UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

MA. ESTELA LEDESMA CANO

MEXICO, D. F. 1985

I N D I C E   D E   C O N T E N I D O

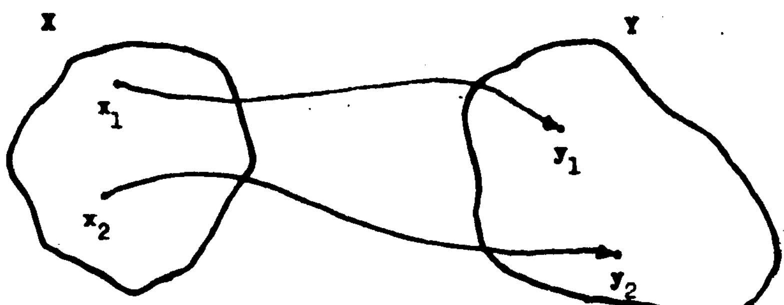
INTRODUCCION

El concepto de función es uno de los fundamentales de la matemática. La idea de correspondencia en la vida diaria, nos da la noción de lo que es una función. Por ejemplo:

- a cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento.
- a cada automovil le corresponde un número de placas.
- a cada instante de tiempo le corresponde una velocidad de un objeto en movimiento.
- a cada estado de la república le corresponde una ciudad capital.

La idea básica de los ejemplos anteriores, es la correspondencia que existe entre los objetos del primer conjunto con los objetos del segundo conjunto.

Cada uno de los ejemplos mencionados representa una función, que se pueden visualizar mediante diagramas como sigue:



1. F U N C I O N E S

DEFINICION:

Una función f de un conjunto X a un conjunto Y, es una regla que asocia a cada elemento x de X un único elemento y de Y. Al elemento y se le llama la IMAGEN de x bajo f y se denota f(x). Al conjunto X se le denomina DOMINIO de la función. Al conjunto constituido por todas las imágenes de los elementos de X se le llama RANGO, ó CODOMINIO.

Diagramas como el de la figura 1.1 sirven para entender el concepto de función. Las flechas indican que los elementos f(x), f(w), f(z), y f(a) de Y están asociados a los elementos x, w, z, y a de X respectivamente.

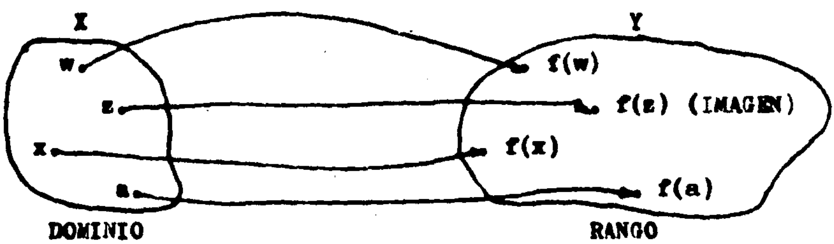


figura 1.1

Algunas veces, el estudiante confunde los símbolos de f y f(x). Recuerde que f se emplea para representar la función, la cual no está ni en X ni en Y. No obstante, f(x) es el elemento en Y, que f le asigna a x.

Llamaremos DOMINIO NATURAL de una función al conjunto de todos los puntos para los cuales la función toma un valor definido y único.

EJEMPLO 1.1

Sea f la función con dominio X= $\{1,2,3,4\}$ tal que $f(x)= x+2$. Determine el rango o codominio de la función y haga un diagrama.

Solución:

Nótese que el dominio natural de la función es el conjunto de los números reales, y que el rango o codominio también es el conjunto de los núme os reales.

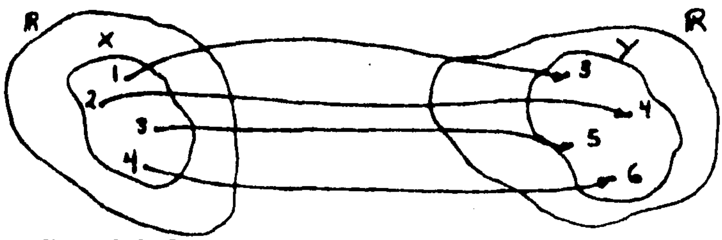
para $x=1$ la imagen es $f(1)= 1+2 =3$

$x=2$ $f(2)= 2+2 =4$

$x=3$ $f(3)= 3+2 =5$

$x=4$ $f(4)= 4+2 =6$

Por lo tanto el rango o codominio es Y= $\{3,4,5,6\}$



EJEMPLO 1.2

Sea f la función con dominio $\mathbb{R}$ y $f(x)=x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$

Calcule; a) $f(6)$; b) $f(-6)$; c) $f(\sqrt{3})$; d) determine el rango de f.

Solución:

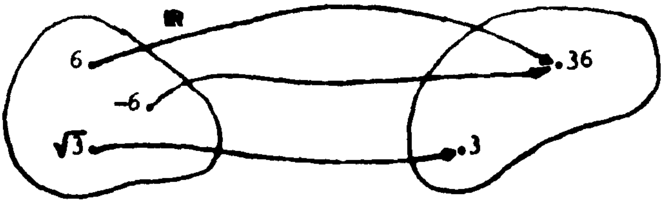
Como $f(x)=x^2$ entonces:

$f(6)= (6)^2=36$

$f(-6)=(-6)^2=36$

$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$

El rango de f es el conjunto de todos los números reales positivos y el cero ya que el cuadrado de cualquier número real, es positivo ó cero y todo número real positivo ó cero tiene raíz cuadrada.



Es importante repetir el hecho de que a cada x en X se le asocia una única imagen f(x) en Y; sin embargo elementos diferentes, como 6 y -6 del ejemplo anterior, pueden tener la misma imagen en Y.

EJEMPLO 1.3

Sea X el conjunto de reales positivos, y f la función definida por $f(x)=\sqrt{x}+1$ para todo x en X. Calcule:

a) $f(4)$; b) $f(\pi)$; c) $f(b+c)$; d) $f(b)+f(c)$

Solución:

$f(4)=\sqrt{4}+1=2+1=3$

$f(\pi)=\sqrt{\pi}+1$

$f(b+c)=\sqrt{b+c}\ +1$

$f(b)+f(c)=(\sqrt{b}+1)+(\sqrt{c}+1)=\sqrt{b}+\sqrt{c}+2$

EJEMPLO 1.4

Sea $f(x)=x^2+3x-2$ para todo x en $\mathbb{R}$. Si a y t son números reales y $t\neq 0$ encuentre: $\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$

Solución:

$f(a+t)=(a+t)^2+3(a+t)-2=(a^2+2at+t^2)+(3a+3t)-2$

$f(a)=a^2+3a-2$

entonces

$$\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=\frac{(a^2+2at+t^2)+(3a+3t)-2-(a^2+3a-2)}{t}=$$

$$=\frac{2at+t^2+3t}{t}=2a+t+3$$

EJEMPLO 1.5

Dado $f(x)=x^3-5x^2-4x+20$ demostrar que $f(t+1)=t^3-2t^2-11t+12$

Solución:

$$f(t+1)=(t+1)^3-5(t+1)^2-4(t+1)+20 =$$
$$=t^3+3t^2+3t+1-5(t^2+2t+1)-4t-4+20=$$
$$=t^3+3t^2+3t+1-5t^2-10t-5-4t+16=$$
$$=t^3-2t^2-11t+12$$

EJEMPLO 1.6

Dado $f(x)=\frac{1}{x}$ demostrar que $f(x+h)-f(x)= -\frac{h}{x^2+xh}$

Solución:

Es importante notar que el dominio natural de la función es el conjunto de los reales excepto el cero.

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}=\frac{x-x-h}{x^2+xh}$$

EJEMPLO 1.7

Dado $g(x)=a^x$ demostrar que $g(y).g(z)=g(y+z)$

Solución:

$$g(y)=a^y \quad ; \quad g(z)=a^z \quad ; \quad g(y+z)=a^{y+z}$$

entonces:

$$g(y).g(z)= a^y.a^z= a^{y+z}=g(y+z)$$

EJEMPLO 1.8

Si $F(X)= 2x^2-x+3$ encuentre a) $F(a)$; b) $F(-a)$; c) $-F(a)$

Solución:

a) $F(a)=2a^2-a+3$

b) $F(-a)=2(-a)^2-(-a)+3= 2a^2+a+3$

c) $-F(a)= -(2a^2-a+3)= -2a^2+a-3$

EJEMPLO 1.9

Si $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 6 encuentre:

a) $g\ \dfrac{1}{a}$ b) $\dfrac{1}{g(a)}$

c) $g(a^2)$ d) $g(a)\ ^2$

e) $g(\ a)$ f) $g(a)$

Solución:

Obsérvese que el dominio natural de la función es el conjunto de números reales excepto los números 1 y -1.

a) $$g\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1} = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{1}{a^2}+1} = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{1+a^2}{a^2}} = \frac{2a^2}{a(1+a^2)} = \frac{2a}{1+a^2}$$

b) $$\frac{1}{g(a)} = \frac{1}{\frac{2a}{a^2+1}} = \frac{a^2+1}{2a}$$

c) $$g(a^2) = \frac{2(a^2)}{(a^2)^2+1} = \frac{2a^2}{a^4+1}$$

d) $$\left(g(a)\right)^2 = \left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2 = \frac{(2a)^2}{(a^2+1)^2} = \frac{4a^2}{a^4+2a^2+1}$$

e) $$g(\sqrt{a}) = \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2+1} = \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$$

f) $$\sqrt{g(a)} = \sqrt{\frac{2a}{a^2+1}} = \frac{\sqrt{2a(a^2+1)}}{\sqrt{(a^2+1)^2}} = \frac{\sqrt{2a^3+2a}}{a^2+1}$$

2. GRAFICAS DE FUNCIONES

Una función puede representarse gráficamente con diagramas (como se vió en la sección 1) o en un sistema de ejes coordenados. Esto es posible si se piensa en una función como un conjunto W de pares ordenados tales que, su primer elemento pertenezca al dominio de la función (llamémosle D_f) y el segundo elemento sea la imagen del primer elemento (f(x)), que pertenece al rango o codominio de la función (llamémosle R_f).

Es decir,

$$W=\left\{(x,f(x)) : x\in D_f,\ f(x)\in R_f\right\}$$

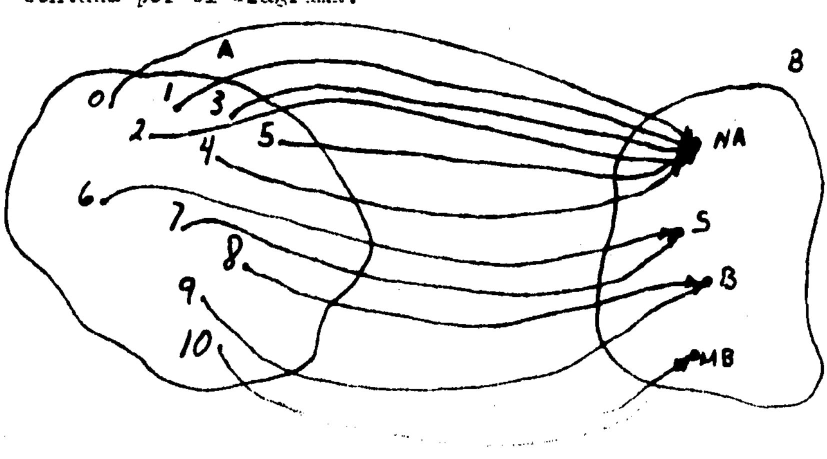
La gráfica de una función f es entonces, el conjunto G de parejas ordenadas en el plano que representan las parejas del conjunto W.

$$G=\left\{(x,y) \text{ parejas ordenadas } : (x,y)\in W\right\}$$

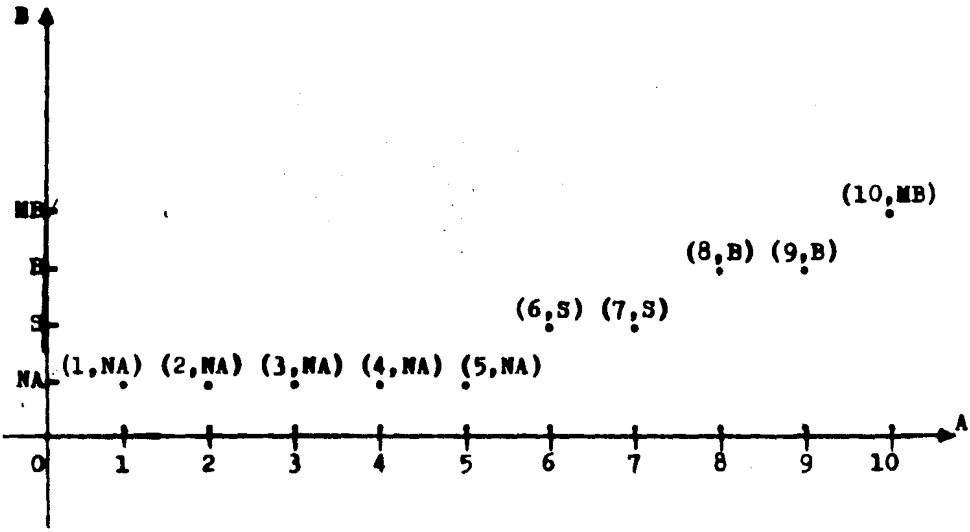
La representación geométrica de la gráfica de una función en un sistema de ejes coordenados, es el dibujo aproximado de los puntos del conjunto G.

EJEMPLO 2.1

Sea f la función que representa la correspondencia entre la escala numérica (de números naturales del 0 al 10) y el rendimiento escolar del alumno, es decir, es la función representada por el diagrama:



En éste caso el conjunto $W= \{(x,f(x)) \; ; \; x \in A \; , \; f(x) \in B\}$ y las parejas ordenadas en el plano que representan a W es aproximadamente :



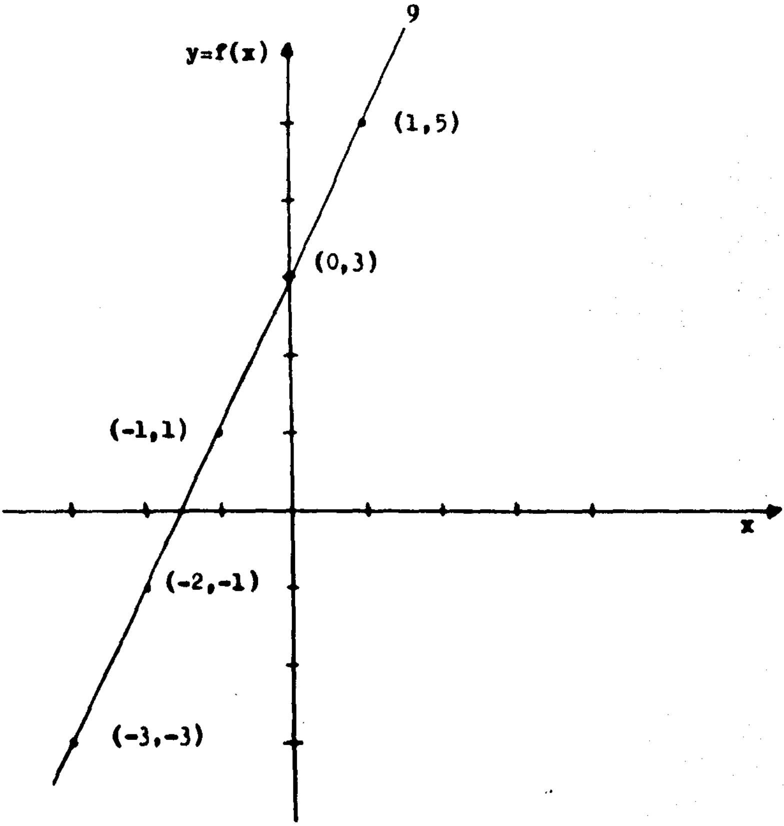
EJEMPLO 2.2

Trace la gráfica de f si $f(x)= 2x+3$ donde x es un real.

Solución:

El dominio natural de la función es el conjunto de todos los números reales. Como no es posible representarlos todos, tomamos únicamente algunos de ellos y trazamos aproximadamente la gráfica que representa a la función.

D_f	R_f	parejas ordenadas
x	y	(x,f(x))
-3	-3	(-3,-3)
-2	-1	(-2,-1)
-1	1	(-1,1)
0	3	(0,3)
1	5	(1,5)

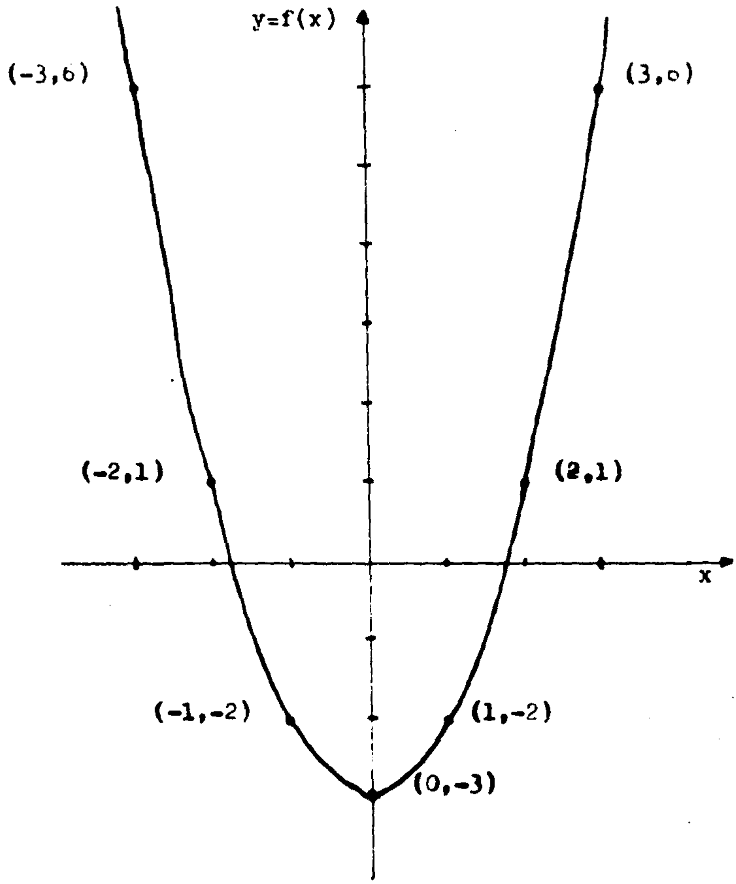


EJEMPLO 2.3

Trace la gráfica de f si $f(x)=x^2-3$ donde x es un número real.

Solución:

D_f x	R_f y	parejas ordenadas (x,f(x))
-3	6	(-3,6)
-2	1	(-2,1)
-1	-2	(-1,-2)
0	-3	(0,-3)
1	-2	(1,-2)
2	1	(2,1)
3	6	(3,6)



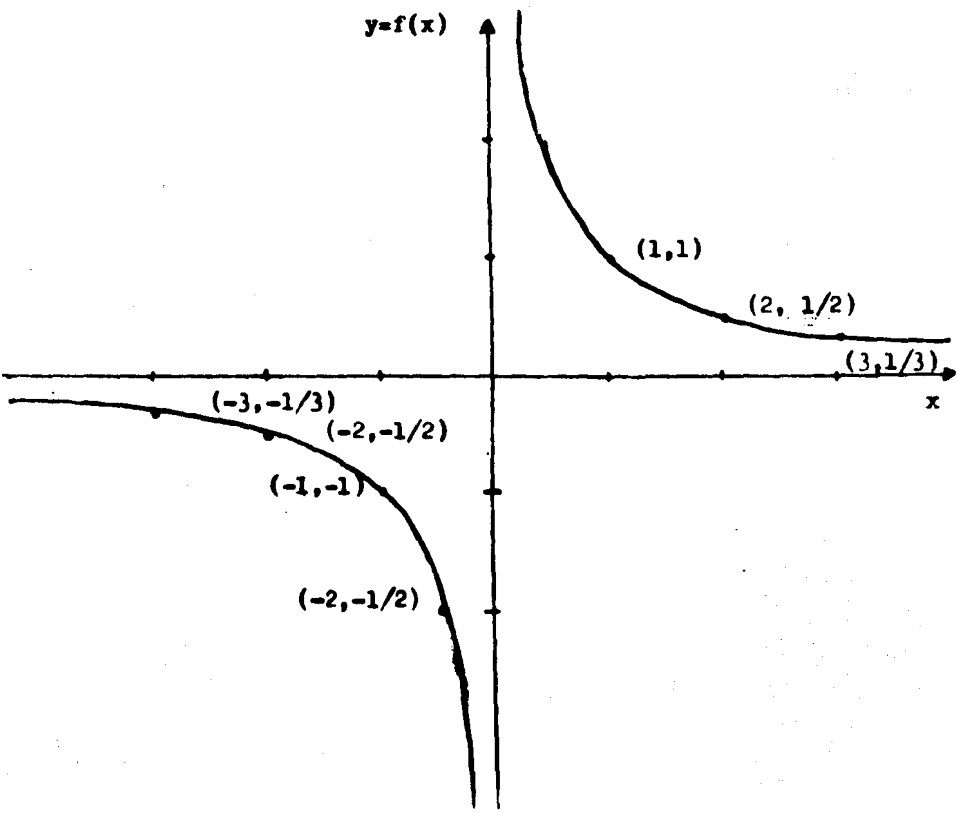
EJEMPLO 2.4

Dada la función $f(x)= \dfrac{1}{x}$ encontrar su gráfica.

Solución:

h)

x	y	parejas ordenadas (x, f(x))
-3	$\frac{-1}{3}$	$(-3, \frac{-1}{3})$
-2	$\frac{-1}{2}$	$(-2, \frac{-1}{2})$
-1	-1	$(-1, -1)$
$\frac{-1}{2}$	-2	$(\frac{-1}{2}, -2)$
0	no pertenece al dominio natural	
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$
3	$\frac{1}{3}$	$(3, \frac{1}{3})$

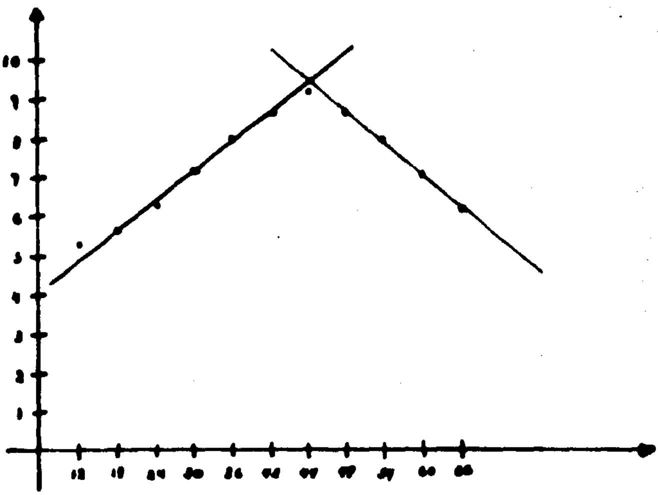


Existen leyes que describen la variación de cantidades físicas en donde el comportamiento de dichas cantidades no se pueden representar con una sola regla de correspondencia. Pensemos por ejemplo que se desea obtener el rendimiento de cierto cultivo en función de la cantidad de agua. Durante el experimento se obtienen los siguientes datos:

cantidad de agua	12	18	24	30	36	42	44	48	54	60	66
rendimiento del cultivo	5.27	5.68	6.25	7.2	8.02	8.71	9.02	8.71	8.01	7.2	6.26

Observamos que el rendimiento crece cuando la cantidad de agua aumenta pero hasta cierta cantidad de agua, ya que, si la cantidad de agua es grande, el rendimiento empieza a disminuir.

Graficamos los datos para que aproximadamente, observemos el comportamiento de la función que los pueda describir.

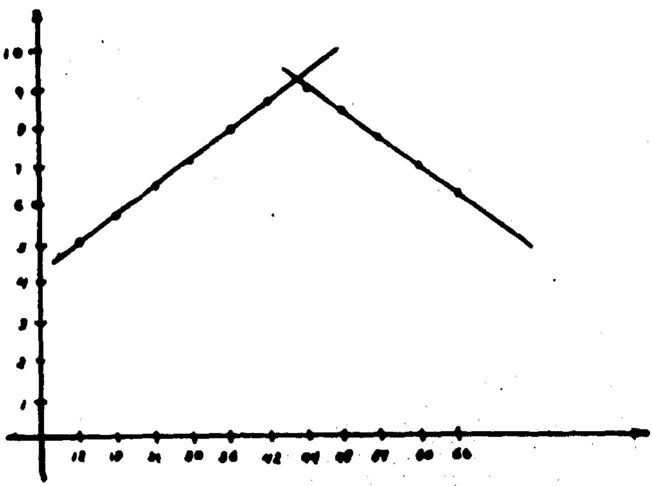


Tomando en cuenta que los datos observados aproximadamente definen dos rectas, la función que aproxima los valores observados se puede obtener por métodos analíticos. Dicha función puede definirse entonces de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{8}x+\dfrac{7}{2} & 12\leq x<44 \\[2ex] \dfrac{-1}{8}x+\dfrac{29}{2} & x\geq 44 \end{cases}$$

Esta función no obtiene los valores exactos del rendimiento del cultivo pero sí unos valores aproximados a ellos. Para demostrar lo anterior, construimos la tabla de valores de la función y su gráfica aproximada para compararla con los valores observados y su gráfica.

x	12	18	24	30	36	42	44	48	54	60	66
y	5	5.75	6.5	7.25	8	8.75	9	8.5	7.75	7	6.25



3. FUNCIONES ALGEBRAICAS

Todas las funciones consideradas en esta sección, se llaman algebráicas porque pueden obtenerse al efectuar un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación división y extracción de raíces. Además se estudiarán las propiedades de algunas funciones reales importantes por su frecuente uso en matemáticas.

3.1 FUNCION IDENTIDAD.

Es la función que tiene como dominio al conjunto de todos los números reales y está definida por f(x)=x.

En ésta función, a cada número real, le corresponde él mismo. La gráfica de la función idéntica, denotada por I, es la recta de pendiente uno que pasa por el origen (figura 3.1)

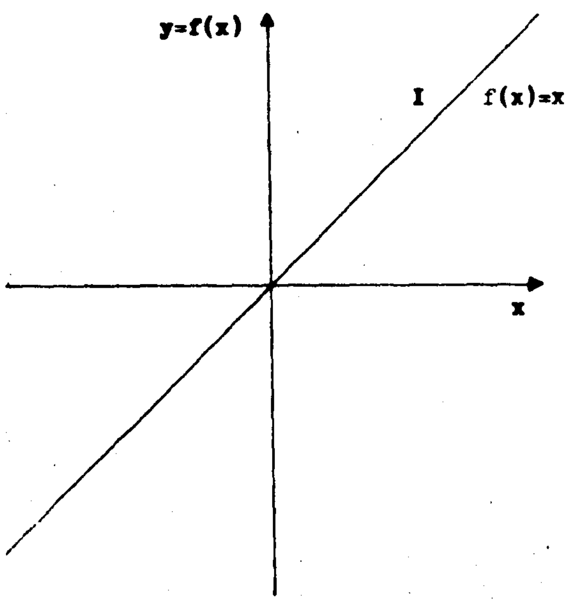


figura 3.1

3.2 FUNCION CONSTANTE.

Es la función cuyo dominio son los números reales y su rango un solo número real fijo 'c' tal que $f(x)=c$.

La gráfica es una recta paralela al eje 'x', cuya intersección con el eje 'y' es en el punto 'c'. (figura 3.2).

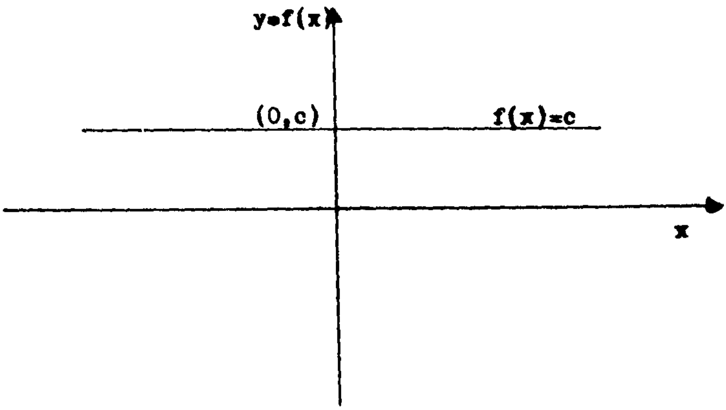


figura 3.2

3.3 FUNCION VALOR ABSOLUTO.

Es la función con dominio $\mathbb{R}$ y cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Nótese que ésta regla de correspondencia define el valor absoluto de un número x distinto de cero, como aquél que es positivo ente x y -x. El valor absoluto de 0 es 0.

Geométricamente, el valor absoluto de x es la distancia del origen al punto x.

Esta función se denota $|x|$; Por ejemplo:

$|2|=2$, $|-2|=-(-2)=2$, $|0|=0$

La gráfica de la función se ilustra en la figura 3.3.

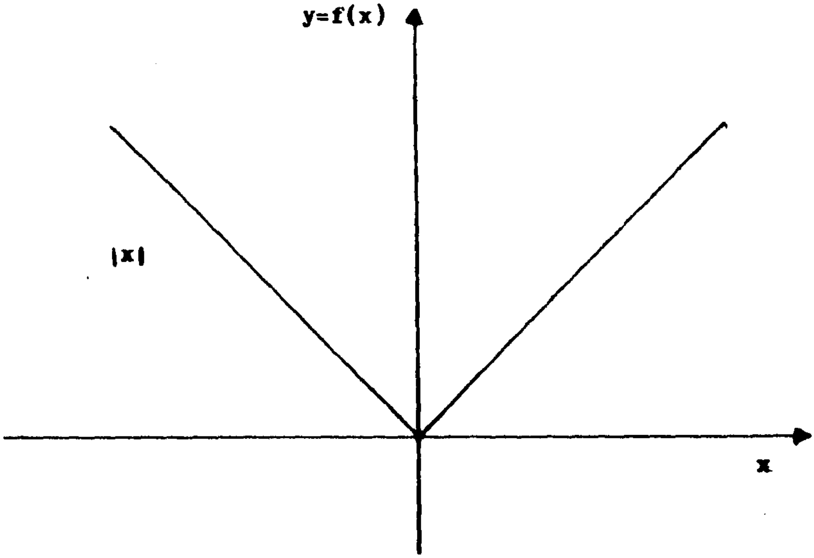


figura 3.3

3.4 FUNCION MAXIMO ENTERO.

Es la función con dominio R y cuya regla de correspondencia es f(x)=Máximo entero no mayor que x.Esta función se denota $[x]$.

La definición de ésta función no es tan evidente como las anteriores. Para aclararla daremos un ejemplo.

Pensemos en la relación que existe entre el peso en kilogramos de un equipaje y el costo del sobrepeso. Mientras el peso del equipaje no sobrepase cierta cantidad de kilos, no se cobra sobrepeso, pero si se pasa de esa cantidad, se cobra el sobrepeso según ciertas tarifas. Supongamos que dichas tarifas están representadas en la tabla siguente:

sobrepeso	tarifa
1 a 1.9	1
2 a 2.9	2
etc.	

La gráfica de la función se ilustra en la figura 3.4.

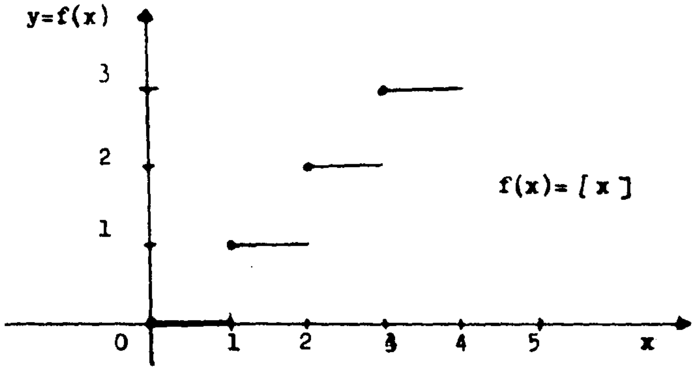


figura 3.4

3.5 FUNCION RAIZ CUADRADA.

Es la función cuyo dominio son los reales positivos y definida como $f(x)=\sqrt{x}$. Es dedir, $f(x)$ es el número positivo cuyo cuadrado es x.

$$f(x)=\sqrt{x}=\left\{(x^2,x):\ x\geq 0\right\}$$

Su gráfica es la figura 3.5.

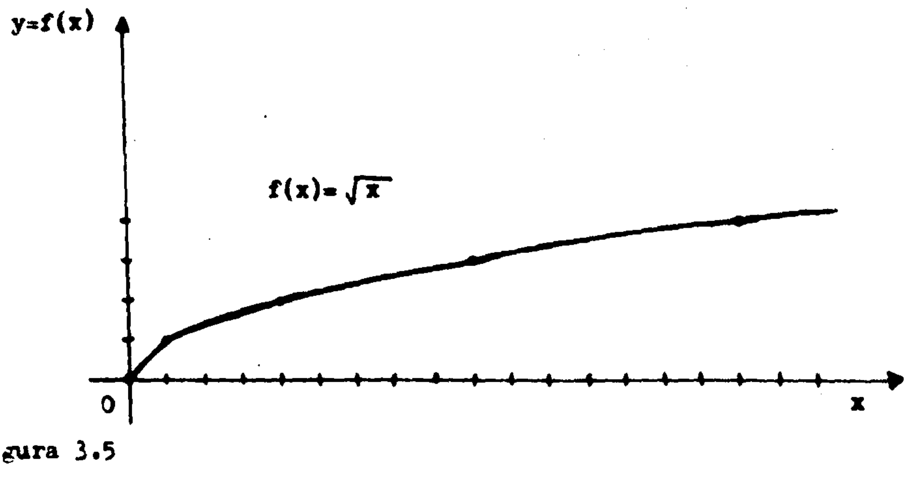


figura 3.5

3.6 FUNCIONES LINEALES.

Una función lineal es aquella que está definida por la ecuación de una linea recta. Es decir,

$$f(x)=mx+b$$

Para analizar ésta función, (cuyo uso es muy frecuente en matemáticas), recordemos los resultados obtenidos en geometría analítica.

3.6.1 Obtención de la Ecuación.

Sea P(x,y) un punto cualquiera de la recta AB (figura 3.6.1) cuya ecuación cartesiana se desea obtener.

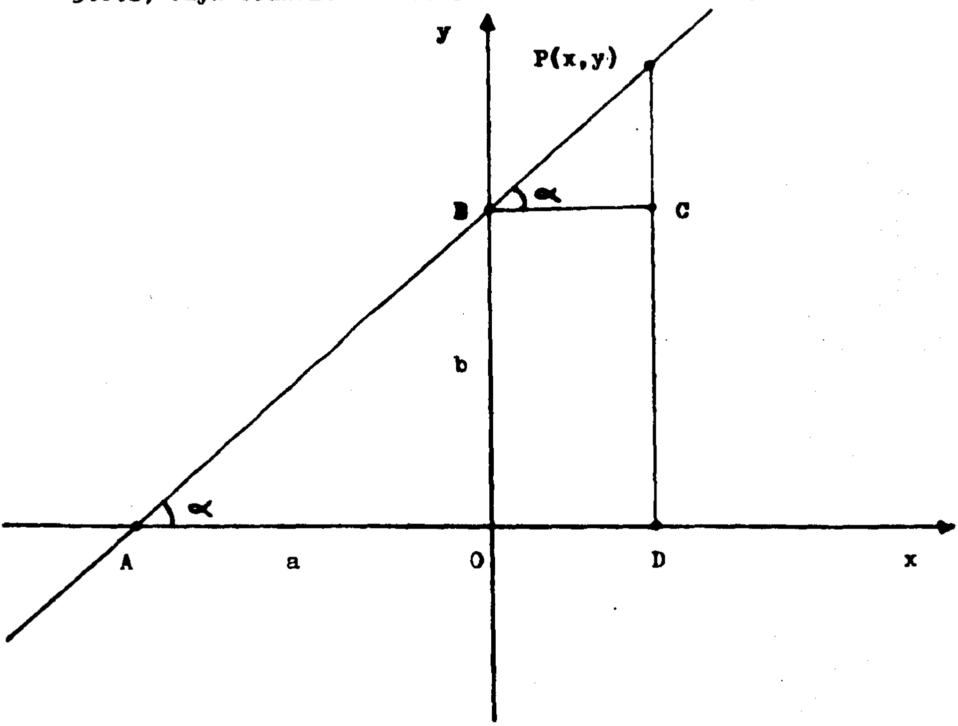


figura 3.6.1

De acuerdo a la figura 3.6.1 podemos escribir:

$y=DP=CP+DC$ (1)

En el triángulo rectángulo BCP se obtiene:

$\tan\alpha=\frac{PC}{BC}$

Por lo que

$PC=BC\tan\alpha$ (2)

$BC=OD=x$

haciendo $\tan\alpha=m$ y sustituyendo en la ecuación (2)

$PC=mx$

$DC=OB=b$

b= ordenada al origen, es decir, es la distancia del origen al punto en que la recta corta al eje 'y'.

$AO=a$

a=abscisa al origen, es decir, es la distancia del origen al punto en que la recta corta al eje 'x'.

Substituyendo en la ecuación (1)

$$y=mx+b$$

que es la ecuación de la recta en su forma cartesiana, simplificada ó canónica.

Si en la ecuación $y=mx+b$ se sustituye m por $-\frac{A}{B}$ y b por $-\frac{C}{B}$, se obtiene:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$ o sea:

$Ax+By+C=0$ que es la ecuación de la recta en su forma general.

3.6.2 Inclinación y Pendiente de una Recta.

La inclinación de una recta, es el ángulo que forma dicha recta, con la dirección positiva del eje x. (α).

La pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que dicha recta forma con la dirección positiva del eje x. Es decir, $m=\tan\alpha$

Es importante hacer notar que la pendiente de una recta es un número, mientras que la inclinación es un ángulo.

En la sección anterior se vió que $m=\tan\alpha$, de donde, considerando el triángulo rectángulo AOB de la figura 3.6.1

$m=\tan\alpha=\dfrac{b}{-a}$; por lo tanto $m=-\dfrac{b}{a}$

3.6.3 Ecuación de la Recta que Pasa pou un Punto.

Se desea obtener la ecuación de la recta que pasa por un punto conocido M de coordenadas (x_1,y_1); solo falta determinar la pendiente m.

La ecuación será de la forma:

$y=mx+b$ (1)

Por estar el punto M sobre la recta (1), sus coordenadas resolverán la ecuación, es decir:

$y_1=mx_1+b$ entonces:

$y_1-mx_1=b$ y sustituyendo b en la ecuación (1);

$y=mx+y_1-mx_1$

$y-y_1=mx-mx_1$ finalmente;

$y-y_1=m(x-x_1)$

3.6.4 Ecuación de la Recta que pasa por Dos Puntos.

Se desea obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$.

Por que la recta pasa por el punto A, la ecuación buscada es de la forma;

$y-y_1=m(x-x_1)$ (1)

Necesitamos expresar m en función de las coordenadas de A y de B.

En el triángulo rectángulo ACB de la figura 3.6.4 se tiene;

$m=\tan\alpha=\dfrac{BC}{AC}$ (2)

$BC=y_1-y_2$ $CA=x_1-x_2$

Sustituyendo en la ecuación (2);

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

Sustituyendo el valor de m en la ecuación (1);

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

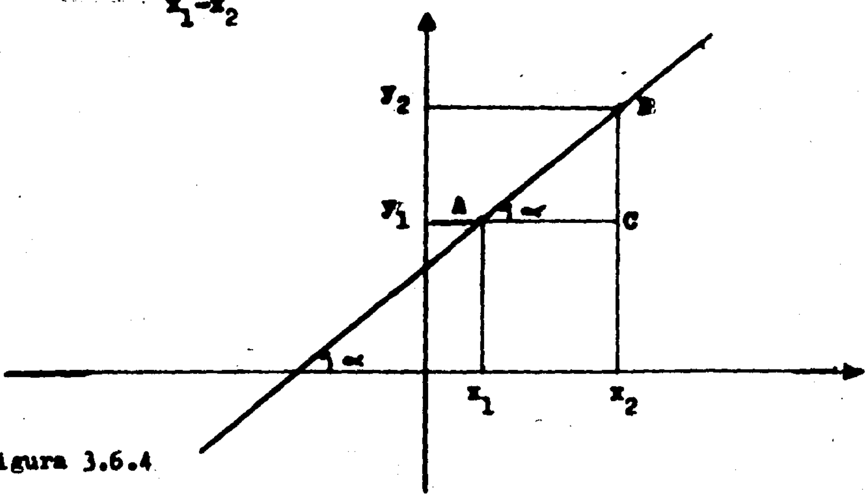


figura 3.6.4

3.6.5 Paralelismo y Perpendicularidad.

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas entre sí, es que sus pendientes sean iguales.

En efecto, cuando dos rectas son paralelas, el ángulo que forman con el eje de las x es el mismo, de ahí que sus pendientes sean iguales. (figura 3.6.5.I). Es decir:

Como AB es paralela a CD; entonces $\alpha_1 = \alpha_2$

por lo que:

$\operatorname{Tan}\alpha_1 = \operatorname{Tan}\alpha_2$ $\qquad m_1 = m_2$

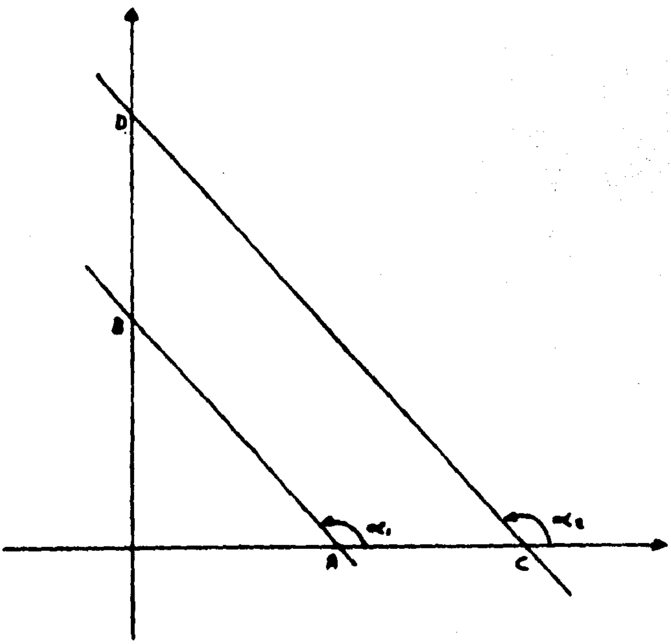


figura 3.6.5.I

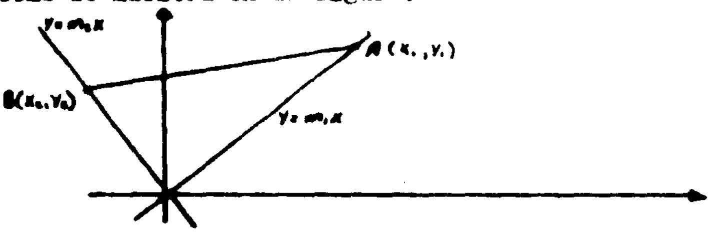
Ahora consideremos que dos rectas l_1 y l_2 tienen la misma pendiente $m_1=m_2$ entonces $\operatorname{Tan}\alpha_1=\operatorname{Tan}\alpha_2$ por lo que $\alpha_1 = \alpha_2$, es decir, las dos rectas son paralelas.

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que sus pendientes sean recíprocas y de signo contrario.

Primero consideraremos el caso de dos perpendiculares que pasan por el origen, si sus ecuaciones son:

$y=m_1x$; $y=m_2x$

tomemos dos puntos distintos del origen, $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, como se muestra en la figura:



Entonces, por estar los puntos A y B sobre las rectas, sus coordenadas resolverán las ecuaciones respectivas, es decir:

$y_1=m_1x_1$; $y_2=m_2x_2$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo AOB:

$d(A,B)^2= d(O,B)^2+ d(O,A)^2$ o sea:

$(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2=(y_2-0)^2+(x_2-0)^2+(y_1-0)^2+(x_1-0)^2$

efectuando operaciones y simplificando:

$-2y_1y_2-2x_1x_2=0$

pero como $y_1=m_1x_1$; $y_2=m_2x_2$; entonces

$-2m_1x_1m_2x_2-2x_1x_2=0$

o sea:

$-2x_1x_2m_1m_2-2x_1x_2=0$

dividiendo ambos miembros entre $-2x_1x_2$ queda:

$m_1m_2+1=0$

despejando:

$m_1m_2=-1$

ó análogamente:

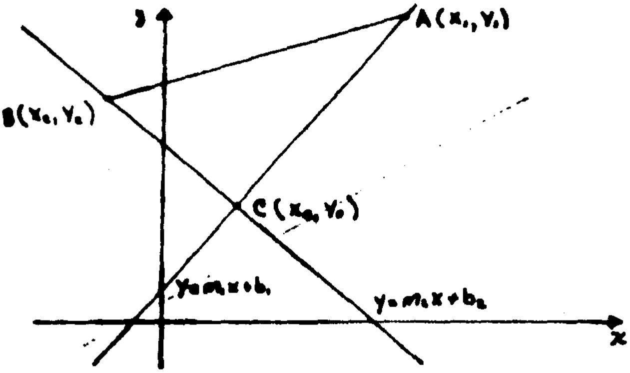
$$m_1= \frac{-1}{m_2}$$

es decir, las pendientes son recíprocas y de signo contrario.

Consideremos ahora el caso de dos perpendiculares que se cortan en el punto $C(x_0,y_0)$ distinto del origen. Sus ecuaciones son:

$y=m_1x + b_1 \qquad y=m_2x + b_2$

Tomemos un punto distinto de $C(x_0,y_0)$ en cada recta como se muestra en la figura:



Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

$d(A,B)^2 = d(B,C)^2 + d(C,A)^2$

$(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = (x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 + (x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2$

Sumamos $\pm x_0$ $\pm y_0$ respectivamente en el primer miembro:

$(x_2-x_0+x_0-x_1)^2 + (y_2-y_0+y_0-y_1)^2 = (x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 + (x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2$

Agrupando:

$(x_2-x_0)+(x_0-x_1)\ ^2 + (y_2-y_0)+(y_0-y_1)\ ^2 = (x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 +$

$+(x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2$

Desarrollando el binomio del primer miembro:

$$(x_2-x_0)^2+2(x_2-x_0)(x_0-x_1)+(x_0-x_1)^2+(y_2-y_0)^2+2(y_2-y_0)(y_0-y_1)+$$

$$+(y_0-y_1)^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2$$

Simplificando:

$$2(x_2-x_0)(x_0-x_1)+2(y_2-y_0)(y_0-y_1)=0$$

$$-(x_2-x_0)(x_0-x_1)=(y_2-y_0)(y_0-y_1) \quad \ldots.(1)$$

Entonces por estar los puntos A y P sobre cada recta, sus coordenadas respectivas resolverán la ecuación:

$y-y_1=m_1(x-x_1)$ $\qquad$ $y-y_2=m_2(x-x_2)$

Pero como el punto C es el punto de intersección de las rectas, sus coordenadas resolverán ambas ecuaciones, es decir:

$y_0-y_1=m_1(x_0-x_1)$ $\qquad$ $y_0-y_2=m_2(x_0-x_2)$ $\quad$ ó multiplicando por -1

$y_2-y_0=m_2(x_2-x_0)$

Sustituyendo en (1)

$$-(x_2-x_0)(x_0-x_1)=m_2(x_2-x_0)\,m_1(x_0-x_1)$$

dividiendo ambos miembros entre $(x_2-x_0)(x_0-x_1)$

$$-1=m_1m_2$$

ó análogamente:

$$m_1=\frac{-1}{m_2}$$

es decir, las pendientes son recíprocas y de signo contrario.

Veamos ahora el caso contrario. Si l_1 y l_2 son dos rectas cuyas pendientes son recíprocas y de signo contrario, y que se cortan en el punto (x_0,y_0), entonces necesariamente son perpendiculares.

Demostración:

Sean $y-y_0=m_1(x-x_0)$; $y-y_0=m_2(x-x_0)$ las ecuaciones respectivas de l_1 y l_2.

Por hipótesis $m_1=\dfrac{-1}{m_2}$ $\quad$ ó $m_1m_2=-1$

Sea l: $y-y_0=m(x-x_0)$ la recta que pasa por (x_0,y_0) perpendicular a l_1.

Por lo tanto $mm_1=-1$

pero por hipótesis $m_1m_2=-1$ entonces $m=m_2$

es decir: $l=l_2$.

3.7 FUNCIONES POLINOMIALES.

Ciertas expresiones algebráicas tienen nombres especiales. Si x es una variable, entonces un monomio en x es una expresión de la forma ax^n, donde 'a' es un número real y n es un entero no negativo. Al número 'a' se le llama coeficiente de x^n.

Un polinomio en x es cualquier suma finita de monomios en x. Es decir;

DEFINICION:

Un polinomio en x es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero positivo y los a_i son números reales.

En la definición anterior, cada una de las expresiones $a_k x^k$ de la suma, es un término del polinomio. Si el coeficiente a_i es cero, el término $a_i x^i$ es omitido. El coeficiente a_n de la potencia más alta de x, es el coeficiente principal del polinomio, es tal que $a_n \neq 0$ y se dice que el polinomio tiene grado n.

De acuerdo a lo anterior;

DEFINICION:

Una función f es una función polinomial si;

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros positivos.

Nótese que una función polinomial de grado 0 es una función constante $f(x)=a_0$ con $a_0 \neq 0$ y que la función constante $f(x)=0$ no tiene grado. Además, una función polinomial de grado 1, es una función lineal, es decir, es de la forma

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

3.7.1 Funciones Cuadráticas.

Cuando f es una función polinomial de grado 2, se llama función cuadrática. Es decir;

DEFINICION:

Una función f es cuadrática si está definida por;

$f(x)=ax^2+bx+c$

donde a, b, y c son números reales y $a \neq 0$.

Si hacemos $b=c=0$, entonces $f(x)=ax^2$ y su gráfica es una parábola con vértice en el origen, que se abre hacia arriba si a es positiva (figura 3.7.1, I) o hacia abajo si a es negativa (figura 3.7.1, II).

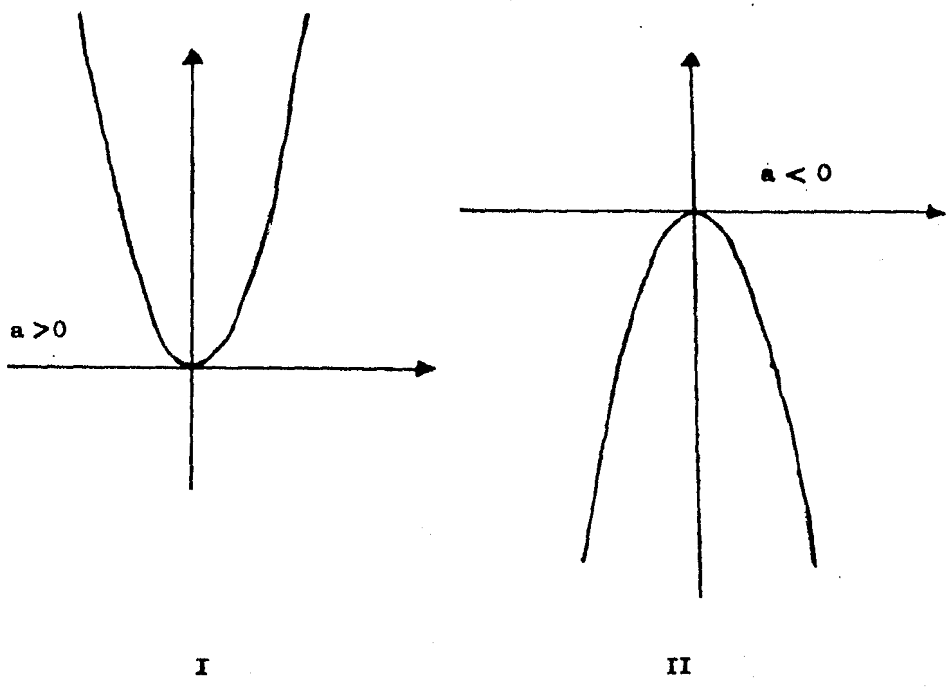
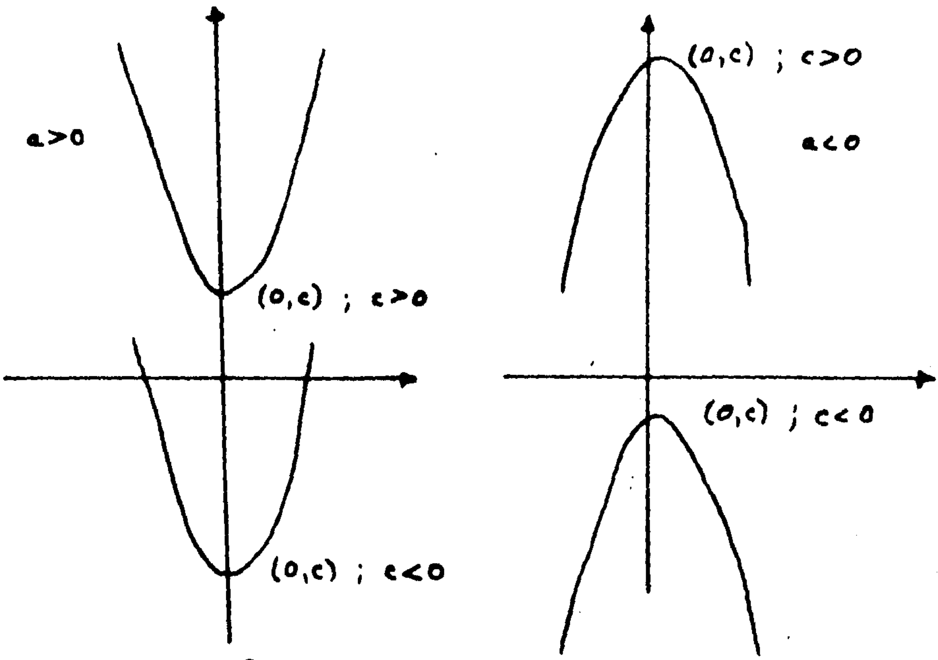


figura 3.7.1

Si $b=0$ y $c\neq 0$ entonces;

$f(x)=ax^2+c$

y su gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0,c)$ sobre el eje 'y', y que se abre hacia arriba o hacia abajo según sea el signo de a.



Si $f(x)=ax^2+bx+c$ podemos escribir;

$y=ax^2+bx+c$ ó análogamente $ax^2+bx=y-c$

$x^2+\frac{b}{a}x=\frac{1}{a}(y-c)$

completando el cuadrado;

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}(y-c)+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

factorizando:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{y}{a}-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

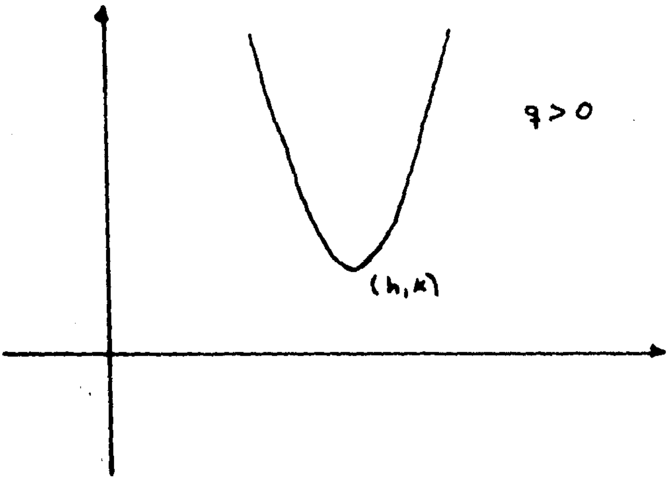
haciendo $h=\frac{-b}{2a}$; $q=\frac{1}{a}$; $k=\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

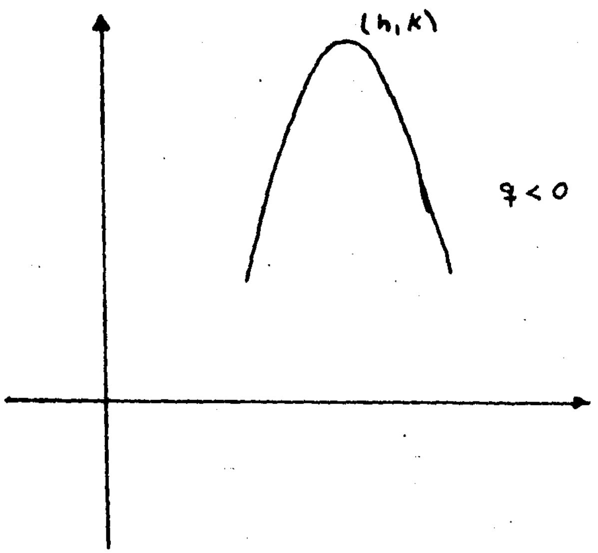
sustituyendo los valores de las constantes;

$(x-h)^2=q(y-k)$ que es la ecuación de la parábola con eje vertical

y cuyo vértice es el punto (h,k). Se abre hacia **arriba** o hacia **abajo**, según sea el signo de la constante q.

Como el **vértice** (h,k) es el punto más alto o más bajo de **la parábola,** se concluye que $f(x)=q(x-h)^2+k$ toma su valor máximo o **mínimo** en h. Este valor es $f(h)=k$.





3.7.3 Funciones Polinomiales de Grado Mayor que Dos.

Supongamos que f es una función polinomial de grado n; esto es,

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0 \quad \dots(1)$$

Para n=0, la función (1) es la función constante (sección 3.5) para n=1, la función (1) es una recta (sección 3.6). Para n=2, la función (1) es una función cuadrática ó de segundo grado y su gráfica es una parábola (sección 3.7.2). Por lo tanto, en ésta sección consideraremos funciones del tipo (1) para las cuales $n \geq 3$.

Para analizar funciones polinomiales, debemos observar primero los siguientes resultados:

Consideremos el cociente de 432 entre 5. Por métodos aritméticos, se obtiene:

```
     86
5 | 432
    40
    --
    32
    30
    --
     2
```

donde el número 86 es el cociente y el 2 es el residuo. Al 5 se le llama **divisor** y al 432 **dividendo**. El residuo debe ser siempre menor que el divisor; de lo contrario, se puede incrementar el cociente.

El resultado anterior se puede escribir como:

$$\frac{432}{5} = 86 + \frac{2}{5}$$

al multiplicar por 5 obtenemos:

$$432 = (86)(5) + 2$$

es decir;

$$\boxed{\text{Dividendo} = (\text{divisor})(\text{cociente}) + \text{residuo}}$$

La forma anterior ilustra lo que se llama Algoritmo de la División, el cual se enuncia, para polinomios:

Si $f(x)$ y $G(x)$ son polinomios y si $G(x)\neq 0$, entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$f(x)= G(x)\ Q(x) + R(x)$$

donde, o bien $R(x)=0$ o el grado de $R(x)$ es menor que el de $G(x)$. El polinomio $Q(x)$ se llama cociente y $R(x)$ se llama residuo de la división de $f(x)$ por $G(x)$.

Un caso especial ocurre cuando el polinomio $G(x)$ del algoritmo anterior, es de la forma $x-r$, donde r es un número real.

EJEMPLO:

Sea $f(x)= 4x^2+ 3x-2$ y $G(x)= x-1$

$$\begin{array}{r|l} & \underline{4x + 7} \\ x-1 & 4x^2+3x-2 \\ & \underline{4x^2-4x} \\ & \quad 7x-2 \\ & \quad \underline{7x-7} \\ & \qquad 5 \end{array}$$

entonces $Q(x)=4x+7$ y $R=5$

como $f(x)=G(x)\ Q(x) + R$

por lo tanto $4x^2+ 3x-2= (x-1)(4x+7) + 5$

Nótese que $R=5$.

Calculemos $f(1)$

$f(1)= 4(1)^2+3(1)-2 = 4 + 3-2=5$

es decir; $f(1)=R=5$

Esta observación nos conduce a establecer el siguiente Teorema:

Teorema del Residuo.

Si el polinomio $f(x)$ se divide entre $x-r$, siendo r un número real, el residuo R es igual a $f(r)$.

Demostración:

Si $f(x)= Q(x)(x-r) + R$ entonces

$f(r)= Q(r)(r-r) + R$

$f(r)= 0 + R$ por lo tanto $f(r)= R$.

El Teorema del Residuo nos proporciona por lo tanto, otra manera de encontrar el valor de una función polinomial $f(x)$ para cualquier valor de su dominio.

A primera vista, el Teorema del Residuo no parece ser una forma eficiente de encontrar el valor de $f(x)$ en un punto r del dominio. Pero existe un método para dividir cualquier polinomio $f(x)$ entre $G(x)$ cuando $G(x)$ es de la forma $x-r$ para encontrar $f(r)$.

Este es el caso de la división sintética.

División Sintética:

Sea r un número real. Para dividir un polinomio $f(x)$ entre $x-r$, se procede como sigue:

En la primera linea se escriben en orden los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ del dividendo $f(x)$, y el número r separado a la derecha. Si alguna potencia de x no aparece en $f(x)$, su coeficiente se escribe como cero.

$$\begin{array}{l cccccc|c}
1^{\underline{a}}\text{ linea} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & r \\
\cline{2-8}
2^{\underline{a}}\text{ linea} & & & & & & & \\
\cline{2-7}
3^{\underline{a}}\text{ linea} & & & & & & &
\end{array}$$

Se escribe el coeficiente principal a_n como primer término de la tercera linea.

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & r \\
\hline
 & & & & & & \\
\hline
a_n & & & & & &
\end{array}$$

se multiplica a_n por r, escribiendo el producto $a_n r$ en la segunda línea debajo de a_{n-1}

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & r \\
\hline
 & a_n r & & & & & \\
\hline
a_n & & & & & &
\end{array}$$

se suma a_{n-1} con el producto $a_n r$ y la suma se escribe en la tercera línea

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & r \\
\hline
 & a_n r & & & & & \\
\hline
a_n & a_{n-1}+a_n r & & & & &
\end{array}$$

se multiplica esta suma por r, se escribe el producto en la segunda línea debajo de a_{n-2}

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & r \\
\hline
 & a_n r & (a_{n-1}+a_n r)r & & & & \\
\hline
a_n & a_{n-1}+a_n r & & & & &
\end{array}$$

se suma a_{n-2} con el producto anterior, escribiendo la suma en la tercera línea.

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & r \\
\hline
 & a_n r & (a_{n-1}+a_m r)r & & & & \\
\hline
a_n & a_{n-1}+a_n r & a_{n-2}+(a_{n-1}+a_n r)r & & & &
\end{array}$$

se continúa de esa manera hasta que se usa como sumando a_0 escribiéndose la suma en la tercera línea.

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0	r
	$a_n r$	$(a_{n-1}+a_n r)r$		...	...	
a_n	$a_{n-1}+a_n r$	$a_{n-2}+(a_{n-1}+a_n r)r$	...		R	

El último número de la tercera línea es el residuo (R); los números anteriores son los coeficientes del cociente, correspondientes a potencias descendientes de x. Es decir; si llamamos b_i a los coeficientes de la tercera línea, el cociente es un polinomio de grado n-1 de la forma:

$$b_n x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+ \dots +b_3x^2+b_2x +b_1$$

Ilustraremos con el siguiente ejemplo el método descrito.

EJEMPLO

Por división sintética, hallar el cociente y el residuo de la división de $2x^4+3x^3-x-3$ entre $x+2$.

Solución:

Primeramente observamos que el dividendo no contiene el término en x^2, pondremos el coeficiente cero en ese lugar. Además, ya que vamos a dividir entre x+2 y el método de división sintética requiere dividir entre x-r, entonces hacemos x+2=x-(-2)=x-r, es decir, debemos tomar r=-2. La operación queda como sigue:

2	3	0	-1	-3	-2
	-4	2	-4	10	
2	-1	2	-5	7	

Por lo tanto, el cociente es $2x^3-x^2+2x-5$ y el residuo es 7.

El siguiente ejemplo ilustra como puede usarse la división sintética para encontrar valores de funciones polinomiales en algunos puntos.

Sea $f(x)=3x^5-38x^3+5x^2-1$. Use división sintética para encontrar f(4).

Solución:

3	0	-38	5	0	-1	4
	12	48	40	180	720	
3	12	10	45	180	719	

por lo tanto $f(4)= 719$

Si el residuo de la división por $x-r$ es cero, entonces $f(r)=0$, es decir, $f(r)$ es un cero de la función polinomial.

EJEMPLO

Compruebe que -11 es un cero del polinomio $f(x)=x^3+8x^2-29x+44$

1	8	-29	44	-11
	-11	33	-44	
1	-3	4	0	

Así $f(-11)=0$

Utilizaremos ahora la división sintética para obtener la gráfica de una función polinomial $f(x)$.

EJEMPLO 3.7.2.I

Construir la gráfica del polinomio $f(x)=x^4-x^3-12x^2+8x+24$ ...(I)

Primero obtendremos las coordenadas de un número adecuado de puntos de la gráfica utilizando división sintética.

1	-1	-12	8	24	0	
	0	0	0	0		
1	-1	-12	8	24		$f(0)=24$

1	-1	-12	8	24	1	
	1	0	-12	-4		
1	0	-12	-4	20		$f(1)=20$

1	-1	-12	8	24	-1
	-1	2	10	-18	
1	-2	-10	18	6	

$f(-1)=6$

1	-1	-12	8	24	2
	2	2	-20	-24	
1	1	-10	-12	0	

$f(2)=0$

1	-1	-12	8	24	-2
	-2	6	12	-40	
1	-3	-6	20	-16	

$f(-2)=-16$

1	-1	-12	8	24	3
	3	6	-18	-30	
1	2	-6	-10	-6	

$f(3)=-6$

1	-1	-12	8	24	-3
	-3	12	0	-24	
1	-4	0	8	0	

$f(-3)=0$

1	-1	-12	8	24	4
	4	12	0	32	
1	3	0	8	56	

$f(4)=56$

1	-1	-12	8	24	-4
	-4	20	-32	96	
1	-5	8	-24	120	

$f(-4)=120$

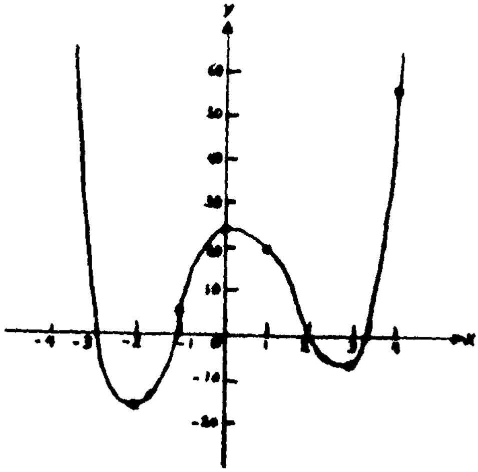
La tabla de valores correspondientes quedaría:

x	f(x)
0	24
1	20
2	0
3	-6
4	56
-1	6
-2	-16
-3	0
-4	120

Localizando los puntos cuyas coordenadas aparecen en la tabla, y trazando una curva continua que pase por ellos, obtenemos la gráfica mostrada en la figura siguiente.

De la tabla de valores observamos que 2 y -3 son ceros del polinomio f(x).

Este resultado es muy importante cuando se estudia Teoría de Ecuaciones, es decir, cuando se buscan las raíces o soluciones reales de ecuaciones cuyo grado es mayor o igual que tres.



EJEMPLO 3.7.2.II

Construir la gráfica del polinomio

(2) $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

Solución:

Utilizando la división sintética para localizar algunos puntos de la gráfica:

1	1	-5	3	0
	0	0	0	
1	1	-5	3	

$f(0)=3$

1	1	-5	3	1
	1	2	-3	
1	2	-3	0	

$f(1)=0$

1	1	-5	3	-1
	-1	0	5	
1	0	-5	8	

$f(-1)=8$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -5 & 3 & \underline{2} \\ & 2 & 6 & 2 & \\ \hline 1 & 3 & 1 & \underline{5} & \end{array} \qquad f(2)=5$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -5 & 3 & \underline{-2} \\ & -2 & 2 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & -3 & \underline{9} & \end{array} \qquad f(-2)=9$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -5 & 3 & \underline{3} \\ & 3 & 12 & 21 & \\ \hline 1 & 4 & 7 & \underline{24} & \end{array} \qquad f(3)=24$$

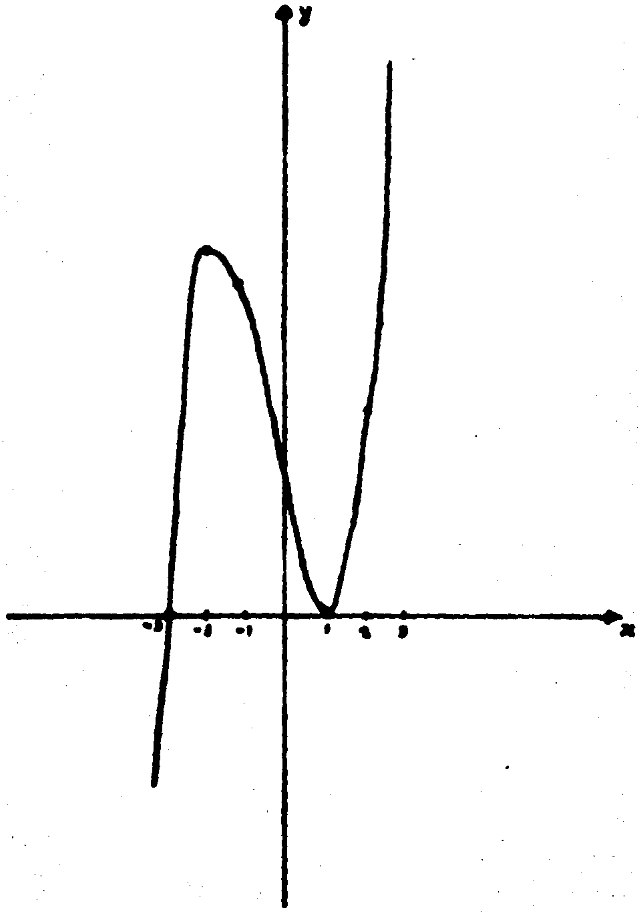
$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -5 & 3 & \underline{-3} \\ & -3 & 6 & -3 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & \underline{0} & \end{array} \qquad f(-3)=0$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -5 & 3 & \underline{-4} \\ & -4 & 12 & -28 & \\ \hline 1 & -3 & 7 & \underline{-25} & \end{array} \qquad f(-4)=-25$$

La tabla de valores queda:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	-4
f(x)	3	0	5	24	8	9	0	-25

Localizando los puntos de la tabla, y trazando una curva contínua que pase por ellos, obtenemos la gráfica mostrada en la figura que sigue:


y
x

4. FUNCIONES TRASCENDENTES

Existen funciones que no pueden expresarse con operaciones como suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebráicas, dichas funciones son funciones trascendentes. Es decir, las funciones como las exponenciales, logarítmicas y las trigonométricas, son funciones trascendentes.

4.1 Funciones Exponenciales.

Es importante recordar la definición de exponente y las propiedades de éstos antes de definir la función exponencial.

DEFINICION:

Si n es cualquier entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El entero n se le llama exponente.

Es posible generalizar la definición anterior para exponentes que son enteros negativos ó cero, y aún más, para exponentes racionales. Para lo cual introducimos las siguientes definiciones.

DEFINICION:

Si a es cualquier número real distinto de cero, entonces

$$a^0 = 1$$

Como a representa un número real distinto de cero, el símbolo 0^0 queda indefinido.

DEFINICION:

Si a es un número real distinto de cero y n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

DEFINICION:

Si m/n es un número racional, donde n es un entero positivo y a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ existe, entonces

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

También es posible definir a^x para todo número real x. Por ejemplo, si tenemos un número como a^{π}, podemos usar la representación decimal infinita 3.14159... para π y suponer que la sucesión de números a^3, $a^{3.1}$, $a^{3.14}$, $a^{3.141}$, ... se aproxima cada vez más al valor de a^{π}. Sin embargo, ésta definición requiere conceptos más profundos.

Aunque se omiten definiciones y demostraciones, vamos a suponer las siguientes leyes o propiedades de los exponentes.

Propiedades de los Exponentes.

Si x, y son números reales, entonces,

1) $a^x a^y = a^{x+y}$

2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad a \neq 0$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$

4) $\sqrt[y]{a^x} = a^{x/y}$

Puesto que a cada número real x corresponde un número real a^x, podemos definir una función del siguiente modo.

DEFINICION:

Si a es mayor que cero, entonces la función exponencial f con base a se define como:

$$f(x) = a^x$$

donde x es cualquier número real.

Nótese que si 'a' es mayor que 1, entonces la función exponencial f con base 'a' es creciente en todo su dominio, es decir crece cuando x se incrementa; y que si $0 < a < 1$, entonces f es decreciente, es decir, decrece cuando x aumenta.

EJEMPLO 4.1.I

Represente gráficamente f si $f(x)=2^x$

Solución:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

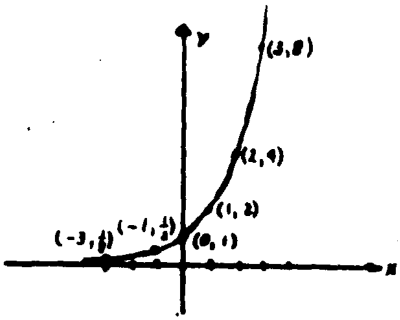


Figura 4.1.I

La gráfica anterior nos muestra la gráfica característica de la función exponencial con base a para a mayor que 1. Puesto que $a^0=1$, la ordenada en el origen siempre es 1. Obsérvese que al ir decreciendo el valor de x y tomando valores negativos, la gráfica se aproxima al eje 'x' sin llegar a cortarlo, ya que a^x es mayor que cero para todo x.

EJEMPLO 4.1.II

Represente la gráfica de la ecuación $y=(1/2)^x$

Solución:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La gráfica se muestra en la figura 4.1.II

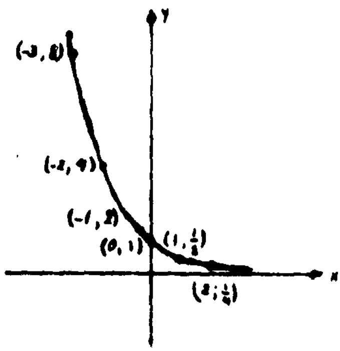


figura 4.1.II

EJEMPLO 4.1.III

Represente la gráfica de f si $f(x)=2^{-x^2}$

Solución:

Puesto que $f(x)=1/2^{x^2}$, se deduce que si x crece(en valor absoluto), el, correspondiente punto (x,f(x)) de la gráfica se aproxima al eje 'x' sin llegar a cortarlo. Algunos puntos en la gráfica son:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$

Funciones de éste tipo aparecen en el cálculo de probabilidades. Su gráfica se muestra en la figura 4.1.III

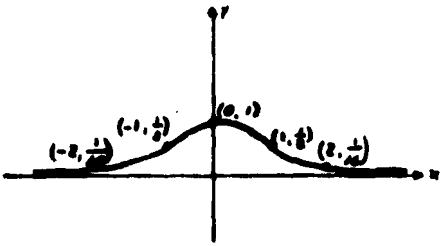


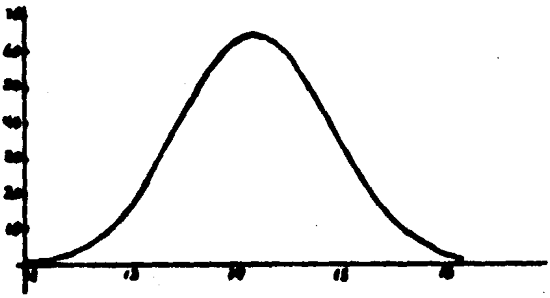
figura 4.1.III

Un ejemplo de una función exponencial aplicada a la proba bilidad es el siguiente:

Supongamos que un fabricante de camisas tiene en estudio la producción de camisas especiales para estudiantes universitarios. Ya que éstos representan un grupo seleccionado, sería conveniente ajustar la producción del artículo a sus necesidades particulares. Para ello, prestará atención a la medida de cuellos que deberá fabricar. Toma las medidas de 231 estudiantes cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

valores medidos (en pulgadas)	número de estudiantes
12.5	4
13.0	19
13.5	30
14.0	63
14.5	66
15.0	29
15.5	18
16.0	1
16.5	1
Total	231

Teniendo los datos de los estudiantes arriba citados, el fabricante desea darse una idea de la cantidad de cuellos de cada medida que necesita fabricar.



Si los datos son representativos, se observa de la gráfica que la gran mayoría de los clientes pedirán cuellos de medida entre 14 y 15, y que solamente una minoría pedirá cuellos de medidas pequeñas o grandes (13 o 17).

Otro ejemplo de una función exponencial es el crecimiento de una población determinada.

Es posible que se observe experimentalmente que el número de bacterias en un cultivo, puede duplicarse cada hora si cumple con las condiciones de clima, alimentación, ubicación y espacio adecuadas. Es importante observar que en el caso descrito, la sobrepoblación determinará que una de las condiciones necesarias (espacio por ejemplo) sea inhibida, con lo que la forma en que se reproducirán, a partir de entonces, será distinta.

Si existen 1,000 bacterias al comienzo del experimento, entonces se obtendrían las cifras siguientes, donde t es el tiempo en horas y f(t) es el número de bacterias en el tiempo t.

t	0	1	2	3	4
f(t)	1000	2000	4000	8000	16000

Se podría obtener que $f(t)=(1000)2^t$. Esta fórmula hace posible la predicción del número de bacterias que existen en cualquier instante t (mientras se cumplan las condiciones óptimas). por ejemplo, para t=1.5 tenemos:

$$f(t)=(1000)2^{3/2}=1000\sqrt{2^3}=1000\sqrt{8}\approx 2828$$

El interés compuesto nos proporciona otra ilustración del crecimiento exponencial.

Supongamos que se tienen \$100 iniciales que se quieren invertir a un interés del 8% anual, entonces, el interés al final de un año es \$100(0.08), o sea \$8.00. Si al final del período el interés es reinvertido, entonces el nuevo capital es:

$\$100 + 100(0.08)$ ó

$\$100(1+0.08) = \$100(1.08) = \$108$

Si pasa otro período de tiempo, entonces el nuevo capital puede encontrarse multiplicando:

$\$100(1+0.08)$ por $(1+0.08)$

es decir:

$\$100(1+0.08)^2$

Si reinvertimos y continuamos el proceso, el capital, después de tres periodos es $\$100(1+0.08)^3$; después de cuatro, es $\$100(1+0.08)^4$ y en general, después de n períodos de tiempo, $\$100(1+0.08)^n$.

El interés acumulado de éste modo se llama interés compuesto. Podemos ver que el capital está dado por la función exponencial cuya base es (1+i) y cuyo exponente es n.

4.' Funciones Logarítmicas.

DEFINICION:

Sean a, u números reales positivos, entonces, la potencia de a igual a u se denomina el logaritmo de u con base a, y se denota $\log_a u$. Es decir:

$$v = \log_a u \quad \text{si y sólo si} \quad a^v = u$$

Puesto que $a^1 = a$, se tiene por la definición de logaritmo que:

$$\log_a a = 1$$

Análogamente, como:

$a^0 = 1$, se tiene: $\log_a 1 = 0$

Como la definición de logarítmo está en términos de potencias, análogas a las propiedades de los exponentes, se tienen las propiedades de los logaritmos. Suponemos en éstas que u y w son números reales positivos.

1) $\log_a(uw) = \log_a u + \log_a w$

2) $\log_a(u/w) = \log_a u - \log_a w$

3) $\log_a(u^c) = c\log_a u$ para todo real c.

DEFINICION

La función definida como $f(x) = \log_a x$ para todo número real positivo x, es llamada la función logarítmica de base a.

La gráfica de f es la misma que la de la ecuación $y=\log_a x$ la cual es equivalente por la definición de logarítmo a la ecuación $x=a^y$.

Para poder localizar algunos puntos que satisfagan la ecuación anterior, damos valores arbitrarios a la variable independiente y, y calculamos los valores correspondientes de x como se ilustra en la tabla que sigue:

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3

Si $a>1$, se obtiene la figura 4.2.I. En éste caso, la función es creciente en todo su dominio. Si a es tal que $0<a<1$, la gráfica tiene la forma que se ilustra en la figura 4.2.II, donde f es una función decreciente. Notemos que cualquiera que sea el valor de a, no está definida la función para valores negativos; la gráfica no intersecta al eje 'y' y la intersección con el eje 'x' es 1.

Existe una estrecha relación entre la función exponencial y la función logarítmica. Esto era de esperarse puesto que la función logarítmica se definió en términos de la función exponencial. De hecho, si dos variables u y v están relacionadas de modo que u es una función exponencial de v, entonces v es una función logarítmica de u. Veamos un ejemplo;

En la sección anterior se vió que el capital después de n períodos se obtiene:

$C=\$100(1+0.08)^n$

Si el capital inicial fuera \$1, se tendría:

$C=(1+0.08)^n$

La forma logarítmica de ésta ecuación es;

$n=\log_{1.08}C$.

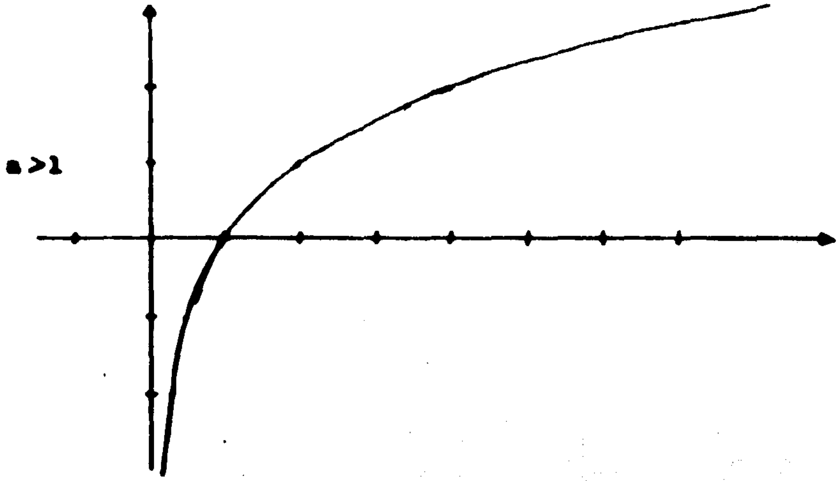


figura 4.2.I

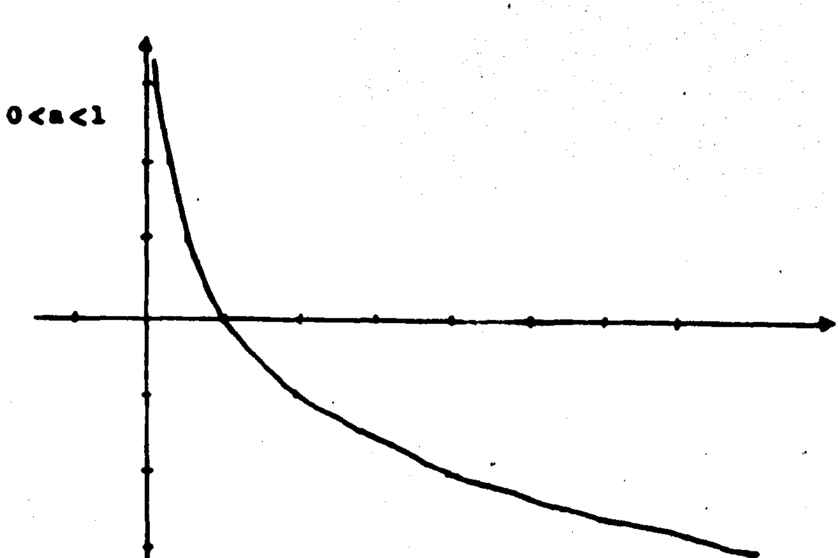


figura 4.2.II

De esta manera, el número de períodos necesarios para que \$1.00 se convierta en un capital C, se relaciona logarítmicamente con C.

Los logaritmos con base 10 son útiles para ciertos cálculos numéricos. Es común referirse a ellos como logaritmos comunes y usar el símbolo log x como abreviación de $\log_{10} x$.

La base 10 es práctica en los cálculos numéricos puesto que todo número puede escribirse en la forma $c.10^k$, donde $1 \leq c < 10$ y k es un número entero. Por ejemplo;

$513=(5.13)10^2$ $\quad$ $2375=(2.375)10^3$ $\quad$ $720000=(7.2)10^5$

$0.641=(6.41)10^{-1}$ $\quad$ $0.00000438=(4.38)10^{-6}$ $\quad$ $4.601=(4.601)10^0$

Si x es cualquier número real positivo y lo escribimos en la forma

$$x=c.10^k$$

donde $1 \leq c < 10$ y k es un entero; entonces, aplicando las leyes de los logaritmos, tenemos

$$\log x = \log c + \log 10^k$$

Puesto que $\log 10^k = k$, vemos que

$$\log x = \log c + k$$

La última ecuación nos dice que para encontrar log x para cualquier número real positivo x, es suficiente conocer los logaritmos de los números entre 1 y 10.

El número log c, con $1 \leq c < 10$, se llama mantisa y el entero k se llama característica de log x.

Si $1 < c < 10$, entonces, puesto que $\log x$ crece cuando x crece, se tiene

$$\log 1 < \log c < \log 10,$$

o equivalentemente

$$0 < \log c < 1$$

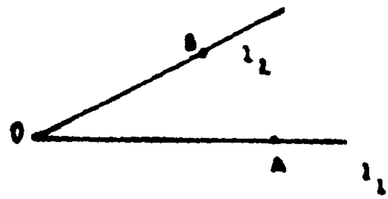
La mantisa de un logaritmo es pues un número entre 0 y 1.

Se han calculado las mantisas de los logaritmos de muchos de los números entre 1 y 10 en tablas, con aproximaciones de 4, 5 y 7 decimales. Aun, hoy en día, las calculadoras hacen posible calcular el logaritmo de un número con mayor precisión con sólo apretar algunas teclas.

4.3 Funciones Trigonométricas.

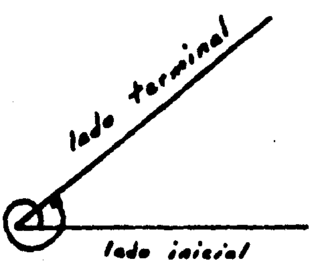
4.3.1 Angulos.

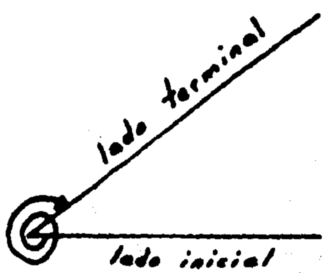
En geometría a menudo se piensa en un ángulo como la abertura entre dos rayos con el mismo punto inicial O. Si A y B son puntos en l_1 y l_2 respectivamente, entonces nos podemos referir a el ángulo AOB.



Con el propósito de estudiar trigonometría, es conveniente considerar que el ángulo AOB es generado a partir de un rayo fijo l_1, con extremo O, mediante una rotación alrededor de O, en el plano, hasta coincidir con l_2.

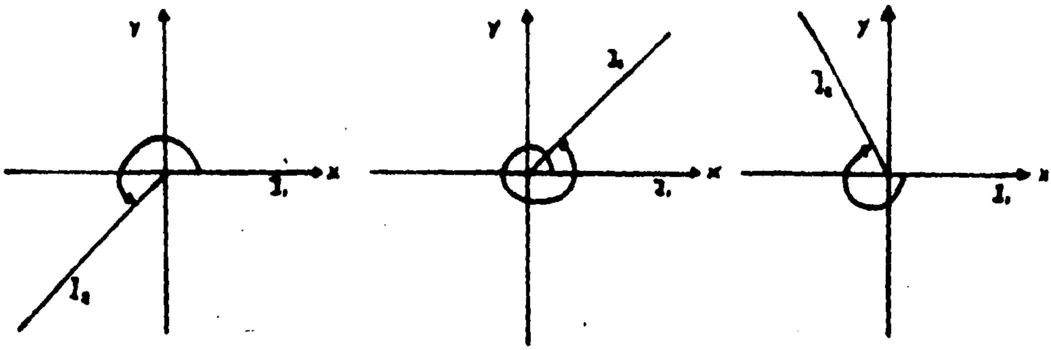
A l_1 se le llama lado inicial, a l_2 lado terminal y a O vértice del ángulo. La cantidad o dirección de rotación no se restringe de ninguna manera. Entonces podemos dar al lado inicial varias revoluciones en cualquier dirección al rededor de O antes de acabar en la posición terminal. Por ejemplo:





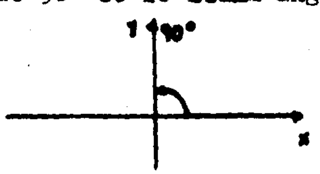
Es importante observar que hay muchos ángulos diferentes que tienen los mismos lados inicial y terminal. A cualquier par de estos ángulos se les llama ángulos coterminales.

Si se tiene un sistema de coordenadas rectangulares, entonces un ángulo se obtiene al tomar el vértice en el origen y haciendo que el lado inicial l_1 coincida con el eje x positivo. Si se rota l_1 en dirección contraria a las manecillas del reloj hasta la posición terminal l_2, entonces se considera al ángulo positivo, mientras que si se rota l_1 en sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es negativo.

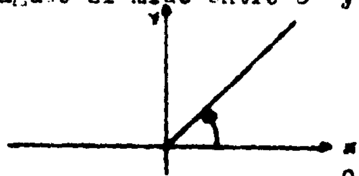


Una de las unidades de medida para ángulos es el grado. SI se coloca al ángulo en la posición mencionada de sistema de coordenadas rectangulares, entonces un ángulo de 1 grado es, por definición, la medida del ángulo formado por 1/360 de una revolución completa en dirección contraria a las manecillas del reloj. El símbolo $^{\circ}$ se utiliza para denotar los grados .

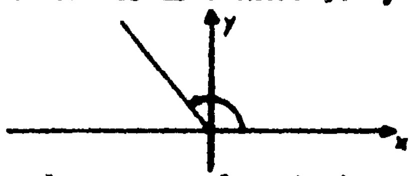
A un ángulo de 90° se le llama ángulo recto.



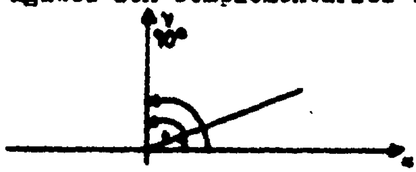
Un ángulo es agudo si mide entre 0° y 90°.



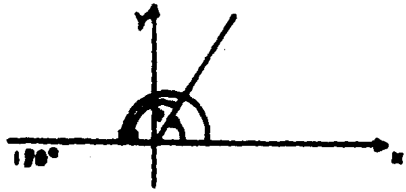
Un ángulo es obtuso si mide entre 90° y 180°.



Dos ángulos agudos son complementarios si suman 90°.

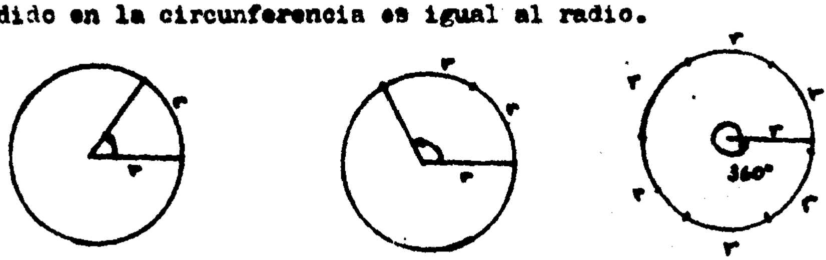


Dos ángulos positivos son suplementarios si suman 180°.



En muchas aplicaciones de trigonometría se usan medidas de radián para especificar la magnitud de los ángulos. Un radián se define como sigue:

Un ángulo tiene una medida de 1 radián si, al colocar su vértice en el centro de un círculo, la longitud del arco subtendido en la circunferencia es igual al radio.



Para encontrar cuántos radianes son 360°, es necesario encontrar el número de veces que un arco circular de longitud r puede colocarse a lo largo de la circunferencia. Como la circunferencia del círculo mide $2\pi r$, el número de veces que r unidades pueden colocarse es 2π, esto es, un ángulo que mide 2π radianes, es el ángulo de 360°.

Esto último nos da las siguientes relaciones:

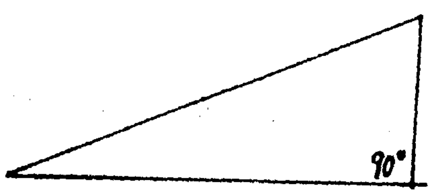
$180^{\circ} = \pi$ radianes $\qquad 1^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}$ radianes $\qquad 1$ radián$=(180/\pi)^{\circ}$

Si usamos la aproximación $\pi = 3.14159$ y calculamos $\pi/180$ y $180/\pi$ obtenemos:

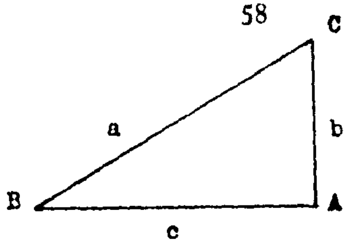
$1^{\circ} \approx 0.01745$ radianes $\qquad$ y $\qquad 1$ radián $\approx 57.296^{\circ}$

4.3.2 Funciones Trigonométricas de Angulos Agudos.

Pensemos en un ángulo agudo cualquiera, si trazamos una perpendicular desde el lado inicial hasta que éste corte al lado terminal, se forma un triángulo que contiene un ángulo recto.



Considérese el triángulo BAC, rectángulo en A. Si se designan los lados con letras minúsculas que correspondan a las mayúsculas de los vértices opuestos, las funciones trigonométricas del ángulo B se definen:



DEFINICION:

SENO es la razón del cateto opuesto al ángulo, a la hipotenusa:

$$\text{sen } B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

COSENO es la razón del cateto adyacente al ángulo, a la hipotenusa.

$$\cos B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

TANGENTE en la razón del cateto opuesto al ángulo, al cateto adyacente.

$$\tan B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

COTANGENTE es la razón del cateto adyacente, al cateto opuesto.

$$\cot B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

SECANTE es la razón de la hipotenusa, al cateto adyacente.

$$\sec B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

COSECANTE es la razón de la hipotenusa, al cateto opuesto.

$$\csc B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

De la definición anterior se desprende que las funciones trigonométricas no son longitudes, sino razones entre longitudes, es decir, representan valores abstractos. Además, dichos valores no dependen del triángulo, sino de la magnitud del ángulo.

También de las definiciones se puede observar las relaciones siguientes;

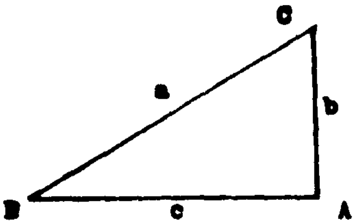
$$\csc B = \frac{1}{\text{sen } B} \qquad \text{sen } B = \frac{1}{\csc B}$$

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} \qquad \cos B = \frac{1}{\sec B}$$

$$\cot B = \frac{1}{\tan B} \qquad \tan B = \frac{1}{\cot B}$$

es decir, para un mismo ángulo, las funciones trigonométricas recíprocas (dos funciones cuyo producto es igual a uno) son: el seno y la cosecante, el coseno y la secante, la tangente y la cotangente.

Otra propiedad importante se desprende del hecho de que en un triángulo rectángulo BAC los ángulos B y C son complementarios.



Conforme a las definiciones dadas, se pueden formular las igualdades siguientes:

$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$ $\qquad$ $\cos C = \frac{b}{a}$

$\tan B = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\cot C = \frac{b}{c}$

$\sec B = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\csc C = \frac{a}{c}$

es decir, el coseno, la cotangente y la cosecante de un ángulo son respectivamente iguales al seno, tangente y secante del ángulo complementario. Por lo tanto puede escribirse:

$\cos (90^\circ - B) = \operatorname{sen} B$ $\qquad$ $\operatorname{sen} (90^\circ - C) = \cos C$

$\cot (90^\circ - B) = \tan B$ $\qquad$ $\tan (90^\circ - C) = \cot C$

$\csc (90^\circ - B) = \sec B$ $\qquad$ $\sec (90^\circ - C) = \csc C$

En el, triángulo rectángulo BAC se tiene:

$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$; $\qquad$ $\cos B = \frac{c}{a}$

elevando al cuadrado estas dos igualdades, y sumando miembro a miembro, resulta:

$(\operatorname{sen} B)^2 + (\cos B)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$

Es común denotar las potencias como $(\operatorname{sen} B)^2$ por $\operatorname{sen}^2 B$ así, la última identidad queda:

$\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$

Por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$b^2 + c^2 = a^2$

Por lo tanto:

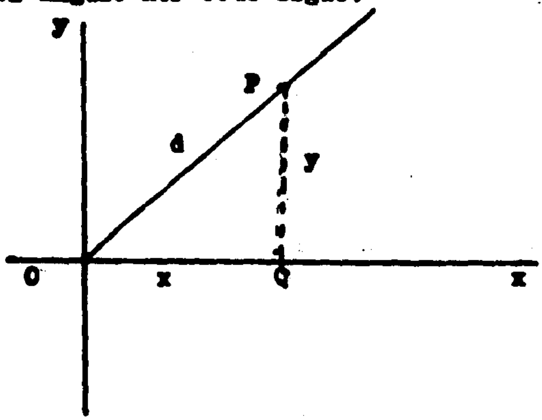
$\text{sen}^2 B + \cos^2 B = 1$

De la definición de sen y cos se obtienen:

$\tan B = \dfrac{\text{sen } B}{\cos B}$ $\qquad$ $\cot B = \dfrac{\cos B}{\text{sen } B}$

4.3.3 Funciones Trigonométricas de Cualquier Angulo.

Considérese un sistema de coordenadas rectangulares. Si se conviene en tomar el origen O como vértice del ángulo, Ox como posición inicial, P(x,y) un punto cualquiera del lado terminal y la distancia OP=d, se definen las funciones trigonométricas del ángulo xOP como sigue:



SENO es la razón de la ordenada, a la distancia al origen.

$$\text{sen} = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{d}$$

COSENO es la razón de la abscisa, a la distancia al origen.

$$\cos = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{d}$$

TANGENTE es la razón de la ordenada, a la abscisa.

$$\tan = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

COTANGENTE es la razón de la abscisa, a la ordenada.

$$\cot = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

SECANTE es la razón de la distancia al origen, a la abscisa.

$$\sec = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{d}{x}$$

COSECANTE es la razón de la distancia al origen, a la ordenada.

$$\csc = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{d}{y}$$

Las definiciones anteriores son generales, es decir, se aplican a todo ángulo, cualquiera que sea el cuadrante a que pertenezca; pero los signos varían con los de las coordenadas correspondientes al punto tomado en el lado terminal.

Los signos que toman las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes se pueden resumir en el cuadro siguiente:

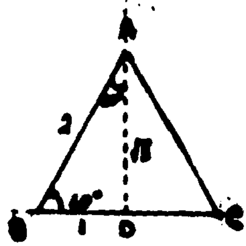
funciones	1^er^ cuadr.	2° cuadr.	3^er^ cuadr.	4° cuadr.
seno y cosecante	+	+	-	-
coseno y secante	+	-	-	+
tangente y cotangente	+	-	+	-

Funciones de Algunos Angulos Particulares.

Por su frecuente uso en matemáticas y sus aplicaciones, se obtienen a continuación el valor de las funciones trigonométricas de algunos ángulos particulares.

Angulos de 30° y de 60°.

Sea ABC un triángulo equilátero con lados de longitud 2. La mediana de un vértice al lado opuesto bisecta al ángulo de ese vértice, además de ser perpendicular a ese lado opuesto.



Por lo tanto, si el lado BC es de longitud 2, el lado BD del triángulo rectángulo BDA vale 1, y la altura AD, por el teorema de Pitágoras, mide $\sqrt{3}$.

Se tiene entonces, según las definiciones y las relaciones que ligan las funciones de dos ángulos complementarios:

sen 30°=cos 60°=1/2=0.5000

cos 30°= sen60°= $\sqrt{3}/2$=0.8660

tan 30°=cot 60°=1/ $\sqrt{3}$= $\sqrt{3}/3$=0.5774

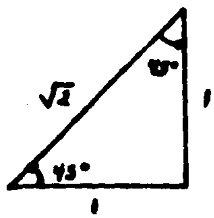
cot 30°=tan 60°= $\sqrt{3}$=1.732

sec 30°=csc 60°=2/ $\sqrt{3}$=2 $\sqrt{3}/3$=1.155

csc 30°=sec 60°=2

Angulo de 45°.

Para encontrar los valores de las funciones de un ángulo de 45°, consideramos un triángulo rectángulo isósceles cuyos dos lados iguales tengan longitud 1. Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$, entonces;



$\text{sen } 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = 0.7071 = \cos 45^\circ$
$\tan 45^\circ = 1/1 = 1 \qquad = \cot 45^\circ$
$\sec 45^\circ = \sqrt{2}/1 = \sqrt{2} = 1.41421 = \csc 45^\circ$

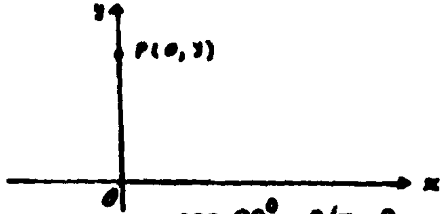
Angulo de 0°.

En el ángulo de 0°, la posición final del lado terminal, coincide con la posición inicial. Si P es un punto del lado terminal, tal que OP=x, resulta que las coordenadas de P son (x,0). Según las definiciones, se tiene:

$\text{sen } 0^\circ = 0/x = 0$ $\qquad$ $\cos 0^\circ = x/x = 1$
$\tan 0^\circ = 0/x = 0$ $\qquad$ $\cot 0^\circ = x/0 =$ no definido
$\sec 0^\circ = x/x = 1$ $\qquad$ $\csc 0^\circ = x/0 =$ no definido

Angulo de 90°.

En este caso, la posición final coincide con OY. Si P es un punto del lado terminal, tal que OP=y, se tiene como coordenadas del punto P(0,y). Conforme a las definiciones, resulta:



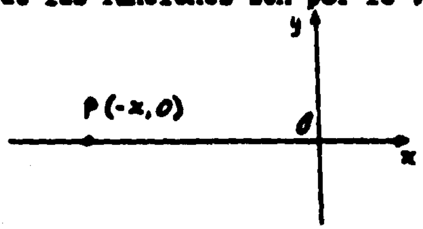
sen $90^\circ = y/y = 1$ cos $90^\circ = 0/y = 0$

tan $90^\circ = y/0 =$ no definido cot $90^\circ = 0/y = 0$

sec $90^\circ = y/0 =$ no definido csc $90^\circ = y/y = 1$

Angulo de 180°.

En el ángulo de 180°, la posición final del lado terminal coincide con OX. Si P es un punto del lado terminal, tal que la distancia OP=x, se tiene que las coordenadas de P son (-x,0). Los valores de las funciones son por lo tanto:



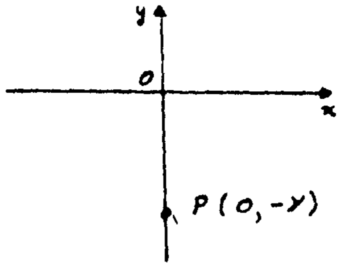
sen $180^\circ = 0/x = 0$ cos $180^\circ = -x/x = -1$

tan $180^\circ = 0/-x = 0$ cot $180^\circ = -x/0 =$ no definido

sec $180^\circ = x/-x = -1$ csc $180^\circ = x/0 =$ no definido

Angulo de 270^o.

En el ángulo de 270^o, la posición final del lado terminal, coincide con OY. Si P es un punto del lado terminal, tal que la distancia OP=y, resultan para las coordenadas de P los valores (0,-y). Según las definiciones, se tiene:



sen $270^o = -y/y = -1$	cos $270^o = 0/y = 0$
tan $270^o = -y/0 =$ no definido	cot $270^o = 0/-y = 0$
sec $270^o = y/0 =$ no definido	csc $270^o = y/-y = -1$

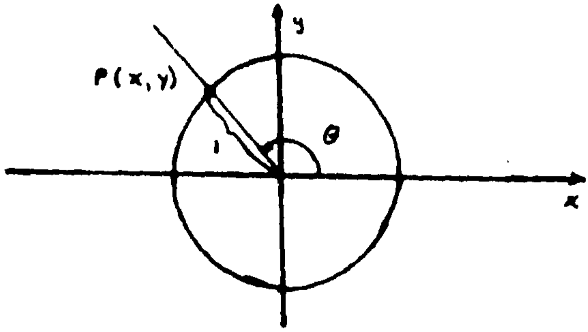
Angulo de 360^o.

En el ángulo de 360^o, la posición final del lado terminal, coincide con OX sus funciones son, por lo tanto, iguales a las del ángulo de 0^o.

4.3.4 Funciones Circulares.

Las funciones trigonométricas de ángulos agudos fueron definidas en la sección 4.3.2 como razones de lados de un triángulo rectángulo. En la sección 4.3.3 se hizo la extención a las funciones de cualquier ángulo. También se puede usar el procedimiento de describir las funciones trigonométricas en términos de puntos de un círculo, entonces nos referimos a ellas como funciones circulares.

Sea U un círculo unitario, esto es, un círculo de radio 1, con centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Entonces U es la gráfica de la ecuación $x^2+y^2=1$. Si θ es cualquier ángulo, colocamos a θ en posición estandar y hacemos que P(x,y) sea el punto en que el lado terminal intersecta a U. Si usamos la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, obtenemos los siguientes resultados:



$\operatorname{sen} \theta = y$ $\cos \theta = x$

$\tan \theta = y/x$ $\cot \theta = x/y$

$\sec \theta = 1/x$ $\csc \theta = 1/y$

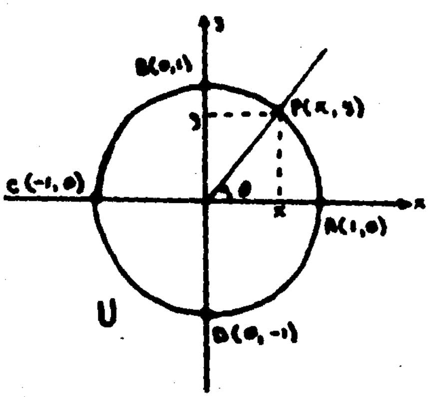
El enfoque del círculo unitario puede usarse para investigar la variación de sen θ y de cos θ a medida que θ cambia.

4.3.5 **Gráficas de las Funciones Trigonométricas.**

Examinemos ahora la gráfica de la ecuación y=sen θ en un sistema de coordenadas θY. Si hacemos que θ varíe a través del conjunto de todos los ángulos, entonces podemos estudiar el comportamiento del sen θ, observando los valores de la abscisa 'x' y la ordenada 'y' del punto P(x,y) en U. Para esto, a continuación usaremos medidas en radianes para θ.

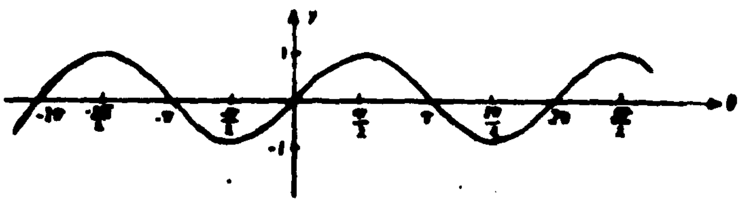
Consideremos el círculo unitario U. A medida que θ aumenta de 0 a π/2, el punto P(x,y) se mueve a partir del punto A(1,0) en dirección contraria a las manecillas del reloj, a lo largo de U, hasta el punto B(0,1). En particular la ordenada 'y' del punto P(x,y), o sea el valor de la función seno, aumenta de 0 a 1. Además, esta función toma todos los valores entre 0 y 1. Si hacemos que θ varíe de $\pi/2$ a π, P(x,y) se mueve de B(0,1) a C(-1,0) y entonces la función seno, o sea la ordenada de P, decrece de 1 a 0. De igual manera vemos que si θ varía de π a $3\pi/2$, el sen θ decrece de 0 a -1 y cuando θ varía de $3\pi/2$ a 2π, sen θ crece de -1 a 0. Si hacemos que θ varíe en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$, entonces P(x,y) traza un círculo nuevamente y se repite un patrón de comportamiento idéntico. Lo mismo sucede para otros intervalos de longitud 2π. Este comportamiento repetitivo se especifica diciendo que la función seno es periódica.

Como $-1 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$ para toda θ, la gráfica se encuentra entre las rectas y=1 y y=-1. Además, basta determinar la gráfica para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ya que sen θ= sen($2\pi + \theta$). Por eso decimos que la función seno es periódica y que su período es 2π.



Algunos valores de sen θ se presentan en la tabla siguiente.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y=sen θ	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0

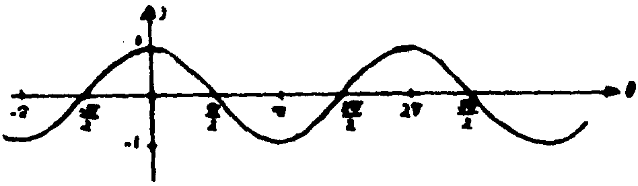


gráfica de y=sen θ

La gráfica de la función coseno se obtiene de manera similar. La variación de la función coseno en el intervalo $[0,2\pi]$, se puede determinar observando el comportamiento de la abscisa x del punto P(x,y) en U, cuando θ varía de 0 a 2π. Nuevamente vemos que la función coseno (o sea x) decrece de 1 a 0 en el intervalo $[0, \pi/2]$. Decrece de 0 a -1 en $[\pi/2,\pi]$, crece de -1 a 0 en $[\pi,3\pi/2]$ y crece de 0 a 1 en $[3\pi/2,2\pi]$. El mismo patrón se repite en intervalos sucesivos de longitud 2π. Se concluye entonces que la función coseno es periódica y su período es 2π.

En la tabla siguiente se dan varios valores de la función coseno.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
cos θ	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

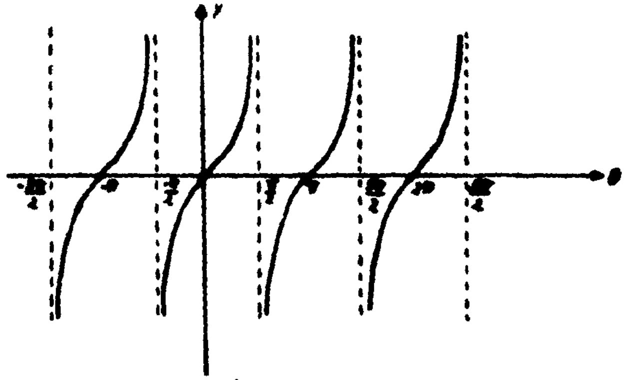


gráfica de la función coseno. $y=\cos\theta$.

Analizemos ahora la función tangente. Los valores de $\tan\theta$ cercanos a $\theta=\pi/2$ requieren de cuidado especial. A medida que θ aumenta hacia $\pi/2$, el punto $P(x,y)$, en el círculo unitario se acerca a $B(0,1)$. Por la definición de funciones circulares, $\tan\theta=y/x$ y entónces, si y se aproxima a 1 y x se aproxima a 0 (por el lado positivo), $\tan\theta$ toma valores positivos muy grandes. En efecto, $\tan\theta$ se puede hacer tan grande como se quiera, escogiendo θ suficientemente cercano a $\pi/2$. Decimos entonces que $\tan\theta$ aumenta indefinidamente cuando θ se acerca a $\pi/2$ desde valores menores que $\pi/2$. De manera similar, si θ se acerca a $-\pi/2$ desde valores mayores que $-\pi/2$, entonces $\tan\theta$ decrece indefinidamente. Este comportamiento en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se ilustra en la gráfica de la función tangente. Las líneas $\theta=\pi/2$ y $\theta=-\pi/2$ son asíntotas verticales en la gráfica. El mismo patrón se repite en los intervalos abiertos de $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 5\pi/2)$ y en otros intervalos similares de longitud π. Entonces, la función tangente tiene periódo π.

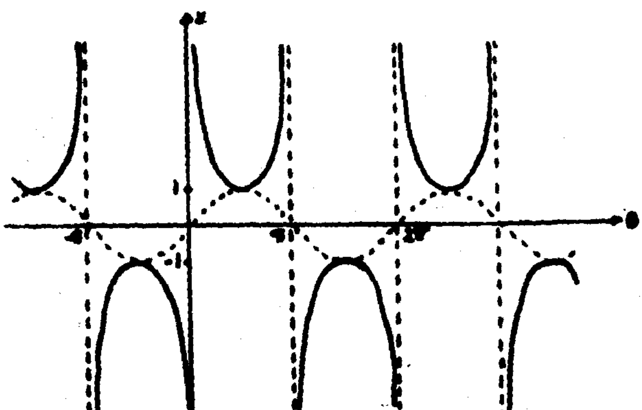
En la tabla siguiente se dan varios valores de la función.

θ	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

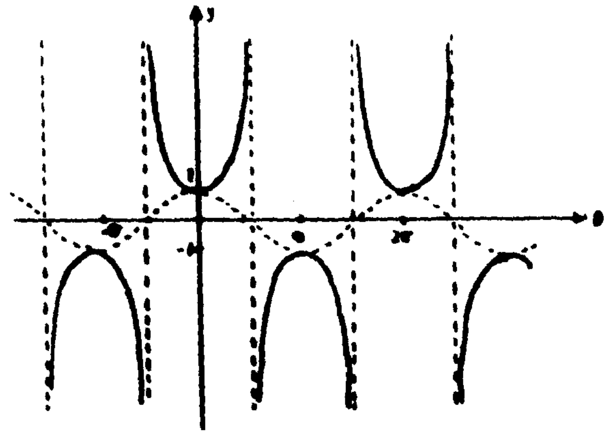


gráfica de la función tangente. tan θ= y

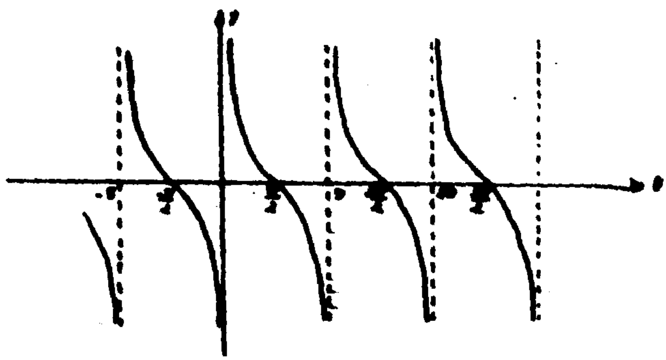
Las gráficas de las tres funciones restantes pueden obtenerse fácilmente. Por ejemplo, como csc Θ=1/sen Θ, podemos encotrar la ordenada de un punto en la gráfica de la función cosecante, tomando el recíproco de la ordenada correspondiente de la gráfica del seno. Esto es posible exepto para Θ=n , donde n es entero, ya que en este caso sen Θ=0 y por lo tanto 1/sen Θ no está definido. Como ayuda para dibujar la gráfica de la función cosecante, es conveniente dibujar primero, con líneas punteadas, la gráfica de la función seno y entonces tomar los recíprocos de las ordenadas para obtener los puntos de la gráfica de la cosecante. Como sec Θ= 1/cos Θ y cot Θ= 1/tan Θ, las gráficas de las funciones secante y cotangente se pueden obtener de igual manera.



gráfica de la función cosecante y=csc Θ

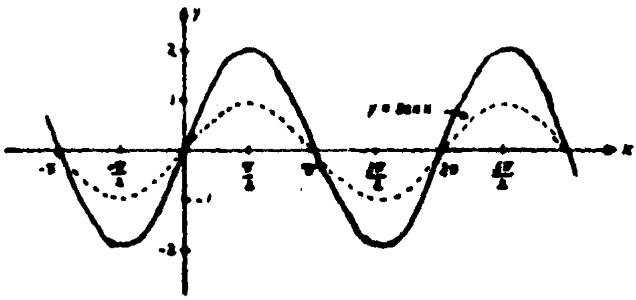


gráfica de la función secante y=sec Θ

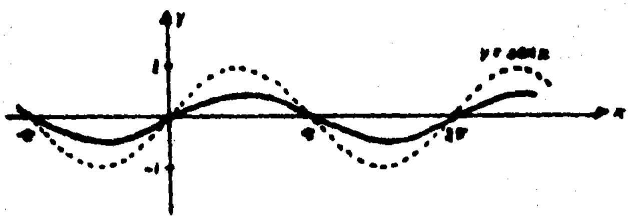


gráfica de la función cotangente y=cot Θ

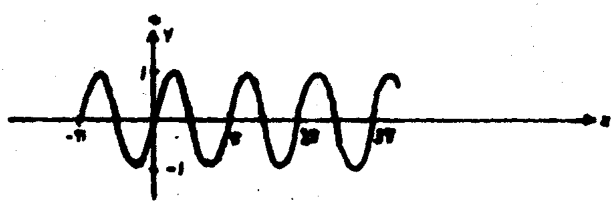
Las gráficas de las ecuaciones de la forma y= a sen (bx+c) donde a, b y c son números reales, se muestran a continuación.



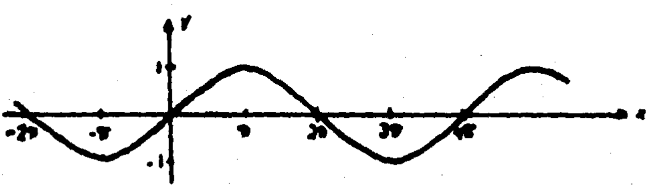
y= 2 sen x



y= 1/2 sen x



y= sen 2x



y= sen 1/2 x

5. OPERACIONES CON FUNCIONES

Como en el caso de los números, podemos definir operaciones sobre funciones. Las operaciones básicas son adición, sustracción, multiplicación, división y composición.

La suma de funciones se define:

$(f+g)(x)= f(x) + g(x)$ donde f y g son funciones reales

La sustracción se define análogamente, tomando el inverso aditivo de la función $g(x)$, es decir:

$$(f +(-g))(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Supongamos que tenemos una función h definida como:

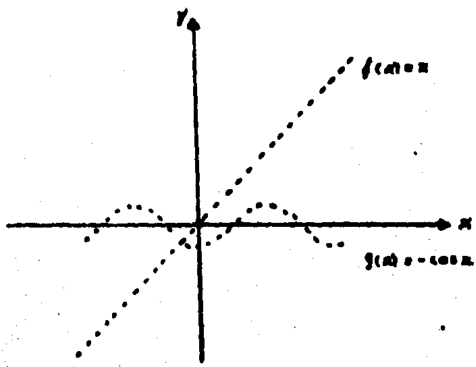
$$h(x)= x - \cos x \qquad ...(1)$$

trazar la gráfica de dicha función puede resultar complicado. Pero podemos considerar:

$f(x) = x \qquad ... (2)$

y $\quad g(x) = -\cos x \qquad ... (3)$

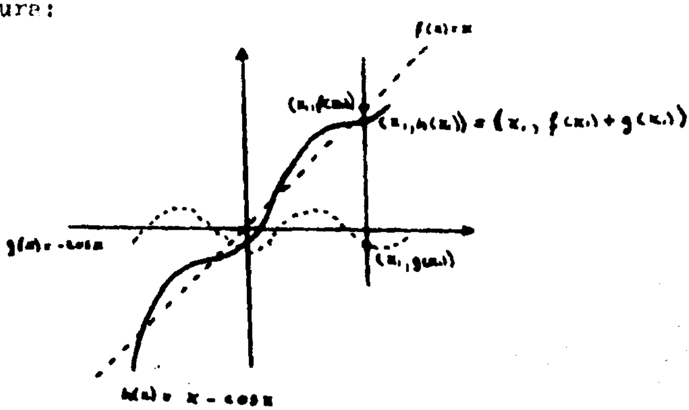
que son funciones cuyas gráficas ya conocemos y podemos trazarlas fácilmente. En la siguiente figura se muestran con lineas punteadas.



De la definición de adición de funciones tenemos:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

entonces para obtener la gráfica de $h(x)$, basta con sumar las ordenadas respectivas de $f(x)$ y $g(x)$ como se muestra en la figura:



La multiplicación de funciones se define:

$$(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{donde } f \text{ y } g \text{ son funciones reales}$$

Análogamente, se define la división de funciones tomando el inverso multiplicativo de la función $g(x)$ siempre y cuando $g(x) \neq 0$, es decir:

$$(f \cdot (1/g))(x) = (f/g)(x) = f(x) \,/\, g(x) \quad \text{con } g(x) \neq 0$$

Al igual que la adición de funciones, el producto puede ayudarnos para construir gráficas de funciones complicadas. El ejemplo siguiente ilustra el hecho de que si f es el producto de dos funciones g y h, entonces se pueden usar las gráficas de g y h para obtener información respecto a la gráfica de f.

EJEMPLO:

Construya la gráfica de f si $f(x) = 2^{-x}\text{sen } x$

Solución:

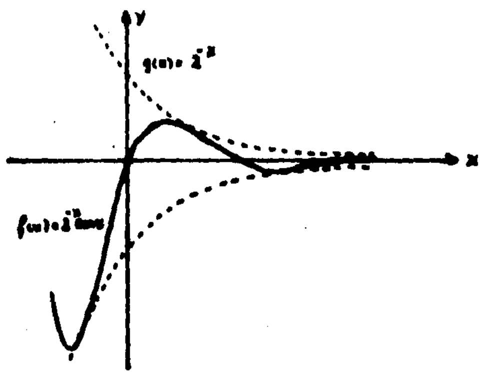
La función f es el producto de dos funciones g y h, donde

$g(x) = 2^{-x}$ y $h(x) = \text{sen } x$.

Si usamos la definición de producto de funciones:

$$f(x) = (g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x)$$

construimos las gráficas de g y h, y multiplicando las ordenadas respectivas, obtenemos la gráfica de $f(x)$ como se muestra en la figura:

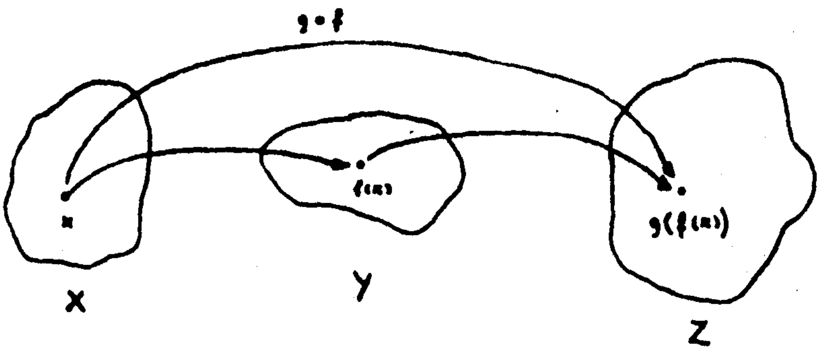


La composición de funciones se define:

DEFINICION

Si f es una función de X a Y y g es una función de Y a Z, la función compuesta $g \circ f$ **es la función de X a Z definida por:**

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{para cada } x \text{ en } X.$$



EJEMPLO:

Un trabajador en una fábrica gana $ 30 por hora de trabajo. Su sueldo diario depende del número de horas que trabaje. Si

x = número de horas que trabaja diariamente

y = sueldo diario,

tendríamos:

$$30x = y \qquad ó \qquad f(x) = 30x$$

Si trabaja 6 días a la semana y recibe además una ayuda de $ 50 para pasajes, se tiene:

$$6y + 50 = z$$

donde y = sueldo diario

z = sueldo semanal

es decir:

$$g(y) = 6y + 50$$

Si deseamos calcular el sueldo semanal del trabajador, primero tenemos que conocer el sueldo diario $f(x) = 30x$ y luego aplicar este resultado para conocer el sueldo semanal:

$g(x) = 6y + 50$; es decir, $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

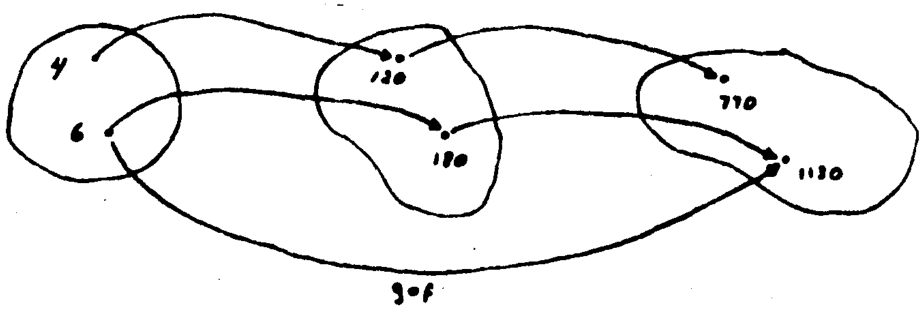
En un caso particular, si un trabajador trabaja 6 horas diarias, entonces:

$$f(x) = 30 \cdot 6 = 180 \quad \text{sueldo diario}$$

$$g(y) = 6(180) + 50 = 1130 \quad \text{sueldo semanal}$$

Gráficamente:

horas trabajadas sueldo diario sueldo semanal



B I B L I O G R A F I A

Earl W. Swokowski — Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica

Rees Sparks — Algebra Contemporánea

Aurelio Baldor — Algebra Elemental

Manuel Lopez Mateos — Funciones Reales

Jorge Martinrz — Conjuntos y Funciones

Haaser, LaSalle, Sullivan — Análisis Matemático