



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Maestría en Ciencias Matemáticas

DESCRIPCIÓN TOPOLÓGICA Y ALGEBRAICA DE LAS SUPERFICIES DE RIEMANN COMPACTAS

*Tesis para optar por el grado de
Maestro en Ciencias Matemáticas*

Presenta:

Santiago Ayala Escobar

Tutor:

Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez

Facultad de Ciencias

Ciudad Universitaria, CD. MX, Enero 2025



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la memoria de
mi madre*

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que han estado en el proceso, con su apoyo y compañía me han permitido llegar a donde estoy. Especialmente a mis papás, cuyo cariño y ejemplo inquebrantables me han hecho ser más fuerte y seguro. A Dayanna, que con mucho amor ha estado para mí en todas las circunstancias y a quien debo mucha felicidad. A mis sobrinos y hermanos, que agradezco tener cerca en mi vida.

Al profesor Vinicio, por su siempre gentil disposición y cercanía, por su paciencia frente a mi testarudez y mis fallas, y por todas las matemáticas que me ha enseñado. A mis amigos de la maestría Joel, Ángel, Rodrigo y Aaron, por su amistad y compañerismo. Al Conahcyt, por brindarme la oportunidad de estudiar con tranquilidad. A los(as) profesores(as) y administrativos(as) de la Maestría, y a la UNAM, por poner a disposición una educación de gran calidad. En general, a todo México, cuyas personas me acogieron cariñosamente y a quienes guardo en mi corazón.

Índice general

Introducción	5
1. Superficies de Riemann y funciones holomorfas	7
1.1. Definición y ejemplos	7
1.2. Morfismos entre superficies de Riemann	9
1.3. Comportamiento local de las funciones holomorfas	13
1.4. Funciones meromorfas	18
2. Clasificación de superficies topológicas compactas y orientables	21
2.1. Orientabilidad de superficies	21
2.2. Triangulación y polígonos etiquetados	23
2.3. Teorema de clasificación	25
2.4. Característica de Euler	32
3. Caracterización topológica de las superficies de Riemann	39
3.1. Cubrientes ramificadas	39
3.1.1. Fórmula de Riemann-Hurwitz	39
3.1.2. Cubrientes	43
3.1.3. Clasificación de cubrientes	44
3.1.4. Holomorfismos como cubiertas ramificadas	49
3.2. Cubrientes ramificadas	50
3.2.1. Superficie de Riemann generada por una cubriente ramificada	50
3.2.2. Asignación funtorial	53
4. Curvas algebraicas	57
4.1. Curvas algebraicas	57
4.2. Campos de funciones meromorfas	59
4.3. Curvas p-gonales	62
4.3.1. Construcción de la superficie de Riemann asociada a una curva p-gonal	62
4.3.2. Manipulando generadores del campo de funciones meromorfas	64
4.4. Curvas p-gonales isomorfas	70
4.4.1. Contando curvas 3-gonales no isomorfas	72
4.4.2. Método de clasificación de curvas p-gonales	74
4.4.3. Curvas por género	76

Introducción

En 1851, Riemann publica su tesis doctoral *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (*Fundamentos de una teoría general de funciones de una variable compleja*). En ella introduce por primera vez las que posteriormente serían llamadas superficies de Riemann [Rem98, Reinhold Remmert, Société Mathématique de France, Séminaire et Congrès 3, 1998, pág. 205]:

Wir beschränken die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. (...) Wir lassen die Möglichkeit offen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke, setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, dass die auf einander liegenden Flächentheile nicht längs einer Linie zusammenhängen, so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt. [Restringimos las variables x, y a un dominio finito considerando como el lugar geométrico del punto O ya no al plano A en sí mismo sino a una superficie T extendida sobre el plano. (...) Admitimos la posibilidad de que el lugar geométrico del punto O está cubriendo la misma parte del plano varias veces. Sin embargo, en este caso asumimos que aquellas partes de la superficie que se encuentran una encima de la otra no están conectadas a lo largo de una línea. Por lo tanto, un pliegue o un corte de la superficie en partes no pueden ocurrir].

Bernhard Riemann

El lenguaje utilizado por Riemann es extraño ante nuestro formalismo actual. No obstante, en [Rem98, Reinhold Remmert, Société Mathématique de France, Séminaire et Congrès 3, 1998, pág. 205] encontramos una guía de lectura. El plano A se introduce como $\mathbb{C}$ un par de páginas antes, más adelante admite "die ganze unendliche Ebene A " (todo el plano infinito A), es decir, $\hat{\mathbb{C}}$. Para Remmert esta definición corresponde, en términos contemporáneos, al principio de cubriente: una superficie de Riemann es una superficie topológica orientable S , junto con una cubriente ramificada $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Un objeto con origen algebraico se caracteriza por medio de un lenguaje topológico. Posteriormente, en 1912, con base en una serie de conferencias impartidas en Göttingen, Hermann Weyl publica la obra: *Die Idee der Riemannschen Fläche* [*El concepto de superficie de Riemann*] [Wey55], que constituye la base formal sobre la que se asentaría la teoría de Riemann. Más tarde, Dieudonné la llamaría "a classic that inspired all later developments of the theory of differentiable and complex manifolds" [un clásico

que inspiró todos los desarrollos posteriores de la teoría de variedades diferenciables y complejas] [Rem98, Reinhold Remmert, Société Mathématique de France, Séminaire et Congrès 3, 1998, pág. 219]. Aparece la primera definición formal de superficie de Riemann. Bastaría una contribución de Hausdorff, el axioma de separación, para completar la definición que el tiempo ha fijado en el lenguaje común de las matemáticas contemporáneas.

Esta tesis explora las superficies de Riemann compactas desde tres perspectivas: analítica, topológica y algebraica.

Las equivalencias entre estas tres posibles perspectivas dan cuenta de la multiplicidad de representaciones de estos objetos y permiten un vaivén que enriquece la comprensión de los mismos.

El primer capítulo desarrolla la teoría básica de superficies de Riemann, los morfismos entre estas y las funciones meromorfas. En el capítulo dos, se prueba el teorema de clasificación de superficies topológicas compactas y orientables. El capítulo tres expone la relación entre superficies de Riemann compactas y cubrientes ramificadas. Por medio de la caracterización topológica obtenida, en el cuarto capítulo se expone la equivalencia entre superficies de Riemann, curvas algebraicas en $\mathbb{C}^2$ y campos de funciones de una variable. A través de estas equivalencias se halla un método para clasificar una clase de superficies de Riemann compactas: las curvas p -gonales.

Se parte de conceptos y resultados clásicos de análisis complejo, topología general y geometría diferencial real. Las proposiciones que se mencionan sin prueba son aquellas que requieren de introducir más teoría, lo cual desvía las intenciones de la tesis. En cualquier caso, se presentan las referencias en donde se pueden consultar las pruebas.

El autor debe el aprendizaje de gran parte de las ideas al libro *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants* de Ernesto Gironde y Gabino González-Diez [Gir12]. En particular, la tesis generaliza la clasificación que realiza de las curvas 7-gonales de género 3, a un método de clasificación para curvas p -gonales de género g .

Capítulo 1

Superficies de Riemann y funciones holomorfas

En este capítulo introducimos las nociones básicas de la teoría de superficies de Riemann y las funciones holomorfas en el sentido clásico de Weyl. Se supone conocimiento de las definiciones y resultados elementales de topología general y análisis complejo, que se pueden encontrar en [Kel75] y [Lan99].

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1. Un espacio topológico S es una **superficie topológica** si se cumplen las siguientes condiciones:

- (i) Es Hausdorff y arco-conexo.
- (ii) S Tiene una base numerable.
- (iii) Para todo $p \in S$, existen una vecindad abierta U de p , una vecindad abierta $V \subseteq \mathbb{C}$ de 0 y $\psi : U \longrightarrow V$ un homeomorfismo tal que $\psi(p) = 0$.

Una superficie topológica es un espacio que puede ser recubierto por numerables copias de abiertos del plano. A nivel local podemos considerarlo como un plano deformado. La propiedad (iii) suele denominarse ser **localmente homeomorfa al plano**. Se pretende trasladar la teoría de las funciones analíticas en $\mathbb{C}$ a una superficie topológica. Sin embargo, para esto debemos dotar a la superficie de una estructura adicional.

Definición 2. Sea S una superficie topológica, un **atlas complejo** sobre S es una familia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, con $U_\alpha \subseteq S$ y $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ abiertos, y $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ un homeomorfismo de tal manera que se cumplen las siguientes condiciones:

- (i) $S = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.
- (ii) Para todos $\alpha, \beta \in \Lambda$, la composición, llamada **cambio de coordenadas**

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es holomorfa.

Cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ se denomina una **carta** del atlas.

Si bien un atlas complejo es suficiente para hacer cálculo sobre la superficie, varios atlas serían innecesariamente diferentes.

Definición 3. Para una superficie topológica S , provista de dos atlas complejos, se dice que:

- a) Dos cartas son **cartas compatibles** si el cambio de coordenadas resulta un biholomorfismo.
- b) Dichos atlas son **atlas compatibles** si para todo par de cartas, una en cada atlas, estas son compatibles.

Observación 1. En la definición de atlas compatibles sólo consideran las parejas de cartas cuyos dominios se intersecan en S , pues la función vacía es biholomorfa.

Con estas definiciones previas podemos definir el concepto central del texto, el de superficie de Riemann.

Definición 4. Dada una superficie topológica S , una **estructura diferenciable compleja sobre S** es un atlas complejo maximal con respecto a la relación de contención compatible, es decir, que todas las posibles cartas que sean compatibles con el atlas ya se encuentren incluidas en el atlas. Una superficie S , dotada de una estructura diferenciable compleja, es una **superficie de Riemann**.

Observación 2. La condición (ii) en la definición de superficie topológica puede eliminarse para el caso de las superficies de Riemann. El teorema de Radó nos dice que todo espacio Hausdorff, conexo y dotado de un atlas complejo tiene una base numerable. La prueba de este resultado se encuentra en [Hub06, pág. 8].

Para construir ejemplos de superficies de Riemann, basta encontrar un atlas complejo sobre alguna superficie topológica, pues podemos tomar todas las cartas compatibles con dicho atlas y así obtener una estructura diferenciable compleja.

Ejemplo 1 (Plano complejo). El plano complejo $\mathbb{C}$ es trivialmente una superficie de Riemann, la función identidad constituye un atlas.

Ejemplo 2 (Esfera de Riemann). Se considera el espacio topológico $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, producto de compactificar $\mathbb{C}$ por un punto ∞ . Se toman las cartas $\varphi_1 = id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\varphi_2 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & : z = \infty \end{cases}$$

Es claro que este atlas cubre toda la superficie y el cambio de coordenadas es biholomorfismo. Como espacio topológico resulta homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^2$, por lo que esta superficie se denomina la **esfera de Riemann**.

Ejemplo 3 (Disco unitario). Tomemos $\mathbb{D}$ el disco de radio 1 abierto en $\mathbb{C}$. La función identidad $\text{id}_{\mathbb{D}}$ resulta un atlas. Posteriormente veremos que tiene sentido definir esta superficie de Riemann, pues no es biholomorfa a la definida en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 4 (Línea proyectiva compleja). Definimos $\mathbb{P}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}) / \sim$ de manera que $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$ si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(a_1, a_2) = \lambda(b_1, b_2)$, el número λ debe ser distinto de 0. La clase de equivalencia de la pareja (a_1, a_2) bajo esta relación se denotará $[a_1 : a_2]$.

Se definen los abiertos $U_1 = \{[a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^1 : a_1 \neq 0\}$ y $U_2 = \{[a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^1 : a_2 \neq 0\}$. Si $[a_1 : a_2] \in U_1$, entonces $[a_1 : a_2] = [1 : \frac{a_2}{a_1}]$. Por lo que $U_1 = \{[1 : a] \in \mathbb{P}^1 : a \in \mathbb{C}\}$. Un razonamiento análogo nos lleva a que $U_2 = \{[a : 1] \in \mathbb{P}^1 : a \in \mathbb{C}\}$. Tomamos las cartas

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [a : 1] &\mapsto a \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [1 : a] &\mapsto a. \end{aligned}$$

Los abiertos U_1 y U_2 cubren a todo $\mathbb{P}^1$, pues si $[a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^1$, entonces $a_1 \neq 0$ o $a_2 \neq 0$. El cambio de coordenadas es la función $z \mapsto \frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, la cual es biholomorfismo. Esta superficie se denomina la **línea proyectiva compleja**.

1.2. Morfismos entre superficies de Riemann

Nuestra intención es trasladar las definiciones del Análisis Complejo a superficies de Riemann. Para hacer cálculo con funciones entre estas, se busca trasladar la propiedad de ser holomorfo en un abierto de $\mathbb{C}$ a ser holomorfo en una superficie de Riemann.

Definición 5. Dadas S_1 y S_2 superficies de Riemann, un abierto U de S_1 y $f : S_1 \longrightarrow S_2$ función continua en U . Se dice que f es **holomorfa en** p si para todo $p \in U$ y todo par de cartas $\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi$ en S_1 y $\psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi$ en S_2 que cumplen

$$(i) \quad p \in U_\varphi \text{ y } f(p) \in U_\psi,$$

$$(ii) \quad f(U_\varphi) \subseteq U_\psi,$$

la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \longrightarrow V_\psi$ es una función holomorfa en $\varphi(p)$.

En principio, las elección de las cartas parece jugar un papel decisivo a la hora de determinar si una función resulta holomorfa en un punto o no. Sin embargo, se quiere que las definiciones tengan una invarianza con respecto a esta elección. Aquí aparece la condición (ii) de la definición de atlas complejo: el cambio de coordenadas es biholomorfismo.

Proposición 1. Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann, $f : S_1 \rightarrow S_2$ función y $p \in S_1$. Entonces f es holomorfa en p si y sólo si existen cartas $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ en S_1 y $\psi : U_\psi \rightarrow V_\psi$ en S_2 que cumplen

$$(i) \quad p \in U_\varphi \text{ y } f(p) \in U_\psi.$$

$$(ii) \quad f(U_\varphi) \subseteq U_\psi.$$

(iii) La composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \rightarrow V_\psi$ es una función holomorfa en alguna vecindad abierta de $\varphi(p)$.

Demostración. Tomamos otras cartas cualesquiera $\bar{\varphi} : \bar{U}_\varphi \rightarrow \bar{V}_\varphi$ y $\bar{\psi} : \bar{U}_\psi \rightarrow \bar{V}_\psi$ nuevamente de p y $f(p)$ respectivamente con $f(\bar{U}_\varphi) \subseteq \bar{U}_\psi$. Sobre $\bar{\varphi}(U_\varphi)$, vecindad de $\bar{\varphi}(p)$, se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1} &= \bar{\psi} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \bar{\varphi}^{-1} \\ &= (\bar{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \bar{\varphi}^{-1}) \end{aligned}$$

la cual es composición de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. □

Esto nos dice que para probar que determinada función es holomorfa en un punto basta probarlo para cualquier carta del punto y cualquier carta de su imagen, y no para todas las posibles cartas. La definición de morfismo entre superficies de Riemann consiste en globalizar la definición de holomorfismo en un punto.

Definición 6. Un **morfismo entre superficies de Riemann** S_1 y S_2 es una función $f : S_1 \rightarrow S_2$ tal que es holomorfa para cada $p \in S_1$. Se llama también **función holomorfa**. Al conjunto de los morfismos entre S_1 y S_2 lo denotamos $\text{Mor}(S_1, S_2)$.

Ejemplo 5. Dadas S_1 y S_2 superficies de Riemann y $q \in S_2$, la función constante en q ,

$$\begin{aligned} c_q : S_1 &\rightarrow S_2 \\ x &\mapsto q \end{aligned}$$

es morfismo.

Para poder utilizar la palabra morfismo con toda seguridad se debe probar la siguiente propiedad.

Proposición 2. Sean S_1, S_2, S_3 superficies de Riemann; y $f : S_1 \rightarrow S_2, g : S_2 \rightarrow S_3$ funciones holomorfas. La función $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$ es holomorfa.

Demostración. Para cualquier $p \in S_1$, existen cartas $\psi : U_\psi \rightarrow V_\psi$ y $\phi : U_\phi \rightarrow V_\phi$ de $f(p)$ y $g(f(p))$ respectivamente, tales que $g(U_\psi) \subseteq U_\phi$ y

$$\phi \circ g \circ \psi^{-1} : V_\psi \rightarrow V_\phi$$

es holomorfa. Existe además una carta $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ de p tal que $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ y

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \rightarrow V_\psi$$

es holomorfa.

Por lo que $g(f(U_\varphi)) \subseteq g(U_\psi) \subseteq U_\phi$ y

$$(\phi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \phi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \longrightarrow V_\phi$$

es holomorfa. □

Definición 7. Un **isomorfismo** de superficies de Riemann S_1 y S_2 es un morfismo $f : S_1 \longrightarrow S_2$ tal que es biyectivo y su inversa f^{-1} también resulta morfismo. También se suele llamar **biholomorfismo**. En tal caso se dice que S_1 y S_2 son **isomorfas** y se denota $S_1 \cong S_2$.

Ejemplo 6 ($\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1$). Consideremos $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ por

$$f(z) = \begin{cases} [z : 1] & : z \in \mathbb{C} \\ [1 : 0] & : z = \infty. \end{cases}$$

Para todo elemento en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$, la composición de la función con las cartas de $\hat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{P}^1$ es la identidad ($z \mapsto z \mapsto [z : 1] \mapsto z$). Para ∞ , la composición de la función con las cartas es

$$\begin{cases} z \neq 0 \mapsto \frac{1}{z} \mapsto [\frac{1}{z} : 1] = [1 : z] \mapsto z \\ 0 \mapsto \infty \mapsto [1 : 0] \mapsto 0 \end{cases}$$

también la identidad. Para probar que f es isomorfismo, definimos $g : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ por

$$g([a_1 : a_2]) = \begin{cases} \frac{a_1}{a_2} & : a_2 \neq 0 \\ \infty & : a_2 = 0. \end{cases}$$

En primer lugar, tomando dos representantes de la misma clase en $\mathbb{P}^1$, (a_1, a_2) y (b_1, b_2) , con $(a_1, a_2) = \lambda(b_1, b_2)$ para $\lambda \neq 0$, tenemos que $a_2 = 0$ si y sólo si $b_2 = 0$. Si $a_2 = 0$, inmediatamente $g([a_1 : a_2]) = \infty = g([b_1 : b_2])$; si $a_2 \neq 0$ entonces $g([b_1 : b_2]) = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\lambda a_2}{\lambda a_1} = \frac{a_2}{a_1} = g([a_1 : a_2])$. La función está bien definida.

Para $a_2 \neq 0$, la composición de la función con las cartas de $\mathbb{P}^1$ y $\hat{\mathbb{C}}$ es la identidad ($z \mapsto [z : 1] \mapsto z \mapsto z$) la identidad. Para $a_2 = 0$ es

$$\begin{cases} 0 \mapsto [1 : 0] \mapsto \infty \mapsto 0 \\ z \neq 0 \mapsto [1 : z] \mapsto \frac{1}{z} \mapsto \frac{1}{\frac{1}{z}} = z \end{cases}$$

también la identidad.

Basta ver que son inversas, la composición $g \circ f$ es

$$\begin{cases} z \neq \infty \mapsto [z : 1] \mapsto z \\ \infty \mapsto [1 : 0] \mapsto \infty \end{cases}$$

y la composición $f \circ g$ es

$$\begin{cases} [z : 1] \mapsto z \mapsto [z : 1] \\ [1 : 0] \mapsto \infty \mapsto [1 : 0]. \end{cases}$$

Ejemplo 7 ($\mathbb{C} \not\cong \mathbb{D}$). *Topológicamente, las superficies $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son iguales (homeomorfas). Más aún, como superficies diferenciables reales son isomorfas (difeomorfas). Sin embargo, como superficies de Riemann no lo son. Esto es una consecuencia inmediata del teorema de Liouville: toda función holomorfa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que sea acotada es constante, caso que se da si la imagen es $\mathbb{D}$.*

Disgresión sobre la continuidad de las funciones holomorfas

En la definición que se ha dado de función holomorfa en un punto, la existencia de cartas, con la notación de la definición 5, tales que $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$, está asegurada por la continuidad de la función f . Contrario a lo que sucede para las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, ser holomorfa no nos asegura la continuidad. De hecho, preguntarse acerca de la veracidad o falsedad de dicha implicación, con la definición que se ha dado, no tiene sentido, pues para definir holomorfismo se presupone que la función es ya continua. En esta subsección, se demuestra que se puede definir el concepto de función holomorfa entre superficies de Riemann sin asumir su continuidad.

Suponiendo que la continuidad de f no está asegurada, una primera aproximación para definir una función holomorfa en p es que la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sea una función holomorfa en $\varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi)$, el máximo dominio en el que está bien definida. Lo problemático es que el conjunto $\varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi)$ no es necesariamente abierto en $\mathbb{C}$, por lo que las derivadas parciales no se encuentran definidas. Inspirado en la definición de Guillemin y Pollack en [Gui74, 1984, pág. 1 y 2], se amplía la definición como sigue.

Definición 8 (Definición alternativa). *Dadas S_1 y S_2 superficies de Riemann, $f : S_1 \rightarrow S_2$ función y $p \in S_1$. Se dice que f es holomorfa en p si existen un par de cartas $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ en S_1 y $\psi : U_\psi \rightarrow V_\psi$ en S_2 , con $p \in U_\varphi$ y $f(p) \in U_\psi$; una vecindad abierta $V \subseteq V_\varphi$ de $\varphi(p)$ y una función $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en $\varphi(p)$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} V \cap g^{-1}(V_\psi) & \xrightarrow{g} & g(V) \cap V_\psi \\ \downarrow \varphi^{-1} & & \downarrow \psi^{-1} \\ \varphi^{-1}(V \cap g^{-1}(V_\psi)) & \xrightarrow{f} & S_2 \end{array}$$

conmuta.

La función g es una extensión de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi) \cap V \rightarrow V_\psi$. Esta definición alternativa resulta equivalente a la definición clásica, probando que con esta definición más general toda función holomorfa entre superficies de Riemann es continua.

Proposición 3. *La definición clásica es equivalente a la alternativa.*

Demostración. Usaremos acá la misma notación de las definiciones:

(clásica $\Rightarrow$ alternativa) Si f es continua en p existe W vecindad abierta de p tal que $f(W) \subseteq U_\psi$. Tomamos $V = \varphi(W \cap U_\varphi)$ y $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

(clásica $\Leftarrow$ alternativa) Como g es holomorfa en $\varphi(p) \in \mathbb{C}$, entonces es continua en

$\varphi(p)$. Existe $W \subseteq V$ vecindad abierta de $\varphi(p)$ tal que $g(W) \subseteq V_\psi$. Es decir que $W \subseteq V \cap g^{-1}(V_\psi)$ y la composición $\psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ es continua en p , con dominio $\varphi^{-1}(W)$, abierto en S_1 . De modo que existe $U \subseteq \varphi^{-1}(W)$ vecindad abierta de p tal que $\psi^{-1} \circ g \circ \varphi(U) \subseteq U_\psi$. La carta $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ de p cumple que

$$f(U) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi(U) \subseteq U_\psi$$

y $\psi \circ f \circ \varphi = g$ en $\varphi(U)$, la cual es holomorfa. $\square$

1.3. Comportamiento local de las funciones holomorfas

El atlas de una superficie de Riemann tiene una versatilidad que permite utilizar diversas cartas convenientemente. Por ejemplo, las cartas son cerradas bajo subconjuntos abiertos: para $\varphi: U \rightarrow V$ carta de S , si $W \subseteq U$ es abierto, entonces $\varphi|_W: W \rightarrow \varphi(W)$ es también una carta. También son cerradas bajo la composición con biholomorfismos: si $\phi: V \rightarrow V'$ es biholomorfismo, entonces $\phi \circ \varphi: U \rightarrow V'$ es una carta. Esto nos permite demostrar el siguiente resultado.

Lema 1. Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann, $f: S_1 \rightarrow S_2$ función holomorfa, $a \in S_1$ y $b = f(a)$. Existen cartas $\varphi: U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ en S_1 y $\psi: U_\psi \rightarrow V_\psi$ en S_2 tales que

$$(i) \ a \in U_\varphi, \varphi(a) = 0; \ b \in U_\psi, \psi(b) = 0.$$

$$(ii) \ f(U_\varphi) \subseteq U_\psi.$$

Demostración. Por definición existen cartas que aseguran la propiedad (ii). Basta componer esas cartas por las traslaciones $z \mapsto z - \varphi(a)$ y $z \mapsto z - \psi(b)$, correspondientemente. $\square$

El teorema central de la sección (teorema 4) arroja una luz concluyente acerca del comportamiento local de las funciones holomorfas. Antes de llegar a ello, probaremos los siguientes teoremas que dan cuenta de situaciones en las que propiedades locales se extrapolan a propiedades globales, lo que nos permite transferir propiedades del plano complejo a superficies de Riemann en general.

Teorema 1 (De la identidad). Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann y $f, g: S_1 \rightarrow S_2$ funciones holomorfas tal que coinciden en un conjunto $A \subseteq S_1$ con por lo menos un punto de acumulación. Entonces f y g coinciden en todo S_1 .

Demostración. Sea A conjunto de todos los puntos $a \in S_1$ que tienen una vecindad W tal que $f|_W = g|_W$, A es abierto directamente de su definición. Para todo $b \in \partial A$, dado que f y g son continuas, se tiene que $f(b) = g(b)$. Tomemos cartas $\varphi: U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ en S_1 y $\psi: U_\psi \rightarrow V_\psi$ en S_2 con $b \in U_\varphi$, U_φ conexo, $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ y $g(U_\varphi) \subseteq U_\psi$. Las funciones

$$f' = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V_\varphi \rightarrow V_\psi$$

y

$$g' = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \longrightarrow V_\psi$$

son holomorfas. Como $U_\varphi \cap A \neq \emptyset$, por el teorema de la identidad en $\mathbb{C}$, $g' = f'$ y $g|_{U_\varphi} = f|_{U_\varphi}$. Por tanto $b \in A$, obteniendo que A es cerrado y abierto. Aplicando la conexidad de S_1 hay dos opciones: $A = \emptyset$ o $A = S_1$. Pero nuevamente por hipótesis, $A \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 2 (De la singularidad removible de Riemann). *Sean S_1 superficie de Riemann, $U \subseteq S_1$ abierto y $a \in U$. Supongamos que $f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, si f es acotada en una vecindad de a , entonces se puede extender a una única función $\bar{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.*

Demostración. Basta tomar una carta $\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi$ en S_1 tal que $a \in U_\varphi$ y $U_\varphi \subseteq U$, y aplicar el teorema de singularidad removible de Riemann para $\mathbb{C}$. $\square$

Teorema 3 (De la función abierta). *Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann, y $f : S_1 \longrightarrow S_2$ función holomorfa no constante. Entonces f es abierta.*

Demostración. Sea $A \subseteq S_1$ un abierto. Para todo $a \in A$ existen $\varphi_a : U_{\varphi_a} \subseteq A \longrightarrow V_{\varphi_a}$ en S_1 y $\psi_a : U_{\psi_a} \longrightarrow V_{\psi_a}$ en S_2 cartas de a y $f(a)$ respectivamente, tales que $f(U_{\varphi_a}) \subseteq U_{\psi_a}$ y

$$g = \psi_a \circ f \circ \varphi_a^{-1} : V_{\varphi_a} \longrightarrow V_{\psi_a}$$

es holomorfa. Por el teorema de la función abierta en $\mathbb{C}$, $g(V_{\varphi_a})$ es un abierto. Como ψ_a es homeomorfismo, $f(U_{\varphi_a})$ es abierto. Por tanto,

$$f(A) = \bigcup_{a \in A} f(U_{\varphi_a})$$

es abierto. $\square$

Teorema 4 (Forma local de las funciones holomorfas). *Sean S_1, S_2 superficies de Riemann y $f : S_1 \longrightarrow S_2$ función holomorfa, con $a \in S_1$, $b = f(a)$. Existen $k \in \mathbb{N}$ y cartas $\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi$ en S_1 , $\psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi$ en S_2 tales que*

$$(i) \ a \in U_\varphi, \varphi(a) = 0; \ b \in U_\psi, \psi(b) = 0.$$

$$(ii) \ f(U_\varphi) \subseteq U_\psi.$$

(iii) La función $F = \psi \circ f \circ \varphi$ está dada por

$$F(z) = z^k \text{ para todo } z \in V_\varphi.$$

Demostración. Si f es constante, la proposición es cierta para $k = 0$. Si f no es constante, por la proposición 4 sabemos que existen cartas $\varphi_1 : U_{\varphi_1} \longrightarrow V_{\varphi_1}$ en S_1 y $\psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi$ en S_2 que cumplen las propiedades (i) y (ii). La función $f_1 = \psi \circ f \circ (\varphi_1)^{-1} : V_{\varphi_1} \longrightarrow V_\psi$ es no constante pues de serlo, por el teorema de la identidad, f lo sería. Tomamos la extensión en series de potencias de f_1 centrada en 0 y definida en $B(0, r) \subseteq V_{\varphi_1}$, el disco con centro en 0 y radio r

$$f_1(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i z^i$$

donde $a_k \neq 0$. Sea

$$g(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i z^{i-k}$$

entonces $f_1(z) = z^k g(z)$, con $g(0) \neq 0$ y $k \geq 1$ pues $f_1(0) = 0$. La función g tiene los mismos coeficientes de f_1 , salvo que sus subíndices están desplazados. Por lo que el radio de convergencia será el mismo.

Para cualquier punto $p \in \mathbb{C}$, con $p \neq 0$, el teorema de la función inversa nos asegura que existe una vecindad tal que la función $z \mapsto z^n$ es biholomorfismo. En particular, para $g(0) = a_k \neq 0$, existe una vecindad de tal manera que podemos invertir la función $z \mapsto z^k$; es decir, tomamos una de las ramas de la raíz k -ésima y componiendo esta con g , obtenemos una función holomorfa h definida en una vecindad U_{φ_2} tal que $h^k = g$. En la vecindad escogida se cumple que $h(z) \neq 0$, pues en dicha vecindad $g(z) \neq 0$. Veamos que la correspondencia

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_{\varphi_2} &\longrightarrow \varphi_2(U_{\varphi_2}) \\ z &\mapsto zh(z) \end{aligned}$$

es un biholomorfismo probando que su derivada es diferente de 0:

$$(zh(z))' = h(z) + zh'(z).$$

Supongamos que $(zh(z))' = 0$. Dado que $h(z) \neq 0$, entonces $h'(z) \neq 0$ y $z \neq 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} -zh'(z) &= h(z) \\ \frac{h'(z)}{h(z)} &= -\frac{1}{z} \\ (\log(h(z)))' &= (-\log(z))' \\ (\log(h(z)))' &= (\log(\frac{1}{z}))' \\ \log(h(z)) + c &= \log(\frac{1}{z}) \\ h(z)e^c &= \frac{1}{z} \\ h(z) &= e^{-c} \frac{1}{z} \end{aligned}$$

lo cual contradice que h esté definido en $z = 0$. La función $\log$ corresponde a tomar cualquier rama de la función logaritmo complejo. Por el teorema de la función inversa, podemos asegurar que φ_2 es biholomorfismo. Definimos la carta $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, por lo que para todo $z \in V_\varphi = \varphi_2(U_{\varphi_2}) \cap V_{\varphi_1}$

$$\begin{aligned} F(z) &= \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) \\ &= \psi \circ f \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})(z) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_2^{-1}(z) \\ &= f_1(\varphi_2^{-1}(z)) \\ &= (\varphi_2^{-1}(z))^k g(\varphi_2^{-1}(z)) \\ &= (\varphi_2^{-1}(z)h(\varphi_2^{-1}(z)))^k \\ &= (\varphi_2(\varphi_2^{-1}(z)))^k \\ &= z^k. \end{aligned}$$

□

Observación 3. Para un biholomorfismo f en $\mathbb{C}$ tal que $f(0) = 0$, cualquier representación en series de Laurent alrededor del 0 es de la forma

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$$

con $a_1 \neq 0$. Esto se sigue de la demostración del teorema anterior, pues si $a_1 = 0$ entonces se podría escribir, por medio de un cambio de cartas también biholomorfas, de la forma $z \mapsto z^k$ para $k \geq 2$, lo que contradice la inyectividad de f .

Corolario 1. Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann y $f : S_1 \rightarrow S_2$ un holomorfismo inyectivo. Entonces f es un biholomorfismo de S_1 en $f(S_1)$.

Demostración. Para cada $p \in S_1$, existen cartas de p y $f(p)$ en la que localmente se escriba la función f como $z \mapsto z^k$. Al ser f inyectiva, $k = 1$ y f es biholomorfismo en cada carta. Por tanto, es biholomorfismo sobre la imagen. $\square$

Proposición 4. El entero $k \geq 1$ que aparece en el teorema [4] es único.

Demostración. Supongamos que existen $k \in \mathbb{Z}^+$, cartas $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ en S_1 y $\psi : U_\psi \rightarrow V_\psi$ en S_2 ; y $m \in \mathbb{Z}^+$, cartas $\phi : U_\phi \rightarrow V_\phi$ en S_1 y $\gamma : U_\gamma \rightarrow V_\gamma$ en S_2 tales que ambas triplas cumplan con las propiedades del teorema 4. De modo que

$$g_1 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

cumple que $g_1(z) = z^k$ y

$$g_2 = \gamma \circ f \circ \phi^{-1}$$

cumple que $g_2(z) = z^m$.

En el abierto $\varphi(U_\varphi \cap U_\phi)$, se tiene que

$$\begin{aligned} z^k &= \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) \\ &= \psi \circ (\gamma^{-1} \circ \gamma) \circ f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \varphi^{-1}(z) \\ &= \psi \circ \gamma^{-1} \circ (\gamma \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \phi \circ \varphi^{-1}(z) \\ &= \psi \circ \gamma^{-1} \circ (\gamma \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \phi \circ \varphi^{-1}(z) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j ((\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)^m)^j \\ &= a_1^m b_1 z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots \end{aligned}$$

donde

$$\phi \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$$

y

$$\psi \circ \gamma^{-1}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j$$

con $a_1 \neq 0 \neq b_1$. De modo que

$$a_1^m b_1 = 1;$$

para todo $n \geq m + 1$,

$$c_n = 0;$$

y

$$k = m.$$

□

El número $k \in \mathbb{Z}^+$ caracteriza el comportamiento local de cualquier función holomorfa en un punto, por lo que constituye un invariante importante.

Definición 9. Dadas S_1 y S_2 superficies de Riemann, $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función holomorfa y $p \in S_1$, se definen:

- a) La **multiplicidad de f en p** es el número entero $k \geq 1$ del teorema [4] y se denota $m_p(f)$.
- b) p es un **punto de ramificación** de f si $m_p(f) \geq 2$.
- c) $q \in S_2$ es un **valor de ramificación** de f si existe $p' \in S_1$ punto de ramificación tal que $f(p') = q$.

Proposición 5. Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función holomorfa no constante. Si S_1 es compacta, entonces S_2 es compacta y f es sobreyectiva.

Demostración. Por el teorema de la función abierta $f(S_1)$ es abierto. Como f es continua, $f(S_1)$ es compacto y por tanto cerrado en S_2 . Por la conexidad de S_2 , $f(S_1) = S_2$. Luego, S_2 es compacto y f es sobreyectiva □

Proposición 6. Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función holomorfa no constante. El conjunto de puntos de ramificación de f es discreto (no tiene puntos de acumulación).

Demostración. Sea $p \in S_1$ con multiplicidad m . Por el teorema [4], existen cartas $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ en S_1 y $\psi : U_\psi \rightarrow V_\psi$ en S_2 , con $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ y $\varphi(p) = 0$, de tal manera que $\psi \circ f \circ \varphi(z) = z^m$ para todo $z \in V_\varphi$.

Sean $x \in U_\varphi \setminus \{p\}$ y $z = \varphi(x)$, podemos encontrar una vecindad V_z de z tal que $\psi \circ f \circ \varphi$ es inyectiva (hoja de la raíz m -ésima). Por tanto, f es inyectiva en $U_z = \varphi^{-1}(V_z)$, vecindad de x . Aplicando el teorema 4 a x es claro que $m_x(f) = 1$. Entonces $U_\varphi \setminus \{p\}$ no tiene puntos de ramificación y p no es punto de acumulación de los puntos de ramificación. □

Corolario 2. Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función holomorfa no constante. Si S_1 es compacta, entonces f tiene finitos puntos de ramificación.

Demostración. Es inmediato a partir de que todo subconjunto discreto de un espacio compacto es finito. □

1.4. Funciones meromorfas

Definición 10. Sea S superficie de Riemann, una **función meromorfa** sobre S es una función holomorfa $f : S' \rightarrow \mathbb{C}$ donde $S' \subseteq S$ es tal que

(i) $S \setminus S'$ es un conjunto aislado.

(ii) Para cada $p \in S \setminus S'$

$$\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty.$$

Los puntos de $S \setminus S'$ se denominan **polos** y el conjunto de polos de f se denota $Pol(f) = S \setminus S'$. El conjunto de funciones meromorfas de una superficie de Riemann S se escribe $\mathcal{M}(S)$.

Una manera equivalente de ver las funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann es como funciones holomorfas sobre $\hat{\mathbb{C}}$. Por lo que la teoría de las funciones holomorfas se puede aplicar a las funciones meromorfas.

Proposición 7. Dada S superficie de Riemann, existe una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{M}(S)$ y $Mor(S, \hat{\mathbb{C}}) \setminus \{c_\infty\}$, donde c_∞ es la función constante tal que $c_\infty(x) = \infty$, para todo $x \in S$.

Demostración. (i) Sea $f \in Mor(S, \hat{\mathbb{C}}) \setminus \{c_\infty\}$, el conjunto $f^{-1}(\infty)$ es aislado, pues de no serlo el teorema de identidad nos asegura que $f = c_\infty$. Como f es continua, para todo $p \in f^{-1}(\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$$

de donde se deriva que

$$\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty.$$

Obtenemos que f es meromorfa, y su conjunto de polos es $Pol(f) = f^{-1}(\infty)$.

(ii) Sea $f \in \mathcal{M}(S)$. Para cada $p \in Pol(f)$ existe una vecindad U de p tal que no contiene ningún otro polo. Tomamos la carta $\psi : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & : z = \infty \end{cases}$$

La función $\psi \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en $U \setminus \{p\}$. Por el teorema de la singularidad removible de Riemann, existe una extensión holomorfa f_1 de $\psi \circ f$ en U . La función $\bar{f} = \psi^{-1} \circ f_1$ es claramente una extensión holomorfa de f en U . Como es continua, $\bar{f}(p) = \infty$. Repitiendo este procedimiento para cada polo, construimos una función $\bar{f} \in Mor(S, \hat{\mathbb{C}})$.

(iii) Los procedimientos anteriores son inversos, pues en ambas direcciones hay una identificación del conjunto de $Pol(f)$ con $f^{-1}(\infty)$ y en el conjunto restante se mantiene intacta.

□

La suma y el producto de dos funciones meromorfas f y g , de una superficie de Riemann S , se define considerando tales funciones como morfismos que van a $\hat{\mathbb{C}}$, de la siguiente manera

$$(f + g)(p) = \lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x))$$

$$(fg)(p) = \lim_{x \rightarrow p} (f(x)g(x))$$

Observación 4. *Dados S superficie de Riemann y $f, g \in \text{Mor}(S, \hat{\mathbb{C}})$, para todo $p \in S$, existen vecindades V_1 y V_2 de $f(p)$ y $g(p)$, respectivamente, tales que $\infty \notin V_1 \setminus \{f(p)\}$ y $\infty \notin V_2 \setminus \{g(p)\}$. Por continuidad de las funciones, existen vecindades de U_1 y U_2 de p tales que $f(U_1) \subseteq V_1$ y $g(U_2) \subseteq V_2$. Tomando $U = U_1 \cap U_2$ se encuentra una vecindad de p tal que para cualquier $x \in U \setminus \{p\}$, $f(x), g(x) \in \mathbb{C}$. Por consiguiente las operaciones de suma y multiplicación dentro del límite están bien definidas.*

Proposición 8. *Para S superficie de Riemann, $\mathcal{M}(S)$ tiene estructura de campo con la suma y producto definido anteriormente.*

Demostración. Es necesario probar todas las propiedades de campo:

(cerra.) Sean $f, g \in \mathcal{M}(S)$, el conjunto $\text{Pol}(f) \cup \text{Pol}(g)$ es discreto. Para todo $p \in S \setminus (\text{Pol}(f) \cup \text{Pol}(g))$, existe una carta (U, φ) tal que $U \subseteq S \setminus (\text{Pol}(f) \cup \text{Pol}(g))$. Se tiene que $(f + g) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) + (g \circ \varphi^{-1})$, la cual es una suma de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. El resultado se obtiene análogamente para el producto.

(asoci.) Sean $f, g \in \mathcal{M}(S)$ y $p \in S$,

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(p) &= \lim_{x \rightarrow p} (\lim_{w \rightarrow x} (f(w) + g(w)) + h(w)) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x) + h(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} f(x) + (\lim_{w \rightarrow x} (g(w) + h(w))) \\ &= (f + (g + h))(p) \end{aligned}$$

La segunda y la cuarta igualdad se justifican por la continuidad de f y g , y porque podemos asumir que $f(x), g(x) \in \mathbb{C}$ (observación [4]). El resultado se obtiene análogamente para el producto.

(conm.) Sean $f, g \in \mathcal{M}(S)$ y $p \in S$, $(f + g)(p) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) + f(x) = (g + f)(p)$. El resultado se obtiene análogamente para el producto.

(distri.) Sean $f, g, h \in \mathcal{M}(S)$ y $p \in S$,

$$\begin{aligned} f(g + h)(p) &= \lim_{x \rightarrow p} f(x) (\lim_{w \rightarrow x} (g(w) + h(w))) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} f(x) (g(x) + h(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) + f(x)h(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} (\lim_{w \rightarrow x} f(w)g(w) + \lim_{u \rightarrow x} f(u)h(u)) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) + (fh)(x) \\ &= (fg + fh)(p) \end{aligned}$$

El resultado se obtiene análogamente para el producto.

(neutr.) Para la suma, el elemento neutro es la función constante 0 y para el producto, la función constante 1. Para todos $f \in \mathcal{M}(S)$ y $p \in S$,

$$\begin{aligned}(0 + f)(p) &= \lim_{x \rightarrow p} 0 + f(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p) \\ (1f)(p) &= \lim_{x \rightarrow p} 1f(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)\end{aligned}$$

(inver.) Para todo $f \in \mathcal{M}(S)$, definimos

$$(-f)(p) = \begin{cases} -f(p) & \text{si } f(p) \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{si } f(p) = \infty \end{cases}$$

y

$$\left(\frac{1}{f}\right)(p) = \begin{cases} \frac{1}{f(p)} & \text{si } f(p) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{si } f(p) = 0 \\ 0 & \text{si } f(p) = \infty \end{cases}$$

Son meromorfas por ser composiciones funciones meromorfas. Para todo $p \in S$,

$$(f + (-f))(p) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) - f(x) = \lim_{x \rightarrow p} 0 = 0$$

$$\left(f\left(\frac{1}{f}\right)\right)(p) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow p} 1 = 1$$

pues podemos asegurar que $x \neq 0$.

□

Definición 11. Para S una superficie de Riemann, $\mathcal{M}(S)$ se denomina el **campo de funciones meromorfas** de S .

Capítulo 2

Clasificación de superficies topológicas compactas y orientables

2.1. Orientabilidad de superficies

La noción de orientabilidad en superficies tiene diferentes formulaciones. Una idea informal es que en una superficie orientable se puede hablar de dos formas de pararse en ella, y estas se tienen en un sentido global; es decir, son consistentes con la elección de cualquier carta. Sin embargo, esta aproximación adquiere sentido cuando la superficie está encajada en $\mathbb{R}^3$, en donde en cada punto se puede escoger uno de los dos vectores unitarios normales a la superficie. Que esta elección no podría ser consistente en toda la superficie, lo muestra la banda de Möbius. Para no depender del medio en el que está encajada la superficie, damos una definición intrínseca.

Definición 12. Una superficie diferenciable S es **orientable** si existe un atlas compatible tal que cualquier cambio de cartas tiene determinante jacobiano positivo en todo punto. Se dice que S es **orientada** si está dotada con algún atlas para el cual cualquier cambio de cartas tiene determinante jacobiano positivo en todo punto.

Observación 5. La definición se hace para superficies diferenciables: análogas a las superficies de Riemann, pero debilitando el requisito del cambio de cartas biholomorfo a que el cambio de cartas sea difeomorfismo como función de $\mathbb{R}^2$. Si bien acá no se menciona, por medio de una triangulación sobre una superficie, se puede definir la orientabilidad [Hat02, Hallen Hatcher, 2002, pág. 233 y 234]. Por el teorema de Radó (teorema 5), esta definición tiene sentido para todas las superficies topológicas.

Proposición 9. Sea S superficie de Riemann, donde A es el atlas que le da estructura diferenciable compleja. La pareja (S, A) es una superficie orientada. En particular, S es una superficie orientable.

Demostración. Dada $\phi : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ función biholomorfa. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, el jacobiano es de la forma

$$J_p \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(p) \\ -\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(p) & \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(p) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Si calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(p) \\ -\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(p) & \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(p) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(p)\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(p)\right)^2 > 0. \quad (2.2)$$

La desigualdad es estricta dado que al ser difeomorfismo, su determinante jacobiano es diferente de 0. $\square$

Observación 6. *Es bien conocido en la teoría de variedades diferenciables reales que toda variedad orientable y conexa posee dos orientaciones [Car92, Manfredo do Carmo, 1992, pág. 18]. Por el contrario, las superficies de Riemann poseen sólo una: la determinada por su estructura diferenciable compleja. La correspondiente a la otra orientación de la superficie, vista como superficie diferenciable real, se da en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 8. *Dada una superficie de Riemann S , con atlas $\{\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi\}_{\varphi \in \Lambda}$. Definimos la **superficie de Riemann conjugada** como S , junto con el atlas $\{\bar{\varphi} : U_{\bar{\varphi}} \longrightarrow V_{\bar{\varphi}}\}_{\varphi \in \Lambda}$, donde $\bar{\varphi}$ es la composición de la función conjugada con φ .*

Definición 13. *Dada S una superficie diferenciable, una función $\gamma : [0, 1] \longrightarrow S$ es una **curva de Jordan** sobre S si*

- i. $\gamma(0) = \gamma(1)$
- ii. $\gamma \upharpoonright_{[0,1)}$ es inyectiva
- iii. para toda carta (U, φ) de S , la función $\varphi \circ \gamma$ es diferenciable a trozos.

Proposición 10. *Si S es una superficie diferenciable orientada, entonces para cada curva de Jordan sobre S tal que $\gamma([0, 1]) = \partial\Omega$, con Ω una región difeomorfa a $\mathbb{D}$, existe una orientación canónica de la curva, inducida por la orientación de S , tal que no depende del cambio de cartas.*

Demostración. Sea $p \in \gamma([0, 1])$ y (U, φ) carta tal que $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U \cap \bar{\Omega}) = \mathbb{D} \cap \bar{\mathbb{H}}$. Definimos la orientación canónica como aquella que va de $\varphi^{-1}(-\epsilon)$ a $\varphi^{-1}(\epsilon)$. Sean dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) con las características de antes. Escribimos el cambio de coordenadas $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ como $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ con $G = (G_1, G_2)$ y $g = G \upharpoonright_{(-1,1)}$.

Para todo $x \in (-1, 1)$, $G_2(x, 0) = 0$. Entonces $\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, 0) = 0$. Como $G_2(x, y) > 0$ si $y > 0$ y $G_2(x, y) < 0$ si $y < 0$, la función es creciente alrededor de $y = 0$. De modo que $\frac{\partial G_2}{\partial y}(x, 0) > 0$. Utilizando la hipótesis,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, 0) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, 0) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, 0) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, 0) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, 0) \\ 0 & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, 0) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}(x, 0)\right)\left(\frac{\partial G_2}{\partial y}(x, 0)\right) > 0. \quad (2.3)$$

Dado que $\frac{\partial G_2}{\partial y}(x, 0) > 0$, se tiene que

$$g'(x) = \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, 0) > 0$$

y la función es creciente, por lo cual la dirección escogida es consistente. $\square$

Observación 7. En el caso de una superficie encajada en $\mathbb{R}^3$, la orientación de la superficie nos dice de qué lado debemos observar cada punto de la superficie. Si recorremos la curva en la dirección indicada por la orientación inducida, la región difeomorfa a $\mathbb{D}$ queda del lado izquierdo, de la misma forma que el semiplano superior $\mathbb{H}$ queda del lado izquierdo al recorrer el eje real en el sentido positivo.

2.2. Triangulación y polígonos etiquetados

Definición 14. Una superficie es **triangulada** si está cubierta por una unión de conjuntos homeomorfos a un triángulo en $\mathbb{R}^2$, tales que la intersección de dos de ellos es vacía, un vértice o una arista. Cuando nos referimos a vértices o aristas es a la identificación de los conjuntos por medio de la imagen de los homeomorfismos.

Definición 15. La cubierta por triángulos de una superficie triangulable se denomina una **triangulación** y cada conjunto será un **triángulo**. Si una superficie admite una triangulación, entonces se dice **triangulable**.

Teorema 5 (Radó). Toda superficie topológica compacta es triangulable.

Una prueba de este teorema, probado por primera vez por Tibor Radó en 1924, se puede encontrar en [Tho92, Carsten Thomassen, 1992, pág. 126 y 127].

Definición 16. Un **polígono etiquetado** es un polígono plano con una dirección definida sobre cada arista de su frontera y $2m$ aristas de tal manera que se encuentran identificadas dos a dos. En este trabajo solamente consideraremos superficies orientadas, así que requeriremos además que la identificación de las aristas se haga con las orientaciones opuestas, por lo que las aristas se denotarán con una letra y su arista identificada como la inversa (e y e^{-1}).

Proposición 11. Dada una superficie compacta y orientada con una triangulación, se tiene que:

- (i) La triangulación tiene un número finito de triángulos.
- (ii) Existe un polígono plano tal que, identificando sus aristas dos a dos, es homeomorfo a la superficie.
- (iii) Las aristas que se identifican lo hacen en sentidos opuestos.

Demostración. (i) Sea $\{T_i : i \in I\}$ la triangulación de S . Para T_i triángulo, denotamos T'_i al triángulo plano correspondiente y b_i al baricentro de T'_i . Existe $\epsilon_i > 0$ tal que para todo $q \in \partial T'_i$ se tiene que $|b_i - q| > \epsilon_i$. Consideremos

$$p \in \bigcup_{i \in I} \partial T_i$$

y sean $T_1, \dots, T_m$ los triángulos tal que p está en sus fronteras. Tomamos $\epsilon_p = \min\{\epsilon_i\}_{i=1}^m$, $B'_i = B(p'_i, \epsilon_p) \cap T'_i$, con p'_i la imagen de p en T'_i , y B_i la imagen inversa de B'_i en S . Se define

$$B_p = \bigcup_{i=1}^m B_i,$$

la familia $\{int(T_i)\}_{i \in I} \cup \{B_p\}_{p \in \bigcup_{i \in I} \partial T_i}$ es un cubrimiento abierto de S . Por tanto, existe un subrecubrimiento finito. Como las imágenes inversas de los baricentros están solamente en cada triángulo, todos los triángulos deben estar en este subrecubrimiento. Como consecuencia I es finito.

- (ii) Tomamos un triángulo T_1 y su representación plana T'_1 . Cada arista del triángulo, e_j ($j = 1, 2, 3$), es compartida con otro triángulo T'_2 . Concatenamos los triángulos planos correspondientes, quedando un polígono de seis lados. Repetimos este proceso hasta agotarse los triángulos. Obtenemos entonces un polígono de tal manera que sus aristas están identificadas dos a dos pues la superficie no tiene frontera y cada arista se encuentra en dos triángulos.

Cabe observar que la construcción no es única pues es posible que un nuevo triángulo se pueda concatenar con hasta tres que ya estén en la construcción anterior. Por lo que hay una elección de alguno de los tres.

- (iii) Dados dos triángulos T_1 y T_2 con una arista en común. Para $p \in T_1 \cap T_2$. Escogemos una carta (U, φ) tal que $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U) = \mathbb{D}$ y $\varphi(T_1 \cap T_2) = (-1, 1)$. Sin pérdida de generalidad, $\varphi(U \cap T_1) = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ y $\varphi(U \cap T_2) = \mathbb{D} \setminus \mathbb{H}$. La orientación definida en $\mathbb{R}$, desde $\mathbb{H}$ es opuesta a la definida desde $\mathbb{C} \setminus \mathbb{H}$. De modo que las orientaciones en cada triángulo son opuestas.

□

Corolario 3. *Toda superficie topológica compacta y orientada se puede identificar con un polígono etiquetado, visto como espacio topológico cociente.*

Demostración. La topología del polígono será la topología cociente de la inducida por $\mathbb{R}^2$ identificando las aristas correspondientes. La proposición [12], asegura el resultado.

□

Observación 8. *En [Sti92, John Stillwell, 1992, pág. 127 y 128], se prueba que toda superficie topológica compacta y orientable tiene una realización como superficie con una métrica Riemanniana de curvatura constante definida por medio de la triangulación.*

Definición 17. *Dado un polígono etiquetado, una **palabra** correspondiente de ese polígono es la concatenación de las letras que identifican a cada una de las aristas en el orden correspondiente a recorrer la frontera del polígono en el sentido definido en su frontera. Dicha concatenación es circular: puede iniciar desde cualquier letra.*

Definición 18. *Dada una palabra w , una **subpalabra** v de w es una subcadena de w de tal manera que las letras de v que están consecutivas, también aparecen consecutivas y en el mismo orden en w . La subpalabra v se dice **cerrada** si para cada letra a que esté en v , entonces a^{-1} está también en v .*

2.3. Teorema de clasificación

El procedimiento para la clasificación de las superficies es la transformación de cualquier polígono etiquetado en un tipo de polígono etiquetado canónico. Para esto introducimos dos operaciones sobre un polígono etiquetado que generan uno nuevo, de tal manera que ambos representen la misma superficie topológica.

Definición 19. Decimos que una palabra w se **transforma** en una palabra w' si ambas representan la misma superficie topológica.

Observación 9. Para describir las palabras, a lo largo de la sección se utilizan dos tipos de puntos suspensivos: $\dots$, cuyo significado corresponde a una subpalabra cualquiera, incluyendo la posible subpalabra vacía, y $\cdots$, cuyo significado corresponde a completar una secuencia descrita. Por ejemplo, si queremos expresar la subpalabra que inicia con a_1 y termina con a_n , en donde las letras intermedias están dadas por la variación del subíndice de 1 a n , escribimos el segundo tipo de puntos suspensivos: $a_1 \cdots a_n$.

Operación 1 (Eliminación de elementos triviales (Figura 2.1)). Dada una palabra w que contenga la letra a de alguna de las siguientes maneras $w = \dots baa^{-1}c \dots$ o $w = \dots ba^{-1}ac \dots$. En cualquier caso, podemos reemplazarla por $w' = \dots bc \dots$

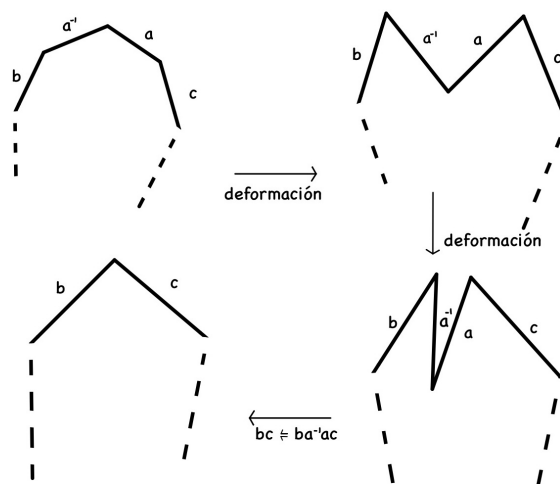


Figura 2.1: Eliminación de elementos triviales

Operación 2 (Cortar y pegar (Figura 2.2)). Dado un polígono etiquetado con w una palabra correspondiente a este polígono. Se toma cualquier subpalabra de w de la forma $x = a_1 \cdots a_m$ y alguna letra a_i ($i = 1, \dots, m$) en la subpalabra x tal que a_i^{-1} no está en la subpalabra x y no es consecutiva con a_i . Se realiza un corte en el polígono desde el vértice inicial de a_1 hasta el vértice final de a_m , dividiendo el polígono en dos. La parte que contiene a las aristas correspondientes a la subpalabra x , se pegan a la otra parte por la arista a_i^{-1} , formando un nuevo polígono etiquetado.

Por lo que si $w = \dots a_1 \dots a_m \dots a_i^{-1} \dots$ es una palabra del polígono, se traza un segmento x desde el vértice inicial de a_1 hasta el vértice final de a_m , se corta el polígono en dos polígonos que tienen al segmento x como arista y cuyas palabras son $w_1 = xa_1a_2 \dots a_i \dots a_m$ y $w_2 = \dots x^{-1} \dots a_i^{-1} \dots$. Finalmente, se pegan los dos polígonos en las aristas a_i y a_i^{-1} , obteniendo un nuevo polígono con una palabra $w' = \dots x^{-1} \dots a_{i+1}a_{i+2} \dots a_{m-1}a_mxa_1a_2 \dots a_{i-2}a_{i-1} \dots$, tal como se indica en la figura 2.2.

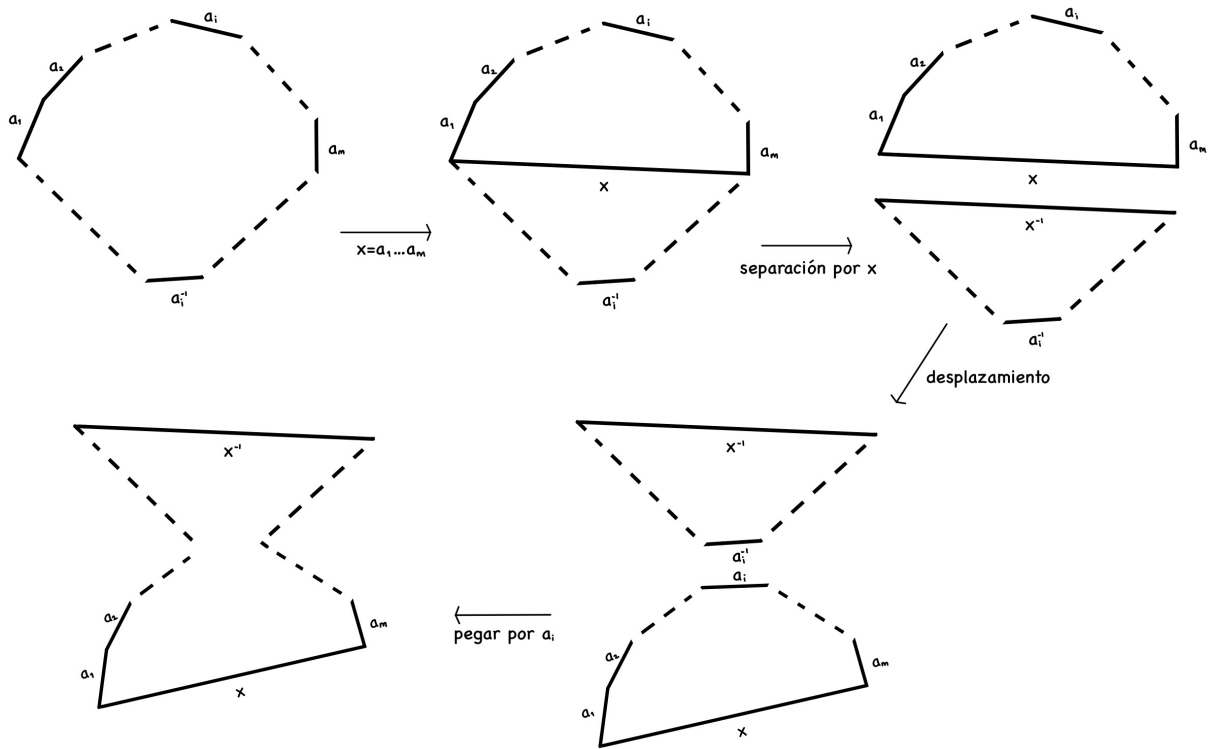


Figura 2.2: Cortar y pegar

Definición 20. Una palabra está en **forma normalizada** si es de alguna de las siguientes formas

(i) $w_0 = xx^{-1}$

(ii) $w_g = x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$ para algún $g \in \mathbb{Z}^+$

Observación 10. Al final de la sección veremos que la forma normalizada w_0 representa a la esfera y la forma w_g , a la superficie de género g .

Definición 21. Dos letras a y b de una palabra w se dicen **vinculadas** si aparecen en ella con la siguiente disposición $w = \dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$.

Proposición 12. Dada una palabra w . Si w no puede transformarse en la forma normalizada w_0 , entonces existen dos letras vinculadas.

Demostración. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ las letras que aparecen en la palabra w , junto con sus inversas. Procedemos por inducción sobre n , el número de parejas de letras que aparecen en la palabra w . Si $n = 1$, entonces $w = a_1 a_1^{-1} = w_0$.

Supongamos que la palabra w tiene $n + 1$ parejas de letras. Si a_n y a_n^{-1} son consecutivas, entonces podemos aplicar la operación 1 y obtenemos una palabra con n parejas de letras, a la cual se le aplica la hipótesis de inducción. Si a_n y a_n^{-1} no son consecutivas, entonces existe por lo menos una letra tal que está entre a_n y a_n^{-1} . Si existe una letra a_i entre a_n y a_n^{-1} tal que a_i^{-1} no está entre a_n y a_n^{-1} , entonces las letras a_i y a_n están vinculadas. Si para toda letra a_i entre a_n y a_n^{-1} , la letra a_i^{-1} está entre a_n y a_n^{-1} , entonces tanto la subpalabra formada por las letras entre a_n y a_n^{-1} como la subpalabra formada por las letras entre a_n^{-1} y a_n son subpalabras cerradas de a lo más n parejas de letras, por lo cual aplicamos la hipótesis de inducción a estas. Si las dos subpalabras se transforman en la forma w_0 , entonces toda la palabra se transforma en la forma w_0 . De lo contrario, existen dos letras vinculadas. $\square$

Lema 2. Sean w una palabra que se puede descomponer en dos subpalabras cerradas v_1 y v_2 de tal forma que $w = v_1 v_2$, y u una subpalabra de v_1 . Si v_1 se puede transformar en u por medio de las 2 operaciones descritas, entonces w se puede transformar en $u v_2$.

Demostración. Si se efectúa la operación 1 sobre v_1 , se puede replicar la misma operación sobre $v_1 v_2$. Si se efectúa la operación 2 sobre v_1 , el corte y pegado no involucra aristas de v_2 , por lo que se puede replicar en $v_1 v_2$ sin modificar v_2 . Si v_1 se puede transformar en u por medio de las 2 operaciones, estas operaciones pueden ser replicadas en $w = v_1 v_2$ de tal manera que se transforma en $u v_2$. $\square$

Proposición 13. Dadas una palabra w y subpalabras cerradas $v_1, v_2, \dots, v_m$, con ese orden de aparición en la palabra w . Si w no puede transformarse en la concatenación de las subpalabras $v_1 v_2 \dots v_m$, entonces existen dos letras vinculadas que no están en las subpalabras v_i , para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre el número de subpalabras m . Para $m = 0$, es equivalente a la proposición 13. Ahora, consideramos $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ subpalabras cerradas de w y v'_m la subpalabra formada tras eliminar v_{m+1} de w . Por el lema anterior, si v'_m puede transformarse en $v_1 v_2 \dots v_m$, entonces w puede transformarse en $v_1 v_2 \dots v_m v_{m+1}$. Por lo cual si w no puede transformarse en $v_1 v_2 \dots v_m v_{m+1}$, entonces v'_m no puede transformarse en $v_1 v_2 \dots v_m$. Por la hipótesis de inducción, existen dos letras vinculadas en v'_m que no están en v_i , para $i = 1, \dots, m$. Por lo tanto estas letras están vinculadas en w . $\square$

Proposición 14. Dadas dos letras a y b vinculadas en la palabra w de tal manera que $w = v_1 a v_2 b v_3 a^{-1} v_4 b^{-1}$, donde v_1, v_2, v_3, v_4 son subpalabras de w . Se puede transformar w a una palabra de la forma $w' = x y x^{-1} y^{-1} v_1 v_2 v_3 v_4$.

Demostración. Se obtiene de realizar los siguientes cortes y pegados. Se corta por la subpalabra $c = a v_2 b$ y pegando en la arista b . El polígono etiquetado resultante se corta por la subpalabra $x^{-1} = v_4 c^{-1}$ y se pega por la arista c^{-1} . Por último, se corta por $y = v_4 v_3 a^{-1}$ y se pega por la arista a^{-1} . La prueba se encuentra detallada en la figura 2.3. $\square$

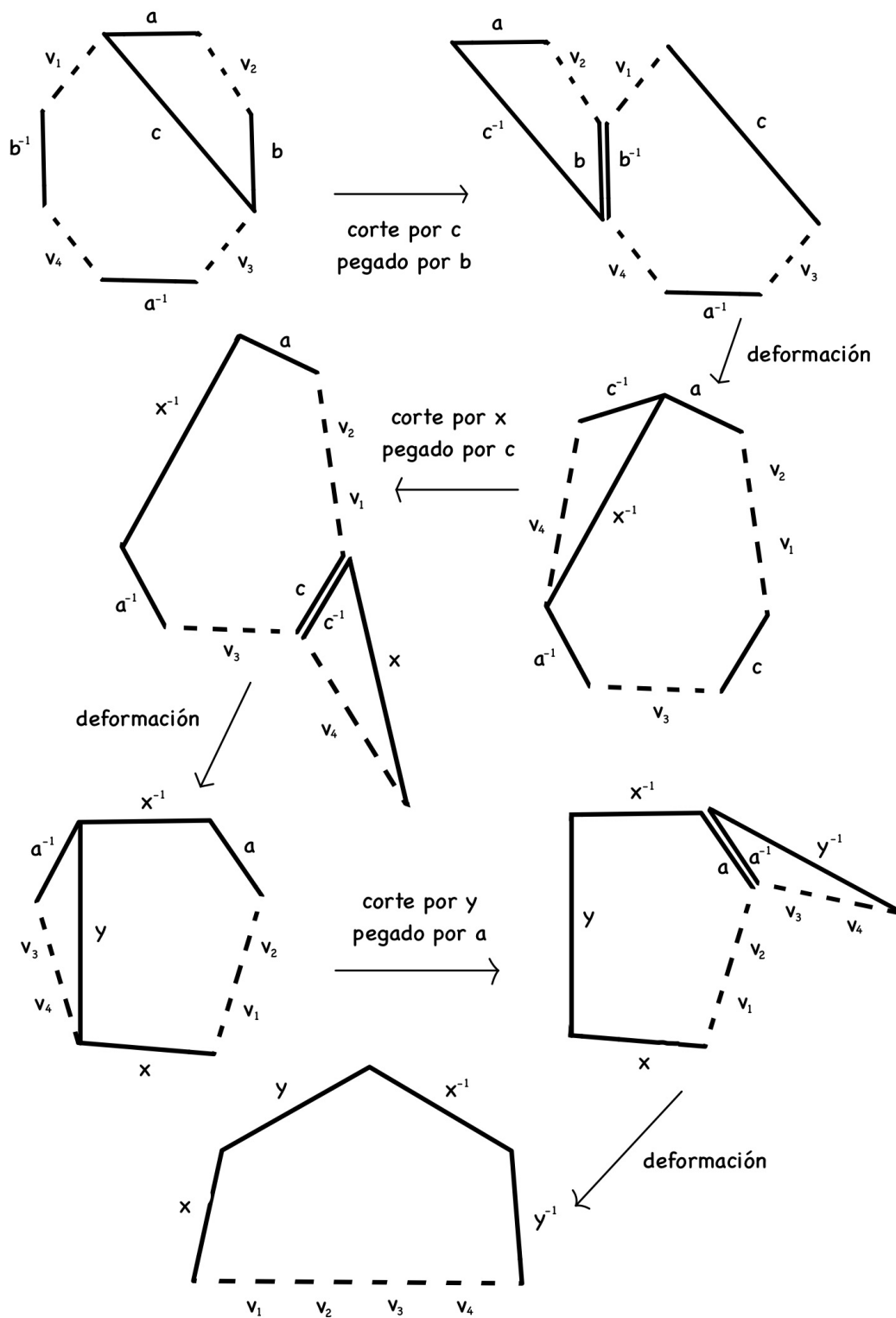


Figura 2.3: Demostración gráfica proposición [15]

Proposición 15. *Todo polígono etiquetado se puede transformar en uno con una palabra en forma normalizada*

Demostración. Dado un polígono etiquetado con palabra w . Si w no tiene una pareja de letras vinculadas, entonces se puede transformar en la forma normalizada w_0 . Si w tiene dos letras vinculadas a_1 y b_1 , se puede transformar en una palabra de la forma $w_1 = \dots x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \dots$.

Sea $v_1 = x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}$, esta es una subpalabra cerrada de w_1 . Si w_1 no tiene letras vinculadas que no estén en v_1 , entonces se puede transformar en v_1 y estaría en forma normalizada. Si w_1 tiene letras vinculadas que no estén en v_1 , entonces se puede transformar en una palabra de la forma $w_2 = \dots x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \dots x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} \dots$. Las subpalabras v_1 y $v_2 = x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1}$ son cerradas. Si w_2 no tiene letras vinculadas que no estén en v_1 ni v_2 , entonces se puede transformar en $v_1 v_2$. Si w_2 tiene letras vinculadas que no estén en v_1 , ni v_2 , entonces se puede transformar en una palabra de la forma $w_3 = \dots x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \dots x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} \dots x_3 y_3 x_3^{-1} y_3^{-1} \dots$.

Repetiendo este razonamiento inductivamente, se obtiene que w se puede transformar en una palabra en forma normalizada pues la cantidad de letras es finita. $\square$

Teorema 6 (Clasificación de superficies compactas y orientables). *Las superficies topológicas compactas y orientables son homeomorfas a un polígono etiquetado en forma normalizada. Es decir, se determinan por un número $g \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Toda superficie topológica compacta y orientable es homeomorfa a un polígono etiquetado. Este se puede representar en forma normalizada. $\square$

Observación 11. *Podemos formar una palabra producto de concatenar varias palabras. Esta palabra corresponde a la suma conexa de las superficies generadas por cada una de las palabras iniciales.*

Definición 22. *Dada una superficie topológica compacta y orientada, el número natural g se denomina el **género** de la superficie.*

Observación 12. *Una definición que resulta equivalente del género de una superficie S es: el máximo número de cortes con una curva de Jordan tal que mantiene a la superficie conexa. Cuando hablamos de cortes nos referimos a tomar $S \setminus \gamma(I)$, donde $\gamma : I \rightarrow S$ es una curva de Jordan. Informalmente se dice que el género es la cantidad de huecos de la superficie.*

Veamos ahora que las superficies compactas y orientables son:

1. La esfera
2. La suma conexa de g toros.

Caso 1. Si la superficie tiene forma normalizada w_0 , se sigue de la figura 2.4 que es la esfera.

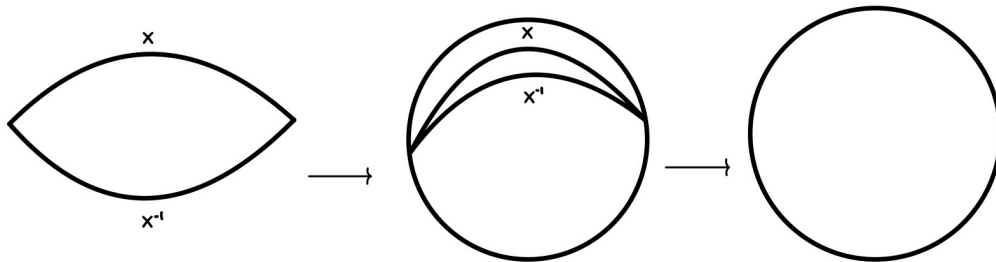


Figura 2.4: Esfera

Caso 2. Si la superficie tiene forma normalizada w_1 , se sigue de la figura 2.5 que es el toro.

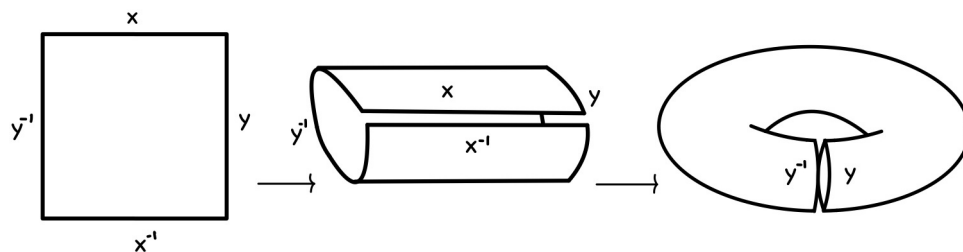


Figura 2.5: Toro

Caso 3. Si la superficie tiene forma normalizada w_2 , se sigue de la figura 2.6 que es una suma conexa de dos toros.

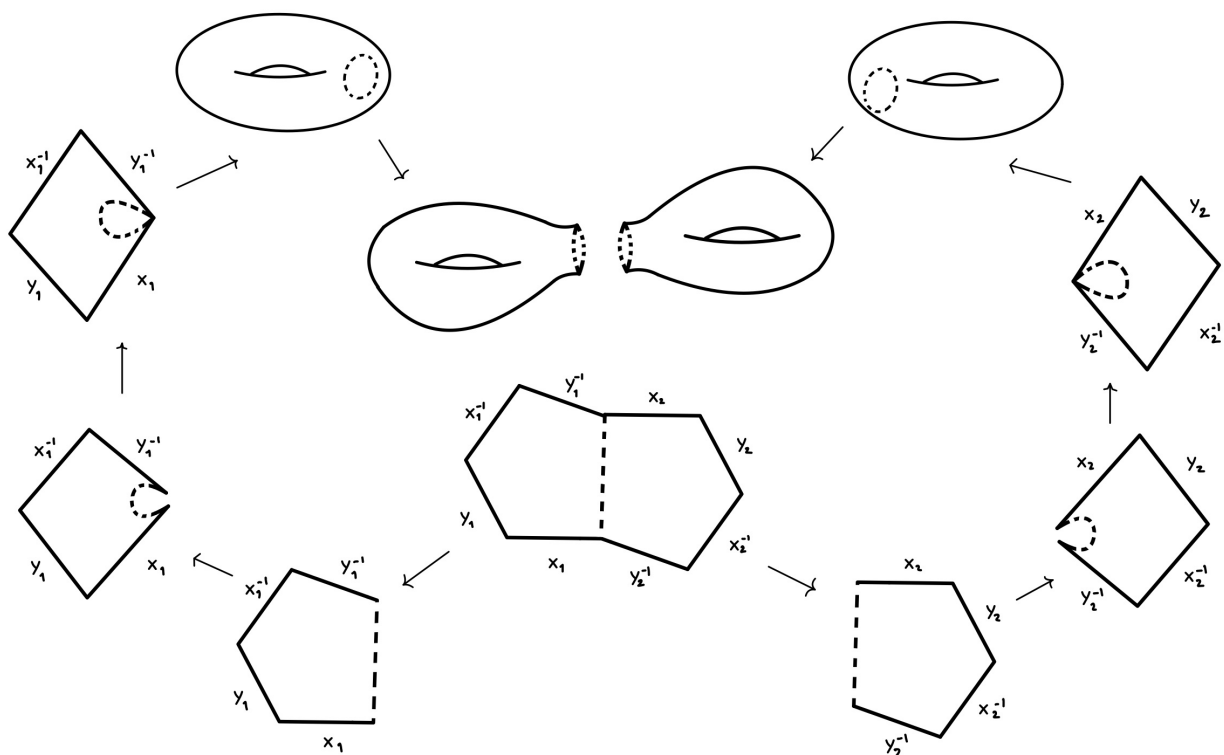


Figura 2.6: Suma conexa de dos toros

Caso 4. Si la superficie tiene forma normalizada w_g , con $g > 2$, se sigue de la figura 2.7, por un razonamiento inductivo, que es una suma conexa de g toros.

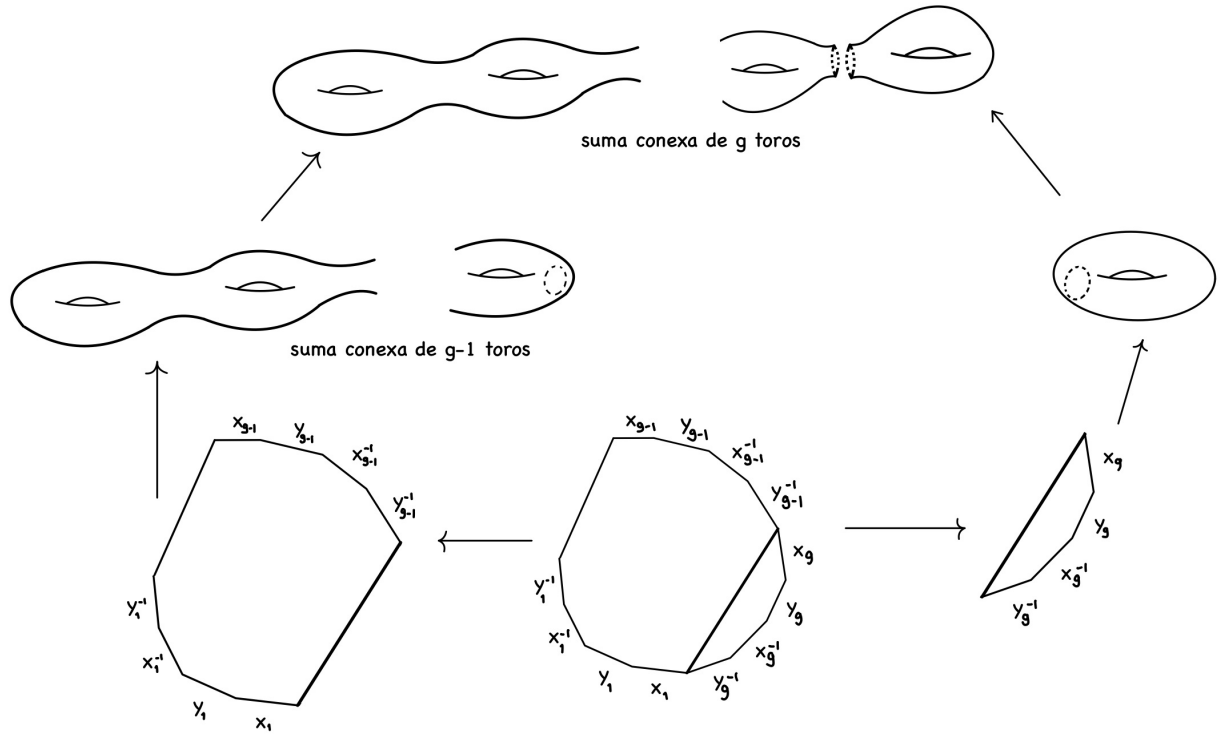


Figura 2.7: Suma conexas de g toros

2.4. Característica de Euler

Vimos como el género de una superficie compacta y orientable la determina topológicamente. Otro invariante importante y estrechamente relacionado con el género se denomina la característica de Euler.

Definición 23. Sea S una superficie topológica dotada de una triangulación. La **característica de Euler** de S es el número

$$\chi(S) = v - a + c$$

en donde v , a y c son el número de vértices, aristas y caras de la triangulación, respectivamente.

Observación 13. En este texto definimos la característica de Euler para superficies triangulables. Sin embargo, también puede ser definida para una clase más general de espacios topológicos: los CW complejos. La definición resulta independiente de la manera en cómo se dé la triangulación.

Definición 24. *Dado un polígono etiquetado P tal que sus aristas pueden estar identificadas con a lo más otra arista. Su característica de Euler está dada por la misma fórmula*

$$\chi(P) = v - a + c$$

donde los vértices y aristas que se identifican se cuentan como uno.

Proposición 16. *Sea S una superficie compacta y orientable, dotada de una triangulación. Su característica de Euler es igual a la de cualquier polígono etiquetado asociado a ella.*

Demostración. Al aplanar la superficie triangulada es claro que se mantiene en la figura plana la misma cantidad de triángulos y las mismas relaciones de pegamiento; por lo que su característica de Euler también lo hace. Recordemos que en la construcción de la proposición [12. ii.] el paso 1 es aplanar un triángulo inicial T_1 y el paso n -ésimo ($n > 1$) es pegar un n -ésimo triángulo a la construcción del paso anterior.

Sean T_n el triángulo n -ésimo que se pega, Q_n la construcción en el paso n (los n triángulos pegados) y P_n el polígono resultante de eliminar las aristas y vértices interiores de Q_n . Vamos a probar por inducción sobre n que $\chi(P_n) = \chi(Q_n)$, donde

$$\chi(Q_n) = v_{Q_n} - a_{Q_n} + c_{Q_n}$$

y

$$\chi(P_n) = v_{P_n} - a_{P_n} + c_{P_n}$$

con v_{Q_n} , a_{Q_n} y c_{Q_n} ; y v_{P_n} , a_{P_n} y c_{P_n} el número de vértices, aristas y caras que aparecen en Q_n y P_n respectivamente. Para $n = 1$ es inmediato pues $P_n = Q_n$. Para $n > 1$ tenemos múltiples casos

- (i) T_n se pega exactamente en una arista a Q_{n-1} y P_{n-1} (figura 2.8).
- (ii) T_n se pega exactamente en dos aristas de Q_{n-1} y P_{n-1} . Este caso tiene las subdivisiones
 - a. Se identifica un pareja de vértices que no estaban identificados (figura 2.9).
 - b. Los vértices que identifica ya estaban identificados (figura 2.10).
- (iii) T_n se pega exactamente en tres aristas de Q_{n-1} y P_{n-1} . Este caso puede ser una combinación de las siguientes situaciones
 - a. Los vértices que identifica ya estaban identificados (figura 2.11).
 - b. Se identifica una pareja de vértices que no estaban identificados (figura 2.12).
 - c. Se identifican dos parejas de vértices que no estaban identificados (figura 2.13).
 - d. Se identifican tres parejas de vértices que no estaban identificados (figura 2.14).

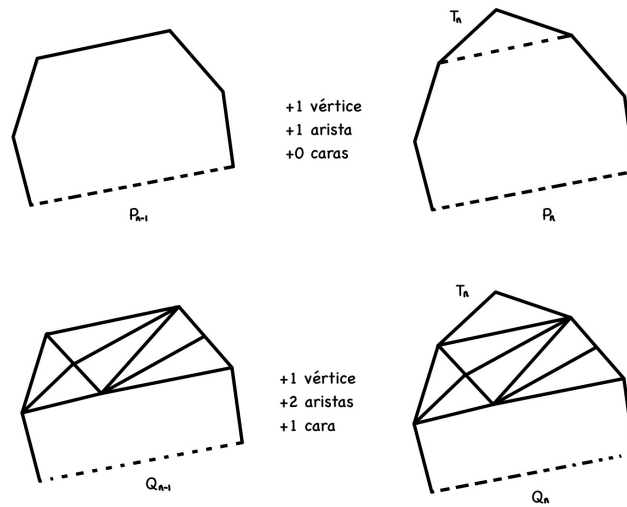


Figura 2.8: Caso (i)

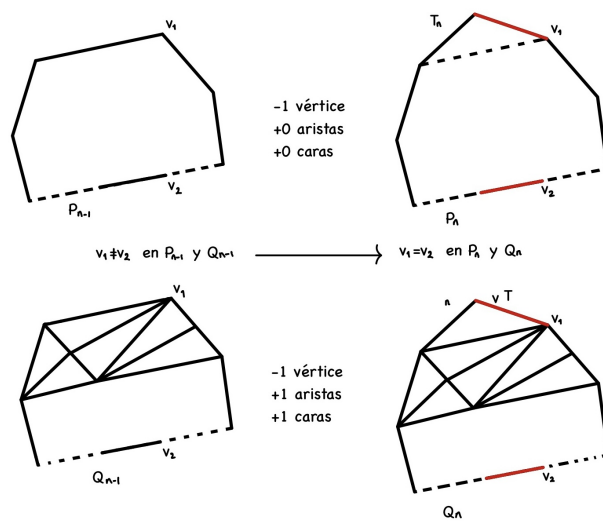


Figura 2.9: Caso (ii a.)

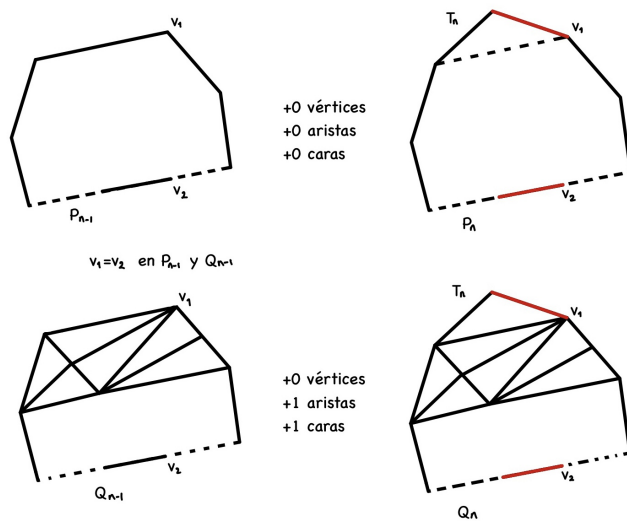


Figura 2.10: Caso (ii b.)

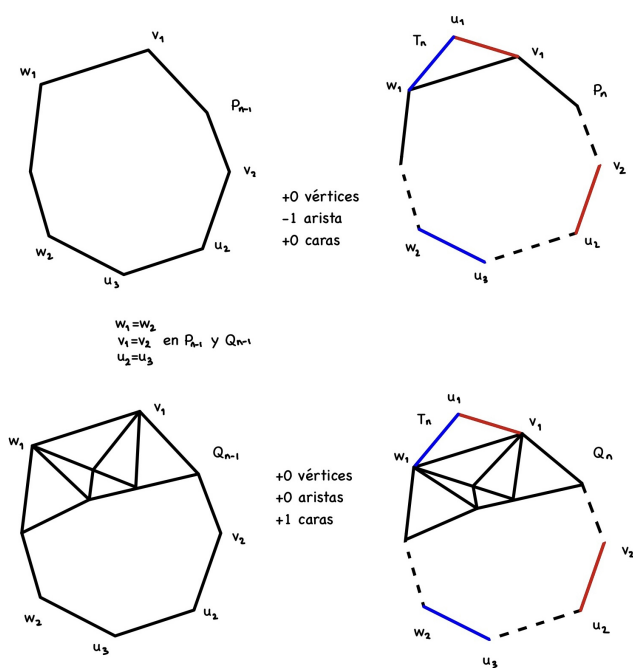


Figura 2.11: Caso (iii a.)

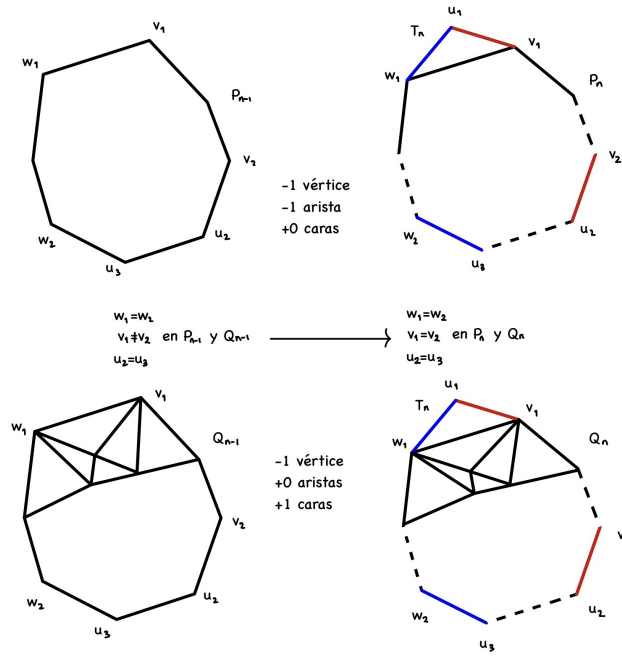


Figura 2.12: Caso (iii b.)

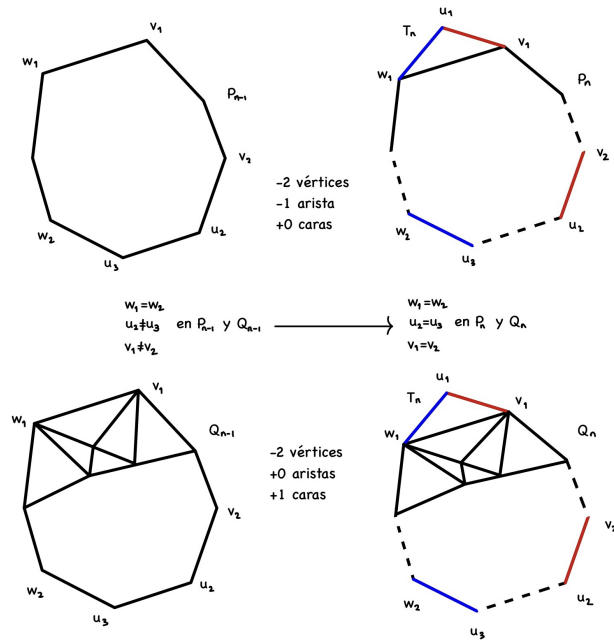


Figura 2.13: Caso (iii c.)

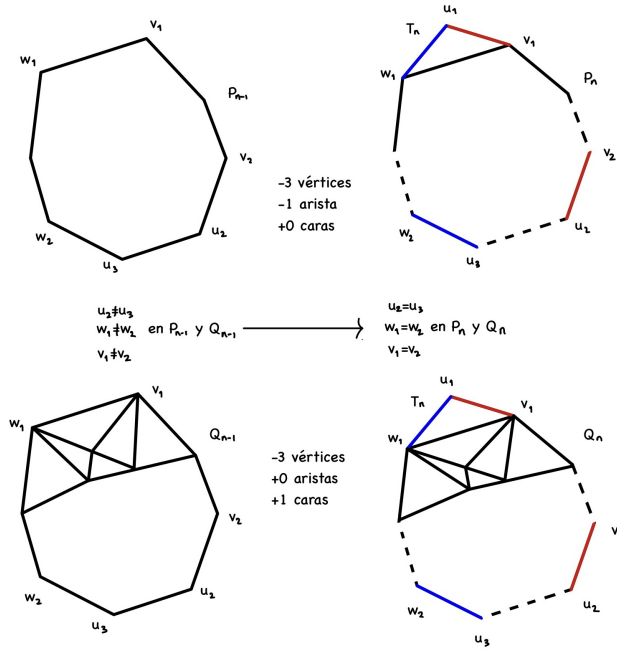


Figura 2.14: Caso (iii d.)

En cualquiera de los casos tenemos que

$$\chi(P_n) - \chi(P_{n-1}) = \chi(Q_n) - \chi(Q_{n-1}).$$

De modo que al pegar todos los triángulos, el polígono etiquetado resultante tiene la misma característica de Euler que la superficie. $\square$

Proposición 17. *Sea S superficie compacta y orientable, dotada de una triangulación. Su característica de Euler es igual a la de su polígono normalizado.*

Demostración. Para esta prueba nos sujetaremos de los argumentos utilizados en probar el teorema de clasificación de superficies compactas y orientables. Para llegar de una superficie a su polígono normalizado, primero pasamos de la superficie a un polígono etiquetado asociado a ella. Ahora se va a argumentar que del polígono etiquetado asociado a una triangulación podemos pasar al polígono normalizado, sin alterar la característica de Euler. Por lo que basta probar que al ejecutar cada una de las operaciones la característica de Euler permanece invariante.

Operación 1: eliminación de elementos triviales. Dado un polígono etiquetado P con una palabra de la forma $w = \dots baa^{-1}c \dots$. Sea Q el polígono resultado de aplicar la eliminación de los elementos a y a^{-1} . La cantidad de caras se mantiene; las aristas se reducen en una: a y a^{-1} representan una sola arista; los vértices se reducen igualmente en uno: el vértice de la mitad. De donde

$$\begin{aligned} \chi(P) &= v - a + 1 \\ &= (v - 1) - (a - 1) + 1 \\ &= \chi(Q). \end{aligned}$$

Operación 2: cambio de variable. En esta operación todos los vértices que se generan están identificados con alguno que ya se encontraba en el polígono inicial, por lo cual el número de vértices se mantiene constante. Se generan dos nuevas aristas y se eliminan dos, por lo que el número de aristas se mantiene constante. Antes y después de realizar la operación el número de caras es 1. De modo que la operación no afecta la característica de Euler.

□

Corolario 4. *La característica de Euler es independiente de la triangulación escogida.*

Demostración. Dadas dos triangulaciones de la misma superficie. Como ambas tienen el mismo polígono normalizado, entonces tienen la misma característica de Euler. □

Corolario 5. *Dada S una superficie topológica compacta y orientable. Entonces*

$$\chi(S) = 2 - 2g$$

donde g es el género de S .

Demostración. Si S es una superficie de género g , su polígono normalizado tiene $4g$ aristas identificadas dos a dos. Todos los vértices se pegan y tiene una sola cara. Por lo que

$$\begin{aligned}\chi(S) &= 1 - 2g + 1 \\ &= 2 - 2g\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Caracterización topológica de las superficies de Riemann

La naturaleza topológica de la definición original de Riemann sobre sus superficies lleva a preguntarse si la estructura diferenciable compleja de una superficie de Riemann puede ser determinada por una cubriente ramificada de la superficie topológica subyacente, con codominio la esfera de Riemann. Este capítulo responderá afirmativamente a esta pregunta para el caso compacto.

3.1. De superficies de Riemann compactas a cubrientes ramificadas

En el capítulo anterior, se han clasificado topológicamente las superficies de Riemann compactas. Esta primera sección, se propone caracterizar topológicamente los morfismos de una superficie de Riemann compacta a la esfera de Riemann, vistas como cubrientes ramificadas. Se concluye que, a partir de una superficie de Riemann, podemos obtener varias cubrientes ramificadas de la superficie topológica subyacente sobre $\hat{\mathbb{C}}$ que le corresponden.

3.1.1. Fórmula de Riemann-Hurwitz

Se comienza con un ejemplo para ilustrar las ideas que definen el concepto de grado de un morfismo.

Ejemplo 9. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ el morfismo tal que $f(z) = z^n$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Por la definición de multiplicidad sabemos que

$$m_p(f) = \begin{cases} 1 & : \text{si } p \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ n & : \text{si } z = 0, \infty \end{cases}$$

y

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} \{z_1, \dots, z_n\} & : \text{si } p \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \{z\} & : \text{si } z = 0, \infty \end{cases}$$

donde $z_1, \dots, z_n$ son las n raíces n -ésimas de z .

En este ejemplo, parece haber una compensación entre la cantidad de elementos de la imagen inversa de algún valor y las multiplicidades que tienen dichos elementos.

Esta suerte de homogeneidad en la imagen inversa de los valores de la función holomorfa del ejemplo, se tiene para cualquier morfismo $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y se formula más precisamente en la siguiente proposición.

Proposición 18. Sean S superficie de Riemann compacta y $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ función holomorfa no constante. Para todo $y \in \hat{\mathbb{C}}$, el entero positivo

$$\sum_{f(p)=y} m_p(f)$$

es igual para todos los valores $y \in \hat{\mathbb{C}}$.

En [Gir12, Gironde y González-Diez, 2012, pág. 44 y 45] se encuentra una prueba de la proposición basada en la teoría de residuos.

Definición 25. Sean S superficie de Riemann compacta y $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ función holomorfa no constante. El entero positivo definido por la proposición anterior se denomina el **grado** del holomorfismo f y se denota

$$\deg(f) = \sum_{f(p)=y} m_p(f).$$

Proposición 19. Sean S una superficie compacta y $A \subseteq S$ un conjunto finito. Entonces existe una triangulación de S tal que

- (i) Para todo $a \in A$, a es un vértice de la triangulación.
- (ii) Todo triángulo tiene a lo más un vértice en A .

Demostración. Sea $T = \{T_k\}_{k \in \Gamma}$ triangulación de S .

- (i) Para cada $a \in A$, si a no es vértice, hay dos opciones: está en una arista o en el interior de un triángulo.
 - a) Si a está en una arista de dos triángulos T_{k_1} y T_{k_2} , trazamos un segmento desde a a los dos vértices opuestos de la arista en cada triángulo, de tal manera que sólo se interseca con los triángulos en sus extremos. Basta reemplazar los triángulos T_{k_1} y T_{k_2} por los cuatro triángulos generados de partirlos por esos segmentos trazados.
 - b) Si a está en el interior de un triángulo T_k , trazamos un segmento desde a hasta cada uno de los vértices de T_k , de tal manera que sólo se intersecan en a y cada uno se interseca con el triángulo en el vértice correspondiente. Basta reemplazar el triángulo T_k en la triangulación por los tres triángulos que se generan.

Es claro que en cualquier caso producimos una nueva triangulación de $\hat{\mathbb{C}}$. Dado que A es finito, podemos aplicar el procedimiento anterior para cada $a \in A$, produciendo una triangulación que cumple (i).

- (ii) Una vez obtenida una triangulación que cumple (i), tenemos dos casos para cada triángulo T_k .
- a) Si T_{k_1} triángulo tal que tiene exactamente dos vértices en A , trazamos un segmento del vértice restante al punto medio de su arista opuesta. Esta arista opuesta pertenece además a otro triángulo T_{k_2} . Trazamos un segmento del punto medio de la arista al vértice opuesto en T_{k_2} . Reemplazamos T_{k_1} y T_{k_2} en la triangulación por los cuatro triángulos generados por los segmentos trazados. Los triángulos resultantes tienen un sólo vértice en A .
 - b) Si T_k tiene los tres vértices en A , tomamos un punto en su interior y trazamos segmentos de dicho punto a cada uno de sus vértices. De T_k obtenemos tres triángulos, cada uno con dos vértices en A . Aplicamos a estos el ítem anterior.

En cualquier caso producimos una nueva triangulación al hacer el procedimiento para cada triángulo de tal manera que se mantenga (i). Como S es compacto, el número de triángulos es finito y podemos producir una triangulación que cumple (i) y (ii).

□

Corolario 6. Sean S una superficie de Riemann compacta y $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa. Existe una triangulación de $\hat{\mathbb{C}}$ tal que

- (i) Todo valor de ramificación de f es vértice en la triangulación.
- (ii) Cada triángulo tiene a lo más un vértice que es valor de ramificación.

Demostración. Como S es compacta, f tiene finitos puntos de ramificación. Por lo cual los valores de ramificación son un conjunto finito. □

Observación 14. Dada una triangulación sobre una superficie. Como ya se hizo en la prueba de la proposición [20], para cada triángulo, desde un punto en su interior se puede trazar un segmento a cada uno de los vértices, procedimiento que resulta en una nueva triangulación. Los triángulos producidos son más pequeños que el inicial. Repitiendo este proceso, se puede hallar una triangulación tal que los triángulos sean tan pequeños como queramos.

Proposición 20. Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ un homeomorfismo local entre superficies, excepto en un conjunto discreto, y una triangulación sobre S_2 tal que los puntos en donde no es homeomorfismo local son vértices. Existe una triangulación más fina tal que su inversa induce otra triangulación sobre S_1 .

Demostración. Sea $\{T'_{k'}\}_{k' \in \Gamma'}$ triangulación de S_2 , se puede encontrar una triangulación $\{T_k\}_{k \in \Gamma}$ lo suficientemente pequeña de tal manera que para cada triángulo T_k que no tiene vértices en el conjunto discreto, existen abiertos $U_j \subseteq S_1$ $j \in J$ (uno por cada componente arco-conexa de $f(T_k)$) tal que $T_k \subseteq f(U_j)$ y la función $f|_{U_j}$ es un homeomorfismo. De modo $f^{-1}(T_k)$ es un conjunto de triángulos en S_1 . Llamemos $\{R_i\}_{i \in I}$ el conjunto de triángulos en S_1 que son imágenes inversas de la triangulación $\{T_l\}_{l \in \Gamma}$. Dados dos triángulos R_{l_1} y R_{l_2} , si $f(R_{l_1})$ y $f(R_{l_2})$ no se intersecan, tampoco lo hacen R_{l_1} y R_{l_2} . Si $f(R_{l_1})$ y $f(R_{l_2})$ se intersecan en una arista, entonces R_{l_1} y R_{l_2} se intersecan en una arista o no se intersecan. Si $f(R_{l_1})$ y $f(R_{l_2})$ se intersecan en un vértice, entonces R_{l_1} y R_{l_2} se intersecan en un vértice o no se intersecan.

Para los triángulos que tienen un vértice en el conjunto discreto la construcción es análoga sin considerar el vértice en S_2 , completando cada triángulo en S_1 con un vértice que los pegue. $\square$

Teorema 7 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sean S una superficie de Riemann compacta y $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa no constante de grado d . Se tiene que*

$$2g - 2 = -2d + \sum_{p \in S} (m_p(f) - 1)$$

donde g es el género de S .

Demostración. Sean $\{T_k\}_{k \in \Gamma}$ una triangulación de $\hat{\mathbb{C}}$ que cumple las condiciones del corolario [6] y de la proposición [21], y $\{T'_{k'}\}_{k' \in \Gamma'}$ la triangulación de S producida por la imagen inversa de $\{T_k\}_{k \in \Gamma}$ por f . Tenemos que

$$2 = v - a + c$$

y

$$2 - 2g = v' - a' + c'.$$

donde v, v' ; a, a' ; y c, c' son el número de vértices, aristas y caras de, respectivamente, las dos triangulaciones.

Como cada $y \in \hat{\mathbb{C}}$ que no sea vértice de la triangulación tiene d preimágenes, entonces cada triángulo T_k en $\hat{\mathbb{C}}$ tiene d triángulos en S como imagen inversa e igualmente para cada arista. Podemos decir entonces que

$$a' = da \text{ y } c' = dc.$$

Si y es vértice, sean $p_1, \dots, p_r$ las preimágenes de y . Para cada $i = 1, \dots, r$, f se puede ver localmente de la forma

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^{m_i}$$

con $\varphi(p_i) = 0$ y $m_i = m_{p_i}(f)$. Por la definición de grado

$$\begin{aligned} r &= d - \left(\sum_{i=1}^r m_{p_i}(f) \right) + r \\ &= d - \sum_{i=1}^r (m_{p_i}(f) - 1). \end{aligned}$$

Haciendo la suma sobre todos los vértices

$$\begin{aligned} v' &= dv - \sum_{f(p) \text{ vértice}} (m_p(f) - 1) \\ &= dv - \sum_{p \in S} (m_p(f) - 1). \end{aligned}$$

Reemplazando en la fórmula de la característica de Euler para S ,

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= v' - a' + c' \\ &= dv - \sum_{p \in S} (m_p(f) - 1) - da + dc \\ &= d(v - a + c) - \sum_{p \in S} (m_p(f) - 1) \\ &= 2d - \sum_{p \in S} (m_p(f) - 1) \end{aligned}$$

multiplicando por -1 se obtiene el resultado. $\square$

3.1.2. Cubrientes

La teoría de cubrientes hace parte de la topología algebraica y se encuentra profundamente ligada con el grupo fundamental. En este apartado se exponen sus resultados más básicos, en algunos casos sin demostración y asumiendo las definiciones básicas asociadas al grupo fundamental. Nuestro interés son las cubrientes de superficies; no obstante, la formulación será para espacios más generales. Las demostraciones completas se encuentran en [Hat02] y en [For81].

Definición 26. Sea S un espacio topológico. Un espacio $\tilde{S}$, y una función continua y sobreyectiva $p : \tilde{S} \rightarrow S$ son una **cubriente** sobre S si para todo $y \in S$ existe una vecindad $V \subseteq S$ tal que

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup V_i$$

y la restricción $p|_{V_i} : V_i \rightarrow V$ es un homeomorfismo para cada i . A los espacios $\tilde{S}$ y S se les denomina **espacio recubridor** y **espacio base**, respectivamente.

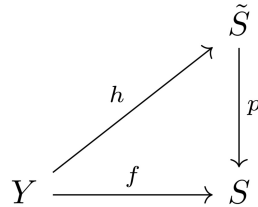
Observación 15. En una cubriente $p : \tilde{S} \rightarrow S$, el espacio recubridor $\tilde{S}$ se suele considerar arco-conexo, pues una cubriente con espacio recubridor no arco-conexo es unión disjunta de la cubriente restringida a las componentes arco-conexas. Los resultados que se expondrán suponen hipótesis sobre el espacio recubridor y el base que de cualquier manera cumplen las superficies.

Definición 27. Sean $p : \tilde{S} \rightarrow S$ una cubriente y un elemento $y \in S$, la **fibra** de y en p es el conjunto

$$p^{-1}(y).$$

Definición 28. Sean $p : \tilde{S} \rightarrow S$ una cubriente y $f : Y \rightarrow S$ una función continua. Un **levantamiento de f con respecto a p** es una función continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{S}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$

Observación 16. La propiedad de tener un levantamiento es fundamental en la teoría de cubrientes. En [For81, Otto Forster, 1981, pág. 28] se prueba que las cubrientes entre variedades Hausdorff son exactamente los homeomorfismos locales en donde todas las curvas tienen un levantamiento. Produciendo que su relación con el grupo fundamental sea muy estrecha. Esta propiedad no es cierta para levantar cualquier función. Sin embargo, se puede aplicar para ciertos casos, como se menciona en la proposición [23].



Proposición 21. Sean $p : \tilde{S} \rightarrow S$ una cubriente, con $\tilde{S}$ y S espacios Hausdorff. Para toda función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ y todo $x \in \tilde{S}$, con $\gamma(0) = p(x)$, existe un único levantamiento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{S}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = x$.

De manera más general se tiene la siguiente proposición.

Proposición 22. Sean $p : \tilde{S} \rightarrow S$ una cubriente y $f : U \rightarrow S$ una función continua, con $\tilde{S}$ y S espacios Hausdorff. Si U es simplemente conexa, arco-conexa y localmente arco-conexa entonces para todos $x \in \tilde{S}$ y $z \in U$ tales que $p(x) = f(z)$, existe un único levantamiento $\tilde{f} : U \rightarrow \tilde{S}$ de tal manera que $\tilde{f}(z) = x$.

La prueba de estos dos resultados se halla en [For81, Otto Forster, 1981, pág. 26 y 27].

Proposición 23. Dada una cubriente $p : \tilde{S} \rightarrow S$, con espacio base S arco-conexo. Todas las fibras tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Para cualesquiera $x, y \in S$ definimos $\mu : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$ de la siguiente manera: sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ función continua tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$, lo cual existe pues S es arco-conexo. Para cada $z \in p^{-1}(x)$ existe un levantamiento $\tilde{\gamma}_z$ tal que $\tilde{\gamma}_z(0) = z$. Tomamos entonces

$$\mu(z) = \tilde{\gamma}_z(1),$$

la existencia y unicidad del levantamiento para cada $z \in p^{-1}(x)$ asegura que la asignación es biyectiva. $\square$

Definición 29. Dada $p : \tilde{S} \rightarrow S$ una cubriente, con S arco-conexo. El cardinal de cualquiera de sus fibras se denomina el **número de hojas** de la cubriente.

3.1.3. Clasificación de cubrientes

Un caso de interés particular son las cubrientes $p : \tilde{S} \rightarrow S$ tales que el espacio recubridor $\tilde{S}$ es simplemente conexo y arco-conexo. La existencia de una cubriente de este tipo sobre un espacio S arco-conexo está dada por una propiedad topológica: ser semilocalmente simplemente conexo. Se puede encontrar la demostración de este hecho en [Hat02, Allen Hatcher, 2002, pág. 66 y 67]. Para nuestros fines es suficiente saber que todas las superficies cumplen dicha propiedad, veremos además que si esta existe resulta ser única.

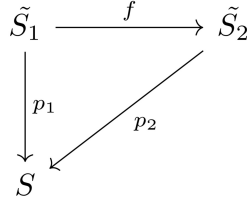
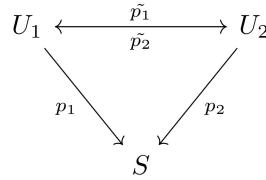


Figura 3.1: Definición 30

Definición 30. Sean $p_1 : \tilde{S}_1 \rightarrow S$ y $p_2 : \tilde{S}_2 \rightarrow S$ cubrientes. Un **isomorfismo entre las cubrientes** p_1 y p_2 es un homeomorfismo f , con $f : \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$ de tal manera que el diagrama de la figura 3.1 conmute. Cuando $p_1 = p_2$ decimos que f es un **automorfismo**.

Proposición 24. Si existe una cubriente con espacio recubridor simplemente conexo y arco-conexo de un espacio base, es única salvo isomorfismo.

Demostración. Sean $p_1 : U_1 \rightarrow S$ y $p_2 : U_2 \rightarrow S$ cubrientes con espacios recubridores simplemente conexos y arco-conexos. Para algún $x \in S$, sean $x_1 \in p_1^{-1}(x)$ $x_2 \in p_2^{-1}(x)$, existen levantamientos $\tilde{p}_1 : U_1 \rightarrow U_2$ y $\tilde{p}_2 : U_2 \rightarrow U_1$ tales que $\tilde{p}_1(x_1) = x_2$ y $\tilde{p}_2(x_2) = x_1$.



La función $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$ es claramente un levantamiento para p_1 . Por la unicidad del levantamiento, $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = id_{U_1}$. Análogamente, se obtiene que $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = id_{U_2}$. En conclusión, $\tilde{p}_1 : U_1 \rightarrow U_2$ es isomorfismo de cubrientes. $\square$

Definición 31. Sea $p : U \rightarrow S$ una cubriente. Si U es simplemente conexo y arco-conexo, entonces esta cubriente se denomina **la cubriente universal** de S .

Ejemplo 10. El espacio $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ se denomina el **disco punteado**. La cubriente universal de este espacio es

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D}^* \\ z &\longmapsto e^{2\pi iz} \end{aligned}$$

donde $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{im}(z) > 0\}$.

En efecto, para $y \in \mathbb{D}^*$, con $y = re^{2\pi ia}$ ($0 < r < 1$), tomamos la vecindad $V = \{te^{2\pi ix} \in \mathbb{D}^* : a - \frac{1}{4} < x < a + \frac{1}{4}, r - \epsilon < t < r + \epsilon\}$ de tal manera que $\epsilon < \min\{|r - 0|, |r - 1|\}$. Tenemos que

$$\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

siendo $V_n = \{z \in \mathbb{H} : n + a - \frac{1}{4} < \operatorname{re}(z) < n + a + \frac{1}{4}, -\frac{\ln(r+\epsilon)}{2\pi} < \operatorname{im}(z) < -\frac{\ln(r-\epsilon)}{2\pi}\}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 32. Dada una cubriente $p : \tilde{S} \longrightarrow S$ de superficies. El conjunto de automorfismos de p forma un grupo con la composición. Este se denomina el **grupo de cubriente** de p y se denota $\operatorname{Aut}(\tilde{S}, p)$.

Observación 17. Dada una cubriente $p : \tilde{S} \longrightarrow S$, el grupo de la cubriente $\operatorname{Aut}(\tilde{S}, p)$ actúa sobre $\tilde{S}$ de manera natural, donde la acción está dada por

$$f \cdot x = f(x)$$

para $f \in \operatorname{Aut}(\tilde{S}, p)$ y $x \in \tilde{S}$. Denotamos $\tilde{S}/\operatorname{Aut}(\tilde{S}, p)$ al conjunto de órbitas dotado con la topología cociente.

Proposición 25. Dada $p : U \longrightarrow S$ la cubriente universal de S , la función

$$\begin{aligned} \pi : U/\operatorname{Aut}(U, p) &\longrightarrow S \\ [x] &\longmapsto p(x) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo

Demostración. (Bien definida) Sean $x_1, x_2 \in [x]$, existe $f \in \operatorname{Aut}(U, p)$ tal que $f(x_1) = x_2$. Por lo que

$$\begin{aligned} p(x_1) &= p(f(x_1)) \\ &= p(x_2). \end{aligned}$$

(Inyectiva) Sean $x_1, x_2 \in U$ tales que $p(x_1) = p(x_2)$. Existe un levantamiento $\tilde{p} : U \longrightarrow U$ tal que $\tilde{p}(x_1) = x_2$. Este levantamiento es isomorfismo con inversa el levantamiento de p que manda a x_2 en x_1 . Obtenemos que $\tilde{p} \in \operatorname{Aut}(U, p)$ y $[x_1] = [x_2]$.

(Sobreyectiva) Sea $y \in S$, por la sobreyectividad de p existe $x \in U$ con $p(x) = y$ y $\pi([x]) = y$.

(Homeomorfismo local) Sea $x \in U$, existe una vecindad $V \subseteq S$ de $p(x)$ tal que

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup V_i.$$

Para algún j se tiene que $x \in V_j$, con $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow V$ homeomorfismo. Denotamos p_j^{-1} a la inversa de $p|_{V_j}$ y $r : U \longrightarrow U/\operatorname{Aut}(U, p)$ a la proyección cociente, queremos ver que $r|_{V_j}$ es inyectiva y por tanto homeomorfismo: sean $a, b \in V_j$ con $r(a) = r(b)$, existe $f \in \operatorname{Aut}(U, p)$ tal que $f(a) = b$ y $p(a) = p(f(a)) = p(b)$, lo cual contradice la inyectividad de $p|_{V_j}$. Restringido a V se tiene que $\pi|_V = r \circ p_j^{-1}|_V$, la cual es composición de homeomorfismos.

□

El nombre del cubriente universal no es fortuito. Es aquel que cumple una adecuada propiedad universal: su espacio recubridor lo es para todas las cubrientes del espacio base, lo cual nos permite darle una misma forma a todas las cubrientes de un espacio.

Proposición 26. Sean $p : U \longrightarrow S$ la cubriente universal de S y $r : \tilde{S} \longrightarrow S$ una cubriente, entonces r es isomorfa a una cubriente de la forma $U/G \longrightarrow U/\text{Aut}(U, p) \cong S$ donde G es subgrupo de $\text{Aut}(U, p)$.

Demostración. Existe un levantamiento $\tilde{p} : U \longrightarrow \tilde{S}$ de p con respecto a r . Veamos que este levantamiento es también una cubriente. Sea $z \in \tilde{S}$, para $r(z)$ existen vecindades $V_r, V_p \subseteq S$ tales que siendo $V = V_r \cap V_p$, se tiene que

$$r^{-1}(V) = \bigsqcup_i V_i$$

y

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_k W_k.$$

y las restricciones correspondientes son homeomorfismos. Para cada k se tiene que $\tilde{p}|_{W_k} = r|_{V_i}^{-1} \circ p$, donde V_i es tal que $\tilde{p}(W_k) \cap V_i \neq \emptyset$. Sean V_j tal que $z \in V_j$ y $W_{k_1}, W_{k_2}, \dots$ aquellos que contienen algún elemento del conjunto $\tilde{p}^{-1}(z)$. Entonces

$$\tilde{p}^{-1}(V) = \bigsqcup_n W_{k_n}$$

pues para todo $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(W_{k_n}) &= r|_{V_j}^{-1}(p(W_{k_n})) \\ &= r|_{V_j}^{-1}(V) \\ &= V_j. \end{aligned}$$

y $\tilde{p}$ es composición de homeomorfismos al restringirlo a W_{k_n} .

Aplicando la proposición anterior a $\tilde{p}$, tenemos que $\tilde{S} \cong U/\text{Aut}(U, \tilde{p})$. Si $f \in \text{Aut}(U, \tilde{p})$, para $a \in U$ tenemos

$$\begin{aligned} p(a) &= r(\tilde{p}(a)) \\ &= r(\tilde{p}(f(a))) \\ &= p(f(a)) \end{aligned}$$

con lo que $\text{Aut}(U, \tilde{p})$ es subgrupo de $\text{Aut}(U, p)$. □

Ejemplo 11. Para hallar los isomorfismos de la cubriente $\pi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}^*$, tomamos $y = e^{(-2\pi)} \in \mathbb{D}^*$. La fibra de y es

$$\pi^{-1}(y) = \{n + i : n \in \mathbb{Z}\}$$

pues para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $e^{-2\pi} = e^{-2\pi + 2n\pi i}$. Todo isomorfismo de la cubriente es un levantamiento. Fijando $z = i$, para cada elemento de $n + i \in \pi^{-1}(y)$ existe un único levantamiento T_n tal que $T_n(i) = n + i$. Podemos establecer una correspondencia entre $\mathbb{Z}$ y $\text{Aut}(\mathbb{H}, \pi)$ de la siguiente manera

$$n \longmapsto T_n$$

donde $T_n(z) = z + n$.

Claramente son homeomorfismos y para todo $z \in \mathbb{H}$ con $z = a + bi$ y todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} e^{2\pi i T_n(z)} &= e^{2\pi i(a+n+bi)} \\ &= e^{(-2\pi b) + (2\pi a + 2\pi n)i} \\ &= e^{(-2\pi b) + (2\pi a)i} \\ &= e^{2\pi iz}. \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que $\text{Aut}(\mathbb{H}, \pi) = \{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ como grupo, pues $T_n \circ T_m = T_{n+m}$.

Definición 33. Dadas dos cubrientes $p_1 : \tilde{S}_1 \rightarrow S_1$ y $p_2 : \tilde{S}_2 \rightarrow S_2$, un **isomorfismo** de estas cubrientes con no necesariamente mismo dominio ni codominio es una pareja de homeomorfismos (f, g) con $f : \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$ y $g : S_1 \rightarrow S_2$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{S}_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ S_1 & \xrightarrow{g} & S_2 \end{array}$$

conmuta.

Proposición 27 (Clasificación de cubrientes de $\mathbb{D}^*$). Una cubriente del disco punteado $\mathbb{D}^*$ es, salvo isomorfismo, alguna de las siguientes:

a) La cubriente universal

$$\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}^* : z \mapsto e^{2\pi iz}.$$

b) Para algún $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\pi_n : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^* : z \mapsto z^n.$$

Demostración. Como $\text{Aut}(\mathbb{H}, \pi) \cong \mathbb{Z}$, los subgrupos de $\text{Aut}(\mathbb{H}, \pi)$ son de la forma $G_n = \langle T_n \rangle$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Por la proposición [27], toda cubriente de $\mathbb{D}^*$ se puede ver como $\pi_n : \mathbb{H}/G_n \rightarrow \mathbb{H}/G_1$. Veamos que para $n > 0$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}/\langle T_n \rangle & \xrightarrow{\pi_n} & \mathbb{H}/\langle T_1 \rangle \\ \downarrow e^{\frac{2\pi iz}{n}} & & \downarrow e^{2\pi iz} \\ \mathbb{D}^* & \xrightarrow{z^n} & \mathbb{D}^* \end{array}$$

conmuta. Para todo $[z]_n \in \mathbb{H}/G_n$ tenemos que

$$\begin{aligned} (e^{\frac{2\pi i([z]_n)}{n}})^n &= ((e^{2\pi i(z)})^{\frac{1}{n}})^n \\ &= e^{2\pi iz} \\ &= e^{2\pi i([z]_1)}. \end{aligned}$$

Como ya vimos que las funciones $e^{\frac{2\pi iz}{n}}$ y $e^{\frac{2\pi iz}{n}}$ son isomorfismos en esos dominios, las cubrientes son isomorfas. $\square$

3.1.4. Holomorfismos como cubiertas ramificadas

Se ha visto que la función $z \mapsto z^n$, al ser definida sobre $\mathbb{D}^*$, es una cubriente. Sin embargo, cuando se define sobre $\mathbb{D}$ no es homeomorfismo local en 0. Se verá que esto corresponde a una degeneración de las cubrientes: el concepto de cubrientes ramificadas, y que este es el comportamiento que tienen las funciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas.

Definición 34. Una función continua y sobreyectiva entre espacios Hausdorff $p : \tilde{S} \longrightarrow S$ es una **cubriente ramificada** si existe $B \subseteq \tilde{S}$ conjunto discreto (sin puntos de acumulación) tal que $p|_{\tilde{S} \setminus B} : \tilde{S} \setminus B \longrightarrow S \setminus p(B)$ es una cubriente. Al conjunto B se le denomina el **locus de ramificación** de p . El **grado** de p es el número de hojas de la cubriente $p|_{\tilde{S} \setminus B}$.

Observación 18. En particular, las cubrientes son cubrientes ramificadas. Para diferenciarlas, a estas primeras también se les denomina **cubrientes no-ramificadas**.

Teorema 8 (Descripción topológica de morfismos entre superficies de Riemann compactas). Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann compactas, y $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una función holomorfa no constante de grado d . Entonces f es una cubriente ramificada de grado d .

Demostración. Como S_1 es compacto, f es sobreyectiva proposición [6]. Llamemos B al conjunto de puntos ramificados de f , denotemos $S_1^* = S_1 \setminus B$ y $S_2^* = S_2 \setminus f(B)$. Basta probar que $f|_{S_1^*} : S_1^* \longrightarrow S_2^*$ es cubriente, pues B es un conjunto finito. Para cualquier $y \in S_2^*$ se tiene que $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_d\}$.

Por el teorema [4] y las propiedades de separación de la superficie, para cada $i = 1, \dots, d$ existe $\tilde{U}_i \subseteq S_1^*$ vecindad abierta de x_i tal que $f|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \longrightarrow f(\tilde{U}_i)$ es homeomorfismo y son disjuntos entre ellos. Para cada

$$V \subseteq \bigcap_{i=1}^d f(\tilde{U}_i)$$

vecindad abierta de y y cada $i = 1, \dots, d$, definimos

$$\begin{aligned} U_i^V &= f|_{\tilde{U}_i}^{-1}(V) \\ &= \{x \in \tilde{U}_i : f(x) \in V\}. \end{aligned}$$

Al tomar cualquier elección de $V \subseteq \bigcap_{i=1}^d f(\tilde{U}_i)$ tenemos que

$$\bigsqcup_{i=1}^d U_i^V \subseteq f^{-1}(V)$$

con $U_1^V, \dots, U_d^V$ abiertos disjuntos tales que para cada $i = 1, \dots, d$, $f|_{U_i^V} : U_i^V \longrightarrow V$ son homeomorfismos.

Supongamos que para todo $V \subseteq \bigcap_{i=1}^d f(\tilde{U}_i)$ se cumple

$$f^{-1}(V) \not\subseteq \bigsqcup_{i=1}^d U_i^V.$$

Como S_2 es 2-numerable, podemos tomar un sistema fundamental de vecindades abiertas $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de y tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subseteq \bigcap_{i=1}^d f(\tilde{U}_i)$ y $V_{n+1} \subsetneq V_n$. Existe una sucesión $a_n \in f^{-1}(V_n)$ con $a_n \notin \bigsqcup_{i=1}^d U_i^{V_n}$, de modo que la sucesión $\{b_n = f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y .

Por la compacidad de S_1 , existe x punto límite de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $f(x) = y$ pues f es continua. Luego, existe $i = 1, \dots, d$ tal que $x \in U_i^V$ y existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $a_n \in U_i^V$. De modo que tenemos la igualdad deseada

$$\bigsqcup_{i=1}^d U_i^V = f^{-1}(V).$$

□

3.2. De cubrientes ramificadas en $\hat{\mathbb{C}}$ a superficies de Riemann compactas

En esta sección se verá que la idea topológica de Riemann sobre sus superficies es, en cierto sentido, equivalente a la definición analítica de Weyl para el caso compacto. Las superficies de Riemann compactas pueden entonces ser descritas en lenguaje estrictamente topológico.

3.2.1. Superficie de Riemann generada por una cubriente ramificada

Se ha demostrado que una superficie de Riemann compacta genera diversas cubrientes ramificadas sobre $\hat{\mathbb{C}}$: sus funciones meromorfas. El proceso inverso también se puede llevar a cabo: una cubriente ramificada de una superficie compacta S sobre $\hat{\mathbb{C}}$ genera una estructura diferenciable compleja sobre S . Se comienza induciendo una estructura diferenciable compleja para cubrientes no-ramificadas.

Proposición 28. Sean S_1 una superficie topológica, S_2 una superficie de Riemann y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una cubriente no-ramificada. Existe una única estructura diferenciable compleja sobre S_1 tal que f es holomorfa.

Demostración. (Existencia) Como f es en particular homeomorfismo local, para cada $x \in S_1$, existe U_x vecindad de x tal que $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$ es homeomorfismo y tomemos una carta $\psi_x : V_{\psi_x} \rightarrow V'_{\psi_x}$ en S_2 tal que $f(x) \in V'_{\psi_x}$. Sea $V_x = f(U_x) \cap V_{\psi_x}$, definimos $\varphi_x : U_{\varphi_x} \rightarrow V_{\varphi_x}$ por

$$\varphi_x = \psi \circ f, \text{ en } U_{\varphi_x},$$

donde $U_{\varphi_x} = f^{-1}(V)$ y $V_{\varphi_x} = \psi(f(U_{\varphi_x}))$. Basta ver que la familia $\{\varphi_x : U_{\varphi_x} \rightarrow V_{\varphi_x}\}_{x \in S_1}$ cumple el cambio de coordenadas para ver que es un atlas: sobre el conjunto $\varphi_x(U_{\varphi_x} \cap U_{\varphi_y})$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_y \circ \varphi_x^{-1} &= (\psi_y \circ f) \circ (f^{-1} \circ \psi_x^{-1}) \\ &= \psi_y \circ (f \circ f^{-1}) \circ \psi_x^{-1} \\ &= \psi_y \circ \psi_x^{-1}. \end{aligned}$$

El hecho de que f resulte holomorfismo se da directamente de la manera en que definimos el atlas.

(Unicidad) Sea $\{(\phi : U_\phi \longrightarrow V_\phi)\}_{\phi \in \Lambda}$ atlas sobre S_1 que hace a f holomorfa. Es decir, que para cada $\phi \in \Lambda$ y cada $x \in S_1$ tales que $U_\phi \cap U_{\varphi_x} \neq \emptyset$ se tiene que

$$\psi_x \circ f \circ \phi^{-1} = \varphi \circ \phi^{-1}$$

es holomorfa. Este atlas es compatible con el ya construido, por lo que las estructuras complejas que generan son iguales. $\square$

Proposición 29. Sean $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una cubriente, $A \subseteq S_2$ arcoconexo y $\tilde{A} = f^{-1}(A)$. La restricción $f|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \longrightarrow A$ es una cubriente.

Demostración. Dado $y \in A$, existe $\bar{V} \subseteq S_2$ vecindad abierta de y tal que

$$f^{-1}(\bar{V}) = \bigsqcup_{i=1}^d \bar{U}_i$$

con $f|_{\bar{U}_i} : \bar{U}_i \longrightarrow \bar{V}$ homeomorfismo para cada $i = 1, \dots, d$. Sea $V = \bar{V} \cap A$ y $U_i = \bar{U}_i \cap \tilde{A}$, entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}(\bar{V}) \cap f^{-1}(A) \\ &= \bigsqcup_{i=1}^d \bar{U}_i \cap \tilde{A} \\ &= \bigsqcup_{i=1}^d U_i \end{aligned}$$

y $f|_{U_i} = f|_{\bar{U}_i}|_{\tilde{A}}$ es homeomorfismo. $\square$

Proposición 30. Sean S_2 una superficie de Riemann compacta, $B \subseteq S_2$ un conjunto finito, $S_2^* = S_2 \setminus B$ y S_1^* un espacio topológico. Si la función $f^* : S_1^* \longrightarrow S_2^*$ es una cubriente con número de hojas finito, existe S_1 superficie de Riemann que es compactificación de S_1^* de tal manera que existe $f : S_1 \longrightarrow S_2$ holomorfismo que extiende a f^* .

Demostración. (Construcción) Sea $y \in B$ y $\tilde{\psi}_y : \tilde{U}_y \longrightarrow \mathbb{D}$ carta de y en S_2 tal que $\tilde{U}_y \cap B = \{y\}$ y $\tilde{\psi}_y(y) = 0$. La restricción $\psi_y = \tilde{\psi}_y|_{U_y} : U_y \longrightarrow \mathbb{D}^*$, con $U_y = \tilde{U}_y \setminus \{y\}$, es una carta de S_2^* . Sea

$$f^{*-1}(U_y) = \bigsqcup_{i=1}^{r_y} U_{i,y}$$

descomposición en componentes arco-conexas. Para cada una, la función $f_{i,y} = \psi_y \circ f^*|_{U_{i,y}} : U_{i,y} \longrightarrow \mathbb{D}^*$ es una cubriente. Por la clasificación de cubrientes de $\mathbb{D}^*$ (proposición [28]), existen $\varphi_{i,y} : U_{i,y} \longrightarrow \mathbb{D}^*$ homeomorfismo y $m_{i,y} \in \mathbb{Z}^+$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
U_{i,y} & \xrightarrow{\varphi_{i,y}} & D^* \\
f_{i,y} \downarrow & & \nwarrow z^{m_{i,y}} \\
D^* & &
\end{array}$$

conmuta.

Extendemos el homeomorfismo $\varphi_{i,y}$ a $\tilde{\varphi}_{i,y} : U_{i,y} \cup \{x_{i,y}\} \rightarrow \mathbb{D}$ donde

$$\tilde{\varphi}_{i,y}(z) = \begin{cases} \varphi_{i,y}(z) & : z \in U_{i,y} \\ 0 & : z = x_{i,y} \end{cases}$$

y definimos $S_1 = S_1^* \cup \{x_{i,y}\}_{i=1,y \in B}^{r_y}$, dotándola de la topología inducida por los homeomorfismos locales $\tilde{\varphi}_{i,y}$ (las vecindades de $x_{i,y}$ son las imágenes inversas por $\tilde{\varphi}_{i,y}$ de las vecindades de 0).

(*Cambio de cartas*) El atlas de S_1 se construye a partir del atlas de S_1^* añadiendo las cartas $\{\tilde{\varphi}_{i,y} : \tilde{U}_{i,y} \rightarrow \mathbb{D}\}_{i=1,y \in B}^{r_y}$. Tanto para una carta vieja y una carta nueva como para dos cartas nuevas o viejas, su intersección está en S_1^* . Las cartas nuevas definidas en un subconjunto de S_1^* son cartas viejas, por tanto el cambio de carta siempre es holomorfo.

(*Holomorfismo*) Definimos $f : S_1 \rightarrow S_2$ por

$$f(z) = \begin{cases} f^*(z) & : z \in S_1^* \\ y & : z = x_{i,y}, i = 1, \dots, r_y \end{cases}$$

La composición con las nuevas cartas nos da la función $z \mapsto z^{m_{i,y}}$, la cual es holomorfa.

(*Compacidad*) Basta ver que $S_1 \setminus \bigcup_{i=1,y \in B}^{r_y} \tilde{U}_{i,y}$ es compacto, pues tomando las cerraduras de $\tilde{U}_{i,y}$, la superficie S_1 sería una unión finita de compactos. Su imagen $f(S_1 \setminus (\bigcup_{i=1,y \in B}^{r_y} \tilde{U}_{i,y})) = S_2 \setminus (\bigcup_{y \in B} \tilde{U}_y)$ es compacta, pues es un cerrado contenido en un compacto.

Para todo $q \in S_2 \setminus (A \cup \bigcup_{y \in B} \tilde{U}_y)$, en donde A es un conjunto discreto, existe una vecindad abierta V_q tal que la función f es cubriente en $f^{-1}(\bar{V}_q)$. Para este recubrimiento, existe un subrecubrimiento finito $\{V_{q_1}, \dots, V_{q_k}\}$.

El conjunto $f^{-1}(\bar{V}_{q_j})$ es compacto, para cada $j = 1, \dots, k$, pues es imagen inversa de un compacto por un homeomorfismo. El cerrado $S_1 \setminus \bigcup_{i=1,y \in B}^{r_y} \tilde{U}_{i,y}$ está contenido en el compacto $f^{-1}(\bar{V}_{q_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(\bar{V}_{q_k})$, por lo tanto es compacto. $\square$

Proposición 31. Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann compactas, y $B_1 \subseteq S_1$, $B_2 \subseteq S_2$ conjuntos finitos. Si $S_1^* = S_1 \setminus B_1$ y $S_2^* = S_2 \setminus B_2$ son biholomorfas, entonces S_1 y S_2 son biholomorfas.

Demostración. Sea $\phi : S_1^* \rightarrow S_2^*$ biholomorfismo y para cada $y_i \in B_2$, V_i vecindad de y_i para $i = 1, \dots, m$, tales que sean disjuntas dos a dos. Probemos que todo $x \in B_1$ tiene una vecindad $U \subseteq S_1$ tal que $\phi(U \setminus \{x\}) \subseteq (V_1 \setminus \{y_1\}) \cup \dots \cup (V_m \setminus \{y_m\})$.

Suponiendo lo contrario, tomemos un sistema fundamental de vecindades $\{U_n\}$ de x con $U_{n+1} \subseteq U_n$. escogemos la sucesión $\{x_n\}$ de tal manera que $x_n \in U_n$ y $f(x_n) \notin (V_1 \setminus \{y_1\}) \cup \dots \cup (V_m \setminus \{y_m\})$. Claramente $\{x_n\} \rightarrow x$ y como $S_2 \setminus ((V_1 \setminus \{y_1\}) \cup \dots \cup (V_m \setminus \{y_m\}))$ es compacto, la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene un punto límite b allí. Luego $x = \phi^{-1}(b)$, lo cual contradice que $x \in B_1$.

Por lo la conectividad de los V_i , existe $j = 1, \dots, m$ tal que $f(U) \subseteq V_j$. Aplicando el teorema de la singularidad removible de Riemann en $U \setminus \{x\}$, tenemos una extensión local única. Repitiendo el proceso para cada $x \in B_1$, podemos definir una función $\bar{\phi} : S_1 \rightarrow S_2$, la cual es biholomorfismo pues es de grado 1 (teorema [4]). $\square$

Corolario 7 (Superficie de Riemann generada de una cubierta ramificada). *Sean S una superficie topológica compacta y una $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cubriente ramificada. Existe una única estructura diferenciable compleja sobre S tal que f es holomorfa.*

Demostración. Basta aplicarle las proposiciones [31] y [32] a $f|_{S \setminus B}$, donde B es el locus de ramificación de f . $\square$

Observación 19. *Como consecuencia del Teorema de Uniformización, sobre la esfera S^2 existe una única estructura diferenciable compleja; a saber, la que definimos en el primer capítulo como $\hat{\mathbb{C}}$. De modo que no hay ambigüedad frente a la estructura de Riemann que heredan las superficies.*

A cada cubriente ramificada de una superficie compacta S sobre $\hat{\mathbb{C}}$ le podemos asignar una superficie de Riemann en S .

3.2.2. Asignación funtorial

A lo largo de este capítulo nos hemos encargado de establecer una correspondencia, en ambas direcciones, entre los siguientes objetos

$$\{\text{Superficies de Riemann compactas}\} \longleftrightarrow \{\text{Cubrientes ramificadas sobre } \hat{\mathbb{C}}\}.$$

Una pregunta natural es si esta correspondencia envía superficies de Riemann compactas isomorfas en cubrientes ramificadas isomorfas y viceversa. La primera afirmación resulta falsa, mientras que la segunda es cierta. Más aún, es consecuencia de que la correspondencia en esa dirección es funtorial.

Definición 35. *Definimos la **categoría de superficies de Riemann compactas**, denotada **SuRieC**, de manera que:*

- a) *Obj SuRieC son las superficies de Riemann compactas*
- b) *Para S_1 y S_2 superficies de Riemann compactas, $\text{Mor}(S_1, S_2)$ son todas las funciones holomorfas de S_1 en S_2 .*

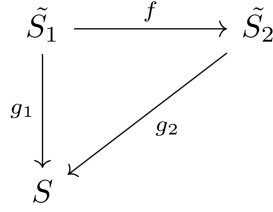


Figura 3.2: Definición 36

Definición 36. Sean $g_1 : \tilde{S}_1 \rightarrow S$ y $g_2 : \tilde{S}_2 \rightarrow S$ cubrientes ramificadas sobre el mismo espacio, un **morfismo de cubrientes ramificadas** es una función continua y sobreyectiva $f : \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$ tal que el diagrama de la figura 3.2 conmuta.

Definición 37. Definimos la **categoría de cubrientes ramificadas sobre $\hat{\mathbb{C}}$** , denotada **CubR**($\hat{\mathbb{C}}$), de manera que:

- a) *Obj CubR*($\hat{\mathbb{C}}$) son las cubrientes ramificadas sobre $\hat{\mathbb{C}}$ de superficies topológicas compactas
- b) Para $g_1 : \tilde{S}_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y $g_2 : \tilde{S}_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cubrientes ramificadas, $\text{Mor}((\tilde{S}_1, g_1), (\tilde{S}_2, g_2))$ es el conjunto de todos los morfismos de la definición anterior.

Proposición 32. Todo morfismo entre cubrientes ramificadas sobre un mismo espacio, es una cubriente ramificada.

Demostración. Sean $g_1 : \tilde{S}_1 \rightarrow S$ y $g_2 : \tilde{S}_2 \rightarrow S$ cubrientes ramificadas con locus de ramificación B_1 y B_2 respectivamente, y $f : \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$ morfismo entre ellas. El conjunto $B = B_1 \cup f^{-1}(B_2)$ es aislado pues $f^{-1}(B_2) \subseteq g_1^{-1}(g_2(B_2))$. Si $S_1 = \tilde{S}_1 \setminus B$ y $S_2 = \tilde{S}_2 \setminus f(B)$, entonces $g_1|_{S_1}$ y $g_2|_{S_2}$ son cubrientes no-ramificadas.

Dado $y \in S_2$ existe $V \subseteq S$ vecindad abierta de $g_2(y)$ tal que

$$g_1^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1} U_i$$

con $p_1|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ homeomorfismo para cada i , y

$$g_2^{-1}(V) = \bigsqcup_{j=1} W_j$$

con $p_2|_{W_j} : W_j \rightarrow V$ homeomorfismo para cada j . Para todo i ,

$$\begin{aligned}
 f(U_i) &\subseteq g_2^{-1}(V) \\
 &= \bigsqcup_j W_j.
 \end{aligned}$$

Como $f(U_i)$ es arco-conexo, existe j tal que $f(U_i) \subseteq W_j$ y $f|_{U_i} = (g_2|_{W_j})^{-1} \circ (g_1|_{U_i})$, el cual es homeomorfismo. Sea j tal que $y \in W_j$ y $U_{i_1}, \dots$ tales que $f(U_{i_k}) \subseteq W_j$. Ya hemos probado que

$$f^{-1}(W_j) \supseteq \bigsqcup_k U_{i_k};$$

y también sabemos que

$$f^{-1}(W_j) \subseteq \bigsqcup_i U_i.$$

Sin embargo, escogimos precisamente los U_i que caen en W_j , obteniendo el resultado. $\square$

Proposición 33. Sean S_1 y S_2 superficies compactas, $g_1 : S_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y $g_2 : S_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cubrientes ramificadas, y $f : S_1 \rightarrow S_2$ morfismo entre las cubrientes. Entonces f es holomorfa entre las superficies de Riemann generadas por las cubrientes ramificadas en S_1 y S_2 .

Demostración. En la demostración de la proposición anterior es evidente que si los grados de g_1 y g_2 son finitos, entonces el grado de f es finito. Luego f induce una estructura diferenciable compleja sobre S_1 a partir de la dada en S_2 de tal manera que f es holomorfa. La función $g_2 \circ f = g_1$ es también holomorfa; por lo que esta es la misma estructura inducida por g_1 . $\square$

Proposición 34. La siguiente asignación F definida por:

a) Para cada $g_1 : \tilde{S}_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cubriente ramificada con $\tilde{S}_1$ compacta,

$$F(\tilde{S}_1, g_1) = S_1$$

donde S_1 es la superficie de Riemann generada por dicha cubriente (corolario [7]).

b) Sean $g_1 : \tilde{S}_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y $g_2 : \tilde{S}_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cubrientes ramificadas, con $\tilde{S}_1$ y $\tilde{S}_2$ compactas, y $f : \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$ morfismo entre las cubrientes ramificadas, entonces

$$F(f) = f$$

es un funtor de la categoría de cubrientes ramificadas sobre $\hat{\mathbb{C}}$ a la categoría de superficies de Riemann compactas.

Demostración. Por la proposición anterior tenemos que $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una función holomorfa. por la manera en que está definido, trivialmente cumple las condiciones para ser funtor. $\square$

Corolario 8. Si dos cubrientes ramificadas sobre $\hat{\mathbb{C}}$ son isomorfas, sus correspondientes superficies de Riemann compactas también son isomorfas.

Por otro lado, no existe un funtor G de la categoría SuRieC a la categoría $\text{CubR}(\hat{\mathbb{C}})$ que invierta al funtor F definido anteriormente, pues de ser así F resultaría una equivalencia de categorías.

Definición 38. Un funtor (contravariante) F de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{D}$ es una **equivalencia de categorías** si existe un funtor G (contravariante) de $\mathcal{D}$ a $\mathcal{C}$, e isomorfismos naturales $\epsilon : FG \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ y $\eta : \mathcal{I}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$, en donde $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ son los funtores identidad en cada categoría, y FG y GF son las composiciones de los funtores.

Definición 39. Sea F un funtor (contravariante) de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{D}$.

- (i) El funtor (contravariante) F es **fiel** si para todos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, la asignación correspondiente $F : \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(F(A), F(B))$ ($F : \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(F(B), F(A))$) es inyectiva.
- (ii) El funtor (contravariante) F es **pleno** si para todos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, la asignación correspondiente $F : \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(F(B), F(A))$ es sobreyectiva.
- (iii) El funtor (contravariante) F es **esencialmente sobreyectivo** si para todo $B_1 \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, existen $B \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ y $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tales que B es isomorfo a B_1 en la categoría $\mathcal{D}$ y $F(A) = B$.

Con esta definición no resulta inmediato trabajar, pues la prueba de la existencia o no existencia de los isomorfismos naturales se torna larga. Sin embargo, la siguiente es una caracterización mucho más sencilla, cuya prueba se encuentra en [ML98].

Proposición 35. *Un funtor (contravariante) F de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías si y sólo si es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo.*

Proposición 36. *El funtor F de $\text{CubR}(\hat{\mathbb{C}})$ a SupRieC no es pleno y por tanto, no es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Consideremos la cubriente ramificada $\cdot^2 : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ donde

$$\cdot^2(z) = \begin{cases} z^2 & : z \in \mathbb{C} \\ \infty & : z = \infty \end{cases}$$

que resulta de extender la función z^2 , por el teorema de la singularidad removible de Riemann (teorema [2]). Tenemos que $F(\cdot^2) \cong \hat{\mathbb{C}}$, pues sobre $\hat{\mathbb{C}}$ existe una única estructura diferenciable compleja. La función $\cdot^2$ es holomorfa, pero no es un morfismo entre las cubiertas ramificadas $\cdot^2$ y $\cdot^2$, pues claramente $\cdot^2 \circ \cdot^2 = \cdot^4 \neq \cdot^2$. $\square$

La no existencia de un funtor en esta dirección da cuenta de que no hay una manera natural de asignarle a una superficie de Riemann una cubierta ramificada sobre $\hat{\mathbb{C}}$. No existe un morfismo canónico de una superficie de Riemann compacta a la esfera de Riemann.

Capítulo 4

Curvas algebraicas

Las superficies de Riemann surgen en el seno de la geometría algebraica. Riemann notó que las curvas algebraicas en $\mathbb{C}^2$ son cubrientes ramificadas sobre $\hat{\mathbb{C}}$, tomando una de las proyecciones (la proyección en el eje x o la proyección en el eje y) [Rem98]. En este capítulo se exploran las propiedades de algunas curvas algebraicas vistas como superficies de Riemann compactas.

4.1. Superficie de Riemann compacta asociada a una curva algebraica en $\mathbb{C}^2$

Definición 40. Una **curva algebraica en $\mathbb{C}^2$** es un conjunto $V(F) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y) = 0\}$ para algún polinomio $F \in \mathbb{C}[x, y]$ irreducible.

En este caso, se dice que el polinomio F genera a la curva algebraica.

Observación 20. En [Ful89], encontramos que la correspondencia entre elementos de $\mathbb{C}[x, y]$ irreducibles y subconjuntos solución irreducibles de $\mathbb{C}^2$ es biyectiva (ideales primos $\Leftrightarrow$ variedades algebraicas). De modo que llamaremos curva algebraica en $\mathbb{C}^2$ a $V(F)$ o a F , indistintamente.

Definición 41. Sea $F \in \mathbb{C}[x, y]$ polinomio irreducible, definimos el conjunto

$$V(F)_x = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y) = 0, \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \neq 0\}.$$

Las siguientes dos proposiciones, que se enuncian sin demostración, constituyen resultados bien conocidos. La primera, es un caso particular del Teorema de Bézout en geometría algebraica; la segunda, es un caso particular del Teorema de la Función Implícita Holomorfa en Análisis Complejo. Sus demostraciones se encuentran en [Ful89] y [Gar20], respectivamente.

Proposición 37. Sean $F, G \in \mathbb{C}[x, y]$ tales que no tienen factores en común, entonces $V(F) \cap V(G)$ es un conjunto finito.

Corolario 9. Sea $F \in \mathbb{C}[x, y]$ irreducible, el conjunto $V(F) \setminus V(F)_x = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y) = 0, \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 0\}$ es un conjunto finito.

Demostración. Basta probar que los polinomios F y $\frac{\partial}{\partial y}F$ no tienen factores en común. Como F es irreducible, el único factor que posee es él mismo. Dado que $\text{grad}(\frac{\partial}{\partial y}F) < \text{grad}(F)$, F no divide a $\frac{\partial}{\partial y}F$, por lo que no tienen factores en común. $\square$

Proposición 38. Sean $A \subseteq \mathbb{C}^2$ un conjunto abierto y conexo, $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y $(a, b) \in A$ tal que $\frac{\partial}{\partial y}F(a, b) \neq 0$. Existen abiertos $U \subseteq \mathbb{C}^2$ y $W \subseteq \mathbb{C}$, con $(a, b) \in U$ y $a \in W$, tales que para todo $x \in W$ existe un único $y \in \mathbb{C}$ que cumple $(x, y) \in U$ y $F(x, y) = 0$. La correspondencia mencionada define una única función holomorfa e inyectiva $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(i) \quad f(a) = b$$

$$(ii) \quad \text{para todo } x \in W, \quad F(x, f(x)) = 0.$$

Proposición 39. Para toda curva algebraica $V \subseteq \mathbb{C}^2$, con $V = V(F)$, existe una única superficie de Riemann compacta S_F tal que $V(F)_x \subseteq S_F$.

Demostración. Tomemos la función proyección $\bar{x} : V(F) \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x$, definimos la restricción $\bar{x} = \bar{x} \upharpoonright_{V(F)_x}$ y el conjunto $B = \bar{x}(V(F) \setminus V(F)_x) \cup \{\infty\} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Por el corolario [9], se sabe que el conjunto $V(F) \setminus V(F)_x$ es finito; por lo que su imagen $B = \bar{x}(V(F) \setminus V(F)_x)$, también. Para cada $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus B$, el polinomio en una variable $G(y) = F(a, y)$ tiene por lo menos una solución $b \in \mathbb{C}$. De modo que $(a, b) \in V(F)_x$ y es tal que $\bar{x}(a, b) = a$. La función $\bar{x} : V(F)_x \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus B$ es entonces sobreyectiva.

Veamos que $\bar{x}$ resulta ser una transformación cubriente. Para todo $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus B$, el polinomio $G(y) = F(a, y)$ tiene un número finito de raíces $b_1, \dots, b_d$. Para cada $i = 1, \dots, d$, por la proposición [39], existen vecindades $U_i \subseteq \mathbb{C}^2$ de (a, b_i) y $W_i \subseteq \mathbb{C}$ de a , y una función continua e inyectiva $f_i : W_i \rightarrow \mathbb{C}$, que cumple

$$(i) \quad f_i(a) = b_i$$

$$(ii) \quad f_i(W_i) \subseteq V.$$

De modo que la función $g_i : W_i \rightarrow V : x \mapsto (x, f_i(x))$ es también continua, inyectiva y $\bar{x} \circ g_i = id_{W_i}$. Definimos

$$W = \left(\bigcap_{i=1}^d W_i \right) \setminus B,$$

es claro que

$$\bigsqcup_{i=1}^d g_i(W) \subseteq (\bar{x})^{-1}(W)$$

pues para todo $i = 1, \dots, d$ se tiene que $\bar{x}(g_i(W_i)) = W$. La contención opuesta

$$(\bar{x})^{-1}(W) \subseteq \bigsqcup_{i=1}^d g_i(W)$$

surge de la unicidad de las funciones. Supongamos que existe $(x, y) \in U$ tal que $x \in W$ y $(x, y) \notin \bigsqcup_{i=1}^d g_i(W)$. Es decir, existe $y \in \mathbb{C}$ tal que $(x, y) \in U \cap V(F)_x$ y $y \neq f_i(x)$ para todo $i = 1, \dots, d$, lo cual contradice la unicidad de los $f_i(x)$.

Las restricciones $\bar{x} \upharpoonright_{f_i(W)} : f_i(W) \rightarrow W$ son homeomorfismos dado que su inversa es f_i . Se obtiene que la función $\bar{x} : V(F)_x \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus B$ es una cubriente.

Aplicando el corolario [7], existe una única superficie de Riemann compacta S_F tal que $V(F)_x \subseteq S_F$. $\square$

Toda curva algebraica en $\mathbb{C}^2$ genera una única superficie de Riemann compacta. Surge naturalmente la pregunta de cuándo una superficie de Riemann es realización de una curva algebraica en $\mathbb{C}^2$. La respuesta es afirmativa. En [Gir12] se prueba que la compacidad es aquella propiedad topológica que caracteriza a las superficies de Riemann con un origen algebraico y se describe el campo de funciones meromorfas, obteniendo una correspondencia entre superficies de Riemann compactas y curvas algebraicas en $\mathbb{C}^2$. Las afirmaciones anteriores están resumidas en las dos siguientes proposiciones que se enuncian sin demostración.

Proposición 40. *Para toda superficie de Riemann compacta S , existe un polinomio irreducible $F \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $S \cong S_F$.*

La demostración se encuentra en la proposición 1.89 y el teorema 1.91 de [Gir12, Gironde y González-Diez, 2021, pág. 71, 72 y 73].

Proposición 41. *Para todo $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ irreducible, $\mathcal{M}(S_F) \cong \mathbb{C}(x', y')$, en donde $F(x', y') = 0$.*

La demostración se encuentra en el corolario 1.93 de [Gir12, Gironde y González-Diez, 2021, pág. 74].

4.2. Campos de funciones meromorfas: una versión algebraica de las superficies de Riemann compactas

Dada una superficie de Riemann compacta S , podemos asignarle un campo: el campo de funciones meromorfas $\mathcal{M}(S)$. Más aún, esta correspondencia es una equivalencia de categorías entre superficies de Riemann compactas y campos de funciones algebraicas, es decir, la información de una superficie de Riemann compacta es totalmente capturada por la estructura algebraica de sus funciones meromorfas. En esta sección se prueba este resultado.

Definición 42. *Un campo de funciones en una variable sobre $\mathbb{C}$ es un campo de la forma $\mathbb{C}(x, y)$, en donde x es un elemento trascendente de $\mathbb{C}$, y es un elemento algebraico de $\mathbb{C}(x)$.*

Observación 21. *Canónicamente se define un campo de funciones en d variables en $\mathbb{C}$ como una extensión de campo finitamente generada de $\mathbb{C}$ con grado de trascendencia d . Para el caso $d = 1$, esto resulta ser equivalente a la definición anterior [Cla20].*

Definición 43. *Definimos la categoría de campos de funciones en una variable sobre $\mathbb{C}$, $\mathbf{CaFun}_1$, de manera que los objetos de la categoría son los campos de funciones en una variable sobre $\mathbb{C}$ y los morfismos son los homomorfismos de $\mathbb{C}$ -álgebras entre ellos.*

Proposición 42. *La siguiente asignación F tal que:*

- a) *Para cada S superficie de Riemann compacta, $F(S) = \mathcal{M}(S)$*

b) Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann compactas, y $f : S_1 \rightarrow S_2$ un morfismo entre superficies de Riemann, entonces

$$F(f) : \mathcal{M}(S_2) \rightarrow \mathcal{M}(S_1)$$

$$g \mapsto g \circ f$$

es un funtor contravariante de la categoría de superficies de Riemann compactas a la categoría de campos de funciones en una variable sobre $\mathbb{C}$.

Demostración. Sean S_1 , S_2 y S_3 superficies de Riemann compactas, y $f_1 : S_1 \rightarrow S_2$, $f_2 : S_2 \rightarrow S_3$ morfismos.

(i) Si $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(S_2)$ y $p \in S_1$, entonces

1. $F(f_1)(g_1 + g_2)(p) = \lim_{x \rightarrow p} F(f_1)(g_1 + g_2)(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow p} (g_1 + g_2)(f_1(x))$
 $= \lim_{x \rightarrow p} g_1(f_1(x)) + g_2(f_1(x))$
 $= \lim_{x \rightarrow p} (F(f_1)(g_1) + F(f_1)(g_2))(x)$
 $= (F(f_1)(g_1) + F(f_1)(g_2))(p).$
2. $F(f_1)(g_1 \cdot g_2)(p) = \lim_{x \rightarrow p} F(f_1)(g_1 \cdot g_2)(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow p} (g_1 \cdot g_2)(f_1(x))$
 $= \lim_{x \rightarrow p} g_1(f_1(x)) \cdot g_2(f_1(x))$
 $= \lim_{x \rightarrow p} (F(f_1)(g_1) \cdot F(f_1)(g_2))(x)$
 $= (F(f_1)(g_1) \cdot F(f_1)(g_2))(p).$
3. Para $a \in \mathbb{C}$, $F(f_1)(a) = a \circ f_1 = a.$

Por lo cual $F(f_1)$ es homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras.

(ii) Para todo $g \in \mathcal{M}(S_1)$, $F(id_{S_1})(g) = g \circ id_{S_1} = g$. Por tanto $F(id_{S_1}) = id_{\mathcal{M}(S_1)}$.

(iii) Para todo $g \in \mathcal{M}(S_3)$,

$$F(f_2 \circ f_1)(g) = g \circ (f_2 \circ f_1)$$

$$= (g \circ f_2) \circ f_1$$

$$= F(f_2)(g) \circ f_1$$

$$= (F(f_1) \circ F(f_2))(g).$$

□

Para probar que el funtor es una equivalencia de categorías, se necesitan los siguientes resultados sobre funciones meromorfas, para los cuales no se da una prueba. La prueba se encuentra en [Gir12].

Proposición 43. *Dados S una superficie de Riemann compacta y $p, q \in S$ diferentes, entonces existe $\phi \in \mathcal{M}(S)$ tal que $\phi(p) = 0$ y $\phi(q) = \infty$.*

Proposición 44. *Para toda superficie de Riemann compacta S , si $g, h \in \mathcal{M}(S)$ y $G(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ es un polinomio irreducible tal que $G(g, h) = 0$, entonces la correspondencia*

$$\begin{aligned}\phi : S &\longrightarrow S_G \\ p &\mapsto (g(p), h(p))\end{aligned}$$

es un morfismo de superficies de Riemann.

Proposición 45. *El funtor de la proposición anterior es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Basta probar que el funtor es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo.

- (i) (fiel) Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann compactas y $f, g \in \text{Mor}(S_1, S_2)$ tales que $F(f) = F(g)$. Si $f \neq g$, entonces existe $x \in S_1$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Por la proposición [44], existe $\phi \in \mathcal{M}(S_2)$ de tal manera que $\phi(f(x)) \neq \phi(g(x))$. Es decir, $F(f)(\phi) \neq F(g)(\phi)$, contradiciendo la hipótesis.
- (ii) (esencialmente sobreyectivo) Sea $\mathcal{M}$ campo de funciones de una variable sobre $\mathbb{C}$. Existen $g, h \in \mathcal{M}$ tales que $\mathcal{M} = \mathbb{C}(g, h)$, $\mathbb{C}(g)$ es una extensión trascendente de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{M} = \mathbb{C}(g, h)$ es una extensión algebraica de $\mathbb{C}(g)$. Como h es algebraico sobre $\mathbb{C}(g)$, existe un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}(g)$ que se anula al evaluar en h . Al multiplicar dicho polinomio con los denominadores de los coeficientes, obtenemos un polinomio $G \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $G(g, h) = 0$. El polinomio anterior se puede considerar irreducible sin pérdida de generalidad, por lo cual $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}(S_G)$, en donde las funciones coordenadas x, y de S_G se envían en g, h .
- (iii) Dados S_1 y S_2 superficies de Riemann compactas y $\varphi : \mathcal{M}(S_2) \longrightarrow \mathcal{M}(S_1)$ homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras. Existe un polinomio irreducible $G_2(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $S_2 \cong S_{G_2}$. Tomamos $x_2, y_2 \in \mathcal{M}(S_2)$ tales que $G_2(x_2, y_2) = 0$. Como φ es homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras, entonces

$$\begin{aligned}G_2(\varphi(x_2), \varphi(y_2)) &= \varphi(G_2(x_2, y_2)) \\ &= \varphi(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por la proposición [45], la correspondencia

$$\begin{aligned}\phi : S_{G_1} &\longrightarrow S_{G_2} \\ p &\mapsto (\varphi(x_2)(p), \varphi(y_2)(p))\end{aligned}$$

define un morfismo de superficies de Riemann.

Para ver que $F(\phi) = \varphi$, basta comprobarlo en los generadores x_2 y y_2 . Sea $p \in S_1$, entonces

$$\begin{aligned}F(\phi)(x_2)(p) &= x_2(\phi(p)) \\ &= x_2(\varphi(x_2)(p), \varphi(y_2)(p)) \\ &= \varphi(x_2)(p).\end{aligned}$$

Análogamente, se cumple para y_2 .

□

Corolario 10. *Dos superficies de Riemann compactas son isomorfas si y sólo si sus campos de funciones meromorfas asociados son isomorfos.*

4.3. Curvas p-gonales

Las curvas p-gonales son el caso más sencillo de curvas algebraicas en $\mathbb{C}^2$. En esta sección se estudian las estructuras complejas y los campos de funciones meromorfas asociados a ellas. Se da una definición inicial de curvas p-gonales. Esta definición se refinará hasta una definición final dada en la sección [4.4], la cual contiene más restricciones, pero reúne a todas las curvas p-gonales de la definición inicial.

Definición 44 (original). Una **curva p-gonal** es la correspondiente a un polinomio de la forma

$$F(x, y) = y^p - P(x)$$

tal que p es número primo y $P(x) = c \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i} \in \mathbb{C}(x, y)$, con m_i primo relativo con p , para cada $i = 1, \dots, r$. Los números $a_1, \dots, a_r$ se denominan los **puntos de ramificación** de la curva p-gonal.

Observación 22. En adelante escribiremos la ecuación $y^p = P(x)$ como sinónimo de la curva algebraica generada por el polinomio $F(x, y) = y^p - P(x)$.

4.3.1. Construcción de la superficie de Riemann asociada a una curva p-gonal

En la sección 4.1, se asignó a cada curva algebraica en $\mathbb{C}^2$ una superficie de Riemann compacta. Sin embargo, algunas de las pruebas necesarias para llegar a ello se basan en la clasificación de cubrientes de $\mathbb{D}^*$ (proposición [28]). Al tomar una curva algebraica concreta no resulta elemental deducir la multiplicidad de los valores en donde $F_y = 0$ y de los puntos al infinito para la función proyección, es decir, a qué cubierta de $\mathbb{D}^*$ corresponde la función proyección en una vecindad lo suficientemente pequeña de los eventuales puntos de ramificación.

A continuación detallamos la construcción de la superficie de Riemann compacta asociada a una curva p-gonal.

Paso 1. Determinar los puntos en donde $F_Y = 0$:

La función $F_Y(x, y) = py^{p-1}$ se iguala a cero cuando $y = 0$, es decir, para los puntos $\{(a_i, 0)\}_{i=1}^r$.

Paso 2. Despejar y en términos de x :

$$y = \xi_p^j \sqrt[p]{c \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i}}, \text{ con } P(x) = c \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i}$$

Paso 3. Para los puntos en donde $F_Y \neq 0$, definir la carta de acuerdo al despeje:

Para todo $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, con $F(x, y) = 0$ y $x \neq a_i$ ($i = 1, \dots, r$), se define la carta $\phi : V \subseteq V(F) \rightarrow U$, tomando $U \subseteq \mathbb{C}$ vecindad de 0 de tal manera que el conjunto $U + x$ no contiene a ningún a_i ($i = 1, \dots, r$), como la inversa de la función

$$\phi^{-1}(z) = (z + x, \xi_p^j \sqrt[p]{c \prod_{i=1}^r (z + x - a_i)^{m_i}})$$

tomando la raíz de la unidad ξ_p^j que corresponde a y . Por la manera en que está definida en su primera componente, claramente es inyectiva y su inversa se encuentra definida.

Paso 4. Para cada punto tal que $F_Y = 0$, encontrar el grado de ramificación y definir la carta de acuerdo al despeje:

Para cada $i = 1, \dots, r$, se define la carta $\phi_i : V_i \subseteq V(F) \longrightarrow U_i$, tomando $U_i \subseteq \mathbb{C}$ vecindad de 0 de tal manera que $U_i + a_i$ no contiene a ningún a_k ($k \neq i$), como la inversa de la función

$$\phi^{-1}(z) = (z^p + a_i, z^{m_i} \sqrt[p]{c \prod_{k=1, k \neq i}^r (z^p + a_i - a_k)^{m_k}})$$

Sean $z_1, z_2 \in U_i$ tales que $\phi_i^{-1}(z_1) = \phi_i^{-1}(z_2)$; la primera componente indica que $z_1 = \xi_p^l z_2$ para algún $l = 1, \dots, p$, entonces por la segunda componente

$$\begin{aligned} z_2^{m_i} \sqrt[p]{c \prod_{k=1, k \neq i}^r (z_2^p + a_i - a_k)^{m_k}} &= z_1^{m_i} \sqrt[p]{c \prod_{k=1, k \neq i}^r (z_1^p + a_i - a_k)^{m_k}} \\ &= (\xi_p^l z_2)^{m_i} \sqrt[p]{c \prod_{k=1, k \neq i}^r ((\xi_p^l z_2)^p + a_i - a_k)^{m_k}} \\ &= z_1^{m_i} \sqrt[p]{c \prod_{k=1, k \neq i}^r (z_1^p + a_i - a_k)^{m_k}} \end{aligned}$$

por tanto

$$z_1^{m_i} = z_2^{m_i}.$$

Dado que m_i y p son primos relativos, entonces $z_1 = z_2$. La función es inyectiva.

Paso 5. Hallar la cantidad de puntos al infinito que agregar y el grado de ramificación de cada uno.

(i) Si $\sum_{i=1}^r m_i$ es primo con p , se añade un punto ∞ a la superficie y se define la carta $\phi_\infty : V_\infty \subseteq V(F) \cup \{\infty\} \longrightarrow U_\infty$, tomando $U_\infty \subseteq \mathbb{C}$ vecindad de 0 de tal manera que no contiene a ningún a_i ($i = 1, \dots, r$), como la inversa de la función

$$\phi^{-1}(z) = \begin{cases} (\frac{1}{z^p}, \frac{1}{z^{\sum m_i}} \sqrt[p]{c \prod_{i=1}^r (1 - a_i z^p)}) & : z \in U_\infty \\ \infty & : z = 0 \end{cases}$$

Sean $z_1, z_2 \in U_\infty$ tales que $\phi_\infty^{-1}(z_1) = \phi_\infty^{-1}(z_2)$; la primera componente indica que $z_1 = \xi_p^l z_2$ ($l = 1, \dots, p$), la segunda indica que

$$z_1^{\sum m_i} = z_2^{\sum m_i},$$

como son primos relativos, entonces $z_1 = z_2$ y la función es inyectiva.

(ii) Si $\sum_{i=1}^r m_i = kp$, se añaden p puntos $\infty_1, \dots, \infty_p$ a la superficie y se definen las cartas $\phi_{\infty_j} : V_{\infty_j} \subseteq V(F) \cup \{\infty_j\} \longrightarrow U_{\infty_j}$ ($j = 1, \dots, p$), tomando $U_{\infty_j} \subseteq \mathbb{C}$ vecindad de 0 de tal manera que no contiene a ningún a_i ($i = 1, \dots, r$), como la inversa de la función

$$\phi^{-1}(z) = \begin{cases} (\frac{1}{z}, \frac{\xi_p^j}{z^k} \sqrt[p]{c \prod_{i=1}^r (1 - a_i z)}) & : z \in U_{\infty_j} \\ \infty_j & : z = 0 \end{cases}$$

Sean $z_1, z_2 \in U_{\infty_j}$ tales que $\phi_{\infty_j}^{-1}(z_1) = \phi_{\infty_j}^{-1}(z_2)$; la primera componente indica que $z_1 = z_2$ y por tanto, la función es inyectiva.

4.3.2. Manipulando generadores del campo de funciones meromorfas

En [Gir12], Gironde y González-Diez utilizan una técnica que denominan “manipulación de generadores de campos de funciones”, para obtener que existen a lo más dos curvas 7-gonales de género 3 no isomorfas. En esta sección y en lo que sigue de este texto, utilizamos esta técnica para describir en general las curvas p-gonales.

Proposición 46 (Invarianza del campo de funciones). *Sean S una superficie de Riemann compacta generada por la curva p-gonal $y^p = P(x)$, en donde $x, y \in \mathcal{M}(S)$ son tales que $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(x, y)$. Se tiene que*

- i. Si $x' = R(y)x$ para cualquier $R(y) \in \mathbb{C}(y)$, entonces $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x', y)$. Análogamente, si $y' = R(x)y$ para algún $R(x) \in \mathbb{C}(x)$, entonces $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x, y')$.
- ii. Si n no es múltiplo de p y $y' = y^n$, entonces $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x, y')$.
- iii. Si $x' = (x - a)^n$ para cualquier $a \in \mathbb{C}$ y $n = \pm 1$, entonces $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x', y)$.
- iv. Si $x' = L(x)$, en donde L es una transformación de Möbius, entonces $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x', y)$.

Demostración. i. Por construcción $x' \in \mathbb{C}(x, y)$ y como $x = \frac{x'}{R(y)}$, también $x \in \mathbb{C}(x', y)$. Para y' es análogo.

- ii. Por construcción $y' \in \mathbb{C}(x, y)$. Como n y p son primos entre sí, por la identidad de Bézout, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $an + bp = 1$. De modo que

$$\begin{aligned} (y')^a P(x)^b &= (y^n)^a (y^p)^b \\ &= y^{an+bp} \\ &= y \end{aligned}$$

Por lo que $y \in \mathbb{C}(x, y')$.

- iii. Por construcción $x' \in \mathbb{C}(x, y)$ y como $x = (x')^n + a$, entonces $x \in \mathbb{C}(x', y)$.
- iv. Para una transformación de Möbius de la forma $L(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = x'$, se tiene que $L^{-1}(x') = \frac{\delta x' - \beta}{-\gamma x' + \alpha} = x$. De modo que $x \in \mathbb{C}(x', y)$ y $x' \in \mathbb{C}(x, y)$. □

Corolario 11. *Sea S una superficie de Riemann compacta generada por una curva p-gonal $y^p = P(x)$. Entonces S es isomorfa a las superficies de Riemann compactas generadas por las siguientes curvas*

- i. $y^p = P(x)R(x)^p$ para cualquier $R(x) \in \mathbb{C}(x)$.
- ii. $y^p = P(x)^n$ si n es primo con p .
- iii. $y^p = P(x^n + a)$ para cualesquiera $a \in \mathbb{C}$ y $n = \pm 1$.

iv. $y^p = P(L^{-1}(x))$.

Demostración. i. Por la proposición [47,i.], $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x, y')$, para $y' = yR(x)$.
Por la equivalencia de categorías (proposición [46]), la curva

$$\begin{aligned}(y')^p &= (yR(x))^p \\ &= y^p R(x)^p \\ &= P(x)R(x)^p\end{aligned}$$

es isomorfa.

ii. Si n es primo con p , por la proposición [47,ii.], $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x, y')$, para $y' = y^n$.
Por la equivalencia de categorías (proposición [46]), la curva

$$\begin{aligned}(y')^p &= (y^n)^p \\ &= (y^p)^n \\ &= P(x)^n\end{aligned}$$

es isomorfa.

iii. Por la equivalencia de categorías (proposición [46]), la curva

$$\begin{aligned}y^p &= P(x) \\ &= P((x')^n + a)\end{aligned}$$

es isomorfa.

vi. Por la equivalencia de categorías (proposición [47]), la curva

$$\begin{aligned}y^p &= P(x) \\ &= P(L^{-1}(x'))\end{aligned}$$

es isomorfa.

□

Proposición 47. *Toda curva p-gonal es isomorfa a una de la forma*

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$$

con p primo y $1 \leq m_i < p$ para todo $i = 1, \dots, r$.

Demostración. Dada una curva p-gonal $y^p = P(x)$, donde

$$P(x) = c \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i} \in \mathbb{C}[x, y].$$

Para cada $i = 1, \dots, r$, existen $k_i, m'_i \in \mathbb{Z}$ tales que $m_i = k_i p + m'_i$, con $1 \leq m'_i < p$ pues m_i es primo con p . Por corolario [11.i.], esta curva es isomorfa a la curva generada por

$$\begin{aligned}
y^p &= \frac{c(x-a_1)^{m_1} \dots (x-a_r)^{m_r}}{c(x-a_1)^{p k_1} \dots (x-a_r)^{p k_r}} \\
&= \frac{c(x-a_1)^{p k_1 + m_1'} \dots (x-a_r)^{p k_r + m_r'}}{c(x-a_1)^{p k_1} \dots (x-a_r)^{p k_r}} \\
&= (x-a_1)^{m_1'} \dots (x-a_r)^{m_r'}
\end{aligned}$$

con $1 \leq m_i' < p$. □

Para una curva p-gonal existen dos posibles compactificaciones (Paso [5]), dependiendo de si el grado del polinomio $P(x)$ es múltiplo de p o no. Por medio de la fórmula de Riemann-Hurwitz, calculamos el género de estas curvas dependiendo el caso.

Proposición 48. *Para una curva p-gonal*

$$y^p = \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i}$$

el género de la superficie de Riemann compacta asociada está dado por

$$g = \begin{cases} \frac{(p-1)(r-1)}{2} & : \text{si } \sum_{i=1}^r m_i \text{ primo con } p \\ \frac{(p-1)(r-2)}{2} & : \text{si } \sum_{i=1}^r m_i \text{ múltiplo de } p \end{cases}$$

Demostración. Tomemos la proyección a la primera coordenada de la curva x . El grado de dicha proyección es p . Si $\sum_{i=1}^r m_i$ es primo con p , los valores de ramificación son $a_1, \dots, a_r, \infty$, todos con grado p . Por la fórmula de Riemann-Hurwitz,

$$\begin{aligned}
g &= \frac{2-2p+(r+1)(p-1)}{2} \\
&= \frac{2-2p+rp+p-r-1}{2} \\
&= \frac{1-r-p+pr}{2} \\
&= \frac{(1-r)-p(1-r)}{2} \\
&= \frac{(p-1)(r-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Si $\sum_{i=1}^r m_i$ es múltiplo de p , los valores de ramificación son $a_1, \dots, a_r$, todos con grado p . Por la fórmula de Riemann-Hurwitz,

$$\begin{aligned}
g &= \frac{2-2p+r(p-1)}{2} \\
&= \frac{-2(p-1)+r(p-1)}{2} \\
&= \frac{(p-1)(r-2)}{2}.
\end{aligned}$$

□

Observación 23. *Dada una curva p-gonal con género g , el número de puntos de ramificación r está dado por*

$$r = \begin{cases} \frac{2g}{p-1} + 1 & : \sum_{i=1}^r m_i \text{ primo con } p \\ \frac{2g}{p-1} + 2 & : \sum_{i=1}^r m_i \text{ múltiplo de } p \end{cases}$$

En las siguientes proposiciones vemos que se puede escoger de manera exclusiva cualquiera de las dos opciones, pues toda curva tiene las dos posibles representaciones.

Proposición 49. *Toda curva p-gonal de la forma*

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_{r+1})^{m_{r+1}}, \quad \text{con } \sum_{i=1}^{r+1} m_i \text{ múltiplo de } p$$

es isomorfa a alguna curva p -gonal de la forma

$$y^p = (x - a_1)^{m'_1} \dots (x - a_r)^{m'_r}, \quad \text{con } \sum_{i=1}^r m'_i \text{ primo con } p.$$

Demostración. Existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\sum_{i=1}^{r+1} m_i = kp$. Para $y' = \frac{y}{(x-a_{r+1})^k}$, por el Corolario [11], la curva es isomorfa a la curva generada por

$$\begin{aligned} y^p &= \frac{(x-a_1)^{m_1} \dots (x-a_{r+1})^{m_{r+1}}}{(x-a_{r+1})^{kp}} \\ &= \frac{(x-a_1)^{m_1} \dots (x-a_{r+1})^{m_{r+1}}}{(x-a_{r+1})^{\sum_{i=1}^{r+1} m_i}} \\ &= \left(\frac{x-a_1}{x-a_{r+1}} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{x-a_r}{x-a_{r+1}} \right)^{m_r} \left(\frac{x-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} \right)^{m_{r+1}} \\ &= \left(\frac{x-a_1}{x-a_{r+1}} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{x-a_r}{x-a_{r+1}} \right)^{m_r} \\ &= \left(\frac{x-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} - \frac{a_1-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{x-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} - \frac{a_r-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} \right)^{m_r} \\ &= \left(1 - \frac{a_1-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} \right)^{m_1} \dots \left(1 - \frac{a_r-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} \right)^{m_r} \\ &= \left(\frac{a_1-a_{r+1}}{a_1-a_{r+1}} - \frac{a_1-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{a_r-a_{r+1}}{a_r-a_{r+1}} - \frac{a_r-a_{r+1}}{x-a_{r+1}} \right)^{m_r} \\ &= c \left(\frac{1}{a_1-a_{r+1}} - \frac{1}{x-a_{r+1}} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{1}{a_r-a_{r+1}} - \frac{1}{x-a_{r+1}} \right)^{m_r} \end{aligned}$$

con $c = \prod_{i=1}^r (a_i - a_{r+1})^{m_i}$. Tomando $b_i = \frac{1}{a_i - a_{r+1}}$ para cada $i = 1, \dots, r$, $x' = \frac{1}{x - a_{r+1}}$ y $y'' = (-1)^{\sum_{i=1}^r m_i} \frac{y'}{c}$, tenemos que la curva original es isomorfa a

$$y^p = (x - b_1)^{m_1} \dots (x - b_r)^{m_r}.$$

Como $1 \leq m_i < p$, entonces $\sum_{i=1}^r m_i$ no es múltiplo de p . □

Proposición 50. *Toda curva p -gonal de la forma*

$$y^p = (x - a_1)^{m'_1} \dots (x - a_r)^{m'_r}, \quad \text{con } \sum_{i=1}^r m'_i \text{ primo con } p.$$

es isomorfa a alguna curva p -gonal de la forma

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_{r+1})^{m_{r+1}}, \quad \text{con } \sum_{i=1}^{r+1} m_i \text{ múltiplo de } p.$$

Demostración. Sea L una transformación de Möbius de la forma

$$L(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

tal que $\gamma \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ y para todo $i = 1, \dots, r$, $L(a_i) \neq 0$. La inversa L^{-1} para $x' = L(x)$ está dada por

$$L^{-1}(x') = \frac{\delta x' - \beta}{-\gamma x' + \alpha}.$$

De modo que

$$\begin{aligned} y^p &= \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m'_i} \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\frac{\delta x' - \beta}{-\gamma x' + \alpha} - a_i \right)^{m'_i} \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\frac{\delta x' - \beta + a_i \gamma x' - a_i \alpha}{-\gamma x' + \alpha} \right)^{m'_i} \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\frac{\delta x' + a_i \gamma x' - (a_i \alpha + \beta)}{-\gamma x' + \alpha} \right)^{m'_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^r \left(\frac{\gamma a_i + \delta}{-\gamma x' + \alpha} \frac{\delta x' + a_i \gamma x' - (a_i \alpha + \beta)}{\gamma a_i + \delta} \right)^{m'_i} \\
&= \prod_{i=1}^r \left(\frac{\gamma a_i + \delta}{-\gamma x' + \alpha} \right)^{m'_i} \left(x' - \frac{a_i \alpha + \beta}{\gamma a_i + \delta} \right)^{m'_i} \\
&= \prod_{i=1}^r \left(\frac{\gamma a_i + \delta}{-\gamma x' + \alpha} \right)^{m'_i} \prod_{i=1}^r \left(x' - \frac{a_i \alpha + \beta}{\gamma a_i + \delta} \right)^{m'_i} \\
&= K(-\gamma)^s (\gamma x + \delta)^{t+s} \left(\frac{\gamma x' - \alpha}{\gamma} \right)^s \prod_{i=1}^r (x' - L(a_i))^{m'_i} \\
&= K(-\gamma)^s (\gamma x + \delta)^{t+s} \left(x' - \frac{\alpha}{\gamma} \right)^s \prod_{i=1}^r (x' - L(a_i))^{m'_i},
\end{aligned}$$

en donde $K = \prod_{i=1}^r (\gamma a_i + \delta)^{m'_i}$, $t = \sum_{i=1}^r m'_i$, y $s \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $1 \leq s < p$ y $s + \sum_{i=1}^r m'_i = s + t \equiv 0 \pmod{p}$. La última igualdad se tiene pues

$$\begin{aligned}
-\gamma x' + \alpha &= -\gamma \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right) + \alpha \\
&= \frac{-\gamma \alpha x - \gamma \beta + \alpha \gamma x + \alpha \delta}{\gamma x + \delta} \\
&= \frac{\alpha \delta - \gamma \beta}{\gamma x + \delta} \\
&= \frac{1}{\gamma x + \delta}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\left(\frac{y}{\sqrt[p]{K(-\gamma)^s (\gamma x + \delta)^{\frac{t+s}{p}}}} \right)^p = \prod_{i=1}^r (x' - L(a_i)).$$

Tomando $y' = \frac{y}{\sqrt[p]{K(-\gamma)^s (\gamma x + \delta)^{\frac{t+s}{p}}}}$; $x' = L(x)$; para cada $i = 1, \dots, r$, $b_i = L(a_i)$ y $m_i = m'_i$; $b_{r+1} = L(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$; y $m_{r+1} = s$. Por el corolario [11[i. y iv.]] tenemos que la curva inicial es isomorfa a

$$y^p = \prod_{i=1}^{r+1} (x - b_i)^{m_i}$$

con $\sum_{i=1}^{r+1} m_i$ múltiplo de p . □

Un corolario inmediato se tiene sobre las curvas 2-gonales, estas curvas se denominan **curvas hiperelípticas**.

Corolario 12. *Toda curva hiperelíptica con género g es isomorfa a una de la forma*

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i),$$

en donde los a_i son diferentes entre sí.

En el siguiente ejemplo se aplican las

Ejemplo 12. *Dada la curva $y^3 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$. Tomando los generadores $x' = \frac{1}{x - a_3}$ y $y' = \frac{y}{(x - a_3) \sqrt[3]{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}}$, se obtiene que*

$$\begin{aligned}
(y')^3 &= \frac{y^3}{(x - a_3)^3 (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} \\
&= \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{(x - a_3)^3 (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} \\
&= \frac{1}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{(x - a_3)(x - a_3)(x - a_3)} \\
&= \frac{1}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} \left(\frac{x - a_1}{x - a_3} \right) \left(\frac{x - a_2}{x - a_3} \right) \\
&= \frac{1}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} \left(\frac{x - a_3 - (a_1 - a_3)}{x - a_3} \right) \left(\frac{x - a_3 - (a_2 - a_3)}{x - a_3} \right) \\
&= \frac{1}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} \left(1 - \frac{a_1 - a_3}{x - a_3} \right) \left(1 - \frac{a_2 - a_3}{x - a_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{a_1 - a_3} - \frac{1}{x - a_3} \right) \left(\frac{1}{a_2 - a_3} - \frac{1}{x - a_3} \right) \\
&= \left(\frac{1}{a_1 - a_3} - x' \right) \left(\frac{1}{a_2 - a_3} - x' \right) \\
&= \left(x' - \frac{1}{a_1 - a_3} \right) \left(x' - \frac{1}{a_2 - a_3} \right).
\end{aligned}$$

De modo que la curva inicial es isomorfa a la curva $y^3 = (x - \frac{1}{a_1 - a_3})(x - \frac{1}{a_2 - a_3})$.

Para realizar el proceso contrario, partiendo de la curva $y^3 = (x - \frac{1}{a_1 - a_3})(x - \frac{1}{a_2 - a_3})$, es necesario encontrar una transformación de Möbius L tal que $L(\frac{1}{a_1 - a_3}) = a_1$, $L(\frac{1}{a_2 - a_3}) = a_2$ y $L(\infty) = a_3$. Esta transformación está dada por

$$L(z) = \frac{a_3 z + 1}{z}$$

y su inversa por

$$L^{-1}(z) = \frac{-1}{-z + a_3}.$$

Tomando $b_1 = \frac{1}{a_1 - a_3}$, $b_2 = \frac{1}{a_2 - a_3}$, y los generadores $x' = L(x) = \frac{a_3 x + 1}{x}$, $y' = \frac{y}{\sqrt[3]{(-1)^1 b_1 b_2 x}}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
(y')^3 &= \frac{(x - b_1)(x - b_2)}{(x \sqrt[3]{(-1)^1 b_1 b_2})^3} \\
&= \frac{(\frac{-1}{-x + a_3} - b_1)(\frac{-1}{-x + a_3} - b_2)}{\frac{-x^3 b_1 b_2}{-x^3 b_1 b_2}} \\
&= \frac{(\frac{-1 + b_1 x' - b_1 a_3}{-x' + a_3})(\frac{-1 + b_2 x' - b_2 a_3}{-x' + a_3})}{-x^3 b_1 b_2} \\
&= \frac{(\frac{-1 + b_1 x' - b_1 a_3}{b_1} \frac{b_1}{-x' + a_3})(\frac{-1 + b_2 x' - b_2 a_3}{b_2} \frac{b_2}{-x' + a_3})}{-x^3 b_1 b_2} \\
&= \frac{(\frac{-1 + b_1 x' - b_1 a_3}{b_1})(\frac{-1 + b_2 x' - b_2 a_3}{b_2})(\frac{b_1}{-x' + a_3})(\frac{b_2}{-x' + a_3})}{-x^3 b_1 b_2} \\
&= \frac{(x' - \frac{b_1 a_3 + 1}{b_1})(x' - \frac{b_2 a_3 + 1}{b_2}) b_1 b_2 (\frac{1}{-x' + a_3})^2}{-x^3 b_1 b_2} \\
&= \frac{(x' - L(b_1))(x' - L(b_2))(\frac{1}{-x' + a_3})^2}{-x^3} \\
&= \frac{(x' - L(b_1))(x' - L(b_2))(-(\frac{1}{-x' + a_3})^3)(x' - a_3)}{-x^3} \\
&= \frac{(x' - L(b_1))(x' - L(b_2))(-L^{-1}(x'))^3(x' - a_3)}{-x^3} \\
&= \frac{(x' - L(\frac{1}{a_1 - a_3}))(x' - L(\frac{1}{a_2 - a_3}))(-x^3)(x' - a_3)}{-x^3} \\
&= (x' - a_1)(x' - a_2)(x' - a_3).
\end{aligned}$$

El género de esta curva es

$$\begin{aligned}
g &= \begin{cases} \frac{(3-1)(2-1)}{2} & : \text{si es considerada como } (x - \frac{1}{a_1 - a_3})(x - \frac{1}{a_2 - a_3}) \\ \frac{(3-1)(3-2)}{2} & : \text{si es considerada como } (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \end{cases} \\
&= \frac{(2)(1)}{2} = 1.
\end{aligned}$$

4.4. Isomorfismo de curvas p-gonales vía el campo de funciones meromorfas

Ciertas acciones de grupo sobre el conjunto de las curvas p-gonales resultan invariantes sobre su estructura diferenciable compleja, es decir, cuando un elemento del grupo actúa sobre una curva p-gonal produce otra isomorfa a la primera. En particular, tres acciones de grupo serán suficientes para describir los isomorfismos entre curvas p-gonales.

Definición 45. *Para una curva p-gonal*

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$$

se describen las siguientes acciones de grupo:

- i. *El grupo S_r de permutaciones de r elementos actúa sobre la curva de la siguiente manera*

$$(\sigma, y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}) \mapsto y^p = (x - a_{\sigma(1)})^{m_{\sigma(1)}} \dots (x - a_{\sigma(r)})^{m_{\sigma(r)}}$$

para $\sigma \in S_r$.

- ii. *El grupo $\mathbb{Z}_p^*$ actúa de la siguiente manera*

$$(z, y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}) \mapsto y^p = (x - a_1)^{zm_1} \dots (x - a_r)^{zm_r}$$

para $z \in \mathbb{Z}_p^$*

- iii. *El grupo $PSL_2(\mathbb{C})$ de transformaciones de Möbius actúa sobre la curva de la siguiente manera*

$$(L, y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}) \mapsto y^p = (x - L(a_1))^{m_1} \dots (x - L(a_r))^{m_r}$$

para $L \in PSL_2(\mathbb{C})$.

Observación 24. *El grupo $PSL_2(\mathbb{C})$ corresponde a los automorfismos de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. También puede verse como el grupo de las mencionadas transformaciones de Möbius, es decir, transformaciones de la forma $L(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.*

Proposición 51. *Para todo $g \in G$ ($G = S_r, \mathbb{Z}_p^*, PSL_2(\mathbb{C})$) y toda curva p-gonal $y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$, la curva producida por la acción de g en ella es isomorfa a la primera.*

Demostración. (S_r) Dado que el producto en $\mathbb{C}[x]$ es conmutativo y asociativo, la acción genera el mismo polinomio.

($\mathbb{Z}_p^*$) Todo $z \in \mathbb{Z}_p^*$ es primo con p . Por el corolario [11. ii], se cumple la proposición.

($PSL_2(\mathbb{C})$) La demostración sigue la misma idea que la demostración de la proposición [51], pero tomando $s = 0$. □

Corolario 13. Sean $\sigma \in S_r$, $z \in \mathbb{Z}_p^*$, $L \in PSL_2(\mathbb{C})$ y

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$$

una curva p -gonal. La curva

$$y^p = (x - L(a_{\sigma(1)}))^{zm_{\sigma(1)}} \dots (x - L(a_{\sigma(r)}))^{m_{\sigma(r)}}$$

es isomorfa a la primera.

Demostración. Basta aplicar simultáneamente los numerales de la proposición anterior. □

En la sección anterior hemos probado que toda curva p -gonal es isomorfa a alguna p -gonal con las restricciones de la siguiente definición (definición [46]). Por lo cual, de ahora en adelante, se entiende a una curva p -gonal con la próxima definición.

Definición 46 (final). Una **curva p -gonal** es la correspondiente a un polinomio de la forma

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_i}$$

en donde

- i. p es primo
- ii. para todo $i = 1, \dots, r$, $1 \leq m_i < p$ y a_i son diferentes entre sí,
- iii. $\sum_{i=1}^r m_i$ es múltiplo de p .

En el corolario [13] se establece una condición suficiente para el isomorfismo entre curvas p -gonales. En [BS14] se prueba que, con las restricciones de la definición anterior, esta condición no sólo es suficiente sino también necesaria.

Proposición 52. Dos curvas p -gonales

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$$

y

$$y^p = (x - a'_1)^{m'_1} \dots (x - a'_r)^{m'_r}$$

son isomorfas como superficies de Riemann si y sólo si existen $\sigma \in S_r$, $z \in \mathbb{Z}_p^*$ y $L \in PSL_2(\mathbb{C})$ tales que para todo $i = 1, \dots, r$

- i. $a'_i = L(a_{\sigma(i)})$
- ii. $m'_i = zm_{\sigma(i)}$.

4.4.1. Contando curvas 3-gonales no isomorfas

Con base en la proposición [53], se pueden contar las posibles curvas 3-gonales de género g no isomorfas, sin tener en cuenta los números complejos elegidos como puntos de ramificación. En esta subsección se precisa la anterior afirmación y se encuentra una fórmula explícita.

Definición 47. *Dada una curva p -gonal*

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$$

*el vector $(m_1, \dots, m_r)$ se denomina el **multi-grado** de la curva. El número r es la **longitud** del multi-grado.*

Observación 25. *Un multi-grado de una curva p -gonal $(m_1, \dots, m_r)$ cumple con las siguientes condiciones:*

- i. sus elementos $m_i \in \mathbb{Z}_p^*$, para todo $i = 1, \dots, r$,*
- ii. $m_i \leq m_{i+1}$,*
- iii. $\sum_{j=1}^r m_j \equiv 0 \pmod{p}$.*

La condición ii. reduce los multi-grados a considerar tomando una sola órbita de la acción del grupo de permutaciones S_r .

Definición 48. *Dado p primo, dos multi-grados con la misma longitud $(m_1, \dots, m_r)$ y $(m'_1, \dots, m'_r)$ son **isomorfos en p** si existen dos tuplas $(a_1, \dots, a_r), (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{C}$, en donde sus elementos son diferentes entre sí, tales que las curvas*

$$y^p = \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i} \text{ y } y^p = \prod_{i=1}^r (x - b_i)^{m'_i}$$

son isomorfas.

Proposición 53. *Dos multi-grados $(m_1, \dots, m_r)$ y $(m'_1, \dots, m'_r)$ son isomorfos en p , para p primo, si y sólo si existen $k \in \mathbb{Z}_p$ y $\sigma \in S_r$ tales que $m'_i = km_{\sigma(i)}$, para todo $i = 1, \dots, r$.*

Demostración. La prueba es inmediata por la proposición [53]. □

Definición 49. *Definimos las funciones $C_3 : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ y $N_3 : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ tales que para cada $g \in \mathbb{Z}^+$, $C_3(g)$ es el número de multi-grados de longitud $g + 2$, y $N_3(g)$ es el número de multi-grados de longitud $g + 2$ no isomorfos en 3 entre sí.*

Observación 26. *La elección de $g + 2$ en la definición anterior proviene de que una curva 3-gonal de género g tiene $\frac{2g}{3-1} + 2 = g + 2$ puntos de ramificación.*

Proposición 54. *La función C_3 cumple las siguientes condiciones*

- a. $C_3(1) = 2, C_3(2) = 1$ y $C_3(3) = 2$.*
- b. Para todo $g > 3$, $C_3(g) = C_3(g - 3) + 1$.*

Demostración. Para $p = 3$, los multi-grados son secuencias de 1 y 2 de longitud $g + 2$, que cumplen las condiciones de la observación [25]. Los 1 aparecen en el comienzo de la secuencia y los 2 al final. Cada secuencia queda determinada por el número de apariciones del 1.

- a. Para $g = 1$, las únicas secuencias de longitud 3 tal que la suma es igual a 0 módulo 3 son $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$. Para $g = 2$, la única secuencia de longitud 4 tal que la suma es igual a 0 módulo 3 es $(1, 1, 2, 2)$. Para $g = 3$, las únicas secuencias de longitud 5 tal que la suma es igual a 0 módulo 3 son $(1, 1, 1, 1, 2)$ y $(1, 2, 2, 2, 2)$. Por lo cual $C_3(1) = 2, C_3(2) = 1$ y $C_3(3) = 2$.
- b. Para $g > 3$, existe una correspondencia biyectiva entre las secuencias de longitud $g + 2$ tales que la suma es igual a 0 módulo 3 y tienen por lo menos 3 apariciones del 1, y las secuencias de longitud $g - 1$ tal que la suma es igual a 0 módulo 3. La biyección está dada por el proceso de eliminar tres 1 de cada secuencia de longitud $g + 2$. De las secuencias con 0, 1 o 2 apariciones del 1, sólo una puede sumar 0 módulo 3. Por lo tanto $C_3(g) = C_3(g - 3) + 1$.

□

Proposición 55. Para todo $g \in \mathbb{Z}^+$, $C_3(g) = \lfloor \frac{g+1}{3} \rfloor + ((g + 1) \pmod{3})$.

Demostración. Por el teorema de recursión [Hal74], existe una única función tal que cumple las condiciones recursivas de la proposición anterior. Basta probar que la función $\lfloor \frac{g}{3} \rfloor + ((g + 1) \pmod{3})$ cumple dichas condiciones.

- a. $\lfloor \frac{1+1}{3} \rfloor + ((1 + 1) \pmod{3}) = 0 + 2 = 2,$
 $\lfloor \frac{2+1}{3} \rfloor + ((2 + 1) \pmod{3}) = 1 + 0,$
 $\lfloor \frac{3+1}{3} \rfloor + ((3 + 1) \pmod{3}) = 1 + 1 = 2.$
- b. Para $g > 3$,

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{g}{3} \rfloor + ((g) \pmod{3}) &= \lfloor \frac{g-3}{3} + 1 \rfloor + ((g - 3) \pmod{3}) \\ &= \lfloor \frac{g-3}{3} \rfloor + 1 + ((g - 3) \pmod{3}). \end{aligned}$$

□

Proposición 56. Para todo $g \in \mathbb{Z}^+$, $N_3(g) = \lceil \frac{C_3(g)}{2} \rceil = \lceil \frac{\lfloor \frac{g+1}{3} \rfloor + ((g+1) \pmod{3})}{2} \rceil$.

Demostración. Dado $g \in \mathbb{Z}^+$. Si $(a_1, \dots, a_{g+2})$ es un multi-grado de una curva p-gonal con n apariciones del 1, entonces $(2a_1, \dots, 2a_{g+2}) \pmod{p}$ es un multi-grado isomorfo en p con n apariciones del 2.

Para g impar, cada multi-grado tiene exactamente un multi-grado diferente isomorfo en 3 a él. Para g par, cada multi-grado tiene exactamente un multi-grado diferente isomorfo en 3 a él, exceptuando a aquel que tiene la misma cantidad de apariciones del 1 que del 2. Se deduce que $N_3(g) = \lceil \frac{C_3(g)}{2} \rceil$. □

4.4.2. Método de clasificación de curvas p-gonales

En general, deducir una fórmula en términos de g para el conteo de los multi-grados no isomorfos en p excede a este texto. Sin embargo, fijado un primo p y un número entero positivo g , existe un método para hallar todos los posibles multi-grados no isomorfos en p que corresponden a curvas p-gonales de género g . El método, junto con un par de ejemplos, se detallan a continuación.

Proposición 57. *Para toda curva p-gonal*

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$$

existe una curva p-gonal isomorfa a la primera de la forma

$$y^p = (x - a_1)(x - a_2)^{m'_2} \dots (x - a_r)^{m'_r}.$$

Demostración. Por la Identidad de Bézout, existen $n, d \in \mathbb{Z}$, con $n > 0$, tales que $dp + nm_1 = 1$. Tomando $y_1 = y^n(x - a_1)^d$, por el corolario [11], la curva

$$\begin{aligned} y_1^p &= y^{pn}(x - a_1)^{dp} \\ &= (x - a_1)^{nm_1} \dots (x - a_r)^{nm_r} (x - a_1)^{dp} \\ &= (x - a_1)^{dp + nm_1} \dots (x - a_r)^{nm_r} \\ &= (x - a_1)(x - a_2)^{nm_2} \dots (x - a_r)^{nm_r} \end{aligned}$$

es isomorfa a la inicial. Por el razonamiento de la proposición [48], podemos asumir que los exponentes de la nueva curva están entre 1 y $p - 1$. Además, se cumple que

$$\begin{aligned} 1 + nm_2 + \dots + nm_r &= dp + nm_1 + \dots + nm_r \\ &= dp + n(m_1 + \dots + m_r) \\ &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

□

La proposición indica que basta considerar los multi-grados cuyo primer número sea 1.

Método

Paso 1. *Listar las secuencias de longitud $\frac{2g}{p-1} + 2$ de números entre 1 y $p - 1$ en orden creciente, cuyo primer elemento sea 1.*

Paso 2. *Sumar las secuencias enlistadas y escoger aquellas que suman 0 módulo p .*

Paso 3. *Multiplicar módulo p cada secuencia escogida por cada elemento de $\mathbb{Z}_p^*$ e identificarlos.*

Ejemplo 13. *Consideremos las curvas 5-gonales de género 4. La longitud de los multi-grados es*

$$\begin{aligned} r &= \frac{2g}{p-1} + 2 \\ &= \frac{8}{4} + 2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Multi-grado	Σ módulo 5	Multi-grado	Σ módulo 5	Multi-grado	Σ módulo 5
(1, 1, 1, 1)	4	(1, 1, 3, 3)	3	(1, 2, 3, 4)	0
(1, 1, 1, 2)	0	(1, 1, 3, 4)	4	(1, 2, 4, 4)	1
(1, 1, 1, 3)	1	(1, 1, 4, 4)	0	(1, 3, 3, 3)	0
(1, 1, 1, 4)	2	(1, 2, 2, 2)	2	(1, 3, 3, 4)	1
(1, 1, 2, 2)	1	(1, 2, 2, 3)	3	(1, 3, 4, 4)	2
(1, 1, 2, 3)	2	(1, 2, 2, 4)	4	(1, 4, 4, 4)	3
(1, 1, 2, 4)	3	(1, 2, 3, 3)	4		

Cuadro 4.1: Multi-grados de longitud 4 para $p = 5$

En el cuadro [4.1], se listan los multi-grados de longitud 4 para $p = 5$ tales que su primer elemento sea 1, junto con la suma de sus elementos módulo 5. De los multi-grados cuya suma es múltiplo de 5, se relacionan por la acción de $(\mathbb{Z}_5)^*$ de la siguiente manera:

Multi-grados
(1, 1, 1, 2) y (1, 3, 3, 3)
(1, 1, 4, 4)
(1, 2, 3, 4)

Cuadro 4.2: Multi-grados isomorfos

Toda curva 5-gonal de género 4 es de una y sólo una de las siguientes tres formas:

Curvas 5-gonales de género 4
$y^5 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)^2$
$y^5 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)^4(x - a_4)^4$
$y^5 = (x - a_1)(x - a_2)^2(x - a_3)^3(x - a_4)^4$

Cuadro 4.3: Curvas 5-gonales de género 4 no isomorfas

Ejemplo 14. Consideremos las curvas 11-gonales de género 5. La longitud de los multi-grados es

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{2g}{p-1} + 2 \\
 &= \frac{10}{11-1} + 2 \\
 &= 1 + 2 \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

En el cuadro [4.6], se listan los multi-grados de longitud 3 para $p = 11$ tales que su primer elemento sea 1, junto con la suma de sus elementos módulo 11.

De los multi-grados cuya suma es múltiplo de 11, se relacionan por la acción de $(\mathbb{Z}_{11})^*$ de la siguiente manera

Multi-grados
(1, 1, 9) y (1, 5, 5)
(1, 2, 8), (1, 3, 7) y (1, 4, 6)

Cuadro 4.4: Multi-grados isomorfos

Toda curva 11-gonal de género 5 es de una y sólo una de las siguientes dos formas:

Curvas 11-gonales de género 5
$y^{11} = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)^9$
$y^{11} = (x - a_1)(x - a_2)^2(x - a_3)^8$

Cuadro 4.5: Curvas 11-gonales de género 5 no isomorfas

4.4.3. Curvas por género

Al fijar sólo el género, dos curvas p-gonales con un p diferente pueden ser isomorfas, caso que se cumple para género 1. En esta subsección se estudian las posibles curvas p-gonales para los géneros 0 y 1, tomando en consideración el siguiente resultado acerca de la acción del grupo $PSL_2(\mathbb{C})$ sobre $\hat{\mathbb{C}}$, cuya demostración se encuentra en [Ilm23].

Proposición 58. *Para todo par de triplas $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \hat{\mathbb{C}}$, existe un único $g \in PSL_2(\mathbb{C})$ tal que $g(a_i) = b_i$, para cada $i = 1, 2, 3$.*

De modo que para las curvas p-gonales con $r \leq 3$ la elección de los puntos de ramificación no tiene importancia, pues por cada multi-grado hay una única clase de curvas isomorfas.

Observación 27. *Por la proposición anterior, en el ejemplo [13] se puede asegurar que existen exactamente dos curvas 11-gonales no isomorfas de género 5. Estas clases de isomorfismo son representadas por las curvas*

$$y^{11} = x(x-1)(x+1)^9 \text{ y } y^1 = x(x-1)^2(x+1)^8.$$

Género 0

Por el Teorema de Uniformización cualquier superficie de Riemann compacta de género 0 es isomorfa a la esfera de Riemann. Se demuestra el caso particular de este teorema para curvas p-gonales. Dada una curva p-gonal de género 0

$$y^p = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r}$$

se cumple que

$$0 = \frac{(p-1)(r-1)}{2},$$

Multi-grado	Σ módulo 11	Multi-grado	Σ módulo 11	Multi-grado	Σ módulo 11
(1, 1, 1)	3	(1, 3, 3)	7	(1, 5, 9)	4
(1, 1, 2)	4	(1, 3, 4)	8	(1, 5, 10)	5
(1, 1, 3)	5	(1, 3, 5)	9	(1, 6, 6)	2
(1, 1, 4)	6	(1, 3, 6)	10	(1, 6, 7)	3
(1, 1, 5)	7	(1, 3, 7)	0	(1, 6, 8)	4
(1, 1, 6)	8	(1, 3, 8)	1	(1, 6, 9)	5
(1, 1, 7)	9	(1, 3, 9)	2	(1, 6, 10)	6
(1, 1, 8)	10	(1, 3, 10)	3	(1, 7, 7)	4
(1, 1, 9)	0	(1, 4, 4)	9	(1, 7, 8)	5
(1, 1, 10)	1	(1, 4, 5)	10	(1, 7, 9)	6
(1, 2, 2)	5	(1, 4, 6)	0	(1, 7, 10)	7
(1, 2, 3)	6	(1, 4, 7)	1	(1, 8, 8)	6
(1, 2, 4)	7	(1, 4, 8)	2	(1, 8, 9)	7
(1, 2, 5)	8	(1, 4, 9)	3	(1, 8, 10)	8
(1, 2, 6)	9	(1, 4, 10)	4	(1, 9, 9)	8
(1, 2, 7)	10	(1, 5, 5)	0	(1, 9, 10)	9
(1, 2, 8)	0	(1, 5, 6)	1	(1, 10, 10)	10
(1, 2, 9)	1	(1, 5, 7)	2		
(1, 2, 10)	2	(1, 5, 8)	3		

Cuadro 4.6: Multi-grados de longitud 3 para $p = 11$

y por tanto $r = 1$ pues $p > 1$. De modo que la curva es de la forma

$$y^p = x.$$

Proposición 59. *Toda curva p -gonal de género 0 es isomorfa a la superficie de Riemann generada por $x = 1$.*

Demostración. Basta tomar $x' = \frac{x}{y^p} = \frac{y^p}{y^p} = 1$, obteniendo el resultado pues $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x', y)$. $\square$

Género 1

Para género 1, se tiene que

$$r = \frac{2}{p-1} + 2,$$

con lo cual $p = 2$ o $p = 3$.

Para $p = 2$, por el corolario [12], toda curva es de la forma

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4).$$

Para $p = 3$, $r = 3$; el único posible multi-grado es $(1, 1, 1)$. Dada la proposición [59], podemos considerar la curva como

$$y^3 = x(x-1)(x-2),$$

por la proposición [50] y aplicando la proposición [59], es isomorfa a la curva

$$\begin{aligned} y^3 &= x(x-1) \\ &= x^2 - x. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y^3 + \frac{1}{4} &= x^2 - x + \frac{1}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Tomando $x' = y$ e $y' = x - \frac{1}{2}$, la curva es isomorfa a

$$y^2 = x^3 + \frac{1}{4}$$

que resulta en el caso de la curva con $p = 2$.

Proposición 60. *Toda curva p-gonal de género 1 es isomorfa a la superficie de Riemann generada por $y^2 = x(x-1)(x+1)$.*

Demostración. Aplicando las proposiciones [51] y [54], y el razonamiento anterior, la única curva p-gonal de género 1 es

$$y^2 = x(x-1)(x+1).$$

□

Bibliografía

- [BS14] A.F. Izquierdo M. y Rodríguez R.E. Broughton S.A., Costa. Superelliptic surfaces as p-gonal surfaces. *Contemporary Mathematics*, 629, 2014. [71](#)
- [Car92] M.P. do Carmo. *Riemannian geometry (Fraherty, F., Trans.)*. Birkhäuser, 1992. [22](#)
- [Cla20] P. Clark. *Algebraic curves: an algebraic approach*. Notes, 2020. [59](#)
- [For81] O. Forster. *Lectures of Riemann surfaces (Guilligan, B., Trans.)*. Springer-Verlag, 1981. [43](#), [44](#)
- [Ful89] W. Fulton. *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989. [57](#)
- [Gar20] P. Garrett. *Complex analysis*. Notes, 2020. [57](#)
- [Gir12] G. Gironde, E. y González-Diez. *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*. Cambridge University Press, 2012. [6](#), [40](#), [59](#), [60](#), [64](#)
- [Gui74] A. Guillemin, V. y Pollack. *Differential topology*. Prentice-Hall, Inc., 1974. [12](#)
- [Hal74] P. Halmos. *Naive set theory*. Springer, 1974. [73](#)
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002. [21](#), [43](#), [44](#)
- [Hub06] J.H. Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Volume 1*. Matrix Editions, 2006. [8](#)
- [Ilm23] T. Ilmanen. *Geometry 2023*. Notes, 2023. [76](#)
- [Kel75] J.L. Kelley. *General topology*. Springer, 1975. [7](#)
- [Lan99] S. Lang. *Complex analysis (4 ed.)*. Springer, 1999. [7](#)
- [ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer, 1998. [56](#)
- [Rem98] R. Remmert. From riemann surfaces to complex spaces. *Société Mathématique de France, Séminaire et Congrès 3*, 1998. [5](#), [6](#), [57](#)
- [Sti92] J. Stillwell. *Geometry of surfaces*. Springer-Verlag, 1992. [24](#)

-
- [Tho92] C. Thomassen. The jordan-schönflies theorem and the classification of surfaces. *The American Mathematical Monthly*, 99(2):116–130, 1992. [23](#)
- [Wey55] H. Weyl. *The concept of a Riemann surface (Maclane G., trans.)*. Addison-Wesley publishing company, 1955. [5](#)