UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

INTRODUCCION A LAS MEDIDAS DE HAAR

T E S I S

Que para obtener el título de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

José María González Barrios Murguía

México, D. F. 1982

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por objeto, analizar la construcción de un tipo muy específico de medidas, aquellas que se definen en estructuras de grupo a las que daremos una topología específica, analizando las propiedades que satisface, así como las caracterizaciones que se le pueden dar.

La idea de construir medidas en grupos es básicamente la de encontrar una forma de medir, que sea invariante bajo la operación del grupo, en el sentido de que la medida no cambie bajo "translaciones" que induce la aplicación de la operación grupal.

Como lo señala el título del presente trabajo, lo que se verá de las Medidas de Haar, es solamente un bosquejo de toda la teoría que se puede desarrollar a partir de ellas, y aún los temas que se incluyen pueden ser extendidos y complementarse con otras teorías mas complicadas, daremos, en la medida de lo posible, las referencias en donde se puedan localizar las extensiones de dichos temas, así como los libros en donde se pueden encontrar las demostraciones de los teoremas, que debido a lo complicado o lo largo de las mismas, se omiten del trabajo, pero se consideran básicas en el desarrollo posterior de las Medidas de Haar.

Hemos dividido la tesis en 3 capítulos:

El primer capítulo comienza con un breve análisis de la teoría de grupos como estructura algebraica, así como caracterizaciones y teoremas elementales de la Teoría de Grupos, definiendo por otra parte los grupos cocientes y lo que se entiende por clases laterales, en una segunda parte se define una estructura llamada grupo topológico, partiendo de una topología que hace continuas a ciertas funciones dentro del grupo y que se conoce como "compatible con la estructura de grupo", posteriormente se analiza la topología desde el punto de vista de las vecindades de e, el elemento neutro del grupo, y se dice cómo construir un grupo topológico a partir de un sistema fundamental de vecindades de e; se define por otro lado el grupo topológico cociente y sus propiedades, así como características generales de cualquier espacio topológico.

En el segundo capítulo se estudia un tipo específico de grupos topológicos, los llamados localmente compactos. Por lo que en una 1a sección se definen conceptos básicos como el de compacidad y teoremas relacionados con el mismo, tales como el de Tychonoff. Posteriormente se considera un grupo topológico y se define la compacidad local y algunas propiedades de la misma.

En la segunda parte se da una introducción teórica de las medidas en general, pero no tratadas como funciones conjuntistas, sino como funcionales lineales definidas en espacios funcionales, por lo que se presenta en esta sección la forma en la que se pueden relacionar ambos conceptos utilizando un teorema muy importante en la Teoría de Medida, el teorema de Representación de Riesz, que, como lo dice su nombre permite identificar una funcional lineal con una medida específica, y es gracias a esta representación que desarrollamos todo el trabajo utilizando funcionales lineales y sus propiedades, pensando que atrás de esas funcionales siempre hay medidas conjuntistas como usualmente se conocen y se manejan.

La tercera y última sección de este capítulo analiza los espacios $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ y $L^p_E(\mu)$, que induce una medida μ definida en cualquier espacio topológico localmente compacto, sus propiedades generales, y los conceptos de integral superior y validez en casi todas partes, para la definición de $L^p_\varepsilon(\mu)$.

El tercer capítulo o de Medidas de Haar, empieza con los conceptos de continuidad uniforme por la izquierda y por la derecha, dando equivalencias para las definiciones, así como teoremas referentes a grupos topológicos localmente compactos que son las estructuras en las que se definen las medidas de Haar.

En una segunda parte de este capítulo se definen las medidas invariantes y las medidas de Haar, demostrando por otro lado la existencia de dichas medidas y la unicidad de las mismas excepto por constantes multiplicativas (teorema de Haar), dando las propiedades mas importantes y consecuencias inmediatas; termina el trabajo con el estudio de la función modular que analiza las relaciones entre las medidas invariantes por la izquierda y las invariantes por la derecha, concluyendo con un resultado de equivalencia entre ambas.

CAPITULO I

GRUPOS TOPOLOGICOS

1.1 DEF. Sea G un conjunto no vacío con una operación binaria $\cdot : G \times G \longrightarrow G$, que denotaremos por $a \cdot b$ en lugar de $\cdot(a,b)$ por comodidad, entonces decimos que la pareja $(G, \cdot)$ es un grupo si $\cdot$ es una función que satisface:

i) $\forall_{a,b,c \in G} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

ii) $\exists_{e \in G} \therefore \forall_{a \in G} \quad a \cdot e = a = e \cdot a$

iii) $\forall_{a \in G} \quad \exists_{a^{-1} \in G} \therefore \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Si además satisface iv) $\forall_{a,b \in G} \quad a \cdot b = b \cdot a$ diremos que G es un grupo conmutativo.

Observación.- Denotaremos simplemente por G a un grupo, sobrentendiendo que se ha definido una operación binaria que satisface las condiciones mencionadas.

A continuación se enuncian algunos de los teoremas mas importantes en la Teoría de Grupos.

1.2 LEMA Si G es un grupo, entonces

i) el elemento neutro e es único

ii) $\underset{a \in G}{\forall} \quad \underset{a^{-1} \in G}{\exists !} \; \ni \; a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

iii) $\underset{a \in G}{\forall} \quad (a^{-1})^{-1} = a$

iv) $\underset{a, b \in G}{\forall} \quad (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

1.3 LEMA Si G es un grupo entonces $\underset{a, b \in G}{\forall}$ las ecuaciones $a \cdot x = b$ y $y \cdot a = b$

tienen soluciones únicas en G para x y y en particular las leyes de cancelación,

$$a \cdot u = a \cdot w \Rightarrow u = w$$
$$u \cdot a = w \cdot a \Rightarrow u = w$$

se verifican en G.

Los dos lemas anteriores caracterizan la operación $\cdot$ en G, la prueba de éstos, así como los lemas que a continuación se enuncian, pueden ser encontradas en [REF I] capítulo II.

Otra estructura de importancia en la Teoría de Grupos es la de Subgrupo:

1.4 DEF Sea G un grupo y H un subconjunto de G ent. H es un subgrupo si y sólo si H es un grupo con el producto $\cdot$ de G i.e. si $(H, \cdot|_{H\times H})$ es un grupo.

Un criterio práctico para saber cuando un subconjunto de un grupo G es un subgrupo es el siguiente:

1.5 LEMA Sea G un grupo y $\phi \subsetneq H \subset G$ entonces H es un subgrupo si y sólo si

i) $\forall_{a,b \in H} \Rightarrow a \cdot b \in H$

ii) $\forall_{a \in H} \Rightarrow a^{-1} \in H$

En el caso de que H sea finito, es aún mas simple checar que H sea subgrupo.

1.6 LEMA Sea G un grupo y $\phi \subsetneq H \subset G$ H finito $\Rightarrow$ H es un subgrupo si y sólo si H es cerrado bajo la operación del grupo i.e. $\forall_{a,b \in H} \Rightarrow a \cdot b \in H$

Todo subgrupo induce una partición en G mediante una relación que llamaremos de congruencia módulo H.

1.7 DEF Sea G un grupo y H un subgrupo de G si $a, b \in G$ decimos que a es congruente con b módulo H (denotado por $a \equiv b$ mód H) si y sólo si $a \cdot b^{-1} \in H$.

La relación $a \equiv b$ mód H induce una partición en G por ser una relación de equivalencia, las clases de equivalencia están dadas por $[a]_H = \{x \in G \mid a \equiv x \text{ mód } H\}$.

1.8 DEF Sea H un subgrupo de G un grupo y $a \in G \Rightarrow Ha = \{ha \mid h \in H\}$ se llama clase lateral derecha de H en G.

La relación entre las clases laterales derechas y las clases de equivalencia, está dada por:

1.9 LEMA $\forall_{a \in G} \quad Ha = \{x \in G \mid a \equiv x \text{ mód } H\}$

De este lema se desprende q' dadas 2 clases laterales derechas ó éstas son iguales ó bien son ajenas, por ser las clases de equivalencia de una relación del mismo tipo. Ademas dadas 2 clases laterales derechas existe una función biyectiva entre ambas.

Las clases laterales jugarán un papel muy importante en el desarrollo de la teoría posterior, por lo que es necesario extenderse un poco mas en este punto.

1.10 DEF. Un subgrupo N de G se llama un grupo normal de G si y sólo si $\forall_{g \in G} \ \forall_{m \in N} \quad g m g^{-1} \in N$

o si denotamos por $gNg^{-1} = \{gmg^{-1} / m \in N\}$ entonces N es normal si y sólo si $\forall_{g \in G} \ gNg^{-1} \subset N$

Para caracterizar a un subgrupo normal N de G tenemos varios lemas:

1.11 LEMA N es un subgrupo normal de G si y sólo si $\forall_{g \in G} \ gNg^{-1} = N$

1.12 LEMA N es un subgrupo normal de G si y sólo si toda clase lateral derecha de N en G es una clase lateral izquierda de N en G (definiendo una clase lateral izquierda $aN = \{a \cdot m / m \in N\}$ en forma

análoga a la definición de clase lateral derecha.
En general denotaremos por $A \cdot B$ al conjunto $\{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}$ para cualesquiera $A, B \subset G$ subconjuntos de un grupo.

1.13 LEMA N un subgrupo de G es normal en G si y sólo si el producto de 2 clases laterales derechas (izquierdas) es respectivamente una clase lateral derecha (izquierda)

De hecho se cumple que si Na y Nb son 2 clases laterales derechas entonces $Na \cdot Nb = Na\cdot b$; gracias a que el producto de clases laterales es de nuevo una clase, se puede dar estructura de grupo al conjunto de clases laterales derechas (izquierdas).

Denotemos por $G/N = \{Na \mid a \in G\}$ el conjunto de clases laterales, si dotamos a G/N de una operación binaria
$\cdot\ G/N \times G/N \to G/N \quad \ni \quad \cdot(Na, Nb) = Na\cdot b$
denotando $\cdot(Na, Nb)$ por $Na \cdot Nb$ con la definición de arriba se tiene el siguiente teorema de gran importancia teórica:

1.14 <u>TEOREMA</u> Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G $\Rightarrow$ G/N con la operación de multiplicación de clases definida antes es un grupo, al que llamaremos grupo cociente módulo N, o simplemente grupo cociente si no hay posibilidad de confusión.

La estructura cociente es de gran importancia en Matemáticas, y en el presente trabajo también es de relevancia el uso de grupos cocientes, así como el uso de clases laterales, sean derechas o izquierdas.

Para relacionar 2 estructuras de grupo es necesario definir funciones y ver si estas preservan las operaciones respectivas.

1.15 <u>DEF</u> Sean G y $\overline{G}$ 2 grupos con operaciones $\cdot$ y $*$ respectivamente, sea $\phi : G \to \overline{G}$ $\Rightarrow$ ϕ es un homomorfismo si y solo si $\forall_{a,b \in G}$ $\phi(a \cdot b) = \phi(a) * \phi(b)$

OBSERVACION Si no hay problemas de notación denotaremos por $\cdot$ a la operación en G

y a la operación en $\bar{G}$ indistintamente.

Si ϕ es un homomorfismo entre G y $\bar{G}$ denotaremos por $K_\phi = \{x \in G \mid \phi(x) = \bar{e}\}$ donde $\bar{e}$ es el neutro de $\bar{G}$, y a K_ϕ le al Kernel de ϕ (ó núcleo de ϕ) donde $\bar{e}$ es el neutro de $\bar{G}$.

guientes condiciones :

i) $\phi(e) = \bar{e}$

ii) $\forall_{x \in G}\ \phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}$

iii) K_ϕ es un subgrupo normal de G

Como yemplo de homomorfismo, consideremos el homomorfismo canónico entre G y un grupo cociente G/N definido por la relación $\phi : G \to G/N \ni$ $\phi(x) = Nx$. El hecho de que ϕ sea un homomorfismo se desprende del hecho de que $Nx \cdot Ny = Nx \cdot y$ si $x, y \in G$.

Un caso particular de homomorfismos es el de los inyectivos que por su importancia reciben otro nombre :

1.16 DEF Sea $\phi : G \to \bar{G}$ un homomorfismo si ϕ es inyectivo $\Rightarrow$ ϕ es un isomorfismo. (Si ϕ es un isomorfismo, decimos que G y $\bar{G}$ son isomorfos y lo denotamos por $G \approx \bar{G}$). (En algunos textos se les llama monomorfismos, diciendo que ϕ es isomorfismo si es biyectivo)

En el siguiente lema damos una forma para verificar cuando un homomorfismo es un isomorfismo:

1.17 LEMA Si $\phi : G \to \bar{G}$ es un homomorfismo con kernel K_ϕ $\Rightarrow$ ϕ es un isomorfismo si y sólo si $K_\phi = \{e\}$

Una relación isomórfica de gran relevancia es la que se enuncia en el siguiente:

1.18 TEOREMA Sea $\phi : G \to \bar{G}$ un homomorfismo con kernel ϕ_G entonces G/ϕ_G es isomorfo a $\bar{G}$.

Contando con las definiciones y lemas

enunciadas hasta ahora, podemos introducir ya la noción de grupos topológicos así como sus propiedades mas importantes y resultados necesarios para desarrollar las Medidas de Haar.

En lo sucesivo utilizaremos algunas definiciones y proposiciones de Topología básica, utilizándolas como resultados conocidos y sín demostración, por ejemplo las definiciones de topología, de abierto, de cerrado etc. y resultados relativos a cualquier Topología, Toda está información y la demostración de las proposiciones se pueden encontrar en la [REF II] capítulo III.

1.19 DEF Sea G un grupo, una topología τ en G se dice compatible con la estructura del grupo si y sólo si τ hace continuas a las funciones:

$$h: G \to G \quad y \quad \varphi: G \times G \to G$$
$$x \mapsto x^{-1} \qquad\qquad (x,y) \mapsto x \cdot y$$

en donde la topologió en $G \times G$ es la topologiá producto inducida por τ

Un "grupo topológico" es una pareja (G, τ) con G un grupo y τ una topología compatible con la estructura del grupo G.

Ejemplos de grupos topológicos son:

a) G cualquier grupo con τ la topología discreta i.e. $\tau = \wp(G)$

b) si (G, τ) es un grupo topológico y H es un subgrupo y si $\tau_H = \tau \cap H$ i.e. la topología relativa a H $\Rightarrow$ (H, τ_H) es un grupo topológico pues $h/_H$ y $\varphi/_{H \times H}$ son continuas bajo esta topología

c) El campo de los reales con la suma y producto usuales definen 2 grupos Topológicos tomando la topología inducida por la métrica $d(x,y) = |x-y|$, (en el caso del producto, excluyendo el cero de los reales para que sea grupo).

1.20 DEF Sea (X, τ) un espacio Topológico $\varphi : X \to X$ $\Rightarrow$ φ es un homeomorfismo si y sólo si : i) φ es una biyección

ii) φ y φ^{-1} son continuas bajo τ

El siguiente teorema muestra algunos de los homeomorfismos más comunes en cualquier grupo topológico, la prueba de dicho teorema es ilustrativa, pues utiliza las topologías producto y algunas propiedades generales de los grupos topológicos.

1.21 TEOREMA Sea (G,τ) un grupo topológico y $a, b \in G$ entonces las ~~siguientes~~ funciones son homeomorfismos de G:

i) $h_1 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_1(x) = x^{-1}$

ii) $h_2 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_2(x) = a \cdot x$

iii) $h_3 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_3(x) = x \cdot b$

iv) $h_4 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_4(x) = a \cdot x \cdot b$

v) $h_5 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_5(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$

y si $a \in G \Rightarrow$ vi) $h_6 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_6(x) = x a x^{-1}$ es continua.

PRUEBA

i) Como (G,τ) es grupo topológico entonces h_1 es continua pues τ es compatible con la estructura de G, además h_1 es biyectiva pues G es grupo y por último $h_1 = h_1^{-1}$ pues $(h_1 \circ h_1)(x) = h_1(x^{-1}) = (x^{-1})^{-1} = x = (h_1 \circ h_1^{-1})(x)$ $\therefore$ h_1^{-1} es continua $\therefore$ h_1 es homeomorfismo

ii) sea $\varphi_a : G \to G \times G$ $\ni$ $\varphi_a(x) = (a, x)$
veamos que φ_a es continua
Sea U un abierto de $G \times G$ $\ni$ $(a,x) \in U$
S.P.G sea $U = V_1 \times V_2$ con $a \in V_1$, $V_1, V_2 \in \tau$
pues por la definición de la topología producto U es abierto en $G \times G \Leftrightarrow U = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$
donde $\forall_{i \in I}$ $U_i, V_i \in \tau$

entonces $\varphi_a^{-1}(U) = \{y \in G \mid \varphi_a(y) \in U = V_1 \times V_2\}$
$\therefore$ $\varphi_a^{-1}(U) = V_2 \in \tau$ $\therefore$ φ_a es continua

Por otro lado $g : G \times G \to G$ $\ni$
$g(x,y) = x \cdot y$ es cont. bajo τ pues τ es compatible con la estructura de grupo

$\therefore$ $g \circ \varphi_a : G \to G$ es continua por ser composición de funciones continuas
pero $(g \circ \varphi_a)(x) = g(\varphi_a(x)) = g(a, x) = a \cdot x$
$= h_a(x)$ $\therefore$ h_a es cont., además h_a es biyectiva, (por la ley de cancelación se obtiene la inyectividad y la supreyectividad, por el hecho de que $ax = b$ tiene siempre solución en G). Por lo que está bien definida h_a^{-1}, veamos que $h_a = g \circ \varphi_{a^{-1}}$

$(h_2 \circ (g \circ \varphi_{a^{-1}}))(x) = h_2(g(a^{-1}, x)) = h_2(a^{-1} \cdot x)$
$= a \cdot (a^{-1} \cdot x) = (a \cdot a^{-1}) \cdot x = e \cdot x = x$
y $((g \circ \varphi_{a^{-1}}) \circ h_2)(x) = (g \circ \varphi_{a^{-1}})(a \cdot x)$
$= g(a^{-1}, a \cdot x) = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1} \cdot a) \cdot x = e \cdot x = x$

$\therefore$ $h_2^{-1} = g \circ \varphi_{a^{-1}}$ y como $\varphi_{a^{-1}}$ es cont. por la demostración anterior y g también lo es entonces h_2^{-1} es continua
$\therefore$ h_2 es homeomorfismo.

iii) $h_3(x) = x \cdot b$
definimos $\psi_b : G \to G \times G$ $\ni$ $\psi_b(x) = (x, b)$
análogamente a lo hecho en ii) se ve que ψ_b es cont. $\forall_{b \in G}$ y como $g : G \times G \to G$
$\ni$ $g(x, y) = x \cdot y$ es cont. entonces
$g \circ \psi_b$ es continua pero
$(g \circ \psi_b)(x) = g(x, b) = x \cdot b = h_3(x)$
$\therefore$ h_3 es cont. y de igual forma que en ii) se ve que h_3 es biyectiva y que
$h_3^{-1} = g \circ \psi_{b^{-1}}$ $\therefore$ h_3^{-1} es continua
$\therefore$ h_3 es homeomorfismo.

iv) $h_4(x) = a \cdot x \cdot b$
como $h_4 = h_2 \circ h_3$ pues $(h_2 \circ h_3)(x) =$

$h_2(h_3(x)) = h_2(x \cdot b) = a \cdot x \cdot b = h_4(x)$

como h_4 es composición de 2 funciones biyectivas y continuas (homeomorfismos) $\Rightarrow$ h_4 es homeomorfismo

v) $h_5(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ tomando $b = a^{-1}$ en iv) se obtiene que h_5 es homeomorfismo

vi) Sea $\xi : G \longrightarrow G \times G$ $\ni$
$x \longmapsto (h_3(x), h_1(x)) = (xa, x^{-1})$

veamos que ξ es continua

Sea U una vecindad de (xa, x^{-1}) en $G \times G$

s.p.g. $U = V_1 \times V_2$ $\quad xa \in V_1,\ x^{-1} \in V_2,\ V_1, V_2 \in \mathcal{T}$

entonces $\xi^{-1}(U) = h_3^{-1}(V_1) \cap h_1^{-1}(V_2)$ pues si

$y \in h_3^{-1}(V_1) \cap h_1^{-1}(V_2)$

$\Longleftrightarrow$ $h_3(y) \in V_1$ y $h_1(y) \in V_2$

$\Longleftrightarrow$ $ay \in V_1$ y $y^{-1} \in V_2$

$\Longleftrightarrow$ $(ay, y^{-1}) \in V_1 \times V_2 = U$

$\Longleftrightarrow$ $\xi(y) \in U$

y como h_3 y h_1 son continuas y $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ entonces $h_3^{-1}(V_1) \in \mathcal{T}$ y $h_1^{-1}(V_2) \in \mathcal{T}$

$\therefore$ $\xi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ $\quad \therefore$ ξ es continua

ahora $g : G \times G \rightarrow G$ $\ni$ $g(x, y) = x \cdot y$ es continua $\therefore$ $g \circ \xi$ es continua

pero $(g\circ \psi)(x) = g(\psi(x)) = g(x\cdot a, x^{-1}) = x\cdot a\cdot x^{-1}$
$= h_c(x)$

$\therefore$ h_c es continua . —+— .

1.22 DEF Sea (G,τ) un grupo topológico y $a\in G$ entonces $\mathcal{B}\subset\tau$ es un sistema fundamental de vecindades en $a \Leftrightarrow \underset{A\in\tau}{\forall}$.+. $a\in A$ $\underset{B\in\mathcal{B}}{\exists}$.+. $a\in B\subset A$

Un importante resultado que caracteriza a las vecindades de un punto en un grupo topológico, se basa en el teor 1.21 y la definición anterior; el cuál indica que basta conocer un sistema fundamental de vecindades de e, el elemento neutro de G, para obtener mediante una "translación" (i.e. mediante la aplicación de la operación del grupo a los elementos del sistema) un sistema fundamental de vecindades en cualquier otro punto.

1.23 LEMA Sea (G,τ) un grupo topológico y $\mathcal{B}\subset\tau$ un sistema fundamental de vecindades de e entonces $\underset{a\in G}{\forall}$ las familias $\{a\cdot V \mid V\in\mathcal{B}\}$ y

$\{V\cdot a \mid V\in \mathcal{B}\}$ son sistemas fundamentales de vecindades en a y $\{V^{-1} \mid V\in\mathcal{B}\}$ es un sistema fundamental de vecindades de e. (con $V^{-1}=\{v^{-1} \mid v\in V\}$)

PRUEBA:

En el teor 1.21 ii) vimos que $h_2: G\to G$ $\ni$ $h_2(x)=a\cdot x$ es un homeomorfismo en G que manda a e en $h_2(e)=a\cdot e=a$.
Si $V\in\mathcal{B} \Rightarrow$ $h_2(V)=a\cdot V$ que es abierto pues $\mathcal{B}\subset\tau$ y h_2 es un homeomorfismo
$\therefore$ $\forall_{V\in\mathcal{B}}$ $a\cdot V$ es una vecindad de a

(pues $e\in V$ $\forall\, V\in\mathcal{B}$)
Veamos que $\{a\cdot V \mid V\in\mathcal{B}\}$ es un sist. fund. de vecindades en a.

Sea $U\in\tau$ un abierto $\ni$ $a\in U$
$\Rightarrow$ $h_2^{-1}(U)=a^{-1}\cdot U$ es abierto y es vecindad de e pues como $a\in U \Rightarrow e=a^{-1}a\in a^{-1}U$
por definición de $\mathcal{B}$ $\exists_{B\in\mathcal{B}}$ $\ni$ $e\in V\subset a^{-1}\cdot U$

entonces $h_2(V)\subset h_2(a^{-1}U)$

$$\therefore \quad a\cdot V\subset a\cdot a^{-1}\cdot U = e\cdot U = U$$

$\therefore \underset{V \in \mathcal{B}}{\exists} \ni a \cdot V \subset U$

$\therefore \{a \cdot V \mid V \in \mathcal{B}\}$ es sistema fundamental de vecindades en a.

Tomando $h_3(x) = x \cdot a$, que es homeomorfismo por 1.21 iii), se demuestra de igual forma que $\{V \cdot a \mid V \in \mathcal{B}\}$ es sistema fundamental de vecindades en a.

Por último, $h_1(x) = x^{-1}$ es un homeomorfismo por 1.21 i), y si $V \in \mathcal{B}$ entonces $h_1(V) = V^{-1}$ es un abierto y como $e \in V$ entonces $e^{-1} = e \in V^{-1}$

$\therefore$ V^{-1} es vecindad de e $\underset{V \in \mathcal{B}}{\forall}$.

Sea U un abierto $\ni$ $e \in U$ entonces $h_1^{-1}(U) = h_1(U) = U^{-1}$ es un abierto $\ni$ $e \in U^{-1}$ $\therefore \underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} \ni e \in B \subset U^{-1}$

entonces $h_1(B) \subset h_1(U^{-1})$

$\therefore$ $B^{-1} \subset (U^{-1})^{-1} = U$ con $B \in V$

$\therefore \underset{V \in \mathcal{B}}{\exists} \ni V^{-1} \subset U$

$\therefore$ $\{V^{-1} \mid V \in \mathcal{B}\}$ es un sistema fundamental de vecindades en e. $\cdot + \cdot$

Como consecuencia de este lema se tiene el siguiente:

1.24 <u>COROLARIO</u> Si $A \subset G$ es un subconjunto no vacío de G un grupo topológico y $U \in \tau$ entonces U^{-1}, $A \cdot U$, $U \cdot A$ son abiertos.

<u>PRUEBA</u>

Por el teor. 1.21 i) $h_1(x) = x^{-1}$ es homeomorfismo, y si $U \in \tau \Rightarrow h_1(U) = U^{-1}$ es abierto

Como $h_2(x) = a \cdot x$ es un homeomorfismo si $U \in \tau \Rightarrow h_2(U) = a \cdot U \in \tau \quad \forall_{a \in G}$

$\therefore$ $A \cdot U = \{a \cdot u \mid a \in A, u \in U\} = \bigcup_{a \in A} a \cdot U$ es abierto, por ser unión de abiertos.

De igual forma como $h_3(x) = x \cdot a$ es homeomorfismo vemos que $U \cdot A$ es abierto pues $U \cdot A = \bigcup_{a \in A} U \cdot a$ $\cdot + \cdot$

Algunos de los homeomorfismos del teorema 1.21 son tán usuales que han recibido un nombre específico, tales como:

$h_1(x) = x^{-1}$ se conoce como inversión

$h_2(x) = a \cdot x$ " " " translación izq

$h_3(x) = x \cdot a$ " " " translación der.

Sean (G, τ_G) y (H, τ_H) 2 grupos topológicos, a $G \times H$ se le puede dar estructura de grupo definiendo $* : (G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow G \times H$

$\cdot \ni \cdot$ $(x, y) * (x_1, y_1) = (x \cdot x_1, y \cdot y_1)$

OBS. No haremos distinción entre la operación de G y de H mientras no se preste a confusión.

Es fácil checar que $G \times H$ es un grupo con neutro (e, e) e inverso $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$, pues G y H tienen estructura de grupo.

Si a $G \times H$ lo dotamos de la Topología producto $\tau_G \times \tau_H$ entonces $G \times H$ es un grupo Topológico según lo enuncia el siguiente:

1.25 <u>TEOREMA.</u> Si (G, τ_G) y (H, τ_H) son grupos topológicos entonces la topología producto en $G \times H$

es compatible con la estructura de $G \times H$ como grupo producto.

PRUEBA

Sabemos por el teorema 1.21 que
$\bar{h}_1 : G \to G \ni \bar{h}_1(x) = x^{-1}$
y $\underline{h}_1 : H \to H \ni \underline{h}_1(x) = x^{-1}$ son homeomorfismos en G y H respectivamente

$\therefore$ $h_1 : G \times H \to G \times H$

$\ni h_1(x, y) = (x^{-1}, y^{-1}) = (\bar{h}_1(x), \underline{h}_1(y))$
es continua pues $\bar{h}_1$ y $\underline{h}_1$ lo son, la demostración es análoga a la hecha en el teor. 1.21 vi)

$\therefore$ la inversión es continua en $G \times H$

Veamos que $* : (G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow G \times H \ni$
$*((x, y), (x_1, y_1)) = (x \cdot x_1, y \cdot y_1)$ es continua

Sea $\varphi : (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H \times G \times H$
$((x, y), (x_1, y_1)) \mapsto (x, y, x_1, y_1)$

φ claramente es biyectiva y es continua pues si V es vecindad de (x, y, x_1, y_1)
S.P.G. $V = U_1 \times V_1 \times U_2 \times V_2$ donde $x \in U_1$, $y \in V_1$

$x_1 \in U_2$, $y_1 \in V_2$ y $U_1, U_2 \in \tau_G$, $V_1, V_2 \in \tau_H$

entonces $\varphi^{-1}(U) = (U_1 \times V_1) \times (U_2 \times V_2)$ que es abierto en $(G \times H) \times (G \times H)$.

$\therefore$ φ es continua, de igual manera se ve que φ^{-1} es continua $\therefore$ φ es homeomorfismo

Tomando ahora:

$$h : G \times H \times G \times H \longrightarrow G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y, x_1, y_1) \longmapsto (x, x_1) \longmapsto x \cdot x_1$$

y

$$f : G \times H \times G \times H \longrightarrow H \times H \longmapsto H$$
$$(x, y, x_1, y_1) \longmapsto (y, y_1) \longmapsto y \cdot y_1$$

tenemos que h y f son las composiciones de una proyección y los productos respectivos y como las proyecciones son continuas y los productos son continuos, entonces h y f son mapeos continuos, de lo que se obtiene que $h \circ \varphi$ y $f \circ \varphi$ son funciones continuas de $(G \times H) \times (G \times H)$ en G y H respectivamente

$\therefore$ $* : (G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow G \times H$

$\ni$ $*((x, y), (x_1, y_1)) = (h \circ \varphi((x, y), (x_1, y_1)), f \circ \varphi((x, y), (x_1, y_1)))$

es una función continua.

$\therefore$ $G \times H$ es un grupo topológico con $\tau_G \times \tau_H$ pues esta topología es compatible con la estructura del grupo. $\cdot + \cdot$

Del teorema anterior se desprende que si (G, τ) es un grupo Topológico, entonces G^n es un grupo topológico con la topología τ^n (top. producto). Así por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ con la suma componente a componente es un grupo topológico.

Como ya vimos en un teorema anterior la estructura del grupo, puede ser analizada observando lo que sucede en e, el elemento neutro, pues las propiedades que se satisfagan en e se satisfacen en a mediante las translaciones izquierda y derecha por ser homeomorfismos. Por lo que es muy importante saber que propiedades se verifican en e, para extenderlas a todo el grupo.

1.26 DEF. Sea (G, τ) un grupo topológico y $a \in G$, definimos la clase o familia de vecindades de a como: $\mathcal{N}_a = \{ V \subset G \mid \underset{W \in \tau}{\exists} \ni a \in W \subset V \}$

1.27 TEOREMA Sea (G,τ) un grupo topológico y N_e la familia de vecindades de e entonces N_e satisface:

i) $\forall_{V\in N_e} \quad e\in V$

ii) $\forall_{V,W\in N_e} \quad V\cap W\in N_e$

iii) $\forall_{V\in N_e} \quad \exists_{W\in N_e} \ni \quad W\cdot W\subset V$

iv) $\forall_{V\in N_e} \quad V^{-1}\in N_e$

v) $\forall_{V\in N_e} \quad \forall_{a\in G} \quad aVa^{-1}\in N_e$

vi) $\forall_{V\in N_e} \quad \forall_{W\subset G} \ni \quad V\subset W \Rightarrow W\in N_e$

PRUEBA

i) por def. de N_e si $V\in N_e \Rightarrow e\in V$

ii) Sean $V,W\in N_e$ entonces existen $A,B\in\tau$ $\ni$ $e\in A\subset V$ y $e\in B\subset W$
$\therefore$ $e\in A\cap B\subset V\cap W$ con $A\cap B\in\tau$ pues τ es topología $\therefore$ $V\cap W\in N_e$

iii) Sea $V\in N_e$ entonces $\exists_{A\in\tau} \ni \quad e\in A\subset V$

si $W \subset G$ y $V \subset W$ entonces $e \in A \subset V \subset W$

$\therefore$ $W \in \mathcal{N}_e$

iii) $h: G \times G \to G$ $\ni$ $h(x,y) = x \cdot y$ es continua pues G es un grupo topológico. En particular h es continua en (e,e) y $h(e,e) = e \cdot e = e$

$\therefore$ si $V \in \mathcal{N}_e \Rightarrow \underset{W_1 \in \tau}{\exists} \ni e \in W_1 \subset V$

como h es continua, $h^{-1}(W_1)$ es abierto en $G \times G$ con la topología producto.

$\therefore$ $h^{-1}(W_1) = \bigcup_{(i_1,i_2) \in I} W_{i_1} \times W_{i_2}$ y es vecindad

de (e,e) $\therefore$ $\underset{(i_1,i_2) \in I}{\exists} \ni (e,e) \in W_{i_1} \times W_{i_2}$

con $W_{i_1}, W_{i_2} \in \mathcal{N}_e$ y por ii) $W = W_{i_1} \cap W_{i_2} \in \mathcal{N}_e$

$\therefore$ $W \times W \subset W_{i_1} \times W_{i_2} \subset h^{-1}(W_1)$

$\therefore$ $h(W \times W) \subset h(h^{-1}(W_1)) = W_1 \subset V$ pues h es sobre, pero $h(W \times W) = W \cdot W$

$\therefore$ $\underset{W \in \mathcal{N}_e}{\exists} \ni W \cdot W \subset V$

iv) Sea $V \in \mathcal{N}e$ entonces $\underset{V \in \tau}{\exists} \cdot \ni \cdot \quad e \in V \subset U$

como $h_1(x) = x^{-1}$ es un homeomorfismo

entonces $V^{-1} = h_1^{ii}(V) \subset h_1^{ii}(U) = U^{-1}$

pero V^{-1} es abierto y $e = e^{-1} \in V^{-1}$

$\therefore \quad V^{-1} \in \tau \quad$ y $\quad e \in V^{-1} \subset U^{-1}$

$\therefore \quad U^{-1} \in \mathcal{N}e$

v) Sea $V \in \mathcal{N}e$ y $a \in G$

como $h_5(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ es homeomorfismo

y $\underset{W \in \tau}{\exists} \cdot \ni \cdot \quad e \in W \subset V$

si $\quad U = h_5^{ii}(W) \subset h_5^{ii}(V)$ ent: $U \in \tau$

$\therefore \quad h_5(U) = a \cdot U \cdot a^{-1} = h_5(h_5^{ii}(W)) = W \subset V$

$\therefore \quad a \cdot U \cdot a^{-1} \subset V \quad$ con $\quad U \in \mathcal{N}e$

pues $\quad h_5(e) = a \cdot e \cdot a^{-1} = e \in W$

$\therefore \quad e = h_5^{-1}(e) \in U \qquad \cdot + \cdot$

Estas 6 propiedades que satisface $\mathcal{N}e$ tienen otra importante propiedad, pues en base a estas se puede generar en un grupo, una topología compatible con la estructura del grupo que es única, para ver esto, introducimos la noción de filtro.

1.28 DEF Sea G un conjunto no vacío y $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(G)$ entonces $\mathcal{F}$ es un filtro en $G \Leftrightarrow$

i) $\phi \notin \mathcal{F}$

ii) $\underset{X, Y \in \mathcal{F}}{\forall} \quad X \cap Y \in \mathcal{F}$

iii) $\underset{X \in \mathcal{F}}{\forall}$ si $X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

Por el teor. 1.27 N_e es un filtro, pues como $\underset{V \in N_e}{\forall} \quad e \in V$ entonces $\phi \notin N_e$ y las otras 2 condiciones son las propiedades ii) y iii) del teorema 1.27; Utilizando este concepto podemos enunciar el siguiente

1.29 TEOREMA Sea G un grupo con neutro e y si $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de G que satisface las propiedades i) a vi) del teor 1.27 entonces $\exists!$ τ Topología en G $\cdot\ni\cdot$ τ es compatible con la estructura del grupo y $\mathcal{B}$ es N_e bajo esa Topología

PRUEBA

Por las propiedades i), ii) y vi) $\mathcal{B}$ es un filtro de conjuntos que contienen a e

Sea $a \in G$ definimos $\mathcal{B}_a = \{a \cdot V \mid V \in \mathcal{B}\}$

P.D. $\mathcal{B}_a$ es un filtro de conjuntos que contienen al elemento a.

Como $h_2(x) = a \cdot x$ es un homeomorfismo biy. por (1.21 ii)) y mapea e en a y además $\forall_{V \in \mathcal{B}}\ e \in V \therefore \forall_{W \in \mathcal{B}_a}\ a \in W$

por la definición de $\mathcal{B}_a$.

Sean $W_1, W_2 \in \mathcal{B}_a$ P.D. $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{B}_a$

$W_1 = a \cdot V_1$ y $W_2 = a \cdot V_2$ con $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$

P.D. $a \cdot V_1 \cap a \cdot V_2 = a \cdot (V_1 \cap V_2)$.

Sea $x \in (a \cdot V_1 \cap a \cdot V_2)$ entonces $\exists$n $v \in V_1$ y $w \in V_2$

$\ni$ $x = a \cdot v = a \cdot w$ por cancelación $v = w$

$\therefore$ $v \in V_1 \cap V_2$ entonces $x = a \cdot v \in a \cdot (V_1 \cap V_2)$

i.e. $(a \cdot V_1 \cap a \cdot V_2) \subset a \cdot (V_1 \cap V_2)$

Ahora si $x = a \cdot z \in a \cdot (V_1 \cap V_2)$ ent. $z \in V_1 \cap V_2$

$\therefore$ $a \cdot z \in a \cdot V_1$ y $a \cdot z \in a \cdot V_2 \therefore a \cdot z \in a \cdot V_1 \cap a \cdot V_2$

i.e. $a \cdot (V_1 \cap V_2) \subset a \cdot V_1 \cap a \cdot V_2$

$\therefore$ $W_1 \cap W_2 = a \cdot (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}_a$ pues $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}$

Veamos que si $V_1 \in \mathcal{B}_a$ y $V_1 \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{B}_a$.
$\underset{V \in \mathcal{B}}{\exists}$ $\cdot \ni \cdot$ $V_1 = a \cdot V$ sea $W \subset G$ $\cdot \ni \cdot$ $V_1 \subset W$

Como $h_2(x) = a \cdot x$ es homomorfismo biyectivo entonces $h_2^{-1}(V_1) \subset h_2^{-1}(W)$
$\therefore$ $h^{-1}(a V) = a^{-1} \cdot (a V) = V \subset h_2^{-1}(W)$
por la propiedad vi) $h_2^{-1}(W) \in \mathcal{B}$
entonces $W = h_2(h_2^{-1}(W)) = a\, h_2^{-1}(W) \in \mathcal{B}_a$

$\therefore$ $\mathcal{B}_a$ es un filtro de conjuntos conteniendo a a

En particular $\mathcal{B}_e = \mathcal{B}$ pues si $V \in \mathcal{B}$
$e \cdot V = V$.

A continuación enunciamos un teorema que nos permitirá concluir una parte del Teorema que estamos demostrando, la prueba de aquel se hará posteriormente (teorema 1.29 a))

<u>teorema</u> Sea G un conj. no vacío y $\underset{x \in G}{\forall}$ sea $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{P}(G)$ que satisface que $\mathcal{B}_x$ es un filtro de conjuntos conteniendo a x y además que $\underset{B \in \mathcal{B}_x}{\forall}$ $\underset{V \in \mathcal{B}_x}{\exists}$ $\cdot \ni \cdot$
$\underset{y \in V}{\forall}$ $B \in \mathcal{B}_y$ entonces

si $\tau = \{ G_1 \subset G \mid \underset{x \in G_1}{\forall}$ G_1 contiene un elemento de $\mathcal{B}_x \}$

τ es una topología en G y $\mathcal{B}_x$ es el sistema de vecindades de x en esa topología.

Sea $N \in \mathcal{B}_x$ P.D. $\underset{M \in \mathcal{B}_x}{\exists} \ni \underset{y \in M}{\forall} \; N \in \mathcal{B}_y$

$N = x \cdot V$ con $\mathcal{B} \ni V$ por la propiedad iii)

$\underset{W \in \mathcal{B}}{\exists} \ni \quad W \cdot W \subset V$

Sea $M = x \cdot W \in \mathcal{B}_x$ por def.

Si $y \in M$ entonces $y \in x \cdot W$

$\therefore \quad y \cdot W \subset (x \cdot W) \cdot W = x \cdot (W W) \subset x \cdot V = N$

como $y \cdot W \in \mathcal{B}_y$ filtro y $y \cdot W \subset N$ entonces $N \in \mathcal{B}_y$.

$\therefore \quad \underset{y \in M}{\forall} \; N \in \mathcal{B}_y$.

Aplicando ahora el teorema ya enunciado $\tau = \{ G_1 \subset G \mid \underset{x \in G_1}{\forall} \; G_1$ contiene un elemento de $\mathcal{B}_x \}$

es una topología y $\mathcal{B}_x$ es el sistema fundamental de vecindades de x bajo esa topología.

P.D. τ es consistente con la estructura de grupo

1° veamos que $h: G\times G \to G$ $\ni$ $h(x,y) = x\cdot y$ es continua en cualquier punto $(a,b) \in G\times G$

Sea $(a\cdot b)\cdot V \in \mathcal{B}_{(a\cdot b)}$ con $V \in \mathcal{B}$ por la prop. iii) sea $W \in \mathcal{B}$ $\ni$ $W\cdot W \subset V$
y por la prop. v) $b\cdot W b^{-1} \in \mathcal{B}$
entonces por ii) $U = (b W b^{-1}) \cap W \in \mathcal{B}$

Además $(b^{-1} U \cdot b)\cdot U$

$$
\begin{aligned}
&= (b^{-1}\cdot \{ (b\cdot W\cdot b^{-1}) \cap W \}\cdot b)\cdot \{ (bW\cdot b^{-1}) \cap W \} \\
&= (b^{-1} b\cdot W\cdot b^{-1} \cap b^{-1} W)\cdot b \cdot \{ (b\cdot W\cdot b^{-1}) \cap W \} \\
&= (W\cdot b^{-1}\cdot b \cap b^{-1} W\cdot b)\cdot \{ (b\cdot W\cdot b^{-1}) \cap W \} \\
&= (W \cap b^{-1} W\cdot b)\cdot (b\cdot W\cdot b^{-1} \cap W) \\
&\subset W\cdot W \subset V
\end{aligned}
$$

Las igualdades se siguen de la 1ª parte de la prueba.

$\therefore$ $(a\cdot U)\cdot(b\cdot U) = (a\cdot b)\cdot(b^{-1} U)\cdot(b\cdot U) =$
$(a\cdot b)\cdot(b^{-1} U\cdot b)\cdot U \subset (a\cdot b)\cdot V$

como $U \in \mathcal{B} \Rightarrow a \cdot U \in \mathcal{B}_a$ y $b \cdot U \in \mathcal{B}_b$

y $h(a \cdot U \times b \cdot U) = (a \cdot U) \cdot (b \cdot U) \subset a \cdot b\, V$

$\therefore \ \forall\ a \cdot b\, V \in \mathcal{B}_{a \cdot b} \quad \exists\ a \cdot U \times b \cdot U \in \mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_b$
$\cdot \ni \cdot\ h(a \cdot U \times b \cdot U) \subset a \cdot b\, V \ \therefore$ h es continua

Por último veamos que $h_1 : G \to G \cdot \ni \cdot h_1(x) = x^{-1}$ es continua.

Sea $a^{-1} V \in \mathcal{B}_{a^{-1}}$ con $V \in \mathcal{B}$
por la propiedad iv) $V^{-1} \in \mathcal{B}$ y por la prop. v) $W = a^{-1} \cdot V^{-1} \cdot a \in \mathcal{B}$ entonces por la prop. iv) $W^{-1} \in \mathcal{B}$, pero $W^{-1} = (a^{-1} V^{-1} a)^{-1}$
$= a^{-1} \cdot V \cdot a$ entonces
$(a \cdot W)^{-1} = W^{-1} a^{-1} = a^{-1} V \cdot a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot V$

$\therefore \ h_1(a \cdot W) = (a \cdot W)^{-1} = a^{-1} \cdot V$

$\therefore$ h_1 es continua y de ésto se desprende que $\mathcal{T}$ es compatible con la estructura de grupo. +

A continuación demostraremos el teorema que enunciamos en el teorema anterior (1.29 a)).

I P.D. $G \in \mathcal{T}$ y $\phi \in \mathcal{T}$

1º sea $x \in G$ y $U \in \mathcal{B}_x$ entonces $x \in U \subset G$

$\therefore \forall_{x \in G} \ \exists_{U \in \mathcal{B}_x} \ni x \in U \subset G \ \therefore G \in \mathcal{T}$

2º $\phi \in \mathcal{T}$ por vacuidad

II Sean $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ P.D. $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$

Sea $x \in G_1 \cap G_2$ como $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ existen
$U, V \in \mathcal{B}_x \ni x \in U \subset G_1$ y $x \in V \subset G_2$
entonces $x \in U \cap V \subset G_1 \cap G_2$ como $\mathcal{B}_x$ es un filtro
$U \cap V \in \mathcal{B}_x \ \therefore \forall_{x \in G_1 \cap G_2} \ \exists_{W \in \mathcal{B}_x} \ni x \in W \subset G_1 \cap G_2$

$\therefore G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$

III Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ P.D. $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{T}$

sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ entonces $\exists_{\alpha_0 \in A} \ni x \in G_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$

$\therefore \exists \ U \in \mathcal{B}_x \ni x \in U \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

$\therefore \forall_{x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha} \ \exists_{U \in \mathcal{B}_x} \ni x \in U \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

$\therefore \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{T}$ y de I, II y III se tiene que $\mathcal{T}$ es una topología en G.

Veamos ahora que $\mathcal{B}_x$ coincide con el sistema fundamental de vecindades en x bajo la topología $\mathcal{T}$. (denotamos a este sistema por $\mathcal{N}_x$) i.e.

P.D. $\mathcal{N}_x = \mathcal{B}_x \quad \forall_{x \in G}$

Sea $x \in G$ y $U \in \mathcal{N}_x$ P.D. $U \in \mathcal{B}_x$ como $U \in \mathcal{N}_x$ entonces existe $G_1 \in \mathcal{T}$ $\cdot\ni\cdot$ $x \in G_1 \subset U$, ahora como $G_1 \in \mathcal{T}$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ $\cdot\ni\cdot$ $x \in V \subset G_1 \subset U$ y como $\mathcal{B}_x$ es filtro y $V \in \mathcal{B}_x$ se tiene que $U \in \mathcal{B}_x$ $\therefore$ $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{B}_x$

Sea $U \in \mathcal{B}_x$ P.D. $U \in \mathcal{N}_x$, definimos $G = \{y \in U \mid U \in \mathcal{B}_y\}$, como $U \in \mathcal{B}_x$ que es filtro entonces $x \in U$ y $U \in \mathcal{B}_x$ $\therefore$ $x \in G$ además $G \subset U$ P.D. $G \in \mathcal{T}$.

Si $y \in G$ entonces $U \in \mathcal{N}_y$ y por la propiedad adicional enunciada en el teorema 1.29

$\exists_{V \in \mathcal{B}_y} \cdot\ni\cdot \forall_{z \in V} \; U \in \mathcal{B}_z$

$\therefore$ si $z \in V$ como $U \in \mathcal{B}_z$ entonces $z \in U$

$\therefore$ $z \in U$ y $U \in \mathcal{B}_z$ i.e. $z \in G$ $\therefore$ $V \subset G$
i.e. $\forall_{y \in G} \; \exists_{V \in \mathcal{B}_y} \cdot\ni\cdot V \subset G$ $\therefore$ $G \in \mathcal{T}$ y

$x \in G \subset V \quad \therefore \quad V \in \mathcal{N}_x \therefore \mathcal{N}_x \supset \mathcal{B}_x$

i.e. $\forall_{x \in G} \quad \mathcal{N}_x = \mathcal{B}_x$ lo que prueba el teor. $+$.

Si $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de vecindades de x entonces $\mathcal{B}$ es base para el filtro de vecindades de x, $\mathcal{N}_x$ i.e.

a) $\forall_{B \in \mathcal{B}} \quad B \in \mathcal{N}_x$

b) $\forall_{V \in \mathcal{N}_x} \quad \exists_{B \in \mathcal{B}} \quad \cdot \ni \cdot \quad B \subset V$

Utilizando este hecho el teor 1.29 se puede enunciar en base a un sistema fundamental de vecindades en vez de usar todo el conjunto de vecindades.

1.30 <u>teorema</u> Sea G un grupo con neutro e y $\mathcal{B}$ una fam. no vacía de subconjuntos de $G \ni$.

<u>i)</u> $\forall_{B \in \mathcal{B}} \quad e \in B$

<u>ii)</u> $\forall_{B_1, B_2 \in \mathcal{B}} \quad \exists_{B_3 \in \mathcal{B}} \quad \cdot \ni \cdot \quad B_3 \subset B_1 \cap B_2$

<u>iii)</u> $\forall_{B \in \mathcal{B}} \quad \exists_{C \in \mathcal{B}} \quad \cdot \ni \cdot \quad C \cdot C \subset B$

iv) $\forall_{B \in \mathcal{B}} \quad \exists_{C \in \mathcal{B}} \ \cdot \ni \cdot \quad C \subset B^{-1}$

v) $\forall_{B \in \mathcal{B}} \quad \forall_{a \in G} \quad \exists_{C \in \mathcal{B}} \ \cdot \ni \cdot \quad C \subset a B a^{-1}$

entonces $\exists !$ τ topología en $G \cdot \ni \cdot$ τ es compatible con la estructura del grupo y $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de vecindades de e bajo τ.

PRUEBA

Sea $N_e = \{ V \subset G \mid B \subset V$ con $B \in \mathcal{B} \}$
P.D. que N_e satisface las 6 condiciones del teorema 1.29.

i) Sea $V \in N_e \Rightarrow \exists\ B \in \mathcal{B} \cdot \ni \cdot \quad B \subset V$
por i) $e \in B \subset V$ ent. $e \in V$

ii) Sean $V, W \in N_e \Rightarrow \exists_m\ B_1, B_2 \in \mathcal{B} \cdot \ni \cdot$
$B_1 \subset V$, $B_2 \subset W$ por ii) $\exists\ B_3 \in \mathcal{B} \cdot \ni \cdot\ B_3 \subset B_1 \cap B_2$
$\therefore\ B_3 \subset V \cap W \quad \therefore\ V \cap W \in N_e$

iii) Sea $V \in N_e \Rightarrow \exists\ B \in \mathcal{B} \cdot \ni \cdot\ B \subset V$
y por iii) $\exists\ C \in \mathcal{B} \cdot \ni \cdot \quad C \cdot C \subset B$ pero $C \in N_e$
$\therefore\ \exists\ C \in N_e \cdot \ni \cdot \quad C \cdot C \subset V$

iv) Sea $V \in \mathcal{N}_e \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B} \ni B \subset V$ entonces $\exists\, C \in \mathcal{B} \ni C \subset B^{-1}$ con $C \in \mathcal{N}_e$

$\therefore \quad C^{-1} \subset (B^{-1})^{-1} = B \subset V$

y $\quad C \subset B^{-1} \subset V^{-1} \quad \therefore \quad V^{-1} \in \mathcal{N}_e$

v) Sea $V \in \mathcal{N}_e \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B} \ni B \subset V$ si $a \in G$ ent. $\exists\, C \in \mathcal{B} \ni C \subset a B a^{-1} \subset a V a^{-1}$

$\therefore \quad a V a^{-1} \in \mathcal{N}_e$

vi) Sea $V \in \mathcal{N}_e$ y $V \subset W$ ent. $\exists\, B \in \mathcal{B} \ni B \subset V \subset W \quad \therefore \quad W \in \mathcal{N}_e$

Tomando por último $\mathcal{N}_e$ y el teor 1.29 se tiene que $\exists!\ \tau$ top. compatible con la estructura de grupo y $\mathcal{N}_e$ es la fam. de vecindades de e bajo τ y por la def. de $\mathcal{N}_e$ $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de vecindades de e. $\dagger$

<u>1.31</u> <u>DEF.</u> Sea (G, τ) un espacio topológico entonces G se llama separable si y sólo si

$$\forall_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \quad \exists_{\substack{U \in \mathcal{N}_x \\ V \in \mathcal{N}_y}} \ni \quad U \cap V = \phi$$

(A veces se le conoce como espacio Hausdorff o T_2)

En el caso de un grupo topológico, es facil ver que sea separable utilizando el siguiente resultado.

1.32 TEOREMA Si (G,τ) es un grupo topológico y $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de vecindades de e entonces son equivalentes:

i) G es separable

ii) $\{e\}$ es un conjunto cerrado

iii) $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B = \{e\}$

PRUEBA:

i) $\Rightarrow$ ii) P.D. $G-\{e\}$ es abierto

Sea $y \in G-\{e\}$ (si no existe ent $\{e\}$ es cerrado) como G es separable $\exists$ $V\in\mathcal{N}_y$ y $U\in\mathcal{N}_e$ $\ni$ $U\cap V=\phi$ entonces $V\cap\{e\}\subset V\cap U=\phi$ pues $\{e\}\subset U$ i.e. $V\cap\{e\}=\phi$

$\therefore$ $V\subset G-\{e\}$ $\therefore$ $\forall_{y\in G-\{e\}}$ $\exists_{V\in\mathcal{N}_y}$ $\ni$ $V\subset G-\{e\}$

$\therefore$ $G-\{e\}$ es abierto ent. $\{e\}$ es cerrado

ii) $\Rightarrow$ iii) como $\mathcal{B}$ es sist. fund. de vec. de e entonces $\forall_{B\in\mathcal{B}}$ $e\in B$ ent. $\{e\}\subset\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B$

sea $x \neq e$, $x \in G \Rightarrow \underset{\substack{V \in \mathcal{N}_x \\ U \in \mathcal{N}_e}}{\exists_{m}} \cdot \ni \cdot \; V \cap U = \emptyset$

pero para esa $U \in \mathcal{N}_e$ $\underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} \cdot \ni \cdot \; B \subset U$

$\therefore \quad B \cap V \subset U \cap V = \emptyset \quad$ i.e. $\quad B \cap V = \emptyset$

$\therefore \quad x \notin B$ pues $x \in V \in \mathcal{N}_x$

$\therefore \underset{\substack{x \in G \\ x \neq e}}{\forall} \quad \underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} \cdot \ni \cdot \; x \notin B \quad \therefore \; x \notin \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$

$\therefore \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \{e\}$.

iii) $\Rightarrow$ i) Sean $x, y \in G \quad x \neq y$

entonces $y^{-1} x \neq e \quad \therefore \underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} \cdot \ni \cdot \; y^{-1} x \notin B$

sea $C \in \mathcal{B} \cdot \ni \cdot \quad C \cdot C \subset B \quad$ si $\; V = C \cap C^{-1}$

$V \in \mathcal{N}_e$ pues $C \in \mathcal{B} \subset \mathcal{N}_e$ y $C^{-1} \in \mathcal{N}_e$

y $V^{-1} = V$, pues si $x \in V^{-1}$

$\Rightarrow \quad x \in (C \cap C^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow \quad x = d^{-1}$ con $d \in C$ y $d \in C^{-1}$

$\Rightarrow \quad d^{-1} = x \in C^{-1} \wedge d^{-1} = x \in (C^{-1})^{-1} = C$

$\Rightarrow \quad x \in (C^{-1} \cap C) = V \quad \therefore \; V^{-1} \subset V$

y si $x \in V \Rightarrow x \in C \cap C^{-1} \Rightarrow x = d$ con $d \in C$

$$y \ d \in C^{-1} \Rightarrow x^{-1} = d^{-1} \in C^{-1} \ y \ x^{-1} = d^{-1} \in (C^{-1})^{-1}$$
$$\Rightarrow x^{-1} \in C^{-1} \cap C = V$$
$$\Rightarrow x = (x^{-1})^{-1} \in V^{-1} \therefore V \subset V^{-1}$$
$$\therefore V = V^{-1}$$

Ahora como $V \in N_e$ ent $x \cdot V \in N_x$ y $y \cdot V \in N_y$

sup $(x \cdot V) \cap (y \cdot V) \neq \emptyset$ sea $z \in (x \cdot V) \cap (y \cdot V)$

$$\Rightarrow z = x \cdot v_1 \quad y \quad z = y \cdot v_2 \qquad v_1, v_2 \in V$$
$$\Rightarrow y^{-1} \cdot z = v_2 \quad y \quad z \cdot v_1^{-1} = x$$
$$\Rightarrow y^{-1} \cdot z = v_2 \quad y \quad v_1^{-1} = z^{-1} \cdot x$$
$$\Rightarrow y^{-1} \cdot z \cdot z^{-1} \cdot x = y^{-1} \cdot x = v_2 \cdot v_1^{-1}$$
$$\Rightarrow y^{-1} \cdot x \in V \cdot V^{-1} = V \cdot V \subset C \cdot C \subset B$$

pues $V = C \cap C^{-1} \subset C$

$\therefore \quad y^{-1} \cdot x \in B \quad \nabla$

$\therefore \quad x V \cap y V = \emptyset$

$\therefore \quad \forall_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \quad \exists_{\substack{U \in N_x \\ V \in N_y}} \quad \text{t.} \quad U \cap V = \emptyset$

$\therefore$ G es separable $\cdot + \cdot$

Como vimos en la 1ª parte de este capítulo un subgrupo H es un subconjunto de un grupo G, que a su vez es grupo con la operación restringida a H. El siguiente teorema nos da ciertas propiedades de los subgrupos que se conservan bajo operaciones topológicas.

1.33 <u>TEOREMA</u> Sea (G,τ) un grupo topológico, la cerradura de un subgrupo H es un subgrupo, y si H es normal entonces $\overline{H}$ lo es.

<u>PRUEBA</u>:

Veamos 1º que $\overline{H \times H} = \overline{H} \times \overline{H}$

Como $H \subset \overline{H} \Rightarrow H \times H \subset \overline{H} \times \overline{H}$

P.D. $\overline{H} \times \overline{H}$ es cerrado, sea $(x,y) \in (\overline{H} \times \overline{H})^c$

$\Rightarrow x \notin \overline{H}$ o $y \notin \overline{H}$ supongamos $x \notin \overline{H}$

$\Rightarrow \exists\ U \in N_x \ \ni\ U \cap \overline{H} = \emptyset$

sea $V \in N_y$ entonces $(U \times V) \cap (\overline{H} \times \overline{H}) = \emptyset$

pero $U \times V$ es vecindad de (x,y) en $G \times G$

$\therefore$ $(\overline{H} \times \overline{H})^c$ es abierto i.e. $\overline{H} \times \overline{H}$ es cerrado

$\therefore$ $H \times H \subset \overline{H \times H} \subset \overline{H} \times \overline{H}$ por def de cerradura.

Sea $(x,y) \in \overline{H} \times \overline{H}$ ent. $x \in \overline{H}$ y $y \in \overline{H}$ ent $\forall\ U \in N_x$ $U \cap H \neq \emptyset$ y $\forall\ V \in N_y$ $V \cap H \neq \emptyset$

Sea S una vecindad de (x,y) entonces existen $U \in N_x$, $V \in N_y$ $\ni$ $U \times V \subset S$, entonces existen $h_1 \in U \cap H$ y $h_2 \in V \cap H$, entonces $(h_1,h_2) \in U \times V \subset S$ y $(h_1,h_2) \in H \times H$

$\therefore$ $(h_1,h_2) \in (H\times H)\cap S$ $\therefore$ $(H\times H)\cap S \neq \phi$

y esto $\forall S$ vecindad de (x,y)

$\therefore$ $(x,y) \in \overline{H\times H}$ $\therefore$ $\overline{H}\times\overline{H} \subset \overline{H\times H}$

$\therefore$ $\overline{H}\times\overline{H} = \overline{H\times H}$.

Probemos el teorema:

Como H es un subgrupo si $f: G\times G \to G$ $\ni$ $f(x,y) = x^{-1}\cdot y$ ent. $f(H\times H) \subset H$

y como f es continua

$\Rightarrow$ $f(\overline{H}\times\overline{H}) = f(\overline{H\times H}) \subset \overline{f(H\times H)} \subset \overline{H}$ ya que por una caracterización de continuidad $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, pues si $y\in\overline{A}$ ent $\displaystyle\forall_{V\in N_y} V\cap A\neq\phi$.

Sea $U \in N_{f(y)}$ ent $f^{-1}(U) \in N_y$ pues f es continua $\therefore$ $f^{-1}(U)\cap A \neq \phi$

$\therefore$ $\phi \neq f(f^{-1}(U)\cap A) \subset f(f^{-1}(U)) \cap f(A)$

$\subset U\cap f(A) \subset U\cap A$, si $f(A)\subset A$,

$\therefore$ $U\cap f(A) \neq \phi \neq U\cap A$ $\forall\, U \in N_{f(y)}$

$\therefore$ $f(y) \in \overline{A}$ i.e. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{A}$

$\therefore$ $\overline{H}$ es un subgrupo pues $f(\overline{H}\times\overline{H}) \subset \overline{H}$ (ver lema 1.5)

Supongamos que H es normal P.D. $\overline{H}$ es normal

$h_5 : G \to G$. $\ni$. $h_5(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ es un homeomorfismo, si $a \in G$

$h_5(H) = a H a^{-1} = H$ pues H es normal

$\therefore$ $\forall a \in G$ $\quad a \cdot H = H \cdot a$

y además $\quad h_5(\bar{H}) = \bar{H}$

pues como h_5 es cont., entonces $h_5(\bar{H}) \subset \bar{H}$

y como se tiene que $h_5^{-1}(h_5(\bar{H})) = h_5^{-1}(a \bar{H} \cdot a^{-1}) = \bar{H}$

y además $\quad \bar{H} \subset h_5(\bar{H}) \Leftrightarrow \quad h_5^{-1}(\bar{H}) \subset h_5^{-1}(h_5(\bar{H})) = \bar{H}$

y tomando $\underline{h_5} : G \to G \ \ni \ \underline{h_5}(x) = a^{-1} \cdot x \cdot a$

es homeomorfismo $\quad \therefore \quad \underline{h_5}(\bar{H}) \subset \bar{H}$

lo que implica que $a^{-1} \bar{H} a \subset \bar{H}$ y $a \bar{H} a^{-1} \subset H$

$\therefore \quad a^{-1} \bar{H} \subset \bar{H} a^{-1}$ y $\bar{H} \cdot a^{-1} \subset a^{-1} \bar{H}$

$\therefore \quad a^{-1} \bar{H} = \bar{H} \cdot a^{-1}$ y ésto $\forall \, a^{-1} \in G$

$\therefore \quad \bar{H}$ es normal. $\quad + \,$.

Como un corolario de este teorema se tiene :

1.34 <u>COROLARIO</u> Si (G, τ) es un grupo topológico con elemento neutro $e \Rightarrow \overline{\{e\}}$ es un subgrupo cerrado y normal

<u>PRUEBA</u>.

Como $\{e\}$ es subgrupo normal y por el teor 1.33 $\overline{\{e\}}$ es subgrupo cerrado y normal. +

Consideremos ahora (G,τ) un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo y formemos el grupo cociente G/H con la topología cociente, daremos a este grupo una estructura de grupo topológico y veremos como se definen las vecindades en esta topología.

1.35 **LEMA** Sea (G,τ) un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo de G, si G/H es el grupo cociente con la topología cociente y $\pi : G \to G/H$ el mapeo canónico entonces:

i) π es abierto y continuo

ii) $\forall_{a \in G}$ las vecindades de $\pi(a)$ son de la forma $\pi(aV)$ con $V \in \mathcal{N}_e$

PRUEBA

i) Por la def. de la top. cociente en G/H sabemos que los abiertos de G/H son aquellos $A \subset G/H$ $\cdot\ni\cdot$ $\pi^{-1}(A) \in \tau$ lo que implica que por construcción π es continuo donde $\pi : G \to G/H$ es $\cdot\ni\cdot$ $\pi(x) = x \cdot H$

Si U es abierto de G ent $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cdot H$ pues como $\pi(U) = U \cdot H$ y $\pi^{-1}(U \cdot H) = \{g \in G \mid \pi(g) \in UH\} = \{g \in G \mid g \cdot H \in U \cdot H\}$

pero si $g \cdot H \in U \cdot H$ ent. $g \in U \cdot H$,
pues si $g \in U \cdot H \Rightarrow g = u \cdot h, u \in U, h \in H$
$\therefore\ g \cdot H = g \cdot H = u \cdot h \cdot H = u \cdot H \in U \cdot H$
$\therefore\ \pi^{-1}(\pi(U)) = U \cdot H$;
pero $U \cdot H$ es abierto en G pues U lo es y por 1.24 $\therefore\ \pi(U)$ es abierto en G/H por def. de abierto en la top. cociente:
$\therefore\ \pi$ es abierta y continua.

ii) Sea $a \in G$ y $V \in N_e$ ent. $a \cdot V \in N_a$ como π es abierta y $a \in a \cdot V$ entonces $\pi(a \cdot V)$ es vecindad de $\pi(a)$.

Ahora si $A \in N_{\pi(a)}$ entonces $\pi^{-1}(A)$ es vecindad de a en G, pues $a \in \pi^{-1}(A)$ y π es continua $\therefore\ \pi^{-1}(A) = a \cdot V$ con $V \in N_e$ entonces $A = \pi(\pi^{-1}(A)) = \pi(a\ V)$ pues π es sobre en G/H. $\cdot + \cdot$

Si pedimos aparte que H sea normal tenemos un importante teorema:

1.36 <u>TEOREMA</u> Sea (G, τ) un grupo topológico y $N \subset G$ un subgrupo normal de G, si G/N

es el grupo cociente y $\pi : G \to G/N$ es el mapeo canónico y a G/N se le da la topología cociente entonces:

i) G/N es un grupo topológico

ii) π es abierta y continua

iii) $\forall_{a \in G} \quad \mathcal{N}_{\pi(a)} = \{ \pi(a)\pi(V) \mid V \in \mathcal{N}_e \}$

iv) G/N es separable $\Leftrightarrow$ N es cerrado

PRUEBA

ii) fue probado en 1.35 i)

iii) Como N es normal π es homomorfismo pues $\pi(a\cdot b) = a\cdot b\cdot N = (a\cdot N)(b\cdot N) = \pi(a)\,\pi(b)$ por ii) del teor 1.35 $\mathcal{N}_{\pi(a)} = \{ \pi(a\cdot V) \mid V \in \mathcal{N}_e \}$
$\Rightarrow \mathcal{N}_{\pi(a)} = \{ \pi(a)\cdot\pi(V) \mid V \in \mathcal{N}_e \}$

i) tomemos $\mathcal{N}_{\pi(e)} = \{ \pi(e)\cdot\pi(V) = \pi(V) \mid V \in \mathcal{N}_e \}$ y veamos que $\mathcal{N}_{\pi(e)}$ satisface las 6 condiciones del teor 1.27

1° como $e \in V \ \forall_{V \in \mathcal{N}_e} \Rightarrow \pi(e) \in \pi(V) \ \forall_{\pi(V) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}}$

2° Sean $\pi(V), \pi(W) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$ entonces $\pi(V) \cap \pi(W) = \pi(V \cap W)$ pero $V \cap W \in \mathcal{N}_e$ $\therefore$
$\pi(V) \cap \pi(W) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$

6° Sea $\pi(V) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$ y $\pi(V) \subset W$
entonces $\pi^{-1}(W) \supset \pi^{-1}(\pi(V)) \supset V$
$\therefore$ $\pi^{-1}(W) \in \mathcal{N}_e$ ent. $\pi(\pi^{-1}(W)) = W \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$

$\therefore$ $\mathcal{N}_{\pi(e)}$ es un filtro de vecindades de $\pi(e)$

3° Sea $\pi(V) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$ como $V \in \mathcal{N}_e$
$\Rightarrow$ $\exists$ $W \in \mathcal{N}_e$ $\cdot\ni\cdot$ $W \cdot W \subset V$
$\Rightarrow$ $\pi(W)\cdot\pi(W) = \pi(W\cdot W) \subset \pi(V)$ con $\pi(W) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$

4° Sea $\pi(V) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$ como $V \in \mathcal{N}_e$
$\Rightarrow$ $V^{-1} \in \mathcal{N}_e$, entonces $\pi(V^{-1}) = (\pi(V))^{-1} \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$

5° Sea $\pi(V) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$ ya que $V \in \mathcal{N}_e$
si $a \in G$ $\Rightarrow$ $aVa^{-1} \in \mathcal{N}_e$ $\Rightarrow$ $\pi(aVa^{-1}) =$
$\pi(a)\cdot\pi(V)\cdot\pi(a^{-1}) \in \mathcal{N}_{\pi(e)}$

Como $\mathcal{N}_{\pi(e)}$ satisface estas 6 condiciones por el teor 1.29 la topología cociente es compatible con la estructura de grupo
$\therefore$ G/N es un grupo topológico

iii) Supongamos que (G/N) es separable
por el teor 1.32 ii) $\{\pi(e)\}$ es cerrado

pero $\pi(e) = N$ $\therefore$ N es cerrado

Si N es cerrado $\Rightarrow$ N^c es abierto
$\Rightarrow$ $\pi(N^c)$ es abierto pues π es abierta entonces
$\pi(N^c) = G/N - \{\pi(e)\}$ es abierto
$\therefore$ $\{\pi(e)\}$ es cerrado y por teor 1.32
G/N es separable. $\cdot + \cdot$

Como ya vimos un homomorfismo es una función que relaciona 2 grupos y que preserva las operaciones en los grupos, ahora nos interesa saber cuando esta función resulta ser continua, si ambos grupos tienen definida una topología que los hace grupos topológicos.

1.37 <u>TEOREMA</u> Si G y H son 2 grupos topológicos con elementos neutros e_G y e_H y si $f: G \to H$ es un homomorfismo de grupos entonces son equivalentes:

i) f es continua
ii) f es continua para alguna $a \in G$
iii) f es continua en e_G
iv) $\underset{V \in \mathcal{N}_{e_H}}{\forall}$ $\underset{U \in \mathcal{N}_{e_G}}{\exists}$ $\cdot\ni\cdot$ $x^{-1}y \in U \Rightarrow f(x)^{-1}f(y) \in V$

<u>PRUEBA</u> :

i) $\Rightarrow$ ii) por definición de continuidad

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $V \in \mathcal{N}_{f(e_G)=e_H}$
pues f es homomorfismo $\therefore$ $f(e_G) = f(e_G \cdot e_G)$
$= f(e_G) \cdot f(e_G)$ $\therefore$ $f(e_G) = e_H$.

Como $f(a)\cdot V$ es vecindad de $f(a)$ y f es continua en a $\exists_{U \in \mathcal{N}_{e_G}} \cdot\ni\cdot$ $f(a\cdot U) \subset f(a)\cdot V$

entonces $f(a)\cdot f(U) \subset f(a)\cdot V$ $\therefore$ $f(U) \subset V$
$\therefore$ f es continua en e_G

iii) $\Rightarrow$ iv) Sea $V \in \mathcal{N}_{e_H}$ entonces
$\exists$ $U \in \mathcal{N}_{e_G}$ $\cdot\ni\cdot$ $f(U) \subset V$

Sea $x^{-1}y \in U$ entonces $f(x^{-1}y) \in V$
$\Rightarrow$ $f(x^{-1})\cdot f(y) \in V$ $\Rightarrow$ $f(x)^{-1}\cdot f(y) \in V$
pues $e_H = f(e_G) = f(x\cdot x^{-1}) = f(x)\cdot f(x^{-1})$

iv) $\Rightarrow$ i) sea $a \in G$. P.D. f es cont. en a.

Sea B vecindad de $f(a)$ entonces
$B = f(a)\cdot V$ con $V \in \mathcal{N}_{e_H}$

Sea $U \in N_{e_G}$ ∋ $\forall_{x^{-1}y \in U}$ $f(x)^{-1} f(y) \in V$

si $y \in a \cdot U$ vecindad de a en G

$\Rightarrow$ $a^{-1} y \in U$ $\Rightarrow$ $f(a)^{-1} f(y) \in V$

$\Rightarrow$ $f(y) \in f(a) \cdot V = B$

$\therefore$ $f(a \cdot U) \subset B$

$\therefore$ f es continua en a $\forall_{a \in G}$

$\therefore$ f es continua . ┼ .

Se podría extender este capítulo, exponiendo otras propiedades de los grupos Topológicos, pero para el desarrollo posterior, lo ya expuesto es suficiente para proseguir con el estudio de las medidas de Haar.

Para terminar este capítulo escribimos 2 resultados importantes, pero no incluimos la prueba de los mismos, la cual se puede encontrar en la [REF III] CAP I.

A.- Si $B \subset G$ es un subconjunto de G

un grupo topológico y $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de vecindades de e entonces

$$\overline{B} = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} A \cdot V = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} V \cdot A$$

B.- Si $(G, \mathcal{Z})$ es un grupo topológico

$\forall_{a \in G} \; \exists_{\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(G)} \; \cdot \ni \cdot$ i) $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de vecindades de a

ii) $\forall_{B \in \mathcal{B}}$ B es cerrado

CAPITULO II

ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS Y MEDIDAS

En este capítulo analizaremos algunas propiedades de compacidad, necesarias en el desarrollo de las Medidas de Haar. Así como también, la estructuración de las medidas desde el punto de vista de las funcionales lineales, además se analizarán los espacios $\mathcal{L}^p$ y L^p junto con la noción de integral superior y otras características generales de las medidas.

2.1 DEF. Sea X un espacio topológico Hausdorff entonces X es "compacto" si y sólo si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Una equivalencia de esta definición es el siguiente:

2.2 LEMA Sea X un espacio topológico entonces son equivalentes : i) X es compacto

ii) $\forall$ $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ familia de cerrados

$$\ni \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \phi \quad \underset{\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subset A}{\exists} \ni \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \phi$$

PRUEBA i) $\Rightarrow$ ii) Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de cerrados $\ni \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \phi$ entonces

$$X = (\phi)^c = \left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c \quad \text{pero}$$

$\{F_\alpha^c\}_{\alpha\in A}$ es una familia abierta $\therefore$ $\{F_\alpha^c\}_{\alpha\in A}$ es una cubierta abierta de X compacto entonces existen $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in A \ni$

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}^c \quad \text{entonces} \quad \phi = \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$$

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta de X entonces $\{G_\alpha^c\}_{\alpha\in A}$ es una familia de cerrados $\ni$

$$\phi = X^c = \left(\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in A} G_\alpha^c \quad \text{por ii)}$$

$$\exists \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} \subset A \ni \bigcap_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}^c = \phi \quad \text{entonces}$$

$$X = \phi^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \quad \therefore X \text{ es compacto}$$

$\cdot + \cdot$

Veamos ahora algunas propiedades de espacios compactos.

2.3 TEOREMA

i) Sean Y un espacio compacto y X un espacio top. Si $f: Y \to X$ es continua entonces $f(Y)$ es compacto

ii) Sea A un subconjunto compacto de X un espacio de Hausdorff entonces A es cerrado

iii) Un subespacio de un espacio compacto es compacto si y sólo si es cerrado.

PRUEBA

i) Sea $f: Y \to X$ cont. P.D. $f(Y)$ es compacto.

Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de $f(Y)$, tomemos $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ que es una familia abierta, pues f es continua, como $f(Y) \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ entonces

$$Y = f^{-1}(f(Y)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(U_\alpha)$$

$\therefore \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es cubierta abierta de Y que es compacto, entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Lambda$

$$\ni \quad X \subset \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(U_{\alpha_j})$$

entonces $f(X) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(U_{\alpha_j})\right) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{m} U_{\alpha_j}\right)\right)$

$\subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{\alpha_j} \quad \therefore \quad \{U_{\alpha_j}\}_{j=1}^{m}$ es subcubierta finita de $f(X)$ $\therefore$ $f(X)$ es compacto.

ii) Sea $A \subset X$ un compacto P.D. A^c es abierto, sea $x_0 \in A^c$ como X es Hausdorff, para cada $a \in A$ existen U_a vecindad de a y $U_a(x_0)$ vecindad de x_0 $\ni$. $U_a \cap U_a(x_0) = \phi$. Tomemos $\{U_a\}_{a \in A}$ (las vecindades así construidas) es una cubierta abierta de A compacto $\therefore$ existen $a_1, \dots, a_m \in A$ $\ni$. $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}$.

Si $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_{a_i}(x_0)$ entonces U es vecindad de x_0 y además

$$U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}\right) = \left(\bigcap_{i=1}^{m} U_{a_i}(x_0)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}\right) =$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} \left(U_{a_i}(x_0) \cap U_{a_i}\right) = \phi \quad \therefore \quad U \cap A = \phi$$

$\therefore$ $U \subset A^c$ i.e. A^c es abierto.

y como consecuencia inmediata se tiene que existen vecindades de A y de x_0 ajenas

iii) por ii) si $A \subset X$ es un subconjunto compacto entonces A es cerrado.

Supongamos que X es compacto y $A \subset X$ es un cerrado. Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ una familia de cerrados en A .∋. $\bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha = \phi$, como A es cerrado en X entonces cada F_α es cerrado en X compacto y por el lema 2.2 existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Delta$.∋. $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \phi$ y aplicando de nuevo el lema 2.2 se tiene que A es compacto. $\cdot \dashv \cdot$

Un importante teorema de compacidad es el Teorema de Tychonoff que caracteriza la compacidad en los espacios producto.

La demostración de dicho teorema se excluye del presente trabajo, pues la teoría necesaria para la prueba desviaría la atención del tema principal, sin que esta sea necesaria en los resultados posteriores, los detalles de esta demostración se pueden encontrar en los capítulos X y XI de [REF II].

2.4 <u>TEOREMA</u> Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios topológicos entonces $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el espacio producto es compacto si y sólo si $\forall_{\alpha\in A}$ X_α es compacto.

Para definir las medidas de Haar es necesario tener condiciones de compacidad en el espacio, por lo que a continuación damos dichas condiciones y algunas propiedades de tales espacios.

<u>2.5 DEF</u> Sea X un espacio topológico de Hausdorff entonces X es "localmente compacto" si y sólo si $\forall_{x\in X}$ $\exists_{W\in N_x}$ $\cdot\mathrel{\backepsilon}\cdot$ $\overline{W}$ es compacto

Para caracterizar los espacios localmente compactos tenemos el siguiente

2.6 <u>LEMA</u> Sea X un espacio topológico entonces son equivalentes:

i) X es localmente compacto

ii) $\underset{x \in X}{\forall} \quad \underset{U \in \mathcal{N}_x}{\forall} \quad \underset{W \in \mathcal{N}_x}{\exists} \cdot \ni \cdot \quad x \in W \subset \overline{W} \subset U$

con $\overline{W}$ compacto

iii) $\underset{C \subset X}{\forall}$ compacto $\underset{U \text{ abierto}}{\forall} \cdot \ni \cdot \quad C \subset U$

$\underset{V \text{ abierto}}{\exists} \cdot \ni \cdot \quad \overline{V}$ es compacto y $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$

La demostración del teorema anterior se puede encontrar en [REF II] cap XI teor 6.2 .

Un último teorema, que se utilizará posteriormente, relativo a la compacidad es el siguiente:

2.7 TEOREMA Sea Y un espacio compacto y $f: Y \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ continua entonces $f\ (|f|)$ alcanzan su supremo y su ínfimo y ambos son finitos, i.e. $\underset{y_0, y_1 \in Y}{\exists} \cdot \ni \cdot$

$$f(y_0) = \sup_{y \in Y} f(y) \quad y \quad f(y_1) = \inf_{y \in Y} f(y) .$$

ver [ref II] cap XI (teor 2.3 y 2.4)

Analizemos algunas propiedades de los grupos topológicos en relación con la compacidad.

2.8 **LEMA** Si G es un grupo topológico separable o Hausdorff y $A \subset G$ es un compacto entonces $\forall_{a \in G}$ $a \cdot A$, $A \cdot a$ y A^{-1} son compactos.

PRUEBA

Por el teor 1.21 sabemos que

$h_1 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_1(x) = x^{-1}$

$h_2 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_2(x) = a \cdot x$

$h_3 : G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $h_3(x) = x \cdot a$ son homeomorfismos, entonces en particular son continuas y si $A \subset G$ es un compacto, aplicando el teor 2.3 i) se tiene que:

$h_1(A) = A^{-1}$, $h_2(A) = a \cdot A$ y $h_3(A) = A \cdot a$ son compactos en G $\because$

Para desarrollar las medidas de Haar pediremos a G una estructura de grupo topológico localmente compacto como se verá más adelante.

Antes de analizar las medidas en general veamos dos propiedades de las vecindades del elemento neutro e en un grupo topológico G.

2.9 **DEF** Sea G un grupo topológico y $V \in N_e$ entonces V es "simétrica" si y sólo si $V^{-1} = V$

2.10 **LEMA** Sea G un grupo topológico y $V \in N_e$ entonces: i) $V \cup V^{-1}$ es simétrica

ii) $V \cap V^{-1}$ " "

iii) $V \cdot V^{-1}$ " "

PRUEBA i) Sea $V \in N_e$

$x \in (V \cup V^{-1})^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} \in V \cup V^{-1}$

$\Leftrightarrow x^{-1} \in V$ o $x^{-1} \in V^{-1} \Leftrightarrow x \in V^{-1}$ o $x \in V$

$\Leftrightarrow x \in V \cup V^{-1}$ $\therefore$ $(V \cup V^{-1})^{-1} = V \cup V^{-1}$

y como $V, V^{-1} \in N_e$ ent. $V \cup V^{-1} \in N_e$ y es simétrica

ii) sea $V \in N_e$

$x \in (V \cap V^{-1})^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} \in V \cap V^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} \in V \wedge x^{-1} \in V^{-1}$

$$\Leftrightarrow \quad x \in V^{-1} \wedge x \in V \quad \Leftrightarrow \quad x \in V \cap V^{-1}$$

$\therefore$ $V \cap V^{-1} = (V \cap V^{-1})^{-1}$ y como, $V, V^{-1} \in \mathcal{N}e$ entonces $V \cap V^{-1} \in \mathcal{N}e$ $\therefore$ $V \cap V^{-1}$ es simétrica

iii) Sea $V \in \mathcal{N}e$

como $(V \cdot V^{-1})^{-1} = (V^{-1})^{-1} \cdot V^{-1} = V \cdot V^{-1}$ y $V, V^{-1} \in \mathcal{N}e$ y el producto es continuo entonces $V \cdot V^{-1} \in \mathcal{N}e$ y $V \cdot V^{-1}$ es simétrica

$\cdot + \cdot$

2.11 <u>LEMA</u> Si $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de e, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}^n = \{V^n \mid V \in \mathcal{U}\}$ es un sistema fundamental de vecindades de e.

<u>PRUEBA</u>

i) Sea $V^n \in \mathcal{U}^n$ entonces $V \in \mathcal{U}$ sist. fund. de vec. de e $\therefore$ $\exists\, U \in \mathcal{U} \ni U \cdot U \subset V$

ent. $\underbrace{(U \cdot U) \cdot \cdots (U \cdot U)}_{n \text{ veces}} \subset \underbrace{V \cdots V}_{n \text{ veces}}$

ent $U^n \cdot U^n \subset V^n$ con $U^n \in \mathcal{U}^n$

ii) Sea $V^n \in \mathcal{U}^n$ ent $V \in \mathcal{U}$

$\therefore \quad \exists\ U \in \mathcal{U} \ni \quad U \subset V^{-1}$

ent $\underbrace{U \cdots U}_{n \text{ veces}} \subset \underbrace{V^{-1} \cdots V^{-1}}_{n \text{ veces}} = (V^{-1})^n = (V^n)^{-1}$

$\therefore \quad U^n \subset (V^n)^{-1}$ con $V^n \in \mathcal{U}^n$

iii) Sea $V^n \in \mathcal{U}^n$ como $V \in \mathcal{U}$

entonces $e \in V \quad \therefore \quad \underbrace{e \cdots e}_{n \text{ veces}} \in \underbrace{V \cdots V}_{n \text{ veces}} = V^n$

$\therefore \quad e \in V^n$

iv) sea $a \in G$ y $V^n \in \mathcal{U}^n$ entonces existe $U \in \mathcal{U} \ni \quad U \subset a V a^{-1}$

ent. $\underbrace{U \cdots U}_{n \text{ veces}} \subset \underbrace{(a \cdot V \cdot a^{-1}) \cdots (a \cdot V \cdot a^{-1})}_{n \text{ veces}}$

$= a \cdot V \cdot e \cdot V \cdots e \cdot V a^{-1} = a \cdot V^n \cdot a^{-1}$

$\therefore \quad U^n \subset a \cdot V^n \cdot a^{-1}$ con $V^n \in \mathcal{U}^n$

$\therefore$ $\mathcal{U}^n$ es un sistema fundamental de vecindades de e $\quad$.+.

En lo que resta de este capítulo, denotaremos por T a un espacio localmente compacto y a $\mathbb{E}$ como un espacio de Banach i.e. un espacio normado completo y salvo que se diga otra cosa, $\mathbb{E}$ representa a $\mathbb{R}$ ó a $\mathbb{C}$ y la norma la denotamos por $|\ |$ si $f: T \to \mathbb{E}$ definimos el soporte de f como:

$$\text{sop}\, f = \overline{\{t \in T \mid f(t) \neq 0\}}$$

y a $K_{\mathbb{E}}(T) = \{f: T \to \mathbb{E} \mid f \text{ es cont y sop } f \text{ es compacto}\}$

entonces $K_{\mathbb{E}}(T)$ es un espacio vectorial con la suma de funciones y el producto por escalares de $\mathbb{E}$

Si $A \subset T$ definimos el subespacio

$$K_{\mathbb{E}}(T, A) = \{f \in K_{\mathbb{E}}(T) \mid \text{sop}\, f \subset A\}$$

y al conjunto de funciones continuas lo denotamos por $\mathcal{C}_{\mathbb{E}}(T)$, tenemos entonces que: $\forall_{A \subset T}\ K_{\mathbb{E}}(T, A) \subset K_{\mathbb{E}}(T) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{E}}(T)$

Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ denotaremos a esos conjuntos en la siguiente forma:

$K_{\mathbb{E}}(T) = K(T)$, $K_{\mathbb{E}}(T,A) = K(T,A)$ y
$\mathcal{C}_{\mathbb{E}}(T) = \mathcal{C}(T)$

Y en caso de que las funciones tomen sólo valores no negativos lo denotamos por $K_+(T)$.

__2.12 LEMA__ Si se define una relación $\precsim$ en $K(T)$ $\cdot \ni \cdot$ $f \precsim g \Longleftrightarrow \forall_{t \in T}\ f(t) \leq g(t)$ entonces $\precsim$ es una relación de orden en $K(T)$

La prueba es inmediata pues $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{R}$

Si $f \in K_{\mathbb{E}}(T)$ y definimos $|f| : T \to \mathbb{R}^+$ $\cdot \ni \cdot$ $\forall t \in T$ $|f|(t) = |f(t)|$ como $|\ |$ la norma de $\mathbb{E}$ es continua bajo la topología de $\mathbb{E}$ inducida por la norma entonces $|f|$ es continua por ser composición de funciones continuas $f : T \to \mathbb{E}$ y $|\ | : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^+$ además $\operatorname{sop} f = \operatorname{sop} |f|$ pues

$\{t \in T \mid f(t) \neq 0\} = \{t \in T \mid |f(t)| \neq 0\}$

$\therefore$ $|f| \in K_+(T)$ lo que se puede resumir en el siguiente:

2.13 LEMA Si $f \in K_E(T)$ entonces $|f| \in K_+(T)$

2.14 DEF. Sea $f \in K_E(T, A)$ definimos

$$\|f\|_* = \sup_{t \in T} |f(t)|$$

2.15 TEOREMA $\|\ \|_* : K_E(T, A) \to \mathbb{R}^+$ es una norma para cada $A \subset T$

PRUEBA Sea $A \subset T$

i) Veamos que $\|\ \|_*$ está bien definida

sea $f \in K_E(T, A) \subset K_E(T)$

entonces $|f| \in K_+(T)$ por 2.13

i.e. sop $|f|$ es compacto, aplicando el teor 2.7 $|f|$ alcanza su supremo y su ínfimo y ambos son finitos en sop $|f|$

y como $|f(t)| \geq 0$ $\forall t \in T$ entonces

$$0 \leq \|f\|_* = \sup_{t \in T} |f(t)| < \infty$$

ii) $\sup \|f\|_* = 0 \iff \sup_{t \in T} |f(t)| = 0$

$\iff \forall_{t \in T} \ |f(t)| = 0 \iff \forall_{t \in T} \ f(t) = 0$

iii) Sean $f, g \in K_E(T, A)$ entonces

$$\|f+g\|_* = \sup_{t \in T} |(f+g)(t)| = \sup_{t \in T} |f(t) + g(t)|$$

$$\leq \sup_{t \in T} \left(|f(t)| + |g(t)| \right)$$

$$\leq \sup_{t \in T} |f(t)| + \sup_{t \in T} |g(t)| = \|f\|_* + \|g\|_*$$

iv) Sea $f \in K_E(T, A)$ y $\lambda \in E$

$$\|\lambda f\|_* = \sup_{t \in T} |\lambda f(t)| = \sup_{t \in T} |\lambda| \cdot |f(t)|$$

$$= |\lambda| \sup_{t \in T} |f(t)| = |\lambda| \, \|f\|_*$$

$\therefore \ \| \ \|_*$ es una norma en $K_E(T, A)$ ⊥

Gracias al teorema anterior se puede dar a $K_E(T, A)$ la topología inducida por esta norma, a esta topología se le llama

Topología de convergencia uniforme.

$K_E(T)$ puede ser dotado de la topología de la convergencia compacta i.e. la topología localmente convexa definida por la familia de seminormas $\{\|f\|_K = \sup_{t \in K} |f(t)|\}_{\substack{K \subset T \\ K \text{ compacto}}}$

ver [REF III] SECCION 37 PAGS. 145-153

Sea $G \subset T$ un abierto y $f: G \to E$ con sop f compacto $\ni$ sop $f \subset G$ f cont. entonces f se puede extender a T en forma continua definiendo $f(t) = 0$ si $t \notin G$

$\therefore$ $K_E(G)$ se puede identificar con el subespacio $K_E(T, G)$ de $K_E(G)$

i.e. $K_E(G)$ se puede pensar como un subespacio de $K_E(G)$.

2.16 <u>LEMA</u> (DE URYSOHN) Sea $K \subset T$ un compacto y G un abierto $\ni$ $K \subset G$ entonces $\exists\, \varphi: T \to [0,1]$ continua $\ni$ $\varphi(t) = 1$ si $t \in K$ y $\varphi(t) = 0$ si $t \notin G$.

2.17 LEMA Sea $K \subset T$ un compacto si $f: K \to \mathbb{E}$ es continua f se puede extender a una función $f_1 : T \to \mathbb{E}$. $\ni$. $f_1 \in K_{\mathbb{E}}(T)$

La demostración de estos 2 lemas se pueden encontrar en la [REF IV] pag 40 CAP II de hecho 2.17 es un corolario de 2.16 pues basta tomar un abierto G que contenga a K.

Un lema importante para definir una medida es el siguiente:

2.18 LEMA Sea $K \subset T$ un compacto y $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ una cubierta abierta de K entonces $\exists_n$ $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ funciones continuas de T a $[0,1]$. $\ni$.

a) $\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = 1 \quad \forall_{t \in K}$

b) $\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \leq 1 \quad \forall_{t \in T}$

y c) $\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ sop $f_i \subset G_i$

PRUEBA Veamos que existen abiertos $V_1, \ldots, V_n$. $\ni$. $\overline{V_i}$ es compacto si $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

y $\overline{V_i} \subset G_i \quad \forall_{i \in \{1,\dots,m\}}$

Sea $x \in K$ definimos $I_x = \{i \in \{1,\dots,m\} \mid x \in G_i\}$ ($I_x \neq \emptyset$) entonces $x \in \bigcap_{i \in I_x} G_i =: A_x$ donde

A_x es abierto por ser intersección finita de abiertos. Como T es localmente compacto entonces toda x tiene un sist. fundamental de vecindades de ese punto relativamente compactas $\therefore$

$\exists\ U_x$ abierto $\cdot\ni\cdot$ $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset A_x$ con $\overline{U_x}$ compacta y esto para cada $x \in K$

$\therefore$ $\{U_x\}_{x \in K}$ es cubierta abierta de K compacto entonces existen $x_1, \dots, x_m \in K$ $\cdot\ni\cdot$ $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$

Definamos $J_i = \{j \in \{1,\dots,m\} \mid U_{x_j} \subset G_i\}$ y $V_i = \bigcup_{j \in J_i} U_{x_j}$

entonces $\overline{V_i} = \overline{\bigcup_{j \in J_i} U_{x_j}} = \bigcup_{j \in J_i} \overline{U_{x_j}}$ que es

compacto por ser unión finita de compactos

y como $\overline{U_{x_j}} \subset G_i$ si $j \in J_i$ por def.
entonces $\overline{V_i} \subset G_i$, además $\bigcup_{i=1}^{n} V_i =$
$\bigcup_{i=1}^{n} V_i = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j \in J_i} U_{x_j} = \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}$

pues $\forall_{j \in \{1,\dots,m\}}$ $\exists_{i \in \{1,\dots,n\}}$ $\cdot \ni \cdot$ $U_{x_j} \subset G_i$

Como $\overline{V_i}$ es compacto por 2.16
existe $g_i : T \to [0,1]$ cont. $\cdot \ni \cdot$
$g_i(\overline{V_i}) = 1$ y $g_i(T - G_i) = 0$ pues
$\overline{V_i} \subset G_i$ abierto

Sea $g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

si $t \in \overline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ entonces $g(t) > 0$

$\therefore$ Si $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ ent. $h / \overline{V}$ es continua

pues g no se anula en $\overline{V}$ y es continua
por ser suma de continuas, como $\overline{V}$ es
compacto por 2.17 h se puede extender
a todo T

Ahora como $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ abierto

por el lema 2.16 existe $\varphi : T \to [0,1]$ cont.
$\ni \cdot \quad \varphi(K) = 1 \quad , \varphi(x) = 0$ si $x \in T - V$

Finalmente definamos $f_i : T \to [0,1]$
$$\ni \cdot f_i(t) = g_i(t) \cdot \varphi(t) \cdot h(t) = \frac{g_i(t)\ \varphi(t)}{\sum_{i=1}^{m} g_i(t)}$$

$\therefore \quad 0 \leq f_i(t) \leq 1$

con la extensión de h, f_i es continua $\forall_{i \in \{1,\dots,m\}}$

Ahora $\quad$ sop $f_i \subset$ sop $g_i \subset G_i$

Si $t \in K$ como $\varphi(t) = 1$ entonces
$$\sum_{i=1}^{m} f_i(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i(t)\, h(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i(t) \Big/ \sum_{i=1}^{m} g_i(t) = 1$$

pues $\quad h = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{m} g_i(t)$ si $t \in \overline{V}$ y $K \subset \overline{V}$

si $t \notin K$ supongamos que $t \in \overline{V}$ y $t \notin K$
entonces $\quad \varphi(t) \leq 1 \quad$ y

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(t) \leq \sum_{i=1}^{m} g_i(t)\, h(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{g_i(t)}{\sum_{i=1}^{m} g_i(t)}$$

$= 1$.

Por último si $t \in T - \overline{V}$ entonces $\varphi(t) = 0$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} f_i(t) = 0$

i.e. $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ satisface las condiciones pedidas

$\cdot \vdash \cdot$

En el siguiente lema damos una relación entre el supremo de un conjunto dirigido $\mathcal{H}$ y el límite uniforme del filtro de secciones de $\mathcal{H}$.

Para ésto definimos:

2.18 <u>DEF</u> a) Un conjunto dirigido D, es un conjunto con un preorden $<$ -∋·

$\forall_{a,b \in D} \ \exists_{c \in D} \ \cdot \ni \cdot \ a < c$ y $b < c$

b) Una red es una función $h : D \to Y$ donde Y es un espacio topológico y D es un conjunto dirigido

c) Se dice que una red h converge a $y_0 \in Y$ si $\forall_{U \in N_{y_0}} \ \exists_{a \in D} \ \forall_{b > a} \ h(b) \in U$

Resultados importantes sobre filtros y convergencia pueden encontrarse en la [REF II] cap X PAGS. 210 - 215.

2.19 **LEMA** Sea $\mathcal{H} \subset K_+$ un conjunto dirigido con la relación $\leq$ ($f \leq g \Leftrightarrow \forall t \in T \; f(t) \leq g(t)$). Si $\sup\limits_{g \in \mathcal{H}} g \in K_+$ entonces el filtro de secciones de $\mathcal{H}$ converge uniformemente a la cubierta superior i.e.

$$\lim_{g \in \mathcal{H}} g = \sup_{g \in \mathcal{H}} g$$

PRUEBA

Sea $f = \sup\limits_{g \in \mathcal{H}} g$ y $K = \operatorname{sop} f$

como $\forall_{g \in \mathcal{H}} \quad f \geq g$ entonces

$$\operatorname{sop} g = \overline{\{x \in T \mid g(x) \neq 0\}} \subset \overline{\{x \in T \mid f(x) \neq 0\}} = K$$

pues si $g(x) \neq 0$ entonces $f(x) \geq g(x) \neq 0$

Sea $\varepsilon > 0$ y $s \in K$ como $f(s) = \sup\limits_{g \in \mathcal{H}} g(s)$

entonces $\exists_{g_s \in \mathcal{H}} \;\cdot\ni\cdot\; g_s(s) > f(s) - \varepsilon$

Como g_s y f son continuas entonces

$$\underset{V_s \in \mathcal{N}_s}{\exists} \ \cdot \ni \cdot \ \underset{t \in V_s}{\forall} \quad g_s(t) > f(t) - \varepsilon$$

Por hip. $f \in \mathcal{K}_+$ $\therefore$ $K = \text{sop } f$ es compacto y $\{V_s\}_{s \in K}$ es una cubierta abierta de K $\therefore$ existen $s_1, \ldots, s_m \in K \cdot \ni \cdot$ $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{s_i}$

y con ellas existen $g_{s_1}, \ldots, g_{s_m} \in \mathcal{H}$

$$\cdot \ni \cdot \ \underset{i \in \{1, \ldots, m\}}{\forall} \quad \underset{t \in V_{s_i}}{\forall} \quad g_{s_i}(t) > f(t) - \varepsilon$$

Como $\mathcal{H}$ es dirigido, por la def. 2.18

$$\underset{g \in \mathcal{H}}{\exists} \ \cdot \ni \cdot \ \underset{i \in \{1, \ldots, m\}}{\forall} \quad g \geq g_{s_i}$$

entonces $\underset{t \in V_{s_i}}{\forall} \ \underset{i \in \{1, \ldots, m\}}{\forall} \quad g(t) \geq g_{s_i}(t) > f(t) - \varepsilon$

i.e. $\underset{t \in K}{\forall} \quad g(t) > f(t) - \varepsilon$

pero si $t \notin K = \text{sop } f \supset \text{sop } g$ ent. $g(t) = 0 = f(t)$

$\therefore$ $\quad 0 = g(t) > 0 - \varepsilon = f(t) - \varepsilon$

i.e. $\underset{t \in T}{\forall} \quad g(t) > f(t) - \varepsilon$

$\therefore \exists_{g \in \mathcal{H}} \ni\, g \geq f - \varepsilon$ con $g \leq f \ \forall_{g \in \mathcal{H}}$

$\therefore \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{g \in \mathcal{H}} \forall_{t \in T} |g(t) - f(t)| < \varepsilon$

i.e. f es el límite uniforme del conjunto dirigido $\mathcal{H}$. $\cdot + \cdot$

2.20 LEMA Sea $K \subset T$ un compacto $\varphi : T \to [0,1]$ continua con soporte compacto $\ni \varphi(K) = 1$ si $f \in \mathcal{K}(T, K)$ entonces $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\{\varphi_i\}_{i=1}^n} \ni \varphi_i : T \to [0,1]$

continuas con sop $\varphi_i \subset$ sop φ y $\exists \{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ $\ni\, |f(t) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t)| \leq \varepsilon \varphi(t) \ \forall_{t \in T}$

PRUEBA

Sea $U = \{t \in T \mid \varphi(t) > 0\} = \{t \in T \mid \varphi(t) \neq 0\}$ como φ es cont., U es abierto y es relativamente compacto pues $\overline{U} =$ sop φ es compacto por hipótesis y $K \subset U$ pues $\varphi(K) = 1$.

Sea $t \in \overline{U}$ como $f \in \mathcal{K}(T, K)$ ent. sop $f \subset K$ y f es continua en t $\therefore$ $\exists_{V_t \in \mathcal{N}_t} \forall_{t' \in V_t} |f(t) - f(t')| < \varepsilon/2$

$$\therefore \forall_{t',t'' \in V_t} \quad |f(t') - f(t'')| < \varepsilon$$

tomemos ahora $\{V_t\}_{t \in \overline{U}}$ que es una cubierta abierta de $\overline{U}$ compacto entonces existen $t_1, \dots, t_n \in \overline{U}$ $\ni$

$$\overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{t_i}.$$

Tenemos entonces $\overline{U}$ un compacto y $\{V_{t_i}\}_{i=1}^{m}$ cubierta abierta de $\overline{U}$, aplicando el lema 2.18 $\exists$ $\{h_i\}_{i=1}^{m}$ funciones cont. de T en $[0,1]$ $\ni$ $\sum_{i=1}^{m} h_i(t) = 1$ si $t \in \overline{U}$ y $\sum_{i=1}^{m} h_i(t) \leq 1$ si $t \in T$ y $\text{sop}\, h_i \subset V_{t_i}$

<u>OBS</u>: A la $\{h_i\}_{i=1}^{m}$ se le llama partición continua de la unidad subordinada a la cubierta $\{V_{t_i}\}_{i=1}^{m}$.

Sea $\varphi_i = h_i \cdot \varphi$ $\quad 1 \leq i \leq m$ $\quad \varphi_i : T \to [0,1]$

pues $h_i \in [0,1]$ y $\varphi \in [0,1]$

y $\text{sop}\, \varphi_i = \text{sop}\, h_i \cdot \varphi \subset \text{sop}\, h_i \cap \text{sop}\, \varphi \subset \overline{U} \cap V_{t_i}$

si $t \in \overline{U} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{m} h_i(t)\, \varphi(t) = \varphi(t)$

y si $t \notin \overline{U} \Rightarrow \varphi(t) = 0 \quad \therefore \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) = 0 = \varphi(t)$

definimos $a_i = f(t_i)$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$

si $t \in V_{t_i} \Rightarrow | f(t)\, \varphi_i(t) - a_i\, \varphi_i(t)|$

$= \varphi_i(t)\, |f(t) - f(t_i)| \leq \varepsilon\, \varphi_i(t)$

y ésto es válido si $t \notin V_{t_i}$, pues

sop $\varphi_i \subset \overline{U} \cap V_{t_i} \subset V_{t_i} \quad \therefore \quad \varphi_i(t) = 0$

$\Rightarrow |f(t)\, \varphi_i(t) - a_i\, \varphi_i(t)| = 0 \leq \varepsilon\, \varphi_i(t).$

como sop $f \subset K$ y $K \subset \overline{U}$, si $t \notin K \Rightarrow f(t) = 0$

$\therefore \quad f(t) = f(t) \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)$

y si $t \in K$ como $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) = \varphi(t) = 1$

$\Rightarrow f(t) = f(t)\, \varphi(t) = f(t) \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)$

$\therefore \quad \forall_{t \in T} \quad f(t) = f(t) \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)$

$\therefore |f(t) - \sum_{i=1}^{m} a_i\, \varphi_i(t)| = |\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) f(t) - \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(t)|$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(t) f(t) - a_i \varphi_i(t)| \leq \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\, \varepsilon$$

$$= \varepsilon\, \varphi(t) \qquad \cdot + \cdot$$

Debido a este último lema, podemos concluir que cualquier función en $K(T,K)$ es aproximable por funciones de $K_+(T,\overline{U})$ con $\overline{U}$ vecindad de K.

2.21 COROLARIO. Sea $K \subset T$ un compacto y $\overline{U}$ una vecindad compacta de K si $H(T,\overline{U})$ es el espacio de combinaciones lineales de la forma $\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i$ con $\{a_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R}$ y $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m} \subset K_+(T,\overline{U})$ es denso en $K(t,K)$ para la topología de la convergencia uniforme.

PRUEBA

Sea $f \in K(T,K)$ y sea $\varphi : T \to [0,1]$ cont. $\cdot \ni \cdot$ sop φ es compacto y $\varphi(K)=1$ con $\overline{U} = \text{sop}\, \varphi \supset K$ por 2.20 $\exists$ $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m} \in K_+(t,\overline{U})$ y $\exists$ $\{a_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R}$ $\cdot \ni \cdot$

$$|f(t) - \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(t)| \leq \varepsilon\, \varphi(t) \quad \forall\, t \in T$$

$\therefore$ f se aproxima por elementos de $H(T,\overline{U})$.

$\cdot + \cdot$

Un último resultado importante es el siguiente:

2.22 <u>LEMA</u> El espacio $K_{\mathbb{K}}(T)$ es denso en el espacio $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(T)$ con la Topología de la convergencia compacta.

<u>PRUEBA</u>

Sea $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(T)$ y $K \subset T$ un compacto entonces existe $\varphi \in K_{+}(T) \ni \cdot\ \varphi(t) = 1$ si $t \in K$ entonces si $g = f \cdot \varphi \Rightarrow g \in K_{+}(T)$ pues $\operatorname{sop} g \subset \operatorname{sop} \varphi$ compacto y como $\operatorname{sop} g$ es cerrado por 2.3 iii) $\operatorname{sop} g$ es compacto $\therefore$ f es aproximable uniformemente en cualquier compacto, por funciones $g \in K_{\mathbb{K}}(T)$ $\therefore$ $K_{\mathbb{K}}(T)$ es denso en $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(T)$ con la topología de la convergencia compacta. +.

En base a los lemas anteriores principalmente al 2.16 y al 2.18 se demuestra el teorema de representación de Riesz, el cuál establece una importante relación entre las funcionales lineales positivas en $K_{\mathbb{K}}(T)$ y las medidas definidas en T.

Este teorema es básico en el presente trabajo, pues al definir las medidas, haremos uso de esta representación y trabajaremos a las medidas de Haar como funcionales lineales con ciertas propiedades.

La demostración de este teorema es básica para el desarrollo del trabajo, pero desgraciadamente es demasiado larga, por lo que no daremos la prueba aquí, aunque diremos que la base de esta demostración son los lemas ya demostrados anteriormente, una prueba del teorema de Representación de Riesz puede ser encontrada en [REF IV] cap II PAGS 42-49, dicha prueba además de ser constructiva tiene la ventaja de que, en la forma en la que se enuncia resulta ser muy completa, e indica la manera en la que se construye la medida explícitamente.

2.23 TEOREMA (Representación de Riesz)
Sea T un espacio localmente (de Hausdorff) compacto y sea m una funcional lineal positiva en $K_{\mathbb{E}}(T)$ ($\mathbb{E}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{E}=\mathbb{C}$)

entonces existe un σ-álgebra $\mathcal{A}$ en T que contiene a todos los conjuntos de Borel en T y existe una única medida positiva μ en $\mathcal{A}$ que representa a m en el sentido que:

a) $m(f) = \int_T f \, d\mu \quad \forall_{f \in K_E(T)}$

con las siguientes propiedades adicionales.

b) $\mu(K) < \infty$ si $K \subset T$ es compacto

c) $\forall_{E \in \mathcal{A}} \quad \mu(E) = \inf \{\mu(V) \mid E \subset V, V \text{ abierto}\}$

d) $\mu(E) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset E, K \text{ compacto}\}$ es valida si $E \in \mathcal{A}$ y $\mu(E) < \infty$ o si E es abierto

e) $\forall_{E \in \mathcal{A}} \quad \forall_{A \subset E}$ si $\mu(E) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

— o —

Para la prueba, si V es un abierto se define $\mu(V) = \sup \{m(f) \mid f \in K_E(T), 0 \le f \le 1, \text{sop } f \subset V\}$.

Por la propiedad e) μ resulta ser completa.

En vista del teorema anterior podemos definir una medida como una funcional lineal vía el teorema de representación, pues sabemos que esta funcional induce una medida en el espacio localmente compacto de manera natural.

2.24 **DEF** Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ 2 espacios de Banach (ambos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) sea $m : K_{\mathbb{E}}(T) \to \mathbb{F}$ una funcional lineal $\cdot \ni \cdot$ si $K \subset T$ es un compacto $m \mid_{K_{\mathbb{E}}(T,K)}$ es continua con la topología de la convergencia uniforme entonces m se llama una "medida vectorial" o una "$(\mathbb{E}-\mathbb{F})$-medida en T" y por el teor 2.23 (con cierto abuso de notación) al valor $m(f)$ lo llamaremos la integral de f con respecto a m (debería ser con respecto a cierta μ medida en T) y lo denotamos por $m(f) = \int f \, dm$ o $\int f(t) \, dm(t)$

Si m es una medida, m satisface:

i) $m(f+g) = m(f) + m(g) \quad \forall f, g \in K_{\mathbb{E}}(T)$

ii) $m(\alpha f) = \alpha\, m(f) \quad \forall_{\alpha \in \mathbb{E}} \quad \forall_{f \in K_{\mathbb{E}}(T)}$

iii) $\forall_{K \subset T}$ compacto $\exists_{a_K > 0}$ $\cdot \ni \cdot$

$$|m(f)| \leq a_k \|f\|_* \quad \text{si} \quad f \in K_{\mathbb{E}}(T)K)$$

con $\|f\|_* = \sup\limits_{|x| \leq 1} \dfrac{|f(x)|}{|x|}$

NOTA: a_K es independiente de f

El conjunto de $(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ medidas es un e. v. en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ pues si m y n son medidas como $m+n$ es obviamente lineal en $K_{\mathbb{E}}(T)$ y si $K \subset T$ es un compacto entonces existen a_K y $b_K > 0$ $\cdot \ni \cdot$ $|m(f)| \leq a_K \|f\|_*$ y $|n(f)| \leq b_K \|f\|_*$ entonces
$|(m+n)(f)| = |m(f) + n(f)| \leq |m(f)| + |n(f)|$
$\leq (a_K + b_K) \|f\|_* = c_K \|f\|_*$
$\therefore$ $m+n$ es continua restringida a $K_{\mathbb{E}}(T,K)$.
Analogamente se ve que si α es un escalar y m una medida entonces $\alpha \cdot m$ es una medida.

Si T es compacto $\Rightarrow$ $\mathcal{C}_{\mathbb{E}}(T) = K_{\mathbb{E}}(T)$

si m es una medida entonces m es cont. con la top. de la convergencia uniforme i.e. la Topología que induce la norma $\|f\|_*$ pues si $\|f-g\|_* < \varepsilon \Rightarrow |m(f-g)| \leq a_K \|f-g\|_*$
$= a_K \cdot \varepsilon$

$\therefore \quad |m(f) - m(g)| < \varepsilon'$ i.e. m es continua

En este caso el espacio de $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ medidas coincide con $\mathcal{L}(\mathcal{C}_{\mathbb{E}}, \mathbb{F})$ i.e. el conjunto de funciones lineales y continuas con la Topología en $\mathcal{C}_{\mathbb{E}}$ dada por la norma $\|f\|_*$ $\therefore$ El conjunto de medidas es el espacio dual de $\mathcal{C}_{\mathbb{E}}$. Si T no es compacto la continuidad de f sólo se puede asegurar en compactos y no en todo el espacio.

Se puede definir una norma o seminorma en el espacio de medidas de la siguiente forma:

2.25 <u>DEF</u> Sea m una $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ medida definimos

$$\|m\|_* = \sup_{\|f\|_* \leq 1} |m(f)| \qquad \text{si } f \in K_{\mathbb{E}}(T)$$

$\|m\|_*$ satisface:

i) $0 \leq \|m\|_* \leq \infty$

ii) $\|m\|_* = 0 \leftrightarrow m = 0$

iii) $\|\alpha m\|_* = |\alpha| \, \|m\|_*$ α escalar

iv) $\|m + n\|_* \leq \|m\|_* + \|n\|_*$

Si T es compacto como m es continua entonces $\|m\|_* = \sup_{\|f\|_* \leq 1} |m(f)| < \infty$ pues $A = \{ f \in K_E(T) \mid \|f\|_* \leq 1 \}$ es un compacto $\therefore$ $m(A)$ es acotado, i.e. en este caso el mapeo $m \mapsto \|m\|_*$ es una norma en el conjunto de las $(\mathbb{E}, \mathbb{F})$-medidas.

A continuación damos algunos ejemplos de medidas:

I Sea $t \in T$ definimos $m_t : K_E(T) \to E$ $\ni$. $m_t(f) = f(t)$ entonces m_t es lineal y si $K \subset T$ es un compacto tomando $a_K = 1$ si $f \in K_E(T, K)$ entonces

$$|m_t(f)| = |f(t)| \leq \sup_{t \in T} |f(t)| = a_K \|f\|_*$$

$\therefore$ $\forall_{t \in T}$ m_t es una medida

II Sea $N \subset T$ $\ni$ $\forall_{K \subset T}$ compacto

$N \cap K$ es finito y sea $\alpha : T \to \mathbb{R}$ $\ni$
$N = \{ t \in T \mid \alpha(t) \neq 0 \}$ si $f \in K(T)$ definimos

$\mu(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t) f(t) \Rightarrow \mu$ está bien definida

pues $K = \text{sop} f$ es compacto entonces $K \cap N$ es finito y $\therefore$ $\alpha(t) \neq 0$ sólo para $t \in K \cap N$
además μ es lineal, pues si $f, g \in K(T)$

$$\mu(f+g) = \sum_{t \in T} \alpha(t)\,(f+g)(t) = \sum_{t \in T} \alpha(t)\,(f(t) + g(t))$$

$$= \sum_{t \in (\text{sop} f \,\cup\, \text{sop} g) \cap N} \alpha(t) f(t) + \alpha(t) g(t)$$

si $t \in \text{sop} f - \text{sop} g \Rightarrow g(t) = 0$
si $t \in \text{sop} g - \text{sop} f \Rightarrow f(t) = 0$

$$\therefore \mu(f+g) = \sum_{t \in (\text{sop} f \,\cap\, \text{sop} g) \cap N} \alpha(t) f(t) + \alpha(t) g(t)$$

$$+ \sum_{t \in (\text{sop} f - \text{sop} g) \cap N} \alpha(t) f(t) + \sum_{t \in (\text{sop} g - \text{sop} f) \cap N} \alpha(t) g(t)$$

$= \mu(f) + \mu(g)$

si α es un escalar $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f)$ claramente.

Ahora, si $K \subset T$ es un compacto, sea $a_K = \sum_{t \in K \cap N} |\alpha(t)|$ y sea $f \in K(T, K)$ entonces

$$|\mu(f)| = \left|\sum_{t \in T} \alpha(t) f(t)\right| = \left|\sum_{t \in K \cap N} \alpha(t) f(t)\right| \quad (K \cap N \text{ finito})$$

$$\leq \sum_{t \in K \cap N} |\alpha(t)| \, |f(t)| \leq \sum_{t \in K \cap N} |\alpha(t)| \sup_{t \in T} |f(t)|$$

$$= \|f\|_* \sum_{t \in K \cap N} |\alpha(t)| = \|f\|_* \, a_K$$

$\therefore$ μ es una medida en T llamada medida discreta definida por las "masas" $\alpha(t)$

Si T es un espacio discreto y μ es una medida, $\mu : K(T) \to \mathbb{R} \Rightarrow$ es discreta, pues si $\tau \in T$ y definimos $e_\tau : T \to \mathbb{R} \ni$. $e_t(t) = 1$ y $e_t(s) = 0$ si $s \neq t$, entonces si $f \in K_E(T)$ y $f(s) = \sum_{t \in T} f(t) e_t(s)$ y

$$\mu(f) = \mu\left(\sum_{t \in T} f(t) e_t(s)\right) = \sum_{t \in T} \mu(f(t) e_t)$$

$= \sum_{t\in T} f(t)\,\mu(e_t)$ $\therefore$ μ es discreta

III En general sea $\alpha : T \to \mathbb{R}$ $\ni$

$\forall_{K \subset T}$ compacto $a_K = \sum_{t\in K} |\alpha(t)| < \infty$

i.e. $\{t \in K \mid \alpha(t) \neq 0\}$ es a lo más numerable, si para cada $f \in K(T)$ definimos

$\mu(f) = \sum_{t\in T} \alpha(t) f(t)$ entonces μ es medida.

IV Sea $\mu : K(T) \to \mathbb{R}$ una medida y $g : T \to \mathbb{R}$ continua si $f \in K(T)$ entonces $f\cdot g$ es continua y $\operatorname{sop}(f\cdot g)$ es compacto pues $\operatorname{sop} f\cdot g \subset \operatorname{sop} f$ compacto y $\operatorname{sop}(f\cdot g)$ es cerrado $\therefore$ $\operatorname{sop}(f\cdot g)$ es compacto [Lema 2.3 iii)]

Definimos $\mu_g : K(T) \to \mathbb{R}$ $\ni$

$\mu_g(f) = \mu(f\cdot g)$ entonces μ_g es medida.
pues μ_g es claramente lineal, ya que μ lo es, y si $K \subset T$ es un compacto y $f \in K(T,K)$ sea $a_K > 0$ $\ni$ $|\mu(f)| \leq a_K \|f\|_*$ entonces

$$|\mu_g(f)| \leq a_K \|f\cdot g\|_* \leq a_K \|g\|_* \|f\|_* \therefore$$

si $b_k = a_k \|g\|_*$ $\quad b_k > 0$ (si g lo es)
de hecho basta que $g \neq 0$ y entonces

$$|\mu_g(f)| \leq b_k \|f\|_* \quad \therefore \mu_g \text{ es medida } +.$$

OBS. $\|f \cdot g\|_* = \sup_{t \in T} |f \cdot g(t)| = \sup_{t \in T} |f(t)||g(t)|$

$$\leq \sup_{t \in T} |f(t)| \sup_{t \in T} |g(t)| = \|f\|_* \cdot \|g\|_*$$

Un teorema muy útil al construir medidas nuevas a partir de medidas dadas, y que además indica la relación entre la norma de las medidas nuevas y la de las viejas, es el siguiente:

2.26 **TEOREMA** Sean H, E, F, G espacios de Banach (todos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Si $u: H \to E$ y $v: F \to G$ son continuas y lineales y $m: K_E(T) \to F$ es una medida entonces $n: K_H(T) \to G$ $\ni$ $n(f) = v(m(u(f)))$ es una medida y $\|n\|_* \leq \|v\|_* \|m\|_* \|u\|_*$

PRUEBA

Como v, m, u son lineales entonces
$v \circ m\,(u \circ f) = n(f)$ es lineal y está bien
definida pues si $f \in K_{\mathbb{H}}(T) \Rightarrow f : T \to \mathbb{H}$
$\Rightarrow$ $u \circ f : T \to \mathbb{E}$ y como sop f es compacto
y u es continua y lineal entonces si $f(t) = 0$
$\Rightarrow$ $u(f(t)) = u(0) = 0$

$\therefore$ $\{t \in T \,/\, f(t) = 0\} \subset \{t \in T \,/\, u(f(t)) = 0\}$

$\therefore$ $\{t \in T \,/\, u(f(t)) \neq 0\} \subset \{t \in T \,/\, f(t) \neq 0\}$

$\therefore$ sop $(u \circ f) \subset$ sop f compacto

$\therefore$ sop $u \circ f$ es compacto y $u \circ f$ es continua

i.e. que $m\,(u \circ f)$ está bien definida pues
$u \circ f \in K_{\mathbb{E}}(T)$ y como $m\,(u \circ f) \in \mathbb{F}$
entonces $v \circ m\,(u \circ f) \in \mathbb{G}$

i.e. $n(f) = v \circ m(u \circ f)$ está bien definida
como una función $n : K_{\mathbb{H}}(T) \to \mathbb{G}$

Veamos que n es una medida, sea $K \subset T$ un
compacto y $a_K > 0$ ∋ $\forall\, g \in K_{\mathbb{E}}(T, K)$ se tenga que

$|m(g)| \leq a_K \|g\|_*$ si $f \in K_H(T,K)$ entonces $u \circ f \in K_E(T,K)$ por lo que ya vimos y además

$$\|u \circ f\|_* = \sup_{t \in T} |u(f(t))|$$

pero $\frac{|u(f(t))|}{|f(t)|} \leq \|u\|_*$ pues $\|u\|_* = \sup\limits_{|z| \leq 1} |u(z)|$

y $\frac{|u(f(t))|}{|f(t)|} = \left| \frac{u(f(t))}{|f(t)|} \right| = \left| u\left(\frac{f(t)}{|f(t)|}\right) \right|$

con $\left|\frac{f(t)}{|f(t)|}\right| = 1$, y como u es cont. y

$\{z \in H \mid |z| \leq 1\}$ es acotado ent. $\|u\|_* < \infty$

$$\therefore \quad \frac{|u(f(t))|}{|f(t)|} \leq \|u\|_* \quad \forall_{t \in T}$$

i.e. $\quad |u(f(t))| \leq \|u\|_* \, |f(t)|$

$$\therefore \quad \sup_{t \in T} |u(f(t))| \leq \|u\|_* \sup_{t \in T} |f(t)| = \|u\|_* \|f\|_*$$

$\therefore \quad \|u \circ f\|_* \leq \|u\|_* \|f\|_*$, y análogamente

$$|v \circ m(u \circ f)| \leq \|v\|_* \, |m(u \circ f)| \leq \|v\|_* \, a_K \|u \circ f\|_*$$

$\leq \|v\|_* \|\mu\|_* a_K \|f\|_*$

sea $b_K = a_K \|v\|_* \|\mu\|_*$

entonces $|m(f)| \leq b_K \|f\|_*$ si $f \in K_H(T, K)$

$\therefore$ m es una medida y por último

$|m(f)| = |v \circ m(\mu \circ f)| \leq \|v\|_* |m(\mu \circ f)|$

$\leq \|v\|_* \|m\|_* \|\mu \circ f\|$

pues $\|m\| = \sup\limits_{\|f\|_* \leq 1} |m(f)|$ ent. $\|m\|_* \geq \dfrac{|m(f)|}{\|f\|_*}$

si $f \in K_E(T)$

$\therefore$ $|m(f)| \leq \|v\|_* \|m\|_* \|\mu\|_* \|f\|_*$

$\therefore$ $\dfrac{|m(f)|}{\|f\|_*} \leq \|v\|_* \|m\|_* \|\mu\|_* \quad \forall f \in K_E(T)$

$\therefore$ $\|n\|_* \leq \|v\|_* \|m\|_* \|\mu\|_*$

$\cdot \dashv \cdot$

Varios corolarios se desprenden del teorema anterior los cuales se pueden encontrar en la [REF V] CAP I.

Otras propiedades generales de medidas se pueden encontrar en la misma referencia sección 2, cap I.

En la última parte de este capítulo, nos referiremos al concepto de integral superior y a la Teoría de los espacios $\mathcal{L}p$ y Lp.

2.27 DEF Sea $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ (reales extendidos) f es "semicontinua inferiormente" $\iff$ $\forall_{t_0 \in T} \; \forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{V \in \mathcal{N}_{t_0}} \; \cdot\ni\cdot \; \forall_{t \in V} \; f(t) \geq f(t_0) - \varepsilon$

Cualquier función continua es evidentemente semicontinua inferiormente pues $\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{V \in \mathcal{N}_{t_0}} \; \cdot\ni\cdot \; \forall_{t \in V} \; |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$

La función $f(t) = \infty$ es semicontinua inferiormente por la definición.

Denotaremos por $\mathcal{U}_+$ al conjunto de funciones semicontinuas inferiormente definidas en T con valores en $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Por la observación $\mathcal{U}_+ \supset K_+(T)$.

2.28 DEF Sea μ una medida positiva en T si $f \in \mathcal{U}^+$ definimos

$$\mu^*(f) = \sup_{g \in K_+,\, g \leq f} \mu(g)$$

$\mu^*(f)$ se llama "integral superior de f"

NOTA

Si $f \in K_+$ $\mu^*(f) = \mu(f)$ por la def. de μ^*

$\therefore$ μ^* es una extensión de μ al conjunto $\mathcal{U}^+$

Si tomamos $\mathcal{H} = \{g \mid g \in K_+ \ g \leq f\}$, $\mathcal{H}$ es un conjunto dirigido por la relación $\leq$, y por el lema 2.19

$$\mu^*(f) = \sup_{g \in \mathcal{H}} \mu(g) = \lim_{g \leq f} \mu(g)$$

De la definicion de μ^* se tienen las siguientes propiedades :

i) $\forall_{f \in \mathcal{U}_+} \quad 0 \leq \mu^*(f) \leq \infty \quad (\mu^*(0) = 0)$

ii) $\forall_{f_1, f_2 \in \mathcal{U}_+} \cdot \ni \cdot \ f_1 \leq f_2 \quad \mu^*(f_1) \leq \mu^*(f_2)$

iii) $\forall_{\alpha \geq 0} \ \forall_{f \in \mathcal{U}_+} \quad \mu^*(\alpha f) = \alpha \mu^*(f)$

iv) $\forall_{f_1, f_2 \in \mathcal{U}_+} \quad \mu^*(f_1 + f_2) = \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2)$

La demostración de iv) no es trivial se puede encontrar en la [REF V] CAP II PAG 68 - 69

Una generalización de iv) es:

V) Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_+$ entonces
$$\mu^*\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(f_n)$$

2.29 <u>LEMA</u> Sea $G \subset T$ un abierto y φ_G la función característica de G entonces $\varphi_G \in \mathcal{U}_+$

<u>PRUEBA</u>

Sea $t_0 \in T$ y $\varepsilon > 0$. supongamos que $t_0 \in G$, como G es abierto existe $V \in \mathcal{N}_{t_0}$ $\ni$. $V \subset G$, si $t \in V$ entonces $\varphi_G(t) = 1 \geq 1 - \varepsilon = \varphi_G(t_0) - \varepsilon$ y si suponemos que $t_0 \notin G$ entonces $\varphi_G(t_0) = 0$ $\therefore$ $\varphi_G(t_0) - \varepsilon < 0$; sea $V \in \mathcal{N}_{t_0}$ cualquier vecindad de t_0, entonces $\varphi_G(t) \geq 0$ pues $\varphi_G(t) = 0$ si $t \notin G$ o $\varphi_G(t) = 1$ si $t \in G$.
$\therefore$ $\varphi_G(t) \geq 0 > \varphi_G(t_0) - \varepsilon$

$$\therefore \quad \forall_{t_0 \in T} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{V \in \mathcal{N}_{t_0}} \quad \ni \quad \forall_{t \in V} \quad \varphi_G(t) \geq \varphi_G(t_0) - \varepsilon$$

i.e. $\varphi_G \in \mathcal{U}_+$. $\qquad$. + .

Gracias al lema anterior podemos definir medidas exteriores para conjuntos abiertos.

2.30 <u>DEF</u> Sea $G \subset T$ un abierto, llamamos a $\mu^*(\varphi_G)$ la "medida exterior" de G y lo denotamos por $\mu^*(\varphi_G) =: \mu^*(G)$

De las propiedades válidas para la integral superior se obtienen los siguientes resultados:

a) $0 \leq \mu^*(G) \leq \infty \quad \forall_{G \subset \mathcal{T}}$ abierto ; $\mu^*(\phi) = 0$

b) Si $G_1 \subset G_2 \Rightarrow \mu^*(G_1) \leq \mu^*(G_2) \; (\varphi_{G_1} \leq \varphi_{G_2})$

c) Si $\mathcal{G}$ es una familia de abiertos dirigida por la contención entonces
$\mu^*(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G) = \sup_{G \in \mathcal{G}} \mu^*(G)$

d) Si $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de abiertos $\Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(G_n)$

y si son ajenos se tiene la igualdad, (ajenos dos a dos)

Una forma de extender el concepto de integral superior a otro tipo de funciones es :

2.31 DEF Sea $f \geq 0$ con soporte compacto, definimos $\mu^*(f) = \inf_{h \geq f,\, h \in \mathcal{U}^+} \mu^*(h)$

Por una analogía a lo visto en 2.28

$\mu^*(f) = \lim_{h \geq f,\, h \in \mathcal{U}^+} \mu^*(h)$ tomando conjuntos dirigidos.

Si $f \in \mathcal{U}^+$ y tiene soporte compacto, la definición coincide con la dada en 2.28.

Una tercera extensión de esta definición a funciones positivas está dada por:

2.32 DEF Sea $C = \{ K \subset T \mid K \text{ es compacto} \}$. Si $f \geq 0$ definimos la integral superior de f por: $\mu^*(f) = \sup_{K \in C} \mu^*(f \cdot \varphi_K)$.

La definición anterior es coherente pues $f \cdot \varphi_K \geq 0 \quad \forall K \in C$ y además $sop(f \cdot \varphi_K) \subset sop\, \varphi_K = K$ compacto $\therefore$ $sop(f \cdot \varphi_K)$ es compacto y se puede aplicar μ^* a $f \cdot \varphi_K$ por la def. 2.31.

Más resultados acerca de la integral superior, como desigualdades, propiedades generales, teoremas de convergencia, el lema de Fatou y otros; pueden encontrarse en la [REF V] cap II PAGS 73-82.

Podemos ya definir la medida exterior de cualquier subconjunto de T utilizando la última definición de medida o integral superior.

2.33 DEF Sea $A \subset T$ un subconjunto, llamamos la medida exterior de A a:

$$\mu^*(A) = \mu^*(\varphi_A)$$

Esta medida exterior satisface:

i) $0 \leq \mu^*(A) \leq \infty$

ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ si $A \subset B$

iii) si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es t.q. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$

$$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

iv) si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una fam. de subconjuntos de T $\Rightarrow$ $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Para definir los espacios $\mathcal{L}_p$ y L_p es necesario un concepto más, acerca de la medida, que es el de nulidad.

2.34 DEF Sea μ una medida positiva en T y $f \geq 0$ decimos que f se "anula para μ" $\Leftrightarrow$

$\mu^*(f)=0$. Y si $A\subset T$ A se anula para μ $\Leftrightarrow$ $\mu^*(A)=0$.

Algunas consecuencias inmediatas son:

a) Si f se anula, $\alpha \geq 0$ y $0\leq g\leq \alpha f$ entonces g se anula pues
$$0\leq \mu^*(g)\leq \mu^*(\alpha f)=\alpha\,\mu^*(f)=0$$

b) Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones positivas que se anulan entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ y $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ se anulan pues

$$0\leq \mu^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(f_n)=0$$

y $$0\leq \mu^*\big(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\big)\leq \mu^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)\leq 0$$

c) $f\geq 0$ se anula $\Leftrightarrow$ $f\cdot\varphi_K$ se anula para todo $K\subset T$ compacto; se sigue de la definición:

$$\mu^*(f)=\sup_{\substack{K\subset T\\ \text{compacto}}}\mu^*(f\cdot\varphi_K)$$

2.35 **DEF** Decimos que la propiedad $P(t)$ es "cierta casi en todas partes con respecto a μ" (denotado por $a.e.[\mu]$) si $N = \{t \in T \mid P(t) \text{ es falsa}\}$ se anula para μ.

Una alternativa para definir nulidad la dá el siguiente:

2.36 **TEOREMA** $f \geq 0$ se anula para $\mu \iff f(t) = 0 \quad a.e.[\mu]$

Podemos definir una relación entre funciones no negativas mediante la siguiente proposición.

2.37 **PROP** Si $f \geq 0$ y $g \geq 0$ son iguales $a.e[\mu]$ $\Rightarrow \mu^*(f) = \mu^*(g)$

PRUEBA

Sup $f \leq g$ sea $N = \{t \in T \mid f(t) \neq g(t)\}$ entonces N se anula para μ; sea $h: T \to \overline{\mathbb{R}}^+$.∋. $h(t) = 0$ si $t \notin N$ y $h(t) = \infty$ si $t \in N$ ∴ h es .∋. se anula para μ y además $f \leq g \leq f + h$ entonces

$$\mu^*(f) \le \mu^*(g) \le \mu^*(f+h) \le \mu^*(f)+\mu^*(h) = \mu^*(f)$$

$\therefore \ \mu^*(f) = \mu^*(g)$

Si f y g son arbitrarias, sea $u = \sup(f,g)$ entonces $f \le u$, $g \le u$ y además $f = u$ a.e. $[\mu]$ y $g = u$ a.e. $[\mu]$ $\therefore$ aplicando lo anterior

$$\mu^*(f) = \mu^*(\sup(f,g)) = \mu^*(u) = \mu^*(g) \quad - +$$

2.38 DEF Sea μ una medida positiva en T, definimos una relación entre funciones en la siguiente forma: $f \sim g \iff f(t) = g(t)$ a.e. $[\mu]$

Es fácil checar que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones de T en $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\tilde{f}$ a la clase de equivalencia a la que pertenece f.

Al conjunto de clases de equivalencia se le puede dar una estructura de e.v. definiendo $\tilde{f}+\tilde{g}$ la clase a la que pertenece $f+g$ y $\alpha\tilde{f}$ la clase a la que pertenece αf.

En la construcción de $\mathcal{L}_p$ y L_p es necesario el uso de 3 importantes teoremas:

2.39 TEOREMA Si $p>1$ y $q>1$ y $1/p + 1/q = 1$ $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

2.40 TEOREMA (Desigualdad de Hölder) Sea μ una medida positiva $f, g \geq 0$ si $p>1$ y $q>1$ con $1/p + 1/q = 1$ entonces

$$\int^* f \cdot g \, d\mu \leq \left(\int^* f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int^* g^q d\mu\right)^{1/q}$$

2.41 TEOREMA (Desigualdad de Minkowski) Sea μ una medida positiva $p \geq 1$ entonces

$$\left(\int^* (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int^* f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int^* g^p d\mu\right)^{1/p}$$

La demostración de los anteriores teoremas se puede encontrar en la [REF IV] cap III PAGS 64-65 ó en la [REF V] CAP II sección 7 PAGS 90-93.

OBSERVACION Recordar que $\mu^*(f) =: \int^* f \, d\mu$ por acuerdo anterior en la notación.

2.42 DEF Sea μ una medida positiva en T
$f: T \to \mathbb{E}$ $(\mathbb{E} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{E} = \mathbb{C})$ y $p \geq 1$
definimos $N_p(f,\mu) = \left(\int^* |f|^p d\mu\right)^{1/p}$
o simplemente $N_p(f)$ si no hay posibilidad de error.

Propiedades inmediatas de esta def. son:

a) $0 \leq N_p(f) \leq \infty$, $N_p(f) = 0 \Leftrightarrow |f|$ se anula para $\mu \Leftrightarrow f$ se anula para μ
b) $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$ α escalar
c) $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$
d) $N_p(f) \leq N_p(g)$ si $|f| \leq |g|$ a.e. $[\mu]$
e) $|N_p(f) - N_p(g)| \leq N_p(f-g)$

Estas propiedades se deducen del hecho de que μ^* es creciente y de la desigualdad de Minkowski.

2.43 PROPOSICION Sean f, g 2 funciones de T en $\mathbb{E}$ $(\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$. Si $f \sim g \Rightarrow N_p(f-g) = 0$ $p \geq 1$, y si $N_p(f-g) = 0$ para alguna $p \geq 1 \Rightarrow f \sim g$.

PRUEBA

Sup. $f \sim g \Rightarrow f(t) = g(t)$ a.e. $[\mu]$ $\therefore$
$|f(t) - g(t)|^p = 0$ a.e. $[\mu]$ y si $p \geq 1$
$N_p(f-g) = (\int^* |f-g|^p d\mu)^{1/p} = 0$

Inversamente si para alguna $p \geq 1$ $N_p(f-g) = 0$
entonces $\int^* |f-g|^p d\mu = 0$
$\therefore$ $|f-g|^p$ se anula para μ
$\therefore$ $|f-g|$ se anula para μ entonces
$f-g$ tambien se anula para μ i.e.
$f = g$ a.e. $[\mu]$ $\therefore$ $f \sim g$. $\cdot + \cdot$

Si f, g son equivalentes ($f \sim g$) entonces $N_p(f) = N_p(g)$ i.e. N_p sólo depende de la clase y no del representante.
$\therefore$ Redefiniendo N_p sobre las clases se tiene:

$$N_p(\tilde{f}) = N_p(f)$$

Y las condiciones sobre N_p (2.42) las hereda N_p definida sobre las clases $\tilde{f}$.

2.44 <u>DEF</u> Sea μ una medida positiva en T definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{E}}^{\,p} = \{ f : T \to \mathbb{E} \mid N_p(f) < \infty \}$
con $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{E} = \mathbb{C}$

De las propiedades que satisface N_p vemos que $\mathcal{F}_E^p$ es un espacio vectorial y que $N_p(f)$ es una seminorma en ese espacio.

Consideraremos este espacio con la topología inducida por esta seminorma y la llamaremos "Topología de convergencia en la media de orden p". Con esta topología $\mathcal{F}_E^p$ es un espacio completo (ver [REF V] pag 101 CAP II).

Podemos ahora definir los espacios $\mathcal{L}p$ y Lp.

Sea μ una medida positiva en T y $\mathbb{E}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) entonces $K_{\mathbb{E}}(T) \subset \mathcal{F}_{\mathbb{E}}^p$ $p \geq 1$, pues si $f \in K_{\mathbb{E}}(T) \Rightarrow |f| \in K(T)$ $\Rightarrow |f|^p \in K(T)$ $\therefore$

$$N_p(f) = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

2.45 DEF a) Denotamos por $\mathcal{L}_{\mathbb{E}}^p(\mu)$ a la cerradura de $K_{\mathbb{E}}(T)$ en $\mathcal{F}_{\mathbb{E}}^p$.

b) Denotamos por $\mathcal{L}^{P}_{E}(\mu)$ al espacio cociente $\mathcal{L}^{P}_{E}(\mu) / N_E(\mu)$, donde $N_E(\mu)$ es el espacio de funciones que se anulan para μ

De hecho $\mathcal{L}^{P}$ se define sobre clases $\tilde{f}$ mientras que $\mathcal{L}$ se define sobre funciones f

Algunos resultados importantes son:

2.46 <u>TEOREMA</u> $K_E(T)$ es denso en $\mathcal{L}^{P}_{E}(\mu)$ para cada $p \geq 1$

2.47 <u>TEOREMA</u> $\mathcal{L}^{P}_{E}(\mu)$ es completo y $\mathcal{L}^{P}_{E}(\mu)$ es espacio de Banach

Estos y otros teoremas acerca de estos espacios pueden ser encontrados en la [REF V] cap II PAGS. 103-120.

CAPITULO III

MEDIDAS DE HAAR

En este capítulo construiremos una medida específica, definida en un grupo topológico localmente compacto G, de hecho cada vez que utilizemos esta letra, entenderemos que G es una estructura con esas características.

3.1 DEF Sea $f: G \to \mathbb{E}$ $(\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{E} = \mathbb{C})$

$\Rightarrow$ 1) f es "uniformemente continua por la izquierda" (V.C.I) en $A \subset G \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{V \in N_e} \cdot \ni \cdot$

$$\forall_{\substack{x \in G \\ y \in A}} \cdot \ni \cdot \; x \cdot y^{-1} \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

2) f es "uniformemente continua por la derecha" (V.C.D) en $A \subset G \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{V \in N_e} \cdot \ni \cdot$

$$\forall_{\substack{x \in G \\ y \in A}} \cdot \ni \cdot \; y^{-1} \cdot x \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Una equivalencia para esta definición nos las da el siguiente teorema:

3.2 <u>TEOREMA</u> Sea $f: G \to \mathbb{E}$ entonces f es U.C.d en $A \subset G \iff \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{V \in \mathcal{N}_e}{\exists} \ni \underset{\substack{x \in A \\ s \in V}}{\forall} \; |f(sx) - f(x)| < \varepsilon$

<u>PRUEBA</u>

$\Rightarrow)$ Si f es U.C.d y $\varepsilon > 0$, sea $V \in \mathcal{N}_e \ni \underset{\substack{x \in G \\ y \in A}}{\forall} \ni x \cdot y^{-1} \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sea $y \in A$ y $s \in V$. sea $x = s \cdot y \in G$ entonces $x \cdot y^{-1} = (s \cdot y) \cdot y^{-1} = s \cdot e = s \in V$

y $|f(x) - f(y)| = |f(s \cdot y) - f(y)| < \varepsilon$

i.e. $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{V \in \mathcal{N}_e}{\exists} \ni \underset{\substack{y \in A \\ s \in V}}{\forall} \; |f(sx) - f(x)| < \varepsilon$

$\Leftarrow)$ Sea $\varepsilon > 0$ sea $V \in \mathcal{N}_e \ni \underset{\substack{x \in A \\ s \in V}}{\forall}$ $|f(sx) - f(x)| < \varepsilon$

Sean $x \in G$, $y \in A \ni x \cdot y^{-1} \in V$, como $y \in A$ y $s = x \cdot y^{-1} \in V$ entonces
$|f(sy) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x \cdot y^{-1} y) - f(y)| < \varepsilon$

$\therefore \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad$ i.e.

$$\forall_{\substack{y \in A \\ x \in G}} \ \ni \ x \cdot y^{-1} \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$\therefore$ f es V.C.U. $\quad$ —+—

Un teorema análogo para caracterizar las funciones uniformemente continuas por la derecha es:

3.3 TEOREMA Sea $f: G \to \mathbb{E}$ entonces f es V.C.D en $A \subset G \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{V \in N_e} \ \forall_{\substack{x \in A \\ s \in V}} \ |f(x \cdot s) - f(x)| < \varepsilon$

La prueba de 3.3 es idéntico a la hecha para 3.2.

Si $f: G \to \mathbb{E}$ es ambas V.C.U y V.C.D decimos que f es uniformemente continua (V.C).

3.4 LEMA Si $f: G \to \mathbb{E}$ y G es conmutativo $\Rightarrow$ f es V.C.U en $A \Leftrightarrow f$ es V.C.D en A

PRUEBA

f es V.C. I en A $\iff$ (por 3.2)

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{V\in\mathcal{N}_e}{\exists} \ \cdot \ni \cdot \ \underset{\substack{x\in A \\ s\in V}}{\forall} \Rightarrow |f(xs)-f(x)|<\varepsilon$$

Como G es conmutativo $x\cdot s = s\cdot x$ $\underset{x,s\in G}{\forall}$

$$\iff \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{V\in\mathcal{N}_e}{\exists} \ \cdot \ni \cdot \ \underset{\substack{x\in A \\ s\in V}}{\forall} \Rightarrow |f(sx)-f(x)|<\varepsilon$$

$\iff$ (por lema 3.3) f es V.C. D en A $\cdot + \cdot$

NOTA si G es conmutativo f es V.C si f es continua.

3.5 LEMA Sean S, T, E 3 espacios topológicos y $f: S\times T \to E$ continua. Si W es abierto en E y $K\subset T$ es compacto entonces

$L = \{ s\in S \mid f(s,t)\in W \ \underset{t\in K}{\forall} \}$ es abierto en S

PRUEBA

Sea $s_0\in L$ entonces $\underset{t\in K}{\forall}$ $f(s_0,t)\in W$

como f es continua $\underset{t\in K}{\forall}$ f es continua en (s_0,t)

y como W es abierto entonces para cada $t \in K$ existe un abierto $U_t \times V_t$ de $S \times T$ $\ni$ $(s_0, t) \in U_t \times V_t$ y $\forall_{(s,t) \in U_t \times V_t}$ $f(s,t) \in W$

Como $U_t \times V_t$ es abierto en $S \times T \Rightarrow$ U_t es abierto en S y V_t es abierto en T para cada $t \in K$. $\therefore$ $\{V_t\}_{t \in K}$ es una cubierta abierta de K compacto $\therefore$

$$\exists\, n \quad t_1, \ldots, t_n \in K \ni K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{t_i}$$

Además $s_0 \in V_t$ para toda $t \in K$

$$\therefore \quad \{s_0\} \times K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{t_i} \times V_{t_i})$$

y aparte $\forall_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ $\forall_{(s,t) \in U_{t_i} \times V_{t_i}}$ $f(s,t) \in W$

Sea $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{t_i}$ entonces $U \in N_{s_0}$ pues $U_{t_i} \in N_{s_0}$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\text{Ahora} \quad U \times K = \bigcap_{i=1}^{n} (U_{t_i} \times K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{t_i} \times V_{t_i})$$

$\therefore \quad \forall_{(s,t)\in U\times K} \quad f(s,t) \in W$

$\therefore \quad U \subset L$

$\therefore \quad \forall_{s_0 \in L} \quad \exists_{V \in N_{s_0}} \cdot \ni \cdot \quad V \subset L$

$\therefore \quad L$ es abierto en S . + .

Utilizando el lema anterior podemos demostrar

3.6 <u>TEOREMA</u> Sea $f : G \to \mathbb{E}$ ($\mathbb{E} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{E} = \mathbb{C}$) $\cdot \ni \cdot$ $f \in K_{\mathbb{E}}(G)$ entonces f es V.C.I y V.C.D.

<u>PRUEBA</u>

Sea $K = \text{sop}\, f$, K es compacto y $\varepsilon > 0$

Por el lema 2.6 ii) sea $W \in N_e$ entonces $\exists\ V \in N_e \cdot \ni \cdot \ e \in V \subset \overline{V} \subset W$ con $\overline{V}$ compacta. Sea $U = \overline{V} \cap \overline{V}^{-1}$ por el lema 2.10 U es simétrica y como $\overline{V} \cap \overline{V}^{-1} \subset \overline{V}$ y es cerrado entonces U es una vecindad compacta y simétrica de e.

Sea $L = \{ y \in G \mid |f(yx) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall_{x \in U\cdot K} \}$

Como U y K son compactos y el producto es continuo en $G \times G$ entonces $U \cdot K$ es compacto

Sea $h : G \times G \to \mathbb{E}$

$\ni \quad h(y,x) = f(y \cdot x) - f(x)$

como f es continua $\Rightarrow h$ lo es.

En $\mathbb{E}$ $\quad W = \{ t \in \mathbb{E} \mid |t| < \varepsilon \}$ es un abierto (con la topología de la norma)

$\therefore$ a L lo podemos reescribir como:

$L = \{ y \in G \mid h(y,x) \in W \quad \forall_{x \in U\cdot K} \}$

Aplicando el lema 3.5 L es abierto en G y además $e \in L$ pues

$\forall_{x \in U \cdot K} \quad |f(e\cdot x) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$

$\therefore \quad L \in \mathcal{N}_e$

Ahora supongamos que $y \in U$ y $x \notin UK$

como $e \in U$ entonces $x \notin K = \operatorname{sop} f \Rightarrow f(x) = 0$

además si $y\cdot x \in K$ entonces $y\cdot x = k \in K$ $\Rightarrow$ $x = y^{-1}\cdot k \in U^{-1} K = U\cdot K$ pues U es simétrica pero $x \notin U\cdot K$ i.e. $y\cdot x \notin K$ $\therefore$ $f(y\cdot x) = 0$

$$\therefore \ \forall_{y\in U} \ \forall_{x \notin U\cdot K} \quad f(x) = 0 = f(y\cdot x)$$

Sea $V = U \cap L$ entonces $V \in N_e$ pues U y L son vecindades de e.

Sean $y \in L \cap U$ y $x \in G$

Si $x \in U\cdot K$ entonces $|f(y\cdot x) - f(x)| < \varepsilon$ pues $y \in L$
Si $x \notin U\cdot K$ entonces $|f(y\cdot x) \cdot f(x)| = |0| < \varepsilon$ pues $y \in U$

$$\therefore \ \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{V \in N_e} \ \forall_{\substack{x\in G \\ y \in V}} \quad |f(y\cdot x) - f(x)| < \varepsilon$$

por el lema 3.2 f es V.C.d.

Análogamente sea

$$L' = \{ y \in G \ / \ |f(x\cdot y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall_{x \in K\cdot U} \}$$

Sea $\varphi: G\times G \to \mathbb{E} \ \ni\ \varphi(y,x) = f(x\cdot y) - f(x)$

$\Rightarrow \varphi$ es continua pues f lo es

si $W = \{t \in \mathbb{E} \mid |t| < \varepsilon\}$ es abierto en $\mathbb{E}$ y como $K\cdot U$ es compacto $\mathcal{U}'$ se puede escribir en la siguiente forma:

$$\mathcal{U}' = \{y \in G \mid \varphi(y,x) \in W \quad \forall_{x \in K\cdot U}\}$$ y por 3.5

$\mathcal{U}'$ es abierto en G y $e \in \mathcal{U}'$ pues

$\varphi(e,x) = f(x\cdot e) - f(x) = 0 \in W$ si $x \in K\cdot U$

$\therefore$ $\mathcal{U}' \in \mathcal{N}_e$.

Supongamos que $y \in U$ y $x \notin K\cdot U$ entonces $x \notin K$ $\therefore$ $f(x) = 0$. además $x\cdot y \notin K$ pues si $x\cdot y \in K$ entonces

$x\cdot y = k \in K \Rightarrow$ $x = k\cdot y^{-1} \in K\cdot U^{-1} = K\cdot U$

y $x \notin K\cdot U$ $\therefore$ $x\cdot y \notin K$ i.e. $f(x\cdot y) = 0$

Sea $V' = \mathcal{U}' \cap U \Rightarrow V' \in \mathcal{N}_e$ pues $\mathcal{U}', U \in \mathcal{N}_e$

Sea $y \in V'$, $x \in G$

Si $x \in K\cdot U \Rightarrow |f(x\cdot y) - f(x)| < \varepsilon$ pues $y \in \mathcal{U}'$

Si $x \notin K\cdot U \Rightarrow |f(x\cdot y) - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ $y \in U$

$\therefore \; \forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{V'\in \mathcal{N}_e} \; \forall_{\substack{y\in V' \\ x\in G}} \; |f(x\cdot y) - f(x)| < \varepsilon$

$\therefore$ (por el lema 3.3) f es V.C.D.

$\cdot + \cdot$

NOTACION Sea $f: G \to \mathbb{E}$ una función, denotaremos por $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ y si $s \in G$ $\Rightarrow$ $f_s(x) = f(s\cdot x)$

y $f^s(x) = f(x\cdot s^{-1})$

Se tiene de inmediato que $f = f^e = f_e$

Y además si G es conmutativo $f_s = f^{s^{-1}}$ y $f^s = f_{s^{-1}}$ pues si $x \in G$

$\Rightarrow \; f_s(x) = f(s\cdot x) = f(x\cdot s) = f(x\cdot(s^{-1})^{-1}) = f^{s^{-1}}(x)$

y $f^s(x) = f(x\cdot s^{-1}) = f(s^{-1}\cdot x) = f_{s^{-1}}(x)$.

3.7 **LEMA** Sea $f \in K_{\mathbb{E}}(G)$ entonces $\check{f}$, f_s y f^s $s\in G$ son elementos de $K_{\mathbb{E}}(G)$

PRUEBA

Como f es continua en G entonces f es continua en x^{-1} en $x\cdot s^{-1}$ y $s\cdot x$ si $s\in G$ $\therefore$ $\check{f}$, f_s y f^s son continuas.

$$\{x\in G \mid \check{f}(x)\neq 0\} = \{x\in G \mid f(x^{-1})\neq 0\}$$
$$= \{y^{-1}\in G \mid f(y)\neq 0\} = \{y\in G \mid f(y)\neq 0\}^{-1}$$

$\therefore$ sop $\check{f}$ = sop f compacto $\therefore$ $\check{f}\in K_E(G)$

$$\{x\in G \mid f_s(x)\neq 0\} = \{x\in G \mid f(sx)\neq 0\}$$
$$= \{s^{-1}y\in G \mid f(y)\neq 0\} = s^{-1}\{y\in G \mid f(y)\neq 0\}$$

$\therefore$ sop $f_s = s^{-1}\cdot$ sop f que es compacto pues sop f es compacto y el lema 2.8 es aplicable.

$\therefore$ $f_s\in K_E(G)$

De igual forma se ve que sop f^s es compacto $\therefore$ $f^s\in K_E(G)$ $\cdot + \cdot$

3.8 <u>TEOREMA</u> Sea $f\in K_E(G)$ si

$$h_1 : G \longrightarrow K_E(G) \quad \text{y} \quad h_2 : G \longrightarrow K_E(G)$$
$$\quad s \longmapsto f_s \qquad\qquad\qquad s \longmapsto f^s$$

entonces h_1 y h_2 son V. C. d.

PRUEBA

h_1 y h_2 están bien definidas por el lema 3.7.

Sea $\varepsilon > 0$ como f es V.C.d. (por 3.6) $\underset{V \in \mathcal{N}_e}{\exists} \ \underset{\substack{y \in G \\ z \in G}}{\forall} \ \cdot \ni \cdot \ y \cdot z^{-1} \in V \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon$

Sea $x \in G$ y supongamos que $s \cdot t^{-1} \in V$ definimos $y = s \cdot x$ y $z = t \cdot x$ ent. $y, z \in G$ y $y \cdot z^{-1} = s \cdot x \cdot (t \cdot x)^{-1} = s \cdot x \cdot x^{-1} \cdot t^{-1} \in V$

$\therefore \quad |f(y) - f(z)| = |f(s \cdot x) - f(t \cdot x)| < \varepsilon$

$\therefore \quad |f_s(x) - f_t(x)| < \varepsilon \quad \underset{x \in G}{\forall}$

$\therefore \quad \|f_s - f_t\|_* = \sup_{x \in G} |f_s(x) - f_t(x)| \leq \varepsilon$ si $s \cdot t^{-1} \in V$

$\therefore \quad \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{V \in \mathcal{N}_e}{\exists} \quad \underset{s, t \in G}{\forall} \cdot \ni \cdot s \cdot t^{-1} \in V \Rightarrow \|f_s - f_t\|_* \leq \varepsilon$

i.e. $\|h_1(s) - h_1(t)\| \leq \varepsilon$

$\therefore$ h_1 es V.C.d.

Como f es V.C.i. por 3.6 si $\varepsilon > 0$

existe $W \in \mathcal{N}_e$. $\ni$. $\forall_{y,z \in G}$. $\ni$. $y^{-1}z \in W \Rightarrow$

$|f(y)-f(z)| < \varepsilon$

Sea $x \in G$ y sup. que $s \cdot t^{-1} \in W$
definimos $y = x \cdot s^{-1}$ y $z = x \cdot t^{-1}$ $y, z \in G$
entonces $y^{-1} z = (x \cdot s^{-1})^{-1} \cdot x \cdot t^{-1} = s \cdot x^{-1} \cdot x \cdot t^{-1}$
$= s \cdot t^{-1} \in W$.

$\therefore$ $|f(y)-f(z)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x \cdot s^{-1}) - f(x \cdot t^{-1})| < \varepsilon$

$\therefore$ $|f^s(x) - f^t(x)| < \varepsilon \quad \forall_{x \in G}$

i.e. $\|f^s - f^t\|_* = \sup_{x \in G} |f^s(x) - f^t(x)| \leq \varepsilon$

$\therefore$ $\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{V \in \mathcal{N}_e} \quad \forall_{s,t \in G}$. $\ni$. $s \cdot t^{-1} \in V \Rightarrow$

$\|f^s - f^t\|_* = \| h_2(s) - h_2(t) \|_* \leq \varepsilon$

$\therefore$ h_2 es U. C. U. $\dashv$

3.9 <u>PROPOSICION</u> Sea E un esp. de Banach μ una medida positiva en G si $1 \leq p < \infty$ y $f \in \mathcal{K}_E(G)$ entonces

$$h_1 : G \longrightarrow \mathcal{L}^p_E(\mu) \qquad y \qquad h_2 : G \longrightarrow \mathcal{L}^p_E(\mu)$$
$$s \longmapsto f_s \qquad\qquad\qquad s \longmapsto f^s$$

son continuas.

PRUEBA

NOTA: Como $f \in K_E(G)$ entonces si $s \in G \Rightarrow f_s$ y f^s son elementos de $K_E(G)$ por 3.7 y por la definición de $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ $K_E(G) \subset \mathcal{L}^p_E(\mu)$ $\therefore$ $f_s, f^s \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$ $\therefore$ h_1 y h_2 están bien definidas.

Sea $K = \text{sop} f$ y $V \in N_e$ compacta si $C = V \cdot K \cdot V$ es compacto y es vecindad de K pues $K \subset V \cdot K \cdot V = C$ como μ es positiva y K es compacto y sop f entonces $0 < \mu(C) < \infty$.

Sean $W_1, W_2 \in N_e$.∋.

$$\forall_{s,t \in G} \; .\ni. \quad s \cdot t^{-1} \in W_1 \Rightarrow \| f_s - f_t \|_* < \varepsilon (\mu(C))^{-1/p}$$

$$y \; \forall_{s,t \in G} \; .\ni. \quad s \cdot t^{-1} \in W_2 \Rightarrow \| f^s - f^t \|_* < \varepsilon (\mu(C))^{-1/p}$$

lo que es válido por el Teor 3.8

Sea $W = W_1 \cap W_2 \in \mathcal{N}_e$ pues $W_1, W_2 \in \mathcal{N}_e$
sea $V = (U \cap W) \cap (U \cap W)^{-1}$ entonces
$V \in \mathcal{N}_e$ pues $U, W \in \mathcal{N}_e$, V es simétrica
por el lema 2.10 y $V \subset U$ además
si $s \cdot t^{-1} \in V$ entonces simultáneamente

$$\|f_s - f_t\|_* < \varepsilon (\mu(C))^{-1/p} \text{ y } \|f^s - f^t\|_* < \varepsilon (\mu(C))^{-1/p}$$

en particular, tomando $t = e$ si $s \in V$
entonces

$$\|f_s - f_e\|_* = \|f_s - f\|_* < \varepsilon (\mu(C))^{-1/p}$$

$$\text{y} \quad \|f^s - f^e\|_* = \|f_s - f\|^* < \varepsilon (\mu(C))^{-1/p}$$

Sea $s \in V$

si $s^{-1} x \in K \Rightarrow x \in (s \cdot K) \subset V \cdot K \subset U \cdot K \cdot U = C$

si $x \cdot s \in K \Rightarrow x \in (K \cdot s^{-1}) \subset K \cdot V^{-1} = K V \subset U \cdot K \cdot U = C$

y aplicando contrapuesta a las implicaciones
de arriba

si $x \notin U \cdot K \cdot U = C \Rightarrow s^{-1} x \notin K \wedge x \cdot s \notin K$
y además como $e \in V$ entonces $x \notin K = \text{sop} f$
$\therefore$ $f(x) = f(x \cdot s) = f(s^{-1} x) = 0$. De aquí
se tiene que los soportes de f, f^s y f_s
están contenidos en $C = U \cdot K \cdot U$

entonces

$$\left(\int |f_s(x) - f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int \|f_s - f\|_*^p d\mu \right)^{1/p}$$

por la def. de $\| \; \|_*$

$$= \left(\int_C \|f_s - f\|_*^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{pues } \operatorname{sop} f, \operatorname{sop} f_s \subset C$$

$$< \left(\int_C \left(\varepsilon (\mu(C))^{-1/p} \right)^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$= \left(\varepsilon^p (\mu(C))^{-1} \int_C d\mu \right)^{1/p}$$

$$= \varepsilon \ (\mu(C))^{-1} \cdot \mu(C) = \varepsilon$$

$$\therefore \quad N_p(f_s - f) < \varepsilon$$

y análogamente $N_p(f^s - f) = \left(\int |f^s(x) - f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}$

$$\leq \left(\int \|f^s - f\|_*^p d\mu \right)^{1/p} < \varepsilon$$

$$\therefore \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{V \in \mathcal{N}_e} \quad \forall_{s \in V} \quad N_p(h_1(s) - h_1(e)) < \varepsilon$$

$$\text{y} \quad N_p(h_2(s) - h_2(e)) < \varepsilon$$

$\therefore$ h_1 y h_2 son continuas en $e \in G$ y por el Teor 1.37 h_1 y h_2 son continuas. $+$

Con toda la teoría vista hasta ahora, es posible definir y construir, en grupos topológicos localmente compactos cierta clase de medidas que llamaremos "Medidas de Haar".

3.10 <u>DEF</u> Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach y $m: K(G) \longrightarrow \mathbb{E}$ una medida, entonces:

a) m es "invariante por la izquierda" si $\forall_{f \in K(G)} \; \forall_{s \in G} \; m(f_s) = \int f(sx)\, dm(x)$

$= \int f(x)\, dm(x) = m(f)$

b) m es "invariante por la derecha" si $\forall_{f \in K(G)} \; \forall_{s \in G} \; m(f^s) = \int f(xs)\, dm(x)$

$= \int f(x)\, dm(x) = m(f)$

3.11 <u>DEF</u> Sea m una medida positiva, invariante por la izquierda o por la derecha, que no se anula idénticamente entonces decimos que m es una "<u>medida de Haar</u>"

Si el grupo es conmutativo las medidas invariantes por la izq. coinciden con las derechas. El siguiente teorema es el mas importante de la tesis, pues asegura la existencia de una medida de Haar en un grupo topológico localmente compacto, señalando la unicidad excepto por constantes.

3.12 <u>TEOREMA DE HAAR</u> Si G es un grupo topológico localmente compacto existe una medida positiva de Haar invariante por la izquierda (derecha) y sólo una excepto por constantes multiplicativas.

<u>PRUEBA</u>. (Si $\varphi \in K_+(G)$ $\varphi \neq 0$ definimos $\langle\, ; \varphi\rangle : K_+(G) \to \mathbb{R}^+$ positiva si $f \neq 0$, $f \in K_+(G)$ y a partir de ella una función $I_\varphi : K_+(G) \to \mathbb{R}^+$, monotona, positiva, acotada, homogenea y casi aditiva (dependiendo del soporte de φ), definiendo $S = \prod_{f \in K_+(G)} [\, 1/\langle f_0 ; f\rangle , \langle f ; f_0\rangle\,]$ espacio compacto y $C_V = \overline{\{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G,V)\}}$ cerradura en S, tomaremos $\mu \in \bigcap_{V \in N_e} C_V$ como la medida buscada) la prueba se hará para el caso de la medida invariante por la izquierda, la otra es análoga.

<u>PASO I</u> Sean $f \in K_+(G)$ y $g \neq 0$ $g \in K_+(G)$ veamos que existen $\{c_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^+$ y $\{s_i\}_{i=1}^{n} \in G$ .7.

$$\forall_{x\in G} \qquad f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \; g(s_i \cdot x)$$

Como $g \neq 0$ sea $x \in G$ $\cdot \ni \cdot$ $g(x) \neq 0$ sea $0 < \varepsilon = |g(x)|$ como g es continua

$$\exists_{U \in \mathcal{N}_x} \quad \forall_{y \in U} \quad |g(y) - g(x)| < \varepsilon/2$$

i.e. $\forall_{y \in U}$ $\quad 0 < g(x) - \varepsilon/2 < g(y) < g(x) + \varepsilon/2$

Ahora, como G es localmente compacto por 2.6 ii) $\exists_{V \in \mathcal{N}_x} \cdot \ni \cdot V \subset \overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ es compacto

$\therefore$ $g > 0$ en $V \subset U$ y como $\overline{V}$ es compacto y g es continua aplicando el lema 2.7 g es acotada en $\overline{V}$.

Sea $m = \inf_{x \in V} g(x)$ entonces $m > 0$

pues $g(V) \subset g(\overline{V}) \subset \mathbb{R}^+$

Sea $K = \operatorname{sop} f$ como V es abierto para cada $s \in G$ $s \cdot V$ es abierto por el corolario 1.24 y además $\{s^{-1} V\}_{s \in G}$ es una cubierta abierta de G, en particular de K (compacto) $\therefore$

existen $s_1, \ldots, s_m \in G$ $\cdot\ni\cdot$ $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} (s_i^{-1} V)$

Como f es continua de soporte compacto $\Rightarrow$ f es acotada en G por lema 2.7 sea $M = \sup_{x \in G} f(x)$ $(M < \infty)$.

Ahora si $x \in G$ y es $\cdot\ni\cdot$ $f(x) = 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = 0 \leq M/m \sum_{i=1}^{m} g(s_i \cdot x)$ pues $g > 0$ en V. Si $x \in G$ y $f(x) \neq 0$ entonces $x \in K$ $\therefore$ $\exists_{j \in \{1, \ldots, m\}}$ $\cdot\ni\cdot$ $x \in s_j^{-1} V$

i.e. $s_j \cdot x \in V$ entonces $m \leq g(s_j \cdot x) \leq \sum_{i=1}^{m} g(s_i x)$

$\therefore$ $f(x) \leq M = \frac{M\, m}{m} \leq \frac{M}{m} \sum_{i=1}^{m} g(s_i x)$

tomando $c_i = M/m > 0$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $\forall_{x \in G}$ $f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\, g(s_i \cdot x)$.

PASO II Sea $\mathcal{A} = \{ \{c_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R}^+ \mid \exists \{s_i\}_{i=1}^{m} \subset G \cdot\ni\cdot$
$f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\, g(s_i x) \;\; \forall_{x \in G} \}$

$\mathcal{A} \neq \emptyset$ por el paso I si $g \neq 0$, $f, g \in K_+(G)$

definimos $\langle f ; g \rangle = \inf\limits_{\{c_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}} \sum_{i=1}^m c_i$ que es

factible pues $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y $\{ \sum_{i=1}^m c_i \mid \{c_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A} \}$

está acotado inferiormente por 0

OBSERVACION si $f \equiv 0 \Rightarrow \langle f ; g \rangle = 0$
(basta tomar $c_i = 0$ $i \in \{1, \dots, m\}$)

$\langle f ; g \rangle$ satisface :

i) $\langle f_s ; g \rangle = \langle f ; g \rangle \quad \forall_{s \in G}$

ii) $\langle c f ; g \rangle = c \langle f ; g \rangle \quad \forall_{c > 0}$

iii) $\langle f_1 + f_2 ; g \rangle \leq \langle f_1 ; g \rangle + \langle f_2 ; g \rangle \quad \forall_{f_1, f_2 \in K_+(G)}$

iv) si $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \langle f_1 ; g \rangle \leq \langle f_2 ; g \rangle$

i) Denotamos por $\mathcal{A}_{hg} = \{ \{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^+ \mid \exists \{s_i\}_{i=1}^m \subset G \ni \cdot$
$h(x) \leq \sum_{i=1}^m c_i g(s_i \cdot x) \ \forall_{x \in G} \}$

Veamos que $\mathcal{A}_{f,g} = \mathcal{A}_{f_s,g}$ si $s \in G$

Sea $\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}$ entonces existen $\{s_i\}_{i=1}^{m} \subset G$

$\ni \underset{x \in G}{\forall} \quad f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i \cdot x)$

si $x \in G \quad f_s(x) = f(s \cdot x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g((s_i \cdot s) \cdot x)$

$\therefore \quad \exists \ \{s_i \cdot s\}_{i=1}^{m} \subset G \ \ni \ \underset{x \in G}{\forall} \quad f_s(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i \cdot s \cdot x)$

$\therefore \quad \{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_s,g}$ i.e. $\mathcal{A}_{f,g} \subset \mathcal{A}_{f_s,g}$

Ahora sea $\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_s,g}$ entonces existen $\{s_i\}_{i=1}^{m} \subset G \ \ni \ \underset{x \in G}{\forall} \quad f_s(x) = f(s \cdot x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i x)$

sea $x \in G \Rightarrow \quad f(x) = f(s \cdot s^{-1} x) = f_s(s^{-1} x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i \cdot s^{-1} \cdot x)$

$\therefore \ \exists \ \{s_i \cdot s^{-1}\}_{i=1}^{m} \subset G \ \ni \ \underset{x \in G}{\forall} \quad f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i \cdot s^{-1} \cdot x)$

$\therefore \ \{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}$ i.e. $\mathcal{A}_{f_s,g} \subset \mathcal{A}_{f,g}$

$\therefore \ \mathcal{A}_{f} = \mathcal{A}_{f_s,g}$ y de aquí $\inf\limits_{\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}} \sum_{i=1}^{m} c_i = \inf\limits_{\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_s,g}} \sum_{i=1}^{m} c_i$

$\therefore \quad \langle f ; g \rangle = \langle f_s ; g \rangle \quad \underset{s \in G}{\forall}$

ii) Sea $\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{cf,g}$ entonces existen $\{s_i\}_{i=1}^{m} \subset G$ $\ni \cdot$ $\forall_{x \in G}$ $c \cdot f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i \cdot x)$ $c > 0$

entonces $\forall_{x \in G}$ $f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i/c \; g(s_i \cdot x)$

$\therefore$ $\{c_i/c\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}$

Sea $\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}$ entonces existen $\{s_i\}_{i=1}^{m} \subset G$ $\ni \cdot$ $\forall_{x \in G}$ $f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \; g(s_i \cdot x)$ como $c > 0$

$\forall_{x \in G}$ $c \cdot f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c \cdot c_i \; g(s_i \cdot x)$

$\therefore$ $\{c \cdot c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{cf,g}$

Ahora bien $\langle cf ; g \rangle = \inf\limits_{\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{cf,g}} \sum_{i=1}^{m} c_i$

$= \inf\limits_{\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{cf,g}} c \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{c} = c \inf\limits_{\{c_i/c\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}} \sum_{i=1}^{m} c_i/c = c \langle f ; g \rangle$

iii) Sea $\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_1,g}$ y $\{c_i\}_{i=m+1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_2,g}$

entonces existen $\{s_i\}_{i=1}^{m} \subset G$ y $\{s_i\}_{i=m+1}^{m} \subset G$ $\ni \cdot$ $\forall_{x \in G}$ $f_1(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \; g(s_i \cdot x)$, $f_2(x) \leq \sum_{i=m+1}^{m} c_i \, g(s_i \cdot x)$

$$\therefore \quad \forall_{x\in G} \; (f_1+f_2)(x) \le \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i x)$$

$$\therefore \quad \{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_1+f_2, g}$$

$\therefore$ si $\{c_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}_{f_1,g}$ y $\{c_i\}_{i=n+1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_2,g} \Rightarrow \{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_1+f_2,g}$

$$\therefore \quad \inf_{\{d_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_1+f_2,g}} \sum_{i=1}^{m} d_i \le \inf_{\{c_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}_{f_1,g}} \sum_{i=1}^{n} c_i + \inf_{\{c_i\}_{i=n+1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_2,g}} \sum_{i=n+1}^{m} c_i$$

i.e. $\langle f_1+f_2 ; g\rangle \le \langle f_1 ; g\rangle + \langle f_2 ; g\rangle$

iv) Sup $f_1 \le f_2$ Sea $\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_2,g}$
entonces $\exists_n$ $\{s_i\}_{i=1}^{m} \subset G$ $\cdot\ni\cdot$ $\forall_{x\in G}$ $f_2(x) \le \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i \cdot x)$

pero $f_1(x) \le f_2(x)$ $\forall_{x\in G}$ i.e. $f_1(x) \le \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i \cdot x)$

$\therefore$ $\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_1,g}$ $\therefore$ $\mathcal{A}_{f_2,g} \subset \mathcal{A}_{f_1,g}$

$$\therefore \langle f_1 ; g\rangle = \inf_{\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_1,g}} \sum_{i=1}^{m} c_i \le \inf_{\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f_2,g}} \sum_{i=1}^{m} c_i = \langle f_2 ; g\rangle$$

PASO III Veamos que:

v) $\langle f ; h\rangle \le \langle f ; g\rangle \cdot \langle g ; h\rangle$ $h \ne 0$ y $g \ne 0$

vi) Si H_f y H_g son los supremos de f y g

entonces $\langle f;g\rangle \geq M_f / M_g$

V) Sean $\{c_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}_{f,g}$ y $\{d_j\}_{j=1}^{m} \in \mathcal{A}_{g,h}$

entonces $\underset{x\in G}{\forall}$ $f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i\, g(s_i x)$, $g(x) \leq \sum_{j=1}^{m} d_j\, h(t_j x)$

para ciertos $\{s_i\}_{i=1}^{n} \subset G$ y $\{t_j\}_{j=1}^{m} \subset G$

$\therefore \underset{x\in G}{\forall}$ $f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} d_j\, h(t_j \cdot s_i\, x)$

$\therefore$ $(\{c_i \cdot d_j\}_{i=1}^{n})_{j=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,h}$

$$\therefore \langle f;h\rangle = \inf_{\{\gamma_k\}_{k=1}^{l} \in \mathcal{A}_{f,h}} \sum_{k=1}^{l} \gamma_k \leq \inf_{(\{c_i\cdot d_j\}_{i=1}^{n})_{j=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,h}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j$$

$$= \inf_{\{c_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}_{f,g},\ \{d_j\}_{j=1}^{m} \in \mathcal{A}_{g,h}} \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} d_j = \inf_{\{c_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}_{f,g}} \sum_{i=1}^{n} c_i \inf_{\{d_j\}_{j=1}^{m} \in \mathcal{A}_{g,h}} \sum_{j=1}^{m} d_j$$

$= \langle f;g\rangle \cdot \langle g;h\rangle$ $\qquad \therefore \langle f;h\rangle \leq \langle f;g\rangle \langle g;h\rangle$

Vi) Como f, g son continuas con soporte compacto por el lema 2.7 existen M_f y M_g supremos de f y g respectivamente y son finitos, además se tiene que $\exists\, \bar{x}_0 \in G \ni$.

$\therefore \; f(\bar{x}_0) = M_f$ por el mismo lema

Sea $\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}$ entonces $\exists \{s_i\}_{i=1}^{m} \subset G$

$\therefore \; \forall_{x_0 \in G} \quad f(x_0) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i x_0)$ en particular

$$M_f = f(\bar{x}_0) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, g(s_i \bar{x}_0) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, M_g$$

como $M_g \neq 0$ pues g no se anula idénticamente, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \geq M_f / M_g \qquad \forall_{\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}}$$

$$\therefore \quad \inf_{\{c_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,g}} \sum_{i=1}^{m} c_i = \langle f ; g \rangle \geq M_f / M_g$$

NOTA si $f \neq 0$ como $M_f \neq 0$ ent. $\langle f ; g \rangle > 0$

PASO IV Sea $f_0 \in K_+(G)$ $f_0 \neq 0$ definimos

$$I_\varphi(f) = \langle f ; \varphi \rangle / \langle f_0 ; \varphi \rangle \quad \text{si } f, \varphi \in K_+(G), \varphi \neq 0$$

no hay problema con esta definición pues $\varphi \neq 0$ y $\langle f_0 ; \varphi \rangle > 0$ por vii) del paso III (NOTA). Ahora como $f \neq 0$ entonces $\langle f_0 ; f \rangle > 0 \quad \therefore$

$$I_\varphi(f) = \frac{\langle f;\varphi\rangle}{\langle f_0;\varphi\rangle} = \frac{\langle f_0;f\rangle\langle f;\varphi\rangle}{\langle f_0;f\rangle\langle f_0;\varphi\rangle} \geq$$

$$\frac{\langle f_0;\varphi\rangle}{\langle f_0;f\rangle\langle f_0;\varphi\rangle} = \frac{1}{\langle f_0;f\rangle}$$

La desigualdad proviene de v) paso III, pero por v) también es cierto que:

$$\langle f;\varphi\rangle \leq \langle f;f_0\rangle\langle f_0;\varphi\rangle$$

entonces $\quad I_\varphi(f) = \dfrac{\langle f;\varphi\rangle}{\langle f_0;\varphi\rangle} \leq \langle f;f_0\rangle$

i.e. $\quad 0 < \dfrac{1}{\langle f_0;f\rangle} \leq I_\varphi(f) \leq \langle f;f_0\rangle < \infty$

La última desigualdad es válida, pues $\langle f;f_0\rangle$ es por definición un ínfimo de un conjunto no vacío contenido en $\mathbb{R}^+$.

De lo anterior vemos que $\forall_{f\neq 0}\ f\in K_+(G)$

$\{I_\varphi(f) \mid \varphi\in K_+(G),\ \varphi\neq 0\}$ es acotado en $\mathbb{R}^+$

con f y f_0 fijas $f \neq 0 \neq f_0$, $f, f_0 \in \mathcal{K}_+(G)$

Además $$I_\varphi(f_s) = \frac{\langle f_s ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle} = \frac{\langle f ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle} = I_\varphi(f)$$

por i) del paso II.

$$\therefore \forall_{s \in G} \quad I_\varphi(f_s) = I_\varphi(f) \quad \text{(i.e. es invariante)}$$

Si $c > 0$ $$I_\varphi(c \cdot f) = \frac{\langle c \cdot f ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle} = \frac{c \langle f ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle} = c\, I_\varphi(f)$$

$$\therefore \forall_{c > 0} \quad I_\varphi(c \cdot f) = c\, I_\varphi(f)$$ por ii) PASO II

y $$I_\varphi(f_1 + f_2) = \frac{\langle f_1 + f_2 ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle} \leq \frac{\langle f_1 ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle} + \frac{\langle f_2 ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle}$$

$$= I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2)$$ por iii) PASO II

$\therefore$ I_φ es invariante por la izquierda, homogenea y subaditiva

PASO V Veamos que si $\varphi \neq 0$ y sop φ es suficientemente chico entonces I_φ es "casi" aditiva i.e. $\forall_{f_1, f_2 \in \mathcal{K}_+(G)} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{V \in \mathcal{N}_e} \quad \cdot \ni \cdot$

$\forall_{\varphi \in K_+(G)} \cdot \ni \cdot \ sop\, \varphi \subset V \Rightarrow I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f_1+f_2) + \varepsilon$

Sean $f_1, f_2 \in K_+(G)$ y $\varepsilon > 0$

si $f_1 + f_2 = 0$ entonces $f_1 = f_2 = 0$ entonces
$\langle f_1 ; \varphi \rangle = \langle f_2 ; \varphi \rangle = 0 = \langle f_1 + f_2 ; \varphi \rangle$

$\therefore \ I_\varphi(f_1) = I_\varphi(f_2) = I_\varphi(f_1+f_2) = 0$ y la desigualdad se satisface.

Supongamos que $f_1 + f_2 \neq 0$, sea $f' \in K_+(G)$
$\cdot \ni \cdot \ \forall_{x \in sop(f_1+f_2)} \ f'(x) = 1$ se puede por 2.16

como $0 < \langle f_1 + f_2 ; f_0 \rangle < \infty$ y $0 < \langle f' ; f_0 \rangle < \infty$
pues $f_1 + f_2 \neq 0$ y $f' \neq 0$

Sean $\varepsilon' > 0 \ \cdot \ni \cdot \ 2\varepsilon' \cdot \langle f_1 + f_2 ; f_0 \rangle \leq \varepsilon/2$
y $\delta > 0 \cdot \ni \cdot \ \delta(1 + 2\varepsilon') \langle f' ; f_0 \rangle < \varepsilon/2$

Definimos $f = f_1 + f_2 + \delta f'$

$$h_i(t) = \begin{cases} f_i(t)/f(t) & \text{si } f(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(t) = 0 \end{cases} \qquad i \in \{1, 2\}$$

Entonces $f \in K_+(G)$ pues $f_1, f_2, f' \in K_+(G)$

y $h_1, h_2 \in K_+(G)$ pues $\operatorname{sop} h_1 = \operatorname{sop} f_1$ y $\operatorname{sop} h_2 = \operatorname{sop} f_2$ ambos compactos y además ambas son continuas, pues si $f_1(t)$ o $f_2(t)$ son distintas de cero también $f(t)$ es distinta de cero i.e. no se indetermina y tanto f_1, f_2 como f' son continuas. Por el teorema 3.6 h_1 y h_2 son uniformemente continuas $\therefore$

$$\underset{V \in \mathcal{N}_e}{\exists} \quad \underset{x,y \in G}{\forall} \cdot \ni \cdot \ y^{-1}x \in V \Rightarrow$$

$$| h_i(x) - h_i(y) | < \varepsilon' \qquad i \in \{1, 2\}$$

(V se define como la intersección de las vecindades V_1 y V_2 asociadas a h_1 y h_2 respectivamente).

Sea $\varphi \neq 0$ $\varphi \in K_+(G, V)$, ahora tomemos $\{c_j\}_{j=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,\varphi}$, entonces existen $\{s_j\}_{j=1}^{m} \subset G \cdot \ni \cdot \underset{x \in G}{\forall} \quad f(x) \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \, \varphi(s_j \cdot x)$

si $\varphi(s_j x) \neq 0$ entonces $s_j x \in \operatorname{sop} \varphi \subset V$ $\therefore$ $(s_j^{-1})^{-1} \cdot x \in V$ $\therefore$

$$| h_i(x) - h_i(s_j^{-1}) | < \varepsilon' \qquad i \in \{1, 2\}$$

$$\therefore \ \forall_{x\in G} \quad h_i(x) < h_i(s_j^{-1}) + \varepsilon' \qquad i \in \{1,2\}$$

$$\therefore \ f_i(x) = f(x)\, h_i(x) \leq \sum_{j=1}^{m} c_j\, \varphi(s_j x)\, h_i(x) \leq$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j\, \varphi(s_j x) \left[h_i(s_j^{-1}) + \varepsilon' \right] \qquad i \in \{1,2\}$$

y por definición de $\langle f_i ; \varphi \rangle$ se tiene que:

$$\langle f_i ; \varphi \rangle \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \left[h_i(s_j^{-1}) + \varepsilon' \right] \qquad i \in \{1,2\}$$

entonces $\langle f_1 ; \varphi \rangle + \langle f_2 ; \varphi \rangle \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \left[h_1(s_j^{-1}) + \varepsilon' \right]$

$$+ \sum_{j=1}^{m} c_j \left[h_2(s_j^{-1}) + \varepsilon' \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j \left[h_1(s_j^{-1}) + h_2(s_j^{-1}) + 2\varepsilon' \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j \left[\frac{f_1(s_j^{-1}) + f_2(s_j^{-1})}{f_1(s_j^{-1}) + f_2(s_j^{-1}) + \delta f'(s_j^{-1})} + 2\varepsilon' \right]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} c_j \left[1 + 2\varepsilon' \right] \quad \text{y esto} \quad \forall_{\{c_j\}_{j=1}^{m} \in \mathcal{A}_{f,\varphi}}$$

$$\therefore \ \langle f_1 ; \varphi \rangle + \langle f_2 ; \varphi \rangle \leq \langle f ; \varphi \rangle (1 + 2\varepsilon')$$

y como $\langle f_0 ; \varphi \rangle > 0$ entonces

$$\frac{\langle f_1 ; \varphi \rangle + \langle f_2 ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle} \leq \frac{\langle f ; \varphi \rangle}{\langle f_0 ; \varphi \rangle} (1 + 2\varepsilon')$$

ie.
$$\begin{aligned}
I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) &\leq I_\varphi(f)(1+2\varepsilon') \\
&= I_\varphi(f_1 + f_2 + \delta f')(1+2\varepsilon') \\
&\leq [I_\varphi(f_1+f_2) + \delta I_\varphi(f')](1+2\varepsilon') \\
&= I_\varphi(f_1+f_2) + 2\varepsilon' I_\varphi(f_1+f_2) + \delta(1+2\varepsilon') I_\varphi(f') \\
&\leq I_\varphi(f_1+f_2) + 2\varepsilon' \langle f_1+f_2 ; f_0 \rangle + \delta(1+2\varepsilon') \langle f' ; f_0 \rangle \\
&\leq I_\varphi(f_1+f_2) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= I_\varphi(f_1+f_2) + \varepsilon
\end{aligned}$$

La 1ª desigualdad es válida pues I_φ es subaditiva y homogenea, la 2ª desigualdad se sigue de la 1ª parte del paso IV y la 3ª y última es cierta por la forma en que se definieron ε' y δ.

PASO VI Para cada $f \in K_+(G)$ $f \neq 0$ definimos $S_f = \left[\frac{1}{\langle f_0 ; f \rangle} , \langle f ; f_0 \rangle \right]$ que

es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}^+$, sea $S = \prod_{\substack{f \in K_+(G) \\ f \neq 0}} S_f$

Como S_f es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}^+$ entonces S_f es un compacto para cada $f \in K_+(G)$, $f \neq 0$ y por el teorema de Tychonoff S es compacto.

Además para cada $\varphi \in K_+(G)$, $\varphi \neq 0$ por el paso IV $\frac{1}{\langle f_0 ; f \rangle} \leq I_\varphi(f) \leq \langle f ; f_0 \rangle$

$\therefore$ $I_\varphi(f) \in S_f$ i.e. que como función I_φ se puede identificar con un punto de S cuyas coordenadas son exactamente $I_\varphi(f)$ para cada $f \in K_+(G)$, $f \neq 0$.

Para cada $V \in \mathcal{N}_e$ definimos $C_V = \overline{\{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G, V) \}}$, con la identificación hecha arriba C_V es un cerrado en S para cada $V \in \mathcal{N}_e$ y como S es compacto entonces C_V es compacto.

Sean $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{N}_e$, tomemos

$$I_\varphi \in \bigcap_{i=1}^{n} \{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G, V_i) \} \Leftrightarrow$$

$$\varphi \in K_+(G) \text{ y sop } \varphi \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i \Leftrightarrow$$

$$I_\varphi \in \{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G, \bigcap_{i=1}^{n} V_i) \}$$

$$\therefore \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G, V_i) \}} = \overline{\{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G, \bigcap_{i=1}^{n} V_i) \}}$$

$$= C_{\bigcap_{i=1}^{n} V_i} \qquad \text{pues } \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{N}_e$$

$$\text{pero} \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G, V_i) \}} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G, V_i) \}}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} C_{V_i}$$

$$\therefore \quad C_{\bigcap_{i=1}^{n} V_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} C_{V_i}$$

pero $\quad \phi \neq C_{\bigcap_{i=1}^{n} V_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} C_{V_i}$ pues como

G es un grupo Topológico localmente compacto y $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{N}_e$ entonces existe $U \in \mathcal{N}_e \ni \cdot$ $e \in U \subset \overline{U} \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ con $\overline{U}$ compacto, por 2.6 ii) y por el lema de Urysohn existe $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^+ \ni \cdot$ $\varphi(\overline{U}) = 1$, $\varphi(x) = 0$ si $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, φ continua i.e. que existe $\varphi \in K_+(G, \bigcap_{i=1}^{n} V_i)$ $\therefore$ $I_\varphi \in \{ I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G, \bigcap_{i=1}^{n} V_i) \} \subset C_{\bigcap_{i=1}^{n} V_i}$.

$\therefore$ $\{ C_V \}_{V \in \mathcal{N}_e}$ es una familia de compactos con la propiedad de la intersección finita, pues si $V_1, .., V_n \in N_e$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} C_{V_i} \neq \phi$ $\therefore$ aplicando tenemos que:

$$\bigcap_{V \in N_e} C_V \neq \phi \text{ . Sea } \mu \in \bigcap_{V \in N_e} C_V$$

Sea $V \in N_e$, $\varepsilon > 0$ y $f \in K_+(G)$

como $\mu \in C_V = \overline{\{I_\varphi \mid \varphi \in K_+(G,V)\}}$ por definición de cerradura $\exists\ \varphi \in K_+(G,V)$ $\cdot\ni\cdot$ $\|\mu - I_\varphi\|_\varphi < \varepsilon$ $\therefore$ $|\mu(f) - I_\varphi(f)| < \varepsilon$.

Por las propiedades de I_φ se sigue que μ es homogénea, invariante por la izquierda, positiva y aditiva en $K_+(G)$, la aditividad se sigue del paso V al tomar la intersección de las vecindades de e y además como $\mu \in S$ entonces

$$0 < \frac{1}{\langle f_0 ; f \rangle} \leq \mu(f) \leq \langle f ; f_0 \rangle < \infty \quad \therefore$$

μ no se anula idénticamente, si $f \neq 0$ $\mu(f) > 0$

$\therefore$ μ es una medida de Haar. $\dashv$

Para probar la unicidad de μ demostremos el siguiente:

3.13 LEMA Sea ν una medida de Haar invariante por la izquierda entonces toda medida invariante por la izquierda es de la forma $m = a\nu$ $a \in \mathbb{R}$

PRUEBA

Sea m una medida invariante por la izquierda y sea μ la medida construida en el teorema anterior int. $\mu(f) > 0$ si $f \neq 0$ $f \in K_+(G)$.

Tomemos $f \in K_+(G)$, $f \geq 0$ y sea $C = \operatorname{sop} f$ que es compacto.

Como G es localmente compacto sea $W \in N_e$ $\cdot\ni\cdot$ $\overline{W}$ es compacto, como el producto en G es continuo pues G es grupo Topológico por el Teorema 2.3 i) $\overline{W}C$ y $C\overline{W}$ son compactos y por la def.

de compacidad es fácil ver que la unión finita de compactos es compacta $\therefore$ $C\overline{W} \cup \overline{W}C$ es compacto. Por el lema de Urysohn sea $f': G \to [0,1]$ continua $\ni$ sop f' es compacto y $f'(C\overline{W} \cup \overline{W}C) = 1$.

Por el teorema 3.6 como $f \in K_+(G)$ ent. f es V.C.I. y V.C.D. Sea $\varepsilon > 0$ por la caracterización de V.C.I. dada por 3.2 $\exists_{U_1 \in N_e} \ni \forall_{\substack{x \in G \\ y \in V}} \; |f(yx) - f(x)| < \varepsilon/2$

y por la de V.C.D. dada en 3.3 $\exists_{U_2 \in N_e} \ni \forall_{\substack{x \in G \\ z^{-1} \in V}} \; |f(x \cdot z^{-1}) - f(x)| < \varepsilon/2$

Sea $V = (U_1 \cap U_2 \cap W) \cap (U_1 \cap U_2 \cap W)^{-1}$ entonces $V \in N_e$ pues $U_1, U_2, W \in N_e$, además V es simétrica por 2.10 y $V \subset W$

Si $y, z^{-1} \in V$ entonces

$$|f(yx) - f(xz^{-1})| \le |f(yx) - f(x)| + |f(x) - f(xz^{-1})|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall_{x \in G}$$

Por otro lado tenemos que :

$\forall_{y\in V} \ \forall_{x\in G} \quad f(xy) = f(xy)\, f'(x) \;\; y \;\; f(yx) = f(yx)\, f'(x)$

pues si $xy \in C \Rightarrow \quad x \in C\cdot y^{-1} \subset CV \subset CW$

y si $yx \in C \Rightarrow \quad x \in y^{-1}C \subset VC \subset WC$

en ambos casos $x \in C\overline{W} \cup \overline{W}C$

$\therefore \quad f'(x) = 1$

$\therefore \quad f(xy) = f(xy)\, f'(x) \;\; y \;\; f(yx) = f(yx)\, f'(x)$

y si $xy \notin C = sop\, f$ entonces $f(xy) = 0$

o si $yx \notin C = sop\, f$ entonces $f(yx) = 0$

y también se satisface la igualdad

Como V es simétrica sea $z = y^{-1}$

entonces se tiene que $\forall_{y\in V} \ \forall_{x\in G}$

$|f(xy) - f(yx)| < \varepsilon\, f'(x)$

Sea $h \in K_+(G,V)$, $h \neq 0 \;\ni\; h(x) = h(x^{-1})$

para cada $x \in G$, entonces

$$\mu(h)m(f) = \int h(y)\,d\mu(y) \cdot \int f(x)\,dm(x)$$

$$= \int d\mu(y) \cdot \int h(y) f(x)\,dm(x)$$

$$= \int d\mu(y) \cdot \int h(y) f_y(x)\,dm(x)$$

$$= \int d\mu(y) \cdot \int h(y) f(yx)\,dm(x)$$

pues m es invariante por la izq.

Ahora

$$m(h)\mu(f) = \int f(y)\,d\mu(y) \int h(x)\,dm(x)$$

$$= \int d\mu(y) \int h(x) f(y)\,dm(x)$$

$$= \int d\mu(y) \int h(y^{-1}x) f(y)\,dm(x)$$

$$= \int d\mu(y) \int h(x^{-1}y) f(y)\,dm(x)$$

$$= \int dm(x) \int h(x^{-1}y) f(y)\,d\mu(y)$$

$$= \int dm(x) \int h_x(x^{-1}y) f_x(y)\,d\mu(y)$$

$$= \int dm(x) \cdot \int h(y)\, f(xy)\, d\mu(y)$$

$$= \int d\mu(y) \cdot \int h(y)\, f(xy)\, dm(x)$$

En esta serie de igualdades usamos que m y μ son invariantes por la izquierda y el hecho de que $h(x) = h(x^{-1})$

$$\therefore \quad |\mu(h)m(f) - m(h)\mu(f)|$$

$$= \left| \int d\mu(y) \int h(y) f(yx)\, dm\, x - \int d\mu(y) \int h(y) f(xy)\, dm(x) \right|$$

$$\leq \int d\mu(y) \int |h(y)|\, |f(xy) - f(yx)|\, dm(x)$$

$$\leq \varepsilon \int d\mu(y) \int h(y)\, f'(x)\, d|m|(x)$$

$$= \varepsilon \int h(y)\, d\mu(y) \int f'(x)\, d|m|(x)$$

$$= \varepsilon\, \mu(h)\, |m|(f')$$

donde $|m|$ es la norma de m en $\mathbb{E}$ si m es positiva $|m| = m$ ver [REF X] CAP II seccion 8 PAG 120

Si tomamos otra $g \in K_+(G)$ $K = \text{sop}\, g$ y una $g' : G \to [0,1]$ cont. de soporte compacto $\ni$ $g'(x) = 1$ $x \in K \cdot \overline{W} \cup \overline{W} \cdot K$ se obtiene de idéntica forma que:

$$|\mu(h)\, m(g) - \mu(g)\, m(h)| \leq \varepsilon\, \mu(h)\, |m|(g')$$

como $\mu(h)$, $\mu(g)$ y $\mu(f)$ son positivos

entonces $\left| \dfrac{m(f)}{\mu(f)} - \dfrac{m(h)}{\mu(h)} \right| =$

$$\left| \frac{m(f)\mu(h) - m(h)\mu(f)}{\mu(f)\,\mu(h)} \right| \leq$$

$$\frac{\varepsilon\, \mu(h)\, |m|(f')}{\mu(h)\, \mu(f)} = \frac{\varepsilon\, |m|(f')}{\mu(f)}$$

y similarmente se tiene que:

$$\left| \frac{m(g)}{\mu(g)} - \frac{m(h)}{\mu(h)} \right| \leq \frac{\varepsilon\, |m|(g')}{\mu(g)}$$

entonces

$$\left| \frac{m(f)}{\mu(f)} - \frac{m(g)}{\mu(g)} \right| \leq \varepsilon \left(\frac{|m|(f')}{\mu(f)} + \frac{|m|(g')}{\mu(g)} \right)$$

como f' y g' no dependen de ε y $\mu(f), \mu(g)$ son constantes entonces

$$\frac{m(f)}{\mu(f)} - \frac{m(g)}{\mu(g)} = 0 \Rightarrow \frac{m(f)}{\mu(f)} = \frac{m(g)}{\mu(g)}$$

y ésto para cualquier $f, g \in K_+(G)$ $f \neq 0 \neq g$

fijamos $g_0 \in K_+(G) \ni g_0 \neq 0$ y sea

$b = \dfrac{m(g_0)}{\mu(g_0)}$ entonces $\dfrac{m(f)}{\mu(f)} = b \neq 0$

$\therefore \forall_{f \in K^+(G)} \quad m(f) = b\,\mu(f)$

Si ν es una medida de Haar invariante por la izquierda entonces $\nu = a\mu$ $a > 0$

$\therefore$ $\mu = a^{-1}\nu$ si $\alpha = b/a$ como

$m = b\mu = b a^{-1} \nu = \alpha \nu$ $\cdot\!\!-\!\!\!\!+\!\!\!\!-\cdot$

3.14 DEF Sea $m: K_{\mathbb{E}}(G) \to \mathbb{F}$ una medida entonces m está dominada por la medida ν si y sólo si $|m(f)| \leq \nu(|f|)$ $\forall f \in K_{\mathbb{E}}(G)$

Utilizando esta definición y los teoremas anteriores, podemos concluir:

3.15 COROLARIO Toda medida invariante por la izquierda $m: K(G) \to \mathbb{E}$ es dominada y $|m|$ es una medida positiva invariante por la izquierda.

PRUEBA

Sea ν una medida de Haar invariante por la izquierda, por 3.13 existe $a \in \mathbb{E}$ $\cdot \ni \cdot$ $m = a\,\nu$ $\therefore$

$|m| = |a| \cdot |\nu| = |a| \cdot \nu$ ν es positivo

$\therefore$ si $f \in K(G)$ entonces

$|m(f)| = |a| \cdot \nu(f)$ i.e. $|m|$ es una medida positivo de Haar pues ν lo es

$\therefore$ $|a|\cdot\nu$ es lineal, continua y positiva. Además m está dominada por $|a|\cdot\nu$ pues si $f\in K(G)$ entonces $|m(f)| = |a|\cdot\nu(f) \leq |a|\cdot\nu(|f|)$ ya que $f\leq |f|$. $\cdot\!\!\dashv\!\!\cdot$

OBSERVACIONES:

I Si μ la medida construida en el teor 3.12 fuese invariante por la derecha también, entonces la prueba de la unicidad de m es aún más simple.

Sean f y $h\in K_+(G)$.∋. $h\neq 0$ entonces:

$$m(h)\cdot\mu(f) = \int h(y)\,dm(y)\cdot\int f(x)\,d\mu(x)$$

$$= \int dm(y)\cdot\int h(y)f(x)\,d\mu(x)$$

$$= \int dm(y)\cdot\int h(y)f(xy)\,d\mu(x)$$

$$= \int d\mu(x)\cdot\int h(y)\,f(x\cdot y)\,dm(y)$$

$$= \int d\mu(x)\cdot\int h(x^{-1}y)\,f(x^{-1}x\cdot y)\,dm(y)$$

$$= \int dm(y) \int \check{h}(y^{-1}x)\, f(y)\, d\mu(x)$$

$$= \int dm(y) \int \check{h}(x)\, f(y)\, d\mu(x)$$

$$= \int f(y)\, dm(y) \int \check{h}(x)\, d\mu(x)$$

$$= \mu(\check{h})\, m(f) \qquad \mu(\check{h}) \neq 0$$

tomando $b = m(h) / \mu(\check{h})$ se tiene que $m(f) = b\,\mu(f)$ $\quad b \in \mathbb{E} \quad f \in K_+(G)$

$\therefore \quad m = a \cdot \nu$ como en 3.13

II Si m es una medida invariante por la izquierda $m \neq 0$ entonces

$$\forall_{f \in K_+(G)} \quad f \neq 0 \Rightarrow m(f) \neq 0$$

Esto es cierto, pues por lo visto en 3.13 $m(f) = b\,\mu(f)$ como μ satisface lo anterior y $b \neq 0$ $\therefore$ $m(f) \neq 0$ si $f \neq 0$ $\quad f \in K_+(G)$

III Como todas las medidas invariantes por la izquierda se obtienen multiplicando la medida μ de 3.12

por una constante, se estudiará unicamente a la medida μ y sus propiedades y le llamaramos "la" medida de Haar invariante por la izquierda.

3.16 <u>DEF</u> a) Sea μ una medida positiva en T espacio localmente compacto sea $\alpha : T \to S$ con S espacio localmente compacto entonces α es μ-propia $\Leftrightarrow$

i) α es μ-medible

ii) $\forall_{f \in K(S)}$ $f \circ \alpha : T \to \mathbb{R}$ es μ-integrable

b) $\alpha : T \to S$ es μ- medible $\Leftrightarrow$

$\forall_{K \subset T}$ compacto $\forall_{\varepsilon > 0}$ $\exists_{K_1 \subset K}$ compacto $\ni \cdot$ $\alpha|_{K_1}$

α restringida a K_1 es continua y $\mu(K - K_1) < \varepsilon$

Para ver mas propiedades acerca de funciones μ-medibles ver [REF V] CAP III PAGS 154 - 158

En base a la definición 3.16 podemos definir la medida $\alpha(\mu)$ en $\mathcal{K}(T)$

Con $\alpha(\mu)(f) = \mu(f\circ\alpha)$. Mayores detalles acerca de esta medida pueden encontrarse en [REF V] CAP V PAGS 343-355, así como la demostración del siguiente teorema pag 352.

3.17 <u>teorema</u> Sea $\alpha: T \to S$ μ-propia, con μ una medida dominada y S un espacio localmente compacto. Sea $f: S \to \mathbb{R}$ una función, entonces

Si $f\circ\alpha$ es μ-integrable $\Rightarrow$ f es $\alpha(\mu)$-integrable y $\int f \, d\,\alpha(\mu) = \int f\circ\alpha \, d\mu$.

3.18 <u>PROPOSICION</u> Sea $f \geq 0$ f definida en G entonces $\forall_{s \in G}$ $\mu^*(f_s) = \mu^*(f)$

<u>PRUEBA</u>

$h(x) = s\cdot x$ es un homeomorfismo por 1.01 ii) y $f\circ h = f_s$, si $f \in K_+(G)$ entonces $f\circ h \in K(G)$.

De hecho h es μ-propia pues por ser homeomorfismo $h/_{K_i}$ es continua para K_i compacto y si $f \in K(G)$ f es

μ-integrable $\Rightarrow$ $f_s = f \circ h$ es μ-integrable y como μ es de Haar invariante por la izquierda $\mu(f) = \mu(f_s) = h(\mu)(f)$ i.e. $h(\mu)$ y μ son la misma medida.

Ahora si $f \geq 0$ por el teor 3.17 y la definición de μ^* (en base a μ) (2.32) se tiene que

$$\int^* f_s \, d\mu = \int^* f \circ h \, d\mu = \int^* f \, dh(\mu)$$

$$= \int^* f \, d\mu \quad \therefore \quad \mu^*(f_s) = \mu^*(f) . \dashv .$$

Como corolarios de este teorema tenemos:

<u>3.19</u> <u>COR</u> Sea $A \subset G$ y $s \in G$ entonces
$\mu^*(sA) = \mu^*(A)$

<u>PRUEBA</u> sea $f = \varphi_A$ la función característica de A en 3.18 $. \dashv .$

3.20 <u>COROLARIO</u> Sea $\phi \subsetneq U \subset G$ un abierto entonces $\mu^*(U) > 0$

PRUEBA.

Sup $\emptyset \subsetneq U \subset G$ $\cdot \ni \cdot$ $\mu^*(U) = 0$
como $\{s \cdot U\}_{s \in G}$ es cubierta abierta de G si tomamos $K \subset G$ un compacto no vacío $\Rightarrow \{s \cdot U\}_{s \in G}$ es cubierta abierta de K
$\therefore \exists n$ $s_1, \ldots, s_m \in G \cdot \ni \cdot$ $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} s_i \cdot U$

$$\therefore \quad \mu^*(K) \leq \sum_{i=1}^{m} \mu^*(s_i \cdot U) = \sum_{i=1}^{m} \mu^*(U)$$

$= 0$ $\quad \therefore$ $\mu^*(K) = 0$ $\forall K \subset G$ comp.
ver 2.30 b), d)
$\therefore$ μ se anula idénticamente ∇

i.e. $\mu^*(U) > 0$ $\quad \cdot + \cdot$

3.21 COROLARIO Si G es discreto entonces existe $a > 0$ $\cdot \ni \cdot$ $\mu(\{x\}) = a$ $\forall x \in G$

PRUEBA

Como G es discreto $\{e\}$ es abierto entonces $\forall_{s \in G}$ $s \cdot \{e\} = \{s\}$ es abierto

entonces $\mu(\{s\}) = \mu(s \cdot \{e\}) = \mu(\{e\}) > 0$
si $a = \mu(\{e\}) > 0$ se tiene lo pedido $\cdot + \cdot$

3.22 **LEMA** Sea $f \in \mathcal{L}^p_E$ $1 \leq p < \infty$ entonces $\forall_{s \in G}$ $f_s \in \mathcal{L}^p_E$ y $N_p(f_s) = N_p(f)$

PRUEBA

Como $f \in \mathcal{L}^p_E$ entonces f es medible $\therefore N_p(f) < \infty$ $\therefore f_s$ es medible

y $N_p(f_s) = \left(\int^* |f(sx)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$ por 3.18

$$= \left(\int^* |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} = N_p(f) < \infty$$

$\therefore f_s \in \mathcal{L}^p_E$ $\dashv$.

3.23 **LEMA** Sea $1 \leq p < \infty$ si $f \in \mathcal{L}^p_E$ $h_f : G \to \mathcal{L}^p_E(\mu)$ $\cdot \ni \cdot$ $h_f(s) = f_s$ es U.C.d.

PRUEBA

Sea $f \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$ y $\varepsilon > 0$ por 2.46 $\exists\, g \in K_E(G) \cdot \ni \cdot$ $N_p(f-g) < \varepsilon/3$
$\forall_{s \in G}$ $N_p(f_s - g_s) = N_p(f-g) < \varepsilon/3$

Como $g_s \in K_E(G)$ entonces $f_s \in \mathcal{L}^p_E(\mu)$ por def de $\mathcal{L}^p_E(\mu)$.

Ahora por el teorema 3.9 $\exists_{V \in N_e}$

$\ni \cdot \quad N_p(g_s - g) < \varepsilon/3 \quad$ si $s \in V$

si $s \cdot t^{-1} \in V$ entonces

$$N_p(g_s - g_t) = N_p(g_{st^{-1}} - g) < \varepsilon/3$$

$$\therefore \quad N_p(f_s - f_t) \leq N_p(f_s - g_s) + N_p(g_s - g_t)$$

$$+ N_p(f_t - g_t) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\therefore \quad N_p(h_1(s) - h_1(t)) < \varepsilon$ si $\quad s \cdot t^{-1} \in V$

$\therefore \quad N_p$ es V.C.U. por 3.1 $\quad \cdot \dashv \cdot$

En general una medida invariante por la izquierda, no lo es por la derecha. En esta última sección encontraremos una relación entre ambos tipos de medidas mediante una función llamada "función modular".

Sea $t \in G$ definimos μ^t en $K(G) \ni \cdot$ $\mu^t(f) = \mu(f^t)$ si $f \in K(G)$ que está bien definida pues si $f \in K(G) \Rightarrow f^t \in K(G)$

por 3.7. Como μ es medida positiva, enton- μ^t es medida positiva y es invariante por la izquierda pues:

$$\mu^t(f_s) = \mu((f_s)^t) = \mu((f^t)_s) = \mu(f^t) = \mu^t(f)$$

ya que $(f_s)^t(x) = f_s(x \cdot t^{-1}) = s \cdot x \cdot t^{-1} = f^t(sx)$

$= (f^t)_s(x) \quad \forall_{x \in G}$

Aplicando el teorema 3.13 μ^t se puede expresar como μ multiplicada por una constante positiva $\Delta(t)$ $\ni$

$\mu^t(f) = \Delta(t)\mu(f)$ o bien

$\mu(f^t) = \Delta(t)\mu(f)$

$$\therefore \quad \int f(xt^{-1})\, d_\mu(x) = \Delta(t) \int f(x)\, d_\mu(x)$$

3.24 <u>DEF</u> La función $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ $\ni$ $\forall_{t \in G}$ $\Delta(t)$ es $\ni$ $\mu(f^t) = \Delta(t)\mu(f)$

se llama "función modular" del grupo G.

<u>NOTA</u> G se llama unimodular si $\Delta(t) \equiv 1$

3.25 LEMA Los grupos conmutativos, los grupos compactos y los grupos discretos son unimodulares.

PRUEBA

a) Si G es conmutativo

$$f_s(x) = f(s \cdot x) = f(x \cdot s) = f^{s^{-1}}(x)$$

entonces $\mu^t(f) = \mu(f^t) = \mu(f_{t^{-1}}) = \mu(f)$

$\therefore$ si $\mu^t(f) = \Delta(t)\mu(f) \Rightarrow \Delta(t) = 1$

$\therefore$ G es unimodular

b) Si G es compacto entonces $f(x) \equiv 1$ es integrable con respecto a μ y $\forall_{t \in G}\ f^t = f$

$\therefore$ $\mu(f) = \mu(f^t) = \Delta(t)\mu(f)$ y como $\mu(f) > 0$

entonces $\dfrac{\mu(f)}{\mu(f)} = 1 = \Delta(t)$ $\therefore$ G es unimodular

c) Si G es discreto sea $f > 0$ en $K(G)$ entonces sop $f = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es finito y

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \quad f(x_i) = a_i > 0$$

si $t \in G$ f^t tiene soporte $\{x_1 t, \dots, x_n t\}$

entonces $\mu(f^t) = \sum_{i=1}^{n} f^t(x_i t)\, \mu(x_i t)$

$$= a \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\mu(x_i) = \mu(f) > 0$$

por el corolario 3.21

$\therefore\ \mu(f^t) = \Delta(t)\,\mu(f) = \Delta(t)\,\mu(f^t)$ i.e.

$\forall_{t \in G}\ \Delta(t) = 1$ $\quad\therefore\ G$ es unimodular

Un importante teorema acerca de la función modular es el siguiente:

3.26 **LEMA** La función modular $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ es un homomorfismo de grupos de G en $\mathbb{R}^+$ con el producto y Δ es continua.

PRUEBA

Sea $f \neq 0$ $\quad f \in K_+(G) \Rightarrow \forall_{t \in G}\ f^t \in K_+(G)$

por 3.7 entonces $\mu(f)$ y $\mu(f^t)$ son positivos $\therefore$

$$\mu(f^t) = \Delta(t)\mu(f) \quad \text{si } t \in G$$

i.e. $\Delta(t) = \mu(f^t)/\mu(f) > 0 \quad \therefore \Delta : G \to \mathbb{R}^+$

Ahora bien si $s, t \in G$ entonces

$$\Delta(st)\mu(f) = \mu(f^{st}) = \mu((f^s)^t)$$
$$= \Delta(t)\mu(f^s) = \Delta(t)\,\Delta(s)\mu(f)$$

$$\therefore \quad \Delta(st) = \Delta(t)\cdot\Delta(s) \qquad \forall_{s,t \in G}$$

si $s = e$ entonces $\Delta(t) = \Delta(t)\cdot\Delta(e)$

i.e. $\Delta(e) = 1$

$\therefore \quad 1 = \Delta(e) = \Delta(s\cdot s^{-1}) = \Delta(s)\cdot\Delta(s^{-1})$

i.e. $(\Delta(s))^{-1} = \Delta(s^{-1})$

$\therefore$ Δ es un homomorfismo entre G y $\mathbb{R}^+$.

Veamos que Δ es continua. Sea $f \in K_+(G)$ $\rightarrow$ $\mu(f) > 0$ ent. $\Delta(t) = \mu(f^t)/\mu(f)$

por 3.9 $h_2 : G \to \mathcal{L}^1_E(\mu)$
$h_2(t) = f^t$ es continua en $e \in G$

Como $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ es el conjunto de funciones f $\ni$ $N_1(f) < \infty$ entonces μ es continua en $\mathcal{L}^1_E(\mu)$

$\therefore$ $\varphi : G \to \mathbb{R}^+$ $\varphi(t) = \mu(f^t)$ es continua en $e \in G$ $\therefore$ $\Delta(e)$ es continua en e

Sea $\varepsilon > 0$ y $s \in G$
como Δ es continua en $e \in G$ entonces $\exists$ + $|\Delta(z) - \Delta(e)| < \varepsilon / \Delta(s)$ si $z \in V$
$V \in N_e$

Por 1.23 $s \cdot V$ es una vecindad de s y si $t \in s \cdot V$ entonces $s^{-1} t \in V$

$\therefore$ $|\Delta(s^{-1}t) - \Delta(e)| < \varepsilon / \Delta(s)$

$\therefore$ $|\Delta(s) \cdot \Delta(s^{-1}t) - \Delta(e)\Delta(s)| < \varepsilon$

$\therefore$ $|\Delta(t) - \Delta(s)| < \varepsilon$ si $t \in s \cdot V$ $\therefore$
Δ es continua en $s \in G$. + .

3.27 **LEMA** Sea $f : G \to \mathbb{R}^+$ y $s \in G$
entonces $\int^* f(x \cdot s^{-1})\, d\mu(x) = \Delta(s) \int^* f(x)\, d\mu(x)$

PRUEBA

Sea $\alpha : G \to G$ $\quad \alpha(x) = x \cdot s^{-1}$
α es un homeomorfismo por 1.21 ii)
y α es μ-propia por 3.18 además
$\alpha(\mu) = \mu^s = \Delta(s)\mu \quad \therefore$

$$\int^* f(xs^{-1})\, d\mu(x) = \int^* f^s(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int^* f \circ \alpha\, d\mu = \int^* f\, d\alpha(\mu) = \int^* f(x)\, d\mu^s(x)$$

$$= \Delta(s) \int^* f(x)\, d\mu(x)$$

La justificación de estas igualdades es la misma que la de 3.18

3.28 **COROLARIO** Sea $A \subset G$ y $s \in G$
entonces $\mu^*(As) = \Delta(s)\, \mu^*(A)$

PRUEBA

Sea φ_A la función característica de A, aplicando 3.27 se obtiene lo pedido. $+$

3.29 COROLARIO Sea $f : G \to R^+$ $s \in G$ entonces $\int^* f(x \cdot s)\, \Delta(x^{-1})\, d\mu(x)$
$= \int^* f(x)\, \Delta(x^{-1})\, d\mu(x)$.

PRUEBA

Sea $g(x) = f(x)\, \Delta(x^{-1})$ entonces

$$f(xs)\, \Delta(x^{-1}) = f(xs)\, \Delta(x^{-1} s^{-1})\, \Delta(s)$$
$$= g(xs)\, \Delta(s)$$

$$\therefore \int^* f(x \cdot s)\, \Delta(x^{-1})\, d\mu(x) = \Delta(s) \int^* g(xs)\, d\mu(x)$$

$$= \Delta(s)\, \Delta(s^{-1}) \int^* g(x)\, d\mu(x) = \int^* f(x)\, \Delta(x^{-1})\, d\mu(x)$$

NOTA 3.29 demuestra que la medida $\Delta(x^{-1})\, d\mu(x)$ es invariante por la derecha en G.

3.30 COROLARIO Toda medida de Haar invariante por la izquierda es equivalente a toda medida invariante por la derecha.

PRUEBA Como Δ no se anula se tiene que las medidas $d\mu(x)$ y $\Delta(x^{-1})\, d\mu(x)$ son equivalentes.

Como toda medida invariante por la izquierda es equivalente a $d\mu(x)$ y toda medida invariante por la derecha es equivalente a $\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)$, se sigue la equivalencia entre las medidas invariantes por la izquierda y por la derecha.

Otros resultados interesantes acerca de las medidas de Haar y sus respectivos $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ pueden encontrarse en la [REF V] CAP VI PAGS 442-447.

— o —

CONCLUSIONES

En el trabajo que se presentó, se analizó la construcción de las medidas de Haar, haciendo hincapié en los aspectos teóricos de la misma, y sín tomar en cuenta sus aplicaciones o repercusiones, ya que lo que se hizo únicamente, pretendió ser un esbozo y no un estudio muy profundo de estas medidas, de hecho ni siquiera se incluyen ejemplos reales de dichas medidas, ya que considero que el desarrollo es muy teórico y basta (como es muy usual en Matemáticas) demostrar la existencia de dichas funciones medibles y no exhibirlas.

La persona que se interese por algunos ejemplos, puede encontrarlos en la [REF V] cap VI PAG 534.

El trabajar con las medidas como funcionales lineales, permite por una parte familiarizarse con un nuevo aspecto teórico; así como enunciar en cierta manera las propiedades comunes a todas las medidas, como son: medida exterior, espacios $\mathcal{L}^p$, etc.

Muchos de los aspectos que se presentaron en esta tesis deben ser complementados con ejemplos y otros teoremas que no se incluyen, por restricciones de tiempo y espacio, pero se aconseja al lector ver [REF V] CAPS III, IV y V básicamente, ya que incluyen conceptos mas extensos y explicaciones mas detalladas.

A pesar de no incluir aplicaciones sobre las medidas de Haar, no negamos la utilidad práctica de las mismas en probabilidad, Estadística y otras ramas, pero como ya se dijo, en este trabajo solo se presentó el desarrollo teórico, por lo que debe complementarse con aplicaciones prácticas.

Si se quiere ver un análisis de las medidas de Haar, como funciones conjuntistas se recomienda ver [REF VI] CAP .

Como un ejemplo muy simple, pero ilustrativo, de medidas de Haar, considérese el área de conjuntos en $\mathbb{R}^2$, tomando a $\mathbb{R}^2$ como grupo con la suma de vectores usual, entonces la medida que indica el área de esos conjuntos no se altera si el conjunto es trasladado sumandole un vector $\underline{a}$, i.e. que el aplicarle una translación no afecta el resultado final de la medida. $\therefore$ la medida resulta ser de Haar, (De hecho la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{R}$ i.e. aquella en la que $\mu([a,b]) = b-a$ es invariante bajo translaciones (sumas en $\mathbb{R}$) pues

$$\mu([a,b]) = b-a = (b+c)-(a+c) = \mu([a+c,b+c]) = \mu(\{[a,b]+c\}) \quad \text{donde} \quad A+c = \{a+c \mid a \in A\})$$

$\therefore$ μ es de Haar).

El hecho de que la medida de Lebesgue sea un caso especial de una medida de Haar, indica la importancia de tales funciones, pues como se sabe la medida de Lebesgue es quizás, la mas importante de las medidas usuales, por la gran cantidad de aplicaciones en cualquier rama de las Matemáticas. Y es gracias al Teorema de Haar que podemos concluir que cualquier otra medida de Haar en $(\mathbb{R}, +)$ como grupo no es más que la de Lebesgue multiplicada por una constante, con lo que se tienen clasificadas, así, todas las medidas invariantes, al menos con la operación suma.

Otros resultados importantes se pueden obtener gracias a la teoría que se presenta en este trabajo, debida al matemático alemán A. Haar y a estudios posteriores a los suyos, realizados por otras personas que se dedican la Teoría de la Medida.

BIBLIOGRAFIA

I) ASH ROBERT B. — REAL ANALYSIS AND PROBABILITY (A SERIES OF MONOGRAPHS AND TEXTBOOKS) ED. ACADEMIC PRESS — 1972

II) BERBERIAN STERLING K. - LECTURES IN FUNCTIONAL ANALYSIS AND OPERATOR THEORY (GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS 15) ED. SPRINGER-VERLAG - 1974 [REF - III]

III DINCULEANU N. - INTEGRATION ON LOCALLY COMPACT SPACES. ED. NOORDHOFF INTERNATIONAL PUBLISHING 1974 [REF V]

IV DUGUNDJI JAMES - TOPOLOGY ED. ALLYN AND BACON INC. JULIO 1976 [REF II]

V HALMOS PAUL R. - MEASURE THEORY (GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS 18) ED. SPRINGER-VERLAG - 1974 [REF VI]

VI HERSTEIN I.N. - ALGEBRA MODERNA
ED. TRILLAS - 1973 [REF I]

VII RUDIN WALTER - ANALISIS FUNCIONAL
ED. REVERTE S.A. - 1979

VIII RUDIN WALTER - REAL AND COMPLEX ANALYSIS - (2ª EDICION)
ED. TATA Mc GRAW-HILL - 1977
[REF IV]