2 Ej 33

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Comparaciones Múltiples en Estadistica no Paramétrica

Trabajo de Tesis

Que para obtener el Titulo de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

LAURA MA. RICO ALVAREZ

México, D. F. 1984

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

Página

Introducción 6

CAPITULO 1.

Comparaciones múltiples en estadística paramétrica. 7

1.1. Introducción 8

1.2. Algunos modelos del diseño experimental 9

1.2.1. El modelo de diseño completamente aleatorizado 9

1.2.2. El modelo de bloques aleatorizado 13

1.3. Diferencia entre error por comparación y error por experimento 20

1.3.1. Error por experimento 20

1.3.2. Error por comparación 21

1.4. Comparaciones Múltiples 23

1.4.1. Método de Scheffé 23

1.4.2. Método de Tukey 26

1.4.2.1. Observaciones al método ... 27

1.4.3. Método de Student-Newman-Keuls (S-N-K) 28

1.4.4. Prueba de Duncan 31

Página

1.5. Ejemplo del modelo completamente aleatorizado 34

1.5.1. Análisis de Varianza 34
1.5.2. Método de Tukey 40
1.5.3. Método S - N - K 43
1.5.4. Método de Scheffé 44
1.5.5. Método de Duncan 46

1.6. Ejemplo de diseño en bloques aleatorizado 50

1.6.1. Análisis de Varianza 50
1.6.2. Método de Scheffé 54
1.6.3. Método de Tukey 57
1.6.4. Método S - N - K 58
1.6.5. Método de Duncan 60

CAPITULO 2.

Pruebas no paramétricas para igualdad de efectos 63

2.1. Introducción 64

2.2. Pruebas de K muestras independientes 65

2.2.1. Prueba de χ^2 para K muestras independientes 66
2.2.2. Prueba de la mediana 75
2.2.3. Prueba de Kruskal - Wallis 80

2.3. Pruebas para K muestras relacionadas 85

2.3.1. La prueba de Cochran (Q de Cochran).. 85
2.3.2. Prueba de Friedman 92

CAPITULO 3.

Comparaciones múltiples en estadística no paramétrica. 98

Página

3.1. Introducción 99

3.2. Pruebas para efectuar comparaciones múltiples (no paramétricas) 100

3.2.1. Prueba de Steel 100
3.2.2. Prueba de Wilcoxon - U de Mann Whitney 107
3.2.3. Procedimiento de Dunn - Mc Donald - Thompson - Nemenyi 111
3.2.4. Técnicas propuestas por Conover e Iman 115

3.2.4.1. Técnica de comparaciones múltiples usando la prueba de Kruskal - Wallis 115
3.2.4.2. Prueba de Quade 118
3.2.4.3. Técnica de comparaciones múltiples utilizando la prueba de Friedman 121

3.2.5. Ejemplos 126

3.2.5.1. En un diseño completamente aleatorizado 126

CAPITULO 4.

Conclusiones 150

Apéndice 157

Bibliografía 185

INDICE DE TABLAS

Página

TABLA 1:

Distribución F con K_1 y K_2 grados de libertad 158

TABLA 2:

Tabla de Rangos Estudentizados 163

TABLA 3:

Puntos de significación de Duncan 165

TABLA 5:

Distribución χ^2 167

TABLA 6:

Cuantiles de la prueba estadística de Kruskal - Wallis 168

TABLA 7:

Valores asociados con la prueba de rangos de Friedman 170

TABLA 8:

Valores asociados con la prueba de Steel 172

TABLA 9:

Distribución Normal 173

Página

TABLA 10-A:

Prueba U de Mann - Whitney con $n_2 \leq 8$ 177

TABLA 10-B:

Prueba U de Mann - Whitney con $9 \leq n_2 \leq 20$ 180

TABLA 11:

Distribución t 184

INTRODUCCION.

En el presente trabajo de tesis se pretendió recopilar la información más accesible que trata lo referente a comparaciones múltiples en estadística no paramétrica. Para ello consideramos pertinente tratar los siguientes puntos:

1º Lo referente a comparaciones múltiples en estadística paramétrica para tener el marco de referencia tanto paramétrico como no paramétrico (Cap. 1).

2º Para poder dar cabida a las comparaciones múltiples es necesario realizar la prueba de hipótesis general en el caso no paramétrico, para así, en caso de existir rechazo de igualdad de efecto de tratamiento proceder a las comparaciones múltiples. (Cap. 2).

3º Finalmente dar entrada a lo esencial de este trabajo y que son las distintas técnicas de comparaciones múltiples en estadística no paramétrica. (Cap. 3).

CAPITULO 1

COMPARACIONES MULTIPLES EN ESTADISTICA PARAMETRICA

1.1. INTRODUCCION.

En el presente capítulo serán tratadas algunas técnicas paramétricas para realizar comparaciones múltiples. Primeramente es necesario considerar algunos modelos del diseño experimental que permiten probar si existe o no igualdad de tratamientos, los cuales son: el modelo completamente aleatorizado y el modelo de bloques aleatorizado, con sus respectivas tablas de Análisis de Varianza (ANOVA). Posteriormente, en caso de haber sido rechazada la hipótesis de igualdad de tratamientos, se mencionan las técnicas de Scheffé, Tukey, Duncan y S-N-K.

1.2. ALGUNOS MODELOS DEL DISEÑO EXPERIMENTAL.

El punto de partida es la consideración de los siguientes modelos:

1.2.1. El modelo de diseño completamente aleatorizado:

Este modelo es de la forma:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \epsilon_{ij}; \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes}$$

$i = 1, 2, \ldots, n_j$ (número de observaciones en el j-ésimo tratamiento).

$j = 1, 2, \ldots, t$ (número de tratamientos)

donde:

μ = media general

$\tau_j = \mu_j - \mu$ = efecto del tratamiento (μ_j nos representa la media del j-ésimo tratamiento).

ϵ_{ij} = error aleatorio el cual se distribuye $N(0, \sigma^2)$

n_j = tamaño de muestra de la j-ésima población.

Lo que primeramente nos interesa probar es el siguiente juego de hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \ldots = \tau_t$$

$$H_1 : \tau_i \neq \tau_j \qquad \text{para algunas } i \neq j$$

Para lo cual se realiza el cálculo de la siguiente tabla de análisis de varianza (tabla ANOVA):

1.1. TABLA DE ANOVA

(EL MODELO DEL DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO)

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIBER.	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F
TRATAMIENTOS	$t-1$	$\sum_{j=1}^{t} \frac{Y^2_{.j}}{n_j} - \frac{Y^2_{..}}{n.}$ *** (1)	(1) / $t-1$ *** (2)	(2) / (4)
ERROR	$n.-t$	$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_j} Y^2_{ij} - \frac{Y^2_{.j}}{n_j}$ *** (3)	(3) / $n.-t$ *** (4)	
TOTAL	$n.-1$	$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_j} Y^2_{ij} - \frac{Y^2_{..}}{n.}$		

Donde:

$$Y_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$$

$$Y_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$$

$$n_{\cdot} = \sum_{j=1}^{t} n_j$$

La REGION CRITICA O DE RECHAZO es:

Si la F calculada en la tabla de ANOVA, resulta ser mayor que el valor de una F con $(t-1, n.-t)$ grados de libertad, para un nivel de significancia α dado (ver tabla 1 del apéndice), la hipótesis nula de igualdad de efectos de tratamientos, es rechazada.

1.2.2. El modelo en bloques aleatorizados:

Este modelo es de la forma:

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \epsilon_{ij}$$

Donde:

ϵ_{ij} se distribuye $N(0, \sigma^2)$ (independientes)

$i = 1,2, \ldots, b$ (número de bloques)

$j = 1,2, \ldots, t$ (número de tratamientos)

β_i = efecto del i-ésimo bloque

τ_j = efecto del j-ésimo tratamiento.

Cuando se tiene un diseño en bloques se tendrán 2 juegos de hipótesis a ser probadas:

1) Prueba de efectos de bloques, es decir:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b$$

Vs.

$$H_1 : \beta_i \neq \beta_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

2) Prueba de efectos de tratamientos, es decir:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_t$$

Vs.

$$H_1 : \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

En este trabajo sólo interesa probar la hipótesis de efectos de tratamientos, puesto que el fin que se persigue al considerar bloques es incluir explícitamente en el diseño experimental, las fuentes de heterogeneidad mas importantes que se han detectado entre las unidades experimentales, es decir, las principales diferencias que existen entre las unidades experimentales y que no son atribuibles a los tratamientos. Por esta razón, usualmente la prueba de diferencias entre bloques no se hace, y de hecho estrictamente no se puede probar.

Para la realización de la prueba de hipótesis de efectos de tratamientos, tenemos la siguiente tabla de Análisis de Varianza (ANOVA).

1.2. TABLA DE ANOVA

(EL MODELO EN BLOQUES ALEATORIZADO)

FUENTES DE VARIACION	GRADOS DE LIBER.	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F
Entre bloques	b-1	$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{b} Y^2_{i.} - \frac{Y^2_{..}}{bt}$ *** (1)	(1) / b-1 *** (2)	
Tratamientos	t-1	$\frac{1}{b} \sum_{j=1}^{t} Y^2_{.j} - \frac{Y^2_{..}}{bt}$ *** (3)	(3) / t-1 *** (4)	(4) / (6)
Error	(b-1)(t-1)	(7) - ((1) + (3)) *** (5)	(5) / (b-1) (t-1)*** (6)	
Total	bt-1	$\sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{t} Y^2_{ij} - \frac{Y^2_{..}}{bt}$ *** (7)		

Donde:

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{t} Y_{ij}$$

$$Y_{..} = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{b} Y_{ij}$$

$$Y_{.j} = \sum_{i=1}^{b} Y_{ij}$$

Una vez que se calculó la tabla de ANOVA, se comparan la F obtenida en dicha tabla con el valor tabulado correspondiente a un nivel α de una distribución F con $(t-1)$ y $(b-1)(t-1)$ grados de libertad, (tabla 1 del apéndice); teniendo la siguiente REGLA DE DECISION:

Si el valor de la F calculada es mayor que el de la F tabulada, se rechaza la hipótesis de igualdad de efectos de tratamientos, para el nivel de significancia α dado.

Hasta este momento lo único que se ha hecho es el análisis de Varianza para probar la hipótesis de igualdad de efectos de tratamientos. En este caso existen dos posibilidades:

i) Si H_0 no se rechaza, finaliza el análisis, diciendo "no existen diferencias significativas entre los tratamientos a un nivel de significancia α". Esto implica que la variabilidad entre las poblaciones estudiadas es del mismo orden de magnitud que la de los errores.

ii) Si el análisis de Varianza llega a la conclusión de rechazar la hipótesis nula: H_0: $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_t$, se considera que existen diferencias entre las -

medias de tratamientos. Es decir, que las diferencias entre las medias estimadas de las poblaciones son grandes comparadas con la magnitud de las variaciones debidas al error; por lo que se dice que "existen diferencias significativas"; sin embargo con ésto no sabemos en que estriban dichas diferencias, ya que podría resultar que:

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_{t-1} \neq \tau_t \qquad ó$$

$$\tau_1 = \tau_2 \neq \tau_3 \qquad ó$$

$$\tau_3 \neq \tau_4 = \tau_5 = \tau_6 \neq \tau_7 = \tau_8 \ldots \neq \tau_{t-1}$$

etc., es decir hay un número inmenso de combinaciones por las que H_0 es rechazada. Entonces el siguiente paso del análisis está encaminado a saber en qué radican las diferencias entre los tratamientos; para ello se tienen basicamente 2 técnicas:

a) <u>Contrastes Ortogonales:</u> En este caso, las hipótesis a probar están predeterminadas. (Dicha técnica no es tratada en esta tesis).

b) <u>Comparaciones Múltiples:</u> La cual consiste - en la realización de todas las pruebas de hipó_ tesis de la forma:

$$H_0 : \tau_i - \tau_j = 0$$

Vs:

$$H_i : \tau_i - \tau_j \neq 0 \ ; \text{ para alguna } i \neq j$$

1.3. DIFERENCIA ENTRE ERROR POR COMPARACION Y ERROR POR EXPERIMENTO.

En las pruebas de hipótesis sobre una decisión con 2 alternativas (hipótesis nula y alternativa), el Teorema de Neyman - Pearson es directamente aplicable para controlar el error tipo I, el cual es - aquel error que se comete al rechazar la hipótesis nula equivocada mente (en este trabajo igualdad de tratamientos). Se fija α como la probabilidad del error tipo I; cuanto mayor sea α , tanto más - probable es que H_0 sea rechazada equivocadamente.

Desafortunadamente las pruebas de comparaciones múltiples no co rresponden a un caso simple de una decisión sobre 2 alternativas, sino que son casos de métodos de decisión múltiple.

Uno de los caminos más usados para evaluar procedimientos de com paraciones múltiples, es el cálculo de las tasas de error, por lo - que se requiere dar entrada a las definiciones siguientes:

1.3.1. Error por Experimento:

Se define como la proporción de experimentos - - en los cuales al menos una hipótesis nula es rechazada, es decir, al menos una hipótesis de igualdad de trata--

mientos es declarada falsa sin serlo. De aquí que puede ser expresado por el siguiente cociente:

$$\text{Error por experimento} = \frac{\text{Número de experimentos donde al menos una diferencia es declarada significativa sin serlo.}}{\text{Número total de experimentos.}}$$

1.3.2. <u>Error por Comparación:</u>

Está dado por el siguiente cociente:

$$\text{Error por comparación} = \frac{\text{Número de diferencias declaradas significativas cuando en realidad } \tau_i = \tau_{i'}}{\text{Número total de comparaciones hechas.}}$$

La elección de una definición de tasa de error puede ser de trascendencia en decidir que es lo considerado como significativo o no. Es decir, si se quiere controlar más el error por comparación, la prueba de Duncan sería la adecuada; mientras que si se quiere mayor control en el error por experimento sería la de Scheffé.

Esto queda expresado por el siguiente cuadro */ :

	DE MENOR A MAYOR CONTROL →			
ERROR POR COMPARACION	Scheffé	Tukey	SNK	Duncan
ERROR POR EXPERIMENTO	Duncan	SNK	Tukey	Scheffé

*/ Fuente: Comparaciones de medios de población.
Méndez Ramírez, Ignacio.
I.I.M.A.S., U.N.A.M. (1976)

1.4. COMPARACIONES MULTIPLES.

1.4.1. Método de Scheffé.

Este método, usa el concepto de contrastes sin que éstos sean necesariamente ortogonales. En realidad, cualquier contraste puede ser considerado.

Es aplicable para todas las funciones lineales linealmente estimables (FLLE).

Para poder entender este método es necesario tener presente las siguientes definiciones:

Contraste: es una combinación lineal de los efectos de los tratamientos tal que la suma de los coeficientes sea cero, es decir:

Sea: $\psi_i = C_{1i}\,\tau_1 + \dots + C_{ti}\,\tau_t$

Con C_{ji} constantes tal que: $\sum_{j=1}^{t} C_{ji} = 0$

Se dice entonces que ψ_i es un contraste.

Función lineal

Linealmente estimable: es aquella combinación lineal de los parámetros cuyo valor queda unívocamente estimado como consecuencia del sistema de ecuaciones normales.

Mediante el Método de Scheffé, es posible probar:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_t$$

Vs.

$$H_1 : \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

Para la aplicación de dicho método deben considerarse los siguientes pasos:

1) Estímese los contrastes de interés mediante la fórmula:

$$\hat{\psi}_i = \sum_{j=1}^{t} c_{ij} \, \bar{Y}_{\cdot j}$$

y calcule sus valores numéricos.

2) De la tabla 1 del apéndice tome el valor de la F de Snedecor, con (t-1, n-t) grados de libertad a un nivel de significancia α. $\left(F_{(t-1),\ (n-t)} \right)$

3) Calcúlese el valor: $A = \sqrt{(t-1)\,F}$

4) Calcule la tabla de ANOVA y tome el valor del cuadrado medio del Error (CME).

5) Calcúlese el error de los contrastes a ser probados mediante la siguiente fórmula:

$$S^2_{\psi_i} = (CME) \sum_{j=1}^{t} \frac{C^2_{ij}}{n_j}$$

Donde: c_{ij} representa el coeficiente j del i-ésimo contraste.

6) Si el contraste $\hat{\psi}_i$ es numéricamente mayor que - A veces S_{ψ_i} éste se declara significativo; es decir, si $|\hat{\psi}_i| > AS_{\psi_i}$, rechazamos la hipótesis nula: H_0: $\psi_i = 0$

1.4.2. Método de Tukey.

Este método tiene aplicabilidad en aquellos casos en que se tienen tamaños de muestras iguales, es decir $n_j = m$ para toda j.

Para la utilización de dicho método se tienen los siguientes pasos:

1) Ordénese de mayor a menor las medias de los tratamientos.

2) Calcúlese la tabla de ANOVA y considere el valor del Cuadrado Medio de Error (CME).

3) Encuéntrese el valor correspondiente a:

$$q^{\alpha}_{(t,\, t(m-1))}$$

Donde:

t = # de tratamientos

m = tamaño de muestra

Para un nivel de significancia α dado.

Dicho valor corresponde al valor de la q de Rangos Estudentizados (tabla 2 del apéndice).

4) Calcule el valor de la Diferencia Mínima significativa honesta con la siguiente fórmula:

$$DMSH = q^{\alpha}_{(t,\, t(m-1))} \sqrt{(CME/m)}$$

5) Si $\left|\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot j'}\right|$ es numéricamente mayor que el valor de la DMSH obtenida en el paso anterior, se considera que la hipótesis H_0: $\tau_j = \tau_{j'}$, deberá ser rechazada.

6) Una vez que se encuentra alguna diferencia $\left|\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot j'}\right|$ que numéricamente no sea mayor que el valor de la DMSH, entonces las medias restantes cuyas diferencias sean menores, no se considerarán significativas.

1.4.2.1. Observaciones al Método.

Consideramos de importancia hacer notar algunos puntos que deben sobresalir:

$$q_{(t,\, t(m-1))} = \frac{\sqrt{m}\ \left(\max\left\{\bar{Y}_{\cdot j} - \mu - \tau_j\right\} - \min\left\{\bar{Y}_{\cdot j} - \mu - \tau_j\right\}\right)}{s^2}$$

donde m = tamaño de muestra

s^2 = Cuadrado Medio del Error.

Por lo que tenemos, bajo la hipótesis nula:

$$H_0: \ \tau_1 = \ldots = \tau_t$$

que:

$$q_{(t,\,t(m-1))} = \frac{\sqrt{m}\left\{ \max\left\{\overline{Y}_{\cdot j}\right\} - \min\left\{\overline{Y}_{\cdot j}\right\}\right\}}{s^2}$$

1.4.3. Método de Student Newman Keuls. (S.N.K.).

SNK es una prueba de naturaleza secuencial, es decir, no existe una diferencia de medias contra el cual se comparen todos los valores restantes de $\left|\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot j'}\right|$ como en la prueba anterior.

Este método solo es válido para el caso en que se tienen tamaños de muestras iguales, es decir, $n_j = m$ para toda j.

Para efectuar la prueba de SNK, deben seguirse los siguientes pasos:

1) Ordénese de mayor a menor las medias de los t tratamientos, esto es, los valores de $\bar{Y}_{\cdot j}$

2) Calcúlese la tabla de ANOVA y considere el valor del Cuadrado Medio del Error (S^2).

3) Calcule el siguiente cociente:

$$\sqrt{S^2 / m}$$

4) Encuentre en la tabla de Rangos Estudentizados, (tabla 2 del apéndice), para un nivel de significancia α previamente determinado, el valor correspondiente a:

$q^{\alpha}_{(t_0,\ t(m-1))}$; donde t_0 = nos representa el número de medias comprendidas en el intervalo $\left|\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot j'}\right|$ y toma los valores de $2, 3, \ldots, t$.

y lístense estos t-1 rangos.

5) Multiplique estos Rangos Estudentizados por el valor de $\sqrt{S^2/m}$ encontrado en el paso 3 y fórmese así un grupo de t-1 Rangos Mínimos Significativos (RMS).

6) Compare estos valores de RMS con los valores de la diferencia de las medias de los tratamientos, de la siguiente manera:

Primeramente considere la mayor de las medias con la menor, y esta diferencia compárela con el valor RMS obtenido para t_0, luego pruébese la mayor contra la segunda mas pequeña y compárese con el valor de RMS obtenido para $t_0 - 1$; y así sucesivamente.

Continúe ahora considerando la 2ª más grande con la más pequeña y compárela ahora con el valor de RMS obteniendo para $t_0 - 1$; y así hasta que las $t_0 (t_0 - 1) / 2$ posibles parejas se hayan comparado.

Finalmente si la diferencia de medias $\left| \overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{.j'} \right|$ resulta ser mayor que el valor de RMS, se considera que si existe diferencia significativa entre los tratamientos j y j'.

1.4.4. Prueba de Duncan.

Este método, al igual que el anterior, usa la variable de Rangos Estudentizados, pero a diferencia de la S-N-K, éste va modificando el nivel de significancia en cada etapa de la siguiente manera:

$$\alpha_{t_0} = 1 - (1 - \alpha)^{t_0 - 1}$$; donde: α = nivel de significancia.

Para realizar dicha prueba hay que seguir los siguientes pasos:

1) Ordénese de mayor a menor las medias de los t tratamientos, esto es, los valores de $\overline{Y}_{.j}$

2) Calcúlese la tabla de ANOVA y considere el valor del Cuadrado Medio del Error (S^2).

3) Busque en las tablas de los puntos de significancia de Duncan (tabla 3 del apéndice) el valor de:

$q^{\alpha_{t_0}}_{(t_0,\ t(m-1))}$; donde t_0 = nos representa el número de medias comprendidas en el intervalo $\left| \overline{Y}._j - \overline{Y}._{j'} \right|$ y toma los valores de 2, 3...,t.

4) Calcúlese la Diferencia Mínima Significativa:

$$DMS = q^{\alpha_{t_0}}_{(t_0,\ t(m-1))} \sqrt{\frac{C.M Error}{m}}$$

5) Si $\left| \overline{Y}._j - \overline{Y}._{j'} \right|$ es numéricamente mayor que el valor de la DMS obtenida en el paso anterior, se considera que la hipótesis H_0: $\tau_j = \tau_{j'}$ deberá ser rechazada.

Cabe señalar que las pruebas de TUKEY, DUNCAN y SNK se han descrito para el caso en que se tienen tamaños de muestras iguales, pero sin embargo, en los casos en los que no se cumpla ésto, y se desee aplicar alguna de estas técnicas se puede hacer, considerando el siguiente artificio:

En lugar de utilizar $\sqrt{S^2/m}$ se utilizará:

$\sqrt{(1/2)\, S^2\, (1/n_j + 1/n_{j'})}$, donde n_j y $n_{j'}$ denotan el tamaño de la muestra j y j' respectivamente.

También es importante señalar que estas tres pruebas se pueden aplicar a cualquier diseño, usando para la q los siguientes grados de libertad (t, gl_{cme}), donde gl_{cme} nos denota los grados de libertad del Cuadrado Medio del Error, y t = # de tratamientos.

1.5. EJEMPLO DEL MODELO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO.

1.5.1. Análisis de Varianza. */

Supóngase que una Compañía Industrial ha adquirido 3 máquinas nuevas de diferentes marcas y desea determinar si una es más rápida que las otras, en la producción de cierto producto.

Se observaron al azar cifras de 5 horas de producción obteniendo los siguientes resultados:

Observaciones	Máquinas		
	M_1	M_2	M_3
1	25	31	24
2	30	39	30
3	36	38	28
4	38	42	25
5	31	35	28

*/ Fuente: Ya-Lun-Chou. "Análisis Estadístico", 2a. edición. Editorial Interamericana.

SOLUCION.

Primeramente, es de notarse que las tres muestras que se tienen (una de cada máquina) son del mismo tamaño, es decir, se tienen cinco observaciones por cada muestra, de aquí:

$$n_1 = 5$$

$$n_2 = 5$$

$$n_3 = 5$$

Se trata de un problema que podemos representar con el <u>modelo completamente aleatorizado</u> puesto que las cifras son observadas al azar; por lo que tenemos el modelo:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \epsilon_{ij} \;; \quad i = 1, 2, \ldots n_j$$

(número de observaciones)

$j = 1, 2, \ldots t$

(número de tratamientos)

Lo que nos interesa probar es:

H_0 = Todas las máquinas son igual de rápidas en promedio en la producción.

Vs.

H_1 = Al menos una de las máquinas es más rápida en promedio en la producción.

Lo cual puede ser planteado de la siguiente forma:

$$H_0: \ \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$$

$$H_1: \ \tau_i \neq \tau_j; \text{ para alguna } \ i \neq j$$

Para ello efectuaremos la prueba de hipótesis por medio de la F de Snedecor, por lo cual calcularemos la siguiente tabla:

(MODELO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO)

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F
TRATAMIENTO	t-1	$\sum_{j=1}^{t} \frac{Y_{\cdot j}^2}{n_j} - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{n_\cdot}$ *** (1)	(1) / t-1 *** (2)	(2) / (4)
ERROR	$n_\cdot - t$	$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\cdot j}^2}{n_j}$ *** (3)	(3) / n-t *** (4)	
TOTAL	$n_\cdot - 1$	$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{n_\cdot}$		

(MODELO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO)

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F
TRATAMIENTO	t-1	$\sum_{j=1}^{t} \frac{Y_{\cdot j}^2}{n_j} - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{n.}$ *** (1)	(1) / t-1 *** (2)	(2) / (4)
ERROR	n.-t	$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\cdot j}^2}{n_j}$ *** (3)	(3) / n-t *** (4)	
TOTAL	n.-1	$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{n.}$		

Ahora bien:

$t = 3$

$$n. = \sum_{j=1}^{3} n_j = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$Y._j = \sum_{i=1}^{n_{.j}} Y_{ij}$$

por lo que:

$$Y._1 = 25 + 30 + 36 + 38 + 31 = 160$$

$$Y._2 = 31 + 39 + 38 + 42 + 35 = 185$$

$$Y._3 = 24 + 30 + 28 + 25 + 28 = 135$$

De aquí tenemos:

j	1	2	3
$Y._j$	160	185	135
$Y^2_{.j.}$	25,600	34,225	18,225
$Y^2_{.j} / n_j$	5,120	6,845	3,645

Ahora bien:

$$Y_{..} = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$$

De aquí:

$$Y_{..} = 160 + 185 + 135 = 480$$

$$Y^2_{..} = 230400$$

Por lo cual tenemos la siguiente tabla de ANOVA:

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F
TRATAMIENTOS	2	250	125	7.50
ERROR	12	200	16.675	
TOTAL	14	450		

Consideremos un nivel de significancia $\alpha = 0.05$

Buscando en la Tabla 1 del apéndice tenemos:

$$F_{(2,12)}^{(0.05)} = 3.89$$

Por lo que $F_{ANOVA} = 7.50 > 3.89 = F_{tablas}$

Por lo cual la hipótesis nula es rechazada, es decir por lo menos dos de las tres máquinas son significativamente diferentes en sus velocidades de producción.

Ahora bien, falta que determinemos cual o cuales máquinas son diferentes con respecto a las otras, para ello realizaremos el procedimiento de comparaciones múltiples, y lo efectuaremos siguiendo las cuatro técnicas que tratamos anteriormente, para así poder comparar los resultados que se obtienen con las diferentes pruebas:

1.5.2. Método de Tukey:

Siguiendo los pasos tenemos:

1. Calculando las medias de los tratamientos:

$$\bar{Y}_{\cdot 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}}{n_j} = \frac{160}{5} = 32$$

$\overline{Y}_{\cdot 2} = 37$

$\overline{Y}_{\cdot 3} = 27$

2. C M E = 16.675 g.1. = 12

3. $t = 3,\ m = n_j = 5$

por lo que buscando en la tabla 2 del apéndice tenemos:

$$q_{(3,12)}^{(0.05)} = 3.773$$

4. Calculamos la diferencia mínima significativa honesta:

$$D\,M\,S\,H = q_{(3,12)}^{(0.05)} \sqrt{\frac{C\,M\,E}{m}}$$

$$D\,M\,S\,H = (3.773)\sqrt{\frac{16.675}{5}} = 6.890$$

Se ve que la media mayor es 37 y la menor 27 de donde tenemos:

j	2	1	3
$\overline{Y}_{\cdot j}$	37	32	27

$$\left|\overline{Y}_{\cdot 2} - \overline{Y}_{\cdot 3}\right| = \left|37 - 27\right| = 10$$

y en consecuencia: $10 > 6.890 = D\,M\,S\,H$

Por lo que para las máquinas 2 y 3 se puede concluir que son diferentes es decir, rechazamos la hipótesis nula.

$$\left|\overline{Y}_{\cdot 2} - \overline{Y}_{\cdot 1}\right| = \left|37 - 32\right| = 5$$

Por lo que tenemos:

$$5 < 6.890 = D\,M\,S\,H$$

Entonces concluimos que para las máquinas 2 y 1 la hipótesis nula no es rechazada, por lo tanto no existe diferencia en la rapidez de producción de estas máquinas. Por lo que entre las máquinas 1 y 3 tampoco existe diferencia en la rapidez de producción a un nivel de significancia del 5%.

1.5.3. Método S·N·K .

1. Ordenando las medias de menor a mayor tenemos:

j	3	1	2
$\overline{Y}_{\cdot j}$	27	32	37

2. El $CME = S^2 = 16.675$ y los $g.l. = 12$

3. $m = 5 = n_j$

$t = 3$

Calculamos el cociente:

$$\sqrt{S^2 / m} = \sqrt{16.675 / 5} = 1.826$$

4. Buscando en la tabla 2 del apéndice para $\alpha = .05$ tenemos:

t_0	2	3
$q_{(t_0, 12)}$	3.082	3.773

5. Calculamos los Rangos Mínimos Significativos:

t_0	2	3
RMS	5.628	6.890

6. Comparando las diferencias de medias con los RMS tenemos:

MAQUINAS	DIFERENCIA		RMS
2 con 3	10	$>$	6.890
2 con 1	5	$<$	5.628
1 con 3	5	$<$	5.628

Con lo cual se obtiene que:

La producción de las máquinas:

2 y 3 son diferentes

2 y 1 son iguales

1 y 3 son iguales.

1.5.4. Método de Scheffé.

1. Considere los siguientes contrastes:

$$\psi_1 = \tau_1 - \tau_2$$

$$\psi_2 = \tau_1 - \tau_3$$

$$\psi_3 = \tau_2 - \tau_3$$

Calculamos sus valores numéricos, utilizando la diferencia de medias que es el estimador:

$$\hat{\psi}_1 = \overline{Y}_{\cdot 1} - \overline{Y}_{\cdot 2} = 32 - 37 = -5$$
$$\hat{\psi}_2 = \overline{Y}_{\cdot 1} - \overline{Y}_{\cdot 3} = 32 - 27 = 5$$
$$\hat{\psi}_3 = \overline{Y}_{\cdot 2} - \overline{Y}_{\cdot 3} = 37 - 27 = 10$$

2. Para $\alpha = 0.05$ tenemos que, buscando en la tabla 1 del apéndice:

$$F^{(0.05)}_{(2,12)} = 3.89$$

$$n. = \sum_{j=1}^{3} n_j = 15$$

3. $A = \sqrt{2\ (3.89)} = 2.79$

4. C M E = 16.675 con 12 grados de libertad.

5. $S\,\psi_1 = 16.675\ (2/5) = 6.6680$

$S\,\psi_2 = 16.675\ (2/5) = 6.6680$

$S\,\psi_3 = 16.675\ (2/5) = 6.6680$

6. Calculamos los valores:

i	ψ_i		$AS\ \psi_i$
1	-5	$<$	(2.79) (6.6680) = 18.60372
2	5	$<$	18.60372
3	10	$<$	18.60372

Por lo tanto ningún contraste es declarado significativo, es decir, las máquinas:

1 y 2 son iguales

1 y 3 son iguales

2 y 3 son iguales

1.5.5. Método de Duncan.

1. Ordenamos las medias y tenemos:

j	3	1	2
$\overline{Y}_{\cdot j}$	27	32	37

2. C M E (S^2) = 16.675

3. $t = 3$

$m = 5$

t_0	2	3
α_{t_0}	$1-(1-.05)^{2-1} = 0.05$	$1-(1-.05)^{3-1} = .0975$
$q^{\alpha_{t_0}}_{(t_0, 12)}$	3.082	3.225

4. Calculamos la D M S:

$$\sqrt{s^2 / m} = \sqrt{16.675 / 5} = 1.826$$

t_0	2	3
DMS	5.63	5.89

5. Comparamos y obtenemos:

MAQUINAS	$\lvert Y_{\cdot j} - Y_{\cdot j'} \rvert$		DMS
2 con 3	10	$>$	5.89
2 con 1	5	$<$	5.63
1 con 3	5	$<$	5.63

Por lo tanto tenemos, que la producción de las máquinas: 2 y 3 son diferentes, 2 y 1 son iguales, 1 y 3 son iguales. Por lo que los resultados de las pruebas son los siguientes:

GRAFICA COMPARATIVA DE LOS DISTINTOS METODOS DE COMPARACIONES MULTIPLES

j	2	1	3	PRUEBA
$\overline{Y}_{.j}$	37	32	27	
				DUNCAN
				S.N.K.
				TUKEY
				SCHEFFE

Como se ve, la doble línea nos indican aquellos tratamientos que resultaron ser iguales; por ejemplo en la prueba de Duncan al igual que en la SNK y TUKEY se tiene que el tratamiento 2 y el tratamiento 1 son iguales mientras que el 2 y 3 no lo son, la siguiente doble línea indica que el tratamiento 1 resultó ser igual al 3. En lo correspondiente a la prueba de Scheffé se obtuvo que los 3 tratamientos son iguales, es decir no existen diferencias que pudieran ser detectadas por este método debido a lo conservador del mismo. Como puede observarse se llega a una contradicción con el método de Scheffé en este ejemplo puesto que al haber detectado diferencias con la prueba de hipótesis general se esperaba que al menos fueran diferentes la más grande con respecto a la más pequeña; esta es una de las deficiencias que la técnica de Scheffé tiene y es por esto que no recomendamos su utilización.

1.6. EJEMPLO: DISEÑO EN BLOQUES ALEATORIZADO.

1.6.1. Análisis de Varianza. */

Se desea efectuar un estudio para determinar el mejor plan de trabajo para montaje de relojes de pared; se eligen al azar 4 obreros montadores de entre todos los montadores de la planta y se les enseña concienzudamente a trabajar 5 diferentes planes de trabajo; entonces cada obrero sigue cada plan durante un día, habiendo sido escogido al azar uno de los planes para cada día y se registra el número de relojes montados obteniendo los siguientes resultados:

MONTADORES	PLAN DE TRABAJO				
	1	2	3	4	5
1	10	13	9	14	11
2	5	10	5	10	6
3	6	12	5	10	6
4	4	8	4	11	5

*/ Fuente: Ya-Lun-Chou. "Análisis Estadístico". 2a. edición. Editorial Interamericana.

SOLUCION.

Considérese el siguiente modelo de bloques aleatorizado:

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \epsilon_{ij}$$

$i = 1, 2, \ldots, b$

$j = 1, 2, \ldots, t$

Se quiere probar el siguiente juego de hipótesis:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

$$H_1: \tau_i \neq \tau_j \text{ para alguna } i \neq j$$

Para ello tenemos:

1.4. TABLA DE ANOVA

(EL MODELO EN BLOQUES ALEATORIZADO)

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F
ENTRE BLOQUES	b - 1	$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{b} Y_{i.}^2 - \frac{Y_{..}^2}{bt}$ ***(1)	(1) / b-1 *** (2)	
TRATAMIENTOS	t-1	$\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{t} Y_{.j}^2 - \frac{Y_{..}^2}{bt}$ *** (3)	(3) / t-1 *** (4)	$\frac{(4)}{(6)}$
ERROR	(b-1)(t-1)	(7) - ((1) + (3)) *** (5)	(5) / (b-1)(t-1)***(6)	
TOTAL	bt-1	$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{bt}$ ***(7)		

donde:

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{t} Y_{ij}$$

$$Y_{..} = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{b} Y_{ij}$$

$$Y_{.j} = \sum_{i=1}^{b} Y_{ij}$$

Por lo que efectuando operaciones obtenemos:

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F
Entre Bloques	4	108.2	27.05	
Tratamientos	3	73.2	24.40	29.87
Error	12	9.8	0.817	

Consideremos un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ y buscando en la tabla 1 del apéndice tenemos:

$$F^{0.05}_{(3,12)} = 3.49$$

Por lo que la hipótesis de igualdad de tratamientos la rechazamos debido a que la F calculada en la tabla de ANOVA resulta ser mayor que la F obtenida de la tabla 1 del apéndice; por lo que concluimos que existe diferencias entre los distintos planes de trabajo para el montaje de relojes de pared. Ahora bien, para detectar en que estriban dichas diferencias realizaremos el procedimiento de comparaciones múltiples.

1.6.2. Método de Scheffé.

1. Considere los siguientes contrastes:

$$\psi_1 = \tau_1 - \tau_2$$

$$\psi_2 = \tau_1 - \tau_3$$

$$\psi_3 = \tau_1 - \tau_4$$

$$\psi_4 = \tau_2 - \tau_3$$

$$\psi_5 = \tau_2 - \tau_4$$

$$\psi_6 = \tau_3 - \tau_4$$

Calculamos sus valores numéricos:

$$\hat{\psi}_1 = \bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 2} = 4.2$$

$$\hat{\psi}_2 = \bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 3} = 3.6$$

$$\hat{\psi}_3 = \bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 4} = 5.0$$

$$\hat{\psi}_4 = \bar{Y}_{\cdot 2} - \bar{Y}_{\cdot 3} = -0.6$$

$$\hat{\psi}_5 = \bar{Y}_{\cdot 2} - \bar{Y}_{\cdot 4} = 0.8$$

$$\hat{\psi}_6 = \bar{Y}_{\cdot 3} - \bar{Y}_{\cdot 4} = 1.4$$

2. $F = 3.49$

3. $A = \sqrt{3(3.49)} = 3.2357$

4. $CME = 0.817$

5. $S\psi_1 = \quad 0.817\ (2/5) = 0.3268$

$S\psi_2 = \quad 0.817\ (2/5) = 0.3268$

$S\psi_3 = \quad 0.817\ (2/5) = 0.3268$

$S\psi_4 = \quad 0.817\ (2/5) = 0.3268$

$S_{\psi_5} = 0.817\ (2/5) = 0.3268$

$S_{\psi_6} = 0.817\ (2/5) = 0.3268$

6. Calculamos los valores:

i	ψ_i		AS_{ψ_i}
1	4.2	>	(3.2357) (0.3268) = 1.05743
2	3.6	>	1.05743
3	5.0	>	1.05743
4	-0.6	<	1.05743
5	0.8	<	1.05743
6	1.4	>	1.05743

Por lo que concluimos que los planes de trabajo:

1 y 2 son diferentes.

1 y 3 son diferentes.

1 y 4 son diferentes.

2 y 3 son iguales.

2 y 4 son iguales.

3 y 4 son diferentes.

1.6.3. Método de Tukey.

Siguiendo los pasos tenemos:

1. Ordenando las medias de mayor a menor tenemos:

j	1	3	2	4
$\bar{Y}_{\cdot j}$	11.4	7.8	7.2	6.4

2. C M E = 0.817

3. $q^{0.05}_{(4,12)} = 4.199$

4. D M S H = $4.199 \sqrt{0.817 / 5} = 1.6973$

5. $|11.4 - 6.4| = 5.0 > 1.70 =$ D M S H

$|11.4 - 7.2| = 4.2 > 1.70 =$ D M S H

$|11.4 - 7.8| = 3.6 > 1.70 =$ D M S H

$|\ 7.8 \quad 6.4| = 1.4 < 1.70 =$ D M S H

Por lo que concluimos, los planes de trabajo:

1 y 4 son diferentes

1 y 2 son diferentes

1 y 3 son diferentes

3 y 4 son iguales

3 y 2 son iguales

2 y 4 son iguales

1.6.4. Método de S.N.K.

1. Ordenando las medias de mayor a menor tenemos:

j	1	3	2	4
$\overline{Y}_{\cdot j}$	11.4	7.8	7.2	6.4

2. C M E = 0.817

3. $\sqrt{0.817 / 5} = 0.40$

4. Buscando en la tabla 2 del apéndice para $\alpha = .05$ tenemos:

t_0	2	3	4
$q(t_0, 12)$	3.082	3.773	4.199

5. Calculamos los rangos Mínimos Significativos:

t_0	2	3	4
RMS	1.25	1.53	1.70

6. Comparando las diferencias de medias con los RMS tenemos:

MONTADORES	DIFERENCIA		RMS
1 con 4	5	>	1.25
1 con 2	4.2	>	1.53
1 con 3	3.6	>	1.70
3 con 4	1.4	<	1.53
3 con 2	0.6	<	1.70
2 con 4	0.8	<	1.70

Con lo cual se obtiene que los montadores:

1 y 4 son diferentes

1 y 2 son diferentes

1 y 3 son diferentes

3 y 4 son iguales

3 y 2 son iguales

2 y 4 son iguales

1.6.5. Método de Duncan.

1. Ordenando las medias de mayor a menor tenemos:

j	1	3	2	4
$\overline{Y}_{\cdot j}$	11.4	7.8	7.2	6.4

2. C M E = 0.817

3. t = 4

   m = 5

t_0	2	3	4
α_{t_0}	0.05	.097	.01426
$q^{\alpha_{t_0}}_{(t_0, 12)}$	3.082	3.225	3.313

4. Calculamos la D M S :

t_0	2	3	4
DMS	1.25	1.30	1.34

5. Comparamos y obtenemos:

MAQUINAS	$\left\| \overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot j'} \right\|$		DMS
1 y 4	5	>	1.25
1 y 2	4.2	>	1.30
1 y 3	3.6	>	1.34
3 y 4	1.4	>	1.30
3 y 2	0.6	<	1.34
2 y 4	0.8	<	1.34

Por lo tanto tenemos, que entre los métodos de montaje:

1 y 4 son diferentes

1 y 2 son diferentes

1 y 3 son diferentes

1 y 4 son diferentes

1 y 2 son iguales

1 y 4 son iguales

Por lo que los resultados de las pruebas son los siguientes:

J	1	3	2	4	PRUEBA
$\overline{Y}_{\bullet j}$	11.4	7.8	7.2	6.4	
					DUNCAN
					S.N.K.
					TUKEY
					SCHEFFE

Analizando la gráfica tenemos que con las pruebas de Duncan, S.N.K. Tukey y Scheffé se obtuvieron los mismos resultados, es decir, el tratamiento 1 resultó ser diferente a los tratamientos 2, 3 y 4; el 3 y el 2 resultaron ser iguales, así como el 2 y 4.

CAPITULO 2

PRUEBAS NO PARAMETRICAS PARA IGUALDAD DE EFECTOS

2.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se tratan 5 técnicas no paramétricas que nos permiten probar la significación de las diferencias - entre 2 ó más muestras, ya sean relacionadas o independientes.

En aquellos casos en que se tengan muestras relacionadas, se tratan las pruebas: Q DE COCHRAN y la de FRIEDMAN; cabe señalar que en estos casos existe, en la forma en que los datos se dan, una analogía con el modelo en bloques - (ver Capítulo 1).

Ahora bien, para el caso de muestras independientes, serán tratadas las técnicas de: χ^2 para K POBLACIONES, KRUSKAL WALLIS y la prueba de la MEDIANA. También es de notarse en este caso, la analogía que existe con el - modelo completamente aleatorizado tratado en el capítulo - anterior.

2.2. PRUEBAS DE K MUESTRAS INDEPENDIENTES.

2.2.1. Prueba de χ^2 para k muestras independientes.

Por medio de esta prueba es posible determinar si teniendo 2 o mas muestras independientes, proceden o no de la misma población.

La prueba de χ^2 es adecuada cuando la escala en que las observaciones se miden es al menos nominal.
Un ejemplo */ en el que este método es aplicable, es el siguiente:

Supóngase que se seleccionó en forma aleatoria una muestra de n_1 estudiantes de una escuela, en la cual se enseña de acuerdo a un cierto método. Asimismo, se seleccionaron muestras aleatorias de tamaño $n_2, n_3, \ldots, n_t$ en escuelas distintas, en donde los métodos de enseñanza son distintos entre sí y al primero. Esto bajo el supuesto de que no existe efecto de escuelas.

*/ Fuente: Rueda, Raúl. Tesis Profesional, U.N.A.M., Estadística no Paramétrica, un Enfoque Intuitivo.

A todos los estudiantes les fue aplicado un examen de conocimientos y fueron clasificados de acuerdo a la calificación obtenida, de la siguiente forma:

	ESCUELA			
	1	2	...	t
1	0_{11}	0_{12}	...	0_{1t}
2	0_{21}	0_{22}	...	0_{2t}
3	0_{31}	0_{32}	...	0_{3t}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
m=10	0_{m1}	0_{m2}	...	0_{mt}

(Como puede observarse se trata de una tabla de contingencias), donde 0_{ij} denota el número de observaciones de la i-ésima muestra en la j-ésima categoría, en este caso sería el número de alumnos de la escuela i que obtuvieron la calificación j.

Se desea saber si todos los métodos de enseñanza son igualmente efectivos o no, es decir, tendremos el siguiente juego de hipótesis:

H_0: Todos los métodos de enseñanza son igualmente efectivos.

Vs.

H_1: Al menos un método de enseñanza no es igual de efectivo que los demás.

Para hacer uso de esta técnicas se tiene como estadística de prueba:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{m} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

donde:

$i = 1, 2, \ldots, m$ (número de observaciones, o bien número de renglones).

$j = 1, 2, \ldots, t$ (número de tratamientos o número de columnas).

La cual se ha demostrado que se distribuye aproximadamente como una χ^2 con (t-1) (m-1) grados de libertad.

Como puede observarse para calcular el valor de esta estadística es necesario conocer el valor de E_{ij} o valor esperado. Para ello, sea:

$O_{i.}$ = total de observaciones en el i-ésimo renglón, es decir:

$$O_{i.} = \sum_{j=1}^{t} O_{ij}$$

$O_{.j}$ = total de observaciones de la j-ésima columna, es decir:

$$O_{.j} = \sum_{i=1}^{m} O_{ij}$$

$O_{..}$ = total de observaciones para todas las muestras, es decir:

$$O_{..} = \sum_{i=1}^{m} O_{i.} \text{ ; o bien}$$

$$O_{..} = \sum_{j=1}^{t} O_{.j}$$

Ahora bien tenemos:

$$E_{ij} = \frac{O_{i.}\ O_{.j}}{O_{..}}$$

Algunos autores (Reynolds, 1977) recomiendan que en los casos en que el 20% de las casillas de la tabla formada con los valores esperados, sea menor que 5 o bien si algunas de las casillas tiene valor esperado menor que 1, entonces deberán de juntarse ya bien sea algunos renglones o algunas columnas; pero deberán agruparse aquellos para los cuales tal cosa tenga sentido.

La REGION DE RECHAZO que se tiene es la siguiente: Cuando el valor de la χ^2 que se encuentre en la tabla 4 del apéndice sea menor al obtenido en la estadística de prueba, para un nivel α de significancia y (t-1) (m-1) grados de libertad, la hipótesis nula será rechazada.

Con el propósito de ilustrar estos conceptos, utilizaremos el siguiente ejemplo */ numérico.

*/ Fuente: Rueda, Raúl, Tesis Profesional, U.N.A.M., Estadística no Paramétrica, un Enfoque Intuitivo.

En una fábrica se tienen 3 procesos distintos para producir el mismo artículo, sin embargo el costo de producción varía de proceso a proceso. Debido a esto, se desea averiguar si la efectividad de los procesos es la misma, pues si esto es cierto, entonces se usará el más barato. La efectividad de cada proceso, se medirá en función del número de artículos defectuosos que produzca.

Se tomaron muestras de lotes de producción de cada proceso, donde cada lote contiene 50 artículos. Del primer proceso, se tomaron 63 lotes, del segundo 46 y del tercero 30. Se revisó cada lote y se contó el número de artículos defectuosos encontrados. La información fue la siguiente: los renglones indican los lotes de acuerdo al número de artículos defectuosos y las columnas indican de que proceso proviene la muestra. Así, la entrada colocada en la primera columna y el primer renglón, señala el número de lotes de los fabricados con el proceso 1 en los que no se encontró ningún artículo defectuoso.

PROCESO	Nº de artículos defectuosos por lote 0	1	2	3	4	5	TOTAL
1	12	18	7	9	10	7	63
2	14	6	5	6	8	7	46
3	10	4	5	9	6	4	38
Total	36	28	17	24	24	18	147

SOLUCION:

La prueba que se utilizará es una χ^2 para probar igualdad de poblaciones, en este caso de "efectividad de procesos", por lo que tenemos el siguiente juego de hipótesis:

H_0 : Los 3 procesos son igualmente efectivos.

H_1 : Existen diferencias significativas entre los 3 procesos.

Tenemos que:

$O_{1.} = 63$

$O_{2.} = 46$

$O_{3.} = 38$

además:

$O_{.1} = 36$

$O_{.2} = 28$

$O_{.3} = 17$

$O_{.4} = 24$

$O_{.5} = 24$

$O_{.6} = 18$

Por lo que $O_{..} = 147$

Los valores esperados se calculan con la siguiente fórmula:

$E_{ij} = \dfrac{O_{i.}\ O_{.j}}{O_{..}}$, de aquí que obtenemos la siguiente tabla:

E_{ij}:

i \ j	1	2	3
1	15.426	11.26	9.31
2	12.00	8.80	7.24
3	7.29	5.32	4.40
4	10.30	7.51	6.20
5	10.30	7.51	6.20
6	7.71	5.63	4.70

Sabemos que:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{m} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

es la estadística de prueba, por lo que efectuando las operaciones - necesarias tenemos:

$$\chi^2 = 9.17$$

lo cual se compara con una χ^2 con 10 grados de libertad.

Si $\alpha = 0.05$, y buscando en la tabla 5 del apéndice obtenemos:

$\chi^{2\ (0.05)}_{(10)} = 18.31$ por lo que la hipótesis H_o; no es rechazada, es decir, puede buscarse el proceso mas económico para usarse, pues los 3 tienen la misma efectividad.

2.2.2. Prueba de la Mediana.

Esta prueba es útil cuando se tienen muestras independientes que han sido medidas por lo menos en una escala ordinal, y determina si dados K grupos, estos han sido tomados de poblaciones con medianas iguales.

Cabe señalar que los grupos independientes no necesariamente deben ser de igual tamaño.

A continuación se plantea un ejemplo */ en el que dicha prueba tiene aplicabilidad:

Cuatro diferentes métodos para el crecimiento del maíz fueron asignados aleatoriamente a 34 parcelas de tierra y la producción por acre fue calculada para cada parcela obteniendo los siguientes resultados:

*/ Fuente: Rueda, Raúl. Tesis Profesional, U.N.A.M., Estadística no Paramétrica, un Enfoque Intuitivo.

METODO			
1	2	3	4
83	91	101	78
91	90	100	82
94	81	91	81
89	83	93	77
89	84	96	79
96	83	95	81
91	88	94	80
92	91		81
90	89		
	84		

Lo que se pretende probar es si todas las muestras pro-- vienen de poblaciones con la misma mediana, por lo que podemos plantear el siguiente juego de hipótesis:

H_0: Todos los métodos tienen la misma mediana de producción por acre.

H_1: No todos los métodos tienen la misma producción por acre.

Lo primero que debemos hacer para llevar a cabo la prueba de la mediana es juntar todas las muestras en una sola, ordenándolas de mayor a menor o viceversa; posteriormente determinaremos la mediana de esta nueva muestra obtenida, la cual llamaremos GRAN MEDIANA.

Denotemos por 0_{1j} al número de observaciones mayores que la gran mediana, y por 0_{2j} al número de observaciones menores que la gran mediana en la j-ésima población; de modo tal que podamos formar una tabla como la siguiente:

	1	2	... t	TOTAL
$>$ GRAN MEDIANA	0_{11}	0_{12}	... 0_{1t}	$0_{1.}$
$\leq$ GRAN MEDIANA	0_{21}	0_{22}	... 0_{2t}	$0_{2.}$
TOTAL	$0_{.1}$	$0_{.2}$	... $0_{.t}$	$0_{..}$

Pasemos pues al ordenamiento de la muestra en el ejemplo dado:

77(4), 78(4), 79(4), 80(4), 81(4), 81(4), 81(4), 81(4), 82(4), 83(1), 83(2), 83(2), 84(2), 84(2), 88(2), 89(1), 89(1), 89(2), 90(1), 90(2), 91(1), 91(1), 91(2), 91(2), 91(3), 92(1), 93(3), 94(1), 94(3), 95(3), 96(1), 96(3), 100(3), 101(3).

El número que aparece en el paréntesis denota la muestra de la que proviene cada observación. La gran mediana en esta muestra es 89 por lo que tenemos:

	1	2	3	4	TOTAL
> 89	6	3	7	0	16
≤ 89	3	7	0	8	18
TOTAL	9	10	7	8	34

Ahora bien para la realización de esta prueba de hipótesis se tiene la siguiente estadística de prueba:

$$T = \frac{O^2_{..}}{(O_{1.})(O_{2.})} \sum_{j=1}^{t} \frac{\left(O_{1j} - \frac{O_{.j}\, O_{1.}}{O_{..}}\right)^2}{O_{.j}}$$

La cual se distribuye asintóticamente como una χ^2 con (t-1) grados de libertad; y se tiene como REGION DE - RECHAZO:

Para aquellos valores de T que resulten mayores que - una χ^2 con (t-1) grados de libertad para un nivel α de significancia dado, la hipótesis nula será rechazada.

Por lo que en nuestro ejemplo tenemos:

$$T = 4.01\ (0.34 + 0.29 + 1.97 + 1.78) = 17.6$$

Suponiendo un nivel de significancia del .05 y buscando en la tabla 5 del apéndice tenemos que el valor de una - χ^2 con 3 grados de libertad para $\alpha = .05$ es de 7.82, lo cual nos lleva a rechazar la hipótesis nula, es decir, podemos concluir que no todas las muestras provienen de poblaciones de igual mediana.

2.2.3. Prueba de Kruskal Wallis.

Con esta técnica es posible determinar, si dadas k -- muestras, estas proceden de la misma población o no. La escala de medida mínima es ordinal, y las muestras no necesariamente son del mismo tamaño.

Para mayor claridad considérese el siguiente ejemplo: Se cuenta con tres marcas diferentes de focos, y se tomaron muestras aleatorias de tres lotes, conteniendo - cada lote una y solo una marca de foco, de forma tal que se tiene una muestra aleatoria de cada marca. Se midió la vida media de cada foco, teniéndose los siguientes resultados:

	MARCA		
	A	B	C
DURACION	73	84	82
	64	80	79
	67	81	71
	62	77	75
	70		

Se quiere ver si la vida media de los focos de las distintas marcas es la misma.

De aquí, podemos plantear el siguiente par de hipótesis:

H_0: La vida media de los focos es la misma para las tres marcas.

H_1: La vida media de los focos es diferente en al menos una de las tres marcas.

Para la aplicación de esta prueba de Kruskal Wallis se tiene la siguiente estadística de prueba:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{t} \frac{R_{.j}^2}{n_j} - 3(N+1)$$

Donde:

t = número de tratamientos ó poblaciones (muestras)

n_j = número de casos en el tratamiento j

$N = \sum_{j=1}^{t} n_j$ que es el número de casos de todas las muestras combinadas.

$R_{.j}$ = suma de rangos asignados en el tratamiento j.

la cual se distribuye asintóticamente como una χ^2 con (t-1) grados de libertad; algunos autores (Siegel Sidney 1982) mencionan que esto es válido siempre y cuando los tamaños de las diferentes t muestras no sean demasiado pequeños, es decir, si n_j es menor o igual que 5 para toda j, se cuenta con valores tabulados para ello debe usarse la tabla 6 del apéndice, en los otros casos se usa la tabla de la distribución χ^2 (Tabla 5 del apéndice).

La REGLA DE DECISION es: Si el valor calculado de H es mayor o igual que el valor de una χ^2 con (t-1) grados de libertad, para un nivel de significancia dado, la hipótesis nula deberá ser rechazada.

Se puede observar que en nuestro ejemplo tenemos:

$n_1 = 6$, $n_2 = 4$, $n_3 = 4$, $t = 3$; como n_1 es mayor que 5, podemos usar la suposición de que se distribuye aproximadamente como una χ^2, y así hacer uso de la tabla 5 del apéndice.

Primeramente tenemos que ordenar las muestras y asig nar rangos, así es como se obtiene la siguiente tabla:

	A	B	C
	6	13	12
	2	10	9
	3	11	5
	1	8	7
	4		
$R_{\cdot j}$	16	42	36

$$N = 5 + 4 + 4 = 13$$

por lo que el valor de la estadística de prueba es:

$$H = \frac{12}{(13)\ (14)} \quad (16)^2/6 + (42)^2/4 + (36)^2/4 - 3(14)$$

$$= 11.815384$$

Suponiendo un nivel $\alpha = 0.05$ de significancia y buscando en la tabla 5 del apéndice tenemos:

$$\chi^{2\,(.05)}_{(2)} = 5.99$$

lo cual nos lleva a rechazar la hipótesis nula; es decir, podemos concluir, que la vida media de los tres focos no es la misma para las tres marcas.

2.3. PRUEBAS PARA K MUESTRAS RELACIONADAS.

2.3.1. La Prueba de Cochran (Q de Cochran).

Por medio de esta prueba es posible determinar si teniendo tres o mas muestras, estas difieren significativamente entre si o no. La prueba de Cochran es particularmente adecuada cuando los datos están en una escala nominal o se ha dicotomizado la información ordinal.

Hacia el año de 1950, (Conover, 1981) Cochran demostró que si la hipótesis nula (H_0) es cierta, se tiene que la estadística de prueba:

$$Q = \frac{t(t-1) \sum_{j=1}^{t} (x_{.j} - \bar{x}_{.j})^2}{t \sum_{i=1}^{m} x_{i.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i.}^2}.$$

Donde:

$$x_{i.} = \sum_{j=1}^{t} x_{ij} \text{ total de el i-ésimo renglón.}$$

$$x_{.j} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \text{ total de la j-ésima columna.}$$

la cual es equivalente a:

$$Q = \frac{(t-1)\left[t\sum_{j=1}^{t} x_{.j}^{2} - \left(\sum_{j=1}^{t} x_{.j}\right)^{2}\right]}{t\sum_{i=1}^{m} x_{i.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i.}^{2}}$$

está distribuída aproximadamente como una χ^2 con t-1 - grados de libertad.

Por otra parte se tiene la siguiente REGLA DE DECISIO-NES:

Si el valor de Q es mayor o igual que el de una χ^2 con t-1 grados de libertad para un nivel de significancia dado, la hipótesis nula será rechazada. Este último valor es - obtenido de la tabla 5 del apéndice.

Para mayor claridad considérese el siguiente ejemplo.*/

Cada uno de tres aficionados del basketball, desarrolla-- ron su propio sistema para predecir los resultados de

*/ Fuente: Conover. Practical Nonparametric Statistics. Ed. Wiley Second Edition.

cada juego. Se seleccionaron 12 juegos aleatoriamente y cada aficionado presentó su predicción para cada juego.

Después de realizados los juegos, los resultados fueron tabulados, usando un 1 si la predicción fue correcta, y 0 si fue incorrecta, obteniendo los siguientes resultados:

JUEGOS	AFICIONADOS		
	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	0	1	0
4	1	1	0
5	0	0	0
6	1	1	1
7	1	1	1
8	1	1	0
9	0	0	1
10	0	1	0
11	1	1	1
12	1	1	1

Lo que se quiere saber es si los 3 aficionados son igualmente efectivos en su habilidad para predecir los resultados de los juegos de basketball.

SOLUCION.

Se puede plantear el siguiente juego de hipótesis:

H_0 : los aficionados son igualmente efectivos en su habilidad para predecir los resultados de los juegos.

H_1 : la habilidad para predecir los resultados de los juegos no es igualmente efectiva en los tres aficionados.

Como puede observarse la información está dada en forma dicotómica, además de que se tratan de muestras relacionadas, por lo que la prueba de Cochran tiene aplicabilidad. De aquí que la estadística de prueba a usarse es:

$$Q = \frac{(t-1)\left[t \sum_{j=1}^{t} x_{.j}^{2} - \left(\sum_{j=1}^{t} x_{.j}\right)^{2}\right]}{t \sum_{i=1}^{m} x_{i.} - \sum_{i=1}^{m} x_{i.}^{2}}$$

En este caso tenemos:

$t = 3$, $m = 12$, y efectuando las operaciones necesarias obtenemos los siguientes resultados:

$x_{.1} = 8$

$x_{.2} = 10$

$x_{.3} = 7$

$x_{1.} = 3$

$x_{2.} = 3$

$x_{3.} = 1$

$x_{4.} = 2$

$x_{5.} = 0$

$x_{6.} = 3$

$x_{7.} = 3$

$x_{8.} = 2$

$x_{9.} = 1$

$x_{10.} = 1$

$x_{11.} = 3$

$x_{12.} = 3$

De esta forma obtenemos el siguiente valor de Q:

$$Q = \frac{2(3(213) - 625)}{3(25) - 65} = 2.8$$

Suponiendo un nivel $\alpha = 0.05$ de significancia y buscando en la tabla 5 del apéndice tenemos:

$$\chi^{2\,(\alpha)}_{(t-1)} = \chi^{2\,(.05)}_{(2)} = 5.99$$

lo cual nos lleva a no rechazar la hipótesis nula puesto que el valor de Q resultó ser menor que el de una χ^2 con (t-1) grados de libertad.

Por lo que podemos concluir que los tres aficionados son igualmente efectivos en su habilidad para predecir los resultados de los juegos.

2.3.2. Prueba de Friedman.

Como ya se mencionó, la prueba de Cochran, anteriormente tratada, es aplicable para aquellos casos en que los datos - están dados en una escala nominal. Pero en la práctica, - existen casos en que la información está dada por lo menos en una escala ordinal, en estos casos la prueba por rangos de Friedman tiene gran aplicabilidad.

La presente prueba nos sirve para ver si dadas k muestras, éstas han sido o no obtenidas de la misma población; y funcio na en los casos en que las muestras están relacionadas, es - decir, cuando se han estudiado el mismo grupo de sujetos, - en cada una de las diferentes condiciones a un sujeto de cada grupo. Con esto puede observarse claramente la estrecha - relación que existe entre información de este tipo y la que - se utiliza en un modelo en bloques.

Para mayor claridad consideremos el siguiente ejemplo: */

*/ Fuente: Siegel, Sidney. Estadística no Paramétrica Aplicada a las Ciencias de la Conducta. Ed. Trillas.

Supóngase que se desea estudiar las diferencias del aprendizaje logrado mediante 4 métodos de enseñanza, se pueden tener, digamos b conjuntos de 4 alumnos, cada uno compuesto por 4 niños igualados en las variables pertinentes (edad, aprendizaje anterior, inteligencia, status socioeconómico, motivación, etc.), y después se asigna al azar un niño de cada uno de los b conjuntos al método de enseñanza A, otro al B, otro al C, y el cuarto al D.

Para hacer uso de la prueba de Friedman, debemos decolocar los datos en forma de un arreglo rectangular: b renglones y t columnas, donde los renglones nos representan los sujetos o conjuntos de sujetos a estudiar y las columnas las condiciones bajo las cuales serán estudiados, en este caso particular los distintos métodos de enseñanza.

Así pues supóngase que se obtuvo la siguiente información:

	CONDICIONES			
	A	B	C	D
Grupo 1	9	4	1	7
Grupo 2	6	5	2	8
Grupo 3	9	1	2	6

Para la aplicación de la prueba de Friedman, primeramente deben ordenarse, por rangos, las puntuaciones obtenidas por cada grupo. Dicha asignación puede hacerse indistintamente de menor a mayor, asignando rango 1 a la menor observación y rango (b) (t) a la mayor o viceversa, pero de la misma manera en todos los grupos.

Cabe señalar que en los casos en que existan empates, el rango que se asignará será el promedio de los rangos que les corresponderían sin haber considerado el empate.

Sea: R_{ij} = rango asociado en el grupo i y la condición j.

De esta forma se genera la siguiente tabla:

	A	B	C	D
Grupo 1	4	2	1	3
Grupo 2	3	2	1	4
Grupo 3	4	1	2	3
Total = $R_{.j}$	11	5	4	10

Friedman (1937) propuso la siguiente estadística de prueba:

$$T = \frac{12}{bt\,(t+1)} \sum_{j=1}^{t} R^2_{.j} - 3b\,(t+1)$$

Donde:

b = N° de hileras

t = N° de columnas

$R_{.j}$ = Suma de rangos para el tratamiento j.

La cual se distribuye aproximadamente como una χ^2 con t−1 grados de libertad.

La REGLA DE DECISION será:

Si T es mayor o igual que el valor encontrado en la tabla 5 para un nivel de significancia α , la hipótesis nula o de igualdad de tratamientos, será rechazada, ésto es, si:

$\chi^{2\,(\alpha)}_{(t-1)}$ es menor o igual que T calculada con la estadística de prueba, la hipótesis se re chaza.

Algunos autores (Siegel Sidney 1982) hacen notar que en los casos en que el número de renglones y columnas es muy pequeño, existen tablas de probabilidad exactas que deben usarse en lugar de la tabla 5. En el apéndice, la tabla 7 es la correspondiente a estos casos, es decir, para $t=3$, $2 < b < 9$ y para $t=4$, $2 < b < 4$.

En el ejemplo que hemos planteado, puede observarse que se tiene tiene $t = 4$ y $b = 3$, por lo que la tabla 7 deberá ser usada.

Efectuando las operaciones necesarias, obtenemos:

$R_{.1} = 11$, $R_{.2} = 5$, $R_{.3} = 4$, $R_{.4} = 10$, de aquí se obtiene un valor de:

$$T = \frac{12}{3(4)\ (5)}\left[(11)^2 + (5)^2 + (4)^2 + (10)^2\right] - 3(3)(5) = 7.4$$

Buscando en tablas para una $T \geqslant 7.4$ cuando $t = 4$ y $b = 3$, $p = 0.033$, por lo que la hipótesis nula es rechazada, es decir, podemos concluir que los cuatro métodos de enseñanza producen diferente nivel de aprendizaje.

CAPITULO 3

COMPARACIONES MULTIPLES EN ESTADISTICA NO PARAMETRICA.

3.1. INTRODUCCION.

En el presente capítulo serán tratadas algunas técnicas que nos permiten realizar comparaciones múltiples dentro del campo no paramétrico, una vez que la hipótesis de igualdad de efectos de tratamientos ha sido rechazada.

Entre los principales aportadores podemos mencionar a Steel, Dunn, Wilcoxon, Conover y otros cuyas técnicas serán tratadas a continuación.

3.2. PRUEBAS PARA EFECTUAR COMPARACIONES MULTIPLES (NO PARAMETRICAS).

3.2.1. Prueba de Steel. (1960)

Esta prueba permite comparar todos los pares de tratamientos en un diseño completamente aleatorizado mediante suma de rangos.

Suponga que se tienen las muestras X_{ij}, $i=1,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,t$ donde X_{ij} denota la observación j del tratamiento i, y m el tamaño de muestra, a las cuales se les midió una característica determinada y cuyas funciones de distribución están representadas por F_1, F_2, ... F_t.

Suponga que se quieren probar las siguientes hipótesis:

$$H_0: F_1 = F_2 \ldots = F_t$$

$$H_1: F_i \neq F_j \text{ para alguna } i \neq j$$

Para ello deben seguirse los pasos que a continuación se dan:

1. Para asignar rangos, conjunte las muestras X_{1j} y X_{2j}, X_{1j} y X_{3j}, ..., X_{1j} y X_{tj}, asignan-

do rango 1 a la menor observación y 2m a la mayor.

Posteriormente conjunte X_{2j} y X_{3j}, X_{2j} y X_{4j}, ..., X_{2j} y X_{tj} y asigne los rangos de la misma manera como se asignó en la anterior muestra conjunta y así hasta obtener los rangos de la muestra conjunta $X_{t-1,j}$ y X_{tj} de tal forma de obtener:

Muestra 1	Rango	Muestra 2	Rango
x_{11}	R_{11}	x_{21}	R_{21}
x_{12}	R_{12}	x_{22}	R_{22}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x_{1m}	R_{1m}	x_{2m}	R_{2m}

y así sucesivamente.

2. Sume los rangos de las x_{1j} cuando estos hayan sido asignados al conjuntar las x_{1j}'s con las - x_{ij}'s subsiguientes, es decir, x_{1j} con $x_{2j}, \ldots,$ x_{ij}, etc.; para así obtener $T_{12}, T_{13}, \ldots, T_{1t}$; posteriormente los rangos de las x_{2j}'s subsi-- guientes para obtener $T_{23}, \ldots, T_{2t}$ y así sucesi vamente hasta obtener $T_{t-1,t}$.

Posteriormente calcúlese los conjugados - - $T'_{12}, \ldots, T'_{1t}$; $T'_{23}, \ldots, T'_{2t}$ y así hasta ob tener $T'_{t-1,t}$. Estos serán obtenidos haciendo uso de la siguiente fórmula:

$$T'_{ij} = m(2m+1) - T_{ij}$$ donde m = tamaño de muestra.

3. Selecciónese el más pequeño de los T_{ij} y T'_{ij} que será la suma de rangos usada.

4. Steel tabuló la distribución del mínimo (T_{ij}), lo - cual se encuentra en la tabla 8 del apéndice. Con- siderando dicha tabla y usando un nivel de signifi-- cancia α predeterminado para t y m, extraiga el valor del nivel de significancia descriptivo "p".

5. Compare este valor de p con el de α , si resulta que $p < \alpha$ la hipótesis de igualdad es rechazada.

Para mayor claridad considere el siguiente ejemplo:

Suponga que se tienen tres tipos de suelo para probar su permeabilidad midiendo la fluidez del aire a través de éstos.

Se realizaron mediciones que fueron hechas un mismo día y se obtuvieron los siguientes resultados:

MUESTRA DEL SUELO:		
A	B	C
1.8	3.2	1.1
11.0	1.2	3.1
2.7	3.2	2.4
8.5	0.7	2.2

SOLUCION:

Primeramente se tiene que $m = 4$ = número de observaciones por muestra y $t = 3$ que es el número de tratamientos, siguiendo los pasos antes mencionados tenemos:

1. Conjuntando las muestras y asignando rangos tenemos:

Muestra 1	Rango	Muestra 2	Rango
1.8	3	3.2	5
11.0	8	1.2	2
2.7	4	3.2	6
8.5	7	0.7	1

Los rangos que aparecen en esta tabla fueron obtenidos así:

Ordenando la muestra de menor a mayor tenemos:

RANGOS	1	2	3	4	5	6	7	8
DATOS	0.7	1.2	1.8	2.7	3.2	3.2	8.5	11.0
MUESTRA DE LA QUE PROVIENEN	2	2	1	1	2	2	1	1

Cabe señalar que cuando los datos provienen de la misma muestra, no se considera el rango promedio.

Se le asignó rango 1 a la menor observación y 2m=2(4)=8 a la -
mayor.

Ahora:

Muestra 1	Rango	Muestra 3	Rango
1.8	2	1.1	1
11.0	8	3.1	6
2.7	5	2.4	4
8.5	7	2.2	3

y finalmente conjuntando t-1 = 2 y t = 3 tenemos:

Muestra 3	Rango	Muestra 2	Rango
1.1	3	3.2	7
3.1	6	1.2	3
2.4	5	3.2	8
2.2	4	0.7	1

2. Sumando los rangos de las x_{1j}'s encontrados al haber - conjuntado las x_{ij}'s subsiguientes tenemos:

$T_{12} = 3+8+4+7 = 22$ que son los rangos resultantes de haber conjuntado x_{1j} con x_{2j}.

$$T_{13} = 2 + 8 + 5 + 7 = 22$$

$$T_{23} = 7 + 3 + 8 + 1 = 19$$

Calculando ahora las T'_{ij} tenemos:

$$T'_{12} = 4\ (2(4)+1) - 22 = 36 - 22 = 14$$

$$T'_{13} = 14$$

$$T'_{23} = 17$$

3. Así tenemos que la $T'_{12} = T'_{13} = 14$ son las más pequeñas de las T_{ij} y T'_{ij}

4. De la tabla 8 y para los valores de $t=3$, $m=4$ y $T_{ij} = 14$ tenemos: $p = 0.6251$.

5. Para $\alpha = .05$ tenemos que $p > \alpha$, es decir $0.6251 > 0.05$, por lo que no rechazamos la hipótesis, es decir no existe evidencia para decir que los tratamientos 1 y 2, 1 y 3 o 3 y 2 son diferentes.

Por lo cual como p=.6251 se obtuvo para $T_{ij}=14=$ mínimo, luego entonces para cualquier $T_{ij} > 14$, $p > 0.6251$, por lo cual podemos concluir que no existe evidencia suficiente que nos indique diferencia entre los tratamientos.

3.2.2. Prueba de Wilcoxon - U de Mann Whitney.

Esta prueba la proponen Tobach, Smith, Rose y Richter, - (1967), y permite realizar comparaciones 2 a 2 en un diseño completamente aleatorizado.

Para llevar a cabo esta prueba, es necesario considerar el - cálculo de la estadística U de Mann Whitney, por lo cual se describirá en los pasos a seguir en el procedimiento que a - continuación se describe:

Cabe señalar que no proponen ningún nivel de significancia a ser utilizado, por lo que nosotros proponemos $\alpha^* = \frac{\alpha}{c}$ donde c = # de comparaciones, de esta forma tenemos una prueba conservadora. Esto bajo el razonamiento de Bonferroni - de que dados A_i = eventos, se tiene $P_r(\cup A_i) \leq \sum_i P_r(A_i)$.

Procedimiento:

1. Considérese todos los pares de grupos a ser estudiados, es decir, supóngase que se tienen los grupos I, II, III y IV de tal forma que tendremos los siguientes pares:

GRUPO

I y II
I y III
I y IV
II y III
II y IV
III y IV

2. Ordénese */ conjuntamente las muestras que forman el primer par de grupos, suponga que n_1 = No. de casos del más pequeño de los dos grupos independientes y n_2 = No. de casos del más grande.

3. Asigne rangos dándole el valor 1 a la menor observación y $n_1 + n_2$ a la mayor observación.

4. Determínese el valor de U por medio de las siguientes fórmulas:

$$U = n_1 \, n_2 + \frac{n_1 \, (n_1 + 1)}{2} - R._1$$

O igualmente:

$$U = n_1 \, n_2 + \frac{n_2 \, (n_2 + 1)}{2} - R._2$$

Las 2 fórmulas para obtener U no nos dan el mismo resultado, el que debe considerarse es la U mas pequeña.

*/ Aquí comienza el cálculo de la U de Mann Whitney.

Donde:

$R._1$ es la suma de los rangos asignados al grupo cuyo tamaño muestral es n_1

$R._2$ es la suma de los rangos asignados al grupo cuyo tamaño muestral es n_2

Si el valor de U es tan grande que no aparece en las tablas correspondientes (tabla 10), se considerará dicho valor como U' y posteriormente se calculará U de la siguiente manera:

$$U = n_1 \, n_2 - U'$$

5. Se determina **/ el valor de U, en tablas a un nivel de significancia α. Para ello se considera el tamaño de n_2 en el siguiente sentido.

 a) Si n_2 es menor o igual a 8, la probabilidad exacta asociada con un valor tan pequeño como el valor calculado de U, aparece en la tabla 10-A. Como se trata de una prueba de dos colas, se duplica el valor de "p" obtenido en la tabla.

**/ Aquí finaliza el cálculo de la U de Mann Whitney.

b) Si n_2 está entre los valores de 9 y 20 la significación de cualquier valor de U puede determinarse en la tabla 10-B; cuando el valor observado de U sea mayor que $(n_1\, n_2) / 2$ se trata de U'.

c) Si n_2 es mayor que 20, la probabilidad asociada con un valor tan extremo como el valor calculado de U, puede determinarse calculando el valor de una variable distribuida NORMAL, de la siguiente manera:

$$z = \frac{U - \frac{n_1\, n_2}{2}}{\frac{(n_1\, n_2)\ (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

y este valor es buscado en la tabla 9 del apéndice (tabla de distribución NORMAL).

6. Dependiendo del valor de n_2 y la tabla que se utilice tendremos la siguiente REGLA DE DECISION:

- Si U_{tablas} resulta ser mayor que la $U_{calculada}$, se rechaza la hipótesis de igualdad (si fué utilizada la tabla 10-A).
- Para un valor α^* predeterminado, se compara el valor de "p" obtenido con el de α^*, si resulta que "p" es menor que α^*, se considera que los tratamientos son significativamente diferentes (esto si fué utilizada la tabla 10-B).
- Si $\left|z_{1-\alpha/2p}\right| < \left|U_{calculada}\right|$ se rechaza la hipótesis (Esto es cuando se utiliza la aproximación NORMAL). $z_{1-\alpha/2p}$ nos representa el $1 - \alpha/2p$ punto de la distribución normal; donde p=# de contrastes.

3.2.3. Procedimiento de Dunn.- Mc Donald-Thompson-Nemenyi.

Dunn (1964) nos muestra un método para realizar comparaciones múltiples en un diseño completamente aleatorizado.

Para llevar a cabo dicho procedimiento considere que se tienen t muestras donde los tamaños n_i no necesariamente son los mismos y proceda a seguir los pasos que a continuación se dan:

1. Una vez conjuntadas las muestras en una sola asigne rangos dándole 1 a la menor observación y $\sum_i n_i$ a la mayor, donde n_i = total de observaciones para el grupo i. Denotemos por T_i la suma de rangos para la i-ésima muestra, es decir $T_i = R._i$

2. Considere diferencias de la forma:

$$\psi_c = T_i / n_i - T_j / n_j$$

3. Calcúlese el valor de los p contrastes de interés de la siguiente manera:

$$\psi_c = T_i / n_i - T_{i'} / n_{i'}$$

para: $i < i'$

$c = 1, 2, \ldots, p$

4. Divida cada contraste entre su desviación estándar correspondiente la cual se calcula de dos formas:

a) Si no existen empates:

$$\sigma_c^2 = (N(N+1)/12)\ (1/n_i + 1/n_{i'})$$

Donde: $N = \sum_i n_i = n$.

b) Si existen empates:

Supóngase que se tienen r grupos de empates y si el s-ésimo grupo de empates tiene t_s números en él:

$$\sigma_c^2 = \left[N(N+1)/12 - \sum_{s=1}^{r} (t_s^3 - t_s) / 12\,(N-1) \right] \left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right]$$

5. Calcule los cocientes:

$$\psi_1 / \sigma_1 , \ldots , \psi_p / \sigma_p$$

6. Compare cada uno de estos valores ψ_c / σ_c con $Z_{1-\alpha/2p}$, es decir, el $1 - \alpha / 2p$ punto de distribución normal; donde p = # de contrastes.

7. Si $\psi_c / \sigma_c < - Z_{1-\alpha/2p}$, se declara al contraste - negativo y entonces se rechaza la hipótesis de igualdad.

Si $-Z_{1-\alpha/2p} < \psi_c / \sigma_c < Z_{1-\alpha/2p}$ se decide que el contraste es cero, y la hipótesis de igualdad no es rechazada.

Si $\psi_c / \sigma_c > Z_{1-\alpha/2p}$ se declara al contraste positivo y la hipótesis de igualdad es rechazada.

En resumen si $\left| \psi_c / \tau_c \right| > Z_{1-\alpha/2p}$ rechazamos.

Mc Donald y Thompson encuentran la distribución de la - estadística:

$$S = \max R_{i.} - \min R_{j.} = \max_{i,j} \left| R_{i.} - R_{j.} \right|$$

donde:

$R_{i.}$ = es la suma de rangos del i-ésimo tratamiento en un diseño con un criterio de clasificación (considerando todas las observaciones para la asignación de rangos)

o bien

$R_{i.}$ = es la suma de los rangos asignados al i-ésimo tratamiento dentro de cada bloque en un diseño con dos criterios de clasificación.

Como puede verse, esta prueba, al igual que la de Dunn - en el caso de un diseño completamente al azar, considera las diferencias entre suma de rangos. El mérito principal de Mc Donald y Thompson, radica en el hecho de que en lugar de usar la aproximación propuesta por Dunn, consistente en el control del nivel de significancia para cada comparación (buscando en la tabla de una distribución - Normal, con $1 - \alpha/2p$); tabula la distribución exacta del máximo de las diferencias de suma de rangos.

En el caso de que n sea grande se puede usar el hecho - de que la distribución del:

$$\max_{i,j} \frac{\left| R_{i.} - R_{j.} \right|}{\left(t(t_n + 1)/12 \right)^{1/2}}$$

se puede aproximar por la distribución de rangos estudentizados q_t ; la validez de esta aproximación fue aparentemente demostrada por Nemenyi (1963) en su tesis - doctoral no publicada (ver Voshaar (1980) o Miller (1966)) .

3.2.4. Técnicas propuestas por Conover e Iman:

3.2.4.1. Técnica de comparaciones múltiples utilizando la prueba de Kruskal - Wallis. */

Considere que se tiene un modelo en un diseño completamente aleatorizado. Como se recordará en el Capítulo 2 (Sección 2.2.3.) fue tratada la prueba de Kruskal-Wallis en donde se vió que la estadística de prueba está dada por:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{t} \frac{R_{.j}^2}{n_j} - 3(N+1) \text{ ------ } (1)$$

donde:

t = No. de tratamientos.

n_j = No. de casos en el tratamiento j

$$N = \sum_{j=1}^{t} n_j$$

$$R_{.j} = \sum_{i=1}^{n_j} R(X_{ij}), \quad i = 1, \ldots, t$$

$R(X_{ij})$ = rango asociado a X_{ij}

mas sin embargo, Conover nos hace notar que dicha estadística de prueba es válida siempre que no se tengan

*/ Fuente: W.J. Conover. Practical Nonparametric Statistics. 2a. Edición. Ed. Wiley, pág. 231.

empates, asimismo nos da la estadística de prueba mas general que es:

$$H = \frac{1}{S^2} \sum_{j=1}^{t} \frac{R._j^2}{n_j} - \frac{N(N+1)^2}{4} \text{ ------ (2)}$$

donde:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\text{todos} \\ \text{los} \\ \text{rangos}}} R(X_{ij})^2 - \frac{N(N+1)^2}{4} \text{ ------ (3)}$$

si existen empates

o bien:

$$S^2 = \frac{N(N+1)}{12} \text{ ------ (4)}$$

si no hay empates con lo cual al sustituir en (2) obtendríamos la ecuación (1)

una vez hecha esta aclaración, ya estamos en posibilidades de poder indicar los pasos a seguir para realizar comparaciones múltiples:

1. Conjunte las muestras en una sola y asigne rangos dándoles 1 a la menor observación y N a la mayor.

2. Considere las muestras de 2 en 2 y sin pérdida de generalidad considere que se van a comparar las muestras i y j.

Calcúlese $R._i$ y $R._j$ que son las sumas de rangos asignados a los tratamientos i y j respectivamente.

3. Calcule el valor $\left| \frac{R._i}{n_i} - \frac{R._j}{n_j} \right|$ y compárele con el producto:

$$t_{(N-t)}^{(1-\alpha/2)} \left(S^2 \frac{N-1-H}{N-t} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)^{1/2}$$

donde:

H = estadística de prueba de Kruskal Wallis ya bien sea la ecuación (1) o (2) y S^2 toma el valor de la ecuación (3) ó (4) dependiendo si existen o no empates.

α es el mismo nivel de significancia que fue usado en la prueba de Kruskal-Wallis para probar la hipótesis general de igualdad de efectos de tratamientos.

4. Ahora bien si resulta que:

$$\left| \frac{R_{.i}}{n_i} \quad \frac{R_{.j}}{n_j} \right| > t_{(N-t)}^{(1-\alpha/2)} \left(S^2 \, \frac{N-1-H}{N-t} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)^{1/2}$$

Se concluye que los tratamientos i y j son diferentes.

3.2.4.2. Prueba de Quade. */

Suponga que se tiene un modelo en bloques aleatorizados con b bloques, y t tratamientos; y que fue rechazada la hipótesis nula de igualdad de efectos de tratamientos.

Considere que se tienen las siguientes variables:

	TRATAMIENTOS			
bloques	1	2	...	t
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1t}
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2t}
⋮			...	
b	X_{b1}	X_{b2}	...	X_{bt}

*/ Fuente: W.J. Conover. Practical Nonparametric Statistics. Cd. Wiley, pág. 297.

Para aplicar dicha técnica hay que seguir los pasos que a continuación se dan:

1. Asigne rangos por bloque (por renglón) para los t tratamientos, dándole rango 1 a la menor observación y t a la mayor; usando para el caso de empates el rango promedio.

2. Calcúlese el rango muestral por bloque de la siguiente manera:

   Rango muestral en el bloque $i = \max_j \{X_{ij}\} - \min_j \{X_{ij}\}$

3. Calcule el rango Q_i que será el rango por bloque de la siguiente manera: una vez que se tiene el rango muestral por bloque, asigne rangos nuevamente a estas cantidades dándole 1 a la menor observación y b a la mayor, considerando el promedio de rangos en el caso de empates. De esta manera se obtiene $Q_1, Q_2 \ldots Q_b$

4. Calcule:

   $$S_{ij} = Q_i \left[R(X_{ij}) - \frac{t+1}{2} \right]$$ donde $R(X_{ij})$ es el rango asignado a la observación del trata-

miento j en el bloque i; posteriormente -

denotamos por:

$S._j$ = la suma para cada tratamiento,

es decir:

$$S._j = \sum_{i=1}^{b} S_{ij} \quad \text{para } j=1, \ldots, t$$

5. Calcule los siguientes valores:

$$A_1 = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{t} S_{ij}^2 \quad \text{-----} (1)$$

$$B_1 = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{t} S._j^2 \quad \text{-----} (2)$$

6. Si la desigualdad:

$$\left| S._i - S._j \right| > t_{(b-1)(t-1)}^{1-\alpha/2} \left(\frac{2b(A_1 - B_1)}{(b-1)(t-1)} \right)^{1/2}$$

se cumple, se dice que los tratamientos i y j son diferentes.

Cabe hacer una aclaración en esta técnica respecto al nivel de significancia a ser usado, para ello nos permitiremos mencionar que dicha técnica, Conover la utiliza cuando ha tratado la estadística de prueba de Dana Quade (1972), para la hipótesis general de igualdad de efectos de tratamientos, la cual está dada por:

$$T_1 = \frac{(b-1)\,B_1}{A_1 - B_1}$$

donde B_1 y A_1 están dadas por las ecuaciones - (1) y (2)

y nos menciona que en el caso en que. $A_1 = B_1$ considérese que se está en la región crítica y calcule el nivel crítico como $\hat{\alpha} = (1/t!)$

3.2.4.3. Técnica de comparaciones múltiples utilizando la prueba de Friedman.

Considere que se tiene un modelo en bloques aleatorizados. Como podrá recordarse en el Capítulo 2 (Sección 2.3.2.) fue tratada la prueba de Friedman, la cual tiene como estadística de prueba:

$$T = \frac{12}{bt\ (t+1)} \sum_{j=1}^{t} R^2_{.j} - 3b\ (t+1) \quad \text{------} (1)$$

Donde:

b = Número de hileras.

t = Número de columnas.

$R_{.j}$ = Suma de rangos para el tratamiento j

Sin embargo consideramos de importancia señalar que Conover indica que dicha estadística de prueba es válida para aquellos casos en que no existen empates, es decir, Conover señala que la estadística de prueba de Friedman mas usual está dada por:

$$T = \frac{(t-1)\left[b\,B_2 - b^2\,t\,(t+1)^2 / 4\right]}{A_2 - bt\,(t+1)^2 / 4} \quad \text{------} (2)$$

Donde:

$$B_2 = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{t} R^2_{.j} \quad \text{------} (5)$$

y A_2 toma los valores de:

$$A_2 = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{t} (R(X_{ij}))^2 \quad \text{------} (3)$$

si existen empates

y

$$A_2 = \frac{bt(t+1)(2t+1)}{6} \text{ --------- } 4$$

si no existen empates

Ahora bien, a continuación demostraremos que la fórmula 1 es igual a la 2 en el caso en que no existan empates, que - es la consideración que nosotros hicimos al tratar la prueba de Friedman en el Capítulo 2, es decir, vamos a demostrar que 1 = 2 cuando A_2 toma el valor dado por la fórmula 4:

De 2 tenemos:

$$T = \frac{(t-1)\left[b\left(1/b \sum_{j=1}^{t} R_{.j}^2\right) - b^2 t (t+1)^2/4 \right]}{\frac{bt(t+1)(2t+1)}{6} - \frac{bt(t+1)^2}{4}} \text{ ----- } \mathrm{I}$$

Analicemos el denominador:

$$\frac{bt(t+1)(2t+1)}{6} - \frac{bt(t+1)^2}{4} = \frac{4\,bt(t+1)(2t+1) - 6\,bt(t+1)^2}{24}$$

$$= \frac{bt(t+1)\left[8t+4-6t-6\right]}{24} = \frac{bt(t+1)\left[2t-2\right]}{24}$$

$$= \frac{2\,bt(t+1)(t-1)}{24} = \frac{bt(t+1)(t-1)}{12} \text{ --- } a$$

Ahora sustituimos (a) en (I) y tenemos:

$$T = \frac{(t-1)\left[\sum_{j=1}^{t} R_{\cdot j}^{2} - b^{2}t\,(t+1)^{2}/4\right]}{\dfrac{bt\,(t+1)\,(t-1)}{12}}$$

$$= \frac{12\,(t-1)\left[\sum_{j=1}^{t} R_{\cdot j}^{2} - b^{2}\,t\,(t+1)^{2}/4\right]}{bt\,(t+1)\,(t-1)}$$

$$= \frac{12}{bt\,(t+1)} \sum_{j=1}^{t} R_{\cdot j}^{2} - 3\,b\,(t+1) = (1)$$

Q.E.D.

Una vez demostrado esto, pasemos pues a describir el procedimiento de Friedman para realizar comparaciones múltiples:

1. Asigne rangos por bloque, dándole 1 a la menor observación y b a la mayor.

2. Considere las muestras de 2 en 2 y sin pérdida de generalidad suponga que se quieren comparar las muestras i y j.

3. Calcúlese los siguientes valores:

a) $\left| R_{\cdot i} - R_{\cdot j} \right|$

b) $t_{(b-1)\,(t-1)}^{(1-\alpha/2)} \left[\dfrac{2b\,(A_2 - B_2)}{(b-1)\,(t-1)}\right]^{1/2}$

donde: B_2 está dado por la ecuación 5

A_2 está determinada por las ecuaciones 3 y 4

dependiendo si existen o no empates

$t_{(b-1)(t-1)}^{(1-\alpha/2)}$ es el $1-\alpha/2$ cuantil de la distribución t con $(b-1)(t-1)$ grados de libertad, y α es la misma que se utilizó en la prueba de hipótesis general.

4. Compare estos 2 valores y si resulta que:

$$\left| R_{\cdot i} - R_{\cdot j} \right| > t_{(b-1)(t-1)}^{(1-\alpha/2)} \left[\frac{2b\,(A_2 - B_2)}{(b-1)(t-1)} \right]^{1/2}$$

se dice que los tratamientos i y j son diferentes.

3.2.5. Ejemplos:

En esta sección se ejemplificarán algunas de las técnicas anteriormente tratadas, de comparaciones múltiples en estadística no paramétrica.

1º No hay que perder de vista que las técnicas de Steel, Wilcoxon U- Mann Whitney, Dunn Mc. Donald – Thompson – Nemenyi y la de Kruskal-Wallis de comparaciones múltiples, se utilizan para el caso en que se tiene un diseño completamente aleatorizado.

2º Cuando se tiene un modelo en bloques aleatorizado se aplican las técnicas de Quade y la de Friedman para comparaciones múltiples.

Pasemos pues a la realización de dicho ejemplo:

3.2.5.1. Ejemplificación de las técnicas de comparaciones múltiples en estadística no paramétrica teniendo un diseño completamente aleatorizado. */

*/ Fuente: Conover W.J. Practical Nonparametric Statistics. Ed. Wiley.

Cuatro diferentes métodos para el crecimiento del maíz fueron asignados aleatoriamente a 34 parcelas de tierra y la producción por acre fue calculada para cada parcela obteniendo los siguientes resultados:

M E T O D O			
1	2	3	4
83	91	101	78
91	90	106	82
94	81	91	81
89	83	93	77
89	84	96	79
96	83	95	81
91	88	94	80
92	91		81
90	89		
	84		

Lo que interesa probar es:

H_0: todos los métodos tienen la misma producción por acre.

H_1: no todos los métodos tienen la misma producción por acre.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es realizar la prueba de hipótesis general, para ello utilizaremos la prueba de Kruskal-Wallis, la cual es aplicable en este ejemplo, pues se tratan de muestras independientes. Para ello tenemos la siguiente estadística de prueba:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{t} \frac{R_{\cdot j}^{2}}{n_j} - 3(N+1)$$

por lo cual tenemos:

$t = 4$ (número de tratamientos)

$n_1 = 9$

$n_2 = 10$

$n_3 = 7$

$n_4 = 8$

$$N = \sum_{j=1}^{4} n_j = 9 + 10 + 7 + 8 = 34$$

Ahora bien, procedamos a asignar rangos, para ello conjuntemos las muestras en una sola y ordenémosla de menor a mayor.

77(4), 78(4), 79(4), 80(4), 81(4), 81(4), 81(4), 81(4), 82(4), 83(1), 83(2), 83(2), 84(2), 84(2), 88(2), 89(1), 89(1), 89(2), 90(1), 90(2), 91(1), 91(1), 91(2), 91(2), 91(3), 92(1), 93(3), 94(1), 94(3), 95(3), 96(1), 96(3), 100(3), 101(3).

El número que aparece en el paréntesis es la muestra de la que provienen.

Por lo cual, asignando rangos tenemos:

Método 1	Rango	Método 2	Rango	Método 3	Rango	Método 4	Rango
83	11	91	23	101	34	78	2
91	23	90	19.5	100	33	82	9
94	28.5	81	6.5	91	23	81	6.5
89	17	83	11	93	27	77	1
89	17	84	13.5	96	31.5	79	3
96	31.5	83	11	95	30	81	6.5
91	23	88	15	94	28.5	80	4
92	26	91	23			81	6.5
90	19.5	89	17				
		84	13.5				
$R_{\cdot j}$	196.5		153.0		207.0		38.5

Ahora bien como tenemos que $t = 4$ y $n_j > 5$ para toda j podemos usar el hecho de que $H \sim \chi^2_{(t-1)}$

$$H = \frac{12}{34\ (35)} \left[\frac{(196.5)^2}{9} + \frac{(153)^2}{10} + \frac{(207)^2}{7} + \frac{(38.5)^2}{8} \right] - 3\ (35)$$

por lo que:

$$H = (.0102)\ (12937.72) \quad - 105$$

$$= 25.9647$$

Para $\alpha = 0.05$ tenemos:

$$\chi^2{}_{(3)}^{(0.05)} = 7.815$$

por lo que $H = 25.96 \quad \chi^2_{(3)} = 7.815$

lo cual nos conduce a rechazar la hipótesis de nulidad, es decir, existe evidencia para pensar que no todos los métodos tienen la misma producción por acre. Ahora bien, para determinar en que estriba la diferencia de los distintos métodos realizaremos el procedimiento de comparaciones múltiples.

Prueba de Steel.- No puede ser aplicada pues no se tienen tamaños de muestras iguales.

Prueba de Wilcoxon - U de Mann Whitney.

1. Considere todos los pares de grupos y asigne rangos a las muestras conjuntándolos de 2 en 2, de esta manera tenemos:

Muestra 1	Rango	Muestra 2	Rango
83	3	91	14.5
91	14.5	90	11.5
94	18	81	1
89	9	83	3
89	9	84	5
96	19	83	3
91	14.5	88	7
92	17	91	14.5
90	11.5	89	9
		84	6
$R._j$	115.5		74.5

Ahora:

Muestra 1	Rango	Muestra 3	Rango
83	1	101	16
91	6	100	15
94	10.5	91	6
89	2	93	9
89	3	96	13.5
96	13.5	95	12
91	6	94	10.5
92	8		
90	4		
$R._j$	54		82

Ahora:

Muestra 1	Rango	Muestra 4	Rango
83	9	78	2
91	13	82	8
94	16	81	5
89	10	77	1
89	11	79	3
96	17	81	6
91	14	80	4
92	15	81	7
90	12		
$R._j$	117		36

Ahora:

Muestra 2	Rango	Muestra 3	Rango
91	10	101	17
90	8	100	16
81	1	91	10
83	2	93	12
84	4	96	15
83	3	95	14
88	6	94	13
91	10		
89	7		
84	5		
$R._j$	56		97

Muestra 2	Rango	Muestra 4	Rango
91	17	78	2
90	16	82	9
81	6.5	81	6.5
83	10	77	1
84	12	79	3
83	11	81	6.5
88	14	80	4
91	18	81	6.5
89	15		
84	13		
$R_{\cdot j}$	132.5		38.5

y finalmente:

Muestra 3	Rango	Muestra 4	Rango
101	15	78	2
100	14	82	8
91	9	81	5
93	10	77	1
96	13	79	3
95	12	81	6
94	11	80	4
		81	7
$R_{\cdot j}$	84		36

Analizando tenemos:

<u>Muestra 1 y 2:</u> $n_1 = 9$ (número de casos mas pequeño)

$n_2 = 10$ (número de casos mas grande)

$R._1 = 115.5$ $R._2 = 74.5$

$$U = 9(10) + \frac{9\ (9+1)}{2} - R._1$$

$$= 90 + \frac{90}{2} - 115.5 = 19.5$$

<u>Muestra 1 y 3:</u> $n_1 = 7$ $R._1 = 82$

$n_2 = 9$ $R._2 = 54$

$$U = 7(9) + \frac{7(7+1)}{2} - 82$$

$$= 63 + 28 - 82 = 9$$

<u>Muestra 1 y 4:</u> $n_1 = 8$ $R._1 = 36$

$n_2 = 9$ $R._2 = 117$

$$U = 8(9) + \frac{9(9+1)}{2} - 117 = 0$$

Muestra 2 y 3: $n_1 = 7$ $R._1 = 97$

$n_2 = 10$ $R._2 = 56$

$$U = 7(10) + \frac{7(7+1)}{2} - 97 = 1$$

Muestra 2 y 4: $n_1 = 8$ $R._1 = 38.5$

$n_2 = 10$ $R._2 = 132.5$

$$U = 8(10) + \frac{10(10+1)}{2} - 132.5 = 2.5$$

Muestra 3 y 4: $n_1 = 7$ $R._1 = 84$

$n_2 = 8$ $R._2 = 36$

$$U = 7(8) + \frac{7(7+1)}{2} - 84 = 0$$

Ahora bien para $\alpha^* = \frac{\alpha}{c} = \frac{.05}{6} = .008$

y con los valores de U anteriormente encontrados, busquemos el nivel "p" de significancia.

Muestra 1 y 2: $n_2 = 10$, como se encuentra entre los valores de 9 y 20 consultaremos la tabla 10-B y tenemos que para un nivel de significancia $\alpha^* = 0.008$; no contamos con las tablas de los valores críticos de U por lo cual vamos a realizar la aproximación -

con una $Z_{1} - \alpha^{*}/_{2p} = Z_{1} - \alpha^{*}/_{2(p)} = Z_{1-.008/12} = Z_{0.999} =$

$3.0902 = U_{Z}$

$$Z_{calculada} = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\frac{(n_1 n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

Y ahora bien para la Muestra 1 y 2 tenemos:

$$U_{calculada} = Z_{calculada} = \frac{19.5 - \frac{9(10)}{2}}{\frac{(9)(10)(9+10+1)}{12}} = \frac{19.5 - \frac{90}{2}}{\frac{90(20)}{12}}$$

$$= \frac{-25.5}{150} = -0.17$$

$$\left| U_{Z} \right| = \left| 3.0902 \right| > \left| U_{calculada} \right| = \left| -0.17 \right|$$

por lo que no rechazamos la hipótesis de igualdad, es decir, no existen diferencias entre las Muestras 1 y 2.

<u>Muestra 1 y 3:</u> $n_2 = 9$ $\alpha^{*} = .008$ como deberían de usar la tabla 10-B y no la tenemos para la α^{*} dada, aproximamos por una NORMAL y así

$$U_{calculada} = Z_{calculada} = \frac{9 - \frac{(7)(9)}{2}}{\frac{(7)(9)(7+9+1)}{12}} = \frac{-22.5}{89.25} = -0.252$$

Buscando en la tabla 9 del apéndice tenemos:

$$U_Z = Z_{0.999} = 3.0902$$

Y así:

$$\left| U_Z \right| = 3.0902$$

$$\left| U_{calculada} \right| = 0.252$$

$\therefore$ 3.0902 $>$ 0.252 por lo cual no rechazamos, es decir no existe diferencias entre las Muestras 1 y 3.

<u>Muestra 1 y 4:</u>

$$Z_{calculada} = -0.333$$

$\left| U_Z \right| = 3.0902 > 0.333$ por lo que no rechazamos.

<u>Muestra 2 y 3:</u>

$$Z_{calculada} = -0.3238$$

$\left| U_Z \right| = 3.0902 > 0.3238$ por lo que no rechazamos.

Muestra 2 y 4:

$$Z_{calculada} = -0.296$$

$$\left| U_Z \right| = 3.0902 > 0.296$$ por lo que no rechazamos.

Muestra 3 y 4: $n_2 = 8$ por lo cual usamos la tabla 10-A y tenemos:

$$U_{calculada} = 0$$

$$n_2 = 8$$

$$n_1 = 7 \qquad \alpha^* = 0.008$$

Buscamos en la tabla 10-A y obtenemos:

$$p = 0.000$$

por lo que $\alpha^* = .008 > p = 0.000$ por lo cual las muestras 3 y 4 son - significativamente diferentes.

En conclusión:

No existe diferencias en los métodos:

1 y 2

1 y 3

1 y 4

2 y 3

2 y 4

Mientras que entre los métodos

3 y 4 si existen diferencias significativas.

Procedimiento de Dunn - Mc Donald - Thompson - Nemenyi.

1. Conjuntando las muestras en una sola y asignando rangos tenemos:

Muestra 1	Rango	Muestra 2	Rango	Muestra 3	Rango	Muestra 4	Rango
83	11	91	23	101	34	78	2
91	23	90	19.5	100	33	82	9
94	28.5	81	6.5	91	23	81	6.5
89	17	83	11	93	27	77	1
89	17	84	13.5	96	31.5	79	3
96	31.5	83	11	95	30	81	6.5
91	23	88	15	94	28.5	80	4
92	26	91	23			81	6.5
90	19.5	89	17				
		84	13.5				
$R_{\cdot j}$	196.5		153		207		36.5

2. Consideremos la diferencia de la forma:

$$\psi_c = T_i / n_i - T_j / n_j$$

por lo que tenemos:

$$\psi_1 = T_1 / n_1 - T_2 / n_2$$
$$\psi_2 = T_1 / n_1 - T_3 / n_3$$
$$\psi_3 = T_1 / n_1 - T_4 / n_4$$

$$\psi_4 = T_2 / n_2 - T_3 / n_3$$

$$\psi_5 = T_2 / n_2 - T_4 / n_4$$

$$\psi_6 = T_3 / n_3 - T_4 / n_4$$

3. Calculadas las $T_i = R._i$

$T_1 =$	196.5	$n_1 = 9$	$T_1 / n_1 = 21.83$
$T_2 =$	153	$n_2 = 10$	$T_2 / n_2 = 15.3$
$T_3 =$	207	$n_3 = 7$	$T_3 / n_3 = 29.571429$
$T_4 =$	38.5	$n_4 = 8$	$T_4 / n_4 = 4.8125$
		$N = 34$	

4. Calculando el valor de los ψ_c en c=1 , ... , 6 tenemos:

$$\psi_1 = 196.5 / 9 - 153 / 10 = 6.53$$

$$\psi_2 = - 7.74$$

$$\psi_3 = 17.02$$

$$\psi_4 = - 14.27$$

$$\psi_5 = 10.49$$

$$\psi_6 = 24.75$$

5. Calculemos la desviación estándard:

Muestra 1 con 2. En este caso si existen empates, tenemos:

$$\sigma_c^2 = \left[\frac{34\ (35)}{12} - \sum_{s=1}^{4} (t_s^3 - t_s)\ /\ 12\ (34-1)\right]\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)$$

$t_1 = 3$ pues el # 83 se repite 3 veces.

$t_2 = 3$ pues el # 89 se repite 3 veces.

$t_3 = 4$ pues el # 91 se repite 4 veces.

$t_4 = 2$ pues el # 90 se repite 2 veces.

$S = 1, \ldots, r$ en este caso $r=4$ pues es el # de grupo de empates que se tienen

por lo que:

$$\sigma_1^2 = \left[99.17 - \left[\frac{(3^3-3)}{396} + \frac{(3^3-3)}{396} + \frac{(4^3-4)}{396} + \frac{(2^3-2)}{396}\right]\right]\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) =$$

$$= 20.875114 \quad \therefore \sigma = 4.5689292$$

Muestra 1 con 3. Sí existen empates, por lo que tenemos:

$t_1 = 3$

$t_2 = 2$

$t_3 = 2$

$$\sigma_2^2 = \left[99.17 - \left(\frac{3^3-3}{396} + \frac{2^3-2}{396} + \frac{2^3-2}{396}\right)\right]\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{7}\right] = 25.162943$$

$$\therefore \sigma = 5.0162678$$

Muestra 1 con 4. No existen empates, por lo que:

$$\sigma_3^2 = \frac{34(35)}{12}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\right) = 23.4144 \quad \therefore \sigma = 4.8388428$$

Muestra 2 y 3. Sí existen empates, por lo que tenemos:

$$t_1 = 3$$

$$\sigma_4^2 = \left[99.17 - \frac{(3^3-3)}{396}\right]\left[\frac{1}{10}+\frac{1}{7}\right] = 24.069424 \quad \therefore \sigma = 4.9060599$$

Muestra 2 y 4. Sí existen empates, por lo que tenemos:

$$t_1 = 4$$

$$\sigma_5^2 = \left[99.17 - \frac{(4^3-4)}{396}\right]\left[\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right] = 22.279159 \quad \therefore \sigma = 4.7200804$$

Muestra 3 y 4. No existen empates, por lo que tenemos:

$$\sigma_6^2 = (99.1666)\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) = 26.56 \quad \therefore \sigma = 5.1536395$$

6. Consideramos los cocientes:

$$\psi_i / \sigma_i$$

$$\psi_1 \;/\; \sigma_1 = 6.53 \;/\; 4.5689292 = 1.4292$$

$$\psi_2 \;/\; \sigma_2 = -7.74 \;/\; 5.0162678 = -1.5429798$$

$$\psi_3 \;/\; \sigma_3 = 17.02 \;/\; 4.8388428 = 3.5173699$$

$$\psi_4 \;/\; \sigma_4 = -14.27 \;/\; 4.9060599 = -2.908647$$

$$\psi_5 \;/\; \sigma_5 = 10.49 \;/\; 4.7200804 = 2.2224198$$

$$\psi_6 \;/\; \sigma_6 = 24.75 \;/\; 5.1536395 = 4.8024314$$

7. Comparando con $Z_1 - \alpha / 2p$ para $\alpha = 0.05$

Tenemos $Z_1 - (.05/2(6)) = Z_1 - .05/12$

$$= Z_{0.9958}$$

$$\doteq Z_{0.996} = 2.6521$$

Para realizar dicha comparación fijémonos en el siguiente cuadro:

i	$\left\| \psi_i / \sigma_i \right\|$		$z_{0.996}$
1	1.4292	$<$	2.6521
2	1.5429798	$<$	2.6521
3	3.5173699	$>$	2.6521
4	2.908647	$>$	2.6521
5	2.2224198	$<$	2.6521
6	4.8024314	$>$	2.6521

Como se ve se rechaza para i=3,4,6; pues en este caso $\left| \Psi_i / \sigma_i \right| >$ $z_{1-\alpha/2p}$ es decir, se rechaza para las Muestras 1 y 4, 2 y 3, 3 y 4; por lo cual concluímos:

Los métodos:

1 y 2

1 y 3

2 y 4 no son diferentes entre sí; mientras que los métodos 1 y 4, 2 y 3, 3 y 4 son diferentes, es decir, no nos dan la misma producción por acre.

Procedimiento de Kruskal - Wallis.

Ya habíamos obtenido:

j	$R._j$	n_j
1	196.5	9
2	153	10
3	207	7
4	38.5	8

Ahora calculemos el valor para $\alpha = 0.05$

$$t_{(34-4)}^{(0.975)} \left(S^2 \quad \frac{34-1-25.4644}{34-4} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)^{1/2}$$

con $S^2 = \dfrac{34\ (35)}{12} = 99.167$

por lo que tenemos:

Población	$(2.04)\ (24.91)^{1/2} \quad \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)^{1/2}$		$\frac{R_i}{n_i} - \frac{R_{i'}}{n_{i'}}$
1 y 2	4.681	<	6.533
1 y 3	5.134	<	7.738
1 y 4	4.930	<	17.021
2 y 3	5.020	<	14.271
2 y 4	4.832	<	10.488
3 y 4	5.272	<	24.759

por lo que concluimos que no existe diferencias, es decir, en todos los pares de muestras, la tercera columna excede a la segunda, - por lo que la hipótesis de igualdad es rechazada y no existen diferencias en las muestras:

1 y 2

1 y 3

1 y 4

2 y 3

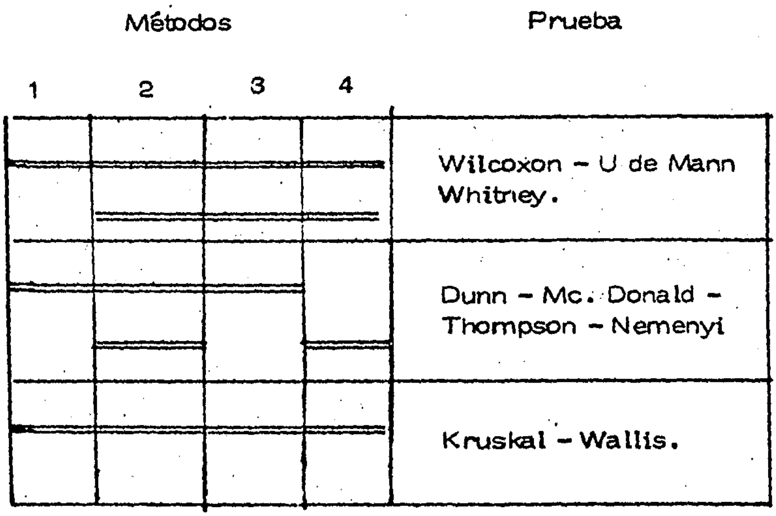
2 y 4

3 y 4

Como se puede observar con esta prueba se obtiene en este caso que no existen diferencias mientras que la prueba de hipótesis general detectó que si existían diferencias.

De aquí se puede ver que sucedió algo similar a lo que pasó con - - Scheffé en un ejemplo que tratamos en la sección anterior; por esta falla del procedimiento Kruskal - Wallis es por lo que no recomendamos su utilización.

En conclusión obtenemos la siguiente gráfica:



La cual se interpreta de la siguiente manera:

Analizando la prueba de Wilcoxon - U de Mann Whitney vemos:

La primer línea nos indica la comparación del método 1 con el 2, 3 y 4, al ser una línea contínua indica que no existen diferencias entre el método 1 con el 2, 3 y 4; la segunda línea nos indica la comparación del 2º método, en este caso el 2 con el 3 y 4 análogamente al ser línea contínua implica que no existen diferencias entre los métodos 2 y 3, así como el 2 y 4; la tercer línea nos - indicaría la comparación del método 4 con el 3, en este caso no aparece dicha línea puesto que si existen diferencias entre los - métodos.

Esta interpretación se hace para las otras pruebas y cabe hacer la observación que, Kruskal Wallis, como ya se mencionó en la parte del ejemplo donde dicha técnica fué tratada, nos da como resultado una contradicción en base que al haber realizado comparaciones - múltiples, se esperaba que al menos existiera una diferencia, puesto que lo previo al análisis de comparaciones múltiples fue la realiza ción de la prueba de hipótesis general, que al ser rechazada da en-- trada a las comparaciones múltiples.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES.

Haciendo una revisión panorámica de este trabajo de tesis, podemos concluir:

- En las distintas pruebas de comparaciones múltiples - en estadística no paramétrica, se puede ver que se ma nejaron tres formas diferentes para la asignación de rangos:

  i) Cuando fue hecha conjuntando las muestras en una sola (tal es el caso de la prueba de Kruskal-Wa llis propuesta por Conover y la de Dunn).

  ii) Cuando fue realizada conjuntando las muestras de 2 en 2 (entre las que tenemos las pruebas de Steel, Wilcoxon, U-de Mann Whitney).

  iii) Cuando se hizo la asignación de rangos por bloques (como son las técnicas de Quade y de Friedman - propuestas por Conover).

- Las técnicas manejaron dos indicadores para la reali- zación de comparaciones múltiples:

  a) Las que consideran el mínimo (T_{ij}, T'_{ij}) (como es el caso de la prueba de Steel).

  b) Las que considera las diferencias $|R_{i.} - R_{j.}|$ (como son las de Dunn, Kruskal Wallis, Quade, Friedman y Wilcoxon).

- Partiendo de los dos puntos anteriores y después de haber analizado las técnicas, se ve que:

  - Dunn es una técnica que podría mejorar si se lograra encontrar la distribución exacta del máximo $|Ri. - Ri'.|$ por lo menos para el caso en que se tengan muestras del mismo tamaño. Encontrar dicha distribución hasta cierto punto equivaldría a encontrar un análogo a Tukey, o aún mas a S.N.K. si se modifica la estadística de prueba de una forma apropiada.

    La prueba sugerida por Dunn es conservadora por la forma en que elige el nivel de significancia al realizar las comparaciones. Se recomienda la aplicación de dicha prueba, pero considerando la distribución exacta del máximo de las diferencias de rangos en valor absoluto que han sido tabuladas por Mc Donald y Thompson, y para el caso de muestras grandes usar la aproximación de rango estudentizado.

  - Steel es de los que se ha preocupado por encontrar la distribución del mínimo, más sin embargo, él sólo considera muestras de tamaño menor que 7 y con un máximo de 3 tratamientos, por lo que cabría cuestionarse: ¿qué sucedería en los casos que no se satisfagan estas condiciones?. Aparentemente no se disponen de tablas para esto, y Sherman (1965), encuentra la distribución asintótica bajo ciertas condiciones relativas al tamaño de muestra; sin embargo, no se tiene el equivalente a una función asintótica del mínimo.

- Las técnicas que Conover propone (para Kruskal-Wallis, Quade, Friedman) presentan un gran problema que es el de no hacer ninguna consideración respecto al nivel de significación que es de suma importancia en comparaciones múltiples. Por otro lado realizan comparaciones con una t sin considerar lo ya existente para atacar el problema de comparaciones múltiples, por lo que Conover regresa de alguna manera a la "prehistoria" de las comparaciones múltiples.

- Otros trabajos que aparecen en la literatura son:

  i) Sherman (1965) quien demuestra que las eficiencias relativas asintóticas de las estadísticas propuestas, tanto por Steel (1960) y Dunn

(1964), [illegible] dimientos paramé
tricos [illegible] as de medias, son
las mis[illegible] ias de la prueba -
de Wil[illegible] rueba de t para 2
muestr[illegible]

ii) Gabr[illegible] opone un procedi -
miento [illegible] múltiple para datos
categór[illegible]

iii) Vo[illegible] determina la pro-
babilida[illegible] ebas de compara-
ciones m[illegible] concluya incorrec
tamente [illegible] s son diferentes -
dado que [illegible] ción es diferente.

- Otro punto que [illegible] ar es que a lo largo -
de este trabajo [illegible] amente las técnicas
de comparacio[illegible] tiendo de la conside-
ración de dos [illegible]:

i) El modelo [illegible] leatorizado.

ii) El modelo [illegible] rizado.

Sin embargo, C[illegible] o "Practical Nonparametric Statistics", nos muestra el procedimiento de Durbin para poder realizar comparaciones múltiples - teniendo un diseño en bloques incompleto pero balanceado (Conover 1980) el cual no es tratado en este trabajo de tesis.

COMENTARIO GENERAL.

Como se puede observar existe muy poco sobre este tema (comparaciones múltiples en estadística no paramétrica) por lo menos de las revistas a las que se tiene acceso fácil como son: Technometrics, - The American Statistician, The Annals of Statistics, etc., y además si se observan las fechas se verá que son estudios "viejos" y que no - se ha seguido trabajando o tratando de mejorar los trabajos que estadísticos como Steel, Dunn, y otros han realizado tal y como lo mencionamos en los puntos anteriores, las técnicas de Dunn y de Stell podrían mejorarse, por ejemplo, se puede adaptar, al menos para muestras del mismo tamaño la estrategia de la prueba S.N.K.

Las pruebas que nosotros recomendaríamos utilizar serían:

Campo Paramétrico: Tukey o SNK dependiendo si se quiere controlar más el error por comparación (en este caso SNK tiene más con--

trol) o el error por experimento (en este caso Tukey tiene más control).

Campo No Paramétrico: Recomendamos la prueba sugerida por Dunn pero considerando la distribución exacta del máximo de las diferencias de rangos en valor absoluto que han sido tabuladas por Mc Donald y Thompson (1967), y para el caso de muestras grandes usar la aproximación de rango estudentizado.

APENDICE

TABLA 1 1/

Distribución F con k_1 y k_2 grados de libertad
(0.75 cuantiles)

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.28	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.30
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29
21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28
22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27
24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26
25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
26	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.25
27	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27	1.26	1.24
28	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24
29	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.23
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.23
40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19
60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19	1.17	1.15
120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.16	1.13	1.10
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.12	1.08	1.00

SOURCE. Reprinted from Pearson and Hartley (1970), with permision from the *Biometrika* Trustees.

1/ FUENTE: Conover, J.W.
Practical Nonparametric Statistics
Ed. John Willey & Sons. Inc., (1980).

TABLA 1

(continuación)

(0.90 cuantiles)

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.68
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

TABLA 1

(continuación)

(0.95 cuantiles)

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

TABLA 1

(continuación)
(0,975 cuantiles)

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	963.3	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

TABLA 1

(continuación)

(0.99 cuantiles)

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.51	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

$q^{\alpha}_{r,\nu}$

$\alpha = .05$

$\nu \backslash r$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	[illegible]	47.36	49.07
2	6.085	8.331	9.798	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99
3	4.501	5.910	6.825	7.502	8.037	8.478	8.853	9.177	9.462
4	3.927	5.041	5.757	6.287	6.707	7.053	7.347	7.602	7.826
5	3.635	4.602	5.218	5.673	6.033	6.330	6.582	6.802	6.995
6	3.461	4.339	4.896	5.305	5.628	5.895	6.122	6.319	6.493
7	3.344	4.165	4.681	5.060	5.359	5.606	5.815	5.998	6.158
8	3.261	4.041	4.529	4.886	5.167	5.399	5.597	5.767	5.918
9	3.199	3.949	4.415	4.756	5.024	5.244	5.432	5.595	5.739
10	3.151	3.877	4.327	4.654	4.912	5.124	5.305	5.461	5.599
11	3.113	3.820	4.256	4.574	4.823	5.028	5.202	5.353	5.487
12	[illegible]	3.773	4.199	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.265	5.395
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.192	5.318
14	[illegible]	3.702	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.131	5.254
15	3.014	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.077	5.198
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.150
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	3.591	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	2.950	3.578	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
120	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
∞	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$\nu \backslash r$	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	14.75	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
120	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
∞	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$\alpha = .05$

$\nu \backslash r$	20	22	24	26	28	30	32	34	36
1	59.56	60.91	62.12	63.22	64.23	65.15	66.01	66.81	67.56
2	16.77	17.13	17.45	17.75	18.02	18.27	18.50	18.72	18.92
3	11.24	11.47	11.64	11.87	12.05	12.21	12.36	12.50	12.63
4	9.233	9.418	9.584	9.736	9.875	10.00	10.12	10.23	10.34
5	8.208	8.368	8.512	8.643	8.764	8.875	8.979	9.075	9.165
6	7.587	7.730	7.861	7.979	8.088	8.189	8.283	8.370	8.452
7	7.170	7.303	7.423	7.533	7.634	7.728	7.814	7.895	7.972
8	6.870	6.995	7.109	7.212	7.307	7.395	7.477	7.554	7.625
9	6.641	6.763	6.871	6.970	7.061	7.145	7.222	7.295	7.363
10	6.467	6.582	6.686	6.781	6.868	6.948	7.023	7.093	7.159
11	6.326	6.436	6.536	6.628	6.712	6.790	6.863	6.930	6.994
12	6.209	6.317	6.414	6.503	6.585	6.660	6.731	6.796	6.858
13	6.112	6.217	6.312	6.398	6.478	6.551	6.620	6.684	6.744
14	6.029	6.132	6.224	6.309	6.387	6.459	6.526	6.588	6.647
15	5.958	6.059	6.149	6.233	6.309	6.379	6.445	6.506	6.564
16	5.897	5.995	6.084	6.166	6.241	6.310	6.374	6.434	6.491
17	5.842	5.940	6.027	6.107	6.181	6.249	6.313	6.372	6.427
18	5.794	5.890	5.977	6.055	6.128	6.195	6.258	6.316	6.371
19	5.752	5.846	5.932	6.009	6.081	6.147	6.209	6.267	6.321
20	5.714	5.807	5.891	5.968	6.039	6.104	6.165	6.222	6.275
24	5.594	5.683	5.764	5.838	5.906	5.968	6.027	6.081	6.132
30	5.475	5.561	5.638	5.709	5.774	5.833	5.889	5.941	5.990
40	5.358	5.439	5.513	5.581	5.642	5.700	5.753	5.803	5.849
60	5.241	5.319	5.389	5.453	5.512	5.566	5.617	5.664	5.708
120	5.126	5.200	5.266	5.327	5.382	5.434	5.481	5.526	5.568
∞	5.012	5.081	5.144	5.201	5.253	5.301	5.346	5.388	5.427

$\nu \backslash r$	38	40	50	60	70	80	90	100
1	68.26	68.92	71.73	73.97	75.12	77.40	78.77	79.98
2	19.11	19.29	20.05	20.66	21.16	21.59	21.96	22.29
3	12.75	12.87	13.36	13.76	14.08	14.36	14.61	14.82
4	10.44	10.53	10.93	11.24	11.51	11.73	11.92	12.09
5	9.250	9.330	9.674	9.949	10.18	10.38	10.54	10.69
6	8.529	8.601	8.913	9.163	9.370	9.548	9.702	9.839
7	8.043	8.110	8.400	8.632	8.824	8.989	9.133	9.261
8	7.693	7.756	8.029	8.248	8.430	8.586	8.722	8.843
9	7.429	7.488	7.749	7.958	8.132	8.281	8.410	8.526
10	7.220	7.279	7.529	7.730	7.897	8.041	8.166	8.276
11	7.053	7.110	7.352	7.546	7.708	7.847	7.968	8.075
12	6.916	6.970	7.205	7.394	7.552	7.687	7.804	7.909
13	6.800	6.854	7.083	7.267	7.421	7.552	7.667	7.769
14	6.702	6.754	6.979	7.159	7.309	7.438	7.550	7.650
15	6.618	6.669	6.888	7.065	7.212	7.339	7.449	7.546
16	6.544	6.594	6.810	6.984	7.128	7.252	7.360	7.457
17	6.479	6.529	6.741	6.912	7.054	7.176	7.283	7.377
18	6.422	6.471	6.680	6.848	6.989	7.109	7.213	7.307
19	6.371	6.419	6.626	6.792	6.930	7.048	7.152	7.244
20	6.325	6.373	6.576	6.740	6.877	6.994	7.097	7.137
24	6.181	6.226	6.421	6.579	6.710	6.822	6.920	7.008
30	6.037	6.080	6.267	6.417	6.543	6.650	6.744	6.827
40	5.893	5.934	6.112	6.255	6.375	6.477	6.566	6.645
60	5.750	5.789	5.958	6.093	6.206	6.303	6.387	6.462
120	5.607	5.644	5.802	5.929	6.035	6.126	6.205	6.275
∞	5.463	5.498	5.646	5.764	5.863	5.947	6.020	6.085

*/ FUENTE: Miller Rupert G. J. (1966) Simultaneus Statistical Inference. Mc Graw-Hill Book Company.

α = .01

ν \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69
3	8.261	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69
4	6.512	8.120	9.173	9.958	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27
5	5.702	6.976	7.804	8.421	8.913	9.321	9.669	9.972	10.24
6	5.243	6.331	7.033	7.556	7.973	8.318	8.613	8.869	9.097
7	4.949	5.919	6.543	7.005	7.373	7.679	7.939	8.166	8.368
8	4.746	5.635	6.204	6.625	6.960	7.237	7.474	7.681	7.863
9	4.596	5.428	5.957	6.348	6.658	6.915	7.134	7.325	7.495
10	4.482	5.270	5.769	6.136	6.428	6.669	6.875	7.055	7.213
11	4.392	5.146	5.621	5.970	6.247	6.476	6.672	6.842	6.992
12	4.320	5.046	5.502	5.836	6.101	6.321	6.507	6.670	6.814
13	4.260	4.964	5.404	5.727	5.981	6.192	6.372	6.528	6.667
14	4.210	4.895	5.322	5.634	5.881	6.085	6.258	6.409	6.543
15	4.168	4.836	5.252	5.556	5.796	5.994	6.162	6.309	6.439
16	4.131	4.786	5.192	5.489	5.722	5.915	6.079	6.222	6.349
17	4.099	4.742	5.140	5.430	5.659	5.847	6.007	6.147	6.270
18	4.071	4.703	5.094	5.379	5.603	5.788	5.944	6.081	6.201
19	4.046	4.670	5.054	5.334	5.554	5.735	5.889	6.022	6.141
20	4.024	4.639	5.018	5.294	5.510	5.688	5.839	5.970	6.087
24	3.956	4.546	4.907	5.168	5.374	5.542	5.685	5.809	5.919
30	3.889	4.455	4.799	5.048	5.242	5.401	5.536	5.653	5.756
40	3.825	4.367	4.696	4.931	5.114	5.265	5.392	5.502	5.599
60	3.762	4.282	4.595	4.818	4.991	5.133	5.253	5.356	5.447
120	3.702	4.200	4.497	4.709	4.872	5.005	5.118	5.214	5.299
∞	3.643	4.120	4.403	4.603	4.757	4.882	4.987	5.078	5.157

ν \ r	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3
2	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50
3	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55
4	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24
5	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81
6	9.301	9.485	9.653	9.808	9.951	10.08	10.21	10.32	10.43
7	8.548	8.711	8.860	8.997	9.124	9.242	9.353	9.456	9.554
8	8.027	8.176	8.312	8.436	8.552	8.659	8.760	8.854	8.943
9	7.647	7.784	7.910	8.025	8.132	8.232	8.325	8.412	8.495
10	7.356	7.485	7.603	7.712	7.812	7.906	7.993	8.076	8.153
11	7.128	7.250	7.362	7.465	7.560	7.649	7.732	7.809	7.883
12	6.943	7.060	7.167	7.265	7.356	7.441	7.520	7.594	7.665
13	6.791	6.903	7.006	7.101	7.188	7.269	7.345	7.417	7.485
14	6.664	6.772	6.871	6.962	7.047	7.126	7.199	7.268	7.333
15	6.555	6.660	6.757	6.845	6.927	7.003	7.074	7.142	7.204
16	6.462	6.564	6.658	6.744	6.823	6.898	6.967	7.032	7.093
17	6.381	6.480	6.572	6.656	6.734	6.806	6.873	6.937	6.997
18	6.310	6.407	6.497	6.579	6.655	6.725	6.792	6.854	6.912
19	6.247	6.342	6.430	6.510	6.585	6.654	6.719	6.780	6.837
20	6.191	6.285	6.371	6.450	6.523	6.591	6.654	6.714	6.771
24	6.017	6.106	6.186	6.261	6.330	6.394	6.453	6.510	6.563
30	5.849	5.932	6.008	6.078	6.143	6.203	6.259	6.311	6.361
40	5.686	5.764	5.835	5.900	5.961	6.017	6.069	6.119	6.165
60	5.528	5.601	5.667	5.728	5.785	5.837	5.886	5.931	5.974
120	5.375	5.443	5.505	5.562	5.614	5.662	5.708	5.750	5.790
∞	5.227	5.290	5.348	5.400	5.448	5.493	5.535	5.574	5.611

α = .01

ν \ r	20	22	24	26	28	30	32	34	36
1	298.0	304.7	310.8	316.3	321.3	326.0	330.3	334.3	338.0
2	37.95	38.76	39.49	40.15	40.76	41.32	41.84	42.33	42.78
3	19.77	20.17	20.53	20.86	21.16	21.44	21.70	21.95	22.17
4	14.40	14.68	14.93	15.16	15.37	15.57	15.75	15.92	16.08
5	11.93	12.16	12.36	12.54	12.71	12.87	13.02	13.15	13.28
6	10.54	10.73	10.91	11.06	11.21	11.34	11.47	11.58	11.69
7	9.646	9.815	9.970	10.11	10.24	10.36	10.47	10.58	10.67
8	9.027	9.182	9.322	9.450	9.569	9.678	9.779	9.874	9.964
9	8.573	8.717	8.847	8.966	9.075	9.177	9.271	9.360	9.443
10	8.226	8.361	8.483	8.595	8.698	8.794	8.883	8.966	9.044
11	7.952	8.080	8.196	8.303	8.400	8.491	8.575	8.654	8.728
12	7.731	7.853	7.964	8.066	8.159	8.246	8.327	8.402	8.473
13	7.548	7.665	7.772	7.870	7.960	8.043	8.121	8.193	8.262
14	7.395	7.508	7.611	7.705	7.792	7.873	7.948	8.018	8.084
15	7.264	7.374	7.474	7.566	7.650	7.728	7.800	7.869	7.932
16	7.152	7.258	7.356	7.445	7.527	7.602	7.673	7.739	7.802
17	7.053	7.158	7.253	7.340	7.420	7.493	7.563	7.627	7.687
18	6.968	7.070	7.163	7.247	7.325	7.397	7.465	7.528	7.587
19	6.891	6.992	7.082	7.166	7.242	7.312	7.379	7.440	7.498
20	6.823	6.922	7.011	7.092	7.168	7.237	7.302	7.362	7.419
24	6.612	6.705	6.789	6.865	6.936	7.001	7.062	7.119	7.173
30	6.407	6.494	6.572	6.644	6.710	6.772	6.828	6.881	6.932
40	6.209	6.289	6.362	6.429	6.490	6.547	6.600	6.650	6.697
60	6.015	6.090	6.158	6.220	6.277	6.330	6.378	6.424	6.467
120	5.827	5.897	5.959	6.016	6.069	6.117	6.162	6.204	6.244
∞	5.645	5.709	5.766	5.818	5.866	5.911	5.952	5.990	6.026

ν \ r	38	40	50	60	70	80	90	100
1	341.5	344.8	358.9	370.1	379.4	387.3	394.1	400.1
2	43.21	43.61	45.33	46.70	47.83	48.80	49.64	50.38
3	22.39	22.59	23.45	24.13	24.71	25.19	25.62	26.00
4	16.23	16.37	16.98	17.46	17.86	18.20	18.50	18.77
5	13.40	13.52	14.00	14.39	14.72	14.99	15.23	15.45
6	11.80	11.90	12.31	12.65	12.92	13.16	13.37	13.55
7	10.76	10.85	11.23	11.52	11.77	11.99	12.17	12.34
8	10.05	10.13	10.47	10.75	10.97	11.17	11.34	11.49
9	9.521	9.594	9.912	10.17	10.38	10.57	10.73	10.87
10	9.117	9.187	9.486	9.726	9.927	10.10	10.25	10.39
11	8.798	8.864	9.148	9.377	9.568	9.732	9.875	10.00
12	8.539	8.603	8.875	9.094	9.277	9.434	9.571	9.693
13	8.326	8.387	8.648	8.859	9.035	9.187	9.318	9.436
14	8.146	8.204	8.457	8.661	8.832	8.978	9.106	9.219
15	7.992	8.049	8.295	8.492	8.658	8.800	8.924	9.035
16	7.860	7.916	8.154	8.347	8.507	8.646	8.767	8.874
17	7.745	7.799	8.031	8.219	8.377	8.511	8.630	8.735
18	7.643	7.696	7.924	8.107	8.261	8.393	8.508	8.611
19	7.553	7.605	7.828	8.008	8.159	8.288	8.401	8.502
20	7.473	7.523	7.742	7.919	8.067	8.194	8.305	8.404
24	7.223	7.270	7.476	7.642	7.780	7.900	8.004	8.097
30	6.978	7.023	7.215	7.370	7.500	7.611	7.709	7.796
40	6.740	6.782	6.960	7.104	7.225	7.328	7.419	7.500
60	6.507	6.546	6.710	6.843	6.954	7.050	7.133	7.207
120	6.281	6.316	6.467	6.588	6.689	6.776	6.852	6.919
∞	6.060	6.092	6.228	6.338	6.429	6.507	6.575	6.636

TABLA 3 */

Puntos de Significación de Duncan

α = .05

ν \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.501	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	3.927	4.013	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.635	3.749	3.797	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.461	3.587	3.649	3.680	3.694	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.344	3.477	3.548	3.588	3.611	3.622	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626
8	3.261	3.399	3.475	3.521	3.549	3.566	3.575	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579
9	3.199	3.339	3.420	3.470	3.502	3.523	3.536	3.544	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547
10	3.151	3.293	3.376	3.430	3.465	3.489	3.505	3.516	3.522	3.525	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526
11	3.113	3.256	3.342	3.397	3.435	3.462	3.480	3.493	3.501	3.506	3.509	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510
12	3.082	3.225	3.313	3.370	3.410	3.439	3.459	3.474	3.484	3.491	3.496	3.498	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499
13	3.055	3.200	3.289	3.348	3.389	3.419	3.442	3.458	3.470	3.478	3.484	3.488	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490
14	3.033	3.178	3.268	3.329	3.372	3.403	3.426	3.444	3.457	3.467	3.474	3.479	3.482	3.484	3.484	3.485	3.485	3.485
15	3.014	3.160	3.250	3.312	3.356	3.389	3.413	3.432	3.446	3.457	3.465	3.471	3.476	3.478	3.480	3.481	3.481	3.481
16	2.998	3.144	3.235	3.298	3.343	3.376	3.402	3.422	3.437	3.449	3.458	3.465	3.470	3.473	3.477	3.478	3.478	3.478
17	2.984	3.130	3.222	3.285	3.331	3.366	3.392	3.412	3.429	3.441	3.451	3.459	3.465	3.469	3.473	3.475	3.476	3.476
18	2.971	3.118	3.210	3.274	3.321	3.356	3.383	3.405	3.421	3.435	3.445	3.454	3.460	3.465	3.470	3.472	3.474	3.474
19	2.960	3.107	3.199	3.264	3.311	3.347	3.375	3.397	3.415	3.429	3.440	3.449	3.456	3.462	3.467	3.470	3.472	3.473
20	2.950	3.097	3.190	3.255	3.303	3.339	3.368	3.391	3.409	3.424	3.436	3.445	3.453	3.459	3.464	3.467	3.470	3.472
24	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276	3.315	3.345	3.370	3.390	3.406	3.420	3.432	3.441	3.449	3.456	3.461	3.465	3.469
30	2.888	3.035	3.131	3.199	3.250	3.290	3.322	3.349	3.371	3.389	3.405	3.418	3.430	3.439	3.447	3.454	3.460	3.466
40	2.858	3.006	3.102	3.171	3.224	3.266	3.300	3.328	3.352	3.373	3.390	3.405	3.418	3.429	3.439	3.448	3.456	3.463
60	2.829	2.976	3.073	3.143	3.198	3.241	3.277	3.307	3.333	3.355	3.374	3.391	3.406	3.419	3.431	3.442	3.451	3.460
120	2.800	2.947	3.045	3.116	3.172	3.217	3.254	3.287	3.314	3.337	3.359	3.377	3.394	3.409	3.423	3.435	3.446	3.457
∞	2.772	2.918	3.017	3.089	3.146	3.193	3.232	3.265	3.294	3.320	3.343	3.363	3.382	3.399	3.414	3.428	3.442	3.454

ν \ p	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	50	60	70	80	90	100
1	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626
8	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579
9	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547
10	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526
11	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510
12	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499
13	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490
14	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485
15	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481
16	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478
17	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476
18	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
19	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
20	3.473	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
24	3.471	3.475	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477
30	3.470	3.477	3.481	3.484	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.486
40	3.469	3.479	3.486	3.492	3.497	3.500	3.503	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.504
60	3.467	3.481	3.492	3.501	3.509	3.515	3.521	3.525	3.529	3.531	3.534	3.537	3.537	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.537
120	3.466	3.483	3.498	3.511	3.522	3.532	3.541	3.548	3.555	3.561	3.566	3.585	3.596	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.601
∞	3.466	3.486	3.505	3.522	3.536	3.550	3.562	3.574	3.584	3.594	3.603	3.640	3.668	[illegible]	3.708	[illegible]	3.735

*/ FUENTE: Miller Rupert G. Jr. (1966)
Simultaneous Statistical Inference.
Mc Graw-Hill Book Company.

TABLA 3

(continuación)

$\alpha = .01$

ν \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03
2	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04
3	8.261	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.512	6.677	6.740	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	5.702	5.893	5.989	6.040	6.065	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655	5.680	5.694	5.701	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416	5.439	5.454	5.464	5.470	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256	5.276	5.291	5.302	5.309	5.314	5.316	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142	5.160	5.174	5.185	5.193	5.199	5.203	5.205	5.206	5.206	5.206
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058	5.074	5.088	5.098	5.106	5.112	5.117	5.120	5.122	5.124
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975	4.994	5.009	5.021	5.031	5.039	5.045	5.050	5.054	5.057
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907	4.927	4.944	4.958	4.969	4.978	4.986	4.993	4.998	5.002
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850	4.872	4.889	4.904	4.917	4.928	4.937	4.944	4.950	4.956
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843	4.859	4.872	4.884	4.894	4.902	4.910	4.916
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803	4.820	4.834	4.846	4.857	4.866	4.874	4.881
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724	4.748	4.768	4.786	4.800	4.813	4.825	4.835	4.844	4.851
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.664	4.693	4.717	4.738	4.756	4.771	4.785	4.797	4.807	4.816	4.824
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664	4.689	4.711	4.729	4.745	4.759	4.772	4.783	4.792	4.801
19	4.046	4.220	4.335	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639	4.665	4.686	4.705	4.722	4.736	4.749	4.761	4.771	4.780
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664	4.684	4.701	4.716	4.729	4.741	4.751	4.761
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596	4.616	4.634	4.651	4.665	4.678	4.690	4.700
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528	4.550	4.569	4.586	4.601	4.615	4.628	4.640
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.244	4.296	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461	4.483	4.503	4.521	4.537	4.553	4.566	4.579
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394	4.417	4.438	4.456	4.474	4.490	4.504	4.518
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327	4.351	4.372	4.392	4.410	4.426	4.442	4.456
∞	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261	4.285	4.307	4.327	4.345	4.363	4.379	4.394

ν \ p	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	50	60	70	80	90	100
1	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03
2	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04
3	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703
7	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472
8	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317
9	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206
10	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124
11	5.059	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061
12	5.006	5.010	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011
13	4.960	4.966	4.970	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972
14	4.921	4.929	4.935	4.938	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940
15	4.887	4.897	4.904	4.909	4.912	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914
16	4.858	4.869	4.877	4.883	4.887	4.890	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892
17	4.832	4.844	4.853	4.860	4.865	4.869	4.872	4.873	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874
18	4.808	4.821	4.832	4.839	4.846	4.850	4.854	4.856	4.857	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858
19	4.788	4.802	4.812	4.821	4.828	4.833	4.838	4.841	4.843	4.844	4.845	4.845	4.845	4.845	4.845	4.845	4.845
20	4.769	4.784	4.795	4.805	4.813	4.818	4.823	4.827	4.830	4.832	4.833	4.833	4.833	4.833	4.833	4.833	4.833
24	4.710	4.727	4.741	4.752	4.762	4.770	4.777	4.783	4.788	4.791	4.794	4.802	4.802	4.802	4.802	4.802	4.802
30	4.650	4.669	4.685	4.699	4.711	4.721	4.730	4.738	4.744	4.750	4.755	4.772	4.777	4.777	4.777	4.777	4.777
40	4.591	4.611	4.630	4.645	4.659	4.671	4.682	4.692	4.700	4.708	4.715	4.740	4.754	4.761	4.764	4.764	4.764
60	4.530	4.553	4.573	4.591	4.607	4.620	4.633	4.645	4.655	4.665	4.673	4.707	4.730	4.745	4.755	4.761	4.765
120	4.469	4.494	4.516	4.535	4.552	4.568	4.583	4.596	4.609	4.619	4.630	4.673	4.703	4.727	4.745	4.759	4.770
∞	4.408	4.434	4.457	4.478	4.497	4.514	4.530	4.545	4.559	4.572	4.584	4.635	4.675	4.707	4.734	4.756	4.776

TABLA 5 1/

Distribución χ^2

	$p = .750$	.900	.950	.975	.990	.995	.999
$k = 1$	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27
4	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47
5	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96	26.13
9	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.32
21	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	28.24	33.20	36.42	39.37	42.98	45.56	51.18
25	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
40	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4
x_p	.675	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

For $k > 100$ use the approximation $w_p = (1/2)(x_p + \sqrt{2k-1})^2$, or the more accurate $w_p = k\left(1 - \frac{2}{9k} + x_p\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3$, where x_p is the value from the standardized normal distribution shown in the bottom of the table.

SOURCE. Abridged from Table 8, Pearson and Hartley (1970), with permission from the *Biometrika* Trustees.

The entries in this table are quantiles w_p of a chi-square random variable W with k degrees of freedom, selected so $P(W \leq w_p) = p$ and $P(W > w_p) = 1 - p$.

1/ FUENTE: Conover, J.W.
Practical Nonparametric Statistics
Ed. John Willey & Sons, Inc., (1980)

TABLA 6[1/]

Tabla de probabilidades asociadas con valores tan grandes como valores observados de H en el análisis de varianza de una clasificación por rangos de Kruskal-Wallis*

Tamaño de muestras n_1	n_2	n_3	H	p
2	1	1	2.7000	.500
2	2	1	3.6000	.200
2	2	2	4.5714	.067
			3.7143	.200
3	1	1	3.2000	.300
3	2	1	4.2857	.100
			3.8571	.133
3	2	2	5.3572	.029
			4.7143	.048
			4.5000	.067
			4.4643	.105
3	3	1	5.1429	.043
			4.5714	.100
			4.0000	.129
3	3	2	6.2500	.011
			5.3611	.032
			5.1389	.061
			4.5556	.100
			4.2500	.121
3	3	3	7.2000	.004
			6.4889	.011
			5.6889	.029
			5.6000	.050
			5.0667	.086
			4.6222	.100
4	1	1	3.5714	.200
4	2	1	4.8214	.057
			4.5000	.076
			4.0179	.114
4	2	2	6.0000	.014
			5.3333	.033
			5.1250	.052
			4.4583	.100
			4.1667	.105
4	3	1	5.8333	.021
			5.2083	.050
			5.0000	.057
			4.0556	.093
			3.8889	.129

Tamaño de muestras n_1	n_2	n_3	H	p
4	3	2	6.4444	.008
			6.3000	.011
			5.4444	.046
			5.4000	.051
			4.5111	.098
			4.4444	.102
4	3	3	6.7455	.010
			6.7091	.013
			5.7909	.046
			5.7273	.050
			4.7091	.092
			4.7000	.101
4	4	1	6.6667	.010
			6.1667	.022
			4.9667	.048
			4.8667	.054
			4.1667	.082
			4.0667	.102
4	4	2	7.0364	.006
			6.8727	.011
			5.4545	.046
			5.2364	.052
			4.5545	.098
			4.4455	.103
4	4	3	7.1439	.010
			7.1364	.011
			5.5985	.049
			5.5758	.051
			4.5455	.099
			4.4773	.102
4	4	4	7.6538	.008
			7.5385	.011
			5.6923	.049
			5.6538	.054
			4.6539	.097
			4.5001	.104
5	1	1	3.8571	.143
5	2	1	5.2500	.036
			5.0000	.048
			4.4500	.071
			4.2000	.095
			4.0500	.119

1/ FUENTE: Siegel Sidney
Estadística No Paramétrica
Ed. Trillas (1982).

TABLA 6

(continuación)

Tabla de probabilidades asociadas con valores tan grandes como los valores observados de *H* en el análisis de varianza de una clasificación por rangos de Kruskal-Wallis*

Tamaño de muestras				
n_1	n_2	n_3	H	p
5	2	2	6.5333	.008
			6.1333	.013
			5.1600	.034
			5.0400	.056
			4.3733	.090
			4.2933	.122
5	3	1	6.4000	.012
			4.9600	.048
			4.8711	.052
			4.0178	.095
			3.8400	.123
5	3	2	6.9091	.009
			6.8218	.010
			5.2509	.049
			5.1055	.052
			4.6509	.091
			4.4945	.101
5	3	3	7.0788	.009
			6.9818	.011
			5.6485	.049
			5.5152	.051
			4.5333	.097
			4.4121	.109
5	4	1	6.9545	.008
			6.8400	.011
			4.9855	.044
			4.8600	.056
			3.9873	.098
			3.9600	.102
5	4	2	7.2045	.009
			7.1182	.010
			5.2727	.049
			5.2682	.050
			4.5409	.098
			4.5182	.101
5	4	3	7.4449	.010
			7.3949	.011
			5.6564	.049
			5.6308	.050
			4.5487	.099
			4.5231	.103
5	4	4	7.7604	.009
			7.7440	.011
			5.6571	.049
			5.6176	.050
			4.6187	.100
			4.5527	.102
5	5	1	7.3091	.009
			6.8364	.011
			5.1273	.046
			4.9091	.053
			4.1091	.086
			4.0364	.105
5	5	2	7.3385	.010
			7.2692	.010
			5.3385	.047
			5.2462	.051
			4.6231	.097
			4.5077	.100
5	5	3	7.5780	.010
			7.5429	.010
			5.7055	.046
			5.6264	.051
			4.5451	.100
			4.5363	.102
5	5	4	7.8229	.010
			7.7914	.010
			5.6657	.049
			5.6429	.050
			4.5229	.099
			4.5200	.101
5	5	5	8.0000	.009
			7.9800	.010
			5.7800	.049
			5.6600	.051
			4.5600	.100
			4.5000	.102

* Versión abreviada de Kruskal, W. H., y Wallis, W. A. 1952. Uso de los rangos en el análisis de varianza de un criterio. *J. Amer. Statist. Asoc.*, 47, 614-617. Con el amable permiso de los autores y editores. (Las correcciones de esta tabla dadas por los autores en Errata, *J. Amer. Statist. Asoc.*, 48, 910, se han incorporado.)

TABLA 7 1/

Tabla de probabilidades asociadas con valores tan grandes como los valores observados de χ_r^2 en el análisis de varianza de dos clasificaciones por rangos de Friedman*

t = 3

b = 2		b = 3		b = 4		b = 5	
χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p
0	1.000	.000	1.000	.0	1.000	.0	1.000
1	.833	.667	.944	.5	.931	.4	.954
3	.500	2.000	.528	1.5	.653	1.2	.691
4	.167	2.667	.361	2.0	.431	1.6	.522
		4.667	.194	3.5	.273	2.8	.367
		6.000	.028	4.5	.125	3.6	.182
				6.0	.069	4.8	.124
				6.5	.042	5.2	.093
				8.0	.0046	6.4	.039
						7.6	.024
						8.4	.0085
						10.0	.00077

b = 6		b = 7		b = 8		b = 9	
χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p
.00	000	.000	1.000	.00	1.000	.000	1.000
.33	956	.286	.964	.25	.967	.222	.971
1.00	740	.857	.768	.75	.794	.667	.814
1.33	570	1.143	.620	1.00	.654	.889	.865
2.33	430	2.000	.486	1.75	.531	1.556	.569
3.00	252	2.571	.305	2.25	.355	2.000	.398
4.00	184	3.429	.237	3.00	.285	2.667	.328
4.33	142	3.714	.192	3.25	.236	2.889	.278
5.33	072	4.571	.112	4.00	.149	3.556	.187
6.33	052	5.429	.085	4.75	.120	4.222	.154
7.00	029	6.000	.052	5.25	.079	4.667	.107
8.33	012	7.143	.027	6.25	.047	5.556	.069
9.00	0081	7.714	.021	6.75	.038	6.000	.057
9.33	0055	8.000	.016	7.00	.030	6.222	.048
10.33	0017	8.857	.0084	7.75	.018	6.889	.031
12.00	00013	10.286	.0036	9.00	.0099	8.000	.019
		10.571	.0027	9.25	.0080	8.222	.016
		11.143	.0012	9.75	.0048	8.667	.010
		12.286	.00032	10.75	.0024	9.556	.0060
		14.000	.000021	12.00	.0011	10.667	.0035
				12.25	.00086	10.889	.0029
				13.00	.00026	11.556	.0013
				14.25	.000061	12.667	.00066
				16.00	.0000036	13.556	.00035
						14.000	.00020
						14.222	.000097
						14.889	.000054
						16.222	.000011
						18.000	.0000006

* Tomada de Friedman, M. 1937. El uso de rangos para evitar la suposición implícita de normalidad en el análisis de varianza. *J. Amer. Statist. Ass.*, **32**, 688-689, con el amable permiso del autor y el editor.

1/ FUENTE: Siegel Sidney
Estadística No Paramétrica
Ed. Trillas (1982)

TABLA 7

(continuación)

Tabla de probabilidades asociadas con valores tan grandes como los valores observados de χ_r^2 en el análisis de varianza de dos clasificaciones por rangos de Friedman*

t = 4

b = 2		b = 3		b = 4			
χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p
.0	1.000	.2	1.000	.0	1.000	5.7	.141
.6	.958	.6	.958	.3	.992	6.0	.105
1.2	.834	1.0	.910	.6	.928	6.3	.094
1.8	.792	1.8	.727	.9	.900	6.6	.077
2.4	.625	2.2	.608	1.2	.800	6.9	.068
3.0	.542	2.6	.524	1.5	.754	7.2	.054
3.6	.458	3.4	.446	1.8	.677	7.5	.052
4.2	.375	3.8	.342	2.1	.649	7.8	.036
4.8	.208	4.2	.300	2.4	.524	8.1	.033
5.4	.167	5.0	.207	2.7	.508	8.4	.019
6.0	.042	5.4	.175	3.0	.432	8.7	.014
		5.8	.148	3.3	.389	9.3	.012
		6.6	.075	3.6	.355	9.6	.0069
		7.0	.054	3.9	.324	9.9	.0062
		7.4	.033	4.5	.242	10.2	.0027
		8.2	.017	4.8	.200	10.8	.0016
		9.0	.0017	5.1	.190	11.1	.00094
				5.4	.158	12.0	.000072

* Tomada de Friedman, M. 1937. El uso de rangos para evitar la suposición implicita de normalidad en el análisis de varianza. *J. Amer. Statist. Ass.*, 32 686 689, con el amable permiso del autor y el editor.

TABLA 8 */

Valores asociados con la Prueba de Steel

$K = 3$

$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$		$n = 6$	
T_{ij}	P	T_{ij}	P	T_{ij}	P	T_{ij}	P	T_{ij}	P	T_{ij}	P
1	1.0000										
		3	.6000								
		4	.9333								
		5	1.0000								
				6	.2286						
				7	.4143						
				8	.7000						
				9	.9393						
				10	1.0000	10	.0736				
						11	.1403				
						12	.2604				
						13	.4168				
						14	.6251				
						15	.7843	15	.0218		
						16	.9340	16	.0428		
						17	.9955	17	.0831		
						18	1.0000	18	.1405		
								19	.2298		
										21	.0062
										22	.0122
										23	.0240
										24	.0413

*/ FUENTE: Steel, Robert G.D. 1960.
<u>A Rank Sum Test for Comparing All Pairs of Treatments.</u>
Technometrics 2 197-207.

TABLA 9 1/

Distribución Normal

Selected values: $w_{0.0001} = -3.7190$ $w_{0.0005} = -3.2905$ $w_{0.025} = -1.9600$ $w_{0.05} = -1.6449$

$w_{0.9999} = 3.7190$ $w_{0.9995} = 3.2905$ $w_{0.975} = 1.9600$ $w_{0.95} = 1.6449$

p	*0.000*	*0.001*	*0.002*	*0.003*	*0.004*	*0.005*	*0.006*	*0.007*	*0.008*	*0.009*
.00		−3.0902	−2.8782	−2.7478	−2.6521	−2.5758	−2.5121	−2.4573	−2.4089	−2.3656
.01	−2.3263	−2.2904	−2.2571	−2.2262	−2.1973	−2.1701	−2.1444	−2.1201	−2.0969	−2.0749
.02	−2.0537	−2.0335	−2.0141	−1.9954	−1.9774	−1.9600	−1.9431	−1.9268	−1.9110	−1.8957
.03	−1.8808	−1.8663	−1.8522	−1.8384	−1.8250	−1.8119	−1.7991	−1.7866	−1.7744	−1.7624
.04	−1.7507	−1.7392	−1.7279	−1.7169	−1.7060	−1.6954	−1.6849	−1.6747	−1.6646	−1.6546
.05	−1.6449	−1.6352	−1.6258	−1.6164	−1.6072	−1.5982	−1.5893	−1.5805	−1.5718	−1.5632
.06	−1.5548	−1.5464	−1.5382	−1.5301	−1.5220	−1.5141	−1.5063	−1.4985	−1.4909	−1.4833
.07	−1.4758	−1.4684	−1.4611	−1.4538	−1.4466	−1.4395	−1.4325	−1.4255	−1.4187	−1.4118
.08	−1.4051	−1.3984	−1.3917	−1.3852	−1.3787	−1.3722	−1.3658	−1.3595	−1.3532	−1.3469
.09	−1.3408	−1.3346	−1.3285	−1.3225	−1.3165	−1.3106	−1.3047	−1.2988	−1.2930	−1.2873
.10	−1.2816	−1.2759	−1.2702	−1.2646	−1.2591	−1.2536	−1.2481	−1.2426	−1.2372	−1.2319
.11	−1.2265	−1.2212	−1.2160	−1.2107	−1.2055	−1.2004	−1.1952	−1.1901	−1.1850	−1.1800
.12	−1.1750	−1.1700	−1.1650	−1.1601	−1.1552	−1.1503	−1.1455	−1.1407	−1.1359	−1.1311
.13	−1.1264	−1.1217	−1.1170	−1.1123	−1.1077	−1.1031	−1.0985	−1.0939	−1.0893	−1.0848
.14	−1.0803	−1.0758	−1.0714	−1.0669	−1.0625	−1.0581	−1.0537	−1.0494	−1.0450	−1.0407
.15	−1.0364	−1.0322	−1.0279	−1.0237	−1.0194	−1.0152	−1.0110	−1.0069	−1.0027	−0.9986
.16	−0.9945	−0.9904	−0.9863	−0.9822	−0.9782	−0.9741	−0.9701	−0.9661	−0.9621	−0.9581
.17	−0.9542	−0.9502	−0.9463	−0.9424	−0.9385	−0.9346	−0.9307	−0.9269	−0.9230	−0.9192
.18	−0.9154	−0.9116	−0.9078	−0.9040	−0.9002	−0.8965	−0.8927	−0.8890	−0.8853	−0.8816
.19	−0.8779	−0.8742	−0.8705	−0.8669	−0.8633	−0.8596	−0.8560	−0.8524	−0.8488	−0.8452
.20	−0.8416	−0.8381	−0.8345	−0.8310	−0.8274	−0.8239	−0.8204	−0.8169	−0.8134	−0.8099
.21	−0.8064	−0.8030	−0.7995	−0.7961	−0.7926	−0.7892	−0.7858	−0.7824	−0.7790	−0.7756
.22	−0.7722	−0.7688	−0.7655	−0.7621	−0.7588	−0.7554	−0.7521	−0.7488	−0.7454	−0.7421
.23	−0.7388	−0.7356	−0.7323	−0.7290	−0.7257	−0.7225	−0.7192	−0.7160	−0.7128	−0.7095
.24	−0.7063	−0.7031	−0.6999	−0.6967	−0.6935	−0.6903	−0.6871	−0.6840	−0.6808	−0.6776

1/ FUENTE: Conover, J.W.
Practical Nonparametric Statistics
Ed. John Willey & Sons. Inc., (1980)

TABLA 9

(continuación)

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
.25	−0.6745	−0.6713	−0.6682	−0.6651	−0.6620	−0.6588	−0.6557	−0.6526	−0.6495	−0.6464
.26	−0.6433	−0.6403	−0.6372	−0.6341	−0.6311	−0.6280	−0.6250	−0.6219	−0.6189	−0.6158
.27	−0.6128	−0.6098	−0.6068	−0.6038	−0.6008	−0.5978	−0.5948	−0.5918	−0.5888	−0.5858
.28	−0.5828	−0.5799	−0.5769	−0.5740	−0.5710	−0.5681	−0.5651	−0.5622	−0.5592	−0.5563
.29	−0.5534	−0.5505	−0.5476	−0.5446	−0.5417	−0.5388	−0.5359	−0.5330	−0.5302	−0.5273
.30	−0.5244	−0.5215	−0.5187	−0.5158	−0.5129	−0.5101	−0.5072	−0.5044	−0.5015	−0.4987
.31	−0.4959	−0.4930	−0.4902	−0.4874	−0.4845	−0.4817	−0.4789	−0.4761	−0.4733	−0.4705
.32	−0.4677	−0.4649	−0.4621	−0.4593	−0.4565	−0.4538	−0.4510	−0.4482	−0.4454	−0.4427
.33	−0.4399	−0.4372	−0.4344	−0.4316	−0.4289	−0.4261	−0.4234	−0.4207	−0.4179	−0.4152
.34	−0.4125	−0.4097	−0.4070	−0.4043	−0.4016	−0.3989	−0.3961	−0.3934	−0.3907	−0.3880
.35	−0.3853	−0.3826	−0.3799	−0.3772	−0.3745	−0.3719	−0.3692	−0.3665	−0.3638	−0.3611
.36	−0.3585	−0.3558	−0.3531	−0.3505	−0.3478	−0.3451	−0.3425	−0.3398	−0.3372	−0.3345
.37	−0.3319	−0.3292	−0.3266	−0.3239	−0.3213	−0.3186	−0.3160	−0.3134	−0.3107	−0.3081
.38	−0.3055	−0.3029	−0.3002	−0.2976	−0.2950	−0.2924	−0.2898	−0.2871	−0.2845	−0.2819
.39	−0.2793	−0.2767	−0.2741	−0.2715	−0.2689	−0.2663	−0.2637	−0.2611	−0.2585	−0.2559
.40	−0.2533	−0.2508	−0.2482	−0.2456	−0.2430	−0.2404	−0.2378	−0.2353	−0.2327	−0.2301
.41	−0.2275	−0.2250	−0.2224	−0.2198	−0.2173	−0.2147	−0.2121	−0.2096	−0.2070	−0.2045
.42	−0.2019	−0.1993	−0.1968	−0.1942	−0.1917	−0.1891	−0.1866	−0.1840	−0.1814	−0.1789
.43	−0.1764	−0.1738	−0.1713	−0.1687	−0.1662	−0.1637	−0.1611	−0.1586	−0.1560	−0.1535
.44	−0.1510	−0.1484	−0.1459	−0.1434	−0.1408	−0.1383	−0.1358	−0.1332	−0.1307	−0.1282
.45	−0.1257	−0.1231	−0.1206	−0.1181	−0.1156	−0.1130	−0.1105	−0.1080	−0.1055	−0.1030
.46	−0.1004	−0.0979	−0.0954	−0.0929	−0.0904	−0.0878	−0.0853	−0.0828	−0.0803	−0.0778
.47	−0.0753	−0.0728	−0.0702	−0.0677	−0.0652	−0.0627	−0.0602	−0.0577	−0.0552	−0.0527
.48	−0.0502	−0.0476	−0.0451	−0.0426	−0.0401	−0.0376	−0.0351	−0.0326	−0.0301	−0.0276
.49	−0.0251	−0.0226	−0.0201	−0.0175	−0.0150	−0.0125	−0.0100	−0.0075	−0.0050	−0.0025
.50	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226
.51	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476
.52	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728
.53	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979
.54	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231

TABLA 9

(continuación)

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
.55	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484
.56	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738
.57	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993
.58	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.2250
.59	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.2508
.60	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767
.61	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029
.62	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292
.63	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558
.64	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826
.65	0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097
.66	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372
.67	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649
.68	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930
.69	0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
.70	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
.71	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
.72	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
.73	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
.74	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
.75	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
.76	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
.77	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
.78	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
.79	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
.80	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742
.81	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
.82	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502

TABLA 9
(continuación)

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
.83	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
.84	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
.85	1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
.86	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217
.87	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700
.88	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212
.89	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759
.90	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346
.91	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984
.92	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684
.93	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464
.94	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352
.95	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392
.96	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663
.97	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335
.98	2.0537	2.0749	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904
.99	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902

SOURCE. Adapted from Tables 3 and 4, Pearson and Hartley (1970), with permission from the *Biometrika* Trustees.

The entries in this table are quantiles w_p of the standard normal random variable W, selected so $P(W \le w_p) = p$ and $P(W > w_p) = 1 - p$. Note that the value of p to two decimal places determines which row to use; the third decimal place of p determines which column to use to find w_p.

TABLA 10-A 1/

Tabla de probabilidades asociadas con valores tan pequeños como los valores observados de U en la prueba de Mann-Whitney*

$n_2 = 3$

U \ n_1	1	2	3
0	.250	.100	.050
1	.500	.200	.100
2	.750	.400	.200
3		.600	.350
4			.500
5			.650

$n_2 = 4$

U \ n_1	1	2	3	4
0	.200	.067	.028	.014
1	.400	.133	.057	.029
2	.600	.267	.114	.057
3		.400	.200	.100
4		.600	.314	.171
5			.429	.243
6			.571	.343
7				.443
8				.557

$n_2 = 5$

U \ n_1	1	2	3	4	5
0	.167	.047	.018	.008	.004
1	.333	.095	.036	.016	.008
2	.500	.190	.071	.032	.016
3	.667	.286	.125	.056	.028
4		.429	.196	.095	.048
5		.571	.286	.143	.075
6			.393	.206	.111
7			.500	.278	.155
8			.607	.365	.210
9				.452	.274
10				.548	.345
11					.421
12					.500
13					.579

$n_2 = 6$

U \ n_1	1	2	3	4	5	6
0	.143	.036	.012	.005	.002	.001
1	.286	.071	.024	.010	.004	.002
2	.428	.143	.048	.019	.009	.004
3	.571	.214	.083	.033	.015	.008
4		.321	.131	.057	.026	.013
5		.429	.190	.086	.041	.021
6		.571	.274	.129	.063	.032
7			.357	.176	.089	.047
8			.452	.238	.123	.066
9			.548	.305	.165	.090
10				.381	.214	.120
11				.457	.268	.155
12				.545	.331	.197
13					.396	.242
14					.465	.294
15					.535	.350
16						.409
17						.469
18						.531

* Reproducida de Mann, H. B., y Whitney, D. R. 1947. En una prueba de si una o dos variables aleatorias es estocásticamente mayor que la otra. *Ann Math. Statist.*, 18, 52-54, con el amable permiso de los autores y el editor.

1/ FUENTE: Siegel Sidney
Estadística no paramétrica.
Ed. Trillas (1982)

TABLA 10-A

(continuación)

Tabla de probabilidades asociadas con valores tan pequeños como los valores observados de U en la prueba de Mann-Whitney*

$n_2 = 7$

U \ n_1	1	2	3	4	5	6	7
0	.125	.028	.008	.003	.001	.001	.000
1	.250	.056	.017	.006	.003	.001	.001
2	.375	.111	.033	.012	.005	.002	.001
3	.500	.167	.058	.021	.009	.004	.002
4	.625	.250	.092	.036	.015	.007	.003
5		.333	.133	.055	.024	.011	.006
6		.444	.192	.082	.037	.017	.009
7		.556	.258	.115	.053	.026	.013
8			.333	.158	.074	.037	.019
9			.417	.206	.101	.051	.027
10			.500	.264	.134	.069	.036
11			.583	.324	.172	.090	.049
12				.394	.216	.117	.064
13				.464	.265	.147	.082
14				.538	.319	.183	.104
15					.378	.223	.130
16					.438	.267	.159
17					.500	.314	.191
18					.562	.365	.228
19						.418	.267
20						.473	.310
21						.527	.355
22							.402
23							.451
24							.500
25							.549

* Reproducida de Mann, H. B., y Whitney, D. R. 1947. En una prueba de si una o dos variables aleatorias es estocásticamente mayor que la otra. *Ann Math. Statist.*, 18, 52-54, con el amable permiso de los autores y el editor.

TABLA 10-A

(continuación)

Tabla de probabilidades asociadas con valores tan pequeños como los valores observados de U en la prueba de Mann-Whitney*

$n_2 = 8$

U \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	t	Normal
0	.111	.022	.006	.002	.001	.000	.000	.000	3.308	.001
1	.222	.044	.012	.004	.002	.001	.000	.000	3.203	.001
2	.333	.089	.024	.008	.003	.001	.001	.000	3.098	.001
3	.444	.133	.042	.014	.005	.002	.001	.001	2.993	.001
4	.556	.200	.067	.024	.009	.004	.002	.001	2.888	.002
5		.267	.097	.036	.015	.006	.003	.001	2.783	.003
6		.356	.139	.055	.023	.010	.005	.002	2.678	.004
7		.444	.188	.077	.033	.015	.007	.003	2.573	.005
8		.556	.248	.107	.047	.021	.010	.005	2.468	.007
9			.315	.141	.064	.030	.014	.007	2.363	.009
10			.387	.184	.085	.041	.020	.010	2.258	.012
11			.461	.230	.111	.054	.027	.014	2.153	.016
12			.539	.285	.142	.071	.036	.019	2.048	.020
13				.341	.177	.091	.047	.025	1.943	.026
14				.404	.217	.114	.060	.032	1.838	.033
15				.467	.262	.141	.076	.041	1.733	.041
16				.533	.311	.172	.095	.052	1.628	.052
17					.362	.207	.116	.065	1.523	.064
18					.416	.245	.140	.080	1.418	.078
19					.472	.286	.168	.097	1.313	.094
20					.528	.331	.198	.117	1.208	.113
21						.377	.232	.139	1.102	.135
22						.426	.268	.164	.998	.159
23						.475	.306	.191	.893	.185
24						.525	.347	.221	.788	.215
25							.389	.253	.683	.247
26							.433	.287	.578	.282
27							.478	.323	.473	.318
28							.522	.360	.368	.356
29								.399	.263	.396
30								.439	.158	.437
31								.480	.052	.481
32								.520		

* Reproducida de Mann, H. B., y Whitney, D. R. 1947. En una prueba de si una o dos variables aleatorias es estocásticamente mayor que la otra. *Ann Math. Statist.*, 18, 52-54, con el amable permiso de los autores y el editor.

TABLA 10-B 1/

Tabla de los valores críticos de *U* en la prueba de Mann-Whitney*

Valores críticos de *U* para una prueba de una cola en $\alpha = 0.001$ o para una prueba de dos colas en $\alpha = 0.002$

n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2												
3									0	0	0	0
4		0	0	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5	1	1	2	2	8	3	4	5	5	6	7	7
6	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	3	5	6	7	8	9	10	11	13	14	15	16
8	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21
9	7	8	10	12	14	15	17	19	21	23	25	26
10	8	10	12	14	17	19	21	23	25	27	29	32
11	10	12	15	17	20	22	24	27	29	32	34	37
12	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	42
13	14	17	20	23	26	29	32	35	38	42	45	48
14	15	19	22	25	29	32	36	39	43	46	50	54
15	17	21	24	28	32	36	40	43	47	51	55	59
16	19	23	27	31	35	39	43	48	52	56	60	65
17	21	25	29	34	38	43	47	52	57	61	66	70
18	23	27	32	37	42	46	51	56	61	66	71	76
19	25	29	34	40	45	50	55	60	66	71	77	82
20	26	32	37	42	48	54	59	65	70	76	82	88

* Tomada abreviadamente de las tablas 1, 3, 5 y 7 de Auble, D. 1953. Tablas extendidas para la estadística de Mann-Whitney. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, **1**, núm. 2, con el amable permiso del autor y el editor.

1/ FUENTE: Siegel Disney
Estadística No Paramétrica
Ed. Trillas (1982)

TABLA 10=B

(continuación)

B

Tabla de los valores críticos de U en la prueba de Mann-Whitney*

Valores críticos de U para una prueba de una cola en $\alpha = 0.01$ o para una prueba de dos colas en $\alpha = 0.02$

n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2					0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5
4	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22
7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	28
8	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32	34
9	14	16	18	21	23	26	28	31	33	36	38	40
10	16	19	22	24	27	30	33	36	38	41	44	47
11	18	22	25	28	31	34	37	41	44	47	50	53
12	21	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60
13	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
14	26	30	34	38	43	47	51	56	60	65	69	73
15	28	33	37	42	47	51	56	61	66	70	75	80
16	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	82	87
17	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93
18	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88	94	100
19	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	107
20	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

* Tomada abreviadamente de las tablas 1, 3, 5 y 7 de Auble, D. 1953. Tablas extendidas para la estadística de Mann-Whitney. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, núm. 2, con el amable permiso del autor y el editor.

TABLA 10-B
(continuación)

Tabla de los valores críticos de U en la prueba de Mann-Whitney*

Valores críticos de U para una prueba de una cola en $\alpha = 0.025$ o para una prueba de dos colas en $\alpha = 0.05$

n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

* Tomada abreviadamente de las tablas 1, 3, 5 y 7 de Auble, D. 1953. Tablas extendidas para la estadística de Mann-Whitney. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, núm. 2, con el amable permiso del autor y el editor.

TABLA 10-B

(continuación)

Tabla de los valores críticos de U en la prueba de Mann-Whitney*

Valores críticos de U para una prueba de una cola en $\alpha = 0.05$ o para una prueba de dos colas en $\alpha = 0.10$

n_2 \ n_1	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1											0	0
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

* Tomada abreviadamente de las tablas 1, 3, 5 y 7 de Auble, D. 1953. Tablas extendidas para la estadística de Mann-Whitney. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, núm. 2, con el amable permiso del autor y el editor.

TABLA 11 1/

Distribución t

Degrees of Freedom p =	.6	.75	.9	.95	.975	.99	.995	.9975	.999	.9995
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.578	3.197	3.610	
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

SOURCE. Reprinted from Pearson and Hartley (1970), with permission from the *Biometrika* Trustees.

The entries in this table are quantiles w_p of the t distribution for various degrees of freedom. Quantiles w_p for $p < .5$ may be computed from the equation

$$w_p = -w_{1-p}$$

Note that $w_{.50} = 0$ for all degrees of freedom.

1/ FUENTE: Conover J. W.
Practical Nonparametric Statistics
Ed. John Willey & Sons. Inc., (1980).

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA.

COCHRAN G., William y COS M., Gertrudi.
Diseños Experimentales.
Ed. Trillas, (1980).

CONOVER, J. W.
Practical Nonparametric Statistics.
Ed. John Willey & Sons. Inc., (1980).

CONOVER, W. J. and IMAN, Ronald L. 1981.
Rank Tranformations as a Bridge Between Parametric and Nonparametric Statistics.
The American Statistician. 34 124-129.

CHOU, Lun-Ya.
Análisis Estadístico.
Ed. Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V. (1977).

DUNN, Olive Jean. 1964.
Multiple Comparisons Using Rank Sums.
Technometrics 6 241-252.

FEDERER T., Walter.
Experimental Design.
Ed. Mac Millan Company.

G. MILLER, Rupert Jr.
Simultaneous Statistical Inference.
Ed. Mc. Graw Hill.

GABRIEL, K.R. 1966.
Simultaneous Test Procedures for Multiple Comparisons on Categorical Data.
American Statistical Association Journal. 1081-1096.

GRAYBILL A., Franklin.
An Introduction to linear statistics Models.
Ed.

HICKS R., Charles.
Fundamental Concepts in the Design of Experiments.
Ed. Hoct, Rinehart and Winston, Inc. (1973).

McDONALD, B.J. y THOMPSON, W.A., Jr. 1967.
Rank Sum Multiple Comparisons in one and two wax classifications.
Biometrika 54 487-496.

MENDEZ RAMIREZ, Ignacio.
Comparación de Medias de Población.
I.I.M.A.S., U.N.A.M., (1976).

MENDEZ RAMIREZ, Ignacio.
Diseños que usan bloques.
I.I.M.A.S., U.N.A.M., (1978).

MENDEZ RAMIREZ, Ignacio.
El error de restricción en el diseño de bloques.
I.I.M.A.S., U.N.A.M. (1981)

MENDEZ RAMIREZ, Ignacio; PUZA SILVA, Juan G.; ROMERO, Patricia.
Comparación mediante simulación de pruebas de F simultáneas en análisis de varianza.
I.I.M.A.S., U.N.A.M., (1981).

MILLER, Rupert G. J. (1966).
Simultaneus Statistical Inference.
Mc Graw-Hill Book Company.

O'NEILL R. and WETHERILL G.B., 1971.
The present State of Multiple Comparison Methods.
2 218-250.

OSTLE, Bernard.
Estadística Aplicada.
Ed. Limusa (1977).

REYNOLDS, M.T. 1977.
The Analysis of Cross-Classifications.
Ed. The Free Press. Collier Macmilan Publishers.

RUEDA, Raúl.
Tesis Profesional: Estadística no paramétrica: un enfoque intuitivo.
U.N.A.M.

SHERMAN, Ellen 1965.
A Note on Multiple Comparisons Using Rank Sums.
Technometrics. 7 255-256.

SHUSTER, J.J. and BOYETT, James M.
Nonparametric Multiple Comparison Procedures.
379-382.

SIEGEL, SIDNEY.
Estadística No Paramétrica.
Ed. Trillas (1982).

STEEL, Robert G.D. 1960.
A Rank Sum Test for Comparing All Pairs of Treatments.
Technometrics 2 197-207.

STOLINE, Michael R. 1981.
The Status of Multiple Comparisons: Simultaneous Estimation of All Pairwise Comparisons in One-Way ANOVA Designs.
The American Statistician.
35 134-141.

TOBACH, Ethel, SMITH Mark, Rose George and RICHTER, Donald. 1967.
A Table for Making Rank Sum Multiple Paired Comparisons.
9 561-567.

VOSHAAR, Oude J.H. 1980.
(K-1) Mean Significance Levels of Nonparametric Multiple Comparisons Procedures.
The Annals of Statistics. 8 75-86.