" a través de un concepto muy amplio "aquello" que incluso sale fuera de los mares de la geometría, pues por "aquello" podemos entender casi cualquier cosa. Consecuentemente la palabra "aquello" no es posible considerarla como un concepto genérico al concepto "punto". Aproximadamente lo mismo podemos decir del criterio genérico "parte" ¿Qué representa esta palabra? ¿Es un concepto fundamental? No, porque Euclides no los introduce. Pero tampoco la define, o sea que una incógnita la define a través de otra incógnita que a su vez requiere de definición.

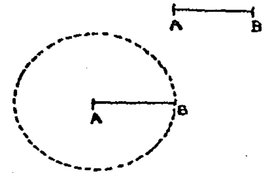
Una situación similar se presenta con las definiciones dadas por Euclides de recta y plano pues los razonamientos hechos arriba en cuanto a invalidez lógica son análogos. Hay que agregar respecto a estos dos últimos conceptos que aparecen no unívocamente, sino que tienen varios sentidos. Por ejemplo de recta se dice: "Recta es una línea igualmente dispuesta respecto de todos sus puntos".

Pero acaso ¿una circunferencia no satisface esta condición?. Claro que sí, incluso cualquier curva de curvatura constante satisface esta definición. Sin embargo una definición lógicamente válida no puede admitir dobles significados.

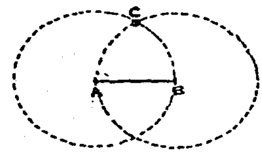
La segunda gran deficiencia de "Los Elementos" consiste en la incompletez de su sistema de axiomas. Como dijimos Euclides introduce 14 axiomas (incluidos los postulados).

Este sistema de axiomas como se revela ya al analizar la demostración del primer teorema del primer libro. Este primer teorema intenta demostrar la existencia de un triángulo equilátero que puede construirse sobre un segmento dado. Euclides lo resuelve así:

Sea AB el segmento dado, sobre el que se desea construir el triángulo equilátero.

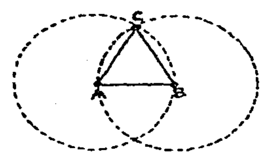


Del punto A tomado como centro trazamos una circunferencia de radio igual a la longitud del segmento dado AB (postulado III).



Con el mismo radio trazamos otra circunferencia tomando a B como centro (postulado III).

Denotamos por C a uno de los puntos de intersección entre las dos circunferencias (¡ojo!).



Unamos los puntos A, B y C mediante rectas (postulado I).

El triángulo obtenido ABC es el triángulo buscado.

En efecto, $AC = AB$ como radios de la misma circunferencia con centro en A. Por otro lado $BC = BA$ como radios de la misma circunferencia con centro en B. De $AC = AB$ y $BC = BA$ (dado que $AB = BA$) tendremos que (por el axioma I de transitividad) que $AC = BC$ y por lo tanto todos los lados resultan ser iguales al segmento dado y así queda construido el triángulo requerido. Sin embargo desde el punto de vista del método axiomático moderno este "teorema de existencia" no esta demostrado. Y es que surge la pregunta ¿En base a cual axioma las circunferencias trazadas, de igual radio y cada una de las cuales pasa por el centro de la otra, se intersectan en el punto C?. La existencia del punto C no está asegurado axiomáticamente puesto que tal axioma no aparece en su lista y por lo tanto lógicamente no está fundamentado, consecuentemente desde el punto de vista del método axiomático moderno no está fundamentado puesto que tienen un "desliz lógico" precisamente en el lugar donde hace falta el axioma necesario. Para que Euclides hubiera obtenido una demostración intachable necesitaba introducir el axioma de continuidad que él sustituye por lo "claro" que resulta la figura. Esto se repite con frecuencia a lo largo de "Los Elementos". Cada faltante en el sistema de axiomas Euclides intenta sustituirlo con lo evidente que resulta el dibujo, esto es con nuestra intución, lo que desde el punto de vista axiomático moderno indefendiblemente nos lleva a una falta lógica. Dado que en este primer teorema si tiene una falta de rigor lógico, este error se expandirá por el resto de los teoremas que se basen en este primero para su demostración y así sucesivamente.

Es así que en "Los Elementos" Euclides sin base axiomática, basado sólo en lo visualmente evidente de los dibujos introduce los conceptos de "movimiento", "entre" y esto lleva a que deja sin definir "estar en el interior", "pertenecer al exterior", etc. Resumiendo a Euclides le faltaron los axiomas y de orden o posición. Todo esto lleva a Euclides a mayor número de faltas de rigor dentro del mismo sistema asciomático pretendido.

Resumiendo podemos decir que "Los Elementos" de Euclides resulta una obra de insuperable rigor para su tiempo, pero la visión de rigor también cambia con el tiempo por lo que con el tiempo le aparecieron aspectos no rigurosos respecto al mismo método axiomático modernizado.

A nivel de la enseñanza media "Los Elementos" de Euclides pueden considerarse inclusive hoy en día un magnífico modelo de "rigor científico" y previas introducciones inductivas, materiales y problemas "reales" o simulaciones de problemas reales, el modelo hipotético deductivo de Euclides sigue siendo válido.

Aunque también como hemos señalado desde el punto de vista del método axiomático moderno "Los Elementos" distan mucho de ser La Construcción Lógicamente rigurosa notandosele desde este punto de vista serias inconsistencias lógicas producto de no introducir algunos conceptos primitivos no susceptibles de definición y la incompletez del sistema de axiomas.

Resumiendo podemos decir que "Los Elementos" de Euclides resulta una obra de insuperable rigor para su tiempo, pero la visión de rigor también cambia con el tiempo por lo que con el tiempo le aparecieron aspectos no rigurosos respecto al mismo método axiomático modernizado.

A nivel de la enseñanza media "Los Elementos" de Euclides pueden considerarse inclusive hoy en día un magnífico modelo de "rigor científico" y previas introducciones inductivas, materiales y problemas "reales" o simulaciones de problemas reales, el modelo hipotético deductivo de Euclides sigue siendo válido. Aunque también como hemos señalado desde el punto de vista del método axiomático moderno "Los Elementos" distan mucho de ser La Construcción lógicamente rigurosa notándosele desde este punto de vista serias inconsistencias lógicas producto de no introducir algunos conceptos primitivos no susceptibles de definición así como la incompletez del sistema de axiomas.

El V Postulado

Mucho hay sobre la historia que ha corrido el V postulado de "Los Elementos" de Euclides ya que por mas de 2000 años en vano se intentó demostrar lo que finalmente resultó indemostrable.

Pero porque precisamente resulta que el V postulado fue el escogido para tratar de demostrarlo como teorema y estudiarlo detalladamente.

Las causas parecen ser las siguientes: de los postulados de "Los Elementos" el V se caracteriza por ser el mas complicado, mas bien el menos evidente puesto que contiene en si la idea de infinito, además Euclides lo utiliza no inmediatamente pues en las primeras 22 proposiciones del primer libro no lo usa es hasta la proposición 23 donde lo empieza a usar. Euclides con esto deja la impresión de que lo introdujo sin el menor deseo y queriendo darle la vuelta a este problema, pero todos los intentos de no usarlo o de tratar de demostrarlo no prosperaron y seguramente que apretandose el corazón lo introdujo como axioma.

Desde hace muchos siglos hubo comentaristas de "Los Elementos" que consideraron al V postulado como un teorema no demostrado y trataron de enmendar este "error" de Euclides, clasificando al V postulado entre las proposiciones aún no demostradas. Esta tradición alcanzó desde Euclides hasta el siglo XIX, no obstante que todos los grandes geómetras en todo ese período se plantearon el problema del V postulado de Euclides. Hubo pues en todo ese período inumerables intentos todos ellos resultaron erroneos reduciendose las inconsistencias de tales "demostraciones" a errores explícitos cometidos o bien al uso de proposiciones equivalentes al V postulado.

El primero que mostró (aún sin demostrarlo) que el V postulado de Euclides es indemostrable fue el notable matemático ruso Lobachevskii. Su razonamiento fue del siguiente tipo:

Si el V postulado no se demuestra, entonces negándolo y con ayuda del resto de los axiomas de "Los Elementos" de Euclides expresados explícitamente o no, nunca llegaremos a una contradicción.

En base a la axiomática mencionada (sin el V postulado) era posible construir otra geometría, una geometría en un sentido no euclideana y fue precisamente Lobachevskii quien la construyó. Actualmente a tal geometría se le llama geometría de Lobachevskii.

Es interesante señalar que el primer matemático que demostró la no demostrabilidad del V postulado en forma completamente rigurosa fue Hilbert (1862-1943).

Sin embargo, como siempre sucede en casos similares, todos los esfuerzos dirigidos a demostrar lo no demostrable no fueron vanos, sino que sirvieron para preparar el terreno a las geometrías no euclideanas (sin el V postulado). No obstante pues no haber logrado la demostración del V postulado, todos los intentos en grados distintos pero todos al fin contribuyeron a que fueran quedando perfectamente claros y diferenciados los axiomas y los teoremas que no dependían del V postulado. Tales teoremas constituían la así llamada Geometría Absoluta (de hecho los primeros veintitres teoremas fueron demostrados por Euclides sin el V. postulado).

Daremos a continuación la lista de los principales teoremas de la geometría absoluta en el plano:

1.- Todo segmento (ángulo) puede bipartirse en forma única.

2.- Por cada punto exterior a una recta podemos bajar a dicha recta una única perpendicular.

3.- Por cada punto de una recta se puede construir una única perpendicular con base en dicho punto.

4.- La suma de dos ángulos suplementarios es igual a dos rectos.

5.- Los ángulos rectos son iguales.

6.- En un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales.

7.- Se cumplen los teoremas sobre comparación de perpendiculares con oblicuas y sus proyecciones, en particular el que una perpendicular es mas corta que una oblicua.

8.- El ángulo exterior de un triángulo siempre es mayor que cualquiera de los interiores no suplementarios al mismo.

9.- En todo triángulo no puede haber mas de un ángulo recto u obtuso.

10.- En todo triángulo el ángulo mayor se opone al lado mayor y viceversa.

11.- En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.

12.- La suma de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado.

13.- Si dos rectas intersectan a una tercera formando con ella ángulos correspondientes, o iguales ángulos opuestos por el vértice, o bien la suma de sus ángulos adyacentes son dos rectos, entonces tales rectas no se intersectan.

14.- Los tres criterios de congruencia entre triángulos.

15.- Dos perpendiculares a una misma recta no se intersectan.

16.- Por un punto exterior a una recta, en el plano, pasa al menos una recta que no se intersecta con la primera.

17.- La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera no es mayor que dos rectos (Teorema de Legendre).

18.- Las tres bisectrices de cualquier triángulo se intersectan en un punto interior del mismo.

19.- En todo triángulo podemos inscribir una única circunferencia.

20.- Cualquier recta intersecta a una circunferencia en a lo más dos puntos.

21.- Arcos iguales de una circunferencia son subtendidos por cuerdas iguales.

22.- En un triángulo isósceles la bisectriz de su vértice resulta ser mediana y altura del triángulo.

De manera similar en este proceso fueron revelados los teoremas que sí dependen del V postulado y que realmente son proposiciones equivalentes al mismo. Más exactamente se dice que si una teoría deductiva esta basada en un sistema de axiomas, digamos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, y supongamos tener dos axiomas mas M y N relacionados entre si de tal suerte que si alguno de ellos se agrega al sistema original de axiomas, entonces del sistema de axiomas $\{A_1, \ldots, A_n, M\}$ puede deducirse N como teorema y de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, N\}$ puede deducirse a M como teorema. En tal situación se dice que las proposiciones M y N son equivalentes respecto del sistema de axiomas $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

De aquí pues las proposiciones equivalentes al V postulado en el plano:

1.- Por un punto exterior a una recta, en el plano pasa una y solo una recta paralela a la primera (Axioma de

2.- El lugar geométrico de los puntos en el plano equidistantes a una recta dada localizados de un solo lado de ella es una línea recta (Postulado de Posidon — -)

3.- La distancia entre dos rectas paralelas es una magnitud constante (Postulado de - -)

4.- Existen al menos dos triángulos semejantes, pero no iguales. (Postulado de Wallis siglo XVII).

5.- Por tres puntos no colineales puede trazarse una circunferencia (Postulado de Bol , siglo XIX).

6.- Por todo punto en el interior de un ángulo agudo siempre puede trazarse al menos una recta que intersecta ambos lados del ángulo. (Postulado de Legendre, siglo XVIII)

7.- Si una recta intersecta una de dos rectas que a su vez no se intersectan y todas ellas estan en un mismo plano, entonces la primera recta intersecta a la otra.

8.- El lado de un exágono regular inscrito en una circunferencia es igual al radio de la circunferencia.

9.- La suma de los ángulos internos de un triángulo en línea recta es igual a dos rectos.

10.- La perpendicular y la oblicua a una misma recta, pertenecientes a un mismo plano, siempre se intersectan.

11.- Existen triángulos con áreas tan grandes como se quieran.

12.- Las alturas de un triángulo siempre se intersectan.

13.- El teorema de Pitágoras: en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Es así que cualquiera de éstas trece proposiciones puede tomarse como axioma y entonces el V postulado y todas las proposiciones que dependan de ella en "Los Elementos" serán demostradas como teoremas.

Tema II

Introducción

Método Inductivo

Método Deductivo

Objetivo.-

Método Inductivo y Método Deductivo

- ¿ Se han preguntado alguna vez como surge una teoría ? o en ¿ que consiste una teoría ?

- Es necesario que meditemos sobre nuestra respuesta, y si ni siquiera tenemos idea de esto, busquemos en un diccionario el significado de esta palabra.

Teoría: - - - (consultar apéndice II-1)

- Ahora busquemos ejemplificar esta definición con alguna situación de nuestra vida diaria, ¿ se te ocurre algún ejemplo ? - - -

- El ejemplo que nosotros daremos es muy sencillo y surge de la observación. Al impartir diariamente nuestras clases nos damos cuenta de que algunos no entran a clase de matemáticas, lo anterior lo podemos plantear como conclusión de nuestra diaria observación de la siguiente forma:

"Algunos alumnos del C.C.H Sur no entran a clase de matemáticas"

- Al parecer esta conclusión tiene su explicación en la misma observación diaria, sin embargo es de preocupar el ¿porqué? no entran a clase y al tratar de argumentar el ¿ porqué ? nos enfrentaría con problemáticas diversas que a su vez necesitan explicación.

Veamos que argumentos se pueden exponer:

1.- Los maestros en algunas ocaciones faltan y es por eso que el alumno también lo hace.

2.- Les parece demaciado difícil y estéril la clase por lo que no les interesa y por lo tanto prefieren hacer otra cosa en ese tiempo.

3.- Compromisos que le surgen al momento y que les parecen mas importantes que la clase.

4.- Porque en general (no solo en matemáticas no desean estudiar y al colegio acuden por otras razones (tener vida social, salir de su casa, los mandan a fuerza etc.)

Con estas explicaciones al parecer queda mejor argumentada nuestra conclusión, pero surge el cuestionamiento de que también éstas deben argumentarse, por lo que debemos tener cuidado que nuestras explicaciones sean lo mas "obvias" posibles.

Así de manera sencilla podríamos explicar como se va construyendo una teoría, esto es:

- Observación
- Conclusión
- Argumentación de la conclusión
- Se acepta o no se acepta la conclusión

En caso de aceptarse, ésta nos servirá posteriormente como argumentación de otras conclusiones.

En el ejemplo anterior también hemos aplicado el "Método Deductivo" y "Método Inductivo", pero antes de definir éstos formalmente te proponemos efectuar el siguiente taller:

Taller No 1

Objetivo.- que el alumno observe, concluya y argumente una proposición de la vida real

Material.- papel y lápiz

Indicaciones:

1.- Durante una semana observa y anota el tiempo que te lleva el ir de tu casa al C.C.H-Sur.

2.- De tus anotaciones anteriores, contesta la siguiente pregunta:
¿Qué tiempo necesitas para ir de tu casa al C.C.H y llegar puntual a tus clases?.

3.- Argumenta tu respuesta anterior

4.- En base a los puntos anteriores identifica donde estan:
1.- La observacion
2.- La conclusión
3.- La argumentación
de esto que podría ser una teoría.

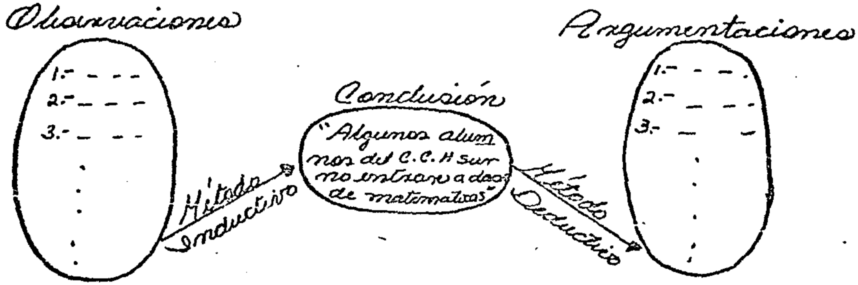
Ficha No 1

a) Elabora un ejemplo como los anteriores indicando cuáles serian tus observaciones, cual tu conclusión y cuáles tus argumentaciones.

b) Investiga la definición de "Método Inductivo y "Método Deductivo y trata de aplicarlas a tu ejemplo.

Haremos ahora la relación de estos mé -

todos con nuestro ejemplo de inicio mediante un esquema:



y en conclusión definiremos estos métodos de la siguiente manera:

Método Inductivo.- es el proceso por el cual se infieren propiedades, relaciones o leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares.

Método Deductivo.- es el proceso por el cual, de principios generales aceptados como punto de partida llegamos por razonamientos lógicos a demostrar la verdad de una proposición.

Esperamos que la noción de Método Inductivo y Método Deductivo haya quedado clara en caso contrario vuelve a leer este apartado y recuerda que el objetivo general del curso es el de que expliques el "Método Deductivo" y lo apliques a 2 teorías y esto se tratará de lograr a través de todo el curso. Finalmente podemos decir que en el curso de matemáticas III vamos a partir de proposiciones a conclusiones debidamente fundamentadas o aceptadas por obvias y evidentes y a partir de estas por medio del "Método Inductivo (observaciones) iremos construyendo toda una teoría en la que todas las proposiciones irán debidamente argumentadas (Método Deductivo).

A continuación te proponemos, como introducción a nuestro curso de matemáticas III, que lo tratado en este tema lo apliquemos ya a un ejemplo de Matemáticas. Para ésto llevarás a cabo el siguiente ~~taller~~:

Taller No 2

Objetivo.- que el alumno observe, concluya y argumente una proposición geométrica.

Material .- papel, lápiz, regla y transportador

Indicaciones:

1.- Dibuja 10 triángulos de lados diferentes.
2.- Mide con tu transportador los ángulos de cada uno de los triángulos que dibujaste y anótalas.
3.- Encuentra la suma de los 3 ángulos de cada uno de los triángulos
4.- Contesta lo siguiente:
   a) ¿ Que observaste?
   b) ¿ Que puedes concluir?
   c) ¿ Como argumentarías tu conclusión?

Como te podrás haber dado cuenta en este taller no tienes los elementos necesarios para argumentar tu conclusión.

Ficha No 2

Para realizar esta ficha necesitarás de los siguientes instrumentos:

i) Regla graduada
ii) Lápiz
iii) Tijeras

1.- Recuerda o indaga la definición de cuadrado.

2.- ¿Cómo recortarías un cuadrado en 4 partes iguales?.

3.- ¿Cómo en 16 partes iguales?

4.- y ¿En 17 partes iguales?

(Ver respuestas apéndice II-2)

Ahora nos gustaría que nos indicaras:

a) ¿Qué observaste?
b) ¿Qué conclusión obtuviste?
c) ¿Cómo la argumentarías?

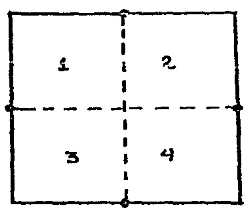
Apéndice II - 1

Def de Teoría.- conjunto de hipótesis reglas o leyes que sirven de base a una ciencia o a una parte de ella porque permiten explicar los hechos o fenómenos observados en la misma.
(Diccionario Técnico Larrouse)

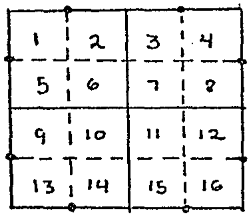
Def de Teoría.- conocimiento especulativo considerado con independencia con toda aplicación. Hipótesis cuyas consecuencias se aplican a toda una ciencia o a parte muy importante de la misma. Serie de las leyes que sirven para relacionar determinado órden de fenómenos. Procesión religiosa entre los antiguos griegos. (Diccionario Gillet).

Apéndice II - 2

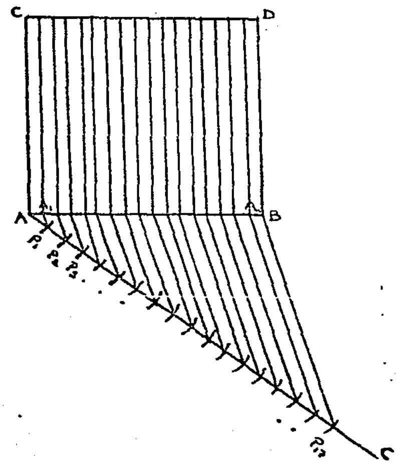
a) Para dividir un cuadrado en 4 partes iguales basta con encontrar el punto medio de los lados de cada uno de los cuadrados y unirlos.



b) Para dividirlo en 16 partes iguales basta con encontrar el punto medio de los lados de los cuatro cuadrados del dibujo anterior y unirlos.



c) Para dividir un cuadrado en 17 partes iguales (nótese "partes iguales" <u>no</u> cuadrados iguales) se procede como sigue:



1.- Tómese el segmento $\overline{AB}$ del cuadrado

2.- Trazar una semirecta $\overline{AC}$ como se indica en la figura (el tamaño no importa)

3.- Con una abertura cualquiera del compás trazar sobre la semirecta $\overline{AC}$ 17 partes iguales encontrandose así los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_{17}$.

4.- Unir P_{17} con B

5.- Trazar paralelas a $\overline{BP_{17}}$ por los puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{16}$, encontrandose de esta forma en $\overline{AB}$ los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{16}$.

5.- Trazar paralelas a $\overline{AD}$ ó a $\overline{CD}$ por los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{16}$, obteniéndose así las 17 partes iguales (como ya se dijo necesariamente las partes iguales no deben ser cuadrados, en este caso se obtuvieron rectángulos.

Tema III

Definiciones Previas

Definiciones Previas

Iniciaremos el tema III familiarizándonos con las características generales que pretendemos adquirir ya que recordemos que todas las proposiciones que vamos a manejar deberán de ir debidamente fundamentadas.

En primer lugar tenemos que empezar por definir los términos que vamos a utilizar, pero si reflexionamos, dar cuidadosamente una definición apropiada no es sencillo y esto lo podemos comprobar al buscar una palabra en el diccionario; buscando posteriormente en él mismo las palabras usadas en la definición de dicha palabra y así sucesivamente.

En general mediante una serie de pasos se llega a una definición en la que aparece de nueva la palabra original. Así por ejemplo, en un diccionario encontramos la siguiente cadena de definiciones para llegar al significado de la palabra magnitud.

Magnitud ⟶ Extensión ⟶ Dimensión ⟶ Magnitud

Es necesario entonces que dejemos una de éstas palabras sin definir para que en función de ésta podamos expresar los demás términos. Pero no debe de sorprendernos porque aunque no definamos determinado término, tenemos la idea intuitiva del significado que ésta debe tener.

Por lo tanto diremos en lo sucesivo que trataremos con los términos indefinidos punto, recta y plano, que serán los términos originales y en base a estos definimos otros. O sea que es algo así como un juego, y a lo que noso-

tros jugaremos será "Geometría Euclidiana"; aunque sobre estos términos tendremos algunos datos y de cada uno sabremos alguna cualidad que lo caracterice y lo describa aunque sea parcialmente, a estos datos son a los que llamaremos axiomas o postulados, por ejemplo: en el juego de ajedrez no se define lo que es un peón, pero lo que lo caracteriza es que se puede mover hacia adelante y come en diagonal o sea que es una de las reglas del juego.
Luego entonces nuestra participación en este juego consistirá en demostrar las proposiciones que se hagan sobre ellos, a estas proposiciones diferentes de los axiomas les llamaremos teoremas.

Definiciones Elementales

Proposición.- es el enunciado de un hecho, o cuestión por resolver, que sólo admite dos valores de verdad: falso ó verdadero.

Axioma .- es una proposición que siendo evidente no requiere demostración.
- Ejemplos:
a) Llueve de arriba hacia abajo
b) Por dos puntos dados se puede hacer pasar una y solo una recta.

Problema.- es una proposición que se propone para resolver.
Ejemplos:
a) Encontrar el valor del impuesto

predial que debe pagar el propietario de un terreno.
b) Si el perímetro de un cuadrado mide 15 cm. ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado.

Corolario.- es una proposición que es consecuencia inmediata de otra, cuya verdad requiere de algún o ningún razonamiento.
Ejemplos:
a) Si yo supongo que está lloviendo en Toluca
Corolario.- el suelo de Toluca está mojado.
b) Si suponemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°
Corolario.- un ángulo interior del triángulo es menor a 180°.

Postulado.- es una proposición cuya verdad aunque no tenga la evidencia de un axioma se admite sin demostrar.

Nota.- Euclides hizo distinción entre un axioma y un postulado, diciendo que un axioma sirve en general para cualquier ciencia, o sea que son proposiciones universales, en cambio los postulados son proposiciones relativas a una ciencia en particular (por ejemplo la Geometría).

Ejemplo:
Todo segmento de recta puede prolongarse indefinidamente en ambos sentidos.

Teorema.- es una proposicion cuya verdad necesita demostrarse.
Ejemplos:
a) Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
b) Algunos alumnos del C.C.H Sur no entran a clase de matemáticas.

Nota: De las proposiciones anteriores el inciso (a) es un ejemplo de lo que se concidera propiamente un teorema.
En cambio el ejemplo del inciso (b) es una proposición de la vida real al que podríamos dar el nombre de Teorema, sin embargo la palabra teorema acostumbra a usarse solo para proposiciones matemáticas.

Ficha No. 1
De las siguientes proposiciones indica cual podría corresponder a un axioma, teorema, problema o corolario.

1.- La sangre es roja
2.- ¿ Cuánto mide la altura de la Torre latinoamericana?
3.- Si a cantidades iguales se agregan cantidades iguales los resultados son

iguales

4.- Mi primo Luis es muy estudioso

5.- La combinación de azul y amarillo da verde.

6.- En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

7.- Las hojas de los árboles son verdes.

8.- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360°.

9.- La tierra es redonda

10.- ¿Cómo se podría encontrar el diámetro de la Tierra?.

11.- Un ángulo exterior de un triángulo es menor a 360°.

Un teorema consta de 2 partes:

a) La hipótesis que se refiere a lo que está dado.

b) La tesis o conclusión que se refiere a lo que se debe demostrar.

De donde a partir de la hipótesis se llega a la tesis por medio de razonamientos lógicos deductivos.

En este capítulo en lo que se refiere a la hipótesis y a la tesis haremos la siguiente diferenciación:

Hipótesis → Oral
Hipótesis → Simbólica

Tesis → Oral
Tesis → Simbólica

Donde entenderemos por hipótesis oral la que esta escrita tal cual en un teorema dado, e hipótesis simbólica será la simbolización de la oral, análogamente haremos lo mismo con la tesis.

Así por ejemplo en la afirmación:

"Algunos alumnos del C.C.H Sur no entran a clases"

Hipótesis Oral: Algunos alumnos del C.C.H Sur

Algunos alumnos del C.C.C Sur

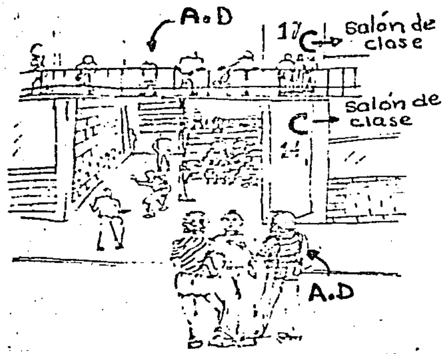
figura

Nota: en el momento en que se va a llevar a cabo la demostración de una proposición es importante construir una figura para darnos una idea de lo que se tiene.

Por lo tanto:

Hipótesis Simbólica: (A.D)

Tesis Oral: no entran a clase.

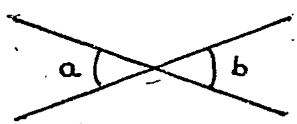


figura

Tesis Simbólica: (A.D) no entran a C

De la misma manera en el teorema:
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales

Hipótesis Oral: los ángulos opuestos por el vértice



figura

Hipótesis Simbólica
$\hat{a}, \hat{b}$ opuestos por el vértice

Tesis Oral: son iguales

Tesis Simbólica: $\hat{a} = \hat{b}$

Ficha No. 2

Determina la hipótesis y la tesis simbólica y oral de las siguientes proposiciones:

1.- En la carretera a Cuernavaca está lloviendo.
2.- Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales.
3.- Siempre que estudio apruebo los exámenes.
4.- En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a 180°.
5.- Si apruebo el examen de matemáticas me darán un premio.

A continuación enunciaremos los axiomas o postulados ("las reglas del juego").

Los axiomas a los cuales Euclides llamó nociones comunes son los siguientes:

1.- Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre si.

2.- Si a cosas iguales se le agregan cosas iguales, las sumas son iguales.

3.- Cosas que se pueden superponer una a la otra son iguales entre si.

4.- El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

5.- Si a cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

6.- Cualquier cosa es igual a ella misma

7.- Cualquier cosa puede ser sustituida por su igual.

Los Postulados de Euclides son los siguientes:

1.- De cualquier punto a cualquier otro punto se puede trazar una recta.

2.- Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.

3.- Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.

4.- Todos los ángulos rectos son iguales entre si.

5.- Por un punto fuera de una recta dada solo pasa una y solo una recta paralela a la recta dada.

Finalmente aclararemos 2 cosas:

1.- Los axiomas antes vistos son los que se encuentran siempre en un libro de texto, pero su número es variable según el texto.

2.- El 5° postulado es emitido por Euclides (Los Elementos) cuando establece sus postulados. Sin embargo aplica una proposición equi_ valente y para su veracidad apela al sentido común.

Ficha No. 3

1.- Acudir a ver el audiovisual "Método Inductivo y Deductivo".

2.- Ilustrar geométricamente los axiomas y postulados antes vistos.

Tema IV

Angulos

Angulos

Antes de dar una definición, vamos a plantearnos las siguientes preguntas:

1.- ¿Encuentras algún ángulo en los objetos que nos rodean?.

2.- ¿Podrías describir un ángulo con algún movimiento de tus extremidades?

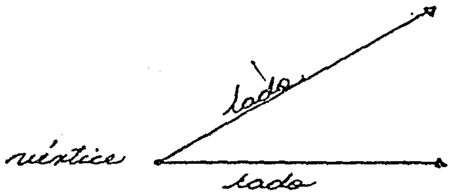
3.- ¿Cómo definirías un ángulo?

4.- Dibuja en el plano un ángulo

Después de establecer una discusión en base a estas preguntas en busca de una respuesta podríamos dar una definición acerca de lo que es un ángulo.

Angulo.- estamos de acuerdo en que un rayo (el cuál también es llamado semirecta) puede ser rotado alrededor de un punto, considerado como punto de origen entonces, a la figura que este rayo genera se le da el nombre de ángulo o sea que es la zona del plano comprendida entre 2 semirectas.

Al punto de origen le damos el nombre de vértice del ángulo y al rayo en sus dos posiciones (inicial y final) le llamamos lados del ángulo.



Otras definiciones de ángulo las podrás encontrar en el apéndice IV - 1

Notación de Angulos

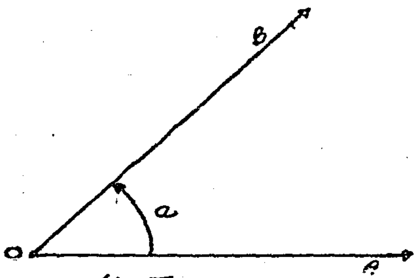


fig IV-4

La palabra ángulo se denota por el símbolo $\measuredangle$. El ángulo de la figura IV-4 se puede designar de la siguiente manera: $\measuredangle a$, $\measuredangle O$, $\measuredangle AOB$ o bien $\hat{a}$, $\hat{O}$, $\widehat{AOB}$. En general utilizaremos todas estas notaciones para acostumbrarnos a ellas.

Magnitud de un Angulo

¿ Podrías medir un ángulo con el metro?

¡ Claro que no! porque la magnitud de un ángulo depende de la mayor o menor rotación del rayo y no de la longitud de éste.

Los ángulos se miden comparandolos con un círculo dividido en 360 partes iguales a cada una de las cuales se le da el nombre de grado, entonces el círculo decimos que mide 360 grados (360°).

Así en la (fig IV-5) se tiene:

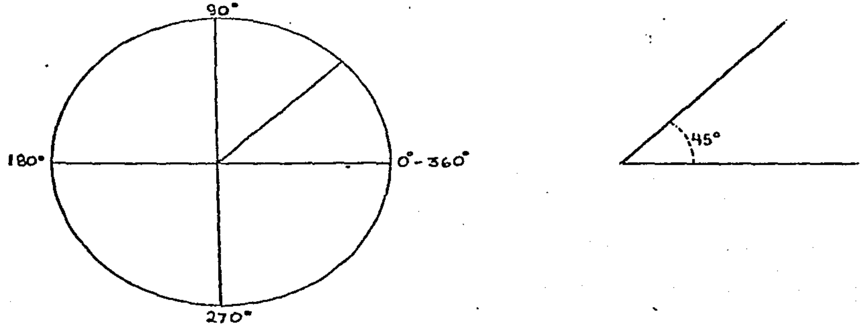


fig IV-5

Por lo que podemos decir que un grado es la magnitud de un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo cuyos lados interceptan un arco de longitud 1/360 de la longitud de la circunferencia. Un ángulo de un grado puede ser dividido en 60 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de minuto.

Cada minuto puede a su vez ser subdividido en 60 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de segundo. Los símbolos °, ', '', sirven para designar grados, minutos y segundos respectivamente.

No hay límite para la magnitud de un ángulo. Si una semirecta efectúa una revolución completa habrá generado un ángulo de 360°, dos revoluciones completas generarán un ángulo de 720° y así sucesivamente.

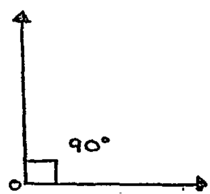
Del mismo modo que se usa una regla graduada para estimar las medidas de los segmentos, la medida aproximada de un ángulo se puede encontrar con un transportador.

La magnitud de un ángulo no solo se puede dar en grados sino que existen otro tipo de medidas como: el radian, el mil ó el gonio (consultar apéndice IV-2)

Clasificación de los ángulos de acuerdo a su magnitud.

Los ángulos de acuerdo a su magnitud se pueden clasificar en:

Angulo Recto.- es aquel cuya amplitud es de 90°



Ejemplos:

a) el despegue vertical de un helicóptero

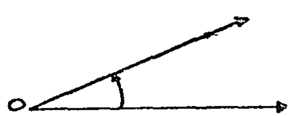
b) Posición normal de la broca para taladrar una pared

c) El despegue de un cohete

d) La posición de la aguja de una máquina de coser.

Los ejemplos anteriores nos dan imágenes (imperfectas) de ángulos rectos.

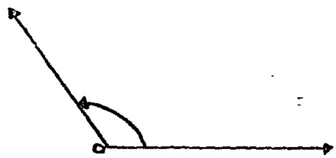
Angulo Agudo.- es aquel cuya amplitud es menor a 90°



Ejemplo:

el despegue usual de un avión es una imagen imperfecta de un ángulo agudo).

Angulo Obtuso.- es aquel cuya amplitud es mayor a 90° pero menor a 180°



Ejemplo

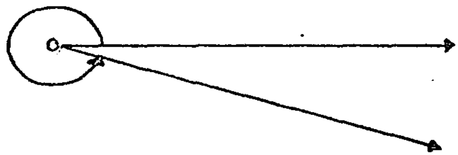
remolcar una lancha a la orilla del río para que continúe ésta por el río. (es una imagen imperfecta de un ángulo obtuso).

Angulo Llano.- es aquel cuya amplitud es igual a 180° (o sea dos ángulos rectos o media vuelta completa) es decir aquel formado por semirectas opuestas.

Ejemplo:

el ángulo que hace nuestra vista de extremo a extremo (es una imagen imperfecta de un ángulo llano).

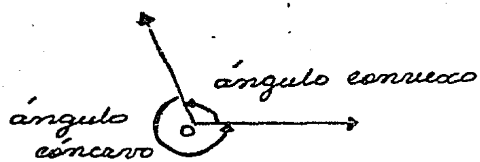
Angulo Entrante (cóncavo).- es aquel cuya amplitud es mayor a 180° pero menor a 360°.



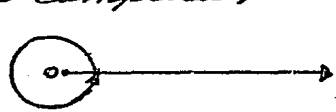
Ejemplo:

Angulo Convexo.- es aquel cuya medida es menor que un ángulo llano

Obsérvese que dadas dos semirectas y un vértice común estas determinan dos ángulos uno convexo y el otro cóncavo.



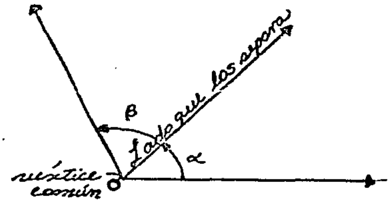
Angulo Perigonal.- es aquel cuya amplitud es igual a 360° (cuatro angulos rectos o una vuelta completa).



Ejemplo:
el ángulo que hace la rueda de la fortuna al girar una vuelta completa.

Pares de Angulos

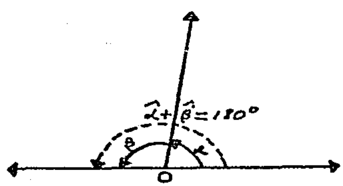
Angulos Adyacentes o Consecutivos.- son dos ángulos que tienen común el vértice y un lado que los separa. (sin que un ángulo contenga a otro).



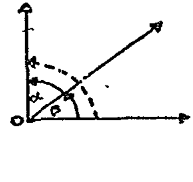
En la figura el $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son adyacentes.

Suma de Angulos.- se dice que un ángulo es la suma de otros dos, si estos ángulos pueden disponerse como adyacentes.

Angulos Suplementarios.- son ángulos adyacentes cuya suma es 180° (o sea un ángulo llano). También podemos decir que son dos ángulos con lados que son semirectas opuestas y el otro lado común.

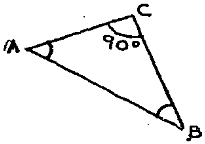


Angulos Complementarios.- son ángulos adyacentes cuya suma es 90° (o sea un ángulo recto)



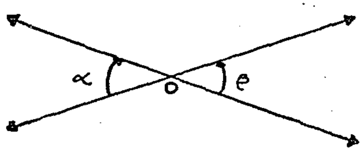
$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90°$

Así en la figura:

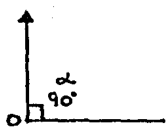


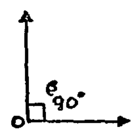
los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ no son complementarios ya que no son adyacentes.

Angulos Opuestos por el Vértice.- son dos ángulos no adyacentes formados por dos rectas que se cortan, es decir los ángulos opuestos por el vértice se forman cuando cada lado de un ángulo es la prolongación de un lado del otro.



Angulos Congruentes.- son aquellos que tienen la misma medida (en el lenguaje usual se diría que son ángulos iguales) pero es como en el caso del duplicado de una llave, se dice de ambas que son iguales, aunque lo que ocurre no es que estén formadas por los mismos puntos, dado que son distintas llaves, por lo cual en matemáticas se dice que son congruentes.





$\hat{\alpha}$ congruente con $\hat{\beta}$

Taller No. III-1

Objetivo del Taller.- que el alumno verifique cuando dos ángulos son congruentes.

Material necesario.- mica, plumón, pintura de agua, pincel, pegamento, tijeras dos palillos, masquit, cuchillo y regla.

Pasos a Seguir:

1.- Recorta dos cuadrados de mica de 10 x 10 cm.

2.- Encuentra el centro de uno de los cuadrados (llamalo O).

3.- Con tu regla a partir del centro traza un segmento de 3 cm al cual llamaremos $\overline{OA}$

4.- Abre con tu cuchillo $\overline{OA}$

5.- En la parte inferior de la abertura pega un palillo.

6.- Pega por las orillas los dos cuadrados de mica reforzando los extremos con masquit para formar lo que llamaremos "mica transportador

7.- Traza en la mica restante un círculo de radio 3.

8.- Recorta el círculo

9.- Traza un radio llamando al centro de éste O y al extremo B formando así $\overline{OB}$.

10.- Abre con las tijeras $\overline{OB}$.

11.- Pinta de color claro el círculo

12.- Introduce tu círculo en la mica

transportador de tal forma que $\overline{OA}$ coincida con $\overline{OB}$.

13.- Pega en la orilla del segmento $\overline{OB}$ del círculo un palillo el cual te ayudará a girar el círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj para formar ángulos diferentes que serán de la forma AOB.

14.- Coloca tu mica transportador sobre $\widehat{PQR}$ de tal forma que el $\overline{OA}$ coincida con uno de los lados y el vértice O coincida con el vértice del $\widehat{PQR}$.

15.- Gira el segmento $\overline{OB}$ hasta que formes un ángulo igual al $\measuredangle PQR$.

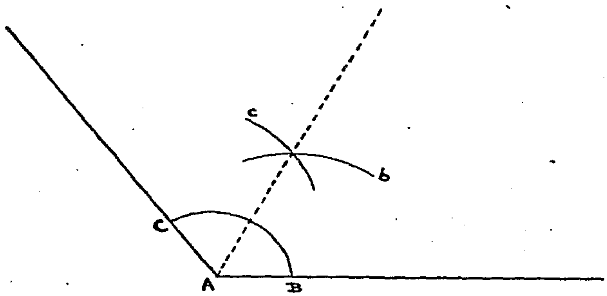
16.- Transporta tu mica al $\measuredangle xyz$ de tal forma que el vértice O coincida con el vértice de $\widehat{\measuredangle yz}$ y uno de los lados del ángulo de la mica transportador coincida con uno de los lados de $\widehat{\measuredangle yz}$.

¿ Que observas ?

(Ver taller apéndice III - 3)

Bisectriz de un Angulo .- es la semi-recta que corta al ángulo en dos ángulos iguales.

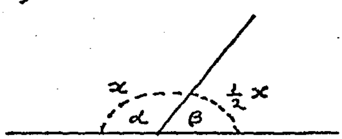
Por ejemplo para bisecar el $\hat{A}$, apó-yese la punta del compás en A y trácese un arco localizando B y C, apóyese la punta en B y trácese el arco b, apóyese la punta en C y trácese el arco c ; únase la intersección con A.



Pasemos ahora a encontrar la solución de algunos ejercicios propuestos :

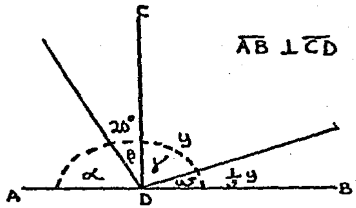
1.- Encontrar el valor de los ángulos en las siguientes figuras

a)



b)

$\overline{AB} \perp \overline{CD}$



Solución

a) Como $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$ por formar ángulo llana entonces:

$$x + \frac{1}{2}x = 180^\circ$$

de donde:

$$\frac{3}{2}x = 180^\circ$$

$$x = \frac{180}{\frac{3}{2}} = \frac{360}{3} = 120^\circ$$

$$\therefore \hat{\alpha} = 120^\circ \quad y \quad \hat{\beta} = \frac{1}{2}(120) = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

b) Como $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ los ángulos α, β y γ, ω son adyacentes complementarios por lo que:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$$

$$\alpha + 20^\circ = 90$$

$$\alpha = 90^\circ - 20^\circ$$

$$\alpha = 70^\circ$$

del mismo modo

$$\hat{\gamma} + \hat{\omega} = 90^\circ$$

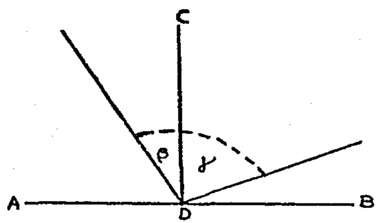
$$y + \frac{1}{3}y = 90$$

$$\frac{4}{3}y = 90$$

$$y = \frac{90}{\frac{4}{3}} = \frac{270}{4} = 67.5$$

$$\therefore \hat{\gamma} = 67.5^\circ \quad , \quad \hat{\omega} = \frac{1}{3}(67.5) = \frac{67.5}{3} = 22.5^\circ$$

2.- En la figura b del ejercicio anterior encontrar el valor del ángulo $\beta + \gamma$.

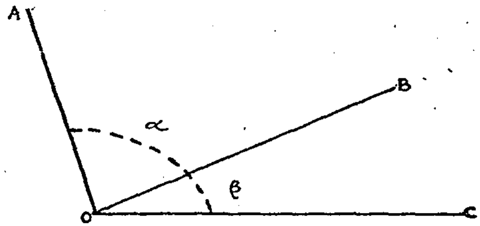


$$\hat{\beta} + \hat{\gamma} = 60^\circ + 67.5^\circ = 127.5^\circ$$

3.- En la figura el $\widehat{AOB}$ mide α, $\widehat{BOC}$ mide β y son adyacentes.

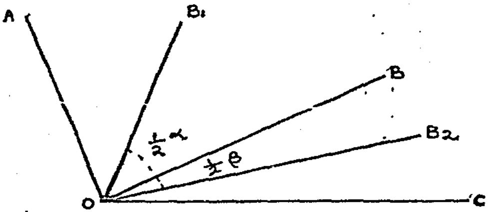
a) Determinar el ángulo formado por sus bisectrices.

b) ¿Qué resultado se obtiene, si los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son suplementarios?.



Solución

a)



Como $\overline{OB_1}$ y $\overline{OB_2}$ son bisectrices de los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ respectivamente entonces el $\widehat{B_1OB}$ mide $\frac{1}{2}\alpha$ y $\widehat{BOB_2}$ mide $\frac{1}{2}\beta$.

Los ángulos $\widehat{B_1OB}$ y $\widehat{BOB_2}$ que forman el ángulo entre las bisectrices $\overline{OB_1}$ y $\overline{OB_2}$ resultan también ser adyacentes (con lado común $\overline{OB}$), por lo tanto:

La medida de $\widehat{B_1OB_2} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

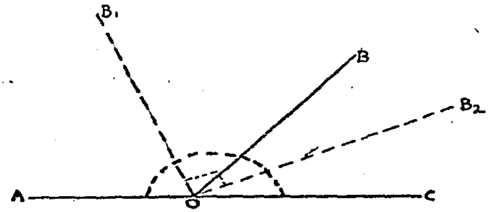
b) Si el $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son suplementarios entonces:

La medida de $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 2$ rectas

$$\alpha + \beta = 2 \times 90^\circ$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ$$

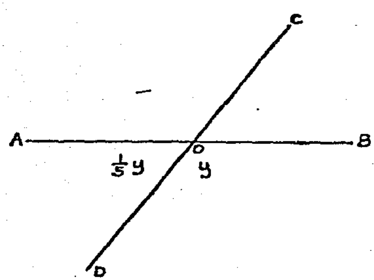
$\therefore$ la medida de $\widehat{B_1 O B_2} = 90^\circ$

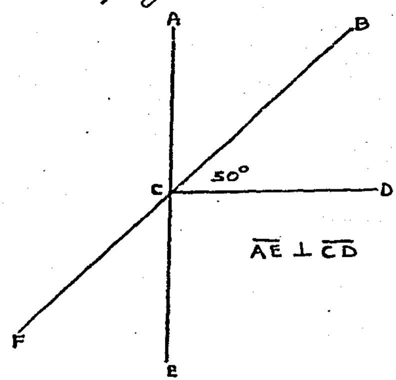


Ficha no. IV-1

1.- En nuestra vida estamos rodeados de figuras geométricas observa y proporciona objetos donde se localicen los ángulos antes vistos. (Pueden ser recortes de revistas o dibujos elaborados por ti mismo).

2.- Encontrar el valor de cada uno de los ángulos en las siguientes figuras:





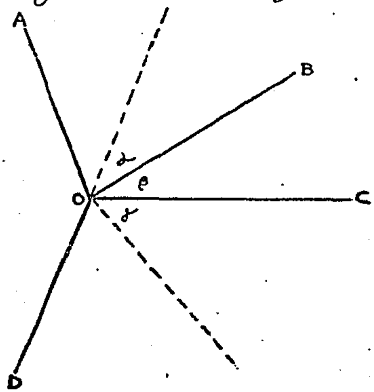
$\measuredangle$ AOD =

$\measuredangle$ FCE =

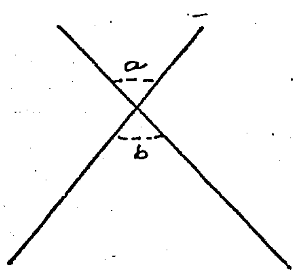
3.- En la siguiente figura supóngase que los ángulos $\widehat{AOB}$ (que mide α), $\widehat{BOC}$ (que mide β) y $\widehat{COD}$ (que mide γ) estan dados y son adyacentes.

a) Determinar el ángulo entre las bisectrices de los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{COD}$.

b) Aplicar el resultado obtenido al caso en que los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{COD}$ sean ángulos rectos.

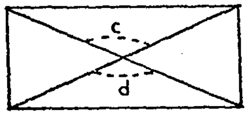


4.- Utilizando tu transportador encuentra el valor de los ángulos opuestos por el vértice que se te dan a continuación



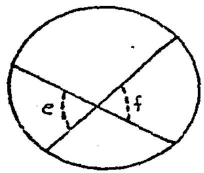
$\hat{a}$ =

$\hat{b}$ =



$\hat{c} =$

$\hat{d} =$



$\hat{e} =$

$\hat{f} =$

De tus resultados anteriores ¿ qué podrías concluir?.

Bien, pasemos ahora a mostrar tu conclusión realizando para ello el siguiente taller:

Taller No. IV-2

Objetivo del Taller.- mostrar mediante movimientos que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Material Requerido.- cartulina, papel cascarón, plumones, papel lustre, alfiler o clavo, regla y compás.

Pasos a Seguir:

1.- Recortar un rectángulo en papel cascaron o algún otro material equivalente.

2.- Dibuja en tu base dos rectas que se corten en un punto O de tal manera que se formen ángulos opuestos por el vértice.

3.- Apoyando tu compás en O traza un círculo que intersecte a las dos rectas en cuatro puntos P_1, P_2, P_3 y P_4.

4.- Ilumina de diferente color los pares de ángulos opuestos por el vértice formados.

5.- En tu papel lustre dibuja las regiones comprendidas entre los puntos:

a) OP_1P_2 b) OP_3P_4

6.- Recorta las regiones

7.- Superpon una de tus regiones en la base fijándola en O con un alfiler.

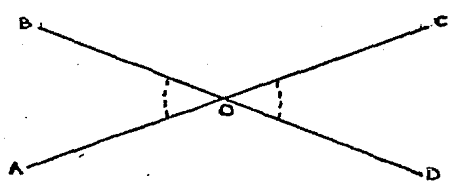
8.- Muévelo de tal forma que muestre lo que se pide.

(Ver taller apéndice IV - 4)

Pasemos ahora a demostrar nuestra primera proposición:

Teorema I

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales



Hipótesis Literal
Los ángulos opuestos por el vértice

Hipótesis Simbólica
$\measuredangle COD$, $\measuredangle AOB$ opuestos por el vértice.

Tesis Literal
son iguales

Tesis Simbólica
$\widehat{COD} = \widehat{AOB}$

Para la demostración de un teorema es conveniente a veces utilizar dos columnas una para los pasos de la demostración y otra para dar el razonamiento de éstos.

Haciendo ésto para la demostración del teorema anterior se tiene:

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 2$ rectos	por ser ángulos suplementarios.
2.- $\measuredangle BOC + \measuredangle COD = 2$ rectos	por ser ángulos suplementarios
3.- $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle BOC + \measuredangle COD$	dos cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
4.- $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC - \measuredangle BOC = \measuredangle BOC + \measuredangle COD - \measuredangle BOC$	si a cosas iguales quitamos cosas Iguales los resultados son iguales

5.- $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$ lo cual se quería demostrar (l.q.d)
(∴ significa por lo tanto, consecuentemente).

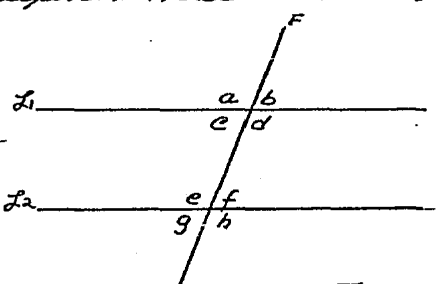
Angulos Formados por dos Rectas Paralelas Cortadas por una Transversal

El paralelismo lo podemos encontrar en muchos objetos de la vida cotidiana por ejemplo en las vías del tren, los extremos de una regla etc.

Definamos ahora lo que entenderemos por rectas paralelas.

Rectas Paralelas.- son aquellas que por mas que se prolonguen en ambos sentidos no se intersectan en ningún punto.

Si a dos rectas paralelas L_1 y L_2 las cortamos por una transversal observamos que se forman 8 ángulos (figura III-22) las que de acuerdo a determinadas características los definiremos como:



$L_1 \parallel L_2$
F transversal

figura III-22

Angulos Alternos Internos.- son los que estan dentro de las paralelas y de uno y otro lado de la transversal, así en en fig III-22 $\measuredangle c$ y $\measuredangle f$, $\hat{d}$ y $\hat{e}$ son ángulos alternos internos.

Angulos Alternos Externos.- son los que estan fuera de las rectas paralelas y de uno y otro lado de la transversal, así en la fig III- $\measuredangle g$ y $\measuredangle b$, $\hat{h}$ y $\hat{a}$ son alternos externos.

Angulos Correspondientes.- son ángulos no adyacentes que están del mismo lado de la transversal, uno dentro y otro fuera de las rectas paralelas, así en la fig III- $\hat{b}$ y $\hat{f}$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$, $\hat{a}$ y $\hat{e}$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$ son ángulos correspondientes.

Angulos Colaterales Internos.- son los ángulos internos que están del mismo lado de la transversal, por lo que en la fig III- $\hat{d}$ y $\hat{f}$, $\hat{c}$ y $\hat{e}$ son ángulos colaterales internos.

Angulos Colaterales Externos.- son los ángulos externos que están del mismo lado de la transversal, así en la fig III- $\hat{a}$ y $\hat{g}$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle h$ son ángulos colaterales externos.

Los ángulos anteriores tienen ciertas propiedades que los caracterizan las cuales encontraremos realizando el siguiente taller.

Taller No. III-3

Objetivo del Taller.- el alumno verificará que

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal entonces:

a) los ángulos alternos internos son iguales.

b) los ángulos alternos externos son iguales.

c) los ángulos correspondientes son iguales.

d) los ángulos colaterales externos son suplementarios.

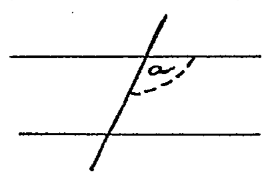
e) los ángulos colaterales internos son suplementarios.

Material Requerido.- papel cascarón, plumones, cuchillo, tijeras, papel lustre, un pedazo de cartoncillo, un clavo o alfiler, regla y pegamento.

Pasos a Seguir.-

1.- En tu papel cascarón traza dos rectas paralelas y una transversal a ellas.

2.- Toma la medida de uno de los ángulos por ejemplo $\hat{a}$ y recorta 3 ángulos con ésta medida, dos en papel lustre y uno en cartoncillo, a este último lo llamaremos $\hat{\alpha}$



3.- Pega un ángulo de papel lustre

sobre $\hat{2}$ y el restante sobre el $\hat{a}$ del papel cascarón.

4.- Etiqueta los ángulos restantes formados por las rectas paralelas y la transversal con las letras b, c, d, e ... etc

5.- Usando tu cuchilla haz una abertura en tu papel cascarón solo sobre la parte de la transversal que esté contenida dentro de las paralelas de tal forma que tu clavo o alfiler circule con holgura.

6.- Introduce el clavo o alfiler en el vértice del $\measuredangle \alpha$

7.- Introduce el clavo en la abertura de tal forma que el $\measuredangle \alpha$ coincida con el $\measuredangle 2$.

8.- Translada el $\measuredangle \alpha$ de manera que tu clavo se deslice sobre la transversal transportando a $\measuredangle \alpha$ sobre su correspondiente.

¿Cómo son los ángulos?

9.- Con movimientos de giros y translaciones mueve el $\measuredangle \alpha$ a su respectivo alterno interno.

¿Cómo son los ángulos?

10.- Con movimientos de giros y translaciones mueve el $\measuredangle \alpha$ a su respectivo alterno externo.

¿Cómo son los ángulos?

11.- Con un movimiento de translación mueve el $\measuredangle \alpha$ de tal ma-

nera que forme con su respec-
tiva colateral ángulos adyacen-
tes. ¿Cuánto mide la suma de
los dos ángulos?.

De lo anterior concluimos lo siguiente:
Dadas 2 rectas paralelas cortadas por una transversal:

a) Los ángulos correspondientes son iguales.

b) Los ángulos alternos internos son iguales.

c) Los ángulos alternos externos son iguales.

d) Los ángulos colaterales internos son suplementarios.

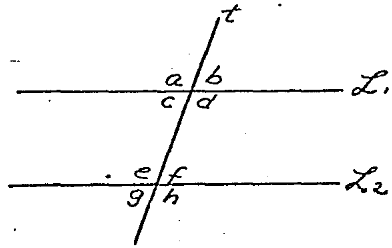
e) Los ángulos colaterales externos son suplementarios.

(Ver taller apéndice IV-5)

Pasemos ahora a demostrar las proposiciones anteriores bajo el supuesto de que dadas dos rectas paralelas cortadas por una transversal los ángulos correspondientes son iguales. (Ver demostración apéndice III-6)

Teorema II

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal los angulos alternos internos son iguales.



Hipótesis Literal
Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal

Hipótesis Simbólica
$L_1 \parallel L_2$
t transversal

Tesis Literal
Los ángulos alternos internos son iguales

Tesis Simbólica
$\hat{d} = \hat{e}$

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\hat{d} = \hat{a}$	por ser ángulos opuestos por el vértice.
2.- $\hat{a} = \hat{e}$	por ser ángulos correspondientes.
3.- $\therefore \hat{d} = \hat{e}$	dos cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

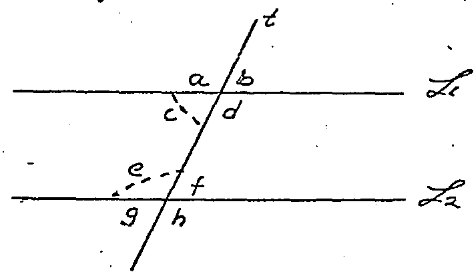
pero $\hat{d}$ y $\hat{e}$ son ángulos alternos internos. En forma análoga con base en $\hat{c} = \hat{b}$ (opuestos por el vértice y $\hat{b} = \hat{f}$ (correspondientes), entonces $\hat{c} = \hat{f}$ (por el axioma 1), pero $\hat{c}$ y $\hat{f}$ son alternos internos. Esto completa la demostración.

En forma análoga demuestra que si

dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos externos son iguales. (Teorema IV). (Demostración apéndice III-7)

Teorema V

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal los ángulos colaterales internos son suplementarios.



Hipótesis Literal	Hipótesis Simbólica
Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal	$L_1 \parallel L_2$ t transversal

Tesis Literal	Tesis Simbólica
Los ángulos colaterales internos son suplementarios	$\hat{c} + \hat{e} = 180°$

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\hat{c} = \hat{g}$	por ser ángulos correspondientes.
2.- $\hat{g} + \hat{e} = 180°$	por ser ángulos suplementarios.
3.- $\therefore \hat{c} + \hat{e} = 180°$	Toda cantidad puede

ser sustituida por su igual.

Ficha No III-2
En forma similar demuestra que si dos paralelas son cortadas por una transversal los ángulos colaterales externos son suplementarios. (Teorema VI) Demostración apéndice IV-8

Taller No III-4
Objetivo del Taller.- que el alumno identifique los pares de ángulos que satisfacen las definiciones introducidas, si las rectas no son paralelas.

Material Requerido.- el utilizado en el taller anterior.

Pasos a Seguir:

1.- En tu papel cascaron traza dos rectas no paralelas y una transversal a ellas.
2.- Efectua los pasos 2, 3, 4, 5, 6 y 7 en forma análoga al taller anterior.
3.- Mueve $\measuredangle \alpha$ adecuadamente (giros y translaciones) para verificar cuales de los teoremas anteriores se cumplen y cuales no.

De lo anterior concluimos:

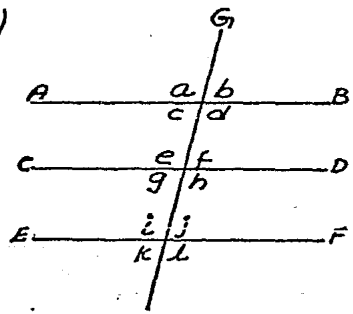
Teorema VII

Si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos iguales entonces las rectas son paralelas. (Ver demostración apéndice IV-9)

Pasemos ahora a resolver algunos ejercicios aplicando para ello los teoremas antes vistos.

1.- Encontrar los valores de cada uno de los ángulos en las siguientes figuras:

a)



$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$

G transversal

$\measuredangle c = \measuredangle g = \measuredangle k = 75°$ por ser ángulos correspondientes.

$\measuredangle c = \measuredangle b = 75°$ por ser ángulos opuestos por el vértice

$\measuredangle b = \measuredangle f = \measuredangle j = 75°$ por ser ángulos correspondientes.

$\hat{g} + \hat{h} = 180°$ por ser suplementarios

$\therefore \hat{h} = 180 - 75° = 105°$

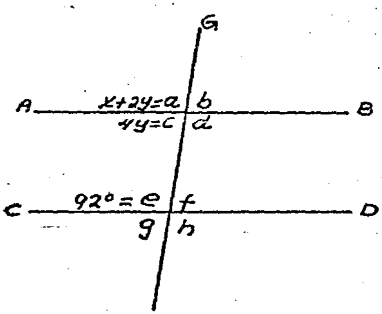
$\hat{h} = \hat{e} = 105°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

$\measuredangle h = \measuredangle d = \measuredangle l = 105°$ por ser ángulos correspondientes.

$\measuredangle d = \measuredangle a = 105°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

$\measuredangle a = \hat{e} = \hat{i} = 105°$. por ser ángulos correspondientes.

b)



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

G Transversal

$$x + 2y + 4y = 180° \text{ --- ① por ser suplementarios}$$
$$x + 2y = 92° \text{ --- ② por ser correspondientes}$$

Resolviendo el sistema anterior por suma y resta se tiene:

$$\begin{aligned} x + 6y &= 180° \\ -1(x + 2y &= 92°) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \cancel{x} + 6y &= 180° \\ -\cancel{x} - 2y &= -92° \\ \hline 4y &= 88° \\ y &= \frac{88°}{4} \\ y &= 22° \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de $y = 22°$ en ② para obtener x.

$$x + 2(22) = 92$$
$$x + 44 = 92$$
$$x = 92 - 44$$
$$x = 48°$$

$\therefore\ \hat{a} = \hat{e} = 48 + 2(22) = 48 + 44 = 92°$

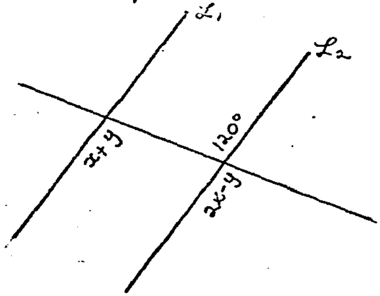
$\hat{e} = \hat{b} = 4y = 4(22) = 88°$

$\hat{b} = \hat{f} = 88°$ por ser correspondientes

$\hat{a} = \hat{\alpha} = 92°$ por ser opuestos por el vértice.

$\hat{d} = \hat{b} = 92°$ por ser correspondientes

2.- Encontrar el valor de x e y



$L_1 \parallel L_2$

Como $L_1 \parallel L_2$ entonces:

(1) $x + y = 120°$ por ser medidas de ángulos alternos internos

(2) $2x - y = x+y$ por ser medidas de ángulos correspondientes.

Resolviendo el sistema anterior se tiene:

$$\begin{array}{rl} x + \cancel{y} &= 120 \\ 2x - \cancel{y} &= 120 \\ \hline 3x &= 240 \end{array}$$

$$x = \frac{240}{3}$$

$$x = 80°$$

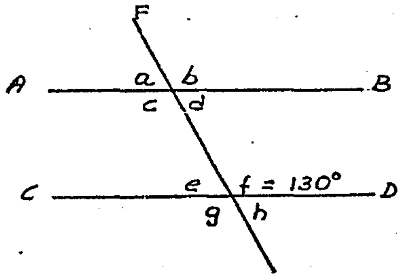
Sustituyendo el valor de x en (1) se tiene:

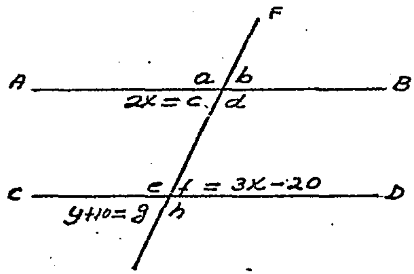
$$80 + y = 120$$

$$y = 120 - 80 = 40°$$

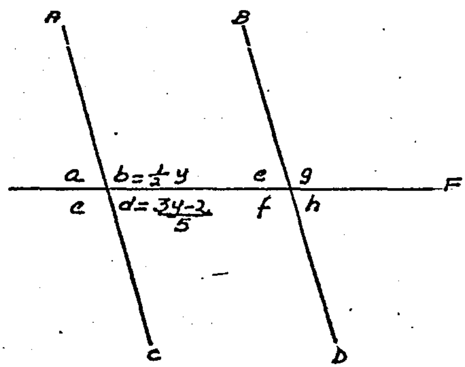
Ficha No IV-3

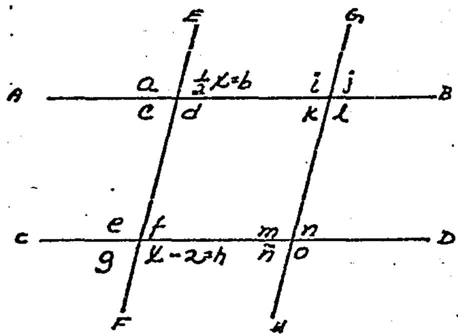
Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ encontrar el valor de cada uno de los ángulos en las siguientes figuras justificando tu respuesta en cada caso





F transversal





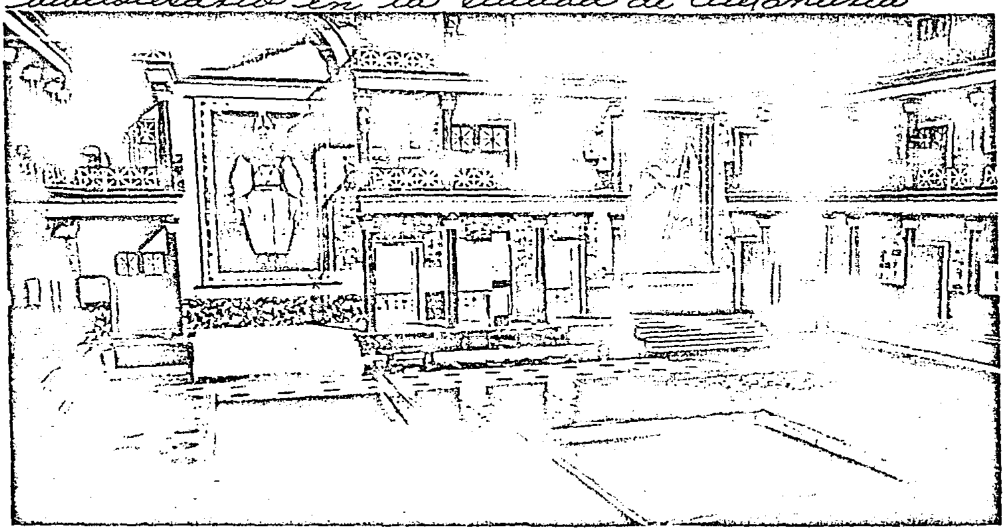
$\overline{EF} \parallel \overline{GH}$

Por último para concluir el capítulo nos hacemos la siguiente pregunta:

¿Cómo fué utilizado lo visto anteriormente para calcular la longitud de la tierra?

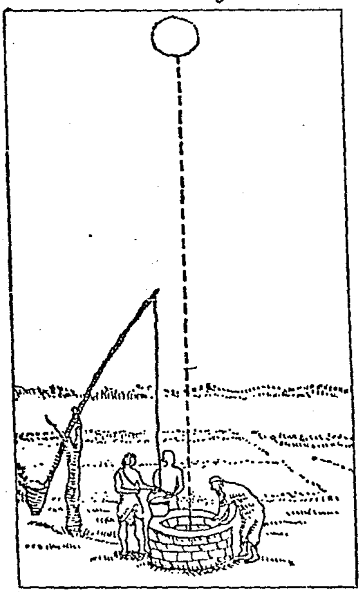
Bien, en Egipto en el siglo III A.C vivió un hombre llamado Eratóstenes quien se dedicó entre otras cosas al estudio de la Astronomía, Historia, Geografía, Matemáticas, Filosofía, Poesía, y a quien uno de sus contemporaneos envidioso de él le llamaba el β porque decía que era el segundo en sabiduría, aunque ahora sabemos que en muchas cosas fue el primero; por ejemplo el primero en calcular la longitud de la tierra. ¿Cómo hizo ésto?.

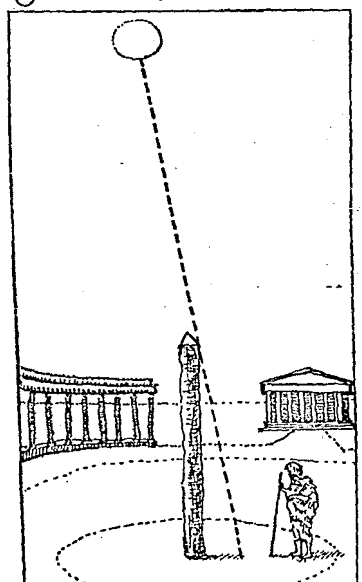
Se sabe que Eratóstenes trabajó como bibliotecario en la ciudad de Alejandría



Biblioteca en Alejandría en la cual trabajó Eratóstenes.

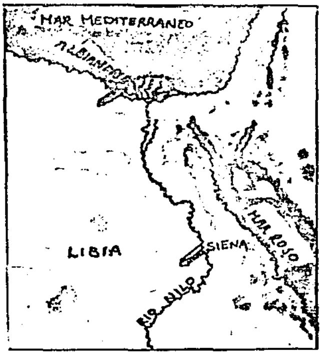
así un día leyendo leyendo un papiro encontró algo que llamó su atención, esto es, leyó que en la ciudad de Syena la sombra arrojada por una columna de un templo se empequeñecía al aproximarse el medio día hasta desaparecer llegado éste, por lo que pensó que ésto mismo debería pasar en la ciudad de Alejandría la cual quedaba a unos 800 Km de Syena. Para verificar esta suposición clavo una vara en dicha ciudad observando que a medida que se aproximaba el medio día la sombra no disminuía y lo que es mas la sombra no desapareció preguntándose: ¿Por qué en Syena a las 12 del día una torre ó vara no proyecta sombra y en Alejandría si?.

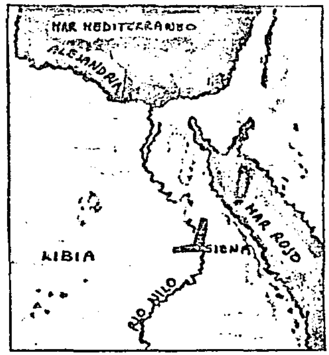




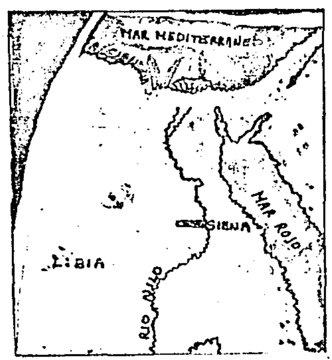
Pues bien, él concluyó que la razón por la cual pasaba ésto era debido a la forma de la tierra, ésto después de haber hecho la siguiente deducción:

a) Si la tierra fuera plana, a las doce del día no debería haber sombra en ninguna de las dos ciudades, o bien debería haber sombra del mismo tamaño en ambas ciudades.



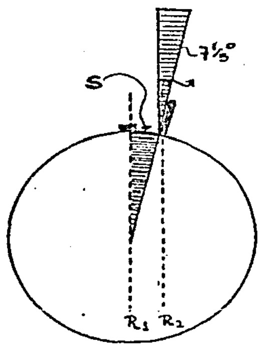


b) Si la tierra fuera redonda entonces se podría dar el caso de que haya sombra en una ciudad y en otra no.



¿ Cómo calculó Eratóstenes la longitud de la tierra?

Supongamos que las torres A y B del mapa anterior perforan la tierra prolongandose hasta intersectarse en un punto y debido a que las trayectorias de los rayos solares forman rectas paralelas (ya que vienen de un punto suficientemente alejado) como se muestra en la figura.



Como $R_1 \parallel R_2$ por ser rayos solares, entonces conociendo la medida de S (sombra) de la torre así como la medida T (altura de la torre) puedo conocer mediante cálculos trigonométricos la medida de $\hat{\alpha} = 7\frac{1}{5}°$ y como $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ (por ser ángulos alternos internos) y sabiendo que un círculo tiene 365° entonces $7\frac{1}{5}°$ resulta ser la cincuentava parte del círculo, donde esta cincuentava parte equivale a 800 Km, por lo que la longitud de la circunferencia será 50 (800 Km) = 40000 Km.

Conociendo el resultado anterior es fácil ahora calcular el radio de la tierra sa-

biendo que la longitud de cualquier cir-
cunferencia esta dada por: $L = 2\pi r$ así que:

$$r = \frac{L}{2\pi} = \frac{40000}{2(3.1416)} =$$

Es así como Eratóstenes dió esta notable y precisa estimación mas de 1000 años antes que los barcos de Magallanes circunnavegaran nuestro planeta por primera vez, utilizando para ello herramientas tan sencillas como son: la observación, ingenio, conocimiento y uso de la geometría.

Apéndice IV-1

Angulo (del lat. angŭlus y éste del gr. ἀγκύλος, encorvado) m. El resultado de la diferente dirección de dos líneas que, situadas en un plano, vienen a terminar, en su prolongación, en un punto común a ambas.

Angulo.- línea comun a dos paredes que se encuentran, el ángulo externo se llama esquina, y el interno, rincón.

Angulo.- cada una de las galerías o corredores techados que circundan el patio principal de un edificio grande. Tiene mucho uso en Andalucia, especialmente tratandose de conventos monásticos.

- ¿Qué es un ángulo? - Hablar de lo que no se entiende: ref. con que se pone de relieve la osadía de muchos ignorantes presumidos que se entremeten a juzgar de asuntos en que son completamente legos.

... Alude a un cuento muy sabido al de aquel viajero que parandose a mirar la obra del Escorial, empezó a ponerle tachas, diciendo que tenía un "angulo" muy defectuoso. Un arquitecto que estaba presente, le preguntó: ¿ Usted sabe lo que es un ángulo? y el otro después de pensar un rato, dijo: ¿ Angulo? ángulo es meterse uno a hablar de lo que no se entiende. Desde entonces ha quedado en proverbio.

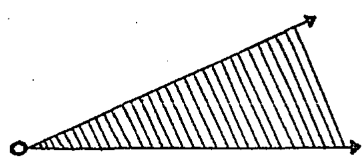
A. M. Segovia

En parte la dificultad del concepto de ángulo está generada por inexactitudes terminológicas, en parte por la mezcolanza de varios conceptos matemáticos distintos denotados por un mismo término: "angulo", aunque también en parte debido a las complicaciones propias del concepto.

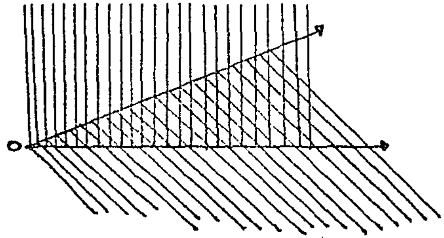
El hecho de utilizar la misma palabra "angulo" para denotar conceptos, ciertamente cercanos pero no idénticos, genera una cierta revoltura que se refleja en la enseñanza de este concepto.

Los acercamientos más usuales al concepto de ángulo son:

i) Como la figura geométrica formada por un par de semirectas con origen común (manera de Hilbert expuesta en "Fundamentos de la Geometría")



ii) Como una parte del plano acotada por el "ángulo" en sentido de i), es decir como un sector plano con vértice en O, donde tal sector es la intersección de dos semiplanos cerrados cuyas rectas frontera son distintas y pasan por O.



iii) Como una medida de la rotación, definida de suerte que la igualdad de dos rotaciones es equivalente a la coincidencia de sus centros y "ángulos" de giro. Aquí "ángulo" es una "magnitud" α que está entre $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ o bien $-\pi < \alpha \leq \pi$

iv) Como variable de las funciones trigonométricas

La definición ii) es la que mejor se adapta para la representación de un ángulo en un dibujo, para recortar ángulos, para medir ángulos con el transportador, en resumen la que mejor se adapta para la representación intuitiva de ángulo (a lo más hasta la secundaria).

Esta definición lleva a dificultades en cuanto se necesita sumar muchos ángulos relativamente grandes.

Si se considera al ángulo ya no como una parte del plano, sino como un par ordenado de semirectas con origen común.

Sin embargo parte de las dificultades no desaparecen y estan relacionadas con la suma de ángulos. Con la intensión de escapar a estas dificuctades se introduce una relación de equivalencia en el conjunto de pares de semirectas y luego se define la suma en el factor conjunto respecto de la relación de equivalencia introducida.

Para darle la vuelta a las complicaciones de la definición anterior algunos autores postulan la existencia de una "medida" en el conjunto de pares ordenados de semirectas (no dirigidas en sentido contrario) y su aditividad para "ángulos pequeños".

Persisten las dificultades pues esta definición borra las diferencias entre el "grupo" de ángulos y el grupo aditivo de números reales.

En todas las definiciones concretas de ángulos aparecen ciertos entes muy abstractos, el problema didáctico con ellos consiste en hacer accesible dicha abstracción tomando como definición aquella en que sean usados solo los conceptos intuitivamente claros.

Hay definiciones en que para precisamente hacerlas accesibles se identifica a los ángulos con las rotaciones alrededor de un punto O.

Finalmente es necesario ser concientes de que se puede construir gran parte de la geometría elemental sin el concepto de ángulo:

La estructura afin del plano, el teorema de Pitágoras, las transformaciones de semejanza no exigen el uso de ángulos e igualdad de triángulos. El exagerado uso que se hace del concepto de ángulo esta relacionado con el hecho de que en "Los Elementos" es uno de los conceptos simples de los axiomas de Euclides, es mas por largo tiempo el famoso quinto postulado de Euclides se enunciaba en términos de ángulos y por otro lado los seguidores de Euclides consideraron adecuado usar las nociones de ángulo dirigido y ángulo entre rectas sin mayor puntualización simplemente porque eran nociones claras e intuitivamente evidentes.

Un intento mas fundamentado en construir casi toda la geometría sin la introducción de la "medida" de ángulos (sobre todo porque muchas veces se usa por comodidad y no por necesidad) parece ser un tema interesante del análisis y la matemática "aplicada".

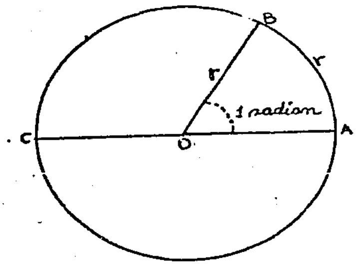
Apéndice IV - 2

Otras Medidas de Angulos

Radian.- es el ángulo que teniendo su vertice en el centro de un círculo sus lados interceptan un arco de circunferencia cuya longitud es igual a la del radio del círculo.

Relación entre grados y radianes.- se sabe que los ángulos centrales de un círculo son proporcionales a los arcos que interceptan.

Así en la figura:



$$\frac{\measuredangle AOC}{\measuredangle AOB} = \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{AB}} \text{ - - - - } (1)$$

($\frown$ se lee arco)

donde: $\measuredangle AOC = 180°$, $\measuredangle AOB = 1$ radian y $\widehat{ABC}$ es una semicircunferencia cuya longitud es πr.

Sustituyendo ésto en (1) se tiene:

$$\frac{180°}{1 \text{ radian}} = \frac{\pi r}{r}$$

por consiguiente:

$$\pi \text{ radianes} = 180°$$

Tomando la aproximación 3.14 para el valor de π se tiene:

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ \text{ aproximadamente}$$

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180^\circ} = .0175 \text{ radianes aproximadamente.}$$

Frecuentemente un ángulo en radianes se expresa como una fracción de π. Así por ejemplo $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ radianes.

Ejemplos:

1.- Expresar en radianes los siguientes ángulos.

a) 30°

Sabemos que π radianes $= 180^\circ$ por lo que $30^\circ = \frac{1}{6}(180^\circ)$ ó lo que es lo mismo

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ radianes.

b) 25°

Sabiendo que $1^\circ = .0175$ radianes entonces $25^\circ = 25(.0175) = .4375$ radianes.

2.- Expresar en grados los siguientes ángulos.

a) $\frac{2}{3}\pi$

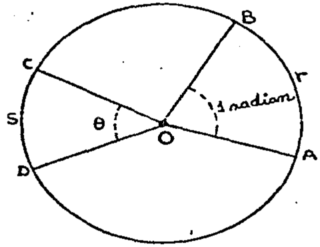
Sabemos que π radianes $= 180^\circ$ luego entonces $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}(180^\circ) = 120^\circ$

b) 1.3 radianes

Como sabemos 1 radian $= 57.3^\circ$ por lo tanto 1.3 radianes $= (1.3)(57.3^\circ) = 74.5^\circ$.

Una de las aplicaciones del radian como unidad de medida se halla en la determinación de longitudes de arco.

Sea S la longitud de un arco de una circunferencia de radio r, interceptado por un ángulo central θ medido en radianes.



Sabiendo que en una circunferencia los arcos son proporcionales a los ángulos centrales y si ∡ AOB mide un radian y el arco AB tiene de longitud r entonces:

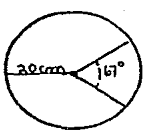
$$\frac{S}{r} = \frac{\theta}{1 \text{ radian}}$$

(θ estara dada en radianes)

de donde: $S = r\theta$

Ejemplo:

Calcular la longitud de un arco de circunferencia comprendido entre los lados de un ángulo central cuya medida es 67°, siendo el radio del circulo 20 cm.



Expresando a θ en radianes se tiene:

$\theta = 67° = 67(.0175) = 1.17$ radianes

por lo tanto:

$S = 20(1.17) = 23.4$ cm

El Mil. - El mil es una unidad de medida angular utilizada por el ejército de los Estados Unidos, especialmente en artillería. El mil se define como la medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y que intercepta un arco cuya longitud equivale a 1/6400 de la longitud de la circunferencia.

De la definición anterior se tiene:

$$6400 \text{ mils} = 360°$$

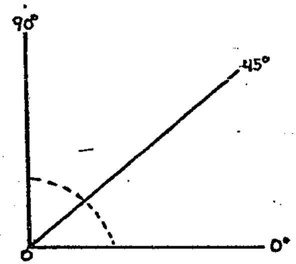
como $\quad 2\pi$ radianes $= 360°$

entonces $\quad 6400$ mils $= 2\pi$ radianes

por lo tanto $\quad 1 \text{ mil} = \dfrac{2\pi \text{ radianes}}{6400}$

$$= .000982 \text{ radianes}$$

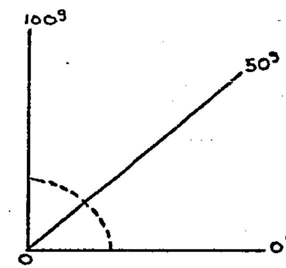
El Gonio o Grado Moderno (^{g}). - El ángulo recto está dividido en 100^g; la subdivisión es decimal, a diferencia del grado antiguo donde el ángulo recto está dividido en $90°$ y la subdivisión es sexagesimal.



Grado Antiguo

$1° = 60'$

$1' = 60''$

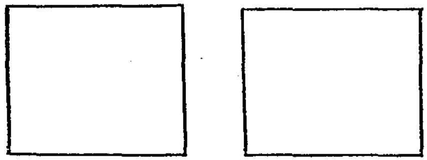


Grado moderno (gonio)

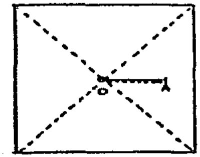
$1^g = 100^c$

$1^c = 100^{cc}$

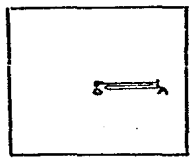
Apéndice IV-3



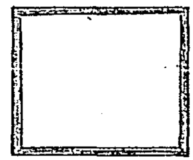
Recortar cuadrados de mica



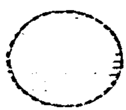
Localizar el centro y trazar segmento $\overline{OA}$ abriéndolo



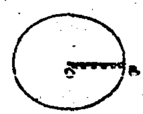
Pega un palillo en la parte inferior de $\overline{OA}$



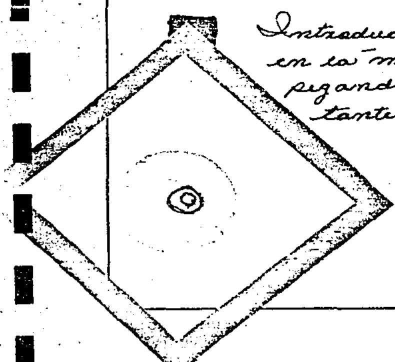
Unir los dos cuadrados de mica



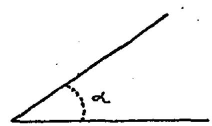
Trazar y recortar círculo



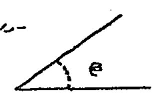
Trazar el radio $\overline{OB}$ recortarlo y pintarlo.



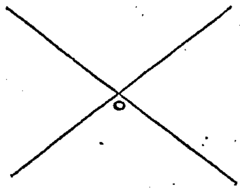
Introducir el círculo en la mica abierta pegando palillo restante.



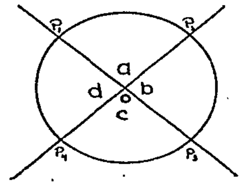
Verifica con tu mica transportador si el $\measuredangle \alpha$ es congruente al $\measuredangle \beta$



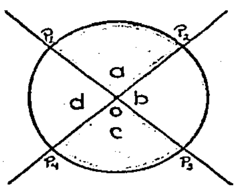
Apéndice IV-4



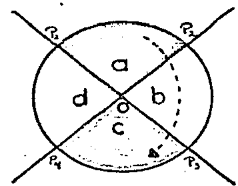
Dibujar dos rectas que se corten en el punto O



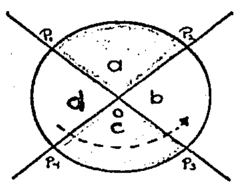
Apoyandonos en O trazamos un círculo que que intersecte a las rectas en P_1, P_2, P_3, P_4.



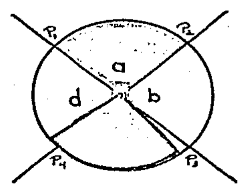
Iluminamos de diferente color los los pares de ángulos opuestos por el vértice formados.



Dibujamos y recortamos (papel lustre) la región P_1OP_2 y la superponemos

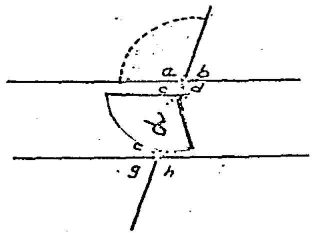


Dibujamos y recortamos la región P_1OP_4 y la superponemos.

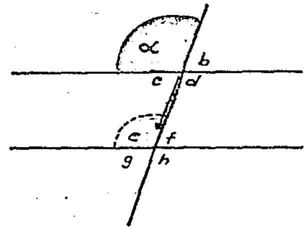


¡Así queda!

Apéndice IV - 5

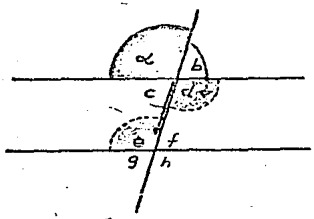


¡Así queda!



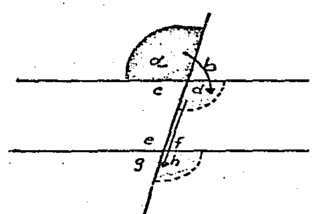
$\hat{a} = \hat{e}$

Los ángulos correspondientes son iguales



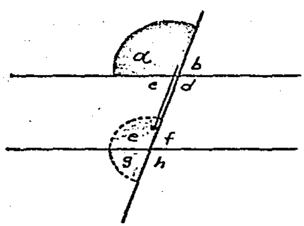
$\hat{d} = \hat{e}$

Los ángulos alternos internos son iguales

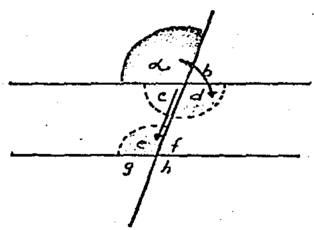


$\hat{a} = \hat{h}$

Los ángulos alternos externos son iguales



Los ángulos colaterales externos son ---- mentarios.

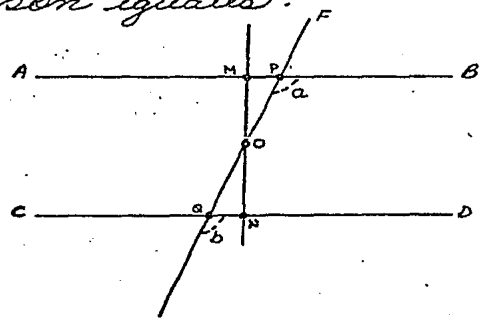


Los ángulos colaterales internos son su- plementarios.

Apéndice III - 6

Teorema

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal los ángulos correspondientes son iguales.



Hipótesis	Tesis
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	$\measuredangle a = \measuredangle b$

Demostración

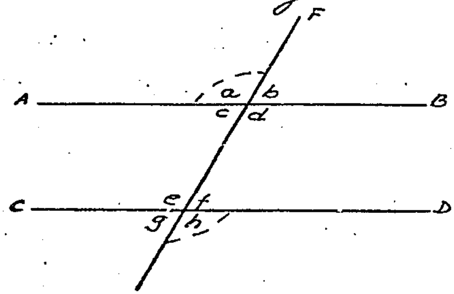
Afirmaciones	Razones
1.- Sea F transversal que corta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en los puntos P y Q respectivamente.	Por construcción.
2.- Por O punto medio de $\overline{PQ}$ trácese la recta $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{CD}$. $\overline{MN} \perp \overline{AB}$	Si dos o mas rectas son paralelas toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a las otras.
3.- ΔPMO y ΔOQN son rectángulos.	Por construcción el $\measuredangle PMO$ y $\measuredangle ONQ$ son rectos.

4.- $\measuredangle POM = \measuredangle QON$	Por ser ángulos opuestos por el vértice.
5.- $\overline{OP} = \overline{OQ}$	Por construcción O es punto medio de PQ.
6.- $\Delta PMO = \Delta QNO$	Dos Δ rectángulos son iguales si tienen iguales respectivamente la hipotenusa y uno de los ángulos adyacentes a ella.
7.- $\therefore \measuredangle a = \measuredangle b$	Por ser el suplemento de $\measuredangle APQ$ y $\measuredangle DQP$ respectivamente.

Apéndice III-7

Teorema

Si dos rectas paralelas son corta-das por una transversal, los ángulos alternos externos son iguales.



Hipótesis	Tesis
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	$\measuredangle a = \measuredangle h$

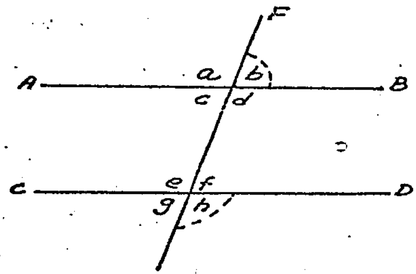
Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\measuredangle a = \measuredangle d$	Por ser ángulos opuestos por el vértice.
2.- $\measuredangle d = \measuredangle e$	Por ser ángulos alternos internos.
3.- $\therefore \measuredangle a = \measuredangle e$	Dos cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
4.- $\measuredangle e = \measuredangle h$	Por ser ángulos opuestos por el vértice.
5.- $\therefore \measuredangle a = \measuredangle h$	Dos cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

Apéndice IV - 8

Teorema.-

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal los ángulos colaterales externos son suplementarios.



Hipótesis
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Tesis
$\measuredangle b = \measuredangle h$

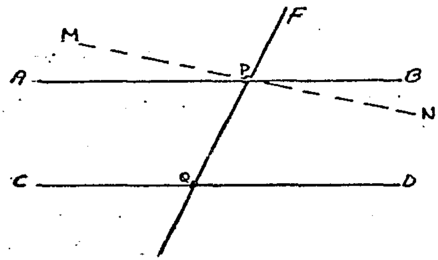
Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\measuredangle b = \measuredangle f$	Por ser ángulos correspondientes.
2.- $\measuredangle f + \measuredangle h = 180°$	Por ser ángulos suplementarios.
3.- $\therefore \measuredangle b = \measuredangle h$	Toda cantidad puede ser sustituida por su igual.

Apéndice IV-9

Teorema

Si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos iguales entonces las rectas son paralelas.



Hipótesis

$\widehat{APQ} = \widehat{DQP}$

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$

Tésis

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Antes de dar la demostración, hagamos un análisis de ella:

Como no sabemos si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, supongamos que $\overline{MN}$ que pasa por P es paralela a $\overline{CD}$. (para una demostración a veces es necesario ayudarnos con construcciones que sabemos se pueden hacer). $\overline{MN}$ la podemos suponer por el postulado 5 de Euclides que dice: por un punto fuera de una recta dada, existe una y solo una recta que pasa por ese punto y que es paralela a la recta dada, Por lo que tendremos que demostrar que $\overline{MN}$ coincide con $\overline{AB}$.

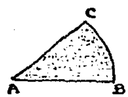
Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- Suponer $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$	Postulado 5

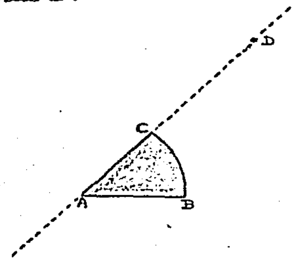
2.- $\widehat{MPQ} = \widehat{DQP}$	Por ser ángulos alternos internos.
3.- $\widehat{APQ} = \widehat{DQP}$.	Por ser ángulos alternos internos.
4.- $\widehat{APQ} = \widehat{MPQ}$	Dos cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
5.- $\therefore$ $\overline{AB}$ coincide con $\overline{MN}$	Por ser ángulos congruentes.
6.- $\therefore$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	

Apéndice IV - 9

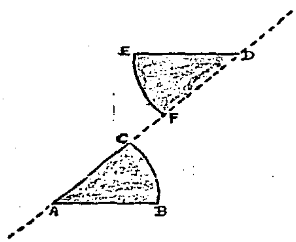
Trazar dos ángulos y pegar uno de ellos

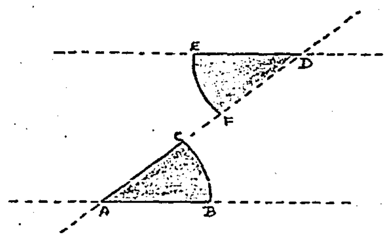


Prolongamos $\overline{AC}$ y tomamos el punto D.



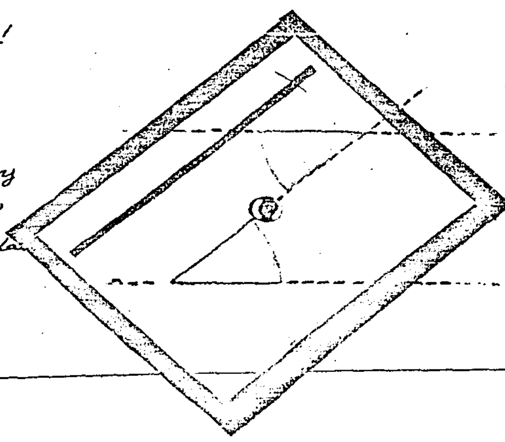
Colocamos el ángulo restante





¡Así queda!

Gira la mica y verifica que las rectas son paralela



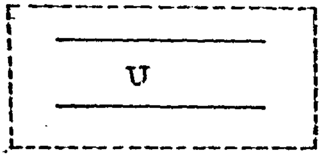
Tema V

Polígonos

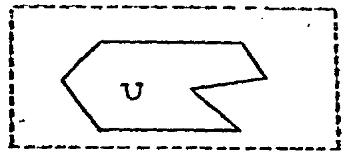
Polígonos

Definición.- es una porción de un plano limitada por segmentos de rectas, es decir polígono es una figura (formada por rectas) cerrada (el inicio coincide con el final).

Ejemplo:



Caso 1



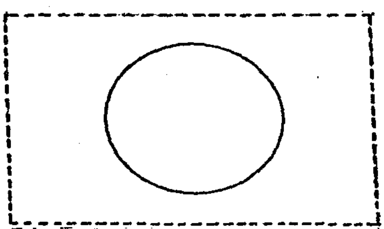
Caso 2

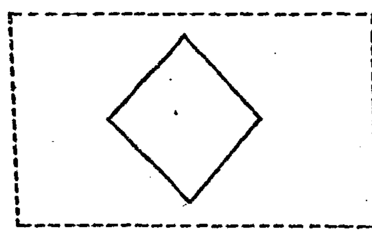
En éste caso U no es un polígono porque no está limitado totalmente por segmentos de rectas.

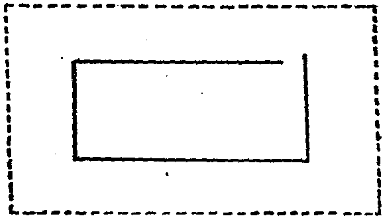
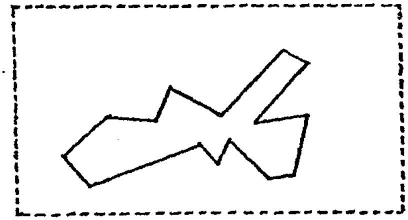
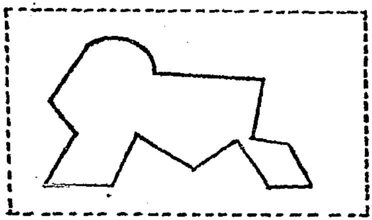
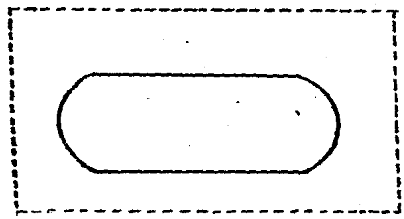
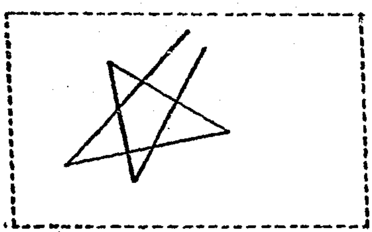
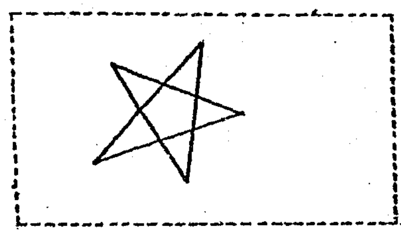
En este caso U si es un polígono porque si está totalmente limitado por segmentos de rectas.

Ficha V-1

Indica en cada uno de los siguientes ejercicios cuales corresponden a polígonos y cuáles no explicando siempre tu respuesta.





Clasificación de los Polígonos

Primera Clasificación:

Polígonos (según la curva que la forma).

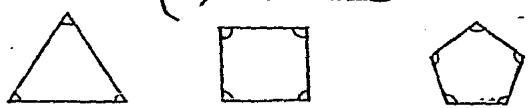
- Simples o polígonos: formados por curvas simples (sin puntos por donde se pase 2 veces)

- No simples o estrellados: formados por curvas no simples (con puntos de intersección)

Segunda Clasificación

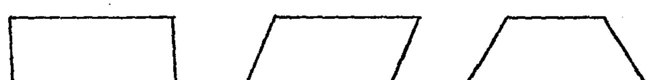
Polígonos (según sus lados y ángulos)

- Regulares: son los que tienen todos sus lados y ángulos iguales es decir son equiángulos y equiláteros.



Triángulo Cuadrado Pentágono

- Irregulares: Son los que no tienen alguna o ninguna de las condiciones anteriores



Rectángulo Romboide Trapecio

Tercera Clasificación

Polígonos. según sus lados

Triángulos
3 lados

Cuadrilateros.
4 lados

Paralelogramos.- son los que tienen sus lados paralelos 2 a 2.

rectángulo.- 4 ángulos rectos

rombo.- 4 lados iguales

Cuadrado.- angulos y lados iguales.

No Paralelogramos.- son los que no tienen lados paralelos 2 a 2.

trapecio.- un sólo par de lados opuestos paralelas.

trapezoide.- ningún par de lados paralelos

Pentágonos
5 lados

Exágonos
6 lados

Eptágonos
7 lados

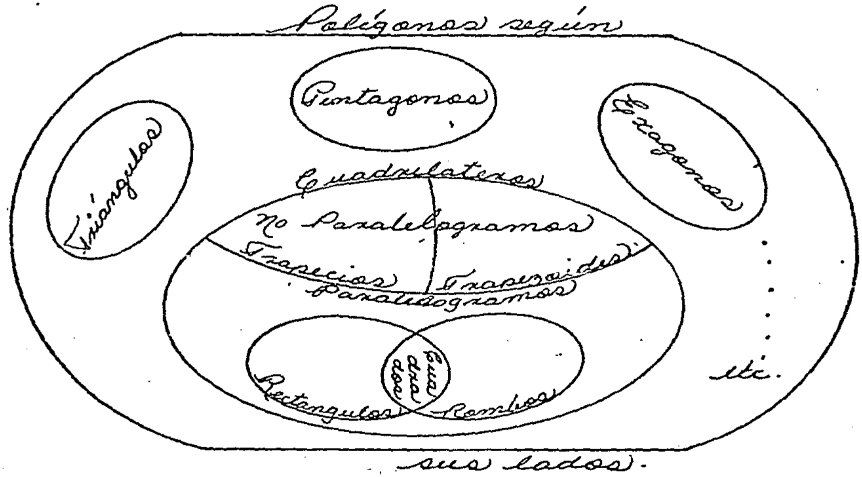
Octágonos
8 lados

Nonágonos
9 lados

Decagonos
10 lados

Encagonos
11 lados

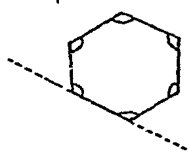
Representemos ahora por medio de diagramas de Venn la clasificación anterior.



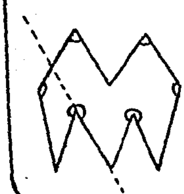
Cuarta Clasificación

Polígonos (según sus ángulos)

- Convexos: Si todos sus ángulos interiores son convexos (menores que 2 rectos)



- Cóncavos: si al menos uno de sus ángulos interiores es cóncavo



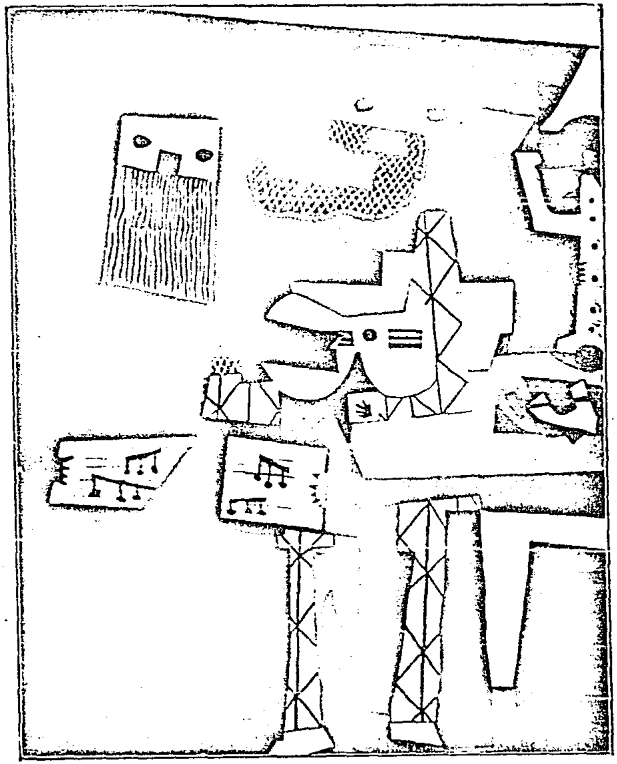
Ficha no II-2

1.- Construye un pentágono y un exágono regulares utilizando para ello sólo regla y compás. Anota las dificultades matemáticas que tuviste en la construcción de las figuras anteriores.

2.- Decir si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones explicando en cada caso tu respuesta

a) El rombo es un polígono regular
b) Todos los pentágonos son polígonos regulares.
c) Algunos decágonos son polígonos cóncavos.
d) Todos los triángulos son polígonos regulares
e) Todos los triángulos son polígonos irregulares.
f) Algunos triángulos son polígonos regulares.
g) Algunos triángulos son polígonos irregulares.
h) Todos los paralelogramos son rectángulos.
i) Todos los rectángulos son paralelogramos.
j) Todos los rombos son cuadrados
k) Algunos rombos son cuadrados
l) Algunos trapecios son paralelogramos.
m) Todos los cuadrados son rectángulos.

3.- En la siguiente fotografía localiza todas las figuras geométricas (polígonos) que encuentres asignándoles el nombre respectivo a cada una



4.- Si observamos un poco en nuestro alrededor nos damos cuenta de que estamos rodeados de figuras geométricas, ilustra estas mediante dibujos, recortes de revistas etc.

Taller II-1

Objetivo del Taller.- que el alumno construya las diferentes clases de polígonos vistos en clase.

Material Necesario.- una tabla de madera de 40 x 40 cm, cuadriculada a lápiz de cm en cm y en las intersecciones de los cuadrados fijar clavos, estambre, hilo grueso o ligas.

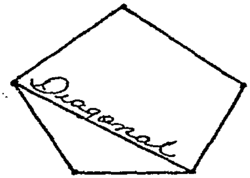
Pasos a Seguir

1.- Con tu liga o estambre construye polígonos de cada una de las clasificaciones vistas en clase (1ª, 2ª, 3ª y 4ª).

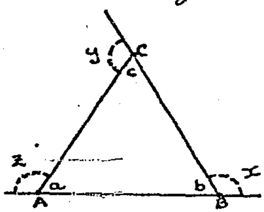
(Ver taller apéndice II-1)

Definiciones Importantes

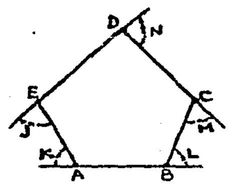
Diágonal de un Polígono.- segmento cuyos puntos extremos son vértices no adyacentes del polígono.



Angulo Exterior de un Polígono.- es un ángulo adyacente y suplementario a un ángulo interior del polígono.



Los ∢S x, y, z son ∢S exteriores del △ABC



Los ∢S J, K, L, M, N son ángulos exteriores al polígono ABCDE

Hecha No. II-3

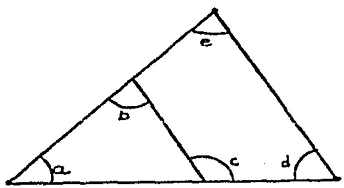
1.- Dibuja un pentágono y localiza todas sus posibles diagonales.

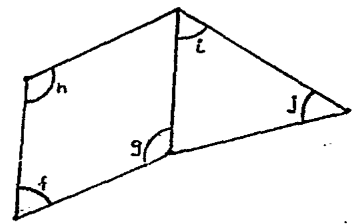
2.- ¿Cuántas diagonales tienen los siguientes polígonos?

a) cuadrilátero b) exágono c) triángulo

3.- Localiza los ángulos exteriores de un cuadrilatero, cuernos que se te presentará un problema. Indícalo enseguida a tu profesor.

4.- Señala los ángulos exteriores de acuerdo a los ángulos interiores indicados en las siguientes figuras.





Ya que sabemos algo sobre polígonos, apliquemos estos conocimientos para llevar a cabo el siguiente taller:

Taller No II-2

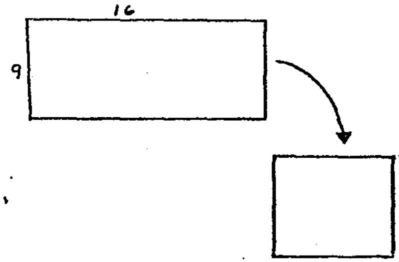
Objetivo del Taller.- que el alumno identifique en que tipo de polígonos, puede recortar un polígono propuesto para formar otro diferente.

Material Requerido.- regla, lápiz, tijeras

Pasos a Seguir.- para llevar a cabo este taller solo son permitidos los trazos en línea recta.
Una vez recortada una figura en partes se puede formar otra figura reacomodando las partes.

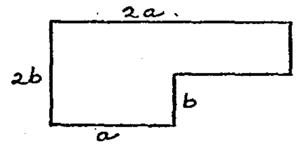
Problema 1

Recorta en dos partes un rectángulo de lados 9 y 16 cm; de suerte que con ellos se pueda formar un cuadrado.



Problema 2

Recorta la figura al margen en cuatro partes iguales.



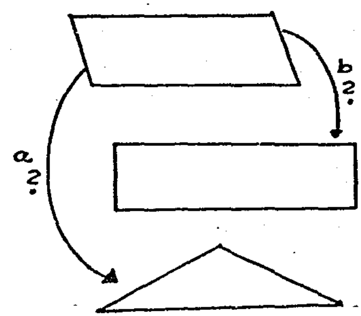
Problema 3

Es fácil dividir un cuadrilátero en dos triángulos mediante una recta. Ahora dibuja un cuadrilátero que pueda partirse en tres triángulos mediante una recta.

Problema 4

a) ¿Cómo recortar un paralelogramo para formar un rectángulo

b) ¿Cómo recortarlo para formar un triángulo.

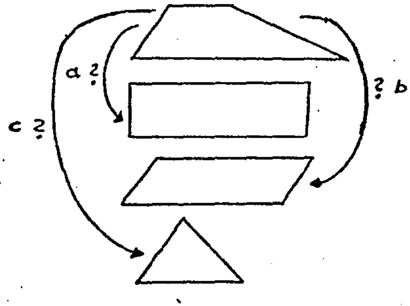


Problema 5

a) ¿Cómo recortar un trapecio para formar un rectángulo?.

b) ¿Cómo recortarlo para formar un paralelogramo?.

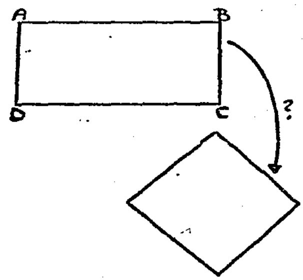
c) ¿Cómo hacerlo para formar un triángulo



Problema 6

En el rectángulo ABCD: $\overline{AB} = 2\overline{AD}$.

Recorta el rectángulo en tres partes con las cuales se pueda formar un cuadrado.

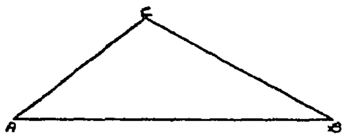


(Ver solución al taller en el apéndice II-2)

Enseguida estudiaremos el triángulo por ser el polígono mas pequeño y porque cualquier polígono se puede dividir en triángulos por medio de diagonales.

Ficha No. II-4
Explica lo anterior con una figura

Triángulo
Definición.- es el polígono de menor número de lados.



Notación.- observando la figura anterior para referirnos al triángulo usaremos el símbolo $\triangle ABC$ (léase $\triangle ABC$)

Clasificación de los Triángulos

Clasificación
- I Según sus lados
- II Según sus ángulos

I
- Equilátero.- tiene sus tres lados iguales.
- Isósceles.- tiene dos lados iguales.
- Escaleno.- tiene sus tres lados desiguales

II
- Equiángulo.- tiene tres ángulos iguales.
- Acutángulo.- tiene sus tres ángulos agudos.
- Rectángulo.- tiene un ángulo recto.
- Obtusángulo.- tiene un ángulo obtuso

Ficha No. V-5

1.- De acuerdo a los cuadros de clasificación de triángulos (I, II) dibuja las figuras representativas de ésta.

2.- Realiza los diagramas de Venn en forma adecuada para representar la clasificación I

3.- Haz lo mismo para la clasificación II
(Respuestas a 2 y 3 en el apéndice II-

4.- Decir si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a) Todos los triángulos isósceles son equiláteros.

b) Todos los triángulos equiláteros son isósceles.

c) Algunos triángulos obtusángulos son rectángulos.

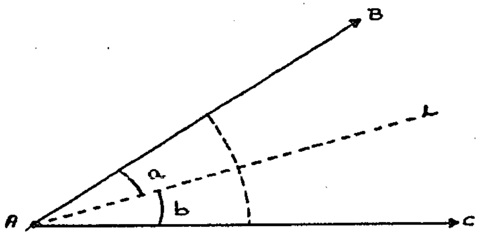
d) Algunos triángulos rectángulos son acutángulos.

e) Algunos triángulos isosceles son escalenos.

f) Algunos triángulos isosceles son equiláteros.

Líneas Importantes del Triángulo

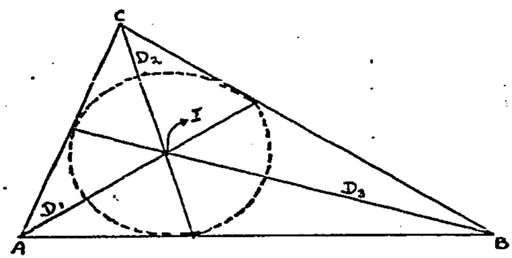
Bisectriz.- es el segmento que divide al ángulo en dos ángulos iguales.



$\measuredangle A = 36°$
$\measuredangle a = 18°$
$\measuredangle b = 18°$
por ser L bisectriz

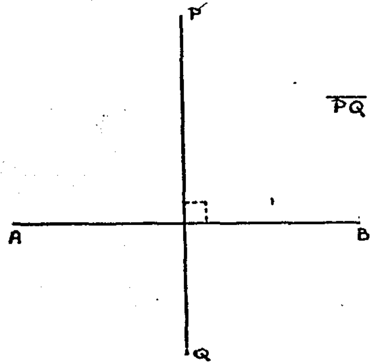
Todo punto de la bisectriz de un ángulo resulta ser equidistante de los lados del ángulo.

Como el triángulo tiene tres ángulos por lo tanto tiene tres bisectrices.



La intersección de las tres bisectrices (D_1, D_2, D_3) es el punto I (incentro) llamado así porque es el centro de un círculo inscrito al triángulo. (Trazo de las bisectrices del triángulo apéndice II-3).

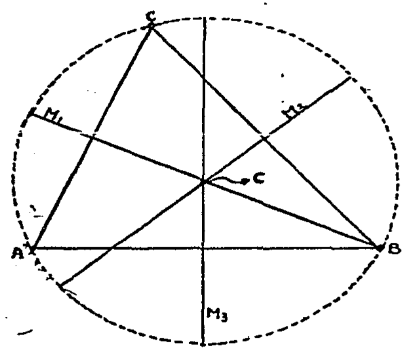
Mediatriz.- es la recta que divide a un segmento en dos partes iguales y cae a éste en forma perpendicular.



$\overline{PQ}$ mediatriz de $\overline{AB}$

Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos A y B. La mediatriz resulta ser el eje de simetría de los puntos A y B.

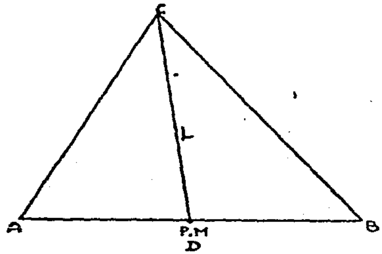
Como el triángulo tiene tres lados por lo tanto tiene tres mediatrices (M_1, M_2, M_3).



Al punto de intersección de las tres mediatrices (M_1, M_2, M_3) se le llama circuncentro por ser el centro de un un círculo circunscrito al triángulo. (Un círculo que toca los tres vértices del triángulo).

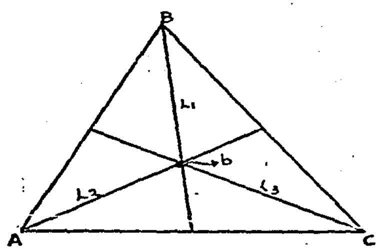
(Trazo de las mediatrices del triángulo apéndice V-4)

Mediana.- es la recta que va del vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto.



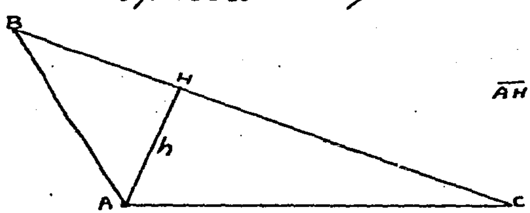
$\overline{CD}$ mediana

Como el triángulo tiene tres vértices y tres lados por lo tanto tiene tres medianas.



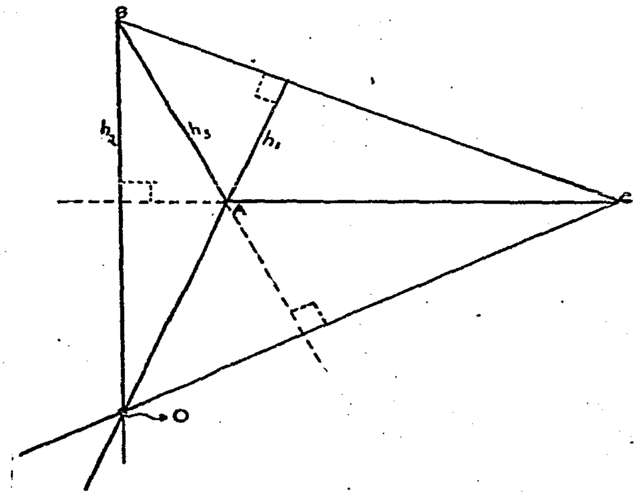
Al punto de intersección (b) de las tres medianas (L_1, L_2, L_3) se llama baricentro. (Trazo de las medianas del triángulo apéndice V-5).

Altura.- la altura de un triángulo esta dada por la recta que va de un vértice al lado opuesto en forma perpendicular.



$\overline{AH}$ altura

Como el triángulo tiene tres vértices y tres lados por lo tanto tiene tres alturas.



A la intersección O de las tres alturas (h_1, h_2, h_3) se llama ortocentro. (Trazo de las alturas de un triángulo dado ver apéndice V-6)

Taller V-3

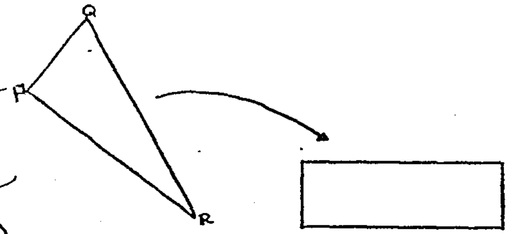
Objetivo del taller.- que el alumno reafirme el concepto de altura de un triángulo aplicandoló a un problema dado.

Material necesario.- regla, lápiz y tijeras

Pasos a Seguir.- para llevar a cabo este taller solo son permitidos los trazos en línea recta. Una vez recortada una figura en partes se puede formar otra figura reacomodando las partes como en un rompecabezas.

Problema

Recorta un triangulo en tres partes de tal forma que pueda formarse un rectángulo.
(dos posibilidades)



(Respuesta apéndice V-7)

Taller V-4

Objetivo del Taller.- que el alumno reafirme los conceptos de altura, mediana mediatriz y bicetriz identificando que elementos intervienen para sus construcciones.

Material Necesario.- papel cascaron, cartoncillo o lo equivalente para formar una base, papel lustre, estambre o hilos de 4 colores diferentes, 5 clavos, pegamento, tijeras, pluma y lápiz.

Pasos a Seguir

1.- Dibuja un triángulo en tu papel lustre y pégalo en tu base.
2.- Elige un vértice del triángulo y fija en éste con ayuda de tu clavo dos hilos de diferentes colores.
3.- Coloca los hilos adecuadamente de tal manera que uno te represente una altura y el otro una mediana del triángulo

¿Qué elementos se necesitan para poder trazar una altura y una mediana?

4.- En forma análoga a la anterior coloca los hilos restantes para representar una bisectriz y una mediatriz del triángulo.

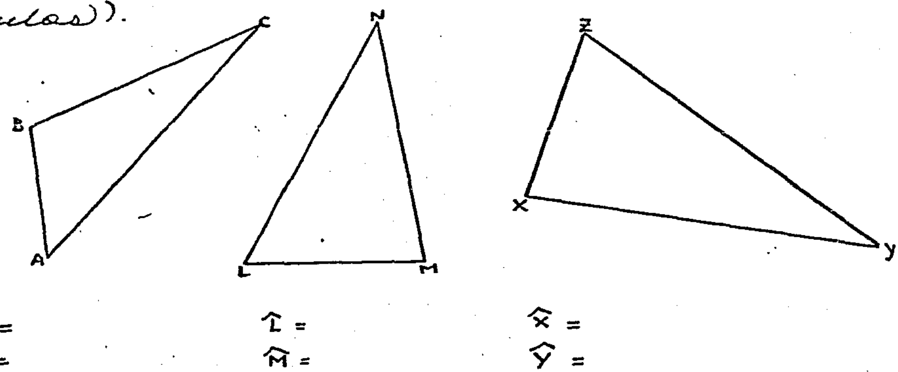
a) ¿Qué elementos del triángulo necesitaste conocer para localizar la bisectriz?.

b) ¿Qué elementos del triángulo necesitaste conocer para localizar la mediatriz?.

Propiedades de los Triángulos

Los triángulos tienen ciertas propiedades importantes de las cuales algunas las demostraremos y otras solo se mencionarán.

¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de los siguientes triángulos? (mide con transportador cada uno de los ángulos).



$\hat{A}$ =	$\hat{L}$ =	$\hat{X}$ =
$\hat{B}$ =	$\hat{M}$ =	$\hat{Y}$ =
$\hat{C}$ = ______	$\hat{N}$ = ______	$\hat{Z}$ = ______
SUMA	SUMA	SUMA

Ahora dibuja otros triángulos y encuentra la suma de sus ángulos interiores. ¿Qué observaste?.

Ahora tratarás de mostrar la conclusión anterior, para lo cual llevarás a cabo el siguiente taller.

Taller VI-5

Objetivo del Taller.- mostrar mediante movimientos y dobleces que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Material Necesario.- papel cascaron o cartoncillo grueso o triplay para formar una base; papel lustre o cartulina de colores, tijeras, regla y pegamento.

Pasos a Seguir:

1.- Recorta un rectángulo de cartoncillo grueso o papel cascarón, el cual te servirá de base.

2.- Dibuja un triángulo (puede ser isósceles, escaleno o equilátero) de tal forma que al recortarlo quepa en tu base. (usa papel lustre)

3.- Pega el triángulo anterior en tu base.

4.- Recorta un triángulo (de papel lustre de color diferente al anterior) de la misma forma y tamaño al que se hizo en el paso No 2.

5.- Superponlo en el anterior según consideres para que se pueda mostrar:

Que los angulos interiores del triángulo superpuesto forman un angulo llano.

(Ver taller apéndice V-8)

Vamos ahora a demostrar que el resultado que verificaste en el taller anterior es cierto para cualquier triángulo.

Teorema V-1

En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.

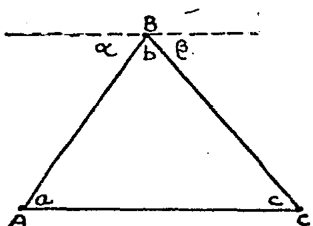
Hipótesis literal.- En todo triángulo

Hipótesis Simbólica.- ΔABC

Tesis literal.- la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.

Tesis Simbólica $\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = 2$ rectos

Nota: de aquí en adelante utilizaremos para la demostración de los teoremas únicamente la hipótesis y la tesis simbólica.



figura

Hipótesis: ΔABC

Tesis $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2$ rectos (180°)

Demostración

Afirmaciones	Razones
1 la recta $\overline{LM} \parallel \overline{AC}$	Por construcción
2.- $\measuredangle \alpha + \measuredangle b + \measuredangle \beta = 2$ rectos	Por formar ángulo llano
3.- $\measuredangle \alpha = \measuredangle a$	Por ser ángulos alternos internos.
4.- $\measuredangle \beta = \measuredangle c$	Por ser ángulos alternos internos.
$\therefore \measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = 2$ rectos	Toda cantidad puede ser sustituida por su igual.

Pasemos ahora a averiguar cuanto vale la suma de los ángulos exteriores de un triángulo. Para lo cual dibujarás triángulos y sus respectivos ángulos exteriores, los que medirás con tu transportador para luego efectuar la suma de las medidas de éstos.

¿ Que observaste?
¡ Muy bien! Trataras ahora de mostrar tu conclusión para lo cual realizaras el siguiente taller.

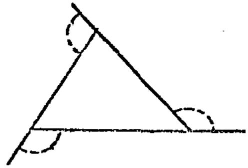
Taller V - 6

Objetivo del Taller.- mostrar mediante movimientos y dobleces que la suma de los ángulos exteriores de todo triángulo es igual a 4 rectos (360°).
Material Necesario.- el mismo que en el taller anterior.
Pasos a Seguir

1.- Recorta un rectángulo de cartoncillo grueso o papel cascarón el 4 --

cual te servirá de base.

2.- En tu papel lustre dibuja un triángulo con sus ángulos exteriores (como se muestra en la figura) de tal forma que al recortarlo quepa en tu base.



figura

3.- Pega el triángulo anterior en tu base.

4.- Dibuja en tu papel lustre (diferente color que el anterior) un triángulo de la misma forma y tamaño que el anterior y recórtalo.

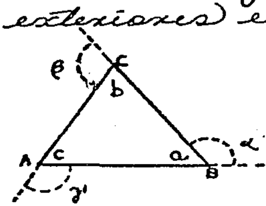
5.- Superpón éste triángulo en el anterior según consideres para que se pueda mostrar: Que los ángulos exteriores superpuestos forman un ángulo perigonal.
(Ver taller apéndice II-9)

Pasemos ahora a demostrar la conclusión anterior.

Teorema V-2

En todo triángulo la suma de los ángulos exteriores es igual a 4 rectas (360°)

figura



Hipótesis: Δ ABC

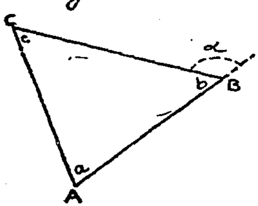
Tesis : $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 4$ rectas (360°)

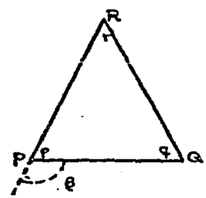
Demostración

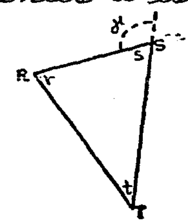
Afirmaciones	Razones
1.- $\hat{a} + \hat{\alpha} = 180°$	Por ser suplementarios
2.- $\hat{b} + \hat{\beta} = 180°$	" " " "
3.- $\hat{c} + \hat{\gamma} = 180°$	" " " "
4.- $\hat{\alpha} + \hat{a} + \hat{b} + \hat{\beta} + c + \hat{\gamma} = 540°$	Sumando miembro a miembro partes iguales.
5.- $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$	Por teorema anterior.
6.- $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 540°$	Por conmutatividad de los números.
7.- $180° + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 540°$	Toda cantidad puede ser sustituida por su igual
8.- $180° + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} - 180° = 540° - 180°$	Si a cantidades iguales se quitan cantidades iguales los resultados son iguales.

$\therefore \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 4$ rectas
(360°) l.q.d.

En los siguientes triángulos con ayuda de tu transportador encuentra el valor de los ángulos exteriores $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ así como el de los ángulos interiores no adyacentes a éstos.







$\left.\begin{array}{l}\hat{\alpha} = \\ \hat{a} = \\ \hat{c} = \end{array}\right\}$ súmalos

$\left.\begin{array}{l}\hat{\beta} = \\ \hat{r} = \\ \hat{q} = \end{array}\right\}$ súmalos

$\left.\begin{array}{l}\hat{\gamma} = \\ \hat{r} = \\ \hat{t} = \end{array}\right\}$ súmalos

¿ Hay alguna relación entre los valores y las sumas de los ángulos encontrados anteriormente en el ΔABC ?.

¿ Hay alguna relación entre los valores y las sumas de los ángulos encontrados anteriormente en el ΔPQR ?.

¿ Hay alguna relación entre los valores y las sumas de los ángulos encontrados anteriormente en el ΔRST ?.

Ciertamente la relación que debiste haber encontrado al realizar lo anterior consiste en que el valor del ángulo exterior en cada caso es igual a la suma de los valores de los ángulos interiores no adyacentes a éste.

Taller V-7

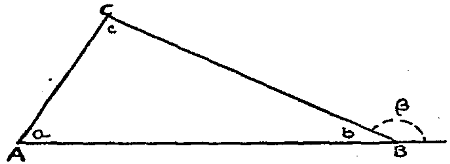
Objetivo del Taller.- mostrar en forma análoga a los 2 talleres anteriores la conclusión antes obtenida.

(Ver taller apéndice V-10.)

Pasemos ahora a demostrar que ésta conclusión es válida en general para cualquier triángulo.

Teorema V-3

En todo triángulo cualquier ángulo exterior de éste es igual a la suma de los ángulos interiores no ayacentes a él.



Hipótesis: ΔABC

Tésis: $\hat{\beta} = \hat{a} + \hat{c}$

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = 180°$	Por ser ángulos interiores del ΔABC.
2.- $\measuredangle b + \hat{\beta} = 180°$	Por ser ángulos suplementarios.
3.- $\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = \measuredangle b + \measuredangle \beta$	Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.
4.- $\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c - \measuredangle b = \measuredangle b + \measuredangle \beta - \measuredangle b$	Si a cantidades iguales quitamos cantidades iguales los resultados son iguales.

$\therefore \measuredangle a + \measuredangle c = \hat{\beta}$ l.q.d

Analogamente se demuestra para cualquier otro de los ángulos exteriores.

Relaciones entre los Angulos y los Lados del Triángulo

Para poder encontrar la relación existente entre los ángulos y los lados del Triángulo cuando un triángulo tiene un lado mayor que otro llevaremos a cabo el siguiente taller:

Taller II - 8

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca que cuando un triángulo tiene un lado mayor que otro entonces al lado mayor del Triángulo se opone el ángulo mayor y a mayor ángulo se opone el mayor lado.

Material Necesario.- papel lustre de varios colores, tijeras, lápiz, regla, plumones pegamento.

Pasos a Seguir

1.- En tu papel lustre dibuja 5 triángulos de diferentes formas y colores y que tengan un lado mayor que otro.

2.- Recórtalos

3.- Con cada uno de los triángulos anteriores sigue los siguientes pasos:

a) Numera los lados y ángulos de cada uno de los triángulos

b) Haciendo dobleces compara el tamaño del lado 1 con el tamaño del lado 2.

¿ Cuál es mas grande ?

c) Toma el lado que resultó mayor y comparalo con el lado 3 del triángulo.

¿ Cuál es mas grande ?

d) Marca con plumón el lado que resultó ser el mas grande.

e) Con ayuda de dobleces compara el tamaño del ∡1 con el ∡2, para ello haz coincidir los vértices y uno de los lados

¿ Cuál es más grande?

f) Toma el ángulo que resultó mayor y compáralo con el ∡3.

¿ Cuál es mayor?

g) Colorea el ángulo que resultó ser el mas grande del triángulo.

4.- Observando los triángulos anteriores: ¿Qué relación encuentras entre el lado y el ángulo mayores en cada uno de los 5 triángulos? (Ver taller apéndice II-11)

De la conclusión obtenida en el taller anterior obtenemos la proposición:

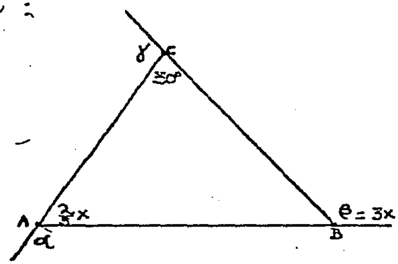
Teorema II-4

Si $\overline{AB} > \overline{BC}$ en un $\triangle ABC$ entonces $\measuredangle C$ es mayor que el $\measuredangle A$. Y viceversa, si el $\measuredangle C$ es mayor que el $\measuredangle A$ entonces $\overline{AB} > \overline{BC}$.

(Demostración apéndice II-12)

Pasemos ahora a encontrar la solución de algunos problemas utilizando para ello los resultados hasta ahora encontrados.

Problema 1. Encontrar los valores de los ángulos exteriores e interiores del siguiente triángulo:



Como $\hat{\beta} = \hat{A} + \hat{C}$ por el teorema II-3 entonces $3x = 30 + \frac{2}{5}x$

resolviendo la ecuación obtenida, se tiene:

$$15x = 150 + 2x$$
$$15x - 2x = 150$$
$$13x = 150$$
$$x = \frac{150}{13} = 11^\circ\, 32'\, 18''$$

como $\hat{\beta} = 3x$ entonces $\hat{\beta} = 3\,(11^\circ 32' 18'') = 34^\circ 36' 54''$

$\measuredangle\ \widehat{ABC} = 180^\circ - (34^\circ 36' 54'') = 145^\circ 23' 6''$

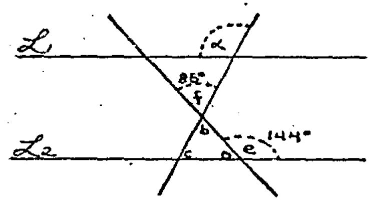
$\widehat{CAB} = 180^\circ - [(145^\circ 23' 6'') + 30^\circ] = 180^\circ - (75^\circ 23' 6'') = 4^\circ 36' 54''$

$\hat{\alpha} = 145^\circ 23' 6'' + 30^\circ = 175^\circ 23' 5''$

$\hat{\gamma} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Problema 2

En la siguiente figura encontrar el valor del ángulo $\hat{\alpha}$



$L_1 \parallel L_2$

Una forma de resolver el problema anterior es la siguiente: (aunque puede haber otra u otras formas de hacerlo)

$\hat{a} = 36^\circ$ por ser suplementario a $\hat{e}$

$\hat{b} = 85^\circ$ por ser ángulo opuesto por el vértice de $\hat{f}$.

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$ por ser ángulos interiores de un triángulo.

$\hat{c} = 180^\circ - (36^\circ + 85^\circ)$

$\hat{c} = 59^\circ$

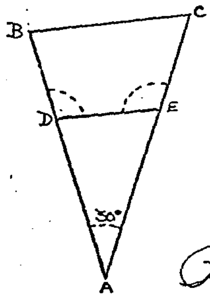
$\hat{c} = \hat{d} = 59^\circ$ por ser ángulos alternos internos

$\hat{d} + \hat{\alpha} = 180^\circ$ por ser ángulos suplementarios.

$\therefore \hat{\alpha} = 180° - 59° = 121°$

Problema 3

Encuentra el valor de la suma de los angulos $\measuredangle EDB$ y $\measuredangle CED$ si se sabe que $\measuredangle EAD = 30°$.



Como: $\widehat{ADE} + \widehat{AED} + \widehat{EAD} = 180°$ por ser ángulos interiores del ΔADE entonces:

$$\widehat{ADE} + \widehat{AED} + 30° = 180°$$

$$\therefore \widehat{ADE} + \widehat{AED} = 180° - 30° = 150°$$

Por otro lado:

$\widehat{EDB} = 180° - \widehat{ADE}$ por ser suplementario al $\widehat{ADE}$.

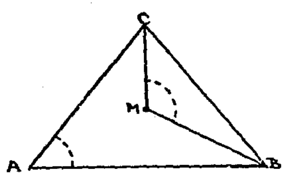
y $\widehat{CED} = 180° - \widehat{AED}$ por ser suplementario al $\widehat{AED}$.

de donde:

$$\begin{aligned} \widehat{EDB} + \widehat{CED} &= (180° - \widehat{ADE}) + (180° - \widehat{AED}) \\ &= 360° - \widehat{ADE} - \widehat{AED} \\ &= 360° - (\widehat{ADE} + \widehat{AED}) \\ &= 360° - 150° = 210° \end{aligned}$$

Problema 4

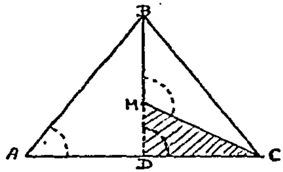
El punto M es un punto interior de un triángulo cualquiera ABC. ¿Cuál de los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{BMC}$ es mayor?



$\widehat{BAC} > \widehat{BMC}$?

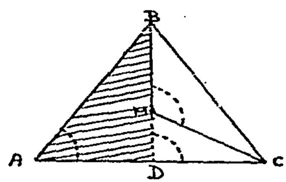
ó

$\widehat{BMC} > \widehat{BAC}$?



Primeramente continuemos en la figura la recta $\overline{BM}$ hasta el punto D.

$\widehat{BMC} > \widehat{BDC}$, ya que el ángulo $\widehat{BMC}$ es exterior respecto del Δ MDC, donde el $\widehat{BDC}$ es interior.

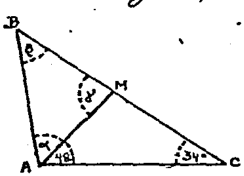


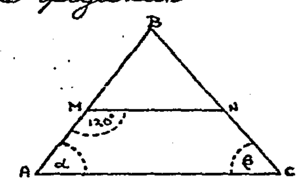
$\widehat{BDC} > \widehat{BAC}$, porque en el triángulo BAD el $\widehat{BDC}$ es exterior y el $\widehat{BAD}$ es interior no adyacente.

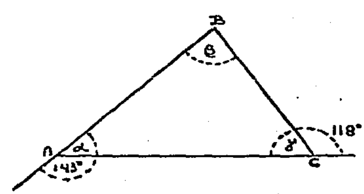
$\therefore$ $\widehat{BMC} > \widehat{BAC}$, porque una magnitud mayor a otra y esta a una tercera la primera es mayor a la tercera.

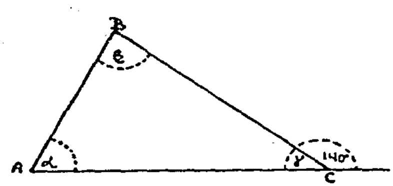
Ficha V-6

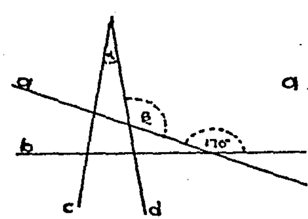
1.- Calcular los ángulos α, β, γ en cada una de las siguientes figuras





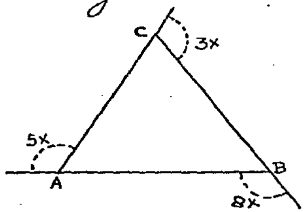


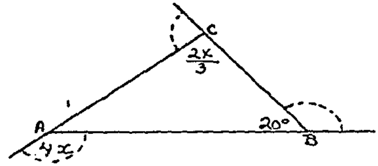


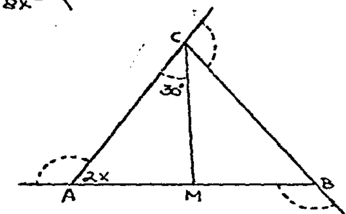


a ⊥ c ; b ⊥ d

2.- Calcula los valores de los ángulos interiores y exteriores en cada uno de los siguientes triángulos.







$\overline{CM}$ altura del ΔABC y bisectriz del $\measuredangle BCA$

3.- En el triángulo ABC se traza la altura $\overline{AH}$. ¿Cuál es la posición del punto H en relación con B y C? es decir:

a) ¿Cuándo los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ACB}$ serán agudos?.

b). ¿Cuándo uno de los ángulos mencionados es obtuso?.

c) ¿Cuándo uno de los ángulos mencionados es recto?.

(Solución apéndice V - 13)

Aplicaciones

Gran parte del estudio de las figuras geométricas se refiere a los triangulos. De todas las figuras geométricas el triángulo es el que se aplica con mayor frecuencia por ser éste una figura rígida.

Esto lo podemos ver si sujetamos tres tiras de madera mediante pernos en A, B y C (ver figura a) formando un triángulo, esta figura no puede cambiarse sin doblar o quebrar las tiras de madera, sin embargo si se sujetan cuatro o mas tiras la forma del marco puede cambiarse ejerciendo fuerza sobre uno de los pernos:

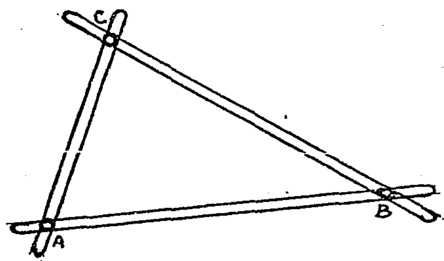


figura a

Para que ésto pueda entenderse mejor realizarás el siguiente taller.

Taller V-9

Objetivo del Taller.- que el alumno visualice en que consiste la propiedad de rigidéz de los triángulos y que rigidice polígonos con un número de lados cualesquiera.

Material Necesario.- tiras delgadas de madera de 1 cm de ancho aproximadamente y de 20 a 30 cm de largo, agujeradas en en cada uno de los cm (un agujero en cada cm de tal manera que se pueda introducir un clavo facilmente), 20 clavos.

Pasos a Seguir

1.- Construye con ayuda de las tiras de madera y los clavos un triángulo (cada vértice debe quedar formado por la unión de dos tiras de madera que al superponerse coincidan en un agujero en el cual se introducirá un clavo con la punta dirigida hacia arriba.

2.- Jala de uno de los lados del triángulo anterior.

¿ Se deforma éste ?

3.- De la misma forma como construiste el triángulo en el paso 1 construye ahora un cuadrilátero

4.- Jala uno de los lados del cuadrilátero anterior.

¿ Que pasa ?

5.- Para que no pase lo anterior, o sea que nuestra figura se deforme trata de que ésta se vuelva rígida.

¿ Que tendrías que hacer para lograr ésto ?.

6.- Construye ahora un pentágono

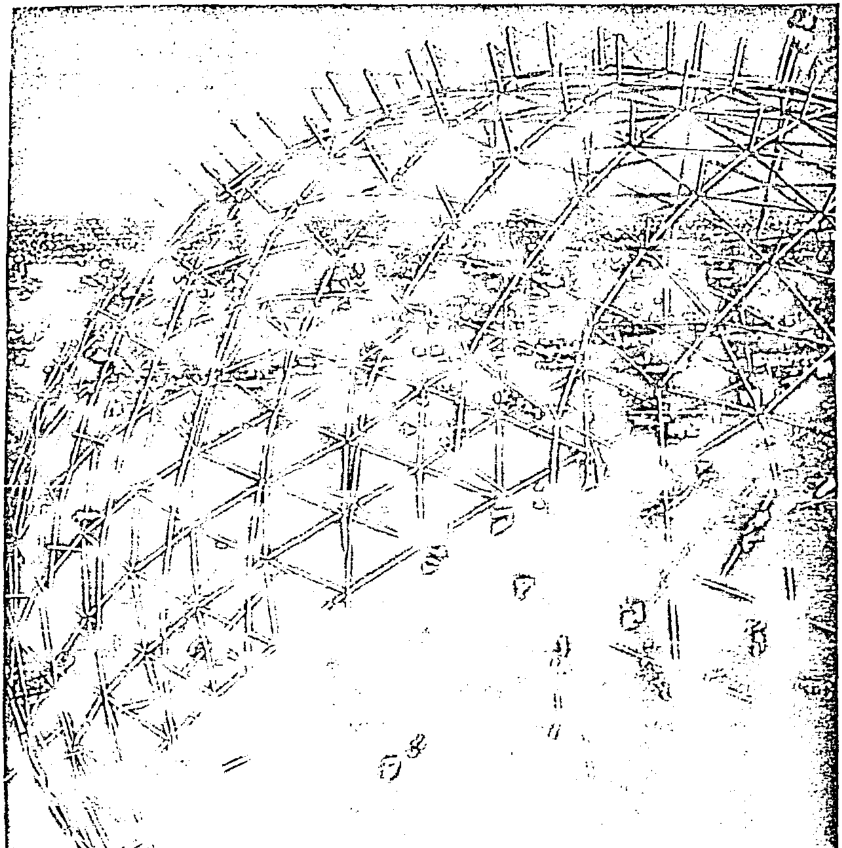
¿ Es ésta una figura rígida ?

¿ Por qué ?

7.- ¿Qué tendrías que hacer para volverla rígida ? ¡ Hazlo !

(Ver taller apéndice II - 14)

La propiedad de rigidéz de los triángulos es utilizada muy frecuentemente por los arquitectos e ingenieros en la construcción de muchos tipos de estructuras (como la que se muestra en la siguiente fotografía).



Estructura a base de triángulos equiláteros

Para que te quede todavía más claro lo que hemos visto hasta aquí, acerca de la propiedad de rigidéz de los triángulos llevarás a cabo el siguiente taller.

Taller II-10

Objetivo del Taller.- que el alumno identifique que el material de que está formado cada parte de una estructura está en función del peso que soporta ésta.

Material Necesario.- tiras de madera, clavos, pegamento e instrumento para cortar.

Pasos a Seguir

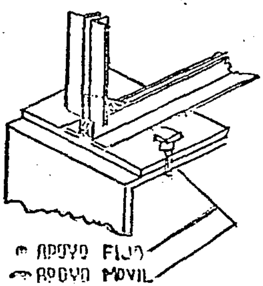
1.- Dirígete a un taller de herrería donde preguntarás cómo se construye una estructura (armazón) y para que sirve ésta.
2.- Con ayuda de tu material construye una pequeña estructura que -- muestre de alguna manera su uso, o sea que soporte el peso de algún objeto.
3.- Sobre tu estructura coloca un objeto de peso mucho mayor al anterior. ¿ Qué pasa ?.

Como te podrás dar cuenta el material de que está formada una estructura debe seleccionarse de manera adecuada para soportar un peso específico.

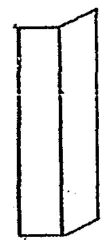
¿ Cómo es ésto ?

Son los arquitectos y los ingenieros civiles los que realizan el diseño de tales estructuras (armazones), aquí te ayudaremos a proso modo en que consiste este diseño, ya que la mayoría de ustedes no iran a estas carreras específicas.

Algunos de los materiales que se emplean son del tipo que se muestra a continuación



2 JL



1 J

Al primero lo llaman dos ángulos (2 JL) y al segundo un ángulo (1 J).

Este material tendrá 2 características:

a) longitud del ángulo

b) grosor de la barra

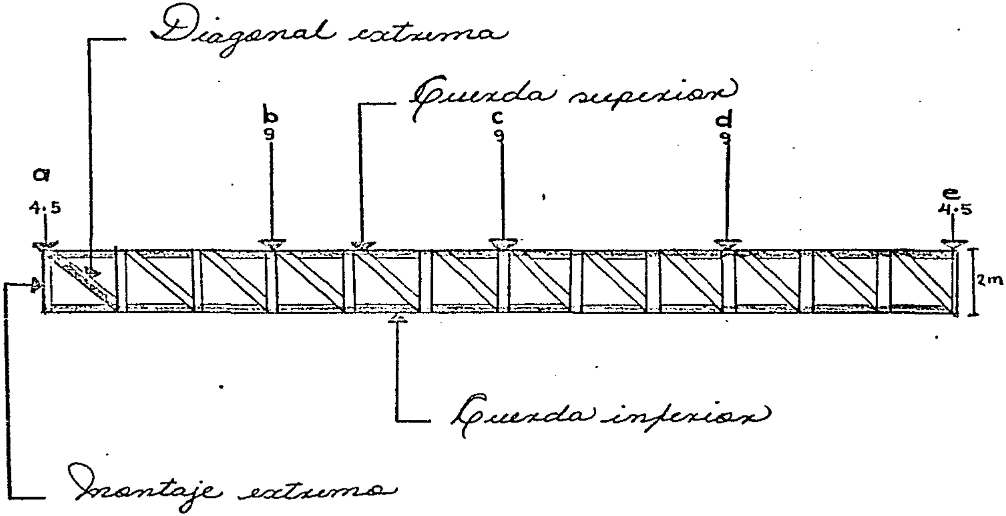
ambas medidas se dan en pulgadas (")

Las fabricas como la de Fundidora de Monterrey tiene catálogos y tablas que los ingenieros y los arquitectos consultan para determinar que tipo de material usar.

Por ejemplo se desea diseñar una estructura como la que se muestra a inicio de la siguiente hoja.

En a, b, c, d y e se colocarán los pisos indicados.

La estructura medirá 20 mts, por lo que la altura de estructura se estimará a razón de la décima parte, por lo que en nues-



tro caso $h = 2$ mts.

El diseño consiste en hacer los cálculos adecuados para seleccionar el material de la cuerda superior

El diseño consiste en hacer los cálculos adecuados para seleccionar el material de la cuerda superior (color verde), el de la cuerda inferior (color morado), el del montaje extremo (color naranja) y el de la diagonal extrema (color negro).

Observa que la cuerda superior carga su mayor peso en c o sea 9 toneladas por lo que podríamos imaginar que la cuerda sufre una compresión a ésta fuerza se le llama precisamente compresión. La cuerda inferior se tensa y a esta fuerza se le llama tracción; el montaje extremo soporta una compresión y la diagonal una tensión.

Empleando las fórmulas adecuadas para encontrar la compresión y la tracción de las cuerdas, encontramos cuales son los pesos que éstas deben resistir llegando a :

Cuerda Superior	54 toneladas		(54000 Kg)
Cuerda Inferior	54	"	(54000 Kg)
Montaje Extremo	13.5	"	(13500 Kg)
Diagonal Extrema	19.1	"	(19100 Kg)

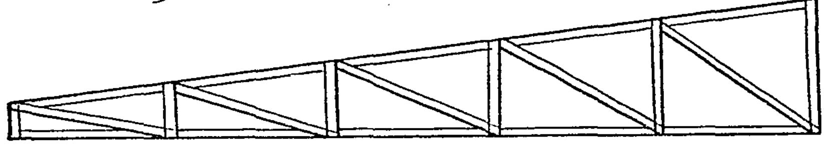
Consultando las tablas de las que ya hablamos anteriormente se llega a los siguientes resultados :

	Cuerda Superior		Montaje Extremo
Material	2 ⅃L 4 X ½ pulg	—	1 ⅃ 4 X 5/16 pulg
Peso	54000 Kg	—	13500 Kg

Peso que soporta con el material 2⅃L
57620 Kg
↓
∴ como 57600 > 54000 el material es adecuado.

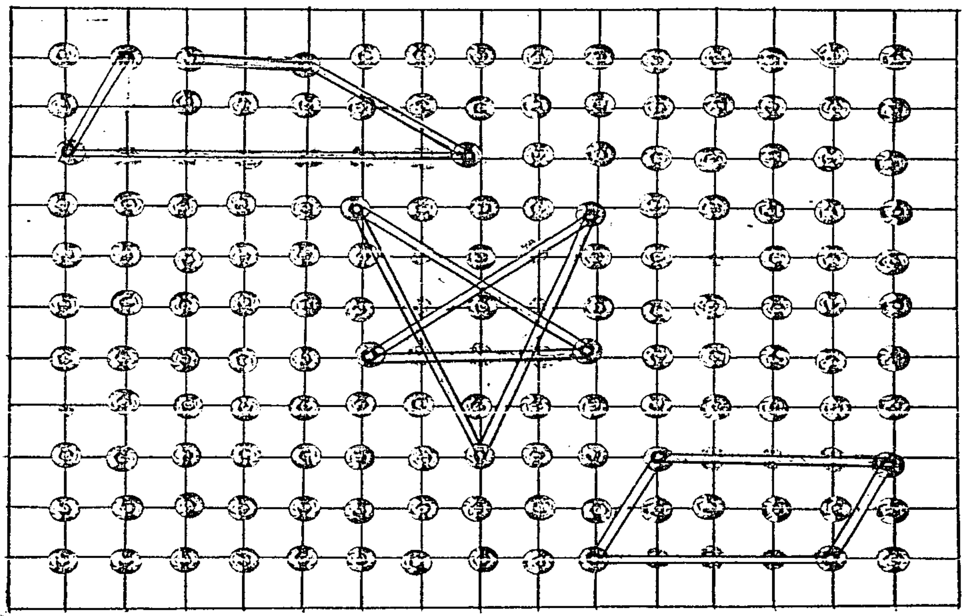
Peso que soporta con el material 1⅃
14257 Kg
↓
∴ como 14257 > 13500 el material es adecuado.

Cabe aclarar que no todas las estructuras tienen la forma anterior sino que también las hay como la siguiente :

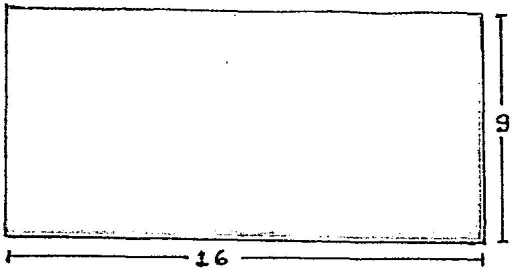


¿ Que diferencia encuentras entre ésta y la anterior ?

Apéndice IV-1

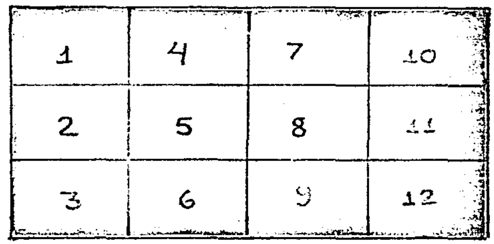


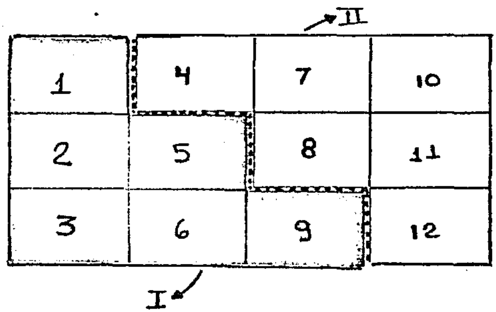
Apéndice IV-2 (problema 1)



Se desea dividir la figura en 2 partes para para con éstas formar un cuadrado.

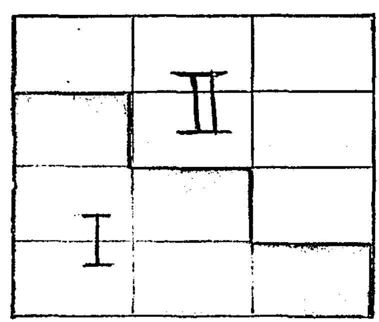
Dividamos la figura como se muestra



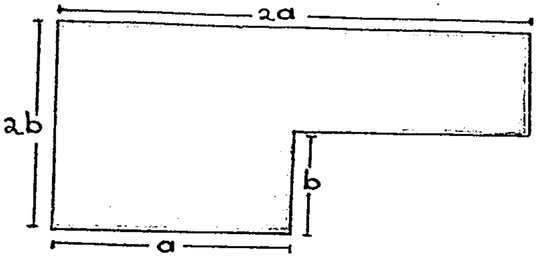


Recortamos la figura anterior para obtener I y II

Reacomodando I y II obtenemos el cuadrado.



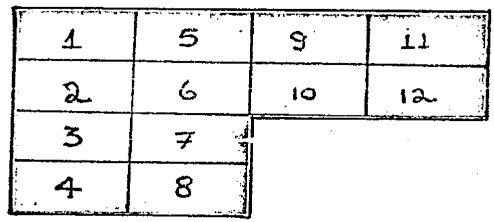
Apéndice IV - 2 (problema 2)

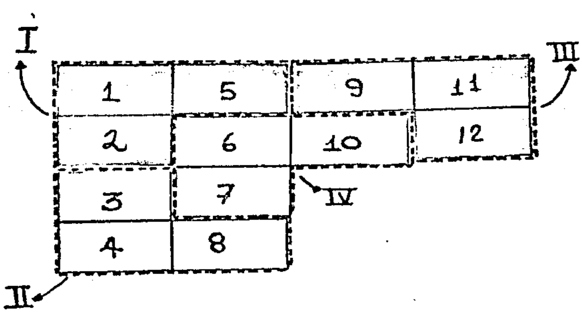


Queremos recortar la figura al margen en 4 partes iguales.

Dividamos entonces la figura anterior en un número de partes que sean divisibles entre 4; por ejemplo 12 ya que:

$$\frac{12}{4} = 3$$

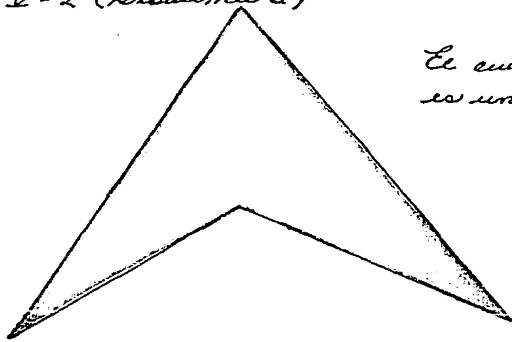




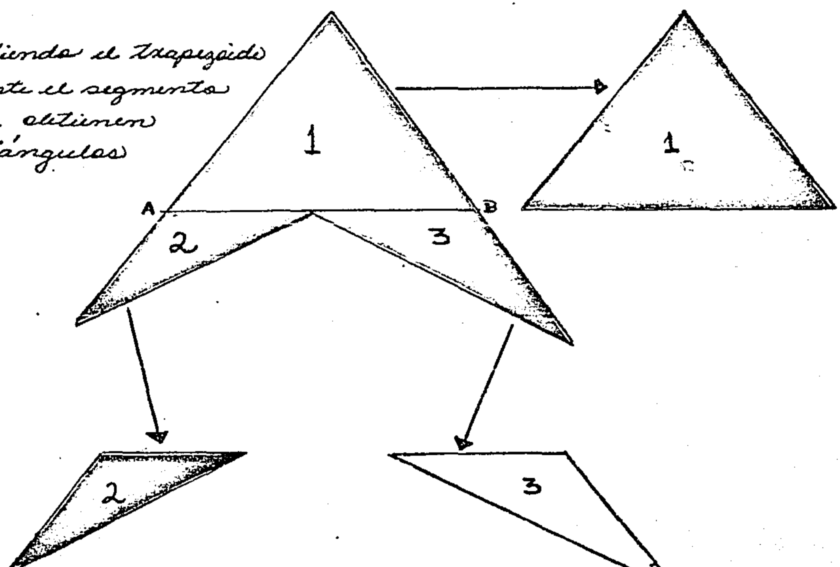
Se obtienen recortando 4 partes iguales.

Apéndice V-2 (problema 3)

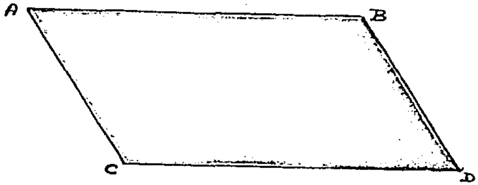
El cuadrilátero buscado es un trapezoide.



Dividiendo el trapezoide mediante el segmento $\overline{AB}$ se obtienen 3 triángulos

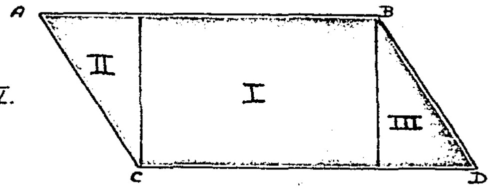


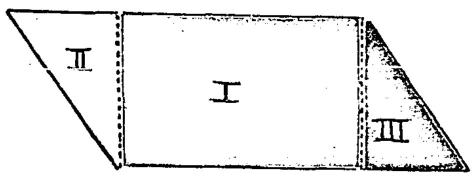
Apéndice V-2 (problema 4a)



Se desea recortar el paralelogramo de forma tal que se pueda formar un rectángulo.

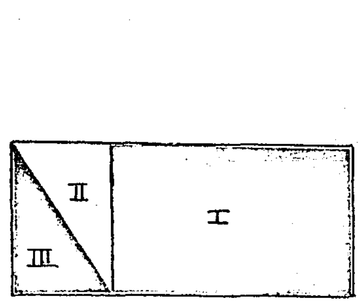
Lanzar perpendiculares por los vértices B y C formándose las partes I, II, III.



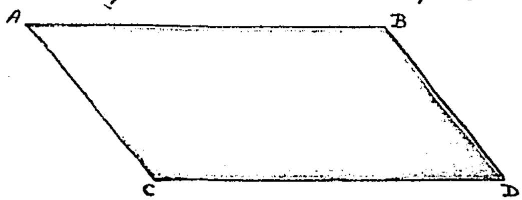


Recortemos la figura por la línea punteada.

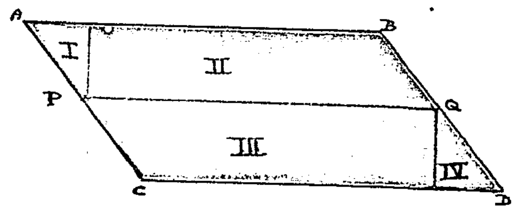
Reacomodando I, II y III obtenemos el rectángulo.

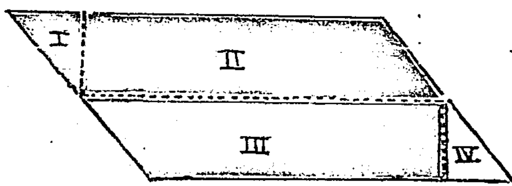


Apéndice IV-2 (problema 4a)



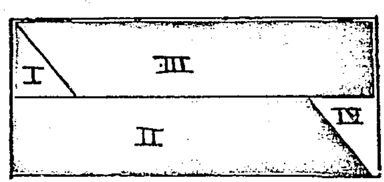
Trazemos perpendiculares desde P y Q a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, (P y Q puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$). para formar I, II, III y IV.



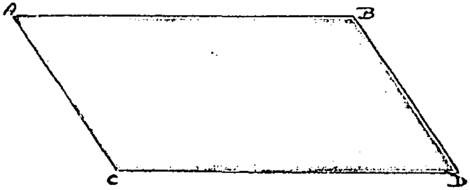


Recortemos la figura en la parte punteada.

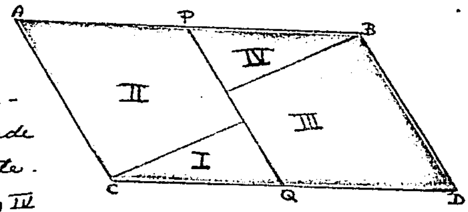
Reacomodando adecuadamente I, II, III y IV se obtiene el rectángulo

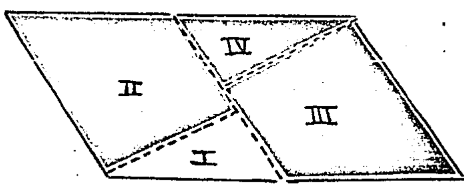


Apéndice V-a (problema 4a)



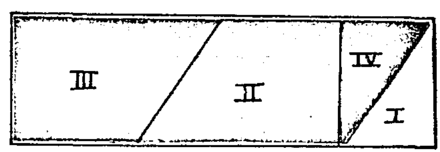
Trazamos $\overline{PQ}$ de tal forma que divida en 2 partes iguales al paralelogramo y lanzamos perpendiculares a $\overline{PQ}$ desde los vértices B y C respectivamente. formandose las partes I, II, III y IV



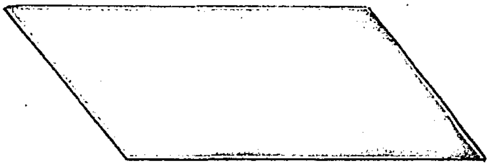


Recortemos la figura por la parte punteada

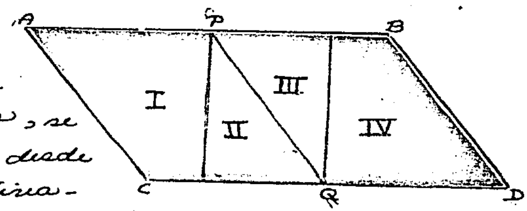
Reacomodando las partes I, II, III, IV adecuadamente obtenemos el rectángulo.

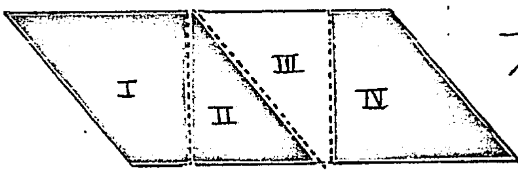


Apéndice V-2 (problema 4a)



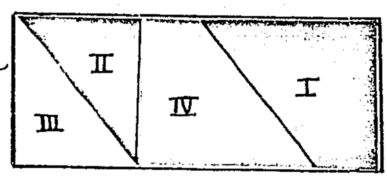
Se traza $\overline{PQ}$ de tal forma que divida en 2 partes iguales al paralelogramo, se lanzan perpendiculares desde P y Q a $\overline{CQ}$ y $\overline{PB}$ respectivamente formándose las partes $\overline{I}$, $\overline{II}$, $\overline{III}$ y $\overline{IV}$



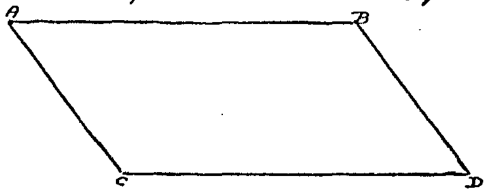


Recortamos la figura por la parte punteada.

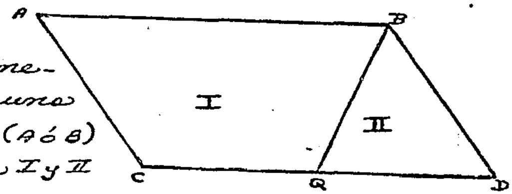
Reacomodando las partes I, $\overline{II}$, $\overline{III}$ y $\overline{IV}$ se obtiene el rectángulo deseado.

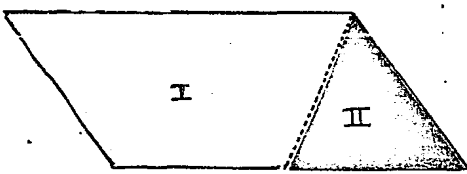


Apéndice V-2 (problema 4b)



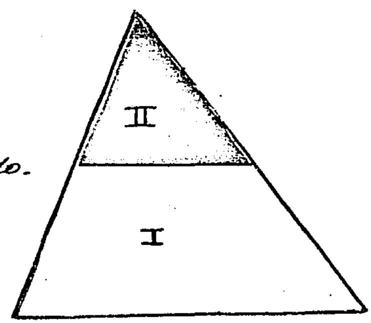
Se localiza Q punto medio de $\overline{CD}$, se une con uno de los vértices opuestos (A ó B) obteniéndose las partes I y II



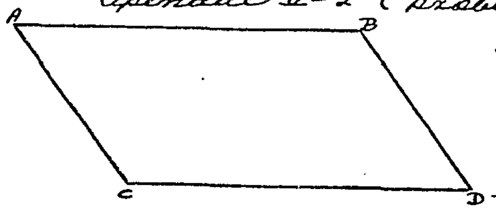


Se recorta la figura por la línea punteada

Reacomodando I y II se obtiene el triángulo deseado.

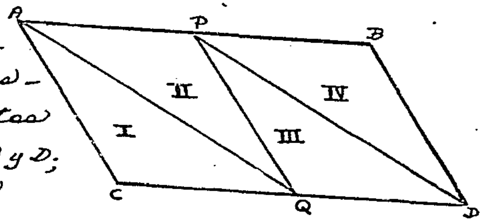


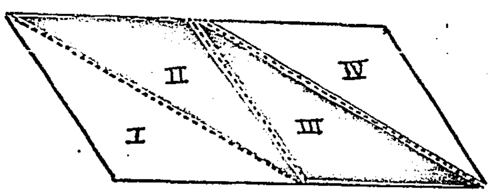
apéndice V-2 (problema 4b)



Se desea recortar el paralelogramo de tal forma que de sus partes se forme un triángulo

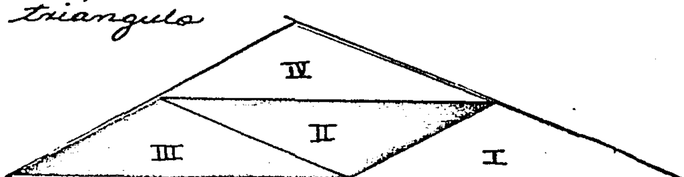
Localizamos P y Q (puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente) se unen estos a los vértices opuestos A y D; formándose las partes I, II, III y IV.



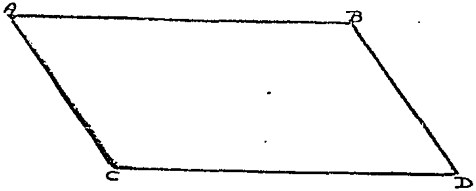


Se recorta la figura por la línea punteada

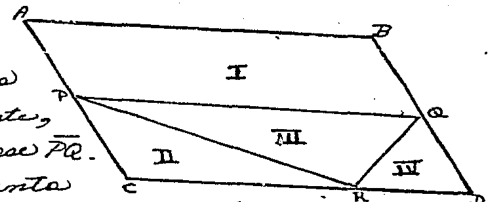
Reacomodando I, II, III y IV se obtiene el triángulo deseado.

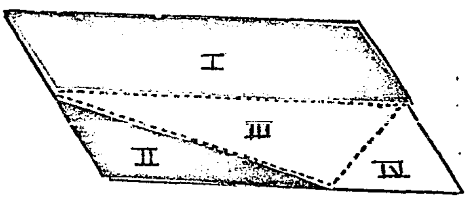


Apéndice V-2 (problema 4b)

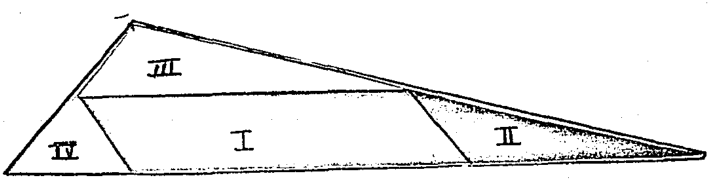


Se localizan los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ siendo éstos P y Q respectivamente, se une P con Q obteniéndose $\overline{PQ}$.
Se une P y Q con un punto cualquiera de una de las bases obteniéndose las partes I, II, III y IV.





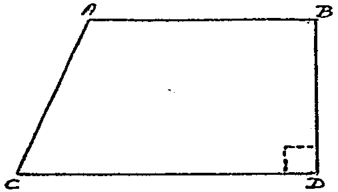
Se recorta la figura por la línea punteada.



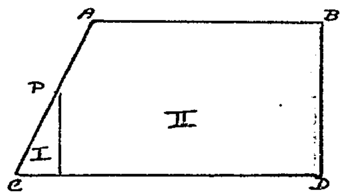
Se reacomodan las partes I, II, III y IV obteniéndose el triángulo deseado.

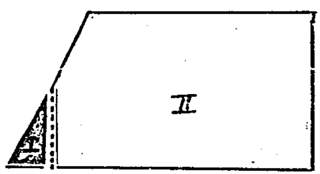
Apéndice V-2 (problema 5a)

Si el trapecio es rectángulo



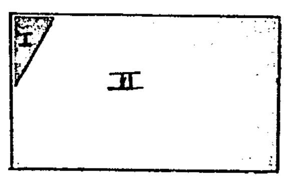
Se localiza P punto medio de $\overline{AB}$ y se traza una perpendicular al lado $\overline{CD}$, obteniéndose las partes I y II



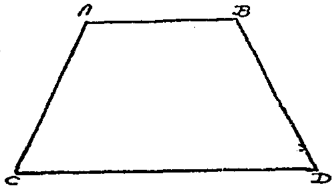


Se recortaría la figura en la línea punteada

Se reacomodan las partes I y II para obtener el rectángulo pedido.

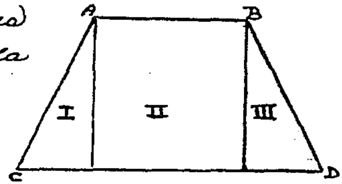


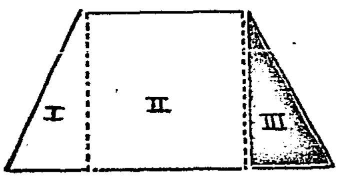
Apéndice V-2 (problema 5a)



Si el trapecio es isósceles

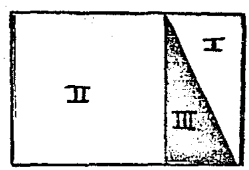
Se trazan perpendiculares desde los puntos A y B de la base menor del trapecio a la base mayor $\overline{CD}$ obteniéndose las partes I, II y III.



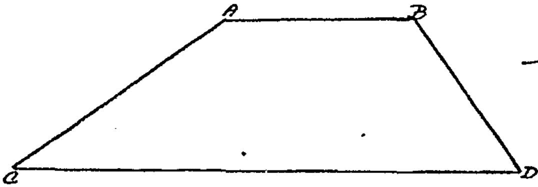


Se recorta la figura en la línea punteada.

Se reacomodan las partes I, II y III obteniéndose el rectángulo pedido.

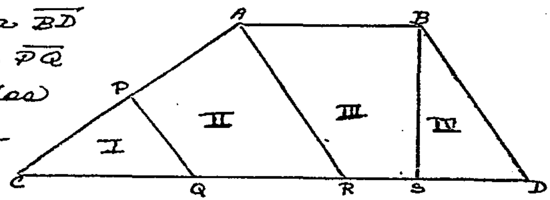


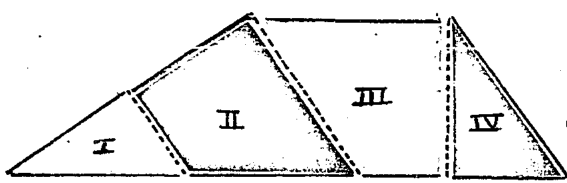
Apéndice V-2 (problema 5a)



Para cualquier trapecio:

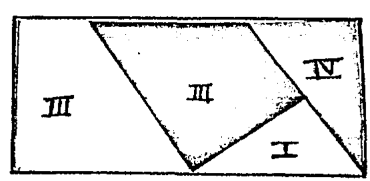
Se traza desde B una perpendicular al $\overline{CD}$.
Se traza $\overline{AR}$ paralela a $\overline{BD}$
Se traza el segmento $\overline{PQ}$ donde P y Q son puntos medios de $\overline{CA}$ y $\overline{CR}$ respectivamente formándose así las partes



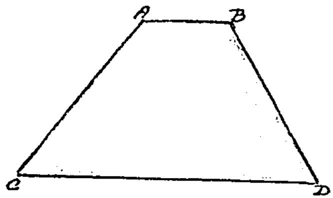


Se recorta la figura en la línea punteada.

Se reacomodan las partes I, II, III y IV obteniéndose el rectángulo.

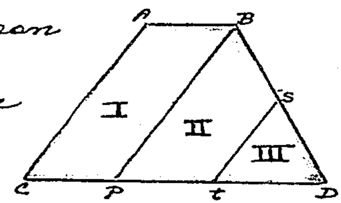


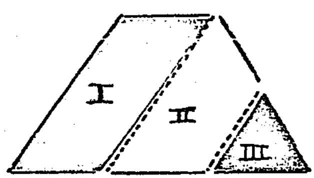
Apéndice V-2 (problema 46)



Para formar del Trapecio ABCD un paralelogramo:

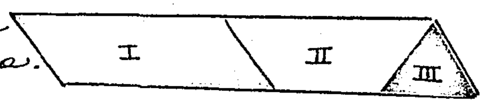
Se traza $\overline{BP}$ paralela a $\overline{AC}$
Se traza $\overline{ST}$ donde S y T son puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{PD}$ respectivamente, se obtienen así las partes I, II, III



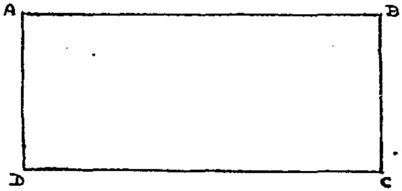


Se recorta la figura por la línea punteada.

Se reacomodan las partes I, II y III para obtener así el paralelogramo.

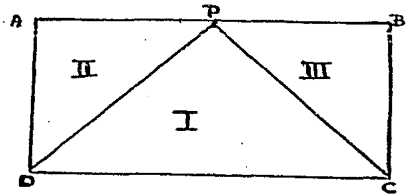


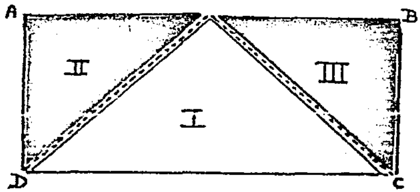
Apéndice. II-2 (problema 6)



Se desea recortar el rectángulo en tres partes, con las cuales se pueda formar un cuadrado Sabiendo que $\overline{AB} = 2\overline{AD}$

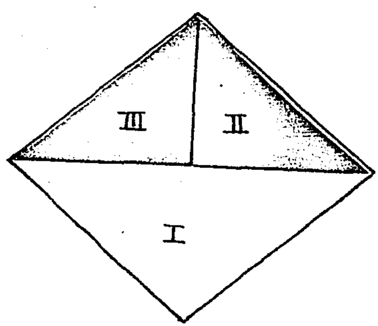
Localizamos P punto medio de $\overline{AB}$ y lo unimos con D y C obteniéndose así 3 partes





Recortando las partes por la línea punteada se tienen las 3 partes deseadas.

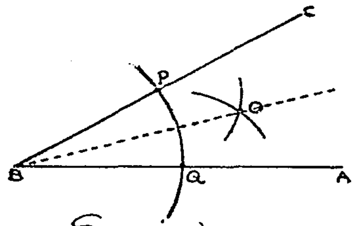
Reacomodando las partes I, II, III en forma adecuada se obtiene el cuadrado pedido



Apéndice V-3

Trazo de las Bisectrices de un Triángulo

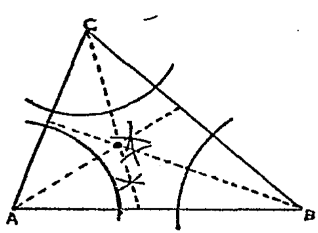
Para trazar las bisectrices de un triángulo primero necesitamos saber como trazar la bisectríz de un ángulo.



Pasos a Seguir

1.- Considérese un ángulo cualquiera supongamos el ∡ ABC de la figura anterior.
2.- Apoyando tu compás en B, traza un arco que intercepte a los lados del ángulo en los puntos P y Q.
3.- Apoyando el compás en P y Q traza arcos para formar el punto O
4.- Unir B con O

Donde $\overline{BO}$ es la bisectriz del ∡ ABC

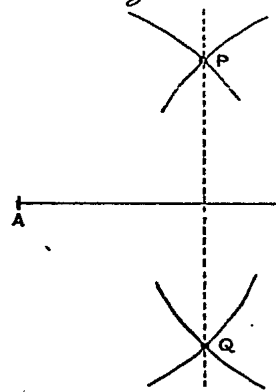


Si consideramos el Δ ABC para trazar las bisectrices del mismo, solo tenemos que trazar la bisectriz de de cada una de sus ángulos de la forma vista anteriormente.

Apéndice II - 4

Trazo de las Mediatrices de un Triángulo

Para trazar las mediatrices de un triángulo primero necesitamos saber como trazar la mediatriz de un segmento.

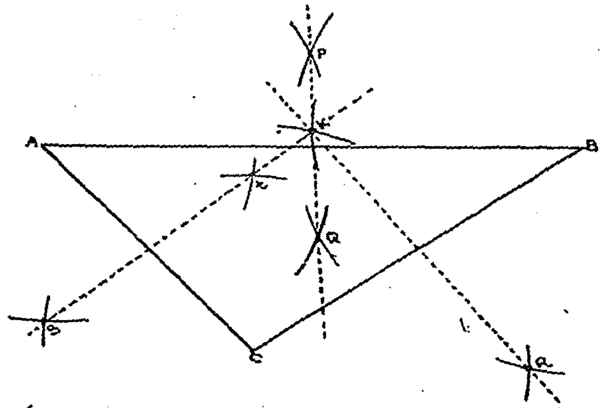


Pasos a Seguir

1.- Considérese un segmento $\overline{AB}$
2.- Apoyando el compás en ambos extremos y con una medida mayor que la mitad del segmento trazar arcos formandose los puntos P y Q.
3.- Unir P y Q

Donde $\overline{PQ}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

Si consideramos el $\triangle ABC$, para trazar las mediatrices del mismo sólo bastará con trazar las mediatrices de cada uno de los lados del $\triangle ABC$ como se muestra en la siguiente figura.



$\overline{PQ}$ mediatriz de $\overline{AB}$

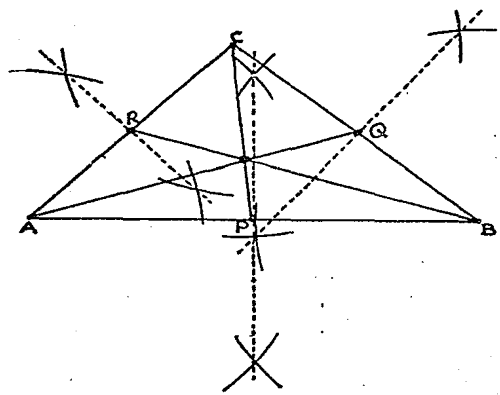
$\overline{St}$ mediatriz de $\overline{AC}$

$\overline{kR}$ mediatriz de $\overline{CB}$

Apéndice V-5

Trazo de las Medianas de un Triángulo

Considérese el $\triangle ABC$



Pasos a Seguir

1.- Trazar mediante las mediatrices (apéndice V-4) los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo (P, Q, R)

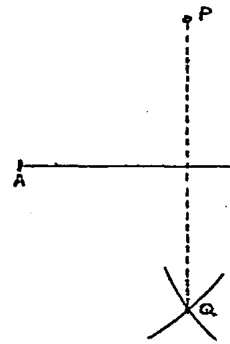
2.- Unir cada uno de estos puntos con el vértice opuesto a el.

Por lo tanto las medianas del $\triangle ABC$ quedarán representadas por los segmentos: $\overline{CP}$, $\overline{AQ}$ y $\overline{BR}$.

Apéndice V - 6

Trazo de las Alturas de un Triángulo

Para trazar las alturas de un triángulo primero necesitamos saber como trazar la perpendicular a un segmento por un punto fuera del segmento.

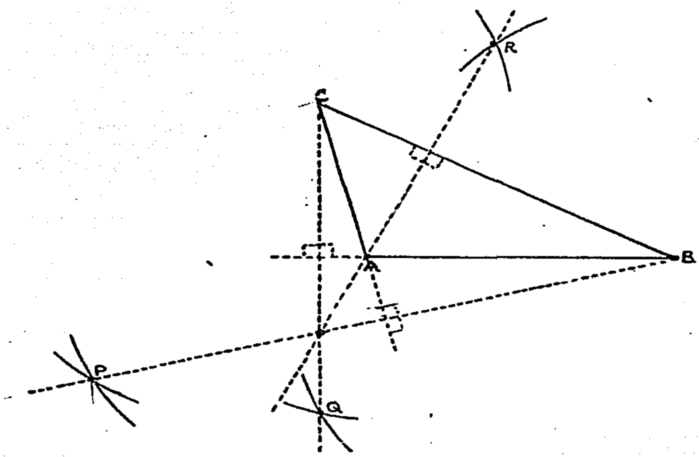


Pasos a Seguir

1.- Consideremos el segmento $\overline{AB}$ y el punto P.
2.- Apoyando el compás en A y B y con la abertura de $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ respectivamente trazar arcos formando el punto Q.
3.- Unir P y Q

Donde $\overline{PQ}$ es la perpendicular a $\overline{AB}$ buscada

Si consideramos el $\triangle ABC$ para trazar las alturas del mismo sólo necesitamos trazar la perpendicular al $\overline{AB}$ que pase por C, la perpendicular al $\overline{CB}$ que pase por A, así como la perpendicular al $\overline{AC}$ que pase por B, como se muestra a continuación:

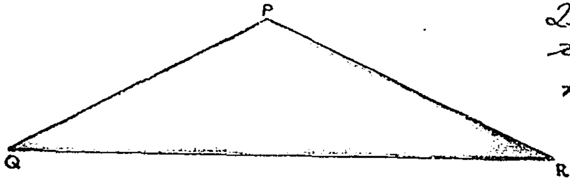


$\overline{AR}$ perpendicular $\overline{CB}$
$\overline{BP}$ perpendicular $\overline{AC}$
$\overline{CQ}$ perpendicular $\overline{AB}$

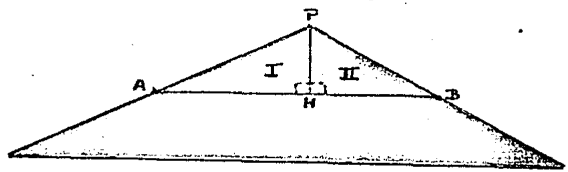
alturas del Δ ABC.

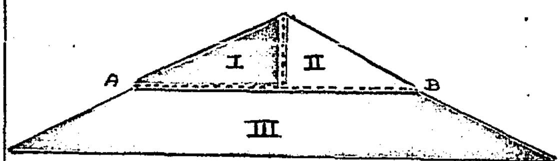
Apéndice V-7

Queremos recortar el triángulo en 3 partes para formar un rectángulo



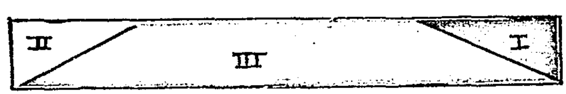
A y B puntos medios de los respectivos lados.
$\overline{PH}$ altura del ΔAPB.



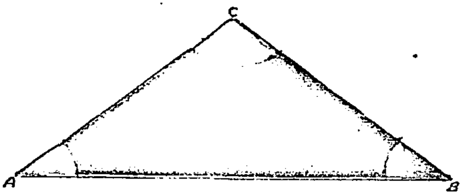


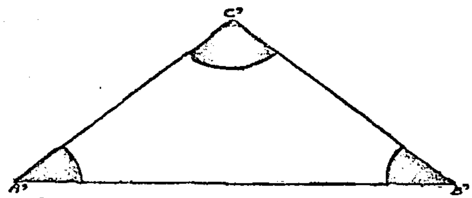
Recortando por la línea punteada se obtienen 3 partes.

Reacomodando las partes I, II, III formamos el rectángulo pedido.



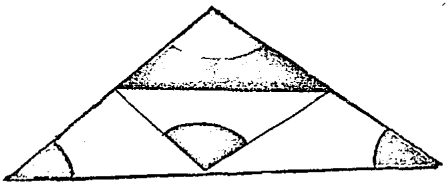
Apéndice VI-8





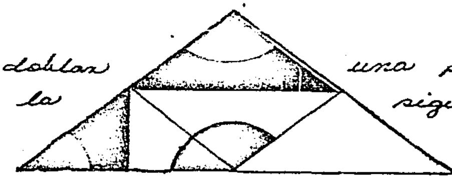
Dibujar el Δ ABC

Recortar el Δ A'B'C' de tal forma que se pueda superponer en el anterior.

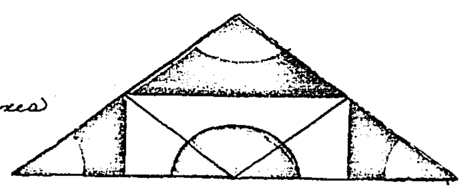


Ya superpuesto el Δ A'B'C' en el Δ ABC doblamos una punta.

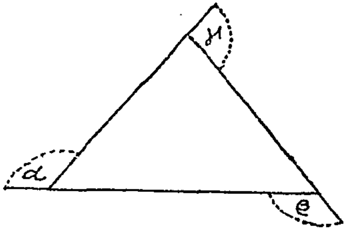
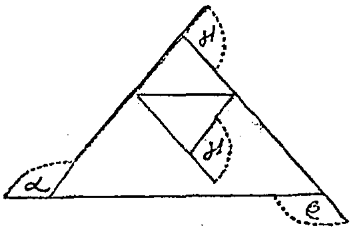
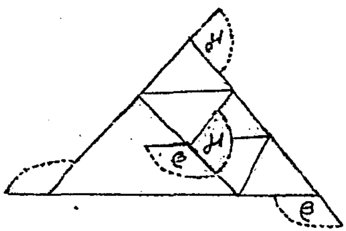
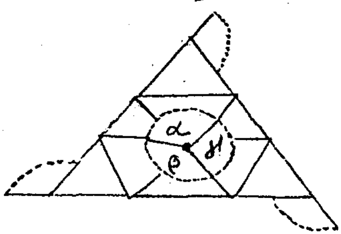
Después de doblar una punta se dobla la siguiente.



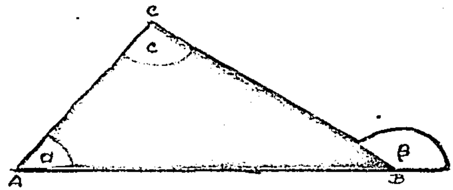
Queda mostrado que la suma de los ángulos interiores del Δ ABC es igual a 2 rectas (180°)



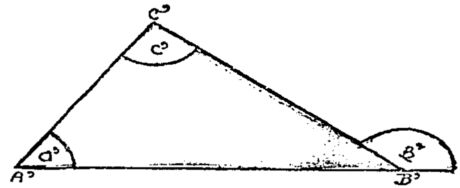
Apéndice V - 9

	Mostraremos mediante movimientos que la suma de $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}=360°$
	Se coloca encima del triángulo anterior otro igual (verde) doblando una punta.
	Después de doblar una punta se dobla la siguiente.
	Doblamos la última punta para así mostrar que $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}=360°$

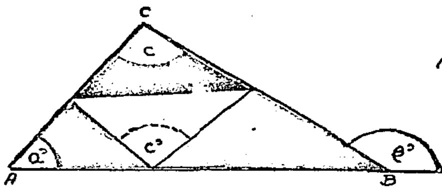
Apéndice V - 10



Dibujar el Δ ABC con su angulo exterior β

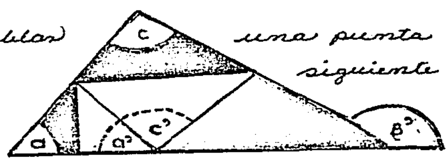


Recortar el Δ A'B'C' de tal forma que se pueda superponer en el anterior.



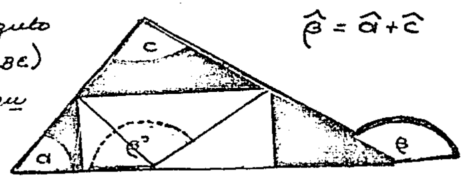
Ya superpuesto el Δ A'B'C' en el Δ ABC doblemos una punta.

Después de doblar una punta se dobla la siguiente

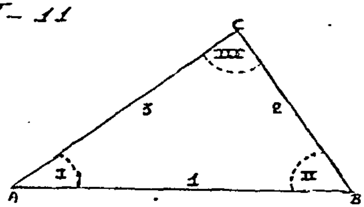


Queda mostrado que el ángulo exterior de un triángulo (Δ ABC) es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a dicho ángulo.

$\hat{\beta} = \hat{\alpha} + \hat{c}$

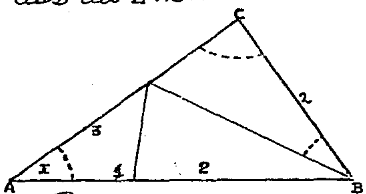


Apéndice V - 11

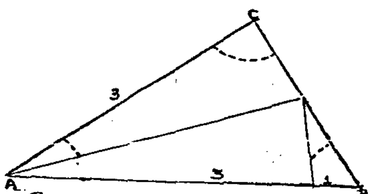


Numeramos lados y ángulos en el Δ ABC

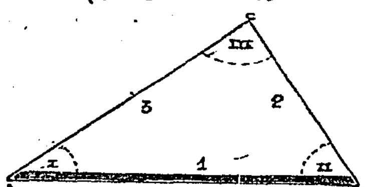
Comparamos los lados del Δ ABC.



Comparando lado 1 con el lado 2 (lado 1 > lado 2)

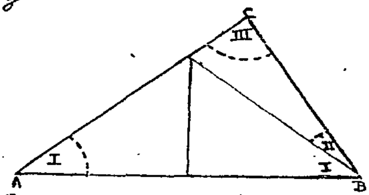


Comparando lado 1 con lado 3 (lado 1 > lado 3)

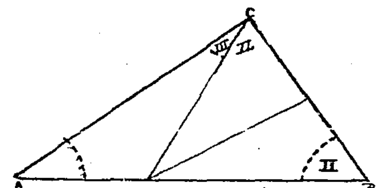


Marcamos con plumón el lado que resultó mayor en el Δ ABC.

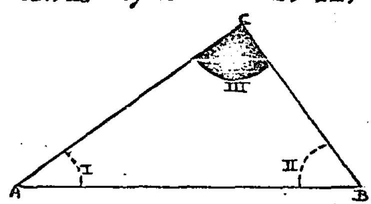
Comparamos los ángulos del Δ ABC.



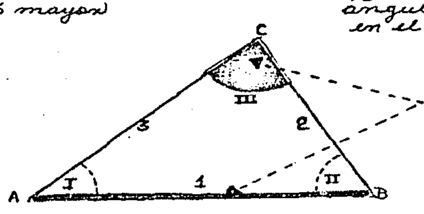
Comparando el ángulo I con el ángulo II (∢II > ∢I)



Comparando el ángulo II con el ángulo III (∢III > ∢II)



Marcamos con plumón el ángulo que resultó mayor en el Δ ABC.

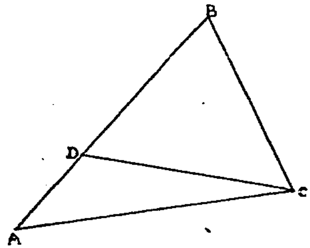


A el lado mayor se opone ángulo mayor.

Apéndice V - 12

Teorema

Si $\overline{AB} > \overline{BC}$ en el triángulo ABC entonces el $\hat{C}$ es mayor que $\hat{A}$. Y viceversa, si el $\hat{C}$ es mayor que el $\hat{A}$ entonces $\overline{AB} > \overline{BC}$.



Hipótesis	Tésis
$\overline{AB} > \overline{BC}$	$\hat{C} > \hat{A}$
$\hat{C} > \hat{A}$	$\overline{AB} > \overline{BC}$

Demostración

Afirmaciones	Razones
$\Rightarrow$	
1.- Localicemos en $\overline{AB}$ el punto D de tal forma que $\overline{BD} = \overline{BC}$.	Por construcción
2.- $\widehat{BCD} < \widehat{BCA}$	Ya que $\overline{CD}$ pasa entre $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, pues corta a $\overline{AB}$.
3.- $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$	Por ser el Δ BDC isósceles
4.- $\widehat{BDC} > \widehat{BAC}$	Por ser $\widehat{BDC}$ exterior al Δ ADC.
$\therefore\ \widehat{BCA} > \widehat{BAC}$	l.q.d

$\Leftarrow$ Demostración (Reducción al absurdo)

Supongamos que no es cierta la proposición por lo que pueden pasar 2 casos:

a) $\overline{AB} = \overline{BC}$

b) $\overline{AB} < \overline{BC}$

a)

Afirmaciones	Razones
1.- $\triangle ABC$ es isósceles $\therefore \widehat{A} = \widehat{C}$	Supusimos que $\overline{AB} = \overline{BC}$ Lo cual contradice la hipótesis $(\widehat{C} > \widehat{A})$

b)

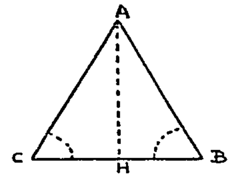
1.- $\widehat{A} > \widehat{C}$	Supusimos que $\overline{AB} < \overline{BC}$ lo que también contradice la hipótesis $(\widehat{C} > \widehat{A})$

$\therefore$ Si $\widehat{C} > \widehat{A}$ entonces $\overline{AB} > \overline{BC}$ l.q.d.

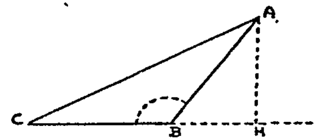
Apéndice V - 13

De las preguntas formuladas se puede concluir lo siguiente:

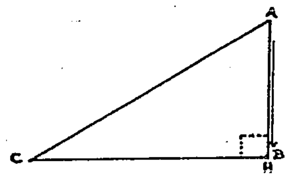
a) Si los ángulos de la base de un triángulo son agudos, entonces H cae en la base (o sea la altura está entre C y B



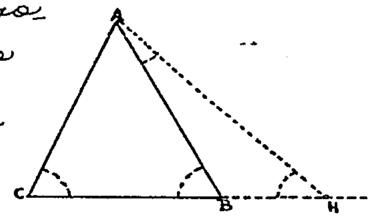
b) Si uno de los angulos de la base es obtuso entonces H cae en la prolongación de la base (o sea la altura está fuera de $\overline{BC}$).



c) Si uno de los ángulos de la base es recto, entonces H cae en el vértice de dicho ángulo.



Demostremos la primera conclusión:
Supongamos que H no cae entre C y B, sino por ejemplo en la prolongación del vértice B, entonces el ángulo $\widehat{ABC}$ es un ángulo exterior al $\triangle ABH$, pero tal ángulo exterior sería igual a la suma de los ángulos no adyacentes al mismo, donde uno de tales ángulos no adyacentes sería el ángulo formado formado por la perpendicular bajada desde A ($\widehat{AHB} = 1$ recto), por lo tanto la suma de los no adyacentes es mayor que un recto, o sea un ángulo obtuso! pero esto contradice la

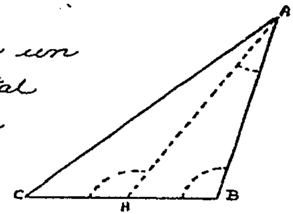


hipótesis ya que habíamos afirmado que los ángulos de la base eran agudos

Esta contradicción hace que la hipótesis con la que iniciamos la demostración (que H está fuera de CB) sea falsa y por lo tanto su contraria es verdadera (H está entre B y C).

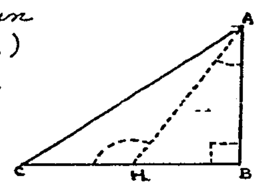
Demostremos en forma análoga la segunda y tercera conclusión:

b) Supongamos que H cae entre C y B, entonces el $\measuredangle CHA$ es un ángulo exterior al $\triangle ABH$, pero tal ángulo exterior sería igual a la suma de los ángulos no adyacentes al mismo, donde uno de tales ángulos es precisamente el ángulo $\widehat{ABH}$; por lo que el ángulo $\widehat{CHA}$ es mayor que un recto ∇ lo que contradice la hipótesis de que $\overline{AH}$ es la altura.



c) i) Supongamos que $\widehat{ABC}$ es un ángulo recto y que $\overline{AH}$ (altura) cae entre CB, entonces el ángulo $\widehat{CHA}$ es exterior al $\triangle AHB$

$\therefore\ \widehat{CHA} = \widehat{HBA} + \widehat{BAH}$

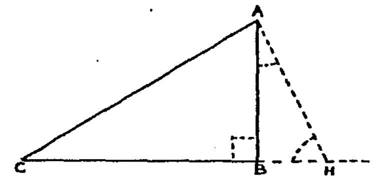


de donde $\widehat{CHA}$ > que un recto lo que contradice la hipótesis de que $\overline{AH}$ es altura por lo que podemos afirmar que $\overline{AH}$ no esta entre .CB.

ii) Supongamos ahora que $\overline{AH}$ (altura) está fuera de CB, por ejemplo en la prolongación del vértice B, entonces el ángulo $\widehat{CBA}$ es exterior al $\triangle ABH$ por lo que:

$$\widehat{CBA} = \widehat{BHA} + \widehat{BAH}$$

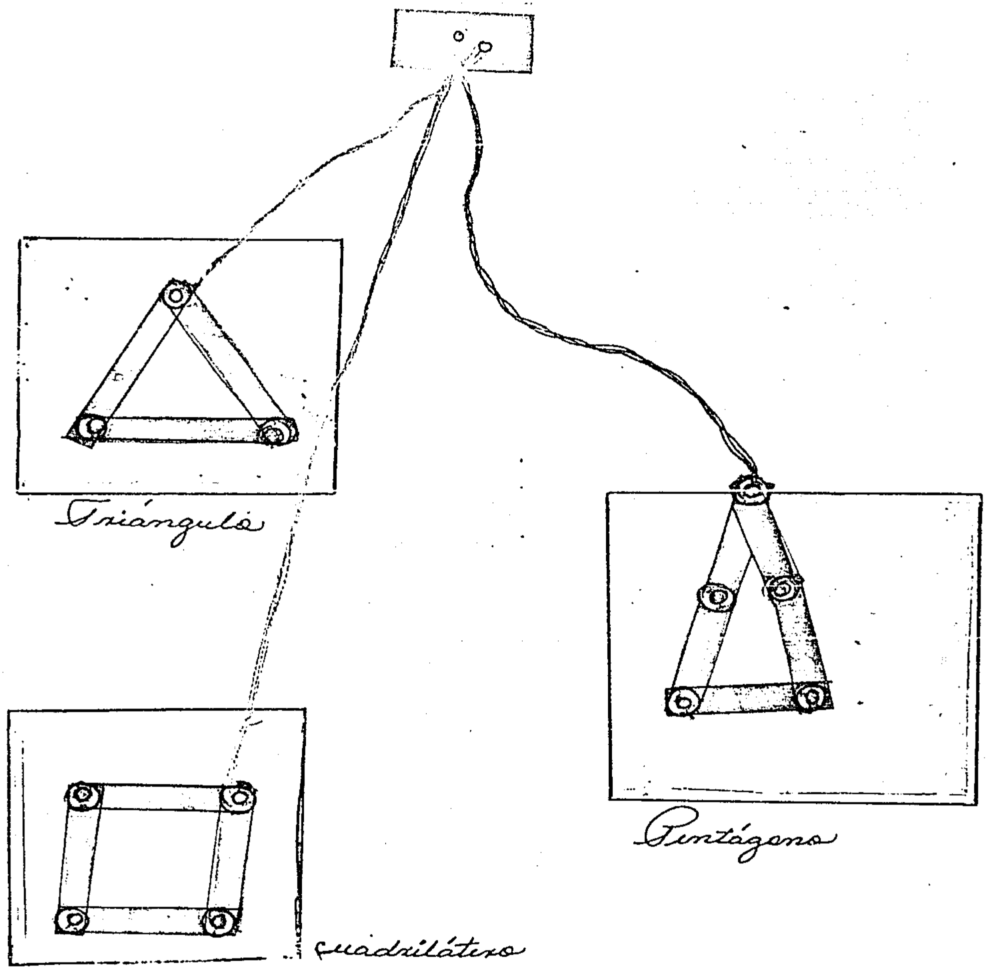
por lo que $\widehat{CBA}$ es mayor que un ángulo recto la cual contradice la hipótesis de que $\overline{AH}$ es altura por lo tanto podemos decir que $\overline{AH}$ no está fuera de CB.



Por lo tanto si la altura ($\overline{AH}$) no esta entre C y B por i, pero tampoco esta fuera de C,B por ii entonces $\overline{AH}$ cae en el vértice del ángulo $\widehat{CBA}$.

Apendice V- 14

Verifica la rigidez o no rigidez de las siguientes figuras:



Tema VI

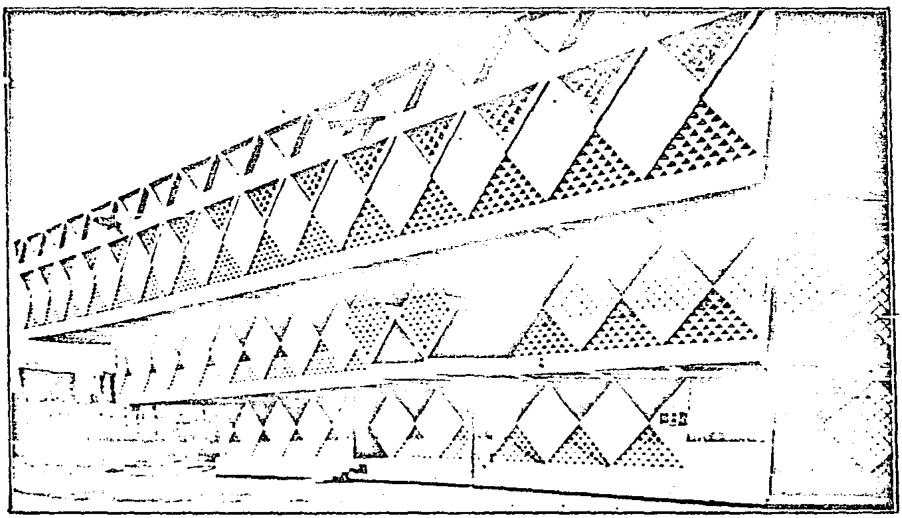
Congruencia

Congruencia

Noción de Congruencia.- si dos objetos cualesquiera son réplica exacta uno del otro decimos que estos objetos son iguales. En geometría vamos a decir que estos dos objetos son congruentes.

Congruencia de Triángulos

Observa la siguiente fotografía:

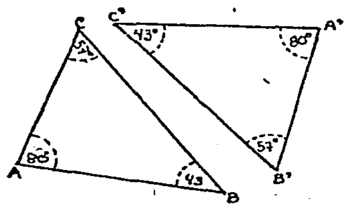


Como te habrás dado cuenta en el edificio se encuentran varios triángulos los cuales aparentemente son congruentes; cabe aquí preguntarnos: ¿Bajo que condiciones dos triángulos son congruentes?

Definición.- se dice que un triángulo es congruente con otro, si tienen todos sus lados y ángulos respectivamente iguales a los lados y ángulos del otro.

Notación.- para referirnos a la palabra congruente lo hacemos por medio del símbolo : $\equiv$

Simbólicamente la definición anterior la podemos expresar como:



$\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$ si y solo si:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$
$$\overline{BC} = \overline{B'C'}$$
$$\overline{CA} = \overline{C'A'}$$
$$\hat{A} = \hat{A'}$$
$$\hat{B} = \hat{B'}$$
$$\hat{C} = \hat{C'}$$

De acuerdo a lo anterior dos triángulos son congruentes cuando tienen sus 3 lados y sus 3 ángulos respectivamente iguales; pero en realidad no es necesario conocer la igualdad de todos sus elementos pues basta que se cumpla la igualdad de algunos de ellos para que, como consecuencia los demás resulten también iguales.

El conjunto de elementos que deben ser iguales para que como consecuencia sean iguales los restantes elementos y por lo tanto los triángulos sean congruentes, da origen en cada caso a un criterio de congruencia de triángulos. A continuación realizarás los siguientes 3 talleres para que después de cada uno de ellos puedas enunciar el criterio correspondiente.

Taller VI - 1

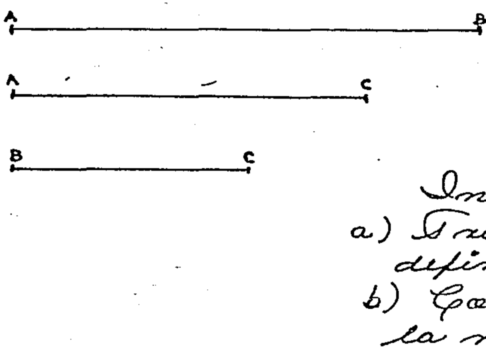
Objetivo del Taller.- verificar que dos triángulos son congruentes si sus lados son respectivamente iguales.

Material Necesario.- papel cascaron, cartulina o madera para formar una base papel lustre de 2 colores, regla, compás lápiz pegamento y tijeras.

Pasos a Seguir:

1.- Forma una base del material que elegiste.

2.- Dados los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y con la ayuda de las instrucciones que se te dan, traza en el papel lustre un triángulo el cual recortarás y pegarás sobre tu base.



Instrucciones

a) Traza una recta L indefinida en tu papel lustre

b) Con tu compás toma la medida de uno de los segmentos por ejemplo $\overline{AB}$ y trasládalo sobre L para obtener el segmento $\overline{AB}$ deseado.

c) Apoyando tu compás en A y con la medida del segmento $\overline{AC}$ traza un arco.

d) Apoyando tu compás en B y con la medida del segmento $\overline{BC}$ traza un arco que interceptará al anterior en B.

e) Une B con A y C para formar el Δ ABC.

3.- En el papel lustre de color diferente al anterior con los mismos segmentos e instrucciones análogas a las anteriores traza el Δ A'B'C' empezando ahora por el segmento $\overline{AC}$ ó $\overline{BC}$.

4.- Recórtalo y superponlo en el anterior.

¿Qué observaste con respecto a los triángulos y sus lados?

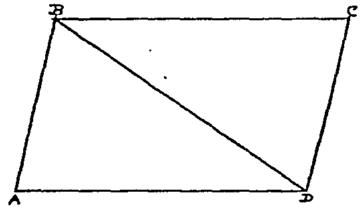
(Taller apéndice VI-1)

Pasemos ahora a enunciar nuestro primer criterio de congruencia:

L.L.L (lado, lado, lado)

Dos triángulos que tienen sus tres lados respectivamente iguales son congruentes.

Ejemplo: verificar que en el paralelogramo ABCD los triángulos formados son congruentes.



Como:

$\overline{AB} = \overline{CD}$ por ser ABCD paralelogramo.

$\overline{AD} = \overline{BC}$ " " "

$\overline{BD} = \overline{BD}$ lado común

$\therefore \ \triangle ABD \equiv \triangle BCD$ por criterio L. L. L.

Taller VI - 2

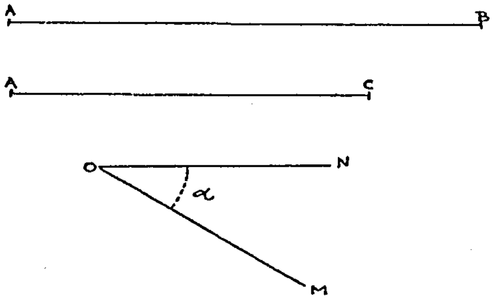
Objetivo del Taller.- verificar que dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre dichos lados.

Material Necesario.- el mismo que en el taller VI - 1.

Pasos a Seguir

1.- Forma una base con el material que elegiste

2.- Dados los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y el $\measuredangle \alpha$ (el cual estará comprendido entre ambos segmentos) con la ayuda de las instrucciones que se te dan, traza en el papel lustre un triángulo el cual recortarás y pegarás sobre tu base.



Instrucciones:

a) Traza una recta L indefinida en tu papel lustre.

b) Con tu compás toma la medida de uno de los dos segmentos por ejemplo $\overline{AB}$ y trasládalo sobre L para obtener el segmento $\overline{AB}$ deseado.

c) Apoyando tu compás en A y con la medida del segmento $\overline{OM}$ del $\measuredangle \alpha$ traza un arco que interceptará a $\overline{AB}$ en M°.

d) Apoyando tu compás en M° y con una medida igual al $\overline{MN}$ del $\measuredangle \alpha$ traza un arco que interceptará al anterior en N°.

e) Une A con N° y prolonga esta recta.

f) Apoyando tu compás en A y con una medida igual al $\overline{AC}$ traza un arco que interceptará a la recta $\overline{AN°}$ en C.

g) Une C con B para formar $\triangle ABC$.

3.- En papel lustre de color diferente al anterior, con los mismos segmentos, mismo ángulo e instrucciones análogas traza el $\Delta A^\circ B^\circ C^\circ$ empezando ahora por $\overline{AC}$.

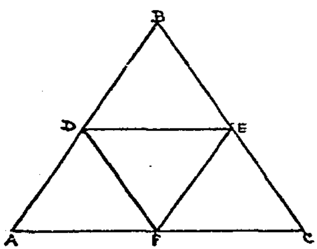
4.- Recórtalo y superponlo en el anterior. ¿Qué observaste con respecto a los triángulos y que relación hay entre los lados dados y el $\measuredangle \alpha$? (Ver taller apéndice VI-2)

Enunciemos ahora nuestro segundo criterio de congruencia.

L. A. L (lado, ángulo, lado)

Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre dichos lados respectivamente iguales son congruentes.

Ejemplo: si el ΔABC es equilátero y $\overline{AF} = \overline{BD} = \overline{CE}$ verificar que el $\Delta ADF \equiv \Delta DBE \equiv \Delta ECF$



Como:

$\overline{AF} = \overline{BD} = \overline{CE}$ se da como dato

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ por ser el ΔABC equilátero

$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ " " " " "

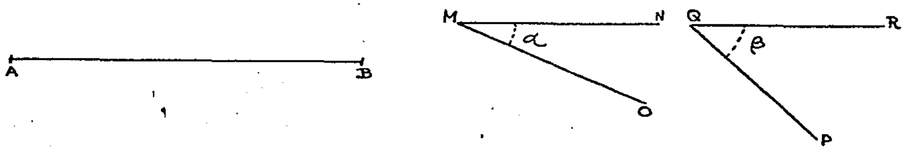
$\therefore \Delta ADF \equiv \Delta BDE \equiv \Delta ECF$ por el criterio L. A. L

Taller VI-3

Objetivo del Taller.- verificar que dos triángulos son congruentes si tienen un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado respectivamente iguales.

Material Necesario.- igual al utilizado en los Talleres VI-1 y 2

Pasos a Seguir.- los mismos que en los talleres VI-1 y 2 con los siguientes datos e instrucciones:



Instrucciones:

a) Traza una recta L indefinida en tu papel lustre.

b) Con tu compás toma la medida de $\overline{AB}$ y trasládala sobre L para obtener el segmento $\overline{AB}$ deseado.

c) Apoyando tu compás en A y con una medida igual al segmento $\overline{OM}$ del $\measuredangle \alpha$ traza un arco que intercepte al $\overline{AB}$ en M'.

d) Apoyando tu compás en M' y con una medida igual al $\overline{MN}$ del $\measuredangle \alpha$, traza un arco que intercepte al anterior en N'

e) Une A con N' prolongando esta recta.

f) Apoyando tu compás en B y con una medida igual al segmento $\overline{PQ}$ del $\measuredangle \beta$ traza un arco que intercepte $\overline{AB}$ en Q'.

g) Apoyando tu compás en B y con una medida igual a $\overline{PR}$ del $\measuredangle \beta$ traza un arco que intercepte al anterior en R'.

h) Une B con R' prolongando esta recta hasta que se intercepte con la recta anterior en C.

¿ Qué observaste con respecto a los triángulos y que relación hay entre el lado y los ángulos dados?
(Ver taller apéndice VI-3)

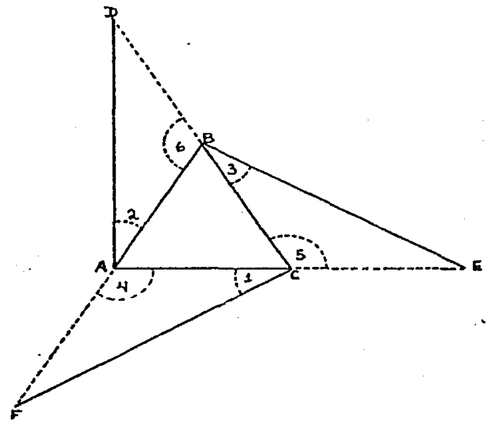
Enunciaremos ahora el tercer criterio de congruencia de triángulos.

A.L.A (ángulo, lado, ángulo)

Dos triángulos que tienen un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado respectivamente iguales son congruentes.

Ejemplo: Si el ΔABC es equilátero ; $\overline{AF}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son las prolongaciones de los lados del ΔABC y $\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \measuredangle 3$.

Verifiquemos que el $\Delta ACF \equiv \Delta ADB \equiv \Delta BEC$



Como:

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \measuredangle 3$ De acuerdo a los datos

$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$ Por ser ΔABC equilátero

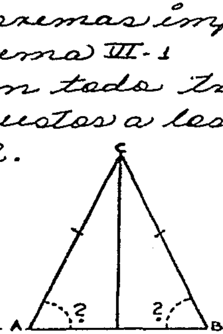
$\measuredangle 4 = \measuredangle 5 = \measuredangle 6$ Por ser suplementarios de los ángulos interiores adyacentes respectivos.

$\therefore \Delta ACF \equiv \Delta ADB \equiv \Delta BEC$ por criterio A.L.A

Utilicemos ahora los criterios obtenidos anteriormente para la demostración de algunos teoremas importantes.

Teorema III-1

En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales entre sí.



Hipótesis ΔABC es isósceles

$\therefore \overline{AC} = \overline{BC}$

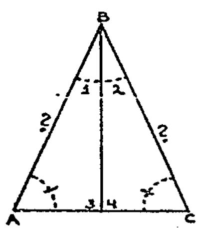
Tesis $\measuredangle A = \measuredangle B$

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- Trazar la bisectriz $\overline{CD}$ del $\measuredangle C$	Por construcción
2.- $\overline{AC} = \overline{BC}$	Por hipótesis
3.- $\overline{CD} = \overline{CD}$	Por identidad
4.- $\measuredangle ACD = \measuredangle DCB$	Por ser $\overline{CD}$ bisectriz del $\measuredangle C$.
$\therefore\ \Delta ADC \equiv \Delta BDC$	Por el criterio L.A.L
$\therefore\ \measuredangle A = \measuredangle B$	

Teorema VI-2

Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a ellos también son iguales.



Hipótesis: ΔABC, $\measuredangle A = \measuredangle C$

Tesis: $\overline{AB} = \overline{BC}$

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- Trazar la bisectriz $\overline{BD}$ del $\measuredangle B$	Por construcción
2.- $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$	Por ser $\overline{BD}$ bisectriz del $\measuredangle B$.
3.- $\measuredangle A = \measuredangle C$	Por hipótesis
4.- $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$	Ya que $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$, $\measuredangle A = \measuredangle C$ y la suma de los ángulos interiores de un

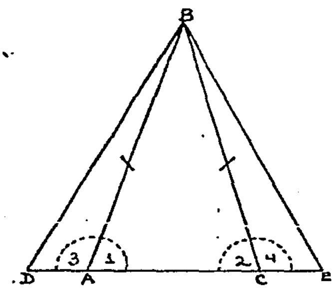
	triángulo es igual a 180°
5.- $\overline{BD} = \overline{BD}$	Por identidad
$\therefore \triangle BDA \equiv \triangle BDC$	Por el criterio A.L.A
$\therefore \overline{AB} = \overline{BC}$	

Pasemos ahora a encontrar la solución de algunos ejercios para reafirmar un poco mas lo anterior.

Ejemplo 1

En la siguiente figura $\overline{AD} = \overline{CE}$, $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

Verificar que el $\triangle ABD \equiv \triangle CBE$.

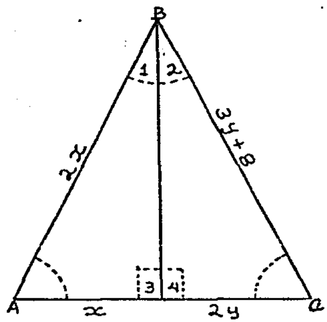


Como:

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ el $\triangle ABC$ es isósceles por lo que $\overline{BA} = \overline{BC}$	Por el teorema anterior
$\measuredangle 3 = \measuredangle 4$	Por ser suplementarios a el $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ respectivamente.
$\overline{AD} = \overline{CE}$	Por hipótesis
$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle CBE$	Por el criterio L.A.L

Ejemplo 2

En la siguiente figura $\overline{BD}$ es bisectriz del $\measuredangle ABC$, verificar que los triángulos ABD y DBC son congruentes y encuentra el perímetro del ΔABC.



Como:

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$	Por ser $\overline{BD}$ bisectriz del $\measuredangle B$.
$\measuredangle 3 = \measuredangle 4 = 90°$	Por " " " " $\measuredangle B$.
$\overline{BD} = \overline{BD}$	Por identidad
$\therefore\ \Delta ABD \equiv \Delta DBC$	Por el criterio A.L.A

Para encontrar el perímetro es necesario encontrar los valores de x e y.

Como el $\Delta ABD \equiv \Delta DBC$ entonces:

$$2x = 3y + 8 \text{ ---- } ①$$
$$x = 2y \text{ ---- } ②$$

Sustituyendo ② en ① se obtiene:

$$2(2y) = 3y + 8$$
$$4y = 3y + 8$$
$$4y - 3y = 8$$
$$y = 8$$

Sustituyendo el valor de y encontrado en ② se obtiene:

$$x = 2(8)$$
$$x = 16$$

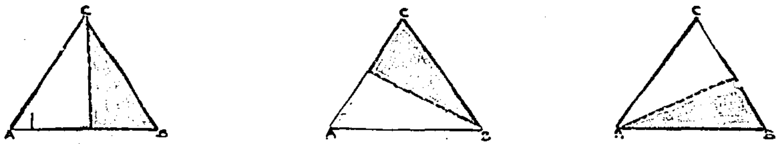
Por lo que:

$$\overline{AB} = 2x = 2(16) = 32$$
$$\overline{BC} = 3y+8 = 3(8)+8 = 32$$
$$\overline{CD} = 2y = 2(8) = 16$$
$$\overline{DA} = x = 16$$

$\therefore$ el perímetro del $\Delta\, ABC = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} =$
$32 + 32 + 16 + 16 = 96$ unidades

Ejemplo 3

¿De cuantas formas podemos recortar un triángulo equilátero en dos triángulos congruentes (iguales)? Se sugiere primero hacerlo con recortes.



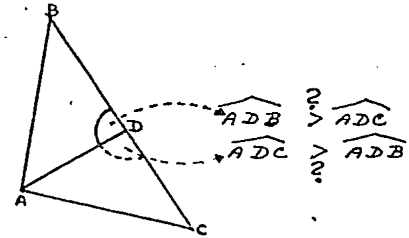
Como el triángulo tiene tres vértices se podrá hacer esto de tres formas distintas a saber, o sea recortando a lo largo de las alturas lanzadas desde cada vértice.

Ejemplo 4

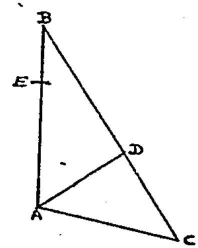
En el triángulo ABC se traza la bisectriz $\overline{AD}$. Si $\overline{AB} > \overline{AC}$, entonces ¿cuál de los ángulos $\widehat{ADB}$ o $\widehat{ADC}$ es mayor?

Queremos averiguar
si $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$ o viceversa
si $\widehat{ADC} > \widehat{ADB}$

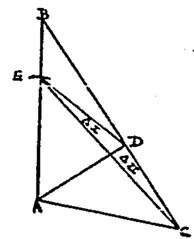
o sea



1º Sabemos que $\overline{AB} > \overline{AC}$ por hipótesis

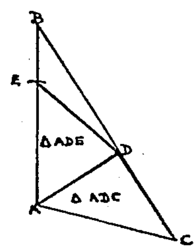


2º Tomemos $\overline{AE} = \overline{AC}$ donde $\overline{AE}$ es una parte de $\overline{AB} > \overline{AC}$.



3º Unamos E con C y E con D para obtener el ΔI y ΔII donde se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \widehat{ADE} = \widehat{ADC} \\ b)\ \overline{DE} = \overline{DC} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{por ser} \\ \Delta I \equiv \Delta II \end{array}$$

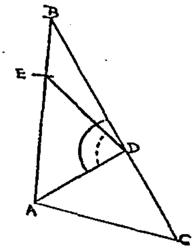


4º $\therefore$ $\Delta\, ADE \equiv \Delta\, ADC$ por tener lados y ángulos iguales

5º Comparemos $\widehat{ADB}$ con $\widehat{ADE}$ en lugar de $\widehat{ADC}$ con $\widehat{ADB}$

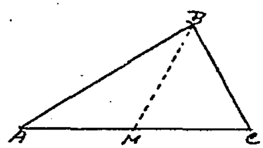
$\widehat{ADB} > \widehat{ADE}$ ya que $\overline{AB} > \overline{AC}$

Como el punto E esta entre A y B entonces $\widehat{ADE}$ es una parte del $\widehat{ADB}$.

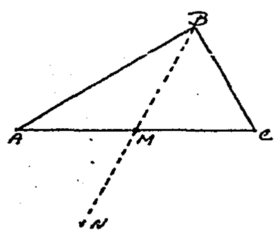


Ejemplo 5

Demostrar que la mediana de un triángulo es menor que la semisuma de sus lados entre los que se encuentra.

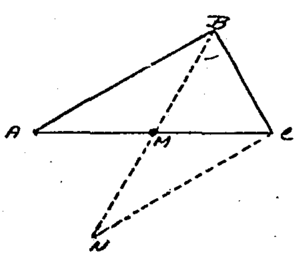


Lo que se quiere demostrar es: $\overline{BM} < \dfrac{\overline{AB}+\overline{CB}}{2}$



1.- Prolonguemos la mediana $\overline{BM}$ hasta N de manera que:

$\overline{MN} = \overline{BM}$



2.- Unamos N con C para formar el $\triangle BNC$.

3.- En el $\triangle BNC$:

$\overline{BN} < \overline{NC} + \overline{CB}$

o sea que $2\overline{BM} < \overline{NC} + CB$

de donde:

$$\overline{BM} < \frac{\overline{NC} + \overline{CB}}{2}$$

pero $\overline{AB} = \overline{NC}$

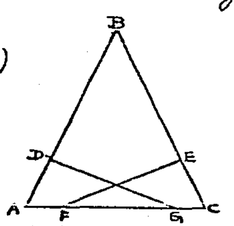
ya que el $\triangle AMB \cong \triangle NMC$

$$\therefore \ \overline{BM} < \frac{\overline{AB} + \overline{CB}}{2}$$

Ficha VI-1

1.- En cada una de las figuras que se te dan a continuación empleando en cada caso los datos que se te dan verifica la congruencia de triángulos.

a)



Datos

$\overline{AB} = \overline{BC}$

$\overline{DG} \perp \overline{AB}$

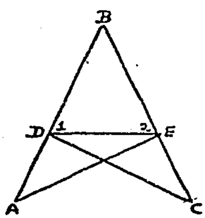
$\overline{EF} \perp \overline{BC}$

$\overline{BD} = \overline{BE}$

Verificar

$\triangle AGD \cong \triangle CFE$

b)



Datos:

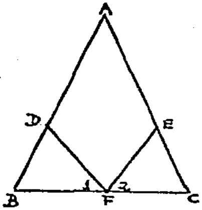
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

$\overline{AD} = \overline{EC}$

Verificar

$\triangle ABE \cong \triangle BCD$

c)



Datos:

$\overline{AB} = \overline{AC}$

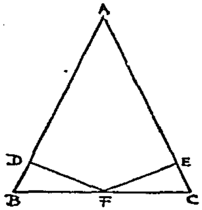
F Punto Medio de $\overline{BC}$

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

Verificar

$\overline{DF} = \overline{FE}$

d)



Datos

$\overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{AD} = \overline{AE}$

$\overline{FD} \perp \overline{AB}$

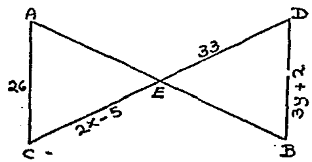
$\overline{FE} \perp \overline{AC}$

Verificar

$\overline{BF} = \overline{FC}$

2.- En las siguientes figuras verificar la congruencia de triángulos y encuentra el perímetro de cada polígono empleando para ello los datos que se te dan.

a)



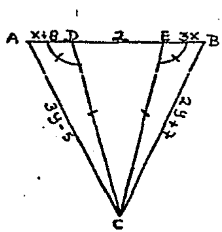
Datos

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, $\overline{AE} = \overline{EB}$

Verificar

$\triangle ACE \equiv \triangle EDB$

b)



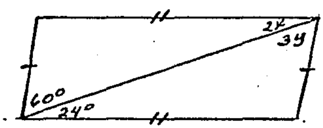
Datos

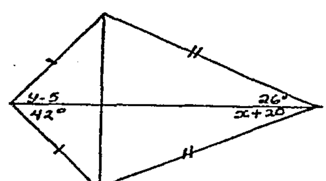
$\measuredangle ACD = \measuredangle ECB$

Verificar

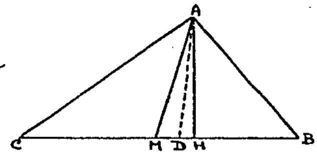
$\triangle ACD \equiv \triangle ECB$

3.- En las siguientes figuras encuentra el valor de los ángulos interiores de cada triángulo.

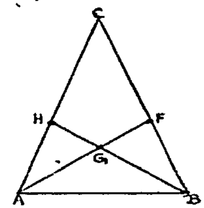




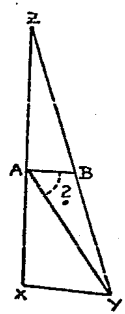
4.- En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$, la bisectriz $\overline{AD}$ y la altura $\overline{AH}$. Demostrar que el punto D esta entre los puntos M y H, si los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ no son iguales. Dicho de otra forma: en un triángulo cualquiera si $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ entonces la bisectriz se encuentra entre la mediana y la altura. (Solución apéndice VI-4



5.- En el triángulo ABC se sabe que $\overline{AC} = \overline{CB}$, $\measuredangle ACB = 20°$, $\overline{AF}$ y $\overline{BH}$ son bisectrices de los ángulos $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle CBA$ respectivamente. Hallar la medida del $\measuredangle FGH$. (Solución apéndice VI-5

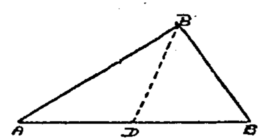


6.- En base a la siguiente figura en la que $\measuredangle BAZ = 95°$, $\measuredangle BYX = 70°$, $\overline{AB} \parallel \overline{XY}$, $\overline{ZA} = \overline{AY}$, encuentra la medida del $\measuredangle YAB$. (Solución apéndice VI-6



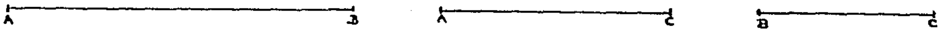
7.- De cuántas formas se podrá recortar un triángulo escaleno (con sus 3 lados distintos) en dos triángulos congruentes (iguales).

Inténtalo primero con recortes, y después trata de justificar la respuesta. (Solución apéndice VI-7



$\triangle ABD \cong \triangle DBC$

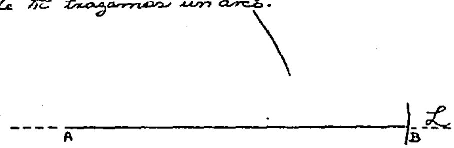
Apéndice VI-1



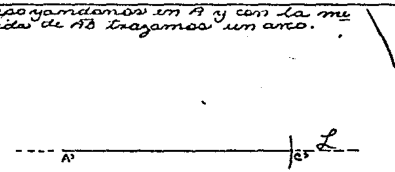
Construcción del Δ ABC tomando primero al segmento $\overline{AB}$

Construcción del triángulo A'B'C' tomando primero al segmento $\overline{AC}$.

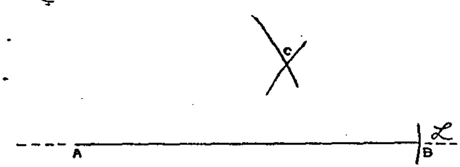
Apoyandonos en A y con la medida de $\overline{AC}$ trazamos un arco.



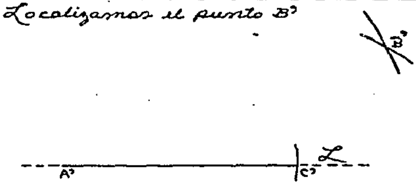
apoyandonos en A y con la medida de $\overline{AB}$ trazamos un arco.



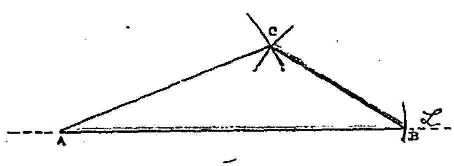
Localicemos el punto C



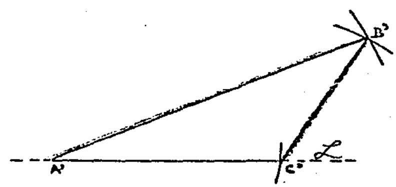
Localizamos el punto B'

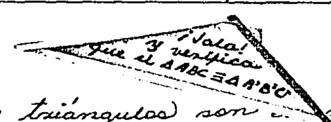


Unamos C con A y B para así obtener el Δ ABC.



Unamos B' con A' y C' para así obtener el Δ A'B'C'.

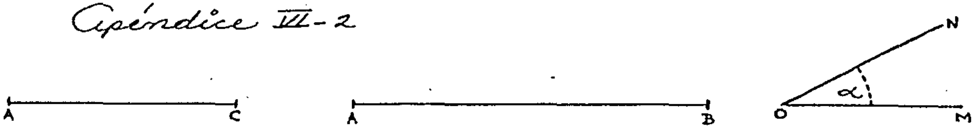




Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente sus tres lados congruentes.

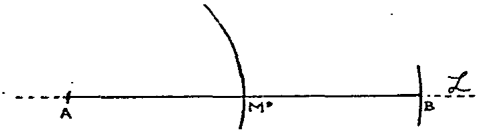
(L.L.L)

Apéndice VI - 2

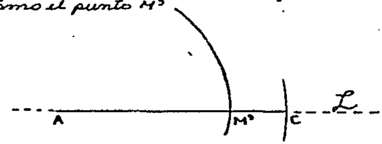


Construcción del Δ ABC tomando primero al segmento $\overline{AB}$	Construcción del Δ A'B'C' tomando primero al segmento $\overline{AC}$.

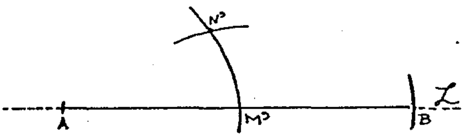
Localicemos en L al segmento $\overline{AB}$ así como el punto M'



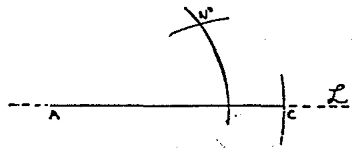
Localicemos en L al segmento $\overline{AC}$ así como el punto M'



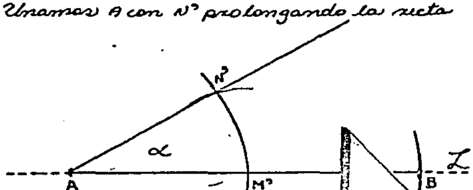
Localicemos ahora a N'



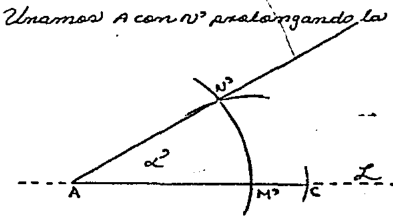
Localicemos ahora a N'



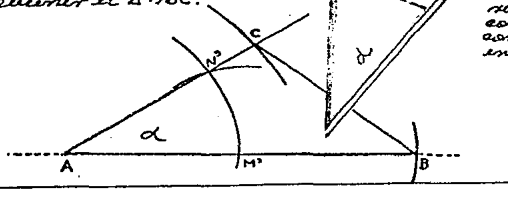
Unamos A con N' prolongando la recta



Unamos A con N' prolongando la recta.

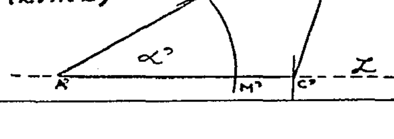


Localicemos el punto C p... unirlo con el punto B y c... obtener el Δ ABC.

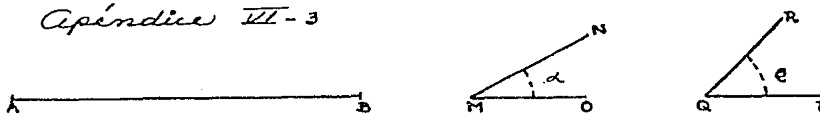


Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente dos lados congruentes y el ángulo congruente comprendido entre dichos lados.

(L. A. L)

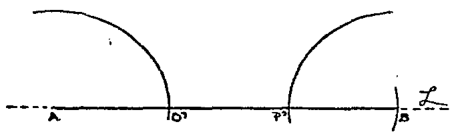


Apéndice VI - 3

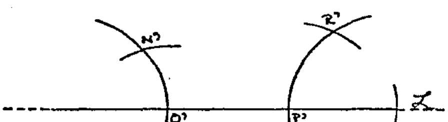


Construcción del Δ ABC

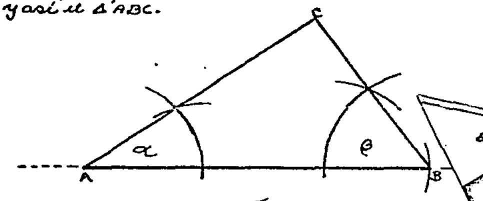
Apoyandonos en A y B con la medida de $\overline{MO}$ y $\overline{QP}$ respectivamente trazamos dos arcos localizando a O' y P'.



Localizamos los puntos N' y R'

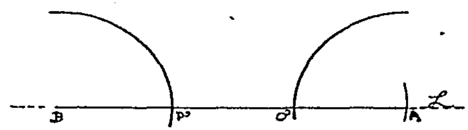


Uniendo O' con N' y P' con R' y prolongando las rectas respectivamente obtenemos el punto C y así el Δ ABC.

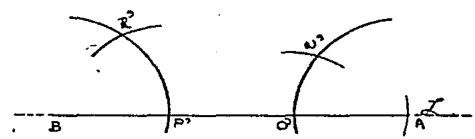


Construcción del Δ A'B'C'

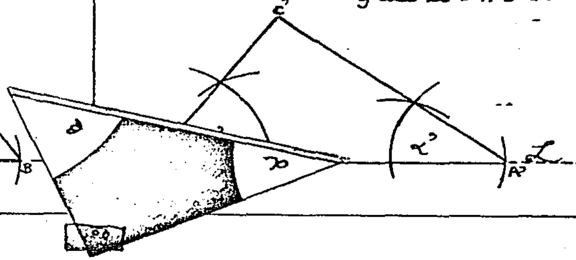
Apoyandonos en B y A con la medida de $\overline{QP}$ y $\overline{MO}$ respectivamente trazamos dos arcos localizando a P' y O'



Localizamos los puntos R' y N'



Uniendo P' con R' y O' con N' y prolongando las rectas respectivamente obtenemos el punto C' y así el Δ A'B'C'.

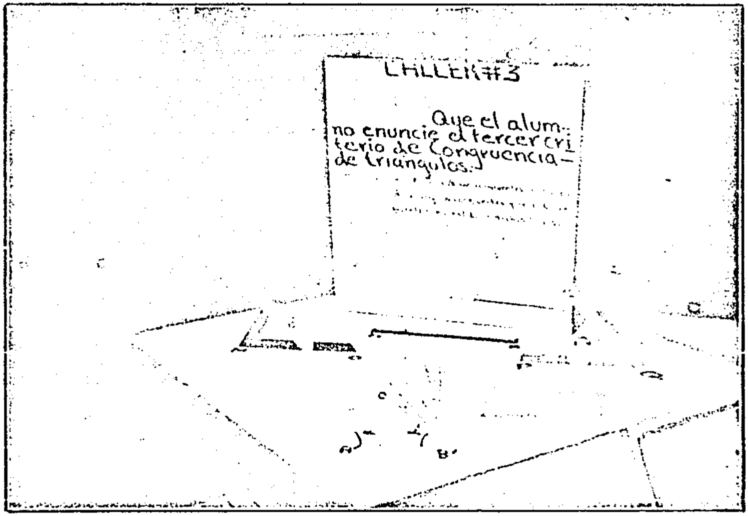


Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente dos ángulos congruentes y un lado congruente comprendido entre dichos lados.

(A. L. A)

Apéndice VI - 3

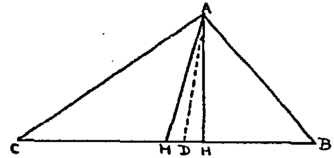
Presentación del taller anterior hecha por los alumnos del tercer semestre.



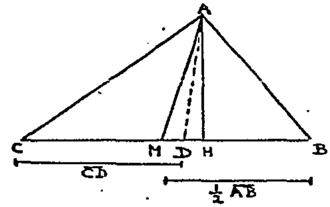
Este trabajo fue presentado en la exposición "El alumno en las Matemáticas".

Apéndice VI-4

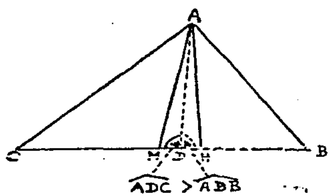
Hay que demostrar que D esta entre M y H, si $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ (por ejemplo $\overline{A}\ > \overline{A}$).



Si logramos demostrar que $\overline{CD} > \overline{DB}$ entonces $\overline{CD} > \frac{1}{2} CB$ y por lo tanto el punto D esta mas alejado de C que el punto M.



Por otro lado del problema 4 (cap. de congruencia) sabemos que $\widehat{ADC} > \widehat{ADB}$ por lo que $\widehat{ADC}$ es obtuso y por el problema (capítulo de polígonos) el punto H cae en la prolongación de la base $\overline{CD}$ del triángulo ACD (después del punto D).

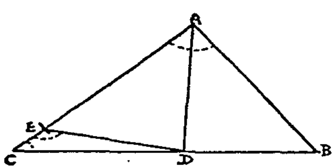


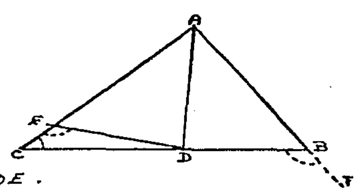
Consecuentemente el punto D esta entre M y H.

Falta por demostrar el que efectivamente si $\overline{AC} > \overline{AB}$, entonces $\overline{CD} > \overline{DB}$.

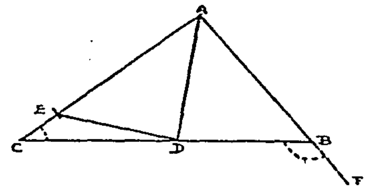
Para comparar estas dos magnitudes ($\overline{CD}$ y $\overline{DB}$) lo haremos de manera análoga al ejemplo 4 (cap. de congruencia).

Trazemos $\overline{DE}$ de manera que $\overline{AE} = \overline{AB}$ obteniendo que el $\triangle ADE \cong \triangle ADB$ y $\overline{ED} = \overline{DB}$ por lo cual comparar $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$ es lo mismo que comparar $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ y para comparar estas magnitudes basta comparar sus ángulos opuestos $\widehat{CED}$ y $\widehat{ECD}$ del $\triangle CDE$.



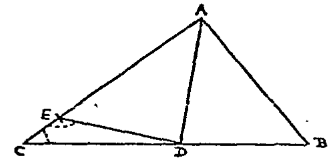


Pero $\widehat{CED} = \widehat{CBF}$ ($\widehat{CBF}$ es un ángulo exterior del $\triangle ABC$) ya que estos dos ángulos son correspondientes en los triángulos congruentes $\triangle ADE$ y $\triangle ADB$.



Ahora bien $\widehat{CBF}$ es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes y por lo tanto:

$$\widehat{CBF} > \widehat{ACB} \text{ en el } \triangle ABC$$

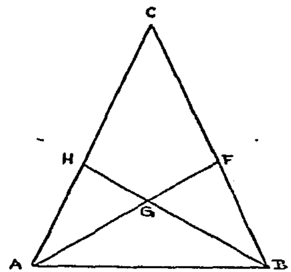


Luego entonces:

$$\widehat{CED} > \widehat{ACB}$$

o sea que $\overline{CD} > \overline{ED}$ o lo que es lo mismo $\overline{CD} > \overline{DB}$ (a lado mayor se opone angulo mayor).

Apéndice III-5



Como $\overline{AC} = \overline{CB}$ entonces $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$
Como $\widehat{ACB} = 20°$ tenemos que:

$$\widehat{CAB} + \widehat{CBA} + 20 = 180°$$
$$\widehat{CAB} + \widehat{CBA} = 180° - 20° = 160°$$
$$\therefore \widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 80°$$

Como $\overline{AF}$ y $\overline{BH}$ son bisectrices de los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{CBA}$ entonces:

$$\frac{1}{2}\widehat{BAC} = 40° = \widehat{BAG}$$
$$\frac{1}{2}\widehat{CBA} = 40° = \widehat{GBA}$$

Sabemos que:

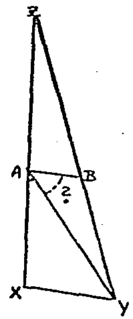
$$\widehat{BAG} + \widehat{AGB} + \widehat{GBA} = 180°$$ (por ser interiores del Δ ABG)

Sustituyendo $40° + \widehat{AGB} + 40° = 180°$

$$\widehat{AGB} + 80° = 180°$$
$$\widehat{AGB} = 180° - 80° = 100°$$

$\therefore \widehat{FGH} = 100°$ (por ser opuesto por el vértice a $\widehat{AGB}$).

Apéndice VI-6



$\sphericalangle BAZ = 95°$

$\sphericalangle BYX = 70°$

$\overline{AB} \parallel \overline{XY}$

$\overline{ZA} = \overline{AY}$

Como $\overline{AB} \parallel \overline{XY}$ entonces

$\sphericalangle BAZ = \sphericalangle ZXY = 95°$

y $\sphericalangle BYK = \sphericalangle ZBA = 70°$

pero $\sphericalangle BAZ + \sphericalangle ABZ + \sphericalangle AZB = 180°$

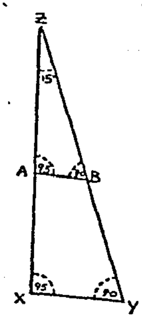
por ser ángulos interiores del ΔABZ.

de donde $95° + 70° + \sphericalangle AZB = 180°$

$165° + \sphericalangle AZB = 180°$

$\sphericalangle AZB = 180° - 165°$

$\sphericalangle AZB = 15°$



Como $\overline{AZ} = \overline{AY}$ el ΔZAY es isósceles por lo que

$\sphericalangle AZB = \sphericalangle AYB = 15°$

pero $\sphericalangle AZB + \sphericalangle AYB + \sphericalangle ZAY = 180$

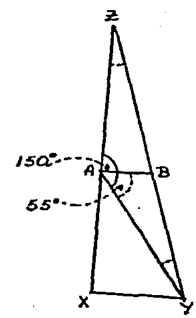
por ser ángulos interiores del ΔZAY; así que:

$15° + 15° + \sphericalangle ZAY = 180°$

$30° + \sphericalangle ZAY = 180$

$\sphericalangle ZAY = 180° - 30° = 150°$

$\therefore \quad \sphericalangle YAB = 150° - 95° = 55°$

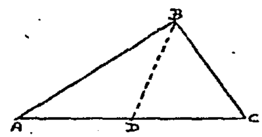


Apéndice VI-7

Al intentar recortar el Δ ABC en dos triángulos congruentes nos damos cuenta de que es imposible hacerlo.

Bien pasemos ahora a justificar esta respuesta.

Supongamos que si es posible hacerlo:

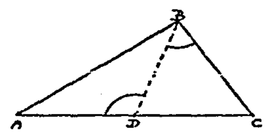


Sea el ΔABC el triángulo escaleno dado.

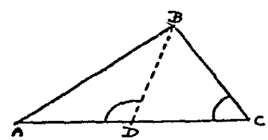
Supongamos que es posible recortar al ΔABC en dos triangulos congruentes ΔABD y ΔBCD.

o sea $\Delta ABD \equiv \Delta BCD$

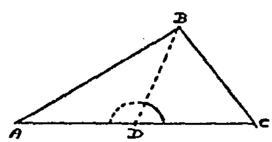
Por lo tanto digamos el ángulo $\widehat{ADB}$ tendrá que ser igual a alguno de los ángulos del ΔBCD.



Pero el ángulo $\widehat{ADB}$ no puede ser igual al ángulo $\widehat{DBC}$, ya que un ángulo exterior de un triángulo siempre es mayor que el interior no adyacente.



Pero el ángulo $\widehat{ADB}$ tampoco puede ser igual al ángulo $\widehat{BCD}$ por la misma razón dada anteriormente



Por lo tanto debe ser igual a su ángulo adyacente $\widehat{BDC}$, pero si $\widehat{ADB} = \widehat{BDC}$ entonces los lados opuestos a dichos ángulos serán iguales, por lo tanto $\overline{AB} = \overline{BC}$ lo cual contradice el hecho de que por hipótesis todos los lados del ΔABC se suponían desiguales por ser escale-no. Esta contradicción hace que la hipótesis con la que partimos en la demostración sea falsa y por lo tanto su negación verdadera, o sea que la respuesta final es que efecti-vamente es imposible dividir un triángu-lo escaleno en dos triángulos congruentes.

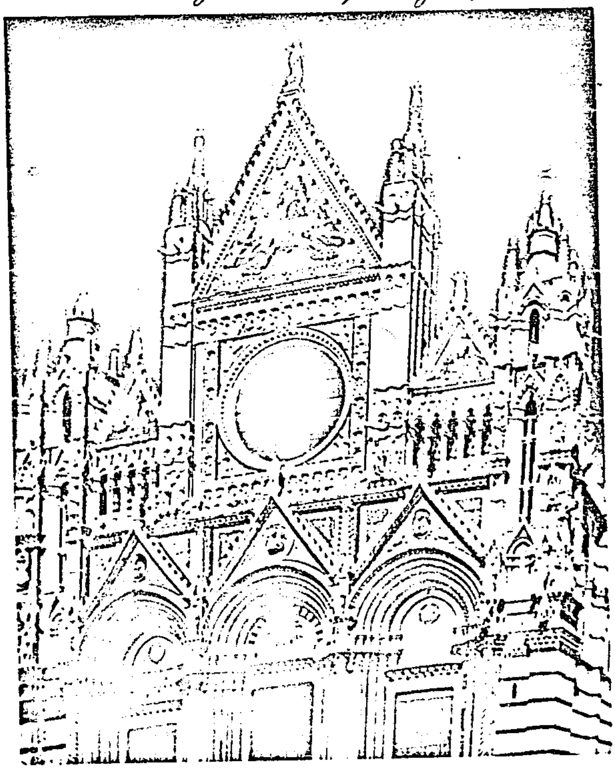
Tema VII

Semejanza

Semejanza

Noción de Semejanza.- en la sección anterior estudiamos una relación entre dos figuras llamada congruencia, la que nos sugiere que estas dos figuras tienen el mismo tamaño y la misma forma. En esta sección estudiaremos las figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, a estas figuras les llamaremos figuras "semejantes".

Observa la siguiente fotografía:



Como te habrás dado cuenta en la fotografía de la estructura anterior se encuentran varias figuras semejantes; indica cuales son.

Otros ejemplos de semejanza son los siguientes:

Una fotografía de una persona o de una estructura muestra una imagen mucho menor a la del objeto fotografiado, pero la forma de la imagen es la misma a la del objeto fotografiado; lo mismo sucede cuando observamos un insecto a través del microscopio.

Los ingenieros, diseñadores y arquitectos trabajan continuamente con figuras semejantes, diseñando estructuras a escala. En la industria automotriz y de construcción de aviones, generalmente primero se construyen modelos pequeños a escala de los automóviles y aviones nuevos.

En general tenemos la idea intuitiva de lo que quiere decir semejanza de objetos, pero en geometría el término "semejanza" se usa en un sentido más preciso, porque siempre quiere decir "que tiene la misma forma".

Partiendo de esta idea fundamental, se irá definiendo la semejanza entre figuras desde las más sencillas hasta llegar a la definición formal de semejanza entre dos figuras cualesquiera.

Taller VIII-1

Objetivo del Taller.- que el alumno reafirme los conceptos de congruencia y semejanza e identifique la relación entre ambos.

Material Necesario.- revistas, periódicos, etc, tijeras, pegamento, regla, lápiz, etc.

Pasos a Seguir

1.- En nuestro contorno podemos observar diversas figuras semejantes, ilustra esto mediante recortes de revistas, dibujos etc.

2.- Analiza las siguientes proposiciones y argumenta su veracidad o falsedad mediante dibujos o recortes y con las definiciones de semejanza y congruencia.

a) "Todas las figuras que son congruentes, son semejantes.

b) "Todas las figuras que son semejantes son congruentes.

Segmentos Rectilíneos Semejantes

De estas figuras particulares podemos decir según el concepto anterior, que todos los segmentos rectilíneos son semejantes entre sí, porque todos tienen la misma forma aunque sean de diferente tamaño.

Como se puede apreciar en la figura anterior el segmento $\overline{AB}$ es semejante al segmento $\overline{A'B'}$, o lo que es lo mismo:

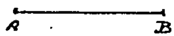
$$\overline{AB} \sim \overline{A'B'}$$

Nota: $\sim$ significa semejante.

En la definición intuitiva de semejanza se mencionó el tamaño de las figuras, y en esta sección el tamaño de los segmentos, entonces se hace necesario hacer un comentario sobre la medición de los segmentos para poder así introducir los números en la geometría ya que esto nos ayudará a establecer las comparaciones entre los tamaños de las figuras semejantes.

Medida de un Segmento

Considera el segmento $\overline{AB}$, mídelo y anota la medida correspondiente



Es importante hacerte notar que la medida que encontraste para el segmento $\overline{AB}$, es un número real (2.5 cm aproximadamente), esto nos lleva a concluir que a cualquier segmento se le puede asignar un número real como medida y que por lo tanto se puede establecer una comparación entre las medidas de los segmentos.

Veamos ahora como podríamos establecer la comparación entre las medidas de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$

medida de $\overline{AB} = 2.5$ cm medida de $\overline{A'B'} = 7.5$ cm

¿Se te ocurre como comparar estas medidas?

La comparación que vamos a establecer la llamaremos razón.

Razón.- comparación de dos cantidades por medio de un cociente.

O sea que la comparación mediante una razón de $\overline{AB}$ con $\overline{A'B'}$ esta dada por :

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, o bien $\dfrac{2.5}{7.5}$

Cabe hacer notar que:

1) Esta comparación se puede dar del segmento pequeño al grande. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ o bien del grande al pequeño $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

2) La razón $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ se lee $\overline{AB}$ es $\overline{A'B'}$

3) El cociente de la razón (en este caso particular) puede ser

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{2.5}{7.5} = .333\ldots$ cociente (lo que significa que $\overline{AB}$ es 1/3 parte de $\overline{A'B'}$).

o bien

$\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{7.5}{2.5} = 3$ cociente (lo que quiere decir que $\overline{A'B'}$ es 3 veces mayor que $\overline{AB}$).

Ficha VII-1

Compara los siguientes segmentos semejantes mediante una razón:

a) 

b) 

c) 

d) 

Proporcionalidad

Como ya se dijo antes vamos a comparar la medida de los segmentos por la razon:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = K \quad \text{cociente}$$

y a la igualdad de dos o mas razones le llamaremos "proporción" esto es:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \cdots\cdots = K$$

es una proporción.

Pero entendamos lo anterior mediante un ejemplo numérico:

Suponiendo que se tienen las siguientes medidas:

$\overline{AB} = 2$ $\quad\overline{BC} = 4.5$ $\quad\overline{CD} = 10$

$\overline{A'B'} = 4$ $\quad\overline{B'C'} = 9$ $\quad\overline{C'D'} = 20$

al establecer una razón entre cada par obtenemos como cociente:

$$\frac{2}{4} = .5 \qquad \frac{4.5}{9} = .5 \qquad \frac{10}{20} = .5$$

Esto nos lleva a concluir que como todos tienen el mismo cociente entonces:

$$\frac{2}{4} = \frac{4.5}{9} = \frac{10}{20}$$

por lo que diremos que se trata de una proporción.

Taller VII-2

Objetivo del Taller.- que el alumno verifique que existen diversas formas de obtener una proporción.

Material Necesario.- papel cartoncillo y plumones de colores.

Pasos a Seguir

1.- En el centro de de tu papel pinta el nº 2.

2.- El 2 es cociente de una ifinidad de razones, intenta construir una estrella con estas diversas igualdades.

Ficha VII-2

1.- Sean $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 3$, menciona algunos valores de a, b, c, d para que se satisfaga la proporción.

2.- Inventa 3 ejemplos de proporciones con por lo menos 3 razones.

Propiedades de las Proporciones

A continuación se enuncian algunos resultados importantes de las proporciones, estos resultados se mencionan porque posteriormente serán utilizados.

(1)- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$

(2)- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Los resultados antes dados los podemos ejemplificar como sigue:

$$\text{Si } \frac{4}{2} = \frac{8}{4}, \overset{\text{Propiedad (1)}}{\text{entonces}} \quad 4 \times 4 = 8 \times 2$$

$$16 = 16$$

Esta propiedad es importante porque nos ayuda a encontrar valores desconocidos, como por ejemplo:

Si suponemos la proporción $\frac{7}{k} = \frac{9}{2}$

entonces por la propiedad (1) $7.2 = 9k$ y resolviendo esta ecuación obtenemos :

$$9k = 14$$
$$k = \frac{14}{9}$$
$$\therefore\ k = \frac{14}{9}$$

Comprobación

$$\frac{7}{\frac{14}{9}} = \frac{9}{2}$$

y $\frac{9}{2} = 4.5$ ya que $\frac{7}{\frac{14}{9}} = \frac{\frac{7}{1}}{\frac{14}{9}} = \frac{63}{14} = \frac{9}{2} = 4.5$

Propiedad (2)

Tenemos que si $\frac{4}{2} = \frac{8}{4}$, entonces $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

esto se comprueba facilmente obteniendo los cocientes :

$$\frac{2}{4} = .5 \quad y \quad \frac{4}{8} = .5$$

Ficha VII-3

1) Encuentra el valor que falta en las siguientes proporciones

a) $\frac{5}{4} = \frac{9}{k}$ b) $\frac{3}{7} = \frac{c}{12}$

c) $\frac{a}{3} = \frac{8}{5}$ d) $\frac{3}{4} = \frac{k}{12} = \frac{5}{b}$

e) $\frac{6}{b} = \frac{9}{4}$ f) $\frac{5}{a} = \frac{9}{12} = \frac{c}{3}$

2) Encuentra los cocientes de las siguientes proporciones.

a) $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ y $\frac{5}{3} = \frac{15}{9}$

b) $\frac{7}{9} = \frac{10.5}{13.5}$ y $\frac{9}{7} = \frac{13.5}{10.5}$

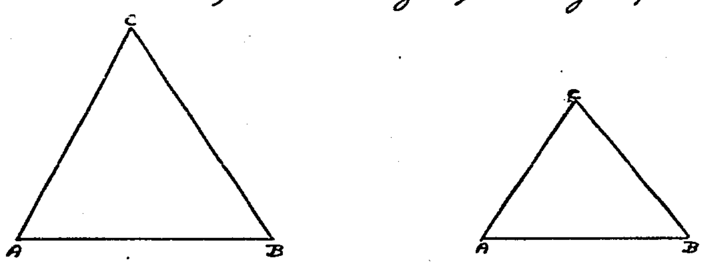
c) $\frac{1/2}{7/4} = \frac{3/4}{21/8}$ y $\frac{7/4}{1/2} = \frac{21/8}{3/4}$

d) $2/2 = 4/4$

Triángulos Semejantes

Como ya sabemos, los triángulos son los polígonos con menor número de lados que se pueden formar, entonces será la siguiente figura que se estudiará.

Definición.- dos triángulos son semejantes si y solo sí, sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes proporcionales, esto significa gráficamente:



Si

$$\hat{A} = \hat{A'}$$
$$\hat{B} = \hat{B'}$$
$$\hat{C} = \hat{C'}$$

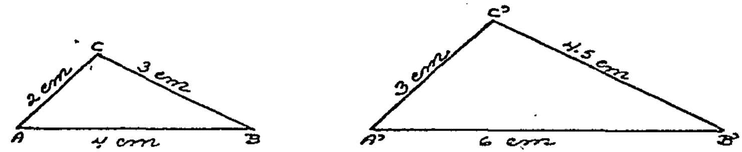
y $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = K$

angulos iguales — lados proporcionales

entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

La definición anterior la podemos ejemplificar como sigue:

Considera los triángulos ABC y A'B'C' como sigue:



Entonces el $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ porque cumplen con los requisitos de la definición

$$\hat{A} = \hat{A}' = 50^\circ \qquad \hat{B} = \hat{B}' = 30^\circ \qquad \hat{C} = \hat{C}' = 100^\circ$$

ángulos iguales

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{3}{4.5} = .6666$$

lados proporcionales

Notas

1) Los lados correspondientes a los que se acostumbra llamar también lados homólogos, son los lados que se oponen a ángulos iguales.

Ejemplo

Considera el $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ anteriores

$\overline{AC}$ es homólogo a $\overline{A'C'}$ porque en sus triángulos correspondientes se oponen al ángulo que mide ___

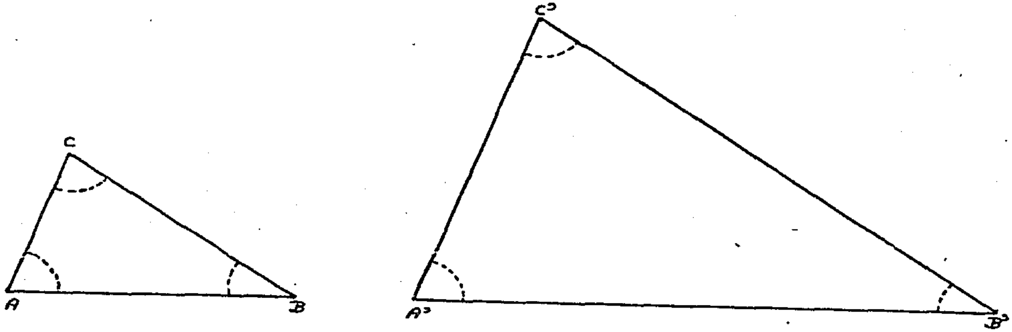
De igual manera $\overline{AB}$ es homólogo con $A'B'$ porque se oponen al ángulo que mide ____

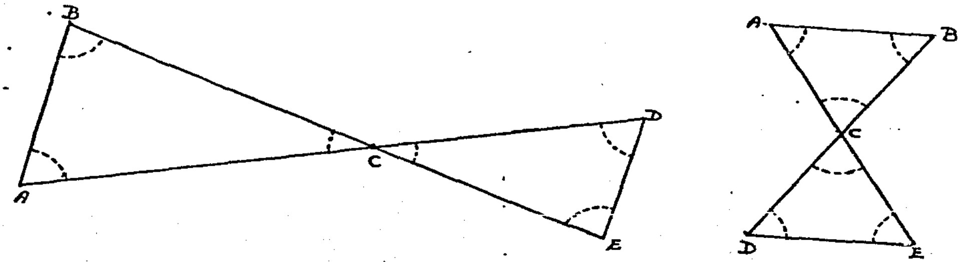
¿A que ángulo se oponen $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$?

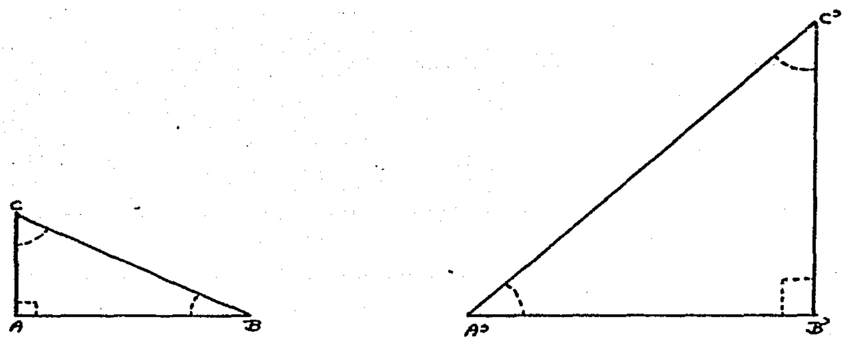
Ficha VII-4

Indica si los siguientes pares de triángulos son semejantes, haciendo notar la igualdad de sus ángulos y la proporción de sus lados

homólogos o correspondientes (tienes que me-
dir todos los lados y ángulos).







En la ficha anterior comprobamos que los triángulos dados eran semejantes, haciendo notar que se cumplían todos los requisitos de la definición. Ahora al igual que lo hiciste en congruencia, veremos que dados dos triángulos cualesquiera no necesariamente se deben verificar todas las condiciones para decidir si son o no semejantes, que bastará sólo con probar algunas para poder decir si son semejantes a esto le llamaremos criterios de semejanza.

A continuación realizarás los siguientes tres talleres para que después de c/uno de ellos puedas enunciar el criterio correspondiente

Taller VI-3

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca el primer criterio de semejanza de triángulos y que sea capáz de dado un triángulo arbitrario constru-ir el semejante con un una razón dada y utilizando regla y compás.

Material Requerido.- regla, compás y lápiz

Pasos a Seguir.-

1.- Construye un triángulo del tamaño que quieras (dados 3 segmentos) utilizando regla y compás.

2.- Construir otro triangulo con razon entre sus lados de 2/3 respecto al anterior para lo cual seguiremos las siguientes instrucciones :

Instrucciones:

a) Coloca tus segmentos uno debajo de otro.

b) Aparte traza una recta $\overline{KK'}$

c) Como el denominador de la razón es 3, abre tu compás (medida arbitraria) y traza 3 arcos consecutivos en la recta $\overline{KK'}$, llamando al primer punto de apoyo 0, a los que le siguen 1, 2 y 3 respectivamente.

d) Apoyando tu compás en 0 y con una abertura igual a la medida del segmento $\overline{03}$ traza un arco.

e) Apoyando tu compás en 3 y con la misma abertura traza otro arco que intersectará al anterior en el punto b.

f) Une b con los puntos 1, 2, 3

g) Apoyando tu compás en b y con una abertura igual a la medida del primer lado del triangulo ($\overline{AB}$) traza un arco que intersecte a $\overline{b0}$, $\overline{b1}$, $\overline{b2}$, y $\overline{b3}$.

h) Apoyando tu compás en b y con una abertura igual a la medida del segundo lado del triángulo ($\overline{BC}$) traza en forma similar a la anterior un arco.

i) Haz lo mismo pero ahora para el tercer lado del triángulo

j) Une los extremos de cada uno de los arcos.

k) Traza en el extremo derecho de tu hoja tres rectas cualesquiera donde localizaremos cada uno de los lados del triángulo buscado.

l) Como el numerador de la razón

lo 2, apoyando tu compás en A toma la medida de dos subdivisiones, trasladando dicha medida sobre el primer segmento obteniendose así la medida del primer lado del triángulo buscado.

m) Apoya tu compás en C y toma la medida nuevamente de dos subdivisiones y trasladala sobre el segundo segmento obteniendose así el segundo lado del triángulo buscado

n) De la misma forma encuentra el tercer lado del triángulo buscado.

ñ) Teniendo ya los tres lados construye con regla y compás el triángulo A'B'C'.

3.- Mide los lados de ambos triángulos y verifica si son proporcionales.

4.- Mide los ángulos de los dos triángulos.

5.- ¿ Qué puedes concluir acerca de los dos triángulos.

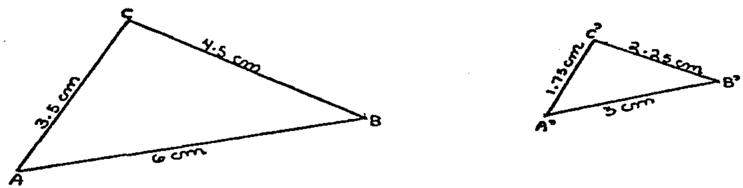
(Ver taller apéndice III-1)

Pasemos ahora a enunciar nuestro primer criterio de semejanza de triángulos.

L.L.L. (lado lado lado)

Dos triángulos que tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, son semejantes.

Ejemplo.- Verificar que el Δ ABC sea semejante al Δ A'B'C'



Como:

$\overline{AB}$ correspondiente $\overline{A'B'}$
$\overline{AC}$ " $\overline{A'C'}$
$\overline{CB}$ " $\overline{C'B'}$

entonces comparando los lados

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{6}{3} = 2 \;;$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{3.5}{1.75} = 2 \qquad \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = 2$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = \frac{4.5}{2.25} = 2 \qquad \therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$ por el criterio L.L.L.

Taller VII-4

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca el segundo criterio de semejanza de triángulos y sea capáz de dado un triángulo arbitrario construir el semejante.

Material Necesario.- regla compás lápiz

Pasos a Seguir

1.- Construye un triángulo con regla y compás dados dos lados y un ángulo.

2.- Construir otro triángulo con razon entre dos de sus lados de 3/4 respecto al anterior para lo cual seguiremos las siguientes instrucciones:

Instrucciones:

a) Coloca tus segmentos uno debajo de otro

b) Aparte traza una recta $\overline{KK'}$

c) Como el denominador de la razón es 4 abre tu compás (medida arbitraria) y traza 4 arcos consecutivos en la recta $\overline{KK'}$ llamando al primer punto de apoyo 0, a los que le siguen 1, 2, 3, 4 respectivamente.

d) Apoyando tu compás en 0 y con una abertura igual a la medida del segmento $\overline{04}$ traza un arco.

e) Apoyando tu compás en 4 y con la misma abertura traza otro arco que intersectará al anterior en el punto b.

f) Une b con los puntos 1, 2, 3, 4.

g) Apoyando tu compás en b y con una abertura igual a la medida de uno de los lados del triángulo ($\overline{AB}$) traza un arco que intersecte a $\overline{b0}$, $\overline{b1}$, $\overline{b2}$, $\overline{b3}$ y $\overline{b4}$.

h) Apoyando tu compás en b y con una abertura igual a la medida del otro lado del triángulo ($\overline{BC}$) traza en forma similar a la anterior un arco.

i) Une los extremos de cada uno de los arcos.

j) Taza en el extremo derecho de tu hoja dos rectas cualesquiera donde localizaremos dos lados del triangulo buscado.

k) Como el numerador de la razón es 3, apoyando tu compás en A toma la medida de tres subdivisiones, transladanda dicha medida sobre el primer segmento obteniéndose así la medida de uno de los lados del triángulo buscado.

l) Apoya tu compás en C y toma la medida nuevamente de 3 subdivisiones y transladala sobre el segundo segmento obteniéndose así otro lado del triángulo buscado.

m) Teniendo dos lados y el ángulo con el que construiste el primer triángulo, construye ahora el triángulo Δ A'B'.

3.- Mide los lados de ambos triángulos y verifica si son proporcionales.

4.- Mide los ángulos de los dos triángulos

5.- ¿Qué puedes concluir acerca de los dos triángulos?

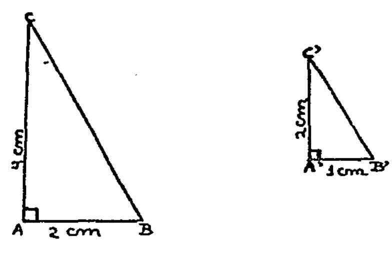
(Ver taller apéndice VII-2)

Enunciemos ahora nuestro segundo criterio de semejanza de triángulos.

L.A.L (lado ángulo lado)

Dos triángulos que tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual, son semejantes.

Ejemplo: verificar que el $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



Como:

$\overline{AB}$ correspondiente $\overline{A'B'}$
$\overline{AC}$ " $\overline{A'C'}$

entonces comparando los lados se tiene

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{2}{1} = 2$$

de donde: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = 2$

y $\measuredangle A = \measuredangle A' = 90°$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ por el criterio L.A.L.

Taller VII-5

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca el tercer criterio de semejanza de triángulos.

Material Necesario.- mismo que en el taller anterior.

Pasos a Seguir:

1.- Traza un triángulo con regla y compás del tamaño que desees. ($\triangle ABC$)

2.- Aparte traza un segmento de recta $\overline{A'C'}$ diferente a $\overline{AC}$

3.- Transporta (como en los talleres de congruencia) el ángulo $\hat{A}$ a A' para formar el ángulo $\hat{A'}$.

4.- En forma análoga transporta C a C' para obtener el ángulo $\hat{C'}$

5.- Prolonga los lados de los dos ángulos que trasladaste hasta que se intersecten en el punto B'

6.- Mide los ángulos del $\triangle ABC$ y compáralos con los ángulos correspondientes en el $\triangle A'B'C'$

¿Cómo son?

7.- Mide con tu regla los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ correspondientes al Δ ABC.

8.- Mide ahora los segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{A'C'}$ correspondientes al Δ A'B'C'.

9.- Compara las razones entre los lados homólogos.

¿ Cómo son?

¿ Que puedes concluir?

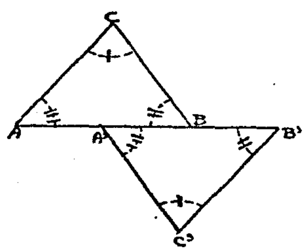
(Ver taller apéndice VII-3)

Enunciemos ahora el tercer criterio de semejanza de triángulos.

A.A.A (ángulo, ángulo, ángulo)

Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, son semejantes.

Ejemplo.. verificar que los siguientes triángulos son semejantes.



Como :

$\hat{A} = \hat{A'}$

$\hat{B} = \hat{B'}$

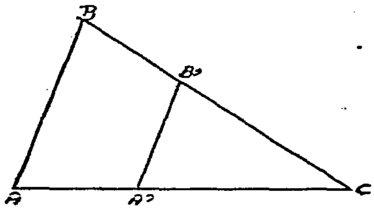
$\hat{C} = \hat{C'}$

$\therefore$ Δ ABC $\sim$ Δ A'B'C' por A.A.A

Utilicemos ahora los criterios antes vistos para la demostración de algunos teoremas importantes.

Teorema VIII-1

En todo triángulo al trazar una recta paralela a cualquiera de sus lados, resultan dos triángulos que son semejantes.



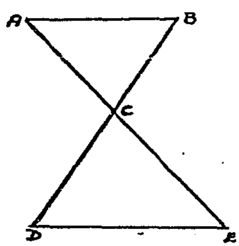
Hipótesis: ΔABC y $\overline{AB} \parallel A'B'$

Tesis : $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\hat{A} = \hat{A'}$	Por ser ángulos correspondientes.
2.- $\hat{B} = \hat{B'}$	Razón anterior
3.- $\hat{C} = \hat{C}$	Identidad
4.- $\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C$	Por el criterio A.A.A

Teorema VIII-2



Hipótesis : $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

Tésis : $\Delta ABC \sim \Delta CDE$

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\hat{B} = \hat{C}$	Por ser ángulos correspondientes.

2.- $\hat{A} = \hat{D}$ — Misma razón

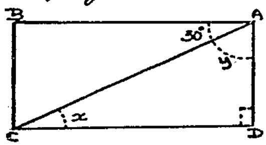
3.- $\widehat{AEB} = \widehat{DCE}$ — Por ser ángulos opuestos por el vértice

4.- $\therefore \Delta ABC \sim \Delta CDE$ — Por el criterio A.A.A

Pasemos ahora a encontrar la solución de algunos problemas propuestos.

Problema 1

Un terreno tiene forma rectangular como en la siguiente figura:



dado que el $\Delta ABC \sim \Delta CAD$, hallar el valor de los ángulos x e y para dividir el terreno en dos partes con los datos que se dan en la figura.

Como sabemos que los triángulos son semejantes, tenemos que: $\hat{D} = \hat{B}$ $\therefore \hat{B} = 90°$

$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = x$ por ser ángulos alternos internos y como $\widehat{BAC} = 30°$ entonces $x = 30°$.

Ahora como $x + y + 90° = 180°$

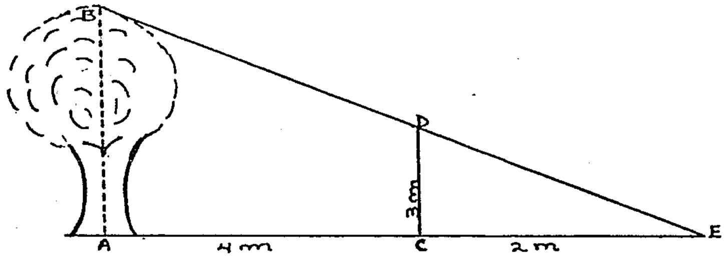
y $30° + y + 90° = 180°$

entonces $y = 180° - 90° - 30°$

$\therefore y = 60°$

Problema 2

Para calcular la altura de un árbol, se tienen los siguentes datos:



La sombra que proyecta el árbol es de 6m. Se colocó a 2m del punto final E una estaca $\overline{CD}$ de tal suerte que fuera paralela a la altura del árbol $\overline{AB}$ y que coincidiera con la sombra que está proyectando el árbol, la estaca mide 3 m.

Para encontrar la altura $\overline{AB}$ del árbol procedemos como sigue:

Puesto que $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, entonces ΔABE y ΔDCE son semejantes, de aquí obtenemos la siguiente proporción: $\frac{2}{6} = \frac{3}{\overline{AB}}$

Resolviendo tenemos:

$$2\overline{AB} = 18 \quad ; \quad \therefore \overline{AB} = 9m$$

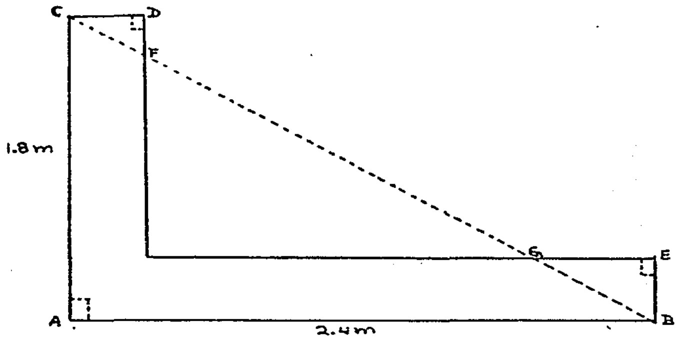
(altura del árbol)

Problema 3

Dos tablas de 30 cm de ancho se ensamblan en ángulo recto, como se indica en la figura, $\overline{AB} = 2.4 m$, $\overline{AC} = 1.8 m$ y $\overline{BC} = 3m$ y se desea cortar las esquinas según la línea de puntos.

a) Demostrar que el $\Delta DFC \sim \Delta ABC$

b) Calcular la longitud de $\overline{CF}$ y $\overline{GB}$



a) Para demostrar que el $\Delta DFC \sim \Delta ABC$ tenemos:

Hipótesis:

ΔABC es rectángulo
ΔCDF " "
$\overline{DF} \parallel \overline{CA}$
$\overline{CD} \parallel \overline{AB}$
$\overline{CA} \parallel \overline{EB}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta DFC$

Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\hat{D} = \hat{A}$	Porque los triángulos son rectángulos.
2.- $\widehat{CFD} = \widehat{FCA}$	Por ser ángulos alternos internos en las rectas paralelas $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$.
3.- $\widehat{DCF} = \widehat{CBA}$	Por ser alternos internos en las rectas paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
4.- $\therefore \Delta ABC \sim \Delta DFC$	Por el criterio A.A.A.

b) Como sabemos que el $\Delta ACB \sim \Delta CDF$, tenemos que: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CF}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{DF}}$

sustituyendo valores en la relación anterior se tiene:

$$\frac{2.4}{.30} = \frac{3}{\overline{CF}} = \frac{1.8}{\overline{DF}}$$

de donde: $\frac{2.4}{.30} = \frac{3}{\overline{CF}}$

$\therefore \overline{CF} = .375\ m$ o lo que es lo mismo $\overline{CF} = 37.5\ cm$.

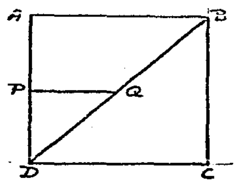
Análogamente se determina $\overline{GB}$.

Ficha VII-5

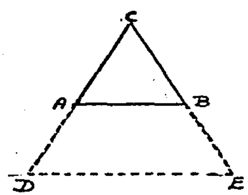
1) Demuestra en el problema anterior que $\triangle GEB \sim \triangle BAC$.

2) Comprueba en el problema anterior que $\overline{CB} = 3\ m$.

3.- En la siguiente figura ABCD es un cuadrado, donde $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{DB} = 14.1\ cm$ y $\overline{DP} = 3 cm$. Calcula la longitud del segmento $\overline{DQ}$.



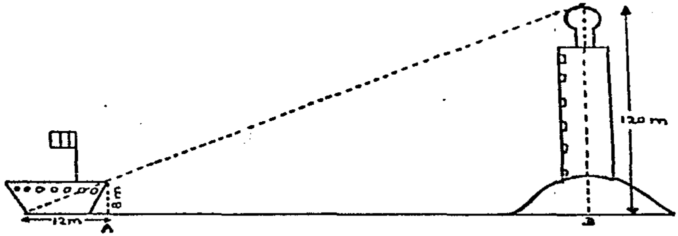
4.- Demuestra el siguiente teorema:



Hipótesis: $\triangle ABC \sim \triangle CDE$

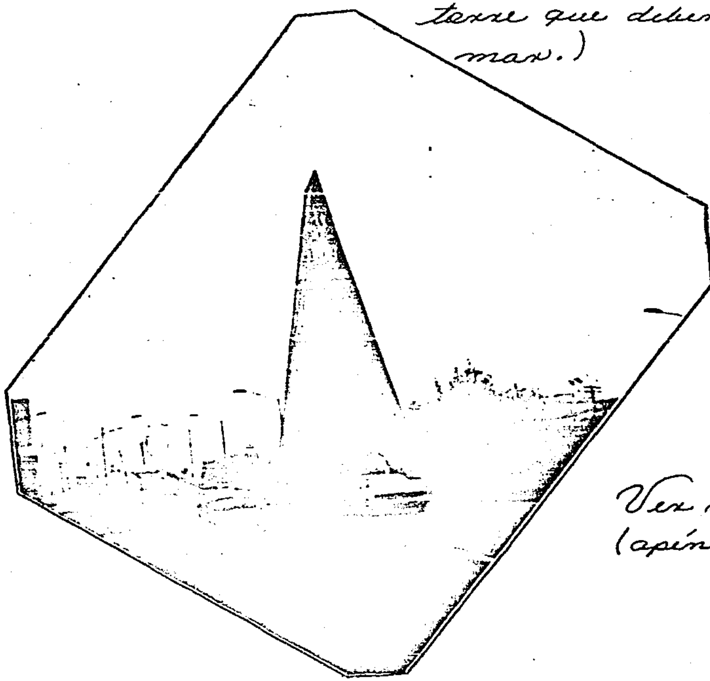
Tesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

5.- Para calcular la distancia de un barco al faro de un puerto se tienen los siguientes datos:



Calcula $\overline{AB}$ = distancia del barco al puerto.

6.- En la ciudad de México en el conjunto Nonoalco Tlatelolco existe una torre como se muestra en la siguiente fotografía; utilizando la figura a escala que se encuentra en la siguiente hoja, calcula la altura real de la torre. (Necesitarás una medida directa de la torre que deberás ir a tomar.)



Ver solución (apéndice VII-4)

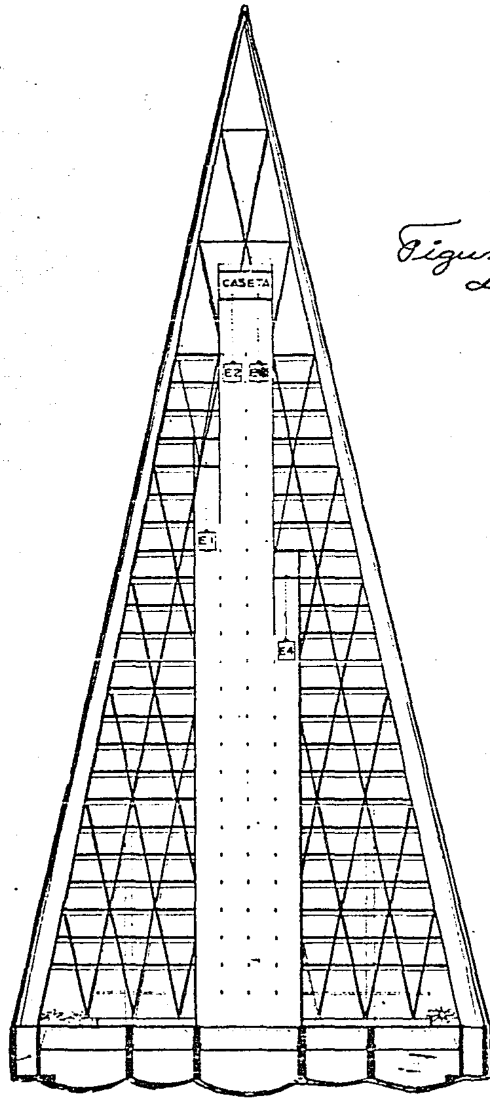


Figura a escala
del edificio.

Teorema de Pitágoras

Este teorema es uno de los mas importantes en la Geometría Euclideana, ha llamado la atención de grandes matemáticos y a la fecha existen mas de 300 demostraciones diferentes

Taller III-6

Objetivo del Taller.- que el alumno enuncie correctamente el teorema de Pitágoras.

Material Necesario.- una base de cartón o material equivalente, papel lustre azúl, rojo y verde, regla graduada y pegamento.

Pasos a Seguir:

1.- En tu base construye en el centro un triángulo rectángulo en B cuyos catetos midan $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm y la hipotenusa $\overline{AC} = 5$ cm.

2.- Construye tres cuadrados como se indica a continuación:

a) En papel lustre azul, uno de 3cm de lado.

b) En papel lustre rojo, uno de 5cm de lado.

c) En papel lustre verde uno de 4 cm de lado.

3.- Encuentra las areas de los cuadrados azul verde y rojo.

4.- Suma las áreas de los cuadrados azúl y verde.

¿ Que observas ?

5.- Pega cada uno de estos cuadrados en los lados correspondientes en tu triángulo ABC rectángulo (esto es en los la_ dos donde coinciden las medidas).

¿Cómo enunciarías después de haber llevado a cabo el taller anterior el Teorema de Pitágoras?.

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es igual a el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Como ya hemos mencionado, existen diversas demostraciones de este Teorema, con el siguiente taller harás tu propia demostración.

Taller VIII-7

Objetivo del Taller.- que el alumno muestre el teorema de Pitágoras.

Material Necesario.- mismo que en el taller anterior.

Pasos a Seguir

1.- Construye nuevamente cuadrados (verde, rojo y azúl) como en el taller anterior

2.- Recortando, doblando o como quieras trata de hacer notar que los cuadrados azul y verde se acomodan perfectamente en el cuadrado rojo.

¿De que otras maneras podrías mostrar la veracidad del Teorema de Pitágoras?.

Haremos ahora la demostración de este teorema utilizando todo lo que hasta aquí hemos estudiado.

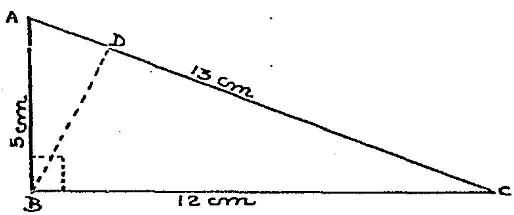
Taller VII-8

Objetivo del Taller.- que el alumno obtenga un resultado importante de semejanza en triángulos rectángulos, para poder demostrar posteriormente el Teorema de Pitágoras.

Material Necesario.- mismo que en el taller anterior.

Pasos a Seguir

1.- En tu base dibuja el triángulo ABC rectángulo en B, y marca la altura $\overline{BD}$ como se muestra en la figura.



2. En papel lustre rojo dibuja y recorta el $\triangle ABC$.
3.- En papel lustre verde dibuja y recorta el $\triangle ABD$.
4.- En papel lustre azúl dibuja y recorta el $\triangle BDC$.

¿ Qué puedes decir acerca de estos tres triángulos ?.

5.- Con tu transportador obtén la medida de los ángulos de estos tres triángulos y anótalos en cada uno de ellos.

6.- También anota estas medidas en el triángulo que dibujaste en el papel cartoncillo.

7.- Con tu regla mide los lados de los tres triángulos y anótalas en ellos.

8.- También anota estas medidas en el triángulo de tu base.

9.- Pega los tres triángulos debajo de los triángulos de tu base.

De lo hecho hasta aquí podemos afirmar que los triángulos verde, rojo y azúl son semejantes por lo que se cumple que:

$\Delta\ ABC \sim \Delta\ ABD$ (rojo semejante con verde)

teniéndose que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$

$\Delta\ ABC \sim \Delta\ ACD$ (rojo semejante con azúl)

Teniéndose que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$

$\Delta\ ABD \sim \Delta\ ACD$ (verde semejante con azúl)

Teniéndose que: $\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

(Ver taller apéndice VII- 5)

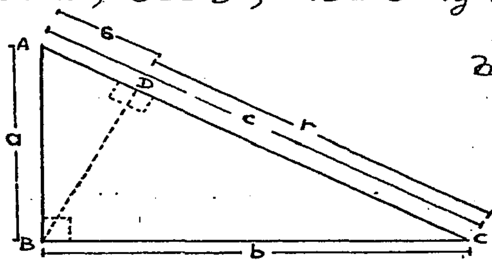
10.- Sustituye los valores obtenidos en 7 para comprobar estos resultados.

Del taller anterior concluimos que:

En todo triángulo rectángulo, al trazar su altura correspondiente, se forman tres triángulos semejantes entre sí.

Demostración del Teorema de Pitágoras

Para la demostración, trazaremos la altura $\overline{BD}$ del triángulo ABC rectángulo en B y por el resultado anterior sabemos que los tres triángulos que resultan son semejantes. Por comodidad para la demostración denotaremos a $\overline{AC} = c$, $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{AD} = s$ y $\overline{DC} = r$.



Hipótesis : Δ ABC, rectángulo en B ; $\overline{DB}$ altura

Tésis : $c^2 = a^2 + b^2$

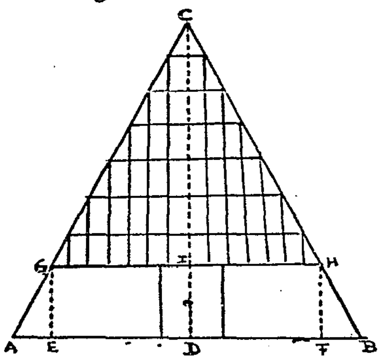
Demostración

Afirmaciones	Razones
1.- $\Delta ABD \sim \Delta BDC$	Por ser DB altura del Δ ABC
2.- $\Delta ABD \sim \Delta ABC$	" " " " " "
3.- $\Delta BDC \sim \Delta ABC$	" " " " " "
4.- $\frac{c}{a} = \frac{a}{s}$ y $\frac{c}{b} = \frac{b}{r}$	Porque los triángulos son semejantes y por lo tanto sus lados son proporcionales
5.- $a^2 = cs$ y $b^2 = cr$	Por el paso ② y propiedad de las proporciones.
6.- $a^2 + b^2 = c(s+r)$	Sumando las igualdades anteriores.
7.- $s + r = c$	Por construcción
8.- $\therefore a^2 + b^2 = c^2$	Sustituyendo 5 en 4.

El teorema de pitágoras es muy importante por sus múltiples aplicaciones en la solución de problemas de los cuales a continuación re-solveremos algunos.

Problemas

1.- Considera el siguiente edificio:



En donde conocemos la siguiente información:

$\overline{AB} = 22m$, $\overline{GE} = 2m$, $\overline{AE} = \overline{BF} = 1.5m$ y $\overline{GH} \parallel \overline{AB}$. Se desea saber:

a) $\overline{AG}$ y $\overline{BH}$

b) $\overline{CG}$ y $\overline{CH}$

c) $\overline{DC}$ (altura del edificio)

a) Si consideramos el ΔAGE rectángulo en E, y con

la información que se proporciona, tenemos los catetos $\overline{AE} = 1.5m$ y $\overline{GE} = 2m$, y se desconoce la hipotenusa $\overline{AG}$ la que encontraremos utilizando el Teorema de Pitágoras como sigue:

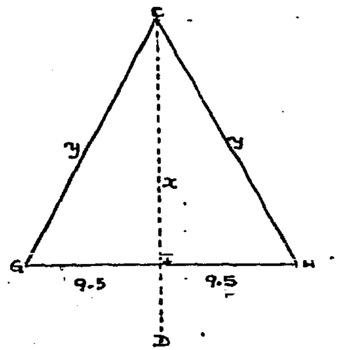
$$a^2+b^2=c^2$$
$$(1.5)^2+(2)^2=x^2$$

de donde :

$$2.25 + 4 = x^2$$
$$x^2 = 2.25 + 4$$
$$x^2 = 6.25$$
$$x = \sqrt{6.25}$$
$$x = 2.5$$
$$\therefore \overline{AG} = 2.5$$

de igual manera encontramos la longitud de $\overline{HB}$.

b) Para obtener $\overline{CG}$ y $\overline{CH}$ consideramos el siguiente triángulo con la información:



del que podemos decir que :

como $\overline{CD} \perp GH$, entonces ΔCGH es isósceles y $\overline{CD}$ es mediatríz de $\overline{GH}$; además $\Delta ACD \sim \Delta GCI$ por teorema III-1 y como nos interesa encontrar el valor y, para encontrarlo resolveremos la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{CA}} = \frac{GI}{AD} \quad \text{o sea} \quad \frac{y}{y + 2.5} = \frac{9.5}{11}$$

de donde : $11y = 9.5\,(y + 2.5)$

$$11y = 9.5y + 23.75$$
$$11y - 9.5y = 23.75$$

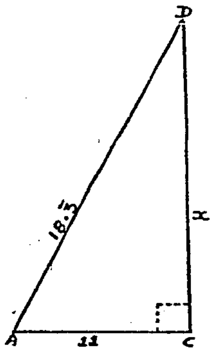
$1.5\,y = 23.75$

$y = \frac{23.75}{1.5} = 15.83$ aproximadamente

$\therefore\ \overline{CG} = 15.83$ m.

De igual manera se obtiene $\overline{CH}$

c) Para calcular la altura $\overline{DC}$ del edificio, en el triángulo rectángulo ACD tenemos ya los siguientes valores:



Utilicemos el Teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

$(11)^2 + b^2 = (18.\overline{3})^2$

$b^2 = (18.\overline{3})^2 - (11)^2$

$b^2 = 334.89 - 121$

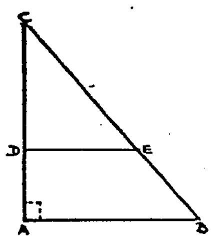
$b^2 = 213.89$

$b = \sqrt{213.89}$

$b = 14.6$ aprox.

$\therefore\ \overline{DC} = 14.\overline{6}$ m aproximadamente.

2.- ABC es un triángulo rectángulo en A, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AC} = 4$ cm., $\overline{CB} = 5$ cm, $\overline{DE} = 2$ cm, encuentra la longitud del segmento $\overline{CE}$.



Encontremos primeramente la medida del segmento $\overline{AB}$:

$\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{CB}^2$

de donde: $(4)^2 + \overline{AB}^2 = (5)^2$

$16 + \overline{AB}^2 = 25$

$\overline{AB}^2 = 25 - 16 = 9$

$\overline{AB} = \sqrt{9} = 3$

Por el teorema VII-1 $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ por lo que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}}$$

de donde: $\frac{3}{2} = \frac{5}{\overline{CE}}$

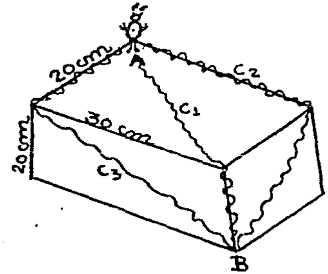
$$3\overline{CE} = 10$$

$$\overline{CE} = \frac{10}{3} = 3.\overline{3}$$

$\therefore$ $\overline{CE} = 3.\overline{3}$ cm aproximadamente.

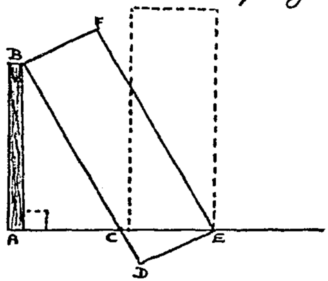
Ficha VII-6

1.- Junto a la carretera hay un adoquín de granito de 30 cm de longitud, 20 cm de altura y 20 cm de ancho. En el punto A de dicho adoquín hay un escarabajo que quiere ir por el camino mas corto al punto B.



En la figura se señalan tres caminos posibles para llegar del punto A al punto B. Encuentra las distancias recorridas en C_1, C_2 y C_3 para así poder saber cual es el camino más corto. ¿O se te ocurre otro más corto?

2.- Una construcción histórica de forma rectangular ha sufrido cierta inclinación como se muestra en la figura:



Para no perderla se pretende colocar una barra de hierro $\overline{AB}$ como se indica en la figura. si conocemos que su altura $\overline{BD} = 12$ m, que el ancho $\overline{DE} = 3.2$ m y que la distancia $\overline{CD} = 1.5$ m (lo que se ha sumergido). Calcula la medida que debe tener la barra de hierro.

Taller VII-9

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca que el Teorema de Pitágoras sólo es válido en un triángulo rectángulo.

Material Necesario.- regla, transportador plumones y papel

Pasos a Seguir

1.- En tu papel lustre dibuja:

a) Un triángulo rectángulo escaleno.

b) Un triángulo obtusángulo escaleno.

c) Un triángulo acutángulo escaleno.

2.- Toma las medidas de cada uno de los lados y ángulos de los tres triángulos y y anótalas en ellos.

3.- Calcula a^2, b^2, c^2 para los tres triángulos y observa que pasa con a^2+b^2 en cada uno de ellos.

¿ Cómo son con respecto a c^2?

Polígonos Semejantes

Dos polígonos con el mismo número de lados son semejantes, si y solo si sus lados correspondientes son proporcionales así como sus ángulos correspondientes iguales.

La correspondencia aquí mencionada es biunívoca y es de tal forma que a cada par de lados consecutivos, en un polígono y el ángulo entre ellos corresponde un par de lados consecutivos y el ángulo incluido entre ellos en el otro.

Por último, después de estudiar todos estos temas, creemos que estas posibilitado para que dado un argumento geométrico que aparentemente es correcto, encuentres el o los errores en dicho argumento.

Algunos Sofismas Geométricos

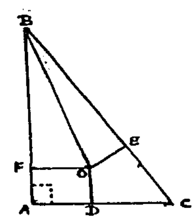
Ahora "demostraremos" algunas afirmaciones que evidentemente son falsas utilizando razonamientos muy similares a los usados en las clases de matemáticas. Debe quedar claro que en cada "demostración" de este tipo se construye esencialmente debido que a lo largo de los razonamientos se comete un error deliberado con base en el cual aparece el sofisma.

El razonamiento mediante el cual un resultado falso es demostrado, gracias al uso de conclusiones cuya falsedad concientemente se enmascara, se le llama sofisma.

Se pueden generar sofismas en cualquier rama del saber o del decir, en particular en la matemática, incluso en problemas geométricos, aquí algunos ejemplos:

Problema 1

"El cateto de un triángulo rectángulo es igual a su hipotenusa".



Demostración

Sean:

ΔABC un triángulo rectángulo

$\overline{BO}$ bisectriz del ángulo $\hat{B}$

D punto medio del cateto $\overline{AC}$

$\overline{OD} \perp \overline{AC}$

$\overline{OE} \perp \overline{BC}$

$\overline{OF} \perp \overline{AB}$

Dado que O está en la bisectriz del angulo $\hat{B}$, entonces: $\Delta BFO = \Delta BEO$

ya que tienen la misma hipotenusa $\overline{BO}$ y el mismo ángulo agudo $\frac{1}{2}\hat{B}$ y consecuentemente

$$\overline{BF} = \overline{BE} \quad ---- (1)$$

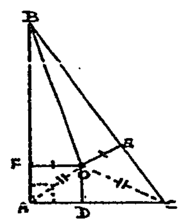
Además, puesto que cada punto de la perpendicular al segmento $\overline{AC}$ que pasa por el punto medio de $\overline{AC}$ es equidistante tanto de A como de C consecuentemente dado que O es un punto de tal perpendicular tendremos:

$$\overline{OA} = \overline{OC}$$

como $\overline{OF} = \overline{OE}$

entonces $\Delta AOF = \Delta COE$

$$\therefore \quad \overline{AF} = \overline{CE} \quad --- (2)$$



Sumando las igualdades (1) y (2) miembro a miembro obtenemos:

$$\overline{AF} + \overline{FB} = \overline{BE} + \overline{CE}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

es decir efectivamente el cateto es igual a la hipotenusa.

¿Dónde está el error?

Diremos para empezar que el error no está en el razonamiento seguido; esto es las propiedades de bisectriz y mediatriz son ciertas y estan bien usadas. (O está en la intersección de ambas)

El error está en dos cosas, a saber:

a) La forma de hacer el dibujo ya que en el caso de un triángulo rectángulo no isósceles el punto O va a quedar fuera del triángulo pero nunca dentro de éste.

b) Suponer que los puntos E y F estén ambos dentro del triángulo

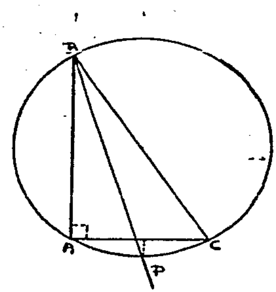
Demostremos ahora que las afirmaciones anteriores son ciertas:

a) Par demostrar que en un triángulo rectángulo escaleno la intersección de la bisectriz y la mediatriz está fuera del triángulo.

Si demostramos que O está en la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$ entonces O no podría estar dentro del triángulo.

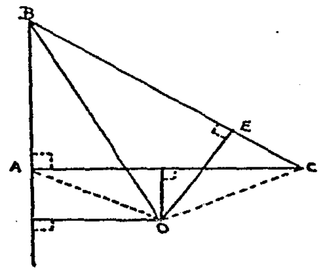
Consideremos entonces la circunferencia que pasa por A, B y C;

Sea P la intersección de la bisectriz de $\hat{B}$ y esa circunferencia,



como $\measuredangle ABP = \measuredangle PBC$ entonces $\overline{AP} = \overline{PC}$ por ser las cuerdas que subtienden estos ángulos. Pero si $\overline{AP} = \overline{PC}$ entonces P esta en la mediatriz de $\overline{AC}$. Por lo tanto P coincide con O.

b) Par demostrar que E y F no pueden estar simultaneamente dentro y fuera del triángulo



Si demostramos que $\measuredangle BAO$ es obtuso por un lado y que el $\measuredangle BCO$ es agudo por otro, habremos terminado; pues $\overline{OF}$ sería la altura del $\triangle BAO$ y $\overline{OE}$ la del $\triangle BCO$ y por propiedades de las alturas (ver apéndice V - 13) la primera estará fuera y la segunda dentro del triángulo.

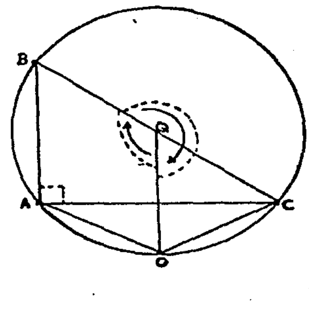
Pero $\measuredangle BAO$ es obtuso ya que vimos que O está fuera del triángulo.

Por otro lado si consideramos la circunferencia que pasa por A, B, C y O tendremos:

Q centro de la circunferencia

$\measuredangle BAO = \frac{1}{2} \measuredangle BQO$

$\measuredangle BCO = \frac{1}{2} \measuredangle BQO$



por lo que:

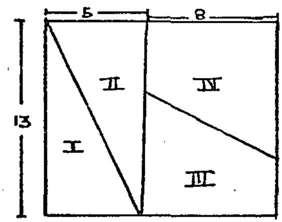
$\measuredangle BAO + \measuredangle BCO = 180°$

$\therefore \measuredangle BCO$ es agudo

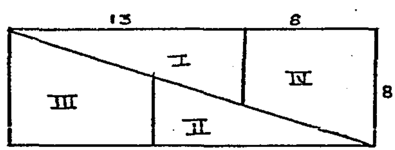
Problema 2

"$169 = 168$"

Realizar el siguiente experimento: De un cartón recorta 4 figuras planas, dos de ellas triángulos rectángulos iguales con catetos que midan 13 cm y 5 cm, las otras dos figuras recórtalas como trapecios rectangulares cuyas bases midan 8 y 5 cm respectivamente y 8 cm de altura. Con estas 4 figuras podemos formar un cuadrado:



pero también podemos formar un rectángulo:



Es fácil calcular las áreas respectivas ($A = b.h$) obteniéndose que:

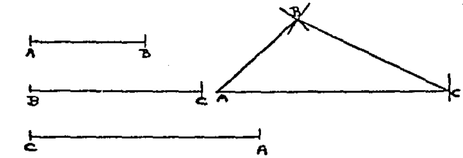
$$168 = 169$$

¿Dónde está el error?

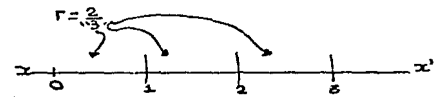
(Ver respuesta apéndice III-6)

Apéndice III - 1

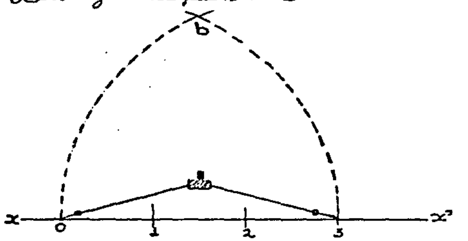
Construir un triángulo con 3 segmentos cualesquiera



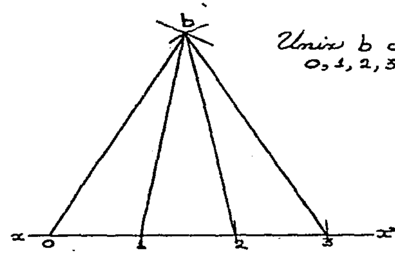
Trazar la recta $\overline{xx'}$ y tomar tres partes iguales.



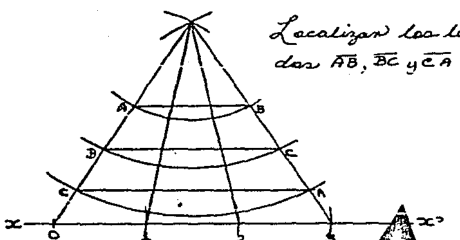
Localizar el punto b



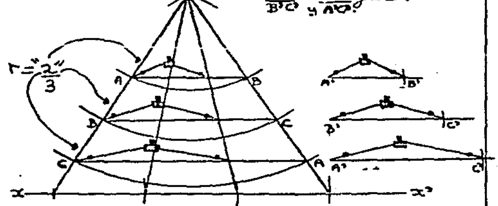
Unir b con 0, 1, 2, 3



Localizar los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$



Obtener los lados homólogos: $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{A'C'}$.

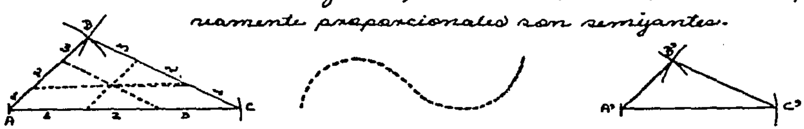


Jala y verifica

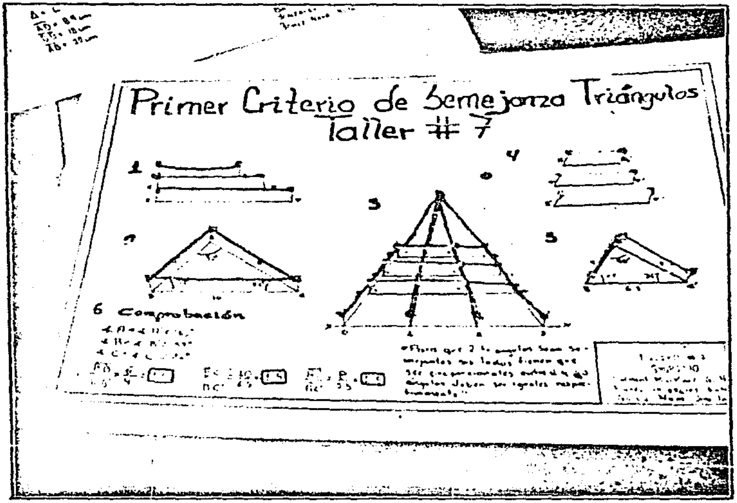
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

"L. L. L"

Dos triángulos que tienen sus tres lados respectivamente proporcionales son semejantes.



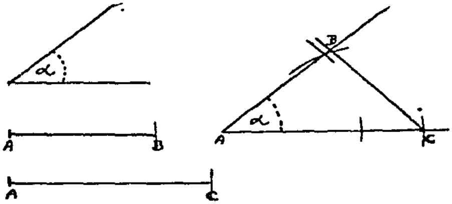
Así presentan los alumnos su taller.



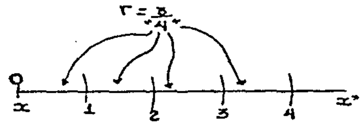
Taller acerca del primer criterio de semejanza presentado en la exposición "El Alumno en las Matemáticas" por alumnos de uno de los grupos participantes.

Apéndice VI - 2

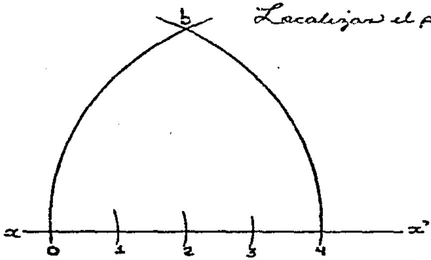
Construir un triángulo ABC, con 2 lados y un ángulo comprendido entre ellos.



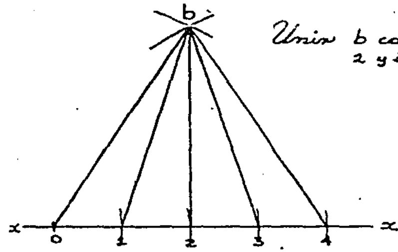
Trazar la recta $\overline{xx'}$ y tomar 4 partes iguales



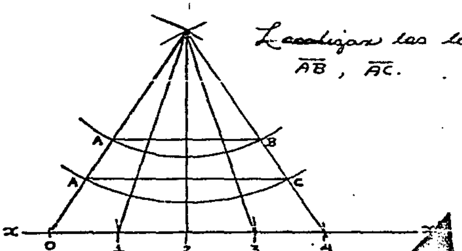
Localizar el punto b



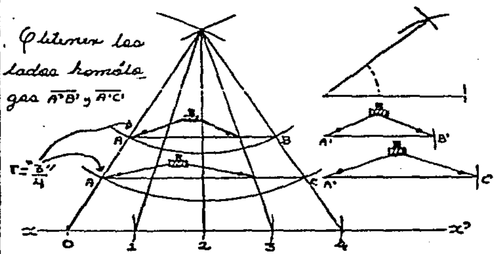
Unir b con 0, 1, 2 y 3.



Localizar los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

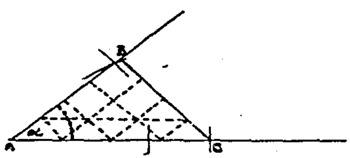


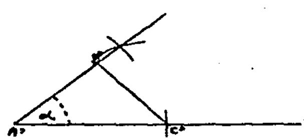
Obtener los lados homólogos $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$



Toma y verifica que:

$\Delta\ ABC \sim \Delta A'B'C'$



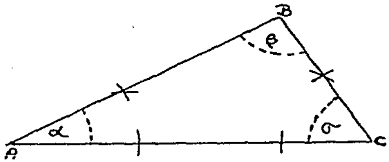


"L.A.L"

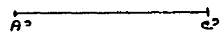
Dos triángulos que tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual son semejantes.

Apéndice VI - 3

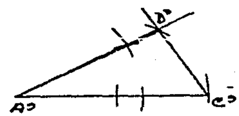
Trazar un triángulo ABC con regla y compás



Trazar el segmento $\overline{A'C'} \neq \overline{AC}$



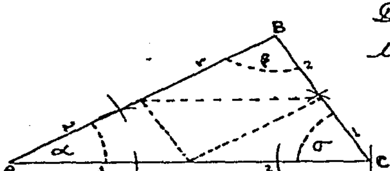
Transportar $\hat{A}$ a A'
Transportar $\hat{C}$ a C'
y prolongar las rectas para obtener B'.

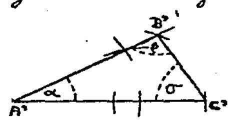


Jala y verifica:
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

"A.A.A"

Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales son semejantes.





Apéndice VI-4

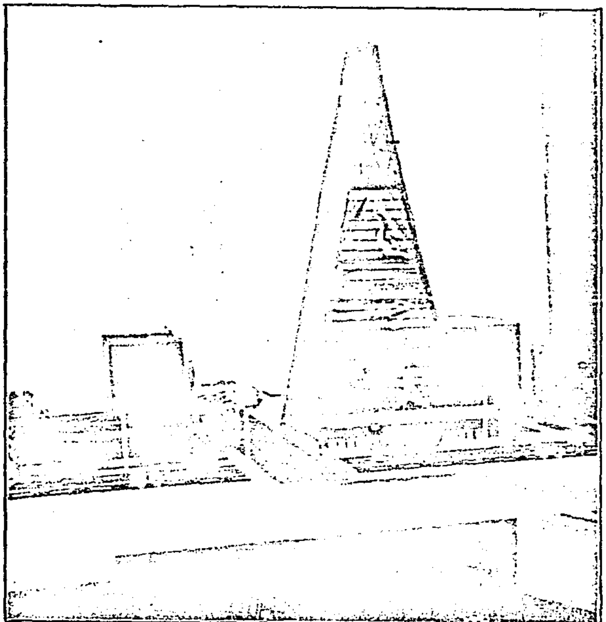
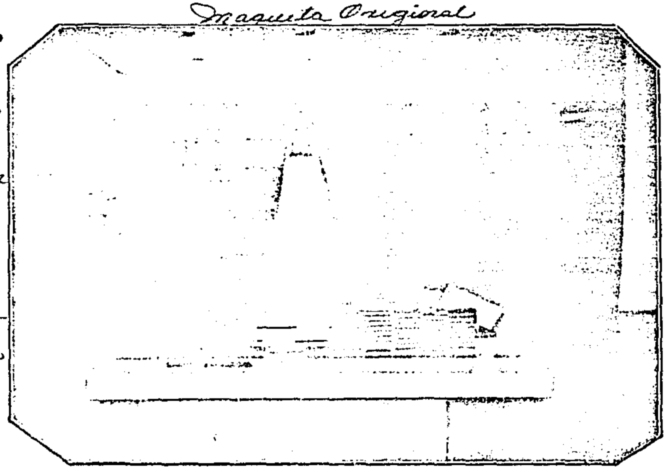


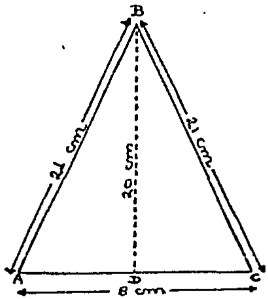
fig 1

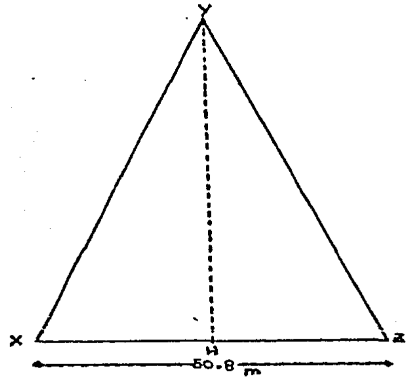
Antes de dar la solución al problema quisiera mencionar que para encontrar ésta los alumnos tuvieron que ir directamente al edificio a tomar la medida de la base, lo cual no fue fácil ya que tuvieron el riesgo de ir a parar a la cárcel; no obstante las dificultades lograron su objetivo y un poco más ya que un ingeniero que ahí se encontraba les explicó mas en detalle acerca de la construcción del edificio. De esta forma dieron una buena representación simbólica del problema elaborando una maqueta la cual fue presentada en la exposición "El Alumno en las Matemáticas". (fig 1)

Maqueta Original



Solución al Problema





Como el $\triangle ABD \sim \triangle XYH$ entonces:

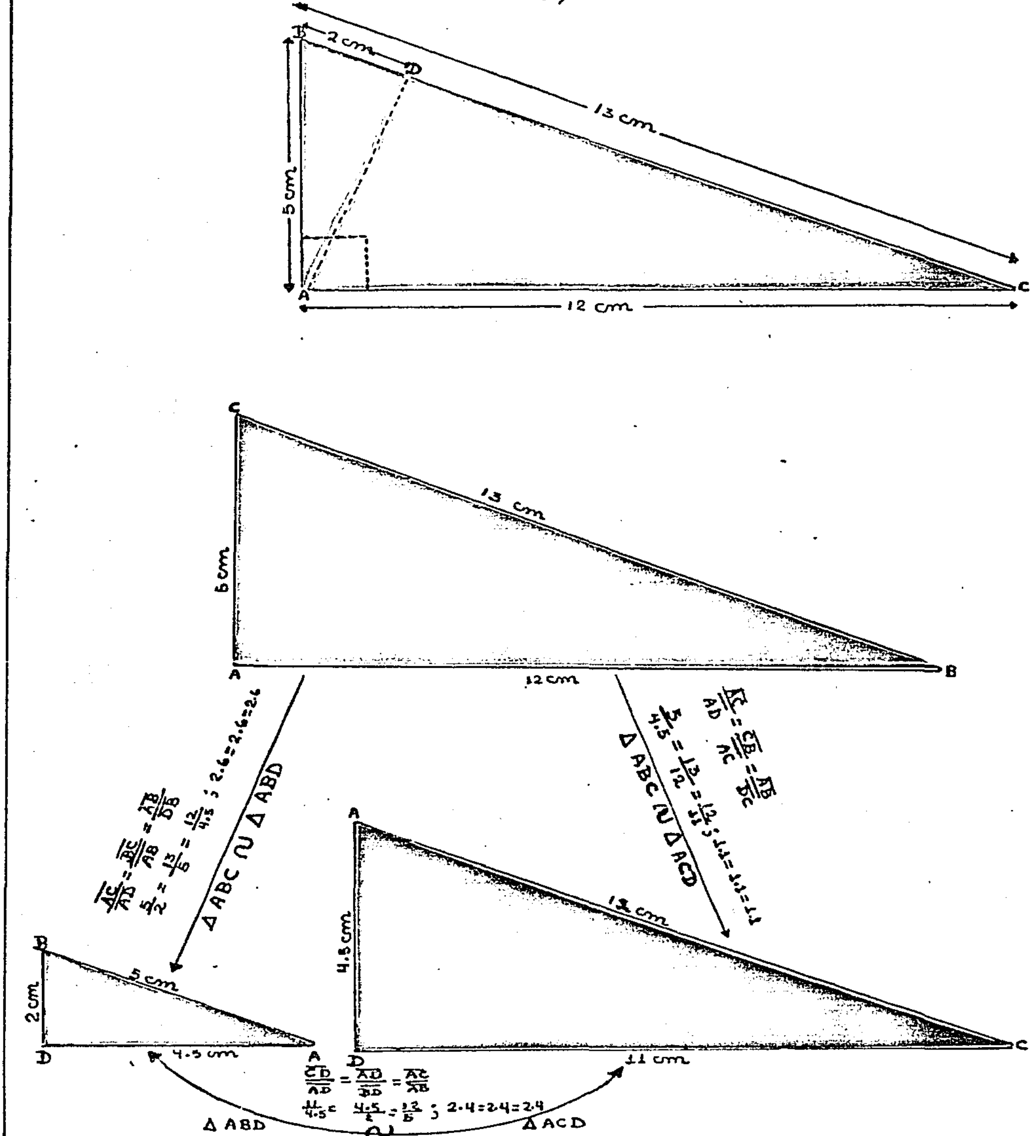
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{XH}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{YH}}$$

de donde: $$\frac{.21}{\overline{XY}} = \underbrace{\frac{.04}{25.4} = \frac{.20}{\overline{YH}}}_{\text{tomemos esta parte}}$$

$$\overline{YH} = \frac{25.4 \times .20}{.04} = 127$$

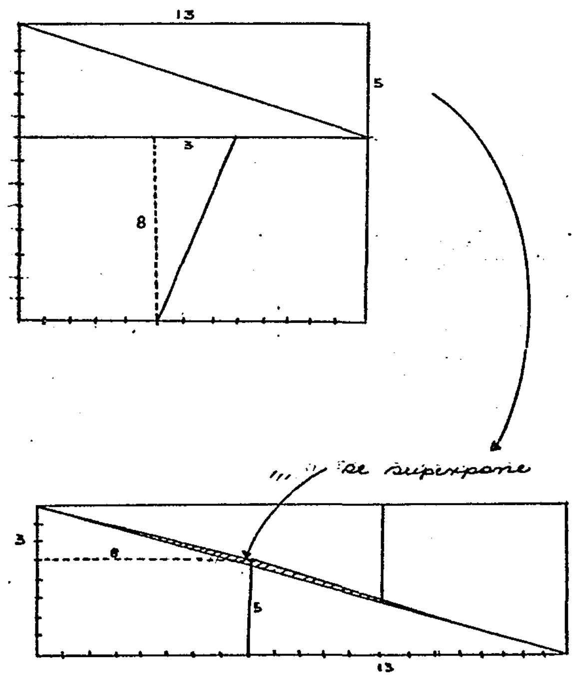
$\therefore$ la altura $\overline{YH}$ del edificio es 127 m aproximadamente.

Apéndice VI-5



Apendice VI - 6

Realmente al llevar a cabo el experimento no se forma el rectángulo de la segunda figura, aunque a primera vista casi sea un rectángulo. En efecto para que la figura formada fuera rectangular todas las partes de la diagonal no deberian quedar superpuestas al momento de ensamblar las figuras como es el caso.



El área sombreada corresponde a la superposición de las figuras ensambladas.

Algunos Comentarios Sobre el Sistema de Euclides

La importancia de la contribución de Euclides a la Geometría es indiscutible. Durante mas de 2000 años la gente instruida en todos los terrenos ha considerado que su estudio es la mejor manera de adquirir destreza en el razonamiento lógico.

Pero hubiera sido notable que el enorme incremento del conocimiento matemático, desde los tiempos de Euclides, no hubiera revelado fallas y puntos débiles en su trabajo, como así sucedió.

En primer término, en lugar de comenzar con unos pocos conceptos indefinidos, Euclides intentó erroneamente definir cada término que usaba, lo cual lo llevó inevitablemente a algunas definiciones poco satisfactorias, por ejemplo; define los términos punto y recta de la siguiente manera:

Punto es aquello que no tiene partes.

Recta es aquella linea que yace igualmente respecto de todos sus puntos.

Quizá con estas definiciones, lo que Euclides pretendia era crear imágenes al lector.

Sin embargo, mas serio es el hecho de que pese a ser tan cuidadoso, Euclides dió por sentadas y utilizó una cantidad de propiedades que no incluyó entre sus axiomas y que no pueden deducirse de ellos. Hay varios puntos que también deben ser tratados cuidadosamente, pero nuestro interés radicará en el quinto postulado.

El Quinto Postulado

El quinto postulado que es la piedra angular sobre el cual descansa la grandeza de Euclides ha sido la causa de los mas duros ataques a su sistema. (Ver lectura "Bosquejo Histórico" apéndice I - 1)

Los cuatro postulados que lo preceden son proposiciones ciertas y sencillas por lo que no es sorprendente que la naturaleza muy mas compleja de la proposición que constituye el quinto postulado haya hecho pensar más en él como un Teorema que como un postulado. Inclusive Euclides inconcientemente apoya este punto de vista al querer omitir este postulado en algunas demostraciones. Consecuentemente muy pronto se hicieron intentos para subsanar este defecto de Los Elementos.

Geometrias No Euclideanas

Las tentativas de muchos matemáticos para deducir el quinto postulado como consecuencia de los otros se extendieron por muchísimos años, fallando todas ellas. Los trabajos mas notables de los que se tiene conocimiento son: los del jesuita Saccheri a principios del siglo XVII, los del húngaro Bolyai, y del ruso Lobachevsky, así como los del alemán Riemann en el siglo XIX.

Bolyai se dedicó especialmente a distinguir las proposiciones geométricas que necesitan el postulado de Euclides de aquellas que son independientes al mismo, a las que llama propiedades absolutas o absolutamente verdaderas. Lobachevsky construye mas rapidamente la geometría que no es euclideana, al negar de entrada el postulado V y suponer, en cambio, que por un punto exterior a una recta pasa mas de una paralela.

En consecuencia podemos decir que existen otras dos clases de geometrias igualmente verdaderas: la elíptica y la hiperbólica llamadas "Geometrias no Euclidianas" en las cuales se preservan los otros cuatro postulados de la metría Euclideana.

Geometría Elíptica.. (De Riemann)

La geometría elíptica es la que resulta de sustituir el postulado de las paralelas por el siguiente:

- Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela.

Este postulado niega la existencia de las rectas paralelas.

Geometría Hiperbólica (De Lobachevsky)

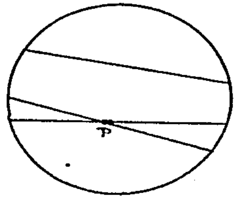
En esta geometría el quinto postulado se sustituye por el siguiente:

- Por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas.

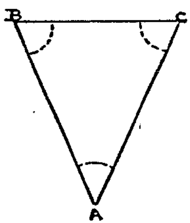
Este postulado afirma que por un punto fuera de una recta dada existe una paralela, pero que no es única.

Para ilustrar este postulado, un dibujo nos ayudaría mucho, ya que estamos acostumbrados a trabajar en el plano euclideano.

Sin embargo, suponiendo que el plano fuera el interior de una circunferencia, observamos que para una recta existe mas de una paralela ¿ Por que ?.

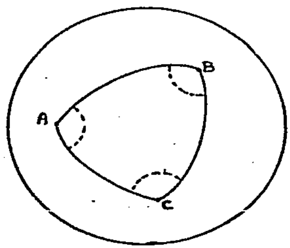


Ambas geometrías se desarrollaron siguiendo un camino análogo a Los Elementos llegando a muchos resultados interesantes. Como por ejemplo en la suma de los ángulos interiores de un triángulo podemos hacer la diferencia siguiente:



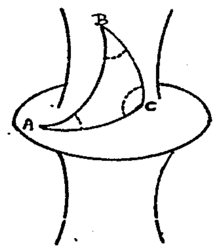
Euclidiana

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$



Elíptica

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180°$



Hiperbólica

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180°$

Unidad II

Geometría Analítica

Tema I

Reseña Histórica

Tema I
Bosquejo Histórico

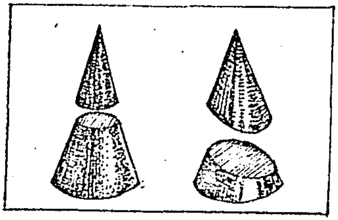
Descartes ha sido llamado el padre de la geometría analítica pero esta interpretación es "historicamente poco adecuada" porque esta rama de la geometría no surgió interamente de Descartes, sino que también Fermat fue un gran aportador de metodología para la geometría analítica.

La geometría analítica que ellos desarrollaron reemplazaba curvas por ecuaciones mediante el artificio de un sistema coordenado.

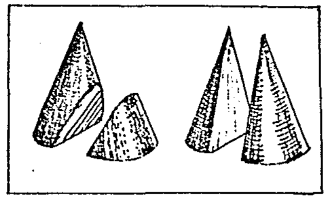
Entre otros predecesores de Descartes debe contarse el teólogo francés Nicolé Olesme con su sistema de "Latitudes y Longitudes" definido aproximadamente como "el uso de coordenadas en la representación gráfica de funciones arbitrarias".

Así como Francois Viete consejero del rey de Francia en el siglo XVI, cuyas reformas en la notación facilitaron sustancialmente el desarrollo del algebra en problemas geométricos, quien con mayor razón podría reclamarle a Descartes el título de "descubridor de la geometría analítica".

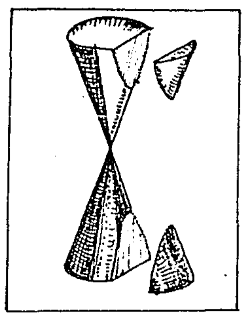
La geometría y el algebra fueron relacionadas mediante el descubrimiento de la geometría analítica como por ejemplo las tres primeras figuras muestran las curvas (elipse, parábola e hipérbola), que pueden obtenerse cortando un cono por un plano, las tres siguientes figuras nos representan las mismas curvas como imágenes gráficas de ecuaciónes algebráicas y la última figura representa la gráfica de una ecuación en la que la variable aparece elevada al cubo (en las anteriores aparecen solo los cuadrados de las variables.



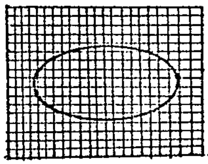
círculo , elipse



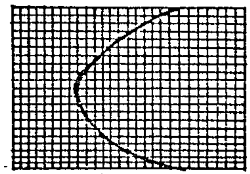
parábola



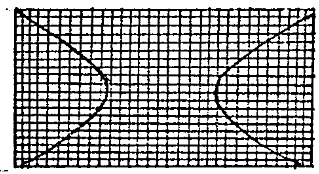
hipérbola



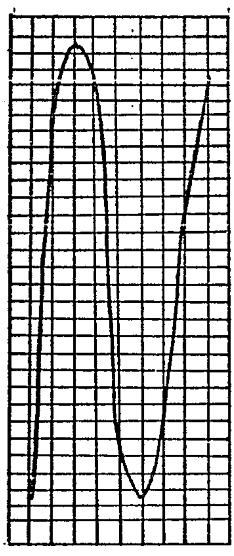
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$y^2 = 2px$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$y = ax^3 + bx$$

Para que nos quede mas claro lo anterior llevaremos a cabo el siguiente taller

Taller I-1

Objetivo del Taller.- obtener las cónicas circulo, parábola, elipse e hipérbola mediante cortes en diversas posiciones de un cono como lo propuso Apolonio.

Material Necesario.- cinco conos de papel o carton, plastilina de cuatro colores, navaja, cuchillo o lámina delgada para cortar, 1 base, alfileres de cabeza de colores y un palo de paleta.

Pasos a Seguir

1.- Llena dos conos de plastilina de un solo color y los restantes con diferentes colores.

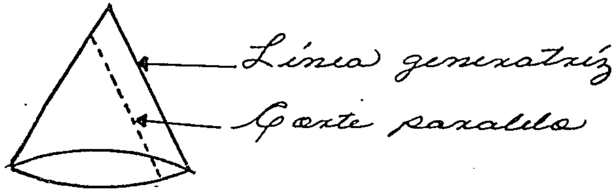
2.- Toma uno de los conos anteriores y quitale la superficie de papel.

3.- Haz un corte paralelo a la base del cono de plastilina y desprende la parte superior de este.

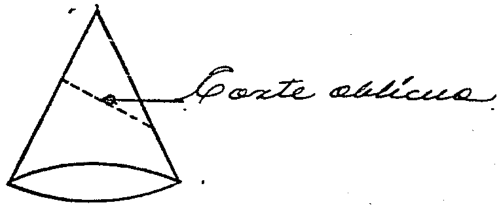
¿Qué figura geométrica quedó formada al hacer el corte?.

4.- Incerta alfileres en el contorno de la figura geométrica anterior.

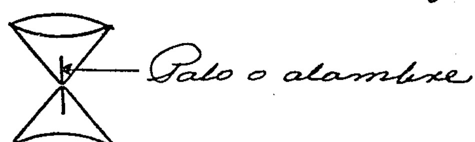
5.- Toma otro cono quítale la superficie de papel y realiza un corte paralelo a una línea generatríz del cono



6.- Separa las partes
7.- ¿Qué figura geométrica se forma al hacer el corte?
8.- Incerta alfileres en el contorno de la figura geométrica anterior.
9.- Toma otro cono quítale la superficie de papel y realiza un corte oblicuo



10.- Separa las partes
11.- ¿Qué figura geométrica se obtiene al hacer el corte anterior?
12.- Incerta alfileres en el contorno de la figura geométrica formada.
13.- Ahora toma los 2 conos de plastilina del mismo color y únelos a través de sus vértices con el palo o alambre de tal forma que se sostenga



14.- Quítale la superficie de papel

15.- Haz un corte vertical a ambos conos.

16.- Separa las partes

17.- ¿ Qué figura geométrica se forma tanto en el cono superior como en el inferior ?

18.- Inserta alfileres en el contorno de la figura formada anteriormente.

A esta figura geométrica se le llama hipérbola.

Las propiedades de estas figuras geométricas las iremos obteniendo a medida que vayamos avanzando en el curso.

Geometría Analítica

Introducción

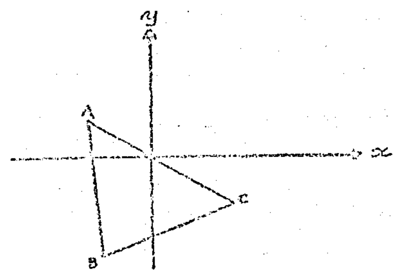
Ahora pasamos al estudio de la geometría analítica, y para iniciar este estudio rigurosamente, vamos a ubicarla a partir de dos conceptos:

1.- Cómo se relaciona con el área anterior.

2.- Cuál es su objetivo general.

1.- En geometría euclidiana conocimos algunas figuras y sus propiedades, como por ejemplo: En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.

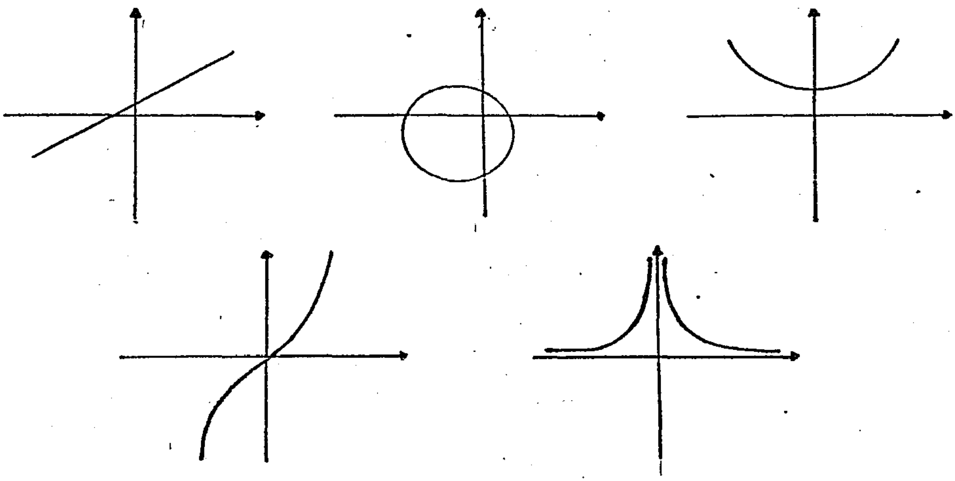
Además hicimos demostraciones teóricas en toda una axiomatización, utilizando de hecho los métodos Inductivo y Deductivo. Ahora lo que haremos será ubicar estas figuras en un plano de coordenadas, esto es, estudiaremos el ΔABC, pero indicando las coordenadas de sus vértices.



También estudiaremos rectas, círculos, parábolas etc. En general cualquier figura plana a la cual asociaremos

"Lugar Geométrico" o "Región".

Ejemplos de lugares geométricos



De estos lugares geométricos o regiones estudiaremos también sus propiedades aplicándolas a problemas. Analizaremos estas propiedades utilizando algebra y nuestros conocimientos de geometría euclidiana.

2.- El objetivo general de geometría analítica se pretende alcanzar a su vez en dos objetivos intermedios :

1º Dada una ecuación localizar el lugar geométrico que representa.

2º Dada una figura o lugar geométrico determinar la ecuación que la representa.

Ficha No. 1

Indaga la definición de:

— Lugar Geométrico
— Geometría Analítica

Taller 1

Objetivo del Taller.- que el alumno identifique la definición de mediatriz como un lugar geométrico

Material Requerido.- cartoncillo, tachuelas estambre y plumón.

Pasos a Seguir

1.- En tu cartoncillo con tu plumón traza un segmento de recta $\overline{AB}$.

2.- Coloca en el punto A y B respectivamente una tachuela.

3.- Traza la mediatriz de tu segmento $\overline{AB}$

Nota: a la mediatriz de $\overline{AB}$ le llamaremos $\overline{PQ}$.

4.- Cubre la mediatriz $\overline{PQ}$ con tachuelas en forma sucesiva y enuméralas (1, 2, 3, ...,).

5.- Toma un trozo de estambre y fíjalo a la tachuela 1 y toma la distancia a los extremos A y B.

¿Qué observas?

6.- Haz lo mismo para las tachuelas 2, 3 4, ...,).

7.- Si definimos a la mediatriz como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento ¿ Podríamos decir que el conjunto de tachuelas es un "lugar geométrico" o "región" ?.

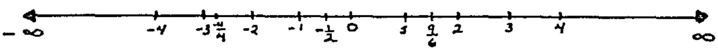
8.- ¿ Por qué ?

El Plano de Coordenadas o Plano Cartesiano

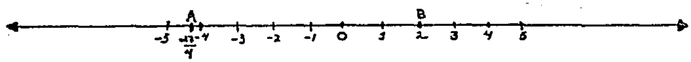
Un plano de coordenadas, como recordarás, está compuesto por dos rectas numéricas perpendiculares y cuyo punto de intersección es el cero. Antes de familiarizarnos más con el plano, recordemos que es la recta numérica.

Recta Numérica

Una recta numérica es:



la que se puede definir como un conjunto de puntos en donde a cada punto le correspon- de un número real y a cada número real le corresponde un punto de la recta, esto es; por ejemplo al número $-\frac{17}{4}$ le corresponde en la recta el punto A.



y al punto B de la recta le corresponde el número real 2.

Ficha No. 2

1.- ¿ Qué números conoces ?.
2.- ¿ Qué números te sirven para contar?.
3.- ¿ Cómo se llaman los números que te sirven para contar ?.
4.- ¿ Qué otros conjuntos numéricos conoces?
5.- ¿ De que otra manera se puede expresar un número de la forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$?.
(como por ejemplo $\frac{3}{5}$ que otra represen-

tación tiene?)

6.- Calcula:

$\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{4}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$.

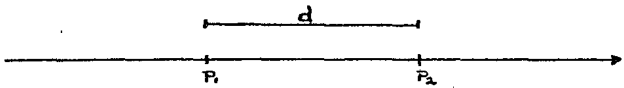
7.- Define el conjunto de los números reales.

8.- Localiza los siguientes números reales en la recta numérica.

$-\frac{2}{4}$, -1, $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{9}$, $\sqrt{4}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{0}{3}$, $-\frac{19}{7}$, $\frac{3}{0}$, $-\frac{7}{1}$

Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^1$

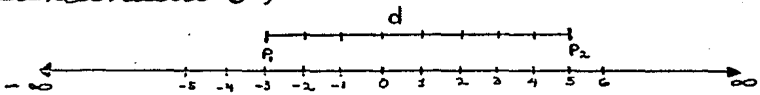
Ahora calcularemos la distancia entre dos puntos de la recta, esto es:



Calcularemos la medida (d) del segmento que une a P_1 con P_2.

Ejemplo 1

Localicemos los puntos P_1 con coordenada -3 lo que denotaremos $P_1(-3)$ y $P_2(5)$. (P_2 tiene como coordenada 5)



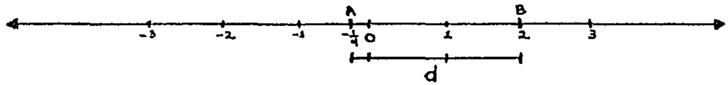
La medida del segmento d como podrás observar es de 8 unidades, esto es:

$$d(P_1, P_2) = 8$$

lo que se lee: distancia del punto P_1 al punto P_2 es igual a 8 unidades.

Ejemplo 2

Localicemos ahora la distancia de $A(-1/4)$ a $B(2)$.



Como podrás observar la distancia es 2 unidades mas $\frac{1}{4}$, o sea:

$$d(A, B) = 2\,{}^1\!/_4 = \frac{9}{4}$$

Ficha no.3

Localiza mediante una gráfica, la distancia entre los puntos que se indican y calcula su valor.

$P_1(-5)$, $P_2(2)$, $P_3(-1)$, $P_4(7)$, $P_5(3/2)$, $P_6(-7/\ )$, $P_7(-\sqrt{4})$, $P_8(\sqrt{2})$.

1.- $d(P_1, P_2) =$	5.- $d(P_6, P_5)$
2.- $d(P_1, P_3) =$	6.- $d(P_7, P_4)$
3.- $d(P_2, P_4)$	7.- $d(P_8, P_2)$
4.- $d(P_3, P_5)$	8.- $d(P_4, P_5)$

Observa cuidadosamente tus ejercicios de la ficha anterior y trata de encontrar una fórmula general para encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$. ¿Ya la conoces?

Trataremos de encontrarla mediante el siguiente taller.

Taller no.2

Objetivo del Taller.- que el alumno obtenga la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera en una recta.

Material Necesario.- cartoncillo, estambre tijeras y plumón.

Pasos a Seguir.-

1.- Traza una recta numérica en tu papel cartoncillo.

2.- Localiza los puntos $P_1(-5)$ y $P_2(2)$

3.- Corta un trozo de estambre de medida 0 a -5, otro con medida de 0 a 2

¿Dónde tienes que colocar estos dos trozos de estambre o que tienes que hacer para que juntos te den la distancia de P_1 a P_2?.

4.- Realiza los pasos 2 y 3 pero para $P_1(1)$ y $P_2(7)$.

¿Qué observas?

5.- Realiza los pasos 2 y 3 ahora para $P_1(-2)$ y $P_2(-6)$.

6.- Por lo que la distancia entre dos puntos cualesquiera de la recta estará dada por:

Del taller anterior obtuvimos que la distancia entre dos puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ está dada por:

$$d(P_1, P_2) = x_1 - x_2$$

ó

$$d(P_1, P_2) = x_2 - x_1$$

donde el resultado de estas dos restas puede ser positivo o negativo. En nuestro taller anterior las distancias dadas por los estambres nos muestran que el signo no interesa, porque no existen distancias negativas; omitiremos el signo proponiendo la fórmula como:

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$$

o bien

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|$$

Nota: $|\cdot|$ se le llama módulo o valor absoluto y significa que si el resultado de las operaciones de su interior es un número no negativo, entonces su módulo es dicho número, pero en caso contrario será menos ese número. Resumiendo ésto:

$$d(P_1, P_2) = \begin{cases} x_2 - x_1, & \text{si } (x_2 - x_1) \geq 0 \\ -(x_2 - x_1), & \text{si } (x_2 - x_1) < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

Calcular utilizando esta fórmula, la distancia entre $P_1(-2)$ y $P_2(-7/2)$.

En este ejemplo sabemos que:

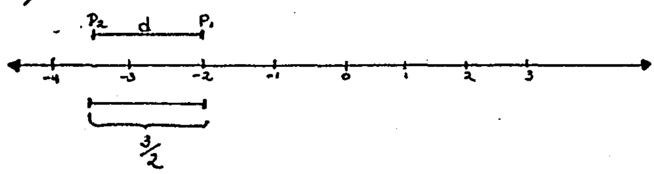
$x_1 = -2$ y $x_2 = -7/2$ por lo tanto:

$$d(P_1, P_2) = |-7/2 - (-2)|$$
$$= |-7/2 + 2|$$
$$= |-3/2|$$ y como el número $-3/2$ es negativo entonces el módulo será $-(-3/2) = 3/2$, luego

$$|-3/2| = 3/2$$

$$\therefore d(P_1, P_2) = 3/2$$

Gráficamente



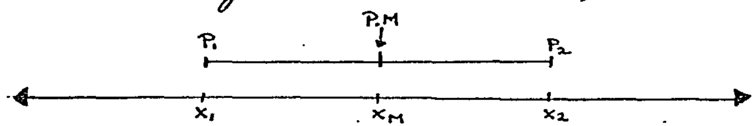
Ficha No. 4

1.- Calcula las distancias de la ficha No , utilizando la fórmula (verifica tus respuestas).

2.- La distancia entre dos puntos es 8, si uno de los puntos tiene coordenada -5, encuentra la coordenada del otro punto. (2 soluciones).
Nota: Resuélvelo gráficamente y mediante la fórmula.

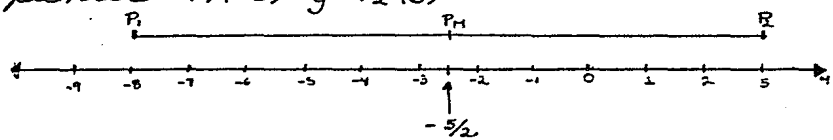
Punto Medio

Ahora pasaremos a encontrar el punto medio de un segmento de recta, esto es:



Para encontrar la coordenada X_M de P.M (punto medio) consideremos el siguiente e-jemplo:

Calcular el P_M del segmento que une a los puntos $P_1(-8)$ y $P_2(3)$



El P_M tiene coordenada $-5/2$.

Como aquí lo que estamos localizando es la coordenada del punto medio, en este caso si es muy importante el signo.

Para reafirmar mejor lo anterior realizarás el siguiente taller:

Taller No 3

Objetivo del Taller.- que el alumno identifique la diferencia existente entre la coordenada del punto medio y la distancia del punto medio a uno de sus extremos.

Material Necesario.- papel cartoncillo, 1 mica, 1 plumón

Pasos a Seguir

1.- En tu papel cartoncillo traza una recta numérica.

2.- En tu mica traza un segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ de medida 6

3.- Encuentra el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ al que llamaremos P_M.

4.- Coloca la mica sobre el papel cartoncillo y haz coincidir el extremo P_1 con el valor -5 en tu recta numérica.

¿ Con que valor de la recta numérica coincide P_2 y con cuál P_M ?

5.- Haz lo mismo que en el punto 4 pero haciendo coincidir P_1 con el valor $-1/2$

¿ Depende la coordenada del punto medio de un segmento, de la distancia?.

¿ De qué depende entonces?.

(Ver solución al taller apéndice 1)

Ficha No. 5

Encuentra la coordenada del punto medio de los siguientes segmentos.

1.- $P_1(-2)$ a $P_2(7)$
2.- $P_3(1/4)$ a $P_4(5)$
3.- $P_5(-9/2)$ a $P_6(-1)$
4.- $P_7(1/3)$ a $P_8(5/4)$
5.- $P_9(-1/2)$ a $P_{10}(3/5)$

Si observamos cuidadosamente los resultados de los ejercicios anteriores nos podremos dar cuenta que la coordenada x_M del punto medio P_M de dos puntos cualesquiera $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ esta dada por la suma de las los valores de las coordenadas de P_1 y P_2 divididos entre dos esto es:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

o sea que

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Ficha No. 6

1.- Encuentra mediante la fórmula anterior las coordenadas de los puntos medios de la ficha No

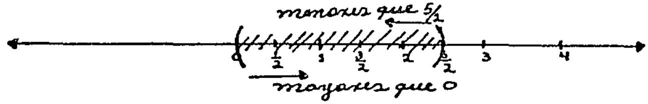
2.- El punto medio de un segmento es -3 la coordenada de uno de los extremos es $-19/2$ encuentra la coordenada del otro extremo.

Nota: resuelvelo gráficamente y mediante la fórmula

Regiones o Lugares Geométricos en R'

Localicemos en R' la siguiente región:

"Todos los puntos que sean menores que 5/2 y mayores que 0"



En la gráfica la región sombreada cumple con los requisitos anteriores.

¿ Recuerdas como se determina algebraicamente esta región?.

Efectivamente se representa por:

$$0 < x < 5/2$$

y algunos de los puntos que cumplen con estos requisitos son:

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{7}{3},\ \ldots\ldots$$

Ficha No. 7

1.- Menciona 10 números que cumplan con los requisitos para que puedan pertenecer a la región vista anteriormente.

2.- Explica con tus propias palabras los requisitos que deben cumplir los puntos que están en las siguientes regiones:

a) $0 < x < 3$

b) $2/5 > x > 1/6$

c) $5 \geq x$

d) $x < -2$

e) $2x \geq 7$

f) $-1 \leq 3x < 4$

g) $\frac{1}{3} < x+2 < 9$

h) $x+9 > -7$

i) $2x-3 \leq -2$

j) $-7x < 1$

3.- Localiza en la recta numérica las regiones que cumplan con estos requisitos.

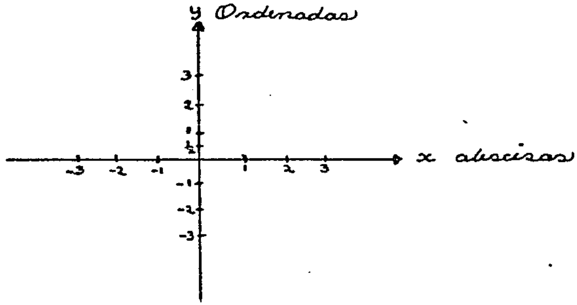
4.- Explica los métodos importantes para resolver estas inecuaciones.

Ahora que ya conocemos algo sobre la recta numérica $\mathbb{R}'$ pasemos a trabajar con

2 rectas $\mathbb{R}^2$ o Plano Cartesiano

Plano Cartesiano

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares cuyo punto en común es el cero.



A la recta horizontal le llamaremos eje de las abscisas y en ella localizaremos las coordenadas x de cualquier punto.

A la recta vertical le llamaremos eje de las ordenadas y en ella localizaremos las coordenadas y de cualquier punto

Como ahora trabajaremos con 2 rectas, entonces nuestros puntos tendrán 2 coordenadas; o sea que en un punto cualquiera en el plano lo denotaremos como:

$$P(x, y)$$

y será el punto que tenga como coordenadas x e y.

Localización de Puntos en $\mathbb{R}^2$

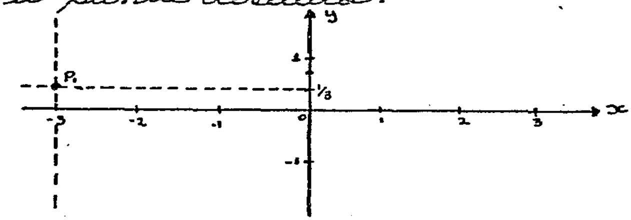
Para localizar un punto de coordenadas $P(x, y)$ como por ejemplo $P_1(-3, 1/3)$ procedemos como sigue:

1) El primer elemento de las coordenadas de un punto, corresponderá siempre al

eje de las abscisas, eje x. Por lo que localizaremos -3 en el eje x.

2.- El segundo elemento de las coordenadas se localizará siempre sobre el eje de las ordenadas, eje y. Por lo que localizaremos $1/3$ en el eje y.

3.- Sobre los puntos localizados -3 y $1/3$ tracemos rectas paralelas a los ejes de coordenadas y donde se intersecten estas rectas obtendremos el punto deseado.



Ficha No. 8

Localiza en el plano los siguientes puntos:

a) $P_1(4, -2)$
b) $P_2(-3, -2)$
c) $P_3(-5/2, 1.5)$
d) $P_4(0, -3)$
e) $P_5(8, 0)$
f) $P_6(-1/3, 0)$
g) $P_7(-2/5, 7)$
h) $P_8(\sqrt{2}, 1)$
i) $P_9(2, -\sqrt{2})$
j) $P_{10}(1/2, -3/\sqrt{2})$

Taller No 4

Objetivo del Taller.- que el alumno localice con exactitud puntos arbitrarios en el plano cartesiano.

Material Necesario.- abierto

Pasos a Seguir.-

1.- Construye un plano cartesiano del material que desees (desde una hoja de papel milimétrica hasta un pedazo de madera)

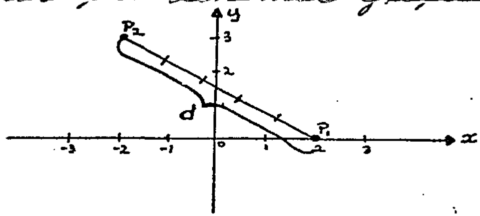
2.- Localiza los puntos de la ficha anterior que consideres los más complicados de tal suerte que su localización llame la atención.

Distancia entre 2 Puntos en $\mathbb{R}^2$

Al igual que lo hicimos en $\mathbb{R}^1$ ahora trataremos de encontrar la distancia entre 2 puntos en $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que queremos encontrar la distancia entre los puntos $P_1(2,0)$ y $P_2(-2,3)$.

Observemos que tenemos gráficamente



Los puntos localizados los podemos unir mediante el segmento d, y nos interesa conocer la magnitud de "d". Si lo medimos con la regla obtenemos:

$$d(P_1, P_2) = 5$$

Ahora trataremos de encontrar una relación que nos permita encontrar la distancia entre 2 puntos cualesquiera; para lo cual realizaremos el siguiente taller:

Taller No 5

Objetivo del Taller.- mostrar que la distancia entre 2 puntos cualesquiera está dada por la distancia de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Material Necesario.- 1 base papel cascaron, papel cartoncillo, papel lustre, tijeras, plumones y pegamento.

Pasos a Seguir

1.- Dibuja en el cartoncillo un plano cartesiano y localiza los puntos $A(2,3)$, $B(5,7)$

2.- Pega el plano cartesiano anterior en tu base de papel cascaron.

3.- Une los puntos A y B mediante un segmento para obtener $\overline{AB}$.

4.- En tu papel lustre dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 y 3 respectivamente

5.- Recorta el triángulo anterior y pégalo sobre tu plano haciendo coincidir la hipotenusa del triángulo con el segmento $\overline{AB}$.

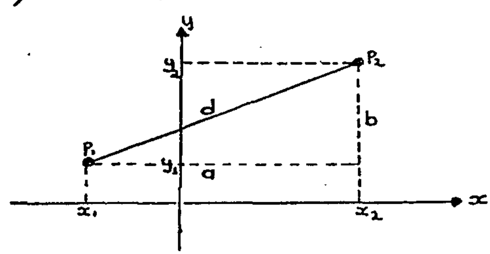
6.- Observa los catetos de este triángulo y relacionalos con las abscisas y ordenadas de los puntos A y B.

¿ Cuánto mide cada uno de los catetos de este triángulo ?.

Del taller anterior podemos obtener la relación buscada para encontrar la distancia entre 2 puntos en $\mathbb{R}^2$ generalizando para cualesquiera 2 puntos. Esto es:

Sea $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

Gráficamente



Entonces la distancia d que une a P_1 con P_2

Geometría Analítica

Introducción

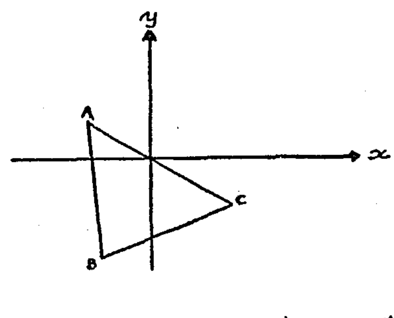
Ahora pasaremos al estudio de la geometría analítica, y para iniciar este estudio razonablemente, vamos a ubicarla a partir de dos conceptos:

1.- Como se relaciona con el tema anterior.

2.- Cual es su objetivo general

1.- En geometría euclideana conocimos algunas figuras y sus propiedades, como por ejemplo: En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.

Además hicimos demostraciones basándonos en toda una axiomatización, utilizando de hecho los métodos Inductivo y Deductivo. Ahora lo que haremos será ubicar estas figuras en un plano de coordenadas, esto es, estudiaremos al ΔABC, pero indicando las coordenadas de sus vértices.



También estudiaremos rectas, círculos, parábolas etc. En general cualquier figura plana a la cual llamaremos estará dada por la hipotenusa del triángulo sombreado cuyos catetos son a y b, entonces por el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$\therefore d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

pero sabemos que:

$$a = x_2 - x_1$$
$$b = y_2 - y_1$$

por lo que sustituyendo el valor de a y b en (*) se obtiene:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (*_1)$$

Ejemplo

Utilizando la relación anterior, encontrar la distancia entre los puntos:

$$A(-5, 1/4) \quad y \quad B(-2, 7/5)$$

de esta información sabemos que:

$$P_1(x_1, y_1) = A(-5, 1/4) \qquad P_2(x_2, y_2) = B(-2, 7/5)$$

de donde:

$$x_1 = -5, \quad y_1 = 1/4 \qquad x_2 = -2, \quad y_2 = 7/5$$

sustituyendo estos valores en $(*_1)$ se tiene:

$$d(A, B) = \sqrt{(-2-(-5))^2 + (7/5 - 1/4)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-2+5)^2 + (23/20)^2}$$

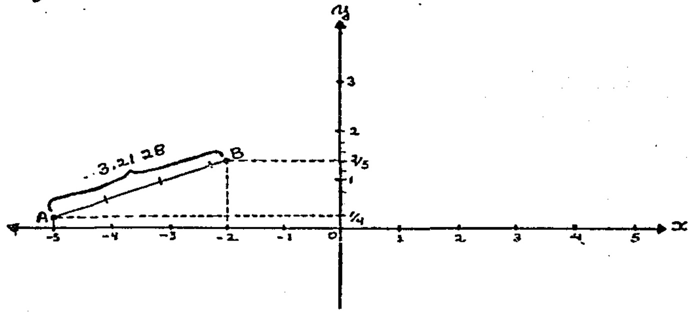
$$d(A, B) = \sqrt{3^2 + (23)^2/(20)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{9 + 529/400}$$

$$d(A, B) = \sqrt{4129/400} = \sqrt{4129}/\sqrt{400}$$

$$\therefore \quad d(A, B) = \sqrt{4129}/20 = 3.2128 \text{ aproximadamente}$$

Representemos ahora el resultado anterior graficamente.



Ficha 9

1) Encuentra la distancia entre los siguientes pares de puntos y grafica.

   a) $P_1(-2, 3)$ y $P_2(1/4, 2)$

   b) $A(-1/3, -3/4)$ y $B(\sqrt{7}, 0)$

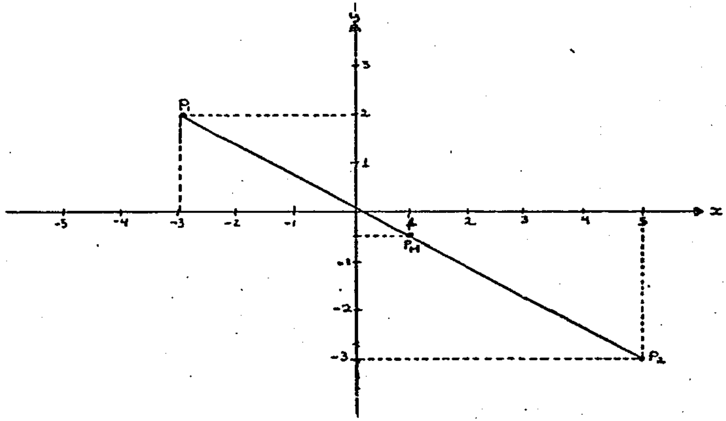
2) Demuestra que los puntos $(2,-2)$, $(-8,4)$ y $(5,3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

3) Uno de los extremos de un segmento recto de longitud 5 es el punto $(3,-2)$, si la abscisa del otro extremo es 6, hallar su ordenada. (2 soluciones)

Punto Medio en $\mathbb{R}^2$

Consideremos el segmento cuyos extremos son $P_1(-3,2)$ y $P_2(5,-3)$, al unir estos puntos obtenemos el segmento P_1P_2; llamemos P_M al punto medio de este segmento.

Gráficamente



Entonces deseamos hallar una relación que nos sirva para encontrar las coordenadas de P_M, para lo cual realizaremos el siguiente taller:

Taller No.6

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca la relación para encontrar el punto medio entre cualesquiera dos puntos en el plano cartesiano.

Material Necesario.- base de unicel dividida en 8 partes, alfileres, estambre, 8 tachuelas, plumón y una tarjeta grande

Pasos a Seguir:

1.- Dibuja con tu plumón un plano cartesiano en cada una de las partes.

2.- En una de las esquinas de la base pega tu tarjeta la cual tendrá el siguiente rayado

Coordenadas	
1.- A_1( ) B_1( )	P_M $\overline{A_1B_1}$ ( )
2.- A_2( ) B_2( )	P_M $\overline{A_2B_2}$ ( )
⋮ ⋮	⋮ ⋮
8.- A_8( ) B_8( )	P_M $\overline{A_8B_8}$ ( )

3.- En la primera parte de tu base clava alfileres en los puntos $A_1(0,2)$ y $B_1(4,2)$

4.- Une los alfileres con estambre

5.- Localiza el punto medio de $\overline{A_1B_1}$ y clava una tachuela en éste.

6.- Qué coordenadas tiene el P_M $\overline{A_1B_1}$?

7.- Anótalo en tu tarjeta.

8.- En la segunda parte de tu base clava alfileres en los puntos $A_2(0,3)$ y $B_2(-6,3)$

9.- Une los alfileres con estambre

10.- Localiza el P_M $\overline{A_2B_2}$ y clava en éste una tachuela.

11.- ¿Cuáles son las coordenadas de P_M $\overline{A_2B_2}$?

12.- Anótalo en tu tarjeta.

13.- En la tercera parte de tu base clava alfileres en los puntos $A_3(-3,-5)$ y $B_3(1,-5)$

14.- Une con estambre los puntos A_3 y B_3

15.- Localiza el punto medio y clava

tu tachuela.

16.- ¿ Cuáles son las coordenadas del punto medio?

17.- Llena tu tarjeta

Hasta este momento haz encontrado los puntos medios de los segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{A_3B_3}$ en forma exacta contando el número de unidades que hay entre un alfiler y otro pero... ¿ podrías encontrar el punto medio en forma exacta del segmento cuyos extremos son los puntos $A_4(2/3, 1/5)$ y $B_4(7/2, 1/5)$? ¡ Inténtalo!

¿ Cuáles fueron las coordenadas del punto medio?

Como te habrás dado cuenta el método usado hasta este momento no es el mas eficáz.

Observa tu tarjeta y trata de encontrar la operación que relaciona las abscisas de los puntos con la abscisa del punto medio en cada uno de los casos, de la misma forma hazlo con las ordenadas.

¿ Cuál fue la relación?

18.- En la cuarta parte de tu base localiza los puntos $A_5(2,3)$ y $B_5(2,6)$

19.- Como se hizo anteriormente localiza el punto medio de $\overline{A_5B_5}$ y llena tu tarjeta.

20.- En forma <u>análoga</u> trabaja al segmento $\overline{A_6B_6}$ donde $A_6(-3,-2)$ y $B_6(-3,-10)$ y llena tu tarjeta.

Observa nuevamente tu tarjeta y trata de encontrar la operación que relaciona tanto las abscisas como las ordenadas de los puntos medios de los dos segmentos anteriores.

¿Cuál es la relación?

21.- En las dos últimas partes de tu base trabaja en forma similar a como se ha venido haciendo a los segmentos cuyas coordenadas son:

$A_7(2,3)$ $B_7(-4,7)$ y $A_8(4,2)$ $B_8(-1,-5)$

(Ver solución al taller apéndice 2)

Después de haber llevado a cabo el taller anterior podemos decir que la relación que en forma general nos sirve para encontrar las coordenadas del punto medio de cualquier segmento esta dado por:

$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ abscisa del punto medio.

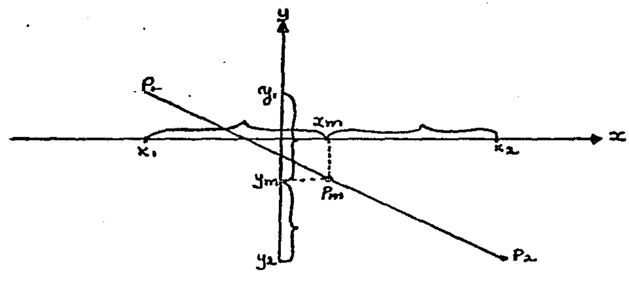
$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ordenada del punto medio.

por lo que podemos decir que:

Dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ las coordenadas del punto medio P_m del segmento $\overline{P_1P_2}$, estan dadas por:

$$P_m(x_m, y_m) = P_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Graficamente



Ficha No 10

Encontrar las coordenadas del punto medio de los segmentos que unen a los puntos:

a) $P_1(-2,4)$ y $P_2(4,6)$

b) $P_3(1/2, 7)$ y $P_4(3/2, -1/4)$

c) $P_5(.5, 1.2)$ y $P_6(-2,-1)$

y hacer la gráfica en cada caso.

Lugares Geométricos en $\mathbb{R}^2$

Recuerda que un lugar geométrico se define como un conjunto de puntos que cumplen con ciertos requisitos; en el plano los diversos conjuntos de puntos que cumplen con ciertos requisitos forman determinadas figuras, en esta sección nos daremos cuenta que las condiciones o requisitos de estas figuras estan dadas por ecuaciones; y estudiaremos que forma deben tener éstas para obtener: rectas, circunferencias y en general cualquier figura, con ésto trataremos de alcanzar los dos objetivos de Geometría Analítica

— Dada una ecuación, encontrar su gráfica (figura, lugar geométrico o región) correspondiente.

— Dada la gráfica, encontrar la ecuación que la representa.

La Recta

Veamos que requisitos (ecuación) deben de cumplir los puntos de una recta para lo cual realizaremos el siguiente ejemplo:

Localiza en $\mathbb{R}^2$ la región correspondiente a la expresión:

$$2x < 3$$

Para encontrar esta región, interpretaremos lo que dice esta expresión:

Nos indica que debemos encontrar todos los valores de x que multiplicados por 2 nos den como resultado valores menores que 3, como por ejemplo:

$$2(1) < 3 \quad \therefore \quad x = 1$$
$$2(-2) < 3 \quad \therefore \quad x = -2$$
$$2(0) < 3 \quad \therefore \quad x = 0$$

o sea que algunos de los valores posibles para x serían:

$$1, -2, 0 \text{ etc.}$$

Pero recuerda que como estamos en $\mathbb{R}^2$, también necesitamos tener valores para "y" ¿cuáles son?

Un punto de esta región podría ser:

$$(1, 7)$$

$1 = x$ cumple con el requisito

$7 = y$ también, ya que para "y" no se ponen condiciones, por lo que podemos concluir que:

Resolviendo la inecuación $2x < 3$, tenemos que $x < 3/2$.

Entonces los puntos (x, y) deberán de cumplir cumplir este requisito para x.

Gráficamente la región será:

La gráfica anterior no incluye la recta que pasa por 3/2.

Ficha No 11

1.- Menciona 10 puntos que estén en la región $x < 3$.
2.- ¿La región anterior representa una recta?.
3.- ¿Qué expresión algebráica nos representa la recta que pasa por 3/2?

Ejemplo

Encontrar la región correspondiente a la expresión:

$$5x = y$$

los requisitos que se deben de cumplir son:

$$x = y/5$$

que x sea la quinta parte de y.

Algunos de los puntos que cumplen con esta condición son:

$$(1,5) \quad (2,10) \quad (3,15)\ldots$$

pero recuerda que existe un método para poder encontrar los valores posibles de x e y que hagan verdadera esta ecuación, este método es el de tabulación.

Veamos:

Como $x = y/5$ --- (1), implica que tenemos que dar valores arbitrarios a "y" para obtener a x.

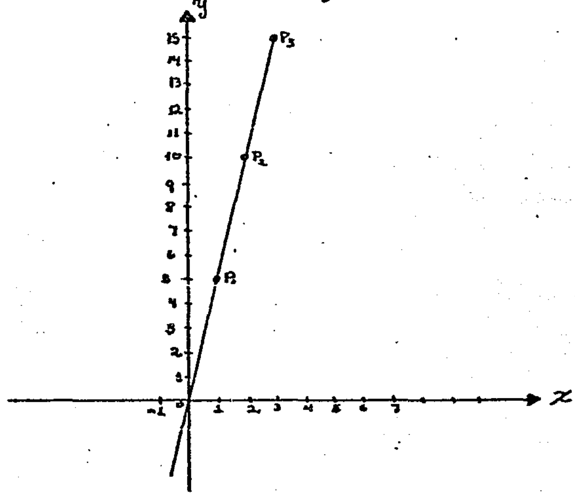
Si en lugar de x despejamos "y" obtenemos:

$y = 5x$ -- (2), lo que significa que es a x a quien damos valores arbitrarios para obtener a "y".

Nuestra tabla de tabulación la llenaremas utilizando (1) y (2). ¡ claro que se puede hacer solo con una !.

x	y
$\underline{1}$	$5(1) = 5$
$5/5 = 1$	$\underline{5}$
$\underline{2}$	$5(2) = 10$
$10/5 = 2$	$\underline{10}$

Localizando los puntos $P_1(1,5)$, $P_2(2,10)$, $P_3(3,15)$ etc obtenemos la gráfica correspondiente.



Ficha No. 12

1.- Tabula 10 puntos mas del ejemplo anterior y localizalos en la gráfica ya dada

2.- La región encontrada ¿ representa una recta ?.

3.- Localiza las siguientes regiones, indicando en cada una si representa o no una recta.

a) $2x \geq 5$
b) $-x > 3$
c) $y > -2$
d) $2x = 5$
e) $2x+2 = 5$
f) $x = 2y$
g) $y = 3x$
h) $y = -3x$
i) $y = 3x+1$
j) $y = -3x+1$
k) $y = 3x-1$
l $y = -3x-1$

Después de haber llevado a cabo la ficha anterior nos damos cuenta, que las regiones que nos representan una recta son ecuaciónes de la forma:

$$y = mx + b$$

por ejemplo $y = -3x-1$, en este caso $m = -3$ y $b = -1$.

Pero recuerda que las ecuaciones las podemos escribir de diferentes maneras, así la ecuación $y = -3x+2$ la podemos expresar también como:

$$\begin{cases} y + 3x + 2 = 0 \\ 2y + 6x + 4 = 0 \end{cases} \quad ó \quad y = \frac{-6x-4}{2}$$

$$x = \frac{-y-2}{3}$$

y muchas formas mas, pero la forma que nos interesa de la recta es a la que llamaremos:

$$\boxed{\text{Ecuación de la Recta en la Forma General} \quad Ax + By + C = 0}$$

Ficha No. 13

1. Encuentra la ecuación en su forma general de las siguientes rectas:

a) $3x + 2 = 5y$

b) $7x - 2y = 9$
c) $y = 3x + 2$
d) $2x = 5$
e) $3y = 2$
f) $x = y$

2.- Encuentra los valores A, B y C en las rectas anteriores.

3.- Grafica las rectas anteriores

Hasta este momento hemos visto como dada una ecuación, podemos determinar, la gráfica correspondiente.

Pendiente de la Recta

Antes de dar una definición de pendiente llevaremos a cabo el siguiente taller para darnos una idea del significado de éste concepto.

Taller No 7

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca que el coeficiente de la x en expresiones de la forma $y = mx$ determina la inclinación de la recta con respecto al eje x para cuando $0 < m < 1$, $m \geq 1$, $-1 < m < 0$ y $m \leq -1$ y definirá dicho coeficiente como la pendiente de la recta.

Material Necesario.- 1 base de papel cascarón o material equivalente dividida en 5 partes iguales, regla, plumones de 6 colores diferentes, 1 tachuela, una mica de 10 x 10 cm.

Pasos a Seguir

1.- Dibuja en cada una de las partes en que dividiste tu clase un plano cartesiano

2.- En el primer plano cartesiano traza las rectas:

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = \frac{2}{3}x, \quad y = \frac{1}{3}x, \quad y = \frac{1}{7}x$$

3.- Mide con tu transportador el ángulo formado por cada una de las rectas anteriores y el eje de las x.

¿Cómo son estos ángulos?

Ciertamente son agudos y menores de 45°.

4.- En el segundo plano cartesiano traza las rectas:

$$y = 2x, \quad y = 7x, \quad y = \frac{5}{3}x, \quad y = \frac{7}{2}x$$

5.- Nuevamente con tu transportador mide el ángulo formado por cada una de las rectas anteriores y el eje de las x.

¿Cómo son estos ángulos?

6.- En el tercer plano cartesiano traza ahora las rectas:

$$y = -\frac{2}{3}x, \quad y = -\frac{1}{4}x, \quad y = -\frac{5}{7}x, \quad y = -\frac{2}{9}x$$

7.- Haz lo mismo que en 5

¿Cómo son los ángulos?

8.- En el cuarto plano cartesiano traza las rectas:

$$y = -\frac{7}{3}x, \quad y = -3x, \quad y = -5x, \quad y = -\frac{4}{2}x$$

9.- Haz lo mismo que en 5

¿Cómo son los ángulos?

10.- En el quinto plano cartesiano traza todas las rectas trazadas en cada uno de los planos cartesianos y utilizando los mismos colores

11.- En tu mica traza un plano cartesiano igual al de la parte 5 y localizando con plumón las recta $y=0$

12.- Inserta la mica por el origen haciendo coincidir los planos cartesianos.

13.- Verifica moviendo tu mica si son correctas tus respuestas a las preguntas hechas en los pasos ③, ⑤, ⑦ y ⑨.
(Ver solución al taller apéndice 3)

Después de haber llevado a cabo el taller anterior, nos hemos dado cuenta de alguna manera de que si $y = mx$; m determina la inclinación de la recta con respecto al eje x.

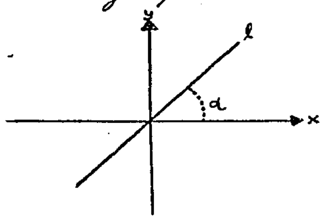
Definamos ahora a :

m = Pendiente de la recta

donde m = tangente α

diremos que α es el ángulo de inclinación de la recta con respecto al eje x.

Veamos esto gráficamente :



$m = \tan g\ \alpha$.

Para entender mejor esto llevemos a cabo el siguiente taller.

Taller No. 8

Objetivo del Taller.- que el alumno identifique a m como la tangente del ángulo de inclinación de la recta.

Material Necesario.- tablas trigonométricas, transportador, regla, 1 base.

Pasos a Seguir:

1.- Divide tu base de la siguiente manera:

Gráfica de la Ecuación				
medida del ángulo de inclinación de la recta.				
Tangente Natural del ángulo.				

2.- En tu base haz la gráfica de las siguientes ecuaciones: a) $y = \frac{1}{2}x$, b) $y = 3x$, c) $y = -2x$, d) $y = -\frac{1}{4}x$.

3.- Haz notar perfectamente el ángulo de inclinación de. con respecto al eje x, de cada una de las rectas anteriores.

4.- Mide con tu transportador cada uno de los ángulos anteriores y anota la medida en el lugar correspondiente de tu tabla.

5.- En tus tablas trigonométricas busca la tangente natural de cada uno de los ángulos que mediste y anotala en el lugar correspondiente de tu tabla.

6.- Compara los valores obtenidos en ⑤ con los coeficientes de x en las ecuaciones de cada una de las rectas.

¿Qué Observas?

De acuerdo a los resultados obtenidos del taller anterior diremos:

$$m = \tan \underbrace{(\text{angulo de inclinación de la recta})}_{\alpha}$$

Ahora bien una recta, como recordaras de tus ejercicios, no necesariamente pasa por el punto (0,0) como en los casos anteriores, sino que también puede intersectarse en otros puntos de los ejes de coordenadas.

Entendamos esto con el siguiente taller:

Taller No. 9

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca que en ecuaciones de la forma $y = mx+b$, "m" es la pendiente de la recta y "b" el punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas.

Material Necesario.- 1 base, regla, 1 tachuela, cuchillo o navaja, plumones de colores, 3 micas de 10 x 10 cm.

Pasos a Seguir

1.- Divide a tu base en tres partes iguales.

2.- En cada una de las partes dibuja un plano cartesiano del mismo tamaño.

3.- En tu primer plano cartesiano haz la gráfica de las siguientes ecuaciones $y = 2x$, $y = 2x+1$, $y = 2x-1$ y pinta cada una de diferente color.

¿ Qué pasaría con las rectas si el coeficiente de la x fuera -2 ?

4.- En el segundo plano cartesiano haz la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x-2$, $y = -\frac{1}{2}x+2$

¿ Qué pasaría con las rectas si el coeficiente de x fuera $\frac{1}{2}$?

6.- En el tercer plano cartesiano haz la gráfica de $y = x$, $y = x+3$, $y = x-3$

¿ Qué pasaría si el coeficiente de x en vez de ser 1 fuera -1 ?.

7.- En cada una de las micas dibuja un plano cartesiano igual a los de la base y gráfica en la primera mica la recta $y = 2x$, en la segunda la recta $y = -\frac{1}{2}x$ y en la tercera la recta $y = x$.

8.- Toma la mica 1 y superponla en el plano cartesiano de la primera parte de tu base de tal forma que los ejes coincidan y fíjala con tu tachuela.

9.- Haz con tu cuchillo una ranura al eje "y" de manera que la tachuela corra libremente (con holgura).

10.- Mueve tu mica hacia arriba hasta

que la recta de la mica coincida con la recta $y = 2x+1$

a) Para lograr lo anterior ¿cuántas unidades avanzaste sobre el eje y?

b) ¿En que parte (positiva o negativa del eje y) se encuentran estas unidades?

c) En que punto intersecta la recta $y = 2x+1$ al eje "y".

11.- Mueve tu mica hasta que la recta de la mica coincida ahora con la recta $y = 2x-1$

a) Para lograr lo anterior ¿cuántas unidades avanzaste sobre el eje y?.

b) ¿En que parte (positiva o negativa del eje "y") se encuentran estas unidades?

c) En que punto intersecta la recta $y = 2x-1$ al eje "y"?.

12: Repite los pasos 8, 9, 10 y 11 pero tomando ahora los planos cartesianos de la segunda y tercera parte de tu base así como la mica 2 y 3 según corresponda.

(Ver solución al taller apéndice 4)

Del taller anterior podemos concluir que las rectas conservan su ángulo de inclinación con respecto al eje x, en lo que cambian es en los puntos de intersección con los ejes de coordenadas, entonces:

La ecuación de la recta en la forma

$$y = mx + b$$

nos proporciona :

m, la pendiente de la recta

y b, el punto de intersección con el eje de las ordenadas. $(0, b)$

Ejemplo

Dada la ecuación $3x + 4y - 2 = 0$ (forma general)

a) Localiza los valores A, B, y C

b) Proporciona la ecuación en la forma $y = mx + b$

c) Encuentra la pendiente de la recta

d) Encuentra el ángulo de inclinación de la recta con el eje de las abcisas (x).

e) Haz la gráfica de la ecuación

f) Proporciona las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas.

Solución

a) Los valores se obtienen directamente de la ecuación.

$$A = 3 \quad , \quad B = 4 \quad y \quad C = -2$$

b) Para encontrar la ecuación en su forma

$$y = mx + b$$

de la ecuación en su forma general, debemos despejar a y; entonces

de $3x + 4y - 2 = 0$

tenemos: $\quad 4y = -3x + 2$

$$y = \frac{-3x + 2}{4}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

c) Del inciso anterior

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

m

$\therefore$ la pendiente es $-3/4$

d) Para encontrar el ángulo de inclinación de la recta sabemos:

$$m = -\frac{3}{4}$$

y que $m = \tan \alpha$

Si realizamos la operación $-\frac{3}{4}$ se obtiene que

$$m = -.75$$

En las tablas en la sección de tangente natural buscamos cuantos grados le corresponde a $-.75$ obteniéndose que $\hat{\alpha} = 143° 10'$

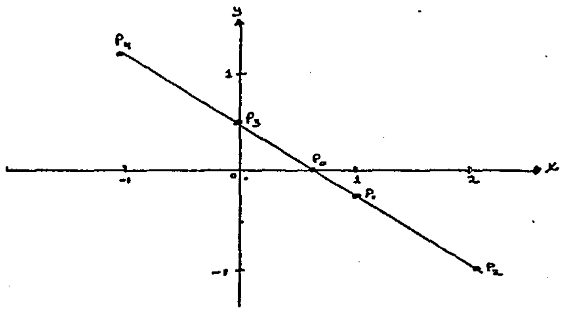
e) Para la gráfica hagamos una tabulación para $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

x	y
1	$-3/4(1)+\frac{1}{2} = -3/4+\frac{1}{2} = -1/4$
2	$-3/4(2)+1/2 = -6/4+1/2 = -1$
0	$-3/4(0)+1/2 = 0+1/2 = 1/2$
-1	$-3/4(-1)+1/2 = 3/4+1/2 = 5/4$
-2	$-3/4(-2)+1/2 = 6/4+1/2 = 2$

De donde obtenemos los siguientes puntos:

$P_1(1, -1/4)$, $P_2(2, -1)$, $P_3(0, 1/2)$, $P_4(-1, 5/4)$, $P_5(-2, 2)$

¡Euclides decía que por dos puntos pasa una y sola una recta! (no era necesario obtener tantos puntos).



f) Para encontrar los puntos de intersección; lo podemos hacer:

a) Observando la gráfica

$P_3(0, 1/2)$ y $P_0(5/8, 0)$

¿Pero si no construimos bien la gráfica?

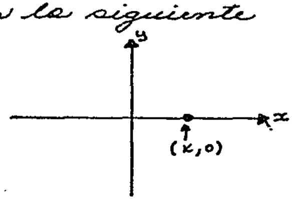
b) Algebraicamente y por resultados anteriores.

Como $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

b

De acuerdo a un resultado anterior b significa la intersección con el eje "y"; por lo que el punto de intersección buscado es: $(0, 1/2)$.

Para encontrar el punto de intersección con el eje x veamos lo siguiente



Las coordenadas de cualquier punto que esté sobre el eje x, tendrá un valor para "x" y el valor de "y" será siempre cero.

Entonces en la ecuación general $3x + 4y - 2 = 0$

despejamos a "x" :

$$x = -\frac{4}{3}y + \frac{2}{3}$$

Por lo que tabulando para $y=0$ se tiene :

x	y
$-\frac{4}{3}(0)+\frac{2}{3}$	0

de donde $x = \frac{2}{3}$

Como verás nuestra apreciación en el inciso (a) no fue correcta por lo que el punto de intersección con el eje x es: $(2/3, 0)$

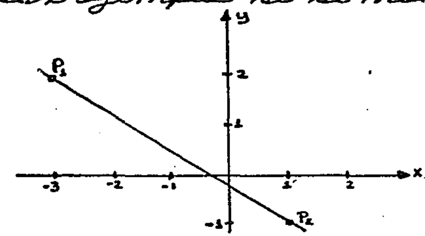
Hicha 14

Resuelve los incisos del ejemplo anterior pero ahora para las siguientes rectas :

a) $-2x+3y-1=0$
b) $3x = y-2$
c) $-y+5=2x$
d) $5x = y$

Pasemos ahora a resolver el siguiente problema:
— Dada una gráfica encontrar la ecuación correspondiente.

Así por ejemplo si se nos proporciona la gráfica :



y nos indican que la recta L pasa por los puntos $P_1(-3,2)$ y $P_2(2,-1)$.

De lo que se trata es entonces de encontrar la ecuación correspondiente. ¿Ya se te ocurrió cómo?

Parece ser que lo primero que necesitamos es encontrar la pendiente de la recta.

Veamos ahora como la encontrarías conocidos dos puntos de la recta.

Taller No.10

Objetivo del Taller.- que el alumno induzca la fórmula para encontrar la pendiente de una recta conocidos dos puntos de ésta.

Material Necesario.- 1 base, regla, transportador, tablas trigonométricas y plumones de colores.

Pasos a Seguir

1.- Indaga la definición de tangente en un triángulo rectángulo.
2.- Divide tu base en tres partes iguales.
3.- En cada una de las partes dibuja un plano cartesiano.
4.- En el primer plano localiza los puntos $P_1(2,1)$ y $P_2(3,4)$ y únelos mediante la recta L_1.
5.- En el segundo plano localiza los puntos $P_3(1,4)$ y $P_4(4,2)$ y únelos mediante la recta L_2.
6.- En el tercer plano localiza los puntos $P_5(-3,2)$ y $P_6(2,-1)$ y únelos mediante la recta L_3.

7.- Con plumón de color diferente indica el ángulo de inclinación de las rectas L_1, L_2 y L_3 con respecto al eje x y denótalos por α, β y γ respectivamente.

8.- Con tu transportador toma y anota la medida del $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$.

9.- En cada uno de los planos cartesianos construye un triángulo rectángulo tomando como hipotenusa la distancia entre los puntos P_1 y P_2, P_3 y P_4 y P_5 y P_6.

10.- Marca en cada uno de los triángulos rectángulos formados a la hipotenusa con plumón verde, al cateto opuesto de color amarillo y al cateto adyacente de color azúl.

11.- En los triángulos rectángulos formados marca los ángulos que sean iguales a los ángulos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ y llámalos $\hat{\alpha}^\circ$, $\hat{\beta}^\circ$ y $\hat{\gamma}^\circ$ respectivamente.

12.- En cada caso encuentra la medida del cateto opuesto, para lograr esto translada este cateto sobre el eje "y".

13.- Ahora translada el cateto adyacente sobre el eje x y en cada caso encuentra su medida.

14.- De acuerdo al paso 1 sabemos que $\tan = \frac{CO}{CA}$ de donde la $\tan \alpha^\circ = \frac{4-1}{3-2} = \frac{3}{1}$ pero $\hat{\alpha} = \alpha^\circ$ $\therefore$ $\tan \hat{\alpha} = 3$. De la misma forma encuentra:

$\tan \hat{\beta} =$

$\tan \hat{\gamma} =$

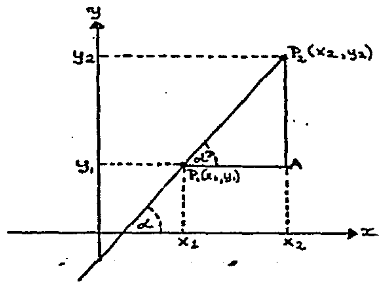
15.- a) ¿Cuánto vale la pendiente de L_1?

b) ¿Cuánto vale la pendiente de L_2?

¿ Cuánto vale la pendiente de L_3 ?
¿ Por qué?
(Ver solución al taller apéndice 5)

Del taller anterior se concluye lo siguiente :
Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de una recta entonces su pendiente esta dada por :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Demostración

Sabemos que $m = \tan g\, \alpha$
pero $\tan g\, \alpha = \frac{CO}{CA}$
$CO = \overline{AP_2} = y_2 - y_1$
$CA = \overline{P_1A} = x_2 - x_1$
entonces $\tan g\, \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\therefore \; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Volviendo a nuestro problema, podemos encontrar ahora si muy facilmente la pendiente de la recta que pasa por $P_1(-3,2)$ y $P_2(2,-1)$

$$m = \frac{-1-2}{2-(-3)} = -\frac{3}{5}$$

Pero aún no tenemos la ecuación buscada ¿ Qué se te ocurre hacer ahora?
Bueno, como ya sabemos que :
$y = mx + b$ es la ecuación de la recta en donde m es la pendiente y b el punto de intersección con el eje "y", entonces pode-

mos hacer $m = -3/5$ teniéndose:

$$y = -3/5\, x + b$$

Pero ahora ¿Como encontramos b?

De la ecuación anterior sabemos que (x, y) es un punto cualquiera de la recta en particular puede ser $(-3, 2)$ o $(2, -1)$, sustituyamos cualquiera de éstos para obtener b, por ejemplo $(2, -1)$

$$-1 = -\frac{3}{5}(2) + b$$

$$-1 = -\frac{6}{5} + b$$

$$-1 + \frac{6}{5} = b$$

$$\frac{1}{5} = b$$

$\therefore$ la ecuación buscada será:

$$y = -3/5\, x + \frac{1}{5}$$

igualando a cero la ecuación obtenemos ésta en forma general.

$$y + 3/5\, x - \frac{1}{5} = 0$$

multiplicando por 5

$$5y + 3x - 1 = 0$$

Pasemos ahora a resolver algunos problemas aplicando lo visto hasta este momento.

Problema 1

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 7)$ y $P_2(1/2, 5)$

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{5-7}{\frac{1}{2} - 3} = \frac{-2}{-5/2} = \frac{4}{5}$$

Sustituyendo m en $y = mx + b$ se tiene:

$$y = \frac{4}{5}x + b$$

Para obtener b sustituyamos (3,7).

$$7 = \frac{4}{5}(3)+b$$

$$7 = \frac{12}{5} + b$$

$$7 - \frac{12}{5} = b$$

$$23/5 = b$$

sustituyendo nuevamente

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{23}{5}$$

igualando a cero

$$y - \frac{4}{5}x - \frac{23}{5} = 0$$

para tener coeficientes enteros multiplicamos toda la ecuación por 5

$5y - 4x - 23 = 0$ que es la ecuación buscada.

Problema 2

Una recta pasa por el punto (-2,5) y tiene un ángulo de inclinación de 60°. Encontrar la ecuación de la recta.

Para encontrar la pendiente de esta recta buscamos en las tablas tang de 60° obteniéndose:

$$\tan 60° = .5774$$

por lo que $y = .5774x + b \ldots$ ①

para obtener b sustituimos (-2,5)

$$5 = .5774(-2) + b$$

$$5 = -1.1548 + b$$

$$5 + 1.1548 = b$$

$$6.1548 = b$$

sustituyendo en ① se tiene

$$y = .5774x + 6.1548$$

igualando a cero

$$y - .5774x + 6.1548 = 0$$

multiplicando por 10000 para tener coeficientes enteros se obtiene :

$$10000y - 5774x + 61548 = 0$$

Ficha No. 15

1.- Encontrar las pendientes de las rectas que pasan por :

a) $P_1(-2,0)$ y $P_2(3,-5)$

b) $P_3(1/2,7)$ y $P_4(8,9)$

c) $P_5(-5/3,-1)$ y $P_6(-2,-3)$

d) De la recta cuyo ángulo de inclinación es de 93°

e) De la recta cuyo ángulo de inclinación es de 48°

2.- Encontrar la ecuación de las siguientes rectas:

a) Que pasa por $P_1(-2,3)$ y $P_2(1,-1)$

b) Que pasa por $P_1(5,3)$ y su punto de inter- -sección con el eje de las ordenadas es -2

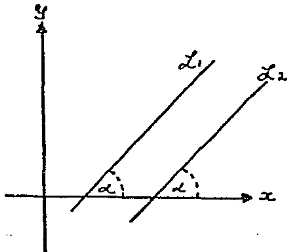
c) Que pasa por $(-2,-1/2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 100°

3.- Hacer la gráfica de las rectas de los puntos 1 y 2.

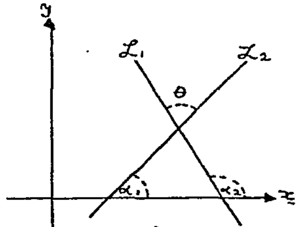
Hasta ahora hemos visto como dada la ecuación de una recta hacer su gráfica y viceversa como dada la gráfica de la recta encontrar su ecuación.

Pasemos ahora a analizar lo siguiente :

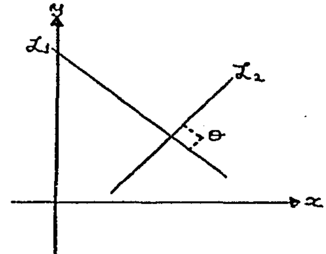
— Dadas dos rectas en el plano , se pueden presentar tres casos a saber :



(1)



(2)



(3)

1.- Que las rectas sean paralelas, si pasa esto, su ángulo de inclinación es el mismo y por lo tanto tienen la misma pendiente.
2.- Que se intersecten en un punto, si pasa esto entonces forman un ángulo θ entre sus dos rectas.
3.- Que el ángulo θ sea de $90°$, o sea que las rectas sean perpendiculares.

Taller No. 11

Objetivo del Taller.- que el alumno calcule el ángulo formado entre dos rectas y a partir de éste compruebe en algunos ejercicios como son las pendientes de dos rectas perpendiculares
Material Necesario.- regla, transportador, plumones y tablas trigonométricas
Pasos a Seguir
1.- Traza dos rectas como las del caso (2) y mide el ángulo θ.
2.- Mide los ángulos de inclinación con respecto al eje x de L_1 y L_2 (o sea que tienes que medir α_1 y α_2).

3.- Observa bien tu figura y di ¿qué tienes que hacer ya que conoces los valores de $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$ para encontrar θ?.

3.- Traza dos rectas cualesquiera, indicando dos puntos de cada una. (las rectas deben intersectarse).

4.- Calcula la pendiente de cada una de ellas

5.- Utilizando los valores de las pendientes encontradas en ④, busca en tus tablas trigonométricas los ángulos de inclinación correspondientes y marcalos con tu plumón.

6.- Al ángulo mayor réstale el ángulo menor.

7.- Mide con tu transportador el ángulo formado entre estas dos rectas ($\hat{\theta}$).

¿Qué observas?

8.- Traza dos rectas que pasen por:

$L_1: P_1(-2,5)$ y $P_2(4,1)$ y $L_1: P_1(1,5)$ y $P_2(-3,-3)$

$L_2: P_1(-1,1)$ y $P_2(3,7)$ $L_2: P_1(-4,-9)$ y $P_2(2,3)$

9.- Mide con tu transportador el ángulo formado entre ellas

¿Que observas?

10.- Calcula la pendiente de L_1 y L_2.

¿Que observas de estos resultados?

Del taller anterior podemos concluir:

1.- Si $L_1 \parallel L_2$ entonces $m_1 = m_2$

2.- Si L_1 se intersecta con L_2, entonces θ= ángulo formado entre las dos rectas y se calcula como $\hat{\theta} = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1$ donde $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$ son los ángulos de inclinación de L_1 y L_2 y $\hat{\alpha}_2 > \hat{\alpha}_1$

3.- Si $L_1 \perp L_2$ entonces $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ o bien $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Ejemplo

Una recta L_1 pasa por el punto $(-1,-3)$. Si sabemos que $L_1 \perp L_2$ y que L_2 tiene por ecuación $3x-4y+11=0$. Encontrar la ecuación de L_1.

Si $L_2 : 3x-4y+11=0$

despejando "y" obtenemos su pendiente

$$y=\frac{-3x-11}{-4}$$

$$\therefore\ y=3/4\,x+11/4$$

$$\therefore\ m_2=3/4$$

Como $L_1 \perp L_2$ del resultado anterior sabemos que: $m_1 m_2=-1$

$$m_1\,(3/4)=-1$$

$$\therefore\ m_1=-4/3$$

Ahora para encontrar la ecuación de L_1 sabemos que pasa por $(-1,-3)$ y que su pendiente es $m_1=-4/3$, entonces sustituimos en $y=mx+b$

$$y=-4/3\,x+b$$

obtenemos b

$$-3=-4/3(-1)+b$$

$$-3=4/3+b$$

$$b=-3-4/3$$

$$b=-13/3$$

La ecuación buscada será:

$$y=-4/3\,x-13/3$$

o bién $y+4/3\,x+13/3=0$

lo que es lo mismo $3y+4x+13=0$

Hoja No. 16

1.- Un triángulo tiene como vértices los puntos $A(-2,1)$, $B(4,7)$ y $C(6,3)$.

a) Encontrar las ecuaciones de sus lados

b) Encontrar la medida de los ángulos interiores del triángulo.

2.- Una recta L pasa por el punto $(7,8)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2,2)$ y $(3,-4)$. Encontrar la ecuación de L.

3.- Demostrar (por medio de pendientes) que el triángulo cuyos vértices son $A(1,-2)$, $B(4,-2)$ y $C(4,2)$ es rectángulo.

Circunferencia

Taller No. 12

Objetivo del Taller.- que el alumno identifique a la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Material Necesario.- 1 base, tachuelas y listones o estambres.

Pasos a Seguir.-

1.- Recorta un mínimo de 8 trozos de estambre o listón de exactamente el mismo tamaño.

2.- Clava una tachuela en el centro de tu base de tal forma que fijes uno de los extremos de todos los listones.

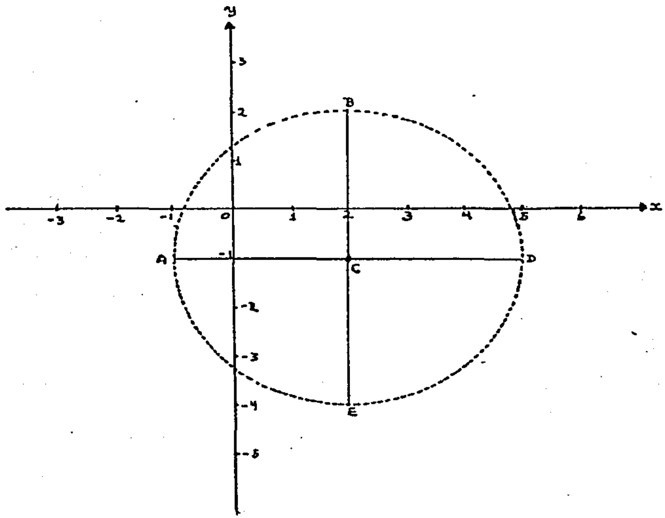
3.- Fija el otro extremo de cada uno de los listones estirándolos a toda su magnitud con las tachuelas.

4.- Une las tachuelas con estambre o listón.

¿Qué figura se forma?

5.- De acuerdo a lo anterior, proporciona tu definición de circunferencia.

Ahora dibujemos en el plano de coordenadas una circunferencia, señalando en ella cuales son las coordenadas de su centro, cuál es la distancia constante (radio) y cinco puntos que esten en la circunferencia; para lo cual utilizaremos regla y compás



La figura anterior se hizo tomando como centro el punto de coordenadas $(2,-1)$, el compás lo abrimos a una distancia de 3 unidades por lo que el radio es $r = 3$.

Para encontrar alguno de los puntos que están sobre la circunferencia procedemos como sigue:

1.- Trazamos dos rectas perpendiculares que se intersecten en c, encontrando sobre la circunferencia los puntos A, B, D, E de los que sabemos:

$d(A\,C) = 3$, $d(B,C) = 3$, $d(D,C) = 3$ y $d(E\,C) = 3$.

Por lo que podemos observar en el plano que las coordenadas de estos puntos son:

$B(2,2)$, $A(-1,-1)$, $E(2,-4)$ y $D(5,-1)$

2.- Para encontrar un quinto punto digamos F, podríamos proceder como sigue:

en $F(x,y)$ podríamos fijar $x = 4$ y encontrar "y" por medio de la observación en la gráfica, "parece ser" que la ordenada "y" buscada es 1.5, pero este resultado no es demasiado preciso, por el posible error en el dibujo, entonces tenemos que:

$F(4, y)$ y $C(2, -1)$ y $d(F, C) = 3$ (radio)

Por lo cual basta sustituir en nuestra fórmula de distancia entre dos puntos:

$$3 = \sqrt{(2-4)^2 + (-1-y)^2}$$
$$9 = (2-4)^2 + (-1-y)^2$$
$$9 = (-2)^2 + (-1-y)^2$$
$$5 = (-1-y)^2$$
$$(-1-y)^2 = 5$$
$$-1-y = \sqrt{5}$$
$$-y = \sqrt{5} + 1$$
$$y = -\sqrt{5} - 1$$

pero sabemos que:

$$\sqrt{5} = 2.21 \quad o \quad \sqrt{5} = -2.21$$

$\therefore \quad y = -2.21 - 1$

$y = -3.21$ aproximadamente

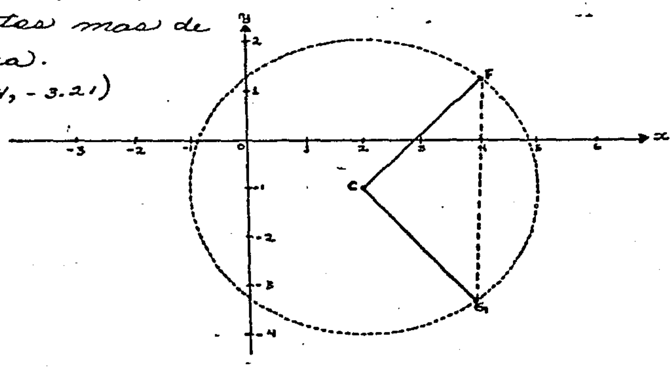
ó

$y = -(-2.21) - 1$

$y = 1.21$ aproximadamente

lo cual implica que podemos tener las coordenadas de dos puntos mas de la circunferencia.

$F(4, 1.21)$ y $G(4, -3.21)$



Ficha No. 17.

1.- Dibuja en el plano de coordenadas (una para cada una) las siguientes circunferencias:

a) con centro en $(0, 2)$ y $r = 2$

b) con centro en $(-3, 4)$ y $r = 5$

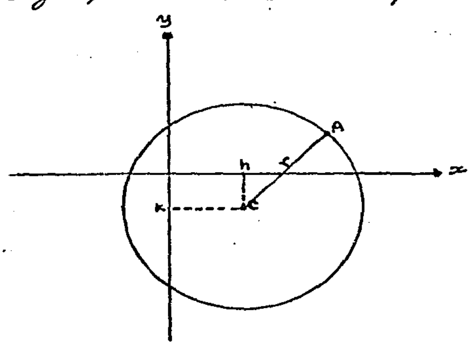
c) con centro en $(1/2, 3)$ y $r = 5/2$

2.- Encuentra ocho puntos de cada una de las circunferencias del ejercicio (1)

Ecuación General de una Circunferencia

Para poder encontrar la ecuación de una circunferencia, como ya lo podrás suponer haremos uso de la fórmula de distancia entre dos puntos.

Supongamos que $c(h, K)$ son las coordenadas del centro de cualquier circunferencia y r su radio, la cual gráficamente se representa como:



Además supongamos que $A(x, y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia.

Sabemos que:

$$d(A, c) = r$$

De donde sustituyendo $A(x, y)$ y $c(h, K)$ en la fórmula de distancia tendremos :

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Ahora bien uno de nuestros propósitos es dada la gráfica encontrar la ecuación correspondiente; pero si tenemos la gráfica entonces conocemos el centro y el radio de la circunferencia (o sea conocemos h, K y r) por lo que para encontrar la ecuación lo único que tenemos que hacer es desarrollar la fórmula anterior algebráicamente.

Esto es

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

desarrollando los binomios

$$r^2 = x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2$$

ordenando e igualando a cero

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

son valores conocidos h, k y r^2 entonces a $-2h$ le llamaremos A, y a $-2k$ le llamaremos B y a $h^2 + k^2 - r^2$ le llamaremos C, por lo que la ecuación de la circunferencia en su forma general será de la forma :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

donde :

$$\left.\begin{aligned} A &= -2h \\ B &= -2K \\ C &= h^2 + K^2 - r^2 \end{aligned}\right\} *$$

Ejemplo

Encontrar la ecuación de una circunferencia en su forma general con centro en $C(-2, 2/3)$ y $r = 5$.

Solución

Sustituyendo en $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

tenemos:

$$5 = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-2/3)^2}$$

$$25 = (x+2)^2 + (y-2/3)^2$$

$$25 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4/3\,y + 4/9$$

ordenando e igualando a cero

$$x^2 + y^2 + 4x - 4/3\,y + 4/9 + 4 - 25 = 0$$

$\therefore \quad x^2 + y^2 + 4x - 4/3\,y - 185/9 = 0$ es la ecuación deseada

Notas:

1.- Si deseamos tener en esta ecuación números enteros podemos multiplicar toda la ecuación por 9 obteniendo:

$$9x^2 + 9y^2 + 36x - 12y - 185 = 0$$

2.- De acuerdo a las igualdades de (*) podemos sustituir directamente los valores de h, k, y r dados en el enunciado del ejercicio para obtener la ecuación.

$h = -2 \qquad k = 2/3 \qquad r = 5$

de $A = -2h$, tenemos que $A = -2(-2) = 4$

de $B = -2k$, tenemos que $B = -2(2/3) = -4/3$

y de $C = h^2 + k^2 - r^2$ tenemos que $C = (-2)^2 + (2/3)^2 - (5)^2$

$\therefore C = -185/9$

sustituyendo en la forma general

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

tenemos

$$x^2 + y^2 + 4x + 4/3\,y - 185/9 = 0$$

o bien

$$9x^2 + 9y^2 + 36x - 12y - 185 = 0$$

Ficha No 18

Encuentra la ecuación en su forma general de las tres circunferencias de la ficha anterior.

a) Desarrollando algebráicamente

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

b) Sustituyendo directamente los valores de A, B y C en

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Pasemos ahora a tratar de alcanzar el otro propósito planteado para la geometría analítica.

— Dada la ecuación encontrar la gráfica correspondiente.

Ejemplo

Encontrar la gráfica de la ecuación

$$x^2+y^2+5x-4y+2=0$$

Para hacer la gráfica de la ecuación anterior es necesario obtener el centro y el radio de la circunferencia (o sea que se necesita encontrar el valor de h, k, r).

De la ecuación sabemos que:

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & y & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & & -4 & & 2 \end{array}$$

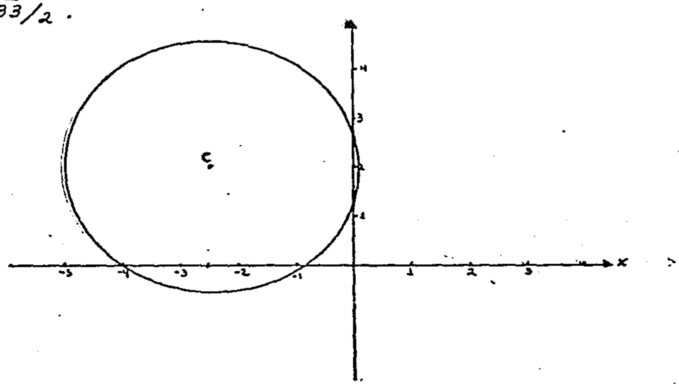
pero

$$\left.\begin{array}{lll} A=-2h & \therefore & h=-A/2 \\ B=-2k & \therefore & k=-B/2 \\ C=h^2+k^2-r^2 & \therefore & r=\sqrt{\left(-\frac{A}{2}\right)^2+\left(-\frac{B}{2}\right)^2-C} \end{array}\right\} **$$

por lo que sustituyendo los valores de A, B y C en ** se tiene:

$$h=-5/2$$
$$k=-(-4/2)=2$$
$$r=\sqrt{(-5/2)^2+(-4/2)^2-2}=\sqrt{33}/2$$

por lo que la ecuación $x^2+y^2+5x-4y+2=0$ tiene por gráfica una circunferencia con centro en $(-5/2, 2)$ y radio $\sqrt{33}/2$.



Ficha No 19

Dibuja la gráfica de las siguientes ecuaciones

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 12y + 1 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 10x + 8y + 4 = 0$

Lugares Geométricos de la Forma $y = ax^2 + b$

Dada una ecuación el método que se utiliza generalmente para obtener la gráfica correspondiente es el de tabulación.

Ejemplo

Encontrar la gráfica de la ecuación $5x^2 - 2y = 4$.

Para tabular tenemos que despejar a "x" o a "y", despejemos a "y".

$$-2y = 4 - 5x^2$$

$$y = \frac{4 - 5x^2}{-2}$$

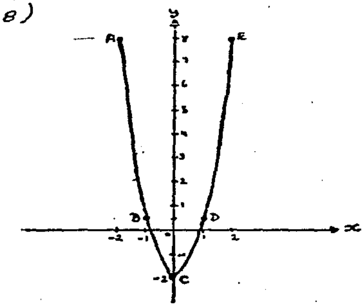
$$y = -2 + 5/2\, x^2$$

demos valores arbitrarios a x.

x	y
-2	$-2 + 5/2\,(-2)^2 = 8$
-1	$-2 + 5/2\,(-1)^2 = 1/2$
0	$-2 + 5/2\,(0) = -2$
1	$-2 + 5/2\,(1) = 1/2$
2	$-2 + 5/2\,(2) = 8$

generalmente se acostumbra a dar valores de 0, positivos y negativos.

Los puntos a graficar serán $A(-2, 8)$, $B(-1, 1/2)$, $C(0, -2)$ $D(1, 1/2)$, $E(2, 8)$



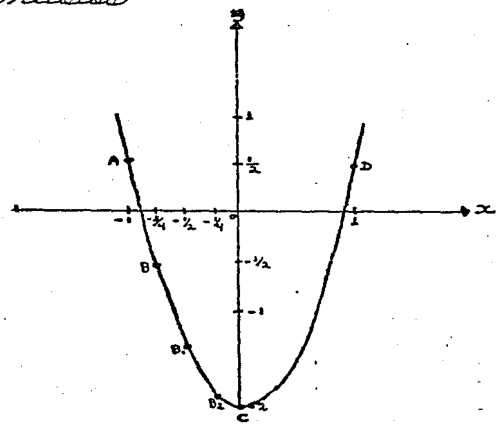
La forma en que se ordenan los puntos es importante porque nos indican el recorrido de la gráfica.

Puesto que la ecuación no tiene la forma $Ax + By + C = 0$ no es una recta ni tampoco una circunferencia ya que no tiene la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ pero el grado es mayor que 1 por lo que diremos que se trata de una curva, de modo que los puntos A, B, C y D se unirán mediante una curva.

Cuando se tenga duda de como unir los puntos de la gráfica, se deberán tabular mas puntos intermedios, por ejemplo queremos ver que pasa en la gráfica de B a C.

	x	y
Puntos Intermedios: B	-1	$-2+5/2(-1)^2 = 1/2$
B_1	$-3/4$	$-2+5/2(-3/4)^2 = -19/32$
B_2	$-1/2$	$-2+5/2(-1/2)^2 = -11/8$
B_3	$-1/4$	$-2+5/2(-1/4)^2 = -59/32$
C	0	$-2+5/2(0) = -2$

Graficándolos



Ficha No. 20

Encontrar la gráfica de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2-3y+1=0$

b) $4x-y^2+5=0$

c) $y=x^2$

d) $y=x^3$

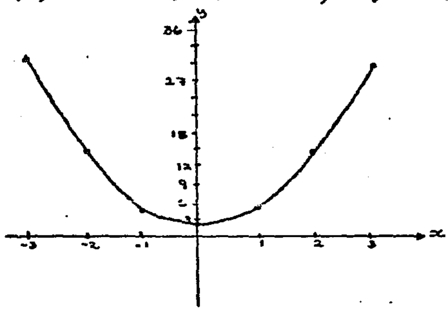
e) $2y=x^2+1$

Pasemos ahora a ver cómo dada la gráfica encontramos la ecuación correspondiente, para la cual utilizaremos el método de diferencias divididas y el algoritmo de Newton.

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la gráfica que pasa por los puntos:

$A(0,2)$ $B(1,5)$ $C(2,14)$ $D(3,29)$ $E(-1,5)$ $F(-2,14)$ $G(-3,29)$



Pasos a Seguir

1.- Acomoda en una tabla de tabulación los puntos dados.

x	y			
0	2			
		$\frac{5-2}{1-0}=3$		
1	5		$\frac{9-3}{2-0}=3$	
		$\frac{14-5}{2-1}=9$		$\frac{3-3}{3-0}=0$
2	14		$\frac{15-9}{3-1}=3$	
		$\frac{29-14}{3-2}=15$		$\frac{3-3}{-1-1}=0$
3	29		$\frac{6-15}{-1-2}=3$	
		$\frac{5-29}{-1-3}=6$		$\frac{3-3}{-2-2}=0$
-1	5		$\frac{-9-6}{-2-3}=3$	
		$\frac{14-5}{-2-(-1)}=-9$		$\frac{3-3}{-3-3}=0$
-2	14		$\frac{-15-9}{-3-(-1)}=3$	
		$\frac{29-14}{-3-(-2)}=-15$		
-3	29			

2.- El método se llama diferencias divididas

a) Las diferencias las obtendremos de los picos (de la figura de la tabla anterior) y las diferencias de ellas mismas, a éstas les llamaremos primeras diferencias (obsérvese que las primeras diferencias divididas representan las pendientes de las rectas que unen las parejas de puntos correspondientes.

b) Las siguientes diferencias las obtendremos de las líneas en rojo (como lo muestra la tabla anterior) estas serán las segundas diferencias.

c). Las terceras diferencias se obtienen de las líneas punteadas en azul (como se muestra en la tabla anterior)).

d) Así sucesivamente

e) El proceso termina cuando obtenemos todas las diferencias iguales, en este ejemplo resultaron en las segundas, por eso en las terceras obtuvimos cero.

3.- Estos resultados se sustituyen en la fórmula que dice:

$$y = y_1 + 1^a\,dif\,(x - x_1) + 2^a\,dif\,(x - x_1)(x - x_2) + 3^a\,dif\,(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots$$

De la tabla anterior llamaremos

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4
$\vdots$	$\vdots$

$$\underbrace{1^a\,dif \qquad 2^a\,dif \qquad 3^a\,dif}_{\text{Serán siempre los valores que están en } 1^{er} \text{ lugar.}}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$y_1 = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ .....

$1^a\,dif = 3$, $2^a\,dif = 3$, $3^a\,dif = 0$

de donde:

$$y = 2 + 3(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1)$$

desarrollando

$$y = 2 + 3x + 3x(x - 1)$$

$$y = 2 + 3x + 3x^2 - 3x$$

$$\therefore\ y = 2 + 3x^2$$

Igualando a cero

$$-3x^2 + y - 2 = 0$$ que es la ecuación deseada.

Ejemplo

Una curva pasa por los puntos (0, -1), (1, 4) (2, 39), (3, 134); encontrar la ecuación correspondiente a esta gráfica

x	y	1as dif	2as dif	3as dif
0	-1			
		$\frac{-4-(-1)}{1-0}=5$		
1	4		$\frac{35-5}{2-0}=15$	
		$\frac{39-4}{2-1}=35$		$\frac{30-15}{3-0}=15$
2	39		$\frac{95-35}{3-1}=30$	
		$\frac{134-39}{3-2}=95$		$\frac{45-30}{4-1}=15$
3	134		$\frac{185-95}{4-2}=45$	
		$\frac{319-134}{4-3}=185$		
4	319			

$$y=-1+5(x-0)+15(x-0)(x-1)+5(x-0)(x-1)(x-2)$$
$$y=-1+5x+15x(x-1)+5x(x-1)(x-2)$$
$$y=-1+5x+15x^2-15x+(5x^2-5x)(x-2)$$
$$y=-1+5x+15x^2-15x+5x^3-15x^2+10x$$
$$y=-1+5x^3$$

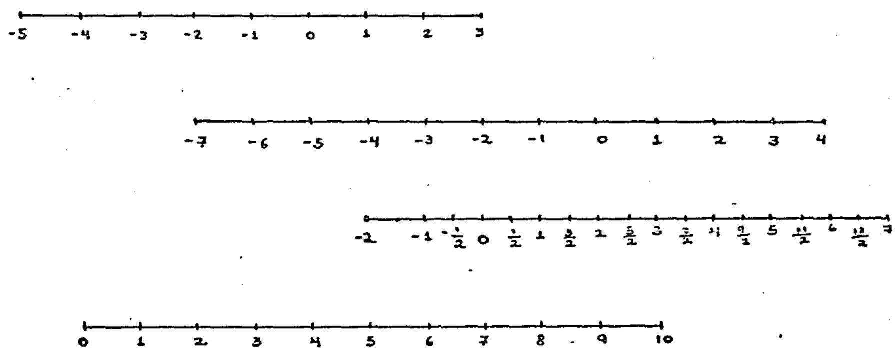
$\therefore\ 5x^3-y-1=0$ es la ecuación deseada.

Ficha No. 21

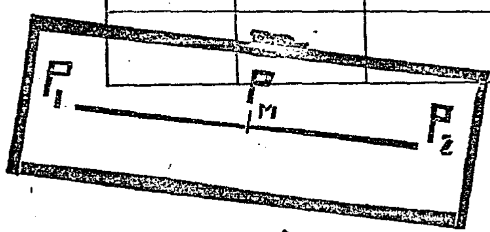
Encontrar las ecuaciones de las gráficas que pasan por los puntos:

a) (0, 1) (-1, -1) (2, 5) (3, 7) (4, 9) (5, 11) (6, 13)
b) (0, 0) (1, 2) (2, 8) (3, 18) (4, 32) (5, 50)
c) (-9, 1034) (-8, 730) (-1, -310) (0, -10) (1, 134) (2, 110) (4, -370)

Apéndice

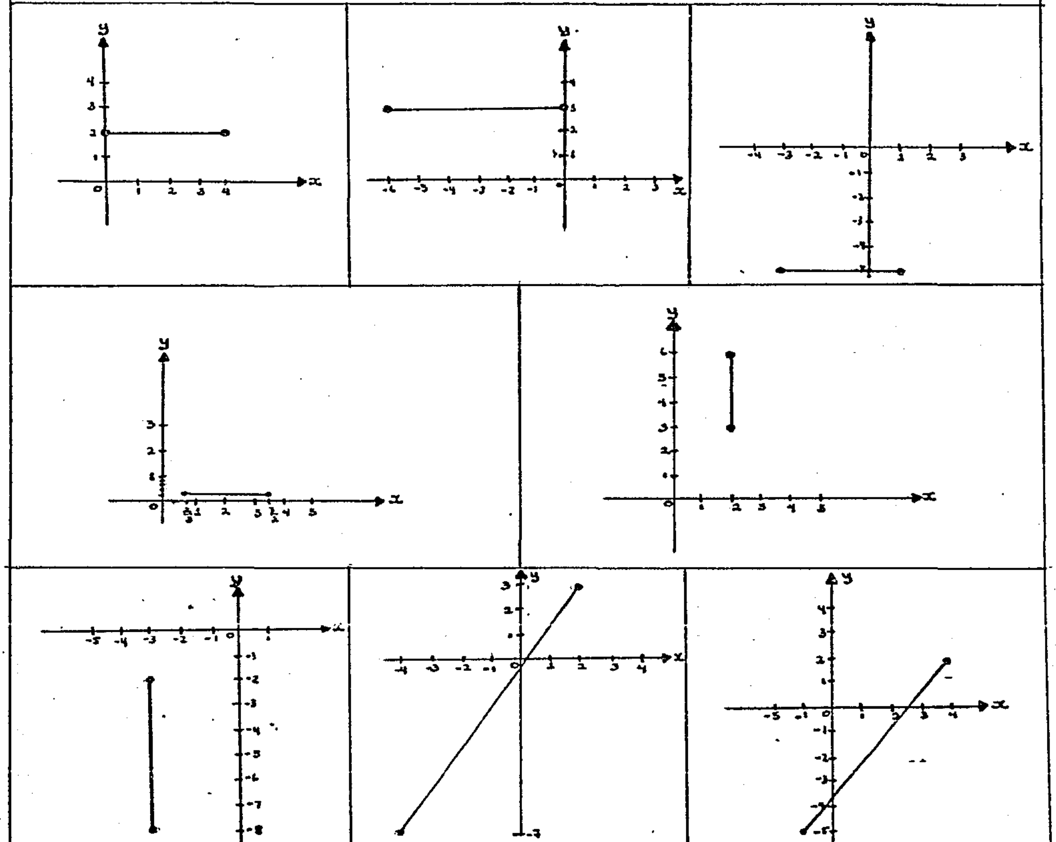


P_1 ( )	P_2 (?)	P_M (?)
-5		
-7		
$-\frac{1}{2}$		
3		



Con tu mica encuentra la coordenada P_2
así como el punto medio de $\overline{P_1 P_2}$.

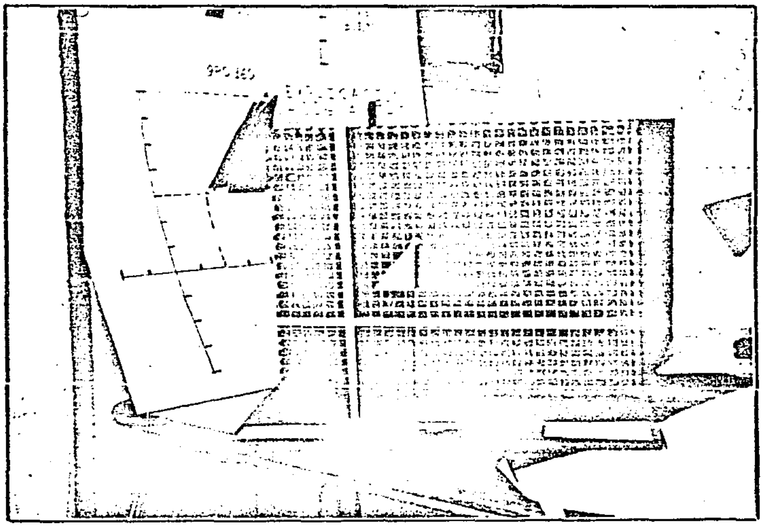
Apéndice



Coordenadas	
1.- $A_1(0,2)$ $B_1(4,2)$	P_M $\overline{A_1B_1}$ $(2, 2)$
2.- $A_2(0,3)$ $B_2(-6,3)$	P_M $\overline{A_2B_2}$ $(-3, 3)$
3.- $A_3(-3,-5)$ $B_3(1,-5)$	P_M $\overline{A_3B_3}$ $(-1,-5)$
4.- $A_4(\frac{2}{3},\frac{1}{5})$ $B_4(\frac{7}{2},\frac{1}{5})$	P_M $\overline{A_4B_4}$ $(\quad)$
5.- $A_5(2,3)$ $B_5(2,6)$	P_M $\overline{A_5B_5}$ $(2,\frac{9}{2})$
6.- $A_6(-3,-2)$ $B_6(-3,-8)$	P_M $\overline{A_6B_6}$ $(-3,-5)$
7.- $A_7(2,3)$ $B_7(-4,-7)$	P_M $\overline{A_7B_7}$ $(-1,-2)$
8.- $A_8(4,2)$ $B_8(-1,-5)$	P_M $\overline{A_8B_8}$ $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

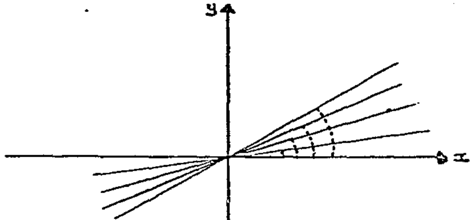
Apéndice

Taller para obtener la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

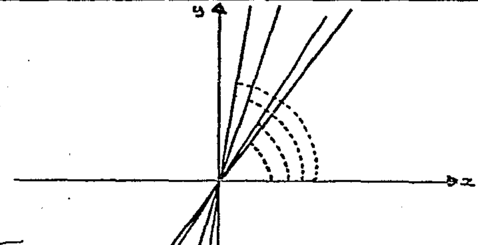


Presentado por alumnos del tercer semestre en la exposición "El Alumno en las Matemáticas".

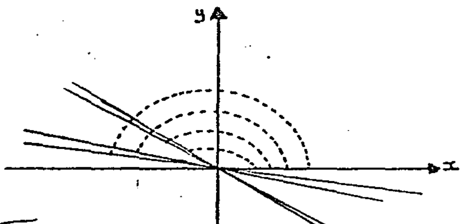
Apéndice



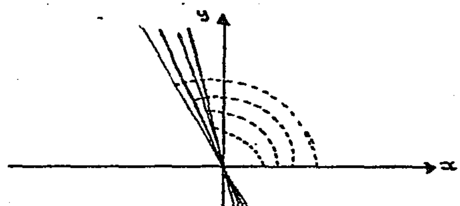
Trazar las rectas:
$y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{3}x$
$y = \frac{2}{3}x$, $y = \frac{1}{7}x$ y medir ángulo



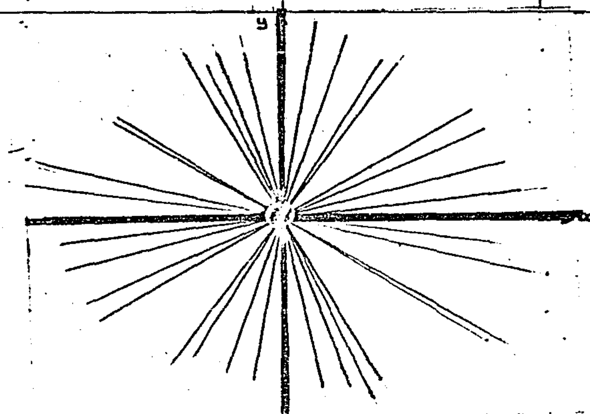
Trazar las rectas:
$y = 2x$, $y = \frac{5}{3}x$
$y = 7x$, $y = \frac{7}{2}x$ y medir ángulo



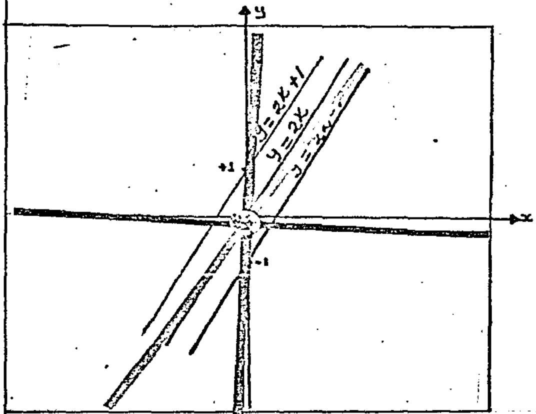
Trazar las rectas:
$y = -\frac{2}{3}x$, $y = -\frac{5}{7}x$
$y = -\frac{1}{4}x$, $y = -\frac{2}{9}x$ y medir ángulo

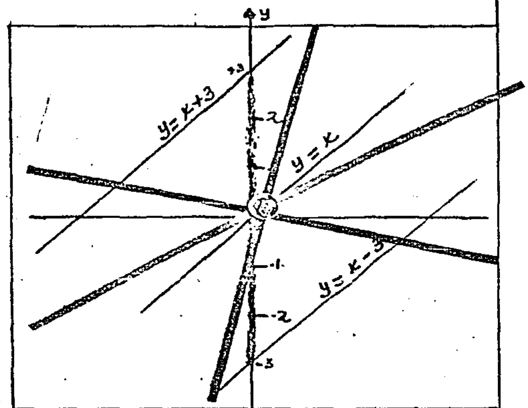


Trazar las rectas:
$y = -\frac{7}{3}x$, $y = -5x$
$y = -3x$, $y = -\frac{4}{2}x$ y medir ángulo.

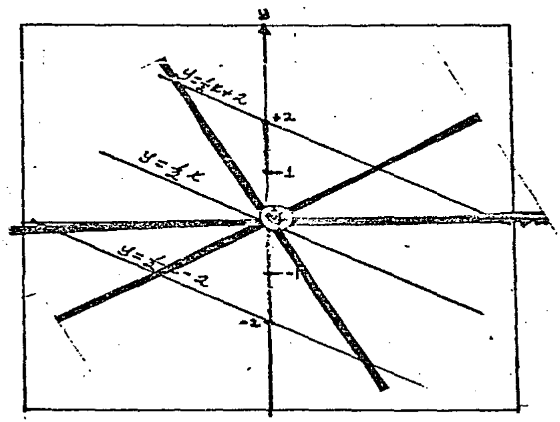


Apéndice





Translada como se indica en el taller las rectas $y = 2x$, $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$

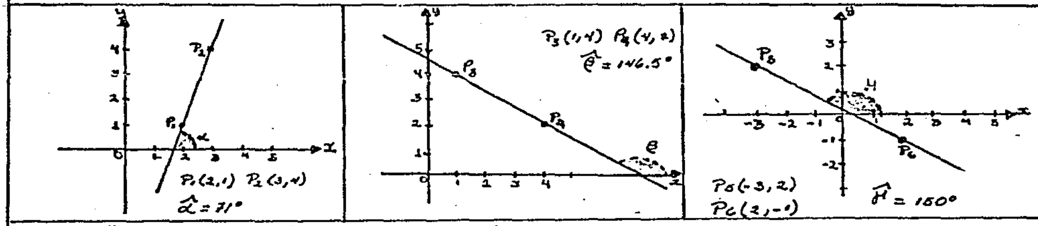


Apéndice

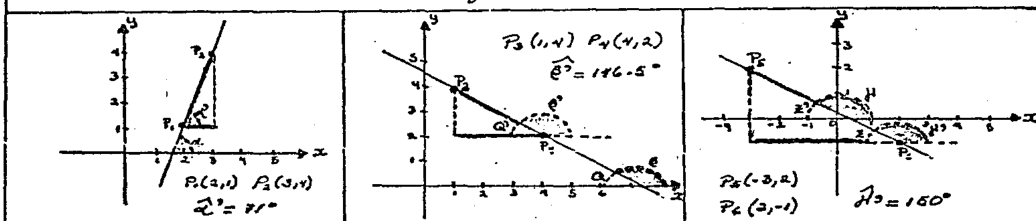
1.- Definición de tangente en un triángulo rectángulo

$$\tan \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

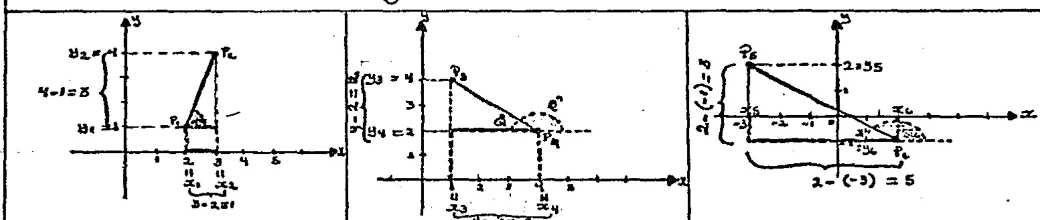
2.- Localizar puntos y dibujar rectas y ángulos de inclinación así como tomar las medidas de éstos.



3.- Dibujar triángulos rectángulos y marcar con color los catetos así como los ángulos α' θ', H'



4.- Trasladar cateto opuesto y cateto adyacente a los ejes correspondientes y encontrar sus medidas.



5.- Encontrar la $\tan \hat{\alpha}$, $\tan \hat{\theta}$ y $\tan \hat{H}$

$\tan \hat{\alpha} = \tan \hat{\alpha}' = \frac{4-1}{3-2} = \frac{3}{1}$	De la misma forma encuentra la tangente de $\hat{\theta}$ y $\hat{H}$ teniendo en cuenta que éstos ángulos son complemento de $\hat{Q}$, $\hat{Z}$.

Bibliografía

1.- A.V. Pogorelov — Geometría Elemental, Edit. Mir Moscú.

2.- Baldor — Geometría y Trigonometría, Edit Vasco Americana.

3.- Mervin L. Keedy, Charles W Nelson — Geometría, Una Moderna Introducción. Centro Regional de Ayuda Técnica.

4.- H.S.M Coxeter F.R.S — Fundamentos de Geometría. Centro Regional de Ayuda Técnica.

5.- Jorge Wentworth, David Eugenio Smith — Geometría Plana y del Espacio. Edit. Porrúa.

6.- Edwin Moise — Elementos de Geometría Superior. Centro Regional de Ayuda Técnica.

7.- Jurgensen — Geometría Moderna. Publicaciones Culturales.

8.- J.E. Thompson — Geometría. Edit. Hispano Americana.

9.- Zulueta F. — Geometría Razonada y Trigonometría. Edición del Autor.

10.- Fetisov — La Demostración en Geometría. Edit. Limusa Willey.

11.- L. Santaló — Geometrías no Euclidianas. Edit. Universitaria de Buenos Aires.

12.- Hemmerling — Geometría Elemental. Edit. Limusa Wiley.

13.- Lluis E. y Otros — Apuntes de Geometría. Edit. C.E.S.A.

14.- Repetto, Linskens, Fesquet — Geometría 1, 2, 3. Edit Kapeluz

15.- Barnet Rich — Geometría Plana con Coordenadas. Edit. Mc Graw Hill.

16.- Y. A. I Perelman — Problemas y Experimentos Recreativos. Edit. Mir Moscú.

17.- Morris Kline — Matemáticas en el Mundo Moderno, Selecciones de Scientific American. Edit. Blume.

18.- Newman R. James — El Mundo de las Matemáticas. Colección Sigma. Edit. Grijalbo. Vol. I.

19.- Historia del Arte. Tomos 4, 5, 11, 12. Edit Salvat

20.- J. Heinert - J Gutiérrez — Estructuras. Parte III

21.- Francisco J. Calderon B — Dibujo Técnico Industrial

22.- Carl Sagan — Cosmos

23.- Lehman — Geometría Analítica, Edit UTEHA.

24.- Mª Guadalupe Lucio Gómez — Geometría Analítica 1. Edit. Limusa.

25.- Guillermo Gómez A. — Notas Sobre Historia de la Geometría.

26.- Gardner Martin — Gotcha (Paradoxes to puzzle-caiddelight)

27.- Wade y Taylor — Geometría Analítica Bidimencional. Edit. Limusa.

28.- Efimov — Curso Breve de Geometría Analítica. Edit. Progreso

29.- Gelfand y Otros — El Método de Coordenadas. Edit. Mir, Moscú

30.- N.C.T.M.

30.- N.C.T.M — Gráficas, Relaciones y Funciones. Edit. Trillas.

31.- Shteinhaus G. — Matematicheski Kaleidoskop Edit. Gitl.

32.- British Journal of Psychology, 1958