Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis de Multiescalas de Reconexión Magnética

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

QUE PRESENTA:

Jonatán Del Moral Gil

DIRECTOR DE TESIS:
Julio Javier Martinell Benito

Ciudad Universitaria, CD.MX., 2025

1. Datos del alumno
Del Moral
Gil
Jonatán
55 37 21 43 69
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
316207777

2. Datos del tutor
Dr. Julio Javier Martinell Benito
Secretario (Director de Tesis)

3. Datos del sinodal 1
Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez
Presidente

4. Datos del sinodal 2
Dra. Diana Ivett Rojas Castillo
Vocal

5. Datos del sinodal 3
Dra. Eugenia Paola Arévalo López
Suplente

6. Datos del sinodal 4
Dr. David Hinojosa Romero
Suplente

7. Datos del trabajo escrito
Análisis de Multiescalas de Reconexión Magnética
82 páginas
2025

Agradecimientos

A mis **padres**, quienes no solo sentaron las bases de mi persona, sino que me han apoyado durante todo el camino, celebrando cada uno de mis logros e instándome a más. Gracias por recibirme con los brazos abiertos, aun cuando me encerraba en mi cuarto para estudiar. Espero que este trabajo pueda recompensarles de la mejor manera por tener que lidiar con eso.

A mis **padrinos**, que han sido como unos segundos padres para mí, siempre velando por mí, mostrándome su apoyo incondicional y dándome todo su amor. Gracias por preguntarme cada sábado cómo me había ido, en qué nuevos proyectos andaba, y por hacerme sentir en casa cada vez que llegaba con ustedes. Espero poder devolverles pronto todo lo que me han dado.

A **Ziva**, quien desde que llegó a mi vida ha sido un símbolo de felicidad, esperándome despierta hasta altas horas de la noche e incluso achicopalándose cuando no llegaba. Estando a mi lado siempre que hacía mi tarea, ayudándome a resolverla (aunque siempre ponía cara de que yo estaba loco cuando le preguntaba cosas sobre mi tarea). Sé que no vas a leer esto, pero llegar a casa, abrir la puerta y verte detrás de ella moviendo tu colita y brincando para que te ponga atención ha sido la mejor parte de este viaje.

A **Lakshmi**, que llegó a mi vida en el momento exacto y ha sido un sustento y un motor para lograr todos mis objetivos. Gracias por todo el amor que me das, por apoyarme a lo largo de este trabajo y, sobre todo, gracias por estar. De igual manera, quiero agradecer a tu familia, que en estos últimos años ha sido un factor importante durante este ciclo.

A mis **abuelitos: Hector, Soco, Amelia y Francsico**, que a pesar de que ya no están aquí, su amor fue más que suficiente para ayudarme a cumplir mis objetivos. El tiempo que convivimos fue más corto de lo que hubiera querido, y estaría encantado de que estuvieran aquí para celebrar que el último de sus nietos se convierte en un profesionista, pero al menos me quedo con la idea de que pueden estar orgullosos de mí.

Al **resto de mi familia**, pues cada uno de ustedes ha puesto un granito de arena en mí, y especialmente a mis primos **Moy y Paty**, que han sido como unos hermanos para mi.

A mis **amigos**, porque la vida no solo se trata de trabajar duro; también se trata de divertirse y pasarla bien, y ustedes han sido ese refugio que me ha llenado de alegrías y satisfacción. En particular, a los **Bumpty**, pues se han vuelto una segunda familia para mi.

A **cada uno de los profesores** con los que tuve el honor de ser alumno, pues han sido ellos quienes me han formado en este mundo, los que me han instado a sacar lo mejor de mí y los que me han abierto los ojos para convertirme en el físico que quiero ser. En especial, quiero agradecer a mi asesor, el **Dr. Julio Martinell**, por abrirme al mundo de la física de plasmas y principalmente por tener la paciencia necesaria, siendo mi guía en este trabajo.

Pero a esta ecuación le falta una última variable para demostrar la igualdad

$$Familia + Amigos + Profesores + x = Logro$$

Por lo que, para probar la igualdad, es necesario que finalmente te agradezca a ti, **Jonatán**, pues nada de esto sería posible sin tu compromiso. Terminar esta carrera no es cosa fácil, pero, como siempre lo has hecho, has aguantado todos los embates que se te han atravesado y, finalmente, lo has logrado. Este no es el final de tu carrera, sino el principio; ahora toca recorrerla haciendo lo que más te gusta, que es aprender, y estoy seguro de que lograrás hacer cosas más grandes de lo que has soñado.

$$Familia + Amigos + Profesores + Yo = Logro$$

QED

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Jonatán Del Moral Gil. Ciudad Universitaria, CD.MX., 2025

"Je donnerais tout ce que je sais pour la moitié de ce que je ne sais pas."
"Daría todo lo que sé por la mitad de lo que ignoro."

René Descartes

Índice general

Índice de figuras

Introducción

El presente trabajo, tiene como principal objetivo entender, aplicando el análisis multiescala, los procesos que ocurren durante una simulación de reconexión magnética en un plasma, ya sea debida a una fuerza continua o a una fuerza pulsada. Para ello, se hace uso de la descomposición en valores singulares, la cual permite separar la información contenida en distintas escalas tanto espaciales como temporales.

Este trabajo muestra cómo se comportan cinco distintas variables que caracterizan al plasma durante el evento de reconexión magnética, el potencial de velocidad ϕ, el potencial de campo magnético ψ, la densidad del plasma, la corriente eléctrica y la vorticidad, a lo largo del tiempo en que ocurre la reconexión. De esta manera se pueden caracterizar cada una de ellas y a la vez entre los dos distintos casos supuestos.

La reconexión magnética es un fenómeno muy importante dentro del estudio de la física de plasmas, ya que esta está presente tanto dentro de los aparatos que se usan en la investigación de fusión termonuclear como en los plasmas naturales que se encuentran en el espacio exterior. En los primeros, es responsable, por ejemplo, del deterioro del confinamiento magnético del plasma y en los segundos produce las llamaradas o fulguraciones solares y también aparece en la interacción del viento solar con el campo magnético.

La importancia de estudiar este tema en particular radica en que las consecuencias de la reconexión en los plasmas de laboratorio confinados magnéticamente pueden llevar a una pérdida total de confinamiento del plasma. Asimismo, las tormentas geomagnéticas que son el resultado de la interacción de las explosiones solares con el campo geomagnético, pueden ser causantes de problemas con las redes eléctricas, los sistemas de comunicación o con los sistemas de navegación.

La importancia y originalidad del trabajo radica en que gracias al análisis de multiescala se puede determinar la importancia relativa de las distintas escalas en cada una de las principales variables que son afectadas durante el proceso de reconexión, es decir, se puede observar cómo cada variable se comporta en cada una de las escalas y cómo es que se relacionan en su forma general. Especialmente, se pueden filtrar las escalas grandes, que son las más evidentes y suelen ser las más estudiadas, y quedarse con las escalas pequeñas cuyo efecto está oculto en el esquema global. Al separarlas de las escalas grandes, se observa que no son aleatorias, como ocurriría si las PDF fueran gaussianas, sino que muestran una estructura interesante, donde aparecen colas largas. Las colas largas indican que hay intermitencia en escalas pequeñas, o sea que hay muchas fluctuaciones de gran amplitud, y esto sucede en la mayoría de las variables.

El hacer visible lo que sucede en las escalas pequeñas, permite abrir el panorama general de cómo se da la reconexión magnética, pudiendo así atacarla de mejor manera y así evitar que suceda en ámbitos de laboratorio cuando no se desee.

Este trabajo se divide en seis secciones:

El primer capítulo brinda una breve introducción al campo de la física de plasmas, explicando tanto lo que es un plasma, las propiedades que tiene, sus usos y fenómenos naturales y, finalmente, la reconexión magnética.

El segundo capítulo se adentra más en el lenguaje matemático, pues se habla de cómo se puede modelar un plasma. Explicando los distintos tipos de modelos, así como las bases que lo conforman (sean las ecuaciones básicas de fluidos o las leyes de Maxwell).

En el tercer capítulo se aborda la reconexión magnética. Se habla del modelo de Sweet-Parker, que fue el modelo pionero en describir la reconexión magnética de una manera simple mediante la MHD (Magnetohidrodinámica). También se menciona lo que es la reconexión forzada, y finalmente se da el modelo de fluidos reducido, el cual es el modelo usado en este trabajo.

Para el cuarto capítulo se abordan las herramientas matemáticas usadas para analizar los resultados de la simulación. Se empieza explicando lo que significa el análisis multiescala para posteriormente definir lo que es la descomposición en valores singulares y cómo incorporar las variaciones espaciales y temporales en el mismo esquema con un método llamado de Topos y Cronos, el cual resulta ser una muy buena herramienta para analizar el comportamiento de las variables en el espacio y en el tiempo.

En la quinta sección se presentan los resultados: los dados bajo la suposición de una fuerza continua y los dados bajo la suposición de un impulso. Hablando de lo que sucede con cada variable, se presentan distintas gráficas que van desde distribuciones de probabilidad hasta la dependencia de cada variable de sus respectivos modos.

Por último, se presentan las conclusiones y también se habla de propuestas a futuro para continuar con este trabajo.

Capítulo 1

Conceptos Generales

En este capítulo se habla de los conceptos básicos para la comprensión de los plasmas y la reconexión. Se explicará qué son los plasmas y propiedades importantes, como su interacción con campos electromagnéticos y cómo de esto se originan los movimientos de las partículas en un plasma; y por último, el tema central de este texto: la reconexión magnética.

1.1. ¿Qué es un plasma?

Actualmente se tiene entendido que en el universo la mayor parte de la materia visible está en forma de plasma. Debido a esto, es necesario tener en claro lo que es. Un plasma es un gas cuasineutro conformado por partículas cargadas y neutras las cuales exhiben un comportamiento colectivo, i.e., que las interacciones de las partículas del sistema van a afectar a este mismo. En el caso de un plasma, las interacciones entre aniones-cationes, aniones-átomos neutros y cationes-átomos neutros pueden ocasionar distintos efectos en el comportamiento del plasma como un todo[**1**].

Para verificar que un plasma es cuasineutro se debe cumplir la siguiente desigualdad

$$L >> \lambda_D; \qquad \lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 K_B T_e}{ne^2}}, \tag{1.1}$$

donde λ_D es la longitud de Debye, la cual representa la distancia en la que pueden continuar existiendo los campos eléctricos antes de ser neutralizados por las cargas presentes en el plasma, n es la densidad de partículas, T_e la temperatura de los electrones [**1**].

Para que exista un comportamiento colectivo se necesita que existan suficientes partículas en la región blindada, lo cual se puede ver como:

$$N_D >>> 1; \qquad N_D = \frac{4}{3} n\pi\lambda_D^3. \tag{1.2}$$

[**1**]

Finalmente, hay un último parámetro a considerar. Este está relacionado con las colisiones de las partículas dentro del plasma. Un gas ionizado tiene de manera natural oscilaciones dentro de él, las cuales son debidas al movimiento de los electrones. Estas oscilaciones tendrán una frecuencia ω. Por otro lado, las partículas cargadas interaccionan entre sí por sus campos coulombianos a través de colisiones que son aleatorias. Por ello, las colisiones tienden a destruir el comportamiento colectivo de las oscilaciones. Si se define a τ como el tiempo medio entre colisiones con átomos neutros, se necesitará que, para que un gas se comporte como un plasma en vez de un gas neutro, se cumpla

$$\omega\tau > 1. \tag{1.3}$$

[**1**]

1.2. Plasmas en el día a día

Como ya se mencionó, los plasmas se encuentran en gran parte del universo: el Sol, otras estrellas, las nebulosas, entre otras cosas. De igual manera, se pueden encontrar en la Tierra, ya sea en forma de relámpagos o lámparas de neón, por ejemplo. Es por eso que actualmente se encuentran en constante estudio. Hoy en día hay dos principales ramas de investigación en plasma: fusión nuclear y plasmas espaciales.

1.2.1. Plasmas de fusión

En la larga búsqueda de lo que pareciese ser la solución a los problemas energéticos con la fusión nuclear. En la fusión lo que se quiere es llevar a cabo el mismo proceso que pasa en el Sol, solo que en condiciones de laboratorio i.e. hacer colisionar átomos ligeros, principalmente isótopos de hidrógeno como el tritio o el deuterio, de tal manera que éstos se fusionen o unan y generen un átomo de helio-4 y un neutrón, así mismo liberando energía.

Se tiene estimado que un gramo de deuterio sería equivalente a la energía proporcionada a 2500 galones de gasolina [**19**]. Se ha calculado que dentro de los océanos existe una cantidad de 10^{19} toneladas de deuterio; si este fuese usado al máximo en un reactor de fusión, la energía liberada sería de 10^{21} kW al año. Si se considera que el consumo de energía en el mundo en 1975 era de 4×10^9 kW, habría suficiente energía para 250×10^9 años (si se mantiene el mismo consumo) [**19**].

Aparte de la gran cantidad de energía liberada, existen otros beneficios: la cantidad de combustible se vuelve mínima, los residuos no son tan peligrosos como los dejados por los reactores de fisión y las probabilidades de un accidente son mínimas. Dejando en claro la importancia de la fusión, es menester explicar por qué está relacionada con los plasmas.

Para poder generar la fusión es importante recrear las condiciones que se pueden encontrar dentro de una estrella, ahí es donde aparece el plasma. En términos de la física, el objetivo será vencer la fuerza electrostática, también conocida como la fuerza de Coulomb; esto es debido a que en la fusión se quiere que los núcleos colisionen y se terminen fusionando, ya que los núcleos están formados de protones (carga positiva) y neutrones (carga neutra) y por la fuerza de Coulomb se repelerían. Aquí es donde surge el plasma, puesto que buscando vencer tal fuerza se calienta el combustible a tal grado que su energía cinética aumente y el aumento de la temperatura termina por ionizar el combustible transformándose así en un plasma.

1.2.2. Plasmas espaciales

Como se mencionó al principio de este capítulo, la mayor parte de la materia en el universo está en forma de plasma; por ejemplo, en las ráfagas solares o en los cinturones de Van Allen en nuestro planeta. Es por eso que los plasmas espaciales son de gran importancia y continuamente se realizan investigaciones sobre ellos.

Constantemente hay una interacción entre el campo magnético del planeta Tierra y el plasma interplanetario que se origina en el Sol. El campo magnético de la Tierra tiene que proteger al planeta de las enormes cantidades de energía que emite intermitentemente el Sol, como las ráfagas solares o las eyecciones de masa coronarias, para proteger la vida dentro de ella.

1.3. Plasmas en campos magnéticos

Ahora toca recalcar una de las características más importantes de los plasmas: su cuasi-neutralidad.

El plasma es un caldo de distintas partículas entre las que se encuentran electrones libres y átomos ionizados. Ésta parte es sumamente importante, pues aunque están separados, a la hora de verlos como un conjunto se tiene que la carga es aproximadamente neutra. Sin embargo, se preservan las propiedades de carga individual. ¿Qué es esto? Supongamos que se cuenta ya sea con un campo magnético o un campo eléctrico, éste va a poder ejercer una fuerza sobre las partículas cargadas que forman el plasma. Esta característica es muy importante, pues con ayuda de un campo magnético o uno eléctrico se puede confinar al plasma.

A continuación veremos el comportamiento del plasma bajo la influencia de campos magnéticos y eléctricos.

En este caso habrá dos fuerzas involucradas: la eléctrica y la magnética, por lo que la ecuación de movimiento sería:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \tag{1.4}$$

donde q es la carga eléctrica, $\vec{v}$ la velocidad de la partícula, $\vec{E}$ el valor del campo eléctrico y $\vec{B} = B_z\hat{k}$ el valor para el campo magnético en dirección z. Sea el campo eléctrico $\vec{E}$ en el plano X-Z ($\vec{E} = E_x\hat{i} + E_z\hat{k}$) para que así $\vec{E_y} = \vec{0}$ y sea $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{E}$ por lo que $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$. Resolviendo la ecuación diferencial se llega a

$$\vec{v_x} = \vec{v_\perp} e^{i\omega_c t} \tag{1.5}$$

$$\vec{v_y} = \pm i\vec{v_\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{\vec{E_x}}{||\vec{B}||}, \tag{1.6}$$

donde i es el número imaginario, $\omega_c = \dfrac{|q|||\vec{B}||}{m}$ es la frecuencia de ciclotrón y t el tiempo, es muy importante recalcar el signo de $\pm$ pues este variará según la carga de la partícula. Es debido a estas ecuaciones que las partículas del plasma describen trayectorias cíclicas y, dependiendo de si se trata de electrones o iones, es la dirección que tomarán, como se puede ver en la figura 1.1 .

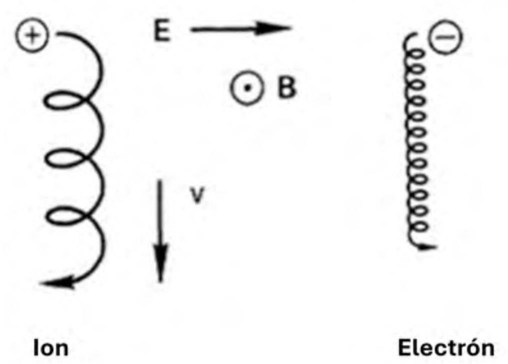


Fig. 1.1: Trayectoria de las partículas en un plasma debido a la presencia de campos magnéticos y eléctricos [**1**]

1.3.1. Confinamiento magnético

En el tratamiento de plasmas de fusión, es necesario poder concentrar la mayor cantidad de plasma a alta temperatura en un determinado lugar. Esto sería imposible de no ser por las propiedades electromagnéticas que se acaban de ver. Es gracias a que los campos magnéticos interactúan con el plasma que se puede reunir el plasma en un lugar; a esto se le conoce como confinamiento.

En los reactores de fusión que se tienen actualmente, como el TOKAMAK (cámara toroidal con bobinas magnéticas por sus siglas en ruso), se usan campos magnéticos para confinar el plasma; esto ayuda en dos formas diferentes. La primera es que concentra el material logrando así que se tengan colisiones entre partículas en cada momento; en segundo lugar, sirve para alejar el plasma de las paredes, lo cual evita que éstas se erosionen y, además, que los residuos de las paredes que se están desprendiendo contaminen el plasma y bajen su temperatura, lo que se traduciría como pérdida de energía por radiación.

1.4. ¿Qué es la reconexión?

Habiendo dejado en claro qué es un plasma y sus propiedades, es momento de hablar del tema central de esta tesis: la reconexión magnética.

La reconexión magnética se puede definir como el cambio en la topología de las líneas de campo magnético, i.e., las líneas de campo magnético se rompen y se unen de manera diferente; esto genera un cambio en la configuración magnética del sistema. El que se dé la reconexión se puede deber a diferentes causas.

Por ejemplo, el campo magnético de la Tierra en el lado oscuro del planeta puede experimentar la reconexión. Puesto que el plasma del viento solar empuja las líneas de campo lejos del Sol, creándose así una larga cola magnética (magnetocola), donde estas líneas, que se encontrarán en direcciones opuestas, se acercan tanto entre sí que terminan cambiando su topología. Ésto se debe a que el flujo continuo del viento solar acumula presión del plasma que incrementa la presión magnética en la magnetocola y entonces se produce la reconexión. La reconexión no solo se experimenta en la magnetocola, en el lado día, frente a la magnetosfera terrestre, también ocurre reconexión, la cual es debida principalmente a las perturbaciones del viento solar. A este tipo de reconexión debida al incremento de la presión magnética se le conoce como reconexión forzada.

Otro motivo por el cual se puede dar una reconexión es debido a inestabilidades, pues algunas configuraciones de los campos magnéticos dentro del plasma pueden ser inestables ante perturbaciones magnéticas. Es importante mencionar el caso de la inestabilidad de desgarre resistivo (I.D.R.). En este caso es la resistividad la que libera al plasma de que permanezca congelado al campo magnético (cuando un plasma se encuentra congelado quiere decir que tanto los iones como los electrones se mueven junto con las líneas del campo magnético y no se separan de ellas, lo que implica que el flujo magnético a lo largo de las líneas del campo se conserva) y es aquí donde se empiezan a producir perturbaciones que terminan por llevar a lo que se conoce como islas magnéticas. Estas islas son regiones donde las líneas del campo magnético se deforman y se reconectan, creando estructuras de líneas de campo magnético cerradas dentro del plasma. En el proceso de reconexión magnética se pasa de una configuración magnética a otra de menor energía. Con el fin de cumplir con la conservación de energía, el excedente es liberado como energía cinética acelerando al plasma en esas regiones; a esto se le llaman Jets de plasma. Es decir, una vez que sucede la reconexión, las nuevas líneas de campo llevarán al plasma en otra dirección, pero con una mayor velocidad[**2**].

En la figura 1.2 se puede observar un ejemplo de reconexión magnética. Es fácilmente apreciable el cambio en las líneas de campo, pues se deja de tener dos campos magnéticos enfrentados desde las esquinas superior derecha e inferior izquierda para ahora tener dos campos magnéticos enfrentados desde las esquinas superior izquierda e inferior derecha.

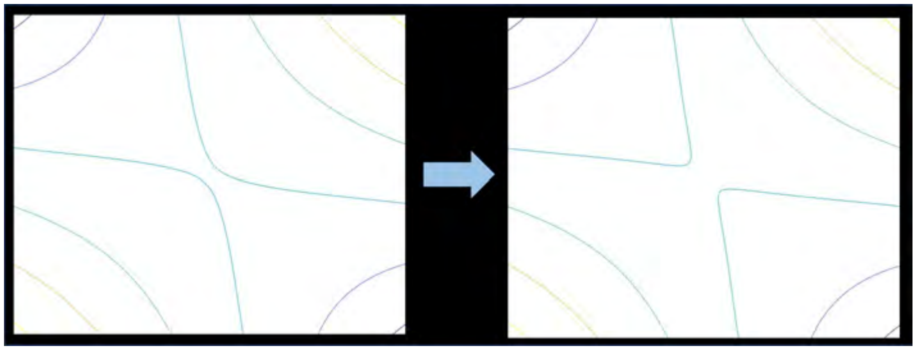


Fig. 1.2: Visualización de reconexión magnética

1.4.1. Consecuencias de la reconexión

La reconexión magnética ocurre frecuentemente en el espacio y, al momento de generarse, existe una abrupta emisión de energía almacenada en los campos magnéticos, causando diversos fenómenos, tales como el viento solar, así como las tormentas geomagnéticas en la Tierra.

Este tipo de eventos son relevantes ya que pueden ocasionar problemas con las redes de energía, los sistemas de comunicación dentro del planeta, o los sistemas de navegación, ya que con la energía liberada pueden dañar a los satélites que orbitan el planeta. [**3**]

La reconexión magnética también puede ocurrir en el ambiente controlado de un laboratorio, principalmente en los reactores de fusión. Esto debido a la presencia de campos magnéticos con cizalla que van cambiando su dirección al variar la distancia al centro del reactor. Esto puede producir deterioro del confinamiento o, en casos extremos, una disrupción en la que se tiene una pérdida total del confinamiento.

1.4.1.1. Pérdidas de confinamiento

La existencia de la reconexión en los procesos de fusión dentro de los laboratorios es un gran problema, pues ocasiona pérdidas en el confinamiento. Dado que las líneas de campo que confinaban al plasma se rompen y reconectan, el plasma se puede ir escapando y acercarse peligrosamente a las paredes que lo contienen. Esto supondría dos problemas: primero,como las temperaturas del plasma son extremadamente altas, las paredes empezarían a fundirse. Segundo, suponiendo el mejor de los casos, las paredes no se funden en su totalidad, aun así, habría una contaminación del plasma, logrando así una disminución de la temperatura, bajando la eficiencia del reactor.

En el caso de una reconexión causada por I.D.R. se tendrán como resultados cadenas de islas magnéticas en distintas posiciones del plasma. Si la perturbación aumenta, las islas magnéticas empezarán a superponerse entre sí, dando lugar a una región caótica de campo magnético. Cuando esto ocurre, puede pasar que una única línea de campo magnético atraviese toda esta región del plasma, lo que trae como consecuencia que la conducción térmica electrónica paralela al campo disminuya la temperatura de los electrones en esa región, i.e., habría un deterioro del confinamiento.

1.4.1.2. Auroras polares

No siempre la reconexión magnética es causa de efectos negativos; en las regiones polares del planeta se puede presenciar un fenómeno cuya belleza ha cautivado a muchas personas: las auroras.

Las auroras polares son fenómenos luminosos que ocurren en ambas regiones polares. Estos espectáculos de luces brillantes en el cielo están vinculados a la interacción entre el plasma del viento solar y el campo magnético terrestre, y la reconexión magnética desempeña un papel muy importante en este proceso.

Cuando el plasma del viento solar interactúa con la magnetosfera del planeta, en el lado día con la nariz de la magnetopausa se genera una reconexión magnética. En el lado noche, la reconexión que ocurre en la magnetocola se le suele asociar con la expansión del óvalo auroral, más no con la generación de auroras. Es decir, solo hace que la franja donde se vean las auroras sea de un tamaño mayor.

Durante la reconexión magnética, las partículas cargadas, especialmente electrones, se aceleran a altas velocidades (jets de plasma) a lo largo de las líneas del campo magnético reconectadas y chocan con la atmósfera terrestre en las regiones polares. Cuando las partículas colisionan con las moléculas y átomos libres que están en la atmósfera, excitan e ionizan estos átomos, provocando así la emisión de luz. Son estas emisiones de luz las que se conocen como auroras polares; es la variedad de gases en la atmósfera lo que produce los distintos colores en las auroras.

Capítulo 2

Modelos de Plasmas

En la sección anterior, se estableció que los plasmas pueden estudiarse de manera microscópica, i.e., siguiendo el movimiento de cada partícula, tal como se vio con el caso de los plasmas en campos magnéticos. Ésto, aunque es muy útil debido a que muestra los distintos comportamientos que puede tener una partícula de plasma, es muy complicado cuando se quiere describir un sistema macroscópico, pues el número de partículas es del orden de 10^{23}. Por ello, es conveniente tratar al conjunto macroscópico de partículas como un sistema continuo.

Si se recuerda la definición del plasma, se tiene que éste es un gas ionizado; esto es un factor importante, pues el plasma conservará propiedades que se aprecian en gases (también vistos como fluidos), esto sin olvidar la gran diferencia que da la sensibilidad a efectos electromagnéticos.

Debido a lo anterior, los plasmas han sido modelados matemáticamente de la misma manera que los otros tipos de fluidos. Sin embargo, debido a sus propiedades electromagnéticas, los modelos suelen alejarse de los fluidos comunes, pues se deben incluir efectos adicionales. Aunado a esto, existen distintos modelos, puesto que cada uno ayuda a enfocarse de mejor manera en ciertas propiedades del plasma.

En esta sección no se realizará una deducción de las ecuaciones de fluidos de los distintos tipos de modelos que hay, pero lo que sí se hará será mencionar de dónde salen .

2.1. Modelo de fluido

En esta sección, se discutirán primero las ecuaciones que se usan para describir a los fluidos y, posteriormente, se considerará su aplicación a los plasmas, primero como la unión de múltiples fluidos y, posteriormente, la simplificación a un solo fluido.

2.1.1. Ecuación de continuidad

Para encontrar la ecuación de continuidad (la ecuación que nos hablará de la preservación de la masa) es necesario definir un cierto diferencial de volumen, que por comodidad será un cubo cuyos lados son paralelos a los ejes cartesianos (ver la figura 2.1), y tendrá coordenadas de la forma x_n con n=1,2,3.

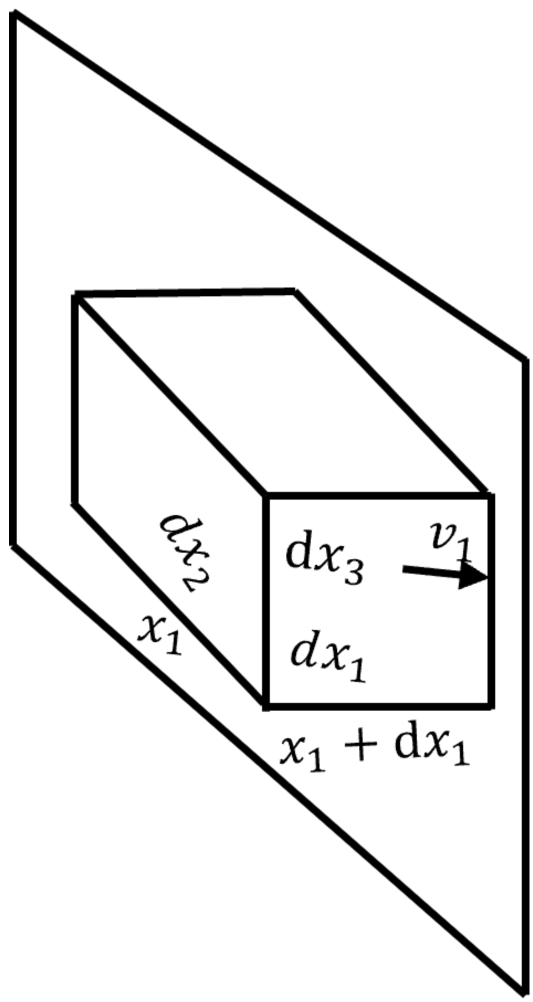


Fig. 2.1: Diferencial de volumen [**2**]

Ahora bien, el número de partículas saliendo del volumen por la superficie x_1x_2 se puede ver de la forma $n(v_1)dx_2dx_3$ en la coordenada $x_1 + dx_1$, en este caso n es la densidad de partículas y v_1 es la velocidad promedio con la que se mueven las partículas en dirección x_1, i.e., su movimiento va a ser ortogonal a la superficie. Por otro lado, hay partículas que entran al volumen en la coordenada x_1 a través de la superficie x_2x_3 que tiene la misma expresión pero evaluada en x_1[**2**]. Con esto en mente, si se incluyen los flujos a través de las otras cuatro caras y suponiendo que no hay pérdidas de partículas, se obtiene que la cantidad de partículas en el cubo cambia en el tiempo como

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t}dx_1dx_2dx_3 = n(v_1)dx_2d_{x3}|_{x_1} - n(v_1)dx_2dx_3|_{x_1+dx_1} + n(v_2)dx_1dx_3|_{x2} \\ - n(v_2)dx_1dx_3|_{x_2+dx_2} + n(v_3)dx_1dx_2|_{x3} - n(v_3)dx_1dx_2|_{x_3+dx_3}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Si se divide entre el volumen, i.e., $dx_1dx_2dx_3$ se puede llegar a la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} n(v_i). \tag{2.2}$$

En forma vectorial se tiene que

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0. \tag{2.3}$$

2.1.2. Ecuación de momento

Ahora toca hablar de las fuerzas o, mejor dicho, los cambios de momento que se tendrán en un volumen del plasma. Para esto, se puede volver a usar la aproximación que se vio en la sección anterior.

Dentro de un plasma habrá dos tipos de fuerzas: las debidas a colisiones y las no debidas a colisiones, divididas en fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie.

Para el caso de fuerzas de cuerpo, estas actúan sobre todo el volumen del fluido, como por ejemplo la gravedad o, en caso de ser un fluido con carga eléctrica, con la fuerza debida a la interacción electromagnética, i.e., la fuerza de Lorentz.

Si bien, la fuerza de Lorentz usada en la sección de plasmas en campos magnéticos solo aplicó para una partícula, como ahora se trata de un fluido hay n partículas por unidad de volumen. por lo que el cambio en el momento del fluido en el tiempo por unidad de volumen estará dado por

$$\frac{\partial (nm\vec{v})}{\partial t} = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{2.4}$$

Ahora bien, las fuerzas de superficie se derivan de lo siguiente. Debido a que las partículas se están moviendo, estas llevan un momento y, a medida que las partículas entran o salen del volumen a través de la superficie, llevan momento con ellas. Esto da otra contribución al cambio del momento con el tiempo. El flujo total de partículas con un momento en dirección a x_2 desde x_1 se puede ver como $mn(v_2v_1)$ y, por ende, el cambio en el momento por unidad de tiempo se puede ver como

$$\frac{\partial(nmv_2)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_1}(mn(v_2v_1)) - \frac{\partial}{\partial x_2}(mn(v_2v_2)) - \frac{\partial}{\partial x_3}(mn(v_2v_3)). \tag{2.5}$$

A partir de esto se puede ver que este flujo de momento se comporta parecido a la definición de presión; matemáticamente hablando, se hace uso de un tensor para explicarlo $P_{ij} = mnv_iv_j$.

Finalmente, uniendo las dos contribuciones anteriores y haciendo uso de la derivada total

$$mn\frac{d\vec{v}}{dt} = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \cdot P, \tag{2.6}$$

donde P es el tensor de presión que en el caso de un plasma casi isotrópico $\nabla \cdot P$ se puede cambiar a por un gradiente escalar de presión ∇p. Es importante mencionar que en este texto se estará tratando de un plasma casi isotrópico.

Para el caso de las fuerzas colisionales, éstas se deben al cambio de momento que sucede tras la colisión entre las partículas que componen al plasma: las partículas neutras y las cargadas. Como no se está tratando con las partículas individualmente, esta contribución se incluye como un término de fricción: $-mn\nu v$ [**4**].

2.1.3. Ecuación de estado

A la hora de querer describir una descripción colectiva del gas, siempre termina por entrar la termodinámica y en el caso de los plasmas no es excepción.

Dado a que en la ecuación anterior salió el término de presión, es conveniente buscar una expresión para relacionarlo con la descripción del fluido, para esto se usará la ecuación de estado que relaciona la presión con n [**1**]

$$p = C\rho^{\gamma}, \tag{2.7}$$

en esta ecuación C es una constante, ρ la densidad y γ se le conoce como la razón entre la capacidad calorífica a presión constante (c_p) y la capacidad calorífica a volumen constante(c_v). El término del gradiente de presión viene dado por [**1**]

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma\frac{\nabla n}{n}. \tag{2.8}$$

Ahora bien, si se supone la condición de una compresión isotérmica, se tendrá que

$$\nabla p = KT\nabla n. \tag{2.9}$$

Lo que implica que $\gamma = 1$, si es adiabática γ va a ser mayor. Otra manera de ver a γ es mediante los grados de libertad N, para ello se tiene la siguiente expresión [**4**]

$$\gamma = \frac{2+N}{N}. \tag{2.10}$$

Ya con esto definido, se tienen las tres ecuaciones que modelan al plasma como un fluido, las cuales quedan como

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0. \tag{2.11}$$

$$mn\frac{d\vec{u}}{dt} = nq(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \nabla \cdot p. \tag{2.12}$$

$$p = C\rho^{\gamma}. \tag{2.13}$$

2.2. Modelo de dos fluidos

Una vez que se han presentado las ecuaciones de fluidos básicas, hay que aplicarlas a la descripción de un plasma. En un plasma se pueden encontrar distintos tipos de partículas, principalmente iones y electrones. El distinguir estos dos tipos de partículas es de gran importancia puesto que, dada la gran diferencia de masa que hay entre estos, sus velocidades dentro del fluido también serán diferentes (los electrones al ser mucho menos pesados que los iones, tienden a moverse a mayor velocidad), y esto se debe tomar en cuenta a la hora de modelar al plasma.

Si bien hay cambios importantes en este modelo, la ecuación de estado se puede aplicar para los dos fluidos sin cambios,la ecuación de continuidad presentará un mínimo cambio, mientras que la de momento sí tendrá un cambio sustancial.

El cambio en la ecuación de momento será que se aplicará de manera separada a cada una de las especies, por lo que se puede decir que en sí habrá dos ecuaciones de continuidad: una para iones y otra para electrones.

Donde sí habrá un cambio más sustancial es en la ecuación de momento. Retomando lo último que se comentó al hablar de la ecuación de momento, las colisiones estarán presentes cuando se traten de dos fluidos, puesto que habrá colisiones entre las partículas de distintas especies, i.e., entre iones y electrones. Con cada colisión habrá una transferencia de momento que alterará cada partícula en el fluido. Para poder medir cómo afectarán las colisiones al momento del fluido, se usa la variable $\nu_{1,2}$ que es la frecuencia de colisión, la que indica la tasa con la cual el momento de la primera especie se transfiere por colisión al de la segunda. Dado que cada especie tiene diferente velocidad, la tasa con la que el momento por unidad de volumen es obtenido por la especie 1 debido a las colisiones de la especie 2 se puede calcular como

$$\vec{R}_{1,2} = -m_1 n_1 \nu_{1,2}(\vec{v_1} - \vec{v_2}). \tag{2.14}$$

Este término será el que se añada a la ecuación de momento, por lo que la ecuación 2.1.2 queda como

$$m_1 n_1 \left(\frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + (\vec{v_1} \cdot \nabla)\vec{v_1} \right) = n_1 q_1 (\vec{E} + \vec{v_1} \times \vec{B}) - \nabla \cdot P_1 + \sum_2 \vec{R_{1,2}}. \tag{2.15}$$

2.2.0.1. Ley de Gauss

La Ley de Gauss describe la relación que hay entre un campo eléctrico y una partícula cargada[**5**]. La ley de Gauss en forma integral es

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{2.16}$$

donde ϕ es el potencial eléctrico, q la carga y ε la permitividad eléctrica del vacío. Para llegar a la forma diferencial se hace uso del teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad . \tag{2.17}$$

Por lo tanto, la Ley de Gauss queda de forma diferencial como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.18}$$

con ρ la densidad de carga.

2.2.0.2. Ley de Gauss Magnética

A través de experimentos se llegó al resultado de que los campos magnéticos no son como los eléctricos, es decir, no comienzan y terminan en cargas diferentes, por lo que las líneas de campo deben ser cerradas. Esto quiere decir que, sobre una superficie cualquiera no se puede encerrar una fuente o sumidero de campo, i.e., no existe un monopolo magnético[5]. Esto implica que al encerrar un dipolo en una superficie cerrada, no sale ni entra flujo magnético, por lo tanto, el campo magnético no diverge

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \tag{2.19}$$

2.2.0.3. Ley de Faraday

Gracias a Michael Faraday se descubrió que si uno mueve un imán dentro de una espira conductora, las cargas en ella empezarán a moverse generando así una corriente eléctrica; entre más rápido se mueva el imán, mayor será la corriente generada [5]. Escrito matemáticamente

$$\int_C \vec{E} dl = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} dS, \tag{2.20}$$

donde $C = \partial S$ es la espira. Usando el Teorema de Stokes y metiendo la derivada en la integral

$$\int_S \nabla \times \vec{E} dS = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} dS. \tag{2.21}$$

Por lo que finalmente queda la ecuación asociada a la Ley de Faraday como

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}. \tag{2.22}$$

2.2.0.4. Ley de Ampère-Maxwell

La Ley de Ampère indica que "una corriente eléctrica a lo largo de una curva cerrada C crea un campo magnético con circulación proporcional a su intensidad"[5], esto se puede escribir como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{2.23}$$

donde $\vec{j}$ es la densidad de corriente y μ_0 la permeabilidad magnética del vacío. El problema con esta relación es que cuando se intenta analizar campos magnéticos que varían con el tiempo se llega a errores que incluyen el violar la conservación de la carga (para el caso del MHD no hay problema con dejar la ecuación así, pues no hay densidad de carga local). Ante esto, Maxwell propuso la existencia de un término M que faltaba añadir para completar la ecuación 2.2.0.4. Para que se cumpla que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$ se necesitaba que $\nabla \cdot M = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Tomando a $M = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

la ecuación de Ampère-Maxwell queda como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{2.24}$$

Estas cuatro ecuaciones son las que se conocen como las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{2.25}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \tag{2.26}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}. \tag{2.27}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{2.28}$$

2.2.1. Resistividad eléctrica del plasma

Las colisiones no solo generan como consecuencia un cambio en el momento de las partículas, sino que además son la causa de un fenómeno de carácter eléctrico en el plasma: la resistividad. Más adelante se verá que la resistividad eléctrica del plasma puede ocasionar consecuencias no tan positivas en un plasma.

Las mismas colisiones entre iones y electrones estorbarán el paso de electrones cuando se aplique un campo eléctrico y esto provocará que estos electrones se muevan a una menor velocidad. Este fenómeno se le conoce como resistividad eléctrica del plasma, y en la literatura se suele encontrar comúnmente como η.**[2]**

La resistividad eléctrica puede expresarse en términos de la frecuencia de colisión entre iones y electrones ν_{ei} usando varias ecuaciones, en especial la ecuación de momento.

Suponiendo que se trata de un plasma de hidrógeno donde los electrones de este plasma se distribuyen de manera homogénea y se encuentran en un estado de equilibrio en presencia de un campo $E_\parallel$ y además suponiendo que la presión y el gradiente de velocidad a lo largo del campo magnético son despreciables, se puede obtener que **[2]**

$$-n_e e E_\parallel + R_{ei\parallel} = 0. \tag{2.29}$$

Despejando $E_{\parallel}$ y sustituyendo $R_{ei\parallel}$ de la ecuación 2.2 con $R_{ei\parallel} = \vec{R}_{12}$

$$E_{\parallel} = \frac{-m_e \nu_{ei}}{e}(v_{e\parallel} - v_{i\parallel}). \tag{2.30}$$

Ahora bien, es momento de usar la ecuación de densidad de corriente. Es importante recordar que la corriente son los electrones en movimiento, por lo que la ecuación es

$$\vec{j_{\parallel}} = -n_e e(v_e - v_i). \tag{2.31}$$

Si se multiplica la ecuación de $E_{\parallel}$ por $1 = \frac{n_e e}{n_e e}$ se tiene que

$$E_{\parallel} = -\frac{m_e \nu_{ei}}{e}(v_e - v_i) = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} j_{\parallel} = \eta j_{\parallel}. \tag{2.32}$$

A esta proporcionalidad entre el campo eléctrico y la densidad de corriente se le llama la Ley de Ohm simplificada y el coeficiente de proporcionalidad $\frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2}$ es la resistividad, i.e., $\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2}$. Una vez que se sabe esto se puede obtener que el factor de la ecuación de momento debido a las colisiones es

$$\vec{R_{ei}} = \eta n_e e \vec{j}. \tag{2.33}$$

2.3. Modelo MHD

El otro modelo que se verá es el modelo magnetohidrodinámico. En este modelo se ve al plasma como un fluido de gas ionizado, esto permite poder ser tratado con ecuaciones de hidrodinámica y a la vez poder contar con las interacciones eléctricas y magnéticas. A diferencia del modelo de dos fluidos, este permite conservar la mayor parte de la física y tener ecuaciones más fáciles de usar. En cuanto a matemáticas se refiere, el modelo MHD no es otra cosa más que la fusión de las ecuaciones de Navier-Stokes (de fluidos) con las ecuaciones de Maxwell.

2.3.1. La base del MHD

El modelo MHD se obtiene fusionando las ecuaciones de dos fluidos en una que contiene la masa total de los dos fluidos. Básicamente son las ecuaciones de continuidad y las de momento, así como las ecuaciones de estado. También se tienen que restar las ecuaciones de momento para las dos especies, con lo que se obtiene una ley de Ohm generalizada. La validez de este modelo recae cuando la escala de tiempo de las colisiones es más corta que los otros tiempos característicos en el sistema, por lo que las ecuaciones de Maxwell que se usan desprecian la corriente de desplazamiento en comparación a la corriente de conducción j.

La nueva Ley de Ohm generalizada toma la forma[**1**]

$$\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} = \eta \vec{j}. \tag{2.34}$$

La Ley de Ohm generalizada es la ecuación de momento para los electrones, cuando se desprecia su inercia, siendo así la base del modelo MHD. Como se hará una aproximación de frecuencias bajas, es decir, la dinámica está dictada por los iones, mientras que los electrones les siguen. Cabe recordar que la Ley de Ohm generalizada tiene otros dos términos: el térmico y el inercial. Estos términos se vuelven despreciables ya que son demasiado pequeños comparados con $\vec{v} \times \vec{B}$ [**1**].

2.3.2. Ecuaciones de fluidos en MHD

Para el caso de fluidos, como ya se vio en los otros modelos, se va a contar con tres ecuaciones: la de continuidad, la de momento y la de energía. Como se vieron ya estas ecuaciones, no se hará una deducción como en las de Maxwell; sin embargo, se explicarán algunos cambios que sufren. Uno de ellos es que se cambiará la variable n por la variable ρ definida como la densidad de masa del fluido.

2.3.2.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad quedará como [**4**]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{2.35}$$

en donde ρ es el producto de la masa de iones m y la densidad n.

2.3.2.2. Ecuación de momento

En la ecuación de momento total, al sumar las de dos fluidos y suponer neutralidad de carga, el término de campo eléctrico se cancela. Igualmente, el término de colisiones se anula por la conservación de momento en colisiones. Así queda como [4]

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla \vec{P}, \tag{2.36}$$

donde $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$[4]. Esta ecuación suele contemplar la fuerza debida a la carga electrostática $(\sum_\sigma n_\sigma q_\sigma)\vec{E}$, pero como el MHD se usa para describir fenómenos con largas escalas espaciales (mayores a la longitud de Debye) donde el plasma es esencialmente neutro, por lo que $\sum_\sigma n_\sigma q_\sigma \approx 0$ [4].

2.3.2.3. Ecuación de Estado

Para obtener la ecuación de estado se iniciará haciendo uso de la ecuación de evolución de la energía [4]

$$\frac{N}{2}\frac{dP}{dt} + \frac{2+N}{2} P \nabla \cdot \vec{v} = -\nabla \cdot \vec{Q} + \vec{R} \cdot \vec{v} - \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right). \tag{2.37}$$

Haciendo uso del límite isotérmico y el límite adiabático (logrando reducir así el lado derecho de la ecuación a 0) y sustituyendo $\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ la ecuación 2.3.2.3 queda como [4]

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{\gamma}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{2.38}$$

donde $\gamma = \frac{N+2}{N}$ con la cantidad de grados de libertad. Integrando 2.3.2.3 se llega

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = cte. \tag{2.39}$$

Si se toma $N = 3$ se tiene finalmente la ecuación de estado [4]

$$\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}} = cte. \tag{2.40}$$

En la aproximación MHD del caso ideal, la densidad de carga es de orden superior, ya que a bajas frecuencias no se observa el desplazamiento de los electrones de los iones. Por ello, la Ley de Gauss para el campo eléctrico se descarta y, en su lugar, se emplea la Ley de Ohm generalizada para el cálculo del campo eléctrico. Sustituyendo esta en la Ley de Faraday se obtiene

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + (\frac{\eta}{\mu_0})\nabla^2 \vec{B}. \tag{2.41}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \tag{2.43}$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla P. \tag{2.44}$$

$$\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}} = cte. \tag{2.45}$$

Capítulo 3

Reconexión Magnética

En el capítulo dos se vieron las distintas formas de modelar un plasma, dando las ecuaciones necesarias para cada caso. Ahora se aplicarán para describir un fenómeno en particular, que es el tema central de este texto: la reconexión magnética.

En el capítulo uno se vio una breve introducción a esta, ya sea explicando qué es, así como las consecuencias que conlleva. Ahora toca hablar desde un punto de vista más formal (más matemático) de esta, así como también se hablará sobre los distintos tipos de reconexión que se pueden encontrar. También se hablará del modelo "final", es decir, las ecuaciones con las que se trabajó en este proyecto y las cuales son su base.

3.1. Modelo de Sweet-Parker

No se puede hablar de reconexión magnética sin hacer mención del trabajo hecho por Peter Sweet [**6**] y Eugene Parker [**7**] alrededor del año de 1956. Y es que el modelo de Sweet-Parker describe de la manera más simple la reconexión magnética resistiva usando el modelo MHD.

En el modelo de Sweet-Parker, una capa de difusión magnética está presente a lo largo de la frontera entre dos campos magnéticos opuestos. La ventaja de este modelo recae en que la tasa de reconexión es igual a la velocidad con la que las líneas de campo entran a la región de difusión. Sin embargo, no todo es perfecto, pues en este modelo la reconexión explica la liberación de energía, pero no explica esta escala temporal de liberación [**8**].

Supóngase que se trata con el modelo esquematizado en la figura 3.1, en el que las líneas de campo magnético con polaridades opuestas son empujadas por el plasma hacia la región central, donde se difunden y el plasma emerge en dirección perpendicular por los dos extremos.

En primer lugar, hay que encontrar la velocidad con la que un campo magnético B_i

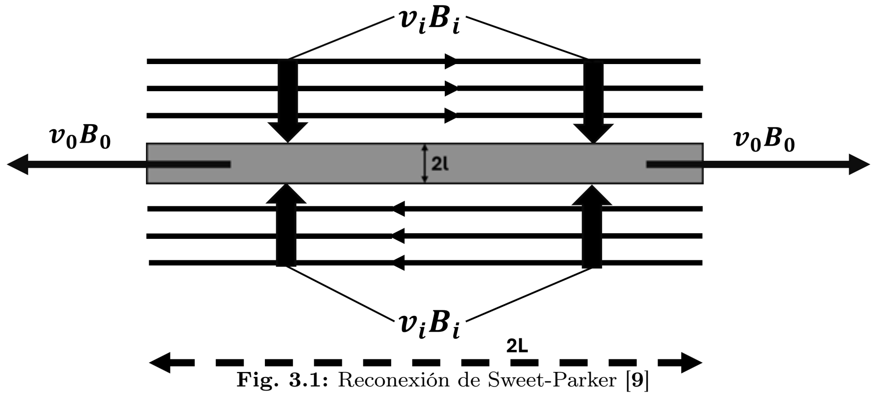


Fig. 3.1: Reconexión de Sweet-Parker [9]

se adentra a una región de difusión de ancho $2l$ y largo $2L$. Cuando el sistema se encuentra estacionario, la velocidad con la que el plasma empuja las líneas de campo será la misma con la que se difunden hacia afuera. Como el campo eléctrico es uniforme en un sistema estable de dos dimensiones, su valor será dado al evaluar la ley de Ohm.

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\sigma}, \tag{3.1}$$

donde σ es la conductividad eléctrica. En la entrada a la región de difusión donde la corriente desaparece, da como resultado

$$E = -v_i B_i \tag{3.2}$$

Mientras tanto, cuando se trata de la región central, el campo magnético desaparece, por lo que queda

$$E = \frac{j_{rc}}{\sigma}, \tag{3.3}$$

con j_{rc} la corriente en la región central. Ahora bien, la ley de Ampère implica que

$$j_{rc} = \frac{B_i}{\mu_0 l}. \tag{3.4}$$

A la hora de sustituir 3.1 en 3.1 queda

$$E = \frac{\frac{B_i}{\mu_0 l}}{\sigma} \quad \rightarrow \quad -v_i B_i = \frac{B_i}{\mu_0 l \sigma}. \tag{3.5}$$

Definiendo $\eta = \dfrac{1}{\mu_0 \sigma}$ como la difusividad magnética

$$v_i = \frac{\eta}{l}. \tag{3.6}$$

Hablando de materia, por conservación de ésta, se va a tener que

$$L v_i = l v_o, \tag{3.7}$$

con v_o la velocidad que tiene el flujo al salir. Sustituyendo la ecuación 3.1 en 3.1

$$v_i^2 = \frac{\eta v_o}{L}. \tag{3.8}$$

Y además

$$l = L \frac{v_i}{v_o}. \tag{3.9}$$

Y gracias a la conservación del flujo magnético $B_i v_i = B_o v_o$ se puede saber el valor de los campos. Para calcular todo lo anterior solo basta con tener el valor de las velocidades.

Aunque ya se tiene cómo calcular v_i falta cómo se puede obtener v_o. Para encontrar v_o es necesario partir de la ecuación 2.3.2.2 (donde el gradiente de presión es despreciable). Suponiendo que se mueve sobre el eje x

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla) v_x = (\vec{j} \times \vec{B})_x. \tag{3.10}$$

Entonces

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \frac{B^2}{2} + (\vec{B} \cdot \nabla) B_x \right). \tag{3.11}$$

En el centro de la región de difusión el campo magnético desaparece, $\dfrac{\partial B_x}{\partial x = 0}, \dfrac{\partial B_y}{\partial x} \approx 0$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \approx \frac{v_y}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial y}, \tag{3.12}$$

donde $v_i = v_y$, $v_o = v_x$, $B_i = B_x$, $Bo = By$. Sustituyendo y realizando las derivadas se obtiene

$$\rho \frac{v_o^2}{L} \approx \frac{B_i B_o}{\mu_0 l}. \tag{3.13}$$

Por Ley de Gauss para campos magnéticos

$$\frac{B_o}{l} \approx \frac{B_i}{L}. \tag{3.14}$$

Entonces

$$\rho \frac{v_o^2}{L} \approx \frac{B_i^2}{\mu_0 L}. \tag{3.15}$$

Finalmente despejando v_o

$$v_o = \frac{B_i}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \equiv v_{A_i}. \tag{3.16}$$

Por lo que la velocidad de salida será igual a la velocidad de Alfvén de entrada [**9**]. Esto resulta bastante interesante, pues se concluye que la fuerza magnética acelerará al plasma hasta llegar a la velocidad de Alfvén [**9**]. La velocidad de Alfvén $v_A^2 = \dfrac{B_0^2}{\mu_0 \rho}$ es la velocidad a la que las ondas magnéticas se propagan a través de un plasma y es una medida de la fuerza del campo magnético en el plasma.

3.2. Reconexión Forzada

En el capítulo primero, se describieron brevemente la reconexión y la reconexión por desgarre resistivo. Sin embargo, en este texto el tipo de reconexión que más va a importar es la reconexión forzada.

Cuando se hizo mención de cómo el viento solar interactúa con el campo magnético de la Tierra, se explicó que se puede llegar a generar reconexión de los campos magnéticos, que se conoce como reconexión forzada.

A diferencia de la reconexión por desgarro resistivo, la cual se debe a una inestabilidad dentro del plasma, la reconexión forzada se da por una perturbación externa. Por ejemplo, en una región activa de la corona solar, el campo magnético está sujeto continuamente a deformaciones debidas a flujos de la fotosfera que van mezclando distintas zonas del campo. Algo interesante de la reconexión forzada es que suele liberar grandes cantidades de energía (tal y como se vio cuando se habló de los jets de plasma), debido a que el campo magnético, después de la reconexión, tiene menor energía que el campo inicial debido al cambio de topología y a la transformación en energía magnética y cinética.

El modelo de Sweet-Parker describe un tipo de reconexión forzada. Dentro de la reconexión forzada puede haber dos tipos de fuerzas impulsoras que se usarán más adelante: una fuerza continua o una fuerza pulsada [**10**].

3.3. Modelo Reducido

A estas alturas, ya se estudió gran parte de la teoría que se encuentra detrás de este proyecto: tanto cómo funciona la reconexión magnética física y matemáticamente, como a su vez los modelos usados para describir a los plasmas. Pues bien, es momento de abordar el modelo que se usó en este proyecto. En este caso, se utilizará el modelo de dos fluidos. Este modelo no puede verse como un modelo de Sweet-Parker, ya que no se considera una resistencia eléctrica dentro del plasma, sino más bien es la misma inercia de los electrones la que genera un fenómeno similar.

Para este caso se trató con un plasma con cuasineutralidad, i.e., $n_e = n_i = n$ y se abordará desde el modelo de dos fluidos en una geometría euclidiana teniendo una configuración magnética de punto X de equilibrio en el plano (x, y), además con simetría en el eje Z y donde habrá un campo guía a lo largo de éste. Las ecuaciones son [**11**]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0. \tag{3.17}$$

$$m_i \left[\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial t} + (\vec{v_i}\nabla) \cdot \vec{v_i} \right] = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v_i} \times \vec{B} - e\eta\vec{j}. \tag{3.18}$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v_e} \times \vec{B} = -\frac{m_e}{e} \left[\frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} + (\vec{v_e} \cdot \nabla)\vec{v_e} \right] + \eta\vec{j} - \frac{\nabla p}{en}. \tag{3.19}$$

Se considera un campo libre de corrientes, una geometría cartesiana simétrica a lo largo de la coordenada z y teniendo una configuración de un X-punto de equilibrio magnético en el plano (x, y) en X [**12**]. Entonces, el campo magnético se define como [**12**]

$$\vec{B} = \hat{z} \times \nabla\psi(x, y, t) + B_z(x, y, t)\hat{z}. \tag{3.20}$$

El potencial magnético de equilibrio que da un X-punto hiperbólico es $\psi_0 = B'_\perp xy$ y se caracteriza por una longitud de escala definida por $l_0 \equiv \dfrac{B_{z0}}{B'_\perp}$ [**12**]. La velocidad de los iones es la velocidad del plasma. Se puede dar una representación general en términos de los potenciales ϕ y χ [**12**]

$$\vec{v_i} = \hat{z} \times \nabla\phi(x,y,t) + \nabla\chi(x,y,t) + v_z(x,y,t)\hat{z}. \tag{3.21}$$

En el estado de equilibrio se toman $\vec{v_0} = 0 = \vec{j_0}_0$ y $n_0 = cte$ [**12**]. Se procede a perturbar este estado de equilibrio. Cada cantidad de las ecuaciones 3.3 se escriben como en su término de equilibrio sumándole una perturbación [**11**]. Por ejemplo, para el flujo magnético se tiene $\psi(x,y,t) = \psi_0 + \psi(x,y,t)$ [**11**].Las funciones χ, v_z y B_z se consideran constantes y por ello no aparecen en las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U,\phi] + \left[\psi, \nabla^2\psi\right]. \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi - d_{\mathrm{e}}^2\nabla^2\psi\right) = \left[\psi - d_{\mathrm{e}}^2\nabla^2\psi, \phi\right] - \rho_{\mathrm{s}}^2[\psi,\xi] + \epsilon_\eta\nabla^2\psi. \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = [\xi,\phi] + \left[\psi, \nabla^2\psi\right], \tag{3.24}$$

donde se tiene que $[a,b] \equiv \hat{z}\cdot\nabla a \times \nabla b$, $U \equiv \nabla^2\phi$ es la vorticidad, $\xi \equiv \left(\dfrac{l_0}{d_i}\right)\log\left(\dfrac{n}{n_0}\right)$, $d_e = \dfrac{c}{\omega_{pe}}$, $\rho_s^2[\psi,\xi]$ es proporcional a la compresibilidad de los electrones y la difusividad resistiva es $\epsilon_\eta = \left(\dfrac{d_e}{l^2}\right)v_{\mathrm{ei}}\tau$ y para acabar todas las variables están normalizadas de la forma $\phi \to \phi/\left(l^2/\tau_{\mathrm{A}}\right)$ y $\psi \to \psi/\left(l^2 B'_\perp\right)$. Aquí l es la longitud característica del sistema.[**12**]

Ahora bien, las ecuaciones 3.22, 3.23 y 3.24 son la forma final de las ecuaciones que se usaron. Estas ecuaciones permiten estudiar la evolución no lineal del plasma con el campo magnético. Para ello, estas ecuaciones se resolvieron numéricamente mediante un programa en Fortran.

Vale la pena comentar que, por la definición del campo B y de la velocidad v, las curvas definidas por $\psi =$ constante van a representar las líneas de campo magnético y las de $\phi =$ constante representan las líneas de flujo de plasma. Tras resolver las ecuaciones 3.22-3.24 mediante un código computacional, se hizo uso de lo visto en la oración anterior para visualizar los resultados de las simulaciones [**13**].

Dado que en el programa usado para resolver las ecuaciones 3.22-3.24 se determina el tiempo de reconexión, tampoco se puede decir que se parezca al modelo de Petschek [**8**].

3.4. Soluciones del modelo

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales parciales se hizo uso de un programa en Fortran que trabaja con el método de Leap-Frog para avanzar en el tiempo. Leap-Frog es un método para integrar de manera numérica ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{d^2x}{dt^2} = A(x)$. Se usó la descomposición LU (Lower-Upper) para invertir el operador Laplaciano en las ecuaciones 3.22-3.24. Las salidas proporcionan los valores de las funciones $\phi(x, y), \psi(x, y), \xi(x, y)$ a distintos tiempos.

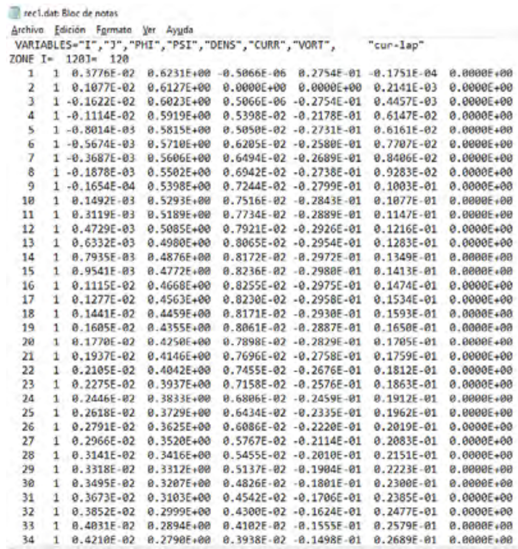
El método de descomposición LU es utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. La particularidad de este método es que se puede usar principalmente cuando se necesita resolver el sistema de ecuaciones lineales de forma repetida para diferentes términos independientes. La descomposición LU consiste en, valga la redundancia, descomponer una matriz cuadrada A en dos matrices triangulares, una inferior L y la otra superior U, tal que se cumpla la siguiente relación

$$A = LU \tag{3.25}$$

Ahora bien, ¿por qué fue necesario hacer uso de la descomposición LU? En las ecuaciones 3.22-3.24 se resuelve para las funciones U, ξ y $\psi - d_e^2\nabla^2\psi$ en cada paso temporal, pero de ellas se necesita obtener ϕ y ψ para seguir evaluando en los pasos siguientes. Para ello se usa el método de descomposición LU, con la finalidad de invertir el Laplaciano en las ecuaciones $U = \nabla^2\phi$ y $(1 - d_e^2\nabla^2)\psi$. La inversión del Laplaciano significa aplicar el operador inverso de ∇^2 a una función o campo. Por ejemplo, para una ecuación de la forma $\nabla^2 g = f$, la inversión del Laplaciano sería encontrar la función g tal que cuando le aplicas el Laplaciano, obtienes f. Esto implica resolver una ecuación diferencial con el operador ∇^2 actuando sobre g.

Se resuelven las ecuaciones para las coordenadas espaciales en una cierta coordenada temporal, i.e., se resuelve para algo de la siguiente manera (x_i, y_j, t_k) con $i, j = [1, N]$ el tamaño de la dimensión espacial mientras que $k = [0, M - 1]$. Es debido a esto que al correr el programa se obtienen como resultados M archivos "rec" que representan las configuraciones espaciales instantáneas para M tiempos. En nuestras simulaciones se usó $N = 120$ y $M = 100$. Para que el programa de resultados con buena aproximación debe incrementarse el valor de N, sin embargo, el programa dejaba de funcionar cuando se usaba un $N > 120$, es por eso que se optó por tomar ese valor. El valor de M se tomó de esa manera para tener el suficiente tiempo, sin que quede incompleto o se exceda.

Cada archivo "rec" contiene una matriz de 8×14400 así como también el nombre de la variable de cada columna. Cada columna representa una variable distinta, están las variables I, J que son las coordenadas espaciales las cuales, como ya se vio, van del 1 al 120, esto explica por qué se tiene un número tan grande de filas en la matriz pues se están teniendo combinaciones en las coordenadas espaciales de la forma (1,1),(1,2),...(1,120),(2,1),(2,2),...(2,120),...(120,120) lo cual se puede ver como $120^2 = 14400$. También se tienen seis variables que tendrán valor para cada coordenada espacial (I,J) y éstas son: PHI (que, como se vio en la sección pasada, está relacionada



```
rec1.dat: Bloc de notas
Archivo  Edición  Formato  Ver  Ayuda
 VARIABLES="I","J","PHI","PSI","DENS","CURR","VORT",      "cur-lap"
ZONE I=  120J=  120
    1    1  0.3776E-02  0.6231E+00 -0.5066E-06  0.2754E-01 -0.1751E-04  0.0000E+00
    2    1  0.1077E-02  0.6127E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.2141E-03  0.0000E+00
    3    1 -0.1622E-02  0.6023E+00  0.5066E-06 -0.2754E-01  0.4457E-03  0.0000E+00
    4    1 -0.1114E-02  0.5919E+00  0.5398E-02 -0.2178E-01  0.6147E-02  0.0000E+00
    5    1 -0.8014E-03  0.5815E+00  0.5050E-02 -0.2731E-01  0.6161E-02  0.0000E+00
    6    1 -0.5674E-03  0.5710E+00  0.6205E-02 -0.2580E-01  0.7707E-02  0.0000E+00
    7    1 -0.3687E-03  0.5606E+00  0.6494E-02 -0.2689E-01  0.8406E-02  0.0000E+00
    8    1 -0.1878E-03  0.5502E+00  0.6942E-02 -0.2738E-01  0.9283E-02  0.0000E+00
    9    1 -0.1654E-04  0.5398E+00  0.7244E-02 -0.2799E-01  0.1003E-01  0.0000E+00
   10    1  0.1492E-03  0.5293E+00  0.7516E-02 -0.2843E-01  0.1077E-01  0.0000E+00
   11    1  0.3119E-03  0.5189E+00  0.7734E-02 -0.2889E-01  0.1147E-01  0.0000E+00
   12    1  0.4729E-03  0.5085E+00  0.7921E-02 -0.2926E-01  0.1216E-01  0.0000E+00
   13    1  0.6332E-03  0.4980E+00  0.8065E-02 -0.2954E-01  0.1283E-01  0.0000E+00
   14    1  0.7935E-03  0.4876E+00  0.8172E-02 -0.2972E-01  0.1349E-01  0.0000E+00
   15    1  0.9541E-03  0.4772E+00  0.8236E-02 -0.2980E-01  0.1413E-01  0.0000E+00
   16    1  0.1115E-02  0.4668E+00  0.8255E-02 -0.2975E-01  0.1474E-01  0.0000E+00
   17    1  0.1277E-02  0.4563E+00  0.8230E-02 -0.2958E-01  0.1534E-01  0.0000E+00
   18    1  0.1441E-02  0.4459E+00  0.8171E-02 -0.2930E-01  0.1593E-01  0.0000E+00
   19    1  0.1605E-02  0.4355E+00  0.8061E-02 -0.2887E-01  0.1650E-01  0.0000E+00
   20    1  0.1770E-02  0.4250E+00  0.7898E-02 -0.2829E-01  0.1705E-01  0.0000E+00
   21    1  0.1937E-02  0.4146E+00  0.7696E-02 -0.2758E-01  0.1759E-01  0.0000E+00
   22    1  0.2105E-02  0.4042E+00  0.7455E-02 -0.2676E-01  0.1812E-01  0.0000E+00
   23    1  0.2275E-02  0.3937E+00  0.7158E-02 -0.2576E-01  0.1863E-01  0.0000E+00
   24    1  0.2446E-02  0.3833E+00  0.6806E-02 -0.2459E-01  0.1912E-01  0.0000E+00
   25    1  0.2618E-02  0.3729E+00  0.6434E-02 -0.2335E-01  0.1962E-01  0.0000E+00
   26    1  0.2791E-02  0.3625E+00  0.6086E-02 -0.2220E-01  0.2019E-01  0.0000E+00
   27    1  0.2966E-02  0.3520E+00  0.5767E-02 -0.2114E-01  0.2083E-01  0.0000E+00
   28    1  0.3141E-02  0.3416E+00  0.5455E-02 -0.2010E-01  0.2151E-01  0.0000E+00
   29    1  0.3318E-02  0.3312E+00  0.5137E-02 -0.1904E-01  0.2223E-01  0.0000E+00
   30    1  0.3495E-02  0.3207E+00  0.4826E-02 -0.1801E-01  0.2300E-01  0.0000E+00
   31    1  0.3673E-02  0.3103E+00  0.4542E-02 -0.1706E-01  0.2385E-01  0.0000E+00
   32    1  0.3852E-02  0.2999E+00  0.4300E-02 -0.1624E-01  0.2477E-01  0.0000E+00
   33    1  0.4031E-02  0.2894E+00  0.4102E-02 -0.1555E-01  0.2579E-01  0.0000E+00
   34    1  0.4210E-02  0.2790E+00  0.3938E-02 -0.1498E-01  0.2689E-01  0.0000E+00
```

Fig. 3.2: Archivo Rec1

con la velocidad del plasma), PSI (relacionada al campo magnético), DENS (la densidad del plasma), CURR(la corriente del plasma), VORT(la vorticidad del plasma) y finalmente cur-lap, que es la corriente calculada del $\nabla^2\psi$.

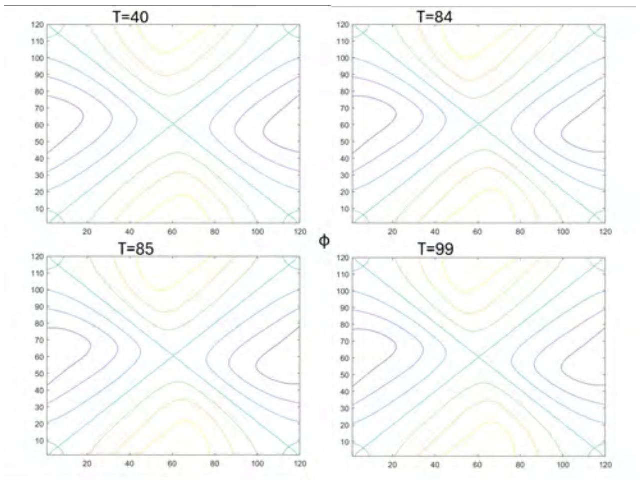
De estos archivos "rec" se tienen 100 en total, puesto que cada archivo tiene la información contenida en cada instante del tiempo. Gracias a estos cien archivos, se puede encontrar el comportamiento de cada variable a lo largo del tiempo, es decir, se pueden estudiar los cambios que las variables sufren en presencia de un proceso de reconexión magnética.

La figura 3.3 son las imágenes obtenidas al procesar los archivos "rec", las cuales representan distintas variables en diferentes momentos del tiempo. Se puede apreciar fácilmente el cambio de la topología de las líneas de campo en los gráficos referentes a la variable ψ. Estas gráficas muestran de una manera visual lo que pasa con cada variable a lo largo del proceso de reconexión.

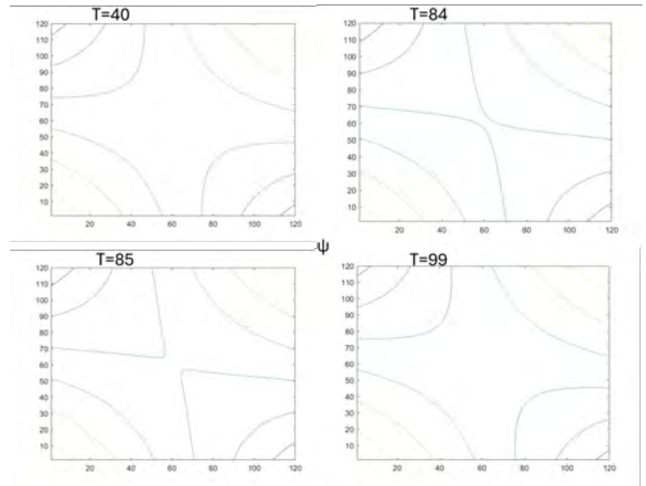
La resolución de este modelo no brinda información sobre qué sucede en la capa límite, esto no implica que no suceda, simplemente no se ve explícitamente. Se podría haber hecho un más exhaustivo respecto a la capa límite, pero se escaparía de los propósitos de este trabajo.

3.4.1. Fuerza Continua

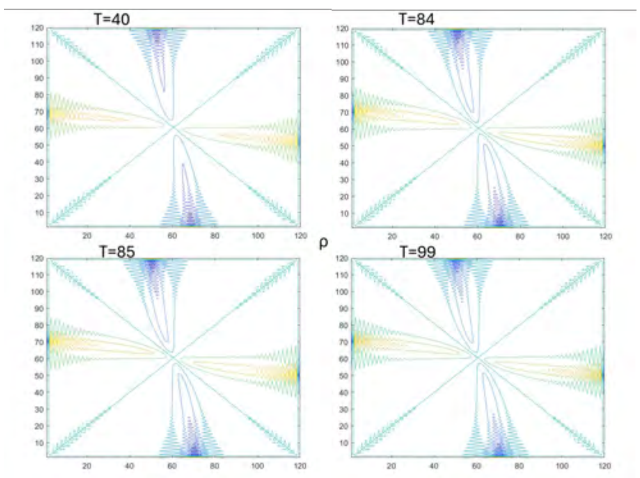
En las simulaciones se produce la reconexión a través de un forzamiento aplicado externamente que produce que haya un flujo de plasma hacia el punto X. En el caso de una fuerza continua, de lo que se trata es de estar manteniendo todo el tiempo la perturbación, ya que esto hará que durante todo este tiempo se esté obteniendo una reconexión.



a) Comportamiento de la variable ϕ a lo largo del tiempo



b) Comportamiento de la variable ψ a lo largo del tiempo



c) Comportamiento de la densidad del plasma a lo largo del tiempo

Fig. 3.3: Imágenes obtenidas de los archivos ”rec”.

Un claro ejemplo de una reconexión forzada continua es dentro de un TOKAMAK, ya que se tiene un campo magnético confinando al plasma de manera continua.

Dentro del código usado, para indicar que se trata de una reconexión continua se escribe la velocidad con la que se empuja al plasma desde la frontera externa de la forma

$$v(t) = \frac{E_0}{4}\left(1 - e^{-t_t}\right). \tag{3.26}$$

Aquí, t_t es el tiempo característico de incremento de la velocidad desde cero hasta su valor final $\frac{E_0}{4}$. La constante E_0 aparece porque usualmente esta velocidad es inducida por un campo eléctrico a través de la deriva de $\vec{E} \times \vec{B}$.

3.4.2. Fuerza Pulsada

La reconexión magnética forzada pulsada es un fenómeno en el cual la reconfiguración del campo magnético ocurre de manera intermitente o en pulsos, es decir, no está todo el tiempo afectando la perturbación.

Este tipo de reconexión magnética se puede presenciar en las interacciones entre los vientos solares y la magnetósfera, pues las emisiones solares no son continuas.

A nivel de código, lo que se hizo fue cambiar la ecuación 3.4.1 por la siguiente

$$v(t) = \frac{E_0}{4} t_t e^{-t_t}. \tag{3.27}$$

Capítulo 4

Método de SVD

En los pasados capítulos se presentó al plasma tanto en su forma microscópica como en su descripción macroscópica en términos de ecuaciones de fluidos, así como también se habló del fenómeno de la reconexión magnética indicando tanto su origen como su comportamiento. De igual manera, se hizo mención del programa usado, haciendo hincapié en cómo funciona y qué da como resultado.

Pues bien, una vez que se tienen los resultados del proceso de reconexión, se hizo un análisis de sus propiedades en diferentes escalas espaciales y temporales. Para ello, se usó el método de descomposición en valores singulares (SVD del inglés Singular Value Decomposition). Aquí se explicará en qué consiste este método y cómo se aplicó a las salidas del programa de reconexión. Para este capítulo se verán distintos métodos matemáticos, basados en SVD, que usan los datos puestos en formas matriciales convenientes. Se verá de qué manera el análisis de los resultados permite obtener así información valiosa.

4.1. Análisis Multiescalas

El análisis multiescala es una herramienta poderosa utilizada para comprender fenómenos complejos que ocurren en diferentes escalas de longitud y tiempo. Los plasmas son sistemas que exhiben una amplia gama de fenómenos físicos, desde la microfísica hasta la macrofísica de la dinámica global del plasma. El análisis multiescala reconoce que los procesos físicos en un plasma pueden ocurrir en múltiples escalas espaciales y temporales simultáneamente. Por lo tanto, para comprender completamente el comportamiento del plasma, es necesario abordar cada una de estas escalas de la mejor manera [**14**].

Para el objetivo de este texto, el análisis multiescala implica integrar y acoplar modelos y técnicas de análisis apropiados para cada escala, lo que permite obtener una comprensión más completa y precisa del comportamiento del plasma.

4.2. Descomposición en Valor Singular

Cuando se tiene una matriz y tanto la eliminación gaussiana como la descomposición LU no brindan buenos resultados en la descomposición de la matriz, se hace uso de una técnica conocida como la descomposición en valores singulares. El método SVD es un método que dará una solución numérica y que se usa para resolver problemas de mínimos cuadrados lineales. Se le considera una herramienta poderosa, pues ayuda a extraer características que podrían estar ocultas en los datos, identificando y clasificando las dimensiones donde éstos tienen una mayor variación.

Definición: Para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existen dos matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y una matriz diagonal y no negativa $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$A_{m\times n} = U_{m\times m}S_{m\times n}V^T_{n\times n}, \tag{4.1}$$

donde la diagonal de S son llamados los valores singulares de A (normalmente siguiendo un orden decreciente i.e., $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0$). Las matrices U y V son matrices unitarias, lo que implica que $UU^T = 1$ y $VV^T = 1$. A las columnas de U se les conocen como los vectores singulares izquierdos de A y a las columnas de V los vectores singulares derechos de A. En ambos casos, los vectores singulares forman una base ortogonal [**15**].

Ahora bien, de la descomposición SVD se puede seguir que la matriz AA^T tiene como eigenvectores los vectores singulares derechos de V y sus eigenvalores son los cuadrados de los valores singulares σ. De la misma manera, los eigenvectores de la matriz A^TA son los vectores singulares izquierdos de U y tiene los mismos eigenvectores. Para dar más claridad de lo que trata el método SVD se dará un ejemplo [**16**].

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Entonces

$$A^TA = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

De esta matriz se obtienen que los eigenvalores son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 1$ y por lo tanto, los eigenvectores normalizados son

$$\begin{aligned} v_1 = &\quad [.707, \quad .707]^T. \\ v_2 = &\quad [-.707, \quad .707]^T. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Recordando que los valores singulares son la raíz cuadrada de los eigenvalores, se puede obtener el valor de la matriz U

$$U = \frac{1}{\sigma_i} A V^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .707 & .-707 \\ .707 & .707 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2.121 & -2.121 \\ 2.121 & 2.121 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Fácilmente se puede comprobar que se cumple la igualdad de la ecuación 4.2. Debido al hecho de que los valores singulares están ordenados de mayor a menor, los eigenvectores correspondientes contenidos en las matrices U y V representan información de menor importancia. Por ello se pueden eliminar los valores de mayor orden para obtener una aproximación de A que ocupe menos espacio. Una propiedad importante del SVD es que se puede demostrar que éste produce la matriz aproximada óptima para la matriz A. Esto se usa, por ejemplo, para comprimir imágenes. De manera natural, también, este método ordena las escalas involucradas.

Ahora bien, la descomposición por valores singulares se puede ver desde una perspectiva geométrica. Si se considera a la matriz A como la matriz de una transformación lineal tal que $f(x) = Ax$, entonces se puede ver que se descompone en 3 operaciones; por ejemplo U una rotación, S un cambio de escala y V^T otra rotación.

En el caso de la reconexión magnética que se está tratando aquí, el método SVD es usado para descomponer datos espacio-temporales en una serie finita de modos separables de tiempo y espacio que son ortonormales. Los modos dan la mejor representación de escalas espacio-temporales más relevantes de los datos. Cada modo tendrá una contribución de energía asociada dada por σ_k^2, de manera que la energía total estará dada por la siguiente relación

$$E = \sum_{k=1}^{100} \sigma_k^2. \tag{4.6}$$

Si los valores singulares decaen rápidamente, como suele suceder, la mayor parte de la energía estará contenida en los primeros modos, por lo que no hará tanta falta concentrarse en los otros.

Se puede definir a

$$p_k = \frac{\sigma_k^2}{E}, \tag{4.7}$$

como la energía adimensional, la cual mide la cantidad relativa de energía almacenada en cada modo. Usualmente, la SVD se aplica a un conjunto de datos bidimensional expresado en forma de matriz, como, por ejemplo, los píxeles de una imagen en dos dimensiones espaciales. Sin embargo, en la siguiente sección se verá cómo se puede extender el SVD para obtener escalas espaciales y también las escalas temporales de manera simultánea [**17**].

En resumen, el método SVD tiene la gran ventaja de que permite desglosar en valores singulares ordenados de mayor a menor a mi matriz original, logrando así obtener fácilmente la información más importante dentro de la escala espacio-temporal. Además, su uso no se limita a que la matriz sea cuadrada o no. Y de igual manera, no afecta en caso de que sea cuadrada que esta sea no singular.

4.3. Topos y Cronos

Topos y Cronos es el nombre que se le da a la separación de variaciones en el tiempo y el espacio en los datos de tal manera que se puede usar un método de descomposición ortogonal. Supóngase que se tiene un campo escalar $A(\vec{r}(x,y),t)$ y se introduce una malla espacial de la forma (x_i, y_j) con $i = 1, ..., n_x$ y $j = 1, ..., n_y$ y además se vuelve discreto el intervalo de tiempo $t_k = t_1, ..., t_n$ con t_1 el tiempo inicial y t_n el tiempo final. Se pueden ver los datos como un arreglo de 3 dimensiones $A_{ijk} = A(x_i, y_j, t_k)$.

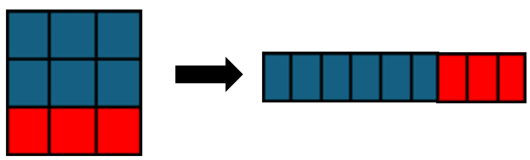


Fig. 4.1: Concatenación de matrices

Ahora bien, se va a usar el método SVD por lo que es importante representar el arreglo de tres dimensiones en una matriz de dos dimensiones. Para esto se pueden desdoblar los renglones de la parte espacial en una sola hilera i.e., concatenando el segundo renglón con la primera tal como se ve en la Fig.4.1. Ante esto se tendrá una matriz de una dimensión r_l con $l = 1, ..., n_x \times n_y$, por lo que, completándola con la escala temporal se obtendrá la matriz de dos dimensiones $A_{lm} = A(r_l, t_m)$ con $m = 1, ..., n_t$. Aplicando el método SVD

$$A_{lm} = \sum_{k=1}^{N'} \sigma_k u_k(r_l) v_k(t_m) \quad N' = \text{mín}[(n_x n_y, n_t)] \tag{4.8}$$

Los $n_x n_y-$vectores dimensionales u_k son los modos considerados como Topos porque contienen la información espacial del conjunto de datos, mientras que los n_t-vectores dimensionales v_k son los Cronos ya que contienen la información temporal [**18**]. La figura 4.2 muestra un diagrama Topos y Cronos donde el gráfico izquierdo es el Topos y el derecho el Cronos. Los ejes horizontal y vertical del Topos corresponden a la posición en el plano $X - Y$, mientras que la barra de colores corresponde a la magnitud de la variable en esa ubicación. El eje horizontal del Topos representa el paso del tiempo , mientras que el vertical indica la intensidad de la variable.

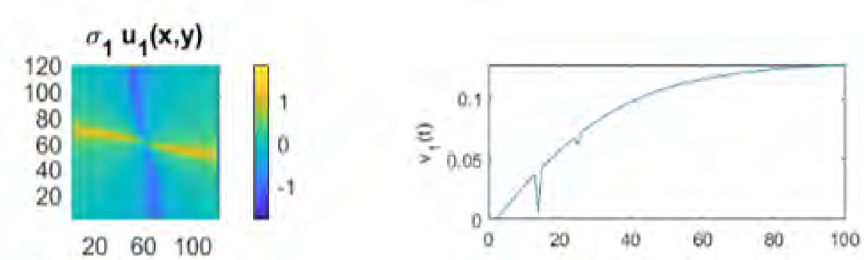


Fig. 4.2: Diagramas Topos y Cronos

Una de las ventajas del método SVD es que puede usarse para filtrar parte de los datos o eliminar algunos datos que no sean relevantes, sin perder mucha información. Debido a que los valores singulares quedan ordenados de mayor a menor, se puede cortar la suma de la ecuación 4.8 hasta un valor menor a N', i.e., $k < N'$ sin que se pierda gran información.

$$A_{lm}|_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i(r_l) v_i(t_m) \tag{4.9}$$

El error en la reconstrucción $A_{lm} - A_{lm}|_k$ es cada vez menor a medida que aumenta el número de modos incluidos, pero usualmente con solo unos cuantos modos el error es poco apreciable (algo parecido a lo que sucede con el desarrollo de Taylor). El error en la reconstrucción, a su vez, tiene información de lo que ocurre en las escalas restantes. Esto se usará más adelante para analizar los resultados.

Capítulo 5

Resultados

Pues bien, una vez que se ha visto ya toda la teoría detrás de las ecuaciones que se resolvieron y de los métodos numéricos que se usaron para analizar los resultados, ha llegado el momento de presentar todo lo que se obtuvo.

Hay que recordar que se hizo un análisis para cada una de las variables: ϕ, ψ, la densidad, la corriente y la vorticidad. Cuando en esta sección se esté hablando de "energía" no se refiere a la energía como se conoce (la que tiene unidades de Joules), sino al cuadrado de la variable en sí, representada por los valores singulares al cuadrado, lo cual mide la intensidad de esa variable. Es decir, si se menciona la "energía" para densidad, se refiere al cuadrado de los valores singulares de la densidad para cada modo. Por lo que se estarán mostrando gráficos relacionados con los valores propios de cada una, así como sus funciones propias Topos y Cronos.

En este caso, se dividirán los resultados en dos secciones: los que se obtuvieron con la suposición de una fuerza continua y la que trata de una fuerza pulsada. Esto con el fin de observar las diferencias entre ambas.

5.1. Forzado continuo

Es necesario volver a mencionar que en el caso de una fuerza continua lo que se tiene es una perturbación en el plasma que no cesa, lo que provoca que todo el tiempo los campos estén colisionando y ocasionando que la reconexión se dé continuamente.

5.1.1. Resultados para el potencial de velocidad ϕ

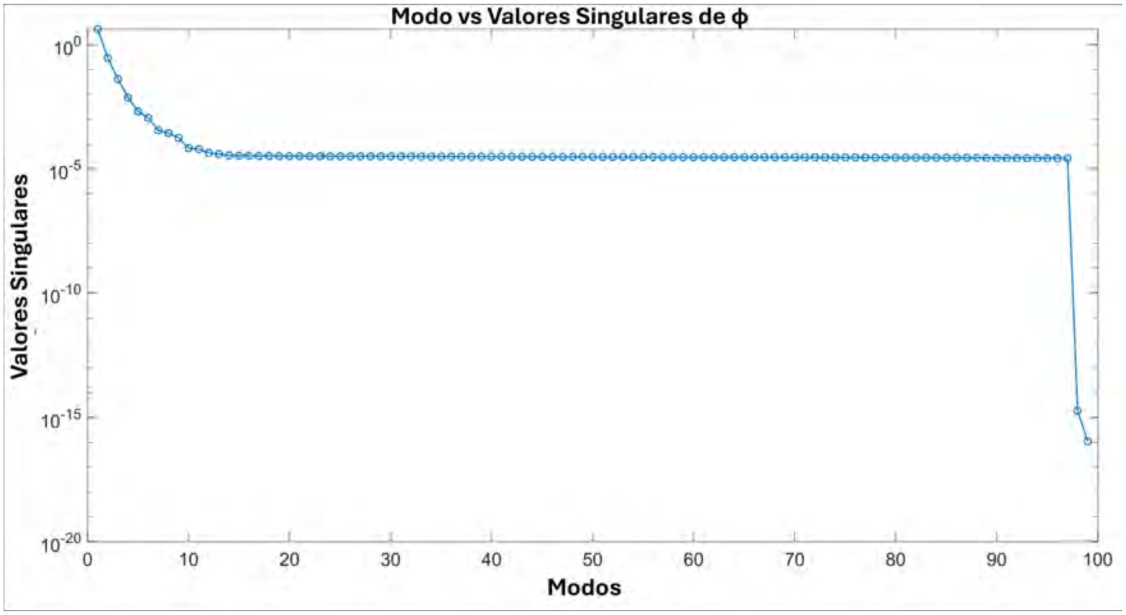


Fig. 5.1: Gráfica de los valores propios de ϕ vs el rango

En este caso se tiene un espectro de valores singulares, también llamado "Screen Diagram" que se muestra en la figura 5.1, donde se comparan el rango contra los valores singulares. Como se puede observar se tiene una caída abrupta desde el primer modo hasta el décimo (nótese la escala logarítmica en el eje vertical), esto implica que estos primeros son los que más contribuyen, i.e., con estos pocos modos se determina casi toda la estructura de la velocidad. Dado que los primeros 10 valores son los principales, los siguientes se mantienen constantes en valores entre 10^{-4} y 10^{-5}, pues contribuyen muy poco, formando así una zona plana en la gráfica. Los últimos dos valores contribuyen todavía menos, por lo que bajan considerablemente en la gráfica y son totalmente despreciables.

Que la caída haya sido tan rápida implica que se tiene una alta coherencia en el fenómeno de reconexión, es decir, su estructura está bien descrita por unos pocos modos de gran escala.

En el gráfico de la figura 5.2 se presenta la energía acumulada hasta el modo de rango k. Este gráfico está relacionado con el anterior, pues la $''$energía$''$ es la suma del cuadrado de los valores singulares $E(k) = \sum_{i=1}^{k} \sigma^2$ y el porcentaje de la energía total E es $(E(k)/E) \times 100$. Es por eso que cada valor va a aportar una determinada cantidad al total.

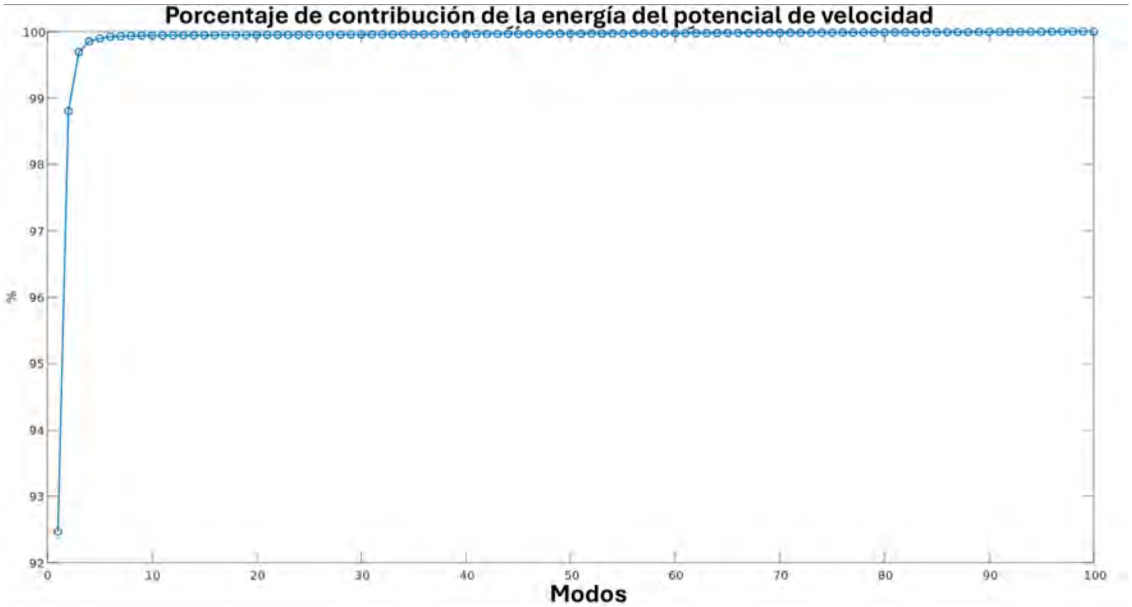


Fig. 5.2: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la variable ϕ

Este gráfico, de manera similar a la figura 5.2, muestra que son los primeros valores los que contribuyen mayoritariamente a la "energía", pues con estos se alcanza casi el 100 % de energía.

En la figura 5.3 se puede apreciar los dos distintos tipos de gráficos que se mencionaron en la sección 4.3: los espaciales y los temporales. Este gráfico explica la configuración en la que se encuentra la variable ϕ para cada modo. Se muestran solo algunos de los modos representativos: los primeros cuatro y algunos de los de mayor orden. La única relación que hay entre un Topos y un Cronos es el modo en el que se encuentran. Es claro que el primer modo reproduce bastante bien la estructura global de la velocidad obtenida en 3.3.

Se puede apreciar que a medida que se avanza en el modo, la magnitud de la energía tiende a ser menor (observar la escala a colores). De igual manera, la oscilación entre valores positivos y negativos tiende a darse en escalas más pequeñas a medida que aumenta el rango de modo, tanto en Topos como en Cronos, lo que indica que las escalas tanto temporales como espaciales son menores para modos más altos.

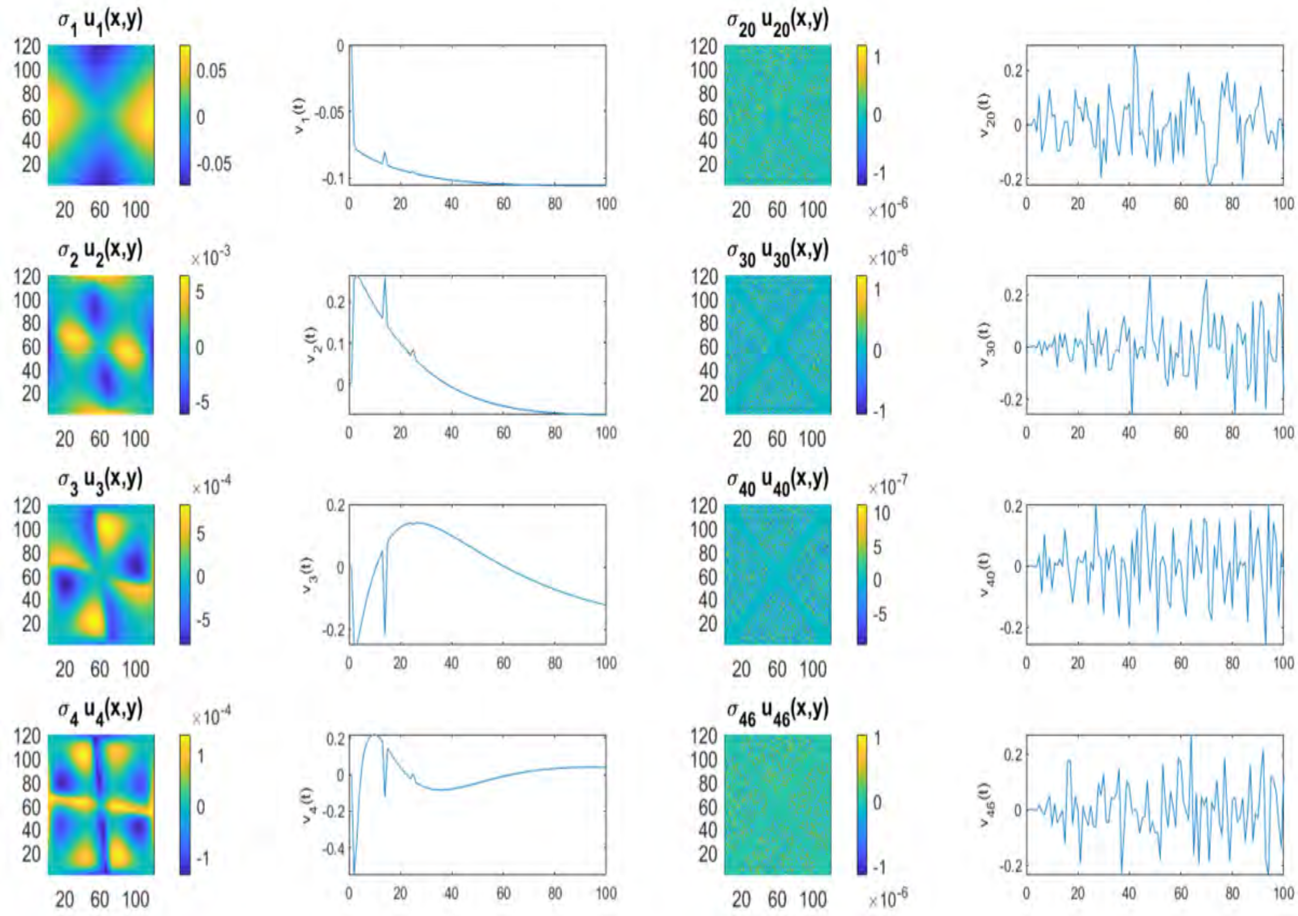


Fig. 5.3: Topos y Cronos de la variable ϕ

De manera general, se puede apreciar que hay consistencia entre lo que pasa espacialmente y lo que pasa temporalmente, ya que a medida que se va aumentando el modo se va aumentando el número de oscilaciones para esa determinada escala (hay que recordar que seguirá habiendo oscilaciones, pero no son fáciles de percibir a simple vista porque la escala no lo permite).

Aunque las escalas pequeñas contienen muy poca energía, con el método SVD es posible estudiar las propiedades de lo que está contenido en estas escalas. En general se puede hacer una reconstrucción de la estructura hasta el modo k dada la ecuación 4.9. Al restarlo de la matriz completa se filtran las escalas grandes y queda el “error” en la reconstrucción que contiene la información contenida en las escalas pequeñas.

Para extraer esta información se puede obtener una función de distribución de probabilidad (FDP) que nos dé la importancia relativa de las distintas intensidades de ϕ en la gráfica de Topos. Esto se hace contando los píxeles de cada valor de ϕ y haciendo un histograma, lo que da la FDP.

Para cada tiempo se obtiene una FDP con un ancho específico dado por la desviación estándar σ_T. Se puede ver que las FDP muestran una propiedad similar cuando se normalizan con la desviación estándar promedio $< \sigma_T >$. Es decir, se cumple que

$$P_T(r) =< \sigma_T > F\left(\frac{r}{< \sigma_T >}\right) \tag{5.1}$$

donde $F(x)$ es una función de autosimilaridad única. La autosimilaridad se hace para que todas las funciones tengan un aspecto similar, más no igual, y así poder distinguir fácilmente las diferencias.

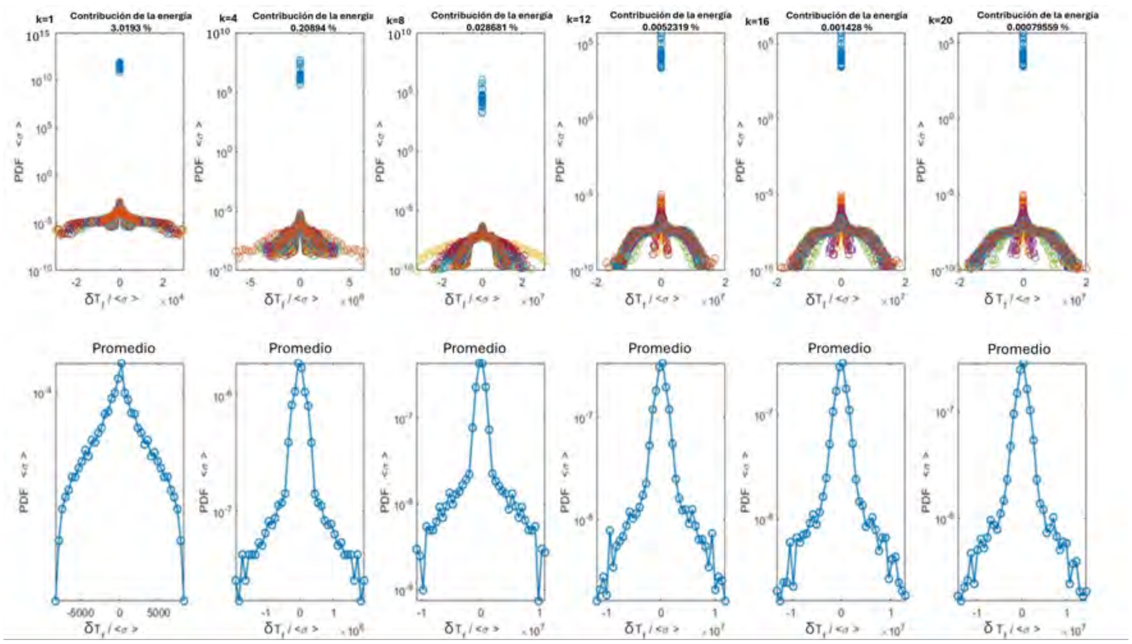


Fig. 5.4: Distribución de la energía para la variable ϕ

Las FDP obtenidas con este proceso para distintos contenidos energéticos se muestran en el gráfico de la figura 5.4 . En la parte superior se tienen las FDP normalizadas para cada tiempo para el respectivo modo, donde los colores representan un tiempo diferente, el eje horizontal indica la fluctuación y el vertical la frecuencia con que aparece. A pesar de que se comportan casi de forma parecida (autosimilaridad), existen discrepancias entre ellas, por lo que se toma el promedio de todos los tiempos para obtener una FDP que permite caracterizar más directamente la FDP para cada modo. El hacer las promediadas hace que se pierda información temporal; sin embargo, esta pérdida es ignorada ya que lo que importa para las FDP es la información espacial. Éstas FDP promediadas se presentan en el renglón inferior.

En cada gráfica, la reconstrucción se hace hasta un valor dado k y el error correspondiente se expresa con el contenido energético restante $(1 - E(k)/E)$ que se encuentra en las escalas representadas por la FDP. Se puede observar que la forma de la FDP cambia con el contenido energético, pero para un determinado valor de k ya se mantiene igual, que en este caso es a partir de $k = 12$.

En este tipo de gráficas es muy importante distinguir si se presentan colas largas, donde se considera una cola larga cuando la gráfica no puede ser aproximada en su totalidad por una gaussiana (al ser en escala logarítmica la forma gaussiana se ve como una parábola), i.e., si se tienen rectas largas es considerada cola larga. La existencia de éstas implica que se tienen fluctuaciones grandes. Para procesos totalmente estocásticos, la FDP es gaussiana. Si la figura que se obtiene no es una gaussiana, implica que las fluctuaciones son más frecuentes que las que se tendrían por aleatoriedad, es decir, que hay una intermitencia espacial.

Se puede apreciar que a partir de $k = 4$ la FDP parece ser la superposición de dos funciones: una cuasigaussiana y otra más ancha que forma colas en la gráfica. Esto implica que existen fluctuaciones, pero no tan frecuentes y tampoco tan significativas. Aunque la sección ancha es intermitente, no se aleja tanto de lo que sucede con la zona angosta como será el caso en otras variables.

Ahora bien, en la figura 5.4 se vieron las FDP hasta una $k = 20$, los cuales son los modos principales; sin embargo, es importante ver qué sucede con los modos menos importantes i.e., los $k > 20$.

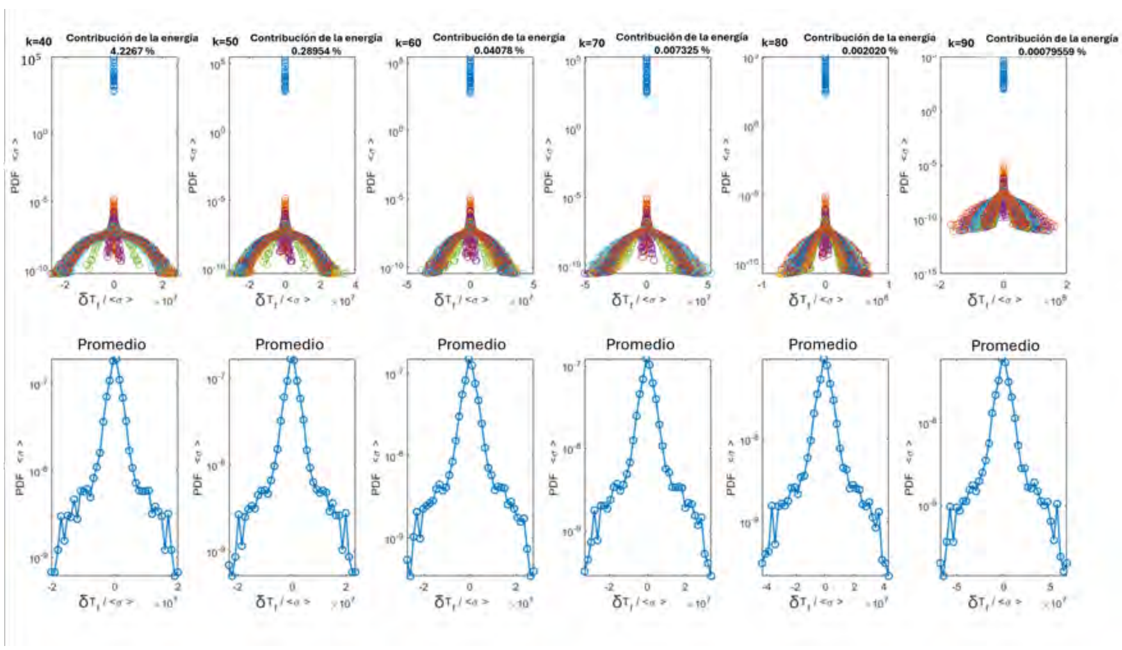


Fig. 5.5: Distribución de la energía para la variable ϕ para valores de k mayores a 20

En la figura 5.5 ve claramente que el comportamiento bimodal que había iniciado en $k = 4$ de la figura 5.4 se mantiene.

5.1.2. Resultados para el potencial de campo magnético ψ

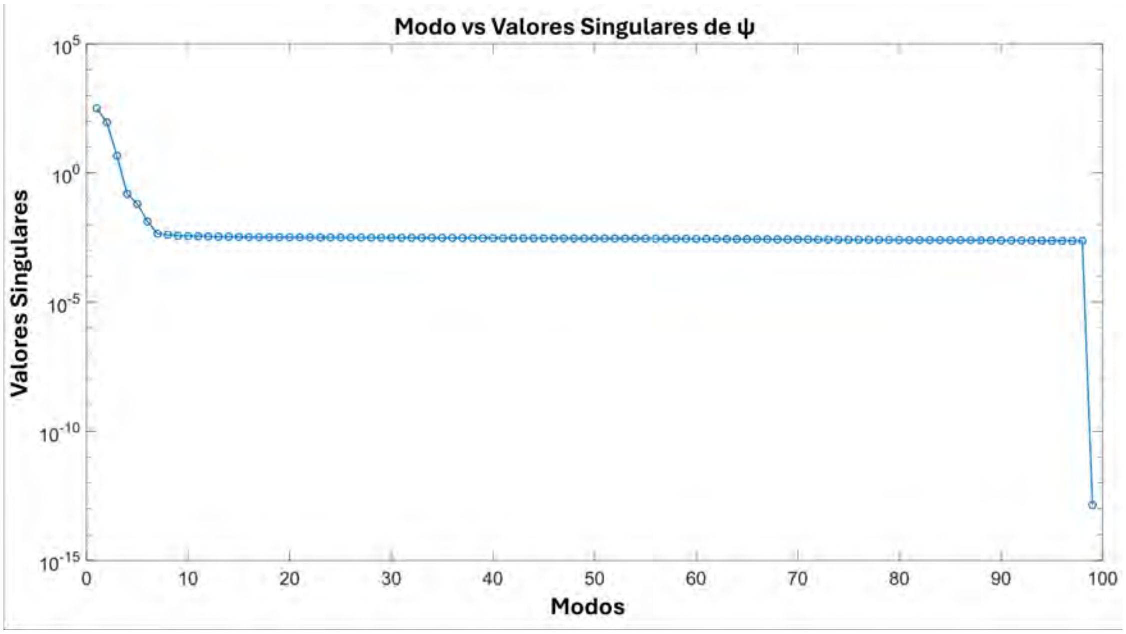


Fig. 5.6: Gráfica de los valores propios de ψ vs el rango

Para el potencial ψ se hizo el mismo análisis que para ϕ. En la figura 5.6 se muestra el espectro de valores singulares. A diferencia de lo que pasa en ϕ, la caída se estabiliza en un valor de tiempo menor, la cual llega a valores cercanos a 10^{-2}. Es debido a esta pronta caída que tiene una mayor coherencia que ϕ. De lo anterior se puede esperar que en los siguientes gráficos se notará que son todavía menos los valores que contribuyen a la mayor cantidad de "energía". Esto se puede ver en la figura 5.6 que muestra la energía acumulada en función del rango k del modo.

En este caso, se ve en la figura 5.7 que la contribución del primer modo es menor que la del primer modo de ϕ; sin embargo, esto se va a compensar con la menor cantidad de modos para llegar al 100 %.

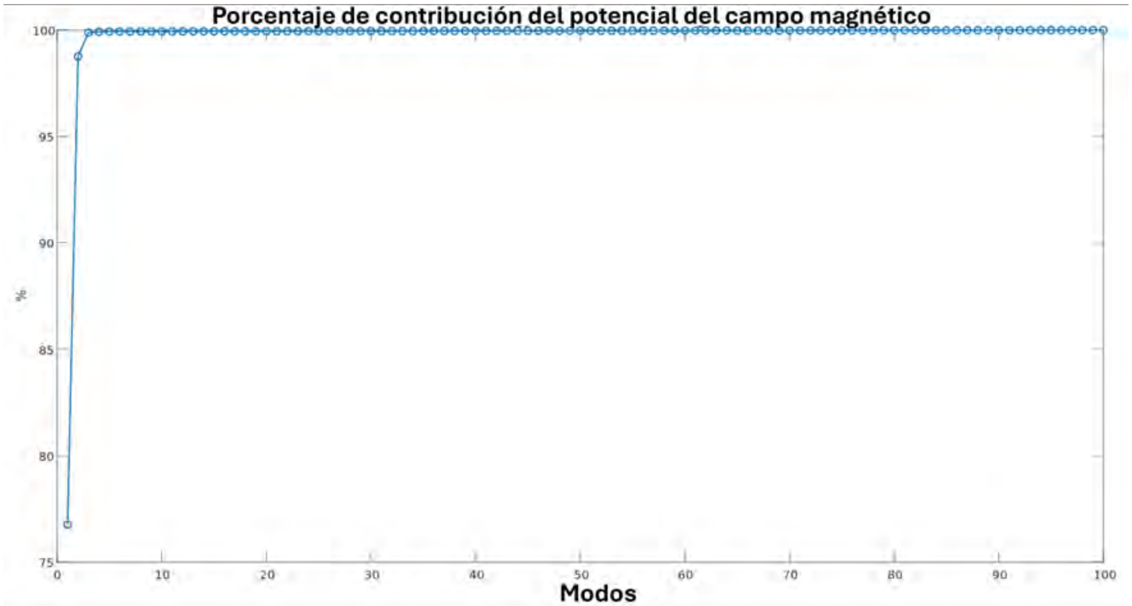


Fig. 5.7: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la variable ψ

En la figura 5.8 se presentan los gráficos Topos y Cronos para algunos modos. Puede observarse que en el tercer modo, de los gráficos espaciales, la mayor parte del campo magnético está en el centro, que es justo el lugar donde se da la reconexión. Para $k = 4$ se puede ver que el campo magnético se intensifica en la zona alrededor de la reconexión y, debido a esto, se va a acelerar el plasma generando así los jets del plasma. De igual manera que en los otros dos gráficos ya mencionados, son los primeros modos los que muestran principalmente el cómo se forma la estructura geométrica, pues en los Topos de la columna de la derecha ya no es clara.

Para el caso de la parte Cronos, se tiene que el primer modo aumenta su valor conforme pasa el tiempo, cosa que no sucede con el segundo. A partir del cuarto modo ya se tiene una oscilación y, a medida que se sigue aumentando de modo, se van encontrando una mayor cantidad de oscilaciones, lo que refleja que representan escalas temporales más pequeñas.

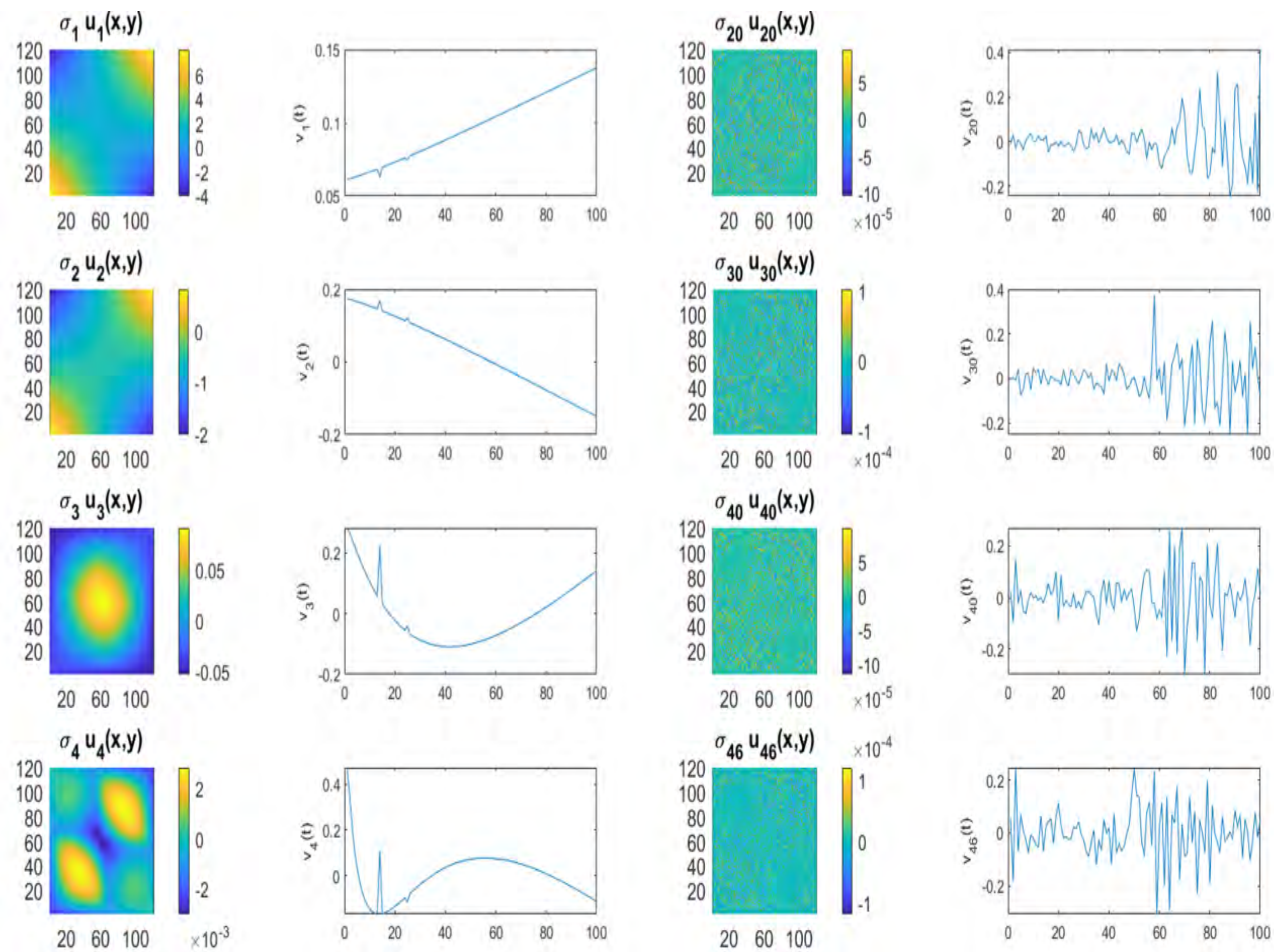


Fig. 5.8: Topos y Cronos de la variable ψ para k=1,2,3,4,20,30,40,46

Las FDP para este caso se muestran en la figura 5.9. En este caso, para $k = 1$ todavía se tiene una gran cantidad de energía por lo que se mezcla la contribución de muchos modos importantes y por ello no se observa la autosimilaridad respecto a los otros. En k=4 solo se aporta el 6.52 % por lo que las DFP ya muestran autosimilaridad y en la gráfica promediada se tiene algo muy parecido a una gaussiana. A partir de $k = 8$ se tiene un efecto combinado, donde una parte es gaussiana o cuasi-gaussiana y la otra es de colas largas. La sección angosta no es intermitente, a diferencia de la otra zona.

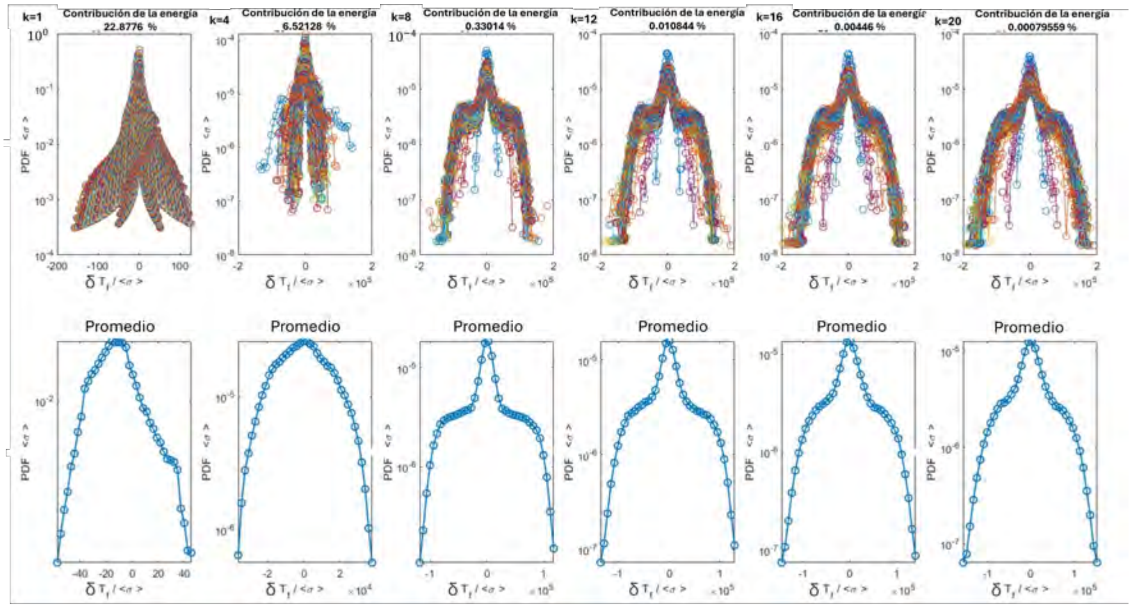


Fig. 5.9: Distribución de la energía para la variable ψ

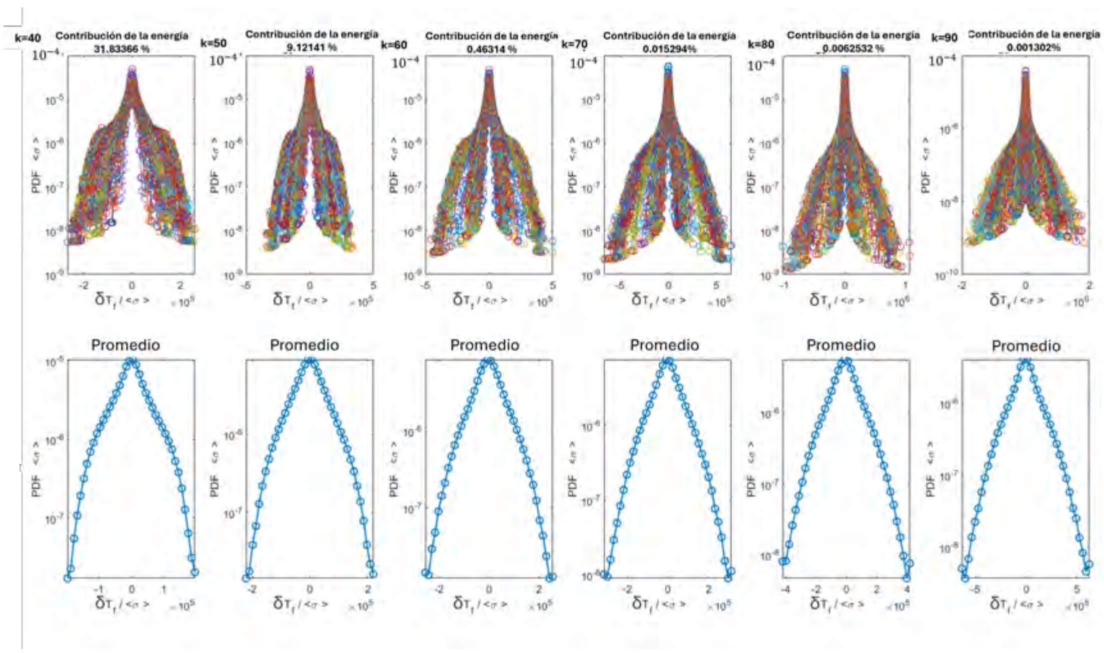


Fig. 5.10: Distribución de la energía para la variable ψ para valores de k mayores a 20

En la figura 5.10 se puede notar que el comportamiento de las FDP cambia para los modos mayores, dejando de ser bimodal, pero sin volverse gaussiano (pues no adquiere una forma parabólica, sino más bien de líneas rectas). Al no ser gaussianas, se puede deducir que existe intermitencia en los modos altos.

5.1.3. Resultados para la densidad.

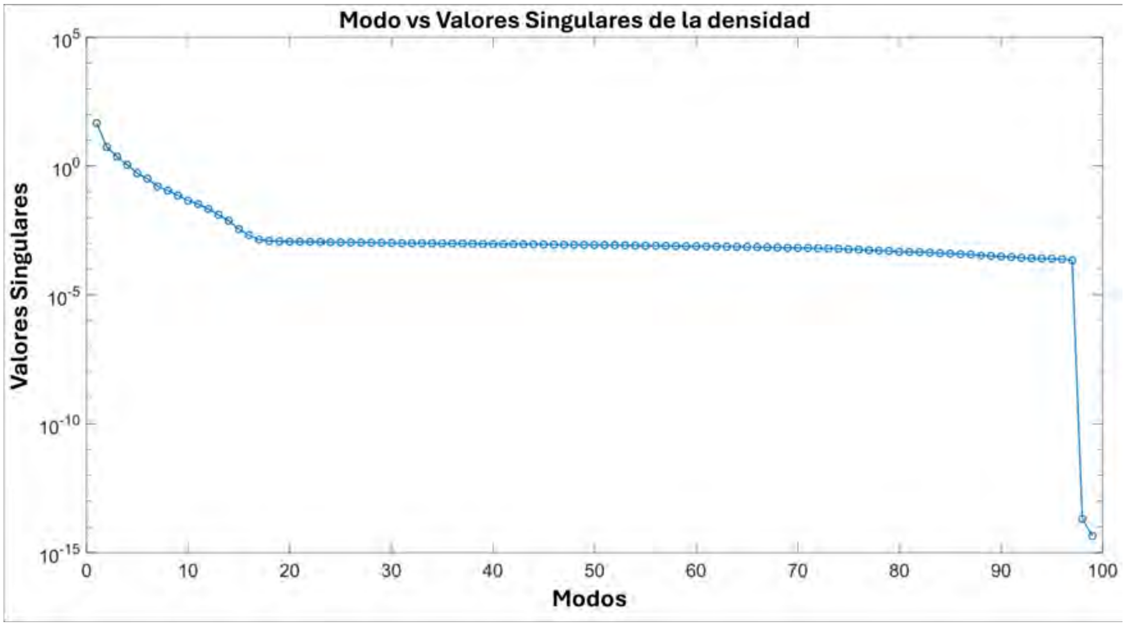


Fig. 5.11: Gráfica de los valores propios de la densidad vs el rango

Para la densidad se hizo el mismo análisis. En la figura 5.11, se tiene una caída mucho más lenta, pues es hasta el modo 18 que tiene una pendiente menos pronunciada. Por lo anterior, se puede decir que para la densidad no se puede hablar de una alta coherencia.

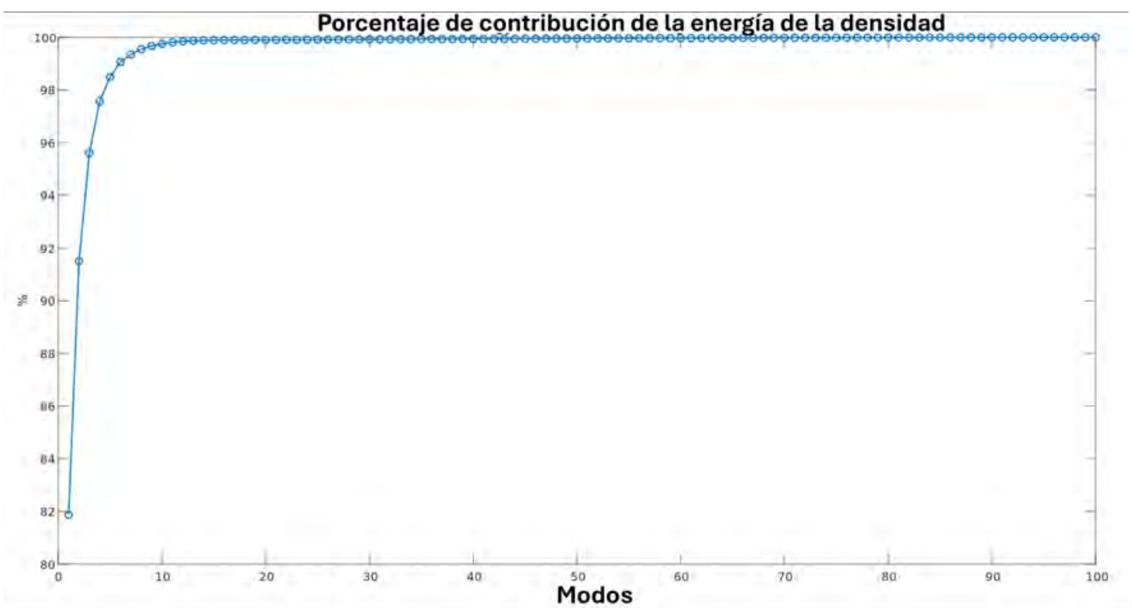


Fig. 5.12: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la densidad

El comportamiento que se describió en la figura 5.11 se puede verificar con el de la figura

5.12, pues se requiere de más modos que en las otras dos variables para llegar a casi el 100 % de la “energía”.

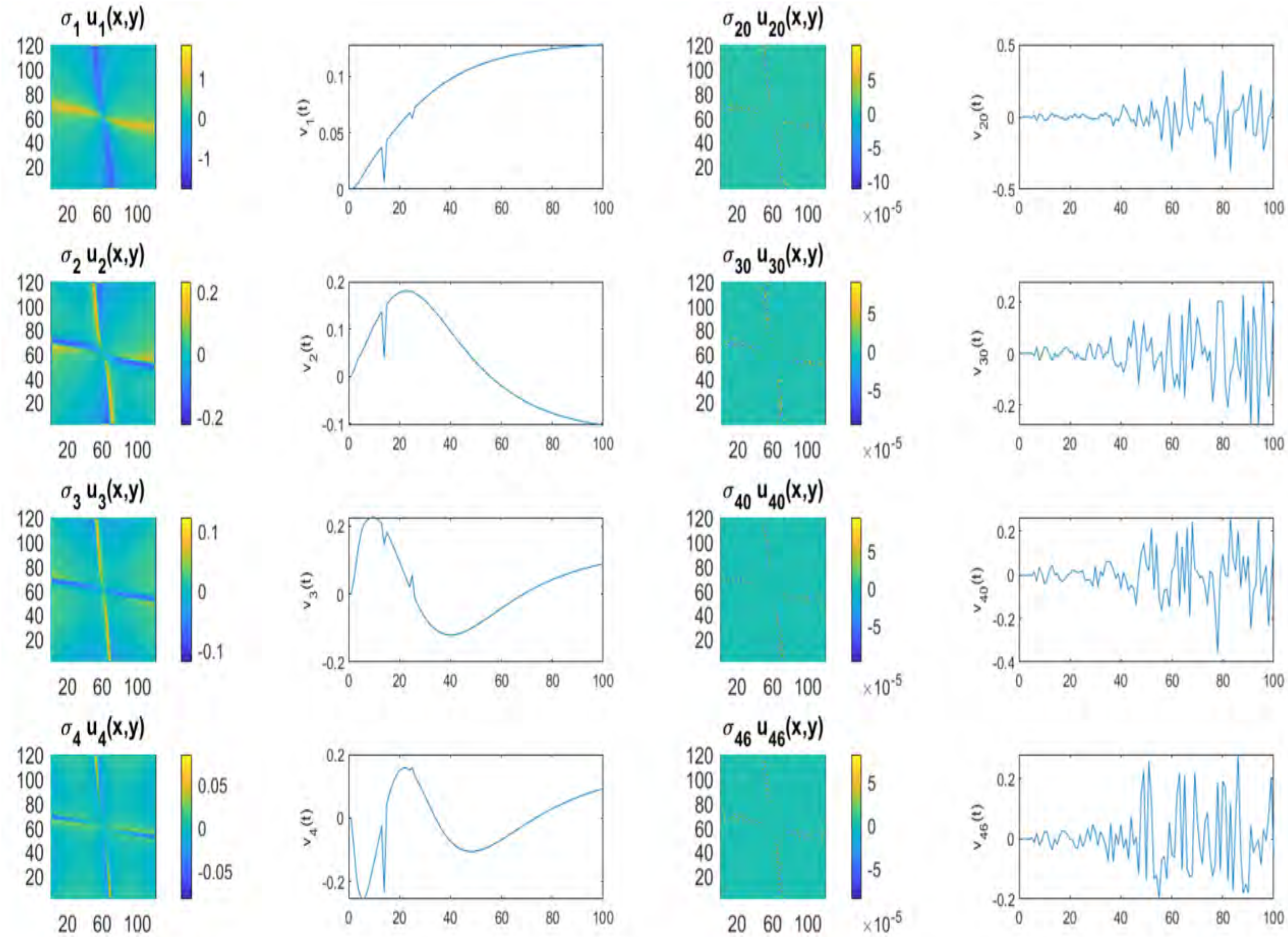


Fig. 5.13: Topos y Cronos de la densidad

Se puede notar en la figura 5.13 que en los Topos de la densidad el patrón que se forma queda bien definido sin importar en qué modo se encuentre, solo con la diferencia de la magnitud de la “energía”. En la parte de Cronos se ve reflejado lo mismo que sucede con la velocidad y el campo magnético; a medida que se avanza en el modo, van surgiendo más oscilaciones.

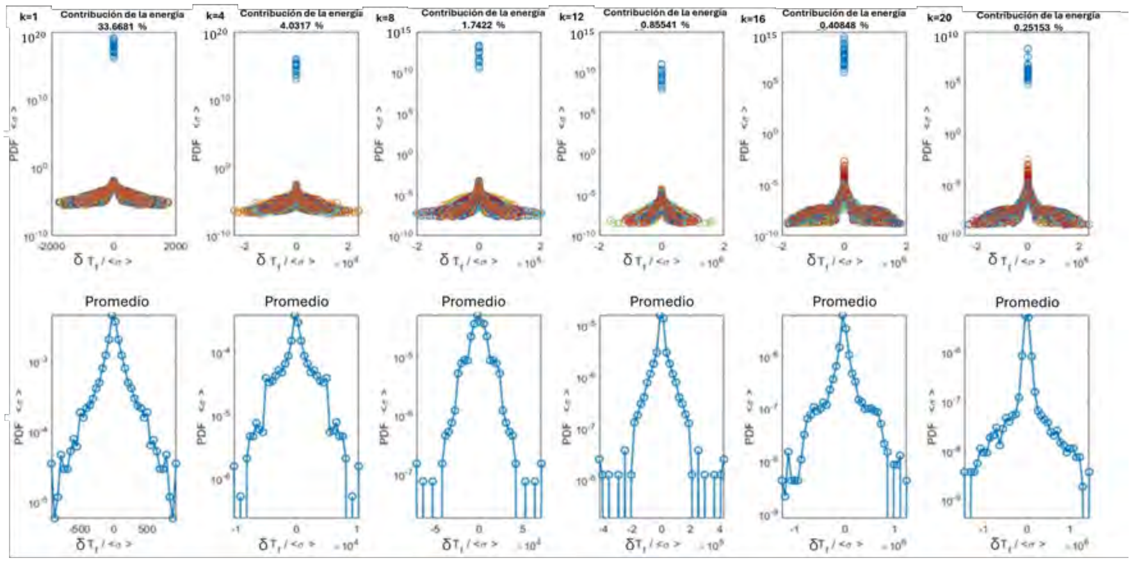


Fig. 5.14: Distribución de la energía para la densidad

En este caso, como se puede observar en los FDP de la figura 5.14, a pesar de que se cuenta con colas, no son de gran tamaño como lo son en la figura 5.9. Dada la existencia de las colas, se puede afirmar que hay intermitencia espacial. Muy diferente a lo que se ha visto en las otras gráficas de este tipo, aquí no se ve claramente que se adopte una forma después de determinado k, pues las 5 gráficas presentan grandes diferencias entre ellas, lo cual puede ser debido a las escalas en que se están graficando.

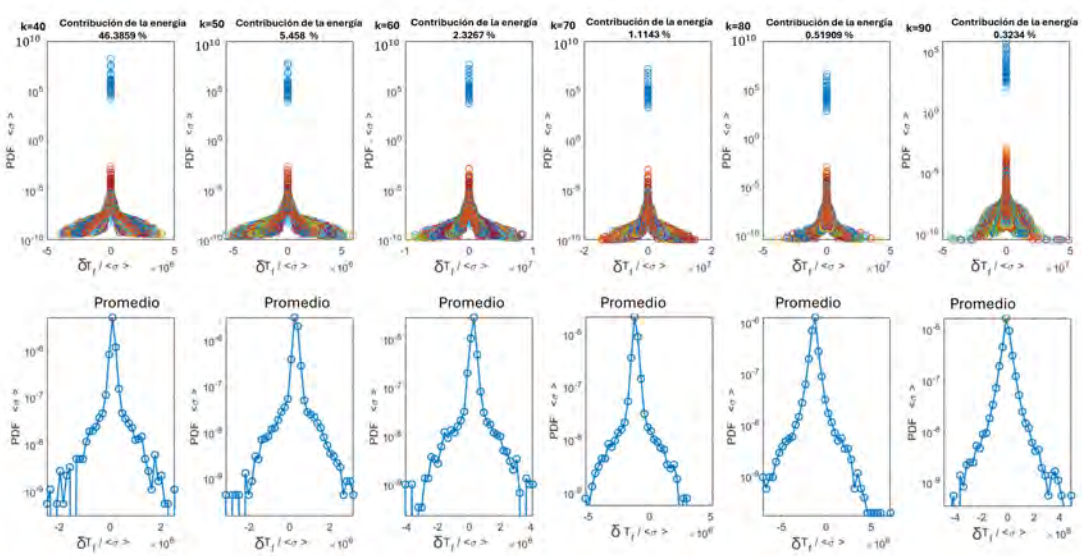


Fig. 5.15: Distribución de la energía para la densidad para valores de $k = 40, 50, 60, 70, 80, 90$

A pesar de que el comportamiento de colas largas se va manteniendo a modos de mayor rango según la figura 5.15, el tamaño de las colas se va acortando según se aumenta de modo. En $k = 90$ se aprecia que el comportamiento se empieza a volver más gaussiano. Esto puede ser debido a que los últimos modos no contribuyen demasiada ”energía”, por lo que las fluctuaciones se deben a procesos aleatorios.

5.1.4. Resultados para la densidad de corriente.

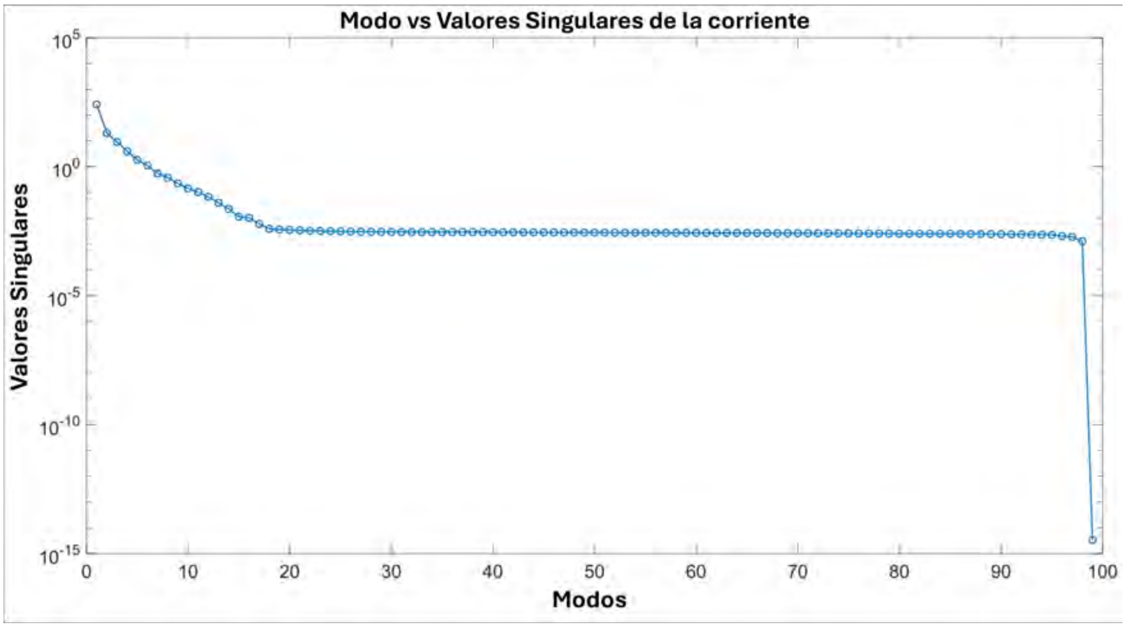


Fig. 5.16: Gráfica de los valores propios de la corriente vs el rango

Se realizó el mismo análisis con la corriente. Como se puede ver en la figura 5.16 nuevamente se cuenta con una caída lenta; es hasta $k = 18$ donde se estabiliza en valores cercanos a 10^{-3}, por lo que no se cuenta con una coherencia tan alta. Al igual que sucede con la densidad y con el potencial de velocidad ϕ, serán varios los valores que contribuyan a la “energía”.

Como ya se mencionó y como se puede ver en la figura 5.17 son más los valores que contribuyen, por lo que se tarda más que ψ en llegar al 100 %.

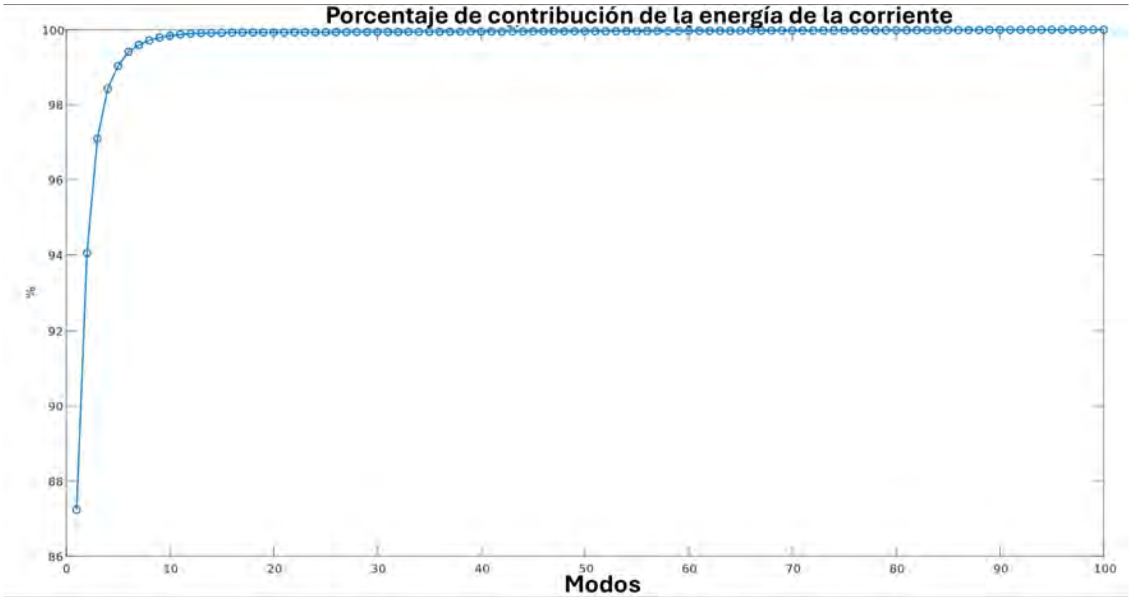


Fig. 5.17: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la corriente

Lo que se ve en los Topos de la figura 5.18 sustenta lo que se ha dicho sobre la corriente. El primer modo es el que más ″ energía ″ contribuye y justo esto sucede en el punto de reconexión. Parecido a lo que pasa con la densidad, la corriente sigue dejando un patrón que dura al menos hasta los primeros 4 modos, aunque hay ligeros cambios en la forma. Sin embargo, es hasta $k = 20$ que se cambia totalmente la forma e incluso sucede que la "energía" se va concentrando en el centro, y conforme se va avanzando de modo se va esparciendo a lo largo del espacio formando oscilaciones; esto se debe a que la corriente más intensa se encuentra en las escalas grandes, pero a escalas pequeñas la corriente se va dispersando.

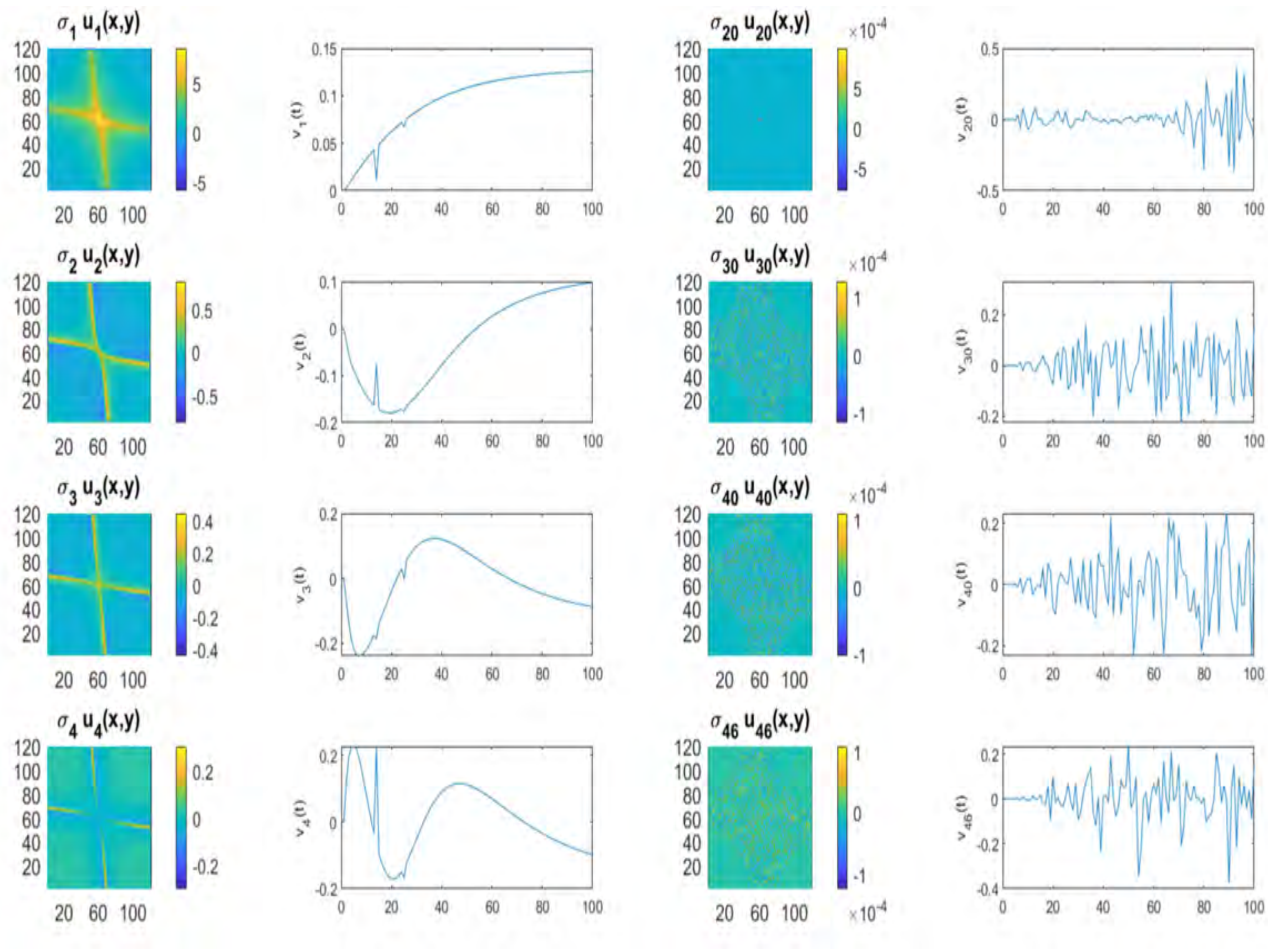


Fig. 5.18: Topos y Cronos de la corriente

Como se puede apreciar en los FDP de la figura 5.19 no se cuenta realmente con colas sino hasta $k = 12$, siendo así que la intermitencia aparece hasta los últimos modos principales. A diferencia de las otras variables, no es visible la doble función y es en los primeros modos donde predomina más una forma que se intenta asemejar a una gaussiana.

En la figura 5.20 se puede apreciar que el comportamiento bimodal que surgió en los modos finales de la figura 5.19 se mantiene, pero cada vez más débil, pues se empieza a formar más una gaussiana.

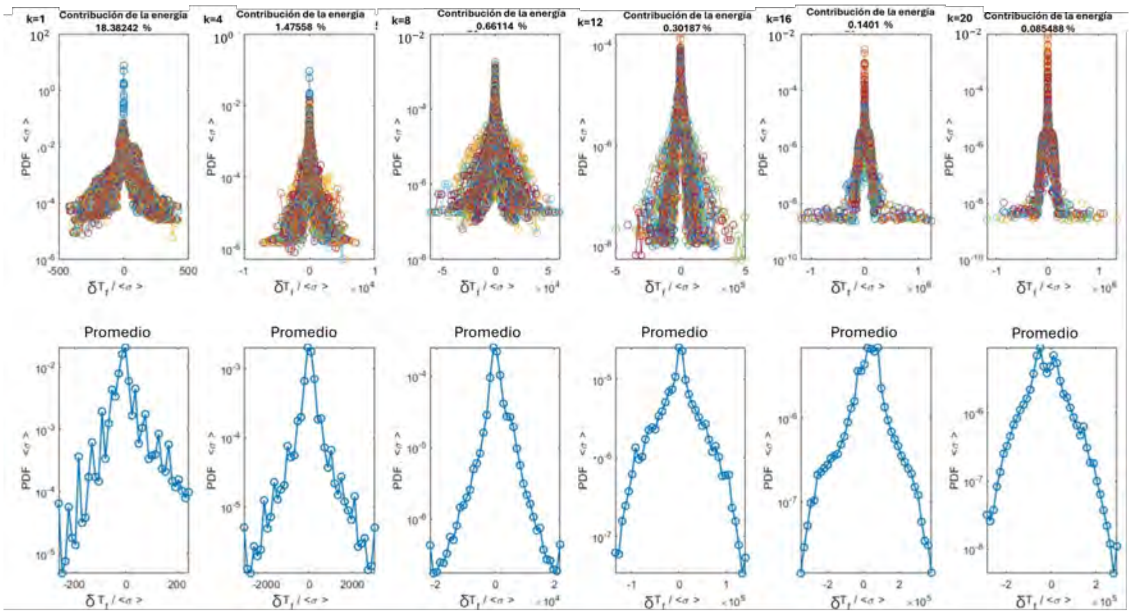


Fig. 5.19: Distribución de la energía para la corriente

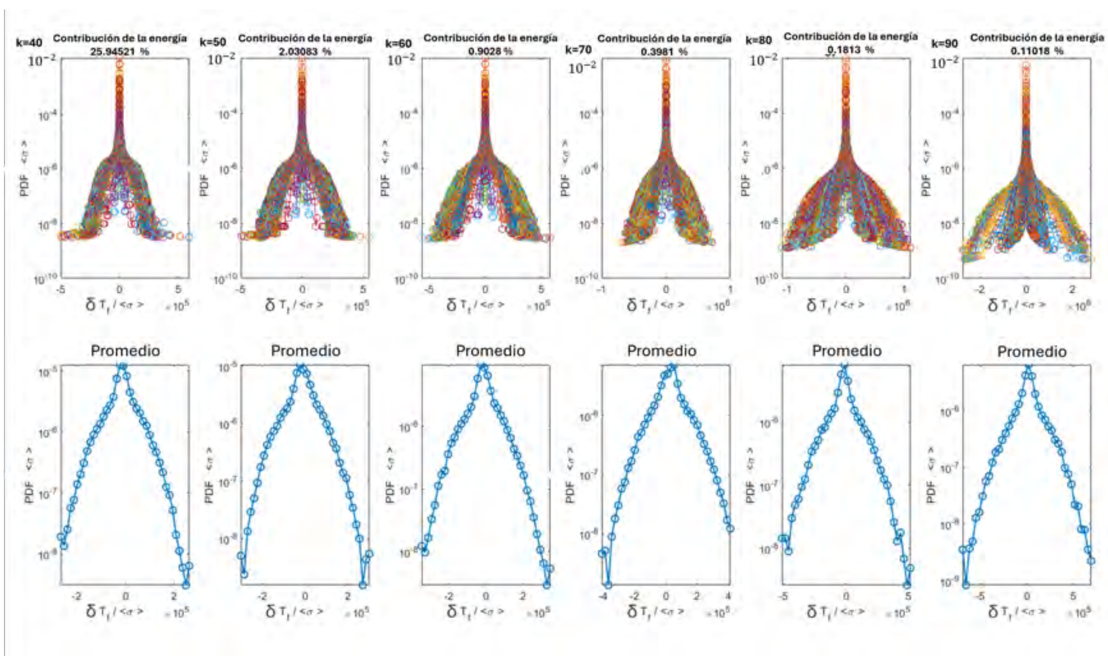


Fig. 5.20: Distribución de la energía para la corriente para valores de k mayores a 20

5.1.5. Resultados para la vorticidad.

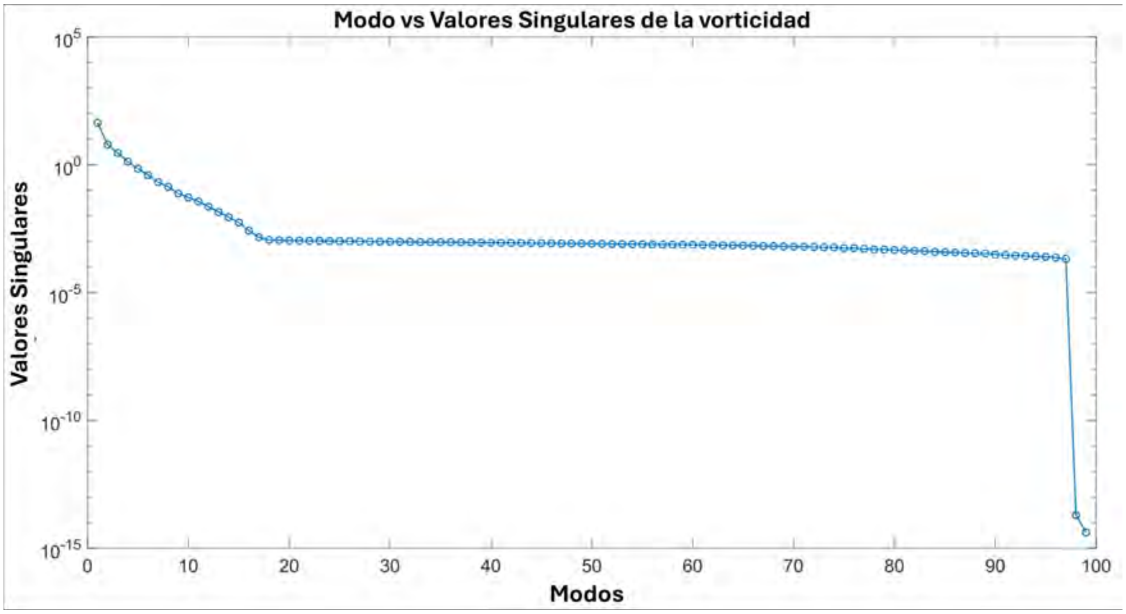


Fig. 5.21: Gráfica de los valores propios de la vorticidad vs el rango

Como la vorticidad está relacionada con la densidad, no es de sorprender que los resultados que se obtienen tras realizar el análisis sean similares. Viendo la figura 5.21, nuevamente se cuenta con que es en $k = 18$ donde se estabiliza en un valor que tiende a 10^{-4}.

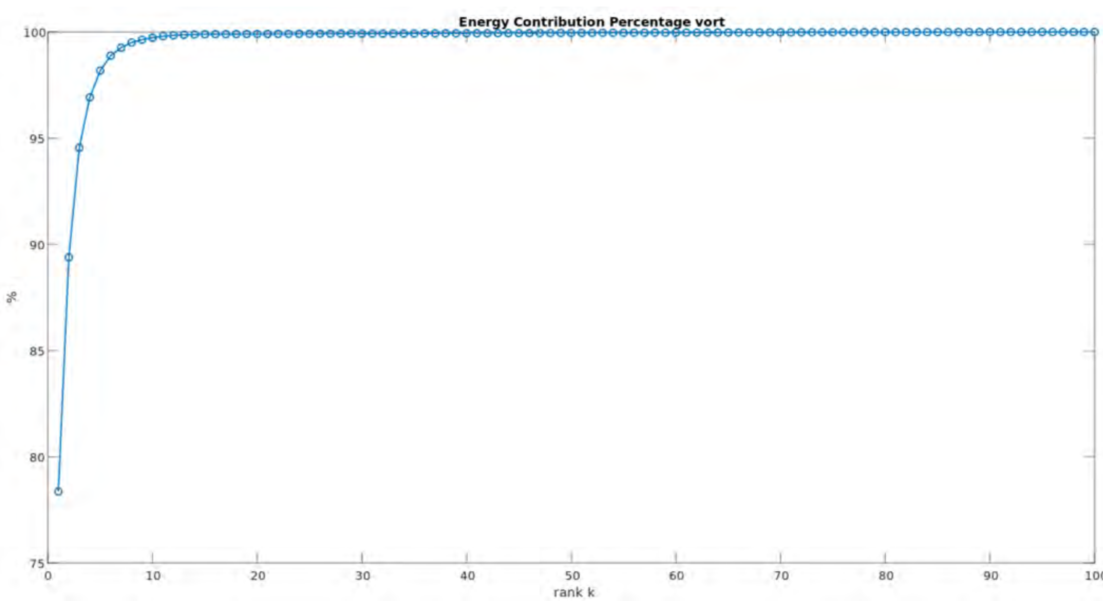


Fig. 5.22: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la vorticidad

La figura 5.22 sustenta lo que se vio en la figura 5.21, son los primeros modos los que más “energía” aportan.

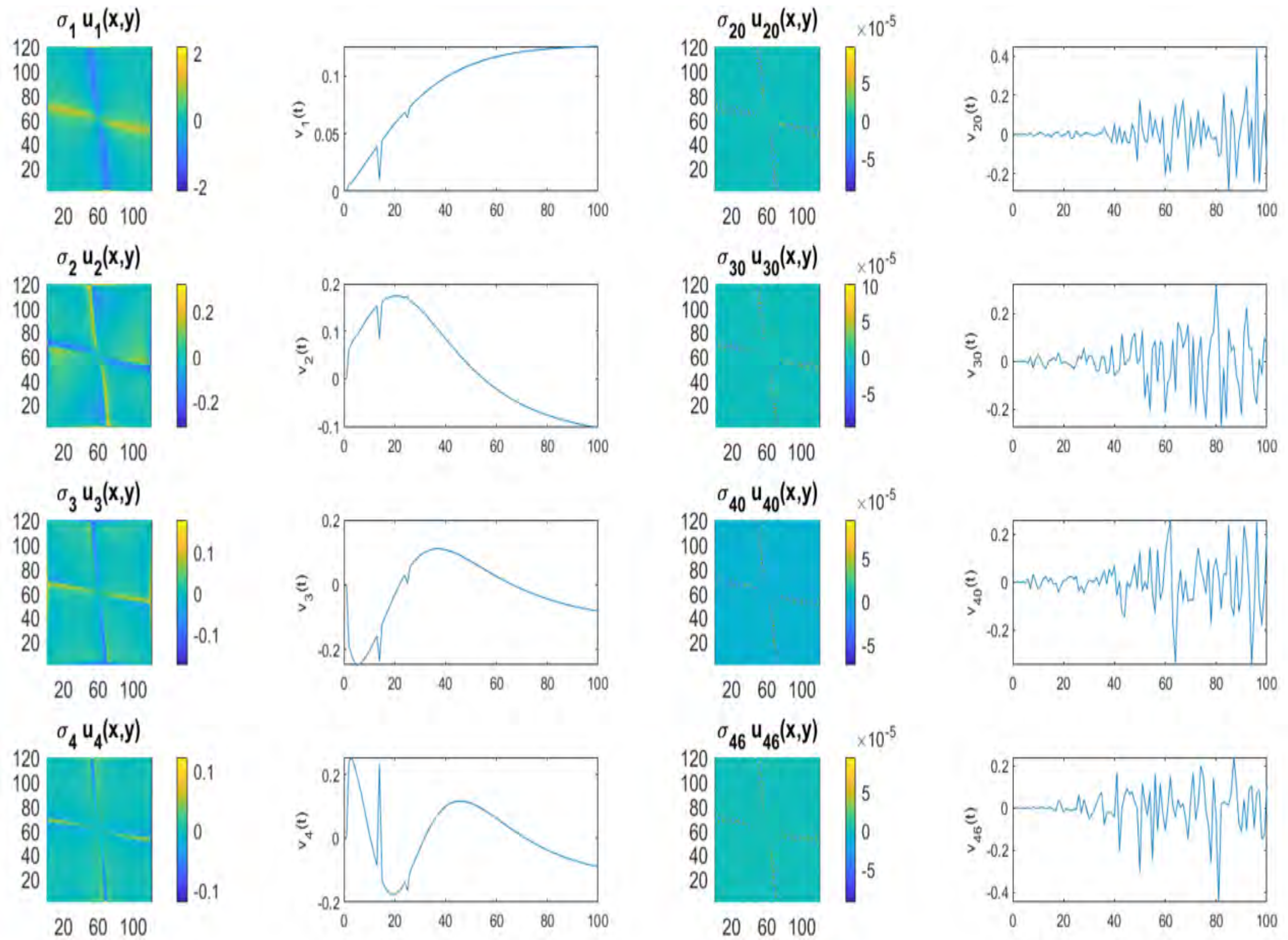


Fig. 5.23: Topos y Cronos de la vorticidad

En la figura 5.23 se puede notar que el Topos de la vorticidad es casi igual que el de la densidad, con la única diferencia de que las magnitudes tienden a ser mayores en la vorticidad. En la parte de Cronos, si bien son similares, se puede notar que los modos 3 y 4 están invertidos respecto a los mismos de la densidad. Que se encuentren invertidos se puede deber a que el ciclo se capturó en distintas fases; aun así, lo que realmente importa es que se dé un ciclo o que llegue a ser uno.

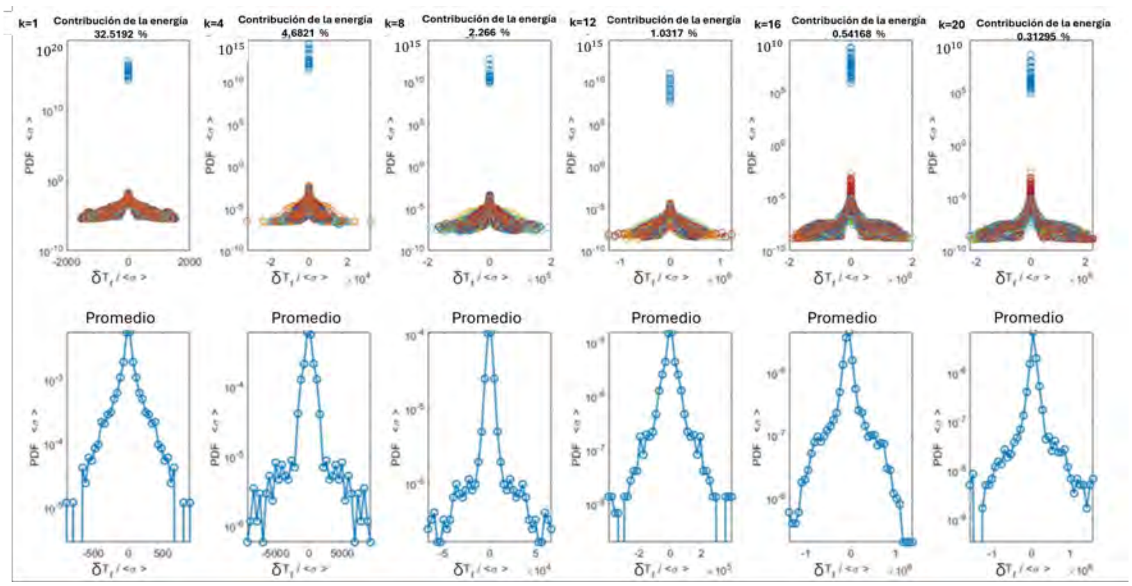


Fig. 5.24: Distribución de la energía para la vorticidad

Es en la figura 5.24 donde se nota la diferencia entre variables, pues se puede ver que la vorticidad tiene menos cola que la densidad, lo que se traduce en una baja o nula intermitencia espacial. Sin embargo, el comportamiento de doble función que ha regido en casi todas las variables se sigue haciendo presente. La falta de simetría en las gráficas de $k = 16$ y $k = 20$ es ocasionada por fluctuaciones temporales, ya que se está promediando en el tiempo y no todos los tiempos son iguales.

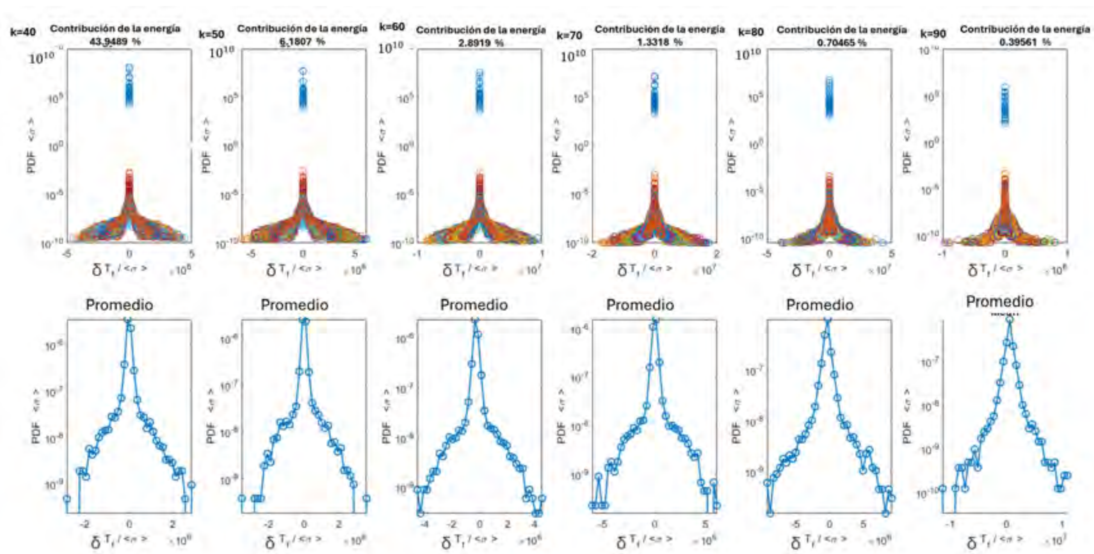


Fig. 5.25: Distribución de la energía para la vorticidad para valores de k mayores a 20

Gracias a la figura 5.25 se ve que el comportamiento es similar al de la densidad, pues la forma bimodal se mantiene, solo que las colas poco a poco se van acortando. Sin embargo, en el último modo se observa que la forma bimodal desaparece, pero tampoco se vuelve gaussiana, pues se trata de líneas rectas, dando a entender así la existencia de intermitencia en los modos altos.

Como se pudo notar, la mayoría de las variables tienen un comportamiento similar cuando se aplica una fuerza continua: ya sea de baja coherencia y con intermitencia. Es la variable ψ la que se comporta totalmente diferente, siendo la variable con la coherencia y la intermitencia más altas.

5.2. Forzado pulsado

Es importante mencionar que, a diferencia del caso con forzado continuo, no se va a contar con 100 modos, sino que más bien habrá un total de 50. Esto, pues al ser pulsado, la interacción no dura todo el tiempo, por lo que solo importan los momentos que le siguen instantáneamente a la reconexión.

Que se trate de 50 modos se verá reflejado en los gráficos, pues la escala de estos será diferente a la de 100.

5.2.1. Resultados para el potencial de velocidad ϕ

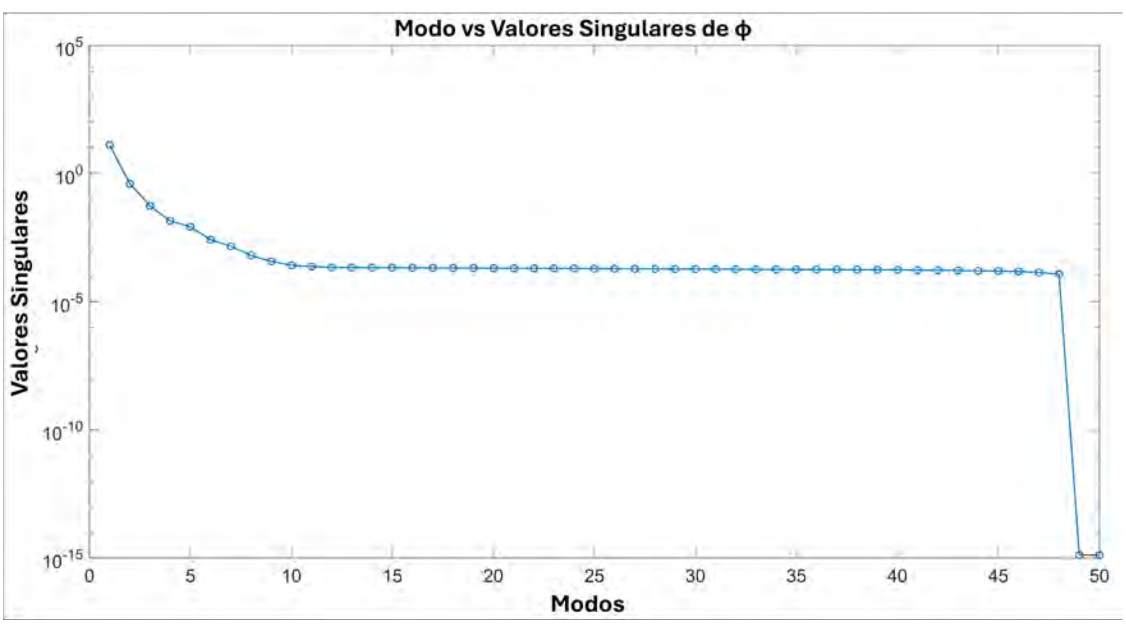


Fig. 5.26: Gráfica de los valores propios de ϕ vs el rango

Al igual que en el caso continuo, se puede ver que en la figura 5.26 el potencial de velocidad tiene una caída pronunciada hasta el décimo modo, en donde se empieza a estabilizar en un valor entre 10^{-3} y 10^{-4}. Siendo así un valor mayor al caso continuo, pero el cambio sigue siendo de 5 órdenes de magnitud.

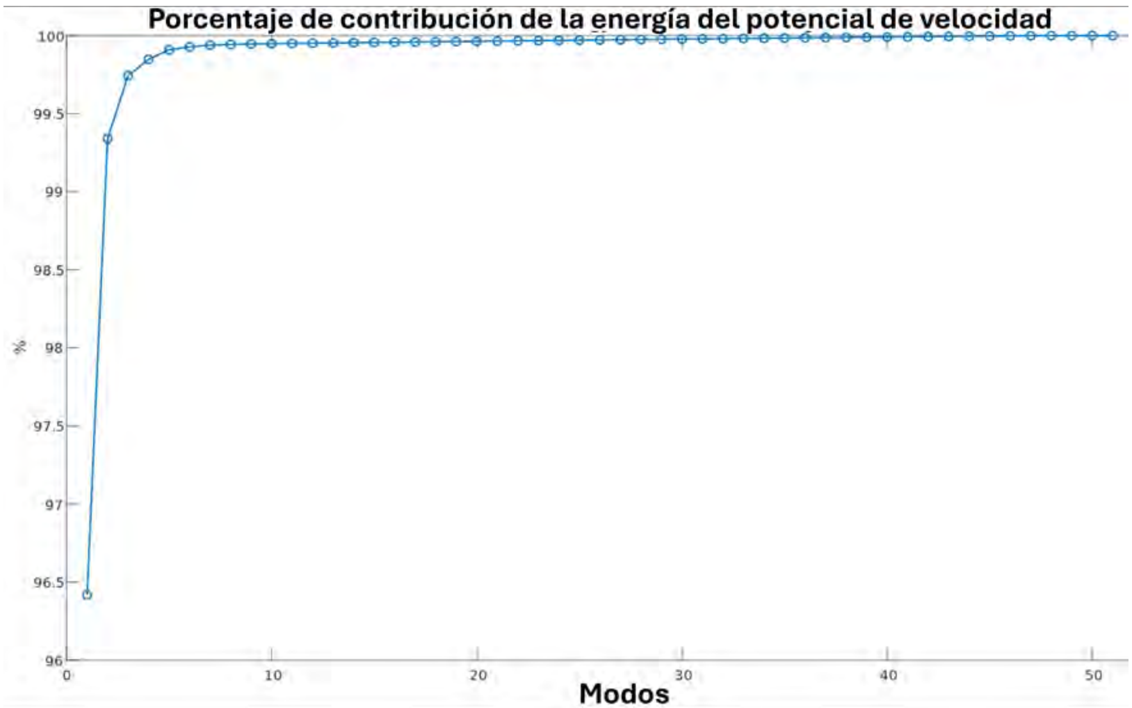


Fig. 5.27: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la variable ϕ

La figura 5.27 confirma lo visto en la figura 5.26, son los primeros 10 modos los que aportan la mayor “energía”. Sin embargo, comparándolo con el caso continuo, se puede apreciar que el primer modo del caso pulsado aporta 96.5 % de “energía”, mientras que el del caso continuo aporta 92 %. Aunque, igual que en el caso continuo, los valores quedan prácticamente sobre la línea del 100 % a partir de $k = 50$.

Respecto a la figura 5.28, en la parte de Topos se observa que el patrón que se forma va cambiando según se avanza de modo y es hasta $k = 20$ que la forma se empieza a preservar, pero con la aparición de las fluctuaciones. Los dos primeros modos son los que reproducen la estructura del flujo del plasma.

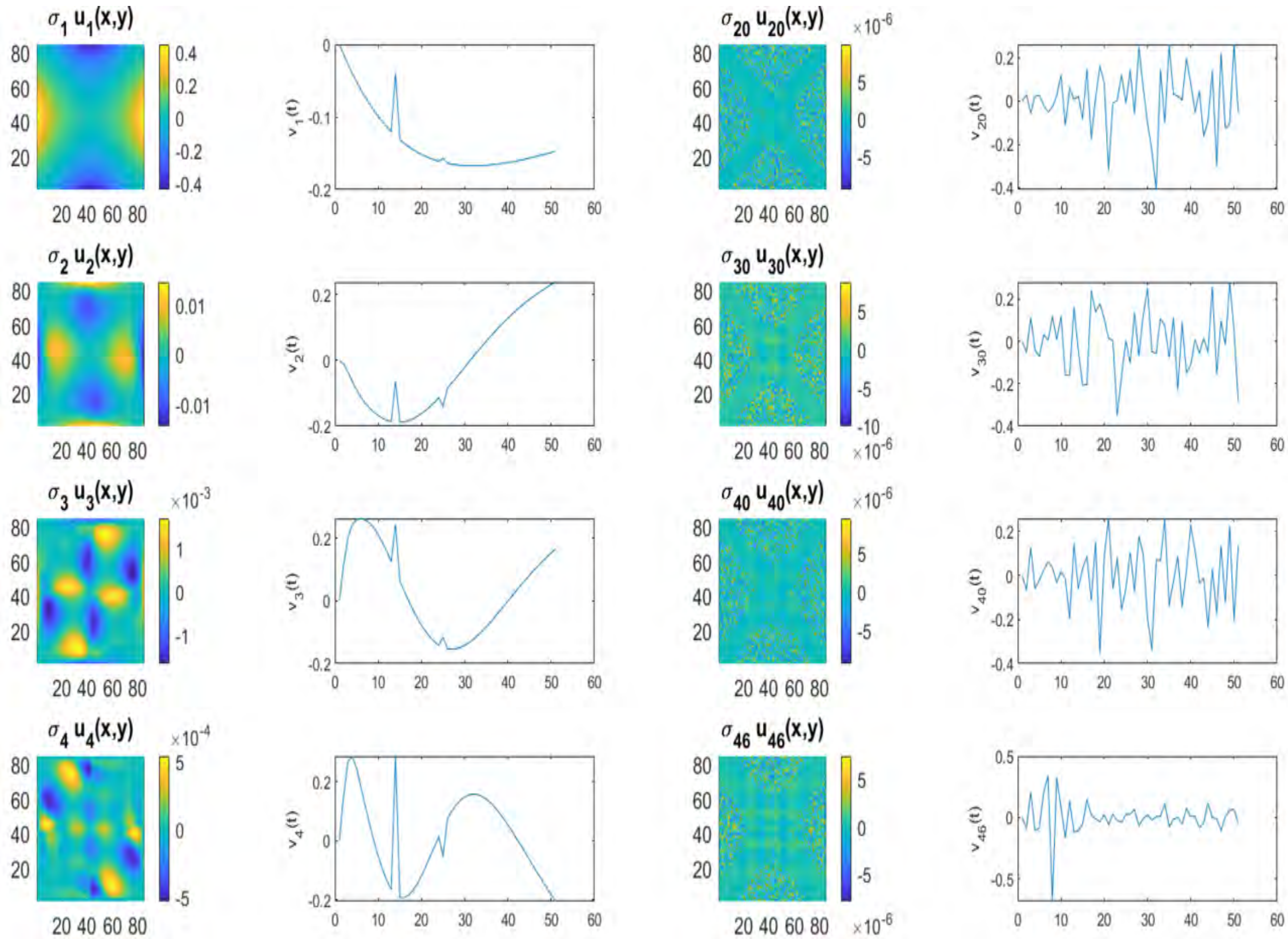


Fig. 5.28: Topos y Cronos de la variable ϕ

En cuestión del Cronos, conforme se va avanzando de modo van apareciendo más oscilaciones. En $k = 46$ se puede notar una oscilación de gran amplitud antes de $k = 10$, aunque a esto no se le puede adjudicar una causa en específico; lo que sí se le puede atribuir una causa es a que las oscilaciones van disminuyendo de amplitud. Esto puede ser resultado de que la interacción debida al pulso está terminando.

En comparación con lo que pasa en el caso continuo, se puede ver que el Topos del pulsado presenta zonas con mayor “energía” sin importar de qué modo se trate; es más, para los modos mayores a 20, se puede ver que en el pulsado la zona con valores de 0 es más amplia.

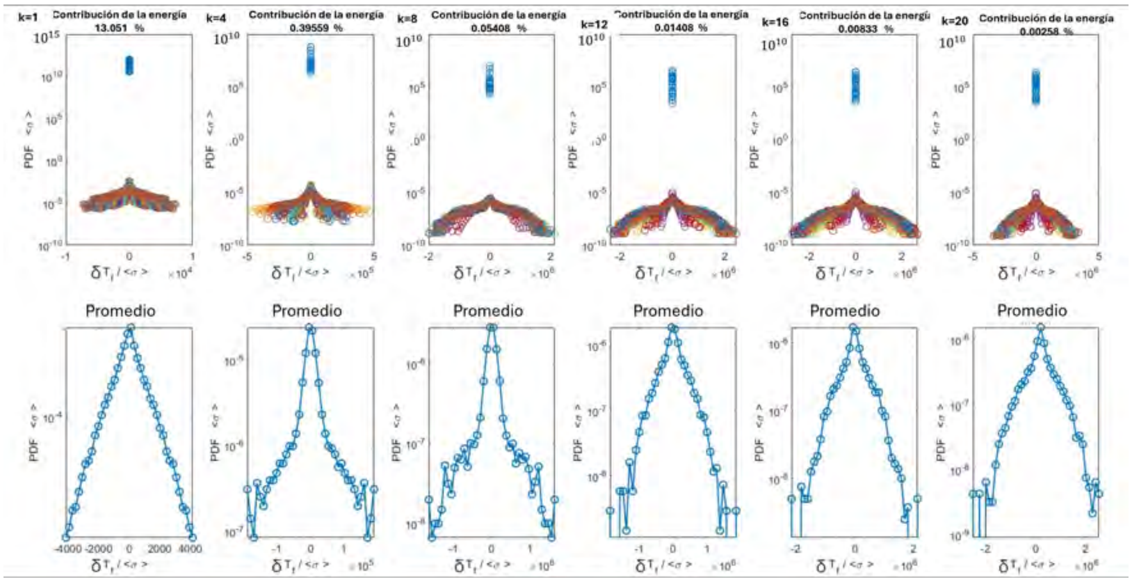


Fig. 5.29: Distribución de la energía para la variable ϕ

Apreciando las FDP en la figura 5.29. En el primer modo, se puede observar que la distribución toma una forma triangular, lo que implica que tiene colas más largas que una gaussiana, la cual tendría forma parabólica en la gráfica semi-log. Esto quiere decir que las fluctuaciones grandes son importantes. La forma de las gráficas va cambiando hasta llegar a $k = 12$ donde se mantiene con la misma. A partir de $k = 4$ vuelve a aparecer la doble función que ha predominado en los demás casos, siendo así que en los modos mayores a 4 se encuentran zonas con alta intermitencia espacial.

Si se compara con el gráfico del caso continuo se puede ver que en $k = 4$ y $k = 8$ se tienen gráficas similares, sin embargo, para el resto de modos es totalmente diferente. En el caso continuo, a partir de $k = 12$ el gráfico tiende a estrecharse desde 10^{-8}, mientras que el pulsado es casi 10^{-6}. De igual manera, se puede corroborar que en el caso pulsado la contribución de "energía" de los primeros modos es mayor que en el continuo.

5.2.2. Resultados para el potencial de campo magnético ψ

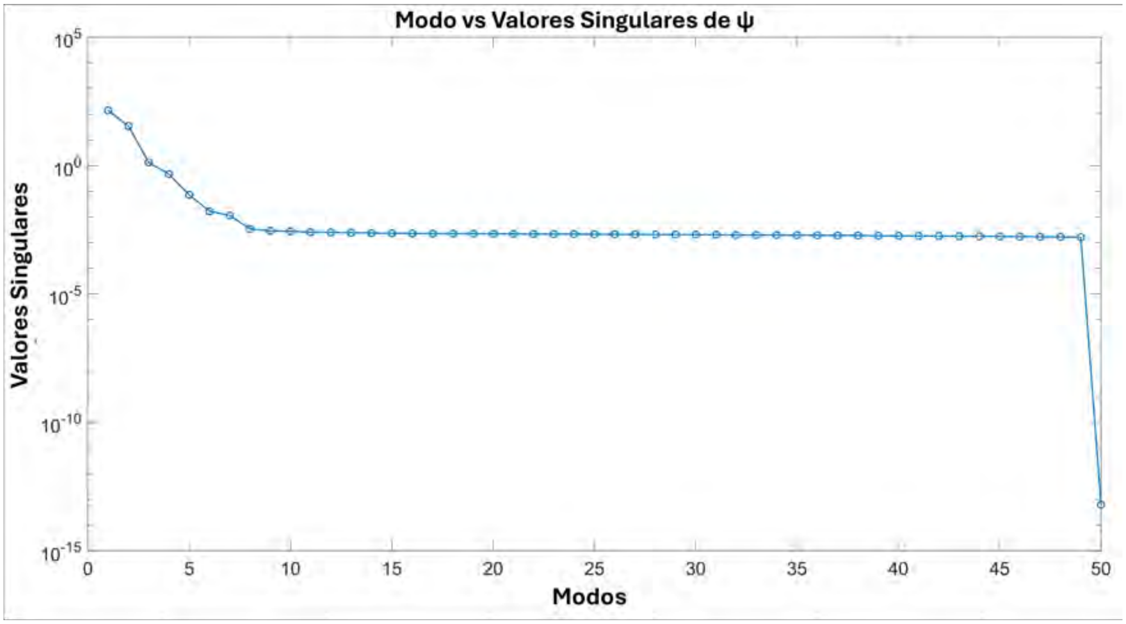


Fig. 5.30: Gráfica de los valores propios de ψ vs el rango

Nuevamente, según la figura 5.30, se tiene en ψ una caída rápida tal que hasta el octavo modo se estabiliza en valores cercanos a 10^{-3}, cosa que igual sucede en el caso continuo.

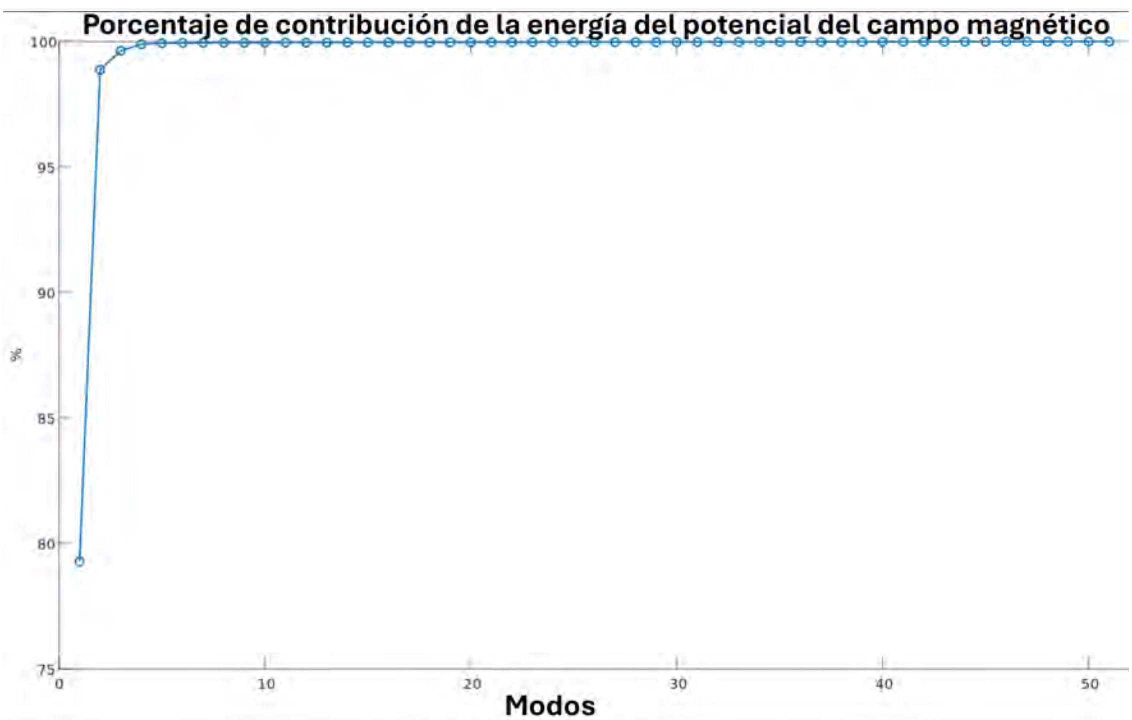


Fig. 5.31: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la variable ψ

Puede verse en la figura 5.31 que son los primeros 4 modos los necesarios para dar casi el 100 % de “energía”, sin embargo, mientras que en el caso continuo el primer modo aportaba aproximadamente el 76 % a la energía total, en el caso pulsado este modo aporta un 79 %.

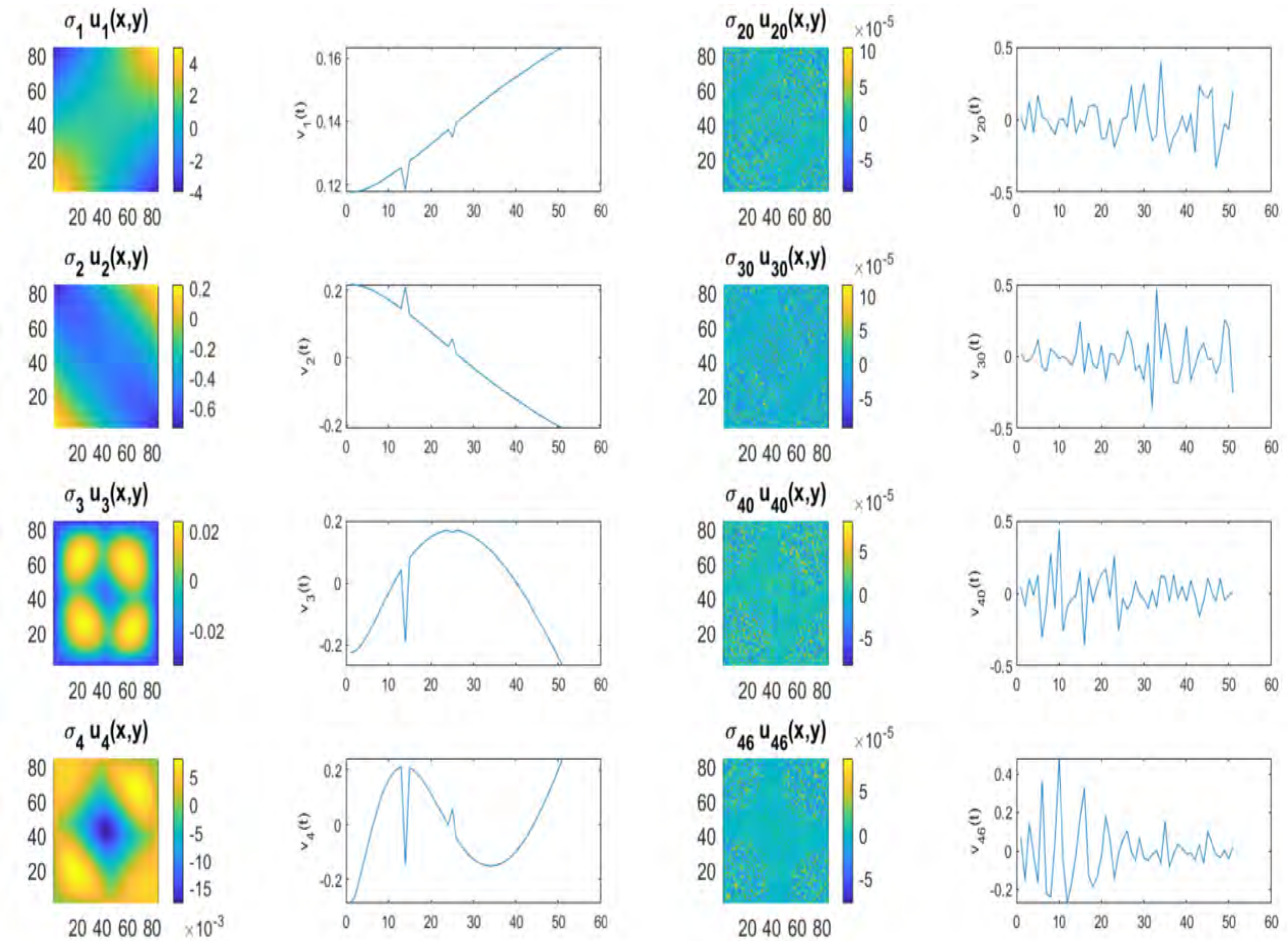


Fig. 5.32: Topos y Cronos de la variable ψ

En la figura 5.32, a partir de $k = 3$ la geometría en el Topos cambia bastante, apareciendo zonas de gran tamaño con baja “energía” . Para $k20$ empiezan a aparecer las fluctuaciones y las regiones con magnitud cercana a cero empiezan a imperar.

En cuestión de los Cronos, se tienen comportamientos similares, i.e., entre más se avanza de modo, más oscilaciones aparecen. Sin embargo, a partir de $k = 40$ sucede lo mismo que apareció en ϕ y es que las oscilaciones empiezan a disminuir de amplitud al final de la gráfica. Esto indica que hay un amortiguamiento de las fluctuaciones más pequeñas, lo cual se esperaría porque a tiempos grandes ya no hay forzamiento.

Si se comparan los dos casos se puede ver que los primeros dos modos son muy similares, pero es en $k = 3$ donde todo cambia. Mientras que en el continuo parece ser que la "energía" se concentra en el centro para irse separando y esparciendo, en el caso pulsado parece ser que las regiones con alta "energía" toman casi toda el área dejando el centro con un pozo de baja "energía".

El Cronos de ambos casos es muy parecido en los primeros modos, pero cuando se llega a $k = 20$ suceden fenómenos totalmente diferentes. En el caso continuo, para los primeros rangos, las oscilaciones tienen una amplitud menor y esta va aumentando para los últimos rangos.

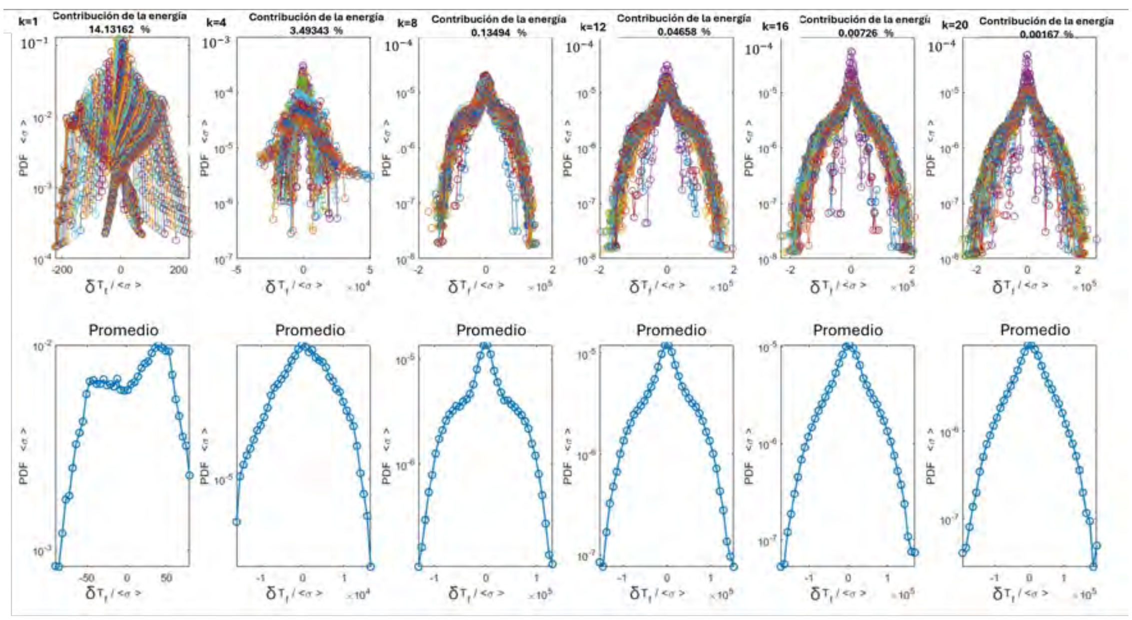


Fig. 5.33: Distribución de la energía para la variable ψ

Se puede ver en la figura 5.33 que solo hasta $k = 8$ aparece el fenómeno de la doble función; sin embargo, en $k = 16$ se observa que este comportamiento ya desapareció. De manera general, se presenta un comportamiento un tanto gaussiano, lo que se traduce en pocas fluctuaciones.

Comparándolo con su símil continuo, se puede notar que en el primer modo, el pulsado tiene más valores en el lado derecho, mientras que el continuo lo tiene en el izquierdo. En ambos casos sucede intermitencia, solo que en el caso continuo el patrón de doble función desaparece para valores mayores de $k20$ y así volverse una gaussiana, lo que implica que sus fluctuaciones no estocásticas son menos frecuentes.

5.2.3. Resultados para la densidad.

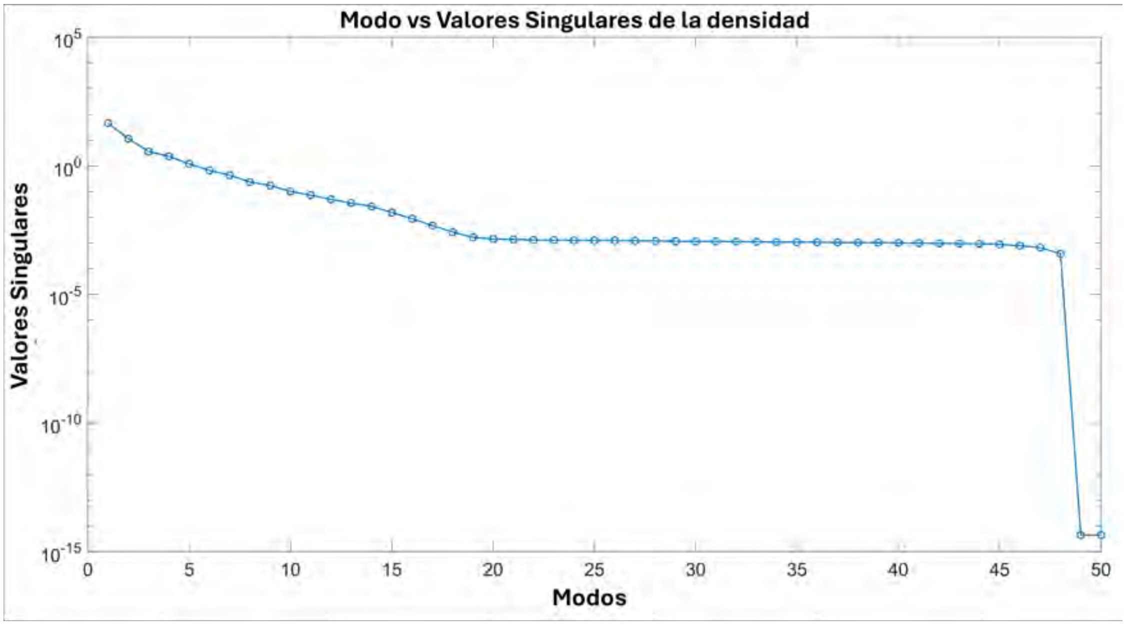


Fig. 5.34: Gráfica de los valores propios de la densidad vs el rango

A diferencia del caso continuo, en la figura 5.34 se tiene una caída hasta $k = 20$, que es donde se empieza a estabilizar en un valor muy cercano a 10^{-3}, por lo que se tiene una baja coherencia con respecto al resto de las variables, tanto continuas como pulsadas.

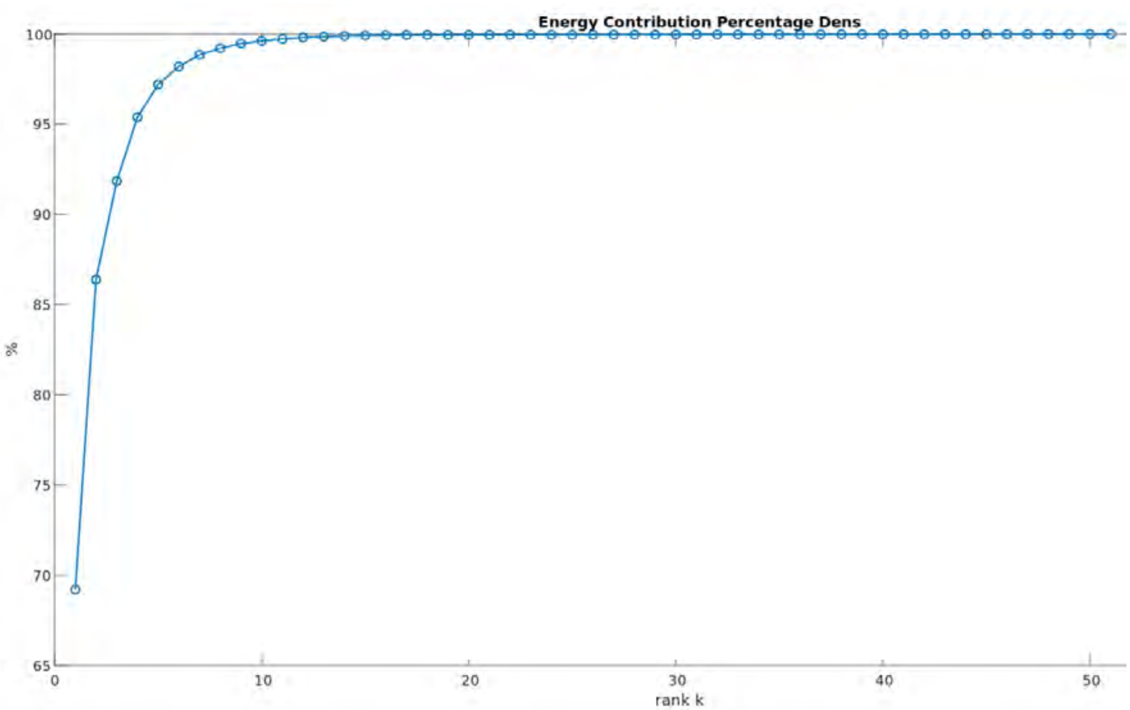


Fig. 5.35: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la densidad

En la figura 5.35 se puede ver que es hasta el catorceavo valor que se llega a la línea del 100 %, cosa que en el gráfico continuo se da hasta el decimoctavo. Otra diferencia es que en el pulsado el primer valor aporta menos "energía" (aproximadamente un 69 %, mientras que en el continuo casi 82 %).

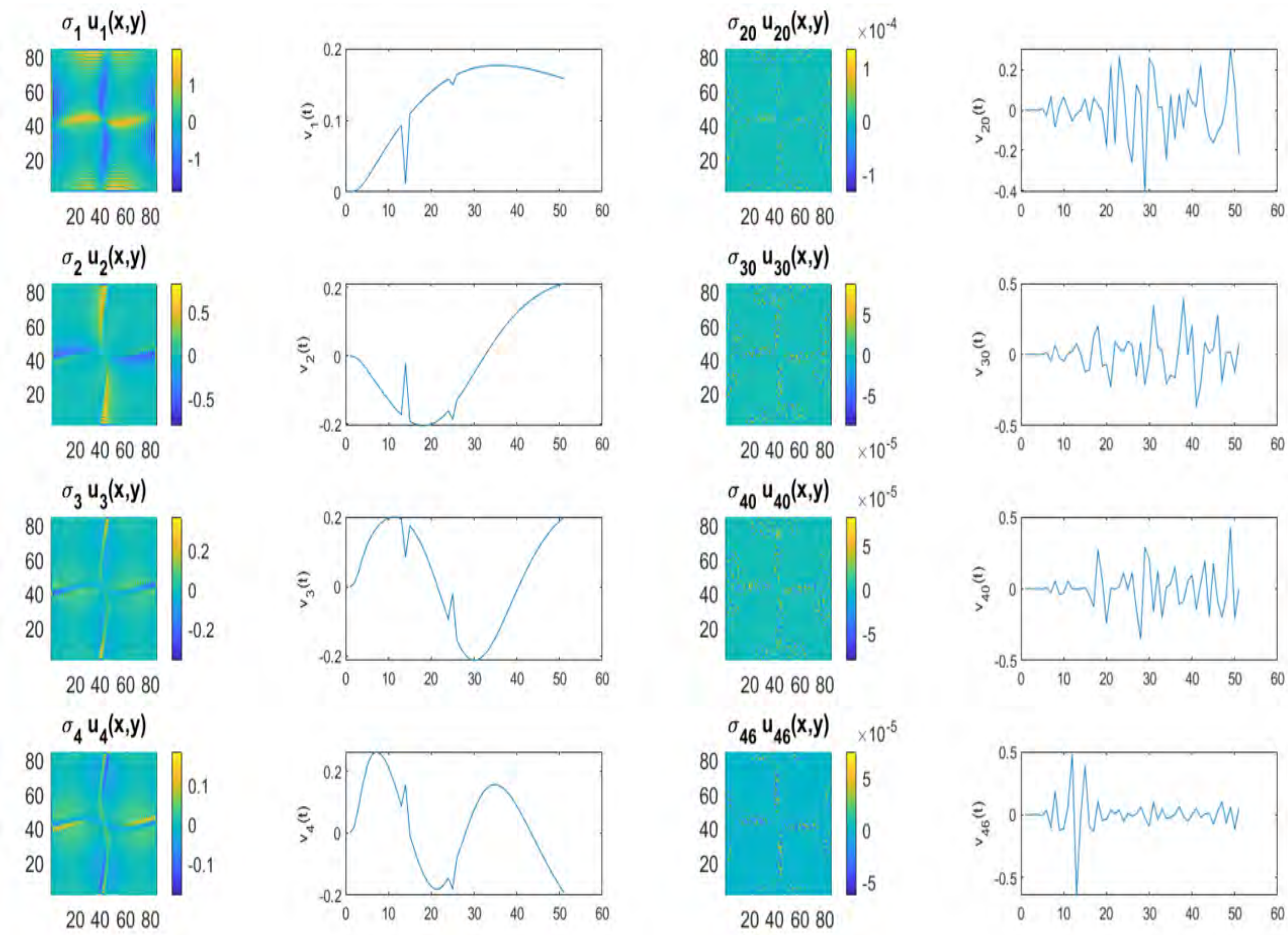


Fig. 5.36: Topos y Cronos de la densidad

Se puede ver que en la figura 5.36 los Topos se mantienen prácticamente de la misma forma, solo que para valores mayores a $k = 20$ las magnitudes de "energía" son mucho menores y se tiene una mayor cantidad de fluctuaciones.

En el caso del Cronos, es hasta los modos de en medio que se encuentran muchas más oscilaciones y ya llegando a los últimos, como es el caso de $k = 46$, la amplitud va disminuyendo; como si en los últimos modos la "energía" se fuese apagando. De nuevo, esto es de esperarse porque el forzado se apaga.

A comparación de lo que sucede en su contraparte continua, el Topos pulsado presenta una forma similar a las curvas de una hipérbola sin asíntota; igualmente, presenta magnitudes más altas de "energía".

Sus Cronos son bastante parecidos en los primeros modos, pero a partir del vigésimo cambian, pues en el continuo, en los primeros intervalos de tiempo, la amplitud es menor al principio y poco a poco va aumentando, mientras que en el pulsado, la amplitud aumenta mucho antes.

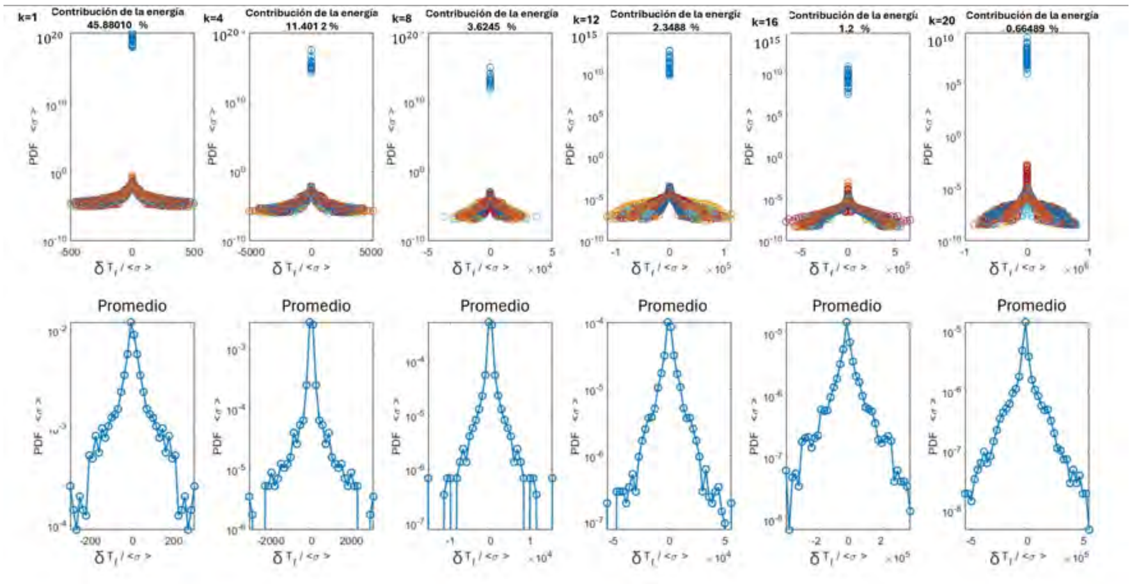


Fig. 5.37: Distribución de la energía para la densidad

En los FDP de la figura 5.37 se puede apreciar que se mantiene la forma bimodal, por lo que en la parte no gaussiana (la parte ancha) se trata de fluctuaciones no aleatorias, mientras que en la otra sí son aleatorias (la parte angosta). Nuevamente se sustenta que son los primeros modos los que proporcionan la mayor "energía"; sin embargo, si se compara con el caso continuo se puede ver que los valores del pulsado aportan menos que el continuo, eso sí, la forma de las gráficas es similar.

5.2.4. Resultados para la corriente.

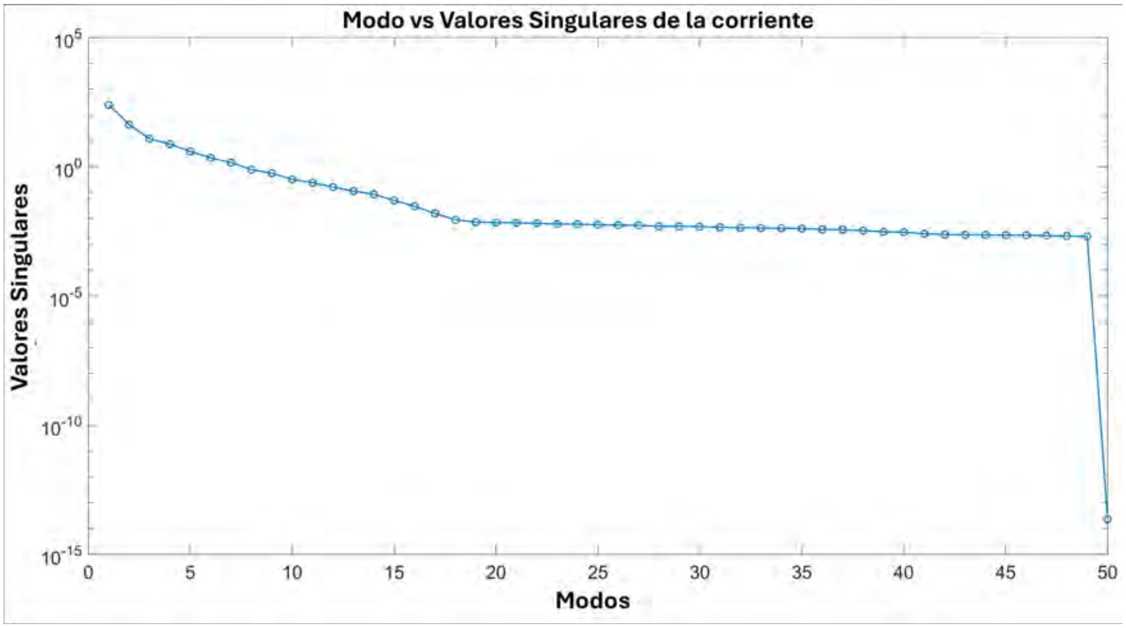


Fig. 5.38: Gráfica de los valores propios de la corriente vs el rango

Nuevamente, por la figura 5.38 se trata de una caída lenta, i.e., que tiene baja coherencia y es hasta $k = 18$ que se vuelve horizontal en valores que exceden 10^{-2}. De manera general, es muy similar a lo que pasa con la corriente en el caso continuo.

Por la figura 5.39 puede apreciarse que se tarda hasta el décimo quinto valor en llegar a la línea del 100 %, cosa que en el caso continuo se da hasta después del treceavo valor. Sin embargo, nuevamente sucede que los primeros modos del caso pulsado aportan menos "energía" que los primeros modos del continuo.

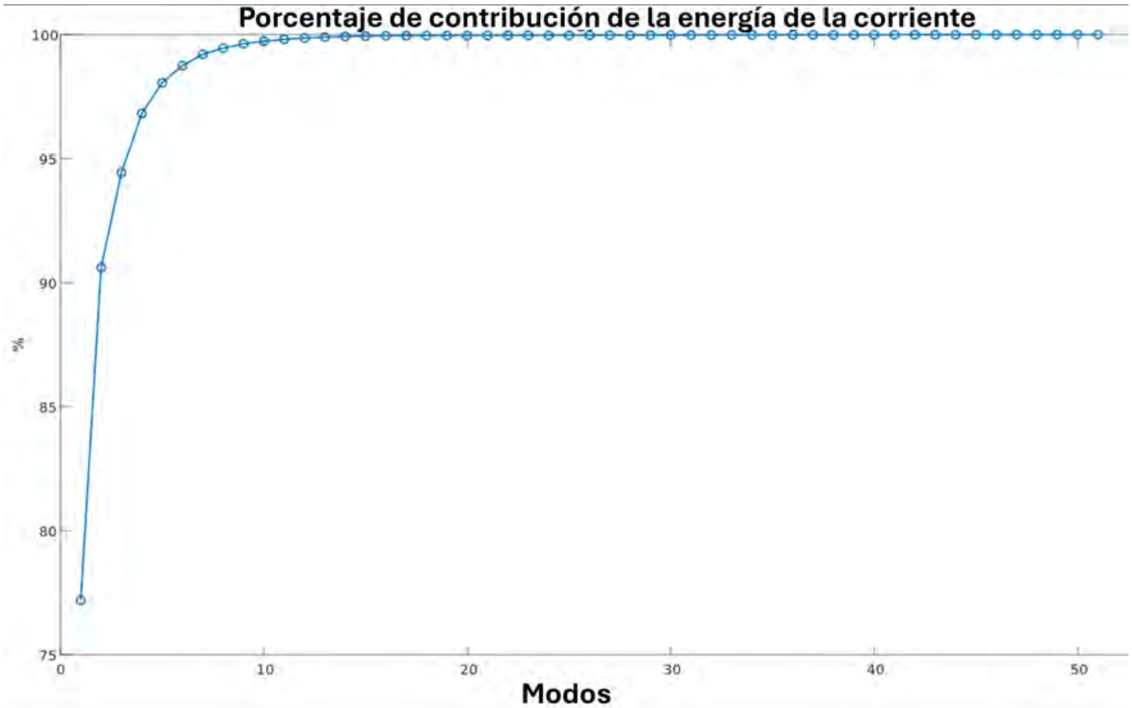


Fig. 5.39: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la corriente

Se puede ver que en el primer Topos de la figura 5.40 la "energía" se acumula en el punto de la reconexión y forma una trayectoria hiperbólica. Conforme se avanza de modo, la magnitud de la "energía" va disminuyendo; es hasta $k = 20$ que casi se vuelve 0 y las fluctuaciones empiezan a cubrir todo el espacio.

En cuestión del Cronos pasa algo curioso, pues aunque los primeros modos se ven de manera normal, se tiene que en $k = 20, 30, 40$ las oscilaciones son casi nulas y a partir del tiempo $k = 25$ aparecen las oscilaciones como destellos cortos. Esto indica que el efecto de la reconexión pulsada se refleja en las pequeñas escalas después de un cierto tiempo, o sea que hay un transporte hacia escalas bajas.

En comparación con la corriente del caso continuo, sucede el mismo fenómeno en cuestión del Topos, pero hablando del Cronos, se observa que en el caso continuo impera una zona de oscilación con grandes amplitudes y solo en $k = 20$ se ve un comportamiento similar.

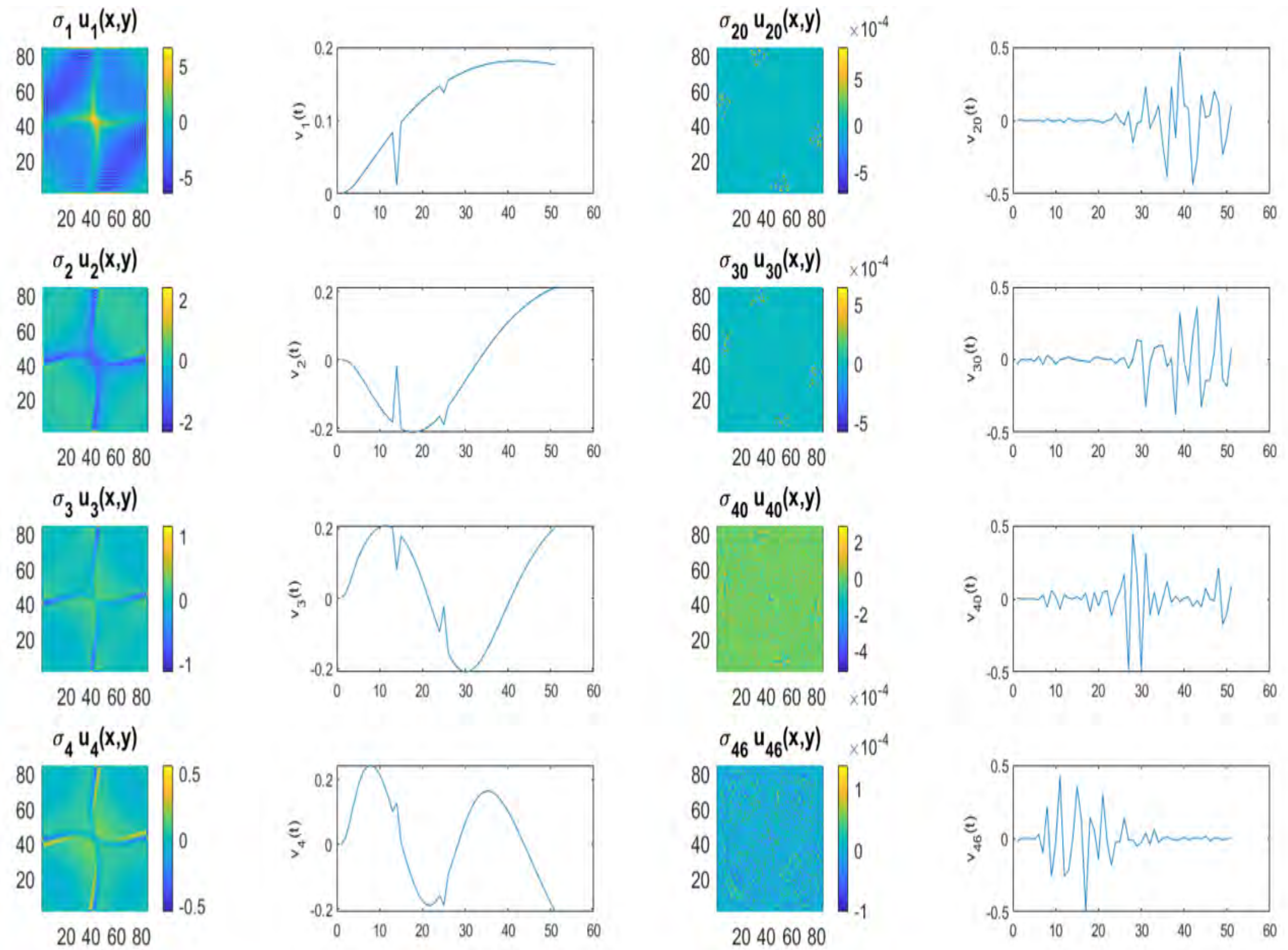


Fig. 5.40: Topos y Cronos de la corriente

En los FDP de la figura 5.41 se aprecia la forma de la doble función, que a pesar de que se ve constituida por varias funciones más pequeñas, la forma general del gráfico es de dos funciones. Dado que no hay una distribución gaussiana, las fluctuaciones son más frecuentes, lo que se denomina como intermitencia.

Comparándola con el caso continuo, se puede apreciar que ambas presentan formas similares. Sin embargo, en el último modo del continuo, los valores más altos difieren en su comportamiento respecto al pulsado.

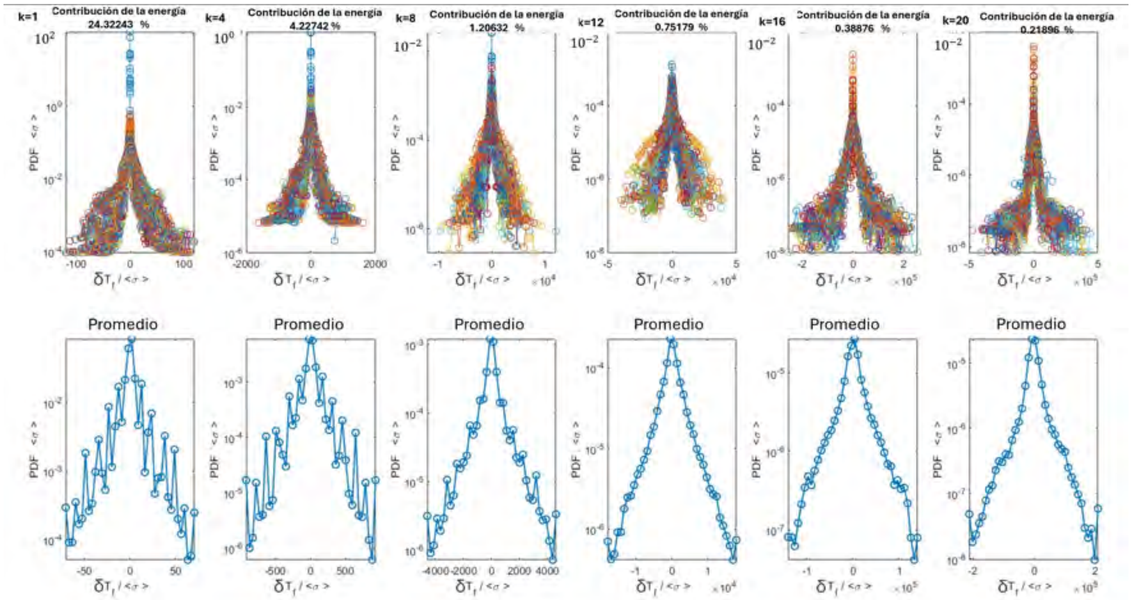


Fig. 5.41: Distribución de la energía para la corriente

5.2.5. Resultados para la vorticidad.

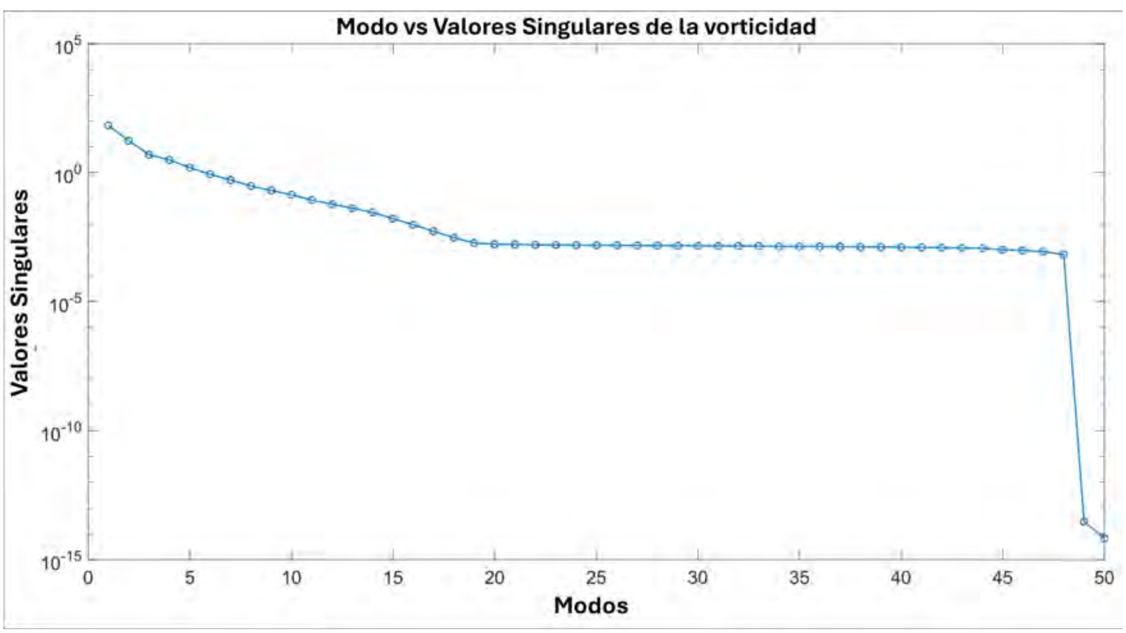


Fig. 5.42: Gráfica de los valores propios de la vorticidad vs el rango

Hay que recordar que la vorticidad y la densidad presentan comportamientos similares, pues la ecuación para la vorticidad tiene la misma forma que la de la densidad.

Al igual que sucede con la densidad en la figura 5.34, se puede ver en la figura 5.42 que la caída es de las más lentas y se vuelve horizontal en valores cercanos a 10^{-3} alrededor de $k = 20$.

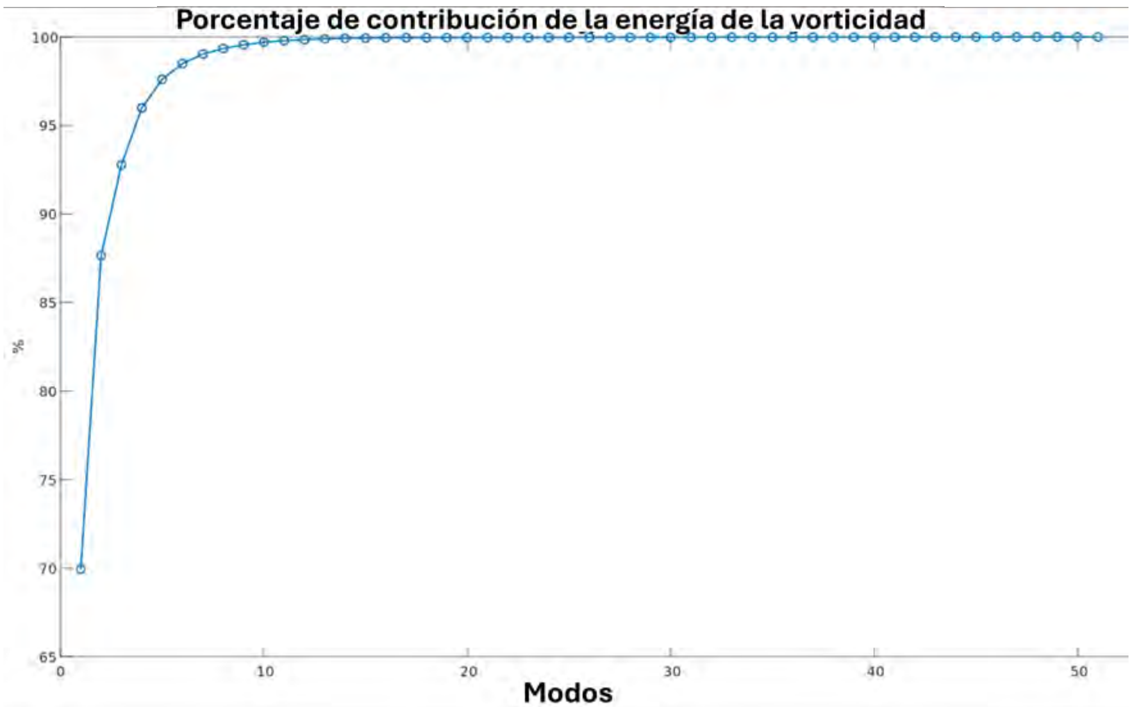


Fig. 5.43: Gráfica de contribución de la energía de cada modo de la vorticidad

En la figura 5.43 se ve que es hasta el modo decimoquinto que se llega a la línea del 100 %. Por lo que llega antes que su contraparte continua. Sin embargo, la contribución de sus primeros cuatro modos es menor que en el caso continuo.

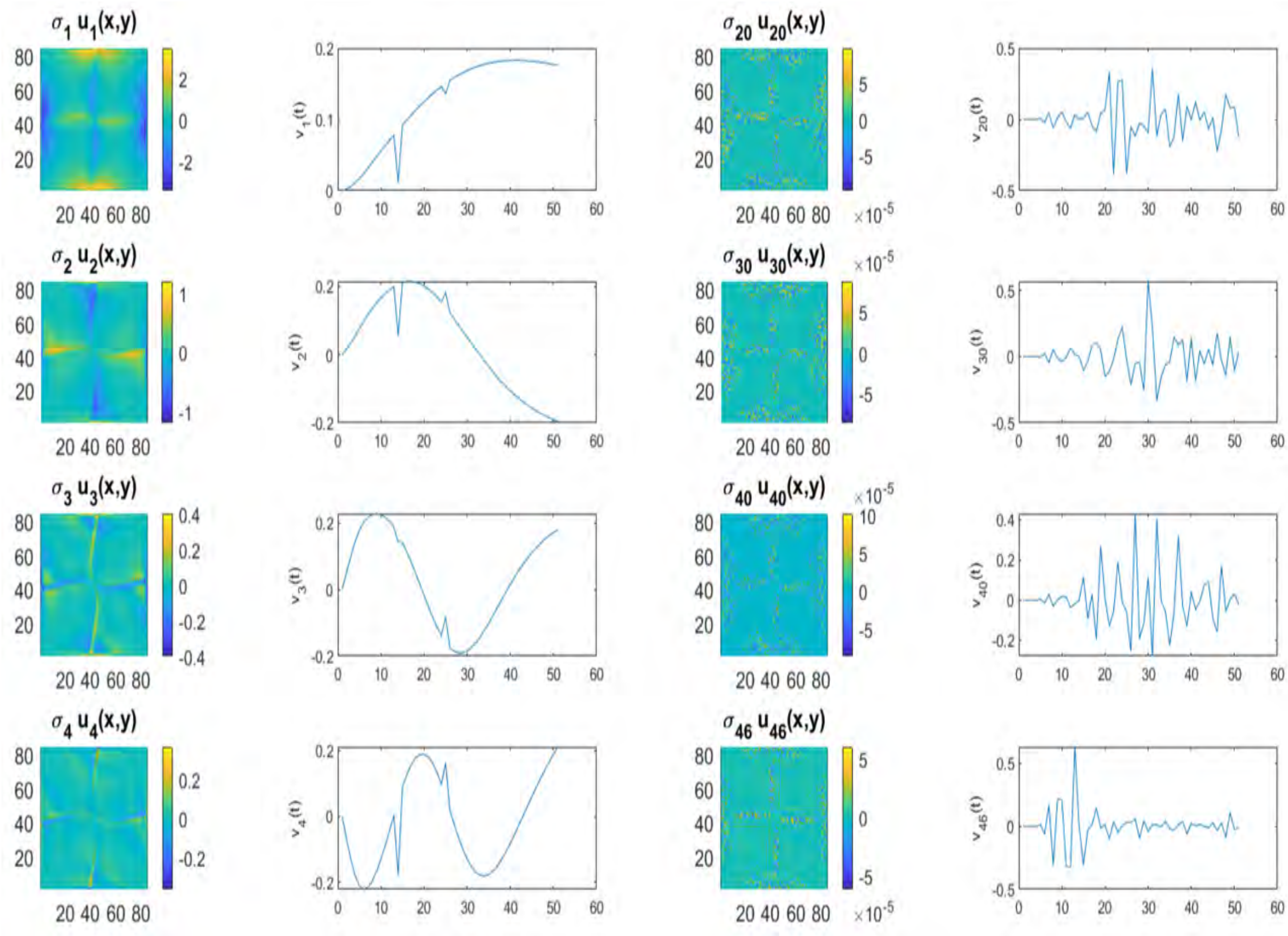


Fig. 5.44: Topos y Cronos de la vorticidad

De manera general en la figura 5.44 se repite lo que pasa con la densidad, ya sea en cuestión del Topos como en cuestión del Cronos (la única diferencia es que en el Cronos la vorticidad llega a tener oscilaciones que en algunos casos tienen una mayor amplitud).

Las diferencias entre el pulsado y el continuo son similares a lo que sucede con la comparación de las densidades: la principal diferencia es que en el pulsado la curva que aparece en los Topos es más cerrada.

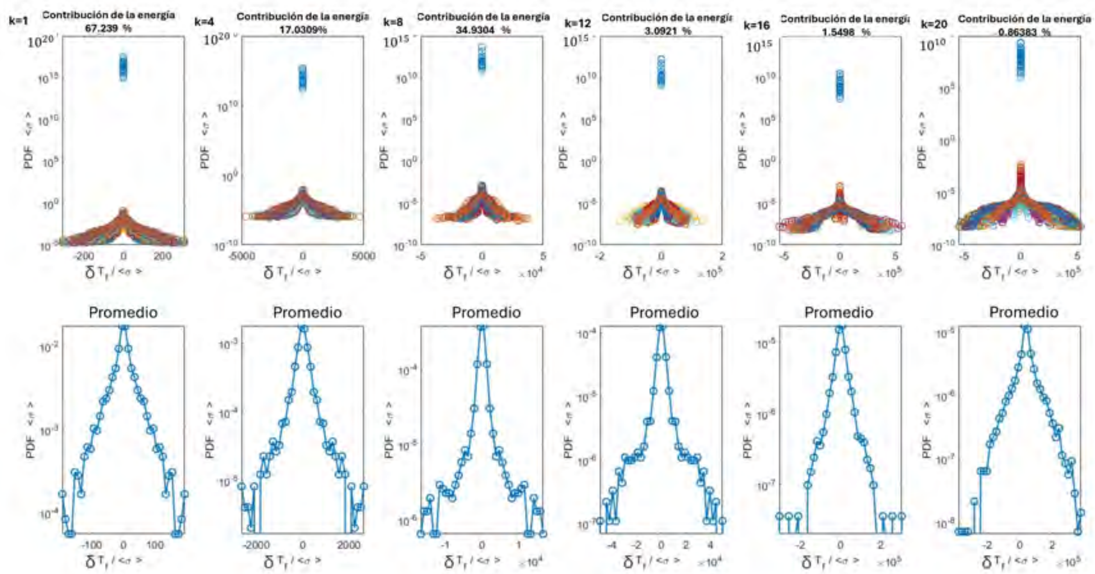


Fig. 5.45: Distribución de la energía para la vorticidad

Viendo la figura 5.45 se nota que se sigue preservando la doble función. A la hora de compararse con la vorticidad del caso continuo, se puede distinguir que tienen formas muy parecidas, en donde sí hay un mayor cambio, es en $k = 16$. También es fácil notar que los valores de contribución son mayores en el pulsado respecto al continuo.

Conclusiones

En esta sección se resumirá lo que se hizo a lo largo de esta investigación; además, se anotarán las conclusiones del comportamiento de las variables en cada caso, así como de la comparación entre el caso continuo y el forzado.

En el presente trabajo se corrieron dos códigos de Fortran que simulan un proceso de reconexión magnética forzada (uno para el caso de un forzamiento continuo y otro para el caso de un forzamiento pulsado), esto mediante la resolución de las ecuaciones del modelo reducido de la dinámica de un plasma. Tras esto, se realizó un análisis multiescala a los datos obtenidos con el fin de entender el comportamiento de algunas variables (corriente, densidad, campo magnético, velocidad y vorticidad del plasma) dentro de la escala espacial y temporal.

Iniciando con el caso de una fuerza continua, se encuentra que para las variables de densidad, corriente y vorticidad los modos que más "energía" aportan son los mismos ($k \leq 18$), mientras que para ϕ son menos modos ($k \leq 10$) y para ψ son aún menos ($k \leq 7$). Esto implica que tanto la estructura de la velocidad como la del campo magnético se definen antes que la de las otras variables. Sin embargo, todas demuestran tener una alta coherencia.

De igual manera se observa en los Topos que todas las variables concentran su energía en el centro. Al igual que pasó en las gráficas de modo *vs* energía, las variables de densidad, corriente y vorticidad cumplen un comportamiento que tanto ϕ como ψ no cumplen, y es que tienden a preservar su forma para los rangos que más aportan a lo largo de los Topos. En cambio, ϕ y ψ inician con una estructura que va de acuerdo a lo obtenido en el capítulo 3, pero que cambia cuando se avanza de modo. Esto indica que la estructura global del campo magnético y la velocidad está determinada por los primeros modos. Lo que sí se mantiene constante en todas las variables es que entre más se avanza de modo, la escala de variación se va reduciendo. Para la parte de Cronos, todas comparten que inician como una frecuencia de oscilación muy lenta, pero terminan obteniendo un comportamiento oscilatorio más rápido, es decir, la escala temporal se va reduciendo.

Hablando de las FDPs se encontró que predomina un comportamiento bimodal (gaussiana y de colas largas) en casi todas las variables, por lo que en general se tienen fluctuaciones en la "energía" tanto aleatorias como no aleatorias de amplitudes grandes, i.e., existe una intermitencia espacial; sin embargo, para modos muy altos ($k > 20$) hay variables que empiezan a tomar una forma más gaussiana lo que implica que en estos modos que aportan menos energía predominan las fluctuaciones aleatorias. La variable ψ es especial, pues es la que tiene una coherencia y una intermitencia mayor, de igual manera la corriente se distingue por no mostrar un comportamiento de doble función y por comportarse de manera casi gaussiana hasta $k = 12$. Variables como la densidad y la vorticidad muestran el comportamiento bimodal desde $k = 1$ lo que implicaría que a todas las escalas hay una presencia importante de fluctuaciones de gran amplitud.

A continuación, las conclusiones del caso de forzado pulsado.

De manera general, el caso pulsado cumple el mismo comportamiento que el continuo en lo que a la aportación de "energía" se refiere, pues nuevamente variables como la densidad, la vorticidad y la corriente son las que requieren de más modos que contribuyan a su "energía" $k \leq 18$ y $k \leq 20$, respectivamente. De la misma forma, las variables ϕ y ψ tienen un comportamiento similar; la primera solo requiere de $k \leq 10$ (igual que en el caso continuo) mientras que la segunda llega con $k \leq 7$ para reunir casi toda la "energía", por lo que nuevamente la estructura de la velocidad y la del campo magnético se definen mucho antes que la de las otras variables.

A diferencia de lo que se ve en los Topos del caso continuo, la "energía" en el caso pulsado no se concentra en todas las variables en el centro y son ϕ y ψ las que rompen el patrón concentrando inicialmente su "energía" en las orillas y conforme se avanza de modo esta se va dispersando a lo largo del espacio. En lo que sí convergen ambos casos es que corriente, densidad y vorticidad tienden de manera general a mantener su forma en los primeros modos, lo que sugiere que no hay una estructura dominante a ninguna escala. Al igual que en el caso continuo, las fluctuaciones van disminuyendo en tamaño según se vaya aumentando el valor de k. En cuestión al Cronos, las variables en el caso pulsado, en los primeros modos, inician de manera similar a las del caso continuo, pero es para los modos superiores que su comportamiento se vuelve muy diferente, pues para el caso pulsado la amplitud de las oscilaciones disminuye, que, como se mencionó en la sección de resultados, puede deberse a que la interacción con el pulso está terminando.

En cuanto a lo que de las FDPs se trata, las variables del caso pulsado son muy diferentes a las continuas, aquí difícilmente se ve un comportamiento bimodal constante, ya que o tarda en aparecer, i.e., en los primeros modos no se nota, o después de cierto modo ese comportamiento desaparece. Lo que se puede traducir en que, al haber colas largas en modos mayores, las fluctuaciones son no aleatorias, o sea que predominan las de amplitudes grandes.

En conclusión, el comportamiento de ambos casos se llega a parecer en los primeros modos. Si bien se muestran algunas diferencias, se pueden deber a que justo como termina la interacción con el pulso, algunos comportamientos no se terminen de efectuar. Podría resultar interesante el averiguar qué pasa si se prolonga el pulso de cierta manera sin llegar a que se vuelva continuo. También, una opción sería ver el comportamiento con distintos tipos de pulsos.

Otro paso a tomar más adelante sería mejorar el código para poder simular la reconexión con valores más altos de nx y de ny, ya que cuanto más grandes sean estos valores, se podrá obtener una mejor precisión de lo que pasa en la reconexión.

De esta tesis salió el artículo *Study of driven magnetic reconnection with a multiscale analysis* el cual fue publicado en la revista **Radiation Effects and Defects in Solids: Incorporating Plasma Science and Plasma Technology** y puede ser encontrado con el DOI: https://doi.org/10.1080/10420150.2025.2475389 [**20**].

Bibliografía

[1] Chen, Francis F. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, Springer, 2016, 3rd Edition.

[2] Goldston, Robert J. Introduction to Plasma Physics, Institue of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1995, 1st Edition.

[3] Hesse, M., Cassak, P.A. Magnetic Reconnection in the Space Sciences: Past, Present, and Future, Journal of Geophysical Research: Space Physics, Vol 125, 2019, 1-24

[4] Bellan, Paul M. Fundamentals of Plasma Physics, Cambridge University Press, 2008, 1st Edition.

[5] Miyamoto, Kenro. Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion, National Institute for Fusion Science, 2011, 3rd Edition.

[6] Sweet, P.A. The neutral point theory of solar flares, Symposium - International Astronomical Union, Vol 6, 1958, 123–134.

[7] Parker, E.N. Sweet's mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids, Journal of Geophysical Research, Vol 62, 1957, 509–520.

[8] Kulsrud, Russell M. Magnetic reconnection: Sweet-Parker versus Petschek, Earth Planets Space, Vol 53, 2001, 417–422

[9] Priest, Eric. Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications, Cambridge University Press, 2007, 1st Edition.

[10] Vekstein, G. Lecture Notes Forced Magnetic Reconnection, Plasma Physics, Vol 83, 2017, 1–32.

[11] Delzanno,G. L., Fable,E., and Porcelli F. Driven reconnection about a magnetic X point in weakly collisional plasmas, Physics of Plasmas, Vol 11, 2004, 5212–5227.

[12] Martinell, Julio J. Local modeling of collisionless magnetic reconnection in the dayside magnetosphere, Radiation Effects and Defects in Solids, Vol 165, 2010, 114–122.

[13] Aydemir, A.Y. Driven reconnection in a quadrupole cusp field, Physics of Plasmas Vol 12, 2005, 080706–080706-4.

[14] Gamborino, Diana, del Castillo Negret, D., Martinell, Julio J. Multi-scale statistical analysis of coronal solar activity, Nonlinear Processes in Geophysics, Vol 23, 2016, 175–188.

[15] Golub, Gene H. Matrix Computations, The John Hopkins University Press, 1996, 3rd Edition.

[16] Press, William H. Numerical Recipes, Cambridge University Press, 1992, 2nd Edition.

[17] Strang, Gilbert. Algebra Lineal Y Sus Aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano, 1980, 4ta edición.

[18] Futatani, S., Benkadda, S., and del-Castillo-Negrete, D., Spatiotemporal multiscaling analysis of impurity transport in plasma turbulence using proper orthogonal decomposition, Physics of Plasmas, Vol 16, 2009, 042506–042506-12.

[19] Glasstone, Samuel, Controlled Thermonuclear Reactions, Robert E. Krieger Publishing Company, 1975, 1st Edition.

[20] Martinell, Julio J., del Moral, Jonatan, Study of driven magnetic reconnection with a multiscale analysis, Radiation Effects and Defects in Solids, Vol 180, 2025, 257-268.