Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Un Modelo de Poblaciones Cuasi-Estables Alternativo

TESIS

Que para sustentar examen Profesional de Actuario

PRESENTA

Alfredo Cuellar Montoya

MEXICO, D. F.

1982

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO DE POBLACIONES CUASI-ESTABLES ALTERNATIVO.

TESIS

QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL DE

ACTUARIO

PRESENTA

ALFREDO CUELLAR MONTOYA

MEXICO, D. F,

1982

Indice

Introducción.

El presente trabajo está basado fundamentalmente en la teoría de las poblaciones estables desarrollada por Alfred Lotka (1939) y en la teoría de las poblaciones cuasi-estables elaborada por Ansley Coale (1956, 1963, 1971, 1975).

En la teoría de las poblaciones estables se demuestra que si una población cerrada a la migración mantiene sus patrones de fecundidad y mortalidad invariantes en el tiempo, entonces su estructura por edad, cualquiera que ésta sea, converge a una estructura única e invariante en el tiempo (la estructura por edad estable).

En la teoría de las poblaciones cuasi-estables, se cambia el supuesto de mortalidad invariante por el de mortalidad en descehso, con lo que la población comienza a sufrir un proceso de desestabilización, y por lo tanto produce ciertos efectos sobre la estructura por edad y las demás variables demográficas, como la tasa bruta de mortalidad, la tasa bruta de natalidad, la tasa de crecimiento poblacional y la esperahza de vida. La metodología utilizada para el análisis y la cuantificación de los cambios sufridos en la población, supone inicialmente que las relaciones matemáticas de la teoría de las poblaciones estables, se mantienen en las poblaciones cuasi-estables, y posteriormente se requieren ciertos ajustes necesarios para corregir las estimaciones demográficas, debido a que la población se desestabilizó.

De la forma como es concebida una población cuasi-estable, la metodología queda en función entonces del modelo elegido para representar el descenso de la mortalidad y del tiempo de desestabilización.

La teoría de las poblaciones cuasi-estables surgió a partir de las observaciones hechas por los demógrafos en poblaciones reales, en las últimas décadas. En dichas observaciones se encontró que varias poblaciones mantuvieron regimenes de fecundidad y mortalidad, que en términos generales, podían ser considerados como invariantes con lo cual su estructura por edad se asemejaba bastante a una estructura por edad estable. Posteriormente estas poblaciones comenzaron a experimentar un descenso de la mortalidad, producto de mejores condiciones de vida y la implementación de adelantos en la medicina, sin que modificaran sus niveles de fecundidad. Este proceso, que en términos demográficos se conoce como la segunda etapa de la transición demográfica, es el que han experimentado recientemente la mayor parte de las poblaciones de países de Africa, América Latina y Asia, y en el pasado los países desarrollados.

Un problema que comparten estos países es el relacionado con la recolección de información demográfica, tanto en el aspecto de cobertura, que resulta incompleta, como en el de la mala declaración de la información proporcionada por la población, por lo cual las estadísticas demográficas quedan incompletas y/o son poco confiables, y que en última instancia imposibilitan al demógrafo efectuar -

las estimaciones de las diversas variables demográficas o que éstas estén sobre o subregistradas. Esto lleva a los demógrafos a tener que diseñar métodos que le permitan corregir esta deficiencia.

Dentro de la teoría de las poblaciones cuasi-estables se han desarrollado diversos métodos, dependiendo de las variables demográficas que se quieren estimar, pero siempre contando con la información de ciertas estadísticas que resultan necesarias para conseguir los objetivos que se persiguen. El modelo cuasi-estable que se desarrolla en este trabajo, también queda dentro de este marco, sin embargo hace uso de la mínima información posible, lo cual representa una ventaja.

Si bien aquí no se explica el modelo elaborado por Coale, conviene señalar que mientras en el de él se considera un descenso en la mortalidad diferencial por edad, patrón exhibido por las tablas modelo "Oeste" de Coale y Demeny (1966) para los diferentes niveles; en este trabajo se considera un descenso porcentual igual para todo el rango de edades.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el primero se dan definiciones de términos demográficos y se presentan las relaciones matemáticas que se obtienen a partir de éstas; asimismo se expone la tabla de mortalidad y las relaciones matemáticas de la teoría de las poblaciones estables. En el segundo se desarrolla el modelo y en el tercero se hace una aplicación de éste para la población femenina de México (1970). Finalmente, en el cuarto se presentan las conclusiones de este trabajo.

1.1) Definiciones y relaciones matemáticas en contínuo.

En esta primera parte se definirán algunas funciones matemáticas empleadas en el estudio de los fenómenos demográficos y se establecerán las relaciones que guardan estas funciones entre sí. El desarrollo se hará suponiendo que las funciones biométricas son contínuas con respecto a la edad, es decir, al hablar de la edad de las personas se hará referencia a la edad exacta y no como generalmente sucede en la práctica, a la edad cumplida. Aún y cuando el caso contínuo es teórico, su paso al discreto (grupos de edades cumplidas) no ofrece mayor dificultad matemática. En base a esto, y sobre todo por su mayor simplicidad para establecer relaciones matemáticas, es porque se eligió trabajar con el caso contínuo.

Todas las definiciones y relaciones que se presentarán a continuación son válidas únicamente para el caso de poblaciones cerradas.(1)

Sea $P(t)$ y $P(t + h)$ la población total al tiempo t y $t + h$ respectivamente, entonces el incremento poblacional entre t y $t + h$ está dado por:

---

(1) Una población es cerrada cuando no hay inmigración ni emigración.

$$P(t+h) - P(t) , \qquad (1.1)$$

y el incremento poblacional medio anual por:

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} . \qquad (1.2)$$

Entre el instante t y el t + h, un individuo vive h instantes y la población total vive $\int_t^{t+h} P(z)dz$ instantes; entonces definimos el número de años-persona vividos por la población entre el tiempo t y el t + h (medido en años) como:

$$\int_t^{t+h} P(z)dz . \qquad (1.3)$$

Una tasa en demografía se define como el cociente que resulta de dividir el número de eventos ocurridos en un período de tiempo entre el número de años-persona vividos por la población durante el mismo período de tiempo, todo ello ubicado dentro del mismo espacio geográfico. En base a esta definición, la tasa de crecimiento (2) demográfico entre el tiempo t y el t + h es:

$$r(t,t+h) = \frac{P(t+h) - P(t)}{\int_t^{t+h} P(z)dz} , \qquad (1.4)$$

---

(2) Se dice incremento aunque éste puede ser menor que cero, es decir, decremento.

y por el Teorema del Valor Medio para las integrales,

$$r(t,t+h) = \frac{P(t+h) - P(t)}{h \cdot P(t+\xi)} , \qquad (1.5)$$

donde ξ es el valor medio, con $0 < \xi < h$.

A partir de la relación anterior, se puede observar que esta tasa representa un promedio anual per cápita de incremento poblacional.

La tasa de crecimiento al instante t está dada por:

$$r(t) = \lim_{h \to 0} r(t,t+h) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h \cdot p(t+\xi)}$$

$$= \frac{1}{P(t)} \cdot \frac{d}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} \ln P(t) ,$$

lo cual representa una ecuación diferencial de primer orden. Resolviendo esta ecuación diferencial y bajo el supuesto de que $r(z) = r$ para $t<z<t+h$, se tiene que:

$$d \ln P(t) = r(t)dt,$$

integrando ambos lados de t a t+h,

$$\int_t^{t+h} d \ln P(t) = \int_t^{t+h} r(z)dz \quad ;$$

pero por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y el supuesto introducido,

$$\ln \frac{P(t+h)}{P(t)} = rh$$

y, aplicando la función inversa de la función logarítmo natural y multiplicando ambos lados por P (t), se llega a:

$$P(t+h) = P(t) \exp (rh) \quad , \qquad (1.6)$$

es decir, la población crece exponencialmente a una tasa r. Al crecimiento expresado por esta igualdad también se le conoce como crecimiento geométrico.

Sea P(x,t) el número total de personas de edad exacta x al tiempo t, entonces,

$$P(t) = \int_0^\infty P(x,t)dx \quad , \qquad (1.7)$$

y $${}_nP_x^t = \int_x^{x+n} P(z,t)dz \quad , \qquad (1.8)$$

donde ${}_nP_x^t$ representa al número total de personas entre las edades exactas x y x+n al tiempo t.

Se define el tanto por uno de la población de edad exacta x al tiempo t con respecto a la población total - como:

$$c(x,t) = \frac{P(x,t)}{P(t)} , \qquad (1.9)$$

donde se puede observar que esto representa lo que en demografía se conoce como la estructura por edad. Multiplicando ambos lados de (1.7) por el inverso de P(t) y - empleando (1.9), se obtiene que:

$$1 = \int_0^\infty \frac{P(x,t)}{P(t)} \, dx = \int_0^\infty c(x,t) \, dx . \qquad (1.10)$$

El porcentaje de población entre las edades exactas xyx+n, al tiempo t está dado por:

$${}_nC_x^t = \frac{{}_nP_x^t}{P(t)} ; \qquad (1.11)$$

substituyendo (1.8) en (1.11),

$${}_nC_x^t = \frac{{}_nP_x^t}{P(t)} = \frac{1}{P(t)} \cdot \int_x^{x+n} P(z,t)dz, \qquad (1.12)$$

y empleando (1.9), se obtiene que:

$${}_nC_x^t = \int_x^{x+n} c(z,t)dz . \qquad (1.13)$$

Se denota mediante $D(t, t+h)$ el número total de defunciones ocurridas en la población durante el período de tiempo t a $t+h$.

En demografía se habla de tasa bruta, cuando se hace referencia a los eventos ocurridos en toda la población, es decir, cuando no se toma en cuenta la edad. De esta definición la tasa bruta de mortalidad entre el tiempo t y el $t+h$, está dada por:

$$d(t, t+h) = \frac{D(t,t+h)}{\int_t^{t+h} P(z)dz}, \qquad (1.14)$$

y por el Teorema del Valor Medio para las integrales,

$$d(t, t+h) = \frac{D(t, t+h)}{h \cdot P(t+\xi)}, \qquad (1.15)$$

donde $o<\xi<h$. Como se puede apreciar, la relación anterior representa un promedio anual per cápida de defunciones.

A partir de (1.15) se define la tasa bruta instantánea de mortalidad como:

$$d(t) = \lim_{h\to 0} d(t,t+h) = \lim_{h\to 0} \frac{D(t,t+h)}{h\cdot P(t+\xi)} = \frac{D(t)}{P(t)}, \qquad (1.16)$$

donde $\dot{D}$ (t) denota el promedio anual o densidad anual de defunciones ocurridas al tiempo t.

Sea D (x,t) el promedio anual de defunciones ocurridas a la edad exacta x al tiempo t, entonces

$$D(t) = \int_{0}^{\infty} D(x,t)dx \qquad (1.17)$$

$$_{n}D_{x}^{t} = \int_{x}^{x+n} D(z,t)dz\ , \qquad (1.18)$$

donde $_{n}D_{x}^{t}$ representa el promedio anual de defunciones ocurridas entre las edades exactas x y x + n, al tiempo t. Substituyendo (1.17) en (1.16), la tasa bruta instántanea de mortalidad se puede expresar como:

$$d(x) = \frac{\int_{0}^{\infty} D(x,t)dx}{P(t)}\ . \qquad (1.19)$$

En demografía, se habla de tasa específica cuando tanto los eventos ocurridos, que aparecen en el numerador, como los años-persona vividos por la población, que aparecen en el denominador, provienen de un mismo subconjunto específico de la población; por lo general, dicho subconjunto se identifica con grupos de edad.

Sea $_{n}M_{x}^{t}$ la tasa específica de mortalidad para el grupo entre las edades exactas x y x+n, al tiempo t; entonces por definición, se obtiene esta tasa al dividir

(1.18) entre (1.8), es decir,

$$ {}_nM_x^t = \frac{\int_x^{x+n} D(z,t)dz}{\int_x^{x+n} P(z,t)dz} = \frac{{}_nD_x^t}{{}_nP_x^t} \,, \qquad (1.20)$$

A partir de (1.20) se define la fuerza instantánea de mortalidad a la edad exacta x, al tiempo t como:

$$ \mu(x,t) = \lim_{n\to 0} {}_nM_x^t = \lim_{n\to 0} \frac{\int_x^{x+n} D(z,t)dz}{\int_x^{x+n} P(z,t)dz} = \frac{D(x,t)}{P(x,t)} \,, \qquad (1.21)$$

y multiplicando ambos lados por P(x,t), resulta que:

$$ D(x,t) = \mu(x,t)\; P(x,t) \;. \qquad (1.22)$$

Substituyendo (1.22) en (1.19)

$$ d(t) = \frac{\int_0^{\infty} D(x,t)dx}{P(t)} = \int_0^{\infty} \mu(x,t) \frac{P(x,t)}{P(t)} dx, $$

y tomando en cuenta (1.9), se tiene que la tasa bruta instantánea de mortalidad se puede expresar como:

$$ d(t) = \int_0^{\infty} \mu(x,t)\; c(x,t)dx, \qquad (1.23)$$

es decir, es la media ponderada de la fuerza instantánea de mortalidad por el tanto por uno de la población.

Sea $B(t,t+h)$ el número total de nacimientos ocurridos entre el tiempo t y el t+h, entonces la tasa bruta de natalidad entre el tiempo t y el t+h, está dada por:

$$b(t,t+h) = \frac{B(t,t+h)}{\int_t^{t+h} P(z)dz} = \frac{B(t,t+h)}{h \cdot P(t+\xi)}, \quad \text{con } 0<\xi<h, \qquad (1.24)$$

habiendo aplicado el Teorema del Valor Medio para las integrales.

A partir de la relación anterior, se define la tasa bruta instantánea de natalidad como:

$$b(t) = \lim_{h \to 0} b(t,t+h) = \lim_{h \to 0} \frac{B(t,t+h)}{h \cdot P(t+\xi)} = \frac{B(t)}{P(t)}, \qquad (1.25)$$

donde $B(t)$ denota el promedio anual de nacimientos ocurridos al tiempo t.

Sea $B(x,t)$ el promedio anual de nacimientos provenientes de progenitores de edad exacta x al tiempo t, entonces el promedio anual de nacimientos al tiempo t es igual a:

$$B(t) = \int_\alpha^\beta B(x,t)dx, \qquad (1.26)$$

donde α y β corresponden respectivamente a la mínima y máxima edad posible para la procreación dentro de una población (cuando se trata de una población femenina, se tiene aproximadamente que α=15 y β=50). Asimismo, substituyendo (1.26) en (1.25) la tasa bruta instantánea de natalidad se puede expresar como:

$$b(t) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} B(x,t)dx}{P(t)} \qquad (1.27)$$

$$_{n}B_{x}^{t} = \int_{x}^{x+n} B(z,t)dz, \qquad (1.28)$$

representa el promedio anual de nacimientos provenientes de progenitores entre las edades exactas x y x+n, al tiempo t.

Sea $_{n}f_{x}^{t}$ la tasa específica de fecundidad para el grupo de progenitores entre las edades exactas x y x+n, al tiempo t; dicha tasa se obtiene al dividir (1.28) entre (1.8) es decir,

$$_{n}f_{x}^{t} = \frac{\int_{x}^{x+n} B(z,t)dz}{\int_{x}^{x+n} P(z,t)dz} = \frac{_{n}B_{x}^{t}}{_{n}P_{x}^{t}}, \qquad (1.29)$$

y se define la tasa específica de fecundidad a la edad exacta x al tiempo t como:

$$\psi(x,t) = \lim_{n\to 0} {}_n f_x^t = \lim_{n\to 0} \frac{\int_x^{x+n} B(z,t)dz}{\int_x^{x+n} P(z,t)dz} = \frac{B(x,t)}{P(x,t)} \quad ; \qquad (1.30)$$

multiplicando ambos lados por $P(x,t)$, se obtiene que:

$$B(x,t) = \psi(x,t)\ P(x,t); \qquad (1.31)$$

substituyendo (1.31) en (1.27),

$$b(t) = \frac{\int_\alpha^\beta B(x,t)dx}{P(t)} = \int_\alpha^\beta \psi(x,t).\ \frac{P(x,t)}{P(t)}\ dx\ ,$$

y tomando en consideración (1.9), se llega a que la tasa bruta instantánea de natalidad está dada por:

$$b(t) = \int_\alpha^\beta \psi(x,t)\ c(x,t)\ dx, \qquad (1.32)$$

que como se puede ver es la media ponderada de las tasas específicas de fecundidad por el tanto por uno de la población.

Consideremos la población de edad exacta x al tiempo t, es decir, $P(x,t)$. Esta población proviene de los nacimientos ocurridos hace t-x años, es decir, $B(t-x)$. Sea $s(x,t)$ la probabilidad que tiene un recién nacido al tiempo t - x - -

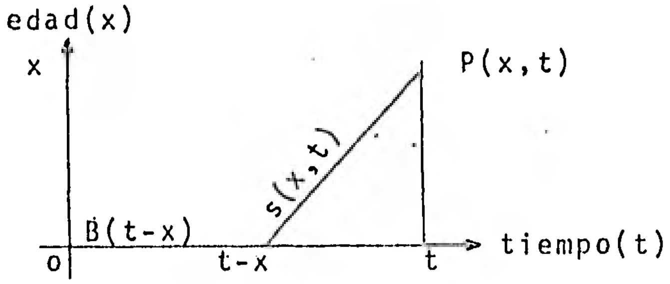
de llegar con vida a la edad exacta x al tiempo t; entonces de acuerdo a la definición clásica de probabilidad, se tiene que:

$$s(x,t) = \frac{P(x,t)}{B(t-x)} , \qquad (1.33)$$

multiplicando ambos lados por $B(t-x)$,

$$P(x,t) = s(x,t)\ B(t-x) , \qquad (1.34)$$

ecuación que mediante un Diagrama de Lexis, puede visualizarse en la gráfica No. 1



gráfica No. 1

De acuerdo a (1.21) la fuerza instantánea de mortalidad a la edad exacta x al tiempo t es:

$$\mu(x,t) = \frac{D(x,t)}{P(x,t)}$$

$D(x,t)\,dx$- promedio anual de defunciones ocurridas - entre las edades exactas x y $x+dx$ durante el período de tiempo t a $t+dx$-, es igual a la población de edad exacta x al tiempo t menos la población de edad exacta $x+dx$ al tiempo $t+dx$:

$$D(x,t)dx = P(x,t) - P(x+dx,\ t+dx) \qquad (1.35)$$

De acuerdo a (1.34), se tiene que:

$$P(x,t) = s(x,t)\ B(t,x)\ ,$$

así como también:

$$P(x+dx,\ t+dx) = s(x+dx,\ t+dx)\ B(t-x) \qquad (1.36)$$

Substituyendo (1.34) y (1.36) en (1.35),

$$D(x,t)dx = s(x,t)\ B(t-x)\ -\ s(x+dx,\ t+dx)\ B(t-x). \qquad (1.37)$$

La tasa específica de mortalidad entre las edades exactas x y x+dx, durante el período de tiempo t a t+dx, está dada por:

$$_{dx}M_x^{t,t+dx} = \frac{D(x,t)dx}{P(x,t)dx}\ ; \qquad (1.38)$$

Substituyendo (1.34) y (1.37) en la relación anterior,

$$_{dx}M_x^{t,d+dx} = \frac{s(x,t)\ B(t-x)\ -\ s(x+dx,\ t+dx)\ B(t-x)}{s(x,t)\ B(t-x)dx}$$

$$= \frac{s(x,t)\ -\ s(x+dx,\ t+dx)}{s(x,t)dx}\ , \qquad (1.39)$$

y de la definición de fuerza instantánea de mortalidad a la edad exacta x al tiempo t, se llega a que:

$$\mu\ (x,t) = \lim_{dx\to o}\ {_{dx}M_x^{t,t+dx}} = \lim_{dx\to o} \frac{s(x,t)\ -\ s(x+dx,\ t+dx)}{s(x,t)dx}$$

$$\mu(x,t) = \frac{1}{s(x,t)} \lim_{dx\to o} - \left\{\frac{s(x+dx,t+dx - s(x,t)}{dx}\right\} = \frac{1}{s(x,t)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\ s(x,t)$$

$$\mu(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} \ln s(x,t) \; . \tag{1.40}$$

A partir de la ecuación anterior se tiene que:

$$\mu(z,t-x+z) = - \frac{\partial}{\partial z} \ln s(z,t-x+z), \tag{1.41}$$

Se puede observar que esta ecuación representa una ecuación diferencial parcial. Resolviendo esta ecuación diferencial, resulta que:

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial z} \ln s(z,t-x+z)dz = - \int_0^x \mu(z,t-x+z)dz,$$

habiendo multiplicado previamente ambos lados por menos uno e integrando de cero a x; pero por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que:

$$\ln \frac{s(x,t)}{s(o,t-x)} = \int_0^x \mu \; (z,t-x+z)dz,$$

aplicando la función inversa de la función logaritmo natural y multiplicando ambos lados por s(0, t-x),

$$s(x,t) = s(0,t-x) \exp \{-\int_0^x \mu(z,t-x+z)dz\} \; . \tag{1.42}$$

De acuerdo a (1.34), se tiene que:

$$P(x,t) = s(x,t) \; B(t-x) \; ,$$

evaluando en x=o,

$$P(0,t) = s(0,t)\ B(t),$$

pero la población de edad exacta cero a cualquier tiempo, en particular el tiempo t o el t-x, no son mas que los nacimientos ocurridos a tal tiempo; de donde:

$$P(0,t) = B(t), \tag{1.43}$$

y por lo tanto, $s(o,t)=1$ o bien $s(o,t-x)=1$. Si se toma en cuenta este resultado, se concluye a partir de (1.42) que:

$$s(x,t) = \exp\left\{-\int_0^x \mu(z,t-x+z)dz\right\} . \tag{1.44}$$

Considérese la ecuación (1.43), es decir,

$$P(o,t) = B(t) ,$$

multiplicando ambos lados por el inverso de P(t),

$$\frac{P(0,t)}{P(t)} = \frac{B(t)}{P(t)} ; \tag{1.45}$$

y de acuerdo a la definición de tasa bruta instantánea de natalidad (véase (1.25)) y de el tanto por uno de la población de edad exacta cero al tiempo t con respecto a la - población total (véase (1.9)), se obtiene que:

$$b(t) = \frac{B(t)}{P(t)} = \frac{P(0,t)}{P(t)} = c(0,t) . \tag{1.46}$$

A lo largo de todo lo desarrollado en este inciso se ha omitido hacer referencia al sexo de la población. Ello obedece a que todas las relaciones matemáticas obtenidas conservan su validez, ya sea que se considere población de un solo sexo o de ambos; sin embargo, al estudiar el fenómeno fecundidad y querer cuantificar diversas variables asociadas a este fenómeno en la realidad, aparecen una serie de restricciones, principalmente de origen informativo, que obligan a efectuar el estudio tomando en cuenta solamente población femenina (progenitores de sexo femenino). De aquí que, en demografía, al hablar de fecundidad quede sobreentendido que se trata de fecundidad materna, a menos que se especifique lo contrario. Debido a que lo siguiente está relacionado con fecundidad, se tomara en cuenta la limitación descrita en este párrafo.

En base a (1.29) y a la observación anterior, se define la tasa específica de fecundidad para el grupo de progenitores entre las edades exactas x y x+n, al tiempo t como:

$$ {}_{n}f_{x}^{t} = \frac{\int_{x}^{x+n} B(z,t)\,dz}{\int_{x}^{x+n} P_{f}(z,t)\,dz} = \frac{{}_{n}B_{x}^{t}}{{}_{n}P_{f,x}^{t}} , \qquad (1.47) $$

donde $P_f(z,t)$ es la población femenima de edad z al tiempo t y ${}_nP^t_{f,x}$ es la población femenina entre las edades exactas x y x+n, al tiempo t. Se define la tasa específica de fecundidad a la edad exacta x al tiempo t, como:

$$\psi(x,t) = \lim_{n\to 0} {}_nf^t_x = \lim_{n\to 0} \frac{\int_x^{x+n} B(z,t)dz}{\int_x^{x+n} P_f(z,t)dz} = \frac{B(x,t)}{P_f(x,t)} \ . \qquad (1.48)$$

En demografía se define la descendencia final bruta (D.F.B.) o tasa global de fecundidad (T.G.F.) como:

$$D.F.B. = \int_\alpha^\beta \psi(x,t-\alpha+x)dx \ , \qquad (1.49)$$

que indica el número de hijos vivos que tiene una mujer a lo largo de su período reproductivo, en ausencia de mortalidad, es decir, suponiendo que la sobrevivencia de una mujer de edad exacta α al tiempo t hasta la edad exacta β al tiempo $t-\alpha+\beta$ es un suceso seguro. El supuesto de ausencia de mortalidad entre las edades exactas α y β, se debe a que en una primera instancia se busca estudiar al fenómeno fecundidad puro (3), es decir, evitando que su comportamiento se vea influenciado por los efectos que otros fenómenos, como la mortalidad, la nupcialidad y la migración puedan producir en él. Sin embargo, debido a que en la realidad esto no sucede, puesto que los fenómenos demográficos se interrelacionan, resulta necesario llevar a cabo estudios que combinen dos o más fenómenos a la vez.

---

(3) y en general cualquier fenómeno demográfico.

En demografía se define la descendencia final neta - (D.F.N.) como:

$$D.F.N. = \int_{\alpha}^{\beta} s_f(x,t-\alpha+x)\ \psi(x,t-\alpha+x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x,t-\alpha+x)dx, \qquad (1.50)$$

donde $\varphi(x,t-\alpha+x) = s_f(x,t-\alpha+x)\ \psi(x,t-\alpha+x)$ se le conoce como la función de la fecundidad neta; la descendencia final neta es una medida que relaciona la fecundidad con la mortalidad materna y denota el número de hijos vivos que tiene una mujer a lo largo de su período reproductivo. La descendencia final neta se diferencía de la descendencia final bruta por el hecho de que la primera toma en cuenta el caso de que algunas mujeres morirán antes de transcurridos sus años de reproducción, mientras que la segunda no considera esta posibilidad.

Al definir la tasa específica de fecundidad para el grupo de edades x ax+n ($_nf_x$) o la tasa específica de fecundidad a la edad exacta x ($\psi(x)$), se ha relacionado el promedio anual de nacimientos (tanto hombres como mujeres) con el número de mujeres (véase (1.47) y (1.48)). En demografía se acostumbra - trabajar también con tasas de fecundidad que relacionan exclusivamente nacimientos femenimos con población femenina. La - finalidad de esto es conocer el nivel de reemplazo en una población; es decir, conocer el número de hijas que procrea una generación de mujeres para que se dé el reemplazo en la pobla ción. Dos medidas asociadas con lo anterior son la tasa bruta de reproducción, (T.B.R.) y la tasa neta de reproducción (T.N.R.). La primera se define como:

$$T.B.R. = R^1 = \int_\alpha^\beta \frac{B_f(x,t+x-\alpha)}{P_f(x,t+x-\alpha)}\, dx = \int_\alpha^\beta \psi_f(x,t+x-\alpha)dx, \qquad (1.51)$$

donde $B_f\ (x,t+x-\alpha)$ denota el promedio anual de nacimientos femeninos provenientes de mujeres de edad exacta x al tiempo $t+x-\alpha$. La tasa bruta de reproducción indica el número de hijas vivas que tiene una mujer a lo largo de su período reproductivo, en ausencia de mortalidad materna. Por su parte, la tasa neta de reproducción se define como:

$$T.N.R. = R^\circ = \int_\alpha^\beta sf(x,t+x-\alpha)\ \psi_f(x,t+x-\alpha) = \int_\alpha^\beta \phi_f(x,t+x-\alpha)\ dx, \qquad (1.52)$$

donde $\phi_f(x,t+x-\alpha)=s_f(x,t+x-\alpha)\ \psi_f(x,t+x-\alpha)$ se le conoce como la función de fecundidad femenina neta. La tasa neta de reproducción indica el número de hijas femeninas que tiene una mujer a lo largo de su período reproductivo, teniendo en cuenta el riesgo de muerte que tiene ésta desde su nacimiento.

Considérese la población al tiempo t+n (P(t+n)), que es igual a la población al tiempo t (P(t)) más los nacimientos ocurridos durante el período de tiempo t a t+n (B(t,t+n)), menos las defunciones ocurridas durante el mismo período (D(t,t+n)), es decir,

$$P(t+n) = P(t) + B(t,t+n) - D(t,t+n).(4) \qquad (1.52)$$

Restando de ambos lados P(t),

$$P(t+n) - P(t) = B(t,t+n) - D(t,\ t+n) \qquad (1.53).$$

y dividiendo entre los años-persona vividos por la población entre el tiempo t y t+n, se tiene que:

$$\frac{P(t+n)-P(t)}{\int_t^{t+n} P(z)dz} = \frac{B(t,t+n)}{\int_t^{t+n} P(z)dz} - \frac{D(t,t+n)}{\int_t^{t+n} P(z)dz},$$

y por el Teorema del Valor Medio para las integrales,

$$\frac{P(t+n)-P(t)}{n\cdot P(t+\xi)} = \frac{B(t,t+n)}{n\cdot P(t+\xi)} - \frac{D(t,t+n)}{n\cdot P(t+\xi)}, \qquad (1.54)$$

donde ξ es el valor medio y $0<\xi<n$.

El lado izquierdo de la ecuación anterior representa la tasa de crecimiento poblacional entre el tiempo t y t+n, mientras que el lado derecho es igual a la diferencia entre la tasa bruta de natalidad y la tasa bruta de mortalidad (véase - págs 13,16 y 19), es decir,

$$r(t,t+n) = b(t,t+n)-d(t,t+n)$$

---

(4) Aquí aparece el supuesto de cerradura a la migración.

Haciendo tender n a cero, se concluye que:

$$r(t) = b(t) - d(t) \quad . \qquad (1.55)$$

1.2) La tabla de mortalidad.

La tabla de mortalidad es: "un esquema que permite - expresar las hechos relativas a la mortalidad observada en términos probabilísticos". Es uno de los modelos poblacio nales más simples: "una cohorte nacida en el mismo momento, cerrada a la migración y seguida a través de las edades su cesivas hasta" su extinción total (véase Keyfitz (1977).

Sea $l(x)$ y $l(x+n)$ el número total de sobrevivientes a la edad exacta x y x+n respectivamente, de un efectivo ini cial o rádix $l(o)$.

En ausencia de migración, el número de defunciones - ocurridas entre las edades x y x+n está dado por:

$$_nd_x = l(x) - l(x+n). \qquad (1.56)$$

Se define el promedio anual de defunciones a la edad exacta x como:

$$d(x) = \lim_{n\to 0} \frac{_nd_x}{n} = \lim_{n\to 0} \frac{l(x)-l(x+n)}{n} = -\frac{d}{dx}\, l(x) \ ; \qquad (1.57)$$

integrando en la ecuación anterior de x a x+n, se tiene que:

$$\int_x^{x+n} d(z)dz = -\int_x^{x+n} \frac{d}{dz}\, l(z)dz = -l(z) \Big|_x^{x+n} = l(x)-l(x+n),$$

y comparando con (1.56), se obtiene que:

$$_nd_x = \int_x^{x+n} d(z)dz \quad . \qquad (1.58)$$

De acuerdo con la definición clásica de probabilidad.

$$_np_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} \quad , \qquad (1.59)$$

representa la probabilidad que tiene un individuo de sobrevivir desde la edad exacta x hasta la edad exacta x+n; mientras que el cociente

$$_nq_x = \frac{_nd_x}{l(x)} \qquad (1.60)$$

denota la probabilidad que tiene un sobreviviente a la edad exacta x de fallecer antes de la edad exacta x+n.

Substituyendo (1.56) en la ecuación anterior, se tiene que:

$$_nq_x = \frac{l(x) - l(x+n)}{l(x)} = 1 - \frac{l(x+n)}{l(x)} \quad ,$$

pero por (1.59),

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x $$

y sumando de ambos lados ${}_np_x$, se concluye que:

$$ {}_nq_x + {}_np_x = 1 \quad . \tag{1.61} $$

Se define el número de años-persona vividos entre las edades exactas x y x+n por los individuos del rádix inicial l(o) como:

$$ {}_nL_x = \int_x^{x+n} l(z)dz. \tag{1.62} $$

De acuerdo a la definición de tasa (véase pág.12 , - (1.56) y (1.62)), se define la tasa de mortalidad entre las edades exactas x y x+n como:

$$ {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} = \frac{{}_nd_x}{\int_x^{x+n} l(z)dz} \quad ; \tag{1.63} $$

y aplicando el Teorema del Valor Medio para las integrales,

$$ {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{n\cdot l(x+\xi)} , \tag{1.64} $$

donde ξ es el valor medio, con $0<\xi<n$.

Sea $\mu(x)$ la tasa instantánea o fuerza instantánea de mortalidad a la edad exacta x, la cual está dada por:

$$\mu(x) = \lim_{n\to 0} {}_n m_x = \lim_{n\to 0} \frac{{}_n d_x}{n \cdot l(x+\xi)}$$

$$= \frac{1}{l(x)} \cdot \{- \frac{d}{dx} l(x)\} = - \frac{d}{dx} \ln l(x) \; ; \qquad (1.65)$$

y lo cual representa una ecuación diferencial de primer orden; entonces integrando ambos lados de x a x+n, y de acuerdo al Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que:

$$\int_x^{x+n} \mu(z)dz = - \int_x^{x+n} \frac{d}{dz} \ln l(z)dz = -\ln \frac{l(x+n)}{l(x)} .$$

Multiplicando ambos lados por menos uno y aplicando la función inversa de la función logaritmo natural,

$$\frac{l(x+n)}{l(x)} = \exp \{-\int_x^{x+n} \mu(z)dz\}$$

y multiplicando de ambos lados por $l(x)$, resulta que:

$$l(x+n) = l(x) \exp \{-\int_x^{x+n} \mu(z)dz\} , \qquad (1.66)$$

o bien, según (1.59):

$$ {}_{n}p_{x} = \exp\{-\int_{x}^{x+n} \mu(z)dz\} \quad . \tag{1.67}$$

Sea ${}_{n}A_{x}$ los años-persona vividos por las defunciones ocurridas entre las edades exactas x y x+n, entonces:

$$ {}_{n}A_{x} = \int_{0}^{n} zd(x+z)dz \quad . \tag{1.68}$$

Substituyendo (1.57) en la ecuación anterior,

$$ {}_{n}A_{x} = \int_{0}^{n} z\{-\frac{d}{dz}\, l(x+z)\}dz \quad , \tag{1.69}$$

y, resolviendo la integral por partes haciendo

$$u = z \qquad\qquad du = dz$$

$$dv = \frac{d}{dz}\, l(x+z) \text{ y } \qquad v = l(x+z)$$

entonces,

$$ {}_{n}A_{x} = -\int_{0}^{x} z\,\{\frac{d}{dz}\, l(x+z)\}\, dz = -\,\{z\, l(x+z)\Big|_{0}^{n} - \int_{0}^{n} l(x+z)dz\}$$

$$= -\, n\cdot l(x+n) + {}_{n}L_{x} \quad . \tag{1.70}$$

Sumando en la ecuación anterior de ambos lados n l(x+n), se tiene que:

$$ {}_nL_x = {}_nA_x + n \cdot l(x+n) \quad , \qquad (1.71) $$

que indica que el número de años-persona vividos entre las edades x y x+n por los individuos del rádix inicial (${}_nL_x$) - es igual a los años-persona vividos por las defunciones ocurridas entre las edades exactas x y x+n (${}_nA_x$) más los años-persona vividos por los individuos, que teniendo la edad exacta x, alcanzan la edad exacta x+n (n l(x+n)).

Sea ${}_na_x$ el número de años vividos a partir de x en - promedio, por las defunciones ocurridas entre las edades x y x+n, entonces,

$$ {}_na_x = \frac{{}_nA_x}{{}_nd_x} \quad . \qquad (1.72) $$

Multiplicando la ecuación anterior de ambos lados por ${}_nd_x$, se tiene que:

$$ {}_nA_x = {}_na_x \cdot {}_nd_x \quad , $$

pero ${}_nd_x = {}_nq_x \; l(x)$ (véase (1.60)),y por lo tanto,

$$ {}_nA_x = {}_na_x \; {}_nq_x \; l(x) \quad . \qquad (1.73) $$

Substituyendo la ecuación anterior en (1.71) se obtiene - que el número de años-persona vividos entre las edades exactas x y x+n por los individuos del rádix inicial, se puede expresar como:

$$ {}_nL_x = {}_na_x \; {}_nq_x \; l(x) + n \cdot l(x+n) \; ; \qquad (1.74) $$

pero $l(x+n) = {}_np_x \; l(x) = (1-{}_nq_x) \; l(x)$ (véase (1.59) y (1.61)) y, por lo tanto, se concluye que:

$$ \begin{aligned} {}_nL_x &= {}_na_x \; {}_nq_x \; l(x) + n \cdot \{1-{}_nq_x\} \; l(x) \\ &= l(x) \; \{n-{}_nq_x \; \{n-{}_na_x\}\} \quad . \end{aligned} \qquad (1.75) $$

Se había definido la tasa de mortalidad entre las edades exactas x y x+n como ${}_nm_x = {}_nd_x \, / \, {}_nL_x$ (véase (1.63)); pero por (1.60) y (1.75), se tiene que la tasa está dada también - por:

$$ \begin{aligned} {}_nm_x &= \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} = \frac{{}_nq_x \; l(x)}{l(x)\{\, n-{}_nq_x \; \{n-{}_na_x\}\}} \\ &= \frac{{}_nq_x}{n - {}_nq_x \; (n-{}_na_x)} \quad . \end{aligned} \qquad (1.76) $$

Despejando ${}_nq_x$ de la ecuación anterior, se obtiene que la probabilidad de fallecer entre las edades exactas x y x+n, se puede expresar como:

$$ {}_nq_x = \frac{n \cdot {}_nm_x}{1 + {}_nm_x \{n - {}_na_x\}} \quad . \tag{1.77} $$

Sea T(x) el número de años-persona vividos por los individuos del efectivo inicial desde la edad exacta x hasta su total extinción, entonces

$$ T(x) = \int_x^\infty l(z)dz. \tag{1.78} $$

Se define la esperanza de vida a la edad exacta x como el número de años promedio que se espera viva un individuo del efectivo inicial l(o), una vez que alcanzó la edad x. Matemáticamente se tiene que:

$$ e(x) = \int_x^\infty \frac{(z-x)\ d(z)}{l(x)}\ dz = {}_\infty a_x \ , \tag{1.79} $$

pero $d(z) = - \frac{d}{dz} l(z)$ (véase (1.57)); entonces,

$$ e(x) = \int_x^\infty \frac{(z-x)}{l(x)} \left\{- \frac{d}{dz} l(z) \right\} dz $$

$$= \frac{1}{l(x)} \{-\int_x^\infty z \cdot \frac{d}{dz} l(z)dz + x \cdot \int_x^\infty \frac{d}{dz} l(z)dz\}$$

$$= \frac{1}{l(x)} \{-z \cdot l(z) \Big|_x^\infty + \int_x^\infty l(z)dz + x \cdot (l(z) \Big|_x^\infty)\}$$

$$= \frac{1}{l(x)} \{x \cdot l(x) + \int_x^\infty l(z)dz - x \cdot l(x)\} = \frac{1}{l(x)} \int_x^\infty l(z)dz, \tag{1.80}$$

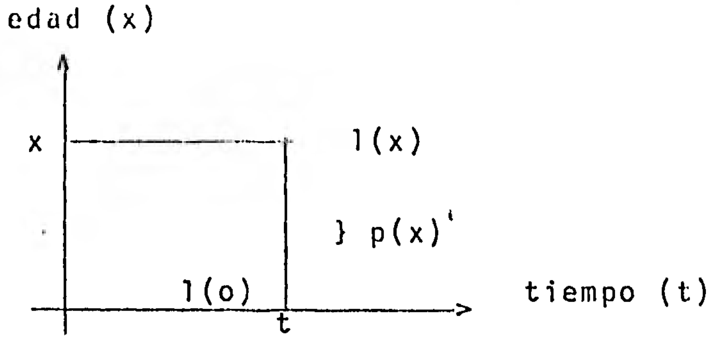
y tomando en cuenta (1.78), se concluye que:

$$e(x) = \frac{T(x)}{l(x)} \tag{1.81}$$

Para terminar el presente inciso, considérase nuevamente la probabilidad de que un individuo del rádix $l(o)$, alcance la edad exacta x, es decir, $p(x) = l(x)/l(o)$, multiplicando ambos lados por $l(o)$, se tiene que:

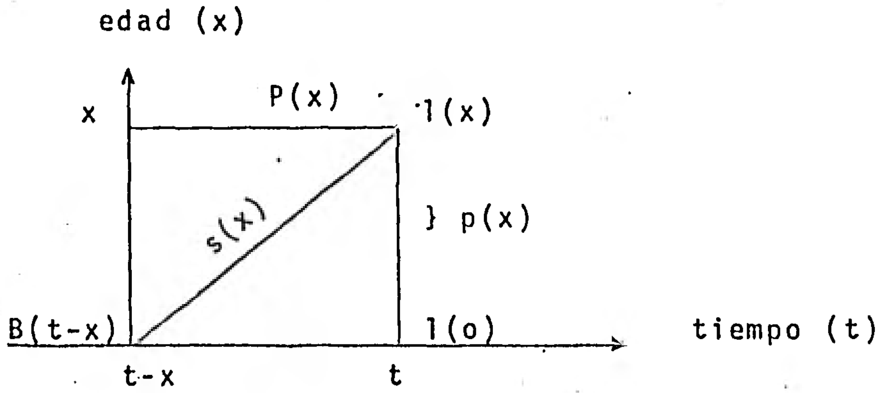
$$l(x) = p(x)\ l(o)\ ,$$

lo cual en un Diagrama de Lexis, y considerando que se trata de una tabla de mortalidad de momento, queda representado como (véase gráfica No. 2):



gráfica No. 2

Si se grafica en un solo Diagrama de Lexis lo representado tanto en la gráfica anterior como en la número uno (véase - pág.29), se obtiene que:



gráfica No. 3

en la cual, como se puede observar, la probabilidad de que - un recién nacido al tiempo t-x llegue con vida a la edad - exacta x (s(x)) difiere de la probabilidad de que un individuo del efectivo inicial l(o), alcance la edad exacta x (p(x)), es decir,

$$s(x) \neq p(x),$$

si la mortalidad no es constante a través del tiempo.

En términos demográficos, s(x) representa la probabilidad de sobrevivencia por cohorte, mientras que p(x) - una por momento. Si bien, s(x) y p(x) difieren, es posible mediante la consideración de algunos supuestos, que - estas probabilidades sean iguales, parte que será tratada en el siguiente inciso, correspondiente a las poblaciones estables.

1.3) Las poblaciones estables.

Considérese una población cerrada a la migración y - en la cual a partir de un cierto momento t* , tanto la fuerza instantánea de mortalidad como las tasas específicas de fecundidad, que experimenta dicha población, dependen exclusivamente de la edad y ya no del tiempo, o en términos demográficos, supóngase que la mortalidad y la fecundidad son invariantes, esto es:

$$\mu(x,t) = \mu(x)$$
$$\psi(x,t) = \psi(x)$$

para todo $t>t^*$ y para toda x.

A partir de los supuestos anteriores, el principal resultado que se obtiene, expresado por medio de un teorema es el siguiente:

Teorema (de ergodicidad fuerte):

supóngase una población cerrada a la migración, cuya mortalidad y fecundidad es invariante a partir de t*. Sea c(x,t) su estructura por edad al tiempo t(t>t*) y que puede ser de cualquier clase, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} c(x,t) = c^{*}(x) \ ,$$

es decir, la estructura por edad de la población converge a una estructura única e invariante en el tiempo.

Para la demostración de este teorema, véase López (1967)

A continuación se desarrollarán las consecuencias que se derivan del teorema anterior.

De acuerdo a (1.23) y al resultado anterior, la tasa bruta instantánea de mortalidad es igual a:

$$d(t) = \int_0^\infty c(x,t)\, \mu(x,t)dx$$

$$= \int_0^\infty c^*(x)\, \mu(x)dx = d \text{ para toda } t, \qquad (1.82)$$

mientras que según (1.46), la tasa bruta instantánea de natalidad es igual a:

$$b(t) = \frac{B(t)}{P(t)} = \frac{P(o,t)}{P(t)} = c(o,t) = b \text{ para toda } t, \qquad (1.83)$$

es decir, ambas tasas se vuelven invariantes.

Substituyendo (1.83) y la anterior en (1.55), $r(t) = b(t) - d(t) = b-d = r$, y por lo tanto, la tasa de crecimiento poblacional al instante t se vuelve también invariante; entonces de acuerdo a (1.6), se concluye que el crecimiento de la población queda regido por la ecuación $P(t+n) = P(t) \exp(rn)$, o bien, $P(t) = P(o) \exp(rt)$, (1.84)

es decir, se trata de un crecimiento exponencial a la tasa r.

Considérese nuevamente la expresión para la tasa bruta instantánea de mortalidad :

$$d(t) = \frac{D(t)}{P(t)},$$

multiplicando de ambos lados por $P(t)$, se tiene:

$$D(t) = d(t)\, P(t)\ , \tag{1.85}$$

y substituyendo (1.82) y (1.84) en la anterior, resulta que:

$$D(t) = d\, P(o)\, \exp\,(rt) = D(o)\, \exp\,(rt), \tag{1.86}$$

es decir, las defunciones crecen exponencialmente y a la misma tasa r.

Con respecto a la tasa bruta de natalidad,se tiene que si $b(t) = B(t)\ /\ P(t)$, entonces multiplicando de ambos lados por $P(t)$, se tiene que:

$$B(t) = b(t)\, P(t), \tag{1.87}$$

y substituyendo (1.83) y (1.84) en la anterior, resulta que:

$$B(t) = b\, P(o)\, \exp\,(rt) = B(o)\, \exp\,(rt)\ , \tag{1.88}$$

es decir, los nacimientos crecen exponencialmente y a la misma tasa r.

Considérese la probabilidad por cohorte de llegar con vida desde el nacimiento hasta la edad exacta x al tiempo t, es decir,

$$s(x,t) = \exp \{-\int_0^x \mu(x,t-x+z)dz \} ,$$

pero por el supuesto del teorema de ergodicidad fuerte y tomando en cuenta (1.67) se tiene:

$$s(x,t) = \exp \{-\int_0^x \mu(z)dz \} = s(x) = p(x), \qquad (1.89)$$

es decir, la probabilidad de sobrevivencia por cohorte es igual a la probabilidad de sobrevivencia de la tabla de mortalidad de momento.

La población de edad x al tiempo t está dada según (1.34) por:

$$P(x,t) = s(x,t)\ B(t-x),$$

pero por (1.88) y (1.89) se tiene que:

$$P(x,t) = p(x)\ B(o) \exp (r(t-x)) ,$$

multiplicando ambos lados por el inverso de P(t), resulta que:

$$c(x,t) = \frac{P(x,t)}{P(t)} = \frac{p(x)\ B(o)\ \exp\ (r(t-x))}{P(t)} \ . \qquad (1.90)$$

Substituyendo (1.84) en la anterior, se obtiene que:

$$c(x,t) = \frac{p(x)\ b(o)\ \exp\ (r(t-x))}{P(o)\ \exp\ (rt)}$$

$$= b\ p(x)\ \exp\ (-rx) = c(x) \ . \qquad (1.91)$$

Integrando en la ecuación anterior sobre todo el intervalo de la variable edad, se tiene que:

$$1= \int_0^\infty c(x)dx = b\int_0^\infty p(x)\ \exp\ (-rx)dx \ , \qquad (1.92)$$

multiplicando ambos lados por el inverso de $\int_0^\infty p(x)\ \exp\ (-rx)dx$, resulta que la tasa bruta de natalidad se puede expresar como:

$$b= \frac{1}{\int_0^\infty p(x)\ \exp\ (-rx)dx} \qquad (1.93)$$

El promedio anual de nacimientos al tiempo t, está dado por:

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} P(x,t)\ \psi(x,t)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x,t)\ \psi(x)dx \qquad (1.94)$$

(véase (1.36) y (1.31)). Multiplicando ambos lados por el inverso de P(t), resulta que la tasa bruta de natalidad se puede expresar como:

$$b= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x,t)\ \psi(x)}{P(t)} = \int_{\alpha}^{\beta} c(x,t)\ \psi(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} c(x)\ \psi(x)\ dx\ ; \qquad (1.95)\ .$$

substituyendo (1.91) en la ecuación anterior se tiene que:

$$b = \int_{\alpha}^{\beta} b\ p(x)\ \psi(x)\ \ \exp\ (-rx)dx$$

$$= b \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\ \psi(x)\ \exp\ (-rx)dx, \qquad (1.96)$$

y multiplicando de ambos lados por el inverso de b, se concluye que:

$$1= \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\psi(x)\ \exp(-rx)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x)\ \exp(-rx)dx\ , \qquad (1.97)$$

donde $\phi(x) = p(x)\ \psi(x)$ se le conoce como la función de fecundidad neta. A la ecuación anterior se le conoce como la ecuación fundamental de Lotka.

Si las medidas demográficas $\phi(x)$ y r de una población satisfacen la ecuación (1.97), se dice que dicha población es una población estable.

Para finalizar el presente inciso, se citará con respecto a (1.97) que es una ecuación integral, el siguiente teorema.

Teorema: la ecuación integral $\int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) \exp(-rx) = 1$, tiene exactamente una raíz real $r = r_0$. Si r_j es una raíz compleja de la ecuación integral, entonces $\bar{r}_j$ (el conjugado) también es raíz. Además, r_0 es mayor en valor absoluto que la parte real de cualquier raíz compleja r_j. Para la demostración de este teorema, véase Pollard (1973).

2) Un modelo cuasi-estable alternativo.

Ansley Coale empleó por vez primera la palabra poblaciones cuasi-estables para referirse a aquellas poblaciones que, siendo estables hasta un momento dado, comenzaron entonces a experimentar un proceso de desestabilización, consecuencia de un descenso en la mortalidad, mientras se mantenía constante la fecundidad.

Uno de los principales objetivos que se tomaron en cuenta para la elaboración del modelo aquí propuesto, es el de requerir la mínima cantidad de información posible. La razón de ello radica en el hecho de que el uso de las poblaciones estables, como técnica de ajuste para la estructura por edad de poblaciones consideradas como poblaciones cuasi-estables, se aplica precisamente en aquellos países, que no disponen de confiables fuentes de información demográfica. El presente modelo parte de que se conoce la siguiente información: la estructura por edad, la tasa de crecimiento poblacional y la tasa bruta de natalidad, todo correspondiente al tiempo t, así como el tiempo que lleva descendiendo la mortalidad y una tabla estándar de mortalidad.

El desarrollo matemático del modelo se hizo para el caso contínuo y contempla exclusivamente poblaciones cerradas, es decir, poblaciones en las que no hay inmigraciones ni emigraciones.

Para la presentación del modelo aquí propuesto, se fijará el inicio del proceso de desestabilización al tiempo cero.

Supóngase que el descenso en la mortalidad puede representarse mediante la ecuación:

$$\mu(x,t) = \mu(x,o)\ (1+kt)^{(5)}\ , \qquad (2.1)$$

donde t representa el tiempo que lleva descendiendo la mortalidad y k es el porcentaje de decrecimiento en la fuerza instantánea de mortalidad, igual para todas las edades, es decir, k es un real.

Como al tiempo cero la población es estable, entonces su mortalidad es invariante y por lo tanto:

$$\mu(x,o) = \mu_s(x)\ (1+k_o)\ , \qquad (2.2)$$

donde $\mu_s(x)$ es la fuerza instantánea de mortalidad a la edad exacta x, correspondiente a una tabla estándar y k_o es un elemento de los reales.

Substituyendo la ecuación anterioren (2.1) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mu(x,t) &= \mu_s(x)\ (1+k_o)\ (1+kt) \\ &= \mu_s(x)\ (1+k_o+(1+k_o)kt) \\ &= \mu_s(x)\ (1+ht)\ , \qquad (2.3) \end{aligned}$$

donde $h = k_o/t + (1+k_o)k$, $t \neq 0$.

---

(5) Este tipo de descenso fue propuesto por Keyfitz (1977).

A partir de la ecuación anterior, se puede observar que para conocer los valores de $\mu(x,t)$ sólo falta por determinar el valor del parámetro h; dicho valor se puede obtener de la siguiente manera.

Supóngase que la mortalidad ha estado descendiendo durante un período de t años; entonces la probabilidad de llegar con vida desde la edad exacta cero hasta la edad exacta x al tiempo t está dada por:

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \exp\{-\int_0^x \mu(z,t)dz\} \\ &= \exp\{-\int_0^x \mu_s(z)\,(1+ht)\,dz\} \\ &= p(x)^{1+ht} \end{aligned} \quad , \qquad (2.4)$$

donde p(x) es la de la tabla estándar de mortalidad.

Para la tabla estándar se puede encontrar la tasa de crecimiento estable asociado (r_o) por medio de la ecuación (1.91), es decir,

$$c(x) = b(t)\, p(x)\, \exp(-r_o x) \; ; \qquad (2.5)$$

multiplicando ambos lados por $\dfrac{\exp(r_o x)}{c(x)}$,

$$\exp(r_0 x) = \frac{b(t)\ p(x)}{c(x)}$$

y aplicando de ambos lados la función inversa de la función exponencial se tiene que:

$$r_0 x = \ln \frac{b(t)\ p(x)}{c(x)} \quad . \tag{2.6}$$

Se había visto con anterioridad que la tasa instantánea de crecimiento demográfico está dada por $r(t) = b(t) - d(t)$, (véase (1.55)) y que la tasa bruta instantánea de mortalidad lo está por $d(t) = \int_0^\infty c(x)\ \mu(x,t)dx$, de donde:

$$r(t) = b(t) - \int_0^\infty c(x)\ \mu(x,t)dx. \tag{2.7}$$

Substituyendo (2.5) en la ecuación anterior y utilizando el hecho de que:

$$\mu(x,t) = \frac{1}{p(x,t)} \{- \frac{d}{dx}\ p(x,t)\} \tag{2.8}$$

se tiene que:

$$r(t) = b(t) - \int_0^\infty \frac{b(t)p(x)\exp(-r_0 x)}{p(x,t)} \{- \frac{d}{dx}\ p(x,t)\}\ dx. \tag{2.9}$$

De acuerdo a (2.4) , $p(x,t) = p(x)^{1+ht}$ y derivando se obtiene que:

$$\frac{d}{dx}\, p(x,t) = (1+ht)\; p(x)^{ht}\; \frac{d}{dx}\, p(x).$$

Substituyendo esto último en (2.9), se tiene que:

$$r(t) = b(t) - \int_0^{\infty} b(t)\cdot p(x)\cdot p(x)^{-(1+ht)}\{1+ht\}p(x)^{ht}\{-\frac{d}{dx}\, p(x)\}\exp(-r_0 x)dx$$

$$= b(t) + b(t)\;\{1+ht\} \int_0^{\infty} \{\frac{d}{dx}\, p(x)\}\; \exp\,(-r_0 x)\,dx. \qquad (2.10)$$

Resolviendo la integral por partes,

sea: $u = \exp(-r_0 x)$ $\qquad du = -r_0\; \exp(-r_0 x)\; dx$

$dv = \frac{d}{dx}\; p(x)$ $\quad$ y $\qquad v = p(x)$

de donde,

$$\int_0^{\infty} \{\frac{d}{dx}\, p(x)\}\exp(-r_0 x)dx = p(x)\; \exp(-r_0 x)\;\Big|_0^{\infty} + r_0 \int_0^{\infty} p(x)\; \exp(-r_0 x)dx$$

$$= \lim_{k\to\infty}\; p(k)\; \exp(-r_0 k) \;-\; p(o)\; \exp(-r_0 o) \;+\; r_0 \int_0^{\infty} p(x)\; \exp(-r_0 x)dx$$

$$= r_0 \int_0^{\infty} p(x)\; \exp(-r_0 x)dx \;-\; 1 \quad ; \qquad (2.11)$$

pero de acuerdo a (2.5) $c(x) = b(t)\, p(x) \exp(r_0 x)$, entonces integrando en esta última sobre todo el rango de la variable edad, se tiene que:

$$1 = \int_0^\infty c(x)dx = b(t) \int_0^\infty p(x) \exp(-r_0 x)\, dx \;,$$

y multiplicando ambos lados por el inverso de $b(t)$,

$$\int_0^\infty p(x) \exp(-r_0 x)\, dx = \frac{1}{b(t)} \;,$$

y substituyendo esta ecuación en (2.11), se concluye que:

$$\int_0^\infty \{\frac{d}{dx} p(x)\} \exp(-r_0 x)dx = \frac{r_0}{b(t)} - 1 = \frac{r_0 - b(t)}{b(t)} \;. \qquad (2.12)$$

Substituyendo la ecuación anterior en (2.10), se obtiene que:

$$r(t) = b(t) + b(t)\, \{1+ht\} \{\frac{r_0 - b(t)}{b(t)}\}$$

$$= b(t) + r_0 - b(t) + ht\, \{r_0 - b(t)\}$$

$$= r_0 + ht\, \{r_0 - b(t)\} \;; \qquad (2.13)$$

restando de ambos lados r_0, se tiene que:

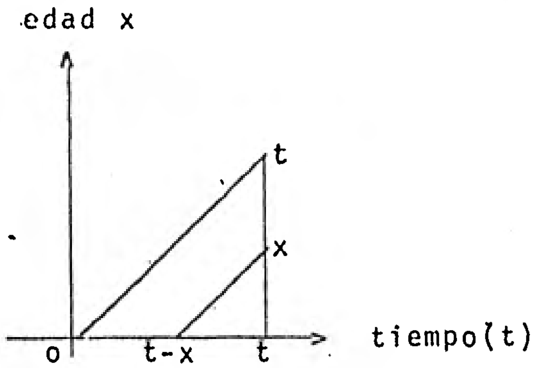
$$r(t) - r_0 = ht\, \{r_0 - b(t)\} \;,$$

y multiplicando de ambos lados por $1/t\ (r_0 - b(t))$, se obtiene finalmente que el parámetro h está dado por:

$$h = \frac{1}{t} \left\{ \frac{r(t) - r_0}{r_0 - b(t)} \right\} \quad . \qquad (2.14)$$

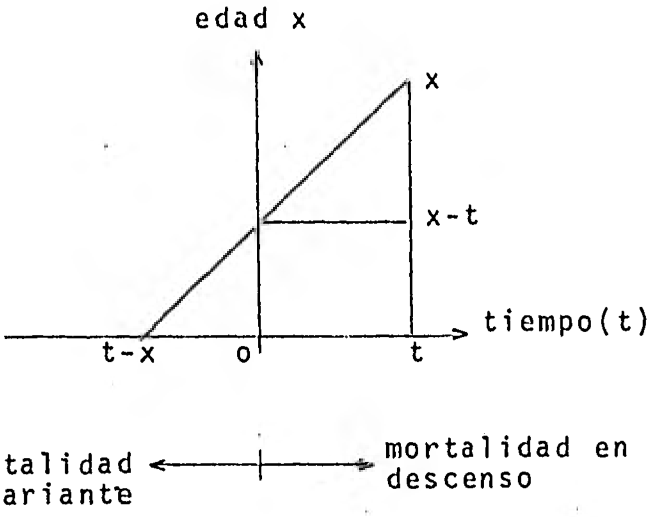
Dado que se ha estado contemplando un descenso en la mortalidad a partir del tiempo cero, se verá a continuación los efectos que éste tiene sobre la estructura por edad; para ello es necesario dividir el análisis en dos casos. El primero, correspondiente al caso en que son más los años que lleva declinando la mortalidad que la edad de la población ($t \geq x$), y el segundo, correspondiente al caso inverso ($t < x$). La razón de tener que dividir el análisis se debe a que, mientras en el primer caso la probabilidad de sobrevivencia desde el nacimiento hasta la edad exacta x en todo momento se encuentra bajo un régimen de descenso en la mortalidad, en el segundo también influye la mortalidad constante antes de que ocurriera dicho descenso (véase gráficas No. 4 y No. 5).

Caso: $t \geq x$ Caso: $t < x$



mortalidad en descenso

gráfica No. 4



gráfica No. 5

La estructura por edad cuasi-estable.

Primer caso: $t \geq x$

Conforme a (1.34), la población de edad x al tiempo t - es igual a: $P(x,t) = s(x,t)\ B(t-x)$, y la probabilidad de sobrevivir desde el nacimiento hasta la edad exacta x al tiempo t es igual a:

$$s(x,t) = \exp\ \{-\int_0^x \mu(z,t-x+z)dz\} \quad ;$$

de acuerdo al modelo, se tiene que:

$$s(x,t) = \exp\{-\int_0^x \mu_s(z)\ (1+h(t-x+z)dz\}$$

$$= \exp\{-(1+h(t-x))\int_0^x \mu_s(z)dz\}\ \exp\{-h\int_0^x z\mu_s(z)dz\}$$

$$= p(x)^{1+h(t-x)}\ \exp\ \{-h\int_0^x z\mu_s(z)dz\} \qquad (2.15).$$

Tomando en cuenta(2.8) y resolviendo por partes la integral de arriba, se obtiene que:

$$-\int_0^x z\mu_s(z)dz = -\int_0^x z\{-\frac{1}{p(z)}\cdot\frac{d}{dz}p(z)\}\ dz = \int_0^x z\ \{\frac{d}{dz}\ \ln p(z)\}\ dz,$$

Sea: $u = z$ $\qquad du = dz$

$dv = \frac{d}{dz}\ \ln\ p(z) \qquad v = \ln\ p(z)$.

entonces,

$$\int_0^x z\{\frac{d}{dz}\ \ln\ p(z)\}\ dz = z\ \ln(z)\ \Big|_0^x - \int_0^x \ln\ p(z)\ dz$$

$$= x\ \ln\ p(x) - \int_0^x \ln\ p(z)dz$$

$$= x\ \ln\ p(x) - G(x)\ , \qquad (2.16)$$

donde $G(x) = \int_0^x \ln p(z)dz$.

Substituyendo el resultado anterior en (2.15), resulta que:

$$s(x,t) = p(x)^{1+h(t-x)} \exp\{hx \ln p(x)\} \exp\{-hG(x)\}$$

$$= p(x)^{1+h(t-x)} \; p(x)^{hx} \; \exp\{-hG(x)\}$$

$$= p(x)^{1+ht} \; H(x)^{-h} \; , \qquad (2.17)$$

donde $H(x) = \exp(G(x))$.

Sea $B(t)$ y $B(t+h)$ el promedio anual de nacimientos al tiempo y al $t+h$ respectivamente; entonces el incremento en el promedio anual de nacimientos entre t y $t+h$ está dado por:

$$B(t+h) - B(t) ,$$

y el incremento medio anual por:

$$\frac{B(t+h) - B(t)}{h} .$$

El número total de nacimientos ocurridos entre el tiempo t y el t+h es igual a:

$$\int_{t}^{t+h} B(z)dz,$$

y por lo tanto, la tasa de crecimiento de los nacimientos entre t y t+h está dada por:

$$r_b(t,t+h) = \frac{B(t+h) - B(t)}{h\int_{t}^{t+h} B(z)dz} \quad ;$$

aplicando el Teorema del Valor Medio para las integrales, - se tiene que:

$$r_b(t,t+h) = \frac{B(t+h) - B(t)}{h\ B(t+\xi)} \quad ,$$

donde ξ es el valor medio, con $0<\xi<h$; y por lo tanto, la - tasa de crecimiento instantánea de los nacimientos es igual a:

$$r_b(t) = \lim_{h\to o} r_b(t,\ t+h) = \lim_{h\to o} \frac{B(t+h) - B(t)}{h\ B(t+\xi)}$$

$$= \frac{1}{B(t)} \ \frac{d}{dt}\ B(t) = \frac{d}{dt}\ \ln B(t) \ ,$$

y lo cual representa una ecuación diferencial de primer orden, cuya solución es:

$$B(t+h) = B(t)\ \exp\ \{\int_t^{t+h} r_b(z)dz\}\ . \qquad (2.18)$$

Los nacimientos al tiempo t-x, de acuerdo a la ecuación anterior están dados por:

$$B(t-x) = B(t)\ \exp\{\int_t^{t-x} r_b\ (z)dz\}\ ;$$

suponiendo que $r_b(z)$ no cambió de signo en el intervalo t-x a t, entonces por el Teorema del Valor Medio para las integrales, resulta que:

$$B(t-x) = B(t)\ \exp\ (-r_1\, x) \qquad (2.19)$$

donde r_1 es el valor medio. Multiplicando en la ecuación anterior de ambos lados por $\exp(r_1 x)/\ B(t-x)$, se tiene que:

$$\exp(r_1\ x) = \frac{B(t)}{B(t-x)}\ ,$$

aplicando la función inversa de la función exponencial, se obtiene que:

$$r_1\ x = \ln \frac{B(t)}{B(t-x)}\ ,$$

y multiplicando de ambos lados por el inverso de x, $x \neq o$, se tiene que:

$$r_1 = \frac{1}{x} \ln \frac{B(t)}{B(t-x)} \quad . \tag{2.20}$$

Anteriormente se había obtenido la siguiente relación $P(x,t) = s(x,t) \quad B(t-x)$ (véase (1.34)). Multiplicando ambos lados por el inverso de $s(x,t)$, se tiene que:

$$B(t-x) = \frac{P(x,t)}{s(x,t)} \quad , \tag{2.21}$$

y substituyendo (2.17) en esta última, queda que:

$$B(t-x) = \frac{P(x,t)}{p(x)^{1+ht} \; H(x)^{-h}} \tag{2.22}$$

Substituyendo (2.21) en (2.20) y tomando en cuenta que $B(t) = b(t)\, P(t)$ (véase pág. 19), se obtiene que:

$$r_1 = \frac{1}{x} \ln\left\{\frac{b(t)\; P(t)\; p(x)^{1+ht}}{P(x,t)\; H(x)^{h}}\right\}$$

$$= \frac{1}{x} \ln \frac{b(t)\; p(x)}{c(x)} + \frac{1}{x} \ln \frac{p(x)^{ht}}{H(x)^{h}}$$

$$= r_0 + \frac{h}{x} \ln \frac{p(x)^{t}}{H(x)} \quad , \tag{2.23}$$

según el resultado obtenido en (2.6) y por propiedades de la función logaritmo natural.

Finalmente, dado que la tasa de crecimiento de los nacimientos durante el período de descenso (r_1) difiere de la tasa de crecimiento estable asociada (r_o), entonces la estructurapor edad cuasi-estable para este primer caso, queda determinada por medio de la siguiente ecuación:

$$c_k(x) = b(t)\ s(x,t)\ \exp(-r_1 x)\ . \tag{2.24}$$

Segundo caso: $t < x$

La población de edad exacta x al tiempo t está dada por: $P(x,t) = s(x,t)\ B(t-x)$, mientras que la probabilidad de llegar con vida desde el nacimiento hasta la edad exacta x al tiempo t, es igual a:

$$s(x,t) = \exp\{-\int_o^x \mu(z,t-x+z)dz\}$$

$$= \exp\{-\int_o^{x-t} \mu\ (z,t-x+z)dz\}\ \ \exp\{-\int_{x-t}^{x} \mu(z,t-x+z)dz\}$$

donde la primera parte del lado derecho corresponde al período estable, y la segunda al período de desestabilización.

Pero de acuerdo a (2.3),

$$s(x,t) = p(x-t)\ \exp\{-\int_{x-t}^{x} \mu_s(z)(1+h(t-x+z))dz\}$$

$$= p(x-t)\exp\{-(1+h(t-x))\int_{x-t}^{x} \mu_s(z)dz\}\exp\{-h\int_{x-t}^{x} z\cdot\mu_s(z)dz\} \quad ;$$

empleando (2.16) y por propiedades de las integrales, se tiene que:

$$s(x,t) = p(x,t)\ {}_tp_{x-t}^{1+h(t-x)}\ \exp\{hz\ \ln p(z)\ \Big|_{x-t}^{x}\ \}\exp\ \{-h\int_{x-t}^{x} \ln p(z)\ dz\}$$

$$= p(x-t)\ {}_tp_{x-t}^{1+h(t-x)}\ \exp\{hx\ \ln p(x)-h(x-t)\ln p(x-t)\}\exp\{-h\int_{0}^{x}\ln p(z)dz\}$$

$$\exp\{-h\int_{0}^{x-t} \ln p(z)dz\}$$

$$= p(x-t)\ {}_tp_{x-t}^{1+h(t-x)}\ p(x)^{hx}\ p(x-t)^{h(x-t)}\ \exp\{-h(G(x)-G(x-t))\}.$$

Pero ${}_tp_{x-t} = \dfrac{l(x)}{l(x-t)} = \dfrac{l(x)\div l(o)}{l(x-t)\div l(o)} = \dfrac{p(x)}{p(x-t)}$, y substituyendo

en esto en la ecuación anterior, se tiene que:

$$s(x,t) = \frac{p(x-t)\ p(x)^{1+h(t-x)} p(x)^{hx}\ p(x-t)^{-h(x-t)}\ \exp\{-h(G(x)-G(x-))\}}{p(x-t)^{1+h(t-x)}}$$

$$= \frac{p(x)^{1+ht}\ \exp\{hG(x-t)\}}{\exp\{hG(x)\}} = p(x)^{1+ht}\left\{\frac{H(x-t)}{H(x)}\right\}^{h} , \quad (2.25)$$

donde $H(x-t) = \exp\{G(x-t)\}$ y $H(x) = \exp\{G(x)\}$.

De acuerdo a (2.20), (2.21) y a que $B(t) = b(t)\ P(t)$, se tiene que:

$$r_1 = \frac{1}{x} \ln \frac{b(t)\ p(t)\ s(x,t)}{P(x,t)} = \frac{1}{x} \ln \frac{b(t)\ s(x,t)}{c(x)} , \quad (2.26)$$

y substituyendo (2.25) en esta última ecuación, se obtiene que:

$$r_1 = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{b(t)}{c(x)}\ p(x)^{1+ht}\ \left\{\frac{H(x-t)}{H(x)}\right\}^{h}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \ln \frac{b(t)\ p(x)}{c(x)} + \frac{h}{x} \ln \left\{p(x)^{t}\ \frac{H(x-t)}{H(x)}\right\}$$

$$= r_o + \frac{h}{x} \ln \left\{p(x)^{t}\ \frac{H(x-t)}{H(x)}\right\} , \quad (2.27)$$

y por lo tanto, para el segundo caso, la estructura por edad cuasi-estable al tiempo t queda determinada por la ecuación siguiente:

$$c_k(x) = b(t)\ s(x,t)\ \exp\ (-r_1 x) \quad , \qquad (2.28)$$

y de esta forma en ambos casos, bajo el modelo de descenso en la mortalidad propuesto, la estructura por edad al tiempo t difiere de la estructura estable que prevalecía en la población, antes de que ésta comenzara a experimentar descensos en su patrón de mortalidad.

Se vió anteriormente que el presente modelo requiere del conocimiento previo de la siguiente información: b(t), r(t), c(x,t), y y una tabla estándar de mortalidad. Como el modelo ha sido desarrollado para el caso contínuo, en el cual la edad (x) se toma como edad exacta, entonces la información requerida (c(x,t)) debe estar por edad exacta; sin embargo, en la práctica este no es el caso, ya que la información viene por edad cumplida, por lo cual se pasa del caso contínuo al caso discreto.

A continuación se mostrarán solamente las expresiones matemáticas de las principales ecuaciones del modelo.

De acuerdo a (2.5), $c(x) = b(t)\ p(x)\ \exp(-r_o x)$. Integrando de ambos lados con respecto a la variable edad de x a x+n, se tiene que:

$$ {}_nC_x = \int_x^{x+n} c(z)dz = b(t) \int_x^{x+n} p(z)\ \exp\ (-r_o z)dz\ , $$

aplicando el Teorema Generalizado del Valor Medio, tomando en cuenta que $p(z) = l(z)/l(o)$ y por (1.62), resulta que:

$$ {}_nC_x = b(t)\ {}_nL_x\ \exp(-r_o \underset{\sim}{x})\ , \qquad (2.29) $$

donde $\underset{\sim}{x}$ es el valor medio, con $o < \underset{\sim}{x} < n$.

A partir de la ecuación anterior, resulta que:

$$ r_o \underset{\sim}{x} = \ln \frac{b(t)\ {}_nL_x}{{}_nC_x}\ . \qquad (2.30) $$

Para el caso $t \geq x$, se tiene, de acuerdo a (2.17), - $s(x,t) = p(x)^{1+ht}\ H(x)^{-h}$. Integrando de ambos lados con - respecto a la variable edad de x a x+n,

$$ {}_ns_x^t = \int_x^{x+n} s(z,t)dz = \int_x^{x+n} p(z)^{1+ht}\ H(z)^{-h}\ dz\ , $$

aplicando el Teorema Generalizado del Valor Medio,

$$ {}_n s_x^t = H(\tilde{x})^{-h} \int_x^{x+n} p(z)^{1+ht}\, dz \, , \qquad (2.31)$$

donde $\tilde{x}$ es el valor medio, con $0<\tilde{x}<n$.

Considérese la siguiente función, $f(h) = p(z)^{1+ht}$. Su desarrollo en Series de Taylor, alrededor de $h = 0$, hasta el segundo término es:

sea $f(h) = p(z)^{1+ht}$, entonces su primera derivada está dada por $\frac{d}{dh} f(h) = t\, p(z)^{1+ht} \ln p(z)$; evaluando ambas funciones en $h=0$, se tiene que, $f(o) = p(z)$ y $\frac{d}{dh} f(o) = t\, p(z) \ln p(z)$ y por lo tanto el desarrollo en Series de Taylor de $f(h)$ alrededor de $h=0$, hasta el segundo término está dado por: $f(h) \doteq f(o) + \frac{d}{dh} f(o) \cdot h$ es decir,

$$p(z)^{1+ht} \doteq p(z) + ht\, p(z) \ln p(z) \, . \qquad (2.32)$$

Substituyendo este último resultado en (2.31), se tiene que:

$$ {}_n s_x^t \doteq H(\tilde{x})^{-h} \int_x^{x+n} (p(z)+ht\, p(z) \ln p(z))\, dz$$

$$= H(\underset{\sim}{x})^{-h}\ \{{}_nL_x + ht_n\ E_x\} \quad , \qquad (2.33)$$

donde ${}_nE_x = \int_x^{x+n} p(z)\ \ln p(z)\ dz.$

A partir del resultado anterior, resulta que:

$$r_1 = \frac{1}{\underset{\sim}{x}} \ln \frac{B(t)}{B(t-\underset{\sim}{x})} = \frac{1}{\underset{\sim}{x}} \ln \left\{\frac{b(t)\ P(t)\ {}_ns_x^t}{{}_nP_x^t}\right\} = \frac{1}{\underset{\sim}{x}} \ln \left\{\frac{b(t)\,{}_nL_x\ {}_ns_x^t}{{}_nC_x\ {}_nL_x}\right\}$$

$$= \frac{1}{\underset{\sim}{x}} \ln \left\{\frac{b(t)\ {}_nL_x}{{}_nC_x}\right\} + \frac{1}{\underset{\sim}{x}} \ln \frac{{}_ns_x^t}{{}_nL_x} = r_o + \frac{1}{\underset{\sim}{x}} \ln \frac{{}_ns_x^t}{{}_nL_x} \qquad (2.34)$$

Para el caso t < x, se tiene de acuerdo a (2.25), -
$s(x,t) = p(x)^{1+ht} \cdot \left\{\frac{H(x-t)}{H(x)}\right\}^h$.

Integrando de ambos lados con respecto a la variable edad de x a x+n se tiene que:

$${}_ns_x^t = \int_x^{x+n} p(z)^{1+ht} \left\{\frac{H(z-t)}{H(z)}\right\}^h dz ,$$

aplicando el Teorema Generalizado del Valor Medio,

$${}_ns_x^t = \left\{\frac{H(\underset{\sim}{x}-t)}{H(\underset{\sim}{x})}\right\}^h \int_x^{x+n} p(z)^{1+ht}\ dz ,$$

donde $\underset{\sim}{x}$ es el valor medio, con $o<\underset{\sim}{x}<n$. Substituyendo (2.32) en la ecuación de arriba, resulta que:

$$ {}_{n}s_{x}^{t} = \left\{\frac{H(\underline{x}-t)}{H(\underline{x})}\right\}^{h} \int_{x}^{x+n} \{p(z)+ht\ p(z)\ \ln p(z)\}dz $$

$$ = \left\{\frac{H(\underline{x}-t)}{H(\underline{x})}\right\}^{h} \{{}_{n}L_{x} + ht\ {}_{n}E_{x}\} \qquad (2.35) $$

Por último, con respecto a la ecuación para la estructura por edad cuasi-estable, es decir, $c_k(x) = b(t)\ s(x,t)\ \exp(-r_1 x)$, se tiene que:

$$ {}_{n}C_{k,x}^{t} = \int_{x}^{x+n} C_{k}(z)\ dz = b(t) \int_{x}^{x+n} s(z,t)\ \exp(-r_1 z)\ dz \ , $$

aplicando el Teorema Generalizado del Valor Medio, resulta que:

$$ {}_{n}C_{k,x}^{t} = b(t)\ {}_{n}s_{x}^{t}\ \exp(-r_1 \underset{\sim}{x}) \qquad (2.36) $$

donde $\underset{\sim}{x}$ es el valor medio, con $0<\underset{\sim}{x}<n$; además se puede observar que r_1 es propia para cada grupo de edades.

A continuación se presentan las fórmulas que se emplearon para calcular los valores de las funciones ${}_5L_x$, ${}_5G_x$ - $A(\underset{\sim}{x}) = \ln H(\underset{\sim}{x})$ y ${}_5E_x$, a partir de la Tabla Estándar de Mortalidad de Brass.

Como se trabaja con grupos quinquenales de edad, entonces se tiene que:

1) Para el grupo de edad 0-5,

$$ {}_5L_0 = \int_0^5 p(x)dx \doteq \frac{1}{2} \{ 1 + p(1) \} + 2 \{ p(1) + p(5) \} $$

$$ {}_5G_0 = \int_0^5 \ln p(x)dx \doteq \frac{1}{2} \ln p(1) + 2 \{ \ln p(1) + p(5) \} $$

$$ \ln H(\underset{\sim}{0}) = A(\underset{\sim}{0}) = G(\underset{\sim}{0}) \doteq \frac{1}{2} \ln p(1) + \frac{3}{4} \{ \ln p(1) + \ln p(5) \} $$

$$ {}_5E_0 = \int_0^5 p(x) \ln p(x)dx \doteq \frac{1}{2} p(1) \ln p(1) + 2\{p(1) \ln p(1) + p(5) \ln p(5)\} $$

2) Para x = 5,10,...,80,

$$ {}_5L_x = \int_x^{x+5} p(z)dz \doteq \frac{5}{2} \{ p(x) + p(x+5) \} . $$

$$ {}_5G_x = \int_x^{x+5} \ln p(z)dz \doteq \frac{5}{2} \{ \ln p(x) + \ln p(x+5) \} $$

$$ H(\underset{\sim}{x}) = \exp \{ G(\underset{\sim}{x}) \} \doteq \exp \{ G(x) + \frac{1}{2} {}_5G_x \} $$

$$ = \exp \{ G(x) \} \exp \{ \frac{1}{2} {}_5G_x \} ; $$

aplicando la función inversa de la función exponencial, resulta que:

$$A(\underset{\sim}{x}) = \ln H(\underset{\sim}{x}) = G(x) + \frac{1}{2}\ {}_5G_x = \int_0^x \ln p(z)dz + \frac{1}{2}\ {}_5G_x$$

$$= \sum_{y=0}^{x-5} \int_y^{y+5} \ln p(z)dz + \frac{1}{2}\ {}_5G_x = \sum_{y=0}^{x-5} {}_5G_y + \frac{1}{2}\ {}_5G_x$$

$$= A(x) + \frac{1}{2}\ {}_5G_x \ ,$$

donde $A(x) = \sum_{y=0}^{x-5} {}_5G_x$

$${}_5E_x = \int_x^{x+5} p(z) \ln p(z)dz \doteq \frac{5}{2} \{ p(x) \ln p(x) + p(x+5) \ln p(x+5) \}.$$

3) Para x = 85,

$$L_{85y+} = \int_{85}^{\infty} p(x)dx \doteq p(85) \{ 5 + \log_{10} p(85) \}$$

$$G_{85y+} = \int_{85}^{\infty} \ln p(x)dx \doteq \ln p(85). \{ 5 + \log_{10} p(85)\}$$

$$A(\underset{\sim}{85}) \doteq A(85) + G_{85y+}$$

$$E_{85y+} = \int_{85}^{\infty} p(x) \ln p(x)dx \doteq \{ 5 + \log_{10} p(85) \} p(85) \ln p(85)$$

Cuadro 2.1

Valores de las funciones $_5L_x$, $_5G_x$, $A(\underset{\sim}{x})$ y $_5E_x$ a partir de la Tabla Estándar de Mortalidad de William Brass.

Edad (x) en años.	p(x) a)	$_5L_x$	$_5G_x$	$A(\underset{\sim}{x}) = \ln \tilde{H}(\underset{\sim}{x})$	$_5E_x$
0	1.0000	4.16295	- 0.9317	- 0.4002	-0.74939
5	0.7691	3.79825	- 1.3749	- 1.6191	-1.04384
10	0.7502	3.71600	- 1.4842	- 3.0486	-1.10271
15	0.7362	3.62300	- 1.6113	- 4.5964	-1.16663
20	0.7130	3.48900	- 1.8003	- 6.3022	-1.25459
25	0.6826	3.33775	- 2.0220	- 8.2133	-1.34807
30	0.6525	3.18700	- 2.2532	-10.3509	-1.43440
35	0.6223	3.03025	- 2.5058	-12.7304	-1.51644
40	0.5898	2.85825	- 2.7987	-15.3825	-1.59697
45	0.5535	2.66025	- 3.1592	-18.3615	-1.67650
50	0.5106	2.42275	- 3.6299	-21.7560	-1.75186
55	0.4585	2.13750	- 4.2622	-25.7021	-1.81082
60	0.3965	1.79375	- 5.1535	-30.4099	-1.82888
65	0.3210	1.39750	- 6.4295	-36.2014	-1.76601
70	0.2380	0.97000	- 8.3315	-43.5819	-1.56553
75	0.1500	0.56500	-11.1854	-53.3403	-1.20105
80	0.0760	0.26250	-15.2937	-66.5799	-0.74632
85y+	0.0290	0.10040	-12.2585	-86.4852	-0.35550

a) Fuente: Brass (1974), p.146.

Nota: para la estimación de las columnas, véase pp. 70-71.

3.) Aplicación del modelo cuasi-estable alternativo, al caso de México. 1970.

La finalidad de todo modelo matemático demográfico, además de representar el fenómeno considerado, es que arroje resultados lógicos y coherentes al ser aplicado a una realidad concreta.

Para la ejemplificación del modelo propuesto aquí se seleccionó la población femenina de México, a la cual se puede considerar cuasi-estable en el periodo 1935-1970, donde en términos generales, mantuvo una fecundidad constante y una mortalidad decreciente, además que hacia 1935 se le podía considerar como una población estable.

Para la aplicación del modelo, como se dijo con anterioridad, se requiere la estructura por edad (${}_5c_x$), la tasa bruta de natalidad (b) y la tasa de crecimiento demográfico (r) para el año final en que se considera el proceso de desestabilización (en este caso 1970), así como el tiempo que lleva descendiendo la mortalidad (en este caso los 35 años comprendidos entre 1935 y 1970). Para 1970, la tasa bruta de natalidad, b(70), era de 0.04285, la tasa de crecimiento demográfico, r(70), de 0.034 y el tiempo que tenía descendiendo la mortalidad, t, de 35 años. La estructura por edad de la población femenina mexicana en 1970 se presenta en la primera columna del cuadro 1.

Como tabla estándar se eligió la obtenida para la mortalidad mundial por William Brass (1974), cuyos valores para las funciones requeridas para la aplicación del modelo propuesto pueden verse en el cuadro 2.1 desarrollados en la última sección del capítulo anterior.

De acuerdo a (2.30), se tiene que:

$$r_0\, \underset{\sim}{x} = \ln \left\{ \frac{b(t)\,{}_nL_x}{{}_nc_x} \right\},$$

o bien,

$$y(x_i) = r_0 x_i \qquad (3.1)$$

donde $x_i = \underset{\sim}{x}$ y $y(x_i) = \ln \left\{ \frac{b(t)\,{}_nL_x}{{}_nc_x} \right\}$.

Como se puede observar, la ecuación anterior representa una ecuación lineal de una variable, con pendiente igual a la tasa de crecimiento estable asociada (r_0), y sin ordenada al origen (o que pasa por este último).

Una forma de estimar el valor de r_0 es por medio del Método de Mínimos Cuadrados (véase Johnston (1979)); entonces, sea $\hat{y}(x_i) = \hat{r}_0 x_i$ la línea estimada, donde $\hat{r}_0$ es la estimación del parámetro desconocido r_0.

Considérese la diferencia entre $y(x_i)$ y $\hat{y}(x_i)$, es decir, $e_i = y(x_i) - \hat{y}(x_i)$, el error de estimación. Elevando ambos -

lados al cuadrado, se tiene que:

$$e_i^2 = (\ y(x_i) - \hat{y}(x_i)\ )^2,$$

y sumando sobre todos los posibles valores de x_i, se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{18} e_i^2 = \sum_{i=1}^{18} (\ y(x_i) - \hat{y}(x_i)\ )^2$$

o bien,

$$\sum_{i=1}^{18} e_i^2 = \sum_{i=1}^{18} (\ y(x_i) - \hat{r}_o x_i\ )^2 \qquad (3.2).$$

Como se sabe, el Método de Mínimos Cuadrados descansa sobre el principio de que el valor de $\hat{r}_o$ debe ser tal, que (3.2) sea lo más pequeña posible. Una condición necesaria para ello, es que la primera derivada con respecto a $\hat{r}_o$ sea igual a cero, es decir,

$$\frac{d}{d\hat{r}_o} \sum_{i=1}^{18} e_i^2 = 2 \sum_{i=1}^{18} (\ y(x_i) - \hat{r}_o x_i\ )(-x_i) = 0. \qquad (3.3)$$

Multiplicando ambos lados por un medio y por propiedades del operador suma se tiene que:

$$\hat{r}_o \sum_{i=1}^{18} x_i^2 - \sum_{i=1}^{18} x_i y(x_i) = 0 \ ; \qquad (3.4)$$

sumando de ambos lados $\sum_{i=1}^{18} x_i y(x_i)$ y multiplicando por el in--

verso de $\sum_{i=1}^{18} x_i^2$, se concluye que:

$$\hat{r}_o = \frac{\sum_{i=1}^{18} x_i y(x_i)}{\sum_{i=1}^{18} x_i^2} ,$$

o bien,

$$\hat{r}_o = \frac{\sum_{x=0}^{85} (x + 2.5) \ln \{ \frac{b(t)\,_5L_x}{5^C x} \}}{\sum_{x=0}^{85} (x + 2.5)^2} , \quad (3.5)$$

donde $x_i = x + 2.5$.

Derivando (3.3) con respecto a $\hat{r}_o$ (la segunda deriva-da) se obtiene que:

$$\frac{d^2}{d\hat{r}_o} \sum_{i=1}^{18} e_i^2 = 2.\sum_{i=1}^{18} x_i^2 ,$$

lo cual siempre es mayor que cero, y por lo tanto efectivamente se trata de un mínimo.

En cualquier aplicación que involucre el uso del Método de Mínimos Cuadrados, se acostumbra calcular el coeficiente de determinación, el cual indica que tanto se ajustan los - valores observados al modelo matemático propuesto; en este caso, una ecuación lineal de una variable (véase (3.1)).

Para el cálculo del valor del parámetro $\hat{r}_0$ se determinó excluir el primero y los dos últimos grupos de edad, es decir, ${}_5c_0$, ${}_5c_{80}$ y c_{85y+}. con el fin de evitar que los errores incluidos en esta información influyeran en el valor de $\hat{r}_0$. Tomando en cuenta esto, entonces el valor de $\hat{r}_0$ se obtiene como:

$$\hat{r}_0 = \frac{\sum_{x=5}^{75} (x + 2.5) \ln \{\frac{b(t)\,{}_5L_x}{{}_5c_x}\}}{\sum_{x=5}^{75} (x + 2.5)^2} \quad ; \quad (3.6)$$

mientras que el coeficiente de determinación está dado por:

$$\delta^2 = 1 - \frac{\sum_{x=5}^{75}\left[\ln \{\frac{b(t)\,{}_5L_x}{{}_5c_x}\}\right]^2 - \frac{\left[\sum_{x=5}^{75} (x+2.5) \ln \{\frac{b(t)\,{}_5L_x}{{}_5c_x}\}\right]^2}{\sum_{x=5}^{75} (x+2.5)^2}}{\sum_{x=5}^{75}\left[\ln \{\frac{b(t)\,{}_5L_x}{{}_5c_x}\}\right]^2 - \frac{\left[\sum_{x=5}^{75} \ln \{\frac{b(t)\,{}_5L_x}{{}_5c_x}\}\right]^2}{15}} \, .$$

(3.7)

Haciendo los cálculos correspondientes, se encuentra que:

$$r_0 = 0.02251$$

y $$\delta^2 = 0.89750$$

De acuerdo a (2.14), el valor del parámetro h está dado por:

$$h = \frac{1}{t} \left[\frac{r(t) - r_0}{r_0 - b(t)} \right] ,$$

y substituyendo los valores correspondientes, se tiene que:

$$h = \frac{1}{35} \left[\frac{0.034 - 0.02251}{0.02251 - 0.04285} \right] \doteq -0.01614 .$$

Una vez calculado el valor del parámetro h, se prosigue a calcular el valor de las probabilidades de sobrevivencia entre las edades exactas x y x+n, al tiempo t (véase (2.33) y (2.35)).

A modo de ejemplo, considérese el grupo de edades 10-15 y el 40-45. Como el tiempo que lleva descendiendo la mortalidad es 35 años, entonces para el primer grupo de edades se está en el caso $t > x$ y por lo tanto debe usarse (2.33), mientras que para el segundo grupo se tiene $t < x$, por lo cual se utiliza (2.35)

Substituyendo los valores respectivos en (2.33), se tiene que:

$$_5s_{10}^{70} = H(10)^{0.01614} \{ 3.716 + (-0.01614)35(-1.10271)\}$$
$$\doteq 4.13059$$

Una vez obtenido este valor, se calcula el valor del parámetro r_1 correspondiente a este grupo de edades (véase (2.34)); entonces,

$$r_1 = r_o + \frac{1}{\underset{\sim}{x}} \ln \frac{n^{s}{}^{t}_{x}}{n^{L}{}_{x}}$$

$$= 0.02251 + \frac{1}{12.5} \ln \frac{4.13059}{3.71600}$$

$$\doteq 0.03097$$

Por último, queda por calcular la estructura por edad cuasi-estable (véase (2.36)); entonces,

$${}_5c^{70}_{k,10} = b(70)\ {}_5s^{70}_{10} \exp\,(-r_1\underset{-}{x})$$

$$= 0.04285(4.13059)\exp(-0.03097\cdot 12.5)$$

$$= 0.12018$$

Para el grupo de edades 40-45 se tiene que:

$${}_5s^{70}_{40} = \{\frac{H(5)}{H(40)}\}^{-0.01614} \{2.85825 + (-0.01614)35(-1.59697)\}$$

$$= 3.01131$$

Una vez obtenido este valor, se calcula entonces el - valor del parámetro r_1 correspondiente a este grupo de e-- dades (véase (2.34)); entonces,

$$r_1 = 0.02251 + \frac{1}{42.5} \ln \frac{{}_5s^{70}_{40}}{{}_5L_{40}}$$

$$r_1 = 0.02251 + \frac{1}{42.5} \ln \frac{3.01131}{2.85825}$$

$$= 0.02374$$

Por último, queda por calcular el valor de la estructura por edad cuasi-estable (véase (2.36)); entonces,

$${}_5c^{70}_{k,40} = 0.04285 \; {}_5s^{70}_{40} \exp(-r_1 \underline{x})$$

$$= 0.04285(3.01131)\exp(-0.02374 \cdot 42.5)$$

$$= 0.04705$$

Para los demás valores, véase el cuadro 1 (p.82).

En la siguiente gráfica se muestra la estructura por edad de 1970 de la población femenina mexicana y la estructura por edad cuasi-estable que arroja el modelo.

Como medida para determinar la calidad del ajuste se calculo el error medio, esto es:

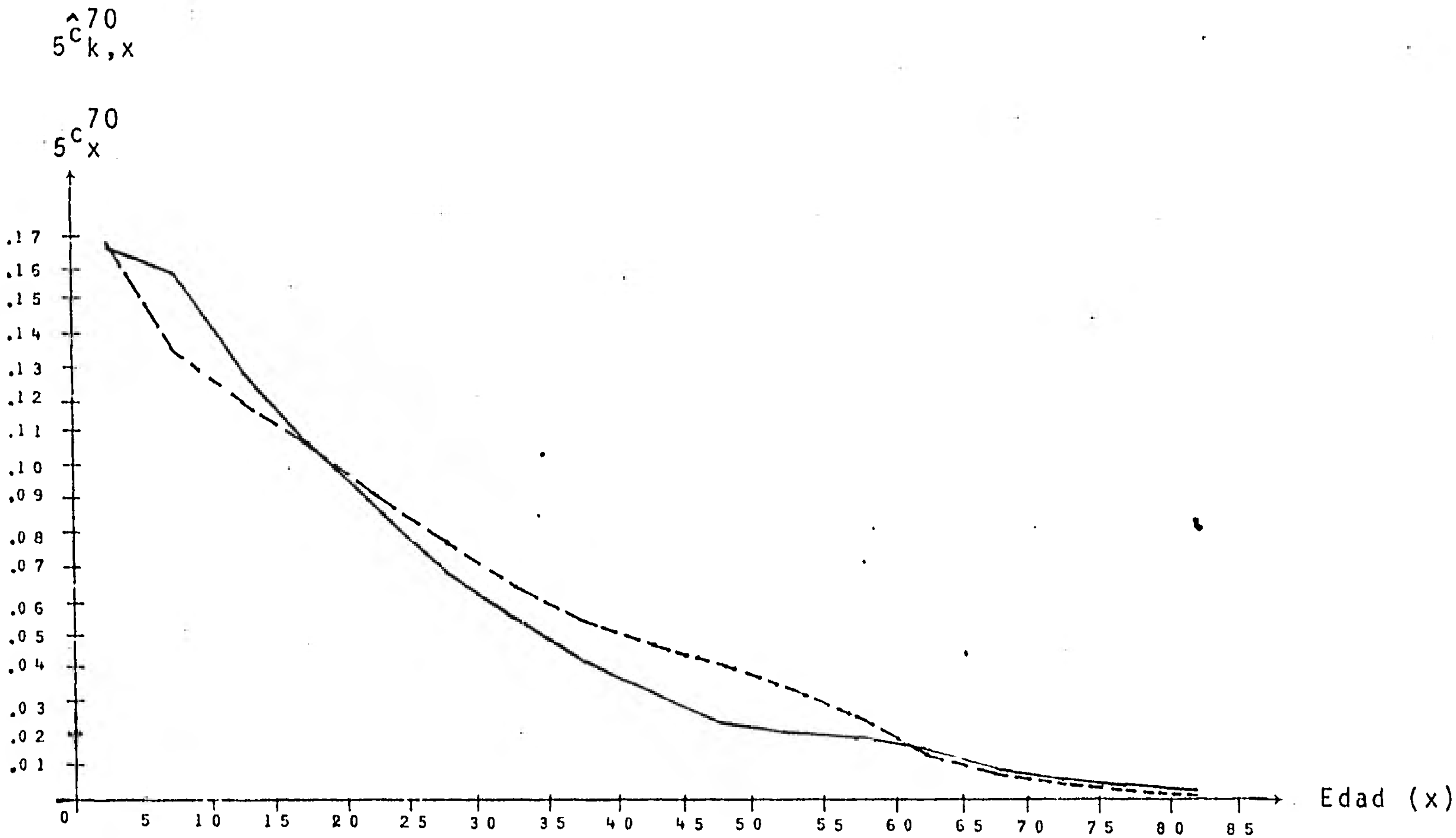
$$e_m = \frac{\sum_{x=0}^{80} \left| {}_5c^{70}_{x} - {}_5\hat{c}^{70}_{k,x} \right|}{18} ;$$

efectuando los calculos correspondientes, se obtiene que:

$$e_m = 0.00509 ,$$

lo cual indica que se trata de un buen ajuste.

Gráfica: estructura por edad de la población femenina de México (1970) y estructura por edad cuasi-estable.



$_5c^{70}_{x}$: ———

$_5c^{70}_{k,x}$: – – –

Cuadro 1

Resultados de la aplicación del modelo a la población femenina de México, 1970.

Edad (x) en años.	${}_5c_x^{70}$ a)	${}_5s_x^{70}$	r_1	${}_5c_{k,x}^{70}$ b)	${}_5\hat{c}_{k,x}^{70}$
0	0.16623	4.55675	0.05866	0.16862	0.16706
5	0.15860	4.27474	0.03827	0.13747	0.13620
10	0.12935	4.13059	0.03097	0.12018	0.11907
15	0.10610	3.97586	0.02782	0.10470	0.10373
20	0.08710	3.79175	0.02621	0.09009	0.08925
25	0.06974	3.59034	0.02516	0.07701	0.07630
30	0.05426	3.38229	0.02434	0.06571	0.06510
35	0.05283	3.18547	0.02384	0.05583	0.05531
40	0.04031	3.01131	0.02374	0.04705	0.04661
45	0.03342	2.81738	0.02372	0.03912	0.03876
50	0.02493	2.58688	0.02376	0.03184	0.03154
55	0.02112	2.31080	0.02387	0.02510	0.02487
60	0.01932	1.97570	0.02406	0.01882	0.01865
65	0.01478	1.57807	0.02431	0.01310	0.01298
70	0.01019	1.12705	0.12458	0.00813	0.00805
75	0.00551	0.67386	0.02478	0.00423	0.00419
80	0.00415	0.31415	0.02469	0.00176	0.00174
85	0.00395	0.10597	0.02313	0.00060	0.00059

a) Fuente: IX Censo General de Población y Vivienda. 1970. (Resumen General) p. 37.

b) Como la suma total no es igual a uno, entonces se relativiza.

4.) Conclusiones.

Ansley Coale fue el primero que usó la palabra poblaciones cuasi-estables para referirse a aquellas que, siendo estables en un momento dado en el tiempo, comenzaron entonces a experimentar un proceso de desestabilización como consecuencia de un descenso en la mortalidad, mientras mantenían fijo el nivel de la fecundidad. El modelo elaborado por Coale (1975) orientó en un principio la construcción del propuesto aquí; aunque al final ambos modelos resultaron completamente diferentes, debido tanto al supuesto hecho en el tipo de descenso en la mortalidad como en la manera como fueron concebidos el análisis de los efectos en la estructura por edad y la forma de aplicación.

Si bien aquí no se explicó el modelo elaborado por Coale, conviene señalar que mientras en el de él se considera un descenso de la mortalidad diferencial por edad, basado en el patrón exhibido por las tablas modelo "Oeste" de Coale y Demeny (1966) para los diferentes niveles; en el presente trabajo se consideró un descenso porcentual igual para todo el rango de edades.

En lo referente a la aplicación de los modelos, también existe una importante aunque pequeña diferencia. Ambos modelos requieren el conocimiento de la estructura por edad y la tasa de crecimiento demográfico al momento final y el tiempo que tiene descendiendo la mortalidad, pero mientras el de Coale requiere además el conocimiento de la tasa de crecimiento al momento inicial, el aquí propuesto requiere el conocimiento de la tasa bruta de natalidad al momento final. La diferencia consiste en que para determinar la tasa de crecimiento inicial pudieron intervenir censos de calidad dudosa -por lo lejanos en el tiempo- que pudieron subestimar su valor; en cambio, en el modelo aquí propuesto, la tasa bruta de natalidad se estima con estadísticas recientes, presumiblemente de mejor calidad que las antiguas. Es más, aún y cuando la cobertura de los nacimientos recogidos por el registro civil fuera deficiente, las relaciones matemáticas presentadas en el primer capítulo de este trabajo permiten transformar, en la tasa bruta de natalidad, la paridad media final o promedio de hijos por mujer entre 45 y 50 años de edad, información contenida por los censos de población recientes.

Bibliografía.

Brass, William. (1974). "Sobre la escala de la mortalidad" en Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados. Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago de Chile, pp. 134-180.

Coale, Ansley. (1956). "The effects of change in mortality and fertility on age composition" en Milbank Memorial Fund Quarterly Vol.34, pp. 79-114.

——————(1963). "Estimates of various demographic measures through the quasi-stable age distribution" en Emerging Techniques in Population Research: Proceedings of the 1962 Annual Conference of the Milbank Memorial Fund, pp. 175-193.

——————(1971). "Constructing the age distribution of a population recently subject to declining mortality" en Population Index Vol. 36, pp. 75-82.

——————(1975). "Birth Sequences and Age Distribution with Changing Mortality" en The Growth and Structure of Human Population. Princeton University Press, Princeton, pp. 152-164.

Coale, A. y Demeny, P. (1966). Regional Model Life Tables and Stable Population. Princeton University Press, Princeton, p(20).

Johnston, J. (1979). Métodos de Econometría. Ed. Vicens-Vives, Barcelona, España, pp. 14-36.

Keyfitz, Nathan. (1977). "Effect on $\overset{0}{e}_0$ of a given change in $\mu(x)$" en Applied Mathematical Demography. John Wiley & Sons, Nueva York, pp. 62-66.

——————(1977). Introduction to the Mathematics of Population. Addison-Wesley, Reading Massachusetts, pp. 3-7.

López, Alvaro. (1967). "Asymptotic properties of a human age distribution under a continuous net maternity function" en Demography 4, pp. 680-687.

Pollard, J.H. (1973). Mathematical models for the growth of human populations. Cambridge University Press, Gran Bretaña, pp. 3-27.