Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE RAMBERG Y SCHEMEISER

T E S I S

Que para obtener el título de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

JUAN VICTOR BARROSO MARTINEZ

México, D. F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

ESTUDIO DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE RAMBERG Y SCHEMEISER

I N D I C E

INTRODUCCION

Uno de los problemas básicos en la construcción de modelos estocásticos, es la obtención de la distribución asociada a la variable aleatoria.

Usualmente los libros de introducción a la estadística suponen que la distribución es normal para muchos de los fenómenos de la naturaleza.

Dado que esta suposición no es cierta, para algunos de los fenómenos, se requiere un método o varios métodos que permitan encontrar la forma funcional de la variable aleatoria bajo estudio.

Dentro de los campos en que se requiere conocer la distribución están:

Fiabilidad
Control estadístico de calidad
Teoría de colas
Simulación de sistemas
Teoría de decisiones
Etc.

Para determinar si la distribución elegida es o no la indicada, existen pruebas estadísticas que lo determinan, por ejemplo la prueba W, cuando se supone una distribución Normal o Log-Normal; la prueba WE, cuando se supone una distribución exponencial; sin embargo la prueba Ji-cuadrada, es la más comunmente usada por sus propiedades que la hacen más versátil.

Estas pruebas normalmente se realizan para funciones de distribución conocidas (o estándar), sin embargo, cuando el criterio de aceptación no se satisface, se hace necesario utilizar métodos más elaborados, que permitan obtener la forma funcional requerida, por tal motivo, se presenta la distribución empírica unimodal propuesta por Ramberg y Schemeiser (Lambda generalizada), por su versatilidad y fácil manejo.

En el presente trabajo se estudia esta función de distribución. Las bases teóricas son estudiadas en los primeros tres capítulos: I Probabilidad, donde se apoya la teoría matemática de la estadística; II Familias de funciones de probabilidad en una variable aleatoria, las cuales se encuentran frecuentemente en los textos de Estadística; y III Descripción de los modelos para obtener una familia de distribuciones probabilísticas que englobe a las familias de distribuciones incluídas en el Capítulo II, en este capítulo se presentan distintos métodos para abordar el problema anterior, describiendo en particular la distribución Lambda generalizada. En los Capítulos IV y V se describe la obtención de los parámetros de la distribución Lambda generalizada, y las aplicaciones directas que tiene dicha distribución. Y, por último, en el Capítulo VI se dá un programa Fortran para ajustar la distribución Lambda generalizada.

I. PROBABILIDAD

La Probabilidad es una disciplina matemática, como es el caso de la Geometría. En cada rama de las ciencias debemos distinguir cuidadosamente tres aspectos:

a) El contenido lógico formal
b) El antecedente intuitivo
c) Las aplicaciones

El carácter y el encanto de toda la estructura, no pueden ser apreciados sin considerar estos tres aspectos relacionados adecuadamente.

a) El contenido lógico formal

Desde el punto de vista axiomático, las matemáticas se ocupan solamente de relaciones entre cosas indefinidas. Un buen ejemplo de este aspecto es el juego de ajedrez. Es imposible "definir" el ajedrez de otra manera que no sea estableciendo un conjunto de reglas. El tablero y las piezas son una ayuda, pero se pueden prescindir de ellos, lo esencial es saber como se mueven las piezas. De la misma manera, la Geometría no se ocupa de lo lo que en un punto y una recta "en la realidad". Se quedan como ideas indefinidas. Ahora bien, los axiomas de la Geometría establecen las relaciones entre estos conceptos.

b) Antecedentes intuitivos.

En contraste con las reglas de ajedrez, los axiomas de la Geometría se refieren a un conocimiento intuitivo del medio ambiente. Y este conocimiento aumenta y se desarrolla conforme a la experiencia. Por ejemplo, el jugador principiante de ajedrez, confundido, se mueve cautelosamente por medio de reglas individuales, mientras el jugador experto asimila una situación complicada y es incapaz de explicar racionalmente su intuición. De manera parecida la intuición matemática crece con la experiencia.

3) Las Aplicaciones

Los conceptos de la Geometría, se identifican con ciertos objetos físicos, pero el proceso es tan flexible y tan variable que es imposible dar reglas generales. Por ejemplo, la idea de cuerpo rígido es fundamental y útil, sin embargo, ningún objeto es rígido. El tratar un cuerpo como rígido, depende de circunstancias y el grado de aproximación deseado. En las aplicaciones, los modelos matemáticos abstractos sirven de instrumentos; por ejemplo, la idea de números irracionales, en la práctica, no podemos concebirlos como exactos, tenemos que considerar un redondeo, de acuerdo con la precisión y los medios con que se cuenten.

La probabilidad dentro de las matemáticas se le considera como una parte de la teoría de la medida. Es importante recordar en esta parte, la descripción de la probabilidad hecha por A.N. Kolmogorov y B.V. Gnedenko "...De hecho, todo el valor epistemológico de la teoría de probabilidad está basada en ésto: qué fenomenos aleatorios en gran escala y en su acción colectiva crean una regularidad no aleatoria. El concepto de probabilidad sería estéril si no se encontra ra su realización en las frecuencias de la ocurrencia de eventos bajo repeticiones en gran escala en condiciones uniformes...".

Para mostrar el contenido lógico formal de la probabilidad es necesario revisar tres campos de las matemáticas:

A) Conjuntos
B) σ- álgebra
C) Teoría de la medida

Se dará un paranorama general de estos tres aspectos:

A) Conjuntos

Por conjunto se entenderá, cualquier colección, agregado o población de miembros, elementos o puntos. Y se entenderá que los elementos $x_1, x_2 \ldots x_n$, pertenecen al conjunto A, representado por $X_i \in A$ $i = 1, n$. El conjunto que contiene todos los elementos de un experimento, problema o discusión se llama conjunto universal, y se representará por U.

Definición 1. El conjunto que no contiene ningún elemento, se denomina conjunto vacío, representado por $\emptyset$.

Definición 2. Dados dos conjuntos A y B $\in$ U, se dice que la diferencia (representada por A - B) es el conjunto: $X \in A$ pero $X \notin B$.

Definición 3. Dados dos conjuntos A y B $\in$ U, se dice que B consta de los elementos que no están en

A si B = U-A y se presenta por A^c (=B).

Definición 4. Dados dos conjuntos A y B $\in$ U se dice que A está contenida en B, si y sólo si para todo elemento X $\in$ A, se tiene que X $\in$ B, se representa por $A \subset B$.

Se dirá que A = B si y sólo si $A \subset B$ y $A \supset B$.

Definición 5. Dados dos conjuntos A y B $\in$ U se define la unión de conjuntos, como el conjunto cuyos elementos pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos A ó B, y se representan por $A \cup B$. En general dados los conjuntos A_1, A_2,... se define la unión ($\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$) como el conjunto cuyos elementos pertenecen por lo menos a algún A_i, i=1,2,...

Definición 6. Dados dos conjuntos A y B $\in$ U, se define la intersección de estos conjuntos, como el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B y se representa por $A \cap B$ ó AB. En general dados los conjuntos A_1, A_2,..., se define la intersección ($\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$) como el conjunto cuyos elementos pertenecen a todos los A_i i=1,2,...

Se dirá que los conjuntos A_1, A_2..., son mutuamente ajenos si para todo par de conjuntos $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Notación: se usará, para A y B, dos conjuntos de U que $A \cup B = A + B$ si $A \cap B = \emptyset$.

En general

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1} A_i \quad \text{si} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

A continuación se enunciarán algunas propiedades de los conjuntos:

1. Idem potencia $A \cap A = A$
   $A + A = A$

2. Conmutativa $A \cap B = B \cap A$
   $A + B = B + A$

3. Asociativa $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   $A + (B + C) = (A + B) + C$

4. Distributiva $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$
   $A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$

6. $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A + \emptyset = A$
   $A \cap U = A$ $A \cap A^c = \emptyset$
   $A + A^c = U$

7. De Morgan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A^c)^c = A$

8. Si $A_1 \subset A_2$ entonces $A_1^c \supset A_2^c$

   $A_1^c = A_2^c + (A_2 - A_1) \supset A_2^c$

   $A_1^c \supset A_2^c$

Por lo cual las siguientes relaciones son equivalentes:

a) $\bigcup_k A_k = B \subset (\bigcap_k C_k)^c$

b) $\bigcap_k A_k^c = B^c \supset \bigcap_k C_k$

c) $\bigcup_k A_k = B \subset \bigcup_k C_k^c$

de 8 aplicado en a) $B^c \supset [(\bigcap_k C_k)^c]^c = \bigcap_k C_k$

y de 7 aplicado en a) $(\bigcup_k A_k)^c = \bigcap_k A_k^c$

por lo tanto se obtiene b).

de 7 aplicado en a) se tiene $(\bigcap_k C_k)^c = \bigcup_k C_k^c$

por lo tanto se obtiene c)

con lo cual se tiene que de b) se obtiene c).

por lo tanto a), b) y c) son equivalentes.

Si por una instancia $\mathcal{U}$ es la recta real (esto es, $x \in \mathcal{U}$ tal que $-\infty < x < +\infty$)

Entonces un intervalo en la recta real es un conjunto o subconjunto del conjunto $\mathcal{U}$, pero el conjunto de todos los intervalos, es un conjunto de conjuntos.

Al conjunto de conjuntos es llamado clase. Como una clase es un conjunto, cumple con las propiedades de conjuntos antes mencionadas, siendo el conjunto de conjuntos una clase y el conjunto un elemento.

B) σ- álgebra

Un anillo (o anillo Booleano) de conjuntos es una clase no vacía R de conjuntos que cumplen:

Sean E y F conjuntos de R, entonces $E \cup F \in R$ y $E - F \in R$

En otras palabras, un anillo es una clase de conjuntos no vacía y que es cerrada con respecto a la unión y a la diferencia (esto es, que tanto el conjunto unión, como el conjunto diferencia de los conjuntos E y F, pertenecen a la clase R).

Un álgebra (o álgebra Booleana) de conjuntos es una clase no vacía R de conjuntos tales que:

a) Si E y F son conjuntos tales que $E, F \in R$, entonces $E \cup F \in R$.

b) Si $E \in R$, entonces $E^c \in R$.

como

$$E - F = E \cap F^c = (E^c \cup F)^c$$

Entonces, toda álgebra es un anillo. La relación entre el concepto general de anillo y el muy espe cial concepto de álgebra es, que un álgebra puede ser caracterizada como un anillo que contiene a $\mathcal{U}$ donde:

$$E^c = U - E,$$

y $E \in R$, entonces $U = E \cup E^c \in R$.

Un σ-anillo es una clase R no vacía de conjuntos tales que

a) Si $E \in R$ y $F \in R$, entonces $E - F \in R$

b) Si $E_i \in R$, $i=1,2,\ldots$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in R$

En otras palabras, un σ- anillo es un anillo cerrado con respecto a uniones numerables[1/].

Definición 7. Una σ- álgebra de conjuntos, se define como una clase de conjuntos $\mathcal{A}$ no vacía tal que:

a) Si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$, entonces $A - B \in \mathcal{A}$

b) Si $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,2,\ldots$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

En otras palabras, una σ- álgebra es un σ- anillo que contiene a $\mathcal{U}$.

1/numerable: Toda sucesión finita o infinita que tiene correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales.

C) Teoría de medida

Una función de conjuntos, es una función cuyo dominio de definición es una clase de conjuntos. Una función de conjuntos de valor real μ definida sobre una clase R de conjuntos, es aditiva si, siempre que se cumpla lo siguiente:

Sean E, F conjuntos de la clase R $E \cup F \in R$ y $E \cap F = \emptyset$, entonces $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$

Una función de conjuntos de valor real μ definida sobre una clase R es finitamente aditiva, si para toda clase finita $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ de conjuntos ajenos en E cuya unión está también en R, se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

Una función de conjuntos de valor real μ definida sobre una clase R, es numerablemente aditiva si, para toda secuencia $\{E_n\}$ de conjuntos ajenos en R cuya unión está en R, se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Una medida es una función de conjuntos μ de valor real, no negativa, y numerablemente aditiva, definida sobre un anillo R, y tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

Si μ es una medida sobre un anillo R, un conjunto E en R, se dice que tiene medida finita si $\mu(E) < \infty$; la medida de E es σ-finita si existe una secuencia $\{E_n\}$ de conjuntos de R tales que:

$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\mu(E_n) < \infty$, n=1,2,...,

Si la medida de todo conjunto E en R es finita (σ-finita), sobre R: Si $U \in R$ (esto es, si R es un álgebra) y $\mu(U)$ es finita o σ-finita, entonces es llamada totalmente finita (o totalmente σ-finita) respectivamente.

La medida μ es llamada completa si cumple lo siguiente,

Sea E un conjunto de la clase R y si $F \subset E$, y $\mu(E)=0$ implica que $F \in R$.

Medidas sobre intervalos.

Sea U la recta real, I la clase de todos los intervalos cerrados por la derecha, y abiertos por la izquierda, esto es, los intervalos de la forma $-\infty < a < x \leq b < \infty$ y R la clase de todas las uniones finitas de los conjuntos de P, i.e., la clase de todos los conjuntos de la forma $\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i < x \leq b_i\}$

Sobre la clase P de intervalos semiabiertos se define una función de conjuntos μ por.

$$\mu((a,b]) = b - a$$

Si a=b entonces $\mu(\emptyset) = 0$.

Todo conjunto el cual pudo ser construido de intervalos I, aplicando un número de veces, finito o infinito, las tres operaciones elementales unión, in tersección y diferencia "resta"; es un conjunto de Borel. Y asumimos que μ está definido para todo conjunto de Borel.

Si $S_1, S_2, \ldots,$ son conjuntos de Borel en U, entonces

$$\text{lím sup } S_n = \text{lím } (S_n \cup S_{n+1} \cup \ldots)$$

$$\text{lím inf } S_n = \text{lím } (S_n \quad S_{n+1} \ldots)$$

Si, lím sup S_n y lím inf S_n son iguales, entonces

$$\text{lím } S_n = \text{lím sup } S_n = \text{lim inf } S_n$$

Y el lím S_n es también un conjunto de Borel.

En particular, la suma y el producto de una sucesión infinita de conjuntos de Borel son, también, conjuntos de Borel.

Si S_i, $i=1,2,\ldots$ son conjuntos de Borel mutuamente ajenos, la medida es numerablemente aditiva, esto es

$$\mu(S_1 + S_2 + \ldots) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \ldots$$

Sea U un conjunto universal no vacío, sea $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de los conjuntos $A_i \in U$, $i=1,2,\ldots$

Definición 8. Una medida $\mu(.)$ sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos $A_i \in U$, $i=1,2,\ldots$ es una función monótona definida en los reales, que cumple las siguientes propiedades:

i) $\mu(A_i) \geq 0$ para toda $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,2,...$

ii) $\mu(U) = m$, si $m=1$, se dice que está normalizada.

iii) Si A_i, $i=1,2,...$, son conjuntos mutuamente ajenos, entonces
$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Estos conceptos forman los cimientos de la teoría de la medida, para conjuntos. Ahora, haciendo referencia a ellos para describir la teoría de probabilidades, es necesario considerar los siguientes aspectos:

D) Eventos
E) Espacio muestral
F) σ-álgebra de eventos
G) Medida de probabilidad

La teoría matemática de probabilidades adquiere valor práctico y significado intuitivo al relacionarla con fenómenos reales, tales como: lanzar un dado, jugar a la ruleta, observar el lapso de vida de una persona, el control de calidad de un proceso de producción, la frecuencia de accidentes, el decaimiento de radioactividad de un radioisótopo,etc.

Todas estas descripciones son coloquiales y por ello, con el objeto de dar un significado a la teoría, debemos, ponernos de acuerdo acerca de lo que se entenderá cuando hablamos de los resultados posibles de un experimento u observación.

Por ejemplo se convendrá en considerar en el lanzamiento de un dado, como únicos resultados (1, 2, 3, 4, 5, 6) y no considerar, que éste, quede parado en alguno de sus vértices, rodar, perderse, etc.

Esta convención simplifica la teoría sin afectar su aplicabilidad.

D) Evento

Se llamarán eventos a los resultados de experimentos u observaciones. Por ejemplo, se hablará del evento de que al lanzar dos dados, resulte seis como suma de los números marcados en las caras respectivamente, equivale a decir que ha resultado (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) o (5,1). Podemos hablar, entonces de eventos simples (o indivisibles) y eventos compuestos (o divisibles). En el ejemplo anterior los cinco resultados posibles, descomponen el evento compuesto "suma seis" en cinco eventos simples. Estos términos quedan indefinidos de la misma manera que los términos punto y línea son indefinidos en Geometría. Estas son las ideas primitivas e indefinidas de la teoría. La colección de todos los eventos simples que representan resultados en los que ha ocurrido el evento compuesto A, describe completamente este evento.

E) Espacio Muestral

Definición 9. Espacio muestral (S) es el conjunto de todos los elementos[1/] posibles de un experimento, como son las observaciones [2/].

1/ La palabra elemento representará a un evento simple.
2/ Los espacios muestrales pueden ser finitos o infinitos sin embargo en este trabajo se utilizaron, tan solo espacios muestrales infinitos.

En correspondencia con el conjunto universal (U) el espacio muestral (S) representa el conjunto universal para la teoría de probabilidades.

A continuación, se hará referencia a las σ-álgebras de eventos que son semejantes a las σ-álgebras de subconjuntos, pero antes se considerarán las relaciones entre los eventos.

Se S un espacio muestral no vacío, sea A eventos de S y X elemento del evento A que se representará como $X \in A$ por lo cual $X \in S$.

A continuación se hace referencia a las definiciones descritas anteriormente en los conjuntos y su representación asociada al término evento en probabilidad.

De la definición 1, el evento que no contiene ningún elemento de S, se denomina por evento imposible, se representa por $\emptyset$.

Por ejemplo, al lanzar un dado y que su cara muestre (resulte) un real distinto a los enteros 1, 2, 3, 4, 5 ó 6, se denomina evento imposible ($\emptyset$).

De la definición 2, sean dos eventos A y $B \in S$, se dice que la diferencia (representada por A - B) es el evento. $X \in A$, pero $X \notin B$.

Por ejemplo, sea B el evento de elegir al azar un número natural que sea par, $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$, A el evento de elegir al azar un número natural,

$A = \{1,2,3,...\}$, entonces $A - B = \{1,3,5,7,...\}$, son los números naturales nones.

A todo evento A le corresponde otro evento definido por la condición, "A no ocurre". Este evento consta de los elementos no contenidos en A.

De la definición 3, dados dos eventos A y $B \in S$ se dice que B consta de los elementos que no están en A si $B = S-A$ y se representa por A^c $(=B)$.

Por ejemplo, sea A el evento de elegir al azar un número natural par, entonces A^c consta de los números naturales nones, si el espacio muestran son los números naturales.

De la definición 4, dados los eventos A y $B \in S$, se dice que A estará contenida en B, si y sólo si para todo elemento X, $X \in A$, se tiene que $X \in B$ y se representa por $A \subset B$.

Por ejemplo sea B el evento de elegir un número natural tal que sea divisible entre 2 y sea A el evento que al elegir un número natural sea divisible entre 100, entonces cada elemento $X \in A$ pertenece a B y $A \subset B$.

Se dirá que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

De la definición 5. Dados los eventos A, $B \in S$ se define la unión de estos eventos, A ó B y se representa por $A \cup B$. En general para los eventos A_1, A_2,... con $A_i \in S$, $i=1, 2, ...,$ se define la unión

($\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$) como el evento cuyos elementos pertenecen por lo menos a algún Ai, i=1, 2,...

Por ejemplo sea A el evento de elegir un natural non y sea B el evento de elegir un número natural par entonces $A \cup B$ es el evento de elegir un número natural.

De la definición 6, dados los eventos A y $B \in S$, se define la intersección, como el evento cuyos elementos pertenecen a A y a B y se representan por $A \cap B$ ó AB.

En general, sean $A_1, A_2, \ldots,$ eventos con $A_i \in S$, i=1, 2,... se define la intersección ($\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} A_i$) como el evento cuyos elementos pertenecen a todos los A_i, i=1,2,...

Por ejemplo, sea A el evento de elegir un número natural par y B el evento de elegir un número natural divisible entre 100, entonces $A \cap B$ es el evento de elegir un número natural par y divisible entre 100.

Se dirá que A_i, i=1,2,..., son eventos ajenos si $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $j \neq i$ i,j=1,2,... notación: sean A y B dos eventos de S, se usará $A \cup B = A + B$ si A y B son eventos ajenos, en general $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ si $A_1, A_2, \ldots,$ son eventos mutuamente ajenos.

F) σ-álgebra de eventos

Sea S un espacio muestral no vacío, sean A_i, $i=1,2,\ldots$, eventos de S.

De la definición 7 se dice que $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra de eventos de S, si satisface las condiciones:

i) $\mathcal{A}$ no es vacía

ii) Dado $A_i \in S$, $i=1,2,\ldots$ $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathcal{A}$

iii) Si $A_i \in \mathcal{A}$, $S - A_i = A_i^c \in \mathcal{A}$, $i=1,2,\ldots$

Una σ-álgebra adecuada, considerando S como la recta real y los eventos representados como intervalos semiabiertos $(a,b]$, será la clase de todos los conjuntos de Borel en S.

G) Medida de probabilidad.

Sea S la recta real, $a_i < x \leq b_i$ son los eventos y considere la clase de todos los conjuntos de Borel en S, entonces una σ-álgebra representada por los conjuntos de Borel $\mathcal{A}$, es una función de valor real, teniendo como dominio a $\mathcal{A}$ y que satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1. Para todo B conjunto de Borel en S corresponde un número, no negativo, P(B).

Axioma 2. P(S) = 1 (esto es, esta normalizada)

Axioma 3. P(B) es una función de conjuntos σ-aditiva, esto es

$$P(B_1 + B_2 + \ldots) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots$$

donde B_1, $B_2, \ldots$ son conjuntos de Borel mutuamente ajenos.

$P(B)$ es llamada la función de probabilidad en S.

Consecuencias de los axiomas.

$$0 \leq P(B) \leq 1$$
$$\text{y} \quad P(B) + P(B^c) = 1$$

Si B_1 y B_2 son dos eventos tales que $B_1 \supset B_2$, se tiene $B_1 = B_2 + (B_1 - B_2)$

entonces $P(B_1) = P(B_2 + (B_1 - B_2))$

Por el axioma 3 se tiene

$$P(B_1) = P(B_2) + P(B_1 - B_2) \geq P(B_2)$$

por lo tanto

$$P(B_1) \geq P(B_2) \quad . \; . \; . \quad (1.a)$$

$$\text{y} \quad P(B_1 - B_2) = P(B_1) - P(B_2) \quad . \; . \; . \quad (1.a')$$

Teorema 1 para toda sucesión de conjuntos B_1, $B_2, \ldots,$ en S, se tiene que converge al conjunto $A \subset S$ y si existe el $\lim_{n \to \infty} P(B_n)$ entonces si

$$P(\lim_{n \to \infty} B_n) = \lim_{n \to \infty} P(B_n) = P(A) \ldots (1.b)$$

se tiene que P es una medida continua en la σ-álgebra.

Demostración.

Sea $\{B_n\}$ una sucesión creciente $(B_1 \subset B_2 \subset B_3) \ldots\}$ y sean $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2 - A_1$, $A_3 = B_3 - (A_1 \cup A_2), \ldots,$

$A_n = B_n - \bigcup_{k}^{n-1} A_k$

donde A_i son mutuamente ajenos y se observa que

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Por lo tanto $P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k}^{n} B_k) = P(\bigcup_{k}^{\infty} B_k) = P(\bigcup_{k}^{\infty} A_k)$

$$= \sum_{k}^{\infty} P(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

Para una sucesión decreciente $\{B_n\}$ $(B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots)$, se consideran el conjunto complemento $(B_1^c \; B_2^c \; B_3^c \ldots)$ que forman una sucesión creciente, entonces por la propiedad demostrada en el límite superior de la sucesión creciente se tiene:

$$P(\bigcap_{k}^{\infty} B_k) = P(s - (\bigcap_{k}^{\infty} B_k)^c)$$

por (2a') se tiene

$$P(\bigcap_{k}^{\infty} B_k) = P(s) - P(\bigcup_{k}^{\infty} B_k^c) = P(s) - \lim_{n\to\infty} P(B_n^c)$$

$$= \lim_{n\to\infty} [P(s) - P(B_n^c)] = \lim_{n\to\infty} P(s - B_n^c)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

Para toda sucesión $\{B_n\}$ monótona, ya se demostró anteriormente, en el caso en que no sea una sucesión monótona se construyen los siguientes conjuntos:

$A_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots$

$A_2 = B_2 \cup B_3 \cup \ldots$

$A_3 = B_3 \cup B_4 \cup \ldots$

.

.

.

$A_n = B_n \cup B_{n+1} \cup \ldots$

Por lo tanto

$A_2 = A_1 - B_1$

$A_3 = A_1 - B_1 \cup B_2 = A_2 - B_2$

.

.

.

$$A_n = A_1 - \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i = A_{n-1} - B_{n-1}$$

.

.

Estos conjuntos son monótonos decrecientes o sea $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$

por lo que es posible aplicar el resultado obtenido con la sucesión decreciente.

$$P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Con lo cual se muestra que la medida de probabilidad es una medida contínua.

La demostración se hizo sin usar las propiedades de los conjuntos de Borel, sin embargo es posible demostrarla, usando las propiedades de estos conjuntos por medio de los lím sup. B_n y lím inf. B_n los que ya se demostraron en el inciso D, de este capítulo.

BIBLIOGRAFIA

1. Alberto Ruiz Moncayo
   Introducción y Métodos de Probabilidad.
   Ed. Trillas, Impreso en México. (1973)

2. M.G. Kendall and W.R. Buckland
   A diccionary of Statistical Terms. Longman group limited (1975). 3a. Edición.

3. Kolmogoroff A.N.
   Fundations of the theory of Probability.
   Ed. Chelsea Prees, Nueva York (1950).

4. Paul R. Halmos
   Measure Theory (International student editions).
   Printed in Holland (1969).

5. William Feller
   Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.
   Ed. Limusa, Impreso en México. Volumen I (1975)

6. Y.A. Rozanov
   Probability Theory a concise course.
   Dover Publications, N.Y. (1977)

7. Cramer H.
   Random Variables and Probability Distributions
   2a. Ed. Cambridge University Press (1970).

II. FAMILIAS DE FUNCIONES DE PROBABILIDAD EN UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Sea S un espacio muestral con función de probabilidad P(.), en particular sea S la recta de los reales.

Definición: Una variable aleatoria X es una función de valor real con dominio en S, cuyos valores están distribuidos conforme a una función probabilística.

Considérese ahora el conjunto particular Bx, con $Bx \in S$, definido por el intervalo en los reales

$X \leq x$ ....(2a)

Para toda variable aleatoria X se define una función F (x) por $F(x) = P(Bx)$

de acuerdo a los axiomas de probabilidad F(X) representa la probabilidad del evento dado por (2a). Entonces F(x) es llamada la función de distribución de la función probabilística dada por P(Bx).

Teorema 2. Toda función de distribución F(x) cumple con las siguientes propiedades:

a) Para toda variable aleatoria X, F es una función creciente, la cual es completamente continua por la derecha y tiende a 0 cuando $X \rightarrow -\infty$

b) $\lim_{X \rightarrow \infty} F(x) = 1$

c) Para todo intervalo I, $a < x \leq b$ se le asocia el valor de la diferencia de valores F(x), para x=b y x=a, no negativa.

$$F(b) - f(a) \geq 0$$

Entonces, toda función F(x) la cual posee las propiedades de los incisos a, b y c determinan de forma única una distribución de probabilidades en S, tal que F(x) representa la probabilidad del evento (2a).

Demostración:

F(x) es una función creciente para toda x, es inmediato de la relación (1a).

Bx, definido como en (2a), si se incrementa x con h, entonces para toda $h > 0$, $Bx + h = \{X \setminus X \leq x+h\}$ entonces $B_{x+h} \supset B_x$

$$F(x+h) - F(x) = P(Bx + h-Bx)$$

si h tiende a cero, consecuentemente el segundo miembro tiende al conjunto vacío. Y por el Teorema 1 el otro miembro tiende a cero, por lo cual F(x) es contínua por la derecha. Y se observa que F(x) tiende a cero cuando $X \to -\infty$ dado que el conjunto Bx tiende al conjunto vacío. Cuando $X \to \infty$ el conjunto Bx tiende al espacio muestral S y consecuentemente F(x) tiende al valor P(S) = 1.

Del inciso a se demuestra que dado que F(I) es una función creciente

$$F(b) - F(a) \geq 0$$

para todo $a < x \leq b$.

De acuerdo al Teorema 2, se puede definir una distribución de probabilidad por su función de probabilidad ó por su función de distribución. La distinción de los métodos es puramente formal y algunas veces es conveniente preferir una de estas.

Ahora se caracterizarán dos importantes clases de funciones de distribución

Supóngase que F(x) crece solamente por saltos, más precisamente, supóngase un conjunto numerable de eventos E_1, $E_2, \ldots$ y en correspondencia los números positivos p_1, p_2, ..., $p_{i=1}$, tal que $F(x) = p_i$ sumando sobre toda j la cual $X_j \leq x$ se llama a este caso discreto.

Para el caso continuo se empezará por definir la integral de Stieltjes sobre los conjuntos de intervalos I definidos anteriormente.

Supóngase que se tienen dos funciones, $\phi(x)$, $F(x)$ continuas para $a < x \leq b$. Subdividiendo $(a,b]$ en subintervalos Ij: $(x_{j-1}, x_j]$ por medio de $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$. En cada intervalo se selecciona arbitrariamente una $\xi_j \in I_j$. Se usará $\Delta_j F(x) = F(x_j) - F(x_{j-1})$ y se considera la suma

$$M = \sum_{j=1}^{m} \phi(\xi_j) \Delta_j F(x)$$

Si U_j es el máximo de ϕ (X) en I_j, y L_j, el mínimo, entonces

$$L_j \leq \phi(\xi_j) \leq U_j \ldots \quad (2b)$$

$$M_L \leq M \leq M_u$$

donde

$$M_L = \sum_{i=1}^{m} L_j \Delta_j F(x)$$

y

$$M_u = \sum_{j=1}^{m} U_j \Delta_j F(x)$$

sea $\varepsilon = \max (U_j - L_j)$ entonces

$$0 \leq M_u - M_L = \sum_{j=1}^{m} (U_j - L_j) \Delta_j F(x) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \Delta_i F(x)$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{m} \Delta i F(x) = \varepsilon \left[F(b) - F(a) \right]$$

De aquí que si los intervalos I_j son nuevamente subdivididos, y este proceso se continúa tal que la norma de la subdivisión, $\delta = \max (X_j - X_{j-1})$, se acerque a cero, entonces como $\emptyset$ (X) es uniformemente continua sobre (a,b] cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$M_u - M_L \rightarrow 0$$

se observa que M_L no es decreciente, dado a las subdivisiones.

De aquí y de (2.b), M se acerca a un límite, dado que M_L y M_u no dependen entre sí de la ξ_i escogida arbitrariamente en I_j, por lo tanto de (2b), límite de M es igualmente no dependiente del valor escogido. Por lo anterior $\lim_{\delta \rightarrow 0} M$ no depende del método de subdivisión.

Se llamará a este límite la integral de Stieljes de $\emptyset$ (X) con respecto a F(x) sobre un intervalo $a < x \leq b$ y se denotará por

$$\lim_{\delta \to 0} M = \int_a^b \emptyset(X)\, d\, F(X)$$

Se examinará también el significado de la integral de Stieltjes cuando F(x) es una función de distribución discreta.

Supóngase que F(x) es una función de distribución discreta con un número n, finito, de saltos con probabilidad P_k en los valores a_k, valores de la variable aleatoria X en el intervalo (a,b].

Suponiendo que se tiene el siguiente orden $a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq b$.

Como los valores de a son distintos para toda subdivisión del intervalo contínuo (a,b), cada intervalo I_j, donde $I_j = \{ \xi \setminus \xi \in (X_{j-1}, X_j) \}$ contendrá, por construcción no más de un punto a_k.

Si I_j contiene al punto a_k, esto es $X_{j-1} < a \leq X_j$, se denota por I'_k, llamando al punto ξ'_j en este intervalo como ξ'_k. Entonces

$$\Delta_j F(x) = \begin{cases} P & \text{si } a_k \in I_j \\ 0 & \text{si } a_k \notin I_j \end{cases}$$

de aquí que $M = \sum_{k=1}^{m} \emptyset\,(\xi'_k)\; P_k$

Ahora como la norma $\delta \to 0$, $\xi'_k \to a_k$ y $\emptyset\,(\xi'_k) \to \emptyset\,(a_k)$, entonces

$$\int_a^b \emptyset(X)\ dF(x) = \sum_{k=1}^{n} \emptyset\ (a_k)\ P_k \ldots\ldots\ldots \quad (2.c)$$

donde se nota que la continuidad de $\emptyset(X)$ en los puntos a_k es esencial. El resultado (2.c) se puede demostrar cuando se tiene un número numerable de puntos a_k, de continuidad de $F(x)$ en $(a,b]$.

En el caso continuo se obtiene la función de densidad de probabilidad $f(x)$ dada por

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ y } dF(x) = f(x)\ dx$$

y de aquí se puede escribir

$$\int_a^b \emptyset\ (X)\ dF(x) = \int_a^b \emptyset\ (X)\ f(x)\ dx. \ldots\ldots \quad (2d)$$

Esta relación puede ser probada como sigue:

Se supondrá que $f(x)$ es continua en el intervalo $(a,b]$. Entonces en cada intervalo I_j se selecciona ξ_j como el valor para el cual

$$\Delta_j F(x) = F'\ (\xi_j)\ (X_j - X_{j-1})$$

La existencia de este valor es garantizado por el teorema del valor medio. Entonces

$$M = \sum_{j=1}^{m} \emptyset\ (\xi_j)\ f\ (\xi_j)\ \ (X_j - X_{j-1})$$

Por el teorema fundamental del cálculo, el límite de esta suma se obtiene cuando la norma se acerca a cero y es el miembro derecho de (2d). La prueba puede ser extendida para el caso donde $f(x)$ es discontinua en $(a,b]$.

La integral de Stieltjes sobre un intervalo infinito se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \emptyset(X)\ dF(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_{a}^{b} \emptyset\ (X)\ dF(x)$$

si y sólo si el límite existe cuando $a \to -\infty$ y $b \to \infty$, independientemente.

Teorema 4. Toda función de distribución puede ser representada como

$$F(x) = a_1\ F_1\ (x) + a_2 F_2(x)$$

donde a_1 y a_2 son números positivos como suma 1, mientras F_1 y F_2 son funciones de distribución tales que:

$F_1(x)$ es absolutamente continua: $F_1(x) = F_i(t)dt$ para todo valor de x

$F_2(x)$ es una "función de escalones"; que se puede representar por una secuencia $f_n(X)$ de funciones tipo B* si, para cualquier función, tipo B, $\emptyset$ (X) el límite

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ \emptyset(x)\ dx$$

* Definición. Una función (casi) tipo B es aquella que es diferenciable en todo punto cualquier número de veces y tal que ella y todas sus derivadas son $O(\ x^{-n})$ cuando x para (alguna N) toda N.

existe. F(x) es la suma de los saltos de F(x) en toda discontinuidad $\leq x$, y se obtiene de las funciones "generalizadas" ó "distribuciones". Como es el caso de la δ (delta) de Dirac, definida por

$$\delta(x) = 0 \quad \text{si } x \neq 0$$
$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1 \text{ para } \varepsilon > 0, \text{ con } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)\ .$$

En base a lo anterior y al teorema 1, F(x) es creciente en $(-\infty < x < \infty)$, continua con valores $F(-\infty) = 0$. $F(\infty) = 1$; entonces existe una función inversa única de F, la cual es llamada función del percentil, R, definida en $(0 \leq p \leq 1)$ la cual es estrictamente creciente y continua en este intervalo. Entonces

$$X = R(P) = F^{-1}(P)$$

donde

$$P = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$ donde se denota el percentil por p.

Como anteriormente se indicó, una distribución de probabilidades es usualmente definida por su función de distribución o por su función de densidad. Alternativamente ésta puede ser definida por su función de percentiles (ó cuantiles), si ésta existe. Por lo cual se afirma que si X es una variable continua con función de percentiles R, y U es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (0, 1). Con la transformación X = R(U) produce una variable aleatoria con función de percentil R.

Momentos de una variable aleatoria.

Si X es una variable aleatoria con función de distribución F(x) y la integral

$$\int_{x\in S} x \; d\,F(x)$$

si es convergente

$$\int_{x\in S} |x| \; d\,F(x) < \infty$$

con

$$\int_{x\in S} d\,F(x) = 1$$

se llamará valor medio, media o esperanza matemática de la variable aleatoria X. Y es representada por:

$$E(x) = \int_{x\in S} x \; d\,F(x) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2h)$$

Una función, g(x) de la variable aleatoria X, por la definición de variable aleatoria.

$$E\,(g(x)) = \int_{x\in S} g(x) \; d\,F(x)$$

Entonces el valor medio de la función particular $g(x) = (x-E(x))^2$ es llamada la variancia de X. La raíz positiva de este valor es llamada la desviación estándar de X, asumiendo la convergencia de la integral

$$\begin{aligned} D^2\,(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2 \; dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x^2-2xE(x)+E^2(x)) \; dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}x^2 \; dF(x) - 2\,E(x)\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x) + E^2(x)\int_{-\infty}^{\infty}dF(x) \\ &= E(x) - 2E^2(x) + E^2(x) = E(x^2) - E^2(x) = \mu_2 \end{aligned}$$

$E(x^2) - E(x) = 0$ sí y sólo si F(x) es constante sobre todo intervalo cerrado, el cual no contiene el valor $x = E(x)$. En este caso extremo se tiene probabilidad 1 de que la variable aleatoria X asuma el valor E(x), y se tenga $F(x) = \epsilon(x-E(x))$, donde $\epsilon(x)$ es la función de distribución particular dada por:

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

$E(x^2) - E^2(x) = 0$ implica que

$$\int_{x \in S} x^2 \, d\, F(x) = \left[\int_{x \in S} x \, d\, F(x) \right]^2$$

como $E(x) = \int_{x \in S} x \, d\, F(x)$, implica que si

$F(x)$ = constante, para toda $X \in [a_i, b_i]$, por lo tanto $F(x) = \epsilon(X - E(x))$ e implica la función $\epsilon(x)$ anteriormente descrita, por lo cual si

$$d\, F(x) = \delta(X - E(x))\, dx$$

$$E(x^2) = \int_{x \in S} x^2 \, d\, F(x) = \int_{x \in S} x^2 \, \delta(X - E(x))\, dx = E^2(x)$$

$$\int_{x \in S} x \, d\, F(x) = \int_{x \in S} x \, \delta(X - E(x))\, dx = E(x)$$

por lo tanto

$$E(X^2) - E^2(x) = 0$$

en los demás casos la desviación estándar es positiva.

Si X es una variable aleatoria con valor medio finito, entonces

$$E(ax + b) = aE(x) + b$$

para toda a y b, constantes con respecto a X.

Si la desviación estándar es finita entonces

$$D(ax + b) = |a|\, D(x)$$

En particular la variable $\frac{x-E(x)}{D(x)}$ tiene un valor medio de 0 y desviación estándar de 1 dado que $D\left(\frac{x - E(x)}{D(x)}\right) = \frac{1}{}$

$\frac{D(x)}{D(x)} = 1$ ya que $D(x) \geqslant 0$

La media y la variancia son los primeros momentos de la distribución de la variable aleatoria X. Ahora consideremos el tercer momento alrededor de la medida o esperanza.

$$\mu_3 = E(x - E(x))^3$$

Este momento es una medida de asimetría (ó "skewnes") de la distribución. Una función de distribución unimodal con $\mu_3 < 0$, es asimétrica cargada a la derecha de la media figura 2.1; si $\mu_3 < 0$ es asimétrica cargada a la izquierda de la media figura 2.2 y si $\mu = 0$ la función es simétrica respecto a la media figura 2.3

El valor

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

mide la asimetría de la distribución relativa a la medida de dispersión μ_2. Esta estandarización también es usada para comparar la simetría de dos distribuciones cuyas escalas son diferentes; $\sqrt{\beta_1}$ se denota también por α_3.

FUNCION DE DENSIDAD

χ^2

CON N= 4 GRADOS DE LIBERTAD

DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA I.B.P.
FPRO/JVBM

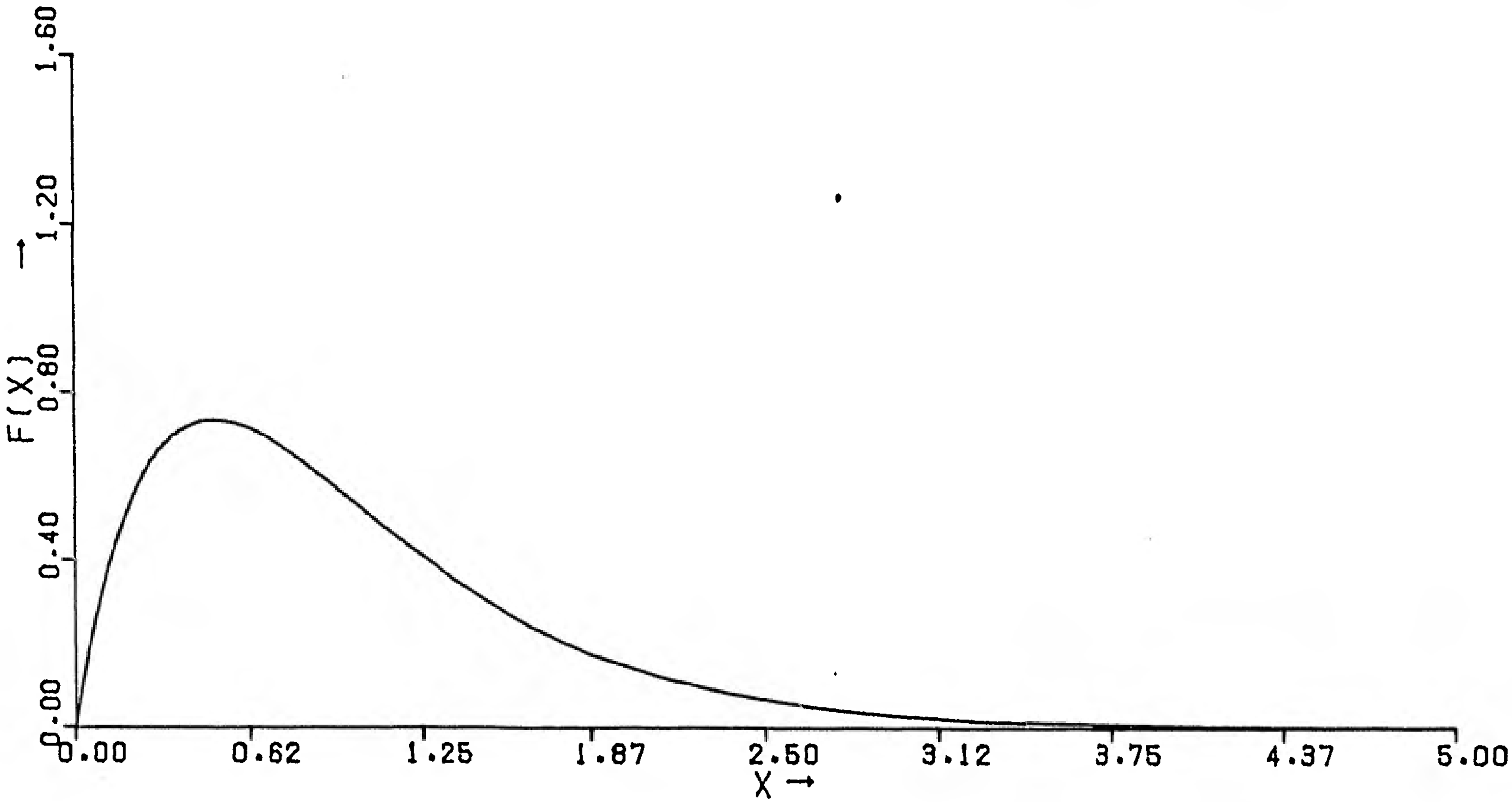


Figura 2.1

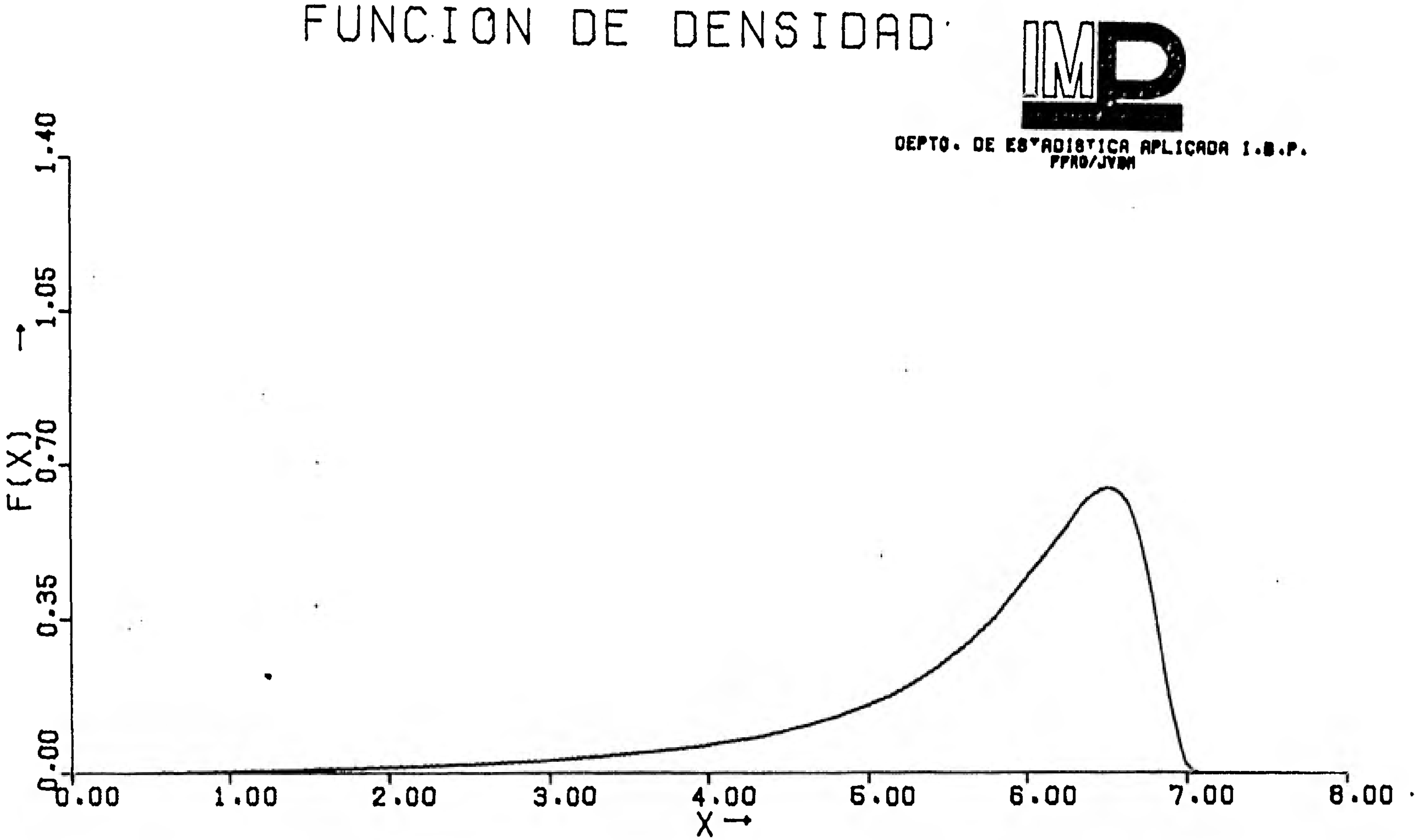

FUNCION DE DENSIDAD
DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA I.B.P.
F(X)
1.40
1.05
0.70
0.35
0.00
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
X

Figura 2.2

FUNCION DE DENSIDAD

T DE STUDENT

DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA I.B.P-
FPRG/JVBM

CON N= 20 GRADOS DE LIBERTAD

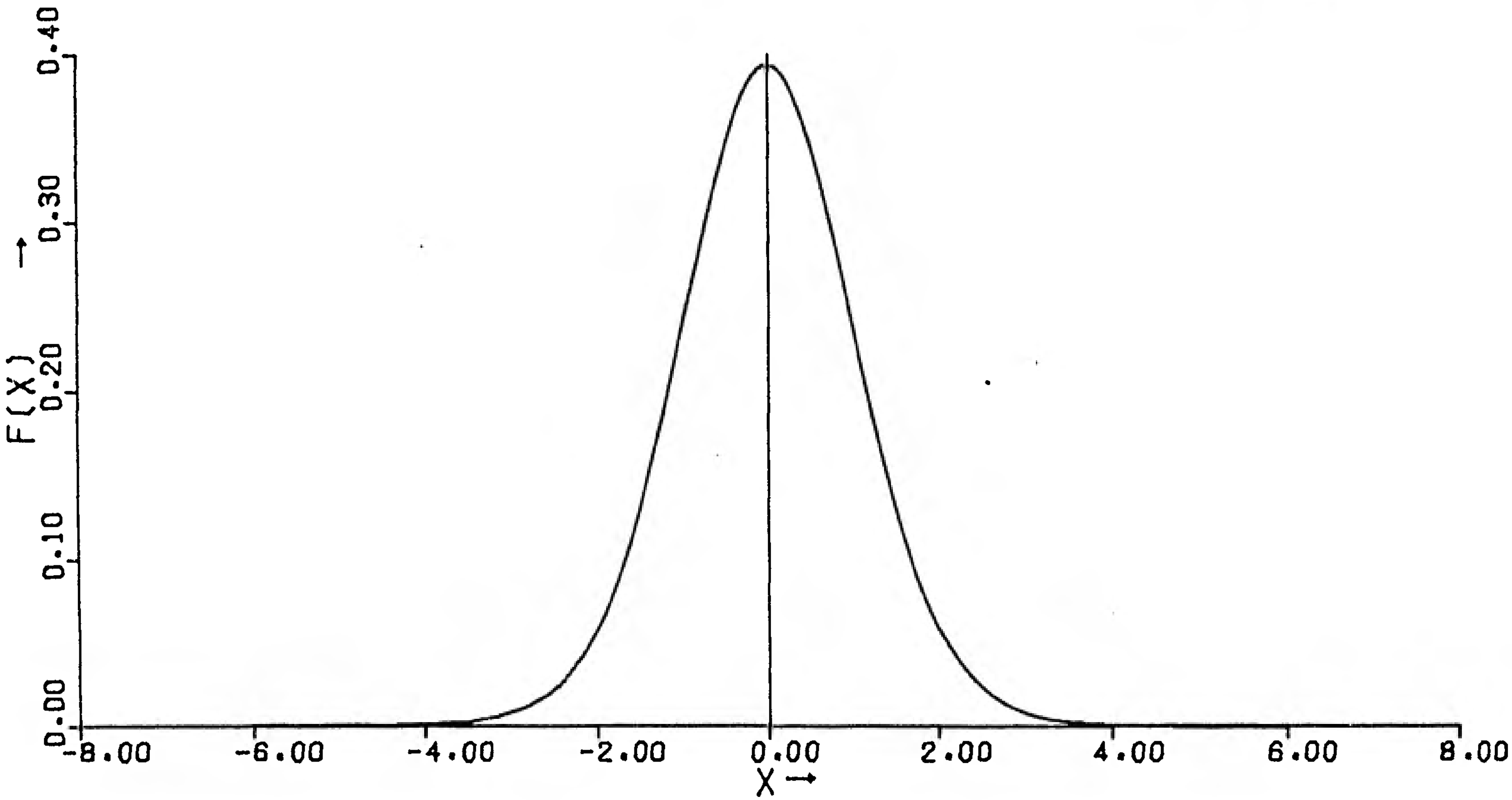


Figura 2.3

Y por último, el cuarto momento alrededor de la media

$$\mu_4 = E(X - E(x))^4$$

Este momento es una medida de "picudés" (kurtosis o aplaneamiento) de la distribución. La razón

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad ; \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$

también conocida como α_4, es una medida relativa de picudés. Para valores positivos de γ_2 mayor será la picudés de la distribución respecto a la distribución normal para el $\gamma_2 = 0$. Por ejemplo, considérese la distribución uniforme y la distribución normal, figura 3.4

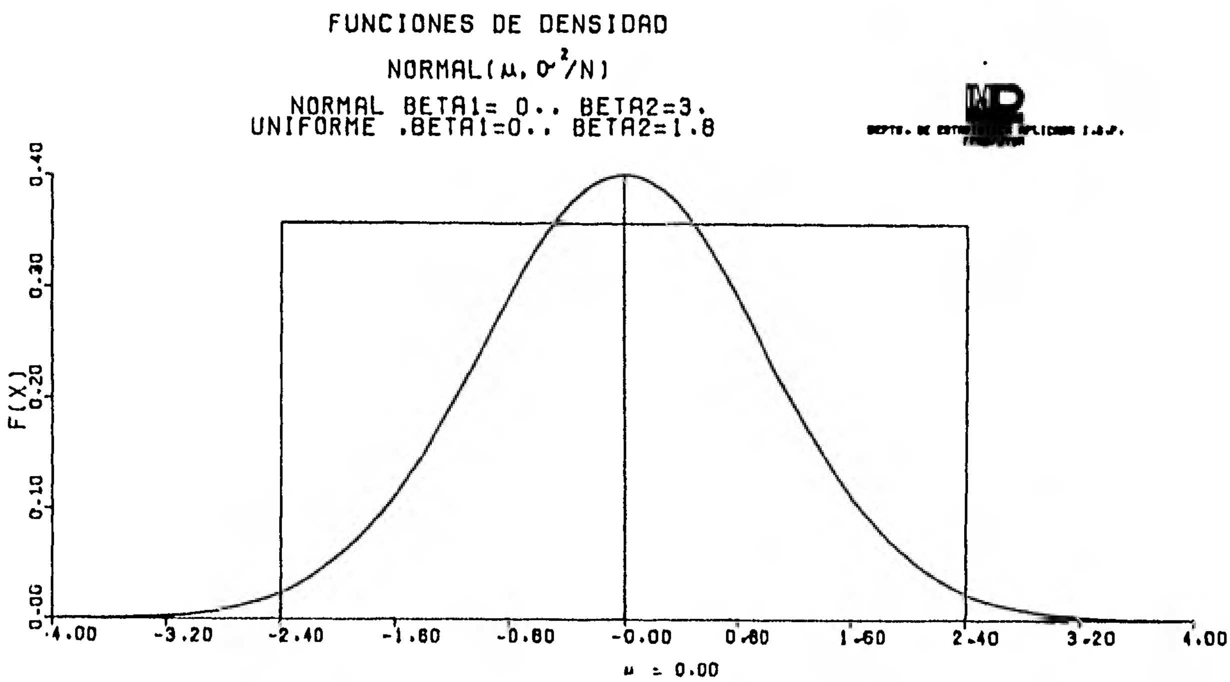


Figura 3.4

Familia de funciones de distribución

A continuación se mencionarán algunas funciones especiales:

Función Gama

Una importante función contínua e infinitamente diferenciable, definida por medio de una integral, que depende de un parámetro, es la función Gama dada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \text{donde} \quad x > 0$$

El integrando es singular en $t = 0$ y $x < 1$.

Propiedades:

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad , \quad x > 0$
2) $\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Función Beta

Una función íntimamente relacionada a Γ es la función Beta dada por:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

esta función es contínua en $x > 0$, $y > 0$.

Propiedades:

1) $\beta(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$
2) $\beta(x, y) = \beta(y, x)$

Estas funciones son utilizadas en distintas funciones de distribución.

Función de distribución Beta

Una variable aleatoria X tiene distribución Beta $(\beta(x\backslash\alpha, \lambda))$ si (para alguna α, $\lambda > -1$)

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha}(1-x)^{\lambda}}{\beta(\alpha+1, \lambda+1)}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Función de distribución Gama

Una variable aleatoria X tiene distribución Gama $G(x|\alpha, \beta, A)$ si (para alguna $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $-\infty < A < \infty$)

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-A)^{\alpha}\, e^{-(x-A)/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}, & \text{si } A \leq x < \infty \\ 0, & \text{si } x \notin [A, \infty) \end{cases}$$

Función de distribución uniforme

Una variable aleatoria X tiene distribución uniforme sobre (0,1) si

$$f_x(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

esta función de distribución es un caso particular de la función de distribución Beta $(x/0, 0)$.

Si $\alpha = 0$ y $\lambda = 0$, se tiene $\beta(x/0, 0)$

entonces

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(1,1)} x^{0}(1-x)^{0} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

o sea

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 \,, & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \,, & si \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

Funciones de distribución exponencial

Una variable aleatoria X tiene distribución exponencial si (para alguna $\beta > 0, -\infty < A < \infty$)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-(x-A)/\beta} & si \quad 0 < A \leq x \\ 0 & si \quad x < A \end{cases}$$

Función de distribución Normal

Una función de distribución, muy importante en la estadística es la distribución Normal o de Gauss.

$$f(x) = k\, e^{-h^2(x-c)^2}$$

definida sobre el intervalo $-\infty < x < \infty$ donde k, h y c son constantes. Varios intentos fueron hechos para establecer esta distribución, a partir de postulados y otras suposiciones básicas.

Gauss, por ejemplo, deduce ésta del postulado de la media aritmética, que para un conjunto de mediciones equiprobables de una observación la media aritmética es el valor más probable. Pearson la deriva como la solución a una ecuación diferencial. Además, puede ser obtenida como la distribución límite de la distribución binomial o de Bernoulli. A continuación se enunciarán algunas razones por las cuales se le considera la distribución continua más importante dentro de la estadística.

1. Algunas veces una variable no está distribuida normalmente, pero se puede convertir en una variable con distribución normal por medio de una transformación sencilla.

2. Existen distribuciones cuyo límite es la distribución normal. Esto se cumple para la distribución binomial, la χ^2, la t de Student y otras.

3. La distribución de los promedios de muestras de tamaño n, en poblaciones con distribuciones distintas a una normal, tienden a la normal cuando $n \to \infty$ (Teorema central del límite).

4. Ciertas variables aleatorias que son básicas para justificar pruebas estadísticas, provienen de una variable aleatoria distribuida normalmente como en el caso de las variables χ^2, t y la F que permiten elaborar pruebas sobre estadísticas.

5. Muchas variables aleatorias que aparecen en la naturaleza están distribuidas normalmente.

6. Otras variables están distribuidas normalmente, en forma aproximada.

A continuación se obtendrá la forma conocida del modelo de esta distribución.

Se puede determinar k en la distribución al aplicar el Axioma 2 de Probabilidad. Si usamos $u = h(x-c)$, se tiene

$$\int dF(x) = \frac{k}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = 1$$

para evaluar la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du$ se observará que

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2}\,du\,dv$$

usando la transformación a coordenadas polares

$u = r\cos\theta$

$v = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dr} & \frac{du}{d\theta} \\ \frac{dv}{dr} & \frac{dv}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) = r$$

por lo cual, se tiene

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\,e^{-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2} = \pi$$

por lo tanto, se tiene que $k = h/\sqrt{\pi}$

La esperanza de la distribución es

$$E(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-h^2(x-c)^2}\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} c\,e^{-h^2(x-c)^2}\,dx + \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)\,e^{-h^2(x-c)^2}\,dx$$

La segunda integral es cero porque el integrando es una función impar de x-c. Así que si denotamos por

$$\mu = E(x) = c \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(x-c)^2} dx = c$$

la variancia es encontrada integrando por partes

$$\sigma^2 = E\left[(x-c)^2\right] = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 e^{-h^2(x-c)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2h^2}$$

Usualmente se escribe la distribución normal con c y h expresados en términos de μ y σ^2, respectivamente, entonces:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

y se hará referencia a esta distribución como $N(\mu, \sigma^2)$

Para encontrar los demás momentos es conveniente que se use la función característica de momentos de la variable aleatoria X, que está dada por la transformada de Fourier, de la densidad probabilística, denotada por la esperanza de $e^{ix\theta}$

$$\phi(\theta) = E(e^{i\theta x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad . \; . \; . \; (2.i)$$

entonces las exponenciales se pueden reescribir como:

$$i\theta x = \frac{x}{\sigma}(i\sigma\theta) - \frac{\mu}{\sigma}(i\sigma\theta) + \frac{\mu}{\sigma}(i\sigma\theta) + \frac{1}{2}(i\sigma\theta)^2 - \frac{1}{2}(i\sigma\theta)^2$$

$$i\theta x - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = -\frac{1}{2}(i\theta\sigma)^2 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)(i\sigma\theta) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + \frac{\mu}{\sigma}(i\sigma\theta) + \frac{1}{2}(i\sigma\theta)^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} + i\sigma\theta\right)^2 + i\mu\theta + \frac{1}{2}(i\sigma\theta)^2$$

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} + i\sigma\theta\right)^2 + i\mu\theta + \frac{1}{2}(i\sigma\theta)^2}\,dx$$

usando

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} + \sigma\theta i, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma}, \quad dy = \frac{dx}{\sigma}$$

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 + i\mu\theta + \frac{1}{2}(i\sigma\theta)^2}\,dy$$

$$= \frac{e^{i\mu\theta + \frac{1}{2}(i\sigma\theta)^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = e^{i\theta\mu + \frac{1}{2}(i\theta\sigma)^2}$$

para evaluar los momentos a partir de la función caracterís tica se emplea la siguiente expresión:

$$\phi^{(n)}(0) = \left[\frac{d^n\phi(\theta)}{d\theta^n}\right]_{\theta=0} = i^n\mu_n \quad \ldots\ldots \quad (2j)$$

ya que de (2i):

$$\left.\frac{d^k\phi(\theta)}{d\theta^k}\right|_{\theta=0} = \frac{(i)^k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{ix\theta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx\Big|_{\theta=0}$$

por ejemplo

$$= (i)^k\mu_k$$

$$\phi^{(1)}(0) = \left[(\mu i - \sigma^2\theta)\, e^{\mu\theta i - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2}\right]_{\theta=0} = i\mu$$

$$\phi^{(2)}(0) = \left[-\sigma^2 e^{\mu\theta i - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2} + (\mu i - \sigma^2\theta)^2 e^{\mu\theta i - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2}\right]_{\theta=0}$$

$$= -\sigma^2 + \mu^2 i^2 = i^2\sigma^2 + \mu^2 i^2 = i^2(\sigma^2 + \mu^2)$$

$$\phi^{(3)}(0) = \Big[-\sigma^2(\mu i - \sigma^2\theta)\, e^{\mu\theta i - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2} + 2(\mu i - \sigma^2\theta)(-\sigma^2)\, e^{\mu\theta i - (\sigma\theta)^2}$$

$$+ (\mu i - \sigma^2\theta)^3\, e^{\mu\theta i - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2}\Big]_{\theta=0}$$

$$= -\sigma^2\mu i - 2\sigma^2\mu i + \mu^3 i^3 = -3\sigma^2\mu i + \mu^3 i^3 =$$

$$= i^3(\sigma^2\mu + \mu^3)$$

$$\phi^{(4)}(0) = \Big[-\sigma^2(-\sigma^2)\, e^{\mu\theta i - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2} - \sigma^2(\mu i - \sigma^2\theta)^2\, e^{i\mu\theta - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2}$$

$$+ 2(-\sigma^2)(-\sigma^2)\, e^{\mu\theta i - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2} + 2(\mu i - \sigma^2\theta)^2(-\sigma^2)$$

$$e^{\mu\theta i - \frac{1}{2}(\sigma\theta)^2}\Big]_{\theta=0}$$

$$= i^4\sigma^4 - \sigma^2\mu^2 i^2 + 2i^4\sigma^4 + 2\mu^2 i^2(-\sigma^2) + 3\mu^2 i^2(-\sigma^2)$$

$$+ \mu^4 i^4$$

$$= i^4(6\sigma^2\mu^2 + 3\sigma^4 + \mu^4)$$

estos son los primeros cuatro momentos no centrales.

La distribución normal es simétrica respecto a la línea x= μ que es la media. El valor σ^2 es la concentración alrededor de la media.

Si $\mu = 0$, entonces $E[(x-\mu)^2] = E(x^2) = \sigma^2$

$$E[(x-\mu)^3] = E(x^3) = 0$$

$$E[(x-\mu)^4] = E(x^4) = 3\sigma^4$$

por lo tanto

$$\beta_1 = \alpha_3^2 = 0$$

$$\beta_2 = \alpha_4 = 3$$

y

$$\gamma_2 = 0$$

Funciones de distribución χ^2 (Ji-cuadrada)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

tiene distribución Ji-cuadrada con n grados de libertad

$$(\chi^2 \sim \chi^2_{(n)})$$

A continuación se obtendrá la función de distribución de esta variable.

Para una mejor apreciación del procedimiento, se considerará para n = 2, y después para cualquier n.

Considerando la transformación

$$y_1 = x_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = y_1$$

$$y_2 = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = (y_2 - y_1^2)^{1/2}$$

entonces el Jacobiano de la transformación es

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(y_2 - y_1^2)^{1/2} y_1 & \frac{1}{2}(y_2 - y_1^2)^{-1/2} \end{vmatrix} = \left| \frac{1}{2(y_2 - y_1^2)^{1/2}} \right|$$

considerando cuatro regiones de integración:

$$x_1 \in R_{11} = (-\infty, \mu] \quad , \quad x_1 \in R_{12} = (\mu, \infty)$$

$$x_2 \in R_{21} = (-\infty, \mu] \quad , \quad x_2 \in R_{22} = (\mu, \infty)$$

como la función de distribución normal es par $f(-x-\mu)=f(x-\mu)$ entonces se pueden considerar las transformaciones $x_i \Rightarrow -x_i$ y $dx_i \Rightarrow -dx_i$ cuando $x_i \in R_{i1}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = -\int_{\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\infty} f(x)\,dx$$

por lo cual las integrales que resultan de las regiones R_{11}, R_{12} , R_{21} y R_{22}

$$\int_{-\infty}^{\mu}\int_{-\infty}^{\mu} f_1(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 + \int_{-\infty}^{\mu}\int_{\mu}^{\infty} f_2(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 + \int_{\mu}^{\infty}\int_{-\infty}^{\mu} f_3(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 + \int_{\mu}^{\infty}\int_{\mu}^{\infty} f_4(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2$$

se reduce a

$$\int_{\mu}^{\infty}\int_{\mu}^{\infty} f_1(-x_1,-x_2) + f_2(-x_1,x_2) + f_3(x_1,-x_2) + f_4(x_1,x_2)\;dx_1\,dx_2$$

entonces el integrando

$$\frac{1}{\sigma^2(\sqrt{2\pi})^2}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2\right]} = f_k(x_1,x_2)$$,de acuerdo a la región de integración, $k=1,4$.

considerando los diferentes exponentes de las R_{ij} regiones y las f_k funciones, y usando las transformaciones en y_i, $i=1,2$

$$\begin{aligned}
R_{11} \oplus R_{22} :\ & [(-y_1-\mu)^2 + ((y_2-y_1^2)^{1/2}-\mu)^2] \\
&= y_1^2 + 2y_1\mu + \mu^2 + y_2 - y_1^2 - 2\mu(y_2-y_1^2)^{1/2} + \mu^2 \\
&= y_2 + 2\mu^2 + 2\mu[y_1 - (y_2-y_1^2)^{1/2}] \\
R_{12} \oplus R_{22} :\ & [(y_1-\mu)^2 + ((y_2-y_1^2)^{1/2}-\mu)^2] \\
&= y_1^2 - 2y_1\mu + \mu^2 + y_2 - y_1^2 - 2(y_2-y_1^2)^{1/2}\mu + \mu^2 \\
&= y_2 + 2\mu^2 - 2\mu[y_1 + (y_2-y_1^2)^{1/2}]
\end{aligned}$$

$$R_{11} \oplus R_{21} \;:\; \left[(-y_1-\mu)^2 + (-(y_2-y_1^2)^{1/2}-\mu)^2 \right]$$

$$= y_1^2 + 2y_1\mu + \mu^2 + y_2 - y_1^2 + 2(y_2-y_1^2)^{1/2}\mu + \mu^2$$

$$= y_2 + 2\mu^2 + 2\mu\left[y_1 + (y_2-y_1^2)^{1/2} \right]$$

$$R_{12} \oplus R_{21} \;:\; \left[(y_1-\mu)^2 + (-(y_2-y_1^2)^{1/2}-\mu)^2 \right]$$

$$= y_1^2 - 2y_1\mu + \mu^2 + y_2 - y_1^2 + 2(y_2-y_1^2)^{1/2}\mu + \mu^2$$

$$= y_2 + 2\mu^2 - 2\mu\left[y_1 - (y_2-y_1^2)^{1/2} \right]$$

entonces el integrando será

$$\frac{1}{\sigma^2(\sqrt{2\pi})^2\, 2\,(y_2-y_1^2)^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_2+2\mu^2)} \left\{ e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}[y_1-(y_2-y_1^2)^{1/2}]} + e^{\frac{\mu}{\sigma^2}[y_1-(y_2-y_1^2)^{1/2}]} + e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}[y_1+(y_2-y_1^2)^{1/2}]} + e^{\frac{\mu}{\sigma^2}[y_1+(y_2-y_1^2)^{1/2}]} \right\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_2+2\mu^2)}}{\sigma^2(\sqrt{2\pi})^2(y_2-} \left[\cosh\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\left[y_1-(y_2-y_1^2)^{1/2}\right]\right) + \cosh\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\left[y_1+(y_2-y_1^2)^{1/2}\right]\right) \right]$$

Si $\mu = 0$, e integrando con respecto a Y_1, como el máximo valor de Y_1 es $\sqrt{y_2}$ la integral se reduce

$$\int_0^{\sqrt{y_2}} \frac{2\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y_2}\, dy_1}{\sigma^2(\sqrt{2\pi})^2(y_2-y_1^2)^{1/2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y_2}}{\sigma^2\pi} \int_0^{\sqrt{y_2}} \frac{dy_1}{(y_2-y_1^2)^{1/2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y_2}}{\sigma^2\pi}\, \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{y_1}{y_2^{1/2}}\right)\Big|_0^{\sqrt{y_2}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y_2}}{\sigma^2\pi}\,\frac{\pi}{2} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y_2}}{\sigma^2\, 2}$$

que es la función de densidad $\chi^2(2)$.

Igualmente para $X_{(n)}$, para toda n, usamos la transformación:

$$
\begin{array}{lcl}
y_1 = x_1 & \Rightarrow & x_1 = y_1 \\
y_2 = x_2 & \Rightarrow & x_2 = y_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
y_{n-1} = x_{n-1} & \Rightarrow & x_{n-1} = y_{n-1} \\
y_n = \Sigma & \Rightarrow & x_n = \left(y_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2}
\end{array}
$$

el Jacobiano de la transformación es

$$
|J| = \left| \begin{array}{ccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
-\left(y_n - \sum_i^{n-1} y_i^2\right)^{-1/2} y_1 & -\left(y_n - \sum_i^{n-1} y_i^2\right)^{-1/2} y_2 & \cdots & -\left(y_n - \sum_i^{n-1} y_i^2\right)^{-1/2} y_{n-1} & \frac{1}{2}\left(y_n - \sum_i^{n-1} y_i^2\right)^{-1/2}
\end{array} \right|
$$

$$
= \left| \frac{1}{2\left(y_n - \sum_i^{n-1} y_i^2\right)^{1/2}} \right|
$$

considerando las 2n regiones

$$
\begin{array}{ll}
x_1 \in R_{11} = (-\infty, \mu], & x_1 \in R_{12} = (\mu, \infty) \\
x_2 \in R_{21} = (-\infty, \mu], & x_2 \in R_{22} = (\mu, \infty) \\
\vdots & \vdots \\
x_n \in R_{n1} = (-\infty, \mu], & x_n \in R_{n2} = (\mu, \infty)
\end{array}
$$

como la función de distribución normal es par entonces se pueden considerar las transformaciones $x_i \Rightarrow -x_i$ y $dx_i \Rightarrow -dx_i$ cuando $x_i \in R_{i1}$, $i=1,n$

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x_i)\,dx_i = -\int_{\infty}^{\mu} f(x_i)\,dx_i = \int_{\mu}^{\infty} f(x_i)\,dx_i$$

por lo cual las integrales que resultan de las regiones R_{ij} , $i=1,n$, $j=1,2$

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{\mu}\int_{-\infty}^{\mu}\cdots\int_{-\infty}^{\mu}}^{n} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n + \overbrace{\int_{-\infty}^{\mu}\int_{-\infty}^{\mu}\cdots\int_{\mu}^{\infty}}^{n} f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

$$+\cdots+\overbrace{\int_{\mu}^{\infty}\int_{\mu}^{\infty}\cdots\int_{\mu}^{\infty}}^{n} f_{2n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$; se reduce a:

$$\overbrace{\int_{\mu}^{\infty}\int_{\mu}^{\infty}\cdots\int_{\mu}^{\infty}}^{n}\{f_1(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)+\cdots+f_{2n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

considerando los diferentes exponentes de las f_k , $k=1,2n$ funciones, y usando las transformaciones en y_i, $i=1,n$

$$2^n\left\{\begin{array}{l}
\overbrace{R_{12}\oplus R_{22}\oplus\cdots\oplus R_{n2}}^{n}:\left[(y_1-\mu)^2+(y_2-\mu)^2+\cdots+\left(\left(y_n-\sum_i^{n-1}y_i^2\right)^{1/2}-\mu\right)^2\right]\\
= y_1^2-2y_1\mu+\mu^2+y_2^2-2y_2\mu+\mu^2+\cdots+y_n-\sum_i^{n-1}y_i^2-2\left(y_n-\sum_i^{n-1}y_i^2\right)^{1/2}\mu+\mu^2\\
= y_n+n\mu^2-2\mu\left[\sum_{j=1}^{n-1}y_j+\left(y_n-\sum_i^{n-1}y_i^2\right)^{1/2}\right]\\
R_{11}\oplus R_{22}\oplus\cdots\oplus R_{n2}:\left[(-y_1-\mu)^2+(y_2-\mu)^2+\cdots+\left(\left(y_n-\sum_i^{n-1}y_i^2\right)^{1/2}-\mu\right)^2\right]\\
= y_n+n\mu^2+2\mu\left[y_1-\sum_{j=2}^{n-1}y_j-\left(y_n-\sum_i^{n-1}y_i^2\right)^{1/2}\right]\\
\vdots\\
R_{11}\oplus R_{21}\oplus\cdots\oplus R_{n1}:\left[(-y_1-\mu)^2+(-y_2-\mu)^2+\cdots\left(-\left(y_n-\sum_i^{n-1}y_i^2\right)^{1/2}-\mu\right)^2\right]\\
= y_n+n\mu^2+2\mu\left[\sum_{j=1}^{n-1}y_j-\left(y_n-\sum_i^{n-1}y_i^2\right)^{1/2}\right]
\end{array}\right.$$

entonces el integrando sería

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_n+n\mu^2)}}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n\, 2\,(y_n-\sum_i^{n-1} y_i^2)^{1/2}}\Big\{ e^{\frac{\mu}{\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{n-1} y_j+(y_n-\sum_i^{n-1} y_i^2)^{1/2}\right]} + e^{\frac{\mu}{\sigma^2}\left[y_1-\sum_{j=2}^{n-1} y_j-(y_n-\sum_i^{n-1} y_i^2)^{1/2}\right]} +$$

$$+\cdots\cdots+ e^{\frac{\mu}{\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{n-1} y_j-(y_n-\sum_i^{n-1} y_i^2)^{1/2}\right]}\Big\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_n+n\mu^2)}}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n\, 2\,(y_n-\sum_i^{n-1} y_i^2)^{1/2}}\Big[\cosh\Big(\frac{\mu}{\sigma^2}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} y_i+(y_n-\sum_i^{n-1} y_i^2)^{1/2}\Big)+\cosh\Big(-\frac{\mu}{\sigma^2}\Big(y_1-\sum_{j=2}^{n-1} y_j$$

$$-(y_n-\sum_i^{n-1} y_i^2)^{1/2}\Big)+\cdots\cdots+\cosh\Big(-\frac{\mu}{\sigma^2}\Big[\sum_{j=1}^{n-1} y_j+(y_n-\sum_i^{n-1} y_i^2)^{1/2}\Big]\Big]\Big\}$$

Si $\mu=0$, e integrando para las Y_i , $i=1, n-1$ variables, donde cada Y_i está acotada por $0\le y_i\le\sqrt{y_n-\sum_{j=i+1}^{n-1} y_j^2}$ para i=1, n-1

$$\int_0^{\sqrt{y_n-\sum_{j=2}^{n-1} y_j^2}} \frac{2^{n-1}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y_n}\, dy_1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n(y_n-\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2)^{1/2}} = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y_n}}{\sigma^n\,\pi^{n/2}}\int_0^{\sqrt{y_n-\sum_{j=2}^{n-1} y_j^2}} \frac{dy_1}{(y_n-\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2)^{1/2}}$$

usando la integral definida encontrada en tablas

$$\int_0^a x^m(a^n-x^n)^p\,dx = \frac{a^{m+1+np}\,\Gamma((m+1)/n)\;\Gamma(p+1)}{n\;\Gamma((m+1)/n+p+1)}$$

haciendo n=2, m=0, p= $\frac{i-2}{2}$

$$a^2 = y_n-\sum_{j=i+1}^{n-1} y_j^2\;, \qquad a=\sqrt{y_n-\sum_{j=i+1}^{n-1} y_j^2} \qquad \text{para}\quad i=1,n-1$$

se tiene, para Y_1, i=1

$$\int_0^{\sqrt{y_n-\sum_{j=2}^{n-1} y_j^2}} \Big(y_n-\sum_{j=2}^{n-1} y_j^2-y_1^2\Big)^{-1/2} dy_1 = \frac{a^0\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(1)}$$

La siguiente integral, para Y_2

$$\int_0^{\sqrt{y_n - \sum_{j=3}^{n-1} y_j^2}} \left(y_n - \sum_{j=3}^{n-1} y_j^2 - y_2^2 \right)^0 d\,y_2 = \frac{a\,\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{2\,\Gamma(\frac{3}{2})}$$

la siguiente integral, para Y_3

$$\int_0^{\sqrt{y_n - \sum_{j=4}^{n-1} y_j^2}} \left(y_n - \sum_{j=4}^{n-1} y_j^2 - y_3^2 \right)^{1/2} d\,y_3 = \frac{a^2\,\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\,\Gamma(\frac{4}{2})}$$

La siguiente integral, para Y_4

$$\int_0^{\sqrt{y_n - \sum_{j=5}^{n-1} y_j^2}} \left(y_n - \sum_{j=5}^{n-1} y_j^2 - y_4^2 \right) d\,y_4 = \frac{a^3\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(2)}{2\,\Gamma(\frac{5}{2})}$$

La siguiente integral para Y_5

$$\int_0^{\sqrt{y_n - \sum_{j=6}^{n-1} y_j^2}} \left(y_n - \sum_{j=6}^{n-1} y_j^2 - y_5^2 \right)^{3/2} d\,y_5 = \frac{a^4\,\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{2\,\Gamma(3)}$$

$\vdots$

Para la i-ésima variable Y_i

$$\int_0^{\sqrt{y_n - \sum_{j=i+1}^{n-1} y_j^2}} \left(y_n - \sum_{j=i+1}^{n-1} y_j^2 - y_i^2 \right)^{\frac{i-2}{2}} d\,y_i = \frac{a^{i-1}\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{i}{2})}{2\,\Gamma(\frac{i+1}{2})}$$

$\vdots$

Para el término $i=n-2$

$$\int_0^{\sqrt{y_n - y_{n-1}^2}} \left(y_n - y_{n-1}^2 - y_{n-2}^2 \right)^{\frac{n-4}{2}} d\,y_{n-2} = \frac{a^{n-3}\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n-2}{2})}{2\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

Y para i=n-1

$$\int_0^{\sqrt{y_n}} (y_n - y_{n-1}^2)^{\frac{n-3}{2}} \, d\, y_{n-1} = \frac{a^{n-2}\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

en este caso $a^2=Y_n$, $a=\sqrt{y_n}$; multiplicando todas las constantes obtenidas en las n-1 integrales, se tiene

$$\left(\frac{2^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y_n}}{\sigma^n\, \pi^{\frac{n}{2}}}\right) \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^n\, \Gamma(1)\,\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(2)\ldots\Gamma(\frac{n-1}{2})\;\; y_n^{\frac{n-2}{2}}}{2^{n-1}\;\;\Gamma(1)\,\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(2)\cdots\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y_n}\; y_n^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\,\sigma^n\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

que es la función de densidad Ji-cuadrada con n grados de libertad, como $Y_n=X^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, entonces

$$\chi^2_{(n)} = \frac{e^{-\chi^2/2\sigma^2}\,(\chi^2)^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\,\sigma^n\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

La función característica de momentos para la distribución Ji-cuadrada

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{i\theta x}\, x^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-x/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{x(-\frac{1}{2}+i\theta)}\, x^{\frac{n-2}{2}}\, dx$$

haciendo

$$z = x\,(\tfrac{1}{2} - i\theta)\,, \qquad dz = (\tfrac{1}{2} - i\theta)\, dx$$

$$x = \frac{z}{(\frac{1}{2} - i\theta)}\,, \qquad dx = \frac{dz}{(\frac{1}{2} - i\theta)}$$

se tiene

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})\,(\frac{1}{2}-i\theta)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-z}\, z^{(n-2)/2}\, dz$$

donde

$$\int_0^\infty e^{-z}\, z^{\frac{n}{2}-1}\, dz = \Gamma(\tfrac{n}{2})$$

por lo tanto

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}(\frac{1}{2}-i\theta)^{n/2}} = \frac{1}{(1-2i\theta)^{n/2}}$$

para obtener los momentos se evaluará usando la relación (2_j).

Los primeros 4 momentos están dados por:

$$\phi^{(1)}(0) = \left[-\tfrac{n}{2}(1-2i\theta)^{-\frac{n}{2}-1}(-2i)\right]_{\theta=0} = -\tfrac{n}{2}(-2i) = in$$

$$\phi^{(2)}(0) = \left\{ni\left[(-\tfrac{n}{2}-1)(1-2i\theta)^{-\frac{n}{2}-2}(-2i)\right\}\right._{\theta=0} = ni(ni+2i)$$

$$= i^2(n^2+2n)$$

$$\phi^{(3)}(0) = \left\{2ni^2(\tfrac{n}{2}+1)(1-2i\theta)^{-\frac{n}{2}-3}(-\tfrac{n}{2}-2)(-2i)\right\}_{\theta=0}$$

$$= 4ni^3(\tfrac{n}{2}+1)(\tfrac{n}{2}+2) = i^3(2n^2+4n)(\tfrac{n}{2}+2) = i^3(n^3+6n^2+8n)$$

$$\phi^{(4)}(0) = \left\{4ni^3(\tfrac{n}{2}+1)(\tfrac{n}{2}+2)(1-2i\theta)^{-\frac{n}{2}-4}(-\tfrac{n}{2}-3)(-2i)\right\}_{\theta=0}$$

$$= 8ni^4(\tfrac{n}{2}+1)(\tfrac{n}{2}+2)(\tfrac{n}{2}+3) = i^4(n^4+12n^3+44n^2+48n)$$

por lo tanto

$E(x) = n$; $E(x^2) = n^2+2n$; $E(x^3) = n^3+6n^2+8n$;

$E(x^4) = n^4+12n^3+44n^2+48n$

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = E(x^2) - E^2(x) = 2n$$

$$E\left[(x-\mu)^3\right] = E(x^3) - 3E(x^2)E(x) + 2E^3(x) = 8n$$

$$E\left[(x-\mu)^4\right] = E(x^4) - 4E(x^3)E(x) + 6E(x^2)E^2(x) - 3E^4(x)$$

$$= 12n^2 + 48n$$

por lo tanto

$$\beta_1 = \alpha_3^2 = \frac{8}{n} \quad y \quad \beta_2 = \alpha_4 = \frac{12}{n} + 3$$

Y $\gamma_2 = \frac{12}{n}$

Función de distribución t de Student

La distribución de la razón de dos variables independientes, una con distribución normal y la otra con distribución $\chi^2(m)$. Sea ξ una variable distribuida N(0,1) y χ^2/m distribuida $\chi^2(m)$. Si estas están independientemente distribuidas, la probabilidad conjunta es:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\xi^2/2}\right)\left(\frac{\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}}{2\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right) e^{-\chi^2/2}\, d\xi\, d\chi^2$$

usando el cambio de variable

$$t = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\chi^2}{m}}} \qquad -\infty < t < \infty$$

$$u = \chi^2 \qquad 0 < u < \infty$$

entonces $\xi = t\sqrt{\frac{\chi^2}{m}}\,, \quad \chi^2 = u$

El Jacobiano de la transformación es

$$|J| = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{u}{m}} & \frac{t}{2\sqrt{um}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{u}{m}}$$

de aquí que la distribución conjunta de t y u es

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(t^2\frac{u}{m}+u\right)} \sqrt{\frac{u}{m}}\, du\, dt$$

para encontrar la distribución marginal de t, se integra con respecto a u

$$g_m(t) = \frac{1}{2\sqrt{m2\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \sqrt{2}\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{t^2}{m}+1\right)\frac{u}{2}}\, du$$

la integral de la función Gama de $\left(\frac{t^2}{m}+1\right)\frac{u}{2}$ con parámetro $\frac{m+1}{2}$ por lo tanto

$$g_m(t) = \frac{\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}}{2\sqrt{m\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{t^2}{m}+1\right)\frac{u}{2}\right]^{\frac{m+1}{2}-1} e^{-\left(\frac{t^2}{m}+1\right)\frac{u}{2}} \left(\frac{t^2}{m}+1\right) du$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}} \left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}$$

$g_m(t)$ es llamada la función de densidad de probabilidad de la distribución t de Student con m grados de libertad.

Para obtener la función característica se empleará la transformación

$$u^2 = \frac{t^2}{m} \Rightarrow 2u\,du = \frac{2t}{m}\,dt$$

$$u^2 m = t^2 \,, \quad t = u\sqrt{m} \,, \quad dt = \frac{m\,2u\,du}{2(u\sqrt{m})}$$

$$dt = \sqrt{m}\,du \quad \text{y con} \quad n = \frac{m+1}{2} \,, \quad \frac{m}{2} = \frac{2n-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}} (1-u^2)^{-n}\,du$$

usando

$$k = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \,, \quad t = u$$

$$\phi(\theta) = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\theta}}{(1+t^2)^n}\,dt$$

Esta integral tiene un punto singular en $t=\sqrt{-1}=i$ por lo que para que su evaluación se usará el teorema de residuos de Cauchy, dado por:

$$\oint_{(c)} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}_{z_1=a_1} f(z_1) + \operatorname{Res}_{z_2=a_2} f(z_2) + \cdots + \operatorname{Res}_{z_k=a_k} f(z_k)\right]$$

donde a_i son puntos singulares encerrados en la región de integración; y el residuo en el polo i-ésimo $\left(\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z)\right)$ puede calcularse por la fórmula siguiente, si éste polo es múltiple:

$$\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\; f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)\,(z-a)^m\right]_{z=a}$$

$$k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz\theta}}{(1+z^2)^m}\,dz = k\,2\pi i\,\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\; f(z)$$

$$\mathrm{Res}\; f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)\,(z-a)^m\right]_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{e^{iz\theta}}{(1+z^2)^m}(z-i)^m\right]_{z=i}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{e^{iz\theta}(z-i)^m}{[(z+i)(z-i)]^m}\right]_{z=i} = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[e^{iz\theta}(z+i)^{-m}\right]_{z=i}$$

Como la integral será tomada sobre el semicírculo superior, cerrado, en dirección contraria a la del movimiento de las manecillas del reloj, se debe cumplir que $\theta > 0$ por lo que se tomará $|\theta|$, para toda θ. Se calcularán las derivadas de los residuos con m=2,3,...,k,...,m.

$$\frac{d\,f(z)}{dz} = (z+i)^{-2}\, e^{iz|\theta|}\left[-\frac{2}{z+i} + i|\theta|\right]$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = (z+i)^{-3}\, e^{iz|\theta|}\left[\frac{3(3+1)}{(z+i)^2} - \frac{2(3)\,i|\theta|}{z+i} + i^2|\theta|^2\right]$$

$$\frac{d^3 f(z)}{dz^3} = (z+i)^{-4}\, e^{iz|\theta|}\left[\frac{-4(4+1)(4+2)}{(z+i)^3} + \frac{3i|\theta|4(4+1)}{(z+i)^2} + \frac{3|\theta|^2 4}{z+i} + i^3|\theta|^3\right]$$

$$\frac{d^4 f(z)}{dz^4} = (z+i)^{-5}\, e^{iz|\theta|}\left[\frac{5(5+1)(5+2)(5+3)}{(z+i)^4} - \frac{4i|\theta|5(5+1)(5+2)}{(z+i)^3} + \frac{6i^2|\theta|^2 5(5+1)}{(z+i)^2} - \frac{4|\theta|^3 i^3 5}{(z+i)} + i^4|\theta|^4\right]$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^k f(z)}{dz^k} = (z+i)^{-(k+1)} e^{iz|\theta|}\left[\sum_{l=0}^{k} \frac{\binom{k}{l}(-1)^{k-l}(i|\theta|)^l}{(z+i)^{k-l}}\begin{cases}\prod_{j=1}^{k-l}(k+j) & si\ l<k\\ 1 & si\ l=k\end{cases}\right]$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{m-1} f(z)}{dz^{m-1}} = (z+i)^{-m} e^{iz|\theta|}\left[\sum_{l=0}^{m-1} \frac{\binom{m-1}{l}(-1)^{m-1-l}(i|\theta|)^l}{(z+i)^{m-1-l}}\begin{cases}\prod_{j=1}^{m-1-l}(m+j-1) & si\ l<m-1\\ 1 & si\ l=m-1\end{cases}\right]$$

Ahora evaluando en Z=i, y multiplicando por $\left(\frac{1}{(m-1)!}\right)$ se obtiene

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{(2i)^{-m} e^{i^2|\theta|}}{(m-1)!}\left[\sum_{l=0}^{m-1} \frac{\binom{m-1}{l}(-1)^{m-1-l}(i)^l|\theta|^l}{2^{m-1-l}\, i^{m-1-l}}\begin{cases}\prod_{j=1}^{m-1-l}(m+j-1) & si\ l<m-1\\ 1 & si\ l=m-1\end{cases}\right]$$

$$= (2i)^{-m} e^{i^2|\theta|}\left[\sum_{l=0}^{m-1} \frac{i^{2m-2-2l+2l+1-m}\,|\theta|^l}{(m-1-l)!\,l!\,(2^{m-1-l})}\begin{cases}\prod_{j=1}^{m-1-l}(m+j-1) & si\ l<m-1\\ 1 & si\ l=m-1\end{cases}\right]$$

$$= (2i)^{-m}\, i^{m-1}\, e^{-|\theta|}\left[\sum_{l=0}^{m-1} \frac{|\theta|^l}{(m-1-l)!\,l!\,(2^{m-1-l})}\begin{cases}\prod_{j=1}^{m-1-l}(m+j-1) & si\ l<m-1\\ 1 & si\ l=m-1\end{cases}\right]$$

$$= \frac{i^{-1} e^{-|\theta|}}{2^{2m-1}}\left[\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2|\theta|)^l}{(m-1-l)!\,l!}\begin{cases}\prod_{j=1}^{m-1-l}(m+j-1) & si\ l<m-1\\ 1 & si\ l=m-1\end{cases}\right]$$

multiplicando por $2ik\pi$ se obtiene la integral buscada:

$$\phi(\theta) = k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz\theta}}{(1+z^2)^m}dz = \frac{k\pi\, e^{-|\theta|}}{2^{2m-2}}\left[\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2|\theta|)^l}{(m-1-l)!\,l!}\begin{cases}\prod_{j=1}^{m-1-l}(m+j-1) & si\ l<m-1\\ 1 & si\ l=m-1\end{cases}\right]$$

Función de distribución F de Snedecor.

Considérese la razón de dos variables aleatorias independientes con distribución χ^2, divididas entre sus grados de libertad.

Sean χ_1^2 y χ_2^2 independientemente distribuidas con m_1 y m_2 grados de libertad respectivamente.

La distribución conjunta es

$$\left(\frac{\left(\frac{\chi_1^2}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}-1} e^{-\chi_1^2/2}}{2\,\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)}\right)\left(\frac{\left(\frac{\chi_2^2}{2}\right)^{\frac{m_2}{2}-1} e^{-\chi_2^2/2}}{2\,\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\right)$$

usando el cambio de variable

$$F = \frac{(\chi_1^2/m_1)}{(\chi_2^2/m_2)} \quad , \quad v = \chi_2^2 \qquad \begin{array}{l} 0 < F < \infty \\ 0 < v < \infty \end{array}$$

entonces

$$\chi_1^2 = v\frac{m_1}{m_2}F \qquad \chi_2^2 = v$$

y el Jacobiano de la transformación es

$$|J| = \begin{vmatrix} v\frac{m_1}{m_2} & \frac{m_1}{m_2}F \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{m_1}{m_2}v$$

la distribución de las variables transformadas es

$$\frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}} F^{\frac{m_1}{2}-1}}{2\,\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2}Fv+v\right)}$$

Integrando con respecto a v, se obtiene la función de distribución de F.

$$\frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}} F^{\frac{m_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} \left(1+\frac{m_1}{m_2}F\right)^{-\frac{m_1+m_2}{2}} \int_0^\infty \left[\left(1+\frac{m_1}{m_2}F\right)\frac{v}{2}\right]^{\frac{m_1+m_2}{2}-1} e^{-\left(1+\frac{m_1}{m_2}F\right)\frac{v}{2}}\, dv$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}} F^{\frac{m_1}{2}-1} \left(1+\frac{m_1}{m_2}F\right)^{-\frac{m_1+m_2}{2}}$$

ésta es la función de densidad de probabilidad F de Snedecor con m_1 y m_2 grados de libertad y se denotará como $F_{(m_1, m_2)}$

La función característica, correspondiente, se obtiene de la forma siguiente:

Reescribiendo el resultado anterior

$$\frac{m_1^{\frac{m_1}{2}}\; m_2^{-\frac{m_1}{2}}\; F^{\frac{m_1}{2}-1} \left(m_2+m_1F\right)^{-\frac{m_1+m_2}{2}}\; m_2^{\frac{m_1+m_2}{2}}}{\beta\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}\right)}\, dF$$

$$= \frac{m_1^{\frac{m_1}{2}}\; m_2^{\frac{m_2}{2}}\; F^{\frac{m_1-2}{2}}\, dF}{\beta\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}\right)\left(m_2+m_1F\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}}} = \frac{k\; F^{\frac{m_1-2}{2}}\, dF}{\left(m_2+m_1F\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}}}$$

donde

$$k = \frac{m_1^{\frac{m_1}{2}}\; m_2^{\frac{m_2}{2}}}{\beta\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}\right)}$$

usando la transformación

$$F = e^{2z}, \quad dF = 2\, e^{2z}\, dz$$

$$\frac{2k\, e^{z(m_1-2)}\, e^{2z}\, dz}{\left(m_2+m_1 e^{2z}\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}}} = \frac{2k\, e^{z m_1}\, dz}{\left(m_2+m_1 e^{2z}\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}}}$$

Ahora considerando

$$\phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k\, e^{i\theta z}\, e^{z m_1}\, dz}{(m_2 + m_1 e^{2z})^{\frac{m_1+m_2}{2}}} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{z(i\theta + m_1)}\, dz}{(m_2 + m_1 e^{2z})^{\frac{m_1+m_2}{2}}}$$

usando la transformación

$u = e^{z}$, $du = e^{z}\, dz$

si $z \in (-\infty, \infty) \Rightarrow u \in (0, \infty)$

$$\phi(\theta) = 2k \int_{0}^{\infty} \frac{u^{(i\theta + m_1) - 1}\, du}{(m_2 + m_1 u^2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}}$$

usando la integral definida (Table of Integral Series and Products, le Gradshteyn, Ryzhik, Academic Press, 1965, número 3.241.4)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\, dx}{(p + q x^{\nu})^{n+1}} = \frac{1}{\nu\, p^{n+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right) \Gamma\left(1 + n - \frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma(1+n)} , \quad 0 < \frac{\mu}{\nu} < n+1$$

y considerando

$\mu = i\theta + m_1$, $p = m_2$, $q = m_1$, $\nu = 2$,

$n = \frac{m_1 + m_2}{2} - 1$

$$\phi(\theta) = 2k \frac{1}{2\, m_2^{\frac{m_1+m_2}{2}}} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{i\theta + m_1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{i\theta + m_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2} - \frac{i\theta + m_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{m_1^{\frac{m_1}{2}}\, m_2^{\frac{m_2}{2}} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{i\theta}{2}} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{2}} \Gamma\left(\frac{i\theta + m_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2} - \frac{i\theta + m_1}{2}\right)}{m_2^{\frac{m_1+m_2}{2}}\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}\ \Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{i\theta}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{i\theta+m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}-\frac{i\theta+m_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{i\theta}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{i\theta+m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2-i\theta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}$$

BIBLIOGRAFIA

1. M. Abramowitz and I.A. Stegun
Handbook of Mathematical Functions
Ed. National Bureau of Standard, Washington (1965)

2. Gradshteyn, Ryzhik
Table of Integrals series and products
Ed. Academic Press (1965).

3. I. Bronshtein and K. Semendiaev
Manual de Matemáticas para ingenieros y estudiantes
Ed. MIR (Moscú). 1977. 3a. Edición.

4. Edward J. Dudewicz
Introduction to Statistics and Probability
Ed. American Sciences Press, Inc, Columbus Ohio
1a. Edición (1976).

5. Murray R. Spiegel
Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas
Serie Schaums. Ed. Mc Graw Hill, Impreso en México
(1980).

6. M.G. Kendall and A. Stuart
The Advanced Theory of Statistics (Vol. I) (1963)
Ed. Hafner, New York. 2a. Ed.

7. Hang G.J. and Shapiro S.S.
Statistical Models in Engineering, New York;
Ed. John Wiley & Sons, Inc. (1967).

8. Watson Fulks
Cálculo Avanzado.
Ed. Limusa, Primera Reimpresión. (1973).

III. DESCRIPCION DE LOS MODELOS PARA OBTENER UNA FAMILIA DE DISTRIBUCIONES PROBABILISTICAS QUE ENGLOBE A LAS FAMILIAS DE DISTRIBUCION INCLUIDAS EN II.

Un problema común en la construcción de modelos estocásticos es seleccionar una distribución apropiada a la variable aleatoria estudiada. La selección es algunas veces un proceso simplificado de distribuciones conocidas como son: Normal, Gama, Log-Normal, Weibull para variables contínuas; Bernoulli, Binomial y Poisson para variables discretas. En muchos casos estas distribuciones escogidas de manera apropiada, o porque el proceso para generar variables seudo aleatorias es fácil.

Una forma usual para escoger una función de distribución apropiada, es utilizando los tres pasos siguientes de manera iterativa:

Paso 1. Se calcula a partir de datos observados y los esperados de acuerdo al modelo seleccionado, un número conocido como prueba estadística.

Paso 2. Se determina la probabilidad de obtener la prueba estadística calculada, considerando que el modelo seleccionado es correcto. Frecuentemente se hace por referencia a las tablas de percentiles de la distribución de la prueba estadística.

Paso 3. Si la probabilidad de obtener la estadística calculada es "baja" se concluye que el modelo considerado no provee una representación adecuada. En caso contrario se concluye que los datos no proveen evidencia que el modelo considerado sea inadecuado.

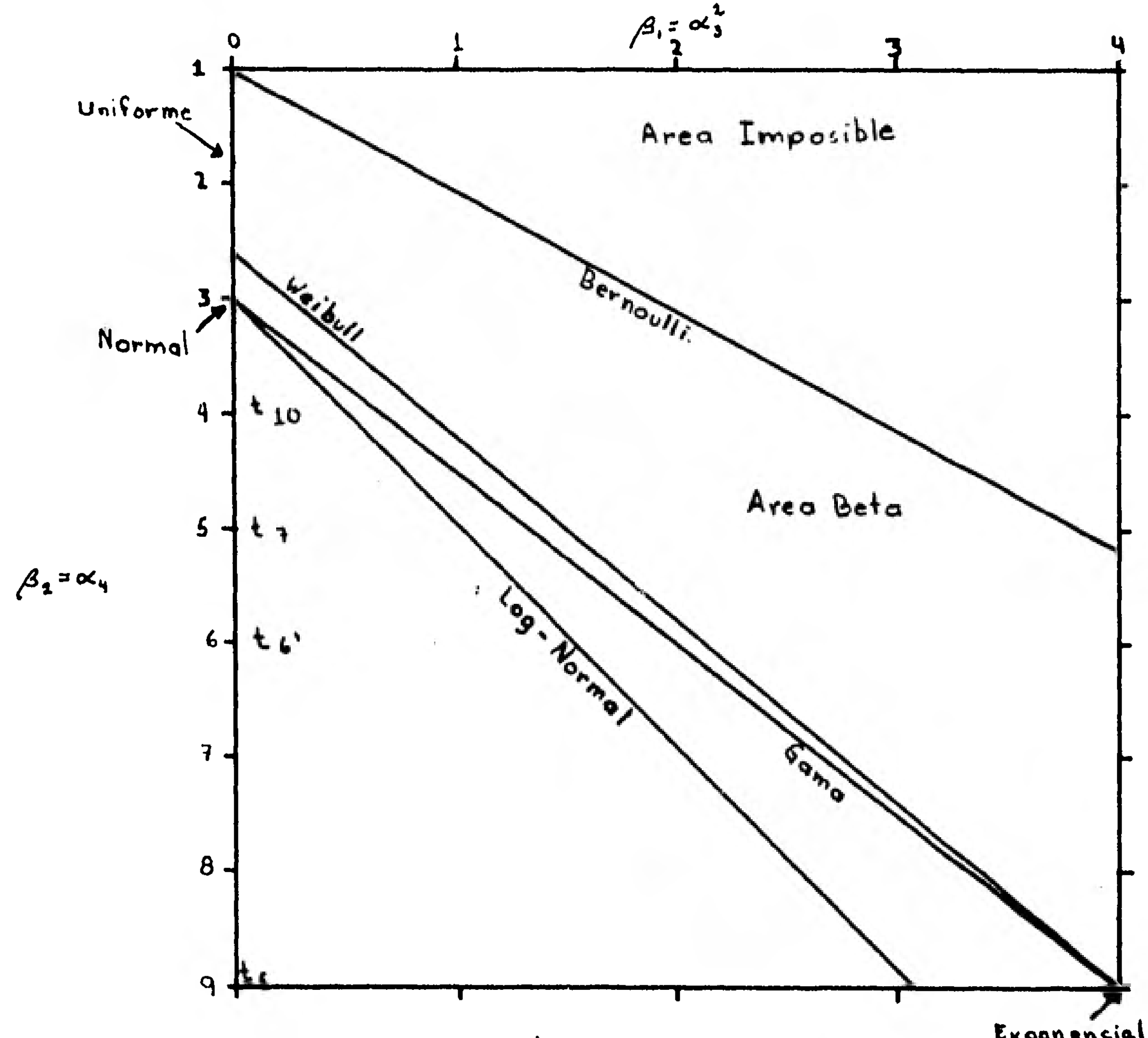
Estos tres pasos son repetidos hasta que el diagnóstico sea satisfactorio. En los casos donde el diagnóstico no sea satisfactorio se recurre a otro método como en el caso de la aproximación de la función inversa de distribución.

A continuación se presentan los métodos más conocidos para obtener los modelos que describen la distribución de alguna variable aleatoria, además se presentan los métodos que se denominan de cuatro parámetros, los que representan un nuevo enfoque a este problema canónico.

Presentación de un criterio para conocer la generalidad de los métodos para seleccionar un modelo que describa la distribución de una variable aleatoria.

El tercer y cuarto momento estandarizados vistos en el capítulo anterior y nombrados por $\beta_1 = \alpha_3^2$, $\beta_2 = \alpha_4$ donde $\alpha_i = E\{[(x-\mu)/\sigma]^i\}$ $i=3,4$ en el cual μ es la media y σ la desviación estándar de X. Considerando el plano (β_1, β_2) figura 3.1 donde se marcan los puntos, líneas y zonas propias a cada función de distribución, como son las distribuciones Bernoulli, Beta, Weibull, Gama, Normal, Log-Normal, t de Student y Laplace; la generalidad de una aproximación depende del área que cubra dicha aproximación, mientras mayor área sea cubierta su generalidad aumenta. Note que las distribuciones simétricas están sobre el eje β_2 $(\beta_1 = 0)$ Bernoulli sobre la línea $\beta_2 - \beta_1 = 1$ la distribución normal $(\beta_1, \beta_2) = (0, 3)$ la distribución t de Student, es la línea $\beta_1 = 0$ abajo de la normal; las distribuciones asimétricas se encuentran dispersas alrededor del cuadro; por ejemplo: la distribución exponencial está en el punto $(\beta_1, \beta_2) = (4, 9)$, sobre las líneas Weibull y Gama. Una característica de las distribuciones representadas es que cubren una región del plano (β_1, β_2) por ejemplo:

las distribuciones usualmente consideradas generales (Weibull, Log-Normal, Gama y t de Student) son asociadas con líneas, mientras modelos límite (normal, exponencial y uniforme) son representados por puntos. De lo anterior se concluye que las distribuciones estándar corresponden tan sólo una pequeña parte de los modelos disponibles.



$\beta_1 = \alpha_3^2$
$\beta_2 = \alpha_4$
Uniforme
Area Imposible
Bernoulli
Weibull
Normal
Area Beta
Log-Normal
Gama
Exponencial
t_{10}
t_7
t_6
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

figura 3.1

En los métodos de aproximación a la función inversa de la distribución existen tres técnicas:

a) Desarrollo en series

b) Regresión polinomial

c) Rectangular

A continuación se trata, brevemente, estas técnicas.

a) Desarrollo en series

Esta técnica se aplica a una variable aleatoria que tiene cuatro parámetros ó cuatro ó más momentos.

Por lo que se pretende desarrollar a la función de densidad o de distribución dentro de una serie infinita de términos, basándose en algunas familias de distribución iniciales. Si éstas se desarrollan en la serie, por lo que todos los momentos deberán ser conocidos con exactitud. Cuando se aplica este método usualmente la distribución inicial es la normal, sin embargo se pueden usar otras, tales como la Gama.

Se ilustra este procedimiento, con el propuesto por Cornish-Fisher, el que requiere de los primeros cumulantes ($k_1 = \mu_1$, $k_2 = \mu_2$, $k_3 = \mu_3$, $k_4 = \mu_4 - \mu_2^2$) y genera la variable aleatoria normal $z \sim N(0,1)$ con

$$X = z + (z^2 - 1)k_3/6 + (z^3 - 3z)k_4/24 - (2z^3 - 5z)k_3^2/36$$

$$- (z^4 - 5z^2 + 2) k_3 k_4 /24 + (12 z^4 - 53 z^2 + 17) k_3^3 / 324$$

$$- (3z^5 - 24 z^3 + 29 z) k_4^2 /384 + (14 z^5 - 103 z^3 + 107 z) k_3^2 k_4 /288$$

$$- (252 z^5 - 1688 z^3 + 1511 z) k_3^4 / 7776 + \cdots$$

lo que da $y = k_1 + \sqrt{k_2}\, X$ como la variable aleatoria que describe el sistema.

Esta técnica converge rápidamente cuando la distribución inicial es similar a la distribución buscada.

b) Regresión polinomial

Tocher usa el siguiente modelo

$$F^{-1}(u) = a + bu + cu^2 + \alpha (1-u)^2 \log (u) + \beta u^2 \log (1-u)$$

donde a,b,c, α y β son constantes que se obtienen por mínimos cuadrados. Para generar variables aleatorias se usa una variable aleatoria uniforme , $u \in [0,1]$, $X = F^{-1}(u)$

se distribuye de acuerdo a la función F(x). Para mayor exactitud, se pueden usar cinco cuantiles, resultando cinco ecuaciones lineales que pueden ser resueltas con facilidad. Sin embargo $F^{-1}(u)$ no es una función de distribución - inversa para todos los valores de los parámetros.

c) Rectangular

Esta aproximación es la técnica más usada para generar variables aleatorias, las cuales no provienen de distribuciones estándar. La función de distribución inversa es aproximada por una función lineal en pedazos, la cual es equivalente a las distribuciones uniformes que no se traslapan. La generación de variables aleatorias es directa, sin embargo la aproximación lineal no es sencilla. No obstante esta técnica trabaja para toda distribución deseada y no se requiere que la distribución sea unimodal.

Las distribuciones de cuatro parámetros.

Se presentan 3 distribuciones con las cuales se cubre una amplia región del plano

i) Gama cuatro parámetros
ii) Burr
iii) Lambda generalizada

todas tienen exactamente 4 parámetros y una sola forma funcional.

i) Gama cuatro parámetros

Esta distribución incluye diversas distribuciones estándar, como casos especiales. La función de densidad es:

$$f(x; c, a, b, p) = p\,(x-c)^{bp-1} \exp\{-[(x-c)/a]^p\} / a^{bp}\, \Gamma(b)$$

donde a, b, p >0 y x $>$c. Aquí c es el parámetro de ubicación, a es el parámetro de escala y b y p determinan la forma.

Cuando c=0, esta distribución se reduce a una Gama, si p=1; a una Weibull, si b=1; a la exponencial, si b=p=1. La normal está dada por el límite cuando p=1 y $b \to \infty$.

Esta distribución presenta las siguientes dificultades: calcular sus momentos, excepto para casos especiales; la estimación de parámetros no es directa; y sólo permite generar variables aleatorias para valores enteros de los parámetros.

ii) Burr

La función de distribución de Burr es representada por la expresión

$$F(x) = 1 - [1 + \{(x-a)/b\}^{c}]^{-k} \quad , \quad x \geq 0$$

donde los parámetros k y b son positivos, a es el parámetro de ubicación, b el parámetro de escala y c y k son los parámetros que determinan la forma.

La región cubierta por esta distribución incluye las curvas de Weibull y Gama y alguna área correspondiente a grandes valores de β_2. Cuando $c < 0$ se cubre una región para la línea $\beta_2 - \beta_1 = 1$ de la región Beta. Los estimadores de máxima verosilimitud pueden ser obtenidos por una técnica iterativa numérica. Para generar variables aleatorias se usa la función inversa de una manera directa, utilizando una variable aleatoria u con distribución uniforme, de la forma siguiente:

$$X(u) = F^{-1}(u) = a + b[(1-u)^{-1/k} - 1]^{1/c}$$

iii) Lambda generalizada

Los antecedentes de esta distribución provienen de la distribución Lambda de Tukey

$$X(u) = F^{-1}(u) = [\,u^{\lambda} - (1-u)^{\lambda}\,]/\lambda$$

donde u se distribuye uniformemente en $[0,1]$. El intervalo de variación de X es

$$-\frac{1}{\lambda} \leq X \leq \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \lambda > 0$$

ya que $\lim\limits_{u \to 1} X(u) = \frac{1}{\lambda}$ y el $\lim\limits_{u \to 0} X(u) = -\frac{1}{\lambda}$

$$-\infty < X < \infty \quad , \quad \lambda \leq 0$$

ya que $\lim\limits_{u \to 1} X(u) = \infty$ y el $\lim\limits_{u \to 0} X(u) = -\infty$

La función de densidad de X se define de manera implícita por

$g(x(u)) = [u^{\lambda-1} + (1-u)^{\lambda-1}]^{-1}$, en donde se usa el teorema de inversión $\frac{d\,F(x)}{d\,x} = \left(\frac{dx}{d\,F(x)}\right)^{-1} = \left(\frac{dx}{du}\right)^{-1}$

y los valores de las ordenadas en los extremos del intervalo de variación de X están dados por

$$g(x(0)) = g(x(1)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda > 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad \lambda = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \lambda < 1 \end{cases}$$

cuando $\lambda = 1$ o 2 la transformación es lineal por lo cual la distribución de X es uniforme. La función de densidad de X es ligeramente uniforme para $1 < \lambda < 2$ con un valor mínimo en β_2 aproximadamente de 1.75, con $\lambda = 1.45$. La función de densidad es unimodal para $\lambda < 1$ o $\lambda > 2$.

Los momentos pares de X están dados por

$$E(x^k) = \frac{2}{\lambda^k} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{k}{j} (-1)^j \beta(j\lambda+1, (k-j)\lambda+1) + \lambda^{-k} \binom{k}{m} (-1)^m \beta(m\lambda+1, m\lambda+1)$$

donde m = $k/2$, y β es la función Beta, descrita en el capítulo II.

El momento par de orden k no está definido si

$$\lambda \leq -\frac{1}{k}$$

Los momentos impares de X, cuando están definidos son cero, por simetría y los momentos impares absolutos son datos por:

$$E(|x^k|) = \frac{2}{\lambda^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \left[2\beta_{\frac{1}{2}}(a, b) - \beta(a, b) \right]$$

donde

$$j = (k-1)/2 \quad , \quad a = j\lambda + 1 \quad , \quad b = (k-j)\lambda + 1$$

y

$$\beta_{1/2}(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad p>0,\ q>0$$

Estas fórmulas simplifican la obtención de los momentos, por ejemplo:

$$\delta = E(|x|) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left[1-\frac{\lambda}{2}\right]$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2(2\lambda+1)}\left[1-\frac{1}{2}\lambda\beta(\lambda,\lambda)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.a)$$

$$\mu_4 = \frac{2}{\lambda^4(4\lambda+1)}\left[1-3\lambda\beta(3\lambda,\lambda)+3\lambda\beta(2\lambda,2\lambda)\right] \quad \ldots \quad (3.b)$$

como se indicó, el valor mínimo de β_2 para la familia de distribuciones Lambda es cercana a 1.75 correspondiente a un valor de Lambda de 1.45. No existe un límite máximo en los valores posibles de β_2 para esta familia.

Cuando λ es grande, β_2 está dado por:

$$\beta_2 \simeq \frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{3}{4}\right)$$

la que se obtiene de las expresiones 3.a y 3.b; para valores negativos de λ está dado por:

$$\beta_2 \doteq (\lambda + .246)^{-1} \qquad si \quad -.23 \leq \lambda \leq -.03$$

Ramberg y Schemeiser generalizaron esta distribución con el propósito de generar variables aleatorias unimodales asimétricas, aumentando el número de parámetros en la distribución.

$$X(u) = F^{-1}(u) = R(u) = \lambda_1 + [u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}]/\lambda_2 \ , \quad (0 \le u \le 1)$$

donde λ_2 , λ_3 y λ_4 tienen el mismo signo; el parámetro de ubicación es λ_1 , el parámetro de escala es λ_2, y la forma está determinada por los parámetros λ_3 y λ_4 . Para generar variables aleatorias con distribución R(u), se usa una variable aleatoria, $u \in [0,1]$ con distribución uniforme.

La función de densidad, se obtiene de la siguiente manera.

$$\frac{dx}{du} = \frac{dR(u)}{du} = [\lambda_3 u^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-u)^{\lambda_4 - 1}]/\lambda_2$$

como $u = F(x)$, función de distribución, y

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{du}{dx} = f(x)$$

función de densidad, por el teorema de inversión.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \lambda_2 / [\lambda_3 u^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-u)^{(\lambda_4 - 1)}] = f(R(u))$$

la cual cumple con las características de las funciones de densidad de probabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(R(u))\,dR(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{dR(u)}{du}}\,dR(u) = \int_{0}^{1} du = 1$$

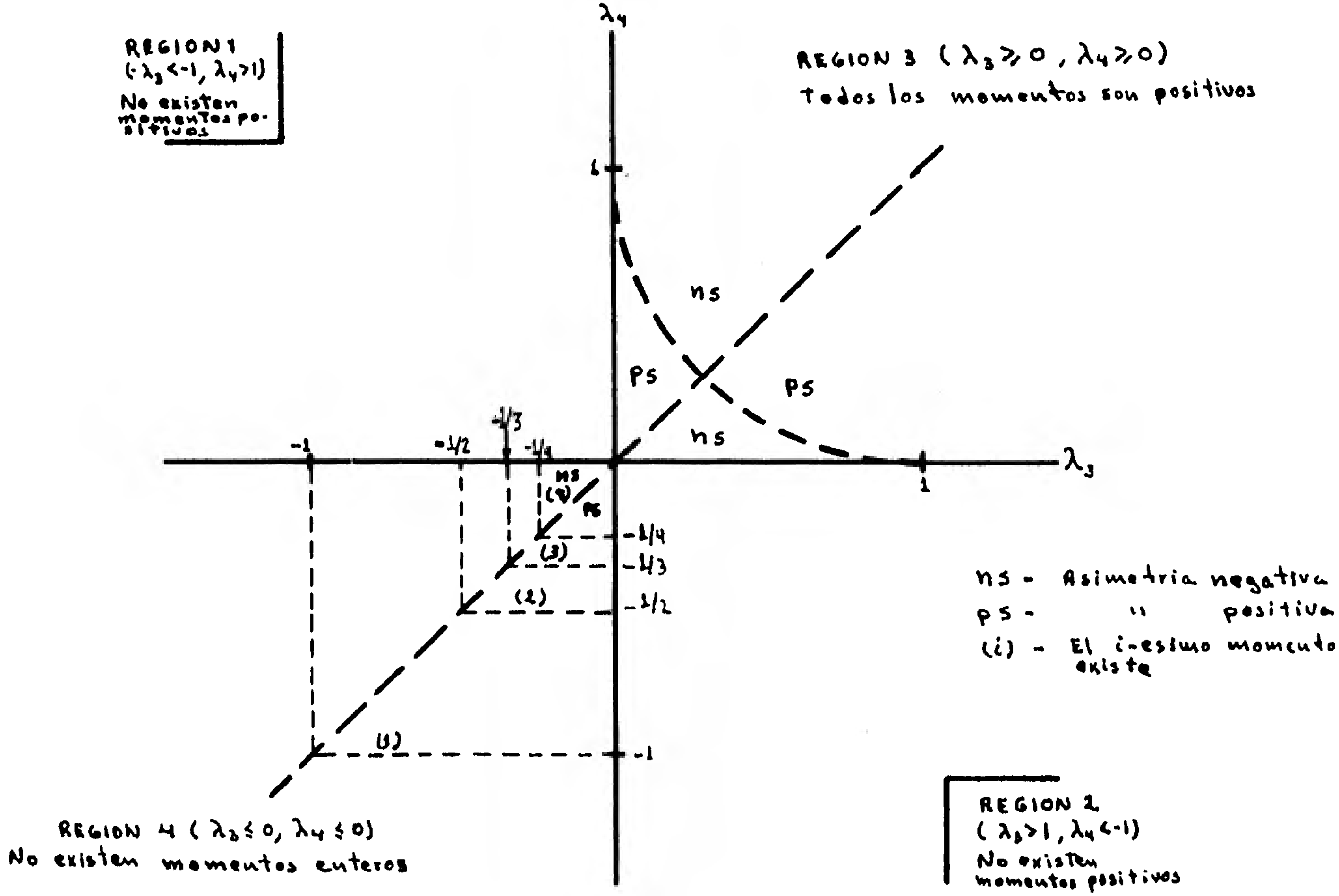
que la función de densidad de probabilidad $f(x)$ sea positiva ($f(x) \geq 0$) , esto es equivalente a que $f(R(u)) \geq 0$ como $\frac{1}{\frac{dR(u)}{du}} \geq 0$, esto se cumple si $\frac{dR(u)}{du} \geq 0$ entonces

$$\left[\lambda_3 u^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-u)^{\lambda_4 - 1} \right] / \lambda_2 \geq 0$$

como $u^{\lambda_3 - 1}$, $(1-u)^{\lambda_4 - 1} \geq 0$, se consideran las distintas posibilidades de los valores de los parámetros, las cuales determinan que esta expresión sea positiva, de tal forma que se obtiene la Gráfica 3.2 y la Tabla T3.1. En las que se dan los intervalos de definición de la función R(u) dependiendo de los valores que tomen los parámetros, los cuales han sido separados en 4 regiones.

Región	Valores de			Intervalos de definición de la función R(u)
	λ_2	λ_3	λ_4	
1	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 < -1$	$\lambda_4 > 1$	$(-\infty, \lambda_1 + 1/\lambda_2]$
2	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 > 1$	$\lambda_4 < -1$	$[\lambda_1 - 1/\lambda_2, \infty)$
3	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 > 0$	$\lambda_4 > 0$	$[\lambda_1 - 1/\lambda_2, \lambda_1 + 1/\lambda_2]$
	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 = 0$	$\lambda_4 > 0$	$[\lambda_1, \lambda_1 + 1/\lambda_2]$
	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 > 0$	$\lambda_4 = 0$	$[\lambda_1 - 1/\lambda_2, \lambda_1]$
4	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 < 0$	$\lambda_4 < 0$	$(-\infty, \infty)$
	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 = 0$	$\lambda_4 < 0$	$[\lambda_1, \infty)$
	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 < 0$	$\lambda_4 = 0$	$(-\infty, \lambda_1]$

Nota: El intervalo de definición de R(u) es $[R(0), R(1)]$ Tabla T3.1 salvo en el caso de que el límite de R(u), cuando $u \to 0$ ó $u \to 1$, tienda a $\pm\infty$


REGION 1
$(\lambda_3 < -1, \lambda_4 > 1)$
No existen momentos positivos
REGION 3 $(\lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0)$
Todos los momentos son positivos
REGION 4 $(\lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0)$
No existen momentos enteros
REGION 2
$(\lambda_3 > 1, \lambda_4 < -1)$
No existen momentos positivos
ns - Asimetria negativa
ps - " positiva
(i) - El i-esimo momento existe
λ_4
λ_3
ns
ps
(1)
(2)
(3)
(4)
-1
-1/2
-1/3
-1/4
1
-1/4
-1/3
-1/2
-1

Grafica 3.2

Para $\lambda_1 = 0$, el k-enésimo momento de la distribución $X = R(u)$ está dado por

$$E(X^k) = \lambda_2^{-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \beta(\lambda_3(k-i)+1, \lambda_4 i+1) \quad . \; . \; . \; . \quad (3.c)$$

cuando el k-ésimo momento existe, donde $\beta(\alpha, \delta)$ es la función Beta con parámetros α y δ. Esto se obtiene de la siguiente manera:

$$E(X^k) = \int_0^1 [R(u)]^k \, du$$

siendo $\lambda_1 = 0$ y sustituyendo R (u)

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \lambda_2^{-k} \int_0^1 [u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}]^k du \\ &= \lambda_2^{-k} \int_0^1 [\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j u^{\lambda_3(k-j)} (1-u)^{\lambda_4 j}] du \\ &= \lambda_2^{-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \int_0^1 [u^{\lambda_3(k-j)} (1-u)^{\lambda_4 j}] du \end{aligned}$$

donde la integral resulta ser la función Beta con los parámetros

$$\beta(\lambda_3(k-j)+1, \lambda_4 j+1), \quad \lambda_3(k-j)+1 > 0 \quad y \quad \lambda_4 j+1 > 0$$

por lo cual el k-ésimo momento existe sí y sólo si $-1/k < \min(\lambda_3, \lambda_4)$ por lo tanto

$$E(X^k) = \lambda_2^{-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \beta(\lambda_3(k-i)+1, \lambda_4 i+1)$$

En la gráfica 3.2 se muestra que todos los momentos positivos existen en la región 3 y no existen momentos positivos en la región 1 y 2; en la región 4 todos los momentos positivos existen, aunque la mayoría están cerca del origen.

Para calcular los primeros cuatro momentos: μ, σ^2, μ_3 y μ_4

es necesario calcular los momentos $E(x^k)$, $k=\overline{1,4}$ de la relación (3.C) se obtiene para:

$k=1$,

$$E(x) = \lambda_2^{-1}[\beta(\lambda_3+1, 1) - \beta(1, \lambda_4+1)]$$

como

$$\beta(\lambda_3+1, 1) = \frac{\Gamma(\lambda_3+1)\Gamma(1)}{\Gamma((\lambda_3+1)+1)} = \frac{\Gamma(\lambda_3+1)}{(\lambda_3+1)\Gamma(\lambda_3+1)} = \frac{1}{\lambda_3+1}$$

igualmente

$$\beta(1, \lambda_4+1) = \frac{1}{\lambda_4+1}$$

$$E(x) = [1/(\lambda_3+1) - 1/(\lambda_4+1)]/\lambda_2$$

$k=2$,

$$E(x^2) = \lambda_2^{-2}[\beta(2\lambda_3+1, 1) - 2\beta(\lambda_3+1, \lambda_4+1) + \beta(1, 2\lambda_4+1)].$$

$$= \lambda_2^{-2}[1/(2\lambda_3+1) + 1/(2\lambda_4+1) - 2\beta(\lambda_3+1, \lambda_4+1)]$$

$k=3$,

$$E(x^3) = \lambda_2^{-3}[\beta(3\lambda_3+1, 1) - 3\beta(2\lambda_3+1, \lambda_4+1) + 3\beta(\lambda_3+1, 2\lambda_4+1) - \beta(1, 3\lambda_4+1)]$$

$$= \lambda_2^{-3}[1/(3\lambda_3+1) - 1/(3\lambda_4+1) - 3\beta(2\lambda_3+1, \lambda_4+1) + 3\beta(\lambda_3+1, 2\lambda_4+1)]$$

$k=4$,

$$E(x^4) = \lambda_2^{-4}[\beta(4\lambda_3+1, 1) - 4\beta(3\lambda_3+1, \lambda_4+1) + 6\beta(2\lambda_3+1, 2\lambda_4+1) - 4\beta(\lambda_3+1, 3\lambda_4+1) + \beta(1, 4\lambda_4+1)]$$

$$= \lambda_2^{-4}[1/(4\lambda_3+1) + 1/(4\lambda_4+1) - 4\beta(3\lambda_3+1, \lambda_4+1) + 6\beta(2\lambda_3+1, 2\lambda_4+1) - 4\beta(\lambda_3+1, 3\lambda_4+1)]$$

considerando

$$A = 1/(\lambda_3+1) - 1/(\lambda_4+1)$$

$$B = 1/(2\lambda_3+1) + 1/(2\lambda_4+1) - 2\beta(\lambda_3+1, \lambda_4+1)$$

$$C = 1/(3\lambda_3+1) - 1/(3\lambda_4+1) - 3\beta(2\lambda_3+1, \lambda_4+1) + 3\beta(\lambda_3+1, 2\lambda_4+1)$$

$$D = 1/(4\lambda_3+1) + 1/(4\lambda_4+1) - 4\beta(3\lambda_3+1, \lambda_4+1) + 6\beta(2\lambda_3+1, 2\lambda_4+1) - 4\beta(\lambda_3+1, 3\lambda_4+1)$$

como λ_1 es el parámetro de ubicación $\mu = \lambda_1 + A/\lambda_2$, este parámetro no afecta a los momentos centrales.

$$\sigma^2 = E[(x-E(x))^2] = E(x^2) - E^2(x) = (B-A^2)/\lambda_2^2$$
$$\mu_3 = E[(x-E(x))^3] = E(x^3) - 3E(x^2)E(x) + 2E^3(x) = (C-3AB+2A^3)/\lambda_2^3$$
$$\mu_4 = E[(x-E(x))^4] = E(x^4) - 4E(x^3)E(x) + 6E(x^2)E^2(x) - 3E^4(x)$$
$$= (D-4CA+6BA^2-3A^4)/\lambda_2^4$$

entonces el tercer y cuarto momentos estandarizados

$$\alpha_3 = \mu_3/\sigma^3$$

y $\quad \alpha_4 = \mu_4/\sigma^4$

los cuales son función de λ_3 y λ_4 y no dependen de λ_1 y λ_2

Ahora para encontrar los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 es necesario partir de un valor de $\hat{\alpha}_3$ y $\hat{\alpha}_4$, tal que de la solución a las ecuaciones no lineales

$$\alpha_3(\lambda_3, \lambda_4) - \hat{\alpha}_3 = 0$$
$$\alpha_4(\lambda_3, \lambda_4) - \hat{\alpha}_4 = 0$$

se obtengan los valores de λ_3 y λ_4 y con estos calcular λ_1 y λ_2. Los valores de $\hat{\alpha}_3$ y $\hat{\alpha}_4$ pueden ser valores de distribuciones conocidas o pueden ser estimados por los momentos dados por:

$$\hat{\alpha}_3 = m_3 / (m_2)^{3/2}$$
$$\hat{\alpha}_4 = m_4 / (m_2)^2$$

donde

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k / n \ , \ k = 2, 3, 4 \qquad y \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

obteniendo los valores de λ_3 y λ_4, se obtienen los valores de λ_1 y λ_2

$$\lambda_1 = \bar{x} - A/\lambda_2$$
$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{(B - A^2)}{m_2}}$$

y así obtener el modelo R(u) deseado.

Como la función Lambda generalizada es unimodal, sus valores $\beta_1 = \alpha_3^2$ y $\beta_2 = \alpha_4$ no consideran la parte del plano (β_1, β_2) de la distribución "U - Beta" que es bimodal. Sin embargo la distribución límite de R(u) cuando λ_3 o λ_4 tienden a infinito, es un caso especial de la familia Beta con uno de sus parámetros igual a uno. En la vecindad de las funciones de distribución exponencial y normal, se pueden generar variables unimodales aleatorias de la distribución Lambda generalizada. La distribución exponencial es el límite de la función R(u) considerando $\lambda_1 = \lambda/\lambda_4$ $\lambda_2 = \lambda_4/\lambda$, cuando $\lambda_3 \to \infty$ y $\lambda_4 \to 0$.

BIBLIOGRAFIA

1. Bruce Schmeiser
Methods for modelling and generating probabilistic components in digital computers simulation when the standard distributions are not adecuate: a survey. Proceedings of the Winter Simulation Conference 51-57. (1977).

2. Hahn, G.J. and Shapiro, S.S.
Statistical Models in Engineering, New York. John Wiley & Sons, Inc. (1967).

3. Joiner, B.L. and Rosenblatt, J.R.
Some properties of the range in samples from tukey's symmetric Lambda distributions.
J. Amer. Statist. Assoc., 66 394-399. (1971).

4. Ramberg J.S. and Schemeiser B.W.
An aproximate for generating asymmetric random variables.
Comm. ACM 17, 78-82. (1974).

5. Ramberg J.S., Pandu R. Tadikamalla, Edward J. Dudewicz and Edward F. Mykytka.
A probability distribution and its uses in fitting data.
Technometrics, May 1979, Vol. 21, No. 2, pág. 201-212.

IV. OBTENCION DE LOS PARAMETROS DEL MODELO DE RAMBERG Y SCHEMEISER (TABLAS Y GRAFICAS)

La obtención de los parámetros λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4 de la distribución Lambda generalizada, se realizó con dos métodos:

1) Solución a las ecuaciones no lineales por medio del método de Brown.

$$\left.\begin{aligned}\hat{\alpha}_3 &= \alpha_3(\lambda_3, \lambda_4)\\ \alpha_4 &= \alpha_4(\lambda_3, \lambda_4)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4.a)$$

2) Minimizando la norma Euclidiana usando el método de Lenvenberg-Marquardt combinado con el método de pasos descendentes (Stepet descent).

$$[\hat{\alpha}_3 - \alpha_3(\lambda_3, \lambda_4)]^2 + [\hat{\alpha}_4 - \alpha_4(\lambda_3, \lambda_4)]^2$$

Dada la cantidad de máximos y mínimos en estas regiones se decidió subdividirla para observar el comportamiento de esta función con más detalle, mostrado en las gráficas [4.1 4.2]. Por lo que el método de Brown no da la solución "más adecuada" y en base a ésto, se decidió cambiar el criterio de solución por la norma euclidiana, con la que se trataron diversos métodos de optimización no-lineal siendo éstos:

1) Brown
2) Levenberg-Marquadt (con pasos descendentes)
3) Gradientes conjugados
4) Quasi-Newton

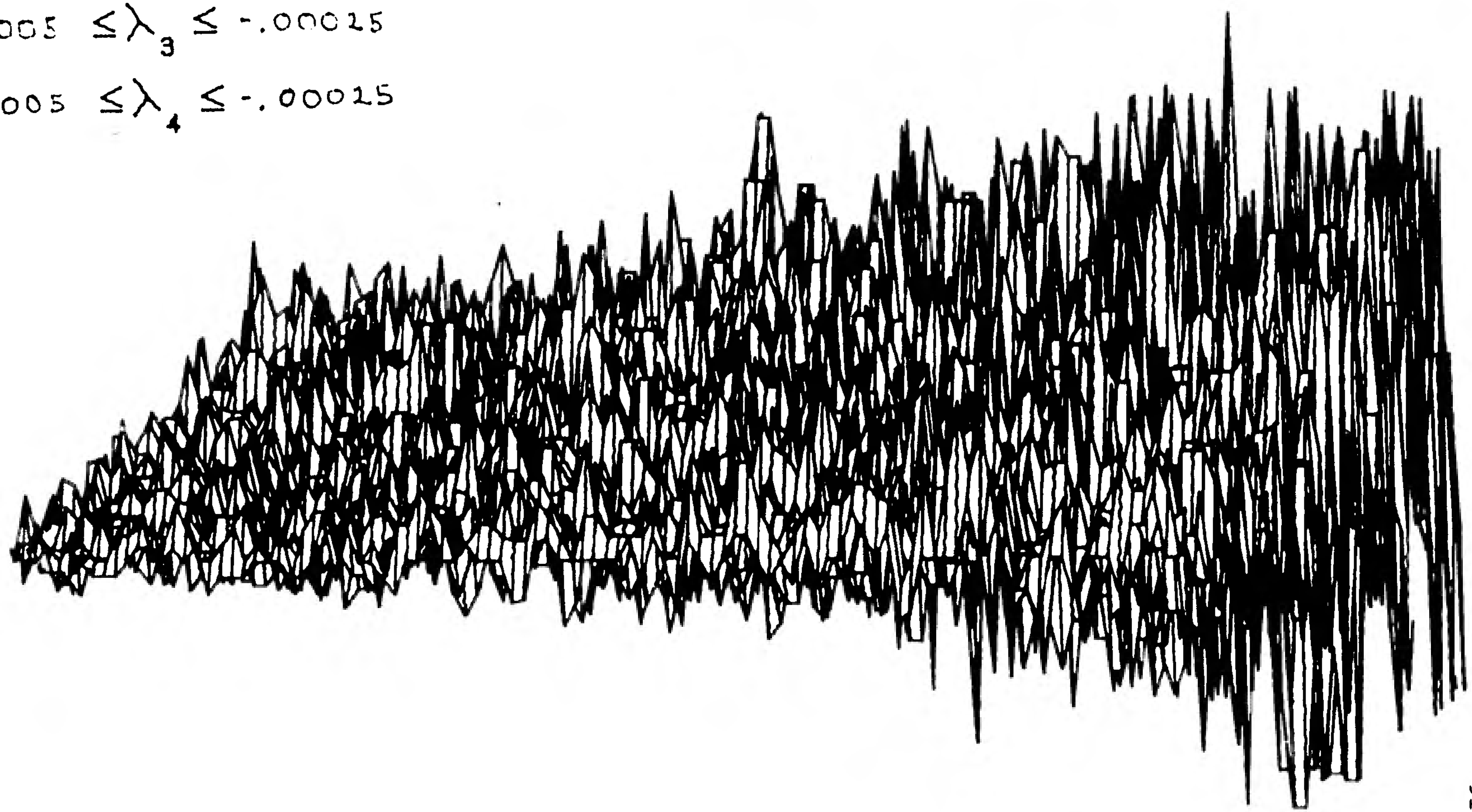
5) Modificación de Levenberg-Marquadt
6) Newton Raphson y pasos descendentes

Actualmente se estan estudiando los métodos de optimización global para resolver este problema, se considera que llevará un largo periodo de estudio debido a que la mayoría de estos métodos son para funciones con dominio en R^1. Por lo que hay que generalizarlos a R^n, antes de poderlos aplicar a este problema.

$\alpha_4 = \alpha_4(\lambda_3, \lambda_4)$

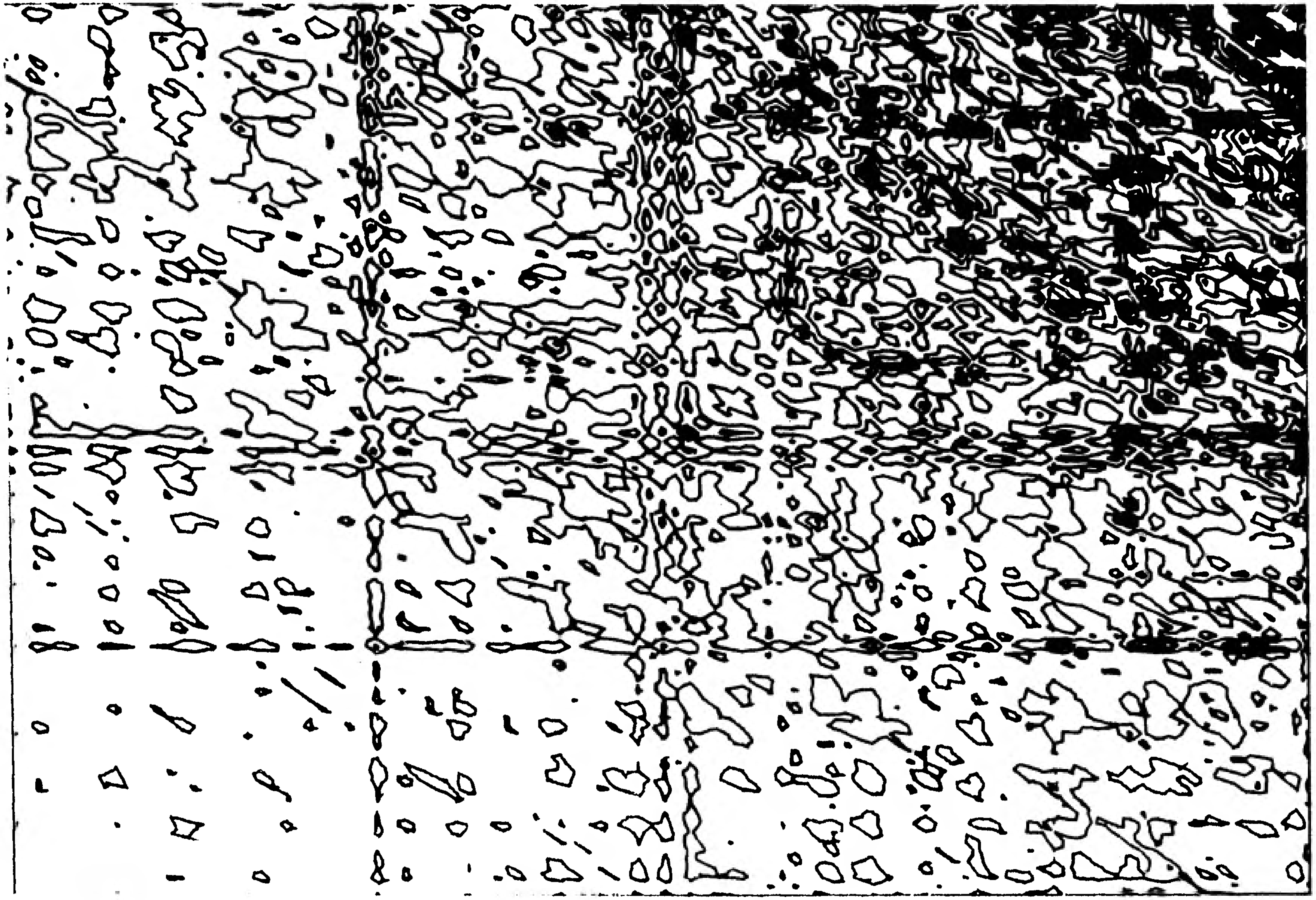
$-.0005 \le \lambda_3 \le -.00025$

$-.0005 \le \lambda_4 \le -.00025$

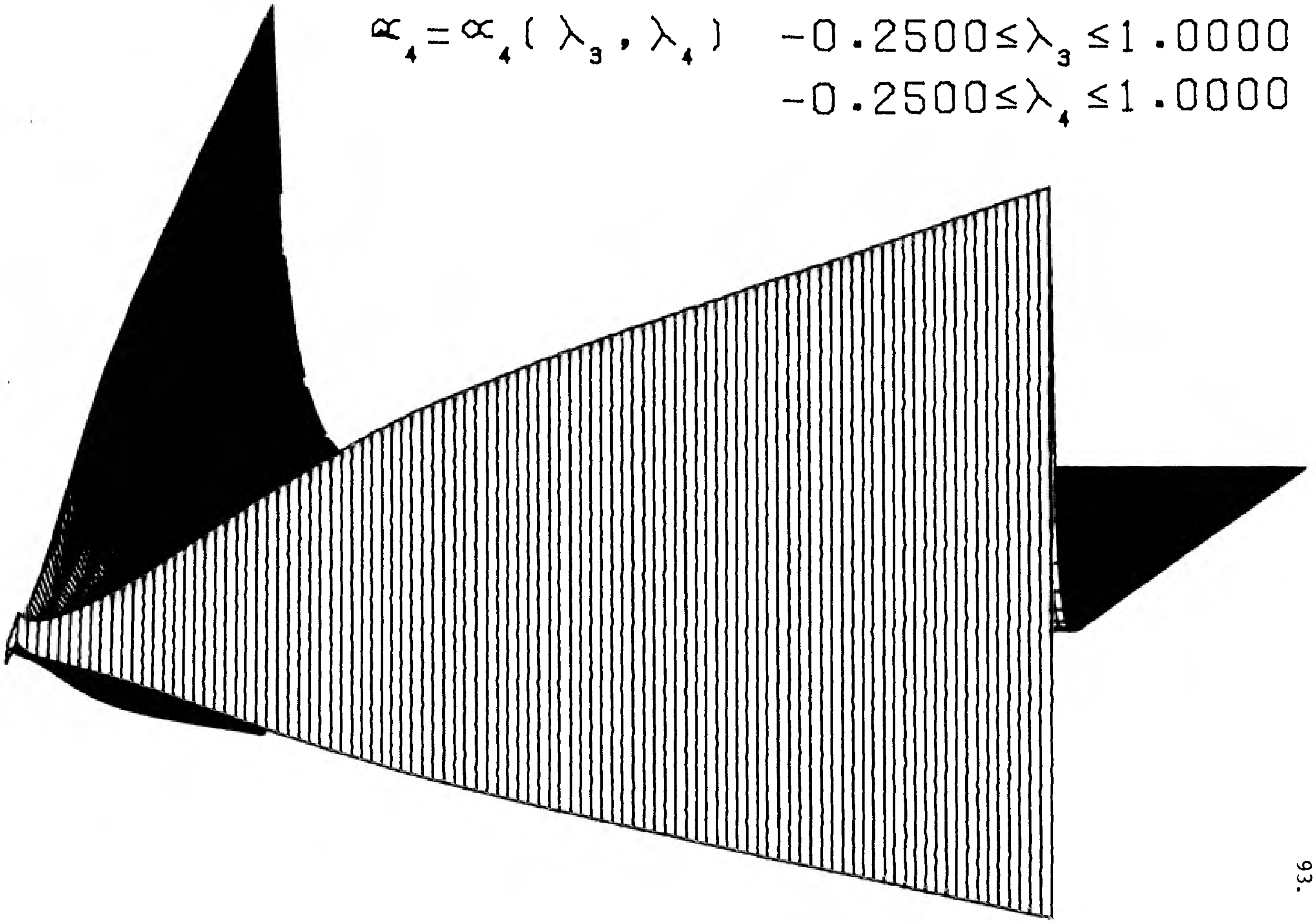


grafica 4.2

$\alpha_4 = \alpha_4 (\lambda_3 , \lambda_4)$ $\quad -.0005 \leq \lambda_3 \leq -.00025, -.0005 \leq \lambda_4 \leq -.00025$



grafica 4.2.1

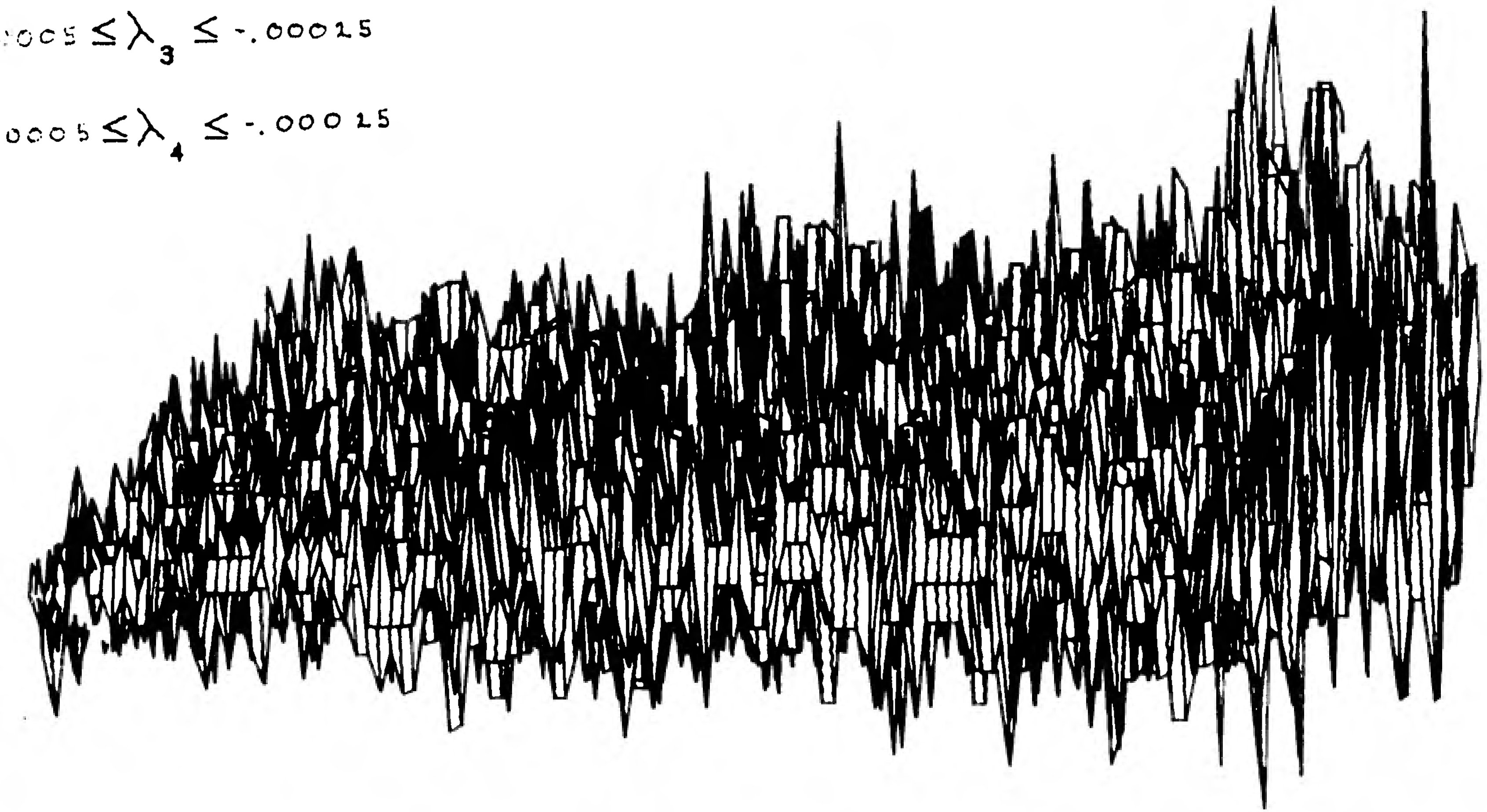

$\alpha_4 = \alpha_4(\lambda_3, \lambda_4)$ $-0.2500 \leq \lambda_3 \leq 1.0000$
$-0.2500 \leq \lambda_4 \leq 1.0000$

grafica 4.1.2

$$\alpha_3 = \alpha_3 (\lambda_3 , \lambda_4)$$

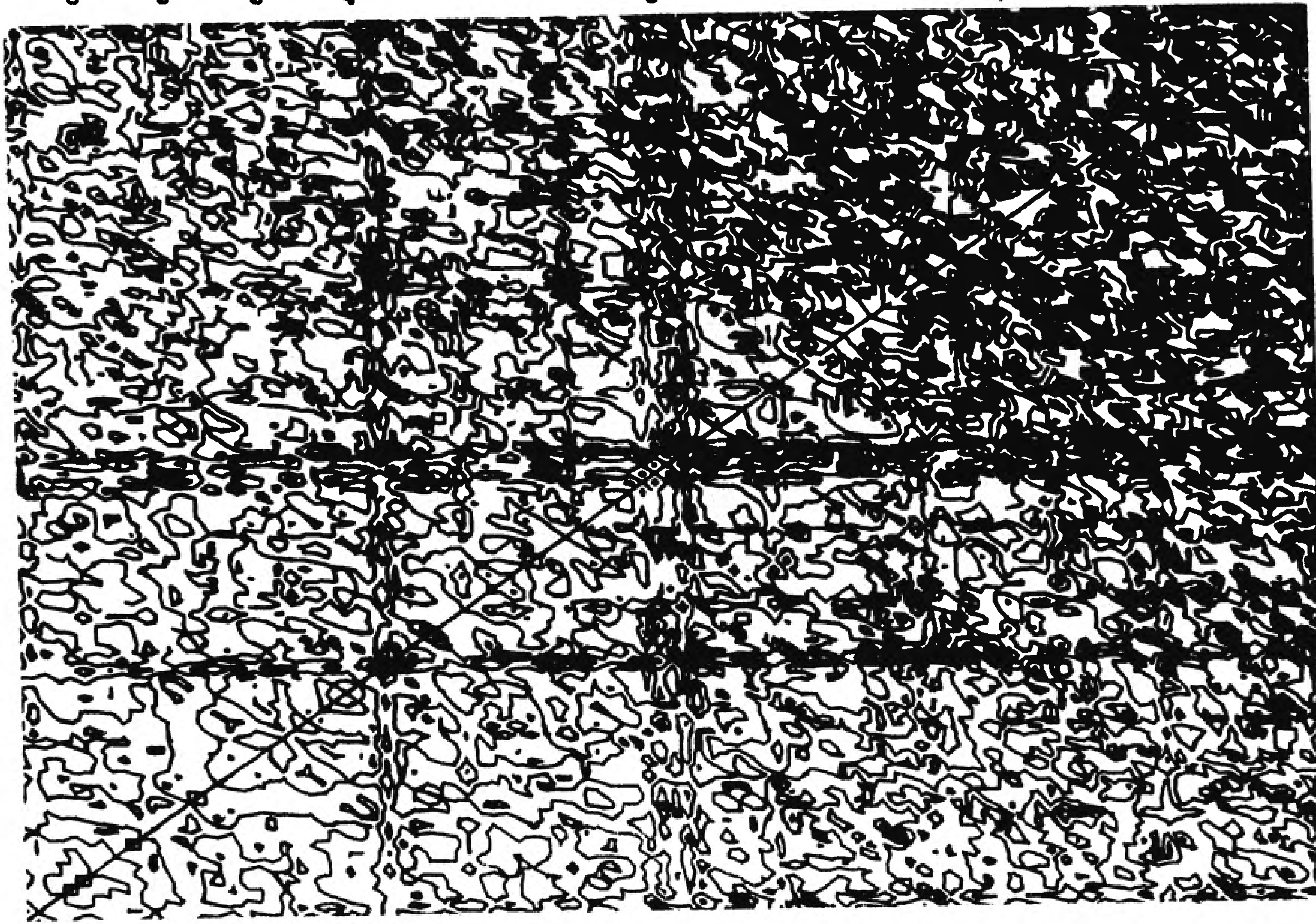
$$-.0005 \leq \lambda_3 \leq -.00025$$

$$-.0005 \leq \lambda_4 \leq -.00025$$

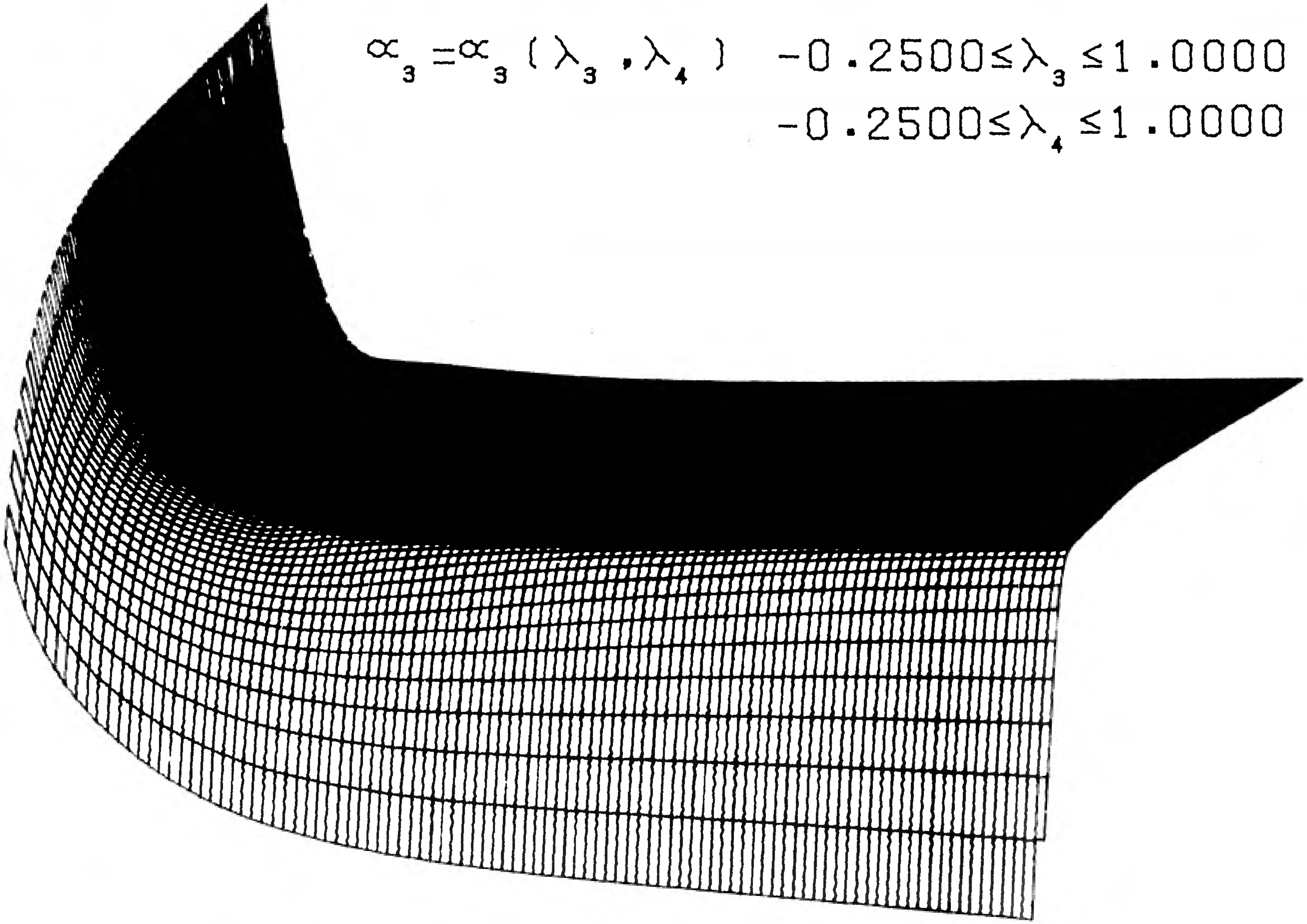


grafica 4.1

$\alpha_3 = \alpha_3(\lambda_3, \lambda_4)$ $\quad -.0005 \leq \lambda_3 \leq -.00025,\ -.0005 \leq \lambda_4 \leq -.00025$



grafica 4.1.1


$\alpha_3 = \alpha_3(\lambda_3, \lambda_4)$ $-0.2500 \leq \lambda_3 \leq 1.0000$
$-0.2500 \leq \lambda_4 \leq 1.0000$

grafica 4.1.2

Como se indicó en el Capítulo III la distribución Lambda generalizada cubre todo el plano (β_1, β_2) excepto la región de distribución "U Beta" por esta razón los valores de $\hat{\alpha}_3$ y $\hat{\alpha}_4$ deben ser considerados fuera del área de la distribución "U-Beta".

Por lo cual la Tabla T4.1 de los parámetros $\lambda_i, i=1,4$ excluye los valores para esta área. Estos valores son calculados para una distribución con $\mu=0$ y $\sigma^2=1$ para otros valores se usará

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(\bar{x}, m_2) &= \lambda_1(0,1)\, m_2 + \bar{x} \\ \lambda_2(\bar{x}, m_2) &= \lambda_2(0,1)/m_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (4.b)$$

donde $\bar{x}$ es la medida muestral y m_2 es la variancia muestral.

Si $\hat{\alpha}_3 \leq 0$, puede usarse el valor absoluto de $\hat{\alpha}_3$ ya que ambas distribuciones son iguales; por tal motivo, después de encontrar los valores de λ_3 y λ_4, se intercambian y se cambia el signo de λ_1.

Pueden encontrarse otras soluciones, que fuera de intervalor tratados en la Tabla 5.1, para algunos valores de α_3 y α_4. Pero generalmente con valores de $\lambda_3 > 1$ o $\lambda_4 > 1$ o ambos $(\lambda_3, \lambda_4 > 1)$ por tal motivo la función de densidad está truncada por la izquierda, $(f(R(0)) > 0)$ o truncada por la derecha $(f(R(1)) > 0)$ o ambos lados, respectivamente.

Para verificar que la distribución Lambda generalizada obtenida, es representativa de un conjunto de datos, se deben elaborar tablas y gráficas que comparen resultados, para poder decidir si los valores $\lambda_i, i=1,4$ de la distribución Lambda generalizada son representativos, otro criterio que se considera, es la prueba de ajuste χ^2.

IMP
DEPTO. DE ESTAD. APLIC.
TEFETRA
FPR/AEB/JVB

ALFA3= 0.0

ALFA4	LAMDA1	LAMDA2	LAMDA3	LAMDA4
1.8000	.0000	.5774	1.0000	1.0000
2.0000	.0000	.4962	.6843	.6843
2.2000	.0000	.4197	.4092	.4092
2.4000	.0000	.3633	.3032	.3032
2.6000	.0000	.2960	.2304	.2304
2.8000	.0000	.2434	.1766	.1766
3.0000	.0000	.1976	.1349	.1349
3.2000	.0000	.1563	.1016	.1016
3.4000	.0000	.1191	.0742	.0742
3.6000	.0000	.0853	.0512	.0512
3.8000	.0000	.0644	.0317	.0317
4.0000	.0000	.0281	.0148	.0148
4.2000	.0000	.0873*	.0371*	.0371*
4.4000	.0000	-.0242	-.0130	-.0130
4.6000	.0000	-.0468	-.0246	-.0246
4.8000	.0000	-.0676	-.0350	-.0350
5.0000	.0000	-.0870	-.0443	-.0443
5.2000	.0000	-.1054	-.0528	-.0528
5.4000	.0000	-.1226	-.0606	-.0606
5.6000	.0000	-.1388	-.0677	-.0677
5.8000	.0000	-.1541	-.0742	-.0742
6.0000	.0000	-.1686	-.0802	-.0802
6.2000	.0000	-.1823	-.0858	-.0858
6.4000	.0000	-.1953	-.0910	-.0910
6.6000	.0000	-.2077	-.0958	-.0958
6.8000	.0000	-.2196	-.1003	-.1003
7.0000	.0000	-.2307	-.1045	-.1045
7.2000	.0000	-.2415	-.1085	-.1085
7.4000	.0000	-.2517	-.1123	-.1123
7.6000	.0000	-.2616	-.1158	-.1158
7.8000	.0000	-.2710	-.1191	-.1191
8.0000	.0000	-.2800	-.1223	-.1223
8.2000	.0000	-.2887	-.1253	-.1253
8.4000	.0000	-.2970	-.1281	-.1281
8.6000	.0000	-.3050	-.1308	-.1308
8.8000	.0000	-.3128	-.1334	-.1334
9.0000	.0000	-.3202	-.1359	-.1359
9.2000	.0000	-.3274	-.1382	-.1382
9.4000	.0000	-.3344	-.1404	-.1404
9.6000	.0000	-.3411	-.1426	-.1426
9.8000	.0000	-.3476	-.1448	-.1448

NOTA: EL (*) INDICA QUE DEBE MULTIPLICARSE POR 1/100

IMP
DEPTO. DE ESTAD. APLIC.
TEFETRA
FPR/AEB/JVB

ALFA3= 0.06

ALFA4	LAMDA1	LAMDA2	LAMDA3	LAMDA4
2.0000	-1.3610	.2891	.0268	.7146
2.2000	-.9619	.3021	.0736	.5603
2.4000	-.6490	.2990	.1140	.4213
2.6000	-.4383	.2743	.1301	.3078
2.8000	-.3388	.2369	.1193	.2298
3.0000	-.3006	.1987	.0993	.1768
3.2000	-.2931	.1643	.0792	.1384
3.4000	-.3046	.1348	.0619	.1103
3.6000	-.3292	.1110	.0480	.0898
3.8000	-.3631	.0928	.0376	.0750
4.0000	-.4022	.0789	.0297	.0645
4.2000	-.4433	.0888	.0240	.0570
4.4000	-.4844	.0812	.0198	.0516
4.6000	-.5246	.0554	.0165	.0476
4.8000	-.5635	.0508	.0140	.0443
5.0000	-.6009	.0471	.0119	.0418
5.2000	-.6370	.0441	.0102	.0397
5.4000	-.6719	.0416	.0088	.0380
5.6000	-.7056	.0394	.0076	.0366
5.8000	-.7383	.0376	.0066	.0354
6.0000	-.7702	.0359	.0056	.0343
6.2000	-.8012	.0346	.0047	.0334
6.4000	-.8315	.0332	.0039	.0325
6.6000	-.8612	.0321	.0032	.0318
6.8000	-.8904	.0311	.0026	.0312
7.0000	-.9191	.0301	.0020	.0306
7.2000	-.9473	.0293	.0014	.0301
7.4000	-.9752	.0285	.0009	.0296
7.6000	-1.0028	.0278	.0004	.0291
7.8000	.0366	-.2676	-.1217	-.1141
8.0000	.0344	-.2768	-.1249	-.1176
8.2000	.0325	-.2859	-.1278	-.1207
8.4000	.0308	-.2944	-.1306	-.1237
8.6000	.0292	-.3026	-.1333	-.1266
8.8000	.0279	-.3106	-.1359	-.1294
9.0000	.0268	-.3181	-.1383	-.1320
9.2000	.0255	-.3254	-.1406	-.1344
9.4000	.0244	-.3325	-.1428	-.1368
9.6000	.0236	-.3393	-.1449	-.1391

IMP
DEPTO. DE ESTAD. APLIC.
TEFETRA
FPR/AEB/JVB

ALFA3= 0.10

ALFA4	LAMDA1	LAMDA2	LAMDA3	LAMDA4
2.2000	-1.3173	.2611	.0173	.5649
2.4000	-1.0146	.2602	.0470	.4471
2.6000	-.8169	.2468	.0635	.3536
2.8000	-.6976	.2251	.0675	.2826
3.0000	-.6363	.2006	.0633	.2303
3.2000	-.6123	.1774	.0557	.1924
3.4000	-.6116	.1570	.0475	.1647
3.6000	-.6252	.1401	.0400	.1443
3.8000	-.6473	.1262	.0336	.1290
4.0000	-.6744	.1149	.0283	.1173
4.2000	-.7043	.1056	.0238	.1082
4.4000	-.7357	.0980	.0200	.1010
4.6000	-.7678	.0916	.0168	.0951
4.8000	-.8001	.0862	.0141	.0903
5.0000	-.8323	.0816	.0117	.0863
5.2000	-.8644	.0776	.0096	.0829
5.4000	-.8962	.0742	.0077	.0800
5.6000	-.9277	.0711	.0060	.0775
5.8000	-.9589	.0684	.0045	.0753
6.0000	-.9898	.0660	.0031	.0734
6.2000	-1.0205	.0638	.0018	.0717
6.4000	-1.0510	.0618	.0006	.0702
6.6000	.3341	-.0983	-.0633	-.0336
6.8000	.3828	-.0887	-.0594	-.0284
7.0000	.4230	-.0822	-.0567	-.0247
7.2000	.4588	-.0773	-.0546	-.0218
7.4000	.4916	-.0733	-.0529	-.0195
7.6000	.5222	-.0699	-.0515	-.0175
7.8000	.5512	-.0671	-.0503	-.0157
8.0000	.5789	-.0646	-.0492	-.0142
8.2000	.6055	-.0623	-.0483	-.0128
8.4000	.6311	-.0604	-.0474	-.0116
8.6000	.6560	-.0586	-.0467	-.0104
8.8000	.6802	-.0570	-.0460	-.0094
9.0000	.7038	-.0555	-.0454	-.0084
9.2000	.7269	-.0541	-.0448	-.0075
9.4000	.7495	-.0529	-.0442	-.0066
9.6000	.7718	-.0517	-.0437	-.0058
9.8000	.7936	-.0506	-.0433	-.0050
10.0000	.8151	-.0496	-.0429	-.0043

Tabla T4.1

BIBLIOGRAFIA

1. Kenneth M. Brown
Computer oriented algoritms for solving sistems of simulations nonlinear algebraic equations.
Numerical Solution of Systems of Nonlinear Algebraic Equations. (Accademic Press).

2. Argonne National Laboratory
Aplied Mathematics division
Classification optimization.

3. Harold V. Mclntosh, PLOT, Institutio Nacional de Energía Nuclear, 1975. Extension and revision of PLOT 1974.

4. Bruce Schemeiser
Methods for modelling and generating probabilistic components in digital computers simulations when the standard distributions are not adecuate: a survey.
Proceedings of the Winter Simulation Conference 51-57. (1977).

5. Ramberg J.S. and Schemeiser B.W.
An aproximate for generating asymmetric random variables.
Comm. ACM 17, 78-82. (1974).

6. Ramberg J.S., Pandu R. Tadikamalla, Edward J. Dudewicz and Edward F. Mykytka.
A probability distribution and its uses in fitting data.
Technometrics, May 1979. Vol. 21 No. 2. Págs. 201-212.

V. APLICACIONES

Como se mencionó en el Capítulo III los valores de $\hat{\alpha}_3$ y $\hat{\alpha}_4$ se pueden obtener de los momentos de funciones de distribución conocidas o ser estimaciones de los momentos muestrales cuando se desconoce la función de distribución; por lo cual se ilustra la aplicación de estos casos.

Para funciones de distribución conocidas, la distribución Lambda generalizada ayuda a obtener una buena aproximación a los percentiles de la distribución conocida de una manera fácil, conociendo los valores de los parámetros.

En los siguientes ejemplos se ilustra el procedimiento:

1) La función Normal (0, 1), del Capítulo II, tiene los valores de $\hat{\alpha}_3=0$ y $\hat{\alpha}_4=3$ (estos valores son exactos, por razones de notación se considera $\hat{\alpha}_3$ y $\hat{\alpha}_4$) entonces la solución de las ecuaciones no lineales (4.a) se obtienen los valores de $\lambda_1=0$, $\lambda_2=.1974$ $\lambda_3=\lambda_4=.1349$ las tablas T5.1 muestran los valores de la distribución Lambda generalizada y la tabla T5.2, muestra la tabla de distribución normal (original). Se puede apreciar la pequeña diferencia que existe entre estas dos tablas que se enmarca en los valores extremos. De manera equivalente se muestra en la gráfica 5.1 la comparación de estas distribuciones.

2) La función $\chi^2_{(n)}$ consideremos n=2 grados de libertad, del Capítulo II, se obtiene que $\hat{\alpha}_3=2$ y $\hat{\alpha}_4=9$, entonces la solución de las ecuaciones no lineales (4.a) se obtienen los valores siguientes:

TABLA DE LA DISTRIBUCION LAMBDA GENERALIZADA

DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA I.B.P.
FPRO/JVBP

Z	X	Y	1-α	α
-4.00	μ -4.00σ	0.000088	0.000008	0.999991
-3.75	μ -3.75σ	0.000255	0.000045	0.999955
-3.50	μ -3.50σ	0.000780	0.000185	0.999885
-3.00	μ -3.00σ	0.004800	0.001284	0.998719
-2.95	μ -2.95σ	0.005380	0.001533	0.998467
-2.90	μ -2.90σ	0.006218	0.001822	0.998178
-2.85	μ -2.85σ	0.007181	0.002156	0.997844
-2.80	μ -2.80σ	0.008287	0.002543	0.997457
-2.75	μ -2.75σ	0.009518	0.002987	0.997013
-2.70	μ -2.70σ	0.010980	0.003497	0.996503
-2.65	μ -2.65σ	0.012488	0.004080	0.995920
-2.60	μ -2.60σ	0.014158	0.004744	0.995256
-2.55	μ -2.55σ	0.016083	0.005499	0.994501
-2.50	μ -2.50σ	0.018178	0.006354	0.993646
-2.45	μ -2.45σ	0.020510	0.007320	0.992680
-2.40	μ -2.40σ	0.023082	0.008408	0.991581
-2.35	μ -2.35σ	0.025909	0.009632	0.990368
-2.30	μ -2.30σ	0.029008	0.011004	0.988996
-2.25	μ -2.25σ	0.032397	0.012538	0.987482
-2.20	μ -2.20σ	0.036092	0.014248	0.985751
-2.15	μ -2.15σ	0.040111	0.016152	0.983849
-2.10	μ -2.10σ	0.044471	0.018266	0.981734
-2.05	μ -2.05σ	0.049189	0.020606	0.979394
-2.00	μ -2.00σ	0.054280	0.023191	0.976809
-1.95	μ -1.95σ	0.059759	0.026040	0.973960
-1.90	μ -1.90σ	0.065636	0.029173	0.970827
-1.85	μ -1.85σ	0.071933	0.032611	0.967389
-1.80	μ -1.80σ	0.078652	0.036374	0.963626
-1.75	μ -1.75σ	0.085801	0.040486	0.959517
-1.70	μ -1.70σ	0.093380	0.044961	0.955039
-1.65	μ -1.65σ	0.101417	0.049828	0.950171
-1.60	μ -1.60σ	0.109884	0.055110	0.944890
-1.55	μ -1.55σ	0.119780	0.060825	0.939175
-1.50	μ -1.50σ	0.129120	0.066996	0.933004
-1.45	μ -1.45σ	0.137966	0.073644	0.926356
-1.40	μ -1.40σ	0.149017	0.080789	0.919211
-1.35	μ -1.35σ	0.160545	0.088452	0.911548
-1.30	μ -1.30σ	0.169420	0.096650	0.903350
-1.25	μ -1.25σ	0.180884	0.105400	0.894600
-1.20	μ -1.20σ	0.192129	0.114718	0.885282
-1.15	μ -1.15σ	0.203071	0.124617	0.875383
-1.10	μ -1.10σ	0.215610	0.135108	0.864891
-1.05	μ -1.05σ	0.227814	0.146201	0.853799
-1.00	μ -1.00σ	0.240100	0.157002	0.842098
-0.95	μ -0.95σ	0.252342	0.170218	0.829787
-0.90	μ -0.90σ	0.264550	0.184135	0.815865
-0.85	μ -0.85σ	0.278800	0.198668	0.803334
-0.80	μ -0.80σ	0.289825	0.210790	0.789201
-0.75	μ -0.75σ	0.300350	0.225525	0.774475
-0.70	μ -0.70σ	0.311770	0.240829	0.759171
-0.65	μ -0.65σ	0.322011	0.256696	0.743304
-0.60	μ -0.60σ	0.333960	0.273103	0.726897
-0.55	μ -0.55σ	0.343401	0.290027	0.709973
-0.50	μ -0.50σ	0.352920	0.307439	0.692561
-0.45	μ -0.45σ	0.361724	0.325908	0.674092
-0.40	μ -0.40σ	0.369781	0.343599	0.656401
-0.35	μ -0.35σ	0.377086	0.362274	0.637726
-0.30	μ -0.30σ	0.383490	0.381292	0.618708
-0.25	μ -0.25σ	0.389018	0.400608	0.599392
-0.20	μ -0.20σ	0.393600	0.420178	0.579822
-0.15	μ -0.15σ	0.397208	0.439962	0.560048
-0.10	μ -0.10σ	0.399790	0.459881	0.540119
-0.05	μ -0.05σ	0.401364	0.479914	0.520086
0.00	μ +0.00σ	0.401907	0.500000	0.500000

TABLA DE LA DISTRIBUCION LAMBDA GENERALIZADA

DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA I.S.P.
FPGS/JVSH

Z	X	Y	1-α	α	Z	X	Y	1-α	α
0.05	$\mu+0.050\sigma$	0.401984	0.520086	0.479914	1.60	$\mu+1.600\sigma$	0.108884	0.944890	0.055110
0.10	$\mu+0.100\sigma$	0.390790	0.540119	0.459881	1.65	$\mu+1.650\sigma$	0.101417	0.950171	0.049829
0.15	$\mu+0.150\sigma$	0.397203	0.560048	0.439952	1.70	$\mu+1.700\sigma$	0.093898	0.955039	0.044961
0.20	$\mu+0.200\sigma$	0.388508	0.579822	0.420178	1.75	$\mu+1.750\sigma$	0.085902	0.959617	0.040403
0.25	$\mu+0.250\sigma$	0.386016	0.599362	0.400608	1.80	$\mu+1.800\sigma$	0.078852	0.963826	0.036374
0.30	$\mu+0.300\sigma$	0.388490	0.618708	0.381292	1.85	$\mu+1.850\sigma$	0.071988	0.967989	0.032011
0.35	$\mu+0.350\sigma$	0.377086	0.637726	0.362274	1.90	$\mu+1.900\sigma$	0.065836	0.970827	0.029173
0.40	$\mu+0.400\sigma$	0.368781	0.656401	0.343599	1.95	$\mu+1.950\sigma$	0.059758	0.973960	0.026040
0.45	$\mu+0.450\sigma$	0.361724	0.674692	0.325308	2.00	$\mu+2.000\sigma$	0.054290	0.976808	0.023191
0.50	$\mu+0.500\sigma$	0.352929	0.692561	0.307439	2.05	$\mu+2.050\sigma$	0.048189	0.979364	0.020906
0.55	$\mu+0.550\sigma$	0.343491	0.709973	0.290027	2.10	$\mu+2.100\sigma$	0.044471	0.981784	0.018296
0.60	$\mu+0.600\sigma$	0.333098	0.726897	0.273103	2.15	$\mu+2.150\sigma$	0.040111	0.983847	0.016153
0.65	$\mu+0.650\sigma$	0.322811	0.743304	0.256696	2.20	$\mu+2.200\sigma$	0.036052	0.985751	0.014249
0.70	$\mu+0.700\sigma$	0.311770	0.759171	0.240829	2.25	$\mu+2.250\sigma$	0.032307	0.987402	0.012598
0.75	$\mu+0.750\sigma$	0.300360	0.774475	0.225525	2.30	$\mu+2.300\sigma$	0.029000	0.988996	0.011004
0.80	$\mu+0.800\sigma$	0.289825	0.789201	0.210799	2.35	$\mu+2.350\sigma$	0.025909	0.990368	0.009632
0.85	$\mu+0.850\sigma$	0.278069	0.803304	0.196696	2.40	$\mu+2.400\sigma$	0.022892	0.991591	0.008409
0.90	$\mu+0.900\sigma$	0.264550	0.816805	0.183195	2.45	$\mu+2.450\sigma$	0.020510	0.992680	0.007320
0.95	$\mu+0.950\sigma$	0.252842	0.829787	0.170213	2.50	$\mu+2.500\sigma$	0.018178	0.993646	0.006354
1.00	$\mu+1.000\sigma$	0.240109	0.842098	0.157902	2.55	$\mu+2.550\sigma$	0.016069	0.994502	0.005498
1.05	$\mu+1.050\sigma$	0.227914	0.853799	0.146201	2.60	$\mu+2.600\sigma$	0.014160	0.995256	0.004744
1.10	$\mu+1.100\sigma$	0.215913	0.864891	0.135109	2.65	$\mu+2.650\sigma$	0.012499	0.995920	0.004080
1.15	$\mu+1.150\sigma$	0.203871	0.875383	0.124617	2.70	$\mu+2.700\sigma$	0.010960	0.996503	0.003497
1.20	$\mu+1.200\sigma$	0.192129	0.885282	0.114718	2.75	$\mu+2.700\sigma$	0.009613	0.997013	0.002987
1.25	$\mu+1.250\sigma$	0.180834	0.894600	0.105400	2.80	$\mu+2.800\sigma$	0.008287	0.997457	0.002543
1.30	$\mu+1.300\sigma$	0.169420	0.903350	0.096650	2.85	$\mu+2.850\sigma$	0.007131	0.997844	0.002156
1.35	$\mu+1.350\sigma$	0.158545	0.911548	0.088452	2.90	$\mu+2.900\sigma$	0.006218	0.998178	0.001822
1.40	$\mu+1.400\sigma$	0.148017	0.919211	0.080789	2.95	$\mu+2.950\sigma$	0.005368	0.998467	0.001533
1.45	$\mu+1.450\sigma$	0.137868	0.926356	0.073644	3.00	$\mu+3.000\sigma$	0.004600	0.998716	0.001284
1.50	$\mu+1.500\sigma$	0.128120	0.933004	0.066996	3.50	$\mu+3.500\sigma$	0.000780	0.999865	0.000135
1.55	$\mu+1.550\sigma$	0.118788	0.939175	0.060825	4.00	$\mu+4.000\sigma$	0.000098	0.999991	0.000009

R-8

TABLA DE LA DISTRIBUCION LAMBDA GENERALIZADA

DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA I.B.P.
FPRD/JVGH

Z	X	Y	1-α	α
0.00	μ±0.00σ	0.401887	0.000000	1.000000
0.05	μ±0.05σ	0.401984	0.040171	0.959829
0.10	μ±0.10σ	0.398700	0.080238	0.919762
0.15	μ±0.15σ	0.397280	0.120087	0.879883
0.20	μ±0.20σ	0.392500	0.159845	0.840055
0.25	μ±0.25σ	0.389019	0.198784	0.801216
0.30	μ±0.30σ	0.384480	0.237417	0.762580
0.35	μ±0.35σ	0.377085	0.275452	0.724548
0.40	μ±0.40σ	0.368781	0.312801	0.687198
0.45	μ±0.45σ	0.361724	0.348380	0.650817
0.50	μ±0.50σ	0.352080	0.385122	0.614878
0.55	μ±0.55σ	0.343401	0.419946	0.580054
0.60	μ±0.60σ	0.333080	0.450784	0.548208
0.65	μ±0.65σ	0.322011	0.480088	0.518081
0.70	μ±0.70σ	0.311770	0.518941	0.481058
0.75	μ±0.75σ	0.300080	0.548950	0.451050
0.80	μ±0.80σ	0.288825	0.578401	0.421504
0.85	μ±0.85σ	0.276000	0.606087	0.393843
0.90	μ±0.90σ	0.264050	0.633728	0.366271
0.95	μ±0.95σ	0.252342	0.659574	0.340428
1.00	μ±1.00σ	0.240108	0.684197	0.315803
1.05	μ±1.05σ	0.227814	0.707597	0.292403
1.10	μ±1.10σ	0.218819	0.729783	0.270217
1.15	μ±1.15σ	0.203971	0.750788	0.249284
1.20	μ±1.20σ	0.192128	0.770584	0.229498
1.25	μ±1.25σ	0.180834	0.789200	0.210800
1.30	μ±1.30σ	0.169428	0.806780	0.193200
1.35	μ±1.35σ	0.158545	0.823088	0.176904
1.40	μ±1.40σ	0.148017	0.838421	0.161579
1.45	μ±1.45σ	0.137800	0.852712	0.147288
1.50	μ±1.50σ	0.128120	0.866008	0.133992
1.55	μ±1.55σ	0.118780	0.878350	0.121650
1.60	μ±1.60σ	0.109884	0.889780	0.110220

Z	X	Y	1-α	α
1.65	μ±1.65σ	0.101417	0.900941	0.099059
1.70	μ±1.70σ	0.093386	0.910978	0.089022
1.75	μ±1.75σ	0.085882	0.919834	0.080066
1.80	μ±1.80σ	0.078852	0.927258	0.072747
1.85	μ±1.85σ	0.071880	0.934778	0.065222
1.90	μ±1.90σ	0.065686	0.941058	0.058947
1.95	μ±1.95σ	0.058758	0.947920	0.052080
2.00	μ±2.00σ	0.054280	0.953019	0.046981
2.05	μ±2.05σ	0.049188	0.958789	0.041211
2.10	μ±2.10σ	0.044471	0.963468	0.036531
2.15	μ±2.15σ	0.040111	0.967095	0.032905
2.20	μ±2.20σ	0.036082	0.971592	0.028408
2.25	μ±2.25σ	0.032387	0.974924	0.025076
2.30	μ±2.30σ	0.028988	0.977992	0.022008
2.35	μ±2.35σ	0.025809	0.980738	0.019264
2.40	μ±2.40σ	0.023092	0.983184	0.016817
2.45	μ±2.45σ	0.020510	0.985361	0.014638
2.50	μ±2.50σ	0.018178	0.987293	0.012707
2.55	μ±2.55σ	0.016084	0.988993	0.011007
2.60	μ±2.60σ	0.014158	0.990512	0.009488
2.65	μ±2.65σ	0.012409	0.991841	0.008159
2.70	μ±2.70σ	0.010908	0.993036	0.006964
2.75	μ±2.75σ	0.009510	0.994026	0.005974
2.80	μ±2.80σ	0.008297	0.994915	0.005085
2.85	μ±2.85σ	0.007181	0.995687	0.004313
2.90	μ±2.90σ	0.006219	0.996357	0.003643
2.95	μ±2.95σ	0.005368	0.996935	0.003065
3.00	μ±3.00σ	0.004600	0.997432	0.002568
3.50	μ±3.50σ	0.000780	0.999671	0.000329
4.00	μ±4.00σ	0.000088	0.999981	0.000019
4.50	μ±4.50σ	0.000009	0.999998	0.000002
4.75	μ±4.75σ	0.000003	0.999998	0.000002
5.00	μ±5.00σ	0.000000	0.999998	0.000002

R-3

TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL

DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA J.B.P.
PPRO/JVEH

Z	X	Y	1-α	α
-4.00	μ-4.000σ	0.000134	0.000032	0.999968
-3.75	μ-3.750σ	0.000353	0.000089	0.999911
-3.50	μ-3.500σ	0.000873	0.000233	0.999767
-3.00	μ-3.000σ	0.004432	0.001350	0.998650
-2.95	μ-2.950σ	0.005143	0.001589	0.998411
-2.90	μ-2.900σ	0.005953	0.001866	0.998134
-2.85	μ-2.850σ	0.006873	0.002186	0.997814
-2.80	μ-2.800σ	0.007915	0.002555	0.997445
-2.75	μ-2.750σ	0.009094	0.002980	0.997020
-2.70	μ-2.700σ	0.010421	0.003467	0.996533
-2.65	μ-2.650σ	0.011912	0.004024	0.995976
-2.60	μ-2.600σ	0.013583	0.004661	0.995339
-2.55	μ-2.550σ	0.015449	0.005386	0.994614
-2.50	μ-2.500σ	0.017528	0.006210	0.993790
-2.45	μ-2.450σ	0.019837	0.007143	0.992857
-2.40	μ-2.400σ	0.022395	0.008198	0.991802
-2.35	μ-2.350σ	0.025218	0.009387	0.990613
-2.30	μ-2.300σ	0.028327	0.010724	0.989276
-2.25	μ-2.250σ	0.031740	0.012224	0.987776
-2.20	μ-2.200σ	0.035475	0.013903	0.986097
-2.15	μ-2.150σ	0.039550	0.015778	0.984222
-2.10	μ-2.100σ	0.043984	0.017864	0.982136
-2.05	μ-2.050σ	0.048792	0.020182	0.979818
-2.00	μ-2.000σ	0.053991	0.022750	0.977250
-1.95	μ-1.950σ	0.059595	0.025588	0.974412
-1.90	μ-1.900σ	0.065616	0.028717	0.971283
-1.85	μ-1.850σ	0.072065	0.032157	0.967843
-1.80	μ-1.800σ	0.078950	0.035930	0.964070
-1.75	μ-1.750σ	0.086277	0.040059	0.959941
-1.70	μ-1.700σ	0.094049	0.044565	0.955435
-1.65	μ-1.650σ	0.102265	0.049471	0.950529
-1.60	μ-1.600σ	0.110921	0.054799	0.945201
-1.55	μ-1.550σ	0.120009	0.060571	0.939429
-1.50	μ-1.500σ	0.129518	0.066807	0.933193
-1.45	μ-1.450σ	0.139431	0.073529	0.926471
-1.40	μ-1.400σ	0.149727	0.080757	0.919243
-1.35	μ-1.350σ	0.160383	0.088508	0.911492
-1.30	μ-1.300σ	0.171369	0.096800	0.903200
-1.25	μ-1.250σ	0.182649	0.105650	0.894350
-1.20	μ-1.200σ	0.194186	0.115070	0.884930
-1.15	μ-1.150σ	0.205936	0.125072	0.874928
-1.10	μ-1.100σ	0.217852	0.135666	0.864334
-1.05	μ-1.050σ	0.229882	0.146859	0.853141
-1.00	μ-1.000σ	0.241971	0.158655	0.841345
-0.95	μ-0.950σ	0.254059	0.171056	0.828944
-0.90	μ-0.900σ	0.266085	0.184060	0.815940
-0.85	μ-0.850σ	0.277985	0.197663	0.802337
-0.80	μ-0.800σ	0.289692	0.211855	0.788145
-0.75	μ-0.750σ	0.301137	0.226627	0.773373
-0.70	μ-0.700σ	0.312254	0.241964	0.758036
-0.65	μ-0.650σ	0.322972	0.257846	0.742154
-0.60	μ-0.600σ	0.333225	0.274253	0.725747
-0.55	μ-0.550σ	0.342944	0.291160	0.708840
-0.50	μ-0.500σ	0.352065	0.308538	0.691462
-0.45	μ-0.450σ	0.360527	0.326355	0.673645
-0.40	μ-0.400σ	0.368270	0.344578	0.655422
-0.35	μ-0.350σ	0.375240	0.363169	0.636831
-0.30	μ-0.300σ	0.381388	0.382089	0.617911
-0.25	μ-0.250σ	0.386668	0.401294	0.598706
-0.20	μ-0.200σ	0.391043	0.420740	0.579260
-0.15	μ-0.150σ	0.394479	0.440382	0.559618
-0.10	μ-0.100σ	0.396953	0.460172	0.539828
-0.05	μ-0.050σ	0.398444	0.480061	0.519939
0.00	μ+0.000σ	0.398942	0.500000	0.500000

TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL

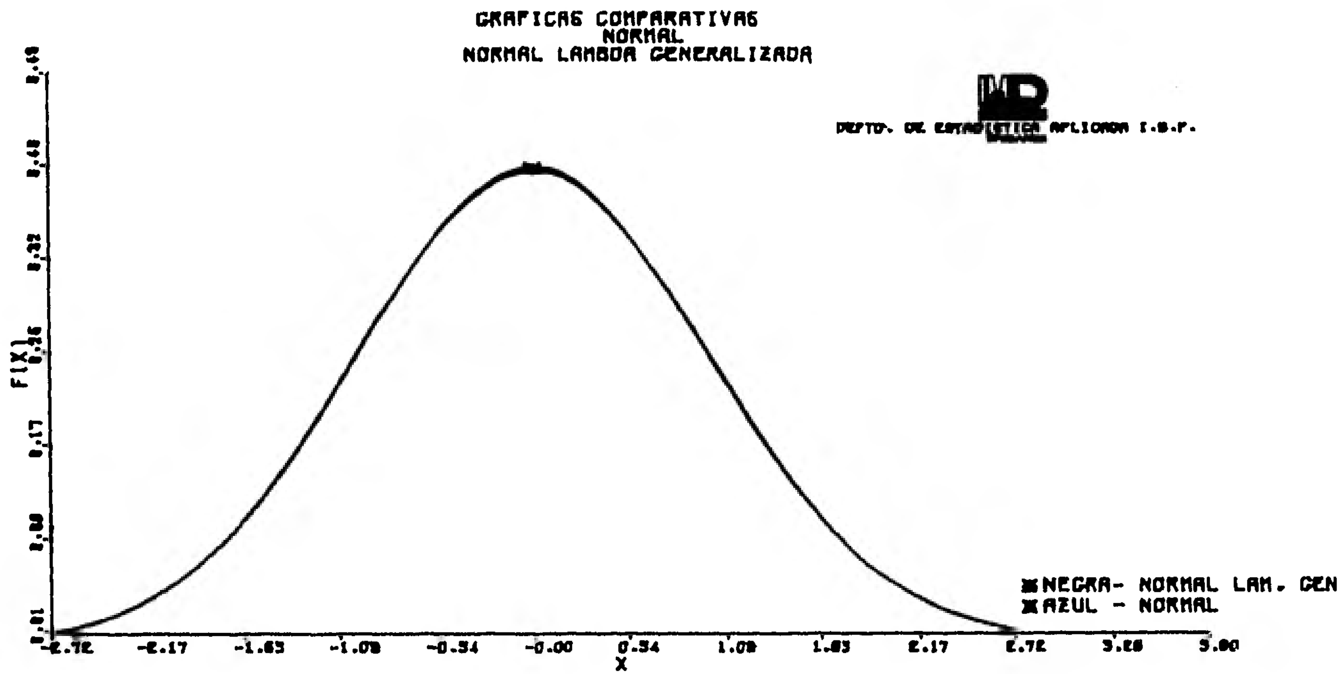
DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA I.B.P.
FPBO/JVBH

Z	X	Y	1-α	α	Z	X	Y	1-α	α
0.05	μ +0.05σ	0.398444	0.519938	0.480061	1.60	μ +1.60σ	0.110921	0.945201	0.054799
0.10	μ +0.10σ	0.396953	0.539828	0.460172	1.65	μ +1.65σ	0.102265	0.950529	0.049471
0.15	μ +0.15σ	0.394479	0.559618	0.440382	1.70	μ +1.70σ	0.094048	0.955435	0.044565
0.20	μ +0.20σ	0.391043	0.579260	0.420740	1.75	μ +1.75σ	0.086277	0.959941	0.040059
0.25	μ +0.25σ	0.386668	0.598706	0.401294	1.80	μ +1.80σ	0.078950	0.964070	0.035930
0.30	μ +0.30σ	0.381388	0.617911	0.382089	1.85	μ +1.85σ	0.072066	0.967843	0.032157
0.35	μ +0.35σ	0.375240	0.636831	0.363169	1.90	μ +1.90σ	0.065616	0.971283	0.028717
0.40	μ +0.40σ	0.368270	0.655422	0.344578	1.95	μ +1.95σ	0.059595	0.974412	0.025588
0.45	μ +0.45σ	0.360527	0.673645	0.326355	2.00	μ +2.00σ	0.053991	0.977250	0.022750
0.50	μ +0.50σ	0.352065	0.691462	0.308538	2.05	μ +2.05σ	0.048792	0.979818	0.020182
0.55	μ +0.55σ	0.342944	0.708840	0.291160	2.10	μ +2.10σ	0.043984	0.982136	0.017865
0.60	μ +0.60σ	0.333225	0.725747	0.274253	2.15	μ +2.15σ	0.039550	0.984222	0.015778
0.65	μ +0.65σ	0.322972	0.742154	0.257846	2.20	μ +2.20σ	0.035475	0.986096	0.013904
0.70	μ +0.70σ	0.312254	0.758036	0.241964	2.25	μ +2.25σ	0.031740	0.987776	0.012224
0.75	μ +0.75σ	0.301137	0.773373	0.226627	2.30	μ +2.30σ	0.028327	0.989276	0.010724
0.80	μ +0.80σ	0.289692	0.788144	0.211856	2.35	μ +2.35σ	0.025219	0.990613	0.009387
0.85	μ +0.85σ	0.277985	0.802337	0.197663	2.40	μ +2.40σ	0.022395	0.991802	0.008198
0.90	μ +0.90σ	0.266085	0.815940	0.184060	2.45	μ +2.45σ	0.019837	0.992857	0.007143
0.95	μ +0.95σ	0.254058	0.828944	0.171056	2.50	μ +2.50σ	0.017528	0.993790	0.006210
1.00	μ +1.00σ	0.241971	0.841345	0.158655	2.55	μ +2.55σ	0.015448	0.994614	0.005386
1.05	μ +1.05σ	0.229882	0.853141	0.146859	2.60	μ +2.60σ	0.013583	0.995339	0.004661
1.10	μ +1.10σ	0.217852	0.864334	0.135666	2.65	μ +2.65σ	0.011912	0.995976	0.004024
1.15	μ +1.15σ	0.205936	0.874928	0.125072	2.70	μ +2.70σ	0.010421	0.996533	0.003467
1.20	μ +1.20σ	0.194186	0.884930	0.115070	2.75	μ +2.75σ	0.009094	0.997020	0.002980
1.25	μ +1.25σ	0.182649	0.894350	0.105650	2.80	μ +2.80σ	0.007915	0.997445	0.002555
1.30	μ +1.30σ	0.171368	0.903200	0.096800	2.85	μ +2.85σ	0.006873	0.997814	0.002186
1.35	μ +1.35σ	0.160383	0.911492	0.088508	2.90	μ +2.90σ	0.005953	0.998134	0.001866
1.40	μ +1.40σ	0.149727	0.919243	0.080757	2.95	μ +2.95σ	0.005143	0.998411	0.001589
1.45	μ +1.45σ	0.139431	0.926471	0.073529	3.00	μ +3.00σ	0.004432	0.998650	0.001350
1.50	μ +1.50σ	0.129519	0.933193	0.066807	3.50	μ +3.50σ	0.000873	0.999767	0.000233
1.55	μ +1.55σ	0.120008	0.939428	0.060571	4.00	μ +4.00σ	0.000134	0.999968	0.000032

TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL

DEPTO. DE ESTADISTICA APLICADA J.S.P.
FPRG/JVAH

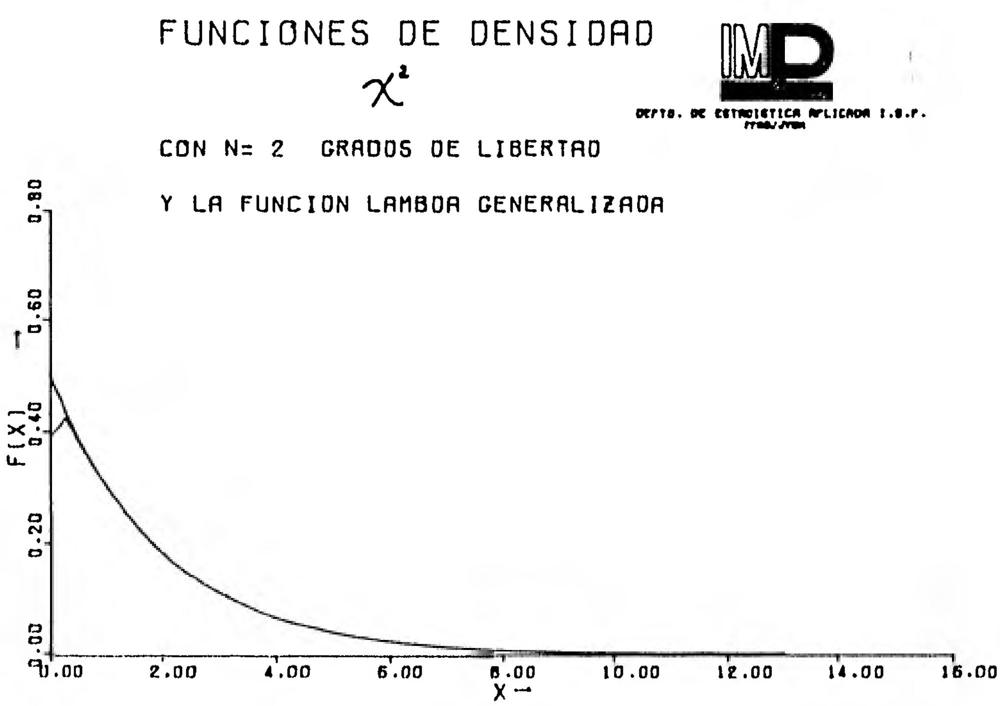
Z	X	Y	1- α	α
0.00	$\mu\pm0.00\sigma$	0.398942	0.000000	1.000000
0.05	$\mu\pm0.05\sigma$	0.398444	0.039877	0.960123
0.10	$\mu\pm0.10\sigma$	0.396953	0.079655	0.920345
0.15	$\mu\pm0.15\sigma$	0.394479	0.119235	0.880765
0.20	$\mu\pm0.20\sigma$	0.391043	0.158519	0.841481
0.25	$\mu\pm0.25\sigma$	0.386668	0.197413	0.802587
0.30	$\mu\pm0.30\sigma$	0.381388	0.235823	0.764177
0.35	$\mu\pm0.35\sigma$	0.375240	0.273661	0.726339
0.40	$\mu\pm0.40\sigma$	0.368270	0.310844	0.689156
0.45	$\mu\pm0.45\sigma$	0.360527	0.347290	0.652710
0.50	$\mu\pm0.50\sigma$	0.352065	0.382925	0.617075
0.55	$\mu\pm0.55\sigma$	0.342944	0.417682	0.582318
0.60	$\mu\pm0.60\sigma$	0.333225	0.451494	0.548506
0.65	$\mu\pm0.65\sigma$	0.322972	0.484308	0.515692
0.70	$\mu\pm0.70\sigma$	0.312254	0.516072	0.483928
0.75	$\mu\pm0.75\sigma$	0.301137	0.546745	0.453255
0.80	$\mu\pm0.80\sigma$	0.289692	0.576289	0.423711
0.85	$\mu\pm0.85\sigma$	0.277985	0.604674	0.395326
0.90	$\mu\pm0.90\sigma$	0.266085	0.631880	0.368120
0.95	$\mu\pm0.95\sigma$	0.254059	0.657888	0.342112
1.00	$\mu\pm1.00\sigma$	0.241971	0.682689	0.317311
1.05	$\mu\pm1.05\sigma$	0.229882	0.706282	0.293718
1.10	$\mu\pm1.10\sigma$	0.217852	0.728668	0.271332
1.15	$\mu\pm1.15\sigma$	0.205936	0.749856	0.250144
1.20	$\mu\pm1.20\sigma$	0.194186	0.769861	0.230139
1.25	$\mu\pm1.25\sigma$	0.182649	0.788701	0.211299
1.30	$\mu\pm1.30\sigma$	0.171369	0.806399	0.193601
1.35	$\mu\pm1.35\sigma$	0.160383	0.822984	0.177016
1.40	$\mu\pm1.40\sigma$	0.149727	0.838487	0.161513
1.45	$\mu\pm1.45\sigma$	0.139431	0.852942	0.147058
1.50	$\mu\pm1.50\sigma$	0.129518	0.866386	0.133614
1.55	$\mu\pm1.55\sigma$	0.120009	0.878859	0.121141
1.60	$\mu\pm1.60\sigma$	0.110921	0.890402	0.109598
1.65	$\mu\pm1.65\sigma$	0.102265	0.901057	0.098943
1.70	$\mu\pm1.70\sigma$	0.094049	0.910869	0.089131
1.75	$\mu\pm1.75\sigma$	0.086277	0.919882	0.080118
1.80	$\mu\pm1.80\sigma$	0.078950	0.928139	0.071861
1.85	$\mu\pm1.85\sigma$	0.072065	0.935686	0.064314
1.90	$\mu\pm1.90\sigma$	0.065616	0.942567	0.057433
1.95	$\mu\pm1.95\sigma$	0.059595	0.948830	0.051170
2.00	$\mu\pm2.00\sigma$	0.053991	0.954499	0.045501
2.05	$\mu\pm2.05\sigma$	0.048792	0.959635	0.040365
2.10	$\mu\pm2.10\sigma$	0.043984	0.964271	0.035729
2.15	$\mu\pm2.15\sigma$	0.039550	0.968445	0.031555
2.20	$\mu\pm2.20\sigma$	0.035475	0.972193	0.027807
2.25	$\mu\pm2.25\sigma$	0.031740	0.975551	0.024449
2.30	$\mu\pm2.30\sigma$	0.028327	0.978552	0.021448
2.35	$\mu\pm2.35\sigma$	0.025218	0.981227	0.018773
2.40	$\mu\pm2.40\sigma$	0.022395	0.983605	0.016395
2.45	$\mu\pm2.45\sigma$	0.019837	0.985714	0.014286
2.50	$\mu\pm2.50\sigma$	0.017528	0.987581	0.012419
2.55	$\mu\pm2.55\sigma$	0.015449	0.989228	0.010772
2.60	$\mu\pm2.60\sigma$	0.013583	0.990678	0.009322
2.65	$\mu\pm2.65\sigma$	0.011912	0.991951	0.008049
2.70	$\mu\pm2.70\sigma$	0.010421	0.993066	0.006934
2.75	$\mu\pm2.75\sigma$	0.009094	0.994041	0.005959
2.80	$\mu\pm2.80\sigma$	0.007915	0.994890	0.005110
2.85	$\mu\pm2.85\sigma$	0.006873	0.995628	0.004372
2.90	$\mu\pm2.90\sigma$	0.005953	0.996268	0.003731
2.95	$\mu\pm2.95\sigma$	0.005143	0.996822	0.003178
3.00	$\mu\pm3.00\sigma$	0.004432	0.997300	0.002700
3.50	$\mu\pm3.50\sigma$	0.000873	0.999535	0.000465
4.00	$\mu\pm4.00\sigma$	0.000134	0.999936	0.000064
4.50	$\mu\pm4.50\sigma$	0.000016	0.999993	0.000007
4.75	$\mu\pm4.75\sigma$	0.000005	0.999998	0.000002
5.00	$\mu\pm5.00\sigma$	0.000001	0.999999	0.000001


GRAFICAS COMPARATIVAS
NORMAL
NORMAL LAMBDA GENERALIZADA
F(X)
X
NEGRA- NORMAL LAM. GEN.
AZUL - NORMAL

grafica 5.1

$\lambda_1 = -.993$, $\lambda_2 = -.001081$, $\lambda_3 = -.0000407$ y $\lambda_4 = -.001076$; como $\mu = 2$ y $\sigma^2 = 4$

se usará (4.b), resultando $\lambda_1(2,2) = (-.993)2+2 = .014$ y $\lambda_2(2,2) = -.001081/2 = -.0005405$; la tabla 5.3 muestra los valores de la distribución Lambda generalizada y los valores de la distribución $X^2_{(2)}$ y la gráfica 5.2 compara las densidades de estas distribuciones. La tabla T5.4 muestra los valores de los parámetros para ajustar la distribución Lambda generalizada a distintos grados de libertad de la distribución $X^2_{(n)}$.



gráfica 5.2

Tabla T 5.3

P	Lambda generalizada	$\chi^2_{(2)}$
0.1	0.206	0.211
0.2	0.446	0.446
0.3	0.715	0.713
0.5	1.389	1.386
0.75	2.774	2.772
0.9	4.603	4.605
0.95	5.987	5.991
0.99	9.204	9.210
0.995	10.592	10.597
0.999	15. 817	13.815

Tabla T 5.4

Grados de libertad	α_3	α_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
4	1.414	6	-.782	0.0379	0.005603	0.0365
5	1.265	5.4	-.812	0.0634	0.009148	0.0645
6	1.153	5	-.792	0.0764	0.0124	0.0784

Tabla T 5.5

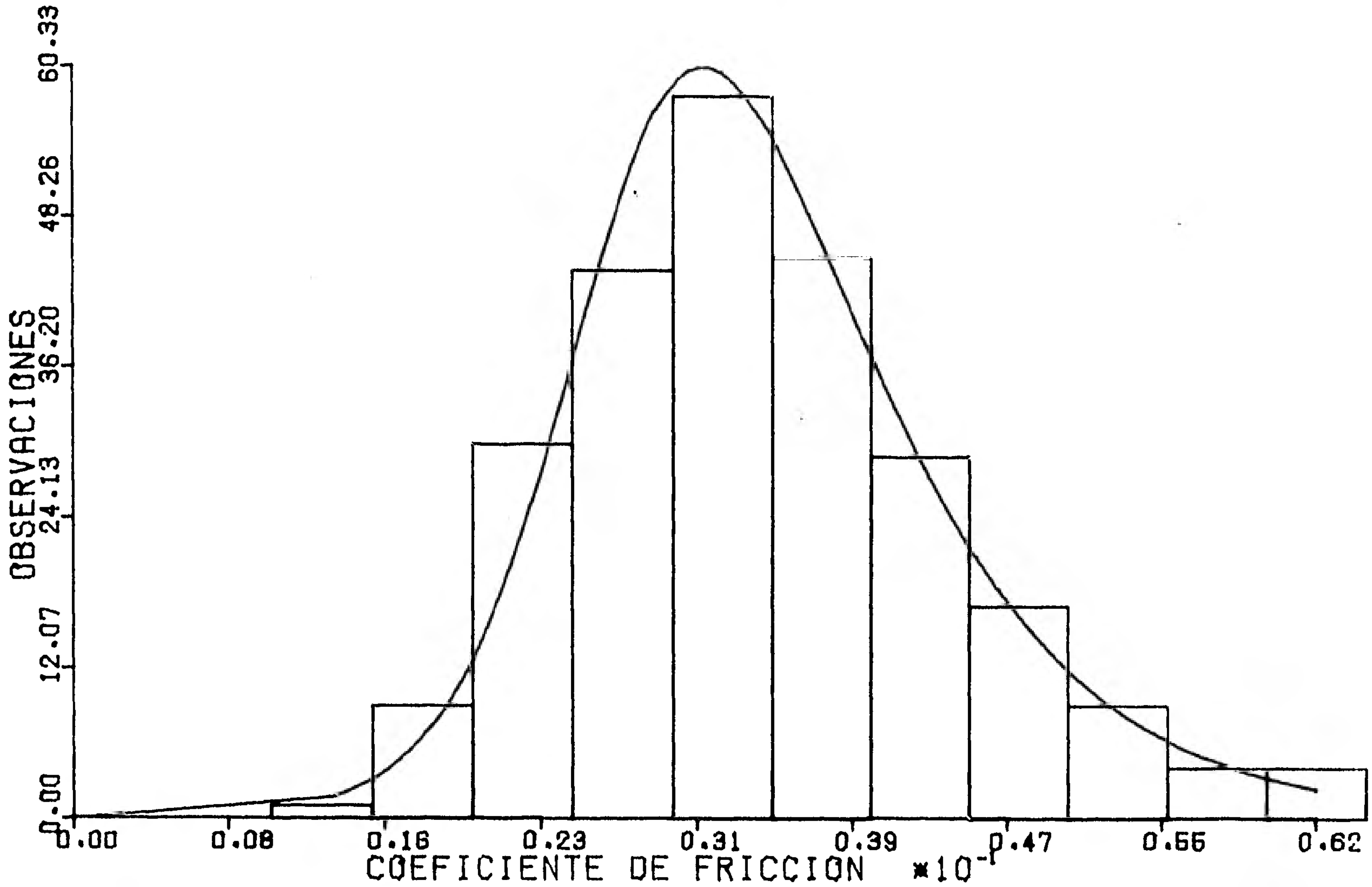
Coeficientes de fricción	Frecuencia
$-\infty$ - 0.015	1
0.015 - 0.020	9
0.020 - 0.025	30
0.025 - 0.030	44
0.030 - 0.035	58
0.035 - 0.040	45
0.040 - 0.045	29
0.045 - 0.050	17
0.050 - 0.055	9
0.055 - 0.060	4
0.060 - ∞	4

En base a estos ejemplos, se puede subrayar que esta distribución aproxima muy bien a las distribuciones originales conocidas, por medio de sus momentos. Ahora se considera el caso de que se desconoce la distribución y se tiene una muestra de la población que se quiere estudiar; considerando los momentos muestrales mencionados en el Capítulo III, por los cuales estimamos los valores de $\hat{\alpha}_3$ y $\hat{\alpha}_4$.

Ilustramos este método tomando los datos de Hahn y Shapiro [1], sobre las medidas del coeficiente de fricción para un metal, con 250 muestras, los valores son mostrados en la Tabla T5.5, de los cuales se calcularon $\bar{X} = .0345$, $\sqrt{m_2} = 0.0098$, $\hat{\alpha}_3 = 0.87$ y $\hat{\alpha}_4 = 4.92$.

entonces la solución de las ecuaciones no lineales (4.a) obtienen los valores $\lambda_1 = -.413$, $\lambda_2 = .0134$, $\lambda_3 = .004581$ y $\lambda_4 = .0102$.

Los valores para λ_1 y λ_2 son calculados usanto (4.b), obteniendo $\lambda_1(.0345, .0098) = -.413(.0098) + .0345 = .0305$ y $\lambda_2(.0345, .0098) = .0134/.0098 = 1.3673$; La grafica 5.3 compara la función de densidad de la distribución Lambda generalizada y el histograma de la tabla T5.5 el valor de la prueba de ajuste $\chi^2_{(10)} = 2.04$ con $p = .3$. Sin embargo como los parámetros del modelo Lambda generalizada son estimados por los momentos muestrales y no por el método de máxima verosimilitud, el uso de la prueba de la χ^2 es solamente aproximado.



OBSERVACIONES
0.00
12.07
24.13
36.20
48.26
60.33
0.00
0.08
0.16
0.23
0.31
0.39
0.47
0.55
0.62
COEFICIENTE DE FRICCION *10⁻¹

grafica 5.3

BIBLIOGRAFIA

1. Hahn, G.J. and Shapiro, S.S.
Statistical Models in Engineering, New York.
John Wiley & Sons, Inc. (1967)

```
12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

C      VI  PROGRAMA DE AJUSTE
C
C
C              PROGRAMA DE ACOPLAMIENTO A LA DISTRIBUCION LAMBDA GENE-
C           NERALIZADA POR MEDIO DE LOS DATOS DE ENTRADA, ENCONTRANDO
C           LOS PARAMETROS LAM(I),I=1,2,3,4 POR LOS SIGUENTES METODOS :
C             1 NONLIN (RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS
C                      NO LINEALES  DE N VARIABLES , USANDO
C                      UN METODO DE CONVERGENCI CUATRATICA
C                      CONOCIDO COMO BROWN ,BASADO EN LA E-
C                      LIMINACION GAUSIANA. EL ALGORITMO --
C                      ASUME  QUE LAS FUNCIONES TIENEN 1-ERAS DERIVADAS
C                      CONTINUAS, ESTIMADAS POR DIFERENCIAS
C                      FINITAS)
C             2 LMGENV (MINIMIZA UNA SUMA DE CUADRADOS DE FUNCIONES
C                      DE N VARIABLES, USANDO UNA COMBINACION DEL ALGORITMO
C                      LEVENBERG-MARQUADT Y EL METODO DE PASOS-DECENDENTES
C                      APLICADO A LA FUNCION)
C             3 GCFLRV (CALCULA EL MINIMO DE UNA FUNCION OBJETIVO DE N VARIA-
C                      BLES USANDO EL METODO DE GRAIENTES CONJUGADOS Y SE EM-
C                      PLEAN OPCIONALMENTE
C                      LAS FORMULAS DE :
C                                              1  FLETCHER-REEVES
C                                              2  POLAK-RIBIERE
C                                              3  HESTENES-STIEFEL
C                       EN ESTE PROGRAMA SE PRUEBAN LOS 3 METODOS)
C             4 GQBFGS (CALCULAR EL MINIMO DE UNA FUNCION OBJETIVO DE N
C                       VARIABLES USANDO UN METODO QUASI-NEWTON Y SE
C                       EMPLEAN OPCIONALMENTE LAS FORMULAS DE:
C                                              1 DFP
C                                              2 BFGS
C                       EN ESTE PROGRAMA SE PRUEBAN LOS 2 METODOS)
C             5 LMCHOL (MINIMIZA UNA SUMA DE CUADRADOS DE FUNCIONES DE N
C                      VARIABLES USANDO UNA MODIFICACION DEL ALGORITMO
C                      LEVENBERG-MARQUADT)
C             6 SNGINT (RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS NO
C                      LINEALES DE N VARIABLES, UDANDO UNA COMBINACION
C                      DEL METODO DE NEWTON RAPHSON Y EL METODO DE
C                      PASOS DECENDENTES APLICANDO A LA SUMA DE CUADRA-
C                      DOS. EL ALGORITMO SUPONE QUE LAS ECUACIONES TIENEN
C                      PRIMERA DERIVADA CONTINUA, ESTIMANDO ENTONCES
C                      POR DIFERENCIAS FINITAS.)
C
C
           REAL*8 X(2),A,B,BETA,DEL,ALFA3,ALFA4,ALF2,ALFR
           REAL NF,NCLS
           DIMENSION NT(4),X1S(6,2),YMC(100),XCIZQ(52),YCIZQ(52)
           DIMENSION XCDER(52),YCDER(52)
           CHARACTER*60 TITX,TITY,TITULO(4)
           CHARACTER  TDAT*3,MSOL*6(6)
           COMMON ALFA3,ALFA4
           COMMON /DEL/DEL
           REAL XOB(300),LAM(4),XF(300),XG(302),YG(302),LX,LY
           LOGICAL BOOL,BOOL1,BALFA3
           DEL =.1D-6
           PRINT 99
   99       FORMAT(1H1)
C           TIPO DE DATOS DE ENTRADA :
C               TDAT=CLS     LOS DATOS SON DE LA MANERA SIGUENTE
C                            CON INTERVALOS DE CLASE EN DONDE
```

```
C                             XOB  - MARCA DE CLASE
C                             XF   - FRECUENCIA
C
C                TDAT=FCA     LOS DATOS SON DE LA MANERA SIGUIENTE
C                             CON AGRUPADOS EN FRECUENCIAS
C                             XOB  - DATOS
C                             XF   - FRECUENCIA
C
C
C                TDAT=DIR     LOS DATOS SON DE LA MANERA SIGUIENTE
C                             LOS DATOS SON DIRECTOS
C                             XOB  - DATO
C
C
            READ(5,105)TDAT
            READ(5,*)POSIGN
            READ(5,*)NMSOL
            WRITE(6,106)TDAT,NMSOL
  105       FORMAT(A3,1X,A6)
  106       FORMAT(1X,'LOS DATOS ENTRAN EN LA FORMA ',A3,//,
     * 'SE UTILIZARAN ',I2,' METODOS DE SOLUCION')
C
C           SE ESCOGEN LOS METODOS DE SOLUCION QUE SE DESEE
C           NMSOL=# DE METODOS DE SOLUCION
C           MSOL(I)   - NOMBRE DEL METODO DE SOLUCION
C           X1S(I,J)  - VALORES INICIALES PARA C/METODO
C
C
           DO 11 I=1,NMSOL
            READ(5,107)MSOL(I),(X1S(I,J),J=1,2)
   11       WRITE(6,109)MSOL(I),(X1S(I,J),J=1,2)
  107       FORMAT(A6,2F10.4)
  109     FORMAT(2X,'METODO DE SOLUCION ',A6,' VALORES INICIALES',2F10.4)
           I=1
           S1=0
           S2=0
           S3=0
           S4=0
           PRINT *,' DATOS :'
   50      READ(5,100,ERR=60,END=65)XOB(I),XF(I)
           IF(TDAT.EQ.'DIR')XF(I)=1.
           WRITE(6,100)XOB(I),XF(I)
           XT=XOB(I)
           S1=S1+XF(I)*XT         @ SUMA (XOB(I))
           XT2=XT*XT
           S2=S2+XF(I)*XT2        @ SUMA (XOB(I)**2)
           XT3=XT*XT2
           S3=S3+XF(I)*XT3        @ SUMA (XOB(I)**3)
           XT4=XT*XT3
           S4=S4+XF(I)*XT4        @ SUMA (XOB(I)**4)
           NF=NF+XF(I)
           I=I+1
           GO TO 50
   60      XM=S1/NF             @ CALCULO DE LA MEDIA
           NOB=I-1
           PRINT *,'NUMERO DE OBSERVACIONES=',NF
           PRINT *,'MEDIA=',XM
           PRINT *,'S1=',S1,' S2=',S2,' S3=',S3,'S4=',S4,' NF=',NF,NOB
C
C                       CALCULO DE LOS 4 PRIMEROS MOMENTOS :
```

```
C                          1 MEDIA
C                          2 VARIANZA
C                          3 3ER MOMENTO CON RESPECTO A LA MEDIA
C                          4 4ER MOMENTO CON RESPECTO A LA MEDIA
C
C                 SI LOS DATOS SON CLS SE HACE LA CORRECCION DE SHEPPARD
C
          IF(TDAT.EQ.'CLS')THEN
          S2=S2/NF
          S3=S3/NF
          S4=S4/NF
          PRINT *,'VALORES DE S PARA CLS',XM,S2,S3,S4
           HCLS=ABS(XOB(2)-XOB(3))
           SXM2=S2-1./12.*HCLS**2
           SXM3=S3-1./4.*HCLS**2*XM
           SXM4=S4-1./2.*HCLS**2*S2+7./240.*HCLS**4
          PRINT *,'VALORES CORREGIDOS DE S', XM,SXM2,SXM3,SXM4
           XM2=SXM2-XM**2
           XM3=SXM3-3.*SXM2*XM+2.*XM**3
           XM4=SXM4-4.*SXM3*XM+6.*SXM2*XM**2-3.*XM**4
          ELSE
          XT2=XM*XM
          XM2=S2/NF-XT2
          XT3=XT2*XM
          XM3=(S3-3.*XM*S2)/NF+2.*XT3
          XT4=XT3*XM
          XM4=(S4-4.*XM*S3+6.*XT2*S2)/NF-3.*XT4
          END IF
          S=SQRT(XM2)
          PRINT *,' S=',S
          PRINT *,'VAR=',XM2
          PRINT *,'M3=',XM3
          PRINT *,'M4=',XM4
C
C                   ESTIMACION DE LOS PARAMETROS ALFA 3 Y ALFA 4
C
          ALFA3=DBLE(XM3/XM2**(3/2))
          ALFA4=DBLE(XM4/XM2**2)
          PRINT *,'PARA: ALFA3=',ALFA3
          PRINT *,'      ALFA4=',ALFA4
          LALFA3=.FALSE.
          IF(ALFA3.LT.0.D0)THEN
          LALFA3=.TRUE.
          ALFA3=-ALFA3
          END IF
          ALF2=ALFA3*ALFA3
          ALFR=1.7D0*ALF2+1.8D0
          IF(ALFA4.LT.ALFR) THEN
          IF(ALF2+1.D0.GT.ALFA4) THEN
      PRINT *,'**** LOS PUNTOS (BETA1,BETA2)=',ALF2,',',ALFA4,'ESTAN EN'
     - ,' EL AREA IMPOSIBLE, RECTIFIQUE SU MUESTRA'
          CALL EXIT
          END IF
      PRINT *,'**** LOS PUNTOS (BETA1,BETA2)=',ALF2,',',ALFA4,'ESTAN EN'
     - ,' EL AREA > U-BETA > '
          CALL EXIT
          END IF
C         SE ESCOGE EL MAXIMO Y EL MINIMO DE LOS DATOS
C         OBSERVADOS Y LAS FRECUENCIAS.
C
```

```
      YMAX=XF(1)
      YMIN=XF(1)
      XMAX=XOB(1)
      XMIN=XOB(1)
      DO 3 I=2,NOB
       XMAX=AMAX1(XMAX,XOB(I))
       XMIN=AMIN1(XMIN,XOB(I))
       YMAX=AMAX1(YMAX,XF(I))
       YMIN=AMIN1(YMIN,XF(I))
    3 CONTINUE
      XOBMIN=XMIN
      XOBMAX=XMAX
      XFMIN=YMIN
      XFMAX=YMAX
C
C     SI LOS DATOS NO ESTAN POR INTERVALO DE CLASES ,SE ESCOGEN
C     LOS INTERVALOS POR MEDIO DEL METODO DE WILLIAMS ,C.A.(1950)
C     >ON THE CHOICE OF THE NUMBERS AND WIDTH OF CLASSES FOR THE
C     CHI-SQUARE TEST OF GOODNESS OF FIT>,JOURNAL OF THE AMERICA
C     STATISTICAL ASSOCIATION VOL 45,PAG 77-86.
C
      IF(TDAT.NE.'CLS')THEN
C     NINT=RINCLN(NF)
      CLASE=RINCL(INT(NF),NINT,XOB,XF,XOBMAX,XOBMIN)
      NOB=NF
      PRINT *,'XOB-MAX=',XOBMAX,' XOB-MIN=',XOBMIN
C     CLASE=ABS(XOBMAX-XOBMIN)/(NINT-1)
      PRINT *,'INTERVALO DE CLASE=',CLASE ,'NINT=',NINT
      CALL CAMF(XF,NOB,CLASE,NINT,XOB)
      PRINT *,'X-OBSERVADA , FRECUENCIA  NOB= ',NOB
      DO 30 IN=1,NOB
       PRINT *,XOB(IN),XF(IN)
   30 CONTINUE
      END IF
      IF(TDAT.EQ.'CLS')NINT=NOB
C
C     CALCULO DEL VALOR DE JI-CUADRADA CORRESPONDIENTE A LA
C     SIGNIFICANCIA PGSIGN Y A LOS GRADOS DE LIBERTAD NGLIB
C
      NGLIB=NOB-4-1
      ANGA=ALOG(GAMMA(FLOAT(NGLIB)/2.))
      X222=XJICUA(PGSIGN,FLOAT(NGLIB),ANGA,IFAU)
      PRINT *,'NUMERO DE INTERVALOS DE CLASE',NINT
C
C                  LECTURA DE LA INFORMACION DE GRAFICACION
C
      READ(5,102)NPG,LX,LY
      PRINT *,'NPG=',NPG,'  LX=',LX,' LY=',LY
      READ(5,103)NTX,TITX
      WRITE(6,103)NTX,TITX
      READ(5,103)NTY,TITY
      WRITE(6,103)NTY,TITY
      READ(5,104)NTIT
      WRITE(6,104)NTIT
      DO 2 I=1,NTIT
      READ(5,103)NT(I),TITULO(I)
    2 WRITE(6,103)NT(I),TITULO(I)
C
C        INICIALIZACION EN LA GRAFICA
C
```

```
            CALL PLOTS(2,2,0)
            CALL AVISO('IEM,2FA')
            CALL PLOT(1.,4.,-3)
C
C           EJECUCION DE LOS DIFERENTES METODOS DE SOLUCION
C           CON SUS RESPECTIVOS VALORES INICIALES
C
            DO 12 KSOL=1,NMSOL
             X(1)=DBLE(X1S(KSOL,1))
             X(2)=DBLE(X1S(KSOL,2))
            IF(MSOL(KSOL).EQ.'NONLIN') CALL NONLIN(2,6,30,1,X,1.D-6)
            IF(X(1)*X(2).LE.0.D0)THEN
            PRINT *,' NONLIN, LA SOLUCION TIENE SIGNO DISTINTO ',X(1),X(2)
            PRINT *,'NO SE EJECUTA, CAMBIE EL VALOR INICIAL'
            GO TO 12
            END IF
            IF(MSOL(KSOL).EQ.'LMGENV') CALL SOLVE(DBLE(X1S(KSOL,1)),
     *     DBLE(X1S(KSOL,2)),X)
            KOK=0
 15         IF(MSOL(KSOL).EQ.'GCPLRV')THEN
            KOK=KOK+1
              CALL SOLVE1(DBLE(X1S(KSOL,1)),DBLE(X1S(KSOL,2)),KOK,X)
            BOOL=.TRUE.
            IF(KOK.GE.3)BOOL=.FALSE.
            GO TO 25
            END IF
            KOK=0
 25         IF(MSOL(KSOL).EQ.'GORFGS')THEN
            KOK=KOK+1
            CALL SOLVE2(DBLE(X1S(KSOL,1)),DBLE(X1S(KSOL,2)),KOK,X)
            BOOL1=.TRUE.
            IF(KOK.GE.2)BOOL1=.FALSE.
            END IF
            IF(MSOL(KSOL).EQ.'LMCHOL')CALL SOLVE3(DBLE(X1S(KSOL,1)),
     *      DBLE(X1S(KSOL,2)),X)
            IF(MSOL(KSOL).EQ.'SNGINT')CALL SOLVE4(DBLE(X1S(KSOL,1)),
     *      DBLE(X1S(KSOL,2)),X)
            IF(X(1)*X(2).LE.0.D0)THEN
            PRINT *,' SNGINT, LA SOLUCION TIENE SIGNO DISTINTO ',X(1),X(2)
            PRINT *,'NO SE EJECUTA, CAMBIE EL VALOR INICIAL'
            GO TO 12
            END IF
C
C           MEDIANTE LA SOLUCION OBTENIDA SE CALCULAN LOS PARAMETROS :
C                       LAMDA 1 -  PARAMETRO DE LOCALIDAD
C                       LAMDA 2 -  PARAMETRO DE ESCALA
C                       LAMDA 3 -  PARAMETRO DE FORMA
C                       LAMDA 4 -  PARAMETRO DE FORMA
C
            PRINT *,'SOLUCION :  LAMDA3=',X(1),' LAMDA4=',X(2)
            A=1.D0/(1.D0+X(1))-1.D0/(1.D0+X(2))
           B=1.D0/(1.D0+2.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+2.D0*X(2))
     *           -2.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+X(2))
           PRINT *,'PROXIMO CALCULO','A=',A,' B=',B
           TEM=SNGL(B-A**2)
           PRINT *,' TEM=',TEM
           IF(TEM.LT.0.)THEN
              PRINT *,'    >>>> LA SOLUCION ES IMAGINARIA  <<<< '
              TEM=ABS(TEM)
           END IF
```

```
      LAM(2)=TEM**.5
      IF(X(1).LT.0.)LAM(2)=-LAM(2)
      LAM(1)=-SNGL(A)/LAM(2)
      LAM(1)=LAM(1)*S + XM
      LAM(2)=LAM(2)/S
      LAM(3)=SNGL(X(1))
      LAM(4)=SNGL(X(2))
      IF(BALFA3)THEN
      LAM(1)=-LAM(1)
      AUX=LAM(3)
      LAM(3)=LAM(4)
      LAM(4)=AUX
      END IF
      IF(LAM(3).GE.1.)THEN
  PRINT *,'LA FUNCION LAMBDA GENERALIZADA ES TRUNCADA POR LA IZQ.'
      END IF
      IF(LAM(4).GE.1.)THEN
  PRINT *,'LA FUNCION LAMBDA GENERALIZADA ES TRUNCADA POR LA DER.'
      END IF
      PRINT *,'PARA: ALFA3=',ALFA3
      PRINT *,'      ALFA4=',ALFA4
      PRINT *,' SE TIENE LA SIGUIENTE SOLUCION :'
      PRINT *,' '
      PRINT *,'      LAMDA1=',LAM(1)
      PRINT *,'      LAMDA2=',LAM(2)
      PRINT *,'      LAMDA3=',LAM(3)
      PRINT *,'      LAMDA4=',LAM(4)
C
C     CONTROL DE LA K-ESIMA GRAFICA
C
      NGPC=NGPC+1
      ALY=ALY+LY+2.
      IF(ALY.GT.33)THEN
        CALL PLOT(LX+2.,-(NGPC-1)*(LY+2.),-3)
        NGPC=1
        ALY=LY+2.
      ELSE
        IF(NGPC.NE.1)CALL PLOT(0.,LY+2.,-3)
      END IF
C
C     SE ESCOGE NPI EL NUMERO DE PUNTOS EN C/INTEGRAL ENTRE
C     C/DATO OBSERVADO
C
      MNOB=MOD(NPG,NOB)
      IF(MNOB.EQ.0)THEN
       NPI=NPG/NOB
      ELSE
       NPI=(NPG-MNOB)/NOB
       NPG=NOB*NPI
      END IF
C
C     SE INTEGRA ENTRE C/DATO OBSERVADO
C
      CALL COLAS(XCIZQ,YCIZQ,50,XOB(1)-XLCL,0.,NF)
      XLCL=ABS(XOB(3)-XOB(2))/2.
      XA=XOB(1)+XLCL      @ X ANTERIOR
      PA=XLEATN(XA)
      SX2=(PA*NF-XF(1))**2/(PA*NF)
      YHC(1)=PA*NF
       PRINT *,'PRUEBA X2 EPX2= ',YHC(1),' XF(1)=',XF(1)
```

```
         PRINT *,'SX2=',SX2
        XA=XOB(1)-XLCL
        DO 8 I=1,NOB
         XAC=XOB(I)+XLCL
         IF((I.NE.NOB).AND.(I.NE.1)) THEN
         P=XNEWTN(XAC)
         EPX2=(P-PA)*NF
         YHC(I)=EPX2
         PA=P
         SX2=SX2+(EPX2-XF(I))**2/EPX2
         PRINT *,'PRUEBA X2 EPX2= ',EPX2,' XF(I)=',XF(I)
         PRINT *,'EN SUMA    SX2=',SX2
         END IF
         PRINT *,'INTEGRAL ',I,' DE ',XA,' A',XAC,' =',P
        XINC=(XAC-XA)/NPI  @ INCREMENTO EN LA INTEGRAL  .
        X1=XA
        KK1=(I-1)*NPI+1
        KK2=I*NPI
        P1=XNEWTN(X1)
C
C       SE INTEGRA ENTRE XA Y XAC CONSIDERANDO NPI SUBDIVISIONES
C
        WRITE (6,141)
 141    FORMAT(5X,'N',10X,'P',15X,'X',16X,'Y',4X,
     * 'INTERVALO DE INTEGRACION')
 140    FORMAT(4X,I3,4X,F10.8,4X,F12.5,4X,F12.5,4X,'(',
     * F12.5,',',F12.5,')')
        DO 10 I2=KK1,KK2
         X2=X1+XINC
         XG(I2)=X2
         P2=XNEWTN(X2)
         YG(I2)=(P2-P1)*NF*NPI
         WRITE(6,140)I2,P2,XG(I2),YG(I2),X1,X2
         P1=P2
         X1=X2
 10     CONTINUE
         XA=XAC
 8      CONTINUE
        SX2=SX2+((1.-P)*NF-XF(NOB))**2/((1.-P)*NF)
        CALL COLAS(XCDER,YCDER,50,XAC,1,NF)
        YHC(NOB)=(1.-P)*NF
         PRINT *,'PRUEBA X2 EPX2= ',YHC(NOB),' XF(NOB)=',XF(NOB)
         PRINT *,'ULTIMO VALOR SX2=',SX2,' (1.-P)*NF=',(1.-P)*NF
        PRINT *,'PRUEBA DE LA JI-CUADRADA:'
C                 ****** ** ** ***********
        PRINT *,'VALOR ESTIMADO =',SX2
      PRINT *,'VALOR X2 =',X222,' CON UNA SIGNIFICANCIA DE ',1.-PGSIGN
       PRINT *,'CON ',NGLIB,' GRADOS DE LIBERTAD'
C
C       SE ESCOGE LA ESCALA DE GRAFICACION EN BASE AL MAXIMO
C       Y MINIMO VALOR DE X , Y Y LA LONGITUD DE LOS EJES
C
         DO 4 I=1,NPG
        YMAX=AMAX1(YMAX,YG(I))
        XMAX=AMAX1(XMAX,XG(I))
        YMIN=AMIN1(YMIN,YG(I))
        XMIN=AMIN1(XMIN,XG(I))
 4        CONTINUE
        DO 33 I=1,50
        YMAX=AMAX1(YMAX,YCDER(I),YCIZQ(I))
```

```
          XMAX=AMAX1(XMAX,XCDER(I),XCIZQ(I))
          YMIN=AMIN1(YMIN,YCDER(I),YCIZQ(I))
          XMIN=AMIN1(XMIN,XCDER(I),XCIZQ(I))
   33     CONTINUE
          PRINT *,'XMAX=',XMAX,'YMAX=',YMAX
          PRINT *,'XMAX=',XMAX,'YMAX=',YMAX
C
C         ESCALAS
C
          XG(NPG+2)=(XMAX-XMIN)/LX
          XG(NPG+1)=XMIN
          YG(NPG+1)=YMIN
          YG(NPG+2)=(YMAX-YMIN)/LY
          XCDER(51)=XMIN
          XCDER(52)=XG(NPG+2)
          YCDER(51)=YMIN
          YCDER(52)=YG(NPG+2)
          XCIZQ(51)=XMIN
          XCIZQ(52)=XG(NPG+2)
          YCIZQ(51)=YMIN
          YCIZQ(52)=YG(NPG+2)
C
C         GRAFICACION DE TITULO(S) DE LA GRAFICA
C
          YPAGE=LY+1.18
          TITULO (NTIT+1)=MSOL(KSOL)
          NT(NTIT+1)=6
          DO 5 I=1,NTIT+1
          XPAGE=(LX-.14*NT(I))/2.
          YPAGE=YPAGE-.18
          CALL SYMBOL(XPAGE,YPAGE,.14,TITULO(I),0.0,NT(I))
    5     CONTINUE
C
C         GRAFICACION DE LOS EJES
C
          CALL AXIS(0.0,0.0,TITX,-NTX,LX+1,0.0,XG(NPG+1),XG(NPG+2))
          CALL AXIS(0.0,0.0,TITY,NTY,LY+1,90.0,YG(NPG+1),YG(NPG+2))
C
C         ESCALAS PARA GRAFICAR EL HISTOGRAMA
C
          ESCAX=1./XG(NPG+2)
          ESCAY=1./YG(NPG+2)
C
C         GRAFICACION DE LA CURVA AJUSTADA
C
          CALL LINE (XCIZQ,YCIZQ,50,1,0,0)
          CALL LINE (XG,YG,NPG,1,0,0)
          CALL LINE (XCDER,YCDER,50,1,0,0)
          PRINT *,'SE TERMINO DE GRAFICAR'
          CALL HISTO(XOB,XF,NOB,ESCAX,ESCAY,XMIN,YMIN)
          PRINT *,'SALIO DE HISTO'
          CALL NEWPEN(2)
          CALL HISTO (XOB,YHC,NOB,ESCAX,ESCAY,XMIN,YMIN)
          CALL NEWPEN(1)
          IF(BOOL)GO TO 15
          IF(BOOL1)GO TO 25
   12     CONTINUE
   65     CALL FINAL
  100     FORMAT(2F15.7)
  102     FORMAT(I3,2F10.4)
```

```
103     FORMAT(I2,A60)
104     FORMAT(I2)
        CALL EXIT
        SUBROUTINE HISTO(X,XF,N,ESCAX,ESCAY,XMIN,YMIN)
C       SUBRRUTINA HISTO
C       OBJETIVO : GRAFICAR EL HISTOGRAMA DE LOS DATOS DE ENTRADA
C       PARAMETROS :
C                    X     - MARCA DE CLASE
C                    XF    - FRECUENCIA
C                    N     - # DE DATOS
C                    ESCAX - ESCALA RELATIVA AL EJE X
C                    ESCAY - ESCALA RELATIVA AL EJE Y
C                    XMIN  - VALOR MINIMO EN EL EJE X
C                    YMIN  - VALOR MINIMO EN EL EJE Y
C       SUBRRUTNAS USADAS:
C                    DEL PAQUETE DE GRAFICACION LA SUBROUTINA BAR
C                    QUE DIBUJA UNA BARRA DEPENDIENDO DE SUS PARA-
C                    METROS
C
        DIMENSION X(N),XF(N)
        ANGLE=0.0
        WIDTH=(X(1)-X(2))*ESCAX
        ANCHO=(X(1)-X(2))/2.
        IHAT=1
        NPI=0
        SH=0.0
        DO 1 I=1,N
        XPAGE=(X(I)-ANCHO-XMIN)*ESCAX
        YPAGE=0.0
        HEIGHT=(XF(I)-YMIN)*ESCAY
        CALL BAR(XPAGE,YPAGE,ANGLE,HEIGHT,WIDTH,SH,IHAT,NPI)
1       CONTINUE
        RETURN
        SUBROUTINE NONLIN(N,NUMSIG,MAXIT,IPRINT,X,EPS)
      REAL*8 X(30),PART(30),TEMP(30),COE(30,31),RELCON,F,FACTOR,HOLD,H,
     * FPLUS,DERMAX,TEST
      REAL*8 DELTA,FMAX,EPS,PREC,ETA
         DIMENSION ISUB(30),LOOKUP(30,30)
        DELTA=1.D-7
        RELCON=10.D+0**(-NUMSIG)
        JTEST=1
        IF(IPRINT.EQ.1)PRINT 48
48      FORMAT(1H1)
        DO 700 M=1,MAXIT
        IQUIT=0
        FMAX=0.D0
        M1=M-1
        IF(IPRINT.NE.1)GO TO 9
        PRINT 49,M1,(X(I),I=1,N)
49      FORMAT(I5,3D18.8,/,(D23.8,2D18.8))
9       DO 10 J=1,N
10      LOOKUP(1,J)=J
        DO 500 K=1,N
        IF(K-1)134,134,131
131     KMIN=K-1
        CALL BACK(KMIN,N,X,ISUB,COE,LOOKUP)
134     CALL AUXFCN(X,F,K)
        FMAX=DMAX1(FMAX,DABS(F))
        IF(DABS(F).GE.EPS) GO TO 1345
        IQUIT=IQUIT+1
```

```
      IF(IQUIT.NE.N) GO TO 1345
      GO TO 725
1345  FACTOR =.001D+00
135   ITALLY=0
      DO 200 I=K,N
      ITEMP=LOOKUP(K,I)
      HOLD=X(ITEMP)
      PREC=5.D-6
            ETA=FACTOR*DABS(HOLD)
      H=DMIN1(FMAX,ETA)
      IF(H.LT.PREC)H=PREC
      X(ITEMP)=HOLD+H
      IF(K-1)161,161,151
151   CALL BACK(KMIN,N,X,ISUB,COE,LOOKUP)
161   CALL AUXFCN(X,FPLUS,K)
      PART(ITEMP)=(FPLUS-F)/H
      X(ITEMP)=HOLD
      IF(DABS(PART(ITEMP)).LT.DELTA) GO TO 190
      IF(DABS(F/PART(ITEMP)).LE.1.D+15) GO TO 200
190   ITALLY=ITALLY+1
200   CONTINUE
      IF(ITALLY.LE.N-K) GO TO 202
      FACTOR =FACTOR*10.0D+00
      IF(FACTOR.GT.11.)GO TO 775
      GO TO 135
202   IF(K.LT.N) GO TO 203
      IF(DABS(PART(ITEMP)).LT.DELTA) GO TO 775
      COE(K,N+1)=0.0D+00
      KMAX=ITEMP
      GO TO 500
203   KMAX=LOOKUP(K,K)
      DERMAX=DABS(PART(KMAX))
      KPLUS=K+1
      DO 210 I=KPLUS,N
      JSUB=LOOKUP(K,I)
      TEST=DABS(PART(JSUB))
      IF(TEST.LT.DERMAX) GO TO 209
      DERMAX=TEST
      LOOKUP(KPLUS,I)=KMAX
      KMAX=JSUB
      GO TO 210
209   LOOKUP(KPLUS,I)=JSUB
210   CONTINUE
      IF(DABS(PART(KMAX)).EQ.0.D0)GO TO 775
      ISUB(K)=KMAX
      COE(K,N+1)=0.0D+00
      DO 220 J=KPLUS,N
      JSUB=LOOKUP(KPLUS,J)
      COE(K,JSUB)= -PART(JSUB)/PART(KMAX)
      COE(K,N+1)=COE(K,N+1)+PART(JSUB)*X(JSUB)
220   CONTINUE
500   COE(K,N+1)=(COE(K,N+1)-F)/PART(KMAX)+X(KMAX)
      X(KMAX)=COE(N,N+1)
      IF(N.EQ.1) GO TO 610
      CALL BACK(N-1,N,X,ISUB,COE,LOOKUP)
610   IF(M-1)650,650,625
625   DO 630 I=1,N
      IF(DABS(TEMP(I)-X(I)).GT.DABS(X(I))*RELCON) GO TO 649
630   CONTINUE
      JTEST=JTEST+1
```

```
              IF(JTEST-3)650,725,725
     649      JTEST=1
     650      DO 660 I=1,N
     660      TEMP(I)=X(I)
     700      CONTINUE
              PRINT 1753
    1753  FORMAT(/,1X,'NO SE ENCONTRO CONVERGENCIA EN EL MAXIMO DE ITER.')
              IF(IPRINT.NE.1)GO TO 800
              PRINT 1763
    1763      FORMAT(1X,'VALORES DE LA FUNCION EN LA ULTIMA APROXIMACION',/)
              IFLAG=1
              GO TO 7777
     725      IF(IPRINT.NE.1)GO TO 800
    7777      DO 750 K=1,N
              CALL AUXFCN(X,PART(K),K)
     750      CONTINUE
              IF(IFLAG.NE.1) GO TO 8777
              PRINT 7788,(PART(K),K=1,N)
    7788      FORMAT(3D20.8)
              GO TO 800
    8777      PRINT 751
     751      FORMAT(//,1X,'CONVERGENCIA OBTENIDA. VALORES DE LA FUNCION')
              PRINT 7515,(PART(K),K=1,N)
    7515      FORMAT(1X,'COMO LA APROXIMACION FINAL:',//,(3D20.8))
              PRINT 37,(X(K),K=1,N)
      37      FORMAT(1X,'PUNTO DONDE SE EVALUO',//,(3D20.8))
              GO TO 800
     775      PRINT 752
     752 FORMAT(//,1X,'EL JACOBIANO MODIFICADO ES SINGULAR.PROBAR UNA
        *DIFERENTE ')
              PRINT 7525
    7525      FORMAT(1X,'APROXIMACION INICIAL')
     800      MAXIT=M1+1
              RETURN
              SUBROUTINE BACK(KMIN,N,X,ISUB,COE,LOOKUP)
              REAL*8 X(30),COE(30,31)
              DIMENSION ISUB (30),LOOKUP(30,30)
              DO 200 KK=1,KMIN
              KM=KMIN-KK+2
              KMAX=ISUB(KM-1)
              X(KMAX)=0.0D+00
              DO 100 J=KM,N
              JSUB=LOOKUP(KM,J)
              X(KMAX)=X(KMAX)+COE(KM-1,JSUB)*X(JSUB)
     100      CONTINUE
              X(KMAX)=X(KMAX)+COE(KM-1,N+1)
     200      CONTINUE
              RETURN
              FUNCTION SHEMSR(P)
C             FUNCION SHEMSR
C             OBJETIVO : CALCULAR LA FUNCION DE PERCENTILES R(P)
C             PARAMETROS :
C                       P - PROBABILIDAD
C
              IF(P.EQ.0.)THEN
               SHEMSR=LAM(1)-1./LAM(2)
              RETURN
              END IF
              IF(P.EQ.1.)THEN
               SHEMSR=LAM(1)+1./LAM(2)
```

```
      RETURN
      END IF
      SHEMSR=LAM(1)+(P**LAM(3)-(1.-P)**LAM(4))/LAM(2)
C      PRINT *,'SHEMSR=',SHEMSR,P,(LAM(I),I=1,4)
      RETURN
      FUNCTION RAMBER(P)
C
C     FUNCION RAMBER
C     OBJETIVO : CALCULAR LA FUNCION DE DENSIDAD DE
C                PROBABILIDAD DE LA DISTRIBUCION R. N S.
C     PARAMETRO :
C                P - PROBABILIDAD
C
      IF(P.EQ.0.)THEN
       RAMBER=LAM(2)/LAM(4)
      RETURN
      END IF
      IF(P.EQ.1.)THEN
       RAMBER=LAM(2)/LAM(3)
      RETURN
      END IF
 RAMBER=LAM(2)/(LAM(3)*P**(LAM(3)-1.)+LAM(4)*(1.-P)**(LAM(4)-1.
C    PRINT *,'RAMBER=',RAMBER,P,(LAM(I),I=1,4)
      RETURN
      FUNCTION XNEWTN(XOB)
C
C
C     FUNCION XNEWTN
C     OBJETIVO : ENCONTRAR EL VALOR P CORRESPONDIENTE AL
C                VALOR XOB, POR MEDIO DEL METODO DE NEWTON PARA -
C                CEROS DE FUNCIONES.
C     PARAMETRO :
C                XOB - VALOR X AL CUAL SE BUSCA EL VALOR DE LA
C                      FUNCION DE DISTRIBUCION
C     FUNCIONES USADAS :
C                SHEMSR,RAMBER.
C
       P=.00001
       DO 9 J=1,20
       P=P-(SHEMSR(P)-XOB)*RAMBER(P)
      IF(P.LE.0.0)P=0.000001
      IF(P.GE.1.0)P=0.999999
C         PRINT *,'P=',P,' R(P)-X=',SHEMSR(P)-XOB
C         PRINT *,'F(P)=',RAMBER(P)
       XNEWTN=P
       IF(ABS(SHEMSR(P)-XOB).LE.1.E-8)THEN
        XNEWTN=P
        RETURN
       END IF
    9 CONTINUE
    PRINT *,'NO SE ENCONTRO CONV. POR NEWTON ',J-1,P,XOB,SHEMSR(P)
       RETURN
       END
      SUBROUTINE CAMF(XF,N,CL,NINT,XOB)
      DIMENSION XF(N),XOB(N)
      REAL LINF,LSUP
      K=1
      IM=0
C     CALL ORDENA(XOB,XF,N)
      LINF=XOB(K)
```

```
          LSUP=XOB(K)+CL
          DO 1 I=1,NINT
          XFS=0
          DO 2  J=K,N
          IF(XOB(J).GT.LSUP)GO TO 3
          XFS=XFS+XF(J)
  2       CONTINUE
C 3        IF(J.GT.I)THEN
   3      XF(I)=XFS
          XOB(I)=(LSUP+LINF)/2.
          IF(J.GE.N)THEN
           PRINT *,'YA J=N =',N,' NINT=',NINT,' I=',I
C          PRINT *,' IM EN ERROR *******',IM
          END IF
          K=J
          LINF=LSUP
          LSUP=LSUP+CL
  1       CONTINUE
          N=NINT
          RETURN
          END
          FUNCTION RINCL(NOB,INTER,XOB,XF,XM,XMI)
          DIMENSION XOB(NOB),XF(NOB)
          ITER=0
          CALL ORDENA(XOB,XF,NOB)
          PRINT *,'SALE DE ORDENA'
C         CALL LINT(XOB,NOB,XIM,XIMI)
C         INTER=INT(FLOAT(NOB)/75.-575./75.)
          INTER=RINCLN(NOB)
          PRINT *,'SALE DE RINCLN(NOB)=',INTER
C100      ITER=ITER+1
C         IF(ITER.GE.20)GO TO 1
          IF(INTER.LT.5)INTER=5
C         IF(INTER.GT.15)INTER=15
          RINCL=(XM-XMI)/(INTER-1)
C         IF(RINCL/XIM.LT..75)THEN
C         INTER=INT(XIM*FLOAT(INTER)/RINCL)
C         GO TO 100
C         END IF
C         IF(NOB*XIMI/15..GT.RINCL)THEN
C         IF(INTER.LL.5)GO TO 1
C         INTER=INTER+1
C         GO TO 100
C         END IF
  1       RETURN
          SUBROUTINE ORDENA(X,XF,N)
          DIMENSION X(N),XF(N)
          DO 1 I=1,N-1
          DO 1 J=1,N-1
          IF(X(J).GT.X(J+1))THEN
          AUX=X(J)
          AUXF=XF(J)
          X(J)=X(J+1)
          XF(J)=XF(J+1)
          X(J+1)=AUX
          XF(J+1)=AUXF
          END IF
  1       CONTINUE
          RETURN
          END
```

```
      SUBROUTINE LINT(X,N,XIM,XIMI)
      DIMENSION X(N)
      XIM=X(N)-X(N-1)
      XIMI=XIM
      DO 1 I=1,N-1
      IF(X(I).EQ.X(I+1))GO TO 1
      XIM=AMAX1(XIM,X(I)-X(I+1))
      XIMI=AMIN1(XIMI,X(I)-X(I+1))
1     CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SOLVE(X1,X2,X)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(2),R(2),AJ(2,2)
      DIMENSION S1(8),S2(2),S3(2),S4(2),S5(4),S6(8),S7(4),S8(2)
      EXTERNAL FUN
      PRINT *,' SUBROUTINE LMGENV'
      N=2
      M=2
      MAXF=1000
      X(1)= X1
      X(2)= X2
      DIST= .5D 0
      EPS=1.0D-8
      IS1=8
      IS5=4
      IS6=8
      IS7=4
     CALL LMGENV(N,M,X,MAXF,DIST,FUN,EPS,R,AJ,IERR,NFCALL,IS1,S1,S2,
   - S3,S4,IS5,S5,IS6,S6,IS7,S7,S8,DUM)
      FF=R(1)*R(1)+R(2)*R(2)
      PRINT *,'VALORES FINALES, IERR=',IERR,' NFCALL=',NFCALL
      PRINT *,'SOLUCION X1=',X(1),' X2=',X(2)
      PRINT *,'VALORES DE LA FUNCION F1=',R(1),' F2=',R(2)
      PRINT *,'VALOR DE LA SUMA DE CUADRADOS=',FF
      RETURN
      END
      SUBROUTINE AUXFCN(X,Y,K)
      COMMON ALFA3,ALFA4
      REAL*8 X(2),Y,A,B,C,D,BETA,ALFA3,ALFA4
C    IF((X(1)*X(2).LT.0.D0).OR.(X(1).LE.-1.D0).OR.(X(2).LE.-1.D0))THEN
C        Y=Y*1.D5
C        RETURN
C      END IF
      A=1.D0/(1.D0+X(1))-1.D0/(1.D0+X(2))
      B=1.D0/(1.D0+2.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+2.D0*X(2))
     *        -2.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+X(2))
      C=1.D0/(1.D0+3.D0*X(1))-1.D0/(1.D0+3.D0*X(2))
     * -3.D0*BETA(1.D0+2.D0*X(1),1.D0+X(2))
     * +3.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+2.D0*X(2))
      GO TO (1,2)K
1     Y=(C-3.D0*A*B+2.D0*A**3)/(B-A**2)**(3/2)-ALFA3
      RETURN
2     D=1.D0/(1.D0+4.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+4.D0*X(2))
     *    -4.D0*BETA(1.D0+3.D0*X(1),1.D0+X(2))
     *   +6.D0*BETA(1.D0+2.D0*X(1),1.D0+2.D0*X(2))
     *     -4.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+3.D0*X(2))
      Y=(D-4.D0*A*C+6.D0*A**2*B-3.D0*A**4)/(B-A**2)**2-ALFA4
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE FUN(N,M,X,F,IERR)
      IMPLICIT   REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(N),F(M)
      COMMON ALFA3,ALFA4
  IF((X(1)*X(2).LT.0.D0).OR.(X(1).LE.-1.D0).OR.(X(2).LE.-1.D0))THEN
        F(1)=F(1)+1.D0
        F(2)=F(2)+1.D0
        PRINT *,' EL PRODUCTO ES NEGATIVO CON',X(1),X(2)
        RETURN
      END IF
      IERR=IERR
      A=1.D0/(1.D0+X(1))-1.D0/(1.D0+X(2))
     B=1.D0/(1.D0+2.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+2.D0*X(2))
     *          -2.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+X(2))
      C=1.D0/(1.D0+3.D0*X(1))-1.D0/(1.D0+3.D0*X(2))
     *    -3.D0*BETA(1.D0+2.D0*X(1),1.D0+X(2))
     * +3.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+2.D0*X(2))
    1   F(1)=(C-3.D0*A*B+2.D0*A**3)/(B-A**2)**(3/2)-ALFA3
    2     D=1.D0/(1.D0+4.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+4.D0*X(2))
     *         -4.D0*BETA(1.D0+3.D0*X(1),1.D0+X(2))
     *        +6.D0*BETA(1.D0+2.D0*X(1),1.D0+2.D0*X(2))
     *           -4.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+3.D0*X(2))
        F(2)=(D-4.D0*A*C+6.D0*A**2*B-3.D0*A**4)/(B-A**2)**2-ALFA4
C        PRINT *,X(1),ALFA3,F(1),X(2),ALFA4,F(2)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SOLVE1(X1,X2,KCN,X)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(2),G(2)
      DIMENSION S1(2),S2(2),S3(2),S4(2)
      EXTERNAL FUN1
      PRINT *,' SUROUTINE GCFLRV '
      N=2
      MAXF=1000
      X(1)= X1
      X(2)= X2
      BFN= 0.01D0
      EPS=1.0D-8
      F=0.0D0
      SPREC=0.1D0
     CALL GCFLRV(N,X,KCN,MAXF,FUN1,EPS,SPREC,EXTBND,F,G,IERR,
   - NFCALL,S1,S2,S3,S4,DUM)
      PRINT *,'VALORES FINALES, IERR=',IERR,' NFCALL=',NFCALL
      PRINT *,'SOLUCION X1=',X(1),' X2=',X(2)
      PRINT *,'VALORES DEL GRADIENTE G1=',G(1),' G2=',G(2)
      PRINT *,'VALOR F=',F
       RETURN
      END
      SUBROUTINE FUN1(N,X,YG,F,IERR)
      IMPLICIT   REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(2),YG(2)
      DIMENSION XX(2)
      COMMON ALFA3,ALFA4
      COMMON /DEL/DEL
      IERR=IERR
  IF((X(1)*X(2).LT.0.D0).OR.(X(1).LE.-1.D0).OR.(X(2).LE.-1.D0))THEN
        F=F+1.D0
        PRINT *,'EL PRODUCTO ES NEGATIVO CON',X(1),X(2)
        RETURN
      END IF
```

```
      A=1.D0/(1.D0+X(1))-1.D0/(1.D0+X(2))
      B=1.D0/(1.D0+2.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+2.D0*X(2))
     *        -2.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+X(2))
      C=1.D0/(1.D0+3.D0*X(1))-1.D0/(1.D0+3.D0*X(2))
     *  -3.D0*BETA(1.D0+2.D0*X(1),1.D0+X(2))
     * +3.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+2.D0*X(2))
     1 T0=(C-3.D0*A*B+2.D0*A**3)/(B-A**2)**(3/2)-ALFA3
     2  D=1.D0/(1.D0+4.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+4.D0*X(2))
     *     -4.D0*BETA(1.D0+3.D0*X(1),1.D0+X(2))
     *    +6.D0*BETA(1.D0+2.D0*X(1),1.D0+2.D0*X(2))
     *      -4.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+3.D0*X(2))
       T1=(D-4.D0*A*C+6.D0*A**2*B-3.D0*A**4)/(B-A**2)**2-ALFA4
        F=T0*T0+T1*T1
        XX(1)=X(1)+DEL/2.D0
        XX(2)=X(2)
        CALL AUXFCN(XX,F1,1)
        CALL AUXFCN(XX,F11,2)
        XX(1)=X(1)-DEL/2.D0
        CALL AUXFCN(XX,F22,2)
        CALL AUXFCN(XX,F2,1)
        YG(1)=(F1*F1+F11*F11-(F2*F2+F22*F22))/DEL
        XX(1)=X(1)
        XX(2)=X(2)+DEL/2.D0
        CALL AUXFCN(XX,F1,1)
        CALL AUXFCN(XX,F11,2)
        XX(2)=X(2)-DEL/2.D0
        CALL AUXFCN(XX,F2,1)
        CALL AUXFCN(XX,F22,2)
        YG(2)=(F1*F1+F11*F11-(F2*F2+F22*F22))/DEL
        RETURN
        END
        SUBROUTINE SOLVE2(X1,X2,KCH,X)
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
        DIMENSION X(2),G(2),AJ(3)
        DIMENSION S1(2),S2(2),S3(2),S4(2)
        EXTERNAL FUN1
        PRINT *,' SUROUTINE GOBFGS '
        N=2
        MAXF=1000
        X(1)= X1
        X(2)= X2
        RFN= 0.0D0
        EPS=1.0D-8
        F=0.0D0
        SPREC=0.0D0
        EXTBND=2.0D0
        IHESS=3
      CALL GOBFGS(N,X,KCH,MAXF,FUN1,EPS,SPREC,EXTBND,F,IHESS,AJ,G,
     - IERR,NFCALL,S1,S2,S3,S4,DUM)
        PRINT *,'VALORES FINALES, IERR=',IERR,' NFCALL=',NFCALL
        PRINT *,'SOLUCION X1=',X(1),' X2=',X(2)
        PRINT *,'VALORES DEL GRADIENTE G1=',G(1),' G2=',G(2)
        PRINT *,'VALOR F=',F
         RETURN
         END
        SUBROUTINE DRV(N,M,X,AJ,IERR)
        IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
        DIMENSION X(N),AJ(M,N)
        DIMENSION XX(2)
        COMMON /DEL/DEL
```

```
      XX(2)=X(2)
      XX(1)=X(1)+DEL/2.0D0
      CALL AUXFCN(XX,F1,1)
      XX(1)=X(1)-DEL/2.0D0
      CALL AUXFCN(XX,F2,1)
      AJ(1,1)=(F1-F2)/DEL
      CALL AUXFCN(XX,F2,2)
      XX(1)=X(1)+DEL/2.0D0
      CALL AUXFCN(XX,F1,2)
      AJ(2,1)=(F1-F2)/DEL
      XX(1)=X(1)
      XX(2)=X(2)+DEL/2.0D0
      CALL AUXFCN(XX,F1,2)
      XX(2)=X(2)-DEL/2.0D0
      CALL AUXFCN(XX,F2,2)
      AJ(2,2)=(F1-F2)/DEL
      CALL AUXFCN(XX,F2,1)
      XX(2)=X(2)+DEL/2.0D0
      CALL AUXFCN(XX,F1,1)
      AJ(1,2)=(F1-F2)/DEL
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SOLVE3(X1,X2,X)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(2),R(2),D(2),AJ(2,2),AJV(2,2)
      DIMENSION S1(2),S2(2),S3(2),S4(2),S5(2)
      EXTERNAL FUN,DRV
      PRINT *,' SUBROUTINE LMCHOL'
      N=2
      M=2
      MAXF=1000
      X(1)= X1
      X(2)= X2
      EPS=1.0D-8
    CALL LMCHOL(N,M,X,1,MAXF,D,FUN,DRV,EPS,R,AJ,AJV,IERR,NFCALL,
 -  NJCALL,S1,S2,S3,S4,S5,DUM)
      FF=R(1)*R(1)+R(2)*R(2)
      PRINT *,'VALORES FINALES, IERR=',IERR,' NFCALL=',NFCALL
      PRINT *,' NJCALL=',NJCALL
      PRINT *,'SOLUCION X1=',X(1),' X2=',X(2)
      PRINT *,'VALORES DE LA FUNCION F1=',R(1),' F2=',R(2)
      PRINT *,'VALOR DE LA SUMA DE CUADRADOS=',FF
       RETURN
      END
      SUBROUTINE SOLVE4(X1,X2,X)
       IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(2),R(2),AJ(2,2),AJV(2,2)
      DIMENSION S1(2),S2(2),S3(2),S4(2),S5(2),S6(2),S7(2)
      EXTERNAL FUN2
      PRINT *,' SUBROUTINE SNGINT'
      N=2
      MAXF=1000
      X(1)= X1
      X(2)= X2
      DIST= .5D 0
      EPS=1.0D-8
      RFN=0.0D0
       IS4=4
     CALL SNGINT(N,X,MAXF,DIST,FUN,EPS,R,AJ,AJV,IERR,NFCALL,S1,S2
 -   S3,IS4,S4,S5,S6,S7,DUM)
```

```
          FF=R(1)*R(1)+R(2)*R(2)
          PRINT *,'VALORES FINALES, IERR=',IERR,' NFCALL=',NFCALL
          PRINT *,'SOLUCION X1=',X(1),' X2=',X(2)
          PRINT *,'VALORES DE LA FUNCION F1=',R(1),' F2=',R(2)
          PRINT *,'VALOR DE LA SUMA DE CUADRADOS=',FF
          RETURN
          END
          SUBROUTINE FUN2(N,M,X,F,IERR)
          IMPLICIT   REAL*8 (A-H,O-Z)
          DIMENSION X(N),F(M)
          COMMON ALFA3,ALFA4
          IERR=IERR
          A=1.D0/(1.D0+X(1))-1.D0/(1.D0+X(2))
         B=1.D0/(1.D0+2.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+2.D0*X(2))
     *          -2.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+X(2))
          C=1.D0/(1.D0+3.D0*X(1))-1.D0/(1.D0+3.D0*X(2))
     *    -3.D0*BETA(1.D0+2.D0*X(1),1.D0+X(2))
     *  +3.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+2.D0*X(2))
    1  F(1)=(C-3.D0*A*B+2.D0*A**3)/(B-A**2)**(3/2)-ALFA3
    2     D=1.D0/(1.D0+4.D0*X(1))+1.D0/(1.D0+4.D0*X(2))
     *       -4.D0*BETA(1.D0+3.D0*X(1),1.D0+X(2))
     *        +6.D0*BETA(1.D0+2.D0*X(1),1.D0+2.D0*X(2))
     *          -4.D0*BETA(1.D0+X(1),1.D0+3.D0*X(2))
       F(2)=(D-4.D0*A*C+6.D0*A**2*B-3.D0*A**4)/(B-A**2)**2-ALFA4
C        PRINT *,X(1),ALFA3,F(1),X(2),ALFA4,F(2)
          RETURN
          END
         DOUBLE PRECISION   FUNCTION BETA(X,Y)
          REAL*8 X,Y
          BETA=DGAMMA(X)*DGAMMA(Y)/DGAMMA(X+Y)
          RETURN
          END
          FUNCTION RINCLN(NOB)
          RINCLN=4.*(.75*(NOB-1)**2)**(1./5.)
   50     IF(NOB/RINCLN.GE.5.)THEN
          RINCLN=AINT(RINCLN)+1.
          ELSE
          RINCLN=RINCLN-1.
          GO TO 50
          END IF
          RINCLN =RINCLN/2.
          PRINT *,'RINCLN K=',RINCLN
          RETURN
          END
          FUNCTION XJICUA(P,V,G,IFAULT)
          E=0.5E-6
          AA=0.6931471805
          XJICUA=-1.
          IFAULT=1
          IF ((P.LT.0.000002).OR.(P.GT.0.999998)) RETURN
          IFAULT=2
          IF(V.LE.0.)RETURN
          IFAULT=0
          XX=0.5*V
          C=XX-1.
          IF(V.GE.-1.24*ALOG(P)) GO TO 1
          CH=(P*XX*EXP(G+C*AA))**(1.0/XX)
          IF(CH-E)6,4,4
    1     IF(V.GT.0.32)GO TO 3
          CH=0.4
```

```
      A=ALOG(1.-P)
    2 G=CH
      P1=1.+CH*(4.67+CH)
      P2=CH*(6.73+CH*(6.66+CH))
      T=-0.5+(4.67+2.*CH)/P1-(6.73+CH*(13.32+3.*CH))/P2
      CH=CH-(1.0-EXP(A+G+0.5*CH+C*AA)*P2/P1)/T
      IF(ABS(Q/CH-1.)-0.01)4,4,2
    3 X=GAUINV(P,IF1)
      P1=0.222222/V
      CH=V*(X*SQRT(P1)+1.-P1)**3
      IF(CH.GT.2.2*V+6.)CH=-2.*(ALOG(1.-P)-C*ALOG(0.5*CH)+G)
    4 Q=CH
      P1=0.5*CH
      P2=P-GAMINV(P1,XX,G,IF1)
      IF(IF1.EQ.0)GO TO 5
      IFAULT=3
      RETURN
    5 T=P2*EXP(XX*AA+G+P1-C*ALOG(CH))
      B=T/CH
      A=0.5*T-B*C
      S1=(210.+A*(140.+A*(105.+A*(84.0+A*(70.+60.*A)))))/420.
      S2=(420.+A*(735.+A*(966.+A*(1141.0+1278.*A))))/2520.
      S3=(210.+A*(462.+A*(707.+932.*A)))/2520.
      S4=(252.+A*(672.+1182.*A)+C*(294.+A*(889.+1740*A)))/5040.
      S5=(84.+264.*A+C*(175.+606.*A))/2520.
      S6=(120.+C*(346.+127.*C))/5040.
      CH=CH+T*(1.+.5*T*S1-B*C*(S1-B*(S2-B*(S3-B*(S4-B*(S5-B*S6))))))
      IF(ABS(Q/CH-1.).GT.E)GO TO 4
    6 XQICUA=CH
      RETURN
      END
      FUNCTION GAMINV(X,P,G,IFAULT)
      DIMENSION PN(6)
      ACU=1.E-8
      OFLO=1.E+30
      GIN=0.0
      IFAULT=0
      IF(P.LE.0.0)IFAULT=1
      IF(X.LT.0.0)IFAULT=2
      IF(IFAULT.GT.0.OR.X.EQ.0.)GO TO 50
      FACTOR=EXP(P*ALOG(X)-X-G)
      IF(X.GT.1.0.AND.X.GE.P)GO TO 30
      GIN=1.0
      TERM=1.0
      RN=P
   20 RN=RN+1.0
      TERM=TERM*X/RN
      GIN=GIN+TERM
      IF(TERM.GT.ACU)GO TO 20
      GIN=GIN*FACTOR/P
      GO TO 50
   30 A=1.-P
      B=A+X+1.
      TERM=0.
      PN(1)=1.
      PN(2)=X
      PN(3)=X+1.
      PN(4)=X*B
      GIN=PN(3)/PN(4)
   32 A=A+1.
```

```
      B=B+2.
      TERM=TERM+1.
      AN=A*TERM
      DO 33 I=1,2
   33   PN(I+4)=B*PN(I+2)-AN*PN(I)
     IF(PN(6).EQ.0.)GO TO 35
      RN=PN(5)/PN(6)
      DIF=ABS(GIN-RN)
      IF(DIF.GT.ACU)GO TO 34
      IF(DIF.LE.ACU*RN)GO TO 42
   34   GIN=RN
   35   DO 36 I=1,4
   36   PN(I)=PN(I+2)
      IF(ABS(PN(5)).LT.OFLO)GO TO 32
      DO 41 I=1,4
   41   PN(I)=PN(I)/OFLO
      GO TO 32
   42   GIN=1.-FACTOR*GIN
   50   GAMINV=GIN
      RETURN
      END
      FUNCTION GAUINV(P,IFAULT)
      CERO=0.
      UNO=1.
      MEDIO=.5
      ALIM=1.E-20
      P0=-.322232431088
      P1=-1.0
      P2=-.342242088547
      P3=-.204231210245E-1
      P4=-.453642210148E-4
      Q0=.993484626060E-1
      Q1=.588581570495
      Q2=.531103462366
      Q3=.103537752850
      Q4=.38560700634E-2
      IFAULT=1
      GAUINV=CERO
      PS=P
      IF(PS.GT.MEDIO)PS=UNO-PS
      IF(PS.LT.ALIM)RETURN
      IFAULT=0
      IF(PS.EQ.MEDIO)RETURN
      Y11=SQRT(ALOG(UNO/(PS*PS)))
      GAUINV=Y11+((((Y11*P4+P3)*Y11+P2)*Y11+P1)*Y11+P0)
     *   /((((Y11*Q4+Q3)*Y11+Q2)*Y11+Q1)*Y11+Q0)
      IF(P.LT.MEDIO) GAUINV=-GAUINV
      RETURN
      END
      SUBROUTINE COLAS(X,Y,N,P,L,NF)
      DIMENSION X(N),Y(N)
      XA=SHEMSR(P)
      XAC=SHEMSR(L)
      IF (L.EQ.1) THEN
       XINC=(XAC-XA)/(N-1)
       P1=P
       X1=XA
      ELSE
       XINC=(XA-XAC)/(N-1)
       P1=L
```

```
      X1=XAC
      END IF
      DO 10 I2=1,N
      X2=X1+XINC
      X(I2)=X2
      P2=XNEWTN(X2)
      Y(I2)=(P2-P1)*NF*50.
      P1=P2
      X1=X2
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C
```

BIBLIOGRAFIA

1.- KENNETH BROWN
COMPUTER ORIENTED ALGORITMS FOR SOLVING SISTEMS OF SIMULATIONS NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS.
NUMERICAL SOLUTION OF SYSTEMS OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS. (ACCADEMIC PRESS)

2.- PAQUETE ARGONE
NATIONAL LABORATORY, APLIED MATHEMATICS DIVSION
CLASSIFICATION OPTIMIZATION

3.- HANG G. J. AND SHAPIRO S. S.
STATISTICAL MODELS IN ENGINEERING (1967)

4.- RAMBERG J. S. AND SCHEMEISER B. W.
AN APROXIMATE FOR GENERATING ASYMETRIC RANDOM VARIABLES.
COMM. ACM 17, 78-82

5.- RAMBERG J. S. , PANDU R. TADIKAMALLA, EDWARD J. DUDEWICZ AND EDWARD F. MYKYTKA.
A PROBABILITY DISTRIBUTION AND ITS USES IN FITTING DATA.
TECHNOMETRICS, VOL. 21, NO 2, MAY 1979.

6.- WILLIAMS C. A.
ON THE CHOICE OF THEN NUMBERS AND WIDTH OF CLASSES FOR THEN CHI-SQUARE TEST OF GOODNESS OF FIT.
JOURNAL FO THE AMERICA STATISTICAL ASSOCIATION
VOL. 45, PAG. 77-86.