

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS



ALISAMIENTO DE DATOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

IRENE SANCHEZ GUEVARA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Capítulo I. Introducción a Graduación.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Descripción de Métodos de Graduación.	6
1.2.1 Método de Interpolación.	7
1.2.2. Promedios Móviles.	11
1.2.3. Método de Whittaker.	12
Capítulo II. Graduación vía Interpolación Polinomial.	14
2.1 Introducción.	14
2.2. Agrupamiento de Datos	14
2.3. Elección de Pivotes.	17
2.4. Interpolación Polinomial. Parte I	
Caso Global	20
2.4.1. Interpolación Polinomial.	
Generalidades	20
2.4.2. Interpolación Canónica y de Lagrange; Consideraciones Numéricas	22
2.4.3. Polinomio de Interpolación en la Forma de Newton.	30

2.4.4. Diferencias Divididas	33
2.4.5. Fórmulas de Gauss y Everett	36
2.4.6. Sensibilidad del Método de Interpolación de Newton - Gauss	38
2.5. Interpolación Polinomial. Parte 2, por Pedazos	41
2.5.1 Interpolación de Hermite	41
2.5.2 Polinomios Osculatorios	44
2.5.3 Polinomios Osculatorios Modificados	51
Capítulo III Métodos de Promedios Móviles para Graduación	64
3.1 Introducción	64
3.2 Promedios Móviles vía Cuadrados Mínimos	65
3.3 Promedios Móviles según el enfoque de Miller	77
Capítulo IV Método de Whittaker para Graduación.	84
4.1 Introducción	84
4.2 Formulación del Método	85
4.3 Justificación Bayesiana del Método	90
4.4 Propiedades del Método (teorema de conservación de los momentos).	94

4.5	Obtención de la tabla Graduada (según un algoritmo de Whittaker)	102
4.6	Enfoque Matricial del método	107
<u>Capítulo V</u> Alisamiento vía Spline		115
5.1	Introducción.	115
5.2	Funciones Spline.	119
5.2.1	Cálculo de la Función Spline Natural Cúbica.	126
5.2.2	Caracterización Variacional de las Funciones Spline Naturales	132
5.3	Graduación vía Spline Natural Cúbica	136
5.4	Cálculo de la Función Spline Natural Cúbica para Graduar	151
5.5	Cálculo del Parámetro de Alisamiento	159
Apéndice A,		170
Apéndice B.		172
Bibliografía		176

Capítulo I

Introducción a Graduación.

1.1 Introducción.

En nuestra civilización moderna se materializan una variedad de fenómenos de contenido humano, cuya complejidad exige profundos estudios de diversas profesiones. La mortalidad, las enfermedades, las inhabilitaciones, los retiros, etc., por su contingencia de ocurrir, constituyen la materia prima del Trabajo del Actuario, a quien le interesa conocer las probabilidades de ocurrencia de dichos fenómenos, para fundamentar las decisiones en el campo de los Seguros, la Demografía, la Economía y otros renglones.

Uno de los primeros pasos para estudiar el comportamiento de algún fenómeno de ocurrencia contingente - en cualquier campo de la investigación que se tenga en observación - consiste en la recopilación de datos observados, formándose una

Tabla empírica, en base a la siguiente formulación.

$$U'' : u_i'' \quad i = 1, 2, \dots, m$$

donde las u_i'' podrían ser las precipitaciones pluviales, las temperaturas, las heladas, etc., de un determinado lugar y observadas por un determinado período (semanal, mensual, etc.).

Otro ejemplo de ocurrencia contingente, de mayor complejidad nos lo dan la formulación de las tasas de mortalidad, cuya expresión genérica es la siguiente:

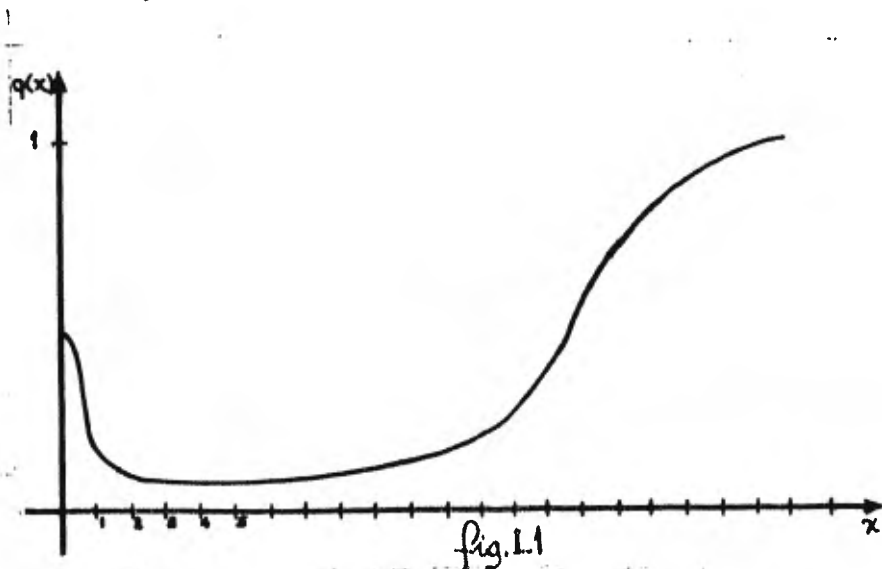
$$u_i'' = q_i'' = \frac{d_i''}{l_i} \quad i = 0, \dots, w$$

dicha formulación se integra específicamente después de observar durante un año, una determinada población de personas clasificadas por edades, donde l_i es el número de personas sujetas a observación, de edad i y d_i'' es el número de personas que mueren en el año $[i, i+1]$.

Evidentemente, por puro sentido común, no esperamos que las medidas u_i'' representen las precipitaciones ni las temperaturas ni las ta-

tasas de mortalidad "reales"; puesto que éstas son sólo unas primeras medidas de la ocurrencia de tales eventos.

En el caso de las tasas de mortalidad esperadas, por razones heurísticas, que dichas tasas presenten una tendencia como la que se ilustra en la figura que sigue:



Pero debido a varios factores, unos controlables como el sexo, Trabajo, nacionalidad, etc., y otros contingentes o impredecibles como temblores, derrumbes, epidemias, accidentes^(*), etc., las tasas observadas q_i presentan ti-

* estrictamente no ocupacionales

picamente un comportamiento como el que se muestra enseguida:

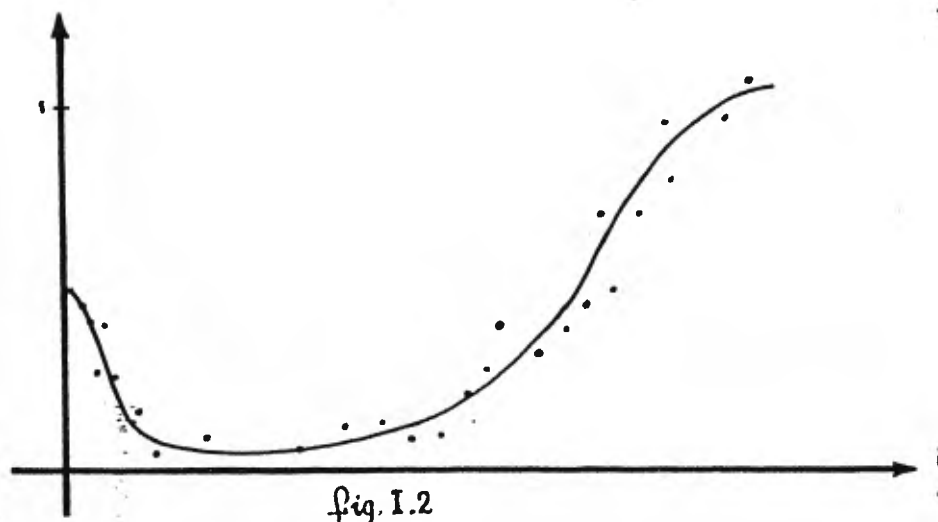


fig. 1.2

Resulta ilógico, el tratar de calcular las primas de seguros, jubilaciones, etc., a partir de la tabla U'' , pues debido a las oscilaciones que ésta presenta, resultaría que una persona con mayor probabilidad de muerte anual pagaría menor prima que otra, lo que choca con el sentido común. Así, el Actuario se enfrenta al problema de construir una nueva tabla U a partir de la tabla U'' con las siguientes deseables propiedades: 1a) Que los nuevos valores u_i presenten un comportamiento con variaciones suaves.

2a) Que los nuevos valores u_i sean "consistentes" con la Tabla U'' , esto es: que resulten más o menos fieles a las características "esenciales" de la tabla U'' .

Los procedimientos matemáticos que permiten abordar este problema son conocidos en la literatura actuarial como métodos de graduación; mientras que en la literatura matemática, se les conoce como métodos de alineamiento o suavizamiento de datos.

El presente trabajo está dirigido a la descripción de ciertos aspectos matemáticos de los métodos de graduación.

Finalmente cabe hacer notar que la graduación es una herramienta matemática que puede ser utilizada en cualquier disciplina donde se hagan mediciones y se tengan que elaborar tablas para el estudio de algún fenómeno en particular, como sería el caso (por citar algunos) en la Medicina, Psicología, Biología, Economía y Historia.

1.2 Descripción de Métodos de Graduación.

Un procedimiento moderno de graduación o alisamiento, que ha sido desarrollado en las dos últimas décadas mediante la minimización de la funcional:

$$(1.1) \quad \Phi_{\lambda}(s(\cdot)) = \sum \left(\frac{u_i'' - s(x_i)}{w_i} \right)^2 + \lambda \int_a^b [s''(x)]^2 dx.$$

propuesta por Schoenberg, dándonos funciones Spline en lugar de una tabla, facilitándose con esto el trabajo de interpolación, diferenciación o integración.

Por una función Spline cúbica en $[a, b]$ se entiende una función $s(x)$ de clase C^2 en $[a, b]$ que es un polinomio cúbico por pedazos.

Este procedimiento se describirá con detalle en el último capítulo, debido a que resulta conveniente ver antes los siguientes métodos de graduación:

- 1) Interpolación.
- 2) Promedios Móviles.
- 3) Método de Whittaker.

puesto que en cierta manera son los "antecedentes históricos" que permiten entender mejor el surgimiento del procedimiento para graduación de Whittaker - Shoenberg en sus versiones contemporáneas.

1.2.1. Método de Interpolación.

En el capítulo II se revisará el método de interpolación, el cual está constituido por tres etapas:

- 1) Agrupamiento de datos.
- 2) Elección de pivotes, que son datos elegidas de tal manera que serán representativas de cada grupo.
- 3) Interpolación polinomial.

Esta última etapa contiene un interés relevante para nosotros, y en un principio consiste en hallar polinomios por intervalos, - los cuales fueron determinados en la primera etapa -, usando como puntos de interpolación a los pivotes.

Uno de los inconvenientes de este proceso es ilustrado en la fig I.3,

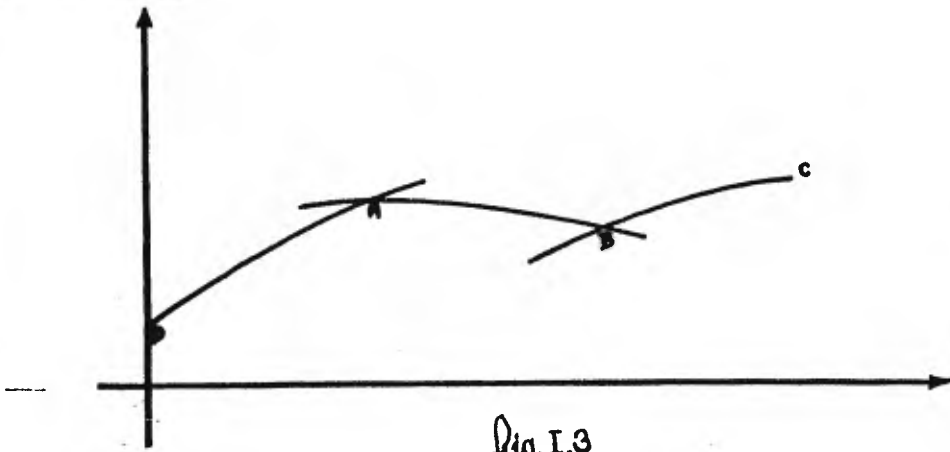


fig. I.3

Donde claramente se observan discontinuidades en los pivotes A y B. Esto se supera pidiendo igualdad en las derivadas en A y B, con lo que se generan los polinomios de interpolación osculatoria, — siendo estos polinomios en cierta medida un “antecedente histórico” de las funciones Spline para interpolar —, y los cuales presentan un comportamiento como el ilustrado en la figura I.4; sin embargo, estos polinomios siguen presentando oscilaciones no deseables como se ilustra en la misma figura I.4.

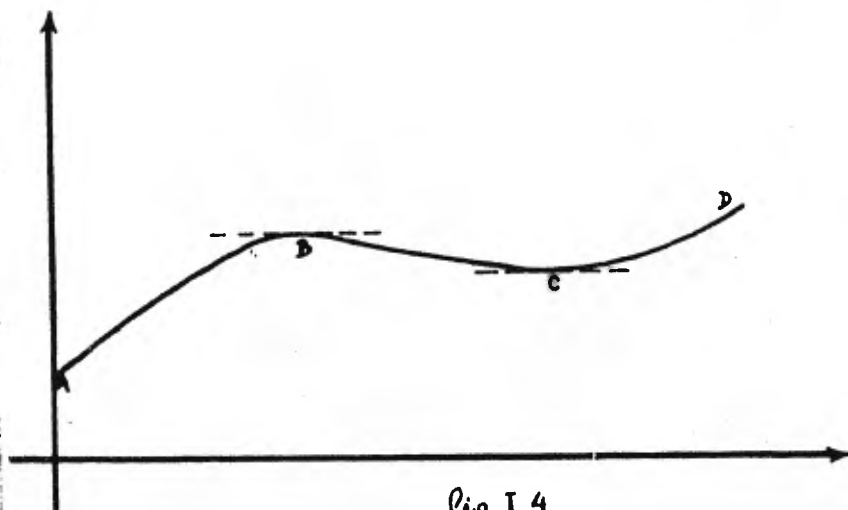


Fig. I.4

Este problema nos lleva a pedir que se tenga igualdad en una o más derivadas en los pivotes de los polinomios osculatorios, pero sin exigir que dichos polinomios pasen por los puntos pivotes. Los polinomios así obtenidos se conocen como polinomios osculatorios modificados, los cuales no son polinomios de interpolación propiamente hablando, siendo más bien polinomios de graduación como puede verse en la figura I.5

Las funciones obtenidas por este proceso son funciones polinomiales por intervalos de clase e' en todo el domi-

mo, resultando ser antecedentes en cierto sentido a las funciones Spline para graduación.

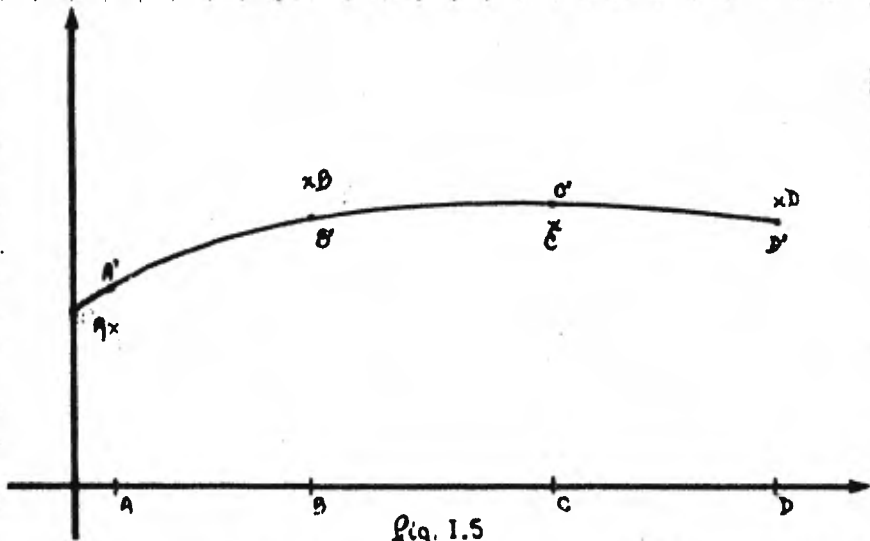


Fig. 1.5

1.2.2. Promedios Móviles

En el capítulo III se revisará otro de los métodos antecedentes, el de promedios móviles o pesados, que consiste en elaborar una nueva tabla U graduada, a partir de la tabla empírica U'' , obteniéndose cada valor u_i graduado o suavizado como un promedio pesado de su correspondiente valor empírico u_i'' y sus $2n$ vecinos alrededor; a partir de una expresión de la forma:

$$u_i = w_n u_{i+n}'' + w_{n-1} u_{i+n-1}'' + \dots + w_0 u_i'' + \dots + w_{n-1} u_{i-n}''$$

En donde los coeficientes w_i 's se pueden calcular de la siguiente manera:

1) Minimizando la suma de los cuadrados de los errores.:

$$\min_{\{w_i\}} \sum (u_i'' - u_i)^2$$

bajo el supuesto que las u_i 's siguen una tendencia polinomial de grado impar (fijo). Nótese que la expresión anterior corresponde a la primera parte de la funcional (1.1).

2) Minimizando la razón del error cuadrático medio de la tercera diferencia de u_i a

al error cuadrático medio de la tercera diferencia de u_i'' , i.e.:

$$\text{Min}_{w_i} \frac{E(|\Delta^3 u_i|)^2)}{E(|\Delta^3 u_i''|)^2)} (= \text{Min}_{w_i} \frac{E[|\Delta^3 u_i|^2]}{20})$$

Uno de los principales inconvenientes de los métodos del capítulo II y capítulo III, consiste en que no es aplicable en los primeros y últimos n datos de la Tabla.

1.2.3. Método de Whittaker.

El capítulo IV será dedicado a la descripción del método de Whittaker para graduación, que es uno de los primeros métodos dirigidos a superar las dificultades de los métodos anteriores, ya que con este procedimiento se calcula toda la Tabla de una vez, y no elemento por elemento, mediante la minimización de la siguiente funcional:

$$\phi(U) = \|U - U''\|^2 + \lambda \|\Delta^3 U\|^2$$

donde:

$$\|U - U''\|^2 \text{ y } \|\Delta^3 U\|^2$$

son los elementos que dan lugar a los criterios para construir los procedimientos de los promedios pesados y que en la funcional $\phi(U)$ aparecen combinados; λ es un parámetro que hace un balance entre dichas cantidades que miden el ajuste y suavizamiento respectivamente. Dicho parámetro se determina usualmente por ensayo.

Finalmente en el capítulo V se describe el método de Schoenberg que mediante la minimización de la funcional:

$$\phi(s(\cdot)) = \sum \left(\frac{u_i'' - s(x_i)}{\omega_i} \right)^2 + \lambda \int_a^b s''(x)^2 dx$$

Construye una función spline cúbica, siendo en particular la tabla graduada $U = (u_i)$, dada por $u_i = s(x_i)$

En este mismo capítulo se ve un criterio de discrepancia propuesto por Reinsch para determinar de manera automática el parámetro λ . También Wahba y otros han propuesto el principio de "validación cruzada" para determinar λ automáticamente. En algunas aplicaciones el segundo parece ser mejor.

Capítulo II.

Graduación vía Interpolación Polinomial.

2.1 Introducción.

En este capítulo veremos uno de los métodos más conocidos y estudiados para ser usados en la graduación de datos, el de interpolación polinomial, el cual consta de tres etapas:

- 1) Agrupamiento de datos
- 2) Elección de pivotes
- 3) Interpolación

2.2 Agrupamiento de datos.

El primer paso en este método para graduación es el de agrupar datos de medida y número adecuado; aquí, el agrupamiento es ya una función graduadora pues la combinación de los datos en cada

grupo permite que los errores e irregularidades sean compensados dentro de cada grupo, obteniéndose una nueva serie de valores agrupados, que presenta variaciones más regulares que la serie de valores observados, y por supuesto consistente con ellos; además cada grupo tendrá más peso que cualquier valor individual y la tendencia fundamental de la variación se podrá de limitar más rápidamente.

El número y medidas "adecuadas" es un problema hasta ahora no resuelto del todo, y la decisión de estos parámetros se hace generalmente de manera empírica basándose en la experiencia y conocimiento del fenómeno a tratar. Así con respecto a la construcción de tablas de mortalidad, el número de edades en cada grupo puede ser igual o variar, pero el número de grupos no debe ser tan grande que exhiba fluctuaciones extremas (fig a), ni tan pequeño que elimine alguna información relevante (fig b); sino un número de grupos que permita observar fluctuaciones

relevantes y al mismo tiempo "filtrar" otras.
(fig c).

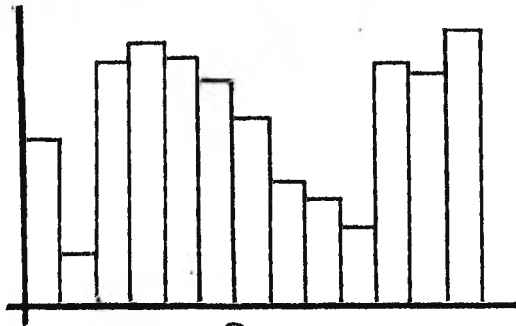


fig. a

demasiados grupos, demasiadas
variaciones.

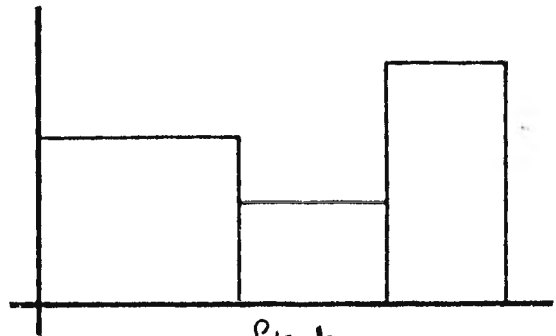


fig. b

pocos grupos, se pierde
información

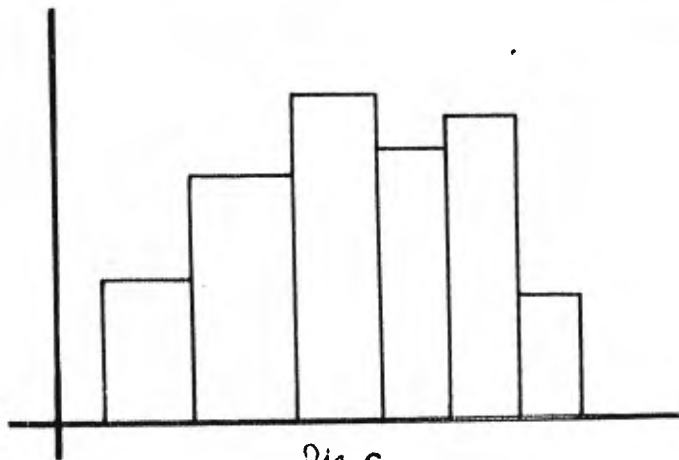


fig. c

número "adecuado" de grupos.

2.3 Elección de los pivotes.

El segundo paso para la aplicación de este método es el cálculo de los puntos especiales de interpolación llamados pivotes, que servirán de base para efectuar la interpolación, razón por la cual es muy importante para el éxito del presente método, que los puntos sean representativos de sus respectivos grupos y además que formen una serie relativamente lisa.

El método más simple para obtener estos puntos es escoger el punto central de cada grupo.

Otro método es el de las fórmulas de King, que dan una forma de calcular los valores pivotes u_i , a partir, por ejemplo, de la siguiente fórmula (ver Miller [11]).

$$u_i = .2 w_i - .008 (w_{i-5} - 2w_i + w_{i+5})$$

donde:

$$w_i = u_{i-2} + u_{i-1} + u_i + u_{i+1} + u_{i+2}$$

Esta fórmula está basada en las 3 sumas quinquenales, w_{i-5}, w_i, w_{i+5} , que es correcta hasta la tercera diferencia, es decir que si los datos provienen de una función cúbica, los reproducirá, y si no los corregirá de tal modo que si se calculan las terceras diferencias, se obtienen constantes*

Este método sólo dará pivotes satisfactorios cuando los datos estén agrupados y formen una serie relativamente lisa, con lo cual se concluye que el problema de la elección de los pivotes no está todavía resuelto satisfactoriamente.

En la práctica, y en particular en el problema de construcción de Tablas, los grupos generalmente son de 5 años y los pivotes son los datos centrales o los obtenidos con la fórmula de King.

Esquemáticamente, al proceso que se ha

* En el capítulo III Sección 2, se explica más ampliamente este resultado.

descrito es el que sigue:

grupos	edad por grupos	Tasa mortalidad empirica	Valores pivota-les	reenumeración de valores pivota-les
I	0	u_0''	u_2'	u_1'
	1	u_1''		
	2	u_2''		
	3	u_3''		
	4	u_4''		
II	5	u_5''	u_7'	u_2'
	6	u_6''		
	7	u_7''		
	8	u_8''		
	9	u_9''		
III	10	u_{10}''	u_{12}'	u_3'
	11	u_{11}''		
	12	u_{12}''		
	13	u_{13}''		
	14	u_{14}''		
	⋮			
	1			

Los valores de la última columna, es decir los valores pivota-les, son los que entrarán al proceso de interpolación propiamente dicho.

2.4. Interpolación Polinomial . Parte 1.

Caso Global.

Cuando ya se han agrupado los datos, y elegido los pivotes, se procede a ejecutar sobre ellos la interpolación propiamente dicha.

A este punto nos dedicaremos lo que reste de este capítulo, dando primero un leve bosquejo de la Teoría de interpolación polinomial. Cabe aclarar que esta Parte 1. no corresponde a los métodos de graduación interpolatoria propiamente dichos, pero es importante revisar ciertos conceptos Teóricos para entenderlos mejor.

2.4.1 Interpolación Polinomial

Generalidades

El problema de interpolación polinomial consiste en determinar un polinomio $P(x)$ de grado no mayor que n , que pase por $n+1$ puntos dados en el plano:

$$(2.4.1) \quad (x_i, y_i) \quad i=0, \dots, n; \quad (x_i \neq x_j; i \neq j)$$

Existen diferentes alternativas para determi-

nar dicho polinomio, las cuales dependen mucho de la expresión en la que se quiera hallar al polinomio. Para precisar se hacen las siguientes observaciones:

Como se sabe, el conjunto de todos los polinomios de grado no mayor que n , P_n forman un espacio vectorial de dimensión $n+1$.

Sea $\beta = \{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\} \subset P_n$ una base de P_n ; entonces cualquier elemento $P(x)$ en P_n se puede escribir (de manera única) como:

$$P(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \dots + c_n P_n(x) \quad (2.4.2)$$

Expresión que toma la forma:

$$P(x) = c_0 1 + c_1 x + \dots + c_n x^n \quad (2.4.3)$$

con respecto a la base canónica, mientras que con respecto a la base de Lagrange (véase H. Madrid [9]),

$$\beta_L = \left\{ l_i(x) = \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x-x_j) \right) / \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i-x_j) \right) \right\}; \quad i=0, 1, \dots, n$$

Toma la forma

$$(2.4.4) \quad p(x) = \sum_{i=0}^n c_i l_i(x), \text{ con } c_i = p(x_i)^{(*)}$$

Se dice que $p(x)$ en P_n está expresado en la forma de Newton, si $p(x)$ está dado como:

$$(2.4.5) \quad p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ + A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

ya que la base de Newton es:

$$\beta_n = \left\{ 1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \dots, \prod_{j=0}^{n-1} (x-x_j) \right\}$$

2.4.2. Interpolación Canónica y de Lagrange. Consideraciones numéricas.

Hallar el polinomio $p(x)$ que pasa por los puntos dados en (2.4.1), por el método directo, (2.4.3), no es recomendable, ya que implica resolver el sistema:

$$(2.4.6) \quad A\bar{c} = \bar{u}'$$

(*) ya que $l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

en donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \bar{u}' = \begin{bmatrix} u_0' \\ u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix}$$

que resulta de satisfacer las condiciones de interpolación.

$$p(x_i) = u_i' \quad i=0, 1, \dots, n$$

Este método tiene varios inconvenientes, uno de ellos es el siguiente: En el sistema (2.4.6) las x_i 's ($i=0, \dots, n$) representan las edades pivotes correspondientes a los valores pivotes u_i' , que generalmente están espaciados por cada 5 años. Así, si (como generalmente se supone) $w=100$ entonces $n=20$ y el sistema es de 21 ecuaciones con 21 incógnitas, el que si bien hoy es fácil resolverlo gracias a la computadora digital, resultaba imposible hasta los años cuarenta, lo cual explica, en parte

por qué fue evadido

Otro inconveniente corresponde al hecho de que la matriz $A^{(*)}$ resulta ser generalmente muy sensible al redondeo; esto significa que a pesar de que se usara un "buen método" (numéricamente estable) para resolver el sistema, no debemos esperar resultados de buena calidad.

Se dice que un método directo para resolver sistemas de ecuaciones lineales algebraicas, $A\bar{c} = \bar{u}$ es "numéricamente estable" cuando la solución calculada es la solución de un sistema "vecino" $(A+E)\bar{z} = \bar{u}'$, donde por "vecino" deberá entenderse que $\frac{\|E\|}{\|A\|}$ sea del orden de la precisión de la máquina.

Por último, el siguiente inconveniente se deriva del hecho de que el lado derecho es un vector aleatorio y contingente, donde cada componente es de la forma:

$$u_i'' = u_i \pm \delta u_i$$

siendo δu_i la perturbación correspondiente

(*) conocida como matriz de Vandermonde.

a errores de observación o a variaciones debidas a factores contingentes. Ahora bien, si denotamos por c_e y c_p a las soluciones exactas de los sistemas $A\bar{x} = \bar{u}$ y $A\bar{x} = \bar{u}'$ respectivamente, y por $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, entonces aplicando el teorema 4.1 en Stewart G. W [21] tenemos que:

$$\frac{\|c_e - c_p\|}{\|c_e\|} \leq K(A) \frac{\|\delta u\|}{\|u\|},$$

donde $\delta u = (\delta u_i)$, y $u' = u + \delta u$; lo que nos dice que el error relativo en nuestras observaciones $\left(\frac{\|\delta u\|}{\|u\|}\right)$ se puede ver amplificado por el factor $K(A)$, el cual en nuestro caso particular bajo análisis, es típicamente "mucho mayor" que la unidad. Específicamente, para este caso en discusión, se tiene que $K(A) \gg K^k$ con respecto a la norma l_∞ .

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es mal condicionado, cuando su número de condición $K(A)$ es "mucho mayor" que la unidad como ocurre en

este caso. Por "mucho mayor" se entenderá que $K(A) \beta^{-t} \gg 1$, si se trabaja con una computadora de base β . y con t -dígitos.

Los dos primeros inconvenientes son superados cuando se determina el polinomio de interpolación con respecto a la base de Lagrange:

$$\mathcal{B}_0 = \{ l_i(x) = \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right) / \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \right) \mid i=0, 1, \dots, n \}.$$

pues en términos de ésta, la solución viene dada por:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n e_i l_i(x) \quad \text{con } e_i = p(x_i)$$

tomando $p(x_i) = u_i'$

lo que evita resolver el sistema de ecuaciones (2.4.6.).

Este método sin embargo también tiene sus inconvenientes, uno de ellos es con respecto a su análisis de sensibilidad. Para hacer ver esto,

$$\text{Sea } P_n(x) = \sum_{l=0}^n u_l' l_l(x).$$

el polinomio lagrangeano de interpolación, si supo

nemos ciertas perturbaciones δu_i , $i=0, \dots, n$; lo que evidentemente se obtiene es un polinomio perturbado.

$$Q_n(x) = \sum_n u_i' l_i(x) + \sum_n \delta u_i' l_i(x)$$

por tanto

$$\sum \delta u_i' l_i(x)$$

es la perturbación $\delta P_n(x)$ de $P_n(x)$.

Suponiendo que sólo una ordenada ha sido perturbada, deseamos conocer el:

$$\max_x |\delta u_i' l_i(x)| \quad x \in [x_0, x_n]$$

Para ello, el siguiente lema nos es útil:

Lema: $\|l_i(x)\|_\infty \leq \binom{n}{i}$ para x en el intervalo de interpolación. Su demostración es directa (ver Prenter [15]).

De este lema se sigue que el polinomio básico de Lagrange $l_i(x)$ está acotado superiormente por $\binom{n}{i}$, el cual alcanza su máximo cuando $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *, siendo éste del orden $(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} 2^n$, lo cual es el qro que crece exponencialmente. (véase Apéndice A).

* $\lfloor a \rfloor$ denota la función mayor entero de a .

Esto nos dice que cuando n es grande, y hay perturbaciones en datos centrales, el polinomio de interpolación de Lagrange es muy sensible a éstas y podrían observarse errores muy grandes.

Para el caso de tablas de mortalidad es evidente que cada ordenada (u_i) está perturbada, y además si $n \approx 20$, está precisamente en la situación de peligro que ha sido descrita. Más aún, si $|\delta u_i| \leq \delta$ entonces por el lema anterior,

$$\begin{aligned} |\delta p(x)| &\stackrel{\Delta}{=} \left| \sum_i \delta u_i l_i(x) \right| \\ &\leq \sum_i |\delta u_i| |l_i(x)| \\ &\leq \sum_i \delta \binom{n}{i} = 2^n \delta, \end{aligned}$$

por tanto

$$\max_x |\delta p(x)| \leq 2^n \delta.$$

Lo cual nos dice, que bien podemos observar en nuestro polinomio de interpolación de Lagrange errores del orden $2^n \delta$, que tienen un crecimiento exponencial con respecto a n . A manera de

ilustración, éste podría ser del orden 10^3 cuando $n=21$ y $\delta=10^{-8}$.

La moraleja es que si se va a usar este método, es recomendable tomar grupos de pivotes y construir polinomios de grado "chico" con el objeto de evitar este inconveniente.

Los otros "peros" a este procedimiento son inherentes a su construcción, ya que por un lado hay que repetir todos los cálculos cuando se agrega un punto más a los datos, y por el otro el alto costo en cuanto al número de flops^(*) requeridos.

En contraposición, el método de Newton es más económico en cuanto a su cálculo, ya que toma en cuenta precisamente a los puntos que se van añadiendo a los anteriores para su construcción, como se verá en la siguiente sección.

(*) flop = es el trabajo requerido para llevar a cabo una suma, un producto y una asignación ($x \leftarrow a * x + b$),

véase, Golub G.H. & Van Loan C. Applied Matrix Computations, por aparecer

2.4.3. Polinomio de Interpolación en la Forma de Newton.

El problema de determinar el polinomio de interpolación de Newton de grado menor o igual a n , $P_n(x)$ que interpole a los $n+1$ puntos (x_i, u_i) $i=0, 1, \dots, n$, dados, significa hallar los coeficientes de la expresión:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + A_n \prod_{i=0}^{n-1} (x-x_i)$$

Dicho polinomio existe y es único. En efecto, es único dado que es un elemento del espacio vectorial de dimensión $n+1$, cuya representación está dada por una de sus bases.

Su existencia es fácil de ver a partir del sistema

$$(2.4.4) \quad B\bar{a} = \bar{u}$$

generado por las condiciones de interpolación, donde:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_n - x_0) & \prod_{i=0}^1 (x_n - x_i) & \prod_{i=0}^2 (x_n - x_i) & \dots & \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}; \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

ya que

$$\text{Det}(B) = \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=0}^{i-1} (x_j - x_i) \right\} \neq 0 \text{ si } x_i \neq x_j \forall i \neq j.$$

Con esto se demuestra su existencia.

Dado que $P_n(x)$ existe y es único, se pueden calcular los coeficientes A_i 's, y una manera de hacerlo es resolviendo el sistema (2.4.7), sin embargo dicho sistema podría

presentar inestabilidad numérica, pues es directo ver que la matriz B corresponde a la parte triangular inferior de una de Vandermonde, de las cuales hemos ya dicho que son generalmente de mal-comportamiento. Por ello en la subsección siguiente se presentará una alternativa para calcular los R_i 's sin tener que resolver el sistema (2.4.7).

2.4.4. Diferencias Divididas.

Una de las propiedades fundamentales en la construcción del polinomio de interpolación vía el método de Newton, es que descansa en el hecho de utilizar la información del polinomio de grado $n-1$ para hallar el polinomio de grado n .

Supongamos que conocemos al polinomio $P_{k-1}(x)$ de interpolación de:

$$\{ (x_i, u_i) \mid i = 0, \dots, k-1 \}$$

Si $P_k(x)$ es el polinomio que pasa por los puntos

$$\{ (x_i, u_i) \mid i = 0, \dots, k \}$$

entonces definiendo al polinomio $h(x)$ como

$$h(x) = P_k(x) - P_{k-1}(x)$$

se sigue que

$$h(x_0) = h(x_1) = \dots = h(x_{k-1}) = 0$$

y por tanto $h(x)$ es de la forma

$$h(x) = A_k (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})$$

donde

$$A_k = \frac{P_k(x_k) - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)}$$

Al ~~coeficiente~~ coeficiente A_k se le acostumbra llamar la k -ésima diferencia dividida de f en (x_0, \dots, x_{k-1}) y se le denota como

$$A_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

Ahora conviniendo en que:

$$A_0 = f[x_0] = f(x_0) = u_0,$$

el polinomio de interpolación de Newton toma la forma:

$$P_k(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x-x_j).$$

La siguiente fórmula (véase Conite y De Boor [2]) para el cómputo de las diferencias divididas, juega un papel central desde el punto de vista práctico

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

El método del cálculo de éstas es mediante la elaboración de la llamada "tabla de diferencias divididas"

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & f[x] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & \dots & f[x_0, \dots, x_n] \\
 x_0 & f[x_0] & & & & & \\
 x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & & & \\
 x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 & & & & & & f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\
 x_{n-1} & f[x_{n-1}] & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & & & & \\
 x_n & f[x_n] & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & &
 \end{array}$$

de donde el polinomio de Newton podría ser el que sigue la trayectoria dibujada, quedando:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\
 & + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}).
 \end{aligned}$$

2.4.5 Fórmulas de Gauss y Everett.

Con frecuencia, se suele escribir al polinomio de interpolación de Newton de diferentes maneras, basadas en el hecho de que para el cálculo de dicho polinomio no importa el orden en que se van tomando los puntos (x_i, u_i) .

Para el caso en que las abscisas son igualmente espaciadas, se tiene la popular forma debida a Gauss, y por ello conocida como fórmula de interpolación de Gauss:

$$(2.4.8) \quad P(x) = u_0 + s \Delta u_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 u_0 + \dots \\ + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!} \Delta^n u_0.$$

su deducción se puede ver en Whittaker + Robinson [17].

En las aplicaciones de la interpolación a la Matemática Actuarial, una reformulación de la fórmula de Gauss, debida a Everett, es usada muy frecuentemente y su deducción se halla también en Whittaker + Robinson

[17]. De acuerdo a esto se tiene

$$p(x) = s u_{x+1} + \binom{s+1}{3} \delta^2 u_{x+1} + \binom{s+2}{5} \delta^4 u_{x+1} + \dots$$

$$+ (1-s) u_x - \binom{s}{3} \delta^2 u_x - \binom{s+1}{5} \delta^4 u_x + \dots$$

donde δ es la notación para diferencias centradas.

2.4.6 Sensibilidad del método de Interpolación de Newton - Gauss.

Este método es útil, fácil y práctico, pero también tiene un inconveniente: el de la propagación de los errores inherentes a los datos en una tabla de diferencias. Con el objeto de mostrarlo se exhiben dos tablas de diferencias que contienen errores:

Tabla I

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
1				
2				
3				ϵ
\vdots			ϵ	-3ϵ
\vdots		ϵ	2ϵ	3ϵ
$\frac{n}{2}$	ϵ	ϵ	ϵ	-3ϵ
2				
\vdots				
\vdots				ϵ
n				

En esta tabla se observa cómo un solo error ϵ se va aumentando en la medida que se van obteniendo diferencias de orden mayor

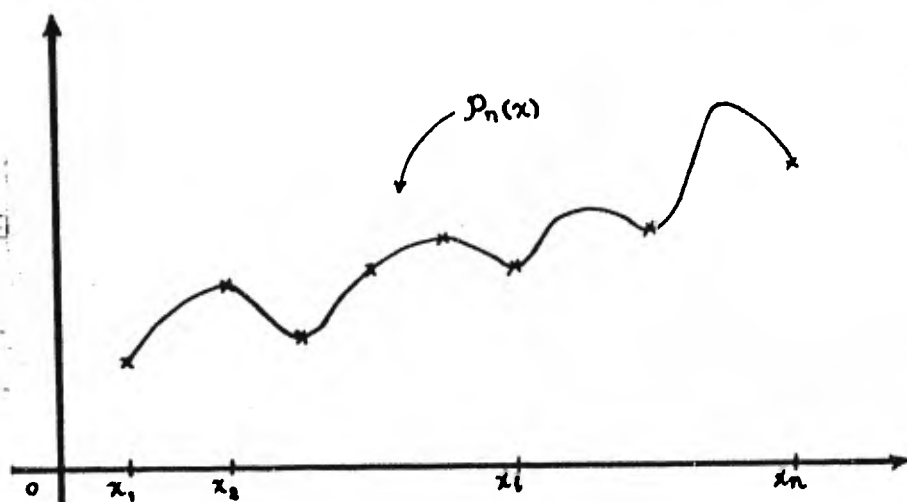
Tabla II

u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
ϵ		-4ϵ		16ϵ
$- \epsilon$	-2ϵ	4ϵ	8ϵ	-16ϵ
ϵ	2ϵ	-4ϵ	-8ϵ	16ϵ
$- \epsilon$	-2ϵ	4ϵ	8ϵ	-16ϵ
ϵ	2ϵ	-4ϵ	-8ϵ	16ϵ
$- \epsilon$	-2ϵ	4ϵ	8ϵ	-16ϵ

En este caso el error aumenta $\pm 2^k \epsilon$ para la k -ésima diferencia, siendo este caso en el que generalmente se aplica al problema de la elaboración por graduación de tablas de mortalidad vía interpolación.

Así pues, no son recomendables los métodos del tipo Gauss-Newton para interpolación polinomial de grado "alto".

Finalmente, usando cualquiera de los tres métodos vistos de manera global, la gráfica del Polinomio de grado n , que interpola a $n+1$ datos podría verse como sigue:

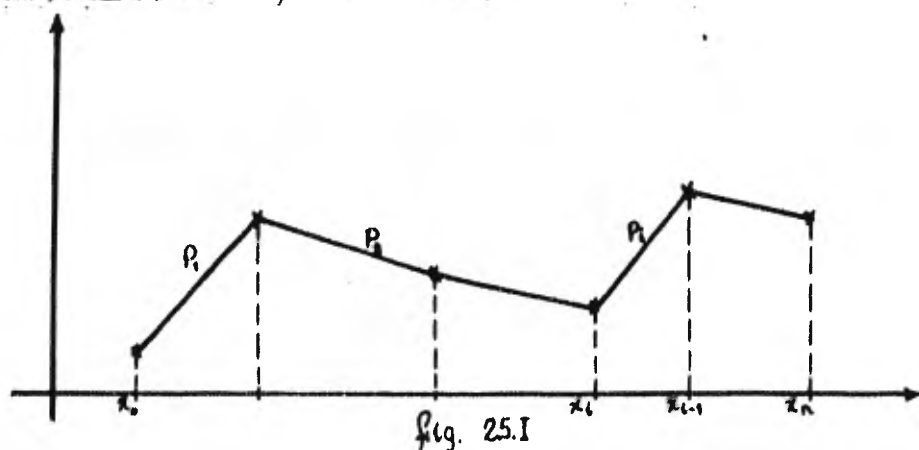


donde se ven claramente oscilaciones indeseables, por lo que de nuevo se vuelve a concluir que no es recomendable seguir por este camino. Así pues una alternativa será usar polinomios de grado "chico" por cada intervalo.

2.5 Interpolación Polinomial. Parte 2, por Pedazos.

2.5.1 Interpolación de Hermite

Como alternativa de solución a los problemas que se presentan en interpolación polinomial global, es hacer pasar por cada dos pivotes un polinomio de grado "chico". En la figura que sigue se ilustra el caso polinomial lineal por pedazos



Los polinomios $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ son muy fáciles de calcular ya que

$$P_i(x) = u_i + t \Delta u_i \quad \text{donde} \quad t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\text{y} \quad \begin{cases} P_i(x_i) = u_i \\ P_i(x_{i+1}) = u_{i+1} \end{cases}$$

pero resulta que precisamente en los pivotes que son los puntos de unión se muestran picos poco deseables.

La manera de evitar tales picos es pidiendo que sus derivadas se igualen, si estamos en el caso de conocer información de las mismas. Tendremos así las siguientes condiciones de interpolación:

$$\begin{array}{ll} P_i(x_i) = u_i & P_i'(x_i) = u_i' \\ \text{y} & \\ P_i(x_{i+1}) = u_{i+1} & P_i'(x_{i+1}) = u_{i+1}' \end{array}$$

Un polinomio que satisfaga estas 4 condiciones y que sea de menor grado será uno y sólo un polinomio de grado 3

$$P_i(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

A este polinomio se le conoce como de interpolación cúbica de Hermite, el cual también se puede escribir como.

$$P(t) = P(x_i) \phi_i(t) + P(x_{i+1}) \phi_{i+1}(t) \\ + P'(x_i) \psi_i(t) + P'(x_{i+1}) \psi_{i+1}(t)$$

donde:

$$\phi_i(t) = \frac{(t-x_{i+1})^2 [(\lambda_i - x_{i+1}) + 2(x_i - t)]}{(\lambda_i - x_{i+1})^3}$$

$$\phi_{i+1}(t) = \frac{(t-x_i)^2 [(\lambda_{i+1} - x_i) + 2(x_{i+1} - t)]}{(\lambda_i - x_{i+1})^3}$$

$$\psi_i(t) = \frac{(t-x_i)(t-x_{i+1})^2}{(\lambda_i - x_{i+1})^2}$$

$$\psi_{i+1}(t) = \frac{(t-x_i)^2(t-x_{i+1})}{(\lambda_i - x_{i+1})^2}$$

y si $\tau_1 = x_i$ y $\tau_2 = x_{i+1}$

$$\text{entonces } \begin{cases} \phi_i(\tau_j) = \delta_{ij} \\ \phi_i'(\tau_j) = 0 & 1 \leq i, j \leq 2 \\ \psi_i(\tau_j) = 0 \\ \psi_i'(\tau_j) = \delta_{ij} & 1 \leq i, j \leq 2. \end{cases}$$

Con dicha expresión es muy fácil probar su existencia (ver Prenter [15]).

Este polinomio cúbico por pedazos, es muy útil cuando se conoce al menos la primera derivada, pero para nuestro problema de construcción de tablas, sólo utilizamos la idea.

2.5.2 Polinomios Oseuladores.

De la idea de los polinomios cúbicos de Hermite por pedazos se pueden generar los polinomios oseuladores, que fueron introducidos por el Dr. T. B. Sprague, y los cuales se obtienen de igualar las pendientes en el punto pivote, es decir, donde se unen los arcos de interpolación, dando un polinomio de interpolación más liso y consecuentemente una serie más lisa, como se muestra en la figura: 2.5.II

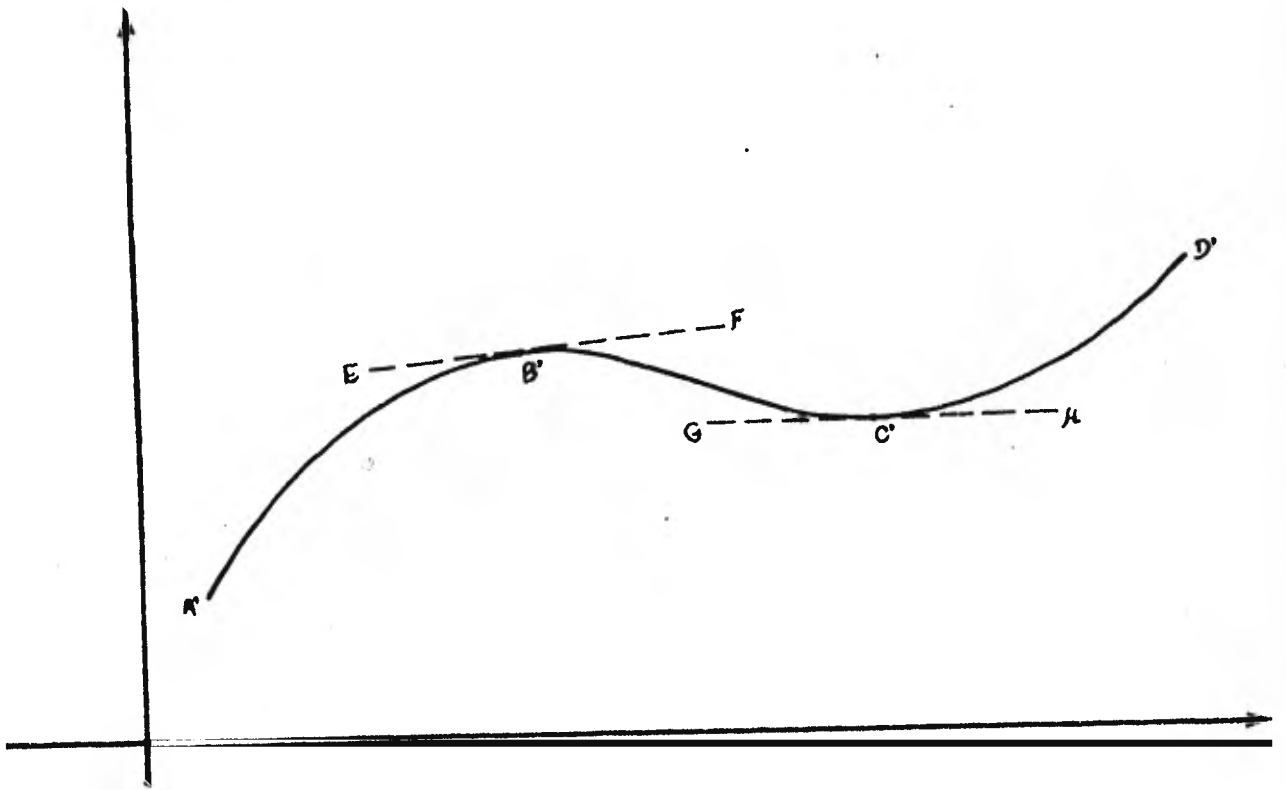


Fig. 2.5.II
Segmentos interpoladores AB, BC, CD
Tangentes comunes EF y GH

Existen varias fórmulas para calcular este polinomio y las más fáciles son, la de Karup-Ring para 4 puntos:

$$u_{i+s} = s u_{i+1} - \frac{1}{2} s^2 (1-s) \delta^2 u_{i+1} + s' u_i - \frac{1}{2} s'^2 (1-s') \delta^2 u_i \quad *$$

y la de Shovelton para 6 puntos.

$$u_{i+s} = s u_{i+1} - \frac{1}{6} s (1-s^2) \delta^2 u_{i+1} + \frac{1}{48} s^2 (1-s) (5-s) \delta^4 u_{i+1} + s' u_i - \frac{1}{6} s' (1-s'^2) \delta^2 u_i + \frac{1}{48} s'^2 (1-s') (5-s') \delta^4 u_i.$$

Para la deducción de la fórmula de Karup-Ring, considérese la fórmula del tipo de Everett hasta la segunda diferencia centrada:

$$p(s) = A(s) u_{i+1} + B(s) \delta^2 u_{i+1} + A(1-s) u_i + B(1-s) \delta^2 u_i \quad 0 \leq s \leq 1$$

en donde $A(s)$ y $B(s)$ son funciones polinomiales en s de grado lo más pequeño posible, determinadas por las condiciones si-

(*) $s' = 1-s$

quientes:

i) que $p(0) = u_i$ y $p(1) = u_{i+1}$

ii) que $p'(0)$ sea igual a la derivada de la parábola que pasa por los puntos: (x_{i-1}, u_{i-1}) , (x_i, u_i) , y (x_{i+1}, u_{i+1}) evaluada en x_i y que $p'(1)$ sea igual a la derivada de la parábola que pasa por los puntos: (x_i, u_i) , (x_{i+1}, u_{i+1}) y (x_{i+2}, u_{i+2}) evaluada en x_{i+1} .

La parábola por los tres primeros puntos viene dada en su formulación gaussiana como sigue:

$$q_i(s) = u_i + s \Delta u_i + \frac{s(s-1)}{2} \delta^2 u_i$$

de la cual se sigue que:

$$(2.5.1) \quad q_i'(s) = \Delta u_i + \frac{2s-1}{2} \delta^2 u_i$$

Para satisfacer a la condición (i) es necesario que $A(s)$ y $B(s)$ cumplan con

$$A(0) u_{i+1} + B(0) \delta^2 u_{i+1} + A(1) u_i + B(1) \delta^2 u_i = u_i$$

$$A(1) u_{i+1} + B(1) \delta^2 u_{i+1} + A(0) u_i + B(0) \delta^2 u_i = u_{i+1}$$

de: $A(0) = 0$, $A(1) = 1$

$$B(0) = 0, \quad B(1) = 0$$

Ahora utilizando (2.5.1), se obtiene que:

$$0 = (A'(0) - 1) u_{i+1} - (A'(1) - 1) u_i + B'(0) \delta^2 u_{i+1} + \left(\frac{1}{2} - B'(1)\right) \delta^2 u_{i+1}, \quad (2.5.2) \quad y$$

$$0 = (A'(1) - 1) u_{i+1} - (A'(0) - 1) u_i - B'(0) \delta^2 u_i - \left(\frac{1}{2} - B'(1)\right) \delta^2 u_{i+1}, \quad (2.5.3)$$

independientemente de i . Así que $A(s)$ y $B(s)$ deben cumplir con:

$$A'(0) = A'(1) = 1$$

$$B'(0) = 0 \quad y \quad B'(1) = \frac{1}{2}$$

De (2.5.2) y (2.5.3) se sigue (véase sección 2.5.1), que

$$A(s) = s \quad y \quad B(s) = \frac{s^2(s-1)}{2}$$

Lo que determina la fórmula de Karup-King.

Para la fórmula de Shovelton, se utiliza la fórmula del tipo de Everett hasta la cuarta

diferencia

$$P(x_{i+s}) = A(s)u_{i+1} + B(s)\delta^2 u_{i+1} + C(s)\delta^4 u_{i+1} + \\ A(1-s)u_i + B(1-s)\delta^2 u_i + C(1-s)\delta^4 u_i$$

determinando $A(s)$, $B(s)$ y $C(s)$ de menor grado posible que satisfagan a las condiciones siguientes:

- i) El polinomio interpole a u_i y u_{i+1}
- ii) El polinomio interpolador tenga la misma tangente en u_i que la de la curva que pasa por los puntos u_{i-2} , u_{i-1} , u_i , u_{i+1} y u_{i+2} , y la tangente en u_{i+1} sea la misma que la de la curva que pasa a través de los puntos u_{i-1} , u_i , u_{i+1} , u_{i+2} , y u_{i+3} .

iii) En el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, el área bajo la curva de interpolación sea igual al promedio de las áreas bajo las dos curvas mencionadas en (ii).

$$\int_0^1 u_{i+s} = \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^1 u_{i+s} + \int_{-1}^3 u_{i+s} \right]$$

La fórmula de Shovelton es:

$$u_{i+s} = s u_{i+1} - \frac{1}{6} s (1-s^2) \delta^2 u_{i+1} + \frac{1}{48} s^2 (1-s) (5-s)$$

$$\delta^4 u_{i+1} + s' u_i - \frac{1}{6} s' (1-s'^2) \delta^2 u_i + \frac{1}{48} s'^2$$

$$\cdot (1-s') (5-s') \delta^4 u_i$$

Su deducción es similar a la de Harrop-Ring pero mucho más laboriosa.

2.5.3 Polinomios osculadores modificados.

Para estudiar a los polinomios osculadores modificados, es necesario hacer una revisión de los fundamentos de los polinomios osculadores.

Por primera vez, T. B. Sprague en 1880 propone las ideas fundamentales para la construcción de los polinomios osculadores, instituyéndolas hasta 1921. La idea central al respecto es la de que dos curvas polinomiales en dos intervalos vecinos deberán pegarse lisamente en su punto común y para esto deberán cumplir con las siguientes condiciones:

- I Las dos curvas deben tener el mismo valor en el punto común.
(Interpolación)
- II Las derivadas de cada curva en el punto común serán iguales a valores predeterminados.

Ejemplos de fórmulas para polinomios osciladores basados en estas suposiciones son las de Karup-King y Jha-velton (vistas en la sección anterior).

Paralelamente (1921), Henderson hace una primera modificación a esta fundamentación, la cual consiste en cambiar la condición (II) por la siguiente:

(III) Las derivadas correspondientes a cada curva en el punto común deberán ser iguales, pero no necesariamente a un valor predeterminado.

Con las condiciones (III) y (I), Henderson crea fórmulas "aproximadas" como la siguiente:

$$u_{i+s} = s u_{i+1} + \frac{1}{6} s (s^2 - 1) B_{i-1} + (1-s) u_i + \frac{1}{6} (1-s) ((1-s)^2 - 1) B_i$$

donde las B_i 's se obtienen por medio de la resolución de la ecuación en diferencias

$$B_i + \frac{1}{6} \delta^2 B_i = \delta^2 u_i.$$

Para su deducción ver Spoerl [20].

Esta fórmula de Henderson debido a sus condiciones fundamentales no es más que una fórmula de Spline para interpolar (véase Forsythe et al. [4]).

Jenkins, en 1926, también utiliza las condiciones I y III, pero creando fórmulas osculatorias exactas. Además contempla una modificación de la condición I que corresponde a la interpolación estricta, pidiendo que el polinomio interpolador no pase necesariamente por los puntos. A esta nueva presentación del polinomio con esta modificación las llamará Polinomios Osculadores Modificados, los cuales no son de interpolación estrictamente hablando.

Así, la construcción de los polinomios osculadores modificados estará sujeta a la siguiente condición:

Los valores de las ordenadas y sus co

respondientes derivadas en el punto donde se unen dos arcos, coincidirán.

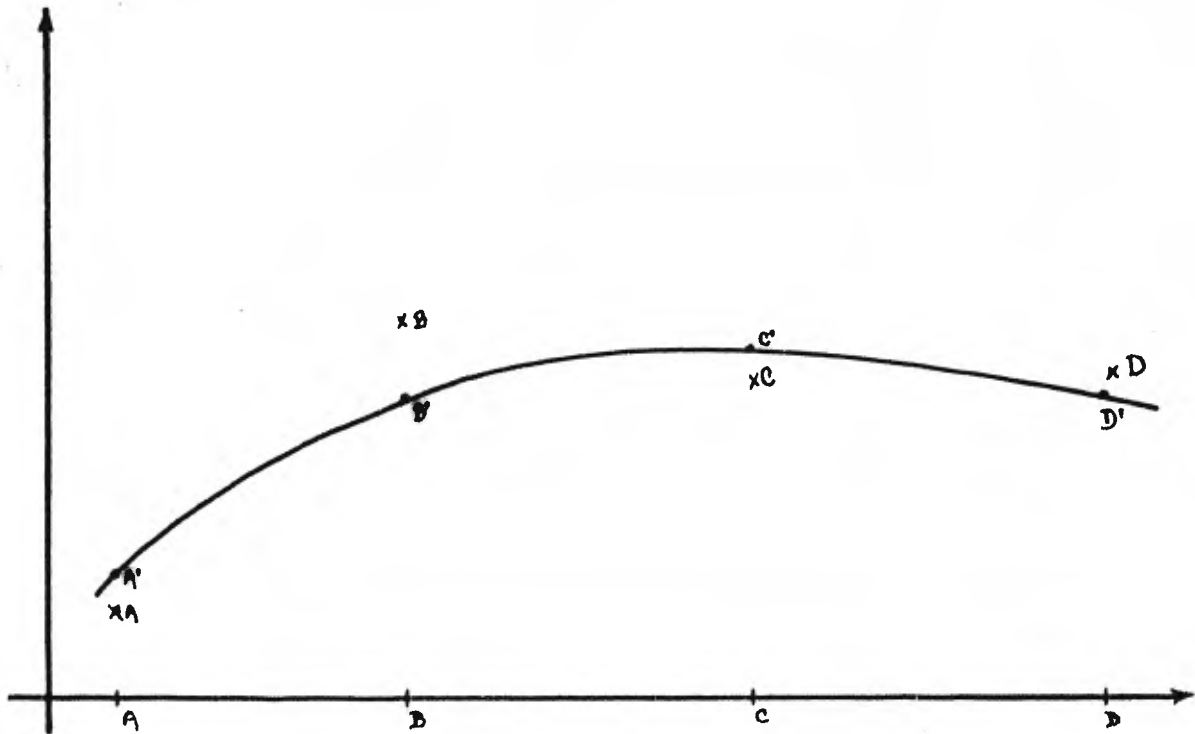
Las ventajas de estos polinomios son:

- 1) reducción del grado del polinomio (ver cuadro)
- 2) las ordenadas originales no son reproducidas.

Cuadro del comportamiento de los Grados.

Orden de contacto	1	2	3	4	5	∞	$2K-1$	$2K$	∞
Grado del polinomio ose. no modificada	3	5	7	9	11	∞	$4K-1$	$4K+1$	∞
Grado del polinomio ose. con una modifica ción (1926, Jenkins)	3	4	6	7	9	∞	$3K$	$3K+1$	∞
Grado del polinomio ose. modificado	2	3	5	6	8	∞	$3K-1$	$3K$	∞

Estas dos ventajas se pueden resumir en una sola; la obtención de polinomios lisos cuyo comportamiento se muestra en la figura de abajo



puntos pivotes: A, B, C y D

Segmentos interpoladores: A'B', B'C' y C'D'.

Interpolación Ocular modificada

De las fórmulas de este tipo, la más utilizada es la de Jenkins con 6 puntos:

$$u_{i+s} = s(u_{i+1} - \frac{1}{36} \delta^4 u_{i+1}) - \frac{1}{6} s(1-s^2)(\delta^2 u_{i+1} - \frac{1}{6} \delta^4 u_{i+1}) + s'(u_i - \frac{1}{36} \delta^4 u_i) - \frac{1}{6} s'(1-s'^2)(\delta^2 u_i - \frac{1}{6} \delta^4 u_i)$$

cuya construcción para el intervalo (x_i, x_{i+1}) está basada en 6 puntos pivotes $u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}$ y u_{i+3} , satisfaciendo las siguientes condiciones:

I) En el punto x_i , el polinomio de interpolación para los dos intervalos vecinos (x_{i-1}, x_i) y (x_i, x_{i+1}) tendrán el mismo valor tanto en el polinomio como en su primera y segunda derivada.

II) Cuando los 5 pivotes pertenecen a la misma curva polinomial cúbica, entonces los polinomios en x_i valdrán u_i

Para su deducción consideremos la sp-

guiente fórmula del tipo de Everett para el intervalo (x_i, x_{i+1}) .

$$(2.5.4) \quad u_{i+s} = A(s) u_{i+1} + B(s) \delta^2 u_{i+1} \\ + C(s) \delta^4 u_{i+1} + A(1-s) u_i \\ + B(1-s) \delta^2 u_i + C(1-s) \delta^4 u_i.$$

donde $A(s)$, $B(s)$ y $C(s)$ son polinomios en s de grado mínimo que serán determinados por las condiciones (1) y (2).

Haciendo $s=0$ en (2.5.4) se tiene que:

$$u_i = A(0) u_{i+1} + B(0) \delta^2 u_{i+1} + C(0) \delta^4 u_{i+1} \\ + A(1) u_i + B(1) \delta^2 u_i + C(1) \delta^4 u_i.$$

y para $s=1$, cambiando x_i por x_{i-1} en (2.5.4), y por la condición (1) se tiene:

$$0 = A(0) [u_{i+1} - u_{i-1}] + B(0) [\delta^2 u_{i+1} + \delta^2 u_{i-1}] + \\ C(0) [\delta^4 u_{i+1} - \delta^4 u_{i-1}]$$

de donde

$$(2.5.5) \quad A(0) = B(0) = C(0) = 0$$

Ahora derivando (2.5.4) con respec

To a s se tiene:

$$(2.5.6) \quad u_{i+s}' = A'(s) u_{i+1} + B'(s) \delta^2 u_{i+1} + \\ c'(s) u_{i+1} - A'(1-s) u_i - B'(1-s) \\ \delta^2 u_i - c'(1-s) \delta^4 u_i.$$

Haciendo $s=0$ primero, y luego $s=1$, cambiando x_i por x_{i-1} y por la condición (1) se tiene:

$$0 = A'(0) [u_{i+1} + u_{i-1}] - A'(1) [2u_i] + B'(0) [\delta^2 u_{i+1} \\ + \delta^2 u_{i-1}] - B'(1) [2\delta^2 u_i] + c'(0) [\delta^4 u_{i+1} \\ + \delta^4 u_{i-1}] - c'(1) [2\delta^4 u_i].$$

relación que podemos reescribir como

$$0 = 2[A'(0) - A'(1)] u_i + [2B'(0) - 2B'(1) + A'(0)] \\ \delta^2 u_i + c'(0) [\delta^4 u_{i+1} + \delta^4 u_{i-1}] + [B'(0) - 2c'(1)] \\ \delta^4 u_i.$$

de donde se obtiene:

$$(2.5.7) \quad \begin{cases} A'(0) = A'(1) \\ 2B'(0) - 2B'(1) + A'(0) = 0 \\ c'(0) = 0 \\ B'(0) = 2c'(1) \end{cases}$$

Ahora, calculando la segunda derivada de (2.5.4) se tiene:

$$u''_{i+s} = A''(s) u_{i+1} + B''(s) \delta^2 u_{i+1} + C''(s) \delta^4 u_{i+1} \\ + A''(1-s) u_i + B''(1-s) u_i + C''(1-s) \delta^4 u_i.$$

Haciendo $s=0$ y después $s=1$, cambiando x_i por x_{i-1} , y por la condición (1) se tiene:

$$0 = A''(0) [u_{i+1} - u_{i-1}] + B''(0) [\delta^2 u_{i+1} - \delta^2 u_{i-1}] \\ + C''(0) [\delta^4 u_{i+1} - \delta^4 u_{i-1}]$$

donde:

$$A''(0) = B''(0) = C''(0) = 0$$

Ahora buscaremos las funciones de mínimo grado para $A(s)$, $B(s)$ y $C(s)$ que satisfagan sus respectivas restricciones.

La función de grado mínimo de $A(s)$ que satisface:

$$A(0) = A''(0) = 0 \quad \text{y} \quad A(1) = 1$$

resulta ser:

$$A(s) = s.$$

La función de grado mínimo de $B(s)$ que satisface:

$$(2.5.8) \quad B(0) = B(1) = B''(0) = 0.$$

y

$$(2.5.9) \quad 2B'(0) - 2B'(1) + 1 = 0$$

será de tercer grado ya que hay que satisfacer cuatro condiciones: En efecto, sea

$$B(s) = as^3 + bs^2 + cs + d,$$

se tiene entonces que.

$$B'(s) = 3as^2 + 2bs + c; \quad y.$$

$$B''(s) = 6as + 2b.$$

Evaluando la función y sus derivadas en $s=0$ y en $s=1$ se obtendrá:

$$B(0) = d \quad y \quad \text{por (2.5.5), } d = 0$$

$$B(1) = a + b + c \quad \text{por (2.5.7), } a + b + c = 0$$

$$B''(0) = 2b \quad \text{por (2.5.7), } b = 0$$

$$B'(0) = c$$

$$B'(1) = 3a + c$$

Luego por (2.5.9) se sigue que:

$$2(c) - 2(3a + c) + 1 = 0$$

y por tanto

$$a = \frac{1}{6}$$

Finalmente el polinomio de menor grado $B(s)$ buscado es:

$$B(s) = \frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{6}s.$$

Dado que $B'(0) = \frac{1}{6}$, la función de menor grado de $c(s)$ que satisfice que:

$$c(0) = c'(0) = c''(0) = 0$$

y

$$2c'(1) + \frac{1}{6} = 0$$

$$es: \quad c(s) = -\frac{s^3}{36}.$$

Puego la fórmula de Jenkins para polinomios osciladores modificados, que llega hasta la cuarta diferencia es:

$$u_{i+s} = s u_{i+1} + \frac{s(s^2-1)}{6} \delta^2 u_{i+1} - \frac{s^3}{36} \delta^4 u_{i+1} \\ + (1-s) u_i + \frac{(1-s)}{6} \left\{ \frac{(1-s)^2-1}{6} \delta^2 u_i - \frac{(1-s)^3}{6} \delta^4 u_i \right\}$$

o bien

$$u_{i+s} = s \left(u_{i+1}'' - \frac{1}{36} \delta^4 u_{i+1}'' \right) - \frac{1}{6} s (1-s^2) \left(\delta^2 u_{i+1}'' - \frac{1}{6} \delta^4 u_{i+1}'' \right) + s' \left(u_i'' - \frac{1}{36} \delta^4 u_i'' \right) - \frac{1}{6} s' (1-s'^2) \left(\delta^2 u_i'' - \frac{1}{6} \delta^4 u_i'' \right)$$

donde $s' = 1-s$

Así, para $s=0$ se tiene

$$u_i \text{ (modificada)} = u_i - \frac{1}{36} \delta^4 u_i.$$

lo que nos dice que las ordenadas son corregidas hasta la cuarta diferencia.

La razón por la cual esta fórmula es la más utilizada, sin el temor de que todas las ordenadas modificadas o graduadas obtenidas por ésta, estén todas abajo o todas arriba de las originales, es que en el fenómeno de mortalidad es característico que las cuartas diferencias salgan más o menos alternadas en signo.^(*)

Así, esta razón es muy importante

* Ver Jenkins [7]

y ha determinado el hecho de construir polinomios cúbicos por pedazos, Dicha idea es la que fundamenta la tradición actuarial.

Capítulo III

Método de Promedios Móviles para Graduaación.

3.1.) Introducción

En este capítulo se discutirá uno de los procedimientos más populares y fáciles de usar para graduar una Tabla; el método de "Promedios móviles", el cual globalmente consiste en:

dada una tabla por graduar

$$U'' : u_i'', \quad i = 1, \dots, n,$$

generar una nueva del tipo:

$$U : u_i \quad i = 1, \dots, n.$$

donde las u_i 's se construyen conforme a una expresión de la forma:

$$(3.1.1) \quad u_i = \sum_{-n}^n w_k u''_{i+k}$$

con w_k constantes dadas, //amadas generalmente "peso".

La filosofía que se encuentra detrás de este método, es el hecho bien conocido de que el valor promedio de un conjunto de valores reales nos da un número que resulta de compensar valores excedentes a éste, con valores menores que él mismo. Así la expresión (3.1.1) que toma la forma.

$$u_i = w_{-n} u_{i-n} + \dots + w_0 u_i + \dots + w_n u_{i+n}$$

nos indica que cada u_i será un promedio pesado tanto del valor original u_i , como de los n valores anteriores a él y los n posteriores, Teniendo como objetivo lograr que el error presente en el valor original u_i quede debidamente distribuido entre él y sus $2n$ vecinos más próximos.

El propósito de este capítulo es ver como construir los pesos w_i , así como discutir la eficacia y deficiencia de este método.

3.2. Promedios Móviles vía Cuadrados Mínimos.

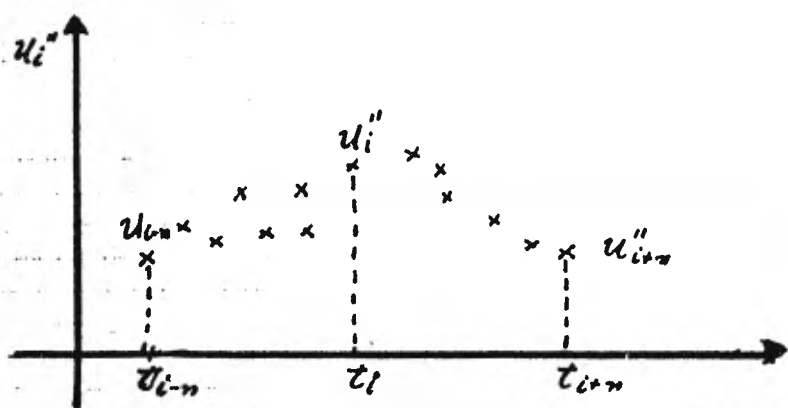
Con respecto al problema del cálculo de las w_i 's $i = -n, \dots, 0, 1, \dots, n$, un procedimiento usual

para calcularlos consiste en:

a) Tomar los puntos

$$((t_{i-n}, u_{i-n}''), \dots, (t_{i+n}, u_{i+n}'')) ,$$

que gráficamente sería:



b) Ajustar a estos $2n+1$ puntos un polinomio $P_k(t)$ de grado $k \leq 2n$; obteniéndose así u_i como $P_k(t_i)$, i.e

$$u_i = P_k(t_i)$$

Oboérvese que deseamos ajustar un polinomio para después evaluarlo en un solo punto, t_i . Para lo que sigue, para comodidad como por claridad escribiremos i en vez de t_i .

Ahora, sabiendo que la geometría del polinomio es invariante bajo la traslación del eje

de abscisas, es natural que busquemos aquella
Traslación que simplifique la evaluación:

$$P_k(i) = [P_k(t_i)] = a_0 + a_1 (i-a) + a_2 (i-a)^2 \dots + a_k (i-a)^k$$

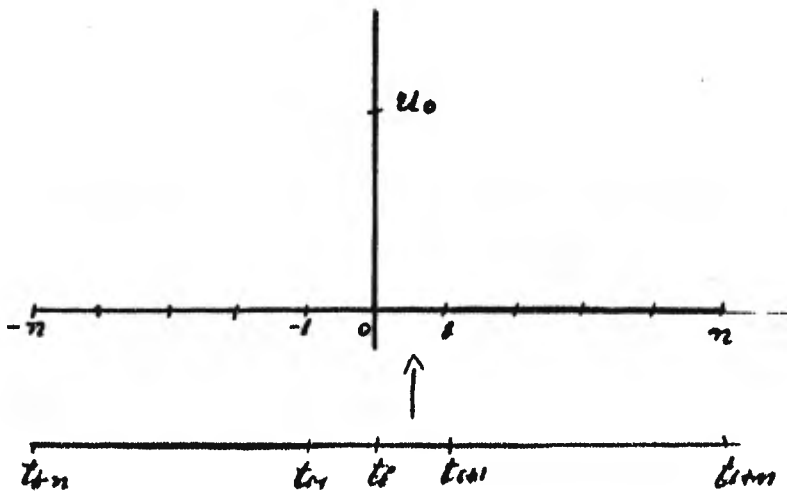
Es inmediato ver que, la Traslación:

$$y \mapsto y - a$$

con $a = i$; reduce la evaluación anterior a

$$P(i) [P(t_i)] = a_0$$

La figura que sigue ilustra la situación



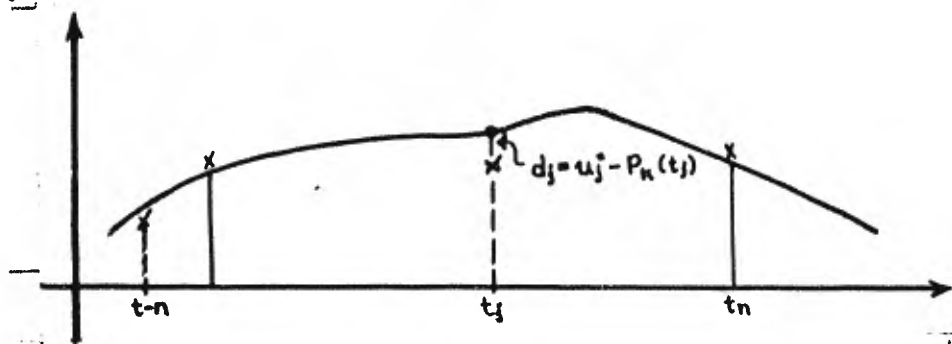
Obteniéndose una nueva expresión para u_i :

$$u_i = w_{-n} u_{-n}'' + \dots + w_0 u_0'' + \dots + w_n u_n''$$

Una forma común de resolver el problema de ajustar una función a un conjunto de datos, es usando el criterio conocido como "cuadrados mínimos". En nuestro contexto, dado que la función a ajustar es P_k , este criterio consiste en minimizar la suma de cuadrados.

$$(3.2.1) \quad \sum_{j=-n}^n (u_j'' - P_k(t_j))^2$$

que geométricamente equivale a minimizar los cuadrados de las distancias que se muestran en la figura siguiente:



La idea intuitiva de la expresión (3.2.1), es la de construir los pesos w_k , de tal manera que la distribución de los errores en las observaciones u_i'' , para i desde $i-n$ hasta $i+n$, que produzca nuestra observación u_i graduada, sea tal que minimice el promedio de los cuadrados de

los errores.

Ahora bien, la expresión (3.2.1) la podemos escribir en notación matricial como

$$(3.2.2). R(a_0, a_1, \dots, a_k) = \|\bar{u} - A\bar{a}\|^2$$

ya que

$$R(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{j=-n}^n (u_j'' - P_k(t_j))^2$$

en donde A es la matriz que contiene las abscisas, \bar{u} , es el vector de las ordenadas y \bar{a} el vector de los coeficientes por determinar, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_{-n}, t_{-n}^2 \dots t_{-n}^k \\ 1 & \\ \vdots & \\ 1 & t_n, t_n^2 \dots t_n^k \end{bmatrix}, \quad (t_k = t_{k+n})$$

$$\bar{u} = (\bar{u}_{-n}, \bar{u}_{-n+1}, \dots, \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{n-1}, \bar{u}_n)^t, \quad (\bar{u}_k = u_{k+n})$$

$$y \quad \bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_k)^t.$$

Como la expresión (3.2.2) es una

suma de cuadrados, es inmediato ver que $R(a_0, a_1, \dots, a_k)$ alcanza su mínimo. Por ser $R(a_0, a_1, \dots, a_k)$ estrictamente convexa, el mínimo es único, y finalmente, por ser $R(a_0, a_1, \dots, a_k)$ continuamente derivable, se sigue que $a^{*t} = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_k^*)$, donde ésta alcanza su mínimo, se obtiene resolviendo la ecuación.

$$\nabla R(a_0, a_1, \dots, a_k) = 0$$

Usando cálculo de varias variables se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla R(a_0, a_1, \dots, a_k) &= \nabla \langle \bar{u} - A\bar{a}, \bar{u} - A\bar{a} \rangle \\ &= A^T(\bar{u} - A\bar{a}) + A^T(\bar{u} - A\bar{a}) \\ &= 2(A^T\bar{u} - A^T A\bar{a}) \end{aligned}$$

Luego

$$\nabla R(a_0, a_1, \dots, a_k) = 0 \quad \text{sí y sólo sí}$$

$$(3.2.3) \quad A^T A \bar{a} = A^T u$$

Así, el problema se reduce a resolver el sistema lineal (3.2.3) conocido en la literatura matemática

por las ecuaciones normales o de Euler, teniéndose que.

$$P_k(\tau_k) [= P_k(x)] = a_0^*$$

donde a_0^* es la primer componente de \bar{a}^* , la solución de (3.2.3).

El siguiente ejemplo además de ilustrar el procedimiento anterior, permitirá ver nuevos aspectos de éste.

Sea la siguiente tabla:

τ	u''
20	.005
21	.0068
22	.010
23	.004
24	.0075

y se propone un polinomio de 3^{er} grado

$$P_3(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3$$

haciendo la traslación

$$y \mapsto y - 22$$

se genera la siguiente tabla:

x	u''
-2	0.005
-1	0.0068
0	0.010
1	0.004
2	0.0075

Ahora el problema es encontrar el

$$\min_{\bar{a}} R(a_0, a_1, a_2, a_3) = \min_{\bar{a}} \|\bar{u} - A\bar{a}\|$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

[5x4]

$$\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T,$$

$$\bar{u} = (0.005, 0.0068, 0.010, 0.004, 0.0075)^T.$$

y como el $\min_a \|\bar{u} - A\bar{a}\|$ se alcanza donde

$$\nabla R(a_0, a_1, \dots, a_k) = 0$$

que corresponde a resolver el sistema

$$A^t A \bar{a} = A^t \bar{u}''$$

que en nuestro caso viene a ser:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum u_j'' \\ \sum u_j'' t_j \\ \sum u_j'' t_j^2 \\ \sum u_j'' t_j^3 \end{bmatrix}$$

Este sistema no es necesario resolverlo ya que sólo interesa a_0 ; entonces sólo tomamos las ecuaciones donde está involucrada; obteniéndose que:

$$5a_0 + 10a_2 = \sum u_j''$$

$$10a_0 + 34a_2 = \sum u_j'' t_j^2$$

de donde

$$a_0 = \frac{34 \sum u_j'' - 10(4u_{-2}'' + u_{-1}'' + u_1'' + 4u_2'')}{5 \times 34 - 100}$$

lo que podemos escribir como:

$$Q_0 = -\frac{3}{35} u_2'' + \frac{12}{35} u_1'' + \frac{17}{35} u_0'' + \frac{12}{35} u_1'' - \frac{3}{35} u_2''$$

Ahora bien, para nuestro ejemplo tendremos que:

$$u_0 = Q_0 = -\frac{3}{35} (0.005) + \frac{12}{35} (0.0068) + \frac{17}{35} (0.010) + \frac{12}{35} (0.004) - \frac{3}{35} (0.0075),$$

$$\therefore u_0 = Q_0 = 0.0074884 .$$

Sin embargo no resulta ser esto toda la ganancia obtenida, según veremos enseguida.

En efecto, recordemos en primer lugar la expresión

$$u_0 = w_{-n} u_{-n}'' + \dots + w_0 u_0'' + \dots + w_n u_n'' .$$

de aquí resulta que de la última expresión obtenida para $q_0 = u_0$ se obtiene de inmediato que:

$$w_{-2} = -\frac{3}{35}, \quad w_{-1} = \frac{12}{35}, \quad w_0 = \frac{17}{35}, \quad w_1 = \frac{12}{35} \quad \text{y}$$

$$w_2 = -\frac{3}{35}$$

Más aún, estos valores obtenidos para las u_i quedarían siempre iguales si se trata de calcular otros valores de u_x ; esto se debe a que en la traslación propuesta al principio, siempre se tendrá que los valores de las t_i serán invariablemente $-2, -1, 0, 1, 2$ y así el resultado sólo depende de las u_j .

Este método es muy fácil, práctico y se puede utilizar aún con pocas herramientas computacionales, cuando se trata de un número no muy grande de datos.

Ahora bien, supongamos que queremos obtener una fórmula de promedios móviles con 17 datos. Ajustándolos a un polinomio quintico, las ecuaciones normales para este caso toman la forma:

$$\begin{aligned}
17 a_0 + a_1 \bar{\Sigma} t_j + a_2 \bar{\Sigma} t_j^2 + a_3 \bar{\Sigma} t_j^3 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^4 + a_5 \bar{\Sigma} t_j^5 &= \bar{\Sigma} u_j'' \\
a_0 \bar{\Sigma} t_j + a_1 \bar{\Sigma} t_j^2 + a_2 \bar{\Sigma} t_j^3 + a_3 \bar{\Sigma} t_j^4 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^5 + a_5 \bar{\Sigma} t_j^6 &= \bar{\Sigma} u_j'' t_j \\
a_0 \bar{\Sigma} t_j^2 + a_1 \bar{\Sigma} t_j^3 + a_2 \bar{\Sigma} t_j^4 + a_3 \bar{\Sigma} t_j^5 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^6 + a_5 \bar{\Sigma} t_j^7 &= \bar{\Sigma} u_j'' t_j^2 \\
a_0 \bar{\Sigma} t_j^3 + a_1 \bar{\Sigma} t_j^4 + a_2 \bar{\Sigma} t_j^5 + a_3 \bar{\Sigma} t_j^6 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^7 + a_5 \bar{\Sigma} t_j^8 &= \bar{\Sigma} u_j'' t_j^3 \\
a_0 \bar{\Sigma} t_j^4 + a_1 \bar{\Sigma} t_j^5 + a_2 \bar{\Sigma} t_j^6 + a_3 \bar{\Sigma} t_j^7 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^8 + a_5 \bar{\Sigma} t_j^9 &= \bar{\Sigma} u_j'' t_j^4 \\
a_0 \bar{\Sigma} t_j^5 + a_1 \bar{\Sigma} t_j^6 + a_2 \bar{\Sigma} t_j^7 + a_3 \bar{\Sigma} t_j^8 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^9 + a_5 \bar{\Sigma} t_j^{10} &= \bar{\Sigma} u_j'' t_j^5
\end{aligned}$$

y dado que:

$$\bar{\Sigma} t_j = \bar{\Sigma} t_j^3 = \bar{\Sigma} t_j^5 = \bar{\Sigma} t_j^7 = \bar{\Sigma} t_j^9 = 0$$

el sistema por resolver es:

$$\begin{aligned}
17 a_0 + a_2 \bar{\Sigma} t_j^2 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^4 &= \bar{\Sigma} u_j'' \\
a_0 \bar{\Sigma} t_j^2 + a_2 \bar{\Sigma} t_j^4 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^6 &= \bar{\Sigma} u_j'' t_j^2 \\
a_0 \bar{\Sigma} t_j^4 + a_2 \bar{\Sigma} t_j^6 + a_4 \bar{\Sigma} t_j^8 &= \bar{\Sigma} u_j'' t_j^4
\end{aligned}$$

De aquí que si el grado del polinomio crece, el sistema de ecuaciones por resolver crece y se pueda complicar su solución.

En la sección que sigue se verá otro procedimiento para obtener los pesos w_i 's que evita resolver sistemas de ecuaciones lineales. La importancia de este hecho se entiende si se toma en cuenta que esta tarea era muy difícil y a veces hasta imposible antes de que apareciera la computadora digital.

3.3 Promedios Móviles Según el Enfoque de Miller.

Otra manera de obtener las fórmulas de promedios móviles es mediante el enfoque de Miller, quien a partir de la expresión:

$$(3.3.1) \quad u_i = w_n u_{i-n} + \dots + w_0 u_i + \dots + w_n u_{i+n}$$

buseca los pesos w_i 's de manera que esta fórmula reproduzca a las tablas $\{u_i\}$ de Tendencia cúbica con respecto a i . Esto es,

$$u_i = A + Bi + Ci^2 + Di^3$$

Así la expresión (3.3.1) toma la forma:

$$u_i = w_n [A + B(i-n) + C(i+n)^2 + D(i-n)^3] + \dots + w_0 [A + Bi + Ci^2 + Di^3] + \dots + w_n [A + B(i+n) + C(i+n)^2 + D(i+n)^3]$$

entonces:

$$u_i = [w_0 + 2w_1 + \dots + 2w_n] A + [(w_0 + 2w_1 + \dots + 2w_n) i^2 + 2(w_1 + 4w_2 + \dots + n^2 w_n)] C + [(w_0 + 2w_1 + \dots + 2w_n) i^3 + 6(w_1 + 4w_2 + \dots + n^2 w_n) i] D.$$

Ahora bien, u_i en (3.3.1) reproducirá polinomios cúbicos si y sólo si:

$$\begin{cases} w_0 + 2w_1 + \dots + 2w_n = 1 \\ 1^2w_1 + 2^2w_2 + \dots + n^2w_n = 0 \end{cases}$$

Nótese que estas condiciones son el equivalente en el procedimiento anterior a ajustar un polinomio cúbico.

Por otro lado si $u_1'', u_2'', \dots, u_s''$ son s variables estocásticas con un error cuadrado medio σ^2 (varianza), entonces la variable

$$z = b_1 u_1'' + b_2 u_2'' + \dots + b_s u_s''$$

tiene una varianza igual a:

$$(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_s^2) \sigma^2$$

Así la varianza de u_x es:

$$(w_0^2 + 2w_1^2 + \dots + 2w_n^2) \sigma^2$$

suponiendo independencia estocástica en las u_i'' s.

En base a lo anterior, es natural plantearse la tarea de hallar fórmulas de promedias móviles que reproduzcan

polinomios cúbicos y con una varianza mínima, que es lo equivalente en el procedimiento anterior a minimizar.

$$R(a_0, a_1, \dots, a_k) (= \|\bar{u} - A\bar{a}\|^2) = \sum_{i=1}^n (u_i'' - P_c(t_i))_c^2$$

Ejemplo.

Encontrar una fórmula de promedios móviles de 5 puntos.

matemáticamente se quiere encontrar $w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2$ para la expresión.

$$u_i'' = w_{-2} u_{i-2}'' + w_{-1} u_{i-1}'' + w_0 u_i'' + w_1 u_{i+1}'' + w_2 u_{i+2}''$$

Tales que minimicen la función

$$\left. \begin{aligned} f(w_0, w_1, w_2) &= w_0^2 + 2w_1^2 + 2w_2^2 \\ \text{sujeta a las restricciones:} & \\ \left\{ \begin{aligned} w_0 + 2w_1 + 2w_2 &= 1 \\ w_1 + 4w_2 &= 0 \end{aligned} \right. & \end{aligned} \right\} (3.3.3)$$

y una manera de hacerlo, es derivar el Lagrangiano asociado a (3.3.3)

$$\mathcal{L}(\bar{w}, \lambda) = w_0^2 + 2w_1^2 + 2w_2^2 + \lambda_1 (w_1 + 4w_2) + \lambda_2 (w_0 + 2w_1 + 2w_2 - 1)$$

Se Tiene que:

$$\nabla_{\bar{\omega}} \mathcal{L}(\bar{\omega}, \lambda) = (2\omega_0 + \lambda_2, 4\omega_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2, 4\omega_2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2).$$

Luego

$$\nabla_{\bar{\omega}} \mathcal{L}(\bar{\omega}, \lambda) = \bar{0} \quad \text{si y sólo si}$$

$$(3.3.4) \quad \begin{cases} \omega_0 = -\frac{1}{2} \lambda_2 \\ \omega_1 = -\frac{1}{4} \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 \\ \omega_2 = -\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} \end{cases}$$

Usando las restricciones del problema:

$$-\frac{1}{2} \lambda_2 + 2 \left[-\frac{1}{4} \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 \right] + 2 \left[-\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} \right] = 1$$

$$\left[-\frac{1}{4} \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 \right] + 4 \left[-\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} \right] = 0$$

Hegamos a:

$$5\lambda_1 + 5\lambda_2 = -2$$

$$17\lambda_1 + 10\lambda_2 = 0$$

de donde

$$\lambda_1 = \frac{20}{35}$$

$$\lambda_2 = -\frac{34}{35}$$

sustituyendo estos valores en (2.3.4) se tiene:

$$w_0 = \frac{17}{35}, \quad w_1 = \frac{12}{35} \quad \text{y} \quad w_2 = -\frac{3}{35}$$

Así la fórmula buscada es:

$$u_i = \frac{1}{35} (-3 u_{i-2}'' + 12 u_{i-1}'' + 17 u_i'' + 12 u_{i+1}'' - 3 u_{i+2}'')$$

que da los mismos valores obtenidos vía cuadrados mínimos.

Este procedimiento tiene en principio la ventaja de evitar las ecuaciones normales. La interpretación estadística de minimizar el cuadrado medio de los errores es transparente en este proceso, pues vía el ajuste polinomial este aspecto es obscurecido.

Finalmente queremos hacer notar que este método en general es práctico por su facilidad operacional; sin embargo tiene dos desventajas:

1) El hecho de que los coeficientes en las fórmulas de graduación siempre sean fijos puede generar una sobre o bajo graduación de la Tabla u_i

2) Las fórmulas de promedios móviles no se pueden aplicar a los primeros n , ni a los últimos n datos de la tabla.

Sin embargo, cabe decir que existen procedimientos heurísticos a examinar para superar esta dificultad (Miller [11] y Kendall & Stuart [8]), los cuales consisten, esencialmente, en hacer extrapolación de la tabla no graduada, por medio de un polinomio de grado igual al que reproduce el promedio, obtenido por medio del ajuste de cuadrados mínimos.

También es importante mencionar que recientemente T. N. E. Greville [6] ha desarrollado un procedimiento para extender la tabla no graduada, y así superar el inconveniente mencionado arriba. El procedimiento propuesto por Greville resulta ser matemáticamente equivalente a un procedimiento Whittaker, el cual será descrito en el capítulo siguiente y que, como se verá, permite en principio, superar los inconvenientes

venientes antes mencionados, además de que resulta ser uno de los pilares de los métodos modernos de graduación via funciones spline.

Capítulo IV

Método de Whittaker para Graduación

4.1. Introducción

Los métodos vistos en los capítulos anteriores tienen la característica de que la tabla graduada U se obtiene de la no-graduada U'' graduando dato por dato, utilizando cada vez sólo parte de la tabla no-graduada. En este capítulo presentaremos un método debido a Whittaker, conocido como método de ecuaciones en diferencias, el cual difiere de los anteriores, entre otras cosas, en que mediante éste se obtiene toda la tabla graduada U usando toda la información de la tabla no-graduada U'' de una sola vez. Algunas ventajas de este método son: que nos permite (al menos en principio) eliminar el tratamiento especial (o de cuhoreo) a datos extremos de U'' y otra, que no nos obli

ga a trabajar con un nivel de suavizamiento fijo, que puede ser bueno para alguna tabla en particular pero no para cualquiera.

4.2 Formulación del Método.

Dos conceptos en los cuales se sustenta el método de Whittaker son, el de suavizamiento y el de ajuste. Para poder hablar del primero, permítasenos antes introducir algunos elementos.

Definición: Dada una tabla de valores $U = (u_i)$, U en R^m , la tabla $\Delta^k U$ en R^{m-k} de k -ésimas diferencias de U está dada por

$$\Delta^k u_i = \Delta^{k-1} u_{i+1} - \Delta^{k-1} u_i$$

donde

$$\Delta^0 u_i = u_i, \quad i = 1, \dots, m$$

En particular, si $k=1$ se tiene $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ y de esto resulta inmediato checar que si los datos de la tabla original U satisfacen una relación lineal del tipo $u_i = \alpha i + \beta$ entonces la tabla de primeras diferencias es constante ($= \alpha$).

El hecho anterior puede generalizarse fácilmente al caso en que los datos de la tabla U satisfagan una relación polinomial de grado n , ya que si esto sucede entonces es fácil checar que la tabla de n -ésimas diferencias será constante y la de $(n+1)$ -ésimas diferencias será idénticamente nula.

En términos de lo anterior, un criterio usual para definir la suavidad de una tabla de datos es que éstas satisfagan una relación polinomial cúbica por intervalos, y en vista de esto, es natural tomar a la función

$$S_4(U) = \sum (\Delta^4 u_i)^2 = \|\Delta^4 U\|^2 \quad (1)$$

como una medida de la suavidad de la tabla U , puesto que la tabla de cuartas diferencias será nula por intervalos.

En general una tabla U_1 será más lisa que otra U_2 si:

(1) $\|\cdot\|$ denota a la norma Euclídeana en \mathbb{R}^{n-4}

$$S_4(U_1) < S_4(U_2)$$

sin embargo, esto tiene sus problemas ya que podría darse el caso que:

$$\Delta^4 U_1 = \{0, \dots, 0, \eta_1, 0, \dots, 0, \eta_2, 0, \dots, 0, \eta_i, 0, \dots, 0\}$$

y

$$\Delta^4 U_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_m\}$$

de modo tal que:

$$\sum_i (\Delta^4 u_{1i})^2 > \sum_i (\Delta^4 u_{2i})^2$$

siendo U_1 más lisa que U_2 .

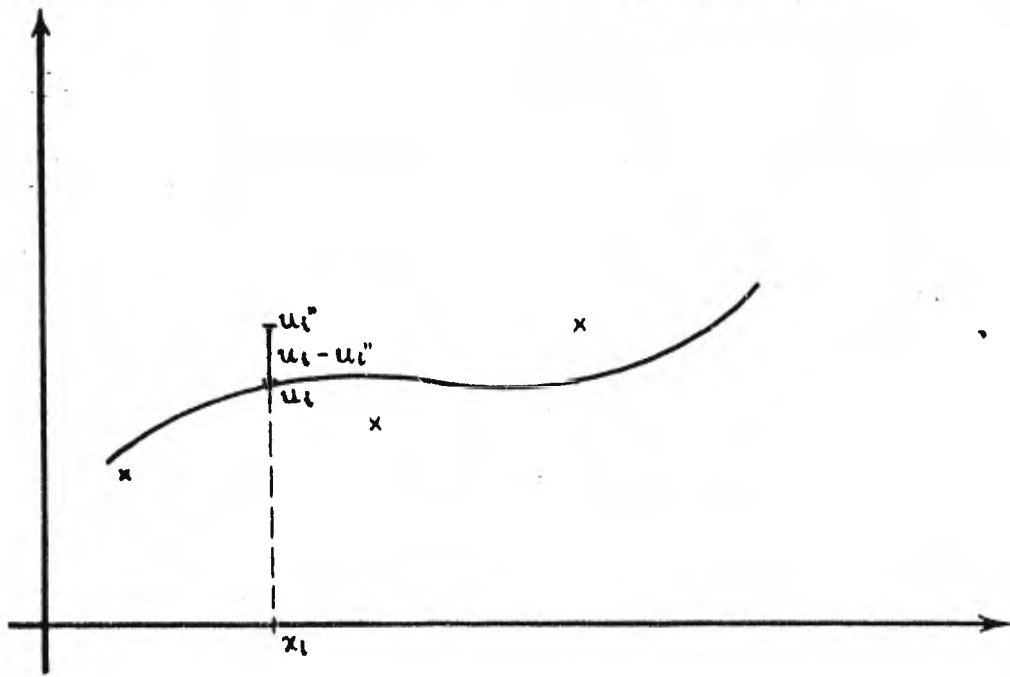
Whittaker por su parte propone como funciones suaves a las funciones cuadráticas por pedazos y consecuentemente como medida de suavidad

$$S(U) = \sum (\Delta^3 u_i)^2 = \|\Delta^3 U\|^2$$

Con relación al problema de las tablas de mortalidad la propuesta de suavidad de Whittaker resulta ser apropiada desde el punto de vista de la tradición actuarial.

Por lo que respecta a la consistencia o ajuste de los datos, que es el otro de los conceptos que Whittaker maneja en la formulación de su método, ésta se mide como tradicionalmente se hace; Tomando la suma de los cuadrados de los errores o residuales, i.e.:

$$F(U) = \|D^{-1}(U - U^0)\|^2 = \sum_{i=1}^m h_i^2 |u_i - u_i^0|^2$$



donde las h_i^2 's son constantes positivas que "pesan" la relativa precisión de las observaciones y $D^{-1} = \text{diag} \{ h_1, h_2, \dots, h_m \}$.

Así con estos dos elementos, el de suavidad y el de ajuste, y usando ciertas bases probabilísticas, Whittaker plantea su método de graduación, en términos de minimizar la siguiente funcional:

$$\begin{aligned} \phi(U) &= F(U) + \lambda S(U) \\ &= \| D^{-1}(U - U'') \|^2 + \lambda \| \Delta^3 U \|^2 \end{aligned}$$

en donde λ es un parámetro de balance entre ajuste ($F(U)$) y suavizamiento ($S(U)$), propuesto de antemano o determinado por ensayo; $U = (u_i)$ es la tabla graduada por hallar y $U'' = (u_i'')$ es la tabla no-graduada.

Cabe hacer notar en este momento que el control sobre λ le da al método mayor potencia, cosa de la que los métodos anteriores carecen, pues nos permite variar el balance entre suavidad y ajuste de tabla a tabla con sólo tomar una λ adecuada al caso bajo "tratamiento"

(1) la primer norma está en R^m y la segunda en R^{m-3}

4.3 Justificación Bayesiana

El hecho de que una tabla empírica contenga la recopilación de datos observados de algún fenómeno contingente, hace que se le pueda pensar (desde un enfoque probabilístico) como un vector aleatorio, donde el graduar viene a ser lo mismo que hacer una estimación puntual.

Sin embargo, como se mencionó en el capítulo I, nosotros no conocemos la verdadera función matemática que represente el fenómeno en cuestión, (en nuestro caso el fenómeno de mortalidad); empero, debido a la experiencia o al sentido común podemos determinar algunas propiedades que deseáramos tuviera la verdadera tabla U^* aún sin conocerla, como son las descritas en (1a.) y (2a.) del capítulo I, es decir: que U^* tenga la propiedad de tener variaciones suaves y que sea representativa (o consistente) con las observaciones.

Ahora, como nunca vamos a conocer a cierta cierta a U^* , podemos planteamos obtener a U como una estimación de U^* a partir de U'' mediante la metodología de Bayes, tomando como hipótesis a priori las propiedades deseables de U^* , con las que podemos formular por un lado una función probabilística de densidad:

$$P(U) = P(\text{suavidad de } U).$$

Por otro lado, si conociéramos a U , se podría calcular el error residual aleatorio

$$\bar{E} = U - U''$$

al cual se distribuye normalmente con media cero y matriz diagonal de covarianzas D^2 , lo cual se denota como:

$$\bar{E} \sim N(0, D^2)$$

que es la notación usual.

Así, es natural proponer como modelo de experimentación:

$$P(U''/U) \triangleq p(\varepsilon) = \beta e^{-\frac{1}{2} \|D\tilde{\varepsilon}\|^2}$$

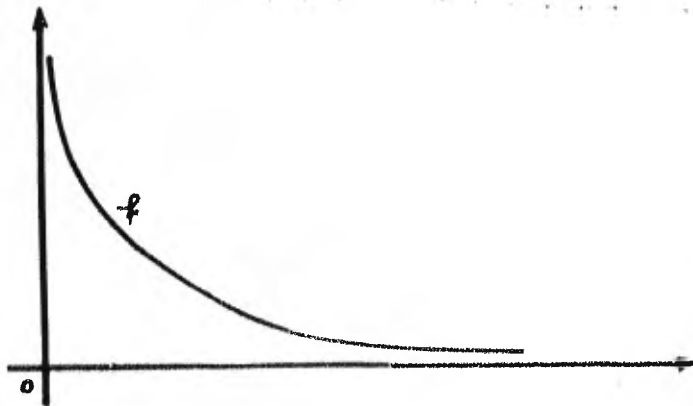
donde $P(U''/U)$ es la probabilidad de obtener a U'' dando por "buena" a U , y con esto podemos calcular la probabilidad a posteriori de U , i.e:

$$P(U/U'').$$

Volviendo al problema de formular $P(U)$, se tiene que buscar una función que vaya dando mayor credibilidad a una Tabla U de ser "buena" conforme ésta vaya siendo más lisa. Ahora, si $f(x)$ es una función como la de la gráfica de abajo, sería razonable la siguiente propuesta para $P(U)$:

$$P(U) = f(S_K(U))$$

donde $S_K(U)$ es la medida de suavidad.



Ahora, una función $f(x)$ que tenga la forma antes descrita y que sea compatible con la distribución del vector ε sería

$$f(x) = \gamma e^{-\frac{1}{2}\lambda x} \quad (\lambda > 0).$$

quedando entonces que

$$P(U) = \gamma e^{-\frac{1}{2}\lambda S_{\kappa}(U)}.$$

Ahora, aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(U/U'') = \frac{P(U) P(U''/U)}{\int \dots \int P(U) P(U''/U) dU}$$

podemos calcular la probabilidad a posteriori sabiendo que se tiene observada la tabla U'' , y se tiene que:

$$\begin{aligned} P(U/U'') &= K(U'') [P(U) P(U''/U)] \\ &= K(U'') (\gamma e^{-\lambda S_{\kappa}(U)} \beta e^{-\frac{1}{2}\|D^{-1}U\|^2}) \\ (4.31) \quad &= K(U'') \omega e^{-\frac{1}{2}(\lambda S_{\kappa}(U) + \|D^{-1}U\|^2)} \end{aligned}$$

$$\text{donde } K(U'') = \frac{1}{\int \dots \int P(U) P(U''/U) dU}$$

y como lo que se quiere es determinar la tábla de mayor probabilidad a posteriori, dada por observada la tabla U'' i.e:

$$\underset{U}{\text{MAX}} P(U/U'')$$

y considerando la relación (4.3.1) Tenemos que esto equivale a buscar la tábla U Tal que

$$\underset{U}{\text{MIN}} (\lambda S_k(U) + F(U))$$

o bien

$$\underset{U}{\text{MIN}} \phi_k(U)$$

donde:

$$\phi_k(U) = F(U) + \lambda S_k(U)$$

que es la funcional propuesta por Whittaker.

4.4 Propiedades del método de Whittaker.

En esta sección se demostrará el "teorema de Conservación de los Momentos 0, 1 y 2", el cual nos dice que la gráfica que repre

presenta a los valores graduados y la que representa a los valores no-graduados tienen la misma área, el mismo promedio y la misma dispersión cuadrática media respecto al origen.

Para poder mostrar estas propiedades, es necesario primero encontrar las ecuaciones normales que resultan de minimizar la funcional:

$$\phi(U) = \|D^{-1}(U - U'')\|^2 + \lambda \|\Delta^3 U\|^2$$

Para ello calculamos las parciales de la funcional $\phi(U)$

$$(*) \quad \frac{\partial \phi(U)}{\partial u_{i+3}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-3$$

Teniéndose que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(U)}{\partial u_{i+3}} &= 2 \sum h_i^2 (u_i - u_i'') \frac{\partial}{\partial u_{i+3}} (u_i - u_i'') \\ &+ 2\lambda \sum_{i=1}^{m-3} \Delta^3 u_i \frac{\partial}{\partial u_{i+3}} (\Delta^3 u_i) \end{aligned}$$

* Tomamos desde $i+3$ hasta m , ya que sólo se tienen esas terceras diferencias

$$\begin{aligned}
 (*) &= h_{i+3}^2 (u_{i+3} - u_{i+3}'') \\
 &+ \lambda \sum_{i=1}^{m-3} \Delta^3 u_i \left\{ \frac{\partial u_{i+3}}{\partial u_{i+3}} - 3 \frac{\partial u_{i+2}}{\partial u_{i+3}} + 3 \frac{\partial u_{i+1}}{\partial u_{i+3}} - \frac{\partial u_i}{\partial u_{i+3}} \right\} \\
 &= h_{i+3}^2 (u_{i+3} - u_{i+3}'') \\
 &+ \lambda (\Delta^3 u_i + 3 \Delta^3 u_{i+1} + 3 \Delta^3 u_{i+2} - \Delta^3 u_{i+3}). \\
 &= h_{i+3}^2 (u_{i+3} - u_{i+3}'') + \lambda (\Delta^3 (\Delta^3 u_i))
 \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo:

$$\frac{\partial \phi(U)}{\partial u_{i+3}} = 0$$

se tiene que:

$$(4.4.1) \quad h_{i+3}^2 u_{i+3}'' = h_{i+3}^2 u_{i+3} - \lambda \Delta^6 u_i, \quad i=1, m-6$$

lo que da lugar al sistema de ecuaciones (4.4.2):

$$\begin{aligned}
 (*) \text{ Tomando } \Delta^3 u_i &= \Delta(\Delta^2 u_i) = \Delta^2 u_{i+1} - \Delta^2 u_i \\
 &= u_{i+3} - 3u_{i+2} + 3u_{i+1} - u_i
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Delta^3 u_i}{\partial u_x} = \frac{\partial u_{i+3}}{\partial u_x} - 3 \frac{\partial u_{i+2}}{\partial u_x} + 3 \frac{\partial u_{i+1}}{\partial u_x} - \frac{\partial u_i}{\partial u_x}$$

$$(4.4.2) \left\{ \begin{array}{l} h_1^2 u_1'' = h_1^2 u_1 - \lambda \Delta^3 u_1 \\ h_2^2 u_2'' = h_2^2 u_2 + 3\lambda \Delta^3 u_1 - \lambda \Delta^3 u_2 \\ h_3^2 u_3'' = h_3^2 u_3 - 3\lambda \Delta^3 u_1 + 3\lambda \Delta^3 u_2 + \lambda \Delta^3 u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m-2}^2 u_{m-2}'' = h_{m-2}^2 u_{m-2} - 3\lambda \Delta^3 u_{m-5} + 3\lambda \Delta^3 u_{m-4} - \lambda \Delta^3 u_{m-3} \\ h_{m-1}^2 u_{m-1}'' = h_{m-1}^2 u_{m-1} + 3\lambda \Delta^3 u_{m-4} - \lambda \Delta^3 u_{m-3} \\ h_m^2 u_m'' = h_m^2 u_m - \lambda \Delta^3 u_{m-3} \end{array} \right.$$

Al tomarse $u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_{m-2}, u_{m-1}, u_m$ de manera que:

$$(4.4.3) \quad \Delta^3 u_{-2} = \Delta^3 u_{-1} = \Delta^3 u_0 = \Delta^3 u_{m-2} = \Delta^3 u_{m-1} = \Delta^3 u_m = 0.$$

El sistema de ecuaciones lineales (4.4.2) se puede escribir por medio de la ecuación en diferencias:

$$(4.4.5) \quad h_{i+3}^2 u_{i+3}'' = h_{i+3}^2 u_{i+3} - \lambda \Delta^6 u_i, \\ i = -2, m-3$$

o bien:

$$(4.4.6) \quad \varepsilon u_i'' = \varepsilon u_i - \Delta^4 u_{i-3} \quad i = 1, \dots, m$$

con $\varepsilon \lambda = h_1^2 = h_2^2 = \dots = h_m^2$, y con las condiciones (naturales) de frontera (4.4.3).

Aquí estamos en el punto de que resolver el sistema de ecuaciones lineales (4.4.2) es equivalente a resolver la ecuación en diferencias (4.4.6) con condiciones naturales de frontera (4.4.3).

Ahora bien, antes de resolver el sistema (4.4.2), Trabajaremos con (4.4.6) para la demostración del teorema, recordando primero que la definición del momento de orden r de una variable aleatoria χ es:

$$(4.4.7) \quad \mu_r = \sum_{j=1}^m \chi_j^r f(\chi_j)$$

la cual debemos aplicar en (4.4.6) para $r=0, 1$ y 2 .

Sea

$$\varepsilon u_{i+3} - \varepsilon u''_{i+3} = \Delta^6 u_i$$

aplicando (4.4.7) para $r=0$ se tiene:

$$\varepsilon \sum_{i=2}^{m-3} u_{i+3} - \varepsilon \sum_{i=2}^{m-3} u''_{i+3} = \sum_{i=2}^{m-3} \Delta^6 u_i$$

desarrollando el lado derecho:

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{i=2}^{m-3} u_{i+3} - \varepsilon \sum_{i=2}^{m-3} u''_{i+3} &= \Delta^6 u_{-2} + \Delta^6 u_{-1} + \dots + \Delta^6 u_{m-3} \\ &= \Delta(\Delta^5 u_{-2}) + \dots + \Delta(\Delta^5 u_{m-3}) \\ &= (\cancel{\Delta^5 u_{-1}} - \Delta^5 u_{-2}) + (\cancel{\Delta^5 u_0} - \cancel{\Delta^6 u_{-1}}) + \dots \\ &\quad + (\cancel{\Delta^5 u_{m-3}} - \cancel{\Delta^5 u_{m-4}}) + (\Delta^6 u_{m-2} - \cancel{\Delta^6 u_{m-3}}) \end{aligned}$$

finalmente

$$\varepsilon(u_1 + u_2 + \dots + u_m) - \varepsilon(u_1'' + u_2'' + \dots + u_m'') = \Delta^5 u_{m-2} - \Delta^6 u_{-2}$$

pero por las condiciones naturales (4.4.3)

$$\Delta^5 u_{m-2} = \Delta^5 u_{-2} = 0$$

se tiene

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_m) = (u_1'' + u_2'' + \dots + u_m'') \quad (4.48)$$

Ahora bien, obteniendo los momentos de

orden 1:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1' &= \sum_{j=1}^m j \mathcal{U}_j \\ &= \mathcal{U}_1 + 2\mathcal{U}_2 + 3\mathcal{U}_3 + \dots + m\mathcal{U}_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1'' &= \sum_{j=1}^m j \cdot \mathcal{U}_j \\ &= \mathcal{U}_1'' + 2\mathcal{U}_2'' + 3\mathcal{U}_3'' + \dots + m\mathcal{U}_m'' \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_1'' &= \sum_{j=1}^m j \cdot \Delta^6 \mathcal{U}_{j-3} \\ &= \Delta^6 \mathcal{U}_{-2} + 2\Delta^6 \mathcal{U}_{-1} + \dots + m\Delta^6 \mathcal{U}_{m-3} \\ &= \Delta(\Delta^5 \mathcal{U}_{-2}) + 2(\Delta(\Delta^5 \mathcal{U}_{-2})) + \dots + m(\Delta(\Delta^5 \mathcal{U}_{m-3})) \end{aligned}$$

desarrollando se tiene que:

$$\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_1'' = \Delta^4 \mathcal{U}_{-2} - \Delta^4 \mathcal{U}_{m-2} + m\Delta^6 \mathcal{U}_{m-2}.$$

y otra vez por las condiciones naturales (4.4.3) se concluye que:

$$\mathcal{U}_1 + 2\mathcal{U}_2 + 3\mathcal{U}_3 + \dots + m\mathcal{U}_m = \mathcal{U}_1'' + 2\mathcal{U}_2'' + 3\mathcal{U}_3'' + \dots + m\mathcal{U}_m'' \quad (4.4.9)$$

Calculando los momentos de orden 2 para la expresión (4.4.5) se obtiene:

$$E(\mathcal{U}_1 + 2^2 \mathcal{U}_2 + \dots + m^2 \mathcal{U}_m) - E(\mathcal{U}_1'' + 2^2 \mathcal{U}_2'' + \dots + m^2 \mathcal{U}_m'') =$$

$$= \Delta^6 u_{-2} + 2^2 \Delta^6 u_{-1} + \dots + m^2 \Delta^6 u_{m-3}$$

de cuyo desarrollo queda:

$$\begin{aligned} & \varepsilon (u_1 + 2^2 u_2 + \dots + m^2 u_m) - \varepsilon (u_1'' + 2^2 u_2'' + \dots + m^2 u_m'') \\ &= -\Delta^2 u_{-2} - \Delta^3 u_{-1} + 2 \Delta^3 u_{m-2} - (2m-1) \Delta^4 u_{m-2} + m^2 \Delta^5 u_{m-2} \end{aligned}$$

pero por las condiciones de (4.4.3) esto se hace cero; y se tiene:

$$(4.4.10) \quad u_1 + 2^2 u_2 + \dots + m^2 u_m = u_1'' + 2^2 u_2'' + \dots + m^2 u_m''$$

Con (4.4.8), (4.4.9) y (4.4.10) se concluye la prueba de que los momentos de orden 0, 1 y 2 son los mismos tanto para los valores de los datos como para los valores de los datos graduados.

Así pues lo que se acaba de demostrar es el "Teorema de Conservación de los Momentos", el cual puede ser expresado, diciendo que la gráfica que representa a los datos graduados y la que representa a los no graduados tienen las mismas áreas, que conservan el mismo promedio y la misma dispersión cuadrática media o varianza.

4.5 Obtención de la Tabla Graduada U

En la época en que Whittaker desarrolló su método no existía la herramienta de cálculo de la computadora electrónica como para obtener las u_i 's resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (4.4.2); así, él se propone calcularlas a partir de hallar la solución de la ecuación (4.4.6):

$$\epsilon u_i - \Delta^6 u_{i-3} = \epsilon u_i'' \quad i = 1, m$$

con $\epsilon \lambda = h_1^2 = h_2^2 = \dots = h_m^2$, con condiciones de frontera (4.4.3) y con las restricciones (4.4.7):

$$\mathcal{U}_r(U'') = \mathcal{U}_r(U), \quad r = 0, 1 \text{ y } 2.$$

mediante la siguiente expresión:

$$(4.5.1) \quad U = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots$$

donde al i -ésimo término será:

$$(4.5.2) \quad u_i = u_{i,0} + \epsilon u_{i,1} + \epsilon^2 u_{i,2} + \dots$$

y dado que ϵ se toma tan pequeño, que los términos en ϵ^k pueden despreciarse desde $k \geq 2$, así u_i se puede calcular como:

$$(4.5.3) \quad u_i = u_{i,0} + \varepsilon u_{i,1}$$

De esta expresión, si $\varepsilon \rightarrow 0$ resulta que:

$$u_i = u_{i,0}$$

por un lado.

Ahora como

$$\phi(U) = F(U) + \lambda S(U)$$

$$\phi(U) = F(U) + \frac{h^2}{\varepsilon} S(U), \quad \varepsilon = \frac{h^2}{\lambda}$$

$$\phi(U) = \frac{1}{\varepsilon} \{ \varepsilon F(U) + h^2 S(U) \}$$

llamando $\psi(U) = \{ \varepsilon F(U) + h^2 S(U) \}$, tenemos que: las funcionales S , ψ y ϕ alcanzan su valor mínimo en el mismo punto U ;

así $u_{i,0}$ que corresponde a minimizar a $\phi(U)$ con $\varepsilon = 0$, se reduce a minimizar a $S(U)$.

Ahora como

$$S(U) = \|\Delta^3 U\|^2$$

se sigue que $\min S(U) = 0$, lo que ocurre

sólo cuando $\Delta^3 u_i = 0$ $i = 1, m$, y esto evidentemente sucederá cuando $u_{i,0}$ es una tabla con tendencia cuadrática.

Ahora si sustituimos (4.5.3) en

(4.4.5) Tenemos que:

$$\varepsilon u_i'' = \varepsilon (u_{i,0} + \varepsilon u_{i,1}) - \Delta^6 (u_{i-3,0} + \varepsilon u_{i-3,1})$$

lo que podemos escribir como:

$$\varepsilon u_i'' = \varepsilon u_{i,0} + \varepsilon^2 u_{i,1} - \Delta^6 u_{i-3,0} - \varepsilon \Delta^6 u_{i-3,1}$$

de donde, despreciando el término en ε^2 y Tomando en cuenta que $\Delta^3 u_{i-3,0} = 0$, se sigue que:

$$u_i'' = u_{i,0} - \Delta^6 u_{i-3,1}$$

o bien

$$\Delta^3 \Delta^{-3} u_{i,1} = u_{i,0} - u_i'' \quad i = 1, m$$

dado que

$$\Delta^6 u_{i-3} = \Delta^3 \Delta^{-3} u_i \quad (*)$$

(*) definiendo las diferencias hacia atrás como:

$$\Delta^{-1} u_i = u_i - u_{i-1}$$

De aquí que Whittaker resuelva la ecuación (4.4.6) con condiciones de frontera (4.4.3) mediante la ejecución de los siguientes pasos:

1) Se halla la solución $(u_{i,0})$ de la ecuación

$$\Delta^3 u_i = 0$$

satisfaciendo las condiciones (4.4.7)

$$\mathcal{M}_r(u_{i,0}) = \mathcal{M}_r(u_i'') \quad \text{para } r=0,1,2$$

2) Se resuelve la ecuación en diferencias

$$\Delta^3 \Delta^{-3} u_i = u_{i,0} - u_i'' \quad i=1, \dots, m$$

primero hacia adelante y luego hacia atrás, i.e. se resuelven las ecuaciones:

$$a) \quad \Delta^3 v_i = u_{i,0} - u_i'' \quad i=1, \dots, m$$

con condiciones de frontera $\Delta^3 v_{-2} = \Delta v_{-1} = v_0 = 0$

$$b) \quad \Delta^{-3} u_i = v_i \quad i=1, \dots, m$$

con los requerimientos $\mathcal{M}_r(u_i) = 0$, $r=0,1,2$

Para ver en detalle este bosquejo, verse la página 68 en Whittaker [27].

Es muy importante hacer notar que el procedimiento anterior se puede efectuar con calculadoras de escritorio, y al cambio de valor en el parámetro λ (y con ello ϵ) no interviene en el cálculo de las tablas $U_0 = (u_{i,0})$ y $U_1 = (u_{i,1})$.

4.6 Enfoque Matricial del Método de Whittaker.

En esta sección veremos como se pueden calcular las u_i 's a partir de la solución del sistema (4.4.2), pero desde un punto de vista matricial. Así, retomando la expresión (4.2.1):

$$\phi(U) = F(U) + \lambda S(U)$$

la cual toma su forma matricial:

$$(4.6.1) \quad \phi(\bar{u}) = \|D^{-1}(\bar{u} - \bar{u}^0)\|^2 + \lambda \|B\bar{u}\|^2$$

haciendo la convención de que $U = \bar{u}$, para evitar confusiones con el álgebra de matrices; y siendo B la matriz que tiene a los coeficientes de las terceras diferencias: i.e.:

$$B = \begin{bmatrix} -1, & 3, & -3, & 1 \\ & -1, & 3, & -3, & 1 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1, & 3, & -3, & 1 \\ & & & & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} -1, & 3, & -3, & 1 \\ & -1, & 3, & -3, & 1 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1, & 3, & -3, & 1 \\ & & & & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}} \right\} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}} \right\} M-3$$

M

Ahora siguiendo el procedimiento para mi
 nimir $\phi(U)$, es decir calcular primeramen
 te el gradiente $\nabla \phi(U)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi(\bar{u}) &= \|D^{-1}(\bar{u} - \bar{u}''')\|^2 + \lambda \|B\bar{u}\|^2 \\ &= \langle D^{-1}(\bar{u} - \bar{u}'''), D^{-1}(\bar{u} - \bar{u}''') \rangle \\ &\quad + \lambda \langle B\bar{u}, B\bar{u} \rangle\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\nabla_u \phi(\bar{u}) &= D^{-1}(D^{-1}(\bar{u} - \bar{u}''')) + D^{-1}(D^{-1}(\bar{u} - \bar{u}''')) \\ &\quad + \lambda \{ B^T(B\bar{u}) + B^T(B\bar{u}) \}\end{aligned}$$

$$\nabla_u \phi(\bar{u}) = 2 D^{-2}(\bar{u} - \bar{u}''') + 2 \lambda B^T B \bar{u}$$

De esta relación se sigue que $\nabla_u \phi(\bar{u}) = 0$
 sí y sólo sí \bar{u} resuelve el sistema

$$(4.6.2) \quad (D^{-2} + \lambda B^T B) \bar{u} = D^{-2} \bar{u}''.$$

En el caso particular donde

$$\lambda \varepsilon = h_1^2 = h_2^2 = \dots = h_m^2$$

$$\lambda \varepsilon = D^{-2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{D^{-2}}{\lambda}$$

entonces el sistema (4.6.2.) se puede escribir como

$$\left(\frac{D^2}{\lambda} + B^t B \right) \bar{u} = \frac{D^{-2}}{\lambda} \bar{u}''$$

o bien como:

$$(4.6.3) \quad (\varepsilon I + B^t B) \bar{u} = \varepsilon \bar{u}''$$

que es la forma matricial del sistema de ecuaciones lineales (4.4.2) o la ecuación en diferencias (4.4.6) con las condiciones de frontera. (4.4.3).

Ahora, nuestra discusión se centrará en la resolución del sistema (4.6.2), haciendo notar que el proceso numérico de Whittaker para calcular la tabla graduada $\bar{u}(U)$ está limitado al caso particular (4.6.3).

Además, como se mencionó en la introducción, una de las cosas atractivas del método de Whittaker radica en su flexibilidad de poder modular para cada caso los grados de alisamiento y ajuste mediante el parámetro λ , lo cual plantea la cuestión de qué hacer para determinar el valor apropiado para el parámetro λ . La respuesta a esta cuestión se ha estado estudiando, evidentemente desde los tiempos de Whittaker, quien propone su determinación por ensayo y se puede decir que actualmente se cuenta con respuestas muy positivas, pero aún parciales a tan fundamental cuestión (Reinseh C. H. [16], Morozov V. A. [13], Tikhonov A. N. et al ([23], [24] y [25]) y Wahba G. et al. [26] entre otros), En cualquier caso, la determinación del valor apropiado del parámetro λ requiere de la resolución del sistema (4.6.2) para diferentes valores de éste.

Lo anterior nos plantea el problema.

práctico de diseñar un algoritmo que nos permita resolver el sistema (4.6.2) de manera numéricamente estable y con una cantidad de aritmética razonable. Esto último, tiene particular importancia, pues las entradas de la matriz coeficiente: $D^{-2} + \lambda B^T B$ cambian como cambia el valor de λ .

A continuación se presenta una propuesta de algoritmo "numéricamente estable" que permite superar las dificultades prácticas de resolver nuestro sistema en cuestión para diferentes valores del parámetro λ . Cabe decir que este proceso se va volviendo más ventajoso al usar medidas de suavizamiento de órdenes cada vez mayores.

Para ello, veamos que nuestro sistema (4.6.2):

$$(D^{-2} + \lambda B^T B) u = D^{-2} u''$$

siendo $D^{-2} = \text{diag} (h_1^2, h_2^2, \dots, h_n^2)$

entonces se tiene que

$$(D^{-T}D^{-1} + \lambda B^T B) u = D^{-2} u''$$

$$D^T (D^{-1} + \lambda D^T B^T B) u = D^{-2} u''$$

$$D^T (I + \lambda D^T B^T B D) D^{-1} u = D^{-2} u''$$

Así, multiplicando por D , se sigue que

$$(I + \lambda D^T B^T B D) D^{-1} u = D^{-1} u''$$

$$(I + \lambda (BD)^T B D) D^{-1} u = D^{-1} u''$$

$$(I + \lambda C^T C) v = z \quad ; \quad v = D^{-1} u, \quad z = D^{-1} u''$$

ahora haciendo $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, se logra que.

$$(\alpha I + C^T C) v = \alpha z \quad ; \quad v = D^{-1} u, \quad z = D^{-1} u''$$

que es la forma más conveniente de escribir el sistema (4.6.2), para poder diseñar el algoritmo de su solución.

Algoritmo.

1.- Por medio de reflexiones de Householder se bidiagonaliza superiormente a la matriz C (Golub and Reinsch [5]),

esto es, se hallan V y Q ortogonales tal que

$$C = V [F | 0] Q^T$$

$(m-3) \times m$

obteniéndose que

$$C^T C = Q \begin{pmatrix} T & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 \end{pmatrix} Q^T \quad \text{con } Q^T Q = I, \\ T = F^T F$$

(ver Moler [12] cap. 6).

2.- Se resuelve el sistema tridiagonal.

$$(4.6.4) \quad (\alpha I + \begin{vmatrix} T & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 \end{vmatrix}) \bar{w} = \bar{h}$$

$$\bar{w} = Q^T v, \quad \bar{h} = Q^T z$$

calculando primero:

$$i) \quad \bar{z} = D^{-1} u'' \quad y$$

$$ii) \quad \bar{h} = Q^T z$$

3.- Por último se calcula

$$i) \quad \bar{v} = Q \bar{w}$$

$$iii) \quad \bar{u} = D v$$

4.- Para un nuevo valor de α se repite el

proceso anterior desde el 2º paso

Es importante observar que el primer paso del anterior algoritmo (que es el que requiere más aritmética) se efectúa una sola vez, y que se modifica sólo a la diagonal del sistema (4.6.4) al cambiar el valor de el parámetro α .

Para terminar veamos que el sistema (4.6.2):

$$(D^{-2} + \lambda B^t B) \bar{u} = D^{-2} \bar{u}''.$$

corresponde a las ecuaciones de Euler o normales del problema de mínimos cuadrados:

$$\min_{\bar{u}} \left\| \begin{bmatrix} D^{-1} \\ \sqrt{\lambda} B \end{bmatrix} \bar{u} - \begin{bmatrix} D^{-1} u'' \\ \theta \end{bmatrix} \right\|$$

ya que $\begin{bmatrix} D^{-1} \\ \sqrt{\lambda} B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D^{-1} \\ \sqrt{\lambda} B \end{bmatrix} = (D^{-2} + \lambda B^t B).$

Capítulo V

A lisamiento vía Spline.

5.1 Introducción.

Supongamos que tenemos una tabla U' de datos por graduar; digamos una cierta tabla de tasas de mortalidad quinquenales. Si tal tarea la llevamos a cabo por un método de promedios móviles, por ejemplo, nos veremos obligados a aplicar interpolación osculatoria, si lo que queremos es la construcción de una tabla anual de mortalidad.

Una posible alternativa sería la aplicación de la graduación mediante un método de interpolación osculatoria modificada, los cuales como ya hemos visto tienen el inconveniente de tener un nivel fijo de corrección al igual que los métodos de promedios móviles.

La aplicación del método de Whittaker,

para la construcción de nuestra tabla anual de mortalidad a partir de una quinquenal dada, presenta el mismo inconveniente antes mencionado para los métodos de promedios móviles. Pero en contraposición a los métodos vía interpolación osculadora modificada, aparte de darnos toda la tabla graduada de un "solo golpe", les da un tratamiento "natural" a los extremos de la tabla, esto es, el método de Whittaker nos permite adecuar de tabla a tabla el balance entre ajuste o consistencia y lisura.

Así pues, es natural plantearse la posibilidad de diseñar un método que como un solo proceso tome tanto lo bueno de la interpolación osculatoria como lo del método de Whittaker. Shoemberg es el primero en hacer notar tal posibilidad, mediante el planteamiento del siguiente problema:

Hallar $S_\lambda(x)$ tal que

$$\min_{f \in C^p(a,b)} \Phi_\lambda[f] = \Phi_\lambda[S_\lambda]$$

en donde

$$(5.1) \quad \Phi_{\lambda}^p [f] = \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) - u_i''}{\delta w_i} \right)^2 + \lambda \int_{x_1}^{x_n} [f^{[p]}(\tau)]^2 d\tau.$$

siendo p un entero y λ un real positivo.

A la funcional $\Phi_{\lambda}^p [f]$ dada por (5.1) se le llamará en lo que resta del trabajo, funcional de Schoenberg. Es directo que esta funcional tiene un gran parecido a la de Whittaker:

$$\Phi_{\lambda} [U] = \sum_{i=1}^m \left(\frac{u_i - u_i''}{w_i} \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{m-3} |\Delta^3 u_i|^2.$$

En este capítulo veremos que la funcional de Schoenberg $\Phi_{\lambda}^p [f]$ tiene un único mínimo para toda $\lambda > 0$ y que este mínimo es una función spline natural de orden p . (ver su definición en la sección siguiente).

En particular tendremos que

$$U: u_i \triangleq S_{\lambda}(x_i)$$

es la tabla quinquenal graduada, pues en general, $u_i'' \neq S_{\lambda}(x_i)$.

Así pues, la función spline $S_2(x)$ obtenida vía la funcional de Schoenberg, no resulta ser otra cosa que un polinomio osculador modificado. Lo importante, sin embargo, es que mediante este método se efectúa la graduación y la interpolación osculatoria modificada en un solo proceso, y de un solo golpe.

Por último, es conveniente observar que resulta más o menos fácil, a partir de $S_2(x)$, calcular $S_2^{(1)}(x)$, $S_2^{(11)}(x)$, hasta $S_2^{(2p-2)}(x)$ para x dado en (x_1, x_m) . Lo cual es particularmente importante en Actuaría cuando se quiere calcular, por ejemplo, la fuerza de mortalidad.

5.2 Funciones Spline.

En general, una función spline de orden m es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} cuya gráfica es una curva polinomial de grado no mayor de m por pedazos que se unen "lloamente" (al estilo de los polinomios osculadores) hasta su $m-1$ derivada, i.e. que globalmente es de clase C^{m-1} .

Para nosotros son de especial interés las funciones spline llamadas naturales.

Definición 5.2.1. Dado los nodos

$\zeta: x_1 < x_2 < \dots < x_m$, ($m \geq 2p-1$), por una función spline natural $s(x)$ de orden $2p-1$ y con nodos ζ , entenderemos una función de clase C^{2p-2} en todo \mathbb{R} tal que:

- (a) es polinomial de grado no mayor que $2p-1$ en $[x_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, m-1$. y,
- (b) es polinomial de grado no mayor que $p-1$ en $(-\infty, x_1)$ y (x_m, ∞) .

Nota. Es muy importante observar al lector, que la condición (b) de esta definición es equivalente a decir que

$$s^{(j)}(x_i) = s^{(j)}(x_m) = 0, \quad j = 0, \dots, 2p-2.$$

En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{S}_{p,1}(\mathcal{Z})$, al conjunto de todas las funciones spline natural de orden $2p-1$, con nodos \mathcal{Z} . Es inmediato ver que $\mathcal{S}_{p,1}(\mathcal{Z})$ es un subespacio vectorial de $C^{2p-2}(\mathbb{R})$.

A continuación veremos que $\mathcal{S}_{p,1}(\mathcal{Z})$ es de dimensión finita y con ello también su caracterización, usualmente llamada canónica.

Para ello, empecemos considerando la función escalón

$$1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

cuya gráfica aparece a continuación

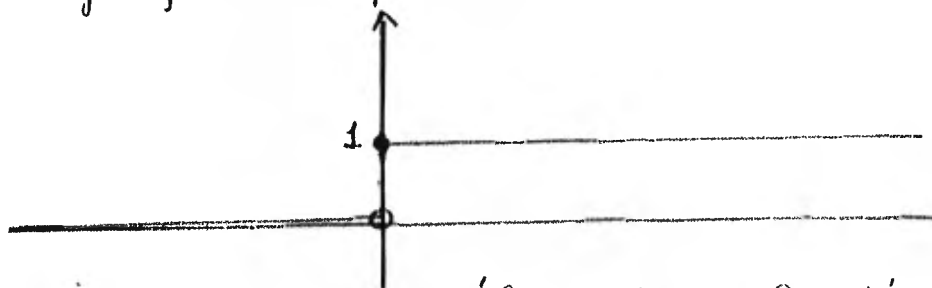


Fig 5.1 Gráfica de la función Escalón.

Es directo ver que la función

$$x_+^k = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^k, & x \geq 0 \end{cases}$$

es la solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\frac{1}{k!} y^{(k)}(x) = 1(x)$$

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

Con estas bases y la definición 5.2.1, es claro ver que $s(x) \in \mathcal{S}_p(\mathbb{Z})$ si y sólo si $s(x)$ es la solución del problema.

$$(5.2.1) \quad \frac{1}{(2p-1)!} y^{(2p-1)}(x) = \sum_{k=1}^m b_k 1(x-x_k),$$

con condiciones en la frontera

$$(5.2.2) \quad y^{(j)}(x_i) = y^{(j)}(x_n) = 0, \quad j = p, p+1, \dots, 2p-2.$$

Ahora, es directo ver que la solución del problema (5.2.1) con "condiciones iniciales".

$$y^{(j)}(x_i) = 0, \quad j = p, p+1, \dots, 2p-2,$$

viene dada por:

$$(5.2.3) \quad s(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + \sum_{k=1}^m b_{k2} (x-x_{k2})_+^{p-1}$$

pues $\sum_{k=1}^m b_k (x-x_k)_+^{2p-1}$ es la 'solución particular' de este problema y $a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1}$ es la 'solución' de su correspondiente 'homogéneo' (veáse a Bellman R. & Cook [2]).

Así, sólo resta ver que (5.2.3) cumpla con

$$y^{(j)}(x_m) = 0, \quad j = p, p+1, \dots, 2p-2$$

Para ello observemos que estas condiciones equivalen a que la expresión (5.2.3) para $s(x)$ se reduzca a un polinomio de grado a lo más $p-1$ en $(x_m, +\infty)$. Ahora, viendo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m b_k (x-x_k)_+^{2p-1} &= \sum_{k=1}^m b_k \left[\sum_{j=0}^{2p-1} \binom{2p-1}{j} x_k^j x^{2p-j-1} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{2p-1} \binom{2p-1}{j} \left[\sum_{k=1}^m b_k x_k^j \right] x^{2p-j-1} \end{aligned}$$

para $x > x_m$, tenemos que (5.2.3) se reduce a un polinomio de grado a lo más $p-1$ en $(x_m, +\infty)$ si

$$(5.2.4) \quad \sum_{k=1}^m b_k x_k^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

En resumen, hemos demostrado que una función spline natural de orden $2p-1$ en su

forma canónica viene dada por.

$$s(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + \sum_{k=1}^m b_k (x-x_k)_+^{2p-1}$$

con las b_k 's tales que:

$$\sum_{k=1}^m b_k x_k^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Puede seguirse que $\mathcal{S}_{2p-1}(\mathcal{Z})$ está generado por las funciones $\mathcal{M} : 1, x, x^2, \dots, x^{p-1}, (x-x_1)_+^{2p-1}, \dots, (x-x_m)_+^{2p-1}$, y por tanto que la dimensión de $\mathcal{S}_{2p-1}(\mathcal{Z})$ es finita; más aún, que su $\dim \mathcal{S}_{2p-1}(\mathcal{Z}) = m+p$, si demostramos que \mathcal{M} es un conjunto linealmente independiente (l.i.).

Para tal efecto, veamos primero que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ donde $\mathcal{M}_1 : 1, x, \dots, x^{p-1}$ y $\mathcal{M}_2 : (x-x_1)_+^{2p-1}, \dots, (x-x_m)_+^{2p-1}$. Del Teorema Fundamental del Algebra se sigue que \mathcal{M}_1 es l.i. Para ver que \mathcal{M}_2 es l.i. obsérvese que $(x-x_m)_+^{2p-1}$ y $(x-x_{m-1})_+^{2p-1}$ son claramente l.i., pues si, por ejemplo, $(x-x_{m-1})_+^{2p-1} = d_1 (x-x_m)_+^{2p-1}$ entonces $(x-x_{m-1})_+^{2p-1} \equiv 0$ en $[x_{m-1}, x_m)$, lo cual es un absurdo. De manera completamente

análoga se puede probar que $(x-x_{m-2})_+^{2p-1}$ no se puede expresar como combinación lineal de $(x-x_{m-1})_+^{2p-1}$ y $(x-x_m)_+^{2p-1}$. Repitiendo el proceso (un número finito de veces) llegamos a la conclusión de que m_2 es l.i.

Así, bastará ver que los subespacios $L(m_1)$ y $L(m_2)$ generados por m_1 y m_2 respectivamente, tienen intersección sólo trivial, esto es, que $L(m_1) \cap L(m_2) = \{0\}$ donde $0(x) \equiv 0$, para tener que m es l.i. y con ello que $\dim \mathcal{S}_{2p-1}(\mathcal{Z}) = \dim L(m_1) + \dim L(m_2) = p+m$. Para ello, veamos que si $m(x)$ está en $L(m_1) \cap L(m_2)$ entonces $m(x)$ es un polinomio de grado a lo más $p-1$ en todo \mathbb{R} y también un polinomio de grado a lo más $2p-1$ en cada $[x_i, x_{i+1})$, para $i=1, m-1$, que se anula idénticamente en $(-\infty, x_1] \cup [x_m, +\infty)$ por lo que $m(x) \equiv 0$. Esto completa nuestra demostración.

A continuación se ve que dada una tabla

$$U: (x_i, u_i''), \quad i=1, m.$$

hay una única función spline $s(x) \in \mathcal{S}_{2p-1}(\mathcal{Z})$

que interpola dicha tabla. Esto es, tal que

$$(5.2.5) \quad s(x_i) = u_i'' \quad , \quad i = 1, m$$

En efecto, para ello basta comprobar que el sistema homogéneo al que sigue

$$Ax = d$$

Tiene sólo solución Trivial, siendo

A $(m+p)$ \times $(m+p)$	$ \begin{array}{cccccccc} 1 & x_1 & \dots & x_1^{p-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{p-1} & (x_2-x_1)^{2p-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{p-1} & (x_3-x_1)^{2p-1} & (x_3-x_2)^{2p-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^{p-1} & (x_m-x_1)^{2p-1} & (x_m-x_2)^{2p-1} & (x_m-x_3)^{2p-1} & \dots & (x_m-x_{m-1}) & 0 \end{array} $
	$ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{m-1} & x_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{p-1} & x_2^{p-1} & x_3^{p-1} & \dots & x_{m-1}^{p-1} & x_m^{p-1} \end{array} $

$$x^t = (a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_m)$$

$$d^t = (u_1'', u_2'', \dots, u_m'', 0, \dots, 0)$$

al cual se genera de las condiciones de interpolación (5.2.5) y las complementarias (5.2.4) de la expresión (5.2.3).

5.2.1 Cálculo de la función Spline natural cúbica.

De las funciones Spline naturales la más conocida y trabajada es la Spline natural cúbica por pedazos, y es por lo tanto la que desarrollaremos en esta subsección.

Una función Spline natural cúbica tiene según la def (5.2.1) la siguiente expresión canónica:

$$s(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{i=1}^m b_i (x-x_i)^3, \quad i=1, \dots, m,$$

con

$$\sum_{i=1}^m b_i x^r = 0 \quad r=0, 1.$$

cuya solución está dada por un sistema de Vandermonde que no es conveniente utilizar porque como se anotó en la sec 2.,

las matrices de estos sistemas resultan ser típicamente mal comportadas. Así daremos una alternativa de cálculo.

La idea es construir nuestra función spline $s(x)$ escribiéndola por pedazos en forma de polinomios cúbicos, de manera tal que en

los nodos se pegan continuamente junto con sus primeras dos derivadas. Henderson fue el primero en proponer la siguiente expresión para $s(x)$, del tipo de Everett:

$$(5.2.6) \quad s(x) = u_i''(1-t) + u_{i+1}''t + \frac{\rho_i h_i^2}{6}(1-t)((1-t)^2-1) + \frac{\rho_{i+1} h_i^2}{6}t(t^2-1)$$

para x en $[x_i, x_{i+1})$, siendo $t = \frac{x-x_i}{h_i}$ y $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Así, nuestro problema se reduce a determinar los valores de los parámetros ρ_i 's de manera que

$$(5.2.7) \quad \begin{cases} s(x_i) = s(x_i^+) \\ s'(x_i) = s'(x_i^+) \\ s''(x_i) = s''(x_i^+) \text{ para } i = 2, \dots, m-1; \\ s''(x_1) = s''(x_m) = 0 \end{cases}$$

De la expresión (5.2.6) es inmediato ver que independientemente de los valores de los parámetros ρ_i 's, se tiene que

$$s(x_i) = s(x_i^+) \quad i = 2, \dots, m-1$$

Derivando en (5.2.6) se sigue que:

$$(5.2.8) \quad s'(x) = \frac{\Delta u_i''}{h_i} - \frac{c_i h_i}{6} (\exists (1-\tau)^2 - 1) \\ + \frac{c_{i+1} h_i}{6} (\exists \tau^2 - 1), \quad x \in [x_i, x_{i+1})$$

y que

$$(5.2.9) \quad s''(x) = c_i (1-\tau) + c_{i+1} \tau, \quad x \in [x_i, x_{i+1}).$$

De (5.2.9) es directo ver que

$$s''(x_i^-) = s''(x_i^+), \quad i = 2, m-1,$$

independientemente de los valores de los parámetros c_i 's buscados. Así, que sólo nos quedan las m condiciones siguientes:

$$s'(x_i^-) = s'(x_i^+), \quad i = 2, m-1 \text{ y}$$

$$s''(x_0) = s''(x_m) = 0$$

para determinar los m parámetros c_i 's.

De (5.2.8) se sigue que las condiciones $s'(x_i^-) = s'(x_i^+)$ $i = 2, m-1$ dan lugar a las relaciones

$$\frac{\Delta u_{i+1}''}{h_{i+1}} + \frac{c_{i+1} h_{i+1}}{6} + 2 \frac{c_i h_{i+1}}{6} =$$

$$\frac{\Delta u_i''}{h_i} - 2 \frac{c_i h_i}{6} - \frac{c_{i+1} h_i}{6}, \quad i = 2, m-1.$$

$$(5.2.13) \quad b^r = \left(\left(\frac{\Delta u_2''}{h_2} - \frac{\Delta u_1''}{h_1} \right), \left(\frac{\Delta u_3''}{h_3} - \frac{\Delta u_2''}{h_2} \right), \dots, \right. \\ \left. \left(\frac{\Delta u_{m-1}''}{h_{m-1}} - \frac{\Delta u_{m-2}''}{h_{m-2}} \right) \right).$$

Otra forma de llevar a efecto la misma idea, consiste en construir la función spline cúbica expresándola en la forma:

$$(5.2.14) \quad s(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3 \\ \text{para } x \in [x_i, x_{i+1}),$$

y determinar los parámetros a_i , b_i , c_i y d_i , $i = 1, m-1$, de manera que se satisfagan las condiciones (5.2.7), más las siguientes de interpolación.

$$s(x_i) = y_i \quad i = 1, m.$$

De estas últimas, inmediatamente se sigue que

$$(5.2.15) \quad a_i = y_i'', \quad i = 1, m$$

De las condiciones de continuidad, i.e.:

$$s(x_{i+1}^-) = s(x_{i+1}^+), \quad i = 1, m-2$$

se obtiene que

$$(5.2.16) \quad b_i = \frac{\Delta u_i''}{h_i} - h_i c_i - h_i^2 d_i \quad i = 2, m-1$$

mientras que de las condiciones de continuidad de la segunda derivada, i.e.:

$$s''(x_{i-1}) = s''(x_{i+1}), \quad i = 1, m-2.$$

se sigue que

$$(5.2.17) \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

Así, los parámetros de los polinomios cúbicos (5.2.14) quedarán determinados una vez que lo sean los parámetros c_i 's. Para ello, usaremos las condiciones de continuidad de la primera derivada, i.e.:

$$s'(x_{i-1}) = s'(x_{i+1}) \quad i = 1, m-2$$

las cuales dan lugar a las relaciones:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i = b_{i+1} \quad i = 1, m-2$$

que al tomar en cuenta a las dadas en (5.2.16) y (5.2.17), se pueden reescribir como:

$$(5.2.18) \quad h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} \\ = 3 \left(\frac{\Delta u_i''}{h_i} - \frac{\Delta u_{i-1}''}{h_{i-1}} \right), \quad i = 2, m-1$$

que junto con las condiciones de frontera

$$S''(x_1) = S''(x_m) = 0$$

(las que implican que $c_1 = c_m = 0$),
dan lugar al sistema tridiagonal

$$T\bar{c} = 3\beta.$$

en donde T es la matriz tridiagonal (5.2.11), \bar{c}
y β son los vectores (5.2.12) y (5.2.13) respec-
tivamente.

5.2.2. Caracterización Variacional de las Funciones Spline Naturales

El siguiente Teorema da una caracterización variacional de las funciones spline naturales.

Teorema

Sea $s(x)$ una función spline natural de orden $2p-1$, y que interpole los datos (x_i, u_i'') , $i=1, m$, y sea $f(x)$ cualquier otra función de clase $C^p(a, b)$ que satisface las condiciones de interpolación:

$$f(x_i) = u_i'' \quad i=1, m.$$

Siendo (a, b) un intervalo finito que contiene to dos los modos x_i . Entonces

$$(5.2.19) \quad \int_a^b [f^{(p)}(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s^{(p)}(x)]^2 dx,$$

dándose la igualdad sólo si $f(x) = s(x)$

Dem

La p -ésima derivada de la función $f(x)$ se puede escribir como:

$$f^{(p)}(x) = s^{(p)}(x) + [f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x)]$$

integrando:

$$\begin{aligned} (5.2.20): \int_a^b [f^{(p)}(x)]^2 dx &= \int_a^b \left\{ s^{(p)}(x) + [f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x)] \right\}^2 dx \\ &= \int_a^b [s^{(p)}(x)]^2 dx + \int_a^b [f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x)]^2 dx \\ &\quad - 2 \int_a^b s^{(p)}(x) [f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x)] dx. \end{aligned}$$

De esta relación nos interesa calcular la tercera integral del lado derecho, a la que llamaremos I ;

$$I = -2 \int_a^b s^{(p)}(x) [f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x)] dx.$$

Integrando, sucesivamente, por partes tomando en cuenta las condiciones naturales de frontera

$$s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0, \quad j = p+1, \dots, 2p-2,$$

se obtiene que:

$$I = (-1)^{p-1} \int_a^b s^{(2p-1)}(x) [f'(x) - s'(x)] dx$$

y como $s(x)$ es una función Spline natural de grado $2p-1$, $s(x)$ es de clase C^p y por tanto su derivada $2p-1$ va a ser continua por pedazos, i.e.

$$s^{(2p-1)}(x) = h_i \quad i = 1, m-1,$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{p-1} \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} h_i [f'(x) - s'(x)] dx \\ &= (-1)^{p-1} \sum_{i=1}^{m-1} h_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(x) - s'(x)) dx \\ &= (-1)^{p-1} \sum_{i=1}^{m-1} h_i \{ (f(x_{i+1}) - s(x_{i+1})) - (f(x_i) - s(x_i)) \}, \end{aligned}$$

Pero como

$$s(x_i) = u_i'' \quad \text{y} \quad f(x_i) = u_i'' \quad i = 1, \dots, m,$$

se tiene que:

$$I = 0.$$

por lo tanto (5.2.20) se reduce a:

$$(5.2.21) \quad \int_a^b [f^{(p)}(x)]^2 dx = \int_a^b [s^{(p)}(x)]^2 dx + \int_a^b [f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x)]^2 dx$$

Pero como la segunda integral del lado derecho de (5.2.21) es no negativa entonces la desigualdad se

sigue. Finalmente vemos que la igualdad se da sólo si la segunda integral del lado derecho de (5.2.21) se anula, y esto sucede sí y sólo si $f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x) = 0$; pero esto implicaría que $f(x) - s(x)$ fuera un polinomio de grado a lo más $p-1$. Sin embargo este polinomio se hace cero para $m > p-1$ valores distintos de x (o sea en los nodos x_i) y por tanto da un polinomio idénticamente cero. Lo que prueba que $s(x) \equiv f(x)$.

5.3) Graduación viá Spline Natural Cúbica.

En esta sección veremos que al mínimo S_λ en $C^2[x_1, x_m]$ de la funcional de Schoenberg

$$(5.3.1) \quad \Phi_\lambda^2[f] = \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) - u_i''}{\delta_i} \right)^2 + \lambda \int_{x_1}^{x_m} |f^{(2)}(\tau)|^2 d\tau$$

es una función spline cúbica. También se verá que

$$i) \quad \begin{array}{l} S_\lambda \longrightarrow f, \\ \lambda \longrightarrow 0 \end{array},$$

donde f es la función spline que interpola los puntos: (x_i, u_i'') , $i=1, m$, y que

$$ii) \quad \begin{array}{l} S_\lambda \longrightarrow L, \\ \lambda \longrightarrow \infty \end{array},$$

donde L es la recta que mejor se ajusta según el criterio de mínimos cuadrados a los puntos: (x_i, u_i'') , $i=1, m$. Así que para los valores de $\lambda > 0$, S_λ resulta ser una función spline que media entre una interpolatoria ($\lambda=0$) y otra completamente alisada ($\lambda=\infty$), esto es, S_λ es una función

Spline graduadora.

La demostración de que la funcional de Schoenberg $\Phi_\lambda^2 [f]$ alcanza su mínimo S_λ en $C^2 [a, b]$, requiere de elementos de Análisis Funcional, quedando fuera, por ello, de las pretenciones de este trabajo. Sin embargo, podemos decir al lector interesado, que se encuentra en Morozov V. A [13], o bien, en Anselome P. M y Laurent P. J. [1], dos de los más sobresalientes trabajos en la materia.

La unicidad del mínimo se basa en la siguiente fundamental relación, la cual se verifica directamente:

$$(5.3.2) \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) - g(x_i)}{2 \delta_i} \right)^2 + \lambda \int_{x_1}^{x_m} \left| \frac{f''(z) - g''(z)}{2} \right|^2 dz \\ = \frac{1}{2} \Phi_\lambda^2 [f] + \frac{1}{2} \Phi_\lambda^2 [g] - \Phi_\lambda^2 \left[\frac{f+g}{2} \right]$$

En efecto, si $m_\lambda = \min \Phi_\lambda^2 [f]$, para f en $C^2 [x_1, x_m]$, entonces tendremos de la anterior relación que

$$0 \leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) - g(x_i)}{2 \delta_i} \right)^2 + \lambda \int_{x_1}^{x_m} \left| \frac{f''(z) - g''(z)}{2} \right|^2 dz \\ \leq \frac{1}{2} \Phi_\lambda^2 [f] + \frac{1}{2} \Phi_\lambda^2 [g] - m_\lambda.$$

De la cual se sigue que

$$(5.3.3) \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) - g(x_i)}{\delta_i} \right)^2 + \lambda \int_{x_1}^{x_m} \left| \frac{f''(z) - g''(z)}{2} \right|^2 dz = 0,$$

si f y g en $C^2[x_1, x_m]$ son tales que

$$m_\alpha = \Phi_\lambda^2[f] = \Phi_\lambda^2[g].$$

Por lo tanto,

$$(5.3.4i) \quad f(x_i) = g(x_i), \quad i = 1, m. \text{ y}$$

$$(5.3.4ii) \quad f''(x) = g''(x) \text{ en } [x_1, x_m]$$

Pero que $f''(x) = g''(x)$ en $[x_1, x_m]$, nos dice que $f(x) - g(x) = ax + b$, mientras que (5.3.4i) implicará que $ax + b$ tiene m ceros, siendo esto posible, por el teorema fundamental del Algebra, sólo cuando $a = b = 0$, siempre que $m \geq 2$. Con esto, hemos probado que el mínimo S_λ de la funcional de Schoenberg $\Phi_\lambda^2[f]$ en $C^2[x_1, x_m]$ es único, siempre que $m \geq 2$.

En Cálculo Diferencial se fundamenta que si $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable, y tiene un sólo mínimo x_* (o máximo), entonces a éste se le puede hallar resolviendo la ecuación $\varphi'(x) = 0$.

Si \mathcal{F} es un espacio de funciones entonces se dice que Ψ es una funcional real sobre \mathcal{F} , si Ψ es una función de \mathcal{F} en \mathbb{R} . La siguiente definición de variación $\delta \Psi [f, h]$ en f de Ψ es la contraparte de la definición de la diferencial de una función del Cálculo Diferencial.

Definición. Se define $\delta \Psi [f; h]$ en f :

$$\delta \Psi [f, h] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Psi [f + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0},$$

siempre que dicho límite exista, para toda h en \mathcal{F} .

El Cálculo Variacional (ver Smith [19]) fundamenta que si $\Psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un único mínimo f_* en \mathcal{F} (como es el caso de nuestra funcional $\Phi_\lambda^2 [f]$) y tiene variación en todo \mathcal{F} , entonces a f_* se le puede hallar

resolviendo la siguiente ecuación, llamada de Euler:

$$\delta \Psi [f; h] \equiv 0 \quad \forall h \text{ con } f+h \text{ en } \mathcal{F}.$$

En lo que sigue se prueba, mediante la resolución de la ecuación de Euler

$$\delta \Phi_{\lambda}^2 [f; h] \equiv 0,$$

asociada a la funcional de Schoenberg, que su mínimo S_{λ} es una función spline cúbica natural.

Para ello, veamos que

$$\Phi_{\lambda}^2 [f] = F(f) + \lambda S(f),$$

en donde

$$(5.3.4') \quad F(f) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) - y_i}{\delta_i} \right)^2$$

$$(5.3.4'') \quad S(f) = \int_{x_1}^{x_m} |f''(z)|^2 dz.$$

Calculando, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta F [f; h] &= \frac{d}{d\varepsilon} \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) + \varepsilon h(x_i) - y_i}{\delta_i} \right)^2 \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) + \varepsilon h(x_i) - y_i}{\delta_i} \right) \frac{h(x_i)}{\delta_i} \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

y por tanto que

$$(5.3.5) \quad \delta F[f; h] = 2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) - y_i}{\delta_i} \right) \frac{h(x_i)}{\delta_i}$$

y que,

$$\begin{aligned} \delta S[f; h] &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_m} [f''(z) + \varepsilon h''(z)]^2 dz \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= 2 \int_{x_1}^{x_m} (f''(z) + \varepsilon h''(z)) h''(z) dz \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

y luego que

$$\delta S[f; h] = 2 \int_{x_1}^{x_m} f''(z) h''(z) dz.$$

Expresión que podemos reformular, al escribirla como

$$\delta S[f; h] = 2 \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(z) h''(z) dz,$$

e integrando por partes dos veces, como si que

$$\begin{aligned} (5.3.6) \quad \delta S[f; h] &= 2 [-f''(x_1^+) h'(x_1) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{m-1} (f''(x_i^-) - f''(x_i^+)) h'(x_i) \\ &\quad + f''(x_m^-) h'(x_m) + f'''(x_1^+) h(x_1) \\ &\quad - \sum_{i=2}^{m-1} (f'''(x_i^-) - f'''(x_i^+)) h(x_i) \\ &\quad - f'''(x_m^-) h(x_m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''''(z) h(z) dz] \end{aligned}$$

Consecuentemente, de (5.3.5) y (5.3.6) como del hecho que

$$\delta \Phi_{\lambda}^2 [f; h] = \delta F [f; h] + \lambda \delta S [f; h],$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \delta \Phi_{\lambda}^2 [f; h] &= 2\lambda \left[\left(f'''(x_1^+) + \frac{1}{\lambda} \frac{f(x_1) - u_1''}{\delta_1^2} \right) h(x_1) \right. \\ &\quad - \sum_{i=2}^{m-1} (f'''(x_i^-) - f'''(x_i^+)) - \frac{1}{\lambda} \frac{f(x_i) - u_i''}{\delta_i^2} h(x_i) \\ &\quad + (-f'''(x_m^-) + \frac{1}{\lambda} \frac{f(x_m) - u_m''}{\delta_m^2}) h(x_m) \\ &\quad - f''(x_1^+) h'(x_1) + \sum_{i=2}^{m-1} (f''(x_i^-) - f''(x_i^+)) h(x_i) \\ &\quad \left. + f''(x_m^-) h'(x_m) + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(4)}(z) h(z) dz \right] \end{aligned}$$

Luego entonces, si f en $C^4 [x_1, x_m]$ es tal que

$$(5.3.7.1) \quad f^{(4)} \equiv 0 \quad \text{en } [x_i, x_{i+1}], \quad i=1, m-1,$$

$$(5.3.7.11) \quad \begin{cases} -f'''(x_1^+) = \frac{1}{\lambda} \frac{f(x_1) - u_1''}{\delta_1^2} \\ f'''(x_i^-) - f'''(x_i^+) = \frac{1}{\lambda} \frac{f(x_i) - u_i''}{\delta_i^2}, \quad i=2, m-1, \\ f'''(x_m^-) = \frac{1}{\lambda} \frac{f(x_m) - u_m''}{\delta_m^2} \end{cases}$$

$$(5.3.7.iii) \quad f''(x_1^+) = f''(x_m^-) = 0, \quad y$$

$$(5.3.7.iv) \quad f^{(k)}(x_i^-) - f^{(k)}(x_i^+) = 0, \quad i = 2, m-1, \\ k = 0, 1 \text{ y } 2,$$

se tiene que

$$\delta \Phi_2^2 [f; h] = 0, \quad \forall h \text{ con } f+h \text{ en } C^2 [x_1, x_m].$$

En conclusión, S_2 , donde $\Phi_2^2 [f]$ alcanza su mínimo, debe satisfacer las condiciones anteriores (5.3.7); esto es, que S_2 es una función spline cúbica natural. En la sección que sigue se calcula S_2 a partir de estas condiciones (5.3.7).

En lo que resta de esta sección, se harán ver las propiedades límite de (i) y (ii) de S_2 enunciadas al inicio de la sección.

Con respecto a la primera, recordemos (véase la sección anterior) que $S(x)$ está caracterizada por ser aquella función que cumple con las condiciones:

$$f(x_i) = u_i'', \quad i = 1, m, \quad y \text{ que}$$

minimiza a la funcional

$$S' [f] = \int_{x_1}^{x_m} |f''(\tau)|^2 d\tau.$$

De la definición de $S_\lambda(x)$ se sigue que

$$\Phi_\lambda^2 [s_\lambda] \leq \Phi_\lambda^2 [g] = \lambda S' [g] \quad (\lambda > 0).$$

y por tanto, que

$$(5.3.8.i) \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{s_\lambda(x_i) - u_i''}{\delta_i} \right)^2 \leq \lambda S' [g],$$

y que

$$(5.3.8.ii) \quad S' [s_\lambda] \leq S' [g].$$

Se sigue inmediatamente de la primera de estas desigualdades que

$$S_\lambda(x_i) \rightarrow u_i'' \quad , \quad i=1, m.$$

$$\lambda \rightarrow 0^+$$

lo que dice que $S_\lambda(x)$ tiende, cuando $\lambda \rightarrow 0^+$, a interpolar los puntos (x_i, u_i'') , $i=1, m$.

Por otro lado, ambas desigualdades implican, para $\bar{\lambda} > 0$ dada, que las familias $\{S_\lambda : 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}\}$ y $\{S'_\lambda : 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}\}$ son equicontinuas y uniformemente acotadas (ver Apéndice B).

Enseguida, se ve que

$$\begin{aligned} s_\lambda &\rightarrow f, \\ s'_\lambda &\rightarrow f', \quad y \\ s''_\lambda &\rightarrow f'', \end{aligned}$$

en $[x_1, x_m]$ uniformemente cuando $\lambda \rightarrow 0^+$.

Para ello veamos que del hecho de que las familias $\{s_\lambda: 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1\}$ y $\{s'_\lambda: 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1\}$ sean uniformemente acotadas como equioson Tinuas, implican (por el Teorema de Arzela-Ascoli [18]) que dada la sucesión $\{\lambda_n\}$ contenida en $(0, \bar{\lambda}_1)$ con $\lambda_n \rightarrow 0$, existe una subsucesión (que abusando de notación denotaremos por $\{\lambda_n\}$) de $\{\lambda_n\}$ y una función s_0 en $[x_1, x_m]$, de manera que

$$\begin{aligned} s_{\lambda_n} &\rightarrow s_0 \quad y \\ s'_{\lambda_n} &\rightarrow s'_0 \end{aligned}$$

uniformemente en $[x_1, x_m]$.

Por otro lado,

$$s''_{\lambda_n} \rightarrow s''_0,$$

en $[x_i, x_m]$ también uniformemente, pues

$$s_{\lambda_m}''(x) = B_i(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_{i+1} - x}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \right) + B_{i+1}(\lambda_m) \left(\frac{x - \lambda_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \right)$$

en $[x_i, x_{i+1}]$

$$i = 1, m-1,$$

Lo que permite ver que el modo de convergencia de S_{λ_n}'' depende de la convergencia de sólo m constantes: $B_i(\lambda_n)$, $i = 1, m$.
y con esto, que

$$S_{\lambda_n}'' \longrightarrow S_0'',$$

en $[x_1, x_m]$ converge uniformemente.

De las convergencias antes anotadas y de (5.3.8ii) se sigue que

$$\begin{aligned} S[f] &= \int_{x_1}^{x_m} |S_0''(z)|^2 dz \\ &= \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_m} |S_{\lambda_n}''(z)|^2 dz \\ &\leq \int_{x_1}^{x_m} |f''(z)|^2 dz = S[f] \end{aligned}$$

Pero como $S(x)$ es la única función de las que interpolan los puntos: (x_i, u_i) , $i = 1, m$, que minimiza la funcional $S[f]$, se tiene que

$$S[\mathcal{A}] \leq S[S_0].$$

Y por tanto que $S_0 \equiv \mathcal{A}$. Resultado que se obtiene independientemente de la sucesión $\{\lambda_m\}$ contenida en $(0, \lambda_1]$ convergente a cero. Con esto, se tiene probado que $S_\lambda \rightarrow \mathcal{A}$, cuando $\lambda \rightarrow 0$, uniformemente.

Para establecer la segunda propiedad límite de S_λ , esto es,

$$S_\lambda \rightarrow \mathcal{L} \quad (\text{uniformemente}), \\ \lambda \rightarrow \infty$$

recordemos que $\mathcal{L}(x)$ es la recta que mejor se ajusta a los puntos: (x_i, u_i'') , $i=1, m$, en el sentido que minimiza a la funcional.

$$F[f] = \sum_{i=1}^m \left(\frac{f(x_i) - u_i''}{\delta_i} \right)^2$$

Ahora bien, para $\lambda \geq \bar{\lambda}_2$ ($\bar{\lambda}_2 > 0$ dada), se tiene que

$$\Phi_\lambda^2[S_\lambda] \leq \Phi_\lambda^2[\mathcal{L}] = F[\mathcal{L}]$$

lo que implica que

$$(5.3.9.i) \quad F(S_\lambda) \leq F(L), \quad \lambda > 0$$

y que

$$(5.3.9.ii) \quad S'(S_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} F(L) \leq \frac{1}{\lambda_2} F(L), \quad \lambda \geq \bar{\lambda}_2.$$

Análogamente al caso anterior (ver apéndice B) se demuestra que las familias $\{S_\lambda: \lambda \geq \bar{\lambda}\}$ y $\{S'_\lambda: \lambda \geq \bar{\lambda}\}$ son equicontinuas y uniformemente acotados. Más aún, S_λ converge, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, uniformemente a una recta, pues S''_λ es lineal por pedazos y

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S''[S_\lambda] = 0,$$

en virtud de (5.3.9.ii); lo que implica que $|S''_\lambda(x)|$ tiende uniformemente a cero, y por tanto $S_\lambda(x)$ tiende uniformemente a una recta, cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

Por lo antes anotado, para $\{\lambda_n\}$ contenida en $[\bar{\lambda}_2, \infty)$ "convergiendo" a ∞ , existe una subsucesión (la cual abusando de la notación escribiremos $\{\lambda_n\}$) y una función lineal S_∞ en $[\lambda_1, \lambda_m]$ tal

que

$$\begin{aligned} S_{\lambda_n} &\longrightarrow S_{\infty} \\ S'_{\lambda_n} &\longrightarrow S'_{\infty} \quad \text{y} \\ S''_{\lambda_n} &\longrightarrow S''_{\infty} \end{aligned}$$

en $[x_1, x_m]$ uniformemente, cuando $\lambda_n \rightarrow \infty$.
En base a lo cual, se tiene que

$$F[S_{\infty}] = \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} F[S_{\lambda_n}] \leq F[l]$$

y que

$$0 \leq S[S_{\infty}] \leq \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} F[l] = 0$$

de donde se sigue, por la definición de $l(x)$, que

$$S_{\infty}(x) \equiv l(x) \text{ en } [x_1, x_m], \text{ y que}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_{\lambda}(x) = l(x)$$

uniformemente en $[x_1, x_m]$, pues el resultado antes obtenido es independiente de la sucesión $\{\lambda_n\}$ contenida en $[\bar{\lambda}_2, \infty)$ convergiendo a $+\infty$.

5.4 Cálculo de la función Spline Natural Cúbica para Graduar.

A partir de las condiciones dadas por (5.3.7) podemos hallar la expresión del spline natural cúbico para graduar, en base a la siguiente forma:

$$S_p(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

para x en $[x_i, x_{i+1}]$, $i=1, m-1$, ($p = \frac{1}{2\lambda}$). De la evál se sigue que:

$$S'_p(x) = b_i + 2c_i(x-x_i) + 3d_i(x-x_i)^2$$

$$S''_p(x) = 2c_i + 6d_i(x-x_i)$$

$$S'''_p(x) = 6d_i \quad \text{para } x \text{ en } [x_i, x_{i+1}], \quad i=1, m.$$

Ahora de (5.3.7. iv), para $k=2$, se tiene que

$$s''(x_i^-) = s''(x_i^+)$$

donde

$$s''(x_i^+) = 2c_i + 6d_i(x_i - x_i) = 2c_i$$

y

$$s''(x_i^-) = 0$$

ya que de la definición [5.2.1] se tiene que en el intervalo $(-\infty, x_i)$, $S(x)$ es un polinomio

de grado a lo más $(p-1) = 1$, en este caso.

Por lo tanto, $e_i = 0$.

De manera completamente análoga, se tiene que: $e_m = 0$.

Ahora, para $i = 1, m-1$, se tiene que

$$s_i''(x_i^-) = 2e_{i-1} + 6d_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \text{ y}$$

$$s_i''(x_i^+) = 2e_i,$$

luego por (5.3.7iv) se obtiene que

$$2e_{i-1} + 6d_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = 2e_i$$

haciendo $h_i = (x_{i+1} - x_i)$; se tiene:

$$d_{i-1} = \frac{2e_i - e_{i-1}}{6(x_i - x_{i-1})} = \frac{e_i - e_{i-1}}{3h_{i-1}}$$

Lo que podemos escribir, haciendo un recorrimiento de índices, como

$$(5.4.1) \quad d_i = \frac{e_{i+1} - e_i}{3h_i}, \quad i = 1, m-1$$

Ahora, como

$$s(x_i^-) = a_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + e_{i-1}h_{i-1}^3, \text{ y}$$

$$s(x_i^+) = a_i$$

la condición de continuidad

$$s(x_i^-) = s(x_i^+),$$

correspondiente a (5.3.7iv) para $R=0$, da lugar a que

$$a_{i-1} + b_{i-1} h_{i-1} + c_{i-1} h_{i-1}^2 + d_{i-1} h_{i-1}^3 = a_i,$$

de donde se tiene que

$$b_{i-1} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - c_{i-1} h_{i-1} - d_{i-1} h_{i-1}^2,$$

o bien que

$$b_{i-1} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - c_{i-1} h_{i-1} - \left\{ \frac{c_i - c_{i-1}}{3 h_{i-1}} \right\} h_{i-1}^2,$$

al usar la relación (5.4.1). Así, se sigue, haciendo un recorrimiento de índices, que

$$(5.4.2) \quad b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{2}{3} c_i h_i - \frac{c_{i+1} - c_i}{3} h_i,$$

para $i = 1, m-1$

Viendo que

$$s_p'(x_i^-) = b_{i-1} + 2c_{i-1} h_{i-1} + 3d_{i-1} h_{i-1}^2, \quad y$$

$$s_p'(x_i^+) = b_i$$

la condición de continuidad para la derivada

$$s_p'(x_i^-) = s_p'(x_i^+)$$

da lugar a la relación

$$b_{i-1} + 2 c_{i-1} h_{i-1} + 3 d_{i-1} h_{i-1}^2 = b_i,$$

que al usar (5.4.1) toma la forma

$$b_{i-1} + 2 c_{i-1} h_{i-1} + 3 \left\{ \frac{c_i - c_{i-1}}{3 h_{i-1}} \right\} h_{i-1}^2 = b_i,$$

que podemos reescribir como

$$b_{i-1} + 2 c_{i-1} h_{i-1} + c_i h_{i-1} - c_{i-1} h_{i-1} = b_i,$$

que al usar, ahora (5.4.2) se tiene que

$$\frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2}{3} c_{i-1} h_{i-1} - \frac{c_i h_{i-1}}{3} + c_{i-1} h_{i-1} - c_i h_{i-1} =$$

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{2}{3} c_i h_i - \frac{c_{i+1} h_i}{3},$$

lo que podemos reescribir como sigue

$$\frac{1}{3} c_{i-1} h_{i-1} + \frac{2}{3} (h_{i-1} + h_i) c_i + c_{i+1} h_i = \frac{\Delta a_i}{h_i} - \frac{\Delta a_{i-1}}{h_{i-1}},$$

lo que constituye la i -ésima ecuación del sistema.

$$Tc = Q^T a$$

$$\bar{a} = [a_1, \dots, a_m]^T, \quad y$$

$$D^{-2} = \begin{bmatrix} \delta_1^{-2} & & & \\ & \delta_2^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_m^{-2} \end{bmatrix}$$

Así (5.4.3) tiene esta representación matricial:

$$(5.4.4) \quad Q\bar{c} = \rho D^{-2}(\bar{u}'' - \bar{a}).$$

de donde
(5.4.5) $\bar{a} = \bar{u}'' - \rho^{-1} D^2 Q\bar{c}$

y multiplicando a (5.4.4) por $Q^T D^2$ por la izquierda se tiene que

$$\begin{aligned} Q^T D^2 Q\bar{c} &= \rho Q^T D^2 D^{-2} (\bar{u}'' - \bar{a}) \\ Q^T D^2 Q\bar{c} &= \rho Q^T (\bar{u}'' - \bar{a}) \\ &= \rho (Q^T \bar{u}'' - Q^T \bar{a}) \\ &= \rho (Q^T \bar{u}'' - T\bar{c}) \end{aligned}$$

Esto es, que

$$(5.4.6) \quad (Q^T D^2 Q + \rho T)\bar{c} = \rho Q^T \bar{u}''$$

Así, si ρ es dado, obtenemos al vector \bar{c} de (5.4.6) y al vector \bar{a} de (5.4.5); y los coeficientes restantes b_i y d_i son eal-

culados de (5.4.1) y (5.4.2).

Es importante notar que la matriz correspondiente a (5.4.6) tiene una banda de 5 diagonales diferentes de cero, y es definida positiva si $p > 0$.

5.5) Cálculo del Parámetro de Alisamiento.

En esta sección se discute el principio de discrepancia para el cálculo del parámetro $\lambda = \frac{1}{\sigma^2 p}$ de alisamiento.

Este principio parece haber sido insinuado por primera vez por Phillips D. [] en 1962, y trabajado por Melhum [] en 1964. Este se basa en la consideración del siguiente problema variacional.

$$(5.5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } S[f] \\ \text{Sujeto a } F[f] \leq \Delta, \end{array} \right.$$

en donde $\Delta > 0$ es dada.

En el caso particular que $f_{\text{mín}}$ definido

como

$$\text{Min } S[f] = S[f_{\text{mín}}],$$

cumple con $F(f_{\min}) \leq \Delta$, el problema se reduce a uno de simple interpolación spline. En lo que sigue nos dedicaremos a discutir el caso en el cual

$$F[f_{\min}] > \Delta.$$

Para este caso, (5.5.1) se reformula como sigue

$$(5.5.2) \quad \begin{cases} \text{Min } S[f] \\ \text{sujeto a: } F[f] = \Delta \end{cases}$$

Ahora, tenemos que el Lagrangeano asociado a este problema viene dado por

$$L_p[f] = S[f] + 2p(F[f] - \Delta),$$

cuyas correspondientes ecuaciones de Euler vienen a ser

$$(5.5.3) \quad \begin{cases} \delta_f L_p[f; h] = \delta_f S[f; h] + 2p \delta F[f; h] \\ \delta_p L_p[f](t) = \partial_p L_p[f] \cdot t \\ \quad \quad \quad = (F(f) - \Delta) \cdot t \end{cases}$$

De las cuales se desprenden dos cosas:

1a) Que $\delta \Phi_{\lambda}^2[f; h] = \frac{1}{2p} \{ \delta_f L_p[f; h] \}$, y por tanto que las ecuaciones de Euler para la

funcional de Schoenberg Φ_λ^2 y el Lagrangiano $L_p[f]$ son exactamente las mismas si $\lambda = \frac{1}{2p}$; y,

2a. Que la pareja (f, p) que anula idénticamente las ecuaciones en (5.5.3) para toda h con $f+h$ en $C^2[x_i, x_m]$ y t en R , es una función spline natural cúbica S_p ($p = \frac{1}{2\lambda}$) (por el punto anterior) siendo el parámetro p la solución de la ecuación

$$(5.5.4) \quad F[S_p] = \Delta$$

A esta ecuación se le conoce por la ecuación de discrepancia; y a la función

$$(5.5.5) \quad f(p) = F[S_p]$$

como la función de discrepancia.

Resulta, entonces, que la determinación del parámetro de alisamiento λ , para la funcional de Schoenberg Φ_λ^2 , por el principio de discrepancia consiste en resolver la ecuación

$$f(p) = \Delta \quad \left(p = \frac{1}{2\lambda} \right).$$

En lo que sigue estudiaremos la geometría de la gráfica de esta función y con ello

serán transparentes las condiciones bajo las cuáles la ecuación de discrepancia (5.5.4) tiene una única solución positiva.

Teorema 5.1 La función de discrepancia $f(p)$, para $p > 0$, es de clase C^∞ , decreciente y convexa. más aún,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(p) = 0$$

En seguida se muestra la situación típica para la gráfica de la función de discrepancia $f(p)$.

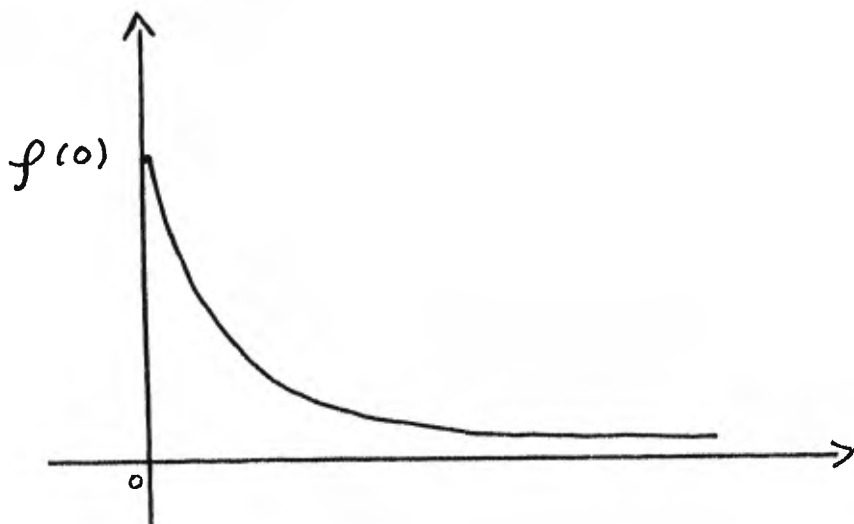


Fig. 5 Gráfica típica de la Función de Discrepancia en $[0, \infty)$

Dem. De las relaciones (5.4.5) y (5.4.6) se tiene que

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{s_p(x_i) - u_i''}{\delta_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_i - u_i''}{\delta_i} \right)^2 \\ &= \|DQ(Q^T D^2 Q + \rho T)^{-1} Q^T u''\|_2^2 \end{aligned}$$

Ahora, considerando la descomposición de Cholesky de T , i.e.

$$T = LL^T, \quad L = \begin{array}{c} \triangle \\ \triangle \\ \triangle \end{array},$$

se tiene que L es invertible por ser T positiva definida, y que

$$Q^T D^2 Q + \rho T = L(L^{-1} Q^T D^2 Q L^{-T} + \rho I) L^T$$

Así, definiendo $A = DQ L^{-T}$ se sigue entonces que

$$f(\rho) = \|A(A^T A + \rho I)^{-1} A^T z\|_2^2$$

Tomando z de manera que

$$u'' = Dz.$$

Ahora, tomando la descomposición sin

gular de A (véase Strang []), i.e.

$$A = U \Sigma V^T$$

donde U y V son matrices ortogonales y

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $D = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1})$ ($\delta_i \geq \delta_{i+1}$), se sigue que

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \|U \Sigma (D^2 + \rho I)^{-1} \Sigma^T V^T z\|_2^2 \\ &= \|\Sigma (D^2 + \rho I)^{-1} \Sigma^T w\|_2^2 \end{aligned}$$

al tomar w de manera que $w = U^T z$. En consecuencia,

$$f(\rho) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{w_i \delta_i^2}{\delta_i^2 + \rho}$$

si $w = (w_1, w_2, \dots, w_{m-1})^T$.

Así, definiendo

$$(5.5.6) \quad f_i(\rho) = \frac{w_i \delta_i^2}{\delta_i^2 + \rho}$$

$f(\rho)$ toma la forma

$$(5.5.7) \quad f(\rho) = \sum_{i=1}^{m-1} f_i(\rho).$$

De la cual se sigue que $f(\rho)$ es una

función de clase C^∞ en $[0, \infty)$; además convexa y decreciente al ver que

$$f_i'(p) = -\frac{w_i \sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + p)} < 0, \quad i = 1, m-2 \text{ y}$$

$$f_i''(p) = \frac{2w_i \sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + p)^3} > 0, \quad i = 1, m-2,$$

para $p \geq 0$

Por último, de (5.5.6) y (5.5.7) se tiene que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(p) = 0.$$

Así, el teorema queda demostrado.

Corolario. 5.1 $f'(p) < 0$, para $p \geq 0$.

Corolario. 5.2 Para $0 < \Delta < f(0)$, existe una única solución de la ecuación de discrepancia

$$f(p) = \Delta.$$

En virtud de los anteriores corolarios se sigue que debido a la forma de la función de discrepancia $f(p)$ para $p \geq 0$, se sugiere aplicar el método de Newton para hallar la solución $p_* = p(\Delta)$ de la ecuación.

$$f(p) = \Delta$$

Para nuestro caso el método de Newton resulta además ser incondicionalmente convergente.

Para tal efecto, veamos como calcular $f'(p)$. De las relaciones (5.5.5), (5.3.4') y (5.4.5), se tiene que:

$$\begin{aligned} f(p) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_p(x_i) - u_i''}{\delta_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i - u_i''}{\delta_i} \right)^2 \\ &= \| D^{-1} (\bar{a} - \bar{u}'') \|^2 \\ &= \| p^{-1} D Q e \|^2 \end{aligned}$$

y por tanto que

$$f(p) = \| D Q v \|^2 \quad \text{con } v = p^{-1} \bar{e}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} (5.5.8) \quad f'(p) &= \frac{d}{dp} \| D Q v \|^2 = \frac{d}{dp} v^T Q^T D^2 Q v \\ &= 2 v^T Q^T D^2 Q \frac{dv}{dp} \end{aligned}$$

con

$$(5.5.9) \quad \frac{dv}{dp} = -p^{-2} \bar{e} + p^{-1} \frac{d\bar{e}}{dp}$$

Por otro lado de la ecuación

$$(Q^T D^2 Q + pT) \bar{c} = p Q^T \bar{u}''$$

se sigue que

$$(5.5.10) \quad (Q^T D^2 Q + pT) \frac{d\bar{c}}{dp} = Q^T \bar{u}''' - T\bar{c}$$

Así, multiplicando (5.5.9) por la izquierda por $(Q^T D^2 Q + pT)$ se tiene que

$$\begin{aligned} (Q^T D^2 Q + pT) \frac{d\bar{c}}{dp} &= -p^2 (Q^T D^2 Q + \lambda T) \bar{c} \\ &\quad + p' (Q^T D^2 Q + \lambda T) \frac{d\bar{c}}{dp} \\ &= -p' Q^T \bar{u}''' + p' (Q^T \bar{u}''' - T\bar{c}) \end{aligned}$$

y por tanto que

$$(5.5.11) \quad (Q^T D^2 Q + pT) \frac{d\bar{c}}{dp} = -T\bar{c}$$

En resumen,

$$f'(p) = 2 v^t Q^t D^2 Q \frac{d\bar{c}}{dp}$$

en donde $\frac{d\bar{c}}{dp}$ está determinado por la ecuación

$$(Q^t D^2 Q + pT) \frac{d\bar{c}}{dp} = -T\bar{c}$$

siendo

$$v = p^{-1} \bar{c}$$

Nótese que al sistema (5.5.11) tiene la misma matriz coeficiente que el sistema (5.4.6).

Algorítmicamente, la solución del problema es:

$$\text{Min } \Phi_{\lambda} [f] = \Phi_{\lambda} [s_{\lambda}]$$

con $\lambda = \frac{1}{2p}$ tal que

$$f(p) = F[s_{\lambda}^{(p)}] = \Delta,$$

para $0 < \Delta < f(0^+)$ dada,

mediante la aplicación del método de Newton a la ecuación de discrepancia $f(p) = \Delta$, queda como sigue:

Dada $\Delta > 0$ y $p_0 > 0$:

(1.) Se resuelve el sistema

$$(Q^T D^2 Q + P_k T) \bar{c} = P_k Q^T \bar{u}''$$

y se calcula

a) $v = P_k^{-1} \bar{c}$

b) $f(P_k) = v^T Q^T D^2 Q v$

(2.) Para $k \geq 1$, se chequea convergencia:

i) $|f(P_k) - \Delta| < \epsilon_1$, y

$$ii) |\Delta P_k| (= |P_k - P_{k-1}|) < \epsilon_2$$

Si hay convergencia se va a (5), y si no se sigue con el paso (3).

(3) Se resuelve al sistema

$$(Q^T D^2 Q + P_k T) \frac{d\bar{v}}{dP} = + T v$$

y se calcula

$$f'(P_k) = 2 v^T Q^T D^2 Q \frac{d\bar{v}}{dP}$$

(4) Se calcula

$$P_{k+1} = P_k + \frac{f(P_k)}{f'(P_k)}$$

y se regresa al paso 1.

(5) Se calcula

$$\bar{a} = \bar{y} - P_k^{-1} D^2 Q \bar{c}$$

$$d_i = \frac{\Delta c_i}{8 h_i}, \quad i = 1, m-1$$

$$b_i = \frac{\Delta a_i}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i, \quad i = 1, m-1$$

Es muy importante observar que la resolución de los sistemas en los pasos (1) y (3) requieren de una sola descomposición, en este caso de Cholesky, de la matriz $(Q^T D^2 Q + pT)$.

Al lector interesado en los detalles de la implementación puede consultar el trabajo de Reimseh [16].

Apéndice A.

Justificación de:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \approx \left(\frac{2}{\pi n} \right)^{\frac{1}{2}} 2^n$$

Partamos de que:

$$\binom{n}{i} p^i q^{n-i} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{i - np}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right],$$

en donde $q = 1 - p$. En particular para $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ donde $\binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ alcanza su máximo, tenemos que

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n(\frac{1}{2} - p)}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right],$$

de donde

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \approx \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n(\frac{1}{2} - p)}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right]}{\sqrt{2\pi npq} \sqrt{(pq)^n}},$$

al considerar que $(p(1-p))^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \approx (p(1-p))^{\frac{n}{2}}$, cuando $0 < p < 1$.

Ahora es directo verificar que la función del lado derecho de la anterior desigualdad alcanza su máximo para $p = \frac{1}{2}$.
y por lo tanto:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \approx g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} 2^n.$$

Tabla comparativa de la estimación del combinatorio máximo y la estimación de la cota.

n	$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$	$\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} 2^n$
1	1	1.5957
2	2	2.2567
3	3	3.6852
4	6	6.3830
5	10	11.4183
6	20	20.8470
7	35	38.6012
9	126	136.1722
10	252	258.3687
15	6435	
20	184,756	

Apéndice B.

En este apéndice se ve que las condiciones

$$(5.3.8i) \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{S_2(x_i) - u_i''}{\delta_i} \right) \leq \lambda S[\delta] \quad y$$

$$(5.3.8ii) \quad S[S_2] \leq S[\delta]$$

con $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}$, (para $\bar{\lambda} > 0$ dada) implican que las familias $\{S_2: 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}\}$ y $\{S_2': 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}\}$ sean equicontinuas y uniformemente acotadas.

En efecto, de (5.3.8.ii) y del hecho que S_2'' es lineal por pedazos, es directo ver, que existe $L_2 > 0$ tal que

$$(B.1) \quad |S_2''(x)| \leq L_2 \quad \text{en } [x_1, x_m]$$

para toda $\lambda > 0$, en particular para $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}$. De aquí, se sigue que

$$(B.2) \quad |S_2'(y) - S_2'(x)| \leq L_2 |x - y|,$$

para cualesquiera x, y en $[x_1, x_m]$. Lo que establece que la familia $\{S_2: 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}\}$ es equicontinua.

Para ver que $\{s'_\lambda : 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1\}$ es uniformemente acotada, veamos que de (B.2) se sigue que

$$(B.3) \quad |s'_\lambda(x)| \leq |s'_\lambda(x_1^+)| + L_2 |x_m - x_1|,$$

para toda x en $[x_1, x_m]$. Así nuestra familia será uniformemente acotada, si probamos la existencia de $R > 0$ tal que

$$|s'_\lambda(x_1^+)| \leq R,$$

para $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1$. Para ello, recordemos (ver sec 5.2) que:

$$s_\lambda(x) = s_\lambda(x_1) \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) + s_\lambda(x_2) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) + \frac{B_2(\lambda)(x_2 - x_1)^2}{3!} \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \left[\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - 1 \right],$$

para x en $[x_1, x_2]$, si

$$s''_\lambda(x) = B_1(\lambda) \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) + B_2(\lambda) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)$$

para x en $[x_1, x_2]$. Se sigue entonces que:

$$s'_\lambda(x) = \frac{s_\lambda(x_2) - s_\lambda(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{B_2(\lambda)(x_2 - x_1)}{3!} \left[3 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - 1 \right].$$

y por consiguiente que

$$|s'_\lambda(x_i^*)| \leq \frac{|S_\lambda(x_1)| + |S_\lambda(x_2)|}{|x_2 - x_1|} + \frac{|B_2(\lambda)| |x_2 - x_1|}{3!}.$$

Puede por (B.1) y (5.3.8i) para $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1$, se tiene que:

$$|S'_\lambda(x_i^*)| \leq R \quad (0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1).$$

donde

$$R = \frac{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{\bar{\lambda}_1} S[\delta] + |u_1''| + |u_2''|}{|x_2 - x_1|} + \frac{L_2 |x_2 - x_1|}{3!}.$$

Con lo queda demostrado que $\{S'_\lambda: 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1\}$ es una familia uniformemente acotada.

Ahora por ser $\{S'_\lambda: 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1\}$ uniformemente acotada, existe $L_1 > 0$ tal que

$$(B.4) \quad |S'_\lambda(x)| \leq L_1, \quad \text{para } x \text{ en } [x_1, x_m].$$

De esta relación se sigue directamente que $\{S_\lambda: 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1\}$ es equicontinua, repitiendo el argumento del inicio de este apéndice.

Para demostrar que la familia $\{S_\lambda: 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1\}$ es uniformemente acotada, partamos de la desigualdad que sigue análoga a (B.3)

$$|S_\lambda(x)| \leq |S_\lambda(x_i^*)| + L_1 |x_m - x_i|,$$

con lo que queda demostrado que la familia $\{s_\lambda : 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1\}$ es uniformemente acotada. Pues, por (5.3.8.i)

$$|S_\lambda(x_i^+)| \leq |u_i| + \delta \sqrt{\bar{\lambda}_1} S[\delta],$$

para $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_1$.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- ANSELONE P. M & LAURENT P. J., A general method for the construction of interpolating and smoothing spline functions; Numer. Math. 12 (1968) 66-82.
- 2.- BELLMAN R & COOKE K. L., Modern Elementary Differential Equations, Addison-Wesley (1971).
- 3.- CONTE S. D. & DE BOOR C, Elementary Numerical Analysis an Algorithmic Approach, Mc Graw-Hill (1980).
- 4.- FORSYTHE G., MA & MOLER. C. B., Computer Methods for Mathematical Calculations, Prentice-Hall (1977).
- 5.- GOLUB G. H & REINSCH C., Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions, Num Math 14 (1970) 403-420.
- 6.- GREVILLE T. N. E., Moving-Weighted-Average Smoothing Extended to the Extramites of The Data, u. of Wisconsin, M R C Tech Rep # 2025 (1979).

- 7.- JENKINS W. A., Graduation Based on a Modification of Osculatory Interpolation, Trans Actuar. Soc. of Amer 28 (1927) 198-215.
- 8.- KENDALL M. G. & STUART A., The Advanced Theory of statistics, vol 3, Charles Griffin & Co (1968).
- 9.- MADRID DE LA VEGA H., Interpolación Polinomial, Dpto. de Matemáticas, Fac de Ciencias, Com Int No 22 (1978).
- 10.- MEHLUM. E., A Curva-Fitting Method Based on a Variational Criterion, BIT 4 (1964) 213-223.
- 11.- MILLER H. D., Elements of Graduation, Actuar. Soc of Amer & Amer. Inst of Actuar., Monografía #1 (1946).
- 12.- MOLER C. B., Matrix Eigenvalue and Least Squares Computations, Draft, C.S.D., Stanford University (1974).
- 13.- MOROZOV V. A., The Solution of Functional Equations by The Method of Regularization,

- Soviet Maths 7 (1966) 414-417.
14. PHILLIPS D.L., A Technique for The Numerical Solutions of Certain Integral Equations of the First Kind, J. of ACM 9 (1962) 84-97.
15. PRENTER, P. M. Splines and Variational Methods, Wiley, (1975).
16. REINSCH C. H., Smoothing by Spline Functions, Numer. Math. 10 (1967) 177-183.
17. ROBINSON G & WHITTAKER E.T., The Calculus of Observations, Blackie & Son (1942).
18. RUDIN W. Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw-Hill 1976.
19. SMITH D.R. Variational Methods in Optimization Prentice-Hall, 1974.
20. SPOERL C. A., Difference-Equation Interpolation, Trans Actuar-Soc Amer 44 (1944) 289 - 325
21. STEWART G.W. Introduction to Matrix Computations, A.D. (1973).

- 22.- STRANG G. Linear Algebra and its Applications Academic Press (1976).
- 23.- TIKHONOV A. N., GLASKO V. B. et al., On the Question of Quasi-Optimal Choice of Regularized Approximation, Soviet Maths. 20 (1979) 1036-1040.
- 24.- TIKHONOV A. N. & GLASKO V. B., The Approximate Solution of Fredholm Integral Equations of First Kind, USSR Comput. Maths. & Math. Phys. 4 (1964) 236-247.
- 25.- TIKHONOV A. N. & GLASKO V. B., Use of the Regularization Method in Non-Linear Problems, USSR Comput. Maths & Maths. Phys. 5 (1965) 93-107.
- 26.- WAHBA G & WOLD S., A Completely Automatic French Curve: Fitting Spline Functions by Cross-Validation, Comm. in Statis. 4 (1975) 1-17.
- 27.- WHITTAKER E. T., On a New Method of Graduation, Proc. Edinburgh Math. Soc. 41 (1923) 63-75.