Ej. 38

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"PROYECTO DE TEXTO PARA UN CURSO DE ALGEBRA Y ESTADISTICA EN EL COLEGIO NACIONAL DE EDUCACION PROFESIONAL TECNICA"

T E S I S

Que para obtener el Título de:

LICENCIADO EN ACTUARIA

P r e s e n t a:

LILIA ROJAS DEL CASTILLO

México, D. F. 1983

I N D I C E

Página

ANTECEDENTES

En los últimos años han surgido varios tipos de escuelas técnicas, entre ellas el Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica, creado por decreto presidencial en 1979, con el propósito de cubrir la demanda de técnicos a nivel medio en el país.

En la actualidad, el Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP), cuenta con 159 planteles en toda la República y más de 36 carreras.

Uno de los própositos fundamentales del CONALEP, es la formación de técnicos a nivel medio para ocupar puestos intermedios en el sector productivo y de servicios.

En 1981 entró en función el plantel Cuautitlán I, donde yo colaboro como profesora desde su inicio. Este plantel funciona con carácter de Plantel Piloto y entre sus objetivos esta la revisión permanente de los planes de estudio de las carreras que ahí se imparten y la elaboración de material didáctico para las mismas, con la participación activa del personal docente.

Por lo tanto, se efectuó la revisión de los planes de estudio de las carreras allí impartidas, en particular las del área Administrativa, tales como: Asistente Ejecutivo, Técnico en Informática, Técnico Contable-Administrativo y Técnico en Hotelería y Gastronomía.

Con esta revisión, sufrieron cambios los planes de estudio y una de las reformas básicas efectuadas, fué en el área de Matemáticas, con la introducción de temas como Estadística, Probabilidad, Investigación de Operaciones y Matemáticas Financieras en la carrera de Asistente Contable-Administrativo, en particular.

Este reforzamiento del área de Matemáticas se debió, a su vez, a la inclusión en el plan de estudios de materias como Producción y Mercadotecnia, para las cuales los alumnos necesitarían una preparación más amplia en matemáticas, de la que contemplaba el plan de estudios anterior, el cuál resultaba débil e in-- congruente con los objetivos fundamentales, como son la formación del técnico medio capacitado para ejercer funciones de coordinación y decisión a nivel intermedio.

A partir de estas reformas, surgió la necesidad de elaborar textos o material didáctico adecuado al nivel propio de alumnos egresados de secundaria y apegados a los programas recién planteados en CONALEP.

A pesar de mi corta experiencia en la docencia, la idea de elaborar un texto apropiado al programa de estudios me interesó y el resultado es el presente proyecto de texto para el segundo semestre de la carrera de Técnico Contable-Administrativo.

ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

La tarea de fijar objetivos para la educación matemática de estudiantes nó es fácil. Debe entenderse que no hay una respuesta concisa y única de como hacerlo. Los intereses de todos los encargados de plantear objetivos para programas o planes de estudio en matemáticas, son muy variados para poder establecer alguna unanimidad.

Sin embargo, debido a la influencia tan importante que tiene, en la selección de objetivos en matemáticas, la investigación de qué matemáticas se usan actualmente en la ciencia, en la industria, en los negocios, en los oficios, se ha tomado muy en cuenta para la elaboración del presente programa de matemáticas.

Debido a estas consideraciones y a que los objetivos para la educación matemática también cambian con el tiempo, se han incluído en el plan de estudios actual, temas como Estadística, Probabilidad, Investigación de Operaciones y Matemáticas Financieras, en cada uno de los semestres de matemáticas, como una respuesta a los cambios habidos en la sociedad actual.

Es obvio que el profesor de matemáticas ocupa un lugar importante en todo el proceso de fijar objetivos para la enseñanza de las matemáticas, pues su posición dentro del salón de clase le permite siempre, dentro de sus límites, modificar y cambiar el énfasis de los objetivos que le hayan sido entregados.

Así mismo, es necesario que el profesor, además de tener un amplio conocimiento de la materia a impartir, esté preparado para enseñarla eficazmente. Pues no hay duda de que el profesor tiene un papel muy importante en el aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes.

La eficacia de un profesor de matemáticas, es muy difícil de medirse, puesto que solo puede hacerse en términos del aprendizaje de los alumnos y hay muchos factores que considerar; sin embargo, esta puede incrementarse mediante la preparación del profesor.

A la enseñanza de las matemáticas debe dársele un mayor énfasis a la comprensión y a la conceptualización, haciendo a un lado la mecanización y memorización. Todo este resultará de un aprendizaje sig--nificativo, esto es, que tenga sentido.

El ser humano no es capaz de archivar o memorizar grandes cantidades de información, a diferencia de las computadoras, si esta información se le presenta como piezas sueltas, sin ninguna relación substancial que la relacione a ideas preexistentes en la estructura cognocitiva de la persona.

Todo material nuevo que el profesor presente a los alumnos constituye, en potencia, material que el alumno podrá incorporar a su estructura cognocitiva. Sin embargo, dependerá del profesor el que los contenidos de este material adquieran sentido para el alumno al relacionarlo con las ideas conocidas y no como piezas sueltas, que arbitrariamente se intente relacionar con la estructura cognocitiva del educando.

Un ejemplo de esto sería el intentar armar un rompecabezas de 500 piezas, que no hubiesemos visto terminado. Tal vez podremos armar parte de él o, si le dedicamos suficiente esfuerzo, todo, pero sin lugar a duda es mucho más sencillo armarlo si conocemos de antemano como debe lucir el rompecabezas terminado, entonces cada pieza adquiere sentido y podemos rela--cionarla con el dibujo final que conocemos.

Del mismo modo en que el maestro juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas, los libros de texto tienen también un gran efecto sobre este aprendizaje.

Actualmente, hay una gran necesidad de libros de texto adecuados en cuanto a contenido, organización, facilidad de lectura, características físicas, etc., pero sobre todo, en cuanto a contenido. La mayoría de los textos convencionales en el mercado, enfatizan más la mecanización que la comprensión de conceptos.

El proyecto de texto que presento, intenta un enfoque distinto, buscando ser un apoyo para que el profesor logre un aprendizaje más eficaz y una mejor comprensión de los temas por los estudiantes.

DESCRIPCION DEL TRABAJO

El proyecto de texto que presento, comprende el 2do semestre de matemáticas de la carrera de Técnico Contable-Administrativo. El primer semestre y parte del segundo están dirigidos a reforzar los conocimientos básicos obtenidos en la enseñanza media y además, en el segundo semestre se ha incluído una introducción a la Estadística Descriptiva

Las dos primeras Unidades del texto, corresponden a temas de Algebra ya conocidos de alguna manera, por los estudiantes, tal como Funciones y Ecuaciones.

La primera Unidad, desarrolla el concepto de Función empezando con un comentario sobre los Modelos en Matemáticas, prosiguiendo al concepto de variable y su utilidad, después el concepto de Relación y por último, Funciones, desarrollando el conocimiento matemático poco a poco, en forma de espiral. Intentando abarcar un solo conocimiento a la vez.

En la Segunda Unidad, se incluyen dos temas aparentemente nuevos. Uno, la resolución de sistemas de ecuaciones por medio de Determinantes y otro, que aunque ya han tenido que resolver problemas por medio de ecuaciones, aquí se le ha dado un enfoque distinto.

El aprender a resolver problemas es una de las principales razones para el estudio de las matemáticas y todo texto de matemáticas debería incluír algunas sugerencias o estrategias de como resolver problemas. En cursos previos, los estudiantes ya han resuelto problemas por medio de ecuaciones, sin embargo, aquí se ha tratado de que el alumno sea más conciente acerca de las formas, estrategias, patrones, etc., que él mismo utiliza cuando está resolviendo un problema, para mejorarlas y aplicarlas más amplia y sistematicamente.

Las siguientes Unidades, III, IV y V, están dedicadas a introducir al alumno a un curso básico de Estadística Descriptiva. Esta inclusión en el programa de estudios, de un curso de Estadística, se pensó al plantearse el problema de trazar, actualizar, mejorar y cambiar planes de estudio, con miras a mejorar cada vez más la adaptación del estudiante a su medio ambiente y campo de trabajo, pues en esta sociedad donde nos vemos envueltos a cada momento por información numérica y donde la informática gana radio de acción día con día, esta noción se vuelve indispensable.

La parte de Estadística consiste en un curso básico, simple, sin formalidades, considerando siempre a los estudiantes a los que va dirigido.

Empieza con algunos conceptos y términos utilizados en Estadística, pasando después a algunas representaciones tabulares y gráficas y por último, algunas medidas descriptivas de Centralización y Dispersión.

En general, el esquema que sigue este proyecto de texto, puede decirse que está dividido en 5 Unidades. Cada Unidad, a su vez, esta dividida en secciones numeradas llamadas Lecciones, con el título en mayúsculas y subrayado. Cada Unidad comprende aproximadamente 8 Lecciones.

La Lección, en general, es corta, algunas veces muy elemental. En forma intuitiva y a través de ejemplos de aplicación, va sugeriendo los conocimientos. Lo que pudiera ser importante o para resaltar alguna afirmación, se ha subrayado para llamar la atención.

Se incluyen algunas preguntas intercaladas en las Lecciones a través de la prosa, para intentar que el estudiante relacione y razone lo que acaba de leer.

Algunas definiciones están encerradas en un rectángulo con el propósito de resaltar los conceptos.

Al final de cada Lección se incluyen las siguientes secciones de ejercicios:

1. Preguntas que abarcan la lectura. Esta sección tiene preguntas de todo tipo: respuesta escrita, complementación, opción múltiple, definiciones, etc. Son ejercicios obtenidos a partir de la Lección, sencillos y sin muchas variantes.

2. Preguntas para verificar la comprensión de la lectura. Esta sección tiene preguntas más elaboradas y varían de la Lección, a modo que el alumno tenga que ajustar lo que ha visto a estas preguntas y razonarlas más. Algunas muy sencillas y otras más complicadas, con ejercicios no resueltos en la Lección.

En algunas Lecciones, vienen secciones con preguntas para Discutir y Opinar y en algunas, Actividades a realizar, sobre todo en la parte correspondiente a Estadística.

Se incluyen pequeños repasos y resúmenes integradores en la Lección, tales como: habíamos visto, ahora veremos, etc. Además, un Resumen general al final de cada Unidad. Esto a manera que el estudiante repase lo que ha visto y logre comprenderlo como un todo.

ALGUNAS RECOMENDACIONES REFERENTES AL USO DEL TEXTO

El texto ha sido dividido en 5 Unidades, pues es la estructura que requiere el CONALEP, para cualquier materia a impartirse. Estas 5 Unidades, deberán cu-brirse en 60 horas de clase aproximadamente, repartidas en un lapso de 5 meses. Esto es, aproximadamente una Unidad por mes.

Se pretende que el texto constituya un apoyo para la planificación de la clase por parte del profesor y una guía para el alumno. El texto esta estructurado con la finalidad de proporcionar los datos esenciales, los conceptos básicos, los problemas centrales y la ejemplificación de los temas que los estudiantes tendrán que aprender y aplicar durante el curso.

Al inicio del curso, el profesor puede reseñar el contenido del texto y posiblemente dirigir preguntas a los alumnos sobre el porqué estudiar Matemáticas, indicando a su vez, los objetivos que se pretenden lograr con el curso.

Cada Unidad esta dividida en Lecciones y cada Lección tiene dos secciones de ejercicios al final, y algunas de ellas incluyen otra sección tal como: Actividad o Ejercicios de aplicación de la lectura. Asi mismo, en las secciones de ejercicios se incluyen a menudo preguntas de repaso de Lecciones anteriores.

El texto puede considerarse como el material básico de instrucción. El profesor puede solicitar que el estudiante lea la Lección después de la clase en su casa, antes de contestar la Tarea, ya sea esta una de las secciones de ejercicios o ambas, sugiriendo que lea con detenimiento y subraye las ideas que le parezcan significativas.

Referente a las secciones de ejercicios al final de cada Lección, se sugiere que la primera sección, llamada: Preguntas que abarcan la lectura, se utilice como un pequeño exámen oral, dirigido al grupo, al final de la clase a manera de repaso de lo expuesto, discutido o practicado en clase, solicitando a diversos alumnos que respondan.

La segunda sección de ejercicios, llamada: Preguntas para verificar la comprensión de la lectura, puede dejarse como tarea para resolver en casa. Además, algunas de estas secciones, como por ejemplo al final de la Lección 5, Unidad I, pudieran servir de tarea-exámen parcial de la Unidad. Así mismo, la sección de Ejercicios de aplicación de la lectura de la Lección 3, Unidad II, o las Actividades en las Lecciones 3, de las Unidades III y IV.

Estas secciones de ejercicios, pueden considerarse como autoevaluaciones para el alumno, que el profesor deberá retroalimentar de una manera efectiva.

Para esto, como algunas series de ejercicios y preguntas pueden proporcionar valiosa información tanto para el alumno como para el profesor, al corregir estas tareas, pues podrá detectar problemas existentes en el aprendizaje de los temas, se sugieren dos formas mediante las cuales se podrá lograr un mejor aprovechamiento de los ejercicios.

El profesor puede pasar al pizarrón a 3 o 4 alumnos, dependiendo del espacio, a contestar o resolver las 3 o 4 primeras preguntas o ejercicios, sin utilizar sus tareas resueltas. Mientras tanto, los demás estudiantes deberán verificar sus respuestas contra el pizarrón y cuando aquellos hallan terminado, deberán contestar si las respuestas están correctas o incorrectas, justificando el porqué o sugerir algunas respuestas o tratamientos alternos. Así mismo, el profesor puede verificar rápidamente las tareas checando aquellas tareas completas o incompletas, así como identificar los errores cometidos.

Otra manera de lograr esto, puede ser el colocar las respuestas en el pizarrón y mientras los estudiantes verifican sus respuestas, el profesor puede recorrer el salón observando las tareas como anteriormente, seleccionando después a algunos estudiantes para que expliquen los errores típicos que ha detectado en las tareas.

Se sugiere empezar la Lección 1 de la Unidad 3, con una actividad introductoria, tal como el solicitar las edades de todos los estudiantes en el salón, para así iniciar una sesión de preguntas a los estudiantes dirigidas hacia los usos, aplicaciones, técnicas de la Estadística, que después podrán comparar con la que se incluye en la Lección y que el profesor expondrá. Este conjunto de datos, constituído por las diversas edades, podrá ser manejado a lo largo de las siguientes Unidades y el alumno podrá percatarse de su avance al observar lo que podrá hacer con un grupo de observaciones que en un principio carecían de sentido.

Por supuesto que todo lo anterior es sólo una sugerencia sobre el empleo del texto y no la única, pues cada profesor podrá utilizarlo de la forma que resulte más beneficioso para el aprendizaje de los estudiantes que es, a fin de cuentas, el objetivo más importante del texto.

PROGRAMA DE MATEMATICAS II

AREA CONTABLE ADMINISTRATIVO

OBJETIVO GENERAL: El alumno reafirmará conceptos adquiridos previamente en el área del Algebra y manejará los principios básicos de la Estadística Decriptiva.

UNIDAD I - FUNCIONES
- 1.1 Inducirá el concepto de Variable
- 1.2 Distinguirá el concepto de Función
- 1.3 Distinguirá las relaciones que no sean funciones
- 1.4 Determinará el Dominio, Contradominio y regla de correspondencia en cada función
- 1.5 Graficará funciones sencillas en el plano cartesiano
- 1.6 Inferirá el concepto de función lineal y cuadrática
- 1.7 Graficará funciones de segundo grado

UNIDAD II - ECUACIONES LINEALES Y CUADRATICAS
- 2.1 Establecerá el conjunto solución de ecuaciones lineales
- 2.2 Resolverá problemas que relacionen a ecuaciones lineales de una variable
- 2.3 Establecerá la solución de sistemas de ecuaciones
- 2.4 Podrá resolver problemas cuya determinación involucre el planteamiento de ecuaciones lineales con dos variables
- 2.5 Resolverá ecuaciones de segundo grado por medio de la fórmula general

UNIDAD III - INTRODUCCION AL ANALISIS ESTADISTICO
- 3.1 Determinará el concepto de Estadística
- 3.2 Establecerá los elementos del Análisis Estadístico
- 3.3 Conocerá los diferentes tipos de variables
- 3.4 Establecerá el concepto de Estadística Inferencial y Muestreo

UNIDAD IV - REPRESENTACIONES TABULARES Y GRAFICAS
- 4.1 Manejará el concepto de tables de frecuencias
- 4.2 Establecerá la utilidad de los intervalos de clase para variables numéricas
- 4.3 Conocerá las representaciones gráficas más usuales

UNIDAD V - MEDIDAS DESCRIPTIVAS
- 5.1 Analizará y manejara diferentes medidas de tendencia central
- 5.2 Analizará y manejara diferentes medidas de dispersión

COLEGIO NACIONAL DE EDUCACION PROFESIONAL TECNICA.

VIGENCIA : 1981
CLAVE : COAD4181

PLAN DE ESTUDIOS DEL PROFESIONAL TECNICO CONTABLE ADMINISTRATIVO/P.T.

PRIMER SEMESTRE	T	P	T
RELACIONES HUMANAS	3	0	3
INGLES I	1	2	3
MATEMATICAS I	3	0	3
ADMINISTRACION I	3	0	3
COMUNICACIONES	3	0	3
ACTIVIDADES TECNICAS APLICADAS I	2	5	7
MECANOGRAFIA I	1	4	5
TAQUIGRAFIA I	1	3	4
CONTABILIDAD I	1	3	4
	18	17	35

SEGUNDO SEMESTRE	T	P	T
LECTURA Y REDACCION	3	0	3
INGLES II	1	2	3
MATEMATICAS II	3	0	3
ADMINISTRACION II	3	0	3
DERECHO I	3	0	3
ACTIVIDADES TECNICAS APLICADAS II	1	5	6
MECANOGRAFIA II	1	3	4
TAQUIGRAFIA II	1	3	4
CONTABILIDAD II	1	4	5
	17	17	34

TERCER SEMESTRE	T	P	T
EL HOMBRE Y LA TECNICA	3	0	3
INGLES III	2	2	4
MATEMATICAS III	3	0	3
DERECHO II	3	0	3
ECONOMIA I	3	0	3
ACTIVIDADES TECNICAS APLICADAS III	1	5	6
ARCHIVONOMIA Y DOCUMENTACION	1	3	4
CONTABILIDAD III	1	5	6
SISTEMAS DE PRODUCCION	1	2	3
	18	17	35

CUARTO SEMESTRE	T	P	T
PSICOLOGIA	3	0	3
INGLES IV	2	2	4
MATEMATICAS IV	3	0	3
DERECHO III	3	0	3
ECONOMIA II	3	0	3
ACTIVIDADES TECNICAS APLICADAS IV	1	3	4
CONTABILIDAD IV	1	4	5
MERCADOTECNIA	1	2	3
COSTOS I	1	4	5
	18	15	33

QUINTO SEMESTRE	T	P	T
SOCIOLOGIA	3	0	3
CIVILIZACION Y CULTURA CONTEMPORANEA	3	0	3
MATEMATICAS V	3	0	3
DERECHO IV	3	0	3
INGLES V	2	3	5
COSTOS II	1	4	5
AUDITORIA I	1	4	5
FINANZAS I	1	4	5
METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION	2	1	3
	19	16	35

SEXTO SEMESTRE	T	P	T
LEGISLACION LABORAL	3	0	3
PROBLEMAS SOCIO ECONOMICOS DE MEXICO	3	0	3
ADMINISTRACION DE PERSONAL	3	0	3
INGLES VI	2	3	5
AUDITORIA II	1	4	5
FINANZAS II	1	2	3
IMPUESTOS	1	4	5
	14	13	27

U N I D A D I

RELACIONES Y FUNCIONES

Lección 1

LAS MATEMATICAS Y EL ESTUDIO DE LOS MODELOS

La Ciencia, y en particular las Matemáticas, nos abre un campo enorme de cosas que podemos entender y disfrutar, y nos permite entender mejor las cosas que están a nuestro alrededor, crear cosas nuevas y modificar las ya existentes.

Los científicos tratan de entender mejor ciertos fenómenos en el mundo real y para ello recurren a representar los fenómenos en Modelos. Así mismo, tratan de producirlos e influír en ellos por medio de Modelos. Estos modelos los aplica después la gente que no son científicos.

Por ejemplo, un Biólogo puede ensayar con distintos fertilizantes buscando que se cumpla lo siguiente:

"El uso del fertilizante X produce un mejor desarrollo del maíz"

Cuando el Biólogo descubra tal fertilizante, los campesinos lo utilizarán al sembrar.

Otro ejemplo sería, por ejemplo un Astrónomo que construye modelos para comprender mejor las relaciones que rigen el espacio. Después, todos sus descubrimientos serán utilizados en la tecnología espacial.

Tal vez te preguntes: ¿Qué puede tener que ver las Matemáticas con la Biología y el maíz o la Astronomía y los viajes a la Luna? En la época actual, todas las ramas del conocimiento humano necesitan utilizar las Matemáticas, pues todas las ramas del conocimiento se encuentran estrechamente relacionadas entre sí.

Qué son las Matemáticas? Las Matemáticas pueden ser interpretadas como:

Matemáticas es el estudio de ciertos **Modelos**

A continuación tenemos algunas de las ramas de las Matemáticas y el tipo de modelos estudiados. Ambos muy simplificados. Además, algún ejemplo de una característica del tipo de modelo estudiado.

RAMAS	Estudia Modelos de o en:	Por ejemplo:
Algebra	Estructuras Numéricas	En el modelo de los números Naturales, tenemos que: "la suma de dos naturales es otro número natural"

RAMAS	Estudia Modelos de o en:	Por ejemplo:
Geometría	Ideas Espaciales	Estudia los triángulos para afirmar que: "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°"
Lógica	Razonamiento	Proposiciones Lógicas de Falso o Verdadero
Probabilidad	Incertidumbre	Experimentos aleatorios como el lanzamiento de una moneda.
Estadística	Poblaciones	Representaciones gráficas.

Como las Matemáticas estudian modelos, son usadas a diario por la mayoría de los científicos. En particular, en este curso nos interesarán los modelos usados en Estadística.

Es posible encontrar una infinidad de características o propiedades de modelos aritméticos, geométricos, etc. que utilizamos en la vida diaria. A continuación algunos ejemplos:

EJEMPLO 1.- Tenemos que $2 + 3 = 3 + 2$ y $1/11 + 2/3 = 2/3 + 1/11$ En palabras podemos describir esta propiedad como "se pueden sumar dos números reales en cualquier orden y el resultado es el mismo".

Esta es una característica tan común e importante de algunos modelos que recibe el nombre de propiedad conmutativa de la suma.

EJEMPLO 2.- En la vida diaria, tenemos que si manejas un carro a 100 kilómetros por hora, entonces en 1 hora recorrerás 100km, en 2 horas 200km, en 3 horas 300 km. etc.

Podemos describir esto verbalmente como: a 100km por hora, la distancia recorrida en kilómetros, es 100 veces el tiempo transcurrido en horas.

Esta característica se ajusta a la fórmula de distancia tan conocida: $d = vt$, con la consideración, en este caso, de que la velocidad es de 100km por hora, tenemos: $d = 100t$

EJEMPLO 3.- Tenemos lo siguiente:

$(1)x(.5) = .5$ $(1)x(1/3) = 1/3$ $(1)x(350) = 350$ $(1)x(-10) = -10$

Esta propiedad del modelo de los números reales también es muy conocida. Podemos describirla como: El número 1 multiplicado por cualquier número real, da como resultado el número real dado.

O sea, "si a es un número real, entonces $1 \times a = a$"

En estos ejemplos de propiedades o características de modelos si observas, primero tenemos una cierta situación o fenómeno como que 2+3=3+2, o que a 100km por hora recorres en 1 hora 100 kilómetros, que vemos que cumple un cierto patrón de comportamiento. Una vez que encontramos este patrón, lo estudiamos y lo describimos de alguna manera.

Se puede decir que algo muy similar es lo que hacen algunos matemáticos con los modelos:

1.- Encontrar el modelo

2.- Estudiarlo, Describirlo

3.- Algunas veces, aplicarlo

En la siguiente Lección, veremos un concepto muy importante para la construcción de Modelos, el concepto de: Variable.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Para qué recurren los científicos a representar en modelos ciertos fenómenos del mundo real?

2.- Porqué en la época actual es muy necesario el uso de las Matemáticas en todas las ramas del conocimiento?

3.- Menciona una manera en que pueden ser concebidas las Matemáticas.

4.- Menciona tres de las ramas de las Matemáticas y lo que estudian.

5.- Da un ejemplo de una propiedad o característica que siga un papatrón de comportamiento en:
  a) Algebra
  b) En la vida diaria

6.- Cuales son las tres cosas que podemos decir que hacen algunos matemáticos dedicados al estudio de modelos?

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Encuentra el patrón que se sigue en la siguiente tabla de porcentajes de recargos por retraso en el pago de impuestos:

Meses de atraso	Porcentaje de recargos
1	.10
2	.15
3	.20
4	.25
5	.30
6	.35
7	.40
8	.45
9	.50

2.- Hay una fórmula que relaciona el área, el largo y el ancho de un rectángulo. Cuál es? Descríbela con palabras.

3.- Describe con palabras el algoritmo usado para multiplicar fracciones.

Preguntas para discusión y opinión:

1.- Porqué podría un músico estar interesado en el trabajo de un físico?

2.-Cuáles matemáticas utiliza un contador para cuadrar un balance?

Lección 2

USO DE VARIABLES PARA CONSTRUIR UN MODELO

Tomemos las siguientes proposiciones:

$17 + 0 = 17$ $\qquad 1.5 + 0 = 1.5$ $\qquad 2/4 + 0 = 2/4$

El patrón general puede describirse en palabras como: "Si le sumamos cero a un número real, el resultado de la suma es el mismo número". Esta descripción tiene dos defectos: Es muy larga y nó representa la situación con claridad. Una descripción más corta y mejor representada usa una sola letra en lugar de los números que varían en cada ejemplo, sería como sigue:

Si r es un número real, entonces $r + 0 = r$

A la letra r se le llama variable. En este caso, r puede ser reemplazada por cualquier número real. En el ejemplo, r fué reemplazada primero con 17, luego por 1.5 y por 2/4.

Definición: Una variable es un símbolo que se utiliza para representar cualquiera de los elementos de un conjunto dado.

En el ejemplo anterior, r representa cualquier número real, por lo que el conjunto de reemplazos para r es el conjunto de números reales. Si reemplazamos r por 20, escribimos: $r = 20$ y el ejemplo se transforma en $20 + 0 = 20$.

Usando variables podemos describir infinidad de casos al mismo tiempo, además de que la descripción escrita se vuelve más breve, más sintética. Por esto, las variables son los símbolos más comunes usados en la construcción de modelos.

EJEMPLO 1.- Describe lo siguiente utilizando variables.

$\frac{50 \cdot 3}{3} = 50 \qquad \frac{1/2 \cdot 3}{3} = 1/2 \qquad \frac{9.2 \cdot 3}{3} = 9.2$

Descripción con palabras: Si un número real cualquiera se multiplica por 3 y el producto se divide entre 3, entonces el resultado es el número original.

Descripción utilizando variables: Sea v un número real cualquiera, entonces: $\frac{v \cdot 3}{3} = v$

Como puedes ver, la descripción con variables es más corta.

EJEMPLO 2.- Describe la propiedad siguiente utilizando variables una vez que hayas encontrado el patrón general.

$(2)(5)(3) = (3)(5)(2) \qquad (0)(9)(7) = (7)(9)(0)$

$(2/4)(3/2)(1)=(1)(3/2)(2/4)$ $(2.5)(3.2)(1.5)=(1.5)(3.2)(2.5)$

Descripción con palabras: Si tenemos el producto de tres números reales cualesquiera, podemos invertir el orden de los números y obtener el mismo resultado.

Descripción con variables: Sean x, y, z, números reales. Entonces, $x \cdot y \cdot z = z \cdot y \cdot x$

De aquí en adelante, en este curso, utilizaremos en lugar del símbolo x, para indicar multiplicación, un punto o paréntesis con este mismo fin, puesto que el símbolo x es frecuentemente utilizado para representar variables y pudiera causar confusión.

EJEMPLO 3.- Examina lo siguiente y descríbelo utilizando variables. Verifica las sumas y multiplicaciones.

$6 + 1.2 = (6)(1.2)$ $2 + 2 = (2)(2)$ $4/3 + 4 = (4/3)(4)$

Descripción con variables: Sean a y b números positivos en el modelo de los números reales, entonces:

$$a + b = (a)(b)$$

Esta descripción es correcta para los 3 casos dados en el ejemplo, pero esta característica nó es cierta para todas las parejas de números reales, pues por ejemplo:

Si $a=2$ y $b=3$, tenemos que $2 + 3 = (2)(3)$ lo cuál es falso, pues 5 es distinto de 6, por lo que $a + b$ nó es igual a $(a)(b)$.

Nó siempre es fácil decir si una característica, o propiedad o fórmula son verdaderos. Sin embargo, basta con encontrar un caso para el que nó se cumpla, para saber que la propiedad, característica o fórmula en cuestión nó es cierta para todos los casos.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Define variable.

2.- Da 3 ejemplos substituyendo número diferentes en lugar de las variables para cada una de las propiedades descritas a continuación.

a) Si t es un número positivo, entonces $t/t = 1$
b) Sean a y b números reales cualesquiera, entonces: $a+b=b+a$
c) $x \cdot y \cdot z = z \cdot y \cdot x$
d) Si x es cualquier número real, entonces $2(x)/2 = x$
e) Si a y b son números reales, entonces $a \cdot b = b \cdot a$
f) Supongamos a z un número positivo nó entero, entonces $z + 1$ nó es un entero.
g) Si m es cualquier número real, entonces $7 \cdot m - 6 \cdot m = m$

3.- Es posible encontrar características que sólo sean ciertas en algunos casos?

4.- Porqué son las variables mejores que las palabras para describir propiedades, fórmulas o características de modelos?

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- A continuación, en cada inciso se dan varios ejemplos numéricos con una propiedad común. Describe con variables el patrón general. (Solo se necesita una variable en cada caso).

a) $\pi \cdot 1 = \pi$
$6 \cdot 1 = 6$
$14.3 \cdot 1 = 14.3$
$0 \cdot 1 = 0$

b) $34/34 = 1$
$1.2/1.2 = 1$
$7/7 = 1$

c) $7 + 7 = 2(7)$
$11.5 + 11.5 = 2(11.5)$
$65 + 65 = 2(65)$

d) $2300 - 2300 = 0$
$.021 - .021 = 0$
$3 - 3 = 0$

2.- En los siguientes ejemplos, describe con variables el patrón general como en el caso anterior, sólo que aquí necesitarás 2 o más variables.

a) $(5)(14) = (14)(5)$
$(39.2)(.8) = (.8)(39.2)$
$(1/5)(100) = (100)(1/5)$

b) $6(3) + 6(4) = 6(3+4)$
$6(11) + 6(1/3) = 6(11+1/3)$
$6(7) + 6(100) = 6(7+100)$

c) $5/3 - 1/3 = \frac{5-1}{3}$
$18/14 - 11/14 = \frac{18-11}{14}$
$9/130 - 6/130 = \frac{9-6}{130}$

d) Un disco cuesta 1($237.50)
Dos discos cuestan 2($237.50)
18 discos cuestan 18($237.50)

e) Una vaca tiene 4(1) patas
Seis vacas tienen 4(6) patas
50 vacas tienen 4(50) patas

Lección 3

CONJUNTO DE VALORES DE UNA VARIABLE

El matemático griego Diofanto fué uno de los primeros en hacer públicos los conocimientos aritméticos de la antigüedad. De su "Arithmetica", que se componía de 13 libros, se han conservado 6. Alrededor del año 250 D.C. utilizó una sola letra en lugar de un número pero su trabajo permaneció en el olvido por mucho tiempo.

Fué en los años de 1580, que el matemático francés, Francois Vieta, desarrolló la forma moderna del álgebra e introdujo notaciones adecuadas empleando letras para representar números y tal parece que a él se le debe la idea de una <u>variable</u>. Esto es, una letra que puede ser reemplazada por números distintos.

Consideremos la expresión: $40n + 38$

Cuando n es reemplazada por 3, tenemos: $40n + 38 = 40 \cdot 3 + 38 = 158$

El valor 3 es llamado <u>un valor</u> de la variable <u>n</u>.

<u>Un valor de una variable es un número que se puede substituír por la variable.</u> El número 158 en el ejemplo anterior, es el valor correspondiente a la expresión dada. Lo podemos escribir:

Cuando $n = 3$, $40n + 38 = 158$.

EJEMPLO 1.-

Expresión	Valor de la Variable	Valor de la expresión
$(n+3)(n+2)$	5	$(5+3)(5+2) = (8)(7) = 56$
	8	$(8+3)(8+2) = (11)(10) = 110$

EJEMPLO 2.-

$12x + 3$	1/2	$12(1/2) + 3 = 6 + 3 = 9$
	4	$12(4) + 3 = 48+3 = 51$

EJEMPLO 3.-

$18 - 8t - t$	1	$18 - 18(1) - 1 = 9$
	2	$18 - 18(2) - 2 = 0$

En la fórmula del área de un rectángulo, $A = bh$, b y h representan las longitudes de la base y altura respectivamente, por lo que pueden ser reemplazadas por cualesquiera números reales positivos. Al conjunto de números reales positivos se le llama conjunto de valores para <u>b</u> y <u>h</u>.

Al final de la segunda sección de ejercicios en la Lección anterior tenemos que: "c vacas tienen 4c patas", este ejemplo solo tiene sentido cuando <u>c</u>, la variable que representa el número de vacas, es 0 o un número natural, por lo que los valores posibles para c serían $\{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\}$. Esto es, que solo se puede reemplazar c por alguno de los elementos del conjunto de números enteros positivos. No tendría sentido reemplazar c por 3/4.

EJEMPLO 1.- Supongamos que G es la ganancia de una Compañía. La ganancia puede tener dos sentidos posibles, por lo que G puede ser positivo o negativo. Los valores que puede tomar G están dentro del conjunto de los números reales. Si G es negativa, nos indicaría una pérdida, si G es positiva, una ganancia.

En muchos casos, como el ejemplo anterior y los problemas en la vida real, el conjunto de valores que nos interesan es finito. Sin embargo, no se pierde nada y si se gana, tomando conjuntos infinitos.

¿Qué se gana? Entre otras cosas, el considerar de antemano más posibilidades.

En el ejemplo inmediato anterior, que tanto puede ganar una Compañía? En general podemos hablar de millones o billones de ganancia o pérdida, pero hemos considerado el conjunto de los números reales, que resulta mucho más extenso de lo que cualquier compañía pudiera ganar.

EJEMPLO 2.- Sea h el número de hombres mayores de 30 años registrados en el padrón electoral del país. Entonces el conjunto de valores que puede tomar h es cualquier número natural, sin embargo, el número de hombres mayores de 30 años registrados en el padrón, por muy grande que sea, es un conjunto finito.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Quién y cuando surgió la idea de utilizar un símbolo para representar una cantidad?

2.- Define: Variable (Repaso)

3.- Que es un valor de una variable?

4.- Da el valor de la expresión: 15 + x, cuando el valor de x es:
a) 10 b) 1/2 c) 0 d) 432 e) $1\frac{1}{3}$

5.- Si m es reemplazada por 6 y x por 4, entonces mx es igual a____.

6.- Si d es substituída por 8, da el valor de cada expresión:
a) 3d b) 11.5 - d c) d + 3 e) 100 - 4d
e) d + d/2 f) 2d - 5

7.- Si a es 10 y y es 5, da el valor de:
a) y dividido entre a b) el producto de a y y

c) la diferencia de <u>a</u> y <u>y</u> d) $a/2a$

e) $(3a)(y)$ f) $(a + y)(a - y)$

8.- De los siguientes conjuntos, escoge el que creas más apropiado para cada inciso.

Conjunto de números reales
Conjunto de todos los números enteros
Conjunto de números reales positivos
Conjunto de enteros positivos
Conjunto de números racionales entre 0 y 1

a) S, el número de estudiantes en una secundaria
b) P, la ganancia de una compañía
c) h, le altura de un refrigerador
d) D, el pago de un servicio
e) T, el cambio de temperatura de un día a otro

<u>Preguntas para verificar la comprensión de la lectura</u>:

1.- Da un conjunto de valores razonable para la variable subrayada en las expresiones dadas a continuación. Escoge la respuesta de los conjuntos dados en la pregunta 8 de la sección anterior.

a) $C = 1275.50n$, en donde C es el costo de comprar <u>n</u> pelotas de basketball.

b) Sea $A = bh$, donde A es el área de un rectángulo de base b y altura <u>h</u>.

c) Sea <u>b</u> el número de niños por familia en promedio en el país.

2.- Si el conjunto de valores para <u>v</u> es $\{1,2,3\}$, es cierto que $v + 18$ es siempre mayor que 20?

3.- Si el conjunto de valores para <u>x</u> es $\{2, 5, 7\ 1/2, 11.5\}$, es cierto que el doble de <u>x</u> es siempre un número entero?

4.- El conjunto de valores para <u>y</u> es $\{0, 100, 200\}$. Da todos los posibles valores de las siguientes expresiones:

a) $(y+1)(y+2)$ b) $2y + 3y + 4y$

c) $(y+1)(y) + 2y + 2$ d) $500 - 2y$

Lección 4

RELACIONES Y PARES ORDENADOS

Hemos visto hasta aquí, el concepto de variable y su utilidad para hacer descripciones más breves de de rminadas situaciones, así como el conjunto de valores que puede tomar una variable.

Ahora, estableceremos otros conceptos que utilizan variables tambien.

Una proposición abierta es una proposición que contiene una o más variables. Por ejemplo:

"Hay e estudiantes en mi clase de taquigrafía"

Un conjunto de valores apropiado para e sería el conjunto de todos los enteros positivos. Sabemos que el número de estudiantes en dicha clase de taquigrafía es finito, pero en la Lección anterior vimos que no se pierde nada con considerar un conjunto infinito, como el conjunto de todos los enteros positivos.

Un valor que convierte la proposición en verdadera, es una solución de la proposición. En este caso, será el número de estudiantes que haya en mi clase de taquigrafía.

EJEMPLO 1.- Proposición Abierta: "x es un número tal que: $5x = 30$". Conjunto de valores para x: Conjunto de los números reales. Solución: 6.

EJEMPLO 2.- Proposición Abierta: "La suma de equis más tres es igual a diez". $x + 3 = 10$

Conjunto de valores para x: Conjunto de números reales

Solución: 7

Las Relaciones tambien establecen proposiciones abiertas, sin embargo, distintas de las anteriores; en estas, a diferencia de aquellas, se presentan dos variables.

Pero antes de continuar, estableceremos el concepto de par ordenado.

Un par ordenado tiene dos elementos en un orden preciso.

EJEMPLO.- Una dirección representa un par ordenado de datos; el nombre de la calle y el número de la misma:

Ave. México 53

Un par ordenado se escribe encerrándolo entre paréntesis y separando sus componentes con una coma: (Ave. México, 53).

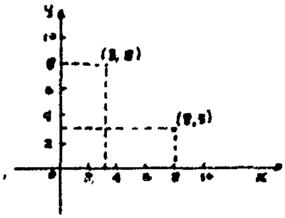
Ave. México representa el primer elemento del par ordenado y 53 el segundo.

Si consideramos el par ordenado (8,3), no será el mismo que (3,8), pues:

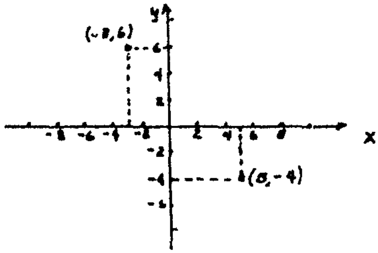
(8,3) tiene como primer elemento al 8 y segundo elemento al 3 y el (3,8) tiene como primer elemento al 3 y segundo elemento al 8.

Representemos esto gráficamente. Recordemos que un sistema de ejes coordenados consiste en dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto llamado <u>origen</u>. Las rectas reciben el nombre de <u>ejes</u>. La recta horizontal recibe el nombre de <u>eje x</u> y el eje vertical es el <u>eje y</u>.

Por regla, el primer elemento de un par ordenado se localiza sobre el eje horizontal, y el segundo elemento sobre el eje vertical. En seguida tenemos la representación gráfica de los pares ordenados (8,3) y (3,8):



EJEMPLO.- Grafica los pares ordenados (-3,6) y (5,-4)



Una vez que hemos establecido el concepto de par ordenado y su representación gráfica, regresemos a las <u>Relaciones</u>.

Como decíamos anteriormente, las <u>Relaciones también establecen proposiciones abiertas, con dos variables</u>.

EJEMPLO.- Tenemos la proposición: "<u>x</u> tiene por capital a <u>y</u>"

En este ejemplo, la <u>x</u> podría reemplazarse por algún elemento del conjunto "Paises" y la <u>y</u> por elementos del conjunto "Ciudades". La frase "tiene por capital a", es la regla que establece la relación entre los elementos de los conjuntos mencionados.

Algunos pares ordenados que cumplen la Relación son: (España, Madrid), (México, D.F.), (Italia, Roma). El par (Francia, Berlín) tiene el primer elemento correspondiente al conjunto "Paises" y el segundo pertenece al conjunto "Ciudades", sin embargo se dice que este par ordenado no esta en la Relación pues no cumple con la regla que establece la proposición.

EJEMPLO.- Tenemos la proposición: "x vacas tienen 4(y) patas" En este ejemplo, la <u>x</u> se puede substituír por algunos elementos del conjunto de los números <u>Naturales</u>, pues no tendría sentido hablar de -3 vacas o de 1/2 vaca; e igualmente para la <u>y</u>. La regla establece la relación entre los elementos del conjunto de los números naturales que puede tomar <u>x</u> y los elementos del conjunto de los números naturales que puede tomar <u>y</u>.

Algunos pares ordenados que cumplen la propiedad indicada en la proposición, serían: (3,12), (4,16), (5,20), etc. Los siguientes pares están formados por elementos del conjunto de los números naturales, sin embargo <u>no están en la Relación</u> pues no cumplen con la regla que establece la proposición: (3,4), (4,8), etc.

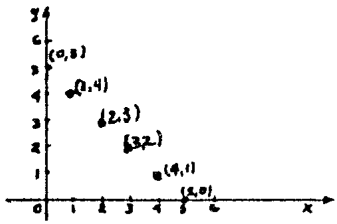
EJEMPLO.- Supongamos que tenemos la proposición abierta:

$$x + y = 5$$

Consideremos que <u>x</u> y <u>y</u> pueden tomar valores del conjunto de los números <u>Naturales</u>. Podemos expresar nuestra proposición como: $y = 5 - x$. Podemos darle a <u>x</u> valores del conjunto de los Naturales que nos den el valor de <u>y</u>:

Si:	$y = 5 - x$	Par ordenado
$x=0$,	$y = 5 - 0 = 5$	(0,5)
$x=1$,	$y = 5 - 1 = 4$	(1,4)
$x=2$,	$y = 5 - 2 = 3$	(2,3)
$x=3$,	$y = 5 - 3 = 2$	(3,2)
$x=4$,	$y = 5 - 4 = 1$	(4,1)
$x=5$,	$y = 5 - 5 = 0$	(5,0)
$x=6$,	$y = 5 - 6 = -1$	(6,-1)
$x=7$,	$y = 5 - 7 = -2$	(7,-2)

Como habíamos dicho que <u>x</u> e <u>y</u> podían tomar valores del conjunto de los números naturales, los dos últimos pares ordenados y todos los subsecuentes resultarán con el segundo elemento negativo esto es, números no naturales y por lo tanto no formarán parte de esta relación. A continuación tenemos la gráfica de estos puntos (sin incluír los últimos).



En los ejemplos anteriores podemos distinguir, que en una relación manejamos dos conjuntos (uno de ellos para los elementos de la primera variable y el otro de donde toma los elementos la segunda variable) y una cierta regla que los relaciona; así podemos afirmar que:

Una relación es una terna formada por dos conjuntos y una regla de correspondencia.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- En las siguientes proposiciones abiertas, substituye el término variable por 3 elementos del conjunto dado en cada caso, que convierta la proposición en verdadera.

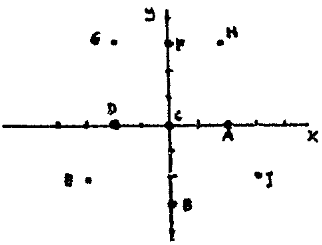
a) "z es un divisor de 4" Conjunto de los naturales.

b) "x es un múltiplo de y" Conjunto de los números reales

c) "y es un número dígito impar" Conjunto de los números naturales.

2.- Podemos decir que el par ordenado (8,5) es igual a (5,8)? Elabora una gráfica e indica donde se localizan.

3.- Utilizando la gráfica a continuación, pero agrandándola en una hoja, identifica la letra correspondiente a los puntos dados.



(2,3)	(-2,3)
(2,0)	(-3,-2)
(0,-3)	(0,0)
(0,3)	(-2,0)
(3,-2)	Origen

4.- Grafica los siguientes puntos en el mismo sistema de coordenadas utilizado para el ejercicio anterior.

(-6,-5), (-3,-5), (0,-5), (3,-5), (6,-5), (2,11), (2,6), (2,0), (2,-1), (2,-4), (-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (3,9), (4 1/2,6), (-4 1/2, -6), (-4 1/2, 6), (4 1/2, -6).

5.- Las relaciones establecen porposiciones abiertas con ____ variables.

6.- Define: Relación

7.- Dado el conjunto: $P = \{Gato,\ 2^2,\ pato,\ (2x2),\ malo,\ loma\}$ coloca los componentes de las siguientes proposiciones abiertas.

________ es lo mismo que ________

________ tiene el mismo número de letras que ________

________ tiene las mismas letras que ________

8.- Dada la proposición $y = 6 + x$, donde x e y toman valores de los números naturales, encuentra tres pares ordenados que esten en la relación. Dibuja su gráfica.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Sean los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4\}$ y la regla de correspondencia que relaciona sus elementos: "a tiene una unidad menos que b" Encuentra los posibles pares ordenados que cumplen la propiedad indicada en ls proposición abierta.

2.- Refiriéndonos al ejercicio 8 de la sección anterior, encuentra tres pares ordenados que no estén en la relación.

Ejercicios de Aplicación de la lectura:

1.- Una persona lanza un dado 120 veces con los siguientes resultados:

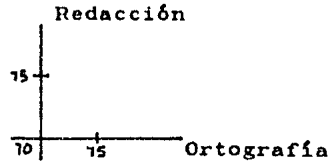
Número	1	2	3	4	5	6
Veces	18	23	21	15	24	19

Grafica los seis pares ordenados resultantes. ¿Puedes concluír algo a partir de la gráfica?

2.- Dibuja un triángulo cuyos vértices sean los puntos: (0,-5), (-4,3) y (4,3).

3.- Cinco estudiantes realizaron 2 exámenes con los siguientes resultados:

	Ortografía	Redacción
Carlos	85	81
Laura	78	77
Gabriel	80	82
Lisa	83	88
Natalia	73	90



Grafica los resultados utilizando ejes como estos, amplificados en otra hoja.

4.- Compara las localizaciones de las siguientes ciudades en una gráfica a modo de conocer su cercanía de unas a otras. (Los datos son aproximados. Considera el Oeste hacia la izquierda).

	Long. O	Lat. N
Acapulco	100°	16°
México D.F.	98°	20°
Tijuana	117°	33°
Cuernavaca	99°	19°
Mérida	90°	21°

Lección 5

FUNCIONES

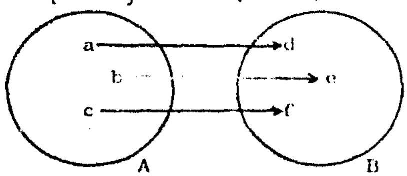
En la Lección anterior vimos que una relación era una terna formada por dos conjuntos y una regla de correspondencia. Una <u>función</u> es un caso particular de relación, pues tambien se manejan dos conjuntos y una regla de correspondencia.

En los ejemplos vistos en la Lección anterior, tales como el número de patas de las vacas, o la capital de un país, hemos visto que en cada situación hay 2 variables y que cada valor de la primera variable <u>determina exactamente un valor de la segunda variable</u>. Por ejemplo, el número de vacas determina el número de patas, (a menos que haya una vaca coja). En seguida tenemos la definición de función.

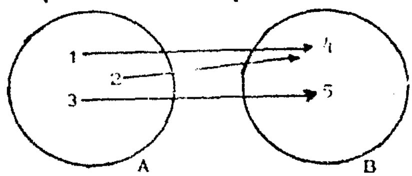
Definición: Dados dos conjuntos A y B, una <u>función</u> es una relación de A en B si y sólo si a cada elemento de A le corresponde uno y sólo un elemento de B, y además ningún elemento de A se queda sin su asociado en B.

Podemos ilustrar esto mediante los dibujos siguientes:

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{d, e, f\}$

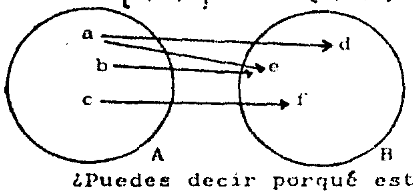


$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{4, 5\}$

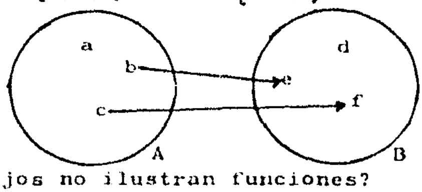


Los siguientes dibujos nos ilustran relaciones que no son funciones.

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{d, e, f\}$



$A = \{a, b, c\}$ $B = \{d, e, f\}$



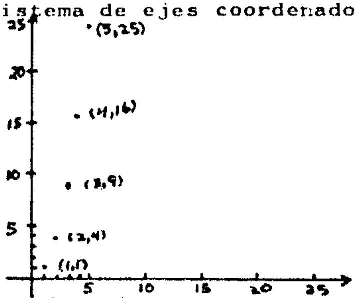
¿Puedes decir porqué estos dibujos no ilustran funciones? Revisa la definición de <u>función</u>.

EJEMPLO 1.- Supongamos que tenemos el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ y la siguiente proposición abierta: "x tiene por cuadrado a y", esto es, que <u>y</u> es el cuadrado de <u>x</u>. Lo podemos expresar: $y = x^2$

Entonces tenemos una relación en los elementos de N (Números naturales) dada por $y = x^2$. Dándole valores a x tomados del conjunto N, podemos hacer una tabla y obtener un conjunto de pares ordenados que, como ya hemos visto en la Lección anterior, los podemos representar gráficamente en un sistema de ejes coordenados, como vemos a continuación:

Si:

x	y	Par ordenado
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	9	(3, 9)
4	16	(4, 16)
5	25	(5, 25)
.	.	.
.	.	.
.	.	.

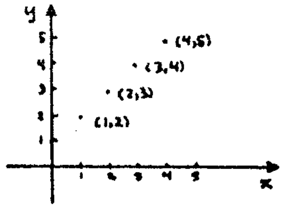


Por supuesto que esta representación gráfica solo ilustra los primeros 5 elementos del conjunto N, por esto hemos puesto puntos suspensivos. Esta gráfica es parte de la gráfica de la función $y = x^2$. Comprueba que es una función revisando la definición.

EJEMPLO 2.- Supongamos que tenemos el conjunto de los números naturales (N) y una relación dada por la proposición "x+1 es igual a y"; esto es, $y = x+1$. Podemos formar una tabla como la anterior dándole valores a x. Esta relación también es una función, pues a cada elemento de N que tome la x le corresponde uno y solo uno a y, tambien en N y además ningún elemento de N se queda sin su asociado. Al número Natural más grande que puedas imaginar, siempre se le puede sumar 1 y obtener el siguiente.

Si:

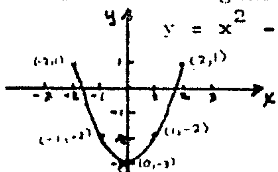
x	y	Par ordenado
1	2	(1,2)
2	3	(2,3)
3	4	(3,4)
4	5	(4,5)
.	.	.
.	.	.



EJEMPLO 3.- Supongamos que tenemos el conjunto de los números Reales y la siguiente proposición "$x^2 - 3$ es igual a y". Tenemos:

Si:

x	y	Par ordenado
-2	1	(-2, 1)
-1	-2	(-1, -2)
0	-3	(0, -3)
1	-2	(1, -2)
2	1	(2, 1)



Verifica si esta relación es una función revisando la definición.

La idea de una función es muy simple. Si se tiene dos variables relacionadas de modo que la primera determina la segunda, entonces hay una función.

Las proposiciones abiertas en los ejemplos anteriores son las que nos relacionan nuestras variables, estas reciben el nombre de "regla de correspondencia". Al primer conjunto, de donde puede tomar valores la x, se le llama Dominio y al conjunto de valores de la y se le llama Contradominio. En un par ordenado, proveniente de alguna función, el primer elemento pertenecerá al Dominio de la función y el segundo elemento al Contradominio de la función.

Por lo tanto, para que una relación sea una función, podemos re-escribir la definición dada al principio como:

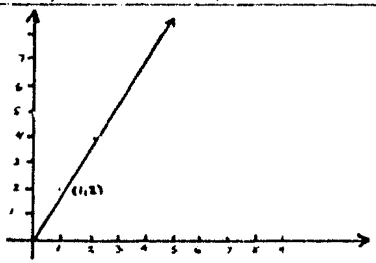
a) A todo elemento del dominio se le asigna un elemento del contradominio.

b) Ningún elemento del dominio queda sin su asociado

c) Ningún elemento del dominio tiene más de un asociado en el contradominio.

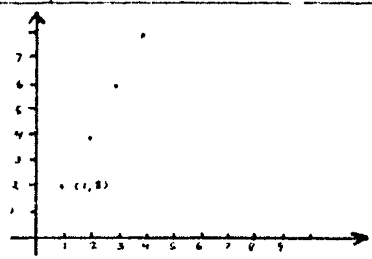
En seguida tenemos 2 funciones con la misma regla de correspondencia, pero cuyos dominios son distintos:

Función 1: $y = 2x$
Esta función representa el precio de dos sillas si una cuesta **x** pesos.
Dándole valores a x obtenemos una gráfica de 1:



Dominio de 1: Conjunto de números Reales positivos.

Función 2: $y = 2x$
Esta función representa el número de niños en **x** pares de gemelos.
Dándole valores a x obtenemos una gráfica de 2:



Dominio de 2: Conjunto de números enteros positivos.

En la Función 1, tenemos como dominio el conjunto de números Reales positivos de donde la x tomará sus valores para diversos precios de una silla. Tenemos el conjunto de los Reales positivos pues no podemos hablar de que una silla cueste -2750.75 pesos. ¿Puedes decir porqué utilizamos como dominio el conjunto de enteros positivos para la Función 2?

Cuando nó se nos especifica un dominio, se supone para efectos de cálculo, el mayor conjunto posible.

EJEMPLOS:

1.- Sea $y = 3x - 2$. Como nó se indica el dominio, se toma el conjunto de los números reales como dominio.

2.- Sea $y = x^2 + 3$. Como nó se indica el dominio, se toma el conjunto de los números reales como dominio.

Como la idea de función es simple, las funciones las encontramos en todas las ramas de las matemáticas y son muy importantes en muchas aplicaciones. Esto resulta en que haya muchas formas de describir funciones. Algunas serían:

a) Mediante una gráfica

b) Mediante una regla escrita. Por ejemplo, la función costo-tiempo de estacionamiento, que sería: La primera hora 20 pesos y cada hora consecutiva 10 pesos hasta 24 horas (por ejemplo)

c) Mediante pares ordenados

d) Mediante una Tabla

e) Mediante una expresión algebraica. Por ejemplo: $C=5/9F - 5/9(32)$. Esta xpresión nos convierte grados Farenheit a grados Centígrados.

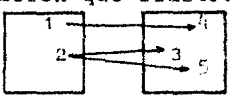
Hasta aquí hemos visto lo que es una Relación, dada por dos conjuntos y una regla de correspondencia. También el concepto de par ordenado y su representación en un sistema de ejes coordenados. Así como el concepto de Función y como representarla gráficamente por medio de los pares ordenados obtenidos al darle valores a la primera variable (x). Hemos visto lo que es el Dominio y Contradominio de una función.

Hasta ahora hemos escrito nuestras funciones con las variables <u>x</u> e <u>y</u>, en la siguiente Lección veremos algo sobre notación de funciones que nos servirá para distinguir mejor nuestras funciones.

<u>Preguntas que abarcan la lectura</u>:

1.- Define: Función

2.- Indica si la relación que ilustra el siguiente dibujo puede ser una función.



3.- Como se le llama a las proposiciones abiertas que nos relacionan dos variables?

4.- Al conjunto de donde toma valores la primera variable, (x), se le llama_______________.

5.- Dibuja la gráfica de 2 funciones con distintos dominios que tengan la expresión algebraica $y=3x$ como regla de correspondencia.

6.- De los siguientes conjuntos de pares ordenados, dí si son o no son representativos de una función.

a) (2,3),(3,2),(1,4),(4,1)
b) (-6,10),(-5,10),(-4,10)
c) (.1,6),(.1,7),(.1,8)
d) (0,3),(3,0),(0,-4)
e) (-1,-2),(-2,-3),(-3,-4),(-4,-5),...

7.- Menciona una forma de describir una función.

8.- Al graficar se acostumbra usar a ___ como la primera variable y a ______ como la segunda.

9.- Cada expresión algebraica describe una función. Da valores a la <u>x</u> para obtener 4 pares ordenados de cada una. Graficalos por separado. Considera el conjunto de los Reales como Dominio y contradominio.

a) $y = -4x^2$ b) $y = 4x - 2$
c) $2x - 6 = y$ d) $y = 15/x$

<u>Preguntas para verificar la comprensión de la lectura</u>:

1.- Describe una función mediante un dibujo señalando el dominio, el contradominio y la regla de correspondencia de la función que vayas a describir.

2.- Cada oración puede ser una regla para una función. Da 3 pares ordenados de cada una.

a) Estas naranjas cuestan 10 pesos el kilo.
b) Por cada centímetro de espesor de material aislante, solamente 2/5 de sonido lo atraviesa.

3.- Explica que es el Dominio y Contradominio de una Función.

4.- De acuerdo a la idea de una función, esto es que si se tienen dos variables relacionadas de tal manera que la primera variable determina la segunda, da un ejemplo de la vida diaria que ejemplifique la idea de función.

Lección 6

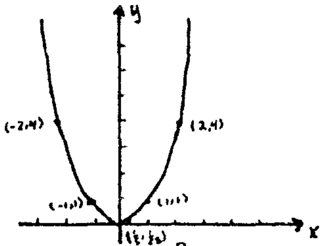
NOTACION DE FUNCIONES

En esta Lección, veremos que para denotar una función usamos una especie de abreviatura compuesta por una letra del alfabeto, por lo general: f, g, h, s, t, poniendo la variable en cuestión entre paréntesis.

Por ejemplo, $f(x)$, $g(y)$, $h(y)$, $s(x)$, etc; aquí los paréntesis nó significan multiplicación y se leen: "f de x", "g de y", "h de y", y "s de x".

Este tipo de abreviatura se usa para todas las funciones. Supongamos que usamos $s(x)$ para representar el cuadrado de x. Entonces para cada x que demos, habrá una $s(x)$. De este modo, tenemos: $s(x) = x^2$

x	s(x)
4	16
-1	1
-2	4
1/5	1/25
.	.
.	.
.	.



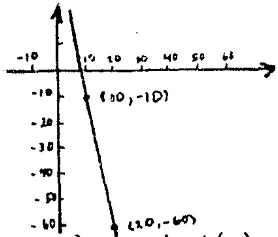
De acuerdo a la expresión: $s(x) = x^2$, obtuvimos algunos pares ordenados de la función "cuadrado de x": (4,16), (-1 ,1), (-2,4), (1/5,1/25),... Donde $s(x)$ es la segunda coordenada en el par ordenado con primera coordenada x.

Cada par ordenado de la función tiene la forma $(x, s(x))$.
Si $x = 3$, $s(x) = 9$, entonces tendríamos el par ordenado (3,9).
Si $x = 6$, $s(x) = 36$, entonces tendríamos el par ordenado (6,36).

EJEMPLO 1.- Sea la función $f(n) = n^2 + n$. Podemos encontrar puntos de la función mediante substitución.

$f(n) = n^2 + n$	Puntos de la función
$f(0) = 0^2 + 0$	(0,0)
$f(6) = 6^2 + 6$	(6,42)
$f(-6) = -6^2 + (-6)$	(-6,30)
$f(\pi) = \pi^2 + \pi$	$(\pi, \pi^2 + \pi)$
$f(2/3) = (2/3)^2 + 2/3$	(2/3,10/9)

EJEMPLO 2.- La expresión $t(x) = -5x + 40$ describe una función lineal.



Tenemos:

x	t(x)
0	40
10	-10
20	-60

Frecuentemente se escribe y en lugar de t(x), lo que nos resulta en la expresión más conocida:

$$y = -5x + 40$$

Algunas veces, una sola letra se usa para denotar la función. En el ejemplo 2, la relación utiliza t(x), por lo que la función se llama t. En el primer ejemplo, utilizamos f(x), por lo que la función se llama f. Esta letra es la más comúnmente utilizada para nombrar funciones.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Considera la función g con regla de correspondencia $g(x)=5x+3$. Completa las siguientes expresiones:

a) g(3) = ____ b) g(10)=_____ c) g(-10)=________

d) Cuando x=10, g(x)= _____ e) Cuando x= 1.2, g(x)=_______

2.- Da 4 pares ordenados en las funciones dadas a continuación:

a) $f(t)=5/9(t-32)$ b) $L(x)=2+4x$ c) $P(x)=10x - 4x^2$

d) $g(a) = a^2 + a^3$ e) $f(m) = m(m-2)$

3.- Repite la pregunta 1 para la función $g(x) = x - 5$

4.- Tenemos la función: $h(a) = a + 3$

a) Da 3 pares ordenados de esta función

b) La gráfica de esta función es una ________________.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- De los incisos de la pregunta 2 anterior, a que función se le puede llamar un polinomio de grado 3? A cuales 2 funciones se les puede llamar funciones lineales?

2.- Calcula: f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), y f(6) para:

a) $f(x) = 100x - 2$ b) $f(x)= -(x-3)^2$ c) $f(x)= x - 3$

3.- Sea S el conjunto de todas las personas. Para cada elemento x de S, sea f(x) = el papá de x, m(x)= la mamá de x, h(x)= el esposo de x, w(x)= la esposa de x, s(x)= la hermana mayor de x y b(x)= el hermano menor de x. Que parentesco tendrá:

a) f(f(x)) b) f(m(x)) c) m(f(x))

d) m(m(x)) e) s(f(x)) f) b(f(x))

g) m(w(x)) h) f(h(x)) i) f(s(x))

Lección 7

FUNCIONES LINEALES

Hemos visto lo que es una función y como escribirla. Ahora veremos en esta Lección y la siguiente, algunos de los tipos de funciones más comunes.

A las funciones se les encuentra en todas partes de las matemáticas. La función Lineal es la más básica de todas las funciones. Una función lineal, es una función cuya gráfica es toda o parte de una línea recta.

Toda línea recta tiene una ecuación de la forma:

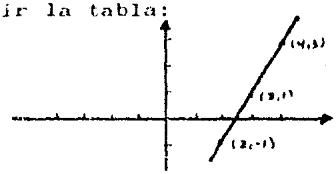
$$y = mx + b$$

En notación de funciones la escribiríamos como la expresión:

$$f(x) = mx + b$$

EJEMPLO 1.- Tenemos la expresion algebraica: $y=2x - 5$
En notación de funciones quedaría: $f(x) = 2x - 5$
Dandole valores a x podemos construir la tabla:

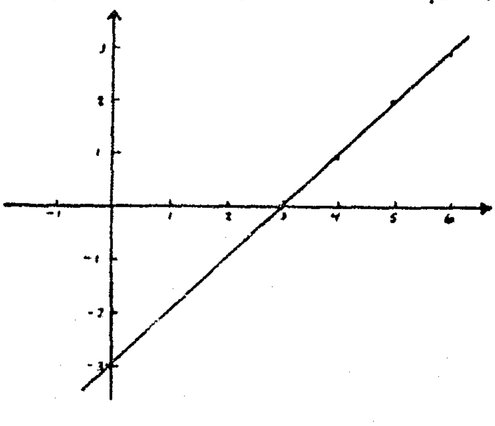
x	f(x)	Par
2	-1	(2,-1)
3	1	(3, 1)
4	3	(4, 3)



Para graficarla basta encontrar dos puntos de esta función y unirlos mediante una línea recta.

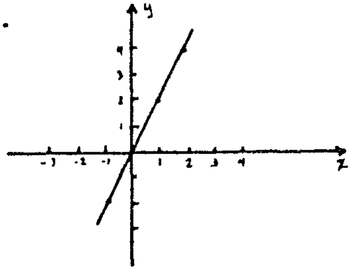
EJEMPLO 2.- La expresión $y = x - 3$ también tiene la forma $y = mx + b$, pero en este caso $m = 1$ y $b = 3$. En notación de funciones quedaría: $f(x) = x - 3$. Podemos hacer lo mismo que en el caso anterior.

x	f(x)	Par
3	0	(3,0)
4	1	(4,1)
5	2	(5,2)
6	3	(6,3)
0	-3	(0,-3)



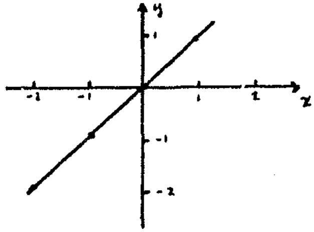
EJEMPLO 3.- Tenemos la función: $f(x) = 2x$. Tambien es de la forma $f(x) = mx + b$, pues $m=2$ y $b=0$.

x	f(x)	Par
-1	-2	(-1,-2)
0	0	(0, 0)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)



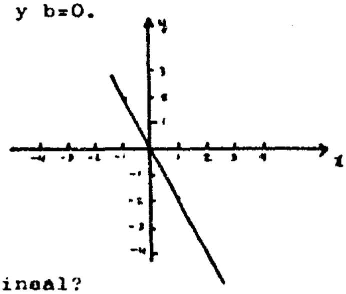
EJEMPLO 4.- $f(x) = x$. En este ejemplo $m = 1$ y $b=0$.

x	f(x)	Par
1	1	(1,1)
0	0	(0,0)
-1	-1	(-1,-1)
-2	-2	(-2,-2)



EJEMPLO 5.- $f(x) = -2x$. Aquí $m=-2$ y $b=0$.

x	f(x)	Par
-1	2	(-1,2)
0	0	(0,0)
1	-2	(1,-2)
2	-4	(2,-4)



<u>Preguntas que abarcan la lectura:</u>

1.- Como es la gráfica de una función lineal?

2.- Toda línea recta, nó vertical, tiene una expresión algebraica de la forma: ____________________.

3.- Toda función lineal tiene una expresión de la forma:__________.

4.- La gráfica de: $\frac{1}{2}x + 8$ es una ____________.

5.- Cuál es el dominio de cada función? (Repaso)

a) h, donde $h(x) = 3x$ b) f, donde $f(x)=2x-6$ y $\underline{x}$ es cual--quier entero.

6.- Para trazar la gráfica de una función lineal, cuantos puntos (pares ordenados) de la función necesitas conocer?

7.- Grafica la función si el dominio es $U = \{0,1,2,3,4\}$

a) $f(x) = 3x-5$ b) $g(x) = \frac{2}{3}x + 1$

8.- Repite el ejercicio anterior si el dominio es el conjunto de los números reales.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

Instrucciones: Como recordarás, el contradominio de una función son los valores que resultan para la segunda variable de acuerdo a la regla de correspondencia de la función. Indica el contradominio de cada una de las siguientes funciones: (Repaso)

1.- La función h, con la expresión $h(n)=3n$, donde el dominio de h es el conjunto $S = \{2, 4, 6\}$.

2.- La función f, con ecuación $f(x) = 3x + 6$

3.- La función f, graficada en el Ejemplo 1 de la Lección.

Preguntas que amplían la lectura:

1.- Encuentra una ecuación para cada función lineal.
   a) C, donde C(h) es el costo de h timbres de 1.80
   b) P, donde P(s) es el perímetro de un cuadro de lado = s.

2.- Observa los 5 Ejemplos dados en la Lección. Que conclusión es posible obtener a partir de los Ejemplos 3, 4, 5, cuando $b=0$? Ahora observa los Ejemplos 1 y 2, qué sucede cuando $b\neq 0$?

Lección 8

OTROS TIPOS DE FUNCIONES

Mencionamos anteriormente que a las funciones se les encuentra por todas partes en las matemáticas. Ya hemos estudiado el tipo más común de función en la Lección anterior. Ahora veremos diversos tipos de funciones que también se encuentran frecuentemente al estudiar matemáticas.

FUNCIONES CUADRATICAS.- A todas las funciones de segundo grado se les denomina Funciones Cuadráticas, el grado de una expresión algebraica, como recordarás, es el número del exponente más alto de la variable en cuestión.

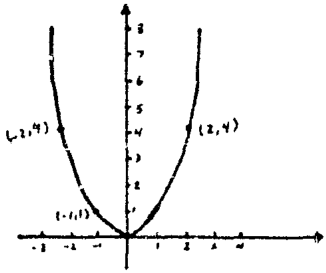
Así, por ejemplo, tenemos los siguientes ejemplos de funciones cuadráticas:

$f(x) = 3x^2 + 6x + 3$ $\quad g(x) = -x^2 - 2x - 3$ $\quad h(x) = x^2$

$s(x) = 2x^2$ $\quad t(x) = 8x^2 - 2x$

Ya hemos visto un ejemplo sencillo de una función cuadrática en la Lección 6: $s(x) = x^2$

x	s(x)
4	16
-1	1
-2	4
1/5	1/25
2	4
.	.
.	.



La gráfica resultante es una curva particular que recibe el nombre de: Parábola.

La forma general de una función cuadrática es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Los ejemplos dados al principio tienen esta forma, pues en:

$f(x) = 3x^2 + 6x + 3$ tenemos: $a=3$, $b=6$, $c=3$

$g(x) = -x^2 - 2x - 3$ tenemos: $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$

$h(x) = x^2$ tenemos: $a=1$, $b=0$, $c=0$

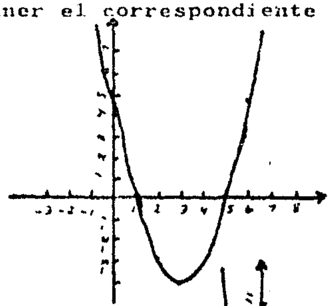
$s(x) = 2x^2$ tenemos: $a=2$, $b=0$, $c=0$

$t(x) = 8x^2 - 2x$ tenemos: $a=8$, $b=-2$, $c=0$

A continuación tenemos la representación gráfica de algunas funciones cuadráticas. Cada una de las gráficas siguientes se han elaborado como en ocasiones anteriores, dándole una serie de valores a la variable $\underline{x}$ para obtener el correspondiente $f(x)$.

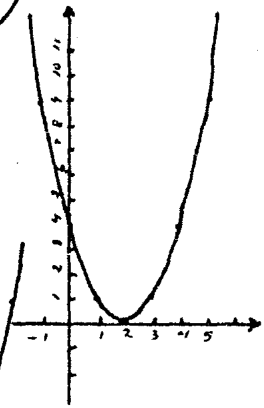
EJEMPLO 1.- $f(x) = x^2 - 6x + 5$

x	f(x)
-1	12
0	5
1	0
2	-3
3	-4
4	-3
5	0
6	5



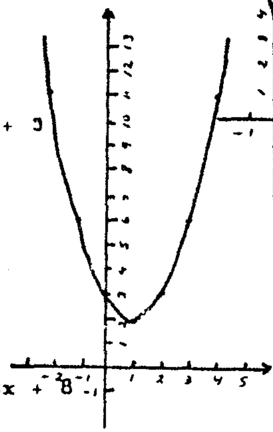
EJEMPLO 2.- $f(x) = x^2 - 4x + 4$

x	f(x)
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9



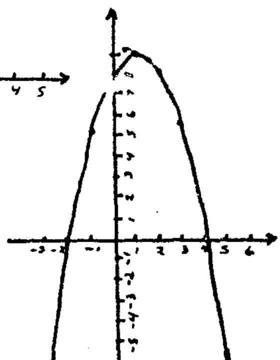
EJEMPLO 3.- $f(x) = x^2 - 2x + 3$

x	f(x)
-1	6
0	3
1	2
2	3
3	6
4	11
-2	11



EJEMPLO 4.- $f(x) = - x^2 + 2x + 8$

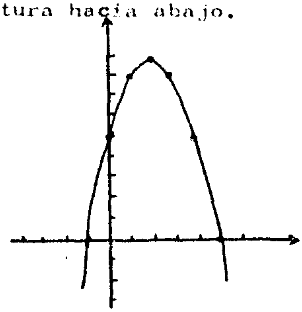
x	f(x)
-3	-7
-2	0
-1	5
0	8
1	9
2	8
3	5
4	0



En este ejemplo, a=-2, b=2, y c=8. Siempre que $\underline{a}$ tenga un valor negativo, la parábola resultante estará con la abertura hacia abajo.

EJEMPLO 5.- $f(x) = -x^2 + 4x + 5$. De nuevo, en este ejemplo tenemos $a = -1$, un valor negativo, por lo tanto, la parábola resultante será una parábola con la abertura hacia abajo.

x	f(x)
-2	-7
-1	0
0	5
1	8
2	9
3	8
4	5
5	0

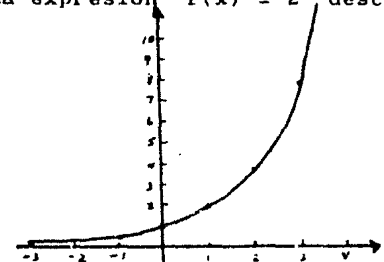


La curva resultante es una parábola. El lanzamiento de una pelota en el aire describe este tipo de curva en su trayectoria.

Hay muchas otras curvas que son gráficas de funciones. Por ejemplo:

<u>FUNCION EXPONENCIAL</u>.- La expresión $f(x) = 2^x$ describe una <u>función exponencial</u>.

x	f(x)
1	2
2	4
3	8
4	16
0	1
-1	1/2
-2	1/4
-3	1/8
.	.



Este tipo de funciones describe muchos modelos de crecimiento. Por ejemplo, de una población, o el crecimiento demográfico. La forma de reproducirse de algunas bacterias, etc.

Otro tipo de función que nos encontraremos más adelante en la Unidad V, es la función:

<u>FUNCION VALOR ABSOLUTO</u>.- Podemos representar la función valor absoluto mediante la expresión: $f(x) = |x|$. Substituyendo diversos valores podemos encontrar algunos puntos de esta función:

Si $x = 2$, $f(x) = |x| = |2| = 2$ (2,2)

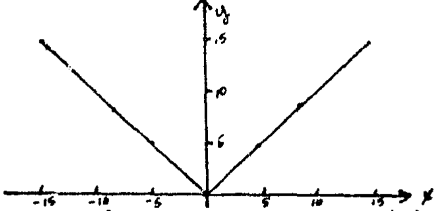
Si $x = -8$, $f(x) = |-8| = 8$ (-8,8)

Si $x = 0$, $f(x) = |0| = 0$ (0,0)

Si $x = 8$, $f(x) = |8| = 8$ (8,8)

Si $x = -2$, $f(x) = |-2| = 2$ (-2,2)

La gráfica de esta función quedaría:



Otros ejemplos serían: Para $x = -5$, $f(x) = |-5| = 5$; para $x = 5$, $f(x) = |5| = 5$; para $x = 9$, $f(x) = |9| = 9$; para $x = -9$, $f(x) = |-9| = 9$, etc. Como puedes observar, esta función nos deja únicamente el "valor absoluto" de la variable, sin importar el signo que tenga.

Tal vez te preguntes el porqué de estudiar una función tan rara. Una razón es que estas funciones se encuentran en muchas aplicaciones y además, muchas situaciones complejas se pueden simplificar y entender mejor.

Adelante en este curso, en la sección de Estadística nos volveremos a encontrar con esta función.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Da un ejemplo de una expresión algebraica para una función cuadrática.

2.- La gráfica de una función cuadática puede ser una______________.

3.- Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^2$ c) $y = -x^2$

d) $g(x) = -x^2 + 6x + 2$ e) $y = 3^x$

f) $h(x) = 2x^2 + 4x$

4.- El lanzamiento de una pelota en el aire describe un tipo de curva en su trayectoria. Qué nombre recibe esta curva?

5.- Da un ejemplo de una función cuadrática que al graficarla resulte en una parábola como la que se menciona en el ejemplo anterior.

6.- Da un ejemplo de una función cuadrática que sea de la forma $ax^2 + bx + c$.

7.- Da un ejemplo de una función valor absoluto.

8.- Sea $f(x) = |x|$ Elabora la gráfica utilizando los siguientes valores de x: $x=1$, $x=0$, $x=-5$, $x=10$, $x=5$, $x=8$, $x=-1$, $x=2$, $x=-4$, $x=6$, $x=-8$, $x=-3$.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Escribe la forma general de una función cuadrática.

2.- El crecimiento de la población mundial es un ejemplo de una función ________________.

3.- Grafica la función correspondiente a las siguientes expresiones:

a) $y = -2x^2 + 3x$ b) $f(x) = 4x^2 - 2x + 6$

c) $g(x) = (1/2)^x$ d) $y = x^2 - 10$

4.- Las funciones lineales y cuadráticas son tipos especiales de funciones polinomiales. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $g(n) = 2n^3 - 6n^2 - 10$

c) $y = x^3$ d) $y = x^4$

5.- La gráfica de la función valor absoluto resulta ser un ______ __________.

R E S U M E N

Las Matemáticas pueden ser interpretadas como el estudio de modelos. Estos modelos, frecuentemente tienen variables. Estas variables se utilizan para representar distintas cantidades.

Las letras del alfabeto se utilizan para designar a estas variables. Para ciertas necesidades, cuando se tienen dos variables, sus valores se colocan en pares ordenados.

Una variable es un símbolo que puede ser cualquiera de los elementos de un conjunto dado, que es llamado el conjunto de valores que puede tomar una variable. Cada uno de estos elementos es un valor de la variable.

Las gráficas nos ayudan a la descripción geométrica de modelos, fórmulas y soluciones, por lo que están muy relacionadas con las variables y se han incluído tambien en esta Unidad.

Las funciones son relaciones entre los elementos de dos conjuntos llamados: dominio y contradominio de la función. Si una función f contiene el par (a,b), se puede escribir f(a) = b. El conjunto de valores posibles de a es el dominio de la función, b es un valor de la función y pertenece al contradominio de la función.

Podemos graficar una función dándole valores a la variable x, pues así obtenemos valores para f(x). Cada uno de estos pares de puntos (x,y) o (x, f(x)) los podemos localizar en una gráfica de ejes coordenados y así obtener una descripción gráfica de la función en cuestión.

La mayoría de las líneas rectas son funciones lineales. Algunos ángulos son gráficas de la función valor absoluto. Expresiones cuadráticas nos llevan a funciones cuadráticas, sus gráficas son curvas. La expresión $f(x) = 2^x$ describe una función exponencial, que casi siempre están relacionadas con problemas de crecimiento demográfico. Su gráfica también es una curva.

Las funciones las encontramos por doquier. En la vida diaria, en la producción, en la tecnología, en la medicina, etc. por esto es importante que comprendas los conceptos vistos en esta Unidad.

U N I D A D II

ECUACIONES LINEALES Y CUADRATICAS

Lección 1

CONJUNTO SOLUCION DE UNA ECUACION Y SUS REPRESENTACIONES

En esta Unidad II, veremos algunos métodos para resolver ecuaciones y unas sugerencias sobre como resolver problemas por medio de ecuaciones que te resultarán muy útiles nó solo para este curso, sino en la vida diaria.

De cursos anteriores recordarás que una ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que se verifica o es verdadera sólo para determinados valores de las incógnitas. Las incógnitas se representan, por lo general, con las últimas letras del alfabeto: x, y, z.

Definición.- El Conjunto Solución de una ecuación es aquél cuyos elementos o valores hacen verdadera o verifican la ecuación.

EJEMPLO.- Observemos la siguiente ecuación:

$$2x - 4 = 0$$

Vemos que $2x - 4$ representa una función, la podemos escribir:

$$f(x) = 2x - 4 \quad \text{o} \quad y = 2x - 4$$

Si analizamos algunos valores para x, tendremos la siguiente tabla:

$f(0) = 2(0) - 4 = -4$

$f(1) = 2(1) - 4 = -2$

$f(2) = 2(2) - 4 = 0$

$f(3) = 2(3) - 4 = 2$

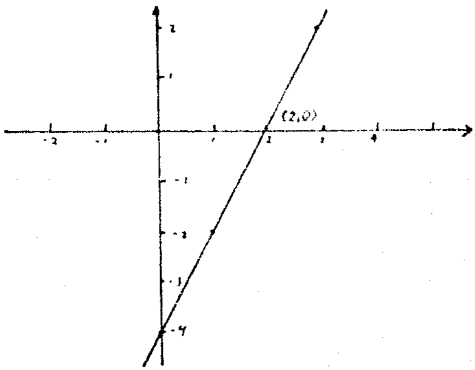
$f(4) = 2(\ \ ) - 4 =$

$f(5) = 2(\ \ ) - 4 =$

x	f(x)
0	-4
1	-2
2	0
3	2
4	
5	

Completa la tabla para los valores f(4) y f(5).

Al representar los puntos en un sistema de ejes coordenados tenemos:



En la gráfica anterior, el punto (-1,-6) pertenece a la recta, pues : $f(-1) = 2(-1) - 4 = -6$

Pero, como puedes observar, la ecuación $2x - 4 = 0$ solo es verdadera o se verifica para el valor <u>f(2)</u>, pues:

$$2(2) - 4 = 0$$
$$4 - 4 = 0$$

lo que nos indica que el único valor que hace verdadero a $2x - 4 = 0$ es <u>2</u>, por lo tanto en la ecuación:

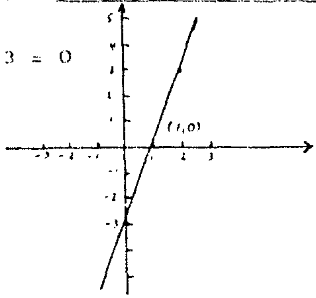
$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

El <u>conjunto solución</u> de esta ecuación son las coordenadas del punto (2, 0). Este valor coincide con el lugar donde se intersecan, <u>la recta</u> que representa la función $f(x) = 2x - 4$, cuando la <u>x</u> toma el valor <u>2</u>, esto es, en el punto (2,0); <u>y el eje de las abcisas,(x)</u>, en la gráfica anterior.

EJEMPLO .- Tenemos la ecuación $3x - 3 = 0$

$f(x) = 3x - 3$

x	f(x)
-1	-6
0	-3
1	0
2	3
3	6



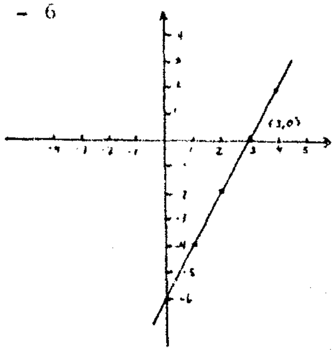
El conjunto solución para $3x - 3 = 0$, son las coordenadas del punto (1,0), pues si x=1: $3(1) - 3 = 0$ y vemos que se verifica la ecuación. $3 - 3 = 0$

En la gráfica podemos ver que cuando $x = 1$, $f(x) = 0$, obtenemos las coordenadas (1,0), estas se localizan en el lugar donde la recta que representa la ecuación intersecta el eje <u>x</u>.

EJEMPLO.- Tenemos la ecuación $2x - 6 = 0$ podemos escribirla como una función y formar una tabla como anteriormente:

$f(x) = 2x - 6$

x	f(x)
0	-6
1	-4
2	-2
3	0
4	2



El conjunto solución para $2x - 6 = 0$ es $(3,0)$ pues solamente $x = 3$ verifica la ecuación: $2(3) - 6 = 0$

$$6 - 6 = 0$$

Observando la gráfica, vemos que cuando $x=3$, $f(x)=0$ tenemos las coordenadas $(3,0)$ que es el punto donde la recta que representa la ecuación corta al eje $\underline{x}$. Por lo tanto, podemos concluír que una ecuación del tipo $ax + b = 0$ como son los ejemplos anteriores, tiene por solución <u>las coordenadas del punto donde la recta correspondiente a la ecuación, corta al eje de las x</u>.

Supongamos ahora que tenemos la siguiente ecuación:

$$x + y = 12$$

Tenemos aquí una ecuación con <u>dos</u> variables o incógnitas. Podemos darnos cuenta que:

$$8 + 4 = 12$$
$$3 + 9 = 12$$
$$6 + 6 = 12$$
$$7 + 5 = 12$$
$$0 + 12 = 12$$
$$-8 + 20 = 12$$
$$-9 + 21 = 12$$
$$-11 + 23 = 12$$

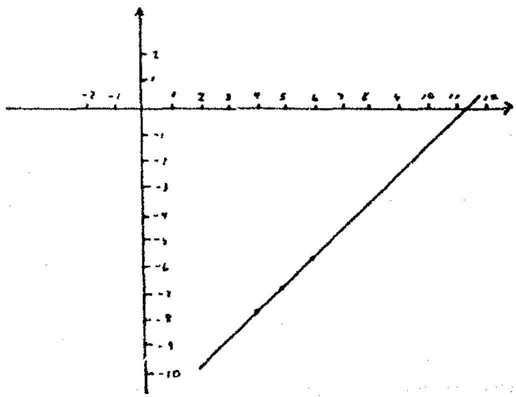
Cuantas parejas de números enteros hacen verdadera la proposición $x + y = 12$? Hay una infinidad de parejas. Si todas estas parejas hacen verdadera la proposición, todas ellas son solución de la ecuación $x + y = 12$, por lo tanto el Conjunto Solución de esta ecuación es <u>infinito</u>.

Tratemos de representar gráficamente esta ecuación:

$$x + y = 12$$

La podemos escribir como función: $y = 12 - x$, si hacemos una tabla tenemos:

x	y	y = 12 - x
4	8	$y = 12 - 4 = 8$
5	7	$y = 12 - 5 = 7$
6	6	$y = 12 - 6 = 6$
7		$y = 12 - 7 =$
8		
9		



Completa la tabla anterior.

Graficamos los puntos obtenidos y vemos que cualquier punto de la recta satisface la ecuación: x + y = 12, entonces podemos concluír que las coordenadas de los puntos de la recta y solo las de estos puntos son soluciones de la ecuación dada. Por lo tanto, el conjunto solución de esta ecuación es infinito y esta formado por todos los pares de números que satisfacen la ecuación $x + y = 12$. Observemos que si consideramos cualquier punto que no está en la recta, sus coordenadas no serán solución de la ecuación, esto es, nó satisfarán la ecuación.

En los ejemplos anteriores, hemos visto que toda ecuación se puede escribir como una función y obtener representaciones gráficas de dichas ecuaciones .

EJEMPLO.- Tenemos la ecuación: $x - y = 2$, algunos valores que la satisfacen serían:

$$x - y = 2$$
$$4 - 2 = 2$$
$$5 - 3 = 2$$
$$2 - 0 = 2$$
$$-3-(-5) = 2$$

Podemos asociarle a la ecuación $x - y = 2$, la función:

$$y = x - 2$$

Hacemos una tabla dándole valores a x:

x	y	$y = x - 2$
4	2	$y = 4 - 2 = 2$
5	3	$y = 5 - 2 = 3$
6	4	$y = 6 - 2 = 4$
7		$y = 7 - 2 =$
8		

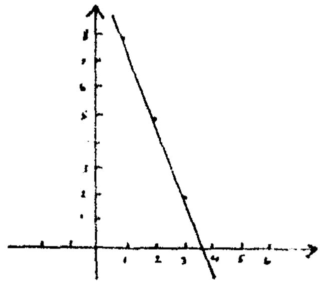
Completa la tabla.

Graficando, tenemos que cualquier punto de la recta satisface la ecuación $x - y = 2$, por lo tanto el conjunto solución de esta ecuación es infinito y consta de todos los pares de números que satisfacen la ecuación.

EJEMPLO.- Tenemos la ecuación $3x + y = 11$, la escribimos como función: $y = 11 - 3x$ y elaboramos una tabla dándole valores a x para obtener el correspondiente a y:

x	y	$y = 11 - 3x$
-1	14	$y = 11 - 3(-1) = 14$
0	11	$y = 11 - 3(0\ ) = 11$
1	8	$y = 11 - 3(\ 1) = 8$

x	y	y = 11 - 3x
2	5	y = 11 - 3(2) = 5
3	2	y = 11 - 3(3) = 2
4		
5		
6		

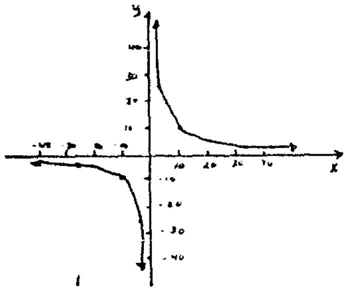


Complementa la tabla. De nuevo, el conjunto solución de esta ecuación, son las coordenadas de los puntos que estan sobre la recta y que satisfacen la ecuación.

No todas las ecuaciones resultan en rectas. Ya has visto como están relacionadas la velocidad, el tiempo y la distancia en cursos anteriores. Sabemos que $v = \frac{d}{t}$. Si fijamos la distancia d=100, entonces: $v = \frac{100}{t}$. Ahora, hacemos x = t y y = v, por lo que nos queda la ecuación : $y = \frac{100}{x}$. Dando valores a la variable x, obtenemos la siguiente tabla:

x	y	y = 100/x
10	10	y = 100/10 = 10
25	4	y = 100/25 = 4
4	25	y = 100/4 = 25
-10	-10	y = 100/-10=-10
-25	-4	y = 100/-25= -4
-4	-25	y = 100/-4 =-25

Graficando estos puntos resulta una curva llamada hipérbola:



El conjunto solución de esta ecuación será el conjunto de coordenadas de los puntos que satisfacen la ecuación.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Da 3 puntos de la ecuación 2x - 4 = 0 que nó estén mencionados en el ejemplo de la Lección y grafícalos.

2.- Define conjunto solución de una ecuación.

3.- Con que letras, por lo general, se representan las incógnitas en las ecuaciones?

4.- Que es una ecuación?

5.- Da 3 puntos de la ecuación $x + y = 12$ que nó estén mencionados en el ejemplo de la Lección y grafícalos.

6.- Observa las siguientes ecuaciones y anota una (V) si el valor de la incógnita hace verdadera la ecuación y (F) si nó.

a) $x+2 = 6$
$x=6$.....( )

b) $4y = 16$
$y=4$.....( )

c) $z - 12 = -3$
$z=9$........( )

d) $q/7 = 9$
$q=3$......( )

e) $y + 7 = 9$
$y=2$.......( )

7.- Encuentra el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $d + 3 = 5$ b) $5k = -15$ c) $20 = x/4$ d) $z/7= 5$

8.- Cuantos elementos tiene el conjunto solución de $x + 3 = 12$?

9.- Cuantas parejas de números enteros hacen verdadera la proposición $x + y = 16$?

<u>Preguntas para verificar la comprensión de la lectura</u>:

1.- Encuentra el conjunto solución para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $5 + 3 = h + 2$ b) $x - 7 = -2$ c) $z + 9 = 1$

2.- Encuentra y grafica 5 soluciones del conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $y = 10x$ b) $y = 3x + 1$ c) $x + y = 6$

d) $2x - y = 8$ e) $y = 4x$ f) $3x + y = 2\frac{1}{2}$

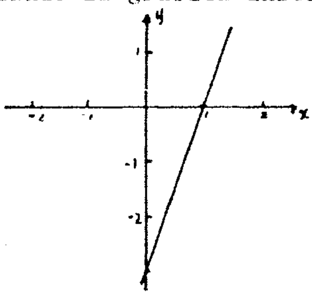
3.- Podemos decir que los conjuntos solución de las ecuaciones anteriores son:_______________.

4.- Elabora una tabla dándole valores a la <u>x</u> para la siguiente ecuación: $y = 15 - x$. Grafica los puntos. ¿Cualquier punto sobre la recta resultante satisface la ecuación?

5.- De cuantos elementos consta el conjunto solución de las ecuaciones dadas en la pregunta 1?

6.- Encuentra el conjunto solución para la siguiente ecuación sin hacer ningún cálculo, utilizando la gráfica únicamente:

$3x + 5 = 8$



Lección 2

ECUACIONES CON UNA SOLA INCOGNITA

En esta Lección veremos algunos ejemplos de ecuaciones del tipo que mencionamos al comienzo de la Lección 1, esto es, ecuaciones con una sola incógnita. Además, algunas técnicas que servirán para resolver estas ecuaciones, así como otros tipos de ecuaciones.

Los ejemplos que habíamos visto eran:

$2x - 4 = 0 \qquad 3x - 3 = 0 \qquad 2x - 6 = 0$, de

los cuales encontramos su solución gráficamente.

Podemos decir que estas ecuaciones tienen la forma general:

$$ax + b = c$$

donde, en estos tres casos la $c = 0$, la letra a es el coeficiente de la variable x y la letra b es el término independiente.

Los siguientes ejemplos también representan ecuaciones con una sola incógnita:

$$x - 2 = 0 \qquad 5x + 4 = 14 \qquad 8x - 24 = 0$$
$$2x = -3 \qquad 3x - 2 = 4 \qquad 6x + 3 = 21$$

Todos estos ejemplos representan ecuaciones con una sola incógnita.

Tomemos el ejemplo $6x + 3 = 21$, simplifiquemos un poco esta expresión:

Sumando -3 a ambos lados de la ecuación,

$$-3 + 6x + 3 = 21 - 3$$

nos queda: $$6x = 18$$

Multiplicando la ecuación por $1/6$,

$$(1/6)\ 6x = 18\ (1/6)$$
$$x = 18/6$$
$$x = 3$$

Verificamos el resultado substituyéndolo en la ecuación original: $$6(3) + 3 = 21$$
$$18 + 3 = 21$$

Por lo tanto, el conjunto solución de esta ecuación es $(3,0)$, pues la ecuación es verdadera para este valor.

Podemos graficar la ecuación. Escribiendo a $6x + 3 = 21$ como una función de x y dándole valores a x podemos encontrar puntos de la gráfica.

Tenemos: $6x + 3 = 21$

Sumando -21 a ambos lados nos queda:

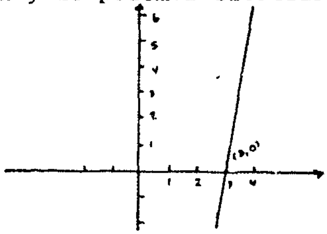
$$6x + 3 - 21 = 21 - 21$$

$$6x - 18 = 0$$

$6x - 18$ representa una función y lo podemos escribir:

$$f(x) = 6x - 18$$

x	f(x)
1	-12
2	-6
3	0
4	6
5	12



Sabemos que $x = 3$, por lo tanto, la recta que representa la función debe intersectar el eje $\underline{x}$ en el punto con coordenadas (3,0) como lo vimos en la Lección 1.

EJEMPLO.- Sea $x - 2 = 0$. Resolver la ecuación.

Sumando 2 a ambos lados de la ecuación:

$$2 + x - 2 = 0 + 2$$

$$x = 2$$

Verificamos: $(2) - 2 = 0$

EJEMPLO.- Sea $5x + 4 = 14$. Resolver la ecuación:

Sumando -4 a ambos lados de la ecuación:

$$5x + 4 - 4 = 14 - 4$$

$$5x = 10$$

Multiplicando la ecuación por 1/5:

$$(1/5)5x = 10(1/5)$$

$$x = 10/5$$

$$x = 2$$

Verificamos el resultado:

$$5(2) + 4 = 14$$

$$10 + 4 = 14$$

Para resolver esta ecuación y las anteriores hemos usado diversas propiedades de las igualdades, de las cuales haremos un repaso general a continuación.

Una ecuación con una variable es una proposición abierta. Un valor que hace que la expresión sea verdadera es el conjunto solución de la expresión.

Cada ecuación debajo tiene el conjunto solución {5,0}:

$2x = 10$ $\qquad \frac{x + 47}{13} = x - 1$ $\qquad -3 = x - 8$

Lo puedes verificar substituyendo el 5 en lugar de cada una de las x. Estas ecuaciones son equivalentes, pues tienen el mismo conjunto solución.

Es muy sencillo hacer expresiones equivalentes.

EJEMPLO.- De la ecuación $2x = 10$, su conjunto solución es 5 . Multipliquemos ambos lados de la ecuación por -4. Lo abreviaremos M_{-4}. A lo largo del texto, estas abreviaturas indicarán lo que se ha hecho al ir resolviendo una ecuación. M indicará multiplicación y S, suma.

Entonces, tenemos:

M_{-4} $$-4(2x) = -4(10)$$
$$-8x = -40$$

La solución de esta ecuación sigue siendo 5, como lo puedes verificar fácilmente. Este ejemplo ilustra una propiedad muy importante de la multiplicación:

Si $x = y$, entonces $ax = ay$

Ya la conoces como: Si multiplicamos ambos lados de una igualdad por el mismo número, la igualdad nó se altera.

EJEMPLO .- Si $x = y$, entonces $2x = 2y$

Otra propiedad muy útil es la "propiedad de adición de las igualdades". Lo ilustraremos con un ejemplo. Supongamos que tu edad actual es de x años y la de un amigo tuyo es y años. Dentro sw 5 años tu edad será de x+5 y la de tu amigo y+5. Si los dos tienen la misma edad ahora, entonces $x = y$ y dentro de 5 años sus edades serán las mismas. $x + 5 = y + 5$. La propiedad de adición para igualdades es:

Si $x = y$, entonces $a + x = a + y$

EJEMPLO.- Consideremos la siguiente ecuación: $-8 + x = 43$ Podemos sumarle cualquier número a ambos lados. En este caso nos conviene sumarle 8.

S_8 $$8 + (-8 + x) = 8 + 43$$
$$(8 + -8) + x = 51$$
$$0 + x = 51$$

Verificamos si la solución es correcta:

$$-8 + 51 = 43$$, por lo tanto es correcto.

Escogimos el 8 pues es el contrario de -8 y al sumárselo nos da 0, dejando sola a la variable $\underline{x}$.

EJEMPLO 2.- Resolver $3.4 + x = 6$

$S_{-3.4}$
$$-3.4 + 3.4 + x = 6 + (-3.4)$$
$$(-3.4 + 3.4) + x = 6 - 3.4$$
$$0 + x = 2.6$$

Substituímos esta respuesta en la ecuación original para verificar:

$$3.4 + 2.6 = 6$$

EJEMPLO 3.- Resolver: $x - 703 = -112$

S_{703}
$$703 + x - 703 = -112 + 703$$
$$x = 591$$

Verificamos: $591 - 703 = -112$

En los tres ejemplos anteriores puedes decir cuantos elementos contiene su conjunto solución?

En estos ejemplos, la incógnita no estaba despejada y aplicando la propiedad de la suma a igualdades conseguimos encontrar la solución. El uso de estas propiedades mediante un procedimiento para resolver un cierto tipo de problema recibe el nombre de <u>algoritmo</u>. Los algoritmos son muy comunes dentro y fuera de las matemáticas. Por ejemplo, si el problema fuera armar un carrito a escala, las instrucciones serían el algoritmo. Si el problema fuera cocinar un pastel, la receta sería el algoritmo. Pues en cada caso, nos indican un determinado proceso para llegar a la solución de un problema.

Es muy útil saber algunos algoritmos para resolver ecuaciones. Comenzaremos con ecuaciones de la forma:

$$\underline{ax = b}$$

Si queremos resolver la ecuación para $\underline{x}$, la llamamos la <u>incógnita</u>; la <u>a</u> representa el <u>coeficiente</u> de $\underline{x}$ y la <u>b</u> representa el <u>término independiente</u> de la igualdad.

EJEMPLOS:

$3/4\ x = 30$	La incógnita es $\underline{x}$, $3/4$ es el coeficiente de x y 30 el término independiente.
$5x = 35$	La incógnita es $\underline{x}$, 5 es el coeficiente de $\underline{x}$ y 35 el término independiente.
$2/3\ m = 40$	La incógnita es $\underline{m}$, el coeficiente de m es $2/3$ y 40 el término independiente.

Resolveremos el último:

EJEMPLO 1.- $2/3\ m = 40$

Podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por cualquier número. En este caso es aconsejable multiplicar por 3/2.

$M_{3/2}$: $$3/2(2/3\ m) = 3/2\ (40)$$
$$(3/2 \cdot 2/3)m = 120/2 \quad \text{(Por la propiedad asociativa)}$$
$$1 \cdot m = 60$$

Escogimos 3/2 porque es el recíproco de 2/3 y como recordarás, al multiplicar recíprocos, el resultado es 1, dejando sola la variable m de un lado y el resultado del otro.

Para verificar el resultado, substituímos 60 en la ecuación original y tenemos: $$2/3\ (60) = 40$$
$$120/3 = 40$$
$$40 = 40$$

Todas las ecuaciones de esta forma se resuelven así.

Algoritmo 1.- Para resolver $ax=b$, para x, multiplica ambos lados de la ecuación por $1/a$, el recíproco de a.

EJEMPLO 2.- Resolver $-4x = 2/3$

$M_{-1/4}$: $$-1/4(-4x) = -1/4(2/3)$$
$$(-1/4)(-4)\ x = -\ 2/12$$
$$x = -\ 1/6$$

Verificamos: $-4(-1/6) = 2/3$

$4/6 = 2/3$ por lo tanto, esta correcto.

Si recuerdas, multiplicar por $1/a$ es lo mismo que dividir entre a, de tal modo que el algoritmo puede quedar en otras palabras como:

Para resolver $ax = b$, divide ambos lados de la ecuación entre a.

Otro algoritmo de utilidad es el utilizado para resolver ecuaciones de la forma:

$$a + x = b$$

De estas ecuaciones ya hemos visto varios ejemplos:

$-8 + x = 43$

$3.4 + x = 6$

$x - 703 = -112$

En cada uno de estos ejemplos, le sumamos a ambos lados de la ecuación el término opuesto al término a para resolverla. Por ejemplo:

EJEMPLO 1.- Sea la ecuación $-5 + x = 32$

S_5: $$5 + (-5) + x = 32 + 5$$

$$(5 + -5) + x = 37$$
$$0 + x = 37$$

Verificamos el resultado: $-5 + 37 = 32$, correcto.

EJEMPLO 2.- Resolver $x + 3 = 55$

S_{-3}: $$-3 + x + 3 = 55 - 3$$
$$(-3 + 3) + x = 52$$
$$0 + x = 52$$

Verificamos: $52 + 3 = 55$

Algoritmo 2.- Para resolver $a + x = b$, se le suma $\underline{-a}$ a ambos lados de la ecuación.

EJEMPLO 3.- $1.2 + m = 6$. Esta ecuación es de la forma $a + x = b$ por lo tanto, para resolverla le sumamos -1.2 a ambos lados y simplificamos:

$S_{-1.2}$: $$-1.2 + 1.2 + m = 6 + (-1.2)$$
$$(-1.2 + 1.2) + m = 4.8$$
$$0 + m = 4.8$$

Verificando el resultado: $1.2 + 4.8 = 6$
$$6 = 6$$

Por último, veremos un algoritmo para resolver una expresión lineal que pudiera llamarse una combinación de lo anterior. Esto es, ecuaciones con la forma general:

$$ax + b = c$$

EJEMPLO 1.- Resuelve $3x + 14 = -10$

S_{-14}: $$-14 + 3x + 14 = -10 - 14$$
$$3x = -24$$

$M_{1/3}$: $$(1/3)\ 3x = -24\ (1/3)$$
$$(1/3)(3)x = -24/3$$
$$x = -8$$

Verificamos la respuesta:

$$3(-8) + 14 = -10$$
$$-24 + 14 = -10$$

EJEMPLO 2.- Resuelve $2/3 = 3/4x - 2/5$

$S_{2/5}$: $$2/5 + 2/3 = 3/4x - 2/5 + 2/5$$
$$16/15 = 3/4(x)$$

$M_{4/3}$: $$(4/3)16/15 = (4/3)(3/4)x$$
$$64/45 = x$$

Comprobamos que el resultado esta bien substituyéndolo en la ecuación original: $2/3 = 3/4\ (64/45) - 2/5$

Efectuando operaciones tenemos que:

$$2/3 = 192/180$$

Simplificando 192/180 nos queda:

$$2/3 = 2/3$$

Observa los ejemplos anteriores. Las ecuaciones son de la forma $ax + b = c$ y para resolverlas realizamos dos pasos: Sumar y multiplicar, por lo que podemos enunciar el siguiente algoritmo:

Algoritmo 3.- Para resolver $ax + b = c$ para x, primero sumamos $-\underline{b}$ (el opuesto) a ambos lados de la ecuación, y la ecuación resultante al hacer esto la podemos resolver mediante el Algoritmo 1.

EJEMPLO 3.- Resolver $-8x + 6 = 38$

S_{-6}: $$-6 - 8x + 6 = 38 - 6$$

$$-8x = 32$$

$M_{-1/8}$: $$(-1/8)(-8)x = 32\ (-1/8)$$

$$x = -32/8$$

$$x = -4$$

Verificamos: $-8(-4) + 6 = 38$

$32 + 6 = 38$

Algunas ecuaciones pudieran parecer más complicadas, pero mediante los algoritmos que hemos visto podrás resolverlas aplicando las propiedades de suma y multiplicación de igualdades.

<u>El objetivo será siempre despejar la incógnita y obtener el resultado correspondiente</u>. En la siguiente Lección veremos algunas aplicaciones de estas ecuaciones.

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1.- Resuelve $3x - 5 = x + 3$.

Necesitamos "reunir" nuestras incógnitas, por lo que sumamos $-x$ a cada lado de la ecuación.

S_{-x}: $$-x + 3x - 5 = -x + x + 3$$

$$2x - 5 = 3$$

Si quitamos el 5, la ecuación nos queda de la forma $ax = b$ que ya sabemos resolver.

S_5: $$5 + 2x - 5 = 3 + 5$$

$$2x = 8$$

$M_{1/2}$: $$(1/2)2x = 8\ (1/2)$$

$$x = 8/2$$

$$x = 4$$

Verificamos: $3(4) - 5 = 4 + 3$

$12 - 5 = 7$

EJEMPLO 2.- Resuelve: $3x - (2x - 1) = 7x - (3-5x) + (-x+24)$
Lo primero que se necesita hacer es simplificar la expresión reduciéndola lo más posible. Empezaremos quitando paréntesis.

$$3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$$
$$3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x - x + 24$$

Si observas, los términos que estaban dentro de paréntesis precedidos de un signo de resta cambiaron de signo. De cursos anteriores recordarás que en una resta algebraica el sustraendo cambia de signo a todos sus términos. Si es suma, permanecen igual y sólo se eliminan los paréntesis.

Ahora, sumamos incógnitas de cada lado lo mismo que términos independientes. Nos queda:

$$x + 1 = 11x + 21$$

Reunimos las incógnitas de un sólo lado:

S_{-11x}: $\quad -11x + x + 1 = 11x + 21 - 11x$

$$-10x + 1 = 21$$

S_{-1}: $\quad -1 - 10x + 1 = 21 - 1$

$$-10x = 20 \quad \text{(Ecuación de la forma } ax=b\text{)}$$

$M_{-1/10}$ $\quad (-1/10)(-10)x = 20(-1/10)$

$$x = -20/10$$
$$x = -2$$

Verificamos el resultado:

$$3(-2) - (2(-2) - 1) = 7(-2) - (3 - 5(-2)) + (-(-2)+24)$$
$$-6 - (-4) + 1 = -14 - 3 - 10 + 2 + 24$$
$$-6 + 4 + 1 = -27 + 26$$
$$-1 = -1$$

Por lo tanto el resultado esta correcto.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Define "ecuaciones equivalentes" y da un ejemplo.

2.- Supongamos $x=8$. Contesta falso o verdadero lo siguiente.

a) $3x = 38$ b) $3x = 24$ c) $3x = 11$

3.- La ecuación $-3x = 42$ tiene solución -14. Multiplica cada lado por: a) 5 b) 3 c) -10 d) $-1/3$

Que ecuación resulta al efectuar cada una de estas multiplicaciones? Es -14 una solución a cada una de estas?

4.- Aplica la multiplicación por el número que se indica a cada ecuación:

a) $5x = 110$; $M_{1/5}$ b) $ab = c$; $M_{1/a}$

c) $7 = 2y/3$; $M_{3/2}$ d) $6t = 12$; M_{-6}

5.- Para cada ecuación:

I) Cuál es la incógnita
II) Cuál es el coeficiente
III) Resuélvela y verifica la respuesta

a) 3v=8 b) 17=-16y c) 2t/5= 4/35

d) 2/3 = x/4 e) 1.5x = 39 f) 10000w=1

g) Resuelve para d: r= d/t h) Resuelve para x: ax=b

i) .75A = 4 j) x/6= -3 k) -19k=-18

l) 75% de b es 1464 m) 9y=3 n) 4 = 3/5m

6.- Aplica la operación que se indica a ambos lados de la ecuación: 42 + x = 59, después simplifica y resuelve, verificando tu respuesta.

a) S_{42} b) S_{59} c) $M_{1/42}$ d) S_{-42}

7.- Cuál de las operaciones anteriores es la más útil para resolver la ecuación anterior?

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba si la solución es la correcta.

a) 89 = 97 + x b) 1 + k = -1 c) B+(-6)=41.2

d) -13/5 = y + 1/5 e) A + 3 = -8 f) -10 = m + 30

g) a - 1.3 = .6 h) b -(-24)= 12 i) -25 = x - 4

j) 1/2 = y - 1/2 k) m - 73 = -862 l) n - 1.42 = -1.2

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba si la solución es correcta:

a) 2v + 3 = -4 b) 6 + 14m = 90 c) -2 + 7y = 26

d) -47 = -7 -20x e) 8 = 4x + 9 f) -4A - 119 = 211

g) 5 - 2v = 40 h) 2/3x +10 = 4 i) 1/2 = 4 - 3/2x

10.- Para resolver ax + b = c, para x, que se puede hacer?

11.- Para resolver 5y - t = 9 para y, que se puede hacer?

12.- Resuelve y comprueba la respuesta.

a) 4t + 78 = 150 b) 11 = 17 + 2u c) 9x - 20 = 142

d) 11y + 6 = -5 e) 8z + 2 = 5 f) -3w - 18 = 12

g) 7 = 6 + 2b h) 7.2 + .3g = 3.9 i) -2 = E/5 + 6

13.- Elimina los paréntesis en las siguientes expresiones:

a) -(2+6x) b) 4-2(x+7) c) -(t-4)

d) x+(y+x) e) -(3v-1) f) -6-8(1/2+2m)

g) -100+80(-3q-r) h) a-(b-c) i) 14(2c+d)

j) 8(a+b) k) 14(2c+d) l) -1(-3+x)

m) 2/3(47+9) n) m(-2n+4) o) -7/8(-16a-b)

p) -3(2u+v) q) d(-2-e) r) 3(a+b-c)

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Resuelve y comprueba las siguientes ecuaciones:

a) $b - (-24= = 12$ b) $2 + x = 3/7$ c) $.083+t= .947$

d) $u+3/5=1/3$ e) $-11+(-11)=-12+d$ f) $8m+3+5=0$

g) $11-6y=35+6$ h) $3(2x-11)=-8$ i) $5(2+y)=2$

j) $11-(3c+4)=17$ k) $7-2(y-12)=6$ l) $1-(B-2)=6$

m) $x+3(x-1)=6-4(2x+3)$ n) $x-(2x-1)=8-(3x+3)$

o) $15x-10=6x-(x+2)+(-x+3)$ p) $6x-(2x+1)=-(-5x(-(-2x-1)))$

q) $5(x-1)+16(2x+3)=3(2x-7)-x$ r) $2(n+4)-3n=4$

s) $-3(2x+7)+(-5x+6)-8(1-2x)-(x-3)=0$ t) $x-30-3/4(x\cdot 30)=30$

u) $9(m-2)+2(m+4)=12$ v) $-(x-3)-(3-x)=4$ w) $3/5+3/2x-1=0$

Ejercicios de aplicación de la lectura:

1.- Realiza los siguientes ejercicios mentalmente:

a) Supongamos $30x=2/5$. Entonces $60x=$_______

b) Dado $4y=.039$, entonces $4000y=$__________

c) Dado $6z=10$, entonces $3x=$____________

d) Dado $8a=5b$, entonces $40a=$____________

2.- En la fórmula $v=d/t$, que indican v,d,t? Cuál es la forma más común de escribir esta fórmula?

3.- Resuelve para m: $F = ma$

4.- Resuelve para h: $A = 1/2\ bh$

5.- Sea P el perímetro de un triángulo. Sean x,y,z, las longitudes de los lados del triángulo. El perímetro esta dado por la fórmula: $P = x + y + z$. Calcula x, si $P = 100$, $y = 26$ y $z = 56$.

6.- Con los mismos datos del ejercicio anterior, cuanto medirá z, si $x=1.29m$, $y=1.68m$ y $P=3.43m$?

7.- Si 1 onza de carne molida para hamburguesa tiene aproximadamente 80 calorías, un bollo 200 calorías y una papa frita 14 calorías; entonces si comes h onzas de carne en un bollo y p papas fritas, habrás consumido: $80h + 200 + 14p =$calorías.

Si comes 25 papas fritas, que tanto de hamburguesa puedes ordenar y consumir solo 1000 calorías en esa comida?

8.- Supongamos que empiezas a guardar 800 pesos en una alcancía.

a) Si agregas 250 pesos a la semana, cuantas semanas necesitas para juntar 2500 pesos?

b) Si quieres tener 3000 pesos para el primero de Diciembre y puedes ahorrar 150 pesos a la semana, cuantas semanas antes del 1o de Diciembre debes comenzar a incrementar tu alcancía?

Lección 3

SOLUCION DE PROBLEMAS UTILIZANDO ECUACIONES

Hasta aquí hemos visto como resolver ecuaciones y algunos problemas sencillos de los cuales ya habíamos resuelto algún ejemplo.

Sin embargo, en la vida real los problemas no se presentan inmediatamente después de un ejemplo, por lo que es necesario plantearlo y resolverlo por uno mismo. Posiblemente no utilices los tipos básicos de problemas que se presentan en cualquier libro de álgebra en la vida diaria, en la oficina o en la fábrica; pero lo que te enseñan son los procedimientos básicos que podrás utilizar en cualquier parte.

En la Lección veremos algunos ejemplos y sugerencias de como plantear y resolver problemas. Para resolver problemas es necesario practicar y practicar. Tan sólo leer esta sección no servirá de nada a menos que realices bastantes ejercicios.

Para los problemas propuestos en esta Lección y en general, habrá de realizarse lo siguiente:

(a) Dar una ecuación para solucionar el problema

(b) Resolver la ecuación

(c) Contestar el problema

(d) Verificar la respuesta

La parte (a) posiblemente sea la más difícil de realizar. Como dijimos anteriormente, el resolver problemas es una cuestión de habilidad y práctica. A continuación encontrarás unas sugerencias muy útiles para resolver la parte (a), que puede resultar la de mayor dificultad.

Para resolver un problema, se puede dividir el proceso en 5 fases:

1o- Comprender el problema. Para esto tienes que familiarizarte con el problema. Ver claramente que es lo que se pide. Por donde empezar? Por el enunciado. Exáminalo detenidamente. Preguntate a tí mismo: Cuál es la incógnita? Cuales son los datos? Cuál es la condición?

2 2o- <u>Captar las relaciones entre los elementos</u>. Esto es, ver lo que liga a la incógnita con los datos y a los datos entre sí, a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Preguntate: Qué operación parece estar involucrada aquí? Hay algún modelo que se aplique a esta situación? Podría resolver el problema si los números fueran más simples? Intenta esto último. Vé si puedes encontrar el modelo usando números más simples. Si se sugiere alguna figura, dibújala.

3o- <u>Traducir el problema</u>. En esta parte tendrás que pasar las palabras a símbolos algebraicos que puedas utilizar. Relee el problema de nuevo. Léelo parte por parte. Los problemas sencillos por lo general tienen dos enunciados. Uno te sirve para establecer la o las incógnitas y el otro proporciona información para la ecuación. Traduce el problema de palabras a símbolos parte por parte.

Empieza cada problema con "Sea x = algo". Esta <u>x</u> representa lo que andamos buscando. Por lo general se nos dice qué buscamos al final del problema. Si hay más de una cantidad o incógnita que encontrar, trata de determinar cuál es <u>la más pequeña</u>, y a esta denomínala <u>x</u>.

A continuación encontrarás algunos ejemplos de traducción de enunciados muy comunes, a símbolos algebraicos. Así mismo, encontrarás una lista de términos con su significado. Todo esto, después de los puntos 4o y 5o.

4o- <u>Ejecución del plan</u>. Esto es, mediante técnicas que conoces, resolver la ecuaciónnque has planteado.

5o- <u>Revisión y discusión de la solución</u>. Una vez que has encontrado la solución, volver atrás y revisarla. Pregúntate: Utilicé todos los datos? Puedo verificar el resultado? Puedo verificar el razonamiento?

<u>Lista de Enunciados más comunes</u>:

<u>ENUNCIADO</u>	<u>ALGEBRA</u>
1. El doble de la incógnita	2x
2. Dos menos que la incógnita	x - 2
3. Ocho más que la incógnita	x + 8
4. La edad de Fulano hace 11 años	x - 11
5. La distancia recorrida en <u>x</u> horas a 80kmph	80x

6. Dos enteros consecutivos — $\underline{x}$ y $x + 1$
7. Dos enteros consecutivos pares o impares — $\underline{x}$ y $x + 2$
8. 50000 separados en dos partes — $\underline{x}$ y $50000 - x$
9. El cuádruple de un número — $4x$
10. Número de centavos en $\underline{x}$ pesos — $100x$
11. Tres cuartos de un número — $(3/4)x$

<u>TERMINOS PARA RECORDAR:</u>

1."Veces" significa multiplicar
2."Más que" significa sumar
3."Diferencia" significa restar
4.Separar un número en dos partes significa encontrar dos números cuya suma sea el número original.
5."Porcentaje de" significa multiplicar
6."Es", "fué", "será", por lo general indica el signo (=).

En seguida resolveremos algunos ejemplos de problemas. Por lo general, se pueden agrupar en distintos <u>tipos</u> de problemas. Problemas sobre edades, sobre números, sobre tiempo, velocidad y distancia, mezclas (ej. de pintura y aguarrás, de dinero y boletos, dinero y otros artículos, porcentaje de alcohol en una solución, etc.), sobre monedas, figuras geométricas, etc.

En los siguientes ejemplos, tú mismo podrás clasificar de que tipo de problema se trata.

EJEMPLO.- Juan tenía una cierta cantidad de dinero. Gastó 300 pesos en libros, y los 3/4 de lo que le quedó, se lo gastó en ropa. Después de estos gastos le quedan 350 pesos. Cuanto tenía al principio?

¿Cuál es la incógnita? ¿Qué es lo que buscamos? <u>Buscamos la cantidad que tenía al principio</u>, por tanto:

Sea x = lo que tenía al principio.

¿Cuales son los datos? Sabemos que gastó 300 pesos en libros, entonces $(x - 300)$ sería lo que le quedó al gastar en libros. Pero aún gastó más, en ropa se gastó 3/4 partes de lo que le quedaba, o sea $3/4(x-300)$.

Puedes decir cuál sería la condición en este problema? Efectivamente, que le quedaron 350 pesos al final. Entonces, si a lo que le quedó después del primer gasto le quitamos lo que gastó en ropa, le deben quedar 350. Por tanto, tenemos la ecuación:

$$(x - 300) - 3/4(x - 300) = 350$$

Resolvemos la ecuación de este problema que parecía complicado:

$$(x - 300) - 3/4(x - 300) = 350$$

M_4: $$4(x-300) - 4\left(\frac{3(x - 300)}{4}\right) = 4(350)$$

$$4x - 1200 - 3x + 900 = 1400$$

Reuniendo términos:

$$x - 300 = 1400$$

S_{300}: $$300 + x - 300 = 1400 + 300$$

$$x = 1700$$

Entonces, Juan tenía 1700 pesos antes de empezar a gastar.

Verifiquemos el proceso:

Juan tenía 1700 pesos y gasto 300. Le quedó:

$$1700 - 300 = 1400$$

Gastó 3/4 de esto en ropa:

$\frac{3}{4}(1400) = \frac{4200}{4} = 1050$ pesos en ropa, por tanto:

$$(1400) - (1050) = 350$$

(lo que tenía - gasto en libros) - (gasto en ropa) = lo que le quedó.

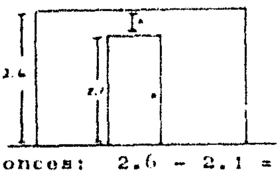
EJEMPLO 2.- El techo de una habitación mide 2.6m de alto y la puerta mide 2.1m de alto. Cuanto espacio hay entre lo alto de la puerta y el techo?

¿Qué buscamos? ¿Cuál es la incógnita?

En este caso, es el espacio entre la puerta y el techo.

Sea x = el espacio entre la puerta y el techo.

¿Qué datos tenemos? El techo mide 2.6m de alto y la puerta 2.1m de altura. ¿Podemos hacer un dibujo?



Lo puedes ver más claro? Si a lo que mide el techo le quitamos lo que mide la puerta, encuentras lo que buscas?

Entonces: $2.6 - 2.1 = x$

Resolviendo: $.5 = x$, por lo tanto esta es la distancia entre la puerta y el techo.

Revisamos la respuesta:

$$2.1 + .5 = 2.6$$

altura de la puerta + distancia al techo = altura del techo

EJEMPLO 3.- Un estudiante dispone de 64 pesos para comprar sobres aéreos a 3 pesos cada uno y lápices a 5 pesos cada uno. ¿Cuantos sobres y cuantos lápices puede comprar con ese dinero?

¿Cuál es la incógnita? En este caso tenemos dos: cuantos sobres y cuantos lápices. Por tanto,

Sea x = número de sobres

Sea y = número de lápices

¿Cuales son los datos? Cada sobre cuesta 3 pesos, entonces <u>x</u> sobres costarán 3x. Cada lápiz cuesta 5 pesos, entonces <u>y</u> lápices costarán 5y.

¿Cuál es la condición? Que sólo tenemos 64 pesos.

Entonces: $3x + 5y = 64$

Esto es, qué tantos sobres de 3 pesos, más qué tantos lápices de 5 pesos hacen un total de 64?

Esta ecuación es del tipo indeterminado que vimos en las primeras Lecciones de la Unidad. Entonces, dándole valores enteros y positivos (nó puedes comprar 1/2 lápiz o -3 sobres) podemos encontrar algunas soluciones:

Si compramos 3 sobres:

$$3(3) + 5y = 64$$

$$9 + 5y = 64$$

S_{-9}: $$5y = 64 - 9$$

$$5y = 55$$

$M_{1/5}$: $$\left(\frac{1}{5}\right)5y = 55\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$y = 11$$

Podemos comprar 11 lápices.

Si compramos 5 lápices:

$$3x + 5(5) = 64$$

$$3x + 25 = 64$$

S_{-25}: $$3x = 64 - 25$$

$$3x = 39$$

$M_{1/3}$: $$x = 39/3$$

$$x = 13$$

Podemos comprar 13 sobres.

EJEMPLO 4.- Tenemos dos números cuya suma es 72. Un número es el doble del otro. Cuales son los números? ¿Qué se nos pide? ¿Cuál es la incógnita? Es un problema sobre números y nos piden dos números. En la fase 3 al principio de la Lección dice que si hay más de una cantidad o incógnita por determinar, tratemos de establecer cuál es la más pequeña y a esta denominarla x. Por tanto,

Sea x = al menor de los números.

¿Qué otro dato se nos da? Leyendo el problema vemos que dice "un número es el doble del otro", entonces podemos determinar la otra incógnita. Por lo tanto ya tenemos:

Sea x = al menor de los números

2x = al mayor de los números

¿Que otro dato nos falta de utilizar? El hecho de que la suma de los dos es 72. Entonces:

$$x + 2x = 72$$

Ahora resolvemos:

$$3x = 72$$

$M_{1/3}$: $$x = 72/3$$

$$x = 24$$

Entonces, si x es igual a 24, este es el número menor y el mayor es el doble, por tanto el otro número será: 48.

Verificando: La suma de los números es 72, entonces

$$24 + 48 = 72$$

La respuesta es correcta.

En este tipo de problema y en el siguiente, verás más adelante que es más sencillo plantear un sistema con dos ecuaciones con dos incógnitas y resolverlo.

EJEMPLO 5.- El papá de José es 26 años mayor que José. En 10 años, la suma de sus edades será de 80 años. Cuales son sus edades en este momento?

¿Cuál es la incógnita? Tenemos que el problema es sobre edad y nos piden dos. Determinemos la menor:

Sea x = la edad de José actualmente,

y sea x + 26 = la edad del papá de José actualmente.

Dentro de 10 años sus edades serán:

x + 10 = la edad de José en 10 años

(x + 26)+10 = la edad del papá de José en 10 años.

¿Qué otro dato nos dan? Que en 10 años sus edades sumarán 80 años. Entonces:

$$x + 10 + (x + 26) + 10 = 80$$

Resolvemos la ecuación:

Reuniendo términos tenemos: $2x + 46 = 80$

S_{-46}: $2x = 80 - 46$

$2x = 34$

$M_{1/2}$: $x = 34/2$

$x = 17$

Por lo tanto, la edad de José actualmente = x = 17 y su papá de José es 26 años mayor, entonces 17 + 26 = 43, que es la edad del papá de José.

Verificamos: En 10 años José tendrá 27 y su papá 53 y ambas edades deben sumar 80, entonces:

$$53 + 27 = 80$$

Por lo tanto, la respuesta es correcta.

EJEMPLO 6.- Los boletos para una función de caridad se venden a 75 pesos niños y 200 para adultos. Si se vendieron 4 veces más boletos de adultos que de niños y el total de la recaudación fué de 175000, cuantos boletos de niños se vendieron?

¿Cuál es la incógnita? El número de boletos para niños.

Sea x = el número de boletos para niños a 75 c/u entonces, 4x = el número de boletos de adultos a 200 pesos c/u, pues se vendieron 4 veces más boletos de adultos.

75x = total de dinero recibido de boletos de niño

200(4x) = total de dinero recibido de boletos de adultos.

¿Qué otro dato tenemos? Que el total de la recaudación fué de 175000 pesos, entonces tenemos:

$$75x + 200(4x) = 175000 \qquad \text{..................(1)}$$

Resolviendo la ecuación, quitamos paréntesis:

$75x + 800x = 175000$

$875x = 175000$

$M_{1/875}$: $x = 175000/875$

$x = 200$

Por lo tanto, x = número de boletos para niño = 200 boletos.

Para verificar el procedimiento, substituímos este valor en (1), y obtenemos:

$$75(200) + 200(4(200)) = 175000$$
$$15000 + 160000 = 175000$$

El resultado obtenido por lo tanto, es correcto.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- En general, para resolver un problema que se debe hacer?

2.- Que quiere decir "traducir el problema"?

3.- Si hay más de una incógnita, que se debe hacer?

4.- "Traduce" lo siguiente:

a) 5 menos que la incógnita

b) La edad de Laura hace 8 años

c) 15000 separados en dos partes

d) el triple de un número

e) dos enteros consecutivos

f) Las tres quintas partes de un número reducido en 3 unidades

g) El doble de un número incrementado en cinco

h) la diferencia de dos números consecutivos

i) la distancia recorrida en 4 horas a 100kmph es 400

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Explica las 5 fases en que se ha dividido el proceso de resolver un problema.

2.- El término "diferencia" en el enunciado de un problema nos indica que hay que ______________.

3.- "Veces" es un término que en el enunciado de un problema nos indica que hay que multiplicar, menciona otro término que también indica multiplicación.

4.- Menciona una situación en que te pueda ser de utilidad los conceptos estudiados sobre resolución de problemas.

Ejercicios de aplicación de la lectura:

1.- Dos niños quieren hacerle un regalo a sus papás y este cuesta 50 pesos. Si un niño tiene x pesos ahorrados, cuanto necesita tener ahorrado el otro niño?

2.- Una pared mide 3.20m de ancho y quieres colocar un sillón que mide 2.73m. Puedes colocar a un lado del sillón una mesa de .70m de ancho?

3.- Supongamos que tienes 1113.50 pesos en una cuenta de cheques. El banco no carga comisión si tienes 800 pesos como mínimo en la cuenta. Que cantidad puedes gastar sin que el banco cargue comisión?

4.- Una receta en un paquete de Rice Krispies dice que rinde 24 porciones con los siguientes ingredientes:
1/4 de taza de mantequilla
40 malvaviscos
5 tazas de Rice Krispies
Supongamos que tienes la mantequilla y los Rice Krispies, pero solo 25 malvaviscos. Cuantas porciones rendirá la receta?
5.- Un ganadero compró caballos y vacas por 410000. Cada caballo le costó 4600 y cada vaca 4400. Cuantos caballos y vacas compró?
6.- Una tienda compró 500 trajes. Una parte a 7000 cada uno y el resto a 9000 cada uno. Si el costo total de los trajes fué de 3740000, cuantos trajes se compraron de cada precio?
7.- Hay un número tal que tres veces el número menos 6 es igual a 45. Encuentra el número.
8.- Un hombre tiene 4 veces la edad de su hijo. En 3 años, el padre será tres veces mayor que el hijo. Cuales son sus edades actuales?
9.- Una caja de empaque pesa 6kg vacía y puede resistir hasta 40kg de carga incluyendo el propio peso, sin romperse. Da la ecuación que resuelva la situación y resuélvela:

a) Cuantas naranjas de .2kg puede contener?
b) Cuantos limones de .15kg puede contener?
c) Cuantas toronjas de .5kg puede contener?
d) Cuantos melones de .8kg puede contener?

Todas las situaciones anteriores son considerando que nó se rompa la caja.
10.- El Sr. Ruíz ganó <u>h</u> pesos el año pasado. Su esposa ganó <u>w</u> pesos. Supongamos que su declaración de ingresos muestra que ganaron 2,134,927 pesos. (a) Da la ecuación que relaciona estos tres números. (b) Si la esposa dice que ganó 1,068,439 pesos, cuanto ganó el Sr. Ruíz?
11.- Un hombre gasta la mitad de su sueldo mensual en el alquiler de la casa y comida y 3/8 del sueldo que le queda en otros gastos. Al cabo de 15 meses, ha ahorrado 30000. Cuál es su sueldo mensual?
12.- La suma de 3 números consecutivos enteros es 156. Hallar los números.

13.- Un elevador de carga tiene una capacidad de 2000kg. Cuantos pianos de 150kg cada uno puede levantar a la vez si el operador del elevador, que pesa 80kg debe subir con los pianos?

14.- Tres canastos contienen 575 manzanas. El primer canasto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuantas manzanas hay en cada canasto?

15.- La señora Pérez tiene el doble de años que su hija Lisi. Hace 10 años, la suma de sus edades era de 46 años. Cuantos años tiene la señora Pérez y su hija?

13.- Un elevador de carga tiene una capacidad de 2000kg. Cuantos pianos de 150kg cada uno puede levantar a la vez si el operador del elevador, que pesa 80kg debe subir con los pianos?

14.- Tres canastos contienen 575 manzanas. El primer canasto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuantas manzanas hay en cada canasto?

15.- La señora Pérez tiene el doble de años que su hija Lisi. Hace 10 años, la suma de sus edades era de 46 años. Cuantos años tiene la señora Pérez y su hija?

Lección 4

ECUACIONES DE LA FORMA Ax + By + C = O

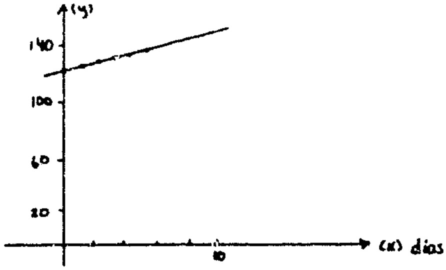
Hay muchos problemas que dan lugar a este tipo de ecuaciones. Supongamos que tienes una alcancía con 124.30 pesos. Si pones 25 pesos diarios a partir de mañana, cuanto tendrás después de x días?

La respuesta la obtenemos planteando una ecuación con dos variables. Sea y la cantidad que tendrás después de x días, entonces:

$$y = 25x + 124.30$$

Esto es, y será igual a 25 por el número de días que guardemos este dinero, más los 124.30 que teníamos en un principio. Dándole valores a x obtenemos algunos puntos y vemos que resulta una recta:

x	y
0	124.30
1	126.80
2	129.30
3	131.80
4	134.30



Para cada valor de x se obtiene otro correspondiente para y. Así, se encuentran infinitos pares de valores que satisfacen a la ecuación, por lo que estas ecuaciones reciben el nombre de indeterminadas. Podemos entonces concluír que el conjunto solución de este tipo de ecuaciones es infinito, como ya habíamos visto en los ejemplos de la Lección 1, aunque cabe hacer la observación de que el número de días que pueda ahorrar una persona por más grande que sea, es finito.

En la ecuación anterior, observamos que a cada valor de x corresponde otro de y, es decir, que y es una función de x.

Veamos otros ejemplos de ecuaciones de la forma Ax + By + C = 0

a) $x + 6y - 27 = 0$ b) $3x + 5y - 7 = 0$ c) $2x - y + 4 = 0$

d) $7x - 4y = 5$ e) $4y - 3x = 0$ f) $3x - 2y = -2$

Todas las ecuaciones anteriores son de la forma Ax + By + C = 0 aunque algunas aparentemente parezcan que nó. Por ejemplo, la ecuación d) $7x - 4y = 5$, si sumamos -5 a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$7x - 4y - 5 = 5 - 5$$

$$7x - 4y - 5 = 0$$

El coeficiente de x, A = 7, b = -4 y C = 5.

En la ecuación e) A= 4, B = -3 y C = 0. Toda ecuación con dos variables de la forma Ax + By + C = 0, puede escribirse como una función de la forma:

$$y = mx + b$$

En notación de funciones, y = f(x), entonces quedaría:

$$f(x) = mx + b$$

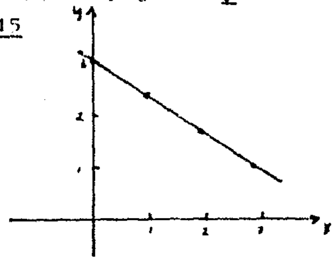
Para cada valor que le demos a x, le corresponderá otro a y. Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1.- Tenemos 3x + 5y = 15, despejamos y:

$$y = \frac{-3x + 15}{5}$$

Para

x	y
0	3
1	12/5
2	9/5
3	6/5



EJEMPLO 2.- Representar gráficamente la ecuación 5x - 3y = 0. Esta ecuación carece de término independiente, C = 0, A = 5 y B =-3. Despejando a y:

$$5x - 3y = 0$$

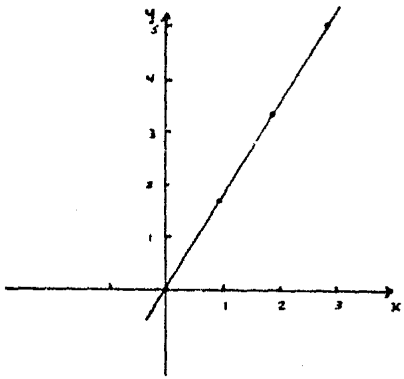
$$-3y = -5x$$

$$y = \frac{-5x}{-3}$$

$$y = \frac{5x}{3}$$

Elaboramos una tabla:

x	y
0	0
1	5/3
2	10/3
3	5

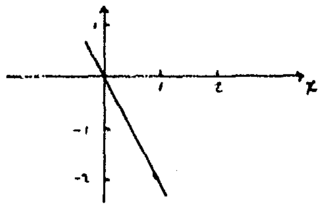


Al graficarla vemos que es una recta y pasa por el origen (0,0). Toda ecuación de la forma Ax + By + C = 0 que carezca de término independiente, esto es que C = 0, la recta que la representa pasará por el origen.

EJEMPLO 3.- $2x + y = 0$. Despejando y:

$$y = -2x$$

x	y
0	0
1	-2



Con estos dos puntos podemos trazar la recta y vemos que pasa por el origen.

A continuación tenemos dos casos especiales. Cuando A=0, esto es, la ecuación carece de término x y cuando B=0, la ecuación carecerá de término y. Estos casos nos dan origen a una recta horizontal para el primer caso y vertical en el segundo. Veamos un ejemplo para cada caso:

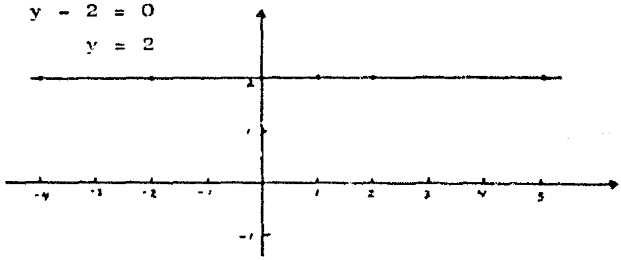
EJEMPLO 1.- **Tenemos la ecuación** $y - 2 = 0$, esta ecuación equivale a $0x + 1y - 2 = 0$. **Despejamos la ecuación:**

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

Hacemos una tabla:

x	y
0	2
1	2
-4	2
-2	2
2	2
5	2



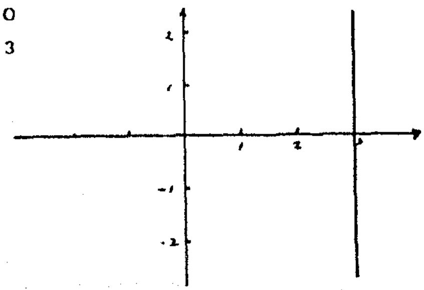
Para cualquier valor que le demos a x, y = 2. La recta resultante es una línea horizontal a la altura del punto (0,2).

EJEMPLO 2.- Tenemos la ecuación $x - 3 = 0$. Esta ecuación tiene la forma $1x + 0y - 3 = 0$, esto es, que B = 0. Despejemos la ecuación:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

y	x
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3



Para cualquier valor de y, x = 3. La recta resultante es una línea vertical que pasa por el punto (3,0).

Volviendo al ejemplo de la alcancía al principio de la Lección, tenemos que hay muchas situaciones de este tipo. Algunos ejemplos más se dan a continuación.

Todas estas situaciones dan origen a ecuaciones de la forma $y = mx + b$.

EJEMPLO 1.- Si tienes 200 pesos en el banco y ahorras 5 pesos diarios, tenemos la ecuación:

$$5x + 200 = y$$

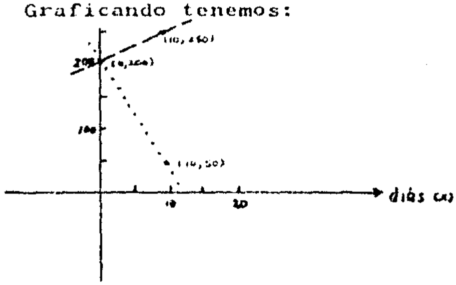
donde y representa la cantidad de dinero que tendrás después de ahorrar 5 pesos durante x días, más los 200 que tenías en un principio. Algunas soluciones:

El primer día sería: 5(1) + 200 pesos, obtenemos el par (1,205)

El segundo día será: 5(2) + 200 pesos, obtenemos el par (2,210)

El tercer dí sería: 5(3) + 200 pesos, obtenemos el par (3,215)

y así sucesivamente. Graficando tenemos:



EJEMPLO 2.- Si tienes 200 pesos y gastas 15 pesos diarios, tenemos la ecuación: $-15x + 200 = y$, donde y representa la cantidad de dinero que tendrás despues de gastar 15 pesos por x días, de los 200 pesos que tenías originalmente. Algunas soluciones:

El primer día sería: -15(1) + 200 = 185, obtenemos el par (1,185)

El segundo día será: -15(2) + 200 = 170, obtenemos el par (2,170)

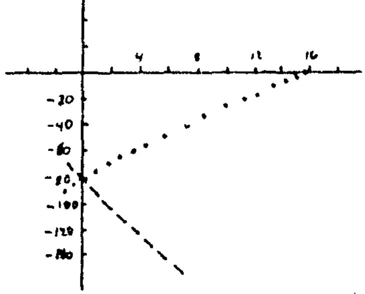
El tercer día sería: -15(3) + 200 = 155, obtenemos el par (3,155)

El resultado lo podemos ver en la gráfica anterior. (Línea punteada).

EJEMPLO 3.- Si debes 80 pesos y pagas 5 cada semana. Tenemos la ecuación: $5x - 80 = y$, donde y representa la cantidad que deberás después de haber pagado 5 pesos durante x semanas. Algunas soluciones:

La primera semana deberías: $5(1) - 80 = -75$ pesos, el par $(1,-75)$
La segunda semana deberías: $5(2) - 80 = -70$ pesos, el par $(2,-70)$
La tercera semana deberías: $5(3) - 80 = -65$ pesos, el par $(3,-65)$

Cuantas semanas serán necesarias para liquidar el adeudo? Observa la gráfica siguiente y verás el resultado. (Línea punteada).



EJEMPLO 4.- Si debes 80 y en lugar de pagarlos, te prestan 10 pesos más cada semana, tendríamos la ecuación: $-10x - 80 = y$ donde y representa la cantidad de dinero que deberás al final de x semanas, junto con los 80 que debías al principio. Algunas soluciones:

La primera semana deberías: $-10(1)-80 = -90$ pesos, el par $(1,-90)$
La segunda semana deberías: $-10(2)-80 = -100$ pesos, el par $(1,-100)$
La tercera semana deberías: $-10(3)-80 = -110$ pesos, el par $(1,-110)$

Los resultados se pueden ver en la gráfica anterior.

<u>Preguntas que abarcan la lectura:</u>

1.- A las ecuaciones de la forma $Ax + By + C = 0$ se les denomina ecuaciones ____________________.

2.- Toda ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ puede escribirse como una función de la forma: ________________.

3.- En las siguientes ecuaciones, indica a que es igual A, B, y C:

a) $x - y = 0$ b) $8x = 3y$ c) $5x - 4y = 8$

d) $2y - 3x = 9$

4.- Despeja y de las ecuaciones anteriores y dándole valores a x, obtén dos pares de puntos y traza la recta que pasa por ellos.

5.- Grafica las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = 0$ b) $y - 3 = 0$

6.- Puedes decir como serán las rectas resultantes de las ecuaciones anteriores antes de graficarlas?

7.- Supongamos que tienes 76.20 ahorrados y le agregas 5 pesos diarios. Sea y la cantidad que tendrás despues de x días.

a) Da la ecuación que relaciona a x y a y.

b) Grafica algunos pares (x,y)

8.- Repite la pregunta anterior si comienzas con 30 pesos y gastas 1.50 diarios.

9.- Da una ecuación que describa la cantidad ahorrada y, en términos del número de semanas x transcurridas.

a) Comienza con 100, ahorra 20 a la semana.

b) Comienza con 100, ahorra 10 a la semana.

c) Comienza con 200, gasta 20 a la semana.

d) Comienza con 200 y gasta 30 a la semana.

e) Comienza debiendo 150 y paga 20 semanales.

f) Comienza debiendo 22.40 y pide 5 más a la semana.

g) Comienza sin dinero y pide 5 semanales.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Como es el conjunto solución de ecuaciones de la forma Ax+By+C=0.

2.- Porqué reciben el nombre de ecuaciones indeterminadas?

3.- Como es la gráfica de una ecuación de la forma Ax+By+C=0, si la C=0?

4.- Porqué estas ecuaciones representan funciones?

5.- Reduce las siguientes ecuaciones a la forma y = mx + b

a) y=3+2x+6   b) 5x+15+3x=y

c) y=4.5x+3+.5x   d) 6x+2+3=y

Ejercicios de aplicación de la lectura:

Instrucciones: Cada uno de los ejemplos siguientes resulta en una ecuación de la forma mx + b = y.

a) Da la ecuación

b) Grafica algunos puntos del conjunto solución de la ecuación

EJEMPLO: Un avión se eleva a 50 pies por segundo a partir de los 22000 pies de altura.

Solución: Sea x=el número de segundos a partir de que empieza a ascender. Sea y = la altitud del avión en determinado momento. Entonces: y = 50x + 22000

1.- Si cuesta 1100 pesos rentar un auto y 10 pesos por kilómetro recorrido. Cuanto costará en total si recorro 128 kilómetros?

2.- Una persoan tiene 10kg de menos y piensa comenzar una dieta para ganar .2kg diarios.

3.- El velero esta a 3.5km de distancia y se acerca a una velocidad de 4km por hora.

4.- Un avión desciende a una velocidad de 50 metros por segundo. Comienza el descenso a los 8500 metros.

5.- Una librería compra en 25000 pesos una colección de libretos antiguos. Piensa venderlos a 75 pesos cada uno.

6.- Un estudiante espera obtener una puntuación de 83 en un exámen. Se estima que cada hora de estudio incrementa la puntuación en 3 puntos.

7.- Los boletos para una función cuestan 15 pesos. Tienes 250 pesos y quieres comprar algunos más para unos amigos.

8.- La ciudad A tiene 250000 habitantes y 300 más llegan cada mes.

9.- La ciudad B tiene una población de 50000 habitantes y emigran de ella un promedio de 50 personas al mes.

Lección 5

SISTEMAS DE ECUACIONES

Una escuela técnica dispone de 48 becas para algunos alumnos y alumnas de la institución. Si una H representa a los alumnos y M represent las alumnas, entonces podemos decir que las 48 becas se repartirán:

$$H + M = 48$$

Recordemos que el conjunto solución para este tipo de ecuación es un conjunto infinito de pares ordenados. La solución (2,46)puede ser una solución. Esto quiere decir que 2 becas serían para alumnos y 46 para alumnas.

Como las alumnas tenían mejores promedios, el director sugirió que se otorgaran el doble de las becas que recibieran los alumnos, a las alumnas. En símbolos sería:

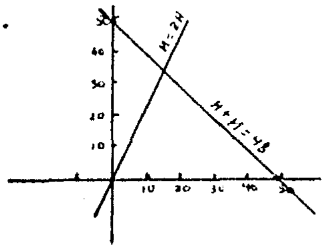
$$M = 2H$$

Esto es, que las mujeres recibirían el doble de becas que los hombres. Cuantas becas se les deberán otorgar a cada quien? Para contestar esto necesitamos un par ordenado que funcione en ambos casos:

$$H + M = 48$$
$$M = 2H$$

Cada ecuación tiene una gráfica que es una línea recta. Dándole valores a cada ecuación las podemos graficar. El par que nos va a interesar es la intersección de las rectas.

La gráfica siguiente muestra que se encuentra alrededor del (16,32). Esto quiere decir que 16 becas serían para los alumnos y 32 becas para las alumnas.



Las gráficas nó siempre dan soluciones exactas. Cuando queremos encontrar las soluciones __comunes__ a dos o más ecuaciónes, al conjunto de estas ecuaciones se les llama __sistema__.

$$H + M = 48$$
$$M = 2H$$

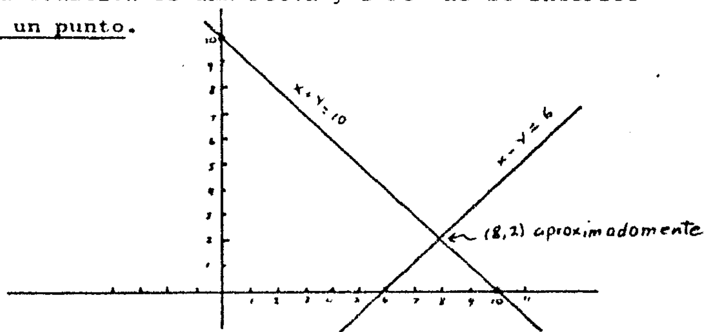
es un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO.- Resolver el sistema: $x + y = 10$
$x - y = 6$

Haciendo sucesivamente $X = 0$ y $y = 0$, en cada ecuación, obtenemos 2 pares ordenados para cada una. Estos puntos son donde cada ecuación intersecta al eje __x__ y al eje __y__.

$x + y = 10$	$x - y = 6$
Si $x = 0$, $0 + y = 10$ obtenemos el par $(0,10)$.	Si $x = 0$, $0 - y = 6$, $y = -6$ obtenemos el par $(0,-6)$
Si $y = 0$, $x + 0 = 10$, obtenemos el par $(10,0)$.	Si $y=0$, $x - 0 = 6$ obtenemos el par $(6,0)$.

Graficamos ambas rectas através de su respectivo par de puntos. Vemos que se intersectan en $(8,2)$. Este par ordenado es una solución común a ambas ecuaciones, y es la única, pues la gráfica de cada ecuación es una recta y 2 re as se intersectan __cuando más en un punto__.



Veamos otros casos en donde nó se intersectan las rectas:

La recta __M__ tiene la ecuación $2x + 3y = -6$ y la recta __N__ tiene la ecuación $4x + 6y = 24$. Por tanto, tenemos el sistema:

$$2x + 3y = -6$$
$$4x + 6y = 24$$

Obtenemos 2 puntos para graficar cada ecuación:

$2x + 3y = -6$ y $4x + 6y = 24$

$\underline{2x + 3y = -6}$

Si $x = 0$, $2(0) + 3y = -6$

$y = -6/3$

$y = -2$

Si $y = 0$, $2x + 3(0) = -6$

$2x = -6$

$x = -6/2$

$x = -3$

$\underline{4x + 6y = 24}$

Si $x = 0$, $4(0) + 6y = 24$

$6y = 24$

$y = 24/6$

$y = 4$

Si $y = 0$, $4x + 6(0) = 24$

$4x = 24$

$x = 24/4$

$x = 6$

Obtenemos los pares: $(0,-2)$ y $(-3,0)$ y: $(0,4)$ y $(6,0)$

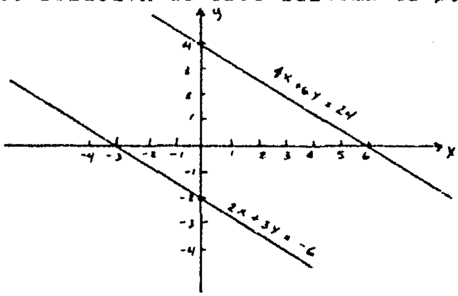
En la gráfica siguiente, vemos las 2 rectas que hemos trazado y también vemos que nó se intersectan. Cuál es la solución de este sistema si las rectas nó se intersectan?

$$2x + 3y = -6$$
$$4x + 6y = 24$$

Si multiplicamos la ecuación superior por 2:

$$4x + 6y = -12$$
$$4x + 6y = 24$$

El número $4x + 6y$, para ningunos valores de $\underline{x}$ y $\underline{y}$ puede ser a la vez igual a -12 y a 24; por lo que el sistema nó tiene solución. El conjunto solución de este sistema es $\emptyset$.



Otro caso es el de ecuaciones distintas que representan una misma línea.

EJEMPLO.- Tenemos el sistema: $8x - 7y = 3$
$16x - 14y = 6$

Obtenemos dos puntos de cada ecuación para graficarla.

$\underline{8x - 7y = 3}$

Si $x = 0$, $8(0) - 7y = 3$

$y = 3/-7$

$\underline{16x - 14y = 6}$

Si $x = 0$, $16(0) - 14y = 6$

$y = 6/-14$

$y = 3/-7$

Si $y = 0$, $8x - 7(0) = 3$

$8x = 3$

$x = 3/8$

Si $y = 0$, $16x - 14(0) = 6$

$16x = 6$

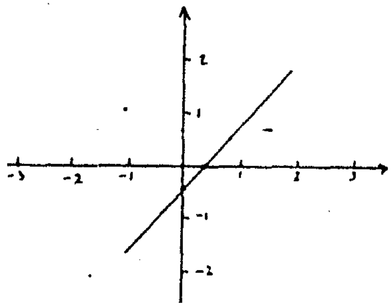
$x = 6/16$

$x = 3/8$

Obtenemos los puntos:

$(0,-3/7)$ y $(3/8,0)$ $(0,-3/7)$ y $(3/8,0)$

Los puntos por los que pasan las ecuaciones son los mismos.



Si multiplicamos la ecuación superior por 2, obtenemos:

$$16x - 14y = 6$$
$$16x - 14y = 6$$

Las ecuaciones son idénticas, por lo que el conjunto solución de una de las ecuaciones será el mismo para la otra. Este tipo de sistemas producen líneas rectas <u>coincidentes</u> y las ecuaciones son llamadas <u>equivalentes</u>.

<u>Preguntas que abarcan la lectura</u>:

1.- En las siguientes ecuaciones, (a) da 3 pares ordenados para cada ecuación por separado y (b) trata de encontrar mentalmente una solución común para las ecuaciones.

a) $a + b = 21$, $a - b = 3$

b) $2 = m - n$, $0 = m + n$

c) $x = 3y$, $x - y = 40$

2.- Grafica las ecuaciones anteriores.

3.- Define lo que es un <u>sistema</u> de ecuaciones.

4.- Da un ejemplo de un sistema de ecuaciones.

5. Escoje el par ordenado a la derecha que soluciona el sistema de la izquierda.

$x - 2y = 10$
$3x + 4y = 40$

(a) (20,5) (b) (10,0)
(c) (12,1) (d) (0,10)

$b = 4a$ (a) (14,56) (b) (56,14)

$a - b = 70$ (c) (14,656) (d) (56,-14)

6.- Dos líneas se intersectan en:

a) infinitamente muchos puntos b) exactamente dos puntos

c) a lo más un punto d) ningún punto

7.- Da un ejemplo de ecuaciones de 2 rectas paralelas.

8.- Da un ejemplo de ecuaciones de 2 rectas coincidentes.

9.- Determina si las rectas son paralelas o equivalentes:

a) $2x - 3y = 11$; $8x - 12y = 11$

b) $6 = 3A + B$; $18 = 9A + 3B$

c) $x - y = 5$; $y - x = -5$

d) $9t + 10 = 6u$; $15u - 20t = 5$

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Encuentra la solución común a los siguientes sistemas de ecuaciones graficamente:

a) $x + 6y = 27$; $7x - 3y = 9$

b) $7x - 4y = 5$; $9x + 8y = 13$

c) $14x - 11y = -29$; $13y - 8x = 30$

2.- Porqué se dice que el sistema de ecuaciones:

$$8x + 7y = 32$$
$$8x + 7y = 74$$

nó tiene una solución en común?

3.- Como son gráficamente las ecuaciones del sistema anterior?

Ejercicios que extienden la lectura:

Instrucciones: Cada uno de los siguientes problemas da lugar a un sistema de 2 ecuaciones. Plantea las ecuaciones. Al finalizar la siguiente Lección regresa a estos problemas y resuelve las ecuaciones que planteaste. Para plantear las ecuaciones utiliza las recomendaciones dados en la Lección 5.

1.- La suma de 2 números es 72. El doble de uno de ellos sustraído del otro es 60.

2.- Un número es 3 veces el otro. Cuando el primero se resta del segundo, la diferencia es 1/2.

3.- Una herencia en un testamento dice que Juan Alvarez recibirá 3 veces más dinero que Elena López. La cantidad a repartirse es 110000.

4.- Un escultor desea hacer dos figuras similares. Una 3 veces más alta que la otra, por lo que requerirá 27 veces más arcilla. Dispone de 6kg. de arcilla.

Lección 6

ALGUNOS METODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES

Aparte del método gráfico que vimos en la Lección anterior, que nó siempre da soluciones exactas, hay otros métodos mejores para resolver sistemas de ecuaciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones, como veremos en seguida, es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas, una sola ecuación con una incógnita. Este será nuestro problema básico. Una vez hecho esto, procederemos a resolver como ya sabemos.

A continuación veremos como resolver sistemas mediante el método llamado de Substitución:

Básicamente, el método consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones, la más sencilla, y substituír esta en la otra. Así, se obtiene una sola ecuación con una incógnita. Se procede a resolver esta ecuación y obtenemos el valor de esta incógnita. Ya teniendo este valor, es fácil encontrar el valor de la otra incógnita substituyendo el valor que encontramos en cualquiera de las dos ecuaciones originales y resolviéndola.

Veamos el ejemplo del principio de la Lección anterior. Teníamos la ecuación:

$$H + M = 48$$
$$M = 2H$$

Según lo anterior, tenemos que despejar una incógnita para encontrar la otra. En este caso, tenemos que en la segunda ecuación, M es igual a $2H$. Por tanto, podemos substituír $2H$ en lugar de M en la ecuación superior, puesto que $2H = M$. Entonces tendremos:

$$H + 2H = 48$$

Después de hacer esto, la ecuación superior tiene una sola incógnita, H, por lo que ya podemos encontrar cuanto vale esta:

$$H + 2H = 48$$
$$3H = 48$$
$$H = 48/3$$
$$H = 16$$

Ahora, ya conocemos el valor que representa H, por lo que lo podemos usar para calcular cuanto vale M, substituyéndolo en cualquiera de las ecuaciones originales:

$$M = 2H$$

como $H = 16$ tenemos: $M = 2(16)$

$$M = 32$$

Por tanto, $(H,M) = (16,32)$. Comprobamos el resultado:

$$H + M = 48$$
$$16 + 32 = 48$$

y:

$$M = 2H$$
$$32 = 2(16)$$

EJEMPLO 2.- Resuelve por substitución y comprueba:

$$y = 2x - 3 \quad .....(1)$$
$$3x - 2y = 10 \quad .....(2)$$

La incógnita y se encuentra despejada en la primera ecuación, por lo que substituímos ese "valor" que tiene en la segunda ecuación: $3x - 2(2x - 3) = 10$

Esta ecuación ya tiene sólo una incógnita. Simplificamos:

$$3x - 4x + 6 = 10$$
$$-x + 6 = 10$$

S_{-6}: $$-x = 10 - 6$$
$$-x = 4$$

M_{-1}: $$x = -4$$

Ahora, substituímos este valor de $x = -4$ en la primera ecuación para encontrar y:

$$y = 2x - 3$$
$$y = 2(-4) - 3$$
$$y = -8 - 3$$
$$y = -11$$

Por lo tanto tenemos que: $(x,y) = (-4,-11)$. Comprobamos que esta correcto substituyendo en las ecuaciones originales:

$$y = 2x - 3 \qquad 3x - 2y = 10$$
$$-11 = 2(-4) - 3 \qquad 3(-4) - 2(-11) = 10$$
$$-11 = -8 - 3 \qquad -12 + 22 = 10$$
$$-11 = -11 \qquad 10 = 10$$

La respuesta es correcta.

EJEMPLO 3.- Resolver y comprobar el siguiente sistema mediante el método de substitución:

$$2x + 5y = -24$$
$$8x - 3y = 19$$

En este ejemplo, ninguna de las incógnitas de las ecuaciones esta despejada y lista para substituírse en la otra ecuación, por lo que tendremos que despejar una de ellas, por lo general la más sencilla, que en este caso es la primera.

$$2x + 5y = -24$$

Despejando x:

$$x = \frac{-24 - 5y}{2}$$

Ahora, este "valor" de $\underline{x}$ lo substituímos en la otra ecuación:

$$8\left(\frac{-24-5y}{2}\right) - 3y = 19$$

La ecuación resultante, es una ecuación con una sóla incógnita, la $\underline{y}$. Simplificamos la ecuación y la resolvemos:

Dividiendo 8 entre 2, tenemos:

$$4(-24-5y) - 3y = 19$$

Quitamos paréntesis: $-96-20y - 3y = 19$

S_{96}: $-23y = 19 + 96$

$-23y = 115$

$M_{-1/23}$: $y = 115/-23$

$y = -5$

Por lo tanto, $y= -5$. Subtituímos ahora este valor en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en la primera, y obtenemos:

$$2x + 5(-5) = -24$$

$$2x - 25 = -24$$

S_{25}: $2x = -24 + 25$

$2x = 1$

$M_{1/2}$: $x = 1/2$

Obtenemos el par (1/2,5). Comprobamos substituyéndolo en ambas ecuaciones:

$$2(1/2) + 5(-5) = -24$$

$$1 + (-25) = -24$$

y en la segunda:

$$8(1/2) - 3(-5) = 19$$

$$4 + 15 = 19$$

En seguida, veremos otro método para resolver sistemas de ecuaciones. El método es llamado de <u>Reducción</u> o método de <u>Suma o Resta</u>.

Este método es, muchas veces, el más fácil. Básicamente, consiste en "igualar" los coeficientes de una de las incógnitas y obtenerlas con signos contrarios. De este modo, tenemos que al sumarlas, se eliminan, resultando una sola ecuación con una incógnita. En esta ecuación, despejamos resolviendo para una incógnita, para después substituír este valor en cualquiera de las ecuaciones originales y obtener el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO 1.- Supongamos que deseamos resolver el sistema:

(1).... $2x + 3y = 12$

(2).... $9x - 3y = 10$

¿Qué pasa si <u>sumamos</u> las dos ecuaciones?

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ \underline{9x - 3y = 22} \\ 11x \qquad = 22 \end{array}$$

Entonces, $11x = 22$

$M_{1/11}$: $x = 22/11$

$x = 2$

Ya tenemos el valor de $x = 2$. Substituyéndolo en cualquiera de las ecuaciones originales, en este caso, en la primera: (1)

$2(2) + 3y = 12$

$4 + 3y = 12$

S_{-4}: $3y = 12 - 4$

$y = 8/3$

Obtenemos el par $(2,8/3)$. Verificamos la respuesta substituyéndolo en las dos ecuaciones originales:

$2(2) + 3(8/3) = 12$	$9(2) - 3(8/3) = 10$
$4 + 24/3 = 12$	$18 - 24/3 = 10$
$4 + 8 = 12$	$18 - 8 = 10$

EJEMPLO 2.- Resolver y comprobar el siguiente sistema:

(1)... $-11 = 6m + b$

(2)... $3 = 4m + b$

En este caso, si sumamos las ecuaciones, no se cancela ninguna de las incógnitas, pero que pasa si multiplicamos primero por (-1) una de las ecuaciones, por ejemplo la segunda?

$-11 = 6m + b$

M_{-1}: $\underline{-3 = -4m - b}$ Sumamos las ecuaciones;

y obtenemos: $-14 = 2m$

$M_{1/2}$: $-14/2 = m$

$-7 = m$

Ya tenemos $m = -7$. Ahora que se hace para encontrar b? Claro, substituír el valor de <u>m</u> en cualquiera de las ecuaciones. Escogemos la primera: $-11 = 6(-7) + b$

$-11 = -42 + b$

S_{42}: $42 - 11 = b$

$31 = b$

Verificamas la respuesta $(-7,31)$:

$$-11 = 6(-7) + 31 \qquad\qquad 3 = 4(-7) + 31$$
$$-11 = -42 + 31 \qquad\qquad 3 = -28 + 31$$
$$-11 = -11 \qquad\qquad 3 = 3$$

De los ejemplos anteriores podemos observar que si las ecuaciones tienen una de las incógnitas con el mismo coeficiente, entonces podemos eliminar dicha incóngita al sumarla (si tiennn el mismo signo, basta con multiplicar toda la ecuación por -1), y así obtenemos una ecuación con una sola incógnita.

Sin embargo, no nos limitaremos a utilizar este método sólo a los casos en que los coeficientes de una incógnita en un sistema de ecuaciones sean iguales. Nosotros haremos que los coeficientes sean iguales multiplicando una o las dos ecuaciones por algún número que nos iguale los coeficientes. Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1.- Sea el sistema: $\begin{aligned} 5x + 8y &= 21 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$ resolverlo.

Si sumamos las ecuaciones o si las multiplicamos por -1 nó nos sirve de nada, pues no se cancela ninguna de las incógnitas. Pero si multiplicamos la ecuación inferior por -5, que sucede? Efectivamente, ahora las sumamos y tenemos:

$$\begin{array}{lr} & 5x + 8y = 21 \\ M_{-5}: & \underline{-5x + 10y = 15} \\ & 18y = 36 \\ M_{1/18}: & y = 36/18 \\ & y = 2 \end{array}$$

Ya tenemos que $y = 2$. Substituyéndo en cualquiera de las ecuaciones para obtener el valor de x:

$$\begin{array}{lr} & 5x + 8(2) = 21 \\ & 5x + 16 = 21 \\ S_{-16}: & 5x = 21 - 16 \\ & 5x = 5 \\ M_{1/5}: & x = 5/5 \\ & x = 1 \end{array}$$

Verificamos la solución:

$$5(1) + 8(2) = 21 \qquad\qquad 1 - 2(2) = -3$$
$$5 + 16 = 21 \qquad\qquad 1 - 4 = -3$$
$$21 = 21 \qquad\qquad -3 = -3$$

En este ejemplo, bastó multiplicar una de las ecuaciones para poder resolver. En el siguiente, será necesario multiplicar ambas ecuaciones para igualar los coeficientes de una de las incógnitas. Este procedimiento siempre funciona.

EJEMPLO 2.- $6x - 5y = -9$

$4x + 3y = 13$

Si las sumamos o multiplicamos por -1 nó nos sirve de mucho. Pero si multiplicamos la ecuación superior por 4 y la inferior por -6? Esto nos iguala los coeficientes de x a 24 y además con signos contrarios. Entonces:

$$\begin{array}{ll} M_4: & 24x - 20y = -36 \\ M_{-6}: & \underline{-24x - 18y = -78} \\ & -38y = -114 \\ M_{-38}: & y = -114/-38 \\ & y = 3 \end{array}$$

Escogimos multiplicar la ecuación superior por 4 y la inferior por -6, pues estos son los coeficientes de $\underline{x}$ en la ecuación inferior y superior respectivamente. De este modo obtenemos lo que deseamos para poder resolver la ecuación. Esto es, los coeficientes de una de las incógnitas iguales.

Ahora, substituímos y=3 en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de x:

$$\begin{array}{ll} & 6x - 5y = -9 \\ & 6x - 5(3) = -9 \\ & 6x - 15 = -9 \\ S_{15}: & 6x = -9 + 15 \\ & 6x = 6 \\ M_{1/6}: & x = 6/6 \\ & x = 1 \end{array}$$

Verificamos:

$$6(1) - 5(3) = -9 \qquad 4(1) + 3(3) = 13$$
$$6 - 15 = -9 \qquad 4 + 9 = 13$$

EJEMPLO 3.- Supongamos que un equipo grande de ping-pong consta de 4 raquetas y 6 pelotas. Un equipo pequeño consta de 2 raquetas y 1 peolota de ping-pong. Un comerciante recibe 100 raquetas de ping-pong y 110 pelotas. Puede dividir esto en partes iguales de equipos grandes y equipos pequeños?

Respuesta: Aquí utilizaremos algunas de las técnicas de solución de problemas que ya hemos visto. Primeramente, necesitamos ver cuál es la incógnita?

Sea G el número de equipos grandes y sea P el número de equipos pequeños.

Qué otros datos tenemos? Que se tienen 100 raquetas y 110 pelotas. Entonces podemos repartir las 100 raquetas entre los equipos grandes y pequeños y lo mismo para las 110 pelotas:

4G(4raquetas en los grandes)+2P(2 raquetas en los pequeños)=100

6G(6pelotas en los grandes)+1P(una en los pequeños)=110 pelotas

La condición es que debe dividir esto en partes iguales de equipos pequeños y grandes, tanto las raquetas como las pelotas. Por lo tanto, si encontramos una solución para el sistema planteado, tendremos la respuesta. Entonces:

$$4G + 2P = 100$$
$$6G + 1P = 110$$

Resolvemos por el método de suma o resta:

$$\begin{array}{lrcl} & 4G + 2P & = & 100 \\ M_{-2}: & -12G - 2P & = & -220 \\ \hline & -8G & = & -120 \\ M_{-1/8}: & G & = & -120/-8 \\ & G & = & 15 \end{array}$$

Substituyendo G = 15 en la primera ecuación para encontrar P:

$$\begin{array}{lrcl} & 4(15) + 2P & = & 100 \\ & 60 + 2P & = & 100 \\ S_{-60}: & 2P & = & 100 - 60 \\ M_{1/2}: & P & = & 40/2 \\ & P & = & 20 \end{array}$$

Tenemos que puede formar 15 equipos grandes y 20 pequeños. Verificamos la respuesta:

$$4(15) + 2(20) = 100 \qquad 6(15) + 1(20) = 110$$
$$60 + 40 = 100 \qquad 90 + 20 = 110$$

EJEMPLO 4.- La suma de dos números enteros es 41. El mayor de los números es unn unidad menos que el doble del menor. Encuentra los números.

La última frase indica que tenemos dos incógnitas.

Sea x = número menor

Sea y = número mayor

Que otros datos tenemos? La suma de los números es 41:

$$x + y = 41$$

El mayor es una unidad menos que el doble del menor:

$$y = 2(x) - 1$$

Ya tenemos planteadas dos ecuaciones. Las resolvemos:

$$x + y = 41$$
$$y = 2(x) - 1$$

Utilizaremos el método de substitución. La incógnita y en la segunda ecuación se encuentra despejada:

Substituímos el valor de y en la primera ecuación:

$$x + (2x - 1) = 41$$
$$3x - 1 = 41$$

S_1: $3x = 41 + 1$

$$3x = 42$$

$M_{1/3}$: $x = 42/3$

$$x = 14$$

Substituímos el valor x = 14 en la segunda ecuación para encontrar y:

$$y = 2(14) - 1$$
$$y = 28 - 1$$
$$y = 27$$

Verificamos el resultado:

$$x + y = 41$$
$$14 + 27 = 41$$

La suma de los números dá 41. Además, el mayor es una unidad menor que el doble del menor: $27 = 2(14) - 1$

$$27 = 27$$

Por último, veremos un método más para resolver sistemas de ecuaciones: Método por Determinantes:

Dados cuatro números a, b, c, d, se les asocia un quinto número llamado determinante. Esta expresión se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = ab - cd$$

La expresión encerrada entre dos barras es un determinante. Un determinante consta de columnas y de renglones. Las columnas están formadas por las cantidades en una misma línea vertical y los renglones por las cantidades en una misma línea horizontal.

En este caso, $\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$ sería la primera columna y $\begin{matrix} d \\ b \end{matrix}$ la segunda. El primer renglón será a d y el segundo renglón c b.

Un determinante siempre es cuadrado, esto es que tiene el mismo número de columnas que renglones. El orden de un determinante esta dado por el número de elementos en cada renglón o columna.

EJEMPLO 1.- $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ Es un determinante de segundo orden pues tiene dos elementos en cada renglón o columna.

EJEMPLO 2.- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ Es un determinante de tercer orden, pues tiene 3 elementos en cada renglón o columna.

Un determinante de segundo orden equivale al producto de los términos que aparecen en la diagonal principal, menos el producto de los términos que aparecen en la diagonal secundaria.

$\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ En este caso, los términos a,b están en la diagonal principal y c, d en la diagonal secundaria.

EJEMPLOS:

1.- $\begin{vmatrix} a & n \\ m & b \end{vmatrix} = ab - mn$

2.- $\begin{vmatrix} a & -n \\ m & b \end{vmatrix} = ab - m(-n) = ab + mn$

3.- $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (4)(8) - (5)(3) = 32 - 15 = 17$

4.- $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 1(-5) - (-2)(-2) = -5 - 4 = -9$

Habiendo visto lo que es un determinante de segundo orden, podemos decir que para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se tiene lo siguiente:

Si tenemos el sistema: $a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

y lo resolvemos, las soluciones estan dadas por:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Podemos verificar que son las soluciones substituyendo los valores de x y y en alguna de las ecuaciones. Por ejemplo en la primera:

$$a_1 \frac{(b_2 c_1 - b_1 c_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_1 \frac{(a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1$$

Quitamos paréntesis:

$$\frac{a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} + \frac{b_1a_1c_2 - b_1a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_1$$

Eliminamos el denominador multiplicando toda la ecuación por $(a_1b_2 - a_2b_1)$:

$$a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + b_1a_1c_2 - b_1a_2c_1 = c_1(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Cancelamos términos iguales y nos queda:

$$a_1b_2c_1 - b_1a_2c_1 = c_1(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Factorizamos el primer término:

$$c_1(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

son las soluciones al sistema.

Vemos que ambas fracciones tienen el mismo denominador: $a_1b_2 - a_2b_1$ y que esta expresión es el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Formado por los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones originales. Este es el <u>determinante del sistema</u>.

El <u>numerador</u> de $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ es igual al desarrollo del determinante (1), pero substituyendo los coeficientes de <u>x</u> por los términos independientes de las ecuaciones originales.

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

El <u>numerador</u> de $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ es igual al desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

que se obtiene de substituír en el determinante (1) la columna de los coeficientes de <u>y</u> por la columna de los términos independientes c_1 y c_2 de las ecuaciones originales.

En resumen, podemos decir de lo anterior, que para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de determinantes, se hace lo siguiente:

1) El valor de x es una fracción cuyo denominador es el determinante formado por los coeficientes de x y de y, (a este se le denomina determinante del sistema) y cuyo numerador es el determinante que se obtiene substituyendo en el determinante del sistema, la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas.

2) El valor de y es una fracción cuyo denominador es el determinante del sistema y cuyo numerador es el determinante que se obtiene substituyendo en el determinante del sistema, la columna de los coeficientes de y por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas.

Por lo tanto, lo podemos escribir:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

EJEMPLO 1.- Resolver por determinantes el sistema:

$$5x + 3y = 5$$
$$4x + 7y = 27$$

Tendremos entonces, dos fracciones, una para x y otra para y. En ambas, el denominador es el determinante del sistema, que en este caso estará formado por los coeficientes de las incógnitas:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

El numerador de x, será el determinante del sistema, pero substituyendo en él la columna de los coeficientes de x, por la columna formada por los valores de los términos independientes: $\begin{matrix} 5 \\ 27 \end{matrix}$ De este modo, x queda igual a:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 27 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{35 - (81)}{35 - (12)} = \frac{-46}{23} = -2$$

El numerador de y será el determinante del sistema, pero substituyendo en él la columna de los coeficientes de y por la columna formada por los valores de los términos independientes 5 y 27. De este modo, y queda:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{135 - (20)}{23} = \frac{115}{23} = 5$$

Por lo tanto, tenemos que $x=-2$ y $y=5$. Verificamos el resultado:

$$5(-2) + 3(5) = 5 \qquad 4(-2) + 7(5) = 27$$
$$-10 + 15 = 5 \qquad -8 + 35 = 27$$

EJEMPLO 2.- Resolver por el método de determinantes y comprobar:

$$7x + 7 = 5y - 10$$
$$2x + 8 - y + 9 = 16$$

En este ejemplo las ecuaciones no están simplificadas en su forma general $ax + by = c$, por lo que hay que reducirlas a esta forma antes de proceder a resolverlas. Reuniendo términos nos quedan:

$$7x - 5y = -10 - 7$$
$$2x - y = 16 - 9 - 8$$

$$7x - 5y = -17$$
$$2x - y = -1$$

Resolviendo por determinantes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -17 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{17 - (6)}{-7 -(-10)} = \frac{12}{3} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -17 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-7 - (-34)}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

Por lo tanto, $(x,y) = (4,9)$. Lo verificamos substituyendo:

$$7(4) - 5(9) = -17 \qquad 2(4) - 9 = -1$$
$$28 - 35 = -17 \qquad 8 - 9 = -1$$

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Resuelve y comprueba las siguentes ecuaciones mediante el método de substitución:

a) $x + y = 14$, $x = 6y$ b) $1.5 = u$, $3u-v = 6$ c) $y = x + 2$, $2x + 4y = 29$

d) $2m - 3n = -15$, $m = 4n$ e) $x - 5y = 8$, $-7x+8y = 25$ f) $4x + 5y = 5$, $-10y + 7 = 4x$

g) $5x + 7y = -1$, $-3x + 4y = --4$ h) $x + 6y = 27$, $7x - 3y = 9$ i) $7x - 4y = 5$, $9x + 8y = 13$

2.- Explica brevemente en que consiste el método de substitución.

3.- Explica brevemente en que consiste el método de suma o resta.

4.- Explica brevemente en que consiste el método por determinantes.

5.- Puedes decir, en general, en que se parecen el método de substitución y el de suma o resta?

6.- Resuelve las siguientes ecuaciones mediante el método de suma o resta, verifica el resultado.

a) $3x + 8y = 2$
$3x - 4y = 6$

b) $2x + .3y = 1$
$12x - .3y = 44$

c) $a + b = 11$
$a - b = 4$

d) $-m + 4n = 1$
$-m + 6n = -1$

e) $.05x + .06y = 18$
$x + 2y = 400$

f) $3a - 2b = 20$
$9a - 4b = 40$

g) $100 = 3m - 2n$
$60 = 4m - 3n$

h) $1/2x + y = 6$
$x - 1/3y = 12$

i) $11x - 9y = 2$
$13x - 15y = -2$

j) $10x - y = 36 + 2y$
$4 = -2x - 5y$

k) $12x + 5x = 1 + 15y$
$-6y = 8 + x$

l) $6x - 18y = -85$
$24x - 5y = -5$

7.- Resuelve las siguientes ecuaciones mediante determinantes. Verifica los resultados.

a) $7x + 8y = 29$
$5x + 11y = 26$

b) $3x - (y + 2) = 2y - 1$
$5y - (x + 3) = 3x + 1$

c) $3x - 4y = 13$
$8x - 5y = -5$

d) $13x - 31y = -326$
$25x + 37y = 146$

e) $8x = -9y$
$2x + 5 + 3y = 3\ 1/2$

f) $4y + 3x = 8$
$8x - 9y = -77$

<u>Ejercicios de aplicación de la lectura:</u>

Instrucciones: a) Traduce los siguientes problemas a un sistema de ecuaciones. b) Utiliza el método que más te agrade para resolverlos. Verifica la respuesta. La parte a) del problema 1 está resuelta para proporcionarte un ejemplo.

1.- X litros de una solución al 60% de alcohol están mezclados con Y litros de una solución al 80%, para obtener 20 litros de una solución al 75% de alcohol.

a) Cuál es nuestra incógnita? Tenemos dos:

Sea X = litros de solución al 60%

Sea Y = litros de solución al 80%

Que otros datos tenemos? Tenemos 20 litros de solución. Entonces: $X + Y = 20$ (total de litros de solución)

y la solución que deseamos es al 75%, entonces:

$.60X + .80Y = .75(20)$ (porcentajes de alcohol por litros de solución).

Por lo tanto, resolviendo el sistema que estas dos ecuaciones plantean obtenemos lo que buscamos.

2.- Cuantos kilos de dulces de 117.90 el kilo deben mezclarse con cuantos kilos de dulces de 111.90 el kilo, para obtener 15 kilos de dulces con valor de 113.90 el kilo?

3.- Encuentra dos números enteros cuya suma sea -1 y cuya diferencia es 5.

4.- Un teatro tiene 2200 butacas. Cuantos boletos deben venderse a 30 pesos y cuantos a 40 para obtener un ingreso total de 75000 diarios si el teatro se llena cada noche?

5.- Encuentra dos números cuya suma es 4386 y cuya diferencia es 2822.

6.- Un cono con dos bolas de helado cuesta 22 pesos y uno con una sola bola cuesta 15 pesos. Cuanto costará el cono sin helado?

7.- Seis kilos de café y 5 kg de azúcar costaron 227 pesos. Cinco kilos de café y 4kg de azúcar costaron 188. Hallar el precio por kilo de café y de azúcar.

9.- Una persona gastó 41800 en 5 trajes y 3 corbatas. Ocho trajes y 9 corbatas cuestan 69400. Cuanto cuesta cada cosa?

10.- La suma de dos números enteros es 53. Tres veces el menor de los números es igual a 19 más que el mayor. Cuales son los números?

<u>Ejercicios que extienden la lección</u>:

1.- Resuelve el sistema de ecuaciones para x:

$$x^2 + 2x - 6 = 29$$
$$x^2 - 4x - 2 = 3$$

Sugerencia: Utiliza el método de suma o resta.

2.- Resuelve el siguiente sistema:

$$w = 5p$$
$$b = 2p$$
$$b + w = 16$$

Sugerencia: Utiliza el método de substitución.

3.- Resuelve:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Sugerencia: Utiliza el método de suma o resta. Multiplica la primera ecuación por b_2 y la 2a por $-b_1$. Así eliminas <u>y</u>. De nuevo repite el procedimiento multiplicando la primera por $-a_2$ y la segunda por a_1 para cancelar <u>x</u>.

El resultado de esta ecuación lo puedes consultar en la sección de determinantes.

Lección 7

SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática, es una ecuación que se puede escribir en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En donde deseamos resolver para $\underline{x}$.

Algunos ejemplos serían:

a) $5x^2 - 8x - 4 = 0$, donde $a = 5$, $b = -8$ y $c = -4$

b) $3x^2 + 2x + 6 = 0$, donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = 6$

c) $x^2 + 8x - 3 = 0$, donde $a = 1$, $b = 8$ y $c = -3$

d) $x(3+x) + 4 + 2x = 2$, en esta ecuación es necesario simplificarla primero a su forma general. Efectuando operaciones, tenemos:

$$3x + x^2 + 4 + 2x - 2 = 0$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

donde $a = 1$, $b = 5$ y $c = 2$

e) $6(2+x) + x^2 - 4 = 0$, simplificamos:

$$12 + 6x + x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

donde $a = 1$, $b = 6$ y $c = 8$

f) $3x^2 - 16 = 0$, donde $a = 3$, $b = 0$ y $c = -16$

g) $x^2 - 8 = 0$, donde $a = 1$, $b = 0$ y $c = -8$

h) $5x^2 + 6x = 0$, donde $a = 5$, $b = 6$ y $c = 0$.

i) $8x - 2x^2 = 0$, donde $a = -2$, $b = 8$ y $c = 0$

En seguida, unos ejemplos sencillos de solución de ecuaciones cuadráticas:

a) $y^2 = 64$, la respuesta es $(8,-8)$. Podemos verificarlo, pues si $y = 8$, $(8)(8) = 64$ y si $y = -8$, $(-8)(-8) = 64$.

b) $a^2 = 16$, la solución es $(4,-4)$. Verificamos, si $a=4$, entonces: $(4)(4) = 16$ y si $a=-4$, $(-4)(-4) = 16$.

La solución de toda expresión cuadrática, está basada en la solución de: $x^2 = a$.

Tenemos en seguida la definición que nos ayudará a comprender lo anterior, así como algunos ejemplos.

Definición: Si $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$

Ejemplo: Resolver $x^2 = 4900$

Respuesta: $x = \sqrt{4900}$ o $x = -\sqrt{4900}$ por lo tanto,

$x = 70$ o $x = -70$

Este tipo de expresiones cuadráticas tiene una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo,

Distancias: La distancia que se recorra depende de la velocidad o aceleración y esto involucra unidades como metros por segundo cuadrado.

Estadística: En estadística, la medida de la desviación estándar involucra expresiones cuadráticas de la forma $(x - m)^2$.

Areas: Ya conoces fórmulas de áreas que incluyen expresiones cuadráticas. Las más famosas son las del área de un cuadrado $(A = \ell^2)$ y la del círculo $(A = \pi r^2)$.

En general, hay muchas situaciones que conllevan expresiones de este tipo. Por ejemplo:

Supongamos que recibes 600 cada año en tu cumpleaños. Entonces en tres años tendrás 1800. Tendrías más si lo pusieras en un banco o alguna otra inversión que produjera intereses.

Qué interés o que factor te permitiría tener 2000 para el tercer cumpleaños?

Respuesta: Sea $\underline{x}$ ese factor. En el 1er año tendrías 600. En el 2do año serían $600(x) + 600$. En el 3er año tendrías:

$$600(x)(x) + 600(x) + 600$$

Lo que buscamos es, para qué valor de $\underline{x}$:

$$600x^2 + 600x + 600 = 2000$$

Este problema plantea una ecuación de segundo grado de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$. La respuesta sería difícil de encontrar, pero hay una fórmula que da la solución a esta ecuación. Esta es, la fórmula general para la solución de ecuaciones de segundo grado:

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Esta fórmula debe ser memorizada. Para aplicar esta fórmula, nótese que $\underline{a}$ representa el coeficiente de $\underline{x}$, $\underline{b}$ representa el coeficiente de x, $\underline{c}$ es el término constante o independiente y el cero debe estar en un lado de la ecuación.

EJEMPLO.- Resolver $3x^2 + 5x + 2 = 0$. Aquí a=3, b=5, c=2, por lo que:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{6}$$

En este punto, separamos el ± 1:

$$x = \frac{-5 + 1}{6} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{-5 - 1}{6}$$

$$x = \frac{-4}{6} \qquad\qquad x = \frac{-6}{6}$$

$$x = \frac{-2}{3} \qquad\qquad x = -1$$

Verificamos los resultados substituyendo los valores de x en la ecuación: $3x^2 + 5x + 2 = 0$

$$3(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0 \qquad\qquad 3(-2/3)^2 + 5(-2/3) + 2 = 0$$

$$3 + (-5) + 2 = 0 \qquad\qquad 3(4/9) + 5(-2/3) + 2 = 0$$

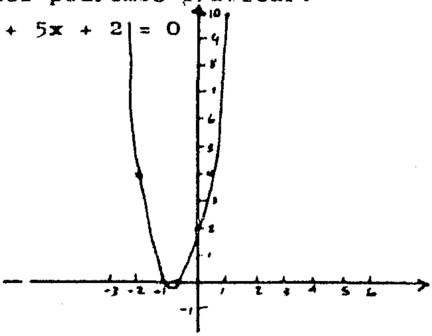
$$12/9 - 10/3 + 2 = 0$$

$$4/3 - 10/3 + 6/3 = 0$$

Podemos graficar esta ecuación de la misma forma en que lo hemos hecho con anterioridad. Escribimos la ecuación en forma de función y elaboramos una tabla dandole valores a x para obtener otro valor para y. Cada uno de estos valores formarán un par ordenado que será un punto que después podremos graficar:

$$y = 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

x	y
-2	4
-1	0
0	2
-2/3	0
1	10



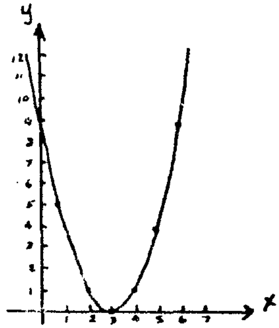
Toda ecuación de segundo grado con una incógnita representa una curva llamada parábola, que ya habíamos mencionado con anterioridad. Gráficamente, la solución de una ecuación de segundo grado se obtiene observando los puntos en donde la parábola corta al eje de las x. A la solución de una ecuación de segundo grado se le llama raices de la ecuación. El primer elemento de cada punto donde la parábola corta al eje de las x, serán las raices de la ecuación. En la gráfica anterior podemos ver que la parábola corta al eje de las x en los puntos (-1,0) y (-2/3,0). Por lo que las soluciones son: x=-1 y x=-2/3 como ya habíamos calculado mediante la fórmula general. Cuando la parábola que representa una ecuación de segundo grado no toca o corta al eje de las x, se dice que sus raices son imaginarias, sin embargo no adentraremos más en este aspecto.

En seguida resolveremos otro ejemplo de ecuación de segundo grado, primero gráficamente y después mediante la fórmula general.

EJEMPLO.- Resolver la ecuación $x^2-6x+9=0$

Tenemos: $y = x^2 - 6x + 9$

Para $x = 0$	$y = 9$
$x = 1$	$y = 4$
$x = 2$	$y = 1$
$x = 3$	$y = 0$
$x = 4$	$y = 1$
$x = 5$	$y = 4$



La curva toca al eje de las x en un solo punto, cuyo primer elemento es 3, por tanto, las dos raices de la ecuación son iguales y valen 3. En la tabla que elaboramos podemos ver que cuando x=3 la función vale 0, por lo que podemos decir que este valor satisface la ecuación o la vuelve verdadera.

Ahora, resolvamos la ecuación mediante la fórmula general:

En esta ecuación, a=1, b= -6 y c=9, por lo tanto tenemos:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{6+0}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{6-0}{2}$$

$$x = 3 \quad \text{y} \quad x = 3$$

Verificamos: $(3)^2 - 6(3) + 9 = 0$

$$9 - 18 + 9 = 0$$

EJEMPLO.- Resolver la ecuación: $-x^2 + 2x + 8$. Aquí, a=-1, b = 2 y c= 8.

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-1)(8)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2}$$

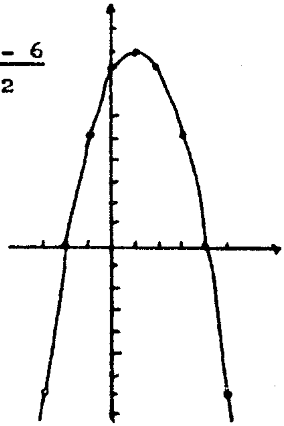
$$x = \frac{-2 \pm 6}{-2}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{-2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-2 - 6}{-2}$$

$$x = -2 \quad \text{y} \quad x = 4$$

Verificamos graficando la ecuación:

x	y
-3	-7
-2	0
-1	5
0	8
1	9
2	8
3	5
4	0
5	-7



La parábola corta al eje de las x, en los puntos con coordenadas (-2,0) y (4,0), por lo que el primer elemento de cada par es una de las raices de la ecuación, en este caso -2 y 4. La parábola resulta boca abajo debido a que a es negativa, a=-1, en este caso.

EJEMPLO.- Resolver y comprobar $x^2 + 5 = 7$. Para resolver esta ecuación hay que efectuar una simplificación:

$$x^2 + 5 - 7 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$ donde a = 1, b = 0 y c = -2.

Aplicamos la fórmula: $x = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$

efectuando operaciones: $x = \dfrac{\pm\sqrt{8}}{2}$ introducimos el denominador a la raíz elevandolo al cuadrado:

$$x = \pm\sqrt{\frac{8}{4}}$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Verificamos: $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$

$2 - 2 = 0$

EJEMPLO.- Resolver y comprobar $5x^2 - 3x = 0$. Aquí a=5 y b=-3 c = 0.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(5)(0)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 0}}{10}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{10}$$

$$x = \frac{-3 \pm 3}{10}$$

$x = \frac{-3 + 3}{10}$ y $x = \frac{-3 - 3}{10}$

$= \frac{0}{10}$ y $= \frac{-6}{10}$

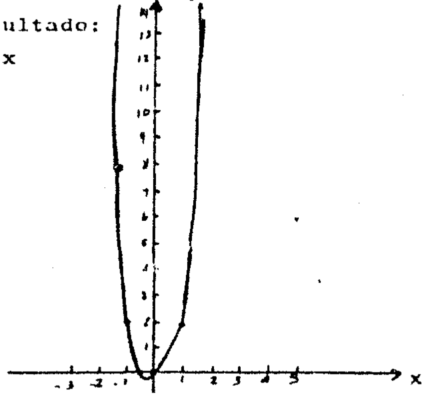
$= 0$ y $= -3/5$

En este tipo de ecuaciones una raíz siempre va a resultar 0.

Verifiquemos gráficamente el resultado:

$y = 5x^2 - 3x$

x	y
-1	8
0	0
-3/5	0
1	2
2	14



EJEMPLO.- Resolver $x^2 = 5x$.

S_{-5x}: $x^2 - 5x = 0$ $a=1$, $b = -5$, y $c = 0$:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 5}{2}$$

$x = \frac{5 + 5}{2}$ y $x = \frac{5 - 5}{2}$

$= \frac{10}{2}$ y $= \frac{0}{2}$

$= 5$ y $= 0$

Verificamos: $(5)^2 - 5(5) = 0$

$25 - 25 = 0$

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Cada ecuación es equivalente a una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Indica los valores de a, b, c.

a) $3x^2 + 4x + 1 = 0$	b) $12y^2 + 7 + 5 = 0$
c) $-2m^2 + 8 = 0$	d) $12x^2 + 1 - 7x = 0$
e) $4z - 12z^2 + 9 = 0$	f) $20w^2 - 6w = 2$
g) $1 - x^2 = x$	h) $x^2 + 2x + 2 = 5$

2.- Resuelve las ecuaciones de la pregunta anterior mediante la fórmula general.

3.- Supongamos que depositas 50 pesos en un banco cada año en tu cumpleaños. El banco te multiplica este dinero cada año por un cierto factor de interés <u>x</u>.

a) Cuanto tendrás en tu 3er cumpleaños?

b) Que factor x te permitirá tener 150 para el 3er cumpleaños?

c) Que valor de x te permitirá tener 165 para el 3er cumpleaños?

4.- Resuelve la ecuación del problema del cumpleaños planteada al principio de la Lección.

5.- Menciona tres ejemplos de las aplicaciones de expresiones cuadráticas.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

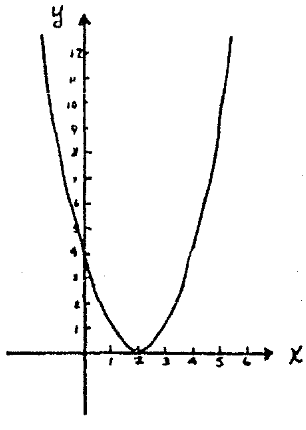
1.- Resuelve las ecuaciones siguientes simplificándolas primero a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y aplicando la fórmula general.

a) $x(x+3) = 5x + 3$	b) $7(x-3) - 5(x-1) = x^2 - 5(x+2)$
c) $3(3x-2) = (x+4)(4-x)$	d) $(x-5) - (x-6) = (2x^2 - 3) - 118$
e) $9x + 1 = 3(x - 5) - (x-3)(x+2)$	f) $(5x-2) - (3x+1) - x - 60 = 0$
g) $(2x^2 - 3) - (x+5) = -23$	h) $3x(x-2) - (x-6) = 23(x-3)$

2.- Resuelve graficamente las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ b) $x^2 + 11x = -24$

3.- Indica las raices de la siguiente ecuación sin utilizar la fórmula general para resolverla, sino únicamente la gráfica a continuación: $x^2 - 4x + 4 = 0$



R E S U M E N

En esta Unidad, tratamos aspectos relacionados con la solución de ecuaciones y problemas que involucran el planteamiento de ecuaciones.

Una ecuación es una igualdad con una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que se verifica o es verdadera sólo para determinados valores de las incógnitas. El Conjunto Solución de una ecuación, es aquél cuyos elementos o valores hacen verdadera o verifican la ecuación. Las ecuaciones de la forma $ax + b = 0$, esto es, que tienen una sola incógnita, tienen un conjunto solución con un solo elemento, mientras que las ecuaciones con dos incógnitas, de la forma $ax + by + c = 0$, tienen un conjunto solución con una infinidad de elementos.

Encontramos el conjunto solución de ecuaciones con una sola incógnita, de la forma $mx + b = 0$, gráficamente y vimos que este consistía en las coordenadas del punto donde la recta resultante de la ecuación, intersectaba el eje x. Así mismo, hicimos un repaso de algunos algoritmos que nos auxilian en la solución de ecuaciones con una incógnita, así como para otros tipos de ecuaciones.

Vimos que a las ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$, se le pueden asociar funciones de la forma $y = mx + b$, pues para cada valor que tome la variable x, le corresponderá otro a la variable y. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones indeterminadas, pues podemos encontrar una infinidad de valores que satisfacen este tipo de ecuaciones.

Sin embargo, hay ocasiones en que tenemos conjuntos de dos o más ecuaciones de este tipo, entonces se le llama: Sistema de ecuaciones y entonces, muchas veces podemos encontrar valores particulares que funcionen para todas las ecuaciones del sistema, esto es, soluciones comúnes a las ecuaciones de que conste el sistema.

Vimos como encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones gráficamente. Este será las coordenadas del punto donde se intersecten las rectas resultantes de las ecuaciones que forman el sistema. Pero como dicho método no es muy exacto, pues depende mucho de la precisión de la gráfica, vimos algunos otros métodos, tales como: Método de substitución, suma o resta y determinantes. Los dos primeros consisten, en general, en reducir las ecuaciones del sistema a una ecuación con una sola incógnita, para después resolverla. Tal vez encuentres, con la práctica, que el método por determinantes resulta el más sencillo de los anteriores.

Dedicamos toda la Lección 3 a el planteamiento y solución de problemas con ecuaciones. En ella encontrarás algunas consideraciones y sugerencias muy importantes que te ayudarán a resolver problemas no sólo en la escuela, sino en el trabajo y la vida diaria. Es necesario que además de tomar en cuenta todo lo sugerido en la Lección, practiques este tipo de problemas lo suficiente para que puedas adquirir la destreza necesaria para resolverlos.

Por último, vimos algunos ejemplos de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, así como algunas situaciones que llevan a este tipo de ecuaciones para poder resolverlas. Vimos como resolver este tipo de ecuaciones de segundo grado mediante la fórmula general, así como gráficamente.

U N I D A D III

INTRODUCCION AL ANALISIS ESTADISTICO

Lección 1

ESTADISTICA

En la presente Unidad y las dos siguientes nos dedicaremos a estudiar conceptos muy interesantes, acerca de los cuales ya has obtenido algunas nociones en cursos previos de Estadística en la Secundaria y aún en Primaria.

Tal vez te preguntes ¿Porqué estudiar Estadística? La Estadística, si es tratada de manera apropiada, puede ser uno de los campos de estudio más interesantes, pues prácticamente tiene aplicación en todas las áreas de las relaciones humanas y se entrelaza con incontables campos de estudio.

H.G. Wells, el profeta del siglo 19 afirmó: "El pensamiento estadístico será un día tan necesario para el ciudadano eficiente como la capacidad de leer y escribir".

La Estadística entra de alguna forma, en nuestra vida diaria. Los periódicos incluyen artículos con aplicaciones estadísticas, de igual forma que los noticieros, las revistas, etc. Sin embargo, si en este momento se te pidiera una definición de Estadística, qué podrías decir?

Tal vez contestarías: "Estadística es solamente una recolección de datos", o "Es un conjunto de hechos o circunstancias" o "El registro de datos curiosos" o "es información".

Es verdad que estas definiciones y actividades se asocian frecuentemente con el concepto de Estadística, sin embargo, no es verdad que esta sea una definición correcta. No es posible obtener un consenso general de la definición de Estadística. Sin embargo, si te dijera que observaras a un grupo de personas y anotaras quienes usan lentes y quienes no los usan, dirías que esto es parte de la Estadística? Si te pidieran que trataras de describir los colores de un lote de 1000 automóviles dirías que esto es una aplicación de la Estadística? Entonces creo que estarás de acuerdo en la siguiente definición de Estadística:

"La Estadística es un conjunto de técnicas que sirven para describir el comportamiento de una característica no constante, que se puede observar en cada uno de los elementos de una población de interés"

Examinemos un poco esta definición. En principio, dice que la Estadística es un conjunto de técnicas, estas técnicas abarcan desde la recopilación de la información, la organización, la presentación, etc., que nos llevarán a la descripción del comportamiento de una característica.

Esta característica puede ser tal como el color de pelo, los hijos en un matrimonio, las estaturas, el peso, el número de personas vacunadas contra la polio, los tipos de ganado en cierta región agrícola, etc. La lista es muy grande. Lo único que se requiere es que no sea constante, ya que no tendría caso medir u observar un fenómeno sobre el cual tuvieramos la certeza de que lo que iba a ocurrir para la primera vez, seguiría ocurriendo sin importar las veces que repitieramos la observación.

Un ejemplo de esto sería si estuvieramos observando lo que sucede al soltar una piedra de una cierta altura. Que sucede? la piedra cae. En este caso no es necesario aplicar Estadística, pues la piedra siempre caerá. Esto sabemos que ocurrirá pues hay una ley física que lo determina.

Debemos diferenciar dos variantes de los procedimientos estadísticos: las técnicas de Estadística Descriptiva y las técnicas de Estadística Inferencial. Nuestro estudio estará enfocado hacia las primeras, sin embargo, en la Lección 5 de esta Unidad trataremos un poco el concepto de Estadística Inferencial.

El objetivo central de la Estadística Descriptiva, es presentar la información contenida en un conjunto de datos en forma útil y comprensible. La Inferencia Estadística o Estadística Inferencial, por otra parte, se ocupa de generalizar esta información a conjuntos más amplios. Más específicamente, hace inferencias acerca de poblaciones a partir de muestras extraídas de estas.

Todas estas técnicas forman parte del Análisis Estadístico. Para hacer un análisis estadístico es necesario, primero que nada contar con un objetivo. Saber qué es lo que deseamos investigar. Además, tener nuestra población delimitada y precisar la característica que deseamos observar.

Después, se efectúa todo el procedimiento de organizar, procesar, resumir, interpretar y extraer conclusiones a partir de nuestras observaciones.

Antes de seguir adelante, estableceremos el significado de algunos términos que hemos venido utilizando y que se utilizarán a lo largo del texto.

DATOS: Números o medidas que se obtienen como resultado de la observación de un fenómeno o característica.

VARIABLE: Característica o fenómeno que puede adoptar diversas modalidades o tomar diferentes valores. Por ejemplo: Peso, sexo, estatura, raza, son variables pues pueden tomar distintas modalidades o valores en distintos individuos.

POBLACION: Conjunto de individuos, objetos o medidas que poseen una característica común observable.

PARAMETRO: Cualquier atributo de una población que sea medible. Por ejemplo, la proporción de estudiantes de las universidades del país que estudian medicina.

MUESTRA: Un subconjunto de la población.

ESTADISTICO: Número resultante de la manipulación de ciertos datos de acuerdo con determinados procedimientos específicos. Comúnmente, se utilizan estadísticos que se calculan a partir de una muestra para estimar; esto es, aproximar, el valor de un parámetro de la población. Por ejemplo, para estimar el número de estudiantes que estudian medicina en el país, se utiliza la proporción de ellos que aparece en una muestra.

EJEMPLO.- Supongamos el caso de una fábrica que produce puntillas para lapicero para cuyo grosor hay límites de tolerancia.

El departamento de control de calidad selecciona un número de puntillas de la producción diaria y las mide cuidadosamente. Estas puntillas constituyen la muestra. La variable es el ancho de la puntilla. Los datos están constituídos por las medidas de todas las puntillas que conforman la muestra. Cuando los datos se manipulan conforme a ciertas reglas, pueden obtenerse algunas características representativas de la totalidad, tales como el grueso "promedio" de las puntillas; el valor numérico resultante consituye un estadístico. La población en la cual estamos interesados, es la producción completa diaria de la fábrica. El grueso "promedio" de las puntillas producidas en un día constituye un parámetro.

Cabe hacer notar, que es improbable que el parámetro de interés sea conocido siempre, pues sería económicamente inapropiado medir cada puntilla producida en el día. Sin embargo, como ya se mencionó, el valor desconocido es estimado frecuentemente a partir de muestras.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Define con tus propias palabras lo que pienses que debe ser el estudio de la Estadística.

2.- Da una razón para estudiar Estadística.

3.- Menciona una característica que se pueda observar en una población de interés.

4.- Cuales son las dos variantes en los procedimientos estadísticos?

5.- Cual es el objetivo de las técnicas de Estadística Descriptiva?

6.- Cual es el objetivo de las técnicas de Estadística Inferencial?

7.- Menciona algunos elementos necesarios para un Análisis Estadístico.

8.- Define: Dato, Variable, Población, Parámetro, Muestra y Estadístico.

9.- Da un ejemplo similar al de la Lección utilizando todos los términos anteriores.

10.- De los siguientes incisos indica si la característica subrayada representa una constante o una variable.

a) El número de dias del mes de Abril.

b) La edad de los estudiantes de primer año del Conalep.

c) La edad mínima requerida para vota .

d) El tiempo requerido para terminar un exámen.

e) La máxima calificación en un exámen.

f) La cantidad anual de dinero que gasta en libros un grupo de 15 estudiantes.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Un estudiante de contabilidad pregunta: "En que difiere la Estadística de la Contabilidad? Ambas trabajan con números y ambas son utilizadas en el campo de los negocios" ¿Qué le dirías tú?

2.- Menciona 4 posibles poblaciones en el sentido estadístico.

3.- Cuál es la diferencia entre un Estadístico y un Parámetro?

4.- Compara la definición de Estadística que aparece en el diccionario con la que se da aquí. Cual es tu opinión?

5.- Porque la Estadística requiere que la característica que se va a observar en un población no sea constante?

6.- De los siguientes incisos, indica si es posible, cuál es la población, dato, muestra, variable, estadístico o parámetro que se mencione.

a) En Ciudad Azteca una muestra de 250 empleados arrojó un promedio de salario per cápita de 300 pesos diarios.

b) La tasa de nacimiento en el país disminuyó en un 3% con respecto al mes anterior.

c) Las "estadísticas" de Paula son 85, 50, 90.

d) La proporción de niños varones en una clase de Español es de .56

7.- Compara la definición de variable dada en la Unidad I con la definición dada en esta Lección. Son similares?

Lección 2

DATOS Y VARIABLES EN ESTADISTICA

Ya hemos mencionado con anterioridad el término Estadística Descriptiva. En esta Unidad y las siguientes nos dedicaremos al estudio de esta parte del análisis estadístico.

El fin primordial de la Estadística Descriptiva es describir, como su nombre lo indica, las características principales de los datos reunidos. Por lo general, se hace por medio de tablas, gráficas, cuadros e índices.

Supongamos que se nos ha encomendado la tarea de revisar un lote de 10000 jarrones artesanales para exportación y tenemos que verificar que estén en buen estado; esto es, que no estén despostillados. Al revisarlos vamos formando una lista donde si está en buen estado el jarrón, pondremos una palomita (✓) y si nó lo está una cruz (x). Cuando hayamos terminado, tendremos una lista grandísima y si alguien nos solicitase la información en ese momento, no podríamos decir cuantos estan en buen estado y cuantos no. Sin embargo, si contamos cuantos hay de cada tipo, supongamos que 8500 estan en buen estado y 1500 no lo estan. Tendríamos:

Jarrones en buen estado...........	8500
Jarrones en mal estado............	1500
T O T A L.......................	10000

La información, así presentada, ya tiene más sentido. Se puede saber de inmediato la cantidad disponible de jarrones para exportar. Le hemos asignado una cantidad a cada "clase" de jarrones.

Ahora, supongamos que lo que estamos contabilizando es la estatura de cada uno de tus compañeros de clase. Entonces tendremos una lista de 50 mediciones entre 1.50 y 2.00 metros. Si quisieramos saber el número de hombres o mujeres entre estos 50 estudiantes, tendríamos otros dos números.

Decíamos al principio de la Lección, que el fin primordial de la Estadística Descriptiva es describir las características principales de los <u>datos</u> reunidos. En los ejemplos anteriores, el número de jarrones en buen y mal estado, las distintas estaturas, el número de hombres y mujeres en una clase, constituyen los <u>datos</u>.

A continuación ampliaremos más este concepto.

Definimos un dato como un número o medida que se obtiene como resultado de la observación de un fenómeno o característica. Esta definición no es única, pues existen otras que dependiendo del enfoque que se les de, ya sea en el área de administración, computación, etc. puede variar. Sin embargo, esta definición la utilizaremos con fines estadísticos.

Cuando vamos a organizar, resumir y analizar datos estadísticos, debemos considerar el tipo de dato con el que se va a trabajar para decidir el tratamiento que se le dará.

Podemos distinguir dos tipos de datos: NUMERICOS y CATEGORICOS.

DATOS NUMERICOS: Consisten en medidas numéricas tales como pesos, distancias, tiempo, temperaturas, etc. Y conteos, como por ejemplo, el número de niños en una familia, número de alumnos aprobados en un curso, número de accidentes ocurridos en determinada zona en determinado tiempo, etc.

Una característica importante de estos datos es que guardan una relación entre sí, generalmente de orden, que diferencian cada una de sus clases.

DATOS CATEGORICOS: Este tipo de datos se obtienen fundamentalmente en la observación de características cualitativas en una población, por ejemplo, el estado civil, la ocupación, el sexo. Las categorías para cada una de estas características podrían ser, a su vez: para el estado civil; soltero, viudo, casado, divorciado. Para ocupación: obrero, técnico, profesionista. Para sexo: Femenino y Masculino.

El concepto de dato está íntimamente ligado al de Variable, pues es precisamnete la observación de las variables en poblaciones, las que nos van a producir los datos. Recordarás que definimos Variable en términos estadísticos como: una característica o fenómeno que puede adoptar diversas modalidades o tomar diferentes valores.

Entonces, como consecuencia de esta clasificación de los tipos de datos, podemos definir a su vez, dos tipos de variables: las varibles CATEGORICAS y las NUMERICAS.

Así, las VARIABLES CATEGORICAS serán aquellas cuya observación produce datos categóricos y que están definidas por un conjunto de categorías que constituyen sus diversas modalidades.

Por ejemplo, la variable sexo, tiene las categorías: Femenino y Masculino. Podemos observar el Estado Civil, con las categorías: soltero, casado, viudo y divorciado.

Las VARIABLES NUMERICAS son aquellas cuya observación produce datos numéricos, ya sean los resultados de una medición o un conteo. Las Variables Numéricas se pueden clasificar en VARIABLES DISCRETAS y VARIABLES CONTINUAS.

VARIABLES DISCRETAS: Se les denomina así a las variables resultantes de conteos; tales como, el número de defunciones en un hospital en un año, el número de hijos en una familia, el número de goles en un campeonato de fut-bol, etc. Su característica principal es que el número de valores que puede tomar se puede contar.

VARIABLES CONTINUAS: Son aquellas resultantes de mediciones. Ejemplos de este tipo de variables serían: el peso, la estatura, la temperatura, la distancia, etc. En general, se dicé que el conjunto de valores que pueden tomar contiene al menos, un interválo de números reales.

El ejemplo de las mediciones de las estaturas de los 50 estudiantes sería un ejemplo de este tipo de variable. Supongamos que se utilizó para medirlos una regla muy precisa con divisiones en centímetros y uno de los estudiantes midió 1.79cm. Pero, si utilizamos una regla con divisiones en milímetros, podemos obtener una medida más exacta y aún más con una regla que tenga centésimas o milésimas de centímetro y aún así, siempre podremos construír o imaginar otras escalas de mayor precisión.

Las variables contínuas pueden tomar un número infinito de valores intermedios. En consecuencia, nunca podremos especificar el valor exacto de cualquier medición, sino que estaremos expuestos a ser desmentidos al tomar la medida con un instrumento de mayor exactitud, por esta razón, suponemos que los valores de las variables contínuas s n siempre aproximados.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Cuál es la finalidad de la Estadística Descriptiva?

2.- En Estadística, que entiendes por un dato? Por Variable?

3.- Como se dividen los tipos de datos?

4.- Las variables numéricas las podemos clasificar en variables

________________ y variables ________________.

5.- Los valores provinientes de mediciones pertenecen a variables de tipo ________________.

6.- Coloca la letra que creas apropiada según lo que corresponda a los siguientes ejemplos:

a) Dato numérico b) Variable categórica

c) Variable contínua d) Variable discreta

___ Ocupación

___ Estatura

___ Sexo

___ 1.50mts

___ Religión

___ Número de niños en un salón de clase

___ 87 gatos

___ Peso

___ 3hrs

___ 5°C

<u>Preguntas para verificar la comprensión de la lectura</u>:

1.- Cuál es la relación entre un dato y una variable?

2.- Si una persona dice que mide 1.70m podemos considerar que esta información es exacta?

3.- De los siguientes enunciados, indica cuales representan variables de tipo contínuo y cuales discretas.

a) El <u>tiempo</u> que toma resolver estos problemas.

b) El <u>número de periódicos</u> vendidos en una determinada ciudad el 19 de Marzo de 1981.

c) El cambio promedio en <u>peso</u> de 5 mujeres en un período de 4 semanas.

d) El <u>número de goles</u> anotados en el campeonato de 1970 por 5 jugadores seleccionados al azar.

e) Los <u>nacimientos</u> registrados en Taxco durante 1982.

4.- Porque se dice que los valores de las variables contínuas son siempre aproximados?

Lección 3

ESCALAS

Podemos hacer aún otra clasificación de las variables refiriéndonos a la escala sobre la cual están definidas. La palabra Escala significa sucesión ordenada de cosas distintas pero de la misma especie. En términos de estadística, sería una sucesión ordenada de elementos de la misma población.

I.- En el caso de las VARIABLES CATEGORICAS, pueden tener o no un orden "natural" las distintas clases o categorías de lo que estemos tratando. Por ejemplo, si estuvieramos observando la frecuencia de casos de hepatitis entre Adultos, Jóvenes y Niños; podemos decir que esta escala tiene un orden "natural" dado que los adultos son mayores que los jóvenes y los jóvenes mayores que los niños o en el sentido contrario: Niños, Jóvenes y Adultos. De una de estas formas las colocaríamos al hacer una descripción de los casos de hepatitis en cada categoría.

	Frecuencia de casos de hepatitis
Adultos	40%
Jóvenes	25%
Niños	35%

Otro ejemplo de Variables Categóricas que tienen un orden natural, sería el de las clases sociales: Alta, Media y Baja.

Otro ejemplo, la posición que ocupan los jugadores de un equipo de beisbol clasificados según su "valor" para el equipo; o la posición que ocupan los candidatos políticos según su "popularidad". Hay que notar que la posición se asigna con el orden de los individuos dentro de la clase. Así, al candidato más popular le corresponderá la posición 1, al segundo la posición 2, y así hasta llegar al candidato de menor popularidad.

Todos estos ejemplos y aquellos que sigan un orden natural, se dice que tienen o están en una ESCALA ORDINAL.

En el caso en que no se pueda definir ningún orden, la escala será únicamente una ESCALA NOMINAL. En este caso se encuentran los siguientes ejemplos:

El caso de la variable Sexo, con las categorías: Femenino y Masculino. Si estuvieramos observando la cantidad de hombres y mujeres en una población, al hacer la descripción de los datos no hay un orden natural para colocarlas. Sin embargo, cabe hacer la observación de que una variable del tipo NOMINAL, dependiendo de la característica que se estuviera estudiando u observando, pudiera considerarse de tipo ORDINAL. Veamos un ejemplo de esto.

En el caso de las categorías ocupacionales, una variable considerada Nominal, quién va primero? El médico? El ingeniero? El contador? Cada categoría es esencialmente un nombre, por esto se dice que se trata de una Escala Nominal. Sin embargo, si en estas categorías lo que estuvieramos midiendo fueran sus conocimientos matemáticos, entonces podríamos considerar un cierto orden, pues suponemos que el ingeniero conoce más matemáticas que el contador y este a su vez, más que el médico. En este caso se podrían considerar como variables ordinales.

En el caso de la variable Sexo, si lo que estamos midiendo es la fuerza física, pues tendríamos que considerar en primer término la categoría Masculino y después Femenino.

Otro ejemplo de variable Nominal sería el estado civil: Casado, viudo, soltero y divorciado. Carecen de orden las categorías sin embargo, ya hemos visto que dependiendo de lo que estemos observando pudieran adquirir un cierto orden.

II.- Las VARIABLES NUMERICAS, en donde sí existe una relación de orden entre los posibles valores que puede tomar la variable, se clasifican en escala como: ESCALA DE INTERVALOS Y ESCALA DE PROPORCIONES.

ESCALA DE INTERVALOS.- Los valores asignados a variables con este tipo de escala son valores numéricos (procedentes de mediciones o conteos) que por lo tanto permiten el uso de las operaciones aritméticas fundamentales.

En este tipo de escalas conocemos las distancias o intervalos entre todos los valores posibles de la variable. Así, la distancia o intervalo entre dos pares de valores será la misma en cualquier parte de la escala, independientemente de donde se ubique el cero, 0, de la unidad de medida utilizada.

De este modo, la diferencia entre 8 y 10 metros es la misma que la distancia entre 110 y 112 metros.

ESCALA DE PROPORCIONES.- Todo lo dicho para la escala de Intervalos se aplica en este caso. La diferencia entre las dos es que la escala de Proporciones tiene una estructura por intervalos y además, tiene un punto entre sus posibles valores que es el "verdadero cero" de lo que estemos observando, mientras que la escala de intervålos utiliza un cero arbitrario.

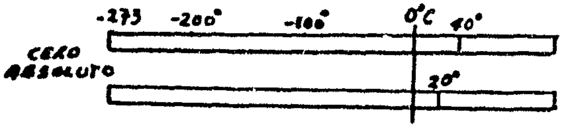
Un ejemplo para ilustrar esto sería la medida de personas u objetos a partir de la superficie de una mesa o a partir de la superficie del piso. Aclaremos esto un poco.

Supongamos que medimos dos personas a partir del pisó; esto es, a partir del "verdadero cero" o inicio de lo que vamos a medir. Una de las personas mide 1.70m y la otra 1.35m. Ahora, las medimos a partir de una mesa que tiene 1 metro de alto, por lo tanto la primera persona mide .70cm y la segunda .35cm. La diferencia entre cada centímetro en cualquiera de las mediciones es la misma, ya sea a partir del piso o de la mesa; esto es, la diferencia entre 1.35 y 1.36 es la misma que entre .35 y .36 cm. Sin embargo, cuando medimos las personas a partir de la mesa estamos utilizando un cero arbitrario que no es el verdadero cero, y si afirmaramos quela primera persona que midió a partir de la mesa .70cm mide el doble de la otra que midió solo .35cm, estaríamos haciendo una afirmación correcta solo en apariencia, pero en realidad cometemos un error, ya que .70cm representa 1 mt. de mesa + .70cm y .35 representa 1 metro de mesa + .35cm y obviamente, 1.70 no es el doble de 1.35m, como se ve en la figura siguiente:

En consecuencia, sólo la escala de Proporciones nos permite hacer comparaciones entre magnitudes de la misma y la relación existente entre las distancias que los separan.

De este modo, por ejemplo en el sistema métrico, que es una escala de proporciones, pues utiliza el verdadero cero, tenemos que 8 metros es a 4 metros como 4 metros es a 2 metros. Podemos comparar entre sus números, lo que ya vimos que no es posible hacer en la escala de intervålos.

Otro ejemplo de una escala de intervalos es la escala de temperatura en grados Centígrados o en grados Farenheit. En la escala centígrada, el 0^oC no representa la total ausencia de calor, pues esta se localiza a -273^oC en la escala, por lo que 0^oC es un cero arbitrario. De esta forma, si decimos que hoy tenemos 40^oC de calor y como ayer había solo 20^oC entonces hoy hace el "doble" de calor, estamos cometiendo un error, pues en realidad el día de hoy hay $273^oC + 40^oC = 313^oC$ de temperatura y el dia de ayer había una temperatura de $273^oC + 20^oC = 293^oC$, por lo que podemos ver que el día de hoy no está al doble de temperatura que ayer, pues 313^oC no es el doble de 293^oC. Esto se aprecia mejor en la gráfica siguiente:



Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Define: Escala.

2.- Como se clasifican en escala las variables categóricas?

3.- Menciona el caso de una variable que tenga un orden natural.

4.- Da un ejemplo de una variable perteneciente a una escala nominal.

5.- Como se clasifican en escala las variables numéricas?

6.- Menciona un caso en que una variable nominal pudiera considerarse como variable ordinal.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- En los siguientes ejemplos identifica la escala de medida de la variable subrayada.

a) Distancia entre la casa y la escuela.
b) Número de niños nacidos a diferentes horas del día.
c) Número de votos para cada uno de los tres candidatos a la presidencia.
d) Número de personas registradas para votar, clasificados por edades.

2.- Cuál es la principal diferencia entre una escala ordinal y una nominal?

3.- Cuál es la principal diferencia entre una escala de intervalos y una de proporciones?

4.- Da dos ejemplos de cada una de las escalas ordinal, nominal, de proporciones y por intervalos, no vistosen la Lección.

Actividad:

1.- Recorta tres ejemplos de aplicaciones de Estadística que aparezcan en los periódicos y clasifica las variables de que se trate en cada caso.

Lección 4

INFERENCIA ESTADISTICA

Al principio de la Unidad vimos los conceptos de: Población, Muestra e Inferencia Estadística. En esta Lección extenderemos un poco estos conceptos, sin embargo, el resto del curso estará dedicado únicamente a la Estadística Descriptiva.

Hemos definido Población como un conjunto de individuos, objetos o medidas que poseen una característica común observable. A esto, podríamos agregarle: y acerca de los cuales deseamos obtener información.

Por Muestra hemos dicho que es un subconjunto de una población, podemos decir tambien que una muestra es: un grupo de elementos seleccionados de la población para ser examinados.

Por otro lado, la Inferencia Estadística a partir de las observaciones hechas en una muestra, generaliza el conocimiento obtenido, esto es, realiza inferencias para toda la población de la que se extrajo la muestra. En esas condiciones, resulta natural indicar que dicha muestra deberá ser lo más representativa posible de la población en cuestión.

Todo este procedimiento de selección de muestras recibe el nombre de Muestreo. El primer paso decisivo en un muestreo válido es definir a la población en cuestión muy cuidadosamente.

Para predecir el resultado de una elección, nuestra población se define fácilmente como el conjunto de todos los votantes. Si desearamos obtener información sobre los microbios en una solución, nuestra población serían los microbios que están en dicha solución. Ante este tipo de cosas es fácil definir una población, sin embargo a veces puede resultar difícil.

Supongamos que deseamos obtener información de los turistas que compraron un seguro de viajero. Es muy difícil definir un "turista". ¿Es turista la señora que pasa sus vacaciones en casa de sus padres?, ¿el hombre que combina negocios con placer, al asistir a una conferencia en un centro vacacional? Debemos definir a la población con gran cuidado. Si deseamos obtener la información para vender seguros de viajero a los vacacionistas, entonces la población será el grupo de vacacionistas a los cuales uno dirige sus esfuerzos de venta.

Otra cuestión importante es que un muestreo adecuado depende considerablemente de que exista una lista completa y confiable de todos los elementos en la población. Esta lista recibe el nombre de Marco de Muestreo y, en la práctica debe uno tener mucho cuidado y en ocasiones un poco de suerte para tener un marco de muestreo exacto.

En el caso de una elección, tenemos como marco de muestreo al padrón electoral. Obviamente, sin embargo, esto dista mucho de ser exacto. En el padrón figuran sólo los posibles votantes y no los votantes reales. Algunos votantes habrán muerto después de registrarse, residen fuera del país, o no votan, etc.

En el caso de los microbios, el marco de muestreo sería el número de microbios en la solución, sin embargo los microbios tienen un poder de reproducción sumamente rápido. Nunca acabaríamos de contar.

En el caso de los vacacionistas, es posible que no exista siquiera un marco de muestreo de los vacacionistas, aunque se podría utilizar una lista de personas que tomaron vacaciones con una determinada agencia de viajes o línea aérea.

Otro concepto importante en el muestreo es el Sesgo. Qué es el sesgo? Lo explicaremos mediante un ejemplo. Supongamos que deseamos obtener una muestra para calcular el número de personas que leen en el país y vamos y nos paramos a la entrada de una biblioteca. Nuestra muestra, así obtenida, tendría un sesgo hacia las personas que leen en el país. Esto es, el resultado mostraría una cantidad muy grande de personas que leen.

Lo mismo pasaría si seleccionara mi muestra parado en una esquina de un pueblo atrasado culturalmente, mi muestra tendría un sesgo en sentido contrario. Cualquiera de estas muestras no serían representativas de la totalidad de la población.

La muestra perfecta es aquella que representa exactamente a la población de la que se ha extraído. Si el 10% de la población tiene la característica X, el 10% de la muestra tendrá la característica X, y si el 80% de la población tiene la caracterísitca Y, el 80% de la muestra la tendrá tambien.

Sin embargo, esta perfección no puede garantizarse para ninguna muestra a menos que se conozca la totalidad de la población y en ese caso, paradójicamente, la muestra resulta innecesaria.

De cualquier manera, para seleccionar una muestra que tenga buenas posibilidades de incluír la característica o característi-cas más abundantes en los elementos de la población, se puede re-currir al Muestreo Aleatorio, que en su versión más simple, consis-te en un procedimiento mediante el cual <u>al azar</u> se determina que elementos de la población deberán aparecer en la muestra con la condición de que todos tengan la misma probabilidad de ser selec-cionados.

Esto lo podríamos lograr por ejemplo, numerando todos los e-lementos de una población, después escribiendo los números en tar-jetas o fichas o cualesquiera cosas físicamente homogéneas. Poner estas tarjetas o fichas en una bolsa o urna y mezclarlas completa-mente. Se define entonces el tamaño de la muestra (n), y se sacan estos objetos con los números uno por uno al azar, hasta completar el número (n) deseado. Este procedimiento se simplifica en gran parte mediante el auxilio de métodos electrónicos, proporcionados por las computadoras.

Lo dicho anteriormente no nos garantiza que sea una muestra perfecta, lo que sí sabemos, es que el método de selección de la muestra esta libre de <u>sesgo</u>, pues no hay preferencia por alguna parte de la población en especial, ya que toda tiene la misma pro-babilidad de ser escogida.

Después de todo el proceso de selección de muestras viene la <u>Inferencia Estadística</u>. Los métodos de Inferencia Estadística comprenden los procedimientos para estimar parámetros de población y para comparar si una afirmación provisional sobre un parámetro se ve apoyada o impugnada por comprobaciones de la muestra.

EJEMPLO.- Supongamos que un grupo de investigadores afirma que el 30% de la población del país padece algún defecto visual. Por principio, se sobreentiende que los investigadores no han eva-luado la visión de todos los habitantes del país, por lo que su estudio ha estado basado en muestras. Esta teoría puede ser apo-yada o desmentida por otro grupo de científicos que realizen sus comprobaciones utilizando otras muestras.

De aquí se desprende que afirmaciones tan generales sobre parámetros de población, difícilmente son hechas a partir de ob-servaciones de toda la población, sino a partir de muestras. Es por esto la gran importancia que reviste al muestreo y la Inferencia Estadística.

Es muy probable que una estimación, resultado de una muestra sea diferente del parámetro de la población. La diferencia entre un estadístico muestral y el correspondiente parámetro de población se suele llamar error. Sólo se sabría cuál es el error si se conociera el parámetro de la población, pero como hemos visto, por lo general se desconoce. Solo se puede aproximar este error. La única manera de tener alguna certeza al respecto, es hacer todas las observaciones posibles de todo el universo, lo cual desde luego, es imposible o impracticable por muchas razones, sobre todo del tipo económico.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Define: Población, Muestra, Inferencia Estadística, Muestreo.

2.- Menciona dos aspectos para lograr un muestreo efectivo.

3.- Cuál sería nuestra población si fueramos a realizar una predicción de una elección?

4.- Qué es el Marco de muestreo?

5.- Qué entiendes por sesgo?

6.- Indica que se requiere para tener una muestra aleatoria.

7.- Define: Parámetro (Repaso)

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Da un ejemplo de como obtendrías una muestra aleatoria de una población determinada.

2.- Cuál sería la población si fueramos a realizar un estudio sobre el campesino? Crees fácil definir un "campesino" o se requiere más información para delimitar nuestra población?

3.- Da un ejemplo de una muestra con sesgo.

4.- Porqué es muchas veces impracticable hacer observaciones de toda la población?

5.- De los siguientes enunciados, cuales probablemente exijan el empleo de muestras e Inferencia Estadística?

a) El Estadístico de un equipo de beisbol desea establecer el promedio de bateo de los jugadores del equipo.

b) Un economista registra el crecimiento de la población en un área determinada del país.

c) Un médico general estudia la relación entre el consumo de cigarrillo y las enfermedades del corazón entre sus pacientes.

d) Un profesor de matemáticas emplea diferentes métodos con cada uno de sus dos grupos. Al final del curso, compara las calificaciones de sus alumnos con el fin de establecer cuál método es más efectivo.

e) Un comité para la prevención de la contaminación del aire estudia la relación entre el grado de contaminación y el número de automóviles en distintas áreas.

f) Un sicólogo estudia los efectos de las nuevas técnicas de automatización sobre el rendimiento de la producción en una fábrica de 1000 obreros.

g) Un educador estudia el efecto de la atención personal sobre el rendimiento de un estudiante.

R E S U M E N

Lección 1 - ESTADISTICA
Lección 2 - DATOS Y VARIABLES EN ESTADISTICA
Lección 3 - ESCALAS
Lección 4 - INFERENCIA ESTADISTICA

En esta Unidad hemos visto la definición de Estadística como: Un conjunto de técnicas que sirven para describir el comportamiento de una característica no constante, que se puede observar en todos los elementos de una población de interés.

Se distinguen dos variantes del método estadístico. Las técnicas de Estadística Descriptiva y las técnicas de Estadística Inferencial.

La Estadísitca Descriptiva se ocupa de la organización y presentación de datos en forma útil y comprensible. La Estadística Inferencial se ocupa de generalizar esta información, esto es, hace inferencias para toda la población a partir de muestras de dicha población.

Definimos algunos términos comúnmente usados en el análisis estadístico, así como sus elementos.

Clasificamos los distintos tipos de variables utilizados en Estadística, así como el tipo de datos que originan.

A continuación presentamos un diagrama de las clasificaciones:

DATOS ↙ ↘
NUMERICOS (Mediciones)
CATEGORICOS (Conteos)

VARIABLES ↙ ↘
NUMERICAS ↙ ↘
DISCRETAS ↘
CONTINUAS ↙
ESCALAS DE INTERVALOS Y DE PROPORCIONES
CATEGORICAS ↓
ESCALAS NOMINAL Y ORDINAL

En la última Lección ampliamos un poco el tema de la Inferencia Estadística y definimos algunos conceptos como: Sesgo, Muestreo aleatorio, error, etc. y vimos la importancia de la Inferencia Estadística en la generalización de información a poblaciones más grandes a partir de muestras; en donde, de otra forma sería imposible o impracticable obtener la información de toda la población.

U N I D A D IV

REPRESENTACIONES TABULARES Y GRAFICAS

Lección 1

TABLAS DE FRECUENCIAS

En la presenta Unidad IV trataremos el problema del registro y presentación de los datos.

Una vez que tenemos los datos acerca de una población, el siguiente paso es organizarlos y resumirlos para lograr una colección de estadísticos económica y manejable. Para lograr este objetivo, debemos hacer antes algunas consideraciones sobre el registro de datos.

1o.- En el caso de las Variables Categóricas, debemos verificar que cada categoría o clase este debidamente establecida -- sin ambiguedades o superposición de clases. Una vez hecho esto, el proceso se resume a contar las frecuencias en cada clase.

EJEMPLO.- Supongamos que en una empresa estamos investigando la cantidad de empleados de distintas profesiones que laboran en ese sitio. Entonces, tendríamos por ejemplo:

Ingenieros	//// //// //	12
Contadores	//// //// ////	15
Secretarias	//// ////	10
Obreros	//// //// //// //// //// //// //// //// //// //// //// //// //// //// ////	75

Cada raya representa un elemento de una categoría y cada una de las categorías esta definida claramente en la empresa, por lo cuál el proceso de registro se resume a contar las frecuencias, esto es, las "veces" que ocurre o que hay determinados elementos en cada categoría o clase.

2o.- En el caso de Variables Numéricas, pueden ocurrir algunos errores al registrar las observaciones, sobre todo cuando el número de observaciones es grande.

Sin embargo, en el caso de las variables numéricas del tipo discreto, esto es, de aquellas provinientes de conteos, se puede decir que son registradas sin error.

EJEMPLO.- Supongamos que estamos registrando en número de hijos por familia. Tendríamos una serie de valores tales como: 2,5,3,2,4,1,0,7,2,8, etc. Los valores que toma un variable -- discreta pueden ser registrados con precisión; sin embargo, en la práctica algunos errores pueden ocurrir.

Tratándose de variables numéricas continuas, es casi inevitable que ocurran errores en el registro. Algunos de los más comunes serían por ejemplo: 1) Que los valores procedentes de mediciones, sean aproximados "a ojo", por ejemplo de milímetros a centímetros; 2) el técnico encargado ni siquiera realizó todas las observaciones, sino que las inventó en su casa.

Por tanto, cuando se nos proporcione un conjunto de datos de este tipo debemos tomarlos con cierta reserva y suponer que ha habido ya errores en la información, como podría ser un redondeo de los datos ya desde el momento de efectuar la medición.

EJEMPLO.- Supongamos que tenemos las siguientes 50 estaturas de un grupo de compañeros de clase, registradas en centímetros:

Estudiante	Estatura X	Estudiante	Estatura X	Estudiante	Estatura X
1	163	18	142	35	157
2	158	19	149	36	165
3	163	20	136	37	142
4	158	21	160	38	148
5	172	22	163	39	152
6	168	23	160	40	155
7	132	24	178	41	160
8	145	25	158	42	160
9	153	26	165	43	158
10	152	27	140	44	172
11	160	28	148	45	168
12	163	29	154	46	165
13	160	30	155	47	145
14	180	31	158	48	150
15	170	32	162	49	152
16	165	33	158	50	155
17	138	34	175		

Los datos que tenemos están dados en centímetros y a simple vista podemos suponer que ha habido redondeo al tomar las mediciones, pues no es natural que todo el grupo haya tenido estaturas en centímetros exactos.

Tomemos estos datos numéricos para continuar con el tema. En un principio, estas 50 estaturas que hemos registrado no tienen "pies ni cabeza". Es necesario organizarlas de alguna manera sistemática.

Podemos hacerlo, por ejemplo, elaborando una lista con las estaturas ordenadas de mayor a menor y poner una rayita a la derecha de cada estatura por cada vez que se registre en los datos. El número de rayitas representa, entonces, la frecuencia con que aparece cada estatura.

X		f
180	/	1
179		
178	/	1
177		
176		
175	/	1
174		
173		
172	//	2
171		
170	/	1
169		
168	//	2
167		
166		
165	///	3

X		f
164		
163	/////	5
162	/	1
161		
160	//////	6
159		
158	//////	6
157	/	1
156		
155	///	3
154	/	1
153	/	1
152	///	3
151		
150	/	1
149	/	1

X		f
148	//	2
147		
146		
145	//	2
144		
143		
142	//	2
141		
140	/	1
139		
138	/	1
137		
136	/	1
135		
134		
133		
132	/	1

Al resultado de hacer esta agrupación se le llama TABLA DE FRECUENCIAS SIMPLES. Este ordenamiento nos permite descubrir algunas características generales de las estaturas, tales como cuál es la mayor, la menor, la que aparece más frecuentemente. Podemos ver como están distribuídas o repartidas las estaturas, pero el conjunto no es muy propicio para una visualización clara.

Lo que tenemos es un conjunto no agrupado de distribución de frecuencias. Como siguiente paso, se acostumbra "agrupar" los datos o medidas en lo que se denomina intervalos de clase.

A la tabla que resulta de agrupar los datos en intervalos de clase se le llama TABLA DE FRECUENCIAS AGRUPADAS y veremos su construcción en la siguiente Lección.

EJEMPLO.- Con los siguientes resultados de un exámen obtenidos por un grupo de alumnos, elabora un Tabla de Frecuencias Simples. Cada dato es el número de aciertos obtenido por cada alumnno.

36 - 28 - 47 - 27 - 22 - 50 - 35 - 21 - 42 - 40 - 30 - 35 - 27
40 - 19 - 41 - 37 - 46 - 15 - 46 - 41 - 11 - 30 - 33 - 44 - 31
32 - 32 - 43 - 29

Localizamos la mayor calificación y las ordenamos de mayor a menor, poniendo una rayita cada vez que se repita la calificación determinada.

Calificación	f	Calificación	f	Calificación	f
50	/	35	//	20	
49		34		19	/
48		33	/	18	
47	/	32	//	17	
46	//	31	/	16	
45		30	//	15	/
44	/	29		14	
43	/	28	/	13	
42	/	27	//	12	
41	//	26		11	/
40	//	25			
39	/	24			
38		23			
37	/	22	/		
36	/	21	/		

De esta forma, hemos construído la Tabla de Frecuencias Simples correspondiente a las calificaciones de un grupo de alumnos.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Indica cuales datos se pueden registrar practicamente sin error:

a) Datos categóricos b) Numéricos (discretos)

c) Datos numéricos (Contínuos)

2.- Cuales son los errores más comunes al registrar datos numéricos de tipo contínuo?

3.- Con el siguiente grupo de datos forma una tabla de Frecuencias Simples: 36,41,40,44,47,45,44,42,48,46
48,49,50,49,51,51,53,54,54,56
52,55,52,59,58,47,40,40,48,46

4.- Que significa frecuencia?

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Forma una tabla de frecuencias simples con los siguientes datos. Indica que dato tiene la más alta frecuencia y que dato la más baja. 60,75,89,77,65,80,63,72,87,64,73,75,67,74,75
74,68,73,75,75,74,76,71,76,86,70,82,71,68,78
83,77,74,67,88,80,72,78,85,84.

2.- Para que nos puede servir una Tabla de Frecuencias Simples?

3.- Supongamos que tienes un conjunto de 1000 observaciones en desorden. Se te pregunta que observación tiene la más alta frecuencia y cual es la observación más alta y la menor. Como lo contestarías?

Lección 2

INTERVALOS DE CLASE

Como decíamos al final de la Lección 1, después de ordenar nuestras frecuencias, se acostumbra agruparlas en intervalos de clase y formar Tablas de Frecuencias Agrupadas.

El agrupar más nuestros datos es, en cierta forma, renunciar al detalle en aras de la búsqueda de un patrón general. Por ejemplo, en lugar de tener la lista de las 50 estaturas, renunciamos a las cifras individuales de cada medida y en su lugar aceptamos una lista menor que solamente indique el número de medidas en cada uno de un conjunto dado de intervalos de clase. Esto se puede apreciar en la siguiente tabla:

Intervalo de Clase	f
132 - 136	2
137 - 141	2
142 - 146	4
147 - 151	4
152 - 156	8
157 - 161	13
162 - 166	9
167 - 171	3
172 - 176	3
177 - 181	2
	50

Las razones para hacer este agrupamiento, podemos decir que son dos: 1) Es, en ocasiones, poco práctico tratar con un gran número de casos distribuídos en muchos valores. Esto es, resulta más costoso, pues se requiere más tiempo para manipular grandes cantidades de información que manejar estos mismos datos en forma más reducida, pues esto implica una simplificación de cálculos. 2) Algunos valores tienen asociada una frecuencia tan baja que no se justifica mantenerlos como entidades distintas.

Ahora veremos como se realiza esta reducción o agrupamiento de la información. Primero, veamos que es un intervalo. Podemos definir un intervalo como un espacio o una región entre dos puntos o valores.

Estas regiones tienen una longitud igual a un número de veces la unidad de medida usada en cada caso. En el ejemplo de las estaturas, la unidad de medida es el centímetro, por lo que los intervalos serán de <u>x</u> centímetros. A este número x se le denomina ancho del intervalo. En la tabla anterior, los intervalos tienen un ancho de 4 centímetros, por ejemplo el intervalo de 132 - 136. Si fueran de dos centímetros, podíamos tener el intervalo: 132-134 o el 135 - 137, etc.

En la tabla, el intervalo 132 - 136 abarca todas las frecuencias entre 132 y 136, que en este caso son dos; una observación en 132 y otra en 136.

Los límites de un intervalo de clase son aquellos que marcan la frontera de ese intervalo. Por ejemplo, en el intervalo 30 - 37, los valores 30 y 37 serían el límite inferior y el límite superior respectivamente, para ese intervalo.

La palabra "clase" en el término: intervalo de clase, denomina al conjunto de medidas o datos incluídos en un determinado in-- tervalo. Por ejemplo, podríamos definir un intervalo de 130 - 140, todos los datos que esten dentro de este intervalo pertenecen a esa "clase". Las clases deben ser mutuamente excluyentes, esto quiere decir que será imposible para una medida, dato u observación pertenecer a más de una clase.

Así como no deberá haber sobreposición de clases, tampoco se debe dejar espacio entre los intervalos. Por ejemplo, si tuvieramos los intervalos 132 - 134 y 136 - 138 en el ejemplo de las estaturas y uno de los estudiantes hubiera medido 135cm. ¿donde colocaríamos esta estatura?

Además de estas consideraciones, habíamos dicho que en el registro de variables contínuas, como son el peso, la estatura, la temperatura, etc., era inevitable que ocurrieran errores de redondeo de las observaciones. Como veíamos en el ejemplo de las estaturas, es sumamente improbable que todos los estudiantes hayan medido exactamente en centímetros cerrados. De modo que seguramennte hubo un redondeo previo.

El error en el registro de variables contínuas es inevitable; sin embargo, es posible adoptar los siguientes criterios para evitar errores mayores:

a) Registrar el valor discreto de la unidad usada, más cercana al valor real de la observación.

EJEMPLO.- Si la unidad usada es kilos y pesamos a una persona con 57.7 kilos, la registramos como: 58 kilos. Si alguien pesó 62.3

kilos, se registra como: 62 kilos

b) Si alguna observación coincide con la mitad de la unidad usada, se aproxima al valor par más cercano. Esto es, si una persona pesa 60.5 kilos ¿lo redondeamos a la unidad superior, (hacia arriba) o lo redondeamos a la unidad inferior (hacia abajo)? Se aproxima al valor par más cercano, en este caso, es 60 kg. Si la persona hubiera pesado 61.5 kg. entonces se hubiera aproximado hacia arriba, al valor par más cercano, 62 kilos.

Digamos que uno de tus compañeros midió 166.7 centímetros, pero fué registrado como 167c., en este caso el dato fué redondeado hacia arriba; en consecuencia se lo colocó en el intervalo 167-171 pero en realidad midió menos de 167cm.

Debido a este tipo de problema que ocurre frecuentemente, se han definido los Límites Verdaderos de un intervalo de clase. Habiamos dicho que los Límites de un intervalo son aquellos dos valores o datos que marcan la frontera de ese intervalo; sin embargo, estos límites son límites aparentes.

Así, el intervalo 167 - 171 tiene a 167 y 171 como límites aparentes, los Límites Verdaderos de este intervalo son 166.5-171.5 o sea que los Limites Verdaderos de un intervalo de clase serán igual a su valor aparente más o menos una mitad de la unidad de medida.

La unidad de medida que estamos utilizando es el centímetro, una mitad de un centímetro es igual a .5cm, entonces los límites verdaderos del intervalo 167 - 171 serán 166.5 (media unidad de medida menos al límite inferior) y 171.5 (media unidad de medida más al intervalo superior). De este modo, el valor de 166.7cm. que habíamos aproximado a 167, esta efectivamente, comprendido en el intervalo 167 - 171, pues lo abarcan sus límites verdaderos.

EJEMPLO.- Supongamos que se afirma que el peso promedio de un elefante es de 4 - 5 toneladas. La unidad de medida es la tonelada, por lo tanto, este intervalo tiene come límites verdaderos media tonelada menos o media tonelada más, esto es: 3.5 - 5.5 toneladas.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Como defines un intervalo?

2.- Porque se acostumbra agrupar las frecuencias en Tablas de

Frecuencia agrupadas?

3.- Supongamos que estamos observando el peso de ciertos objetos y tenemos los siguientes intervalos: (el peso lo medimos en kilos)

a) 8 - 12 b) 6 - 7 c) 5 - 14

De que tamaño son los intervalos?

4.- Define: Límites de un intervalo de clase

5.- Define: Clase

6.- Menciona los dos criterios que se utilizan para registrar datos de variables contínuas, que como ya vimos, es inevitable el -- registrarlas con error.

7.- Como se definen los Límites verdaderos de un intervalo de clase?

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Algunos intervalos de clase en la distribución de frecuencias que muestra el rendimiento del maíz en toneladas en 40 regiones del país son: 15 - 21, 8 - 14, 1 - 7 Cuál es el tamaño del intervalo? ¿Cuales son los límites superiores e inferiores verdaderos de cada intervalo?

2.- Si estuvieramos registrando temperaturas en grados centígrados exactos, como registrarías las siguientes temperaturas?

a) 19.79°C b) -7.8°C c) 33.5°C

d) 8.3°C e) 29°C

Preguntas que amplían la lectura:

1.- El Punto Medio de un intervalo es la unidad de medida que se encuentra en medio de los límites del intervalo. Así, en el intervalo 6 - 10, el 8 es el punto medio del intervalo (tambien llamado Marca de Clase). Calcula los puntos medios de los intervalos dados en el ejercicio 3 de la primera sección preguntas.

Lección 3

TABLA DE FRECUENCIAS AGRUPADAS

En las dos Lecciones anteriores vimos como podíamos ordenar nuestros datos mediante una lista llamada Tabla de Frecuencias Simples, también vimos algunas razones por las que se acostumbra agrupar aún más los datos, en intervalos de clase, con lo que se forma una Tabla de Frecuencias Agrupadas.

Vimos todo lo referente a un intervalo de clase. El siguiente paso a seguir, es ver que base emplear para determinar el tamaño de intervalo con el que deberá construírse la Tabla de Frecuencias Agrupadas.

Obviamente, el intervalo seleccionado no deberá ser tan amplio que perdamos todo el detalle de nuestra clasificación anterior. Por ejemplo, esto sucedería si a la lista de estaturas de 50 estudiantes que elaboramos la dividieramos en dos intervalos, quedaría:

Intervalo de Clase	f
132 - 156	20
157 - 181	30
	50

En la práctica, toda la información inherente a las medidas originales se habría perdido.

Por otra parte, los intervalos de clase no deben ser tan pequeños que no logremos el objetivo que se busca con la grupación; esto es, resumir más la información. Si los hacemos muy pequeños, tendremos demasiados intervalos y la información seguirá muy dispersa.

Para tomar esta decisión, no hay, desafortunadamente, ninguna norma general que pueda ser aplicada en todos los casos. Podemos, sin embargo, hacer varios ensayos con nuestros datos y ver con que número de intervalos logramos a su vez los objetivos que buscamos; esto es, que se resuma la información y además que este conjunto de datos sea representativo de la información.

A continuación tenemos un ejemplo de una colección de datos distribuída en distinto número de intervalos. Cuál tabla seleccionarías para utilizarla?

Vemos que la Tabla c) aparentemente representa mejor la distribución de frecuencias de las observaciónes, al contrario de la tabla a) y b), las cuales muestran la información demasiado resumida y muy dispersa, respectivamente.

a)

Intervalo de Clase	f
20 - 29	15
30 - 39	22
40 - 49	12
	49

b)

Intervalo de Clase	f
20 - 22	3
23 - 25	4
26 - 28	4
29 - 31	5
32 - 34	6
35 - 37	7
38 - 40	8
41 - 43	6
44 - 46	4
47 - 49	2
	49

c)

Intervalo de Clase	f
20 - 24	6
25 - 29	9
30 - 34	12
35 - 39	10
30 - 44	7
45 - 49	5
	49

El procedimiento para formar los intervalos es relativamente sencillo. Existen varias técnicas para la construcción de intervalos; sin embargo, en general, consisten en repartir todas las unidades de medida que se tengan entre el dato menor y el mayor, entre el número de unidades con que deberá contar nuestro intervalo, esto es: el ancho del intervalo.

A partir de esto, podemos tomar el dato menor y agregarle el ancho del intervalo menos una unidad y ya tenemos el primer intervalo. Volvemos a repetir la operación con el dato consecutivo al límite superior del primer intervalo y así sucesivamente hasta completar la Tabla de Frecuencias Agrupadas.

Veamos esto con un ejemplo. Necesitamos tener ordenados los datos de mayor a menor o viceversa. Para este ejemplo, utilizaremos los datos en la Tabla de Frecuencias simples que elaboramos con las estaturas. Una vez que tenemos esto, el procedimiento es el siguiente:

1.- Encontrar la diferencia entre la medida o dato más alta y la más baja dadas en nuestras observaciones.

Tenemos: 180 - 132 = 48. A este resultado se le llama: <u>Rango</u> y consiste simplemente, en la distancia en unidades entre la medida más alta y la más baja de los datos. Esto es, hay 48 <u>centímetros</u> entre la estatura más baja y la más alta.

2.- Dividir el <u>Rango</u> sucesivamente entre 1,2,3,4,5, o más números hasta que se encuentre un cociente que se aproxime más a el número de intervalos que deseemos tener. Suponiendo que quisieramos 10 intervalos, tendríamos: 48/4 = 12, 48/5 = 9, 48/6 = 8

El divisor que nos da el cociente más aproximado a 10 es 5, este divisor indica el número de unidades que debe tener cada uno de los intervalos. A este divisor, le llamamos i. En este caso, i = 5.

Nota: En general, resulta conveniente tener i = a un número impar, pues un intervalo con un número impar de unidades, tiene como Punto Medio del intervalo un número entero. El punto medio del intervalo, tambien llamado Marca de Clase, se utilizará en cálculos posteriores y es más fácil de manejar si es un número entero. Por ejemplo, sea el intervalo 130 - 134, que tiene una amplitud de 5 unidades, el punto medio del intervalo es 132. Sin embargo, si fuera de 4 unidades de amplitud, un número par, sería 130 - 133 y su punto medio sería 131.5, número no entero.

3.- Para construír el primer intervalo, se toma el resultado más bajo de los datos originales como el límite inferior del primer intervalo de clase. A este dato se le suma i - 1, para obtener el límite superior del primer intervalo de clase.

En el ejemplo, tenemos que 132 es el límite inferior del primer intervalo por ser el dato más bajo. i = 5, por lo tanto i-1 =4. A 132 le sumamos 4, 132 + 4 = 136 y este es el límite superior del primer intervalo de clase. El intervalo queda: 132 - 136.

4.- El límite inferior del intervalo de clase siguiente será el número entero consecutivo al límite superior del intervalo anterior.

En el ejemplo será: 137. Repetimos el paso anterior (3), para obtener el límite superior del intervalo. De esta forma proseguimos hasta que se hayan incluído todas las medidas en sus intervalos apropiados.

En seguida tenemos el ejemplo terminado con sus correspondientes frecuencias en cada intervalo de clase.

Intervalo de Clase	f
132 - 136	2
137 - 141	2
142 - 146	4
147 - 151	4
152 - 156	8
157 - 161	13
162 - 166	9
167 - 171	3
172 - 176	3
177 - 181	2

EJEMPLO.- Elabora una Tabla de Frecuencias Agrupadas con los siguientes datos:

En una investigación del costo de un servicio de lavado prestado por 40 negociaciones se obtuvieron los siguientes resultados:

60	75	69	77	65	80	63	72	87	64	73	75	72
67	74	75	75	68	73	75	75	74	76	71	76	78
86	82	70	71	68	78	83	77	74	67	88	80	85
84.												

Ordenamos los datos mediante una Tabla de Frecuencias Simples:

89	/	84	/	79		74	////	69		64	/
88	/	83	/	78	//	73	//	68	//	63	/
87	/	82	/	77	//	72	//	67	//	62	
86	/	81		76	//	71	//	66		61	
85	/	80	//	75	/////	70	/	65	/	60	/

Una vez que tenemos esta tabla, procedemos a elaborar la Tabla de Frecuencias Agrupadas.

1.- Calculamos el Rango: 89 - 60 = 29

2.- Supongamos que se desean 9 intervalos. Dividimos el Rango sucesivamente, entre 1,2,3,4,5, etc. hasta encontrar un divisor que nos de el cociente más aproximado a 9.

29/1 = 29, 29/2 = 14.5, 29/3 = 9.67, 29/4 = 7.25, por lo tanto, el divisor en este caso es 3. Tenemos entonces: i = 3.

3.- Tomamos el resultado más bajo: 60, y le sumamos i - 1, 3 - 1 = 2. Entonces 60 + 2 = 62. Por lo tanto, 60 y 62 son los límites inferior y superior respectivamente del primer intervalo.

4.- El siguiente intervalo se forma tomando a 63 como límite inferior y 63 + 2 = 65 como límite superior. Y así sucesivamente, hasta completar la tabla. Por último le asignamos las frecuencias comprendidas en cada intervalo:

Intervalo de Clase	f
60 - 62	1
63 - 65	3
66 - 68	4
69 - 71	3
72 - 74	8
75 - 77	9
78 - 80	4
81 - 83	2
84 - 86	3
87 - 89	3

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Encuentra el tamaño del intervalo (i), para cada uno de los siguientes intervalos de clase:

a) 8 - 12 b) 6 - 7 c) 0 - 2 d) 5 - 14

2.- Dada la siguiente lista de calificaciones obtenida por un grupo de estudiantes en un exámen de Estadística, utiliza i = 5 para los intervalos de clase y construye la Tabla de Frecuencias Agrupadas.

63	88	79	92	86	83	78	41	67	68	76	46	81	92	77	84
76	70	66	77	75	98	81	82	81	87	78	70	60	94	79	52
82	77	81	77	70	74	61.									

3.- Construir una Tabla de Frecuencias agrupadas utilizando 5 - 9 como el primer intervalo de clase, para los siguientes datos:

67	63	64	57	56	45	45	46	47	37
45	34	34	15	23	35	37	24	23	14
25	36	26	5	44	13	33	33	17	16

4.- Porque es conveniente tener un tamaño de intervalo impar?

<u>Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:</u>

1.- En base a los datos del ejercicio 2 anterior, elabora una Tabla de Frecuencias Agrupadas, para los siguientes anchos de intervalo:

a) i = 1 b) i = 3 c) i = 10 d) i = 20

2.- Analiza la conveniencia o inconveniencia del empleo de estos tamaños de intervalo en el ejercicio anterior.

3.- Cual es el Rango para el ejercicio anterior?

4.- ¿De cuántas unidades deberán ser los intervalos si desearas agrupar los datos del Ejercicio 3 de la sección anterior en 8 intervalos?

5.- ¿De cuántas unidades deberán ser los intervalos si desearas agrupar los datos del Ejercicio 3 de la sección anterior en 15 intervalos?

<u>Actividad:</u>

1.- Realiza la medición de la estatura de cada uno de tus compañeros de clase y elabora una Tabla de Frecuencias Simples y una Tabla de Frecuencias Agrupadas en 10 intervalos.

Lección 4

FRECUENCIAS ACUMULADAS Y RELATIVAS

En esta Lección, veremos otras columnas de la Tabla de Frecuencias. Estas columnas son muy útiles en la interpretación de distribuciones de frecuencias. Veremos la columna de Frecuencias Acumuladas, la columna de Frecuencia Relativa y la columna de Frecuencia Relativa Acumulada.

La columna de Frecuencia Acumulada, que se representa con una F, se obtiene fácilmente. La construcción de la distribución de Frecuencias Acumuladas se obtiene por un simple proceso de adición sucesiva de las frecuencias anteriores al intervalo de clase correspondiente.

Intervalo de Clase	f	F	f%	F%
28 - 39	2	2	4.76	4.76
40 - 51	4	6	9.52	14.28
52 - 63	10	16	23.81	38.09
64 - 75	19	35	45.24	83.33
76 - 87	5	40	11.91	95.24
88 - 99	2	42	4.76	100.00
	42			

Tabla 1

La Tabla anterior indica la distribución de las calificaciones obtenidas por 42 estudiantes de Estadística. En ella vemos que la frecuencia acumulada en el intervalo 52 - 63, se logra por la adición sucesiva de 2 + 4 + 10 = 16.

En cada entrada de la columna de frecuencias simples (f), se indica el número de estudiantes que obtuvieron una calificación comprendida en cada intervalo de clase; esto es, por ejemplo en el intervalo 52 - 63, 10 estudiantes obtuvieron calificaciones comprendidas entre 52 y 63.

En cada entrada de la columna de Frecuencia Acumulada, (F), se indica el número de casos o frecuencias por debajo del límite superior verdadero de ese intervalo. Así, la entrada "16" en el intervalo 53 - 63 en la columna F, indica que un total de 16 alumnos obtuvieron una calificación más baja o igual al límite superior verdadero de ese intervalo, es decir 48.5.

Cabe hacer notar que la frecuencia acumulada de la última entrada es siempre igual al número de observaciones, que denotaremos por N. En la Tabla 1 tenemos N = 42 observaciones. Si no se obtiene el mismo resultado, quiere decir que ha habido un error en la suma de las frecuencias y deberemos revisar el trabajo.

En seguida tenemos la Tabla correspondiente al ejemplo de las 50 estaturas que hemos venido trabajando con anterioridad. Comprueba la suma de las frecuencias en la columna de Frecuencia Acumulada.

Intervalo de Clase	f	F	f%	F%
132 - 136	2	2	4.0	4.0
137 - 141	2	4	4.0	8.0
142 - 146	4	8	8.0	16.0
147 - 151	4	12	8.0	24.0
152 - 156	8	20	16.0	40.0
157 - 161	13	33	26.0	66.0
162 - 166	9	42	18.0	84.0
167 - 171	3	45	6.0	90.0
172 - 176	3	48	6.0	96.0
177 - 181	2	50	4.0	100.0
	N = 50			

Tabla 2

Otras dos columnas de gran utilidad son las columnas de Frecuencia Relativa, representada por f%, y la de Frecuencia Relativa Acumulada, representada por F%.

Estas columnas representan en forma de porcentaje la información de las columnas f y F respectivamente.

Se obtienen dividiendo el renglón corresondiente de f o F, entre el número total de observaciones (N) y multiplicando este resultado por 100. Por ejemplo, la frecuencia relativa (f%), en el intervalo 152 - 156 de la tabla anterior se obtiene:

$$f\% = f/N \times 100 = 8/50 = .16 \times 100 = 16\%$$

y la Frecuencia Relativa Acumulada en ese mismo intervalo, F%:

$$F\% = F/N \times 100 = 20/50 = .4 \times 100 = 40\%$$

Así mismo, en la Tabla 1 de calificaciones al principio de la Lección, podemos ver en la columna f% que un 9.52% de los alumnos obtuvo una calificación entre 40 - 51 y viendo el renglón correspondiente a F%, vemos que el 14.28% de los alumnos obtuvieron una calificación menor a 51.5.

En la Tabla 2, de las estaturas, podemos observar por ejemplo, que el 26% de los 50 alumnos tienen una estatura comprendida en el intervalo 157 - 161, y que el 66% de los alumnos tienen estaturas inferiores a 161.5cm.

Así mismo, de un rápido vistazo podemos ver que un 6% de los estudiantes tienen una estatura entre 167 - 171 y que el 90% mide menos que 171.5cm.

Cabe hacer notar que la entrada final de la columna F% debe ser 100%, pues todos los casos son menores que el límite superior verdadero del intervalo más alto.

A traves de los ejemplos anteriores nos podemos dar cuenta de la utilidad de estas columnas de porcentajes en la interpretación de la información. Estos porcentajes tambien son muy útiles para <u>comparar</u> Tablas de Frecuencia en base a muestras de diferente tamaño.

Por ejemplo, imaginemos el problema de entender la afirmación: "y mientras en el primer caso hubo 6 individuos con un peso inferior a 60kg, en el segundo caso hubo 57...", si no se tuviera la información de que las muestras fueron de 10 y 100 observaciones respectivamente. Conociendo esto, es muy fácil hacer la comparación de los datos mediante porcentajes:

Primer caso: 6/10 = .6 y Segundo caso: 57/100 = .57

En estos términos, la correspondiente fracción equivale a un 60% aproximadamente del total respectivo, con lo que vemos que las cantidades mencionadas son congruentes y no como parecían en la afirmación original.

EJEMPLO.- Se realizaron dos encuestas telefónicas sobre la preferencia de los cigarros X sobre los Y. En la primera, 85 personas prefirieron X, mientras que en la segunda 250 individuos los prefirieron. La primera muestra fué de 100 personas y la segunda de 1000 personas.

Comparamos porcentajes:

1a muestra: 85/100 = .85 equivale a 85%

2a muestra: 250/1000= .25 equivale a 25%

Vemos claramente, que aunque en la segunda muestra más personas prefirieron la marca X, el porcentaje correspondiente es menor. Las causas de esto requeririan de una investigación a fondo, pero el ejemplo ilustra la utilidad de los porcentajes.

<u>Preguntas que abarcan la lectura</u>:

1.- Como se obtiene la columna de Frecuencia Acumulada?

2.- Que representa cada entrada de la columna F?

3.- A que debe ser igual la entrada correspondiente al último intervalo en la columna F?

4.- Que representan las columnas f% y F%?

5.- Obtener las columnas F, f% y F% para los siguientes datos:

50, 47,46,46,44,43,42,42,42,41,40,39,37,36,35,35,33,
32, 32,31,30,30,28,27,27,22,,21,19,15,11,10.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Haz por lo menos 4 comentarios sobre la distribución de la Tabla 1 dada en la Lección.

2.- Porque la última entrada en la columna F y en F% debe ser igual a N y a 100% respectivamente?

3.- Menciona un ejemplo indicando la utilidad de los porcentajes para comparar datos provenientes de dos o más muestras.

4.- Calcula las columnas F, f% y F% para los siguientes datos pertenecientes a una serie de calificaciones obtenidas en un exámen de Literatura por 30 alumnos.

36,28,47,27,22,50,35,21,42,40,30,35,27,39,40,19,41,37,46,
15,46,41,11,30,33,44,31,32,32,43.

5.- Efectua 5 comentarios sobre las calificaciones anteriores.

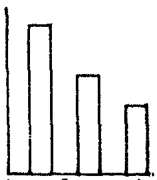
6.- En el ejemplo de los 50 estudiantes, que porcentaje de estudiantes (Tabla 2) del total tienen una estatura entre: 167-171?

Lección 5

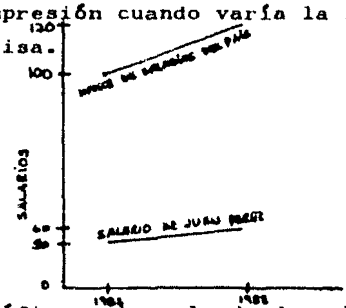
TECNICAS DE REPRESENTACION GRAFICA

Ya hemos examinado algunos procedimientos empleados para presentar en forma organizada y resumida la información contenida en un conjunto de datos. El siguiente paso, por lo común, es desplegar esa información en froma de gráficas o dibujos. Esto ayuda mucho en la comprensión e interpretación de los datos, pues nos presenta una idea visual de la situación.

Sin embargo, a pesar de ser tan útiles estos métodos gráficos, se debe ser cuidadoso de no dar impresiones falsas al elaborar las gráficas. Algunas veces han sido empleadas para engañar a las personas. En seguida tenemos algunos ejemplos:



Estos dos diagramas de barras representan los mismos datos, pero producen distinta impresión cuando varía la longitud relativa en la ordenada y en la abcisa.



En esta otra gráfica, el empleado Juan Pérez intenta demostrar que su salario sube más lentamente que el índice del país, siendo que en realidad los dos han aumentado en un 20%. Sin embargo, la representación visual da otra impresión.

Esto se ha logrado al manipular la escala vertical, pues cualquier persona al observar una gráfica, definitivamente estima la altura vertical de una línea encima del eje horizontal, con lo cuál supone implícitamente que cuanto más inclinada sea la línea, mayor será el cambio de valores relativos. Sin embargo, el salario de Juan Pérez en 1980, de 50 pesos, se le aumenta un 20% y resulta 60 para 1981 y si al índice nacional de 100, se le aumenta un 20%, resulta 120, por lo tanto, el aumento recibido por el empleado Juan Pérez ha subido al parejo que el índice nacional.

Obviamente, debemos de tratar siempre que los datos que estemos representando tengan una claridad tal que las interpretaciones equívocas sean mínimas.

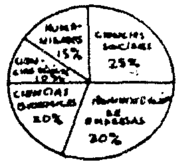
La representación gráfica correspondiente a un cuadro estadístico puede hacerse de varias maneras: Gráficas Circulares, tambien llamadas Diagramas de Pay, por su semejanza a rebanadas de Pay, Diagramas de Barras, Histogramas y Polígonos de Frecuencia.

Para decidir que tipo de representación usar, hay que analizar el tipo de datos con los que se estén trabajando.

DIAGRAMAS DE PAY.- Empezaremos por los Diagramas de Pay, que se emplean generalmente, para representar proporciones o porcentajes. El círculo se divide en partes en forma de pedazos de "pay" mediante el trazo de radios. El círculo representa el 100% de los elementos en la muestra.

EJEMPLO.- En una Universidad se tiene los siguientes porcentajes de estudiantes matriculados en las distintas áreas de estudio:

Ciencias Sociales	25%
Administración de Empresas	30%
Humanidades	15%
Ciencias Biológicas	20%
Ciencias Físicas	10%



Para construír la gráfica, se multiplica cada porcentaje por 360 (número de grados de un círculo), para obtener el número de grados que se le debe asignar a cada componente. En seguida, se reparte el círculo entre el número de grados de cada componente. Así:

Ciencias Sociales = .25 x 360 = 90 grados
A. de Empresas = .30 x 360 = 108 grados
Humanidades = .15 x 360 = 54 grados
Ciencias Biologicas = .20 x 360 = 72 grados
Ciencias Físicas = .10 x 360 = 36 grados
360 grados

Veamos ahora el ejemplo de los jarrones despostillados que mencionamos al principio de la Unidad 3. Teníamos los siguientes datos:

Jarrones en buen estado.........8500
Jarrones en mal estado.........1500
T O T A L 10000

Los datos no se encuentran dados en porcentajes, pero es muy sencillo obtenerlos:

(1) Se suman los números de cada componente para hacer un total.

(2) Mediante una división, se compara cada componente al total. El resultado se multiplica por 100 y este es el respectivo porcentaje.

Por lo tanto, tenemos:

Jarrones en buen estado = 8500/10000 = .85 x 100 = 85%

Jarrones en mal estado = 1500/10000 = .15 x 100 = 15%

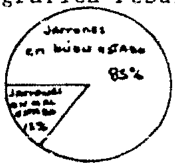
Para elaborar la gráfica circular, procedemos como lo hicimos anteriormente:

Jarrones en buen estado = .85 x 360 = 306 grados

Jarrones en mal estado = .15 x 360 = 54 grados

360 grados

Por lo tanto, la gráfica resultante es la siguiente:



Como decíamos anteriormente, estos diagramas se emplean para representar porcentajes procedentes, por lo general, de variables Categóricas, esto es, variables que solo denominan una clase o categoría, como los nombres de las áreas de estudio en el primer ejemplo, o los jarrones en el ejemplo anterior. Además, es necesario que estén definidas en una escala Nominal, esto es, que no sean Ordinales o que tengan un cierto orden, pues en un círculo es difícil decir cuál sería la forma más apropiada de representar un orden.

DIAGRAMAS DE BARRAS.- En seguida tenemos los Diagramas de Barras, estos di gramas se aplican también al tipo de variables Categóricas Nominales como los anteriores, pero además también sirven para representar las variables Categóricas Ordinales.

Esto se hace definiendo como primera categoría a la primera barra de izquierda a derecha y sucesivamente con el resto de las categorías.

En seguida veremos algunos ejemplos, pero antes algunas consideraciones sobre el trazo de estas gráficas.

Como ya se indicó, el empleo de diferentes unidades o escalas al trazar las representaciones gráficas, puede conducir si estas se analizan superficialmente, a conclusiones erróneas. Desgraciadamente, no existe una norma única que establezca el procedimiento más apropiado para todos los casos. Sin embargo, una convención que se puede establecer, es la llamada: Regla de los Tres Cuartos de Altura, que consiste en lo siguiente:

"En la representación gráfica de las frecuencias, el eje vertical debe trazarse de tal modo que la altura del punto máximo, (que representa el resultado asociado con la frecuencia más alta) sea aproximadamente igual a tres cuartos de la longitud del eje horizontal".

EJEMPLO.- Supongamos que tenemos los siguientes datos y hemos decidido elaborar un Diagrama de Barras:

Número de Estudiantes matriculados en las distintas áreas de estudio en una Universidad.

	f
Ciencias Sociales	125
Administracion de Empresas	150
Humanidades	75
Ciencias Biológicas	100
Ciencias Físicas	50
Total..................	500

$N = 500$

Los datos son los mismos que los utilizados en el Diagrama de Pay. Para un Diagrama de Barras, para cada categoría se traza una barra vertical en que la altura de la barra representa el número de miembros en esa clase; esto es, la frecuencia. Si fijamos arbitrariamente el ancho de cada barra como una unidad (1), el área de cada barra puede usarse para representar la frecuencia de cada categoría. En esta forma, el área total de todas las barras es igual a N.

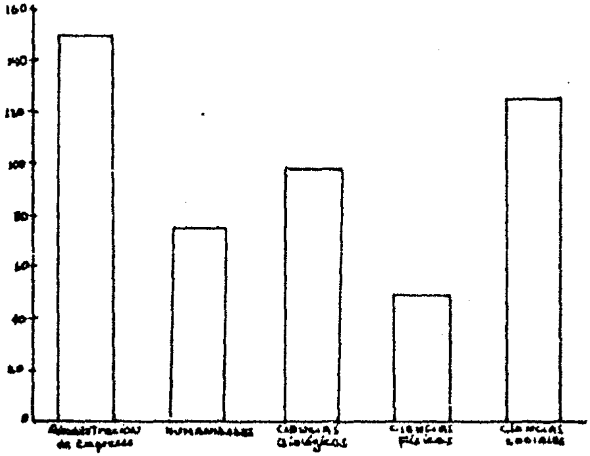
De este modo, por ejemplo, para la categoría de Ciencias Sociales, si recuerdas, el área de un rectángulo es igual a Base x Altura, entonces si la Base = 1 y la altura = 125, tenemos 1 x 125 = 125.

Para el trazo de este Diagrama de Barras, lo primero que debemos considerar es la decisión sobre la longitud de las abcisas, que por supuesto, depende del espacio que tengamos disponible para la representación de estos datos.

Supongamos que disponemos de 100 milímetros (10cm), de longitud para el eje horizontal, entonces de acuerdo a la Regla de los 3/4, la altura del eje vertical debe ser de 3/4 de 100mm, o sea: 75mm.

La frecuencia más alta en el ejemplo es de 150, que corresponde a la categoría de Administración de Empresas. Tenemos 75 mm para representar estas 150 frecuencias, o sea que debemos repartir estos 75mm entre las 150 frecuencias. Así, el número que representa cada frecuencia es 75/150= .5mm; esto es, 1 frecuencia es igual a .5mm. Entonces, cada 5mm en el eje de las Y representa 10 frecuencias.

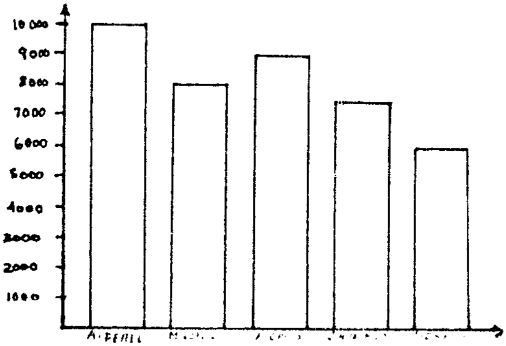
En el eje horizontal tenemos 100mm para representar las cinco categorías; o sea, 20mm por cada clase, pero es mejor que exista separación entre las barras para evitar cualquier implicación de continuidad entre las categorías, debido al tipo de variables que estamos manejando. Por lo tanto, las barras deberán tener una anchura inferior a 20mm para permitir esta separación.



EJEMPLO.- Supongamos que tenemos la siguiente gráfica que muestra el número de votos obtenidos por 5 candidatos a un puesto de elección popular ordenados según su popularidad. (Datos ficticios)

	Votos
1.-Sr. A.Pērez	10000
2.-Sr. M.López	8000
3.-Sra.A.Cano	9000
4.-Sr. J.Hurtado	7500
5.-Sr. I.Chávez	6000

En seguida tenemos la gráfica correspondiente:



Suponiendo que se cuenta con 8 cm para el eje horizontal, el eje vertical deberá tener aproximadamente 3/4 partes de 8 cm, esto es: 6 cm aproximadamente. A partir de aquí, procedemos como anteriormente, repartiendo en el eje vertical el total de votos correspondientes al candidato número 1, 60/10000 = .006 para cada voto, esto es, que a cada 1000 votos le corresponderan 6mm.

Preguntas que abarcan la lectura:

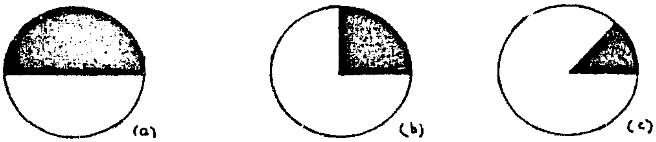
1.- Porqué es común presentar datos estadísticos en forma gráfica?

2.- Es posible dar otra impresión mediante el uso de gráficas que no sea apegada a la realidad?

3.- Dibuja un ejemplo de este tipo.

4.- Menciona 4 formas de representaciones gráficas.

5.- Estima el porcentaje que representa la parte sombreada de cada círculo.



6.- Por lo general, los Diagramas de Pay se utilizan para representar ______________. Así mismo, el tipo de variable que se representa en estos Diagramas, son Variables ______________.

7.- Los Diagramas de Barras se utilizan para representar Variables __________________ y ______________.

8.- En que consiste la "Regla de los tres cuartos de altura"?

9.- Elabora un Diagrama de Barras, suponiendo que dispones de 100mm para el eje horizontal con los siguientes datos:

Calificaciones obtenidas por 62 alumnos en un exámen final.

	f
Muy Bien	8
Bien	15
Suficiente	27
No acreditada	12

10.- Elabora un Diagrama de Barras con los datos anteriores, pero suponiendo que dispones de 20cm para el eje horizontal.

11.- Repite el ejercicio del Diagrama de Barras realizado en la Lección, correspondiente a las áreas de estudio en una Universidad, pero suponiendo que dispones de 300mm para el eje horizontal.

12.- Construye un Diagrama de Pay con los siguientes datos (Datos ficticios).

a) Afiliación Política de los ciudadanos de un País:

Partido Demócrata	36%
Partido Republicano	29%
Partido Independiente	4%
Partido Social	31%

b) Mujeres mayores de 14 años en un País:

Solteras	22%
Casadas	61%
Divorciadas	5%
Viudas	12%

<u>Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:</u>

1.- Construír un Diagrama de Pay para los siguientes datos:

a) Principales exportaciones de México en millones de pesos mexicanos en el año de 1968. (Fuente: Anuario Estadístico de los Estados Unidos de México, 1969).

Comestibles	5,553,414
Bebidas y tabacos	104,898
Materiales crudos	4,070,956
Combustibles y lubricantes minerales	424,920
Materias grasas excepto lubricantes	23,234
Productos químicos	742,948
Artículos manufacturados	1,272,315
Maquinaria en general	501,767
Manufacturados diversos	248,317
Armas y municiones	19,879
Total General	14,758,928

b) Población de los Continentes en 1970 (en millones de habitantes).

Asia	2043
Africa	367
America	503
Europa	645
Australia	22
Antártico	---

2.- Construye un Diagrama de Pay y un Diagrama de Barras para los siguientes datos:

Número de Artículos producidos en la fábrica Tek en los 3 primeros meses del año:

Enero	75
Febrero	150
Marzo	125

3.- Refiriéndonos al orden natural de los meses, que gráfica del ejemplo anterior es más apropiada, la de Pay o de Barras?

Actividad:

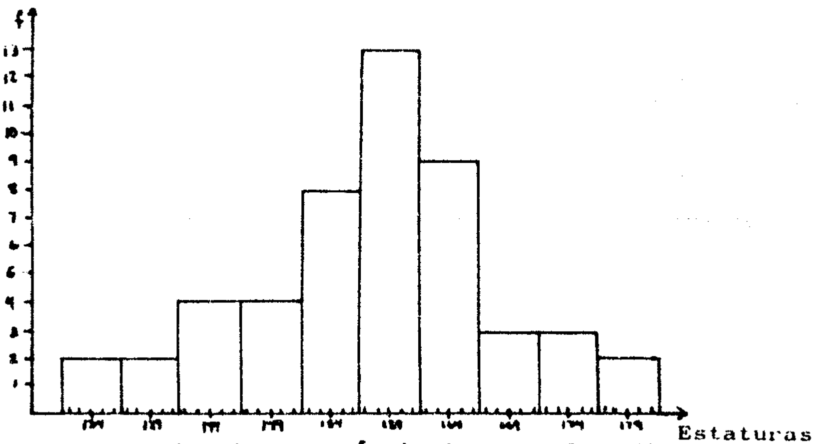
1.- Investiga el presupuesto de Egresos anuales estimado por el gobierno de México para este año. Muestra la asignación de fondos para cada sector utilizando tanto un diagrama de Barras como uno circular.

Lección 6

HISTOGRAMA Y POLIGONOS DE FRECUENCIAS

El Histograma es una de las representaciones gráficas más usadas para fines estadísticos. Este tipo de diagrama es usado para las distribuciones de frecuencia, simples o agrupadas en intervalos. Las variables que clasificamos en estas distribuciones de frecuencia son Numéricas, por lo tanto tendremos una escala de intervalos en el eje horizontal. En este caso, es aceptable que las barras verticales que constituyen el diagrama llamado Histograma se coloquen adyacentes unas a otras. Así mismo, tenemos un eje vertical, donde se trazan divisiones en una escala para representar las frecuencias. En seguida tenemos algunos ejemplos:

EJEMPLO.- Construír el histograma correspondiente a la distribución de frecuencias que elaboramos con las 50 estaturas de la Tabla 2 en la Lección 4.

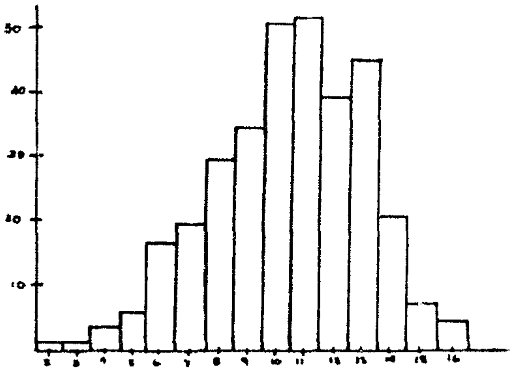


Debemos notar que la observación hecha para los diagramas de barras, acerca de la "Regla de los tres cuartos de altura", es aplicable en el caso de histogramas y polígonos de frecuencia.

EJEMPLO.- Un criador de cerdos registró en 334 partos, el número de lechones por camada y obtuvo el resultado siguiente: (Bioestadística, Bonnier y Tedin, Acribia Z. 1965).

Número de lechones por camada	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Frecuencia con que se presentaron	1	1	4	6	17	20	30	35	51	52	39	45	21	7	5

(a)



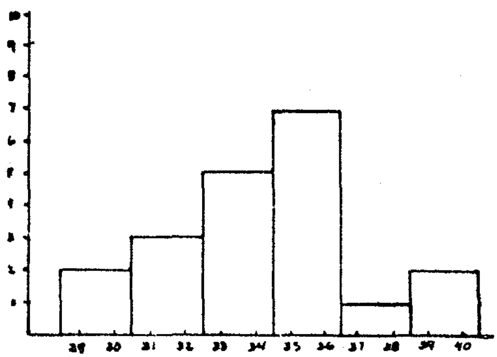
Como puedes observar, en los ejemplos anteriores, la barra o rectángulo en cada histograma se dibuja de tal manera que el punto medio de su base coincida con el punto medio del intervalo correspondiente. Además, utilizando los límites verdaderos al trazar las barras.

A continuación tenemos otros ejemplos de histogramas en donde puedes observar esto con claridad.

X = edades de 20 asistentes a una reunión

Intervalo	f
29-30	2
31-32	3
33-34	5
35-36	7
37-38	1
39-40	2

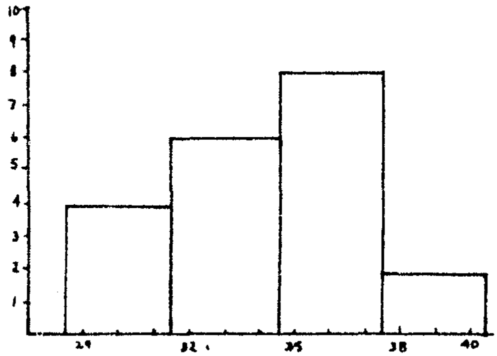
(b)



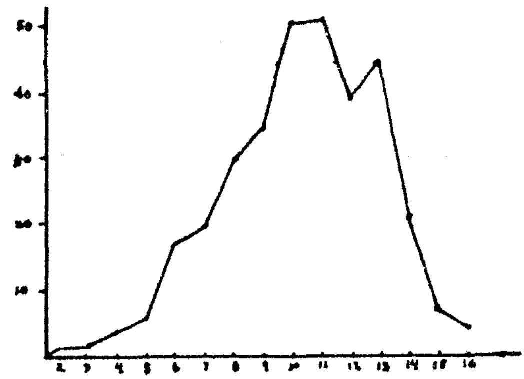
En seguida, los mismos datos pero con distinto tamaño de intervalo:

Intervalo	f
29-31	4
32-34	6
35-37	8
38-40	2

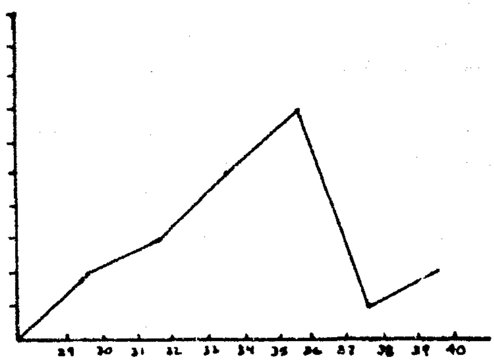
(c)



Así mismo, es muy fácil transformar el Histograma en un Polígono de Frecuencia Simple. En lugar de trazar barras, se marca un punto sobre el punto medio de cada intervalo a una altura igual a la frecuencia observada en ese intervalo y después se unen estos puntos mediante líneas rectas. En seguida tenemos los Histogramas anteriores, transformados en Polígonos de Frecuencia Simples.



(a')



(b')

(c')

En la práctica, se prefiere aplicar el histograma a las distribuciones discretas, como el ejemplo de los lechones (no se puede tener ocho y medio lechones), y el Polígono de Frecuencia a distribuciones en las cuales la continuidad es explícita o puede ser supuesta, (el ejemplo de las estaturas, o pesos, temperaturas, etc).

El Histograma y el Polígono de Frecuencias son representaciones visuales útiles de las distribuciones de frecuencia simples y agrupadas. Sin embargo, existe otra forma de representación que, si bien no es tan útil, tiene mucho valor práctico como veremos más adelante, en el cálculo de la Mediana.

Se trata de una gráfica que muestra las frecuencias acumuladas (F), y se llama Polígono de Frecuencias Acumuladas u ojiva y tiene generalmente, una forma de "S".

Esta curva la podemos construír a partir de los datos que tenemos en nuestra distribución de frecuencias en la columna de Frecuencia Acumulada. Si recuerdas, esta columna se forma mediante la adición de las frecuencias simples acumulativamente, poniendo cada cifra acumulada a lo largo de la última clase o intervalo cuya frecuencia acaba de incluírse. Cada una de estas entradas en esta columna nos indica el número de todos los casos o frecuencias por debajo del límite superior verdadero de ese intervalo.

Así tambien, el Polígono de Frecuencia Acumulada, nos indicará con una rápida ojeada cuantos casos tienen, por ejemplo en la Tabla 2 de la Lección 4, que reproducimos a continuación, una estatura menor que o igual a 1.60m. Podríamos llamar a esta curva, la curva de "menor o igual que".

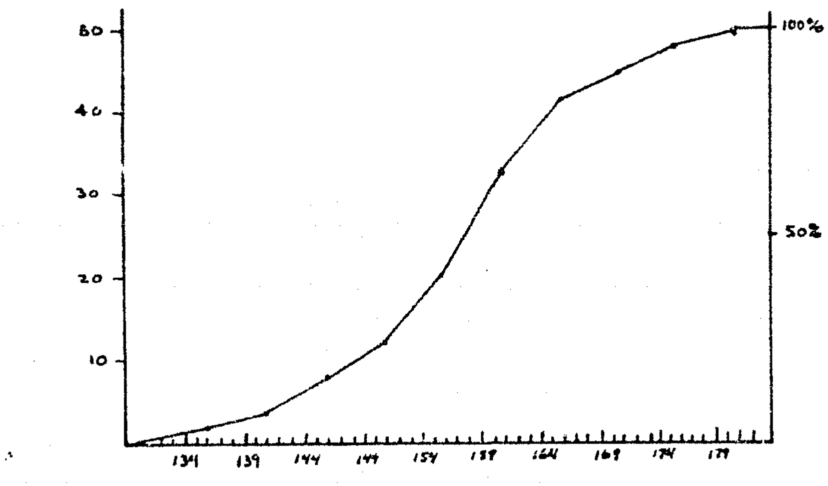
Intervalo de Clase	f	F	f %	F %
132 - 136	2	2	4.0	4.0
137 - 141	2	[illegible]	4.0	8.0
142 - 146	[illegible]	8	8.0	16.0
147 - 151	4	12	8.0	24.0
152 - 156	8	20	16.0	40.0
157 - 161	13	33	26.0	66.0
162 - 166	9	42	18.0	84.0
167 - 171	3	45	6.0	90.0
172 - 176	3	48	6.0	96.0
177 - 181	2	50	4.0	100.0

N = 50

Para la elaboración del Polígono de Frecuencia Acumulada, procedemos como si fuesemos a elaborar un histograma; esto es, trazamos nuestra línea horizontal con la escala de intervalos, marcando los límites de clase. En el eje vertical marcamos la frecuencia acumulada (F), desde cero hasta el total acumulativo de la distribución, o sea N. En este caso N = 50 observaciones.

Después, marcamos un punto sobre el punto medio del intervalo a una altura correspondiente a la frecuencia acumulada en ese intervalo, (en el caso de variables contínuas como peso, estatura, temperatura, etc. el punto se marca en la frontera superior del intervalo).

Además, se incluye en estas gráficas, un eje vertical adicional, que se levanta a la derecha del verdadero límite de clase del último intervalo. En este eje se representa la frecuencia acumulada en su expresión porcentual. Esto es, tendremos una escala del 0 al 100, como se ve en el siguiente diagrama.

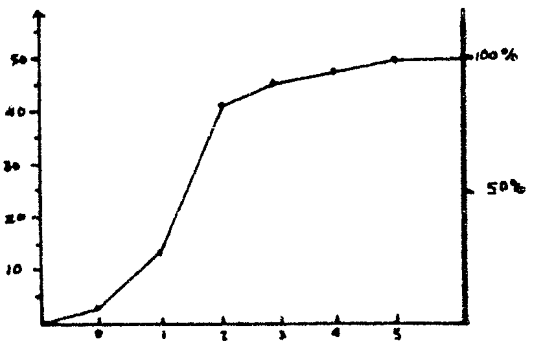


Esta curva es de gran utilidad pues nos proporciona un marco de referencia y podemos hacer afirmaciones tales como "el 70% de los alumnos tienen una estatura menor o igual que 1.61m". "Yo mido 172cm y el 90% de mi clase tiene una estatura menor o igual que yo".

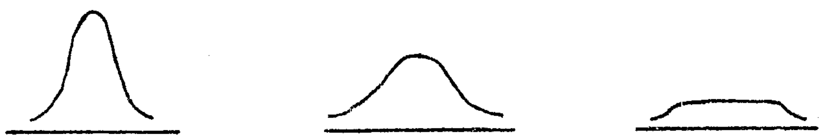
Si uno proporciona una estatura sin alguna referencia, no nos dice nada; sin embargo, una afirmación como la anterior nos indicaría que la persona en cuestión efectivamente puede considerarsele como una persona de estatura alta, media o baja con respecto a sus compañeros.

EJEMPLO.- Elabora el Polígono de Frecuencia Acumulada con los siguientes datos correspondientes al número de hijos de 50 familias de Ciudad Ficticia.

No. de hijos	f	F
0	3	3
1	11	14
2	28	42
3	3	45
4	3	48
5	2	50
	50	



Por último, tenemos algunas observaciones sobre los Polígonos de Frecuencias. Estos, pueden tomar un número ilimitado de formas diferentes, sin embargo, muchos de los procedimientos estadísticos suponen una forma de distribución particular, llamada <u>curva normal</u> o curva en "<u>forma de campana</u>". En seguida se muestran algunas formas de distribuciones:



(a) Leptocúrtica (b) Normal (c) Platicúrtica

La primera curva (a), tiene como característica la concentración de resultados en el centro de la distribución. Podríamos ejemplificar esto suponiendo que en un exámen realizado por 100 alumnos y cuyos resultados en calificación varían de 5 a 10, la mayoría de los alumnos hubieran obtenido 7.5 de calificación y solo unos cuantos 5,6 o 9,10. En la curva (c) ocurre lo opuesto, hubo una proporción similar de alumnos que obtuvieron 5,6,7, 8,9,10. Al elaborar la gráfica, resulta esta distribución denominada platicúrtica por su similitud a un plato boca abajo.

La curva (b) tiene la forma ideal de una curva Normal, los datos o calificaciones se dice que están normalmente distribuídos. Esta curva es el término medio entre las otras dos.

Se dice que la curva Normal es una distribución simétrica, porque al doblar el polígono a la mitad, las dos partes del polígono coinciden. Sin embargo, no todas las curvas simétricas son Normales. En seguida algunos ejemplos de curvas simétricas nó normales:

Rectangular en "U" Bimodal

Cuando una distribución no es simétrica, se dice que es asimétrica. En seguida algunos ejemplos:

(a) asimetría positiva (b) asimetría negativa

Más adelante haremos algunas observaciones sobre las curvas o polígonos con asimetría positiva o negativa. De momento, podemos decir que, para continuar con el ejemplo de las calificaciones, la curva (b) con asimetría negativa resultaría si la mayoría de los alumnos hubiera obtenido 9 y 10 de calificación, esto es, habría más frecuencias en esas calificaciones y por lo tanto la curva se inclinaría sobre ese extremo. Lo contrario sucede con la curva (a), esto nos indicaría que la mayoría habría reprobado el exámen.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Al dibujar una barra de un histograma debe hacerse de tal modo que el punto medio de su base coincida con ______________________.

2.- Como se traza un Polígono de Frecuencia Simple?

3.- En la práctica, a que tipo de distribuciones es preferible aplicar el histograma?

4.- A que tipo de distribuciones es prefereible aplicar el Polígono de Frecuencias?

5.- Que forma tiene, por lo general, el Polígono de Frecuencia Acumulada?

6.- Que nos indica este Polígono?

7.- Como se le podría llamar a esta curva?

8.- Para que nos sirve el eje colocado a la derecha de la gráfica de un Polígono de Frecuencias Acumuladas, graduado con porcentajes?

9.- Elabora un Histograma, un Polígono de Frecuencias Simple y un Polígono de Frecuencia Acumulada con los siguientes datos:

a) Calificaciones obtenidas por un grupo de estudiantes en una escuela primaria (Datos Ficticios)

Calificación	f
5	4
6	6
7	10
8	9
9	8
10	6

b) Resultados obtenidos por un grupo de estudiantes de 5 grado en una prueba de habilidad de lectura:

Intervalo	f
32 - 34	13
35 - 37	19
38 - 40	26
41 - 43	19
44 - 46	18
47 - 49	12
50 - 52	5

10.- Menciona y traza tres tipos de curvas simétricas que no sean curvas Normales.

11.- Traza dos curvas asimétricas representando distribuciones de frecuencia.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Elabora el histograma y el polígono de frecuencias simple con la siguiente tabla de distribución de frecuencias.

Dato	f
29	8
30	9
31	9
32	11
33	10
34	7
35	5

a) En la Tabla de Frecuencias Simple anterior, que observación se te ocurre hacer acerca del ancho del intervalo?

b) Al efectuar un Polígono de frecuencias debes colocar un punto sobre el punto medio del intervalo a la altura de la frecuencia observada para variables del tipo discreto. Donde has colocado este punto?

2.- Con referencia al ejercicio 9b de la sección anterior, si tuvieras un hermanito en 5 grado y te dijera que ha obtenido una calificación de 45 en una prueba de lectura, si no conocieras más datos que que te diría esta calificación?

a) Es buena o mala su calificación?

b) Suponiendo que conoces los datos, ahora sí puedes examinar la gráfica y decir que porcentaje aproximado le corresponde dentro del grupo. Que porcentaje de alumnos obtuvo una calificación inferior a 45? Esta calificación es buena?

3.- Da un ejemplo de una distribución de frecuencias en una población con asimetría.

4.- Que quiere decir la palabra simétrico?

R E S U M E N

En la presente, Unidad IV, tratamos acerca de la manera de representar de manera organizada y resumida la información contenida en un conjunto de datos, mediante la elaboración de Tablas de Frecuencia a partir de los resultados o valores de la variable bajo observación.

En ocasiones, algunos valores tienen una frecuencia muy baja y por razones del tipo económico, es frecuente agrupar los datos en intervalos de clase. La distribución resultante recibe el nombre de Tabla de Frecuencia Agrupada.

Así mismo, presentamos y analizamos las bases para llegar a una decisión acerca de las unidades de agrupamiento que han de emplearse y de los procedimientos para la construcción de Tablas de Frecuencias. Tambien obtuvimos los límites verdaderos de un intervalo. Además, se indicaron los procedimientos para convertir una distribución de frecuencia en una distribución de Frecuencia Acumulada y en una distribución porcentual de frecuencias; relativa simple y acumulada.

Vimos algunas técnicas de representación gráfica. El propósito básico de la representación gráfica es proveer una ayuda visual para comprender e interpretar mejor la información disponible.

Analizamos algunos ejemplos de como se puede obtener una conclusión falsa a partir de una representación inadecuada de los datos.

Para la representación gráfica, dependiendo del tipo de problema y las variables que se estuvieran analizando, usaremos determinado tipo de gráfica. Vimos los siguientes:

Diagramas de Pay o Circulares, más usuales para porcentajes, razones y proporciones. Variables Nominales.

Diagramas de Barras, para variables nominales y ordinales.

Aquí también se mencionó la regla de los "Tres cuartos de altura", para uniformar la representación de abcisas y ordenadas en las técnicas de representación gráfica.

Histograma y Polígono de Frecuencias para variables Numéricas Discretas o Contínuas en intervalos de clase.

Polígono de Frecuencia Acumulada, esta gráfica la obtenemos a partir de la columna de Frecuencia Acumulada y es muy útil como marco de referencia para comparaciones. También es llamada la curva de "menor o igual que" pues nos indica el número de observaciones por debajo o menores que una determinada cantidad.

U N I D A D V

MEDIDAS DESCRIPTIVAS

Lección 1

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL
CALCULO DE LA MEDIA

A lo largo de las dos Unidades anteriores nos ocupamos de organizar y representar los datos de que disponíamos en una forma útil y significativa. Ahora, daremos un paso más.

Además de los métodos gráficos de descripción, existen los métodos numéricos, los cuales ayudan a obtener una imagen mental de los objetos físicos o fenómenos. Estos métodos, nos permiten contar con medidas numéricas mediante las cuales podemos crear una descripción mental de la distribución de frecuencias asociada.

En esta Unidad veremos las dos clases más importantes de medidas numéricas; las que localizan el centro y las que describen la dispersión de la población, llamadas Medidas de Tendencia Central y de Dispersión respectivamente. Estas medidas nos proporcionarán dos números, uno localizando el centro de la distribución y otro su dispersión, mediante los cuales lograremos una descripción de una distribución de frecuencias para un conjunto de mediciones.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL - Son valores de la variable que nos indican alrededor de qué valor se localizan los datos en un estudio. Las Medidas de Tendencia Central pueden ser representativas de toda la población. En esta Unidad veremos 3 de ellas: Media, Mediana y Moda.

MEDIA O MEDIA ARITMETICA - Probablemente estes ya familiarizado con la Media Aritmética, pues siempre que obtienes un "promedio" de calificaciones sumando las cifras y dividiéndolas por el número total de calificaciones, estas calculando la Media Aritmética.

El término "promedio" tiene tantas acepciones populares, que muchos Estadísticos prefieren suprimirlo. Tenemos: los promedios de bateo, los promedios de la Bolsa de Valores, el televidente "promedio", la familia "promedio", etc.; por lo tanto, aquí también suprimiremos esta palabra utilizando en su lugar el nombre de Media o Media Aritmética.

Supongamos el siguiente ejemplo: Seis hermanas estudian Estadística y obtienen en un exámen las siguientes calificaciones: 91, 82, 96, 83, 90 y 91. Como podemos describir sus calificaciones sin listarlas todas? Una forma es calculando la Media Aritmética o Media, para abreviar. Esta se obtiene sumando todos los valores de la variable y dividiendo la suma por el número de sumandos.

La Media sería: $\dfrac{91 + 82 + 96 + 83 + 90 + 91}{6} = \dfrac{533}{6} = 88\ 5/6$

La calificación Media de las seis hermanas es: $88\ 5/6 = 88.8\overline{3}$

EJEMPLO.- En la ciudad de Querétaro se registraron al mediodía las siguientes temperaturas: Lunes 21°C, Martes 25°C, Miercoles 24°C, Jueves 22°C, Viernes 23°C, Sábado 21°C y Domingo 20°C. La temperatura Media semanal se calcula de la siguiente manera: Denotaremos la Media como $\bar{X}$, entonces tenemos:

$$\bar{X} = \frac{21 + 25 + 24 + 22 + 23 + 21 + 20}{7} = \frac{156}{7} = 22.29°C$$

Definición: Sean $S_1, S_2, \ldots\ldots S_n$, <u>n</u> números reales. Entonces la <u>Media</u>, $\bar{X}$, de estos números es: $\dfrac{S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_n}{n}$

Antes de continuar, introduciremos el símbolo de la suma, Σ, que nos abreviara la escritura.

El símbolo Σ es la letra griega mayúscula <u>sigma</u> y se lee "suma de". De este modo la definición anterior quedaría:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{n}$$

Esto nos indica que en el numerador del segundo miembro existe una "suma de" la variable S. El subíndice i indica que el valor S es variable, y la notación $i = 1$, y la <u>n</u> abajo y arriba del símbolo Σ respectivamente, indica que la suma se hace desde el término uno hasta el término n. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO.- Determinar el valor de las expresiones siguientes, donde $S_1 = 4$, $S_2 = 5$, $S_3 = 7$, $S_4 = 9$, $S_5 = 10$, $S_6 = 11$, $S_7 = 14$

a) $\sum_{i=1}^{4} S_i = 4+5+7+9 = 25$

En la expresión anterior, $\sum_{i=1}^{4} S_i$, nos indica que hay que sumar la variable S desde la $i = 1$ hasta la S_4.

b) $\sum_{i=3}^{6} S_i = 7 + 9 + 10 + 11 = 37$

c) $\sum_{i=1}^{n} S_i = 4 + 5 + 7 + 9 + 10 + 11 + 14 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n$

d) $\sum_{i=2}^{5} S_i = 5 + 7 + 9 + 10 = 31$

EJEMPLO.- Expresar las siguientes operaciones usando la notación $\sum$:

a) $X_1 + X_2 + X_3 = \sum_{i=1}^{3} X_i$

b) $X_1 + X_2 + X_3 = \sum_{i=1}^{3} X_i^2$

c) $Z_1 + \ldots\ldots + Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

Volviendo al cálculo de la Media, cuando tenemos pocas observaciones, se pueden hacer los cálculos con datos aislados como en los ejemplos anteriores de las Calificaciones y las Temperaturas, donde todas las observaciones tienen frecuencia unitaria; pero veamos ahora un ejemplo con datos agrupados donde cada observación -- tiene frecuencia distinta.

EJEMPLO.- Supongamos que se ensayan veinticinco llantas nuevas para determinar su vida útil. El resultado de la prueba es el siguiente:

Vida útil en miles de kilómetros X	Número de llantas f
36	2
37	1
38	3
39	4
40	5
41	4
42	2
43	3
44	1
	25 = N

Se quiere determinar la Media de la vida útil de una llanta. Entonces, haremos la suma de todas las observaciones y la dividiremos entre el total de observaciones, pero cabe aquí hacer una observación importante: Al trabajar con datos agrupados, multiplicamos cada valor de la variable en observación por la frecuencia correspondiente. Esto es:

$$\bar{X} = \frac{2(36) + 1(37) + 3(38) + 4(39) + 5(40) + 4(41) + 2(42) + 3(43) + 1(44)}{25}$$

$$\bar{X} = \frac{1000}{25} = 40$$

Por lo tanto, la Media de la vida útil de una llanta en miles de kilómetros es de: 40

El porqué se multiplica cada observación por la frecuencia es muy sencillo: En el ejemplo anterior en la columna de frecuencia, el 2 a la altura de la observación 36 nos indica que hubo 2 llantas que duraron 36 mil kms; el 1 a la altura del 37 indica que una llanta duró 37 mil kms; 3 llantas duraron 38 mil kms, etc. Por lo tanto, al calcular la Media, debemos sumar todas las observaciones y luego dividir el resultado entre el total de observaciones; de este modo, si hubo 2 llantas que duraron 36 mil kms. tenemos que considerar:

$$2(36) = 72 \text{ mil kms.}$$
$$1(37) = 37 \text{ mil kms.}$$
$$3(38) = 114 \text{ mil kms.}$$
$$\vdots$$

Para tomar en cuenta todos los kilómetros recorridos.

Así, la fórmula para el calculo de la Media para datos agrupados, quedaría:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1} f\, X_i}{N}$$

O sea, que la Media es igual a la suma de los productos de cada observación X_i por la frecuencia, f, correspondiente, entre el total de las observaciones, N.

Resumiendo, si el problema se presenta con datos agrupados, las f tendrán en general valores distintos. En cambio, si el problema incluye datos aislados, las f tendrán valores unitarios, $f = 1$ y la expresión para calcular la Media será la vista al principio de la Lección.

EJEMPLO.- Tenemos las siguientes calificaciones obtenidas por un grupo de 15 estudiantes. Obtener la Media de las calificaciones.

Calificación X	f	fX
60	1	60
70	4	280
80	6	480
90	3	270
100	2	200
	N = 16	1290

$$\bar{X} = \frac{\sum f X_i}{N} = \frac{1290}{16} = 80.625$$

Veamos ahora el caso cuando las observaciones de la variable en estudio están agrupadas en intervalos de clase. Para el cálculo de la Media cuando los datos están agrupados en intervalos de clase, se siguen esencialmente los mismos procedimientos que en el caso anterior, con la única diferencia que se utiliza el Punto Medio de cada intervalo, tambien llamado Marca de Clase, para representar todos los datos u observaciones dentro de ese intervalo.

Tenemos entonces, que el punto medio de cada intervalo se multiplica por su frecuencia correspondiente, se suman estos productos y el resultado se divide entre N. En seguida veremos un ejemplo.

EJEMPLO.- Supongamos que tenemos los siguientes datos obtenidos de 100 estudiantes en una prueba de Cociente Intelectual, agrupados en intervalos de clase.

Intervalo de clase	f	P.M. X	fX
75 - 79	3	77	231
80 - 84	4	82	328
85 - 89	8	87	696
90 - 94	10	92	920
95 - 99	15	97	1455
100 - 104	20	102	2040
105 - 109	15	107	1605
110 - 114	10	112	1120
115 - 119	8	117	936
120 - 124	5	122	610
125 - 129	2	127	254
	N=100		$\Sigma fX = 10195$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{10195}{100} = 101.95$$

Vemos aquí, por ejemplo, que la calificación 77, que es el punto medio del intervalo 75 - 79 representa a los tres estudiantes cuya calificación esta en ese intervalo.

EJEMPLO.- Calcular la media de las siguientes estaturas.

Intervalo de clase	f	P.M. X	fX
132 - 136	2	134	268
137 - 141	2	139	278
142 - 146	4	144	576
147 - 151	4	149	596
152 - 156	8	154	1232
157 - 161	13	159	2067
162 - 166	9	164	1476
167 - 171	3	169	507
172 - 176	3	174	522
177 - 181	2	179	358
	N=50		$\Sigma fX = 7880$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{7880}{50} = 157.6$$

En la mayoría de los casos, es de esperarse una ligera diferencia entre la Media calculada a partir de datos agrupados en intervalos de clase y la Media que se obtendría calculándola directamente de los datos sin agrupar. Esta diferencia no es rara, pues recordemos que estamos utilizando el Punto Medio del intervalo para el cálculo de la Media en datos agrupados, asumiendo que las observaciones están distribuídas de manera pareja o simétrica a lo largo del intervalo, cosa que no siempre sucede.

La Media, $\bar{X}$, es la medida de tendencia central más conocida y utilizada cuando se tienen valores numéricos. No tiene sentido calcular la Media para variables categóricas. Cuál sería la Media para la variable Sexo en la siguiente distribución:

Sexo X	f	fX
Masculino	5	???
Femenino	8	???

Podemos considerar a la Media, intuitivamente, como el punto de equilibrio de las observaciones. En este sentido, es ánaloga a la acción del punto de apoyo en un "sube y baja".

Por esto mismo, la Media es muy sensible a las mediciones extremas cuando estas medidas no están equilibradas en ambos lados de la misma.

Supongamos por ejemplo, que se hace una encuesta sobre ingresos familiares mensuales, en una ciudad de 100 familias. Entre estas 1000 familias, hay 3 que tienen ingresos de 1 millón de pesos cada una y hay 997 con ingresos de solo 3000. La media aritmética de los ingresos de las familias es por consiguiente, 5991, pero el 99.7 por ciento de todas las familias tienen ingresos que apenas si superan la mitad de esta cantidad. Por lo que en este caso, la Media no es representativa de toda la población.

La sensibilidad de la Media para las calificaciones extremas, ya sean bajas o altas, es una característica que contiene importantes implicaciones que regirán el uso que de ella hagamos. Estas implicaciones las discutiremos más adelante en la Lección 4, en la cual compararemos las tres medidas de tendencia central que veremos.

<u>Preguntas que abarcan la lectura:</u>

1.- Son medidas que localizan el centro de la distribución.

2.- Encontrar la Media de cada uno de los siguientes conjuntos de medidas:

a) 10, 8,6,0,8,3,2,2,8,0
b) 1,3,3,5,5,5,7,7,9
c) 120,5,4,4,4,2,1,0

3.- Como se define la Media Aritmetica?

4.- Porqué al calcular la Media a partir de datos agrupados suele diferir ligeramente de la Media calculada partiendo del mismo conjunto de datos sin agrupar?

5.- Se tiene que $X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_3 = 5$, $X_4 = 8$, calcula las siguientes expresiones:

a) $\sum_{i=1}^{4} X_i$ b) $\sum_{i=1}^{N} X_i$ c) $\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2$ d) $\sum_{i=1}^{2} X_i + \sum_{i=3}^{4} X_i$

6.- Utiliza el xímbolo para representar las expresiones:

a) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
b) $S_3 + S_4 + S_5 + S_6$
c) $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots + X_N$

7.- Calcula la Media de los siguientes arreglos de datos:

a)

X	f
29	3
30	4
31	5
32	2

b)

Intervalo	f
10 - 12	7
13 - 15	12
15 - 18	10
19 - 21	8

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- En cuál de los conjuntos de medidas del ejercicio 3 anterior, es la Media una medida de tendencia central inadecuada? Explica por qué.

2.- Hallar el valor de cada una de las expresiones siguientes si:

$X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_3 = 5$, $X_4 = 7$, $X_5 = 9$
$Y_1 = 10$, $Y_2 = 8$, $Y_3 = 6$, $Y_4 = 4$, $Y_5 = 2$

a) $\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right)\left(\sum_{i=2}^{4} Y_i\right)$ b) $\left(\sum_{i=1}^{3} X_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right)^2$ c) $\left(\sum_{i=3}^{5} Y_i\right)^2$

3.- Calcula la Media de los datos proporcionados en la Unidad anterior, referente al problema del criador de cerdos.

4.- Porqué en una distribución de frecuennias agrupadas, para calcular la Media hay que multiplicar cada valor o dato en la distribución por la frecuencia correspondiente?

Lección 2

LA MEDIANA

Y OTROS PERCENTILES

Como en un conjunto de números, la Media aritmética es muy sensible a la influencia de unos cuantos números muy grandes o muy pequeños, es entonces más apropiado utilizar otra medida, la Mediana, como medida de tendencia central. La Mediana se puede definir brevemente de la siguiente manera:

Definición.- La Mediana es el valor que divide un conjunto de observaciones ordenadas con respecto a la magnitud de los valores, de tal manera que, simultáneamente al menos la mitad de las observaciones es mayor o igual que la Mediana y al menos la mitad de las observaciones es menor o igual que la misma.

Tal como ocurre con la Media aritmética, el método de determinación de la Mediana depende de si los datos están agrupados o no.

Mediana de datos no agrupados.- Consideremos el siguiente arreglo de calificaciones: 5,19,37,39,45. Observemos que las calificaciones están ordenadas de acuerdo a su magnitud, y que N (el número de observaciones) es un número impar. La calificación 37 es la Mediana en este caso, puesto que dos calificaciones caen por encima y dos calificaciones caen debajo de ella. Si N fuera un número par, la Mediana sería la suma de los dos valores centrales dividido por dos.

EJEMPLO.- Los dos valores centrales en los siguientes datos 8,26,35,43,47,73, son 35 y 43. La Media aritmetica de estos dos valores es: $(35 + 43)/2 = 39$, y este valor es la Mediana.

EJEMPLO.- Sea un conjunto de 9 números: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, es evidente que la Mediana es el valor 5, ya que hay cuatro números por encima y cuatro por debajo de dicho valor.

EJEMPLO.- Supongamos que se tienen los siguientes datos correspondientes a estaturas de jugadores de un equipo de soccer.

1.58,1.62,1.63,1.65, 1.65,1.68,1.70,1.71,1.72,1.72,1.75

La Mediana es: 1.68 pues es la observación que tiene igual número de observaciones por debajo que por encima.

Mediana en datos agrupados.- Para encontrar la Mediana de datos agrupados, necesitaremos construír la columna de Frecuencia Acumulada o frecuencia acumulada relativa correspondiente a la distribución de frecuencias que se este trabajando. Consideremos los siguientes datos:

Intervalo de clase	f	F
80 - 84	3	3
85 - 89	5	8
90 - 94	5	13
95 - 99	4	17
100 - 104	12	29
105 - 109	14	43
110 - 114	17	60
115 - 119	13	73
120 - 124	9	82
125 - 129	9	91
130 - 134	7	98
135 - 139	5	103
140 - 144	3	106
145 - 149	2	108
150 - 154	2	110
	N=110	

Tabla 3

De acuerdo a la definición, la Mediana es el dato correspondiente a la mitad de las observaciones; por lo tanto, es necesario calcular el 50% de las frecuencias acumuladas:

$$.50 \times 110 = 55$$

Utilizamos la columna de frecuencia acumulada pues esta columna nos ordena en cierta forma las observaciones. El 55 representa, en este caso. la frecuencia acumulada correspondiente al dato, valor u observación que deseamos, esto es, la Mediana. Pero este dato esta dentro de un intervalo, por lo tanto, deseamos localizar el intervalo que contiene este valor. Viendo la columna de frecuencia acumulada, observamos que el 55 se encuentra en el intervalo 110-114, con límites verdaderos 109.5 - 114.5.

Al 50% de la frecuencia acumulada, 55, le restamos la frecuencia acumulada hasta el intervalo anterior adyacente, esto es:

$$55 - 43 = 12$$

Este valor resultante, se divide entre la frecuencia simple del intervalo donde se localiza la Mediana (110-114), y multiplicamos el resultado por el ancho del intervalo, utilizando los límites verdaderos. El ancho en este caso es de 5 unidades.

Tenemos: $\frac{12}{17}(5) = 3.53$

Este valor que resulta, se suma al límite inferior del intervalo que contiene a la Mediana. El resultado es la observación que buscamos, esto es, la Mediana:

Mediana = 109.5 + 3.53 = 113.03

Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

1.- Calcular el 50% de las frecuencias acumuladas (.50 x N). Localizar en que intervalo se encuentra este valor.

2.- Restarle al valor anterior, la frecuencia acumulada en el intervalo inmediato anterior al que contiene el 50% de las observaciones.

3.- Efectuar la siguiente regla de tres:

$$\frac{x}{\text{Tamaño del intervalo}} = \frac{\text{Valor obtenido en el paso 2}}{\text{Frecuencia simple en el intervalo}}$$

4.- Sumar el valor obtenido en el Paso 3 a el límite inferior verdadero del intervalo donde se localiza la Mediana. El resultado de esta operación es la Mediana.

Veamos otros ejemplos:

EJEMPLO.- Encontrar la Mediana de las siguientes estaturas:

Intervalo de clase	f	F
132 - 136	2	2
137 - 141	2	4
142 - 146	4	8
147 - 151	4	12
152 - 156	8	20
157 - 161	13	33
162 - 166	9	42
167 - 171	3	45
172 - 176	3	48
177 - 181	2	50
	N=50	

1.- .50 x 50 = 25, esta frecuencia se localiza en 157 - 161.

2.- 25 - 20 = 5

3.- $\frac{x}{5} = \frac{5}{13}$ $x = 1.92$

4.- 156.5 + 1.92 = <u>158.4</u>

EJEMPLO.- Encontrar la Mediana en la siguiente distribución:

Intervalo de clase	f	F
36	2	2
37	1	3
38	3	6
39	4	10
40	5	15
41	4	19
42	2	21
43	3	24
44	1	25

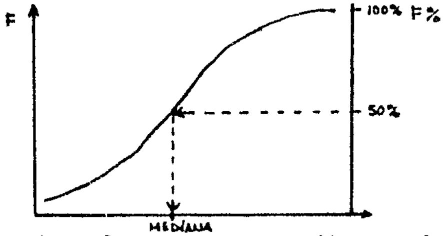
1.- .50 x 25 = 12.5, esta frecuencia se localiza en el intervalo 39.5 - 40.5

2.- 12.5 - 10 = 2.5

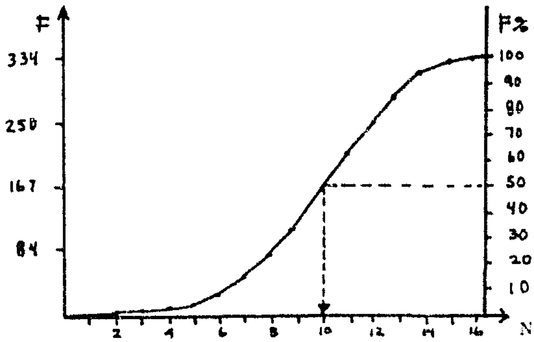
3.- $\frac{x}{1} = \frac{2.5}{5}$ $x = .5$

4.- 39.5 + .5 = <u>40</u> es la Mediana

<u>Método Gráfico para el cálculo de la Mediana:</u> En la Unidad anterior, vimos como se construía el Polígono de Frecuencia Acumulada. Este Polígono, tiene a la derecha otro eje con la Frecuencia Acumulada en forma de porcentaje, como se muestra en el dibujo siguiente. <u>Para calcular la Mediana, partiendo del valor 50% en el eje vertical, se traza una recta horizontal hasta llegar a el polígono; por el punto de corte al polígono, se traza una recta vertical y el punto donde esta recta corta al eje horizontal, representa el valor de la Mediana</u> como se ve en la figura siguiente:

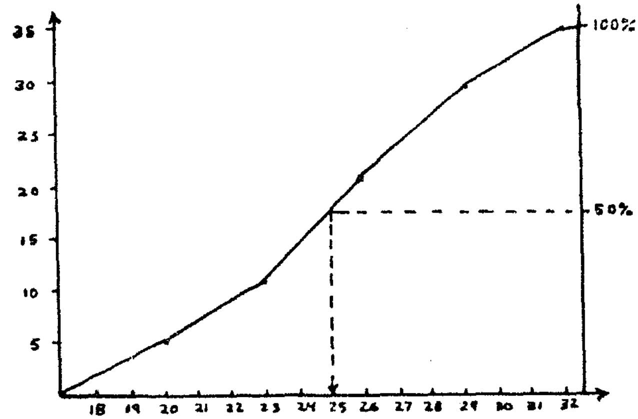


EJEMPLO.- (Tabla de valores correspondiente al número de lechones por camada, Unidad IV).



EJEMPLO.- Calcular la Mediana gráficamente para las siguientes observaciones:

Temperaturas máximas diarias °C	f	F
18 - 20	[illegible]	5
21 - 23	[illegible]	12
24 - 26	10	22
27 - 29	8	30
30 - 32	5	35



X = 25

Cabe recordar que cuando se traza un Polígono de Frecuencias Acumuladas, si se trabaja con variables del tipo discreto, como los lechones, el punto que representa las frecuencias se dibuja sobre el punto medio o marca de clase y cuando se trata de variables de tipo contínuo, como el caso de las temperaturas, el punto que representa las frecuencias se dibuja en la frontera superior del intervalo.

PERCENTILES.- La Mediana es un caso especial de un Percentil, es el valor que corresponde al Percentil 50. Veamos que es un Percentil.

El trazado de un Polígono de Frecuencias Acumuladas Relativas nos permite, mediante las graduaciones en el eje vertical con los porcentajes, localizar en el eje horizontal los Centiles de la variable. Se llama Centiles a los valores de la variable X que corresponden a cada uno de los porcentajes, 1%, 2%, 3%,....,100%, por tanto, habrá cien Centiles en cada curva de frecuencias acumuladas.

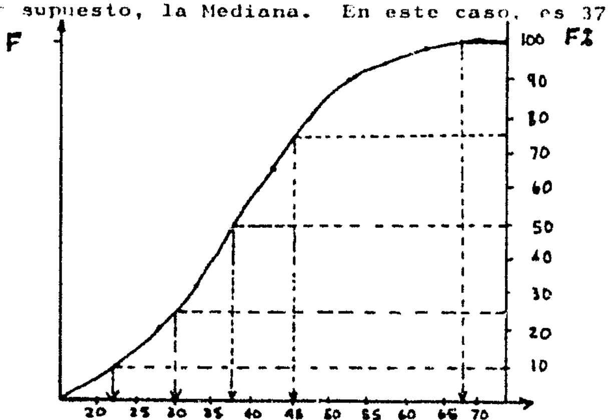
Estos valores se obtienen gráficamente, igual que la Mediana, trazando una recta horizontal, del porcentaje del Centil en el eje de las ordenadas, a un punto del polígono. A partir de este punto, se dibuja otra recta vertical hasta cortar el eje horizontal. Así obtenemos el valor del Centil que buscamos. Cabe aclarar que estos valores dependen del grado de precisión con que se dibuje la gráfica.

De lo anterior, podemos concluír que un Centil es el valor de la variable que comprende un determinado tanto por ciento de los casos. Algunos Centiles reciben el nombre de Deciles. Se llama

Decil al valor de la variable que corresponde a los percentiles 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 y 100. Por otra parte, tenemos los Cuartiles, estos son aquellos valores de la variable que dividen en cuatro partes de igual tamaño a las observaciones y corresponden a los percentiles 25, 50, 75 y 100. Se escriben Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Veamos un ejemplo.

Tenemos el siguiente Polígono de Frecuencia Acumulada. El valor 22 corresponde al 10% de las observaciones, o sea al primer Decil. El valor 30 es el valor de la variable que comprende el 25% de las observaciones, o sea Q_1.

El valor correspondiente a Q_2, o sea al 50% de las observaciones será, por supuesto, la Mediana. En este caso, es 37.5 y Q_3=45.



Antes de concluír la Lección, haremos un comentario final sobre la Mediana. Ya hemos visto como se calcula y su relación con los Percentiles, pero una característica sobresaliente de la Mediana es su poca sensibilidad a las calificaciones extremas, como mencionábamos al principio de la Lección. Veamos un ejemplo.

Consideremos el siguiente conjunto de calificaciones:

2, 5, 8, 11, 48

La Mediana es 8. Esto es verdad aunque el conjunto tiene una calificación extrema de 48. Si en lugar de 48 tuviéramos 89, la Mediana seguiría siendo la misma, o aún si tuvieramos 100 o 200. Esta característica de la Mediana la hace muy útil para la descripción de la tendencia central en ciertos tipos de distribuciones en los cuales la Media es una medida inaceptable debido a su sensibilidad respecto a los datos extremos.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Define Mediana

2.- Hallar la Mediana de los siguientes conjuntos de números.

a) 2,4,5,6,6,6,9,10,13 y 15
b) 1,3,5,7,7,7,9,9,10,10,11,12

3.- Calcula la Mediana de los incisos a y b del ejercicio 8 de la Lección anterior en la sección de Preguntas que abarcan la lectura.

4.- Calcula gráficamente la Mediana para el ejercicio anterior.

5.- Encuentra la Mediana gráficamente para el ejemplo de las llantas dado en la Lección.

6.- Cuando se elabora un Polígono de Frecuencias Acumuladas para una distribución de frecuencias de una variable contínua, en donde deben trazarse los puntos que representan las frecuencias en el polígono?

7.- A que se le llama Centil

8.- Cuantos Cuartiles contiene una distribución de Frecuencias?

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- A que percentil equivale la Mediana?

2.- Como se encuentra la Mediana gráficamente?

3.- Porqué cuando calculamos la Mediana lo primero que hacemos es calcular el 50% de las observaciones acumuladas?

4.- Explica porqué la Mediana resulta a veces mejor medida de tendencia central que la Media. Da un ejemplo.

5.- Da un ejemplo en donde podrías utilizar los centiles o deciles para describir una situación.

Lección 3

LA MODA

De todas las medidas de tendencia central, la Moda es la que más fácilmente se determina, puesto que se obtiene, usualmente, por inspección, y no necesariamente por cómputo. La Moda se define como el valor que ocurre con mayor frecuencia en una distribución. Se representa por: m.

Para los datos agrupados en intervalos, la Moda se designa como el punto medio o marca de clase del intervalo que contiene la mayor frecuencia. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO.- En la siguiente distribución de frecuencias, determinar la Moda:

Intervalo de clase	f
21 - 30	5
31 - 40	7
41 - 50	10
51 - 60	8
61 - 70	4

m = 45.5 (Punto medio del intervalo con la mayor -- frecuencia)

La Moda también puede ser determinada a partir de un histograma o un Polígono de Frecuencias, esta será el punto o barra más alto.

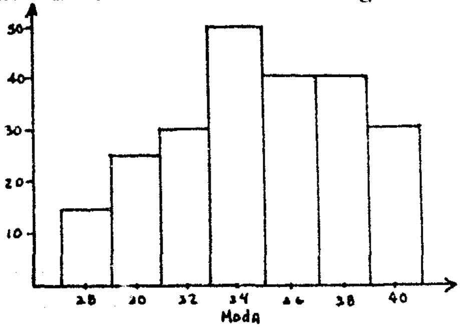
EJEMPLO.- Determinar la Moda en la siguiente distribución de frecuencias:

Estado Civil	f
Soltero	35
Casado	80
Viudo	30
Divorciado	45

Moda = Casado

EJEMPLO.- Se fabrican pantalones y se desea hacer un estudio sobre la talla que se vende más. Se tienen los siguientes datos:

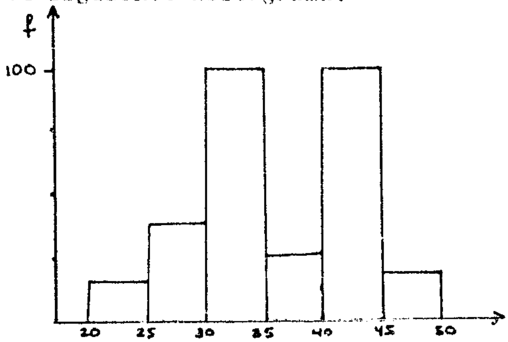
Talla	f
28	15
30	25
32	30
34	50
36	40
38	40
40	30



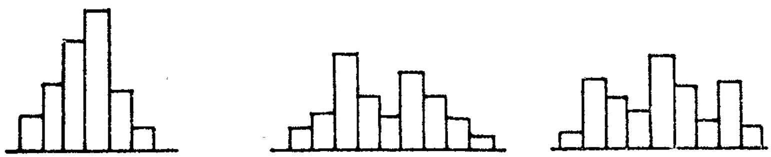
m = 34

En algunos casos, se puede tener distribuciones con dos modas, entonces la distribución se denomina <u>bimodal</u>. Esto sucede por lo general, cuando se combinan dos distribuciones en un mismo histograma o polígono de frecuencias. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO.- Una organización de feministas ha reunido información sobre salarios pagados a hombres y mujeres por el mismo trabajo desempeñado y ha llegado a la conclusión de que a las mujeres se les paga menos por el mismo trabajo. Los resultados se pueden ver en el siguiente histograma:



Existen también algunos casos de distribuciones de frecuencia que al representarse en un histograma no sólo muestran una o dos modas, sino varias modas, estos se denominan <u>Multimodales</u>. Lo anterior se ilustra en seguida con los siguientes histogramas.



Unimodal Bimodal Multimodal

Las medidas vistas en las dos Lecciones anteriores, Media y Mediana, sólo son apropiadas para mediciones hechas con escalas ordinales, de intervalo o de proporciones, pues no tiene sentido hablar de Media o Mediana del sexo de los empleados en una compañía o de la ocupación de estos.

Así mismo, la Moda, como una medida de localización del centro de una distribución, tiene más significado cuando se trabaja con escalas ordinales, de intervalo o de proporciones, ya que al existir un orden en estas escalas, hace posible un agrupamiento alrededor de la Moda.

Sin embargo, es frecuente clasificar datos en grupos que no son de números, esto es, en escalas Nominales, como los casos que mencionábamos anteriormente: el sexo de los empleados de una compañía o la ocupación de estos, entonces sí tiene sentido preguntar por ejemplo: cuál es la ocupación de la mayoría de los empleados. La respuesta a esta pregunta estaría dada por la ocupación con la mayor frecuencia, esto es, la Moda. La Moda es muy útil en estos casos. A continuación tenemos otros ejemplos.

EJEMPLO.- En la planificación de producción en una fábrica con producción diversificada (esto es, que produce varios artículos) para identificar aquellos artículos con mayor demanda.

EJEMPLO.- En Publicidad, la Moda es usada a menudo en anuncios que afirman que tal o cual marca de cigarros o detergentes son los favoritos comparados con la competencia.

La Moda es útil en estos casos, sin embargo, como medida de localización del centro de estas distribuciones depende de como se hayan clasificado los datos, pues no hay un orden en las escalas nominales y por esto no tiene mucho sentido hablar de la Moda como una medida de centralización para escalas nominales.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Define: Moda

2.- Como se obtiene la Moda para datos agrupados en intervalos?

3.- Se dice que la Moda es la medida de tendencia central que más fácilmente se determina, pues se obtiene generalmente por:________ ____________ y no por______________.

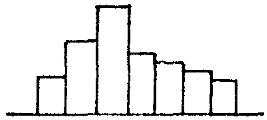
4.- Da un ejemplo de la utilidad de la moda en la publicidad.

5.- Cuál es la moda en el siguiente conjunto de datos:

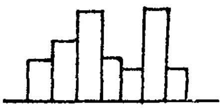
X	f
0 - 3	6
4 - 7	7
8 - 11	10
12 - 15	8

6.- De los siguientes histogramas, indica si son: Unimodales, Bimodales o Multimodales.

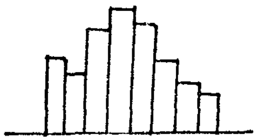
a)



b)



c)



d)

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Indica si es posible calcular la Media y Mediana en el siguiente conjunto de datos:

Ocupación	f
Estudiante	25
Hogar	40
Obrero	35
Profesionista	15
Comerciante	30

2.- Cual es la Moda en el conjunto anterior?

3.- Podemos decir que la Moda es un buen indicador de la tendencia central para el caso de variables Nominales?

4.- Da un ejemplo en que la Moda sea de utilidad.

Lección 4

COMPARACION DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central vistas hasta aquí, son: la Media, la Mediana y la Moda. No obstante, tal como hemos mencionado brevemente en cada Lección, las tres medidas no son igualmente aplicables a todas las situaciones.

En general, la Media es la medida preferida para representar la tendencia central debido a las diversas propiedades deseables que posee, algunas de las cuales veremos en la siguiente Lección. Sólo la Media utiliza todos los valores en la distribución y generalmente es la que mejor representa el valor medio o central del parámetro correspondiente a una población dada.

Por otra parte, la Mediana es la medida de localización menos sensible ante un cambio de valor en una observación extrema, como habiamos mencionado anteriormente. Por tal razón, hay algunas ocasiones en que se prefiere la Mediana como medida de tendencia central.

La Moda es la menos usada de las medidas de localización, aunque su cálculo sea de fácil obtención. Ya hemos visto su utilidad en cuanto se refiere al conocimiento del caso típico o de mayor ocurrencia en una determinada distribución.

Cabe aquí preguntarse cuál será la medida que haya de servir para caracterizar un determinado conjunto de datos. Por lo general, dependerá de la forma de la distribución de los datos y del objetivo que se pretenda con dicha medida.

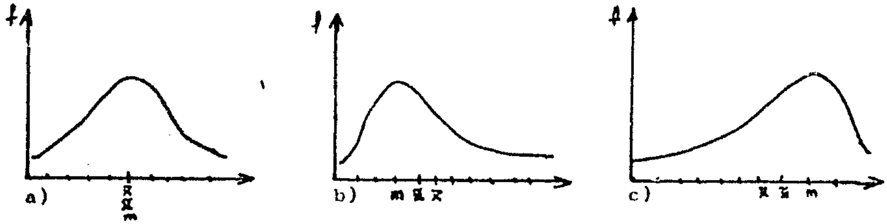
Si la medida se utiliza para obtener un valor total, ha de emplearse la Media. Por ejemplo, si un avión de pasajeros está diseñado para transportar 10000 kilos, es de esperar que lleve 100 personas suponiendo que el peso medio por persona incluyendo el equipaje sea de 100 kilos. Esta cantidad de pasajeros será aplicada a todos los vuelos de este avión y no estaremos pesando a pasajeros y equipaje cada vez que el avión vaya a volar.

Si lo que se desea averiguar es el detergente típico utilizado por las amas de casa en una región, se utiliza la Moda.

Por otra parte, el aprovechamiento académico relativo de <u>un</u> estudiante en su clase se puede indicar señalando si la puntuación de su exámen esta por encima o por debajo de la Mediana, o el percentil 50. En este mismo caso, si quisieramos el aprovechamiento medio de <u>toda</u> la clase, la Media sería más apropiada.

Las figuras siguientes muestran las posiciones de la Media, la Mediana y la Moda. Si la distribución es Normal, figura (a), las tres medidas de tendencia central tienen valores idénticos. Si la distribución es asimétrica, como en las figuras b y c, los tres valores divergen. En la figura b, se ve que la distribución tiene asimetría positiva o hacia la derecha, la cola más larga de la distribución queda a la derecha. La Mediana tiene una posición tal que la mitad de la distribución está por encima y la mitad por debajo de dicha Mediana. Como la cola larga está a la derecha, la Moda, que sigue estando en lo alto de la curva, se ve llevada a la izquierda de la Mediana, es decir, hacia los valores inferiores de la distribución. Como la Media aritmética es la más sensible a los valores extremos, se ve llevada a la derecha de la Mediana, o sea hacia los valores altos de la distribución. Ocurre lo contrario cuando la distribución es de asimetría negativa como la figura c). La Media, por su sensibilidad a los valores extremos es llevada hacia los valores bajos de la distribución.

Para una distribución unimodal, la Mediana siempre estará entre la Moda y la Media independientemente de la dirección de la asimetría.



La consideración básica que debe tenerse en cuenta, es que la Media se construye en la dirección de la desviación, no así la Mediana que no es afectada por valores extremos. Así, cuando la Media es mayor que la Mediana, puede decirse que la distribución tiene asimetría positiva y cuando la Media es menor que la Mediana, la distribución tiene asimetría negativa.

EJEMPLOS.- Supongamos que tenemos el siguiente conjunto de medidas: a) $\bar{X} = 62$, $\tilde{X} = 62$ y $m = 62$

Podemos decir que pertenecen a una distribución normal simétrica.

b) $\bar{X} = 68$, $\tilde{X} = 62$ y $m = 56$

Puede decirse que estas medidas pertenecen a una distribución con asimetría positiva. Lo contrario ocurre para las siguientes medidas:

c) $\bar{X} = 50$, $\tilde{X} = 56$ y $m = 62$

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Podemos aplicar las tres medidas de tendencia central a todas las situaciones?

2.- Cual es la medida de tendencia central que utiliza todos los valores de la distribución?

3.- La medida de tendencia central menos sensible a las calificaciones extremas es:__________________.

4.- Cuando queremos conocer el caso típico o de mayor ocurrencia recurrimos a la ____________.

5.- Supongamos que queremos conocer el aprovechamiento medio de una clase de Estadística. Que medida deberemos utilizar?

6.- Para el ejercicio anterior, supongamos que nos interesa la calificación de un solo estudiante respecto a toda la clase. Que medida es más apropiada?

7.- Con base en las siguientes medidas de tendencia central, indica cuando existe evidencia de asimetría, y si la hay, ¿cuál es su dirección?

a) $\bar{X} = 56$ $\tilde{X} = 62$ $m = 68$
b) $\bar{X} = 72$ $\tilde{X} = 66$ $m = 58$
c) $\bar{X} = 66$ $\tilde{X} = 66$ $m = 66$
d) $\bar{X} = 62$ $\tilde{X} = 62$ $m = 30$, $m = 94$

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Señala una situación en que sea más apropiado utilizar como medida de tendencia central:

a) La Mediana b) La Moda c) La Media

2.- Indica una propiedad de la Mediana que la hace mejor medida de tendencia central que cualquiera de las otras medidas.

3.- Cual de las medidas de tendencia central es la que mejor representa el valor medio del parámetro correspondiente a una población?

4.- Cuando son idénticos el valor de la Media, Mediana y Moda?

5.- Que se entiende por asimetría, asimetría positiva y asimetría negativa de unn distribución?

6.- En el ejercicio 7d de la sección anterior, que podrías comentar sobre estas medidas?

7.- Elabora con la siguiente tabla, el histograma correspondiente y calcula la medida de tendencia central más adecuada:

Sexo de los empleados de la fábrica "Evon"	Frecuencia
Masculino	325
Femenino	87

8.- Calcula $\bar{X}$, $\tilde{X}$ y m para las siguientes tablas y obtén las conclusiones correspondientes:

a)

Intervalo	f
10 - 13	4
14 - 17	6
18 - 21	10
22 - 25	6
26 - 29	4

b)

Intervalo	f
4 - 8	2
9 - 13	8
14 - 18	6
19 - 23	8
24 - 28	6

c)

Intervalo	f
5 - 10	5
11 - 16	10
17 - 22	9
23 - 28	3
29 - 34	1

9.- Indica cual es la mejor medida de tendencia central para las siguientes distribuciones:

Dato	f
3	5
14	7
15	9
16	11
17	5

Dato	f
1	2
2	3
3	5
4	9
5	3

10.- Dos fabricantes de estufas anuncian que la vida "promedio" de sus productos es de 7 años. Sin embargo, al obtener una muestra aleatoria de la duración de los productos, una persona encuentra que la vida en años del producto del fabricante A es:

5,5,5,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,8,8,8,8,9,9 9

Una muestra del producto del fabricante B indica:

2,3,4,5,5,5,5,6,6,6,7,7,7,7,7,8,8,20,20,20

¿Cuál medida "promedio" señaló cada fabricante?
¿Cuál estufa representaría mejor inversión?
¿Con cuál estufa se sentiría una persona más seguro al afirmar que su vida "promedio" es de 7 años?

Lección 5

MEDIDAS DE DISPERSION

EL RANGO Y RANGO INTERCUARTIL

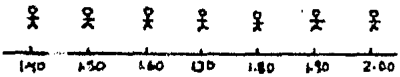
Veíamos en la Unidad IV que una calificación por sí misma carece de significado y sólo lo adquiere cuando se compara con otras calificaciones y otros estadísticos. Así, si conocemos la Media de la distribución de una variable dada, podremos determinar cuándo una calificación o dato particular es mayor o menor que dicha Media. Pero, es evidente que una medida de la tendencia central, como la Media, sólo proporciona una cantidad limitada de información.

Para describir una distribución en forma más completa o para interpretar con más detalle una calificación, necesitaremos información adicional acerca de la dispersión de las calificaciones con respecto a nuestra medida de tendencia central.

Aclaremos esto con un ejemplo. Supongamos que tenemos los siguientes dibujos, donde cada muñequito representa una persona de la estatura indicada en la escala. En ambas gráficas, a y b, la Media es 1.70, sin embargo, en a) hay personas con estaturas repartidas a todo lo largo de la escala, mientras que en b) ni siquiera hay una persona que sea de la estatura que se tiene como la Media, esto es, 1.70 (como ejercicio adicional, calcula la Media en ambas gráficas).

Gráfica a)

$\bar{X} = 1.70$



Gráfica b)

$\bar{X} = 1.70$

Así, podemos darnos cuenta que no es suficiente una medida de tendencia central, como la Media, para describir suficientemente una distribución. En el ejemplo anterior, la Media es la misma, sin embargo, la manera en que estan distribuídas las observaciones es completamente diferente.

Vemos que para la interpretación de calificaciones o datos, debemos hallar una información auxiliar que acompañe a la Media o a la Mediana. Esta información debe, en cierta forma, indicar el grado de dispersión de las calificaciones alrededor de la medida de tendencia central que hayamos seleccionado.

Esta información nos la proporcionan las Medidas de Dispersión. Veremos aquí cinco de estas Medidas de Dispersión: el Rango, el Rango Intercuartil, la Desviación Media, la Varianza y la Desviación Estándar.

EL RANGO.- Cuando calculamos las medidas de tendencia central, localizamos un punto determinado de la escala de observaciones y lo identificamos como Media, Mediana o Moda. Sin embargo, cuando tratemos acerca de una medida de Dispersión, debemos buscar un índice de la variabilidad que indique la distancia en la escala de calificiones.

El Rango, es la más sencilla y directa de las medidas de Dispersión. Ya la hemos utilizado para calcular el número de intervalos en una distribución. El Rango es, sencillamente, la diferencia entre el dato mayor y el menor en nuestras observaciones.

EJEMPLO.- Supongamos que tenemos las siguientes observaciones:

5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11

El Rango será: $11 - 5 = 6$

Aunque el Rango es una medida significativa, es poco usada dada su notoria inestabilidad.

EJEMPLO.- Supongamos que tenemos una serie de edades obtenidas en una encuesta de los asistentes a una conferencia en una Universidad: 18, 21, 19, 19, 20, 18, 54, 20, 19

El Rango de edades de la gente que asistió a esta conferencia es de: $54 - 18 = 36$ años

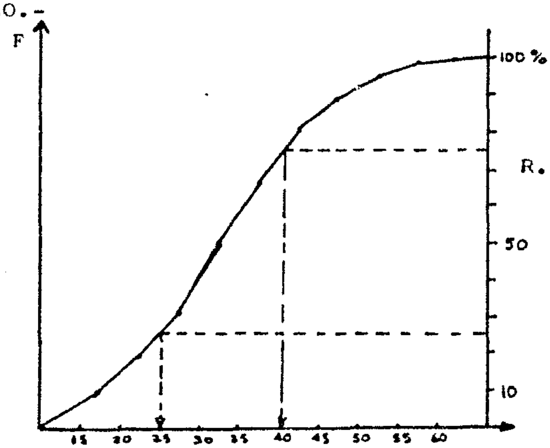
Si observamos los datos, podemos preguntarnos si acaso por error se incluyó la edad del conferenciante, pues tenemos un valor de 54 muy separado de los demás. Si esto hubiera sido, entonces al quitarlo el rango sería: $21 - 18 = 3$ años

Volvemos al problema de los valores extremos y vemos que el Rango es también muy sensible a ellos. En ocasiones se incluye inadvertidamente un dato u observación que debiera haber sido excluído, como sería el caso si la persona de 54 años fuera el conferenciante, pero a veces también sucede que es el caso totalmente atípico, como sería el caso si la persona de 54 años fuera en verdad un estudiante de esa edad.

El Rango refleja únicamente las dos calificaciones extremas de la distribución y en casos con valores extremos, se ve afectado, haciendo parecer grande la dispersión de las observaciones, cuando en realidad no lo es.

RANGO INTERCUARTIL.- A veces, se emplea esta medida de Dispersión con el fin de superar la inestabilidad del Rango vista anteriormente. El Rango Intercuartil, como su nombre lo indica, se calcula simplemente restando la calificación correspondiente al percentil del 25% (designado primer cuartil o Q_1), de la calificación correspondiente al percentil del 75% (tercer cuartil o Q_3).

EJEMPLO.-



R.I.= 40 - 25 = 15

A pesar de que esta medida de Dispersión es más adecuada que el Rango, tiene también inconvenientes. No permite, como el Rango, hacer una interpretación precisa de una calificación o dato dentro de la distribución, pues sólo refleja los valores de Q_1 y Q_3. Además, usualmente no interviene en ninguna de las relaciones matemáticas "importantes" de la Inferencia Estadística. Por lo tanto, pasaremos a otras medidas de dispersión más significativas en las siguientes Lecciones.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Porqué se requiere de la información que pueda proporcionar una medida de Dispersión con respecto a nuestra medida de Tendencia Central?

2.- Utiliza un dibujo para ejemplificar como nos ayuda a interpretar o comparar mejor dos distribuciones distintas con la misma Media.

3.- Menciona cinco medidas de Dispersión.

4.- Calcula el Rango y Rango Intercuartil de los siguientes grupos de datos:

a) 10,11,11,12,13,16,16,18,19,22,24,25
b) 10,8,6,0,8,3,2,2,8,0,10
c) 20,1,2,5,5,4,4,4,1,1,2,2,3

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

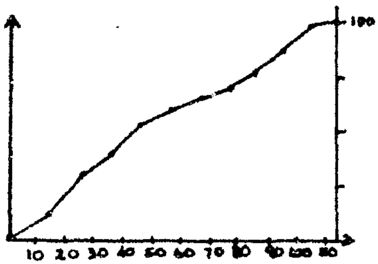
1.- Una muestra puede tener la misma media pero distinta_____________.

2.- El resultado de la diferencia entre los percentiles del 75% y el 25% es llamado:_______________________.

3.- Menciona un ejemplo en donde se vea que el Rango es muy sensible a los valores extremos.

4.- La diferencia entre las observaciones mayor y menor es llamado_____________.

5.- Obtén el Rango Intercuartil a partir del siguiente polígono:



Lección 6

LA DESVIACION MEDIA

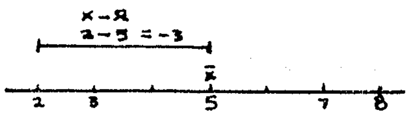
La Desviación es el concepto fundamental que nos permitirá comprender posteriormente otras medidas de dispersión. Ya hemos hablado de que necesitaremos información adicional acerca de la dispersión de los datos con respecto a nuestra medida de Tendencia Central seleccionada. Utilizaremos la Media como medida de tendencia central pues, como habíamos mencionado anteriormente, tiene algunas propiedades muy útiles para el cálculo de medidas de dispersión.

Una de las más importantes propiedades de la Media es la siguiente: La Media es el punto en una distribución de medidas o datos respecto del cual la suma de las desviaciones es igual a cero.

La desviación de cada observación o dato es la diferencia entre la observación y la Media. Podemos decir en otras palabras, que es la distancia entre la observación y la Media.

EJEMPLO.- Supongamos que tenemos los siguientes datos:

Dato X	Desviación $X - \bar{X}$
2	$2 - 5 = -3$
3	$3 - 5 = -2$
5	$5 - 5 = 0$
7	$7 - 5 = 2$
8	$8 - 5 = 3$



$N = 5$ (tenemos 5 observaciones)

Calculamos la Media:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = 2+3+5+7+8 = \frac{25}{5} = 5$$

Sumamos las desviaciónes respecto a la Media:

$$(-3)+(-2)+0+2+3 = 0$$

DESVIACION MEDIA.- Cuando calculamos la Media, sumamos todas las observaciones y las dividimos entre el número de observaciones (N). Si sumaramos las desviaciones con respecto a la Media y las dividieramos entre el número de observaciones, obtendríamos una medida análoga a la Media, excepto que representaría la Dispersión promedio de las observaciones respecto a la Media, esto es, la Desviación Media, o la distancia "promedio" entre las observaciones y la Media.

Pero pensando un poco sobre la propiedad de la Media que acabamos de mencionar, tenemos un serio problema. Sabemos que la suma de las desviaciones de todos los datos con respecto a la Media debe valer cero. Así, si definimos la Desviación Media (d.m.), como esta suma dividida entre N, la Desviación Media sería cero en todos los casos y no proporcionaría información alguna.

Ahora bien, si sumáramos todas las desviaciones sin considerar el signo y dividiéramos entre N (número de observaciones), todavía tendríamos una medida que refleje la desviación media de las observaciones con respecto a la Media aritmética. Esta medida estaría basada, por supuesto, en el valor absoluto de las desviaciones.

El valor absoluto de un número positivo o de cero es el número mismo. El valor absoluto de un número negativo se puede obtener cambiando el signo de negativo a positivo. Así, el valor absoluto de +5 o de -5 es 5. Se representa encerrando al número en cuestión entre dos barras verticales. Por lo tanto, $|-5| = 5$ (Ver Lección 8, Unidad I).

EJEMPLO.- Calcular la Desviación Media de las siguientes observaciones:

X	$\lvert X - \bar{X} \rvert$
9	+4
8	+3
7	+2
7	+2
7	+2
5	0
5	0
5	0
5	0
4	-1
4	-1
3	-2
3	-2
2	-3
1	-4
75	$\Sigma \lvert X - \bar{X} \rvert = 26$

$$\bar{X} = \frac{75}{15} = 5$$

$N = 15$
$\Sigma X = 75$
$\bar{X} = 5$

$$d.m. = \frac{\Sigma |X - \bar{X}|}{N}$$

$$= \frac{26}{15} = 1.73$$

Podemos definir a la Desviación Media como:

$$d.m. = \frac{\text{Suma del valor absoluto de las desviaciones respecto a } \bar{X}}{\text{Número de Observaciones (N)}}$$

Para observaciones agrupadas en forma de distribución de frecuencias, debe usarse la siguiente fórmula:

$$d.m. = \frac{\sum f(|X - \bar{X}|)}{N}$$

La única variación con la fórmula anterior es que cada desviación se tiene que multiplicar por la frecuencia, pues ya sabemos que la frecuencia nos indica el número de veces que aparece un determinado dato u observación. Además, para datos agrupados en intervalos, el valor que utilizamos como X es el punto medio del intervalo.

EJEMPLO.-

Intervalo	f	P.M.	fX	$\lvert X - \bar{X}\rvert$	$f\lvert X-\bar{X}\rvert$
4 - 6	1	5	5	-12	12
7 - 9	1	8	8	-9	9
10 - 12	2	11	22	-6	12
13 - 15	3	14	42	-3	9
16 - 18	6	17	102	0	0
19 - 21	3	20	60	+3	9
22 - 24	2	23	46	+6	12
25 - 27	1	26	26	+9	9
28 - 30	1	29	29	+12	12
	N=20		340		84

$$\bar{X} = \frac{fX}{N} = \frac{340}{20} = 17$$

$$d.m. = \frac{f\ X-\bar{X}}{N} = \frac{84}{20} = 4.2$$

Como base para la comparación de la dispersión existente en varias distribuciones, la Desviación Media es bastante práctica. Así por ejemplo, cuanto mayor es la desviación media, tanto mayor es la dispersión de las observaciones. Sin embargo, para lo interpretación de observaciones en una distribución, la d.m. es menos útil, pero hemos presentado la d.m. aunque en realidad tenga poco uso, debido a que la Desviación Estándar y la Varianza que tienen gran importancia en el análisis estadístico y que veremos en la siguiente Lección, están relacionadas muy estrechamente con la desviación media.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Que es una desviación de una observación respecto a la Media?

2.- Menciona una propiedad de la Media.

3.- Calcula las desviaciones respecto a la Media para el siguiente conjunto de datos:

a) 2,2,3,3,5
b) 7,7,8,10

4.- Explica con palabras el cálculo de la desviación media.

5.- Calcula el valor absoluto de:

a) $|-15|$ b) $|3|$ c) $|48|$ d) $|-7.3|$

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Porqué se utiliza el valor absoluto de las desviaciones para calcular la Desviación Media?

2.- Cual es la analogía que existe entre la Media y la Desviación Media?

3.- Calcula la Desviación Media para los siguientes conjuntos:

a)

x	f
10	3
11	4
12	5
13	6
14	3
15	2

b)

Intervalo de clase	f
0 - 2	1
3 - 5	4
6 - 8	9
9 - 11	10
12 - 14	16
15 - 17	11
18 - 20	8
21 - 23	3
24 - 26	1

Lección 7

LA VARIANZA Y LA DESVIACION ESTANDAR

En la Lección anterior, necesitábamos tratar los valores que obteníamos de la resta $(X - \bar{X})$, esto es, las desviaciones, como números absolutos pues su suma es igual a cero. Pero si hubiéramos elevado al cuadrado cada desviación, $(X - \bar{X})$, y posteriormente sumado todas estas desviaciones al cuadrado también hubiéramos eliminado de una manera perfectamente legítima, el signo menos, conservando al mismo tiempo la información inherente a estas desviaciones.

Al efectuar esto, encontramos un estadístico más útil para juzgar la dispersión de las observaciones, que aquellos otros que hemos estudiado hasta el momento. La Desviación Estándar, basada en la elevación al cuadrado de estas desviaciones.

La Desviación Estándar representa dispersión de las observaciones, por lo que la variación de diferentes distribuciones puede compararse en términos de la Desviación Estándar. Además, la Desviación Estándar, como la Media, es miembro de un sistema matemático que permite su utilización en consideraciones estadísticas más avanzadas.

La Desviación Estándar se calcula tomando la raíz cuadrada de la Varianza, por lo tanto veamos como se calcula la Varianza.

La Varianza es otra medida de dispersión y se define verbalmente como: la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a la media, dividida entre N. Se representa como s^2.

$$s^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}$$

Para datos agrupados en distribución de frecuencias, únicamente se agrega la multiplicación de cada cuadrado por la frecuencia.

$$s^2 = \frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}$$

EJEMPLO.- Calcular la Varianza de las siguientes calificaciones:

X	$(X - \bar{X})$	$(X - \bar{X})^2$
3	-2	4
4	-1	1
5	0	0
5	0	0
6	+1	1
7	+2	4
30		10

$$s^2 = \frac{10}{6} = 1.\bar{6}$$

$N=6$ $\quad \bar{X} = \frac{30}{6} = 5$

EJEMPLO.- Calcular la varianza de los siguientes datos:

Intervalo de clase	P.M.	f	fX	$(X - \bar{X})$	$(X - X)^2$	$f(X - \bar{X})^2$
2 - 4	3	1	3	-12	144	144
5 - 7	6	3	18	-9	81	243
8 - 10	9	9	81	-6	36	324
11 - 13	12	11	132	-3	9	99
14 - 16	15	18	270	0	0	0
17 - 19	18	12	216	3	9	108
20 - 22	21	7	147	6	36	252
23 - 25	24	4	96	9	81	324
26 - 28	27	1	27	12	144	144
		N= 66	990		540	1638

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{990}{66} = 15$$

$$s = \frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N} = \frac{1638}{66} = 24.81$$

Decíamos que la Desviación Estándar es la raíz cuadrada de la Varianza, por lo tanto, se calcula:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N}}$$

Se representa por: s

Para datos agrupados en Tablas de Frecuencias; el ejemplo anterior queda:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(X - \bar{X})^2}{N}} = 24.81 = 4.98$$

Hay que recordar que para datos agrupados en intervalos, al calcular la Varianza o la Desviación Estándar se utiliza como dato (X), el punto medio del intervalo correspondiente.

El método antes visto para calcular la Varianza y la Desviación Estándar puede llamársele método de la desviación media. Sin embargo, este método es muy incómodo para emplear en el cálculo, particularmente cuando la Media es un valor fraccionario, lo que generalmente ocurre. Por lo tanto, a continuación veremos otra forma de calcular la s^2 y s. Podemos llamar a este método, el método de calificaciones originales, pues utiliza los datos originales elevados al cuadrado, los cuales se suman y se dividen entre N (número de observaciones) y a esto se les resta la Media elevada al cuadrado.

Por lo tanto, tenemos para la Varianza:

$$s^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - \bar{X}^2 \qquad\qquad s^2 = \frac{\Sigma fX^2}{N} - \bar{X}^2$$

Datos no agrupados   Datos agrupados

La Desviación Estándar será simplemente la raíz cuadrada de la varianza, esto es:

$$s = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \bar{X}^2} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \bar{X}^2}$$

EJEMPLO.- Tenemos la siguiente distribución no agrupada:

X	X^2
7	49
6	36
6	36
5	25
5	25
5	25
4	16
4	16
3	9
1	1
48	X=238

N = 12

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{48}{12} = 4$$

$$s^2 = \frac{\sum X^2}{N} - (\bar{X})^2 = \frac{238}{12} - (4)^2$$

$$= \frac{238}{12} - 16$$

$$= 19.83 - 16$$

$$= 3.83$$

Por lo tanto, $s = \sqrt{3.83} = 1.96$

EJEMPLO.- Calcular la Varianza y la Desviación Estándar. Como los datos están agrupados en intervalos, utilizamos como X el punto medio de cada intervalo.

Intervalo de clase	P.M.	f	fX	X^2	fX^2
0 - 2	1	1	1	1	
3 - 5	4	4	16	16	64
6 - 8	7	9	63	49	441
9 - 114	10	10	100	100	1000
12 - 14	13	16	208	169	2704
15 - 17	16	11	176	256	2816
18 - 20	19	8	152	361	2888
21 - 23	22	3	66	484	1452
24 - 26	25	1	25	625	625
		N = 64	807		11991

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{807}{64} = 12.61$$

$$s^2 = \frac{\sum fX^2}{N} - (\bar{X})^2$$

$$= \frac{11991}{64} - (12.61)^2$$

$$= 187.36 - 159.01$$

$$= 28.35$$

Por lo tanto, la desviación estándar será: $s = \sqrt{28.35}$

$$= 5.32$$

Hay que evitar confundir los términos $\sum X^2$ y $(\sum X)^2$ que aparentemente son semejantes. El primero representa la suma de los cuadrados de cada una de las observaciones individuales, mientras que el segundo representa el cuadrado de la suma de las observaciones.

EJEMPLO.- Tenemos lo siguiente:

X	X^2
1	1
2	4
3	9
4	16
$\sum X = 10$	$\sum X^2 = 30$

Como vemos: $\sum X^2 = 30$ y esto es distinto de $(\sum X)^2 = (10)^2 = 100$

Por último, debemos mencionar que la Desviación Estándar no es muy sensible a valores extremos, lo que la hace deseable como medida de dispersión. Además mide las desviaciones con respecto a la media que es una medida de Tendencia central y utiliza todas las observaciones.

En general, la selección de una medida de Dispersión, depende del estudio que ha de realizarse y su finalidad, pero hay una preferencia por aquellas que se relatan a una medida de tendencia central como la Media, en especial por las propiedades que posee.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Calcular la desviación estándar de los siguientes conjuntos de observaciones:

a) 10,8,6,0,8,3,2,2,8,0
b) 30,2,2,2,5,6,3,4,4
c) 7,7,7,7,7,7,7,7,7,7

2.- Porqué es tan grande la desviación estándar en el inciso b?

3.- En varios supermercados se realizó una investigación sobre el precio de un artículo. Estos son los resultados obtenidos sobre el precio por k lo, en pesos, de un artículo.

56,65,48,73,59,72,63,65,60,63,44,79,63,61,66,69,64,71,58,63

a) Encontrar la media (repaso)
b) Encontrar el Rango, el Rango Intercuartil y la d.m.(repaso)
c) Encontrar la Varianza y la Desviación Estándar

4.- Podemos decir que las medidas de dispersión en general, sirven para estimar la _______________ de las observaciones respecto a una medida de tendencia central.

5.- Define verbalmente la Varianza

6.- Define verbalmente la Desviación Estándar.

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Supongamos que un tendero vende el litro de leche a un precio promedio de 26 pesos y que la desviación estándar del precio durante el último mes fué 0. Cuál fué el precio de la leche en los días quinto y dieciseisavo?

2.- Calcula la s^2 y s de lo siguiente:

a)

Producción de cajas por hora	f
7	1
8	2
9	4
10	2
11	1

b)

Pesos	f
5 - 20	8
21 - 35	9
36 - 50	10
51 - 65	7
66 - 80	4

3.- Dos vendedores que venden el mismo producto, tienen los siguientes registros durante un largo período de tiempo:

	Vendedor #1	Vendedor #2
Volúmen promedio de ventas por mes	30,000	35,000
Desviación Estándar	2,500	3,600

Cuál de los vendedores parece más constante en el volúmen de ventas?

Lección 8

COMPARACION DE LAS MEDIDAS DE DISPERSION

Las medidas de Dispersión que hemos visto son: El Rango, el Rango Intercuartil, la Desviación Media, la Varianza y la Desviación Estándar. Estas medidas, sin embargo, no son igualmente aplicables a todas las situaciones.

Mencionamos que las medidas de Dispersión nos proporcionan un índice o un punto de referencia para conocer la distancia o dispersión de las observaciones y una de las primeras que calculamos fué el Rango. Esta es la más sencilla y directa de las medidas de dispersión, pues es la diferencia entre la observación mayor y la menor.

Sin embargo, el Rango no utiliza todas las observaciones en la distribución y se emplea de manera limitada por su poca estabilidad ante valores extremos.

El Rango Intercuartil, aunque es un poco mejor que el Rango, pues elimina los valores en ambos extremos de la distribución, tampoco es muy utilizado como medida de dispersión. Por lo general, se utiliza como medida de dispersión si se ha utilizado la Mediana como medida de tendencia central. Esta medida tampoco utiliza todos los valores de la distribución.

La Desviación Media, (d.m.), que en forma general la podemos definir como la Media de los valores absolutos de las desviaciones de las observaciones con respecto a la Media; es otra medida de dispersión. Tanto como base para la comparación de la dispersión existente en varias distribuciones, como para la interpretación del comportamiento de las observaciones en una distribución, es bastante práctica.

Otras dos medidas de dispersión que hemos visto, son la Varianza y la Desviación Estándar. El cálculo de estas, a diferencia de la desviación media, que está basado en los valores absolutos, utiliza los cuadrados de las desviaciones de las observaciones.

Es interesante notar que de esta forma, las diferencias o desviaciones, grandes pesan mucho más que las pequeñas en el cálculo de las medidas.

De estas, la Desviación Estándar es la más utilizada de las medidas de dispersión, tanto en la Estadística Descriptiva como en la Inferencia Estadística. La Varianza, se utiliza en análisis estadístico avanzado y al igual que la Desviación Estándar y la Media, forma parte de un sistema matemático que permite su utilización en consideraciones estadísticas más generales.

Preguntas que abarcan la lectura:

1.- Para qué necesitamos de otras medidas, aparte de las medidas de tendencia central?

2.- Menciona cinco medidas de Dispersión

3.- Da una razón por la que el Rango no es muy utilizado como medida de dispersión.

4.- Porqué es matemáticamente poco confiable la d.m.?

5.- Cuál es la medida de desviación más utilizada?

Preguntas para verificar la comprensión de la lectura:

1.- Escribe dentro del paréntesis si la proposición correspondiente es falsa (F) o una (V) si esta es verdadera.

( ) Una muestra puede tener la misma media pero distinta dispersión.

( ) La suma de todas las desviaciones es cero.

( ) El valor absoluto de las desviaciones se utiliza para el cálculo de la Desviación Estándar.

( ) La Mediana interviene en el cálculo del Rango Intercuartil.

( ) La desviación estándar de 4, 7 y 11 es 8.22

( ) La desviación media de 4, 7, 11 es .39

2.- A la medida de la diferencia entre el centil 75 y el centil 25 se le conoce como:

3.- Calcular la desviación estándar para los siguientes conjuntos de observaciones:

a) 10,8,6,0,8,3,2,2,8,0

b) 20,1,2,5,5,4,4,4,0

c) 8,8,8,8,8,8,8,8,8,8

A) Porqué es tan grande la Desviación Estándar del inciso b?

B) Calcular el Rango de a, b y c. Para cuál conjunto el Rango es una medida engañosa de dispersión y porqué?

R E S U M E N

En esta Unidad hemos calculado, discutido y comparado los tres índices de tendencia central que se emplean más frecuentemente en la descripción de las distribuciones de frecuencia: la Media, la Mediana y la Moda.

Todas estas medidas localizan un punto central de la distribución. La <u>Media</u> se obtiene sumando todos los valores de la variable y dividiendo la suma por el número de sumandos. La Media es, intuitivamente, el punto de equilibrio de las observaciones. La Mediana divide la distribución en dos partes iguales, de modo que el número de observaciones debajo de la <u>Mediana</u> es igual al número de observaciones sobre ella. Finalmente, la <u>Moda</u> se define como el valor de ocurrencia más frecuente.

Por las propiedades especiales que posee, la Media es la medida de tendencia central empleada con mayor frecuencia. Sin embargo, a causa de su sensibilidad hacia calificacionns extremas, la Mediana se usa en ocasiones, como la medida más adecuada cuando las distribuciones son visiblemente asimétricas. La Moda se utiliza generalmente, para variables categóricas.

Vimos además, las relaciones existentes entre la Media, Mediana y Moda en las distribuciones con asimetría positiva y negativa.

Además, vimos que para describir por completo una distibución de frecuencias, necesitamos algo más que las medidas de Tendencia Central. Debemos ser capaces de describir como se dispersan estos valores con respecto a la correspondiente medida de tendencia central. En este sentido, hemos estudiado cinco medidas de <u>dispersión</u>: el <u>Rango</u>, el <u>Rango Intercuartil</u>, la <u>Desviación Media</u>, la <u>Varianza</u> y la <u>Desviición Estándar</u>.

Vimos dos procedimientos para calcular la Varianza y la Desviación Estándar: por la d.m. y por calificaciones originales. Generalmente, estas medidas que se basan en los cuadrados de las desviaciones respecto a la media, son las más útiles en el cálculo de desviación en una distribución.

C O N C L U S I O N E S

Durante la elaboración de este trabajo, se ha ensayado casi la totalidad de este a manera de notas, frente a un grupo obteniéndose resultados satisfactorios en el aprendizaje de los estudiantes.

Como sólo se puede evaluar el aprendizaje y el efecto de determinado programa educacional mediante la observación de cambios habidos en los estudiantes, podemos decir que durante la utilización de las notas los estudiantes mostraron un gran interés en temas tales como el de la solución de problemas por medio de ecuaciones, así como la elaboración de diversos proyectos dentro del grupo, utilizando las técnicas estadísticas vistas aquí.

Sin embargo, el trabajo no ha terminado con la elaboración de este proyecto. Deberá haber una revisión constante del material y tal vez implementar alguna forma de evaluar el texto y su contenido.

Así mismo, tal vez sea necesario hacer cambios en el material según se vean los resultados al probar el texto terminado en diversos grupos de estudiantes.

BIBLIOGRAFIA

1.- BEGLE E.G.
"Critical Variables in Mathematics Education" Findings from a survey of the empirical literature.
National Council of Teachers of Mathematics

2.- CABALLERO A., MARTINEZ L., BERNARDEZ J.
"Matemáticas 3"
Editorial Esfinge, S.A. 1981

3.- CHAO B. LINCOLN
"Estadística para las ciencias administrativas"
U.T.E.S.A. 1979

4.- HABER A., RUNYON R.
"Estadística General"
Fondo Educativo Interamericano, S.a. 1972

5.- FARRELL M.A., FARMER W.A.
"Systematic Instruction in Mathematics for the Middle and High School Years"
Addison-Wesley 1977

6.- HERRERA Y MONTES LUIS
"Elementos de Estadística Aplicada a la Educación"
México 1979

7.- LIZARRAGA I.M.
"Estadística"
Mc Graw-Hill

8.- VALENCIA G. MENDOZA M., ARANDA F.
"Introducción a la Inferencia Estadística"
Comunicación Interna #42 - 1978 Dep. de Matematicas Facultad de Ciencias

9.- POLYA G.
"Como Plantear y Resolver Problemas"
Trillas

10.- ÇERRALDE E. ZUÑIGA E.
"Matemáticas 2"
México 1981

11.- LOPEZ DE MEDRANO SANTIAGO
"Modelos Matemáticos"
TRILLAS -Serie Temas Básicos - 1972

12.- SHULTE A.P., SMART J.R.
"Teaching Statistics and Probability"
National Council of Teachers of Mathematics
1981 Yearbook

13.- SEVILLA J., FIOL M., SAUVEGRAIN R
"Tópicos de Matemáticas para Administración y Economía"
TRILLAS 1974

14.- TANUR J., MOSTELER F, KRUSKAL W., LINK W.
"Statistics: A Guide to the Unknown"
Holden - Day 1978

15.- USISKIN ZALMAN
"Algebra through Applications with Probability and Statistics"
National Council of Teachers of Mathematics 1979

16.- VAZQUEZ R., RAMOS C.
"Matemáticas 1"
TRILLAS

17.- WILLOUGHBY S.S.
"Probabilidad y Estadística"
Publicaciones Cultural, S.A.

18.- FRED APRENDE ESTADISTICA BASICA
Editorial TRILLAS - 1981

19.- MANUAL DE DIDACTICA GENERAL
ANUIES

20.- WHAT MAKES A GOOD BOOK?
Scottish Curriculum Development Service

21.- HOW TO...EVALUATE MATHEMATICS TEXTBOOKS
National Council of Teachers of Mathematics