



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚMERO DE POLICÍAS EN
GRÁFICAS DE FICHAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
BRUNO AMEZCUA OSORIO

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



CD. MX. 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Amezcu
Apellido materno	Osorio
Nombre(s)	Bruno
Teléfono	55 65 57 86 52
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	420004114

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr.
Nombre(s)	Ruy
Apellido paterno	Fabila
Apellido materno	Monroy

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dra.
Nombre(s)	Eugenia
Apellido paterno	O'Reilly
Apellido materno	Regueiro

5. Datos del sinodal 3

Grado	PhD.
Nombre(s)	Criel
Apellido paterno	Merino
Apellido materno	López

6. Datos del sinodal 4

Grado	Dr.
Nombre(s)	Jesús
Apellido paterno	Leaños
Apellido materno	Macías

7. Datos del trabajo escrito

Título	Número de Policías en Gráficas de Fichas
Número de páginas	155 p.
Año	2024

Agradecimientos

A la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, por brindarme las herramientas para desarrollar mis intereses y el espacio en donde conocí a excelentes profesores que me dieron el invaluable regalo de las matemáticas: César, Gabriela, Javier, Jorge, Judith, Mónica y Vinicio. Al proyecto de investigación PAPIIT IA101423, por permitirme dedicarme de tiempo completo a realizar este proyecto y, particularmente, a mi asesor de tesis por sus innumerables consejos, apoyo, paciencia y amistad. A Gary MacGillivray de *University of Victoria*, quien me recibió calurosamente en su país, me regaló su tiempo, su trabajo, y me brindó experiencias que me ayudaron a ampliar mis horizontes.

A todas las personas que me han ayudado a crecer, con los que he compartido alegrías y me han acompañado en dificultades. A toda mi familia, particularmente a mi mamá y mi hermana, fundamentales en mi vida y a quienes las palabras jamás podrán agradecer todo lo que me han dado. A mis abuelos maternos, por heredar-me el gusto por las matemáticas y la vocación de la docencia. A las personas que me acompañaron en mi proceso de formación como matemático y me ayudaron a convertirme en adulto: Almendra, Desire, Diana, Draco, Eduardo, Eloísa, Fernando, Juan, Julia, Pier, Ramsés, Rebeca y Sofía

Una vez más a mi hermana, Brenda Angélica, por prestar su talento diseñando y dibujando todas las figuras que ilustran las páginas de este texto.

Gracias a ustedes puedo concluir este proyecto, en el que alcancé resultados que son mi mayor orgullo hasta ahora, que avivan mis ganas de seguir aprendiendo, los cuales no habría podido imaginar de niño y con los que, paradójicamente, siempre soñé.

Índice general

Agradecimientos	v
1. Preliminares	1
1.1. Conjuntos	1
1.2. Álgebra	10
1.3. Geometrías	20
1.4. Gráficas	27
2. Gráficas de fichas	51
2.1. Introducción	51
2.2. Conexidad de las gráficas de fichas	57
2.3. Fichas, diseños, y mazos	60
2.4. Gráfica de fichas etiquetadas	73
3. Policías y ladrones	95
3.1. Introducción	95
3.2. Sombras, productos, y caracterizaciones	101
3.3. Número policiaco de gráficas de fichas	120
Bibliografía	151

Capítulo 1

Preliminares

Este trabajo tiene el objetivo de demostrar los conocimientos y habilidades adquiridas durante el tiempo en que el autor cursó la licenciatura en matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Como tal, este trabajo se puede entender compuesto de dos partes: la primera es aquella que contiene el Capítulo 1, que pone de manifiesto los conocimientos matemáticos adquiridos fundamentales del análisis que se desarrolla en la segunda parte, es decir, en los Capítulos 2 y 3, quienes se encargan de evidenciar las habilidades matemáticas desarrolladas durante el estudio de la licenciatura. Los objetos definidos y los resultados demostrados en el Capítulo 1 deben ser conocidos por toda persona que haya cursado Álgebra Superior 1, Álgebra Moderna 1, Teoría de Gráficas 1 o Gráficas y Juegos, y que tenga familiaridad con los resultados básicos de geometrías de incidencia. La presentación de todos los objetos construidos en esta primera parte es original, pero se apoyan en una variedad de libros que se mencionan oportunamente. La nomenclatura y notación se apega en gran medida a convenciones ampliamente adoptadas y la mayoría de los resultados el autor considera que forman parte de la “cultura general” de un matemático. Por lo tanto, se incita al lector iniciado en el lenguaje matemático moderno a considerar el Capítulo 1 como un capítulo referencial: su objetivo es incluir explicaciones completas y consistentes de todas las ideas necesarias para entender el desarrollo de este trabajo y es posible consultarlo fácilmente cuando se encuentre un término desconocido en el texto gracias al índice alfabético.

1.1. Conjuntos

En este texto todos los objetos son construidos con base en la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel [24], sin embargo, seguimos la aproximación intuitiva de

Avella y Campero [8]: prescindimos de la axiomática formal que define los conceptos de conjunto y pertenencia, y nos conformamos con la noción primitiva de que los **conjuntos** tienen **elementos** y un conjunto está formado por todos sus elementos. Esta noción primitiva de conjunto debe interpretarse como que dos conjuntos serán iguales siempre y cuando tengan exactamente los mismos elementos. Para indicar la pertenencia de un elemento a un conjunto se utiliza el símbolo $\in$, de manera que la fórmula

$$a \in b$$

se lee como “ a es un elemento de b ”, “ a pertenece a b ”, o “ a está en b ”. La negación de la afirmación $a \in b$ la denotamos $a \notin b$ y extendemos la terminología anterior de forma natural diciendo, por ejemplo, que a no pertenece a b . Existe un único conjunto sin elementos, al que denotamos $\emptyset$ y llamamos el **conjunto vacío** o simplemente **el vacío**. Abusaremos la nomenclatura para decir que un conjunto “es vacío” cuando es igual al conjunto vacío. A los conjuntos que no son el vacío les decimos **no-vacíos**. No está de más subrayar que todos los objetos de la Teoría de Conjuntos son conjuntos, por lo tanto, obviamos la aclaración de que cualquier objeto que consideramos es un conjunto.

Es posible construir nuevos conjuntos a partir del vacío, que es el único que sabemos que existe *a priori*. Buena parte de esto lo hacemos basados en el Esquema de Separación, axioma de la Teoría de Conjuntos que afirma que, dado cualquier A y una propiedad P , existe B compuesto por todos los elementos de A que cumplen P .¹ Cuando definimos un conjunto de esta forma escribimos $B = \{x \in A : P(x)\}$. Por otro lado el Axioma del Par asegura que, para cualesquiera a y b , existe el conjunto que los tiene a ellos por elementos, al que denotamos $\{a, b\}$ y le decimos el **par** formado por a y b . En particular, si $a = b$, denotamos al par formado únicamente por a como $\{a\}$ y le decimos el **unitario** de a . Generalizamos esta notación de forma que, cuando conocemos los elementos de un conjunto, lo describimos escribiéndolos entre corchetes y separados por comas, por ejemplo, el conjunto $\{a, b, c, d\}$ es el conjunto formado por a , b , c y d . Además, dado F cualquier conjunto, existe un conjunto formado por todos los elementos que están en los elementos de F , a éste le decimos la **unión** de F y está definido (axiomáticamente) como

$$a \in \bigcup F \text{ si y sólo si existe } A \in F \text{ tal que } a \in A.$$

¹Este nombre tiene su origen en la misteriosa noción de “propiedad”, seguimos la interpretación de Skolem, quien formaliza este concepto restringiéndolo a aquellas propiedades que pueden ser postuladas en el lenguaje de primer orden de la Teoría de Conjuntos. Esto tiene como resultado una colección infinita de axiomas, uno por cada propiedad, a la que se le dice esquema.

Por otro lado, si $F \neq \emptyset$, definimos la **intersección** de F como el conjunto

$$\bigcap F = \{a \in \bigcup F : \text{para toda } A \in F (a \in A)\}.$$

Cuando F es el par formado por A y B escribimos $\bigcup F = A \cup B$ y $\bigcap F = A \cap B$.

Un **subconjunto** de un conjunto A es un conjunto B tal cada uno de sus elementos es también un elemento de A , esto se denota $B \subseteq A$ y decimos que B está **contenido** en A o que A **contiene** a B . Si además existe un elemento en A que no está en B , se dice que B es un **subconjunto propio** de A , lo que escribimos como $B \subset A$, lo que leemos como “ B está contenido propiamente en A ”. Otro de los axiomas de la Teoría de Conjuntos asegura, para cualquier A , la existencia del conjunto de todos los subconjuntos de A , a este lo llamamos el **conjunto potencia** de A y lo denotamos $\mathcal{P}(A)$. Es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Lo anterior es un abuso de notación ya que no se puede utilizar el Esquema de Separación para definir el conjunto potencia pues no conocemos un conjunto que contenga a todos los subconjuntos de A antes de tener el conjunto potencia, sin embargo, por practicidad usamos la notación anterior para describir conjuntos incluso cuando no se usa el Esquema de Separación, lo que es un abuso de notación común. Para ejemplificar los conceptos anteriores, observemos que para toda A se tiene que $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$, por lo tanto, $B \subset A$ si y sólo si $B \subset \bigcup \mathcal{P}$.

A un par formado por conjuntos no-vacíos cuya intersección es el vacío le decimos un **par de conjuntos ajenos**. Si un conjunto satisface que, cualesquiera dos de sus elementos forman un par de conjuntos ajenos, decimos que es un conjunto formado por elementos ajenos por pares. Por otro lado, al conjunto formado por los elementos de A que no están en B le decimos la **diferencia** de A con B y se denota $A \setminus B$, además, el conjunto $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ es la **diferencia simétrica** de A y B . Como ejemplo de estos conceptos, demostramos el siguiente resultado que será de utilidad en el El Capítulo 2.

Proposición 1.1.1. *Si A y B son subconjuntos de C , entonces*

$$A \setminus B = (C \setminus B) \setminus (C \setminus A).$$

Demostración. Primero veamos que, si $x \in A \setminus B$, entonces $x \in A$ pero $x \notin B$. Por lo tanto $x \notin C \setminus A$ y $x \in C \setminus B$, de forma que $x \in (C \setminus B) \setminus (C \setminus A)$. Lo que muestra que todo elemento de $A \setminus B$ es elemento de $(C \setminus B) \setminus (C \setminus A)$. Usando el mismo razonamiento, si $x \in (C \setminus B) \setminus (C \setminus A)$, se deduce que $x \in C \setminus B$ y $x \notin C \setminus A$, por lo tanto $x \notin B$ y $x \in A$. Se concluye que $x \in A \setminus B$, por lo que todo elemento de $(C \setminus B) \setminus (C \setminus A)$ es elemento de $A \setminus B$. Así, estos conjuntos son iguales. ■

Como los conjuntos están determinados por los elementos que están en ellos, no existe una noción de “orden” ni de “repetición” en los conjuntos. Es decir que, por ejemplo, $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, a, b, a, b\}$. Podemos crear conjuntos que sí capturen esta información, para ello se define el **par ordenado** de a y b como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

La idea de esta definición es que (a, b) es igual a (c, d) siempre y cuando $a = c$ y $b = d$, lo que refleja la idea intuitiva de listas ordenadas. Con base en esta definición, dados A y B , definimos su **producto cartesiano** como el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si R es un subconjunto de $A \times B$, decimos que es una **relación** entre A y B , en particular, si $A = B$, el conjunto R es una **relación binaria** sobre A . En cualquier caso, a la afirmación $(a, b) \in R$ la denotamos aRb y decimos que a está relacionado con b . Una relación binaria es **reflexiva** si aRa para toda $a \in A$, es **simétrica** si aRb implica bRa para cualesquiera $a, b \in B$, y **transitiva** si aRb y bRc implican aRc para $a, b, c \in A$. Una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva es una **relación de equivalencia**. También, si R satisface que siempre que aRb y bRa se tiene $a = b$, decimos que la relación es **antisimétrica** y, si para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que aRb o bRa decimos que es **total**. Una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica es un **orden parcial** de A , o simplemente orden de A . Si un orden parcial además es total, decimos que es un **orden lineal**. Si R es un orden parcial de A y $a \in A$ es tal que bRa implica $b = a$ entonces a es un elemento **minimal** de A del orden R ; de forma análoga, si aRb implica $a = b$ entonces a es **maximal** del orden R . Por otro lado, si a satisface que aRb para todo $b \in A$ entonces es un **mínimo** de R y, si bRa para toda $b \in A$ entonces a es un **máximo** de R . Es claro que todo mínimo y todo máximo son, respectivamente, minimales y maximales, sin embargo lo recíproco es falso. También vale la pena observar que la antisimetría implica que los mínimos y máximos, cuando existen, son únicos. En cualquier conjunto A , la relación R sobre A dada por aRb si y sólo si $a \subseteq b$ es un orden parcial; cuando este es el orden que consideramos, decimos que los elementos minimales, maximales, mínimos, y máximos de R son, respectivamente, minimales, maximales, mínimos y máximos **por contención**.

Una relación f entre A y B , que satisface que para toda $a \in A$ existe una única $b \in B$ tal que aRb , es una **función** de A en B . En este caso, para toda $a \in A$, al único elemento de B que está relacionado con a lo denotamos $f(a)$ y le decimos la **evaluación** de f en a . En un contexto en que la función a la que se hace alusión es clara, usamos la fórmula $a \mapsto b$ para expresar que b es la evaluación de dicha función

en a . Los conjuntos A y B son el **dominio** y el **contradominio** de f respectivamente. Además, para cualquier función f de A en B , introducimos la fórmula

$$f: A \rightarrow B,$$

que se lee como “ f de A en B ” que nos sirve para nombrar una función a la vez que especificamos su dominio y contradominio. Cuando A y B son conjuntos dotados de ordenes lineales, $\leq_A$ y $\leq_B$ respectivamente, entonces decimos que $f: A \rightarrow B$ es una **función creciente** si siempre que $a' \leq_A a$, para $a', a \in A$, entonces $f(a') \leq_B f(a)$. Si además sucede que $f(a) \neq f(a')$ si $a \neq a'$, entonces f es **estrictamente creciente**. De forma análoga, decimos que f es **decreciente** si $a' \leq_A a$ implica que $f(a) \leq_B f(a')$ y que es **estrictamente decreciente** si además $f(a) \neq f(a')$ cuando $a \neq a'$. Una función que es o creciente o decreciente, es una **función monótona**. Introducimos también los adjetivos **no-creciente**, **no-decreciente** y **no-monótona** para referirnos, respectivamente, a una función que no es estrictamente creciente, una que no es estrictamente decreciente, y una que no es ni creciente ni decreciente.

Como los conjuntos están determinados por sus elementos, las funciones están determinadas por su dominio y la asignación que hacen a cada elemento de él, así que es válido definir funciones especificando éstos. Por ejemplo, si A, B , y C son conjuntos y existen funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ definimos la **composición** de f seguida de g como la función $g \circ f: A \rightarrow C$ dada por $a \mapsto g(f(a))$ para toda $a \in A$.

Para $f: A \rightarrow B$ y $A' \subseteq A$, definimos la **imagen directa** de A' bajo f como el conjunto

$$f[A'] = \{b \in B: \text{existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b\},$$

y la **función restricción** de f a A' como la función $f|_{A'}: A' \rightarrow B$ dada por

$$f|_{A'} = \{(a, f(a)) \in f: a \in A'\}.$$

También, si $B' \subseteq B$, la **preimagen** de B' bajo f es

$$f^{-1}[B'] = \{a \in A: f(a) \in B'\}.$$

Por último, si $A \subseteq B$, el **sopORTE** de una función $g: A \rightarrow B$ es el conjunto

$$\text{sop}(g) = \{a \in A: g(a) \neq a\}.$$

Si algún elemento $a \in A$ no está en $\text{sop}(g)$ decimos que g **fija** a a o que a es un elemento **fijo** de g .

Una función es **suprayectiva** si $f[A] = B$. Por otro lado, si para toda $b \in f[A]$ se tiene que $f^{-1}[\{b\}]$ es unitario, decimos que f es **inyectiva**. A una función suprayectiva $f: A \rightarrow B$ también le decimos una **A -indexación** de B , usamos la notación

$B_a = f(a)$ y, en algunas ocasiones, escribimos $B = \{B_a\}_{a \in A}$ para hacer referencia a una A -indexación arbitraria de B o que es clara en el contexto. Intuitivamente, una A -indexación es una asignación de un elemento de B a cada elemento de A de manera que todo elemento de B es asignado a alguno de A , como el nombre sugiere, sirven para referirnos a elementos de B mediante el índice de A que le corresponde. Cuando un conjunto B está A -indexado denotamos

$$\bigcup_{a \in A} B_a = \bigcup B \text{ y}$$

$$\bigcap_{a \in A} B_a = \bigcap B.$$

Todo conjunto A está A -indexado gracias a la existencia de la función $a \mapsto a$, por lo tanto siempre podemos suponer que los conjuntos están I -indexados para algún I al que le decimos un **conjunto indexador** o **de índices**. Cuando una $f: A \rightarrow B$ es inyectiva y suprayectiva, decimos que es una **función biyectiva** o una **biyección** de A en B . Una propiedad importante de las biyecciones es que su composición vuelve a ser biyectiva, la demostración de esto es rutinaria y, por ello, lo damos por hecho. Más aún, la existencia de una biyección $f: A \rightarrow B$ implica la de otra, de B en A , que a cada elemento de B le asigna el único elemento de A que lo tiene asignado en f , a esta le decimos la **inversa** de f y la denotamos f^{-1} . La inversa de una función biyectiva $f: A \rightarrow B$ es la única función $g: B \rightarrow A$ que satisface que $g \circ f(a) = a$ para toda $a \in A$. De hecho, la existencia de una función así es equivalente a que f sea biyectiva y g su inversa. Con esto, podemos demostrar el siguiente resultado, el cual es una propiedad fundamental de las relaciones de equivalencia y es una de las razones por las que éstas son objetos omnipresentes en matemáticas.

Proposición 1.1.2. *Una relación binaria en un conjunto A es de equivalencia si y sólo si existe $P = \{P_i\}_{i \in I}$ una colección de subconjuntos no-vacíos de A , ajenos por pares, tales que*

$$A = \bigcup_{i \in I} P_i,$$

y dos elementos de A , a y b , están relacionados si y sólo si existe $i \in I$ tal que $a, b \in P_i$.

Demostración. Primero supongamos que $\sim$ es una relación de equivalencia en A , definimos, para $a \in A$, el conjunto

$$P_a = \{a' \in A: a \sim a'\}.$$

Afirmamos que $\{P_a\}_{a \in A}$ satisface el enunciado. Es claro que ésta es una colección de subconjuntos de A , para ver que estos conjuntos son ajenos por pares argumentaremos por contrapositiva que, si existe $b \in P_a \cap P_{a'}$ entonces $P_a = P_{a'}$. Para ello notemos que, por la definición de P_a y $P_{a'}$, se tiene que $a \sim b$ y $a' \sim b$, como $\sim$ es simétrica esto es que $a \sim b$ y $b \sim a'$, por la transitividad de $\sim$ se sigue que $a \sim a'$. Ahora, veamos que para todo $c \in P_a$ se tiene que $a' \sim a$ y $a \sim c$, por lo tanto $a' \sim c$ y $c \in P_{a'}$, comprobándose que $P_a \subseteq P_{a'}$. De forma análoga se concluye que también $P_{a'} \subseteq P_a$ y, así, $P_a = P_{a'}$. Además, como $\sim$ es reflexiva, $a \in P_a$ para toda $a \in A$, de forma que estos conjuntos son no-vacíos y

$$A = \bigcup_{a \in A} P_a.$$

Ahora suponemos que $P = \{P_i\}_{i \in I}$ es una colección de subconjuntos no-vacíos de A , ajenos por pares, tal que

$$A = \bigcup_{i \in I} P_i,$$

y veremos que la relación binaria en A definida como $a \sim b$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $a, b \in P_i$ es de equivalencia. Como $A = \bigcup_{i \in I} P_i$, entonces para toda $a \in A$ existe $i \in I$ tal que $a \in P_i$, de forma que $\sim$ es reflexiva pues cada elemento de A está en el mismo P_i en el que él mismo está. También es claro que es simétrica pues, si a y b están en P_i , entonces b y a están en P_i . Por último, si $a \sim b$ y $b \sim c$ entonces existen $i, j \in I$ tales que $a, b \in P_i$ y $b, c \in P_j$, como entonces $b \in P_i \cap P_j$ y, recordando que los conjuntos de $\{P_i\}_{i \in I}$ son ajenos por pares, se tiene que $P_i = P_j$. Por lo tanto $a, c \in P_i$ y, así $a \sim c$, siendo esto lo que queríamos demostrar.

A un conjunto como P le decimos una **partición** de A y a sus elementos les decimos las **clases de equivalencia** de la relación $\sim$. Como este resultado nos asegura que las particiones dan lugar a relaciones de equivalencia que cuyas clases de equivalencia son sus elementos y viceversa, también les decimos clases de equivalencia a los elementos de una partición y hablamos de la partición que induce una relación de equivalencia. ■

Asumimos la existencia del conjunto de números **enteros**, al que denotamos $\mathbb{Z}$, la de $\leq$, un orden lineal en ellos, y familiaridad con su suma y multiplicación. Además, damos por hecho la siguiente proposición, a la que dentro de este texto le decimos el **principio de inducción**, y es fundamental para una gran cantidad de argumentos en este texto. Su demostración se sale de los alcances de este texto, al lector interesado lo dirigimos a [30].

Proposición 1.1.3. (*Principio de inducción*) Si $A \subseteq \mathbb{Z}$ es tal que $a \in A$ y se satisface que $n \in A$ implica $n + 1 \in A$ para toda $n \in A$, entonces para todo entero b tal que $a \leq b$ se tiene que $b \in A$.

El principio de inducción normalmente se usa para conjuntos $A \subseteq \mathbb{Z}$ definidos como $A = \{a \in \mathbb{Z}: a \text{ tiene una propiedad } P\}$. Este tipo de conjuntos nos sirven para demostrar muchas afirmaciones ya que, si mostramos que algún entero — usualmente 0 o 1— cumple P y que, si un entero cumple P entonces el siguiente entero también cumple P , por el principio de inducción podemos asegurar que todos los enteros mayores o iguales a a cumplen P .

Por otro lado, dados $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq n$, definimos el **intervalo** entre m y n como el conjunto

$$\llbracket m, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z}: m \leq k \leq n\}.$$

En particular, si $m = 1$ escribimos $\llbracket 1, n \rrbracket = \llbracket n \rrbracket$. Es claro que esto solo está definido para $n \geq 1$, por lo que siempre que escribamos $\llbracket n \rrbracket$ se entiende que k es un entero mayor o igual a 1. A los enteros que satisfacen esto les decimos **positivos** y al subconjunto de $\mathbb{Z}$ formado por ellos lo denotamos $\mathbb{Z}^+$. Además, al conjunto $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ le decimos el conjunto de los enteros **no-negativos**.

A una $\llbracket n \rrbracket$ -indexación de un conjunto le decimos una **enumeración** y a un conjunto que admite una enumeración (y al vacío) le decimos **finito**. Damos por hecho que para todo conjunto finito no-vacío, A , existe un único entero positivo n tal que existe una biyección entre $\llbracket n \rrbracket$ y A , al que le decimos la **cardinalidad** de A , y lo denotamos $|A|$. Definimos la cardinalidad del conjunto vacío como 0. A la colección de subconjuntos de cardinalidad k de un conjunto A , con $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, la denotamos $\binom{A}{k}$ y a sus elementos les decimos **k -subconjuntos** de A . La cardinalidad de $\binom{A}{k}$ la denotamos $\binom{|A|}{k}$, ya que claramente esta solo depende de la cardinalidad del conjunto A y no de sus elementos. Por lo que además escribimos $\binom{r}{s}$, para r y s enteros tales que $0 \leq s \leq r$, para referirnos a la cardinalidad de la colección de s -subconjuntos de cualquier conjunto de cardinalidad r . Es fácil ver que, si $0 < r < s$ entonces $1 < \binom{r}{s}$. También damos por hecho la regla de Pascal² que enunciamos a continuación.

Regla de Pascal. Si r y s son enteros tales que $0 < s \leq r$ entonces

$$\binom{r}{s} = \binom{r-1}{s} + \binom{r-1}{s-1}.$$

²Blaise Pascal (1623-1662) fue un matemático, físico, filósofo, y teólogo jansenista francés. Sus aportaciones matemáticas más importantes fueron la creación de la primera máquina calculadora y sus tratados sobre cónicas, probabilidad, y el triángulo que lleva su nombre.[47]

Observamos también que la existencia de una biyección $f: \llbracket n \rrbracket \rightarrow A$ induce un orden lineal en A dado por $a' \leq_A a$, para $a, a' \in A$ si y sólo si $f^{-1}(a') \leq f^{-1}(a)$. De hecho, la existencia de una biyección así es equivalente a que un conjunto finito A tenga un orden lineal. En efecto, si suponemos que existe un orden lineal en A entonces debe existir un máximo ya que, de otra forma, siempre podríamos encontrar un elemento de A mayor en el orden que todos los de un subconjunto finito cualquiera de A , por lo que A no podría ser finito. Entonces, definimos que el único elemento máximo de A será la imagen bajo una función $f: \llbracket |A| \rrbracket \rightarrow A$ de $|A|$. Definimos A' como el conjunto obtenido de A al borrarle su máximo, es fácil ver que el orden lineal de A se vuelve un orden lineal de A' si eliminamos todos los pares que involucran al máximo de A , y que $|A'| < |A|$. Por lo tanto, podemos repetir el mismo argumento para A' . Iterando este proceso $|A|$ veces, construimos una función biyectiva de $\llbracket |A| \rrbracket$ en A que induce el orden lineal con el que empezamos. Toda esta discusión busca formalizar, para un conjunto A dotado de un orden lineal y $i \in \llbracket |A| \rrbracket$, la utilización de la terminología **el i -ésimo elemento** de un orden lineal en A , como aquel elemento de A que es la imagen de i bajo la biyección que recién construimos.

Dada una colección de conjuntos indexada $\{A_i\}_{i \in I}$, definimos su **producto cartesiano generalizado** como

$$\prod_{i \in I} A_i = \{\hat{a}: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i: \hat{a}(i) \in A_i \text{ para toda } i \in I\}.$$

A un elemento de $\prod_{i \in I} A_i$ le decimos una **I -tupla** y a la evaluación $\hat{a}(i)$, que solemos denotar $\hat{a}_i$, le decimos la i -ésima entrada o la i -ésima **coordenada** de $\hat{a}$. En particular, si $I = \llbracket n \rrbracket$ decimos que $\hat{a}$ es una n -tupla y en ocasiones las describimos escribiendo sus evaluaciones en una lista ordenada $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)$. Si $A_i = A$ para toda $i \in I$, denotamos $\prod_{i \in I} A_i = A^I$ y decimos que A^I es la I -ésima **potencia** de A . En particular, si $I = \llbracket n \rrbracket$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$ escribimos $A^{\llbracket n \rrbracket} = A^n$ y le decimos la n -ésima potencia de A . En general, en toda notación en donde se utilice un conjunto como parámetro sustituimos $\llbracket n \rrbracket$ con n .

Por último, suponemos familiaridad con la llamada *aritmética modular*. Es decir, asumimos que el lector está familiarizado con la noción de **múltiplo** de un entero n —cualquier número de la forma kn para alguna $k \in \mathbb{Z}$ — y con el hecho de que, para cualesquiera $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}^+$, existen únicos $k \in \mathbb{Z}$ y $r \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ tales que

$$n = km + r$$

A r le decimos el **resto módulo m** de n , y lo denotamos $n \bmod m$, con esto se define la suma módulo m de dos enteros, a y b , a la que denotamos $a +_m b$ como el residuo

módulo m de $a + b$, es decir,

$$a +_m b = (a + b) \bmod_m.$$

En este contexto, denotamos $\mathbb{Z}_m = \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. Más aún, podemos definir una **relación ternaria** R sobre $\mathbb{Z}_m$, es decir un subconjunto de $\mathbb{Z}_m^3$, dada por $(a, b, c) \in R$ si y solo si $a \leq b$ y $b \leq c$, o $b \leq c$ y $c \leq a$, o $c \leq a$ y $a \leq b$; la cual satisface que

$$\begin{aligned} (a, b, c) \in R &\text{ entonces } (b, c, a) \in R \\ (a, b, c) \in R &\text{ entonces } (c, b, a) \notin R \\ (a, b, c) \in R \text{ y } (a, c, d) \in R &\text{ entonces } (a, b, d) \in R, \text{ y} \\ \text{si } a, b \text{ y } c &\text{ son distintos entonces } (a, b, c) \in R \text{ o } (c, b, a) \in R. \end{aligned}$$

A esta relación le decimos el **orden cíclico** de $\mathbb{Z}_m$, y reciclamos el símbolo $\leq$ para denotar $(a, b, c) \in R$ por $a \leq b \leq c$, afirmación que leemos como “ b está entre a y c en el orden cíclico de A ”. De forma análoga a los órdenes lineales, la existencia de un orden cíclico en un conjunto finito A es equivalente a la existencia de una biyección $f: \mathbb{Z}_{|A|} \rightarrow A$. De forma que también hacemos referencia al i -ésimo elemento de un orden cíclico en A , para $i \in \mathbb{Z}_{|A|}$, para referirnos a la imagen de i bajo la biyección que induce el orden cíclico de A . Por esto, no es ambiguo hablar del elemento “siguiente” o “anterior” en orden cíclico de un elemento a en A , ya que, si a es el i -ésimo elemento del orden cíclico de A , entonces los elementos referidos son, respectivamente, el $(i+1)$ -ésimo y el $(i-1)$ -ésimo elemento del orden cíclico de A .

1.2. Álgebra

Una **operación** sobre un conjunto A es una función $\star: A^k \rightarrow A$ para algún entero $k \in \mathbb{Z}^+$. Si $k = 1$ decimos que se trata de una **operación unitaria** sobre A . Cuando $k = 2$ es una **operación binaria** sobre A , en este caso, para escribir a las evaluaciones $\star((a, b)) = c$ adoptamos la notación $a \star b = c$ e incluso, cuando la operación es clara en el contexto, nos conformamos con yuxtaponer los elementos operados y escribimos, por ejemplo, $ab = c$. En esta sección nos ocupamos de introducir los resultados relativos a las operaciones binarias, por esto, dentro de ésta decimos simplemente operación para referirnos a operación binaria. Algunos ejemplos bien conocidos de operaciones son las que existen en los enteros: la suma y la multiplicación. Estos ejemplos son fundamentales para lo siguiente ya que buscamos abstraer las propiedades que tienen estas operaciones. Para lograr esto es necesario imponer propiedades adicionales en la operación, por ejemplo, decimos que una

operación es **asociativa** si

$$\star(\star(a, b), c) = (a \star b) \star c = a \star (b \star c) = \star(a, \star(b, c)).$$

La asociatividad de una operación nos permite escribir sin ambigüedad expresiones como $a \star b \star c$, ya que cualquier orden que elijamos para realizar las operaciones nos llevará al mismo resultado. En particular, al resultado de operar a un elemento consigo mismo n veces, para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$, lo denotamos a^n . Además, si e es un elemento de A tal que, para toda $a \in A$ se satisface que

$$e \star a = a \star e = a,$$

decimos que e es un **neutro** de la operación $\star$. Ejemplos de neutros son el 0 para la operación suma y el 1 para la multiplicación en los enteros. Un par ordenado $(A, \star)$, formado por un conjunto A y una operación asociativa en A , para la que existe un neutro, es un **monoide**. Así, se tiene que el conjunto de números enteros, ya sea con la operación suma o multiplicación es un monoide. Para ver otro ejemplo de monoide definimos una **palabra** de un conjunto X como una función $w: \llbracket n \rrbracket \rightarrow X$, a n le decimos la longitud de la palabra w y solemos describirla yuxtaponiendo sus evaluaciones $w_1 \cdots w_n$, a las evaluación w_i le decimos el i -ésimo **término** de la palabra w . Sobre el conjunto de las palabras de X definimos una operación a la que llamamos **concatenación** de la siguiente forma: si $w: \llbracket n \rrbracket \rightarrow X$ y $v: \llbracket m \rrbracket \rightarrow X$ son palabras, la concatenación de w con v , a la que denotamos wv , es la palabra de longitud $n + m$ dada por $w_1 \dots w_n v_1 \dots v_m$. Esta operación es claramente asociativa, sin embargo, como las palabras son funciones con dominio no-vacío, esta operación no tiene neutro. Para solucionar este problema agregamos al conjunto de palabras de X un elemento adicional que no se encuentra en éste, por ejemplo el conjunto vacío, al que llamaremos la **palabra vacía** de X , la cual se denota ε , y se define su concatenación con cualquier palabra w como

$$\varepsilon w = w\varepsilon = w.$$

Así, el conjunto de palabras con la concatenación es un monoide.

Notemos que, si se restringe la suma de los números enteros a $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ esto sigue siendo un monoide, sin embargo, perdemos una propiedad que tiene la suma al ser considerada sobre todos los números enteros, a saber, la existencia, para todo entero z , de otro z' tal que $z + z' = 0$. En general, decimos que b es un **inverso** de a para la operación $\star$ si $a \star b$ es un neutro. Un **grupo** es un monoide en donde todo elemento tiene inverso. En ocasiones también decimos que una operación $\star$ tal que $(A, \star)$ es un grupo, “forma un grupo” sobre A o que “le da estructura de grupo” a A . Existe una

enorme variedad de grupos, pero los más representativos son los llamados **grupos simétricos**, estos están definidos como $(S_X, \circ)$ en donde

$$S_X = \{f: X \rightarrow X: f \text{ es una biyección}\}$$

y $\circ$ es la composición de funciones. El elemento neutro es la **función identidad** en X , dada por $x \mapsto x$ para toda $x \in X$, a la que denotamos I_X ; mientras que el inverso de una función f es, apropiadamente, su función inversa f^{-1} . A un elemento de S_X se le dice una **permutación** de X . El siguiente resultado es fundamental en el estudio de los grupos

Proposición 1.2.1. *En cualquier grupo $(A, \star)$ el elemento neutro es único y, para cada $a \in A$, su inverso es único.*

Demostración. Suponga que I y I' son neutros para $\star$, entonces satisfacen, para cualesquiera $a, b \in A$ que $a \star I = a$ y $I' \star b = b$. Así, si $a = I'$ y $b = I$, se tiene que $I' \star I = I'$ y $I' \star I = I$. Como $\star: A \times A \rightarrow A$ es una función, se concluye que $I = I'$, lo que demuestra que el neutro es único.

Por otro lado, si b y c son inversos de a , entonces, como $\star$ es asociativa, se tiene que

$$b = b \star I = b \star (a \star c) = (b \star a) \star c = I \star c = c.$$

Así se concluye la afirmación. ■

Lo anterior nos permite homogeneizar la notación de los elementos inversos en un grupo, generalizamos la que usamos para función inversa y para cualquier a , elemento de un grupo, denotamos a su único inverso como a^{-1} . Por lo general al elemento neutro de un grupo lo denotamos por I_A o 1_A , aunque la gran variedad de contextos en que surgen los grupos a veces da lugar a notaciones más sugerentes. Un ejemplo de esto lo tenemos cuando la operación de un grupo es **conmutativa**, esto es que, para cualesquiera a y b , se satisface que

$$a \star b = b \star a.$$

Este es el caso de la suma en los números enteros, sin embargo, no lo es del grupo simétrico. Los grupos conmutativos forman una colección importante de grupos, pero tienen un comportamiento significativamente diferente del caso general, razón por la cual distinguimos claramente cuando tratamos con un grupo conmutativo escribiendo su neutro como 0 y, cuando no se presta a confusiones, incluso denotamos su operación con $+$.

Un **homomorfismo de grupos** entre $(A, \star)$ y $(B, \cdot)$ es una función $\varphi: A \rightarrow B$ tal que, para cualesquiera $a, b \in A$, se cumple que

$$\varphi(a \star b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Si φ es inyectiva le decimos un **monomorfismo de grupos** entre $(A, \star)$ y $(B, \cdot)$, cuando es claro en el contexto la operación que da estructura de grupos a A y B , decimos que φ es un morfismo de grupos entre A y B . Si un morfismo de grupos es suprayectivo entonces es un **epimorfismo de grupos**, y si es biyectivo es un **isomorfismo de grupos**. A lo largo de este texto, llamaremos simplemente **morfismos** a los homomorfismos de grupos ya que, como también será el caso en la Sección 1.4, estos son un caso particular del concepto de **morfismo**, el cual surge en diversos contextos dentro de las matemáticas, en todos ellos expresa la misma idea de “una función que preserva la estructura”. En este caso, dicha estructura es la que la operación binaria proporciona al que, de otra forma, sería simplemente un conjunto. Por lo general el contexto hace obvia la estructura a la que nos referimos y, por ello, es natural simplificar la terminología y decir simplemente morfismo, monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo. Para leer más sobre este concepto se refiere al lector a [49]. Dos grupos entre los cuales existe un isomorfismo son **isomorfos**, dos grupos así se entienden como “esencialmente iguales”, es decir, la única diferencia entre ellos es el nombre de sus elementos y un isomorfismo funciona como un diccionario que permite traducir cualquier elemento en uno de ellos al otro de manera que es igual trabajar en el primero o en el segundo. Es por esto que tratamos a los grupos isomorfos como idénticos, sin embargo, hacemos la distinción entre una igualdad en el sentido conjuntista y un isomorfismo escribiendo $A \cong B$ cuando A y B son isomorfos.

La imagen directa de cualquier monomorfismo de grupos $\varphi: B \rightarrow A$, equipada con la operación de A restringida a ella, es un **subgrupo** de A . Es decir, como $\varphi(a) \star \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$ se deduce que $(\varphi[B], \star|_{\varphi[B]})$ siempre es un grupo, esto ya que la operación de A , restringida a la imagen de φ es una operación que hereda la asociatividad de $\star$ y, además, cumple que $\varphi(1_B) = 1_A$ y $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$, por lo que tiene neutro e inversos de todos sus elementos. Observemos que, si $(\varphi[B], \star|_{\varphi[B]})$ es un subgrupo de A , φ es un isomorfismo entre B y él, de forma que también decimos que B es subgrupo de A . Resulta que la intersección de una colección arbitraria de subgrupos vuelve a ser un subgrupo, esto es claro ya que todos ellos contienen al elemento neutro del grupo y el resultado de la operación de dos elementos en la intersección debe estar en cada uno de los subgrupos y, por lo tanto, en la intersección de todos ellos. Esto nos permite definir, para cualquier X subconjunto de A , “el subgrupo más pequeño que contiene a X ” como la intersección de todos los subgrupos que le contienen. Este subgrupo es conocido como el **subgrupo generado** por X

y lo solemos denotar $\langle X \rangle_A$. Este concepto nos es de gran utilidad cuando queremos estudiar un subgrupo que conocemos de forma abstracta, ya que, si podemos asegurar que contiene algunos elementos (el subconjunto X), entonces podemos asegurar que contiene a $\langle X \rangle_A$.

Por otro lado, un **grupo cociente** de $(A, \star)$ es la imagen directa de cualquier epimorfismo $\phi: A \rightarrow B$ equipada con la restricción de la operación de B . Para entender los grupos cocientes introducimos el concepto de **kernel**³ del morfismo $\phi: A \rightarrow B$, que se define como

$$\ker \phi = \phi^{-1}[\{1_B\}] = \{a \in A: \phi(a) = 1_B\}.$$

Con esto, para cada $a \in A$ definimos

$$a/\ker \phi = \{a \star z: z \in \ker \phi\},$$

al que le decimos la clase de a módulo $\ker \phi$. Como el nombre de sus elementos sugiere, el conjunto $A/\ker \phi = \{a/\ker(\phi): a \in A\}$ es una partición de A . Más aún, sobre ésta, se puede definir una operación, que denotamos concatenando a los elementos a operar, como

$$(a/\ker \phi)(b/\ker \phi) = ((a \star b)/\ker \phi),$$

la cual hace de $A/\ker \phi$ un grupo. Resulta que, si ϕ es un epimorfismo, este grupo es isomorfo a B , por esto pensamos que todos los grupos cocientes son aquellos formados por las clases de elementos de A módulo algún kernel. Este resultado es una consecuencia directa del Primer Teorema de Isomorfismo, cuya demostración no es complicada pero requiere del desarrollo de conceptos que se salen del objetivo de este texto. Enunciamos formalmente, sin demostración, la afirmación anterior, y referimos al lector a [50].

Proposición 1.2.2. *Si $\phi: A \rightarrow B$ es un epimorfismo entonces $A/\ker \phi \cong B$.*

Para toda $m \in \mathbb{Z}^+$, es posible definir una estructura de grupo sobre $\mathbb{Z}_m$, a la que denotamos $+_m$, dada por $a +_m b = (a + b) \bmod_m$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}_m$. Si consideramos $\bmod_m$ como una función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_m$, este será un epimorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ en $(\mathbb{Z}_m, +_m)$. Se sigue por la Proposición 1.2.2 que $\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}/\ker \bmod_m$.

Ahora, veremos que es posible utilizar el producto cartesiano para crear nuevos grupos a partir de otros. En efecto, definimos el **producto de grupos** $(A, \star)$ y $(B, \cdot)$ como el grupo definido sobre el conjunto $A \times B$ con la operación dada por

$$(a, b)(a', b') = (a \star a', b \cdot b')$$

³Del alemán *kern*: núcleo, centro.

para cualesquiera $(a, b), (a', b') \in A \times B$. Naturalmente, esto se puede extender al producto de cualquier colección de grupos indexada, si $\{(A_i, \star_i)\}_{i \in I}$ es tal, entonces su producto es el grupo definido sobre $\prod_{i \in I} A_i$ con la operación $\star$ dada por

$$(f \star g)_i = f_i \star_i g_i \text{ para toda } i \in I$$

para $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$. Además, si $A_i = A$ para toda $i \in I$, decimos que este producto de grupos es la I -ésima potencia de A . Esta terminología no causa conflictos con la propia de conjuntos ya que el grupo I -ésima potencia de $(A, \star)$ se define sobre el conjunto I -ésima potencia de A y, si hay en el contexto una estructura clara de grupo para A , tendremos siempre en mente que la I -ésima potencia de A admite esta estructura de grupo a la que le llamamos y denotamos de la misma forma: $\prod_{i \in I} A = A^I$ y A^n si $I = \llbracket n \rrbracket$. En general, si las operaciones son claras, al producto de una familia de grupos $\{(A_i, \star_i)\}_{i \in I}$ lo denotamos

$$\prod_{i \in I} A_i.$$

Esta colisión notacional es natural ya que tanto el producto cartesiano como el producto de grupos forman parte de un concepto más general de producto que, como también veremos en la Sección 1.4, aparece en distintas áreas de las matemáticas. De forma que extendemos esta notación y terminología a todas ellas ya que suele ser claro, en el contexto, el tipo de objeto con el que estamos trabajando. Para leer más al respecto, volvemos a referir al lector a [49].

Una **acción** de un grupo $(A, \star)$ sobre un conjunto X es una función $f: A \times X \rightarrow X$, cuya evaluación $f(a, x)$ denotamos simplemente ax , que satisface que

$$\begin{aligned} 1_A x &= x \text{ para toda } x \in X \text{ y} \\ a(bx) &= (a \star b)x \text{ para cualesquiera } ab \in A \text{ y } x \in X. \end{aligned}$$

Hay dos conceptos relacionados al de acción que nos serán de utilidad, el primero de ellos es el de **órbita** de x , un elemento en X , esta se define como el conjunto

$$O(x) = \{y \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } ax = y\}.$$

El segundo es el de **estabilizador** de x , que se define como

$$A_x = \{a \in A : ax = x\}.$$

Las órbitas forman una partición de X , este hecho será de crucial importancia en el El Capítulo 2, razón por la cual lo enunciamos y demostramos en el siguiente resultado.

Proposición 1.2.3. *Si $(A, \star)$ actúa sobre X , entonces $\{O(x)\}_{x \in X}$ es una partición de X .*

Demostración. Como $1_A x = x$ entonces $x \in O(x)$ para toda $x \in X$, de forma que

$$X = \bigcup_{x \in X} O(x).$$

Por otro lado, si suponemos que existe un elemento z en $O(x) \cap O(y)$, se sigue que $z = ax = by$ para algunos $a, b \in A$. Ahora veamos que, si $w \in O(y)$, existe $c \in A$ tal que $w = cy$, se sigue que $w = c((b^{-1} \star a)x) = (c \star b^{-1} \star a)x$, por lo que $O(y) \subseteq O(x)$. De forma análoga se obtiene que $O(x) \subseteq O(y)$ y, por lo tanto $O(x) = O(y)$. Se concluye que las órbitas son ajenas por pares y que $\{O(x)\}_{x \in X}$ es una partición de X . ■

Decimos que una acción es **transitiva** si tiene una única órbita, es decir, si $O(x) = X$ para toda $x \in X$. En general, decimos que es **k -transitiva** si, dados $(x_1, \dots, x_k)$ y $(y_1, \dots, y_k)$ en X^k , existe $a \in A$ tal que $ax_i = y_i$ para toda $i \in \llbracket k \rrbracket$. Notemos que el concepto de transitividad y 1-transitividad coinciden. Un ejemplo claro de acción de grupo es la de S_X sobre el conjunto X , en efecto, si definimos $f : S_X \times X \rightarrow X$ como $(\alpha, x) \rightarrow \alpha(x)$, en virtud de la definición de la función composición y que el neutro de S_X es la función identidad, f es una acción. Además, esta acción es k -transitiva para toda $k \leq n$.

Para terminar esta sección, profundizaremos un poco en el estudio de los grupos simétricos que, como mencionamos, son el caso más representativo de grupo y los principales protagonistas de la aplicación de la teoría de grupos que desarrollaremos en este texto. Para ello, si una permutación $\alpha \in S_X$, para algún X , que satisface que $\text{sop}(\alpha) = \{i_1, \dots, i_r\}$ y

$$\alpha(i_1) = i_2, \dots, \alpha(i_{r-1}) = i_r, \alpha(i_r) = i_1,$$

decimos que es un **r -ciclo de S_X** , o simplemente un ciclo de S_X . Los 1-ciclos de S_X fijan a todos los elementos de X y, por lo tanto, el neutro I_X es el único 1-ciclo de S_X . Por otro lado, sus 2-ciclos intercambian la imagen de dos elementos de X , de ahí que a un 2-ciclo le decimos una **transposición**. Usamos la bien conocida notación de Cauchy⁴ para describir un r -ciclo como el anterior como

$$\alpha = (i_1 \cdots i_{r-1} i_r).$$

⁴Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fue un matemático francés cuyo trabajo, servido del de J. L. Lagrange y junto con los de P. Ruffini, P. Abati, N. H. Abel, y E. Galois, fue pionero en la teoría de grupos. A los 26 años, Cauchy publica *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme*, en donde introduce esta notación, ampliamente adoptada por multitud de autores.

En particular, escribimos $I_X = (x)$ para toda $x \in X$. Los ciclos nos sirven para entender a S_X ya que es posible “descomponer” a todas las permutaciones en ciclos. Para ser precisos, definimos una **factorización completa** de una permutación $\alpha \in S_X$, como una palabra de ciclos, $\beta_1 \cdots \beta_s$, de S_X cuyos soportes son ajenos por pares, que tiene un 1-ciclo distinto por cada $x \in \text{sop } \alpha$, y tal que

$$\alpha = \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_s.$$

Notemos que, al tener soportes ajenos por pares, el orden en el que realicemos la composición de los ciclos en una descomposición completa no afecta el resultado, por lo que, si tenemos una factorización completa de alguna permutación, cualquier reordenamiento de sus términos resulta en otra factorización completa. Por ejemplo, algunas factorizaciones completas del 3-ciclo en S_5 , dado por $\alpha = (135)$ son $(135)(2)(4)$, $(2)(135)(4)$, y $(4)(135)(2)$. Aunque puede parecer extraña la insistencia en agregar un 1-ciclo por cada elemento en el soporte de α , ya que no alteran el resultado de la composición, esta es importante para clasificar las permutaciones según la longitud de una de sus factorizaciones completas. Lo anterior es válido ya que resulta que todas las permutaciones tienen al menos una factorización completa y la colección de todas las factorizaciones completas obtenidas de reordenar sus términos tiene a todas las factorizaciones completas de esa permutación. Es decir, podemos pensar que la factorización completa de una permutación es única salvo el orden en el que aparecen los ciclos. Esto lo demostramos a continuación.

Proposición 1.2.4. *Si X es finito y no-vacío, toda permutación $\alpha \in S_X$ tiene una factorización completa y, si $\beta_1 \cdots \beta_s$ y $\gamma_1 \cdots \gamma_t$ son dos factorizaciones completas de α , entonces $s = t$ y existe $f \in S_s = S_t$ tal que*

$$\gamma_1 \cdots \gamma_t = \beta_{f(1)} \cdots \beta_{f(s)}.$$

Demostración. Como todo conjunto finito y no vacío es biyectable con algún $\llbracket n \rrbracket$, y como una biyección $f: X \rightarrow \llbracket n \rrbracket$ induce un isomorfismo de S_X en S_n dado por $\alpha \mapsto f \circ \alpha f^{-1}$, entonces nos limitamos a demostrar la afirmación para los grupos simétricos S_n con $n \in \mathbb{Z}^+$.

Primero veamos que toda permutación $\alpha \in S_n$ tiene una factorización completa. La prueba es por inducción sobre el número de elementos que no son fijados por α . El caso base, cuando fija a todos los elementos de $\llbracket n \rrbracket$ es cierto ya que, en este caso, la definición de factorización completa afirma que ésta debe ser una palabra formada por un 1-ciclo por cada elemento de $\llbracket n \rrbracket$. Por lo tanto, la única factorización completa de I_n es $(1) \cdots (n)$, ya que cualquier reordenamiento de los términos resulta en la misma palabra pues $(i) = (j)$ para cualesquiera $i, j \in \llbracket n \rrbracket$.

Por otro lado, si α no fija t elementos en $\llbracket n \rrbracket$, con $t \in \llbracket n \rrbracket$, consideremos i_1 un elemento que no es fijado por α y definimos, recursivamente,

$$i_2 = \alpha(i_1), \dots, \text{ y } i_{r+1} = \alpha(i_r).$$

En donde r es el menor entero en $\llbracket n \rrbracket$ para el cual $i_{r+1} \in \{i_1, \dots, i_r\}$, el cual tiene que existir porque $\llbracket n \rrbracket$ es finito y, mientras el siguiente término i_j no esté en $\{i_1, \dots, i_{j-1}\}$, el conjunto $\{i_1, \dots, i_{j-1}, i_j\}$ será un subconjunto de $\llbracket n \rrbracket$ de cardinalidad estrictamente mayor. Afirmamos que $i_{r+1} = i_1$, de otra forma $\alpha(i_r) = i_j$ con $j > 1$, pero $\alpha(i_{j-1}) = i_j$, lo que contradice que α esté en S_n . Así que α satisface que

$$\alpha(i_1) = i_2, \dots, \alpha(i_{r-1}) = i_r, \alpha(i_r) = i_1.$$

Definimos σ como el r -ciclo de S_n dado por $(i_1 \dots i_r)$. Como $\sigma^{-1} \circ \alpha$ fija a todos los elementos que fija α y además a aquellos de $\{i_1, \dots, i_r\}$, se concluye por hipótesis inductiva que existe $\alpha_1 \cdots \alpha_s \cdots \alpha_{s+r}$ una factorización completa de $\sigma^{-1} \circ \alpha$ tal que $\alpha_{s+i} = I_X$ para toda $i \in [r]$. Por lo tanto, como

$$\sigma^{-1} \circ \alpha = \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_s,$$

se deduce que $\alpha = \sigma \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_s$ y, entonces, $\sigma \alpha_1 \cdots \alpha_s$ es una factorización completa de α .

Para ver que es única, como cualquier factorización completa de una permutación debe tener exactamente un 1-ciclo por cada elemento que fije, y estos no alteran la composición de los términos de la factorización, basta ver que las palabras de r -ciclos con soportes ajenos por pares y tales que su composición resulta en una permutación son únicas salvo el orden de sus términos. Por ello suponemos que $\beta_1 \cdots \beta_s$ y $\gamma_1 \cdots \gamma_t$ son palabras obtenidas de dos factorizaciones completas de una permutación $\alpha \in S_n$ al borrar todas las apariciones de I_X . Si β_s no fija a i_1 entonces, ya que todos los demás términos en esta descomposición fijan a todos los elementos de $\llbracket n \rrbracket$ que no fija β_s , se tiene que $\alpha^k(i_1) = \beta_s^k(i_1)$ para toda $k \in \mathbb{Z}^+$. De forma similar, como i_1 no es fijada por α existe $j \in [t]$ tal que γ_j no fija a i_1 y, nuevamente, $\gamma_t^k(i_1) = \alpha^k(i_1)$ para toda $k \in \mathbb{Z}^+$. Se concluye que $\beta_s^k(i_1) = \gamma_t^k(i_1)$ para toda $k \in \mathbb{Z}^+$ y, como β_s y γ_j son ciclos, sus potencias conforman todas sus evaluaciones, de manera que $\beta_s = \gamma_j$. Así, como

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_s = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_t \\ &= \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_{j-1} \circ \gamma_{j+1} \circ \cdots \circ \gamma_t \circ \gamma_j, \end{aligned}$$

se deduce que

$$\beta_1 \circ \cdots \circ \beta_{s-1} = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_{j-1} \circ \gamma_{j+1} \circ \cdots \circ \gamma_t.$$

Por inducción sobre $\max\{s, t\}$ se concluye que $s - 1 = t - 1$ y que existe una permutación $f \in S_{s-1} = S_{t-1}$ tal que

$$\gamma_1 \circ \cdots \gamma_{j-1} \circ \gamma_{j+1} \circ \cdots \circ \gamma_t = \beta_{f(1)} \cdots \beta_{f(s-1)}.$$

Si definimos $f' \in S_s = S_t$ como $f'(i) = f(i)$ si $i \in \llbracket s-1 \rrbracket$ y $f'(s) = j$, se concluye que

$$\gamma_1 \cdots \gamma_t = \beta_{f(1)} \cdots \beta_{f(s)}.$$

■

Este resultado nos permite definir, para cada permutación $\alpha \in S_n$, el **signo** de α como el entero

$$\text{sgn}(\alpha) = (-1)^{n-t},$$

con t la longitud de cualquier factorización completa de α . Esta función resulta ser un morfismo entre S_n y el grupo formado por $\{1, -1\}$ con la operación dada por la multiplicación de enteros [50]. Esto es decir que, si α y β son permutaciones en S_n , entonces

$$\text{sgn}(\alpha \circ \beta) = \text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(\beta).$$

Observemos ahora que cualquier permutación es producto de transposiciones, esto se sigue de la Proposición 1.2.4 y del hecho de que cualquier ciclo $(i_1 \dots i_r)$ se escribe el producto de transposiciones $(i_1 i_r) \circ (i_1 i_{r-1}) \circ \cdots \circ (i_1 i_2)$. Además, si $\tau = (ij)$ es una transposición de S_n , tiene un I_n por cada uno de los $n - 2$ elementos fijados por τ , por lo tanto, su longitud es $n - 1$, de forma que $\text{sgn}(\tau) = (-1)^1 = -1$. Se deduce de todo esto que, si α se escribe como producto de transposiciones, siempre se debe hacer o con una cantidad par, o con una cantidad impar de trasposiciones y es precisamente la paridad de transposiciones necesarias lo que determina si una permutación tendrá sgn igual a 1 o -1 . El hecho de que sgn sea un morfismo además asegura que $\text{sgn}(I_X) = 1$, que si $\text{sgn}(\alpha) = 1$ y $\text{sgn}(\beta) = 1$ entonces $\text{sgn}(\alpha \circ \beta) = 1$, y que $\text{sgn}(\alpha) = 1$ implica $\text{sgn}(\alpha^{-1}) = 1$. Por lo tanto, si definimos el conjunto de **permutaciones pares** de S_X como

$$A_X = \{\alpha \in S_X : \text{sgn}(\alpha) = 1\},$$

éste, provisto de la operación dada por la composición de funciones, vuelve a ser un grupo. Así que para cualquier conjunto finito y no vacío X , el grupo $(A_X, \circ)$ es un subgrupo de S_X . A A_X le decimos el **grupo alternante** de X . Naturalmente, a las permutaciones que no son pares les decimos **impares**, sin embargo, el conjunto de ellas con la composición no forma un grupo por la misma razón que el de enteros impares no lo hace con la suma.

De lo anterior se deduce que cualquier grupo simétrico es generado por el conjunto de sus transposiciones y que cualquier grupo alternante es generado por las permutaciones de la forma $(ij) \circ (i'j')$. Además de esto, damos por hecho que el grupo A_X es generado por los 3-ciclos de S_X .

1.3. Geometrías

Una **geometría** es una pareja ordenada (Ω, I) , en donde Ω es cualquier conjunto e I es una relación binaria en Ω que es simétrica y reflexiva. Esta misteriosa definición se basa en la idea de que una geometría es una colección Ω de **objetos geométricos** (puntos, rectas, círculos, triángulos, planos, etc.) los cuales pueden **incidir** entre sí (una línea pasar por un punto, un triángulo estar contenido en un plano, etc.), lo que queda expresado en la relación I , a la que le decimos una **relación de incidencia**. A los objetos geométricos solemos decirles simplemente objetos. Por supuesto, el ejemplo emblemático de geometría es la formada por los puntos y rectas del plano euclideo, en donde dos objetos inciden si alguno de ellos es elemento del otro. Obsérvese que, aunque la relación “ser elemento de” no es simétrica, esta relación sí lo es, ya que pedimos que alguno de los objetos sea elemento del otro y no que necesariamente el primero sea elemento del segundo. Este es un detalle técnico que tenemos siempre presente cuando hablamos de la incidencia inducida por la pertenencia, así como por la contención.

Una **bandera** $\mathcal{F}$ en una geometría (Ω, I) es un conjunto de elementos de Ω que son incidentes por pares. Una bandera es **maximal** si no existe $x \in \Omega \setminus \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \cup \{x\}$ también es una bandera. Por ejemplo, si consideramos la geometría formada por el conjunto de puntos, rectas, y triángulos en el plano euclideo, en donde dos objetos inciden si alguno está contenido o es elemento del otro, entonces una bandera en esta geometría podría ser $\{A, AB, ABC\}$, en donde A es un punto, AB es la única recta que pasa entre dos puntos A y B , y ABC el triángulo que tiene por vértices a los puntos A , B y C para alguna C fuera de AB . De hecho, esta es una bandera maximal, ya que ningún punto, recta, o triángulo es incidente con otro punto, recta, o triángulo, respectivamente, de forma que no es posible agregar otro objeto a esta bandera de manera que todos sus elementos sean incidentes por pares. Lo anterior nos lleva a observar que, en una geometría, no necesariamente todos los objetos son iguales, por ejemplo, es intuitivamente claro que una línea y un punto en el plano son objetos de una naturaleza distinta. Para formalizar esta noción introducimos el concepto de **geometría de rango** r , la cual es una geometría cuyo conjunto de objetos admite una partición $\{\Omega_1, \dots, \Omega_r\}$ tal que cada bandera maximal tiene exactamente un elemento de cada Ω_i , para $i \in \llbracket r \rrbracket$. Decimos que los elementos de

Ω_i son elementos de **tipo- i** . En particular, en una geometría de rango r , todas las banderas maximales tienen r elementos.

A una geometría de rango 2 con frecuencia se le llama una **estructura de incidencia**, en este caso les decimos **puntos** a los elementos de tipo-1 y **líneas** a los de tipo-2. Además, adoptamos un lenguaje geométrico para hablar de la relación de incidencia, diciendo, por ejemplo, que un punto está sobre cierta línea o que la línea pasa por aquel punto. Es posible describir una estructura de incidencia mediante una 3-tupla (P, L, I) , en donde P es el conjunto de puntos, L es el conjunto de líneas, e I una relación entre P y L . Es decir, no es necesario tener una relación simétrica y reflexiva definida sobre todo el conjunto de objetos geométricos para describir una estructura de incidencia, ya que sabemos que todo elemento está relacionado consigo mismo y las 2-tuplas $(p, b) \in I$ que relacionan objetos de tipos distintos son suficientes para reconstruir la relación original. Se sigue de esto que, dados conjuntos P y L , cualquier relación $I \subseteq P \times L$ induce una estructura de incidencia (P, L, I) . Esto puede resultar un poco desalentador, ya que pareciera que nuestras definiciones son demasiado generales para reflejar alguna noción intuitiva de geometría, veremos que esta es una ventaja de esta aproximación, ya que al imponer diferentes condiciones en las geometrías, obtendremos diferentes familias de ellas que conforman un campo de estudio en sí mismas, por lo que este enfoque nos permite entender mejor la relación entre ellas al poder verlas como instancias particulares de una noción más general. En este texto nos preocupamos únicamente por estructuras de incidencia cuyo conjunto de objetos es finito, esta suposición está implícita en todo lo siguiente.

Antes estudiar alguna familia interesante de geometrías, es necesario introducir la siguiente notación. Si p es un punto en una estructura de incidencia (P, L, I) , denotamos (p) al conjunto de líneas incidentes con él, esto es

$$(p) = \{l \in L : pIl\}.$$

De forma más general, si $Q \subset P$, entonces

$$(Q) = \{l \in L : pIl \text{ para todo } p \in Q\},$$

análogamente, si $C \subset L$, escribimos

$$(C) = \{p \in P : pIl \text{ para toda } l \in C\}.$$

Al entero $|(p)|$, para $p \in P$, le decimos el **grado** de p , de igual forma a $|(l)|$ para $l \in L$. Observamos que, en principio, dos líneas podrían ser incidentes con la misma colección de puntos, por ejemplo, se puede verificar que si $P = \{1, 2, 3\}$ y $L = \{l_1, l_2, l_3\}$, si definimos

$$I = \{(1, l_1), (1, l_2), (1, l_3), (2, l_1), (2, l_2), (3, l_3)\}$$

entonces, la geometría (P, L, I) cumple que $(l_1) = (l_2) = \{1, 2\}$, y $(l_3) = \{1, 3\}$. Por lo tanto, uno no puede describir esta geometría mediante el conjunto $\{(l_i) : i \in \{1, 2, 3\}\}$, ya que para reconstruir correctamente la geometría a partir de ellos, también debemos comunicar la cantidad de líneas distintas que dan lugar a cada conjunto (l_i) . Cuando hay líneas diferentes cuyos conjuntos de puntos incidentes con ellos son iguales, decimos que se trata de **líneas repetidas**. En este texto tratamos únicamente con estructuras de incidencia en donde no existen líneas repetidas, a una estructura de este tipo le decimos **simple**. En este caso, podemos identificar el conjunto de líneas de la geometría con $\{(l) : l \in L\}$ y la relación de incidencia con la que induce la pertenencia $\in$, razón por la cual, de ahora en adelante, describimos una estructura de incidencia con una pareja ordenada (P, L) en donde $L \subseteq \mathcal{P}(P)$. El siguiente resultado expresa una condición necesaria para la existencia de una estructura de incidencia; su demostración es una técnica importante en combinatoria.

Proposición 1.3.1. *Si los puntos y líneas de una estructura de incidencia tienen grados $r_1, \dots, r_n$ y $k_1, \dots, k_s$, respectivamente, entonces*

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^s k_j.$$

Demostración. Suponemos que $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ y $B = \{l_1, \dots, l_s\}$ son los puntos y líneas de la estructura tales que los grados de p_i y l_j , con $i \in \llbracket r \rrbracket$ y $j \in \llbracket s \rrbracket$, son r_i y k_j respectivamente. Observamos que es posible contar la cantidad de incidencias entre puntos y líneas, esto es el conjunto de los pares ordenados (p_i, l_j) tales que p_i es un punto en la línea l_j , de dos formas distintas: contando las parejas incidentes con cada punto p_i y luego sumando los resultados, esto es

$$\sum_{i=1}^n r_i;$$

o contando las parejas incidentes con cada línea l_j y luego sumando los resultados, esto es

$$\sum_{j=1}^s k_j.$$

■

La primera clase de estructuras de incidencia en la que fijamos nuestra atención es la de aquellas que satisfacen lo siguiente:

Plano proyectivo.

1. Para cualesquiera dos puntos existe una única línea que pasa por ambos.
2. Cualesquiera dos líneas se intersectan en un punto.
3. Toda línea es incidente con al menos tres puntos.
4. Existen al menos dos líneas.

A una estructura de incidencia que satisface estos cuatro axiomas, a los que nos referimos como P.1, P.2, P.3, y P.4 respectivamente, le decimos un **plano proyectivo**. Un ejemplo de plano proyectivo nos lo brinda el plano de Fano⁵, una imagen de éste se puede ver en la Figura 1.1. Como veremos también en la Sección 1.4, suele ser más sencillo describir estructuras de incidencia particulares con diagramas como este, en donde se dibuja un pequeño círculo o símbolo por cada punto y curvas o rectas que pasan por los puntos con los que inciden.

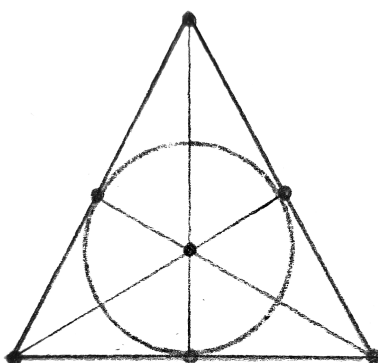


Figura 1.1: El plano de Fano.

Notemos que en el plano de Fano cada línea tiene tres puntos y por cada punto pasan tres líneas; además el plano tiene siete puntos y siete líneas. Esto no es casualidad, sino una condición necesaria para los planos proyectivos, esto lo demostramos en el siguiente resultado.

⁵Gino Fano (1871-1952) fue un matemático italiano cuyo trabajo estuvo enfocado principalmente en la geometría proyectiva y algebraica. A los veintidós años propuso un sistema axiomático para la geometría proyectiva, el plano que lleva su nombre es un modelo que cumple dicho sistema y es, notablemente, el primer ejemplo publicado de una geometría finita.[14]

Proposición 1.3.2. *Si (P, L) es un plano proyectivo, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|(p)| = |(l)| = n + 1$ para cualesquiera $p \in P$ y $l \in L$, y $|P| = |L| = n^2 + n + 1$.*

Demostración. Primero notemos que, si p es un punto que no incide con una línea l , entonces podemos definir una función de (l) a (p) como $q \mapsto pq$, en donde pq denota a la única línea que pasa por p y q , que existe por P.1. Esta función es inyectiva ya que l es la única línea que pasa por cualesquiera dos puntos en (l) , de manera que, si q y q' son puntos distintos en (l) , entonces pq no pasa por q' , y pq' no pasa por q , así que $pq \neq pq'$. Además es suprayectiva ya que cualquier línea en (p) debe intersectar a l en algún punto gracias a P.2. Se deduce que $|(p)| = |(l)|$ siempre que p no está en l . Para concluir que cualesquiera dos objetos en el plano tienen el mismo grado, mostraremos que si l y l' son dos líneas, entonces existe p que no está en l ni en l' . Observemos que al suponer la existencia de tales líneas se utiliza P.4. Para ver que en efecto existe tal punto observamos que, por P.1, P.2 y P.3, l y l' tienen un único punto en común y existen cuatro puntos distintos: $p, p' \in l \setminus l'$ y $q, q' \in l' \setminus l$. Además, por P.1 y P.2, podemos llamar r al único punto en $pq \cap p'q'$ y r no está en l ni en l' ya que, si por ejemplo $r \in l$, entonces l es la única línea que pasa por p y r , como pq pasa por p y r , P.1 asegura que $l = pq$, lo que contradice que $q \in l' \setminus l$. Se concluye que existe un punto fuera de cualesquiera dos líneas, lo que implica que cualesquiera dos líneas tienen el mismo grado y, de forma muy semejante, se puede ver que para cualquier punto existe una línea que no pasa por él. Con lo que podemos concluir la primera afirmación del enunciado si definimos $n = |(p)| - 1 = |l| - 1$ para cualesquiera $p \in P$ o $l \in L$.

Para ver la segunda afirmación, volvemos a contar de dos formas distintas, en este caso, consideramos $p \in P$ cualquiera y observamos que el número de banderas $\{q, l\}$ con $p \in l$ y $q \neq p$ por un lado, gracias a P.1, es $|P| - 1$. Por otro lado, por la primera afirmación, hay $n + 1$ líneas incidentes con p y cada una de ellas tiene n puntos distintos de p (que además son diferentes por pares por P.2), de forma que hay $n(n + 1)$ banderas de este tipo. Se concluye que $|P| - 1 = n^2 + n$ y así que $|P| = n^2 + n + 1$. Para concluir que lo mismo es cierto para $|L|$ sin necesidad de hacer un argumento análogo recordamos la Proposición 1.3.1, que en este caso asegura que

$$\sum_{i=1}^{n^2+n+1} n + 1 = \sum_{i=1}^{|L|} n + 1, \text{ por lo tanto}$$

$$(n + 1)(n^2 + n + 1) = (n + 1)|L|, \text{ y así}$$

$$|L| = n^2 + n + 1.$$

■

Al número n de la proposición anterior le decimos el **orden del plano proyectivo**. Ahora, introducimos una segunda familia de geometrías, íntimamente relacionadas con los planos proyectivos. Estas geometrías son aquellas que satisfacen lo siguiente:

Plano afín.

1. Para cualesquiera dos puntos existe una única línea que pasa por ambos.
2. Dada una línea y un punto fuera de ella, existe una única línea que pasa por el punto y no intersecta a la línea.
3. Existen al menos tres puntos que no están en una línea común.

A una estructura de incidencia así le decimos un **espacio afín**. Como es de esperarse, nos referimos a estos axiomas como A.1, A.2, y A.3 respectivamente. Decimos que dos líneas l y l' que satisfacen que $|(\{b, b'\})| = 0$ son **paralelas**, así, A.2 es el quinto postulado de Euclides y el plano euclideo es un ejemplo de espacio afín. Los espacios afines son muy útiles para entender los planos proyectivos, la razón es que, además de estar claramente ejemplificados con la geometría euclidea, es posible construir planos proyectivos con base en cualquier espacio afín y viceversa. Esencialmente, los planos proyectivos son espacios afines con una línea adicional, a veces llamada *línea al infinito*, formada por puntos donde se intersectan las rectas paralelas. Otra relación muy útil entre los espacios afines y los planos proyectivos es que algunos de los segundos se pueden construir también a partir de ciertos espacios afines “tridimensionales”: apelando a la idea intuitiva del espacio euclideo tridimensional, se consideran como puntos de una geometría a las rectas que pasan por un punto fijo y como líneas a los planos que pasan por el mismo punto. Es fácil convencerse de que, como cualesquiera dos rectas determinan un plano, y como cualesquiera dos planos que se cortan en un punto se intersectan en toda una recta, entonces se satisfacen P.1 y P.2. Lo anterior, sumado al hecho de que $\mathbb{Z}_{p^n}$, cuando p es un número primo, tiene una estructura algebraica llamada *campo*, nos permite considerar sobre él otra estructura algebraica, un *espacio vectorial tridimensional*, la cual puede entenderse como un análogo finito al espacio euclideo tridimensional, en tanto que ambos son instancias de espacios afines, y, con base en ellos, es posible construir planos proyectivos de orden p^n . Lamentablemente, la relación entre estas geometrías, y las hermosas construcciones que la sustentan, escapan los alcances de este texto, por ello nos limitamos a referir al lector a [10, 11] para más detalles al respecto. Enunciamos la existencia de estos planos en la siguiente proposición, y mostramos un ejemplo del espacio afín asociado a borrar una línea del plano de fano en la Figura 1.2.

Proposición 1.3.3. *Si p es un número primo y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces existe un plano proyectivo de orden p^n al que denotamos $\text{PG}(2, p^n)$.*⁶

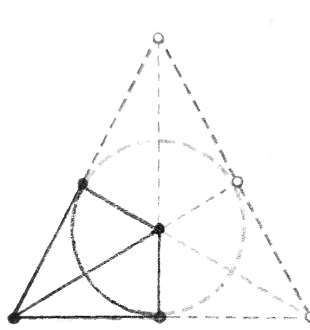


Figura 1.2: Cuando se le borra una línea a un plano proyectivo se obtiene un espacio afín.

Si una estructura de incidencia satisface que existe algún entero positivo k tal que para toda línea l se cumple que $|l| = k$, le decimos una k -**hipergráfica**. En particular, cuando $k = 2$ decimos que se trata de una **gráfica**, éstas son el objeto principal del presente texto, y dedicamos la Sección 1.4 a establecer la teoría necesaria sobre ellas. Antes de esto, nos fijamos en que, por la Proposición 1.3.2, los planos proyectivos de orden n son instancias de $(n + 1)$ -hipergráficas; no debe sorprender al lector que los espacios afines, que se pueden obtener de borrar una línea de un plano proyectivo, sean n -hipergráficas. El último tipo de geometría que nos compete generaliza a todos los anteriores, para obtenerlo es preciso generalizar los axiomas P.1 y A.1 con el siguiente:

Existen t y λ enteros positivos tales que para cualesquiera t puntos existen λ líneas incidentes con todos ellos.

A las k -hipergráficas que satisfacen esto les decimos **diseños** con parámetros t, k , y λ . Esto lo hacemos más preciso diciendo que un diseño es una estructura de incidencia (P, L) tal que existen $t, k, \lambda \in \mathbb{Z}^+$ que se satisfacen, para cualquier t -conjunto de puntos Q y cualquier línea l

$$\begin{aligned} |l| &= k \\ \text{y} \\ |(Q)| &= \lambda. \end{aligned}$$

⁶Del inglés *Projective Geometry*, el primer parámetro denota la *dimensión* del espacio proyectivo, el segundo su orden.

Una estructura de incidencia que es un diseño con parámetros t , k , y λ , y que tiene n puntos es un $t - (\lambda, k, n)$ -diseño o un $S_\lambda(t, k, n)$. La existencia de diseños con ciertos parámetros es la principal pregunta en la teoría de diseños, por lo que la construcción de ellos no suele ser inmediata, por esto posponemos la exhibición de un ejemplo de diseño diferente de los ejemplos que ya conocemos hasta el El Capítulo 2, en donde veremos que es posible caracterizar la estructura de las anticipadas *gráficas de fichas* usándolos.

1.4. Gráficas

A continuación, exponemos los conceptos y resultados de la teoría de gráficas necesarios para el desarrollo de los Los Capítulos 2 y 3. Como ya hemos discutido, una gráfica es una estructura de incidencia en donde cada línea tiene dos puntos. En realidad, en este texto trataremos con una noción ligeramente diferente, la de **gráfica reflexiva**. Esta es una gráfica, como la hemos descrito anteriormente, que modificamos añadiendo a su conjunto de líneas los conjuntos unitarios de cada punto. Es decir, para obtener una gráfica reflexiva, añadimos en cada punto de una gráfica una línea que solo incide con él, a una línea de este tipo le decimos un **lazo**. Llamamos a una geometría así una gráfica reflexiva ya que es posible definir una relación sobre su conjunto de puntos en la que dos de ellos están relacionados siempre y cuando exista una línea b tal que (b) es el par formado por dichos puntos. Esta relación claramente es simétrica, además, una gráfica queda completamente determinada por su conjunto de puntos y esta relación, ya que es posible reconstruir el conjunto de líneas a partir ella. Así, podríamos definir una gráfica como una pareja (P, R) en donde R es una relación simétrica sobre P y en donde ningún elemento está relacionado consigo mismo. Si modificamos la última condición pidiendo que, al contrario, todo elemento esté relacionado consigo mismo, obtenemos una definición equivalente a la de gráfica reflexiva. Veremos que las gráficas reflexivas tienen un comportamiento fundamentalmente diferente al de las primeras gráficas, paradójicamente, al trabajar con ellas suele ser fácil ignorar la presencia de los lazos. Es decir, el análisis que hacemos sobre las gráficas reflexivas, y de los objetos que construimos con base en ellas, depende fuertemente de su reflexividad y, sin embargo, en pocas ocasiones es necesario apelar a la existencia de los lazos para realizar argumentos. Antes de ver un ejemplo de esto, convenimos que, si G es una gráfica — reflexiva o no — entonces denotamos $V(G) = P$ y $E(G) = B$. A los elementos de $V(G)$ les decimos **vértices** de G y, a los de $E(G)$, sus **aristas**. En el contexto de las gráficas, denotamos a un par de vértices $\{x, y\}$ por xy , por esto, decir que existe una arista que incide con x y y en una gráfica G , es igual a la afirmación $xy \in E(G)$. Además, cuando $xy \in E(G)$,

decimos que xy es la arista que “une a x y y ”, que “está entre x y y ”, que x y y son **extremos** de xy , y que x y y son **adyacentes**. Al conjunto de todos los vértices adyacentes a x en G le decimos la **vecindad** de x en G , lo denotamos $N_G(x)$, y a sus elementos les decimos **vecinos** de x . Notemos que $x \in N_G(x)$ para toda gráfica reflexiva gracias a los lazos. Por otro lado, el **grado** de un vértice x en G , es la cantidad de aristas incidentes con x contando a los lazos dos veces. Cuando G no tiene lazos, equivalentemente $d_G(x) = |N_G(x)|$. Para fines de este trabajo, consideramos una noción ad hoc de grado, a saber, para un vértice x , su grado es el número de aristas, que no son lazos, incidentes en G , al que denotamos $d_G(x)$. Notemos que esta noción coincide con la noción clásica de grado en el caso de las gráficas sin lazos. Si $x \in X$ y $y \in Y$, con $X, Y \subseteq V(G)$, entonces xy es una **XY -arista**. Al conjunto de todas las XY -aristas en G lo denotamos $E_G(X, Y)$. Cuando el contexto lo permite, omitimos el subíndice G de las notaciones anteriores y escribimos $N(x)$, $d(x)$, y $E(X, Y)$ para denotar a estos objetos, a los que les también les decimos simplemente la vecindad de x , el grado de x , y las XY -aristas, respectivamente. El **orden de una gráfica** es la cardinalidad de su conjunto de vértices. A la única gráfica cuyo conjunto de vértices es vacío le decimos **nula**. A ésta y a la única gráfica reflexiva con un único vértice les decimos **gráficas triviales**. En ocasiones las gráficas triviales son útiles para realizar argumentos inductivos, en otras se vuelven contraejemplos molestos; para evitar ambigüedades, al iniciar una discusión y enunciar resultados, expresamos el orden que debe tener una gráfica para que el análisis sea válido. Si no se hace explícito el orden de las gráficas, es porque el análisis es válido para toda gráfica, incluyendo a las triviales.

Si G y H son gráficas, definimos un **homomorfismo de gráficas** de G en H como una función $f: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que

$$xy \in E(G) \text{ implica que } f(x)f(y) \in E(H).$$

Así como para los homomorfismos de grupos, llamaremos **morfismos** a los homomorfismos de gráficas y usamos la fórmula $f: G \rightarrow H$ para denotar que f es un morfismo de G en H . Los morfismos, como cualquier función, inducen una partición en su dominio dada por $\theta_f = \{f^{-1}[\{u\}]\}_{u \in V(H)}$. A una clase $f^{-1}[\{u\}]$ de esta partición, le decimos la **fibra** de u bajo f . Observemos que si no existe un lazo en u entonces, como f es un morfismo, cualesquiera vértices en la fibra de u bajo f no son adyacentes. Es decir, que los vértices en $f^{-1}[\{u\}]$ no tienen lazos y no hay dos de ellos adyacentes. En cambio, si existe un lazo en u , para cualesquiera $x, y \in f^{-1}[\{u\}]$ se satisface inmediatamente que $f(x)f(y) \in E(H)$. De forma más general, la estructura de la gráfica en el contradominio de un morfismo f impone a éste restricciones sobre la existencia de adyacencias entre vértices en fibras de θ_f , las cuales están subordi-

nada a las adyacencias entre los vértices de H que dan lugar a ellas. Precisamente, si $u, v \in V(H)$ y $uv \notin E(H)$ entonces, para cualesquiera $x \in f^{-1}[\{u\}]$ y $y \in f^{-1}[\{v\}]$ se tiene que $xy \notin E(G)$. De hecho esto es equivalente a que f sea un morfismo, es decir, un morfismo de G en H es una función $f: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que para cualesquiera $x \in f^{-1}[\{u\}]$ y $y \in f^{-1}[\{v\}]$

$$uv \notin E(H) \text{ implica que } xy \notin E(G).$$

Así, la existencia de un morfismo de G en H es equivalente a la de una partición de los vértices de G indexada por los de H , $\{S_u\}_{u \in V(H)}$, tal que $uv \notin E(H)$ implica que un vértice en S_u no es adyacente a uno en S_v . Esta identificación entre los morfismos de gráficas y estas particiones de vértices nos permite, en primera instancia, apreciar una diferencia cualitativa entre los morfismos de gráficas y los de gráficas reflexivas. En los primeros, las clases de θ_f están formadas por vértices no adyacentes por pares, mientras que en las gráficas reflexivas, éstas están formadas por vértices que satisfacen la condición de morfismo sin importar si son o no adyacentes. En la Figura 1.3 podemos ver dos gráficas tales que existe un morfismo de la gráfica a la izquierda en la que se encuentra a la derecha, y un dibujo de la partición inducida en su dominio. Notemos que esta función no sería un morfismo si no fuera por la presencia de los lazos de la gráfica a la derecha, ya que existen vértices adyacentes en sus fibras. Por otro lado, esta forma de aproximarnos a los morfismos de gráficas también nos permite, dada $\theta = \{S_i\}_{i \in I}$ una partición de los vértices de una gráfica G , construir la **gráfica cociente** de G sobre θ como la gráfica G/θ con $V(G/\theta) = I$ y tal que, para $i, j \in I$

$$ij \in E(G/\theta) \text{ si y sólo si existen } x \in S_i \text{ y } y \in S_j \text{ tales que } xy \in E(G).$$

Definiendo la función de $V(G)$ en $V(G/\theta)$ dada por $x \mapsto i$, con i el único elemento de I tal que $x \in S_i$, ésta resulta ser un morfismo de G en G/θ cuya colección de fibras es θ . En general, si $f: G \rightarrow H$ es cualquier morfismo, entonces la gráfica con conjunto de vértices $f[V(G)]$ y aristas de la forma $f(x)f(y) \in E(H)$ para xy alguna arista de G , le decimos la **imagen** de G bajo f y la denotamos $f(G)$. Observemos que, en el caso particular en que f es suprayectiva, se tiene que $f(G) = H$. Resulta que los cocientes de una gráfica y sus imágenes son dos caras del mismo concepto, esto lo precisamos y demostramos en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1. *Sea G una gráfica. Para toda gráfica H , existe $f: G \rightarrow H$ tal que $f(G) = H$ si y sólo si existe θ , una partición de los vértices de G , tal que $G/\theta = H$.*

Demostración. Si primero suponemos que $\theta = \{S_i\}_{i \in I}$ es una partición de $V(G)$ entonces la función de $V(G)$ en I dada por $x \mapsto i$ si $x \in S_i$ es un morfismo de G en G/θ ya que la adyacencia entre vértices de la gráfica cociente está definida de forma que se cumpla la condición de morfismo de esta función. Además, como θ es una partición, para cada $i \in I$ existe $x \in S_i$ y, por lo tanto, $V(f(G)) = I$. Además, nuevamente, por la forma en la que se definen las adyacencias en la gráfica cociente, es claro que todas las aristas de G/θ son de la forma ij para alguna $xy \in E(G)$ tal que $x \mapsto i$ y $y \mapsto j$. Así, G/θ es la imagen de G bajo esta función.

De forma semejante, si existe un morfismo de G en H tal que $f(G) = H$ entonces, haciendo la gráfica cociente de G sobre la partición $\theta_f = \{f^{-1}[\{u\}]\}_{u \in V(H)}$, se tiene que ésta tiene conjunto de vértices $V(H)$ ya que en este caso $I = V(H)$. Además, $f^{-1}[\{u\}]$ y $f^{-1}[\{v\}]$ son adyacentes en G/θ_f siempre y cuando existan vértices de G , $x \in f^{-1}[\{u\}]$ y $y \in f^{-1}[\{v\}]$ adyacentes. Como $f(G) = H$, lo anterior sucede siempre que $uv \in E(H)$. Se concluye que $E(G/\theta_f) = E(H)$ y, así, $H = G/\theta_f$. ■

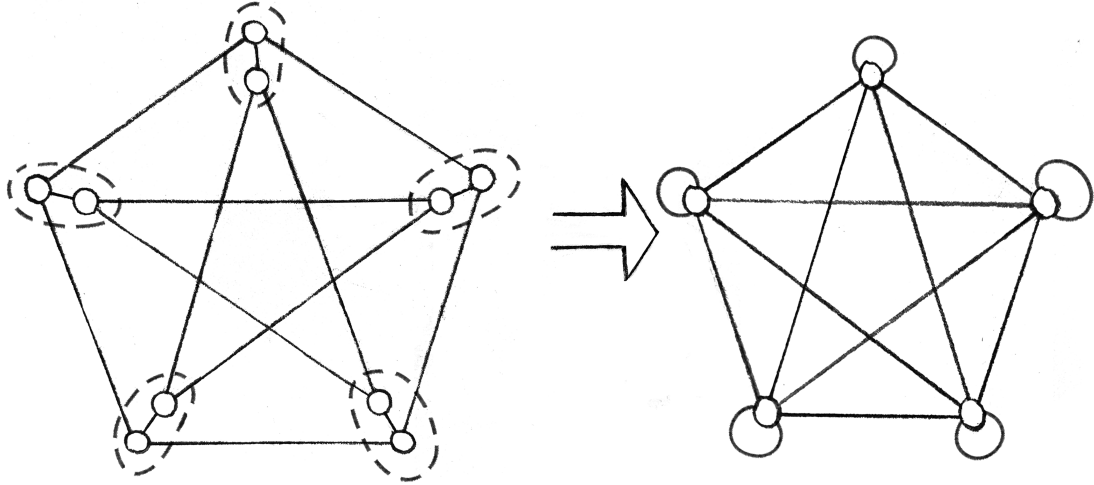


Figura 1.3: Epimorfismo de una gráfica no-reflexiva en una gráfica reflexiva y la partición asociada.

Ahora observemos que, si G y H son gráficas reflexivas, es evidente que los lazos de G , es decir, las aristas de la forma uu para algún $u \in V(G)$, cumplen que $f(u)f(u) \in E(H)$ para toda $f: V(G) \rightarrow V(H)$. De forma que, para comprobar que una función es un morfismo, basta ver que esta condición se cumple para las aristas que no son lazos. Esta es una de las formas en que la reflexividad de las gráficas es una

suposición que es fácil omitir al trabajar con ellas. Otro ejemplo es que, para definir una gráfica reflexiva, es suficiente describir la adyacencia para vértices diferentes. Es decir, no es necesario dar una definición de las aristas que incluya a los lazos ya que esta información es redundante en el entendido de que se está definiendo una gráfica reflexiva, de forma que basta con describir la adyacencia entre vértices diferentes. Para aprovecharnos de lo anterior, convenimos que de ahora en adelante todas las gráficas con las que tratamos son gráficas reflexivas y, por simplicidad, a éstas les decimos “gráficas” sin especificarlo. Además, al dibujar diagramas de ellas, definir las, y demostrar que funciones entre ellas son morfismos, omitimos la presencia de los lazos que existirán en todos los vértices que consideremos.

Dadas G y H gráficas y $f: G \rightarrow H$, decimos que f es un **monomorfismo de gráficas** si $f: V(G) \rightarrow V(H)$ es inyectiva. Por otro lado, es un **epimorfismo de gráficas** si $f(G) = H$. Hacemos énfasis en que la condición $f(G) = H$ implica que f es suprayectiva, pero no toda función suprayectiva satisface lo primero. Naturalmente, f es un **isomorfismo de gráficas** si es un monomorfismo y un epimorfismo. En este caso notemos que, como f es un monomorfismo, entonces θ_f está compuesto de conjuntos unitarios y, como es un epimorfismo, se tiene que $\theta_f = \begin{pmatrix} V(G) \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, como $uv \in E(H)$ implica que existen $x \in f^{-1}[\{u\}]$ y $y \in f^{-1}[\{v\}]$ tales que $xy \in E(G)$, se sigue que $f(x)f(y) \in E(H)$ implica $xy \in E(G)$. Así que un isomorfismo de G en H es una función biyectiva $f: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que

$$xy \in E(G) \text{ si y solo si } f(x)f(y) \in E(H).$$

Cuando existe un isomorfismo entre G y H decimos que estas son gráficas **isomorfas**, lo que denotamos por $G \cong H$. Así como con los grupos, dos gráficas isomorfas se entienden como “idénticas salvo el nombre de los vértices”, por lo que en ocasiones las tratamos como la misma gráfica, extrapolando cualquier resultado válido en una gráfica a todas las gráficas isomorfas a ella. Por ejemplo, notemos que para cualquier monomorfismo $f: H \rightarrow G$ se tiene que $f': V(H) \rightarrow f[V(H)]$ definida como $f'(x) = f(x)$ para toda $x \in V(H)$, es un isomorfismo de H en $f(H)$. Esto nos lleva a pensar en que dentro de G hay una “copia” de H .

Lo anterior nos lleva al concepto de **subgráfica** de una gráfica G , esta es cualquier gráfica H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Es común que abusemos de la terminología y le digamos subgráfica de G a toda gráfica H que admita un monomorfismo $f: H \rightarrow G$ ya que, en este caso, H es isomorfa a $f(H)$, la cual es una subgráfica de G . En esta circunstancia, podemos definir una subgráfica de G dada por $G' = (f[V(H)], E_G(f[V(H)]))$. Sucederá que $f(H)$ es subgráfica de G' pues, evidentemente, $f[V(H)] \subseteq V(G')$ y $E(f(H)) \subseteq E_G(f[V(H)])$. En este sentido G' es la subgráfica de G con conjunto de vértices $f[V(H)]$ más grande, pues contiene a todas

las aristas entre vértices de $f[V(H)]$ que existen en G . En general, si $X \subseteq V(G)$, a la subgráfica de G dada por $(X, E(X))$ le decimos la subgráfica de G **inducida** por X y la denotamos por $[X]_G$. Como las subgráficas inducidas de G se pueden identificar sin ambigüedad con el conjunto de vértices que la induce, entonces —como un subconjunto V de $V(G)$ se puede describir mediante el conjunto $W = V(G) \setminus V$ ya que $V = V(G) \setminus W$ — las subgráficas inducidas de G también se pueden entender como subgráficas de G que se obtienen de borrar un conjunto de vértices de G junto con todas las aristas que tuvieran un extremo en éste. Es decir, si $W \subseteq V(G)$, definimos la gráfica $G - W$ como $[V(G) \setminus W]_G$. Semejantemente, si $E \subseteq E(G)$, definimos $G - E$ como la subgráfica $(V(G), E(G) \setminus E)$, obsérvese que en este caso, a menos que $E = \emptyset$, $G - E$ no es una subgráfica inducida de G . En particular, si $W = \{x\}$ o $E = \{e\}$ para $x \in V(G)$ y $e \in E(G)$, escribimos $G - W = G - x$ o $G - E = G - e$, respectivamente. El conjunto $\{G - x\}_{x \in V(G)}$ es el **mazo** de G , lo denotamos $D(G)$, y a sus elementos les decimos las **cartas** de G . El mazo de una gráfica es el objeto central de una importante pregunta abierta en teoría de gráficas, atribuida a Ulam⁷ y Kelly⁸ [28], que enunciamos a continuación.

Conjetura de la reconstrucción. Si G y H son gráficas de orden al menos 3, entonces $G \cong H$ si y sólo si existe una biyección $r: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $G - x \cong H - r(x)$ para toda $x \in V(G)$.

Otro tipo de subgráficas particularmente interesante comprende a aquellas H , subgráficas inducidas de G , tales que existe $\varphi: G \rightarrow H$ que satisface $\varphi|_{V(H)} = I_{V(H)}$. En este caso, decimos que φ es una **retracción** de G en H , o simplemente una retracción de G , y que H es un **retracto** de G . Más aún, cuando φ es una retracción de G tal que $|\text{sop}(\varphi)| = 1$, decimos que se trata de una **retracción de un punto** de G . Obsérvese que los retractos de este tipo de retracciones son cartas de G . Veremos en el El Capítulo 2, que las retracciones de un punto resultan de enorme utilidad para estudiar el juego de *policías y ladrones* en gráficas.

Como mencionamos en la la Sección 1.2, los conceptos de morfismo y producto son nociones que aparecen en diferentes áreas de las matemáticas. A continuación introducimos el **producto de gráficas** y demostramos la Proposición 1.4.2, que

⁷Stanisław Marcin Ulam (1904-1984) fue un matemático y físico polaco-americano, famoso por idear un mecanismo para iniciar la fusión necesaria para hacer una bomba de hidrógeno y por crear el método Monte-Carlo, una técnica muy importante en estadística. En 1960 publicó *A collection of mathematical problems*, en donde plantea esta conjetura. [44, 52]

⁸Paul Joseph Kelly (1915-1995) fue un matemático americano, estudiante de doctorado de Ulam en University of Wisconsin. En su tesis de doctorado *A congruence theorem for tress*, publicada en 1945, demostró que la conjetura es cierta para cierto tipo de gráficas y, por exhaustión, que se cumple para todas las gráficas con a lo más seis vértices. [45][34]

es conocida como la “propiedad universal” del producto. El producto cartesiano de conjuntos y el producto de grupos satisfacen propiedades idénticas, reemplazando la palabra “gráfica” por “conjunto” y “grupo”, respectivamente. Esta propiedad es la razón por la que esta construcción resulta tan importante, nuevamente dirigimos al lector a [49] para leer más al respecto. Si $\{G_i\}_{i \in I}$ es una colección de gráficas, su producto es la gráfica $\prod_{i \in I} G_i$ con conjunto de vértices $\prod_{i \in I} V(G_i)$ y tal que

$$\widehat{u}\widehat{v} \in E\left(\prod_{i \in I} G_i\right) \text{ si y solo si } \widehat{u}_i\widehat{v}_i \in E(G_i) \text{ para toda } i \in I.$$

Proposición 1.4.2. *Una gráfica H es isomorfa al producto de $\{G_i\}_{i \in I}$ si y sólo si existen $\pi_i: H \rightarrow G_i$ para cada $i \in I$ tales que, para cualquier gráfica K y $\rho_i: K \rightarrow G_i$ para cada $i \in I$, existe un único $f: K \rightarrow H$ tal que $\rho_i = \pi_i \circ f$.*

Demostración. Veamos que podemos definir $\pi_i: \prod_{i \in I} V(G_i) \rightarrow V(G_i)$ como $\pi_i(\widehat{u}) = \widehat{u}_i$. Por la definición de la adyacencia en el producto, se sigue que si $\widehat{u}\widehat{v} \in E(\prod_{i \in I} G_i)$ entonces $\widehat{u}_i\widehat{v}_i \in E(G_i)$. Además, si K es una gráfica para la que existe $\rho_i: K \rightarrow G_i$ para cada $i \in I$, entonces definimos $f: V(K) \rightarrow \prod_{i \in I} V(G_i)$ como $x \rightarrow \widehat{x}$ en donde $\widehat{x}_i = \rho_i(x)$ para toda $i \in I$. Es claro que entonces $\rho_i = \pi_i \circ f$ y, más aún, f es la única regla de asignación que cumple esto.

Por otro lado, si existe H y $\pi'_i: H \rightarrow G_i$ para $i \in I$ tales que para cualquier gráfica K y $\rho_i: K \rightarrow G_i$ para cada $i \in I$, existe un único $f: K \rightarrow H$ tal que $\rho_i = \pi_i \circ f$, entonces, tomando $K = \prod_{i \in I} G_i$ y $\rho_i = \pi_i$, se tiene que existen únicas $f: H \rightarrow K$ y $f': K \rightarrow H$ tales que

$$\pi'_i = \pi_i \circ f \text{ y } \pi_i = \pi'_i \circ f'$$

para toda $i \in I$. Ahora consideremos la composición $f \circ f': K \rightarrow K$, como

$$\pi_i \circ (f \circ f') = (\pi_i \circ f) \circ f' = \pi'_i \circ f' = \pi_i,$$

entonces $f \circ f' = I_{V(K)}$. De forma análoga $f' \circ f = I_{V(H)}$, con lo que se concluye que $f' = f^{-1}$ y, por lo tanto, f es un isomorfismo entre H y K . ■

Nuevamente, en el caso en que $G_i \cong G$ para toda $i \in I$ denotamos $\prod_{i \in I} G_i = G^I$, en particular, si $I = \llbracket k \rrbracket$ entonces $G^I = G^k$. Más aún, al producto de $\{G, H\}$ lo denotamos $G \times H$.

Una construcción parecida es el llamado **producto caja**, subrayamos que éste no es un producto en el sentido de la Proposición 1.4.2, lo que es evidente ya que esta proposición afirma que la gráfica que satisface esta propiedad es única salvo isomorfismo. Sin embargo, esta construcción resulta igualmente útil y, como veremos

en el El Capítulo 2, su estructura está íntimamente relacionada con las *gráficas de fichas*. Dada una colección de gráficas $\{G_i\}_{i \in I}$, su producto caja es la gráfica $\square_{i \in I} G_i$ con conjunto de vértices $\prod_{i \in I} V(G_i)$ y tal que

$$\hat{u}\hat{v} \in E(\square_{i \in I} G_i) \\ \iff$$

existe una única $i \in I$ tal que $\hat{u}_i \neq \hat{v}_i$ y, para ella, $\hat{u}_i\hat{v}_i \in E(G_i)$.

Cuando $G \cong G_i$ para toda $i \in I$ denotamos $\square_{i \in I} G_i = G^{\square I}$ y, cuando $I = \llbracket k \rrbracket$ escribimos $G^{\square I} = G^{\square k}$. También, al producto caja de $\{G, H\}$ lo denotamos $G \square H$. Antes de ver un ejemplo de estas construcciones, nos conviene introducir algunas familias de gráficas que tienen estructuras sencillas, por lo que son fáciles de visualizar, y nos ayudarán a lo largo del texto a analizar la estructura de gráficas con estructuras más complejas.

Una gráfica G de orden $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es **vacía** si no tiene aristas que no son lazos. Se sigue que dos gráficas vacías con el mismo orden son isomorfas y, además, si H es una gráfica que no es vacía, no existe ninguna función inyectiva $f: V(H) \rightarrow V(G)$ que sea un morfismo de H en G . Es decir, las gráficas vacías con la misma cantidad de vértices son todas isomorfas entre sí y ninguna de ellas es isomorfa a una gráfica que no lo sea, sin embargo, dado que el conjunto de vértices sobre el que puede definirse una gráfica vacía de orden n puede ser cualquiera de cardinalidad n , no es preciso referirse a *la* gráfica vacía de orden n . Por esto, resulta conveniente definir una gráfica vacía “estándar” a la que todas las demás gráficas vacías de ese orden son isomorfas y tratarla como si fuera la única gráfica vacía. Así que definimos O_0 como la gráfica nula y, para $n \in \mathbb{Z}^+$, la gráfica O_n tiene conjunto de vértices $\llbracket n \rrbracket$ y cualesquiera $i, j \in V(O_n)$ satisfacen que

$$i \neq j \implies ij \notin E(O_n).$$

Ahora, con el mismo espíritu, decimos que una gráfica es **completa** si cualesquiera dos de sus vértices son adyacentes, vuelve a resultar que las gráficas completas del mismo orden son isomorfas entre sí y no lo son con ninguna otra gráfica. Por ello, definimos K_n como la gráfica nula si $n = 0$ y, para $n \in \mathbb{Z}^+$, como la gráfica con conjunto de vértices $\llbracket n \rrbracket$ y que cumple

$$i, j \in \llbracket n \rrbracket \implies ij \in E(K_n).$$

Por otro lado, una gráfica es una **trayectoria** si existe un orden lineal sobre sus vértices tal que dos de ellos son adyacentes si y sólo si son consecutivos en el orden.

Por lo tanto, si dos gráficas son trayectorias del mismo orden y asociamos los i -ésimos vértices de cada orden lineal, se obtiene una correspondencia biyectiva de manera que dos vértices de la primera trayectoria son consecutivos en uno de los ordenes lineales siempre y cuando sus imágenes lo sean en la otra. Se concluye que nuevamente las trayectorias están determinadas —salvo isomorfismo— por su cantidad de vértices. Por ello, para $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, la gráfica P_n es la gráfica nula si $n = 0$ y es la gráfica con conjunto de vértices $\llbracket n \rrbracket$ y que satisface

$$ij \in E(P_n) \iff i = j + 1$$

en otro caso. De forma similar, una gráfica G de orden n , para $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2\}$, es un **ciclo** si existe un n -ciclo $\alpha \in S_{V(G)}$ tal que

$$xy \in E(G) \iff x = \alpha(y).$$

Los ciclos vuelven a estar determinados, hasta isomorfismo, por la cantidad de vértices que tiene, por eso definimos C_n , para $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2\}$, como la gráfica con conjunto de vértices $\llbracket n \rrbracket$ y en donde

$$ij \in E(C_n) \iff i = j + 1 \pmod{n}.$$

Es particularmente productivo encontrar la estructura de alguna de las gráficas anteriores “dentro” de otras gráficas, es decir, saber cuándo son subgráficas de alguna gráfica. Por ello, si $f: O_n \rightarrow G$ es un monomorfismo, decimos que $f(O_n)$ es un **coclan** de G y, de forma análoga, a la imagen de un monomorfismo de K_n en G le decimos un **clan** de G , a la de uno de P_n en G una **trayectoria** de G y, a la de uno de C_n en G , un **ciclo de la gráfica** G . Al conjunto $f[V(O_n)]$ para f un monomorfismo es un conjunto de vértices **independientes** en G . Por ejemplo, cualesquiera dos vértices de una gráfica que no son adyacentes forman un par de vértices independientes. En la la Figura 1.3 la gráfica imagen es una gráfica completa de cinco vértices, es decir que es isomorfa a K_5 ; en la la Figura 1.4 se pueden ver diagramas de P_3 , C_4 , su producto, y su producto caja.

Para introducir una última gráfica “estándar”, la cual resultará muy cómoda para construir algunos contraejemplos, definimos primero que V es un **conjunto dominante** de una gráfica G si es un subconjunto de sus vértices tal que, para todo $x \in V(G)$, x tiene un vecino en V . Como $V = V(G)$ es un conjunto dominante para cualquier gráfica G , entonces es correcto definir $\gamma(G)$ como el menor entero tal que existe un conjunto dominante de G de cardinalidad $\gamma(G)$, al que le decimos el **número de dominación** de G . Si en una gráfica existe $x \in V(G)$ tal que $\{x\}$ es un conjunto dominante de G , decimos que x es un **vértice universal** de G . Con base

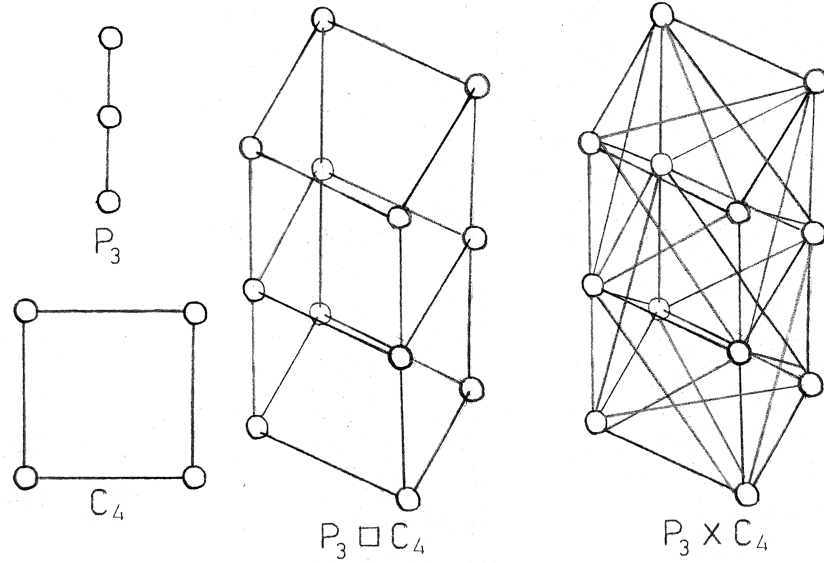


Figura 1.4: Diagramas de P_3 , C_4 , $P_3 \times C_4$, y $P_3 \square C_4$.

en esto definimos que una gráfica G es una **rueda** si tiene un vértice universal x tal que $G - x$ es un ciclo. Nuevamente una rueda solo es isomorfa a otras ruedas con el mismo orden, entonces para $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ definimos W_n como la gráfica con conjunto de vértices $\llbracket n \rrbracket \cup \{0\}$, tal que 0 es universal y $W_n - 0 = C_n$.

Si G es una gráfica y $P: P_n \rightarrow G$ es un morfismo decimos que P es un **camino** de G . Cuando P es un camino escribimos $V(P) = V(P(P_n))$ y $E(P) = E(P(P_n))$, a los que le decimos los conjuntos de vértices y de aristas del camino P respectivamente. A P_1 y P_n les decimos los **extremos del camino** P , más aún, a P_1 le decimos el **vértice inicial** de P y a P_n su **vértice final**. Obsérvese que una arista xy da lugar al camino $P: P_2 \rightarrow G$ cuyos extremos son x y y , por lo que esta terminología generaliza la propia para aristas. En general, a P_i le decimos el i -ésimo vértice de P y, a los vértices de la forma P_i para algún $i \notin \{1, n\}$ les decimos sus vértices **internos**. Cuando un camino es tal que su vértice inicial y final son iguales, le decimos un **camino cerrado**, si dicho vértice es x , entonces es un camino cerrado **basado** en x . Observemos que los caminos, al ser funciones de $[n]$ en $V(G)$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$, son palabras de vértices de G , así que recuperamos esa notación para describir a un camino P en G como $P = x_1 \dots x_n$, para algunos $x_1, \dots, x_n \in V(G)$ tales que $x_i x_{i+1} \in E(G)$ para toda $i \in [n - 1]$. Además, si P es tal camino en G , adoptamos notación semejante

para denotar el **camino P restringido de x_i a x_j** , al que definimos como

$$x_i P x_j = P|_{\llbracket i, j \rrbracket}.$$

En particular, si $i = 1$ o $j = n$, escribimos $x_1 P x_j = P x_j$ o $x_i P x_n = x_i P$, respectivamente. Además, si $X, Y \subseteq V(G)$ y P es un camino de G con vértice inicial en X y vértice final en Y , decimos que P es un XY -camino y, si P es un monomorfismo, entonces es una XY -trayectoria. En particular, si $X = \{x\}$ y $Y = \{y\}$ para algunos $x, y \in V(G)$, entonces decimos que se trata de un xy -camino o una xy -trayectoria, respectivamente. Dos xy -trayectorias de G son **internamente ajenas** si la intersección de sus conjuntos de vértices es $\{x, y\}$, además decimos que las trayectorias que conforman una colección arbitraria de xy -trayectoria son internamente ajenas si son internamente ajenas por pares.

Teniendo presente que un camino en una gráfica G es una palabra de vértices $x_1 \cdots x_n$ tales que, si $n \geq 2$ entonces $x_i x_{i+1} \in E(G)$ para toda $i \in [n-1]$, será de utilidad asociarle a cada uno de ellos la palabra de las aristas que “recorre”. Es decir, cuando $n \geq 2$, la condición $x_i x_{i+1} \in E(G)$ nos permite asociarle a cada camino la palabra de aristas $x_1 x_2 \ x_2 x_3 \ \cdots \ x_{n-1} x_n$, esta es la palabra de longitud $n-1$ dada por $i \mapsto x_i x_{i+1}$ para toda $i \in [n-1]$. Es claro que esta correspondencia es inyectiva ya que, si dos caminos $x_1 \cdots x_n$ y $y_1 \cdots y_n$ son diferentes, existe un primer $i \in [n-1]$ tal que $x_i = y_i$ pero $x_{i+1} \neq y_{i+1}$, de forma que la palabra de aristas asociada al primer camino tiene por i -ésima evaluación a $x_i x_{i+1}$, mientras que la asociada al segundo camino tiene a $x_i y_{i+1}$. Si $n = 1$ entonces le asociamos la palabra vacía, ya que el conjunto de aristas de un camino así camino es vacío. Obser vemos que, si $P = x_1 \cdots x_n$ y $Q = y_1 \cdots y_m$ son caminos de G para cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}^+$, entonces la concatenación de P con Q , como palabras de vértices, es $x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$, mientras que la concatenación de la palabra de aristas asociada a P con la de aquella asociada a Q es $x_1 x_2 \ \cdots \ x_{n-1} x_n \ y_1 y_2 \ \cdots \ y_{m-1} y_m$. Notemos que la primera es un camino si y solo si $x_n y_1 \in E(G)$, por otro lado, para que la segunda sea la palabra de aristas de algún camino es necesario que $x_n = y_1$. Preferiremos quedarnos con esta segunda concatenación para definir la **concatenación de caminos**, es decir, si $P = x_1 \cdots x_n$ y $Q = y_1 \cdots y_m$ son caminos en una gráfica G tales que $x_n = y_1$, la concatenación de P con Q es el camino

$$PQ = x_1 \cdots x_{n-1} x_n y_2 \cdots y_m = x_1 \cdots x_{n-1} y_2 \cdots y_m.$$

Notemos que, como palabras de vértices, la longitud de P y Q es n y m respectivamente, sin embargo, la longitud de PQ será $n + m - 1$. En cambio, las palabras de aristas asociadas a los caminos P y Q tienen longitud $n-1$ y $m-1$ respectivamente, mientras que la longitud de la palabra de aristas asociada a PQ es de longitud

$(n-1) + (m-1) = n+m-2$. Es decir que, al definir la concatenación de caminos de esta forma, será más conveniente decir que la **longitud de un camino** P es la longitud de la palabra de aristas asociada, a la que denotamos $\ell(P)$. Con esta notación, lo anterior es la afirmación de que, para cualesquiera dos caminos de una gráfica, P y Q , tales que el vértice final de P es igual el vértice inicial de Q , se cumple que

$$\ell(PQ) = \ell(P) + \ell(Q).$$

Esto tiene como consecuencia que, si P es un xy -camino, entonces los caminos de longitud cero $Q = x$ y $Q' = y$ son tales que su concatenación con P satisface

$$QP = P \text{ y } PQ' = P.$$

Además de mostrar la consistencia entre las notaciones de camino restringido y concatenación, ya que $QP = P = xP$ y $PQ' = P = Py$, lo anterior es evidencia de la existencia de caminos que se comportan como neutros de esta yuxtaposición. En efecto, para tener una estructura de monoide usando la yuxtaposición de caminos como operación, es necesario restringirnos a considerarla sobre el conjunto de caminos cerrados basados en cualquier vértice $x \in V(G)$, esto ya que la operación debe estar definida entre cualesquiera dos elementos de un monoide, por lo que cualesquiera dos caminos en un conjunto sobre el cual esta operación pueda formar un monoide deben tener el mismo vértice inicial y final. En este conjunto la concatenación de caminos en efecto forma un monoide en el que el neutro es el camino de longitud cero basado en x , al que denotamos ϵ_x . Ahora, nos preocupamos por modificar este monoide para obtener una estructura de grupo. Para ello definimos $C_G(x)$ como el conjunto de caminos cerrados de G basados en x , como es usual, si el contexto lo permite, denotamos a este conjunto como $C(x)$. El monoide sobre $C(x)$ formado por la yuxtaposición de caminos no es un grupo ya que no existen elementos inversos para ningún camino más que ϵ_x . Para corregir esta situación, recordamos la relación simétrica sobre $V(G)$ “es adyacente a”, este es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) tales que $xy \in E(G)$, aunque pueda parecer que esta relación es, para todo efecto práctico, idéntica al conjunto $E(G)$, veremos que el hecho de que las parejas ordenadas (x, y) y (y, x) no son iguales, nos permitirá expresar nociones de “dirección” en las gráficas. Es decir, interpretamos a (x, y) como la parte de la arista xy que va “de x a y ”, le decimos la **flecha de x a y** , y, ya que esta relación será de gran utilidad a lo largo del texto, reservamos para ella la notación

$$R(G) = \{(x, y) \in V(G)^2 : xy \in E(G)\}.$$

Así pues, veamos que a cada camino $P = x_1 \cdots x_n$ con $n \geq 2$, le podemos asociar la palabra de flechas $(x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n)$. Esta asignación vuelve a ser inyectiva y

la concatenación de dos de estas palabras, asociadas a $P, Q \in C(x)$, coincide con la palabra de flechas asociada a la concatenación de caminos PQ . De manera que, si a ϵ_x le asociamos la palabra vacía, la concatenación forma un monoide sobre el conjunto de las palabras de flechas asociadas a caminos en $C(x)$ muy parecido al que forma la concatenación de caminos sobre $C(x)$. Sin embargo, en el primero existen dos flechas, (x, y) y (y, x) , por cada arista $xy \in E(G)$, con base en las cuales podremos construir definir los elementos inversos que buscamos. Para ello, para cualquier $P \in C(x)$ con $P = x_1 \cdots x_n$, decimos que un camino $Q \in C(x)$ dado por $Q = y_1 \cdots y_m$, se obtiene de P con una **cancelación elemental** si existe $j \in [m-1]$ tal que $P = y_1 \cdots y_j x y_{j+1} \cdots y_m$ para alguna $x \in N(y_j)$. Una **reducción** de un camino $P \in C(x)$ es otro camino $Q \in C(x)$ tal que existen $Q_0, \dots, Q_t \in C(x)$ con $t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ que satisfacen que $Q_0 = P$, $Q_t = Q$, y, si $t > 0$, entonces para cada $i \in [0, t-1]$ el camino Q_{i+1} se obtiene de Q_i con una cancelación elemental. Obsérvese que el caso $t = 0$ de esta definición dice que cada camino es su propia reducción. Además, si Q se obtiene de P con una cancelación elemental, y la palabra de flechas asociada a Q es $(y_1, y_2) \cdots (y_{j-1}, y_j)(y_j, y_{j+1}) \cdots (y_{m-1}, y_m)$, entonces la palabra de flechas asociada a P es

$$(y_1, y_2) \cdots (y_{j-1}, y_j)(y_j, x)(x, y_j)(y_j, y_{j+1}) \cdots (y_{m-1}, y_m)$$

para algunas $j \in [m-1]$ y $x \in N(y_j)$. Recíprocamente, si la palabra de flechas de P es $(x_1, x_2) \cdots (x_i, x_{i+1})(x_{i+1}, x_i) \cdots (x_{n-1}, x_n)$, es decir, si $x_{i+2} = x_i$ para alguna $i \in [n-2]$, entonces el camino $Q = x_1 \cdots x_{i-1} x_i x_{i+3} \cdots x_n$ es tal que Q se obtiene de P con una cancelación elemental (si no existiera x_{i+3} es porque $i = n-2$ y $x_n = x_{n-2}$, en este caso $Q = Px_{n-2} = x_1 \cdots x_{n-2}$ se obtiene de P con una cancelación elemental ya que $P = x_1 \cdots x_{n-2} x_{n-1} x_{n-2}$; en general podríamos definir el camino Q como la concatenación del camino Px_i con $x_{i+2}P$, sin embargo, por claridad preferiremos obviar el caso $i = n-2$ y escribiremos los caminos obtenidos de cancelaciones elementales como en lo anterior). Por todo esto, podemos pensar en las reducciones de $P \in C(x)$ como los caminos que dan lugar a las palabras de flechas que resultan de borrar sucesivamente pares de flechas consecutivas de la forma (x, y) y (y, x) de la palabra de flechas asociada a P . Además, si P se obtiene de Q mediante una cancelación elemental, entonces $\ell(Q) = \ell(P) - 2$, por lo tanto, como la longitud de los caminos debe ser un entero no-negativo, deben existir caminos para los que no existe elemento alguno en $C(x)$ que se obtengan de él con una cancelación elemental, a tales caminos les decimos **simplificados**. Afirmamos que cada camino en $C(x)$ tiene una única reducción simplificada, lo que tiene como consecuencia que podemos definir una relación de equivalencia sobre $C(x)$ relacionando pares de caminos que tienen la misma reducción simplificada. Resulta que la yuxtaposición de las únicas reducciones simplificadas de caminos $P, Q \in C(x)$ es una reducción de PQ , de forma que la

concatenación de las reducciones simplificadas de P y Q tendrá la misma reducción simplificada que PQ y, por ello, podremos definir un grupo sobre el conjunto de clases de equivalencia asociadas a esta relación basados en la concatenación de caminos en $C(x)$. Esto lo argumentamos en la demostración del siguiente resultado.

Proposición 1.4.3. *La relación sobre $C(x)$ “tener una reducción simplificada en común” es de equivalencia. Además, si $\mathcal{C}(x) = \{[P]\}_{P \in C(x)}$ es la partición de $C(x)$ que induce dicha relación, y definimos una operación binaria sobre ella como*

$$[P][Q] = [PQ],$$

entonces ésta forma un grupo sobre $\mathcal{C}(x)$.

Demostración. Primero mostramos que todo camino tiene una única reducción simplificada. Para ello, si $P \in C(x)$ es el camino $x_1 \cdots x_n$, procedemos por inducción sobre la cantidad de $i \in [n-2]$ tales que $x_i = x_{i+2}$. Como ya vimos, si existe algún $Q \in C(x)$ que se obtiene de P con una cancelación elemental, entonces existirá al menos una $i \in [n-2]$ que satisfaga lo anterior, por lo que en el caso base, cuando no existe tal i , se tiene que P es simplificado y, por lo tanto, P mismo es su única reducción. Por otro lado, si existe al menos una $i \in [n-2]$ que satisface $x_i = x_{i+2}$ entonces la palabra $Q = x_1 \cdots x_{i-1}x_i x_{i+3} \cdots x_n$ se obtiene de P con una cancelación elemental y, por hipótesis inductiva, Q tiene una única reducción simplificada. Para ver que esta es la única reducción simplificada de P debemos ver que, aún si existe $j \in [n-2]$, tal que $x_j = x_{j+2}$ y $Q' = x_1 \cdots x_{j-1}x_j x_{j+3} \cdots x_n$ entonces las reducciones simplificadas de Q y Q' son iguales. Para esto podemos suponer sin pérdida de la generalidad que $i < j$, entonces tenemos dos casos: $j = i+1$ y $j > i+1$. En el primero las palabras de flechas asociadas a P , Q y Q' son

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \cdots (x_{i-1}, x_i)(x_i, x_j)(x_j, x_{j+1})(x_{j+1}, x_{j+2})(x_{j+2}, x_{j+3}) \cdots (x_{n-1}, x_n), \\ & (x_1, x_2) \cdots (x_{i-1}, x_i)(x_{j+1}, x_{j+2})(x_{j+2}, x_{j+3}) \cdots (x_{n-1}, x_n), \text{ y} \\ & (x_1, x_2) \cdots (x_{i-1}, x_i)(x_i, x_j)(x_{j+2}, x_{j+3}) \cdots (x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

respectivamente. Como $j = i+1$, entonces $j+1 = i+2$, por lo que $(x_i, x_j) = (x_{j+1}, x_{j+2})$ y así que las palabras de flechas de Q y Q' son iguales. Como sabemos que esta correspondencia es inyectiva entonces $Q = Q'$ y así que tienen la misma reducción simplificada. Por otro lado, si $j > i+1$, entonces las palabras de flechas de P , Q y Q' son

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \cdots (x_i, x_{i+1})(x_{i+1}, x_{i+2}) \cdots (x_j, x_{j+1})(x_{j+1}, x_{j+2}) \cdots (x_{n-1}, x_n), \\ & (x_1, x_2) \cdots (x_{i-1}, x_i)(x_i, x_{i+3}) \cdots (x_j, x_{j+1})(x_{j+1}, x_{j+2}) \cdots (x_{n-1}, x_n), \text{ y} \\ & (x_1, x_2) \cdots (x_i, x_{i+1})(x_{i+1}, x_{i+2}) \cdots (x_{j-1}, x_j)(x_j, x_{j+3}) \cdots (x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

respectivamente. Es decir, como $j > i + 1$ los pares de flechas consecutivas que borramos al realizar una cancelación elemental en P para obtener a Q y Q' no se intersectan. Es decir, en Q aún existe el par de flechas consecutivas $(x_j, x_{j+1})(x_{j+1}, x_{j+2})$ y en Q' el par $(x_i, x_{i+1})(x_{i+1}, x_{i+2})$. De forma que el camino obtenido de Q con la cancelación elemental correspondiente a borrar el par de flechas $(x_j, x_{j+1})(x_{j+1}, x_{j+2})$ coincide con el obtenido de Q' con la cancelación elemental correspondiente a borrar $(x_i, x_{i+1})(x_{i+1}, x_{i+2})$. Se sigue que Q y Q' tienen una reducción en común que por hipótesis de inducción tiene una única reducción simplificada, la cual será también la única reducción simplificada de Q y Q' . Así que P tiene una única reducción simplificada. De esto se sigue inmediatamente que la relación “tener una reducción simplificada en común” es de equivalencia, es trivialmente reflexiva y simétrica, además, gracias a la unicidad de la reducción simplificada de cada camino, es transitiva.

Ahora, veamos que si $P = x_1 \cdots x_n$ y $Q = y_1 \cdots y_m$ son dos caminos en $C(x)$, entonces las palabras de flechas asociadas a P , Q , y PQ son

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n), \\ & (y_1, y_2) \cdots (y_{m-1}, y_m), \text{ y} \\ & (x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n)(y_1, y_2) \cdots (y_{m-1}, y_m), \end{aligned}$$

respectivamente. De manera que toda eliminación de pares consecutivos $(x_i, x_{i+1})(x_{i+1}, x_i)$ en la palabra de flechas asociada a P , se corresponde con la eliminación del mismo par en la palabra de flechas asociada a PQ . De la misma forma, la eliminación de pares de flechas consecutivas de Q se puede replicar con las correspondientes flechas de PQ . Se sigue que es posible realizar la sucesión de cancelaciones elementales que convierten a P en su única reducción simplificada en las primeras $n - 1$ flechas de la palabra de flechas asociada a PQ y la sucesión de cancelaciones elementales que convierten a Q en su única reducción simplificada en las últimas $m - 1$ de éstas. Así que la concatenación de las reducciones simplificadas de P y Q tiene la misma reducción simplificada que PQ . Denotamos $[P]$ a la clase de $P \in C(x)$ bajo la relación “tener una reducción simplificada en común”, lo anterior es que para cualesquiera $P_1, P_2 \in [P]$ y $Q_1, Q_2 \in [Q]$ se tiene que la reducción simplificada de P_1Q_1 y P_2Q_2 es la misma, es decir que la clase $[P_1Q_1] = [P_2Q_2]$ no depende de los representantes de la clase que se elijan. Así, si definimos la concatenación **de caminos simplificados** como la operación binaria sobre $\mathcal{C}(x)$ dada por

$$[P][Q] = [PQ],$$

entonces, como $([P][Q])[R] = [PQ][R] = [PQR] = [P][QR] = [P]([Q][R])$, es asociativa y, ya que $[P][\epsilon_x] = [P\epsilon_x] = [P] = [\epsilon_x P] = [\epsilon_x][P]$, entonces $[\epsilon_x]$ es

un neutro de esta operación. Para ver que cada camino tiene inverso definimos, en cualquier gráfica G y para todo camino en ella, $P = x_1 \cdots x_n$, el **camino invertido** de P como el camino

$$P^{-1} = x_n \cdots x_1.$$

Es decir, $P_i^{-1} = P_{n+1-i}$ para toda $i \in [n]$. Observemos que la palabra de flechas asociada a PP^{-1} y $P^{-1}P$ son

$$(x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n)(x_n, x_{n-1}) \cdots (x_2, x_1) \text{ y} \\ (x_n, x_{n-1}) \cdots (x_2, x_1)(x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n),$$

respectivamente. Es fácil convencerse, por inducción sobre la longitud de P , que estos caminos tienen como reducción simplificada a ϵ_x , de forma que $[PP^{-1}] = [P^{-1}][P] = [\epsilon_x]$. Así que $[P^{-1}]$ es el inverso de $[P]$ para todo $[P] \in \mathcal{C}(x)$, finalmente concluimos que la concatenación de caminos simplificados forma un grupo sobre $\mathcal{C}(x)$. A este grupo le decimos el **grupo de caminos simplificados** de G . ■

Ahora introducimos los conceptos de conexidad de gráficas que necesitaremos. Primero, definimos la **distancia** entre dos vértices x y y de una gráfica G de orden $n \in \mathbb{Z}^+$, como

$$d_G(x, y) = \min\{\ell(P) : P \text{ es un } xy\text{-camino en } G\}.$$

A un xy -camino P tal que $\ell(P) = d_G(x, y)$ le decimos una xy -geodésica. Como este xy -camino es de longitud mínima, no existen aristas de la forma $P_i P_j$ con $j \neq i + 1$ para $i \in [n - 1]$ alguna. Es decir, que P , por ser una xy -geodésica, es una subgráfica inducida de G . Por otro lado, decimos que el **diámetro** de una gráfica es

$$\text{diam}(G) = \max\{d(x, y) : x, y \in V(G)\}.$$

Los morfismos $C : C_m \rightarrow G$ para algún entero $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{2\}$ están en biyección con los caminos cerrados de G si asociamos a C el camino cerrado $C_1 \cdots C_m C_1$. Así, decimos que la longitud de un ciclo de una gráfica es la longitud del camino cerrado asociado, es decir, si $C : C_m \rightarrow G$ es un ciclo de G —recordemos que esto es que C es monomorfismo— entonces C tiene longitud m , lo que denotamos también como $\ell(C) = m$. Decimos que el **cuello** de una gráfica G es

$$g(G) = \min\{\ell(C) : C \text{ es un ciclo en } G\}.$$

Una gráfica G con orden $n \in \mathbb{Z}^+$ es **conexa** si para cualesquiera $x, y \in V(G)$ existe un xy -camino en G . Si definimos una relación sobre $V(G)$ relacionando x con y siempre

y cuando exista un xy -camino, entonces ésta es de equivalencia. Es reflexiva gracias a la existencia de ϵ_x para cada $x \in V(G)$, es simétrica ya que si P es un xy -camino entonces P^{-1} es un yx -camino, y es transitiva ya que la concatenación de un xy -camino con un yz -camino es un xz -camino para cualesquiera $x, y, z \in V(G)$. Esta definición es equivalente a relacionar x y y si existe una xy -trayectoria entre ellos, como toda xy -trayectoria es un xy -camino una de las implicaciones es inmediata, argumentamos la otra por inducción sobre la longitud del xy -camino. Todos los caminos de longitud cero son trayectorias, por lo que el caso base se cumple. Si P es un xy -camino de longitud al menos 1 y no es una xy -trayectoria, entonces P no es un monomorfismo, de forma que existen vértices en el camino que se repiten. Consideramos P_j el mínimo en $[\ell(P)]$ tal que existe $i < j$ que satisface $P_i = P_j$, entonces PP_iP_jP es un xy -camino de longitud estrictamente menor, por inducción se concluye que existe una xy -trayectoria. A la subgráfica de G inducida por una clase de equivalencia de esta relación le decimos una **componente conexa** de G . Notemos que, por lo tanto, una gráfica es conexa si y sólo si tiene una única componente conexa. Si $A, B \subseteq V(G)$ y $X \subseteq V(G) \cup E(G)$ son tales que todo AB -camino tiene un vértice o una arista de X , entonces decimos que X **separa** a A y B . Esto implica en particular que $A \cap B \subseteq X$. Más generalmente, decimos que X **separa** a G si existen $x, y \in V(G) \setminus X$ tales que X separa a $\{x\}$ y $\{y\}$, lo que escribimos como que X separa a x y y . En este caso, a X le decimos un **conjunto separador** de G . Si $X \subseteq V(G)$ es un conjunto separador de G , entonces X es un **corte por vértices** de G ; en cambio, si $X \subseteq E(G)$, este será un **corte por aristas** de G . En particular, si $X = \{x\}$ es un corte por vértices de G para algún $x \in V(G)$ entonces decimos que x es un **vértice de corte** de G ; análogamente si $X = \{e\}$ para alguna $e \in E(G)$, entonces e es una **arista de corte** o un **punto de corte** de G . A una gráfica de orden $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ tal que para toda $X \in \binom{V(G)}{k}$, con $k \in [n-1]$, se tiene que X no es separador, le decimos una **gráfica k -conexa**. Observemos que, por ejemplo, una gráfica es 1-conexa si y sólo si es conexa y es 2-conexa si y sólo si no tiene vértices de corte.

Definiremos un orden parcial de la colección de subgráficas de una gráfica G , para esto nos apoyamos en la identificación de las subgráficas de G con su imagen, de manera que tratamos con el conjunto de gráficas H tales que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Así, si H y H' son subgráficas de G , decimos que " H' contiene a H " si $V(H) \subseteq V(H')$ y $E(H) \subseteq E(H')$. A un elemento maximal en este orden le decimos una subgráfica de G **máxima por contención**. Es fácil ver que, si H es una subgráfica de G que tiene vértices de dos componentes conexas de G , entonces H no será conexa ya que $E(H) \subseteq E(G)$, por lo que todos los caminos en H son caminos en G . Por lo tanto, si H es conexa, su conjunto de vértices debe estar contenido en el de una componente conexa H' . Como la componente conexa H' es una subgráfica

inducida entonces $E(H') = E_G(V(H'), V(H'))$ y, como $V(H) \subseteq V(H')$, se concluye que $E(H) \subseteq E(H')$ y así que $H \subseteq H'$. Por lo tanto, si restringimos el orden $\subseteq$ a la colección de subgráficas conexas de G , lo anterior muestra que las componentes conexas de una gráfica son precisamente los elementos maximales de este orden. Es decir que las componentes conexas son las subgráficas conexas máximas por contención. Esto nos permite generalizar esta noción para la k -conexidad con $k \in \mathbb{Z}^+$ definiendo una **componente k -conexa** de una gráfica como una subgráfica k -conexa máxima por contención. A las componentes 2-conexas de una gráfica les decimos sus **bloques**. Para entender cómo se ven los bloques de una gráfica conviene observar que toda subgráfica de la forma $(\{x, y\}, \{xy\})$ para algunos vértices adyacentes x y y es 2-conexa. En efecto, si borramos cualquiera de los dos vértices de esta subgráfica obtenemos la gráfica trivial de orden 1, que es conexa. Este comportamiento es patológico, en esta gráfica no existen vértices de corte ya que no es posible borrar un vértice que separe a otros dos porque solamente existen dos vértices. A un bloque de esta forma le decimos un **bloque trivial**, a pesar de lo que esta terminología podría sugerir, los bloques triviales serán de gran importancia al desarrollar algunas ideas del El Capítulo 2, esto es porque su comportamiento es cualitativamente diferente al de los demás bloques. Se sigue que, además, toda arista está en alguna subgráfica 2-conexa, de manera que estará en algún bloque. Observemos que si B y B' son bloques de una gráfica G , entonces $|V(B) \cap V(B')| \leq 1$, esto es así ya que, si existieran dos vértices $x, y \in V(B) \cap V(B')$, entonces sin importar qué vértice z de $B'' = [V(B) \cup V(B')]_G$ borremos, $B - z$ y $B' - z$ seguirán siendo conexas y tendrán al menos un vértice en común, de manera que ese vértice tendrá un camino hacia cualquier otro en $B'' - z$, lo que demuestra que B'' es 2-conexa. Como B y B' son bloques y, por lo tanto, subgráficas 2-conexas máximas por contención, se concluye que $B = B'' = B'$. Más aún, si B y B' son dos bloques para los cuales existe $z \in V(B) \cap V(B')$, entonces z es de corte ya $B'' = [V(B) \cup \{y\}]_G$ no es 2-conexo para toda $y \in V(B') \setminus \{z\}$, por lo que debe existir un vértice de corte en B'' , no puede ser y pues $B'' - y = B$ es conexo y no puede ser $x \in V(B) \setminus \{z\}$ ya que $B - x$ es conexo y, por lo tanto, existen caminos desde z hacia cualquier otro vértice en $B'' - x$. Esto de hecho caracteriza a los vértices de cualquier gráfica G , en efecto, si z es un vértice de corte de G y x y y son vecinos de z que pertenecen a componentes conexas distintas de $G - z$, entonces zx y zy deben estar en bloques de G diferentes, de otra forma x y y estarían en el mismo bloque, lo que está en contradicción con la hipótesis de que z los separe. Esto nos sugiere definir, dada cualquier gráfica G , la gráfica que tiene por vértices a los bloques y a los vértices de corte de G , y en la que las aristas existen entre un bloque B y vértice de corte x si y sólo si $x \in V(B)$. A esta gráfica le decimos el **bosque de bloques y cortes** de la gráfica. Antes de explicar la razón de este nom-

bre, enunciamos el siguiente famosísimo resultado de la Teoría de Gráficas, conocido como el Teorema de Menger⁹, el cual caracteriza a las gráficas k -conexas de forma que generaliza nuestra definición original de gráfica conexa mediante caminos y que expresa la dualidad que existe entre los k -conjuntos de vértices separadores y las colecciones de k trayectorias internamente ajenas de una gráfica. Lamentablemente, su demostración requiere lidiar con detalles técnicos ligeramente complicados y que no son particularmente relevantes para el desarrollo de este texto. Afortunadamente, este resultado ah sido ampliamente estudiado y existe una multitud de demostraciones diferentes de él, tres de ellas, incluida la de la versión ligeramente modificada de este teorema que asumiremos, pueden encontrarse en [20]. Para resarcir la omisión de este argumento mostraremos una consecuencia de él, conocida como el Lema del Abanico, la cual usaremos en el El Capítulo 2.

Proposición 1.4.4. (*Versión Global del Teorema de Menger*) *Una gráfica G de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ es k -conexa para algún $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ si y sólo si para cualesquiera $x, y \in V(G)$ existe una colección de cardinalidad k de xy -trayectorias internamente ajenas.*

Proposición 1.4.5. (*Lema del Abanico*) *Si G es una gráfica k -conexa entonces, para cualesquiera $x \in V(G)$ y $Y \subseteq V(G) \setminus \{x\}$, existe una colección de cardinalidad k de xY -trayectorias tales que, por pares, su único vértice común es x .*

Demostración. Primero observemos que si x y Y son como en el enunciado, entonces la gráfica H con conjunto de vértices $V(H) = V(G) \cup \{z\}$ para z cualquiera tal que $z \notin V(G)$ y conjunto de aristas

$$E(H) = E(G) \cup \{zy : y \in Y\},$$

es k -conexa. Esto es claro ya que, si existiera $X \subseteq V(H)$ separador en H de menos de k vértices, entonces $z \notin X$, ya que, en otro caso se tiene que $H - X = G - (X \setminus \{z\})$ y así que G tiene un conjunto de vértices separador de cardinalidad menor que k , contradiciendo su k -conexidad. Por lo tanto, como H es k -conexa, se sigue de la Proposición 1.4.4 que existe una colección $P_1, \dots, P_k$ de xz -trayectorias internamente ajenas, como z tiene k vecinos, cada una de ellos es el vértice adyacente al vértice final de alguna P_i con $i \in [k]$. Por lo tanto, si llamamos Q_i a la restricción de P_i desde su vértice inicial hasta su penúltimo vértice es un xY -camino en G . Como

⁹Karl Menger (1902-1985) fue un matemático austriaco-americano, miembro del Círculo de Viena, y conocido por sus trabajos en álgebra, geometría, teoría de curvas y teoría de la dimensión. En 1928 publicó el libro *Dimensionstheorie* que contiene el teorema que lleva su nombre y que Frank Harary describe como “el teorema fundamental de conexidad en gráficas”. [43, 40]

además $V(P_i) \cap V(P_j) = \{x, z\}$ para cualesquiera dos $i, j \in [k]$, se concluye que $V(Q_i) \cap V(Q_j) = \{x\}$ para cualesquiera dos $i, j \in [k]$. ■

Una gráfica G de orden $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es **acíclica** si no tiene ciclos, si además $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces es un **bosque**. Como es de esperarse, el bosque de bloques y cortes de una gráfica es un ejemplo de bosque. Para ver eso es suficiente observar que, si existiera un ciclo $p_1 B_1 p_2 \cdots p_m B_m p_1$ en el bosque de bloques y cortes —en donde p_i es un vértice de corte y B_i un bloque de G para toda $i \in [m]$ — entonces existe una $p_i p_{i+1}$ -trayectoria Q_i en G para toda $i \in [m-1]$. Notemos que como los ciclos deben tener al menos 3 vértices y en ésta gráfica no existen dos bloques o dos vértices de corte adyacentes, entonces $m \geq 4$, de manera que este ciclo pasa por al menos dos bloques de G diferentes. Si llamamos x al penúltimo vértice de Q_m , entonces se tiene que $P = Q_1 Q_2 \cdots Q_m x$ es una $p_1 x$ -trayectoria distinta de $x p_1$ ya que P contiene aristas de al menos dos bloques, de manera que $C = P p_1$ es un ciclo en G que contiene vértices de al menos dos bloques diferentes. Esto es una contradicción ya que un ciclo es una subgráfica 2-conexa y con al menos 3 vértices, de forma que, por pares, todos los bloques $B_1, \dots, B_m$ tienen más de un vértice en común, lo que muestra que $B_1 = B_2 = \cdots = B_m$, una contradicción. A un bosque conexo le decimos un **árbol**. Resulta que, si G es conexa, entonces su bosque de bloques y cortes es un árbol, para convencernos de esto es suficiente observar que, como cada arista está en un único bloque de G , entonces, si $x_1 \cdots x_m$ es un camino de G , utilizando la palabra de aristas asociada, $e_1 \cdots e_{m-1}$, podemos construir la palabra w de bloques de G dada por $w_i = B$ si e_i está en el bloque B y modificarla, añadiendo el único vértice en la intersección de dos bloques consecutivos en w entre ellos. Intuitivamente, simplemente recordamos los bloques por los que pasa el camino $x_1 \cdots x_m$ y, poniendo entre ellos el vértice de corte por el que debemos pasar para cambiar de bloque, obtenemos un camino en el bosque de bloques y cortes. Si x_1 y x_m están en los bloques B y B' respectivamente, la construcción anterior nos proporciona un BB' -camino en el bosque de bloques y cortes. Si alguno de x_1 o x_m son de corte, entonces podemos añadirlo al extremo del camino que nos da esta construcción para encontrar un camino en el bosque de bloques y cortes que lo tenga por extremo. Así, se concluye que existe un camino entre cualesquiera dos vértices del bosque de bloques y cortes de una gráfica conexa. Por lo tanto, si G es conexa hablamos de su **árbol de bloques y cortes**. Si un vértice de un bosque tiene grado 1, le decimos una **hoja**. Todo árbol no-trivial T tiene al menos dos hojas, esto es claro si consideramos $x, y \in V(T)$ tales que $\text{diam}(T) = d(x, y)$ ya que, como T no es trivial, x y y son distintos y, dado que no existen ciclos en T , x y y no pueden ser adyacentes a ningún vértice interno de una xy -geodésica y, por estar a distancia $\text{diam}(T)$, tampoco pueden ser adyacentes a ningún vértice fuera de ésta. Así que x y y solo son adyacentes al

segundo vértice y $(\text{diam}(G) - 1)$ -ésimo de una xy -geodésica, respectivamente. Así que x y y son hojas de T . Con esto definimos también un **bloque terminal** de una gráfica G como un bloque que es una hoja en el bosque de bloques y cortes de G . Los árboles son tremendamente útiles en Teoría de Gráficas ya que su estructura es relativamente sencilla, para ver esto caracterizamos la estructura de los árboles de dos formas distintas en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.6. *Para toda gráfica G de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ son equivalentes*

1. G es un árbol
2. para cualesquiera dos vértices x y y existe una única xy -trayectoria en G .
3. Existe un orden lineal de su conjunto de vértices, $x_1 \leq \dots \leq x_n$, tales que $G_i = [\{x_j : j \leq i\}]_G$ es un árbol y x_i una de sus hojas para toda $i \in \llbracket n \rrbracket$.

Demostración. Para ver que 1 es equivalente a 2 argumentamos que la existencia de dos xy -trayectorias, para $x, y \in V(G)$, es equivalente a que exista un ciclo en G . Esto es sencillo ya que, si existe un ciclo $c_1 \dots c_m c_1$ entonces entre los vértices $x = c_1$ y $y = c_m$ existen las dos xy -trayectorias dadas por xy y $xc_2 \dots c_{m-1}y$. Por otro lado, si $P: P_m \rightarrow G$ y $Q: P_k \rightarrow G$ son xy -trayectorias distintas, como $P_1 = Q_1 = x$ y son trayectorias distintas, debe existir un $a \in \llbracket \min\{m, k\} - 2 \rrbracket$ tal que $P_i = Q_i$ para toda $i \in \llbracket a \rrbracket$ y $P_{a+1} \neq Q_{a+1}$. Así mismo, deben existir un $b \in \llbracket a + 1, m - 1 \rrbracket$ y $b' \in \llbracket a + 1 \rrbracket k - 1$ tales que $\{P_{a+1}, \dots, P_b\} \cap \{Q_{a+1}, \dots, Q_{b'}\} = \emptyset$ y $P_{b+1} = Q_{b'+1}$. Intuitivamente, esto es que los caminos P y Q deben dejar de coincidir en algún momento y deben volver a hacerlo por primera vez en algún punto más adelante. Es claro que estos dos puntos, la unión de las trayectorias describe un ciclo, es decir, la concatenación de caminos $P_a P P_{b+1} Q_{b'+1} Q^{-1} Q_a$ es un ciclo de G .

Por lo anterior, en todo árbol existen únicas xy -trayectorias entre cualesquiera dos vértices. En efecto, existen ya que es una gráfica conexa y son únicas porque todo árbol es una gráfica acíclica. Así mismo, si en una gráfica existen únicas xy -trayectorias entre cualesquiera dos vértices, entonces la gráfica será conexa porque existen estas trayectorias y será acíclica porque son únicas. Así que 1 es equivalente a 2.

Ver que 3 implica 1 es inmediato ya que de 3 se sigue que, en particular, $G_n = [\{x_1, \dots, x_n\}]_G = G$ es un árbol. Por lo tanto, resta ver que 1 implica 3. Para ello basta demostrar dos cosas: un árbol de orden al menos dos tiene alguna hoja y, cuando borramos dicha hoja, volvemos a obtener un árbol. Eso es suficiente para concluir 3 ya que podemos construir el orden definiendo x_n como cualquier hoja de G y, recursivamente, para $i \in \llbracket n - 1 \rrbracket$, definimos x_i como cualquier hoja del

árbol $G_i = G - \{x_{i+1}, \dots, x_n\}$. Ver que todo árbol tiene una hoja es claro ya que, si consideramos P una trayectoria de G de longitud máxima, su extremo no puede ser adyacente a ningún vértice fuera P ya que esto contradiría que su longitud es máxima. Además, ningún extremo de P puede ser adyacente a más de un vértice de P ya que se formaría un ciclo en G . Así, los extremos de P son hojas de G . Para ver que borrar una hoja de un árbol resulta en un árbol es ver que una hoja nunca es un vértice de corte, ya que es evidente que borrar un vértice no provocará que se viole la aciclicidad de G . Sin embargo esto es claro ya que los vértices internos de una trayectoria de G tienen grado al menos dos, por lo que z solo puede ser extremo de trayectorias en G . Así, borrar a z no afecta a las xy -trayectorias de G para cualesquiera dos $x, y \in V(G) \setminus \{z\}$. ■

La Proposición 1.4.6 nos permite denotar xTy a la única xy -trayectoria que existe en un árbol T para cualesquiera $x, y \in V(T)$. Más aún, al orden que se describe en 3 le decimos un **desmantelamiento por hojas** de G . De forma que la Proposición 1.4.6 también dice que una gráfica es un árbol si y sólo si tiene un desmantelamiento por hojas. Veremos en el Capítulo 3 que es posible generalizar esta idea para estudiar el juego de *policías y ladrones*, entonces la Proposición 1.4.6 nos servirá para entender la estructura de algunas gráficas como una muy parecida a la que tienen los árboles.

Los árboles son las gráficas conexas “más pequeñas”, en el sentido de que toda gráfica conexa contiene un subgráfica generadora que es un árbol. Este hecho es inmediato si observamos que hay una biyección entre el conjunto de subgráficas generadoras de una gráfica G y $\mathcal{P}(E(G))$ dado por $H \mapsto E(H)$. Por lo que podemos imponer el conjunto de gráficas generadoras el orden parcial $\leq$ dado por $H' \leq H$ si y sólo si $E(H') \subseteq E(H)$. Además, como estamos suponiendo que G es conexa, entonces la subgráfica generadora correspondiente a $E(G)$ es conexa. Por lo tanto, la colección de subgráficas generadoras de G es finita y debe existir alguna de ellas, H , tal que H es conexa pero toda $H' \neq H$ tal que $H' \leq H$ no lo es ya que, en el peor de los casos, no existirá $H' \neq H$ y tal que $H' \leq H$. Afirmamos que tal H es un árbol, es conexa por construcción y no puede contener un ciclo ya que la subgráfica de obtenida de borrar una arista a un ciclo de una gráfica conexa sigue siendo conexa. Así se concluye que H debe ser un árbol. A una subgráfica de G así le decimos simplemente un **árbol generador** de G .

Una gráfica es **bipartita** si es trivial o si existe un par $\{A, B\}$ que es una partición de $V(G)$ y tal que A y B son conjuntos de vértices independientes. Es decir, una gráfica es bipartita si todas sus aristas que no son lazos son $A(V(G) \setminus A)$ -aristas para algún conjunto no vacío $A \subseteq V(G)$. A una partición $\{A, B\}$ de $V(G)$ que satisface esto le decimos una **bipartición** de G . A las clases de una bipartición les decimos **colores** y cuando un vértice que está en una de ellas decimos que está **coloreado** con

ese color, que “tiene” ese color, o que “es” de ese color. Normalmente les llamaremos a los colores de una bipartición blanco y negro, de manera que si dos vértices son adyacentes entonces uno es blanco y otro negro. Es fácil convencernos de que una gráfica bipartita no puede contener un ciclo de longitud impar $2k + 1$ para k entero positivo alguno. Si así fuera, digamos que existe el ciclo $C = x_1 \cdots x_{2k+1}x_1$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que x_1 está coloreado de blanco, de manera que x_2 está coloreado de negro, x_3 de blanco, y así sucesivamente+. De forma que x_{2k+1} será blanco, al igual que x_1 , lo que es una contradicción al hecho de que esta coloración represente una bipartición de G . Resulta que la condición de no tener ciclos de longitud $2k + 1$ para toda $k \in \mathbb{Z}^+$ es equivalente a que una gráfica sea bipartita. Demostramos esto a continuación.

Proposición 1.4.7. *Una gráfica G es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud $2k + 1$ para toda $k \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Mostraremos que si una gráfica no tiene ciclos de longitud $2k + 1$ para $k \in \mathbb{Z}^+$ alguna, es posible construir una bipartición de G . Observemos que, por definición de componente conexa, no existen aristas entre vértices que se encuentren en componentes conexas distintas de una gráfica. Por lo tanto, si cada componente conexa de G es bipartita o trivial, podemos construir la bipartición de G coloreando los vértices de G blancos o negros según están coloreados en la componente conexa. Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que G es conexa y no-trivial. Entonces consideremos T un árbol generador de G y $x \in V(G)$ cualquiera. Definimos

$$A = \{y \in V(G) : d(x, y) = 2k + 1 \text{ para alguna } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \text{ y}$$

$B = V(G) \setminus A$. Como G es no-trivial, T no lo es, de forma que x tiene al menos un vecino distinto de él, éste estará a distancia 1 de x , de forma que A no es vacío. Además, B no es vacío ya que $x \in B$. Además $\{A, B\}$ es un par de conjuntos ajenos y tal que $V(G) = A \cup B$ por la forma en que construimos a B . Resta ver que si dos vértices son adyacentes entonces uno es de color A y otro de color B . Sin embargo, esto es claro ya que si $yy' \in E(G)$ es una arista que no es un lazo en G entonces, si $yy' \in E(xTy)$ entonces $xTy = xTy'y$, de forma que $d(x, y') = d(x, y) - 1$ y así que son de colores diferentes. En cambio, si $yy' \notin E(xTy)$ entonces $xTy' = xTy'y'$, de forma que $d(x, y') = d(x, y) + 1$, lo que de nuevo nos permite concluir que y y y' tienen colores distintos. Se concluye que una gráfica es bipartita si y solo si no tiene ciclos de longitud $2k + 1$ para $k \in \mathbb{Z}^+$ alguno. ■

Podemos construir una gráfica bipartita G a partir de cualquier estructura de incidencia (P, B, I) definiendo $V(G) = P \cup B$ y que $xy \in E(G)$ si y sólo si $xy \in I$,

de forma que, sin pérdida de la generalidad, $x \in P$ y $y \in B$. Así $\{P, B\}$ forma una bipartición de $V(G)$. A G le decimos la **gráfica bipartita asociada a la estructura de incidencia** (P, B, I) . Por ejemplo, el bosque de bloques y cortes de una gráfica es la gráfica bipartita asociada a la estructura de incidencia cuyos puntos son los vértices de corte, sus líneas son los bloques de la gráfica, y la incidencia es la relación inducida por la pertenencia de elementos.

Finalmente, concluimos este capítulo definiendo, para cualquier gráfica G de orden n , con $n \in \mathbb{Z}^+$, un conjunto $M \subseteq E(G)$ es un **empareamiento** si cualesquiera dos aristas $xy, x'y' \in M$ forman un par ajeno. Si además existen A y B subconjuntos de $V(G)$ tales que $M \subseteq E(A, B)$ entonces se trata de un **AB -apareamiento** en G . Cada AB -apareamiento de una gráfica da lugar un subconjunto de $R(G)$ que resulta ser una función biyectiva, a ésta le decimos la **biyección subyacente a M que va de A en B** y se define como

$$f_M = \{(x, y) \in R(x) : x \in A, y \in B, \text{ y } xy \in M\}.$$

Capítulo 2

Gráficas de fichas

2.1. Introducción

Dada una gráfica G de orden n , con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in [n]$, definimos la gráfica cuyo conjunto de vértices es la colección de todos los k -subconjuntos de $V(G)$ y en la que cualesquiera dos de estos, u y v , son adyacentes si y solo si $u \Delta v \in E(G)$. Esta es la **gráfica de k fichas** de G , la denotamos $F_k G$, y a sus vértices les decimos **configuraciones de k fichas** en G . Esta gráfica ha sido definida independientemente por al menos cuatro autores. En 1988, en su tesis de doctorado, Johns [32] la llama la gráfica de k -subgráficas de G y estudia algunas de sus propiedades métricas. En 1991, Alavi y Erdős [2] las definen para el caso $k = 2$, se refieren a ellas como *gráficas de vértices dobles*¹ y, con ello, dan inicio a una línea de investigación sobre sus propiedades de conexidad [55, 5], planaridad [3], y hamiltonicidad [4]. Poco después, Zhu, Liu, Lick y Alavi [56] las generalizan para cualquier $k \in [n]$, O'Neil [46] investiga su conexidad, y Weinreich [53] su hamiltonicidad. En 2002, al analizar las interacciones en un sistema cuántico de k *qubits* con dos estados en donde las interacciones entre diferentes partículas están restringidas a una relación predeterminada entre ellas, Rudolph [51] llega a un modelo equivalente. Muestra, además, un par de gráficas coespectrales cuyas gráficas de 3-fichas no lo son. Audenaert, Godsil, Royle y Rudolph [7] amplían esta dirección de investigación, demostrando que las gráficas de 2-fichas de gráficas fuertemente regulares con los mismos parámetros son coespectrales. Finalmente, en 2012, Fabila-Monroy, Flores-Peñaloza, Huemer, Hurtado, Urrutia y Wood las reintroducen [22] bajo una interpretación inspirada en construcciones de *pebbling* que siguen diversos autores desde entonces [19, 16, 18, 23, 26, 36, 17, 37]. Su propuesta se inspira en interpretar a las gráficas como una abstracción de tableros de juegos de

¹*Double vertex graphs*

mesa, en donde los vértices son “casillas” sobre las que colocamos algunas “fichas” y, si una ficha está en una casilla adyacente a otra desocupada, puede trasladarse a ella mediante un “movimiento”. De esta forma, los elementos de $V(F_k G)$ se pueden interpretar como las posibles formas en que k fichas pueden acomodarse sobre vértices diferentes de G y dos de estas configuraciones serán adyacentes en $F_k G$ cuando una se pueda convertir en la otra moviendo una de sus fichas a una casilla desocupada adyacente.

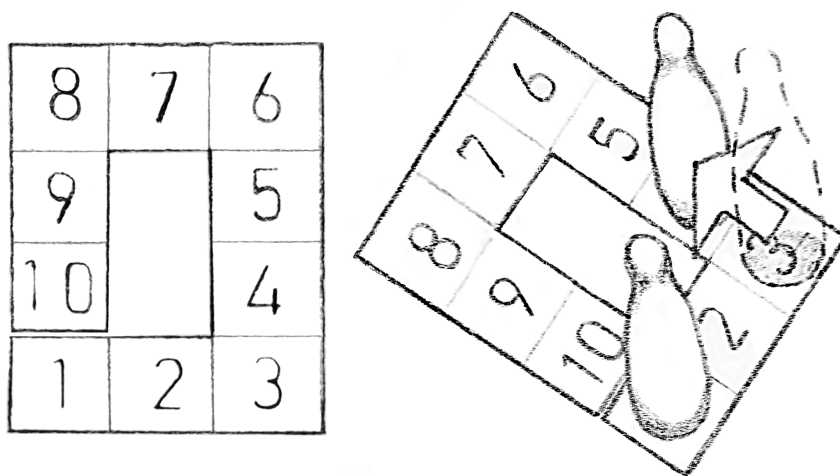


Figura 2.1: Las gráficas se interpretan como tableros sobre los que se colocan fichas que se pueden mover, una a la vez, a casillas desocupadas adyacentes.

En la Figura 2.1 podemos ver un tablero formado por diez casillas dispuestas de forma similar a las casillas de un tablero del juego de la oca, en donde las casillas admiten un orden lineal de manera que dos casillas son colindantes si y sólo si son consecutivas en el orden, esto es, el tablero se puede interpretar como una trayectoria cuyos vértices son las casillas en donde dos de ellas son adyacentes siempre y cuando sean colindantes. En el juego de la oca cada jugador empieza colocando su ficha en un extremo de la trayectoria, luego se toman turnos tirando un par de dados para decidir cuántos movimientos puede realizar cada jugador, el ganador es el primero que llega al otro extremo de la trayectoria. En este juego cada jugador cuenta con una única ficha, de manera que la colección de todas las posiciones en las que se puede encontrar un jugador se corresponden biyectivamente con las casillas del tablero en que se puede encontrar su ficha. En general, esto es equivalente a decir que para toda gráfica G se cumple $F_1 G \cong G$. En efecto, por definición de la gráfica de fichas,

$V(F_1G) = \{\{x\} : x \in V(G)\}$ y para vértices distintos, $\{x\}$ y $\{y\}$ en F_1G , se tiene que $\{x\}\{y\} \in E(F_1G)$ si y solo si $xy \in E(G)$, por lo que $\{x\} \mapsto x$ es un isomorfismo. Si modificamos el juego para que cada jugador tenga dos fichas en el tablero, pero que solo una de ellas pueda ocupar una casilla a la vez, entonces las posiciones en las que puede estar un jugador se corresponden con los vértices de F_2P_{10} . En la Figura 2.2 podemos ver un diagrama de la gráfica de dos fichas de P_{10} . Obsérvese que tomamos la libertad creativa de representar la configuración $\{x, y\}$ con la palabra xy , seguimos esta convención a lo largo de este texto con el propósito de no saturar las figuras para que sean lo más claras posible.

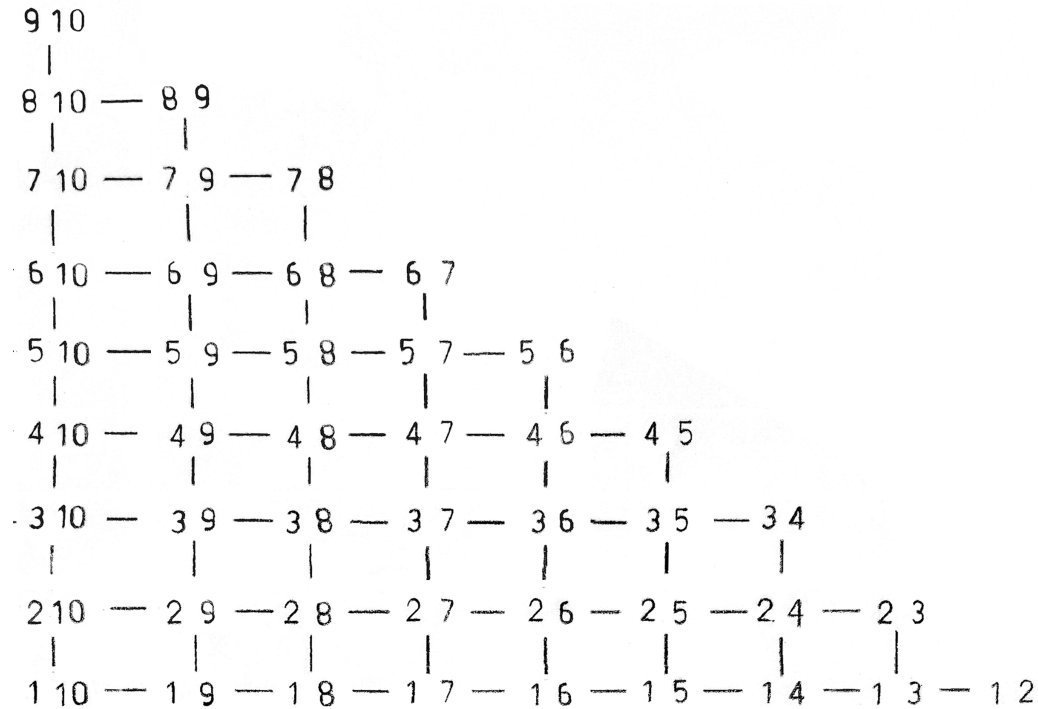


Figura 2.2: La gráfica de dos fichas de P_{10} .

Como es de esperarse, en lo que resta de este texto, en muchas ocasiones consideraremos la gráfica F_kG para G una gráfica de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in [n]$, notemos, sin embargo, que las gráficas de fichas se definen solo cuando la gráfica tiene orden un entero positivo y el parámetro k está entre 1 y dicho entero, así que estas condiciones están implícitas al considerar F_kG , por lo que, para evitar ser repetitivos, nos permitimos expresiones como “considere F_kG una gráfica de fichas” o “para toda gráfica de fichas F_kG ” para hacer alusión a la gráfica de k fichas de una gráfica G .

con orden un entero positivo al que, a menos que se precise de otra forma, se denota con la letra n y $k \in [n]$. Al parámetro k le decimos el **número de fichas** de $F_k G$. También resultará útil, para describir nuestras construcciones de forma precisa e intuitiva, formalizar las nociones de “ficha” y “movimiento”. Para ello, dada cualquier configuración $u \in V(F_k G)$, llamamos a los elementos de u sus **fichas** y, en particular, a cada $x \in u$ le decimos la **ficha de u en x** . Los movimientos, por otro lado, serán un “análogo de fichas” a las flechas de las gráficas, en el sentido de que nos permitirán diferenciar entre movimientos que se realizan “en direcciones contrarias”. Así, si x es una ficha de u , definimos el conjunto de **movimientos de la ficha de u en x** como

$$m_u(x) = \{(x, y) \in V(G) \times V(G) : y \in N(x) \setminus (u \setminus \{x\})\}.$$

Notemos que los movimientos de una ficha x de u están en biyección con los elementos de $N(x) \setminus (u \setminus \{x\})$, este es el conjunto de vecinos de x en G en los que no hay ficha alguna de u y el vértice x . Es decir, interpretando a G como un tablero, los movimientos de una ficha están en biyección con el conjunto formado por las casillas colindantes a x en donde no hay una ficha de u y la casilla x , estas son, precisamente, las casillas en donde es posible posicionar a la ficha de u en x si ésta se mueve a una casilla colindante. Obsérvese que, en esta metáfora, la existencia del lazo en x debe interpretarse como que la casilla x es colindante consigo misma, por lo que se permite que un movimiento de la ficha en x consista en no moverse de x . Por esto, a un movimiento de la forma $\{(x, x)\}$ para $x \in u$ le decimos un **pase** de la ficha de u en x . Además convenimos que, en el contexto de gráficas de fichas, se denota $m^{xy} = \{(x, y)\}$. Con base en esto definimos, si $m^{xy} \in m_u(x)$ para alguna configuración $u \in V(F_k G)$, el **movimiento de x a y de la configuración u** como

$$M_u^{xy} = m^{xy} \cup \bigcup_{z \in u \setminus \{x\}} m^{zz}.$$

A la colección de todos los movimientos de una configuración u la denotamos M_u . La cualidad más importante de los movimientos de una configuración u es que son funciones $M_u^{xy} : u \rightarrow V(G)$ tales que $M_u^{xy}[u] = (u \setminus \{x\}) \cup \{y\}$. Es decir, intuitivamente, al considerar la imagen directa de la una configuración bajo su movimiento de x a y obtenemos la configuración adyacente que resulta de mover la ficha en x a y . En particular, si xy es un lazo, entonces $M_u^{xy} = I_u$, de forma que los movimientos asociados a los lazos en los elementos de una configuración son todos el mismo movimiento I_u , al que le decimos el **pase de la configuración u** o simplemente el pase de u . Más aún, si u y v son dos configuraciones adyacentes, entonces $u \setminus v = \{x\}$ y $v \setminus u = \{y\}$ con $xy \in E(G)$, de forma que $M_u^{xy} \in M_u$, $M_v^{yx} \in M_v$ y, por lo tanto, $M_u^{xy}[u] = v$ y $M_v^{yx}[v] = u$. Para simplificar nuestra notación, introducimos M^{xy} , una función con

dominio la colección de configuraciones $u \in V(F_k G)$ tales que $M_u^{xy} \in M_u$, y dada por $M^{xy}(u) = M_u^{xy}[u]$. Además, usamos la formula $M^{xy} \in M_u$ para decir que $M_u^{xy} \in M_u$. Como consecuencia, es posible asociarle a todo uv -camino P en $F_k G$, con palabra de flechas $(u_1, u_2) \cdots (u_{m-1}, u_m)$, la palabra de movimientos $m^{x_1 y_1} \cdots m^{x_{m-1} y_{m-1}}$ en donde $u_i \setminus u_{i+1} = \{x_i\}$ y $u_{i+1} \setminus u_i = \{y_i\}$ para $i \in [m-1]$, es decir, la palabra obtenida de la palabra de flechas de P al sustituir cada flecha (u_i, u_{i+1}) en la palabra de flechas de P por el movimiento $m^{x_i y_i}$. Se sigue que $M^{x_i y_i} \in M_{u_i}$ y $M^{x_i y_i}(u_i) = u_{i+1}$ para toda $i \in [m-1]$, en particular

$$M^{x_{m-1} y_{m-1}} \circ \cdots \circ M^{x_1 y_1}(u) = v.$$

A la palabra $m^{x_1 y_1} \cdots m^{x_{m-1} y_{m-1}}$ le decimos la **palabra de movimientos** que subyace a P y la denotamos $w(P)$, mientras que a la función $M^{x_{m-1} y_{m-1}} \circ \cdots \circ M^{x_1 y_1} : u \rightarrow V(G)$ le decimos el **movimiento subyacente de P** , y la denotamos $M(P)$. Recíprocamente, dada una palabra de movimientos $w = m^{x_1 y_1} \cdots m^{x_{m-1} y_{m-1}}$ si existe $u \in V(F_k G)$ tal que $x_1 \in u$, $M^{x_1 y_1} \in M_u$ y, definiendo recursivamente $u_1 = u$ y $u_{i+1} = M^{x_i y_i}(u_i)$, siempre sucede que $M^{x_i y_i} \in M_{u_i}$ para toda $i \in [m-1]$, entonces decimos que w es una **palabra válida**. A una configuración que satiface lo que u en lo anterior, le decimos una **configuración inicial** de $m^{x_1 y_1} \cdots m^{x_{m-1} y_{m-1}}$. Dada una palabra válida y una configuración inicial u_1 , podemos definir el camino $P = u_1 \cdots u_m$ tal que $w(P) = m^{x_1 y_1} \cdots m^{x_{m-1} y_{m-1}}$. Por lo tanto, en esta discusión hemos construido una biyección entre los caminos en $F_k G$ y los pares formados por una palabra valida de movimientos junto con una configuración inicial de ella. Explotamos esta identificación utilizando terminología de movimientos de fichas para describir caminos en las gráficas de fichas con un lenguaje más natural. Por ejemplo, si $x \in u$, $y \in N(x) \setminus u$ y $z \in N(y) \setminus u$, decimos que “movemos la ficha de u en x a y y luego a z ” para referirnos al camino en $F_k G$ asociado a $m^{xy} m^{yz}$ con configuración inicial u . Continuando con el ejemplo, si existiera $P = z_1 \cdots z_m$ una zz' -trayectoria tal que $V(P) \cap u = \emptyset$, podríamos decir que “a continuación movemos la ficha en z a lo largo de P ” para referirnos al camino asociado a la palabra de movimientos obtenida de concatenar el camino que ya hemos construido con el asociado a la palabra de movimientos $m^{z_1 z_2} \cdots m^{z_{m-1} z_m}$ con configuración inicial $(u \setminus \{x\}) \cup \{z\}$. Es decir, como resultado de lo anterior habríamos construido el camino asociado a $m^{xy} m^{yz} m^{zz_2} \cdots m^{z_{n-1} z'}$ con configuración inicial u . Notemos que, más aún, la longitud de $w(P)$ coincide con $\ell(P)$, por lo que podemos conocer la longitud de un camino que construimos de esta forma recordando la cantidad de movimientos. Además de proporcionarnos este tipo de recursos lingüísticos, veremos en la la Sección 2.3 y el Capítulo 3, que el concepto de movimiento resulta útil al trabajar con una variedad de gráficas relacionadas a las gráficas de fichas.

Para terminar esta breve introducción a las gráficas de fichas, observemos que, si a cada configuración $u \in V(F_k G)$ le asociamos la configuración de los $n-k$ vértices de G que no son ocupados por sus fichas, es decir $u \mapsto V(G) \setminus u$, se obtiene una biyección de $V(F_k G)$ en $V(F_{n-k} G)$. Además, como $z \in u$ si y sólo si $z \notin V(G) \setminus u$, entonces para cualquier $xy \in E(G)$, se cumple que $M^{xy} \in m_u$ si y sólo si $M^{yx} \in m_{V(G) \setminus u}$. Más aún,

$$M^{yx}(V(G) \setminus u) = V(G) \setminus M^{xy}(u),$$

es decir que el movimiento de una ficha de u se puede interpretar a su vez como el movimiento, en dirección contraria, del espacio desocupado hacia el que se movió. Dicho de otra forma, la función de $V(F_k G)$ a $V(F_{n-k} G)$ dada por $u \mapsto V(G) \setminus u$ es biyectiva y, para $u, v \in V(F_k G)$ diferentes, se cumple

$$\begin{aligned} uv \in E(F_k G) &\iff u \triangle v \in E(G) \\ &\iff (u \setminus v) \cup (v \setminus u) \in E(G) \text{ y, usando la Proposición 1.1.1,} \\ &\iff ((V(G) \setminus v) \setminus (V(G) \setminus u)) \cup ((V(G) \setminus u) \setminus (V(G) \setminus v)) \in E(G) \\ &\iff (V(G) \setminus v) \triangle (V(G) \setminus u) \in E(G) \\ &\iff (V(G) \setminus v)(V(G) \setminus u) \in E(F_{n-k} G), \end{aligned}$$

por lo que es un isomorfismo entre $F_k G$ y $F_{n-k} G$. Este hecho nos sirve para suponer que $k \leq \frac{n}{2}$ pues, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{n}{2} < k \leq n$, se cumple que $n-k < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ y $F_{n-k} G \cong F_k G$. Veamos, por ejemplo, el caso cuando $G = P_6$. Si $k = 2$ entonces $n-k = 4$ y, en efecto, $F_2 P_6$ y $F_4 P_6$ son isomorfas, lo que se puede ver claramente en la Figura 2.3:

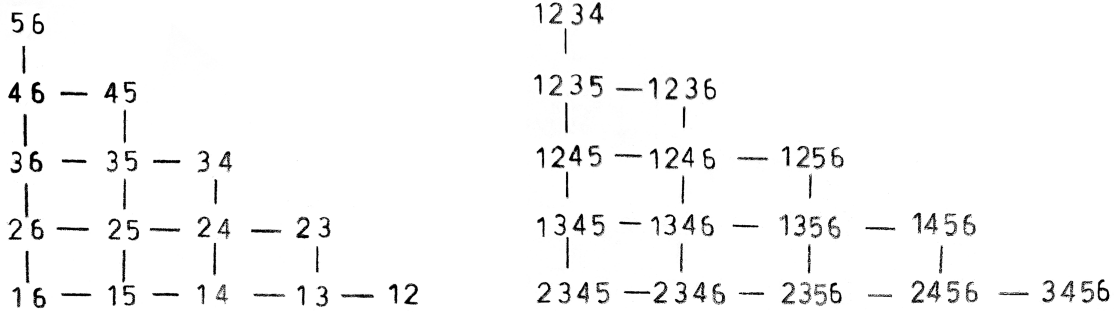


Figura 2.3: Las gráficas $F_2 P_6$ y $F_4 P_6$ son isomorfas.

2.2. Conexidad de las gráficas de fichas

Una gráfica de fichas $F_k G$ es conexa siempre que G es conexa. Esto es intuitivamente claro ya que una gráfica conexa representa un tablero en donde siempre es posible llegar de una casilla a otra, por lo que es de esperarse que es posible manipular las fichas en él para lograr cualquier configuración que deseemos. Para argumentarlo, en [22] construyen un uv -camino para cualesquiera dos configuraciones de k fichas u y v . Para ello primero analizan el caso cuando $u \setminus v = \{x\}$ y $v \setminus u = \{y\}$, consideran P una xy -trayectoria y $(x_1, \dots, x_q)$ la tupla de los elementos de $V(P) \cap u$ ordenados de acuerdo al orden en que los visita P . Entonces $\hat{P}$ es el camino de $F_k G$ que resulta de hacer los siguientes movimientos a partir de u : primero se mueve la ficha posicionada en x_q a lo largo de P hasta llegar a y , esto es posible pues no existen otras fichas de u en los vértices de $x_q P$. Al hacerlo obtenemos una configuración que tiene una ficha en y pero no una en x_q , de manera que la ficha en x_{q-1} se puede mover a lo largo de $x_{q-1} P x_q$. De esta manera, movemos la ficha en x_i a lo largo de $x_i P x_{i+1}$ de forma tal que, si $i > j$, realizamos estos movimientos para la ficha en x_i antes que para aquella en x_j . Es claro que entonces $\hat{P}$ es un camino en $F_k G$ tal que $m(\hat{P})[u] = v$, como queríamos ver. Más aún, para mover la ficha en x_q hasta y se necesitan $\ell(x_q P)$ movimientos, así mismo, para mover cada ficha posicionada en x_i hasta x_{i+1} se necesitan $\ell(x_i P x_{i+1})$ movimientos, por lo tanto

$$\ell(\hat{P}) = \ell(P x_2) + \dots + \ell(x_{q-1} P x_q) + \ell(x_q P) = \ell(P).$$

Si ahora tenemos $u \setminus v = \{x_1, \dots, x_r\}$, $v \setminus u = \{y_1, \dots, y_r\}$ con $r > 1$, definimos $u_i = (u \setminus \{x_1, \dots, x_i\}) \cup \{y_1, \dots, y_i\}$ para cada $i \in [r]$ y, como G es conexa, para todo par $\{x_i, y_i\}$ existe una $x_i y_i$ -trayectoria P^i . Por lo tanto, $\hat{P}^1$ es un $u u_1$ -camino y $\hat{P}^i$ un $u_{i-1} u_i$ -camino para $i \in [2, r]$. Como $u_r = v$ entonces $\hat{P}^1 \hat{P}^2 \dots \hat{P}^r$ es un uv -camino, demostrando que $F_k G$ es conexa siempre que G es conexa.

El análisis anterior también nos da una cota superior para el diámetro de $F_k G$ pues, como $r \leq k$ y $\ell(P^i) = \ell(\hat{P}^i) \leq d$, entonces $\ell(\hat{P}^1 \hat{P}^2 \dots \hat{P}^r) \leq kd$. Esta cota superior es justa, para cualesquiera $d, k \in \mathbb{Z}^+$, existe una gráfica de diámetro d cuya gráfica de k fichas tiene diámetro dk . Para $d = 1$ consideremos $G = K_{2k}$ y $u, v \in V(F_k G)$ tales que $u \cap v = \emptyset$, como cada ficha de u debe moverse a algún vértice en v entonces $d(u, v) = kd$. Si $d > 1$ llamemos G a la gráfica obtenida al agregarle $2k$ vértices a P_{d-1} , haciendo que la mitad de ellos sean adyacentes a un extremo de la trayectoria y la otra mitad al otro extremo. Denotemos u y v a las configuraciones formadas por los vecinos que fueron agregados a cada uno de los extremos de P_{d-1} .

Como u y v son ajenos, en cualquier uv -camino de $F_k G$ todas las fichas de u

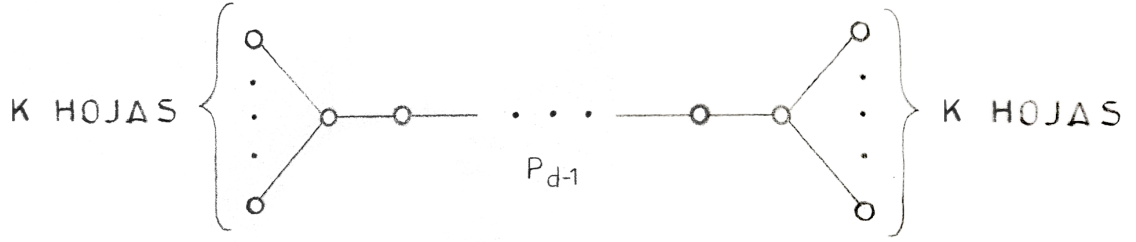


Figura 2.4: El diámetro de la gráfica de k fichas de esta gráfica alcanza la cota superior.

tienen que moverse a vértices de v , además cualquier par de vértices $x \in u$ y $y \in v$ están a distancia d , que es el diámetro de G , por lo tanto $d(u, v) = kd$. En [22] también encuentran una cota inferior para el diámetro las gráficas de fichas, la cual también es justa, esto lo demostramos a continuación.

Proposición 2.2.1. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in [\frac{n}{2}]$ y $d \in [n]$. Si G es una gráfica de orden n y diámetro d , entonces $k(d - k + 1) \leq \text{diam}(F_k G) \leq dk$. Más aún, para cualesquiera $d, k \in \mathbb{Z}^+$ existen gráficas de diámetro d cuyas gráficas de k fichas alcanzan estas cotas.

Demostración. Ya sabemos que esto es cierto para la cota superior. Para ver que $k(d - k + 1) \leq \text{diam}(F_k G)$ consideremos $x, y \in V(G)$ a distancia d y la partición de los vértices, $\{V_i\}_{i \in [0, d]}$, definida como $V_i = \{z \in V(G) : d(x, z) = i\}$, llamemos $a = \min\{m \in [0, d] : |V_0 \cup \dots \cup V_m| \geq k\}$ y $b = \max\{m \in [0, d] : |V_m \cup \dots \cup V_d| \geq k\}$.

Para acotar el diámetro de $F_k G$ es suficiente acotar inferiormente la distancia entre pares de configuraciones u y v tales que

$$\begin{aligned} V_1 \cup \dots \cup V_{a-1} &\subset u \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_{a-1} \cup V_a \text{ y} \\ V_{b-1} \cup \dots \cup V_d &\subset v \subseteq V_b \cup V_{b-1} \cup \dots \cup V_d, \end{aligned}$$

pues, por la forma en que se construyeron a y b , estas son configuraciones tales que tienen la mayor cantidad de fichas más lejos entre sí que cualquier otro par de configuraciones, y, por lo tanto, los pares de configuraciones a distancia el diámetro de $F_k G$ serán de este tipo. Por la forma en que definimos la partición $\{V_i\}_{i \in [0, d]}$ todas las aristas de G tienen extremos en vértices en la misma parte o uno en V_i y otro en V_{i+1} para $i \in [0, d-1]$, de forma que para mover una ficha de un vértice arbitrario en la configuración u a cualquier vértice en v , digamos, del vértice z al vértice z' , son

necesarios al menos $d(x, z') - d(x, z)$ movimientos. Como consecuencia, el diámetro de $F_k G$ es al menos

$$\sum_{z \in u} (d(x, z') - d(x, z)) = \sum_{z' \in v} d(x, z') - \sum_{z \in u} d(x, z).$$

La primera suma se minimiza cuando $b = d - k + 1$ y $|V_i| = 1$ para toda $i \geq b$, la segunda se maximiza cuando $a = k - 1$ y $|V_i| = 1$ para toda $i \leq a$. Por lo tanto $F_k G$ tiene diámetro al menos

$$\sum_{j=d-k+1}^d j - \sum_{i=0}^{k-1} i = k(d - k + 1).$$

Por último, notemos que, para $d, k \in \mathbb{Z}^+$, si $k \leq d + 1$, entonces P_{d+1} tiene diámetro d y $F_k P_{d+1}$ tiene diámetro $k(d - k + 1)$. ■

Otra observación importante es que para cualquier gráfica G de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x, y \in V(G)$, si P y Q son dos xy -trayectorias internamente ajenas y $u \in V(F_k G)$ con $x \in u$, entonces $\hat{P}$ y $\hat{Q}$ son dos uu' -trayectorias internamente ajenas en $F_k G$, en donde $u' = (u \setminus \{x\}) \cup \{y\}$. En efecto, si suponemos que $V(P) \cap u = V(Q) \cap u = \{x\}$ entonces los caminos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$ consisten en mover la ficha en x sobre P y Q , respectivamente, hasta y , de forma que todas las configuraciones internas de $\hat{P}$ tienen algún vértice interno de P , mientras que ninguna configuración interna de $\hat{Q}$ lo hace. En otro caso, sin pérdida de generalidad, se tiene que $|V(P) \cap u| > 1$. Entonces, suponemos que $(x_1, \dots, x_q)$ es la lista de todos los elementos de $V(P) \cap u$ ordenados de acuerdo a como los visita P . Observémos que ninguna configuración interna de $\hat{P}$ contiene a $\{x_2, \dots, x_q\}$, pues el primer movimiento de $\hat{P}$ mueve la ficha en x_q sobre P hacia y , después x_i se mueve sobre P hasta x_{i+1} para $i \in \{q-1, \dots, 1\}$, de forma que siempre habrá algún vértice de $\{x_2, \dots, x_q\}$ desocupado por alguna ficha, hasta la configuración final de $\hat{P}$, en donde la ficha que estaba en $x = x_1$ ahora ocupa x_2 . Por otro lado, como P y Q son internamente ajenas, $\hat{Q}$ no mueve ficha alguna del conjunto $\{x_2, \dots, x_q\}$ y, por lo tanto, todas sus configuraciones internas lo contienen. Esto nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Si G es una gráfica t -conexa entonces $F_k G$ es t -conexa para toda $k \in [n]$.*

Demostración. Sean G una gráfica t -conexa de orden $n \in \mathbb{Z}$ y $k \in [\frac{n}{2}]$. Si $u, v \in V(F_k G)$ y $|u \triangle v| = |\{x, y\}| = 2$ entonces, por la Proposición 1.4.4 sabemos que

existen t xy -trayectorias internamente ajenas $P_1, \dots, P_t$ en G y, por en análisis previo, $\widehat{P}_1, \dots, \widehat{P}_t$ son t uv -trayectorias internamente ajenas en $F_k G$. De otra forma, si $|u \setminus v| = |v \setminus u| > 1$, sean $u \setminus v = \{x_1, \dots, x_r\}$, $v \setminus u = \{y_1, \dots, y_r\}$, y consideremos $C \subset V(F_k G)$ un corte por vértices de $F_k G$ de cardinalidad mínima. Suponemos que u y v están en componentes conexas distintas de $F_k G - C$ y que $|u \triangle v|$ es mínima tal que esto se cumple. Definimos para $z \in V(G) \setminus (u \cup v)$ e $i \in [r]$ las configuraciones $u_{z,i} = (u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\}$ y $v_{z,i} = (v \setminus \{y_i\}) \cup \{z\}$. Notemos que para toda $i, j \in [r]$ y $z \in V(G) \setminus (u \cup v)$ se tiene que $u \triangle u_{z,i} = \{x_i, z\}$, $v \triangle v_{z,j} = \{y_j, z\}$, y $u_{z,i} \triangle v_{z,j} = (u \triangle v) \setminus \{x_i, y_j\}$. Por lo tanto si $u_{z,i}, v_{z,j} \in V(F_k G) - C$, por la minimidad de $|u \triangle v|$, se tiene que $u_{z,i}, v_{z,j}$ están en la misma componente conexa de $F_k G - C$. De la misma forma u está en la misma componente conexa que $u_{z,i}$, y v está en la misma componente conexa que $v_{z,j}$. Como ésto contradice que u y v están en componentes diferentes, entonces $\{u_{z,i} : z \in V(G) \setminus (u \cup v), i \in [r]\} \subset C$ ó $\{v_{z,j} : z \in V(G) \setminus (u \cup v), j \in [r]\} \subset C$. Ya que $|u \cup v| = k + r$, se tiene que hay al menos $r(n - k - r)$ vértices en C .

Si definimos además $u_{i,j} = (u \setminus \{x_i\}) \cup \{y_j\}$ y $v_{i,j} = (v \setminus \{y_i\}) \cup \{x_j\}$ para cualesquiera dos $i, j \in [r]$. Nuevamente, como $u \triangle u_{i,j} = \{x_i, y_j\}$ y $|v \triangle u_{i,j}| = 2(r - 1)$, por la minimidad de $|u \triangle v|$, entonces $u_{i,j} \in C$. Análogamente para $v_{i,j}$. Como existen $2r^2$ conjuntos $u_{i,j}$ y $v_{i,j}$ con $i, j \in [r]$, $r \geq 2$, y $k \leq \frac{n}{2}$, se tiene

$$|C| \geq r(n - k - r) + 2r^2 > r(n - k) \geq 2(n - k) \geq n > t.$$

Y por lo tanto $F_k G$ es t -conexa. ■

En [22] se prueba además que, si $t \geq k$ y $n \geq \frac{1}{2}kt$, entonces $F_k G$ es $k(t - k + 1)$ -conexa y se conjetura que, siempre que $t \geq k$, se tiene que $F_k G$ es $k(t - k + 1)$ -conexa. Esta conjetura fue demostrada en 2018 por Leaños y Trujillo-Negrete [37].

2.3. Fichas, diseños, y mazos

Dadas $F_r G$ y $F_k G$ gráficas de fichas, buscamos entender la relación que existe entre sus estructuras, para ello introducimos el concepto de k -**vecindad** de una configuración $u \in V(F_r G)$, que denotamos por $N_k(u)$, y se define como

$$N_k(u) = \{w \in V(F_k G) : u \subseteq w\} \text{ si } r \leq k$$

y, si $r \geq k$, entonces

$$N_k(u) = \{w \in V(F_k G) : w \subseteq u\}.$$

En el primer caso $N_k(u)$ se compone de las configuraciones de k fichas que tienen r de sus fichas “fijas” en los vértices de u , en el segundo $N_k(u)$ son las configuraciones

de k fichas que se encuentran contenidas en los r vértices de u . El siguiente resultado relaciona la gráfica inducida en $F_k G$ por el k -vecindario de una configuración de r fichas y la gráfica de $|k - r|$ fichas de una subgráfica inducida de G .

Proposición 2.3.1. *Para cualquier gráfica G de orden $n \in \mathbb{Z}^+$, cualesquiera enteros $r, k \in [n]$ y cualquier $u \in F_r G$, si $r \leq k$ entonces $[N_k(u)]_{F_k G} \cong F_{k-r}(G - u)$, y si $k \leq r$ entonces $[N_k(u)]_{F_k G} \cong F_{r-k}[u]_G$.*

Demostración. Es claro que, si $r = k$, entonces

$$F_{r-k}[u]_G \cong F_{k-r}(G - u) \cong [N_k(u)]_{F_k G} \cong K_1,$$

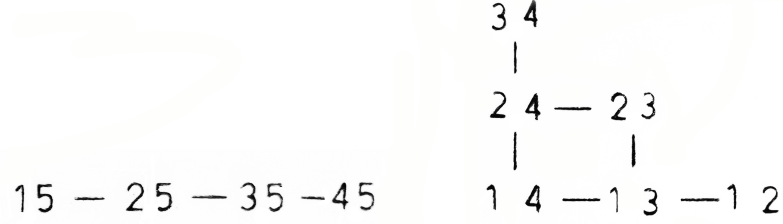
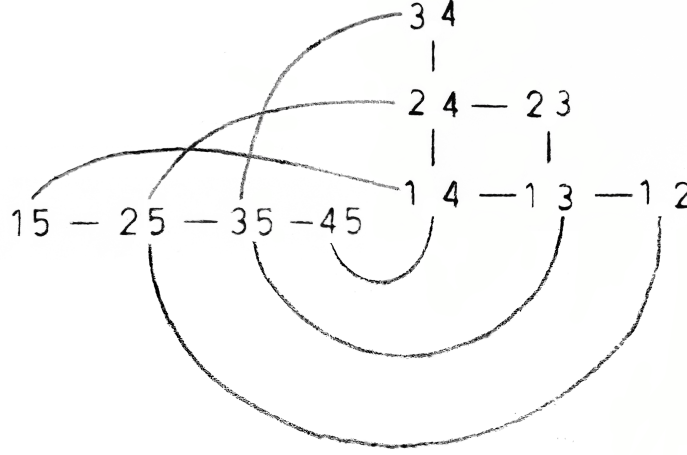
por lo tanto basta demostrar este teorema para los casos en donde las desigualdades son estrictas.

Si $r < k$ definimos la función $\psi: N_k(u) \rightarrow V(F_{k-r}(G - u))$ como $v \mapsto v \setminus u$, que es suprayectiva pues para cada $w \in V(F_{k-r}(G - u))$ existe la configuración de k fichas $v = w \cup u$, que satisface que $v \in N_k(u)$ y $\psi(v) = w$. También es inyectiva pues, si $v, v' \in N_k(u)$ son diferentes, dado que ambos contienen a u , entonces $\psi(v) = v \setminus u \neq v' \setminus u = \psi(v')$. Esto último también nos permite justificar que es un morfismo: para $v, v' \in N_k(u)$ diferentes, vv' es una arista de $F_k G$ si y solo si $v \triangle v' \in E(G)$ o, equivalentemente, $(v \setminus u) \triangle (v' \setminus u) \in E(G)$. Ya que la última expresión coincide con $\psi(v)\psi(v') \in E(F_{k-r}G)$, se concluye que ψ es un isomorfismo.

Si $k < r$, basta ver que $N_k(u) = V(F_k[u]_G)$ y por lo tanto $[N_k(u)]_{F_k G} \cong F_k[u]_G \cong F_{r-k}[u]_G$. ■

El concepto de k -vecindad nos ayuda a entender la estructura de $F_k G$ ya que nos permite dividirla en subgráficas inducidas isomorfas a gráficas de fichas de gráficas más pequeñas. Por ejemplo, para $F_2 C_5$, la 2-vecindad $N_2(\{5\})$ es la colección de todas las configuraciones de dos fichas en C_5 en las que alguna de las fichas ocupa el vértice 5. Hay cuatro de estas: $\{5, 1\}$, $\{5, 2\}$, $\{5, 3\}$ y $\{5, 4\}$. Por la Proposición 2.3.1, estas configuraciones inducen una subgráfica de $F_2 C_5$ isomorfa a $F_1(C_5 - 5) \cong P_4$ en $F_2 C_5$. El resto de los vértices de $F_2 C_5$ son aquellos que no tienen ficha alguna en el vértice 5, estas son las configuraciones de $N_2(V(C_5) \setminus \{5\})$, por lo que inducen una subgráfica de $F_2 C_5$ isomorfa a $F_2(C_5 - 5) \cong F_2 P_4$. En la Figura 2.5 vemos un diagrama de ambas subgráficas.

Para terminar de bocetar $F_2 C_5$ resta analizar las adyacencias que existen entre pares formados por configuraciones de ambas subgráficas, las cuales se corresponden con los movimientos que puede realizar la ficha posicionada en el vértice 5: hacia el vértice 4 o hacia el vértice 1. Así, conseguimos el boceto de $F_2 C_5$ que aparece en la Figura 2.6.

Figura 2.5: $N_2(\{5\})$ y $N_2(V(C_5) \setminus \{5\})$ en F_2C_5 .Figura 2.6: Boceto de F_2C_5 .

De forma semejante, las gráficas de fichas de las trayectorias se pueden dividir, recursivamente, en gráficas de fichas de trayectorias más pequeñas y con menos fichas. Veamos un ejemplo en F_3P_7 , queremos obtener una partición de las configuraciones de tres fichas en P_7 en la que cada clase esté formada por configuraciones cuya “primera ficha” está en la misma posición. Para esto definimos primero $L_1 = [N_3(\{1\})]_{F_3P_7}$, de esta manera los vértices de L_1 son las configuraciones de tres fichas en las que alguna de ellas ocupa el vértice 1. Por la Proposición 2.3.1, L_1 es una subgráfica de F_3P_7 isomorfa a $F_2(P_7 - 1)$ que, como $P_7 - 1 \cong P_6$, es isomorfa a F_2P_6 . De forma semejante, si L_2 es la gráfica

$$[N_3(\{2\})]_{F_3P_7} - N_3(\{1\}) = [N_3(\{2\})]_{F_3(P_7-1)},$$

sus vértices son las configuraciones de tres fichas en P_7 que tienen una ficha en 2

pero ninguna en 1. Utilizando nuevamente el isomorfismo entre $P_7 - 1$ y P_6 , estas configuraciones se corresponden con aquellas de F_3P_6 que tienen una ficha en el vértice inicial de la trayectoria. De nuevo, gracias a la Proposición 2.3.1 se tiene que L_2 es isomorfa a F_2P_5 . Así, si definimos

$$L_{i+1} = [N_3(\{i+1\}) \setminus \bigcup_{s=1}^i V(L_s)]_{F_3P_7} \cong [N_3(\{1\})]_{F_3P_{7-i}} \cong F_2P_{7-(i+1)}$$

para $i \in [4]$, entonces $\{V(L_i)\}_{i \in [5]}$ es una partición de $V(F_3P_7)$ y toda L_i es una subgráfica inducida de F_3P_7 isomorfa a F_2P_{7-i} . Para completar el análisis de F_3P_7 veamos que un par de configuraciones $u \in L_i$ y $v \in L_j$ con $i \neq j$, serán adyacentes si v se obtienen de mover la ficha de u en i al vértice j , es decir, si $u \triangle v = \{i, j\}$ y $ij \in E(P_7)$. Así obtenemos el boceto de F_3P_7 de la Figura 2.7.

Recursivamente, para cada L_i se pueden definir L_{ij} con $j \in [i+1, 6]$ como la subgráfica de F_3P_7 inducida por las configuraciones de tres fichas cuya primera y segunda ficha están en i y j respectivamente, de manera que $L_{ij} \cong F_1P_{7-j} \cong P_{7-j}$. En general, los vértices de F_kP_n se pueden dividir en $n-k+1$ partes ajenas $L_1, \dots, L_{n-k+1}$ de forma que $L_i \cong F_{k-1}P_{n-i}$ y dos vértices $u \in L_i$ y $v \in L_j$ son adyacentes si y solo si $j = i+1$ e $v = m_u^{ij}[u]$.

Por otro lado, resulta productivo considerar N_k como una función que a cada configuración en F_rG le asocia una colección de configuraciones en F_kG dada por $u \mapsto N_k(u)$. Para $u \in V(F_rG)$ sucede que $|N_k(u)| = \binom{n-r}{k-r}$ si $r \leq k$ y $|N_k(u)| = \binom{r}{r-k}$ si $k \leq r$, por lo tanto

$$N_k : V(F_rG) \rightarrow V(F_aF_kG)$$

con $a = \binom{n-r}{k-r}$ si $r \leq k$ y $a = \binom{r}{r-k} = \binom{r}{k}$ si $k \leq r$.

Si $r = k$, entonces $N_k : F_rG \rightarrow F_1F_kG$ es un isomorfismo pues, para toda $u \in V(F_rG)$ se tiene que $N_k(u) = \{u\}$, siendo este el isomorfismo que conocemos entre F_rG y F_1F_rG . Sin embargo, si $k \neq r$ y $\lceil \frac{r}{2} \rceil < k < \frac{n+r}{2}$, entonces N_k no es un morfismo de gráficas, más aún si $u, v \in V(F_rG)$ son diferentes entonces $N_k(u)$ y $N_k(v)$ no son adyacentes en F_aF_kG . Para ver esto notemos que, como $u \neq v$, entonces $u \setminus v$ y $v \setminus u$ son no-vacíos. Por lo tanto, si $x \in u \setminus v$, $y \in v \setminus u$ y $k < r$ podemos definir

$$S_u = \{w \cup \{x\} : w \in N_{k-1}(u \setminus \{x\})\} \text{ y } \\ S_v = \{w \cup \{y\} : w \in N_{k-1}(v \setminus \{y\})\}.$$

Se tiene entonces que $S_u \subseteq N_k(u) \setminus N_k(v)$ y $S_v \subseteq N_k(v) \setminus N_k(u)$. Como $1 \leq r$ y $\lceil \frac{r}{2} \rceil < k < r$ se sigue que $1 < k < r$ y, por lo tanto, $|S_u| = |S_v| = \binom{r-1}{k-1} > 1$, así $|N_k(u) \triangle N_k(v)| > 2$ y entonces $N_k(u) \triangle N_k(v) \notin E(F_kG)$.

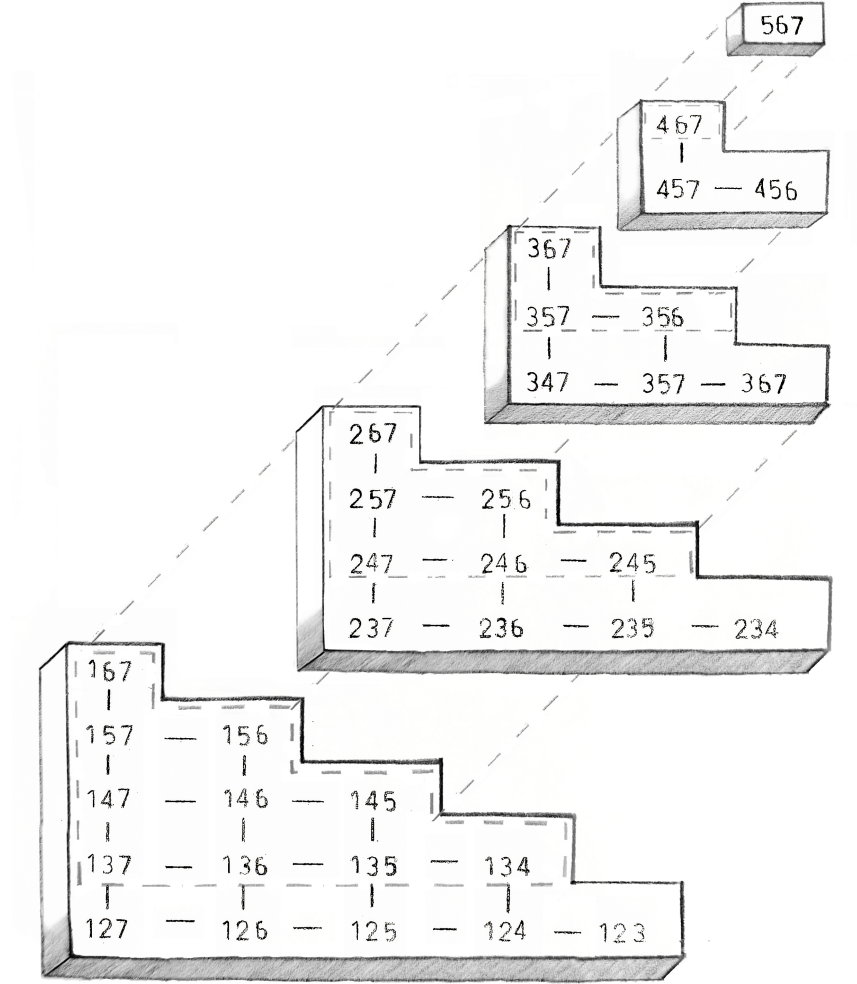


Figura 2.7: Las subgráficas L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 nos ayudan a visualizar F_3P_7 .

El caso $r < k$ se puede argumentar de forma semejante definiendo ahora

$$S_u = \{w \cup u : w \in V(F_{k-r}(G - u \cup v))\} \text{ y}$$

$$S_v = \{w \cup v : w \in V(F_{k-r}(G - u \cup v))\},$$

y viendo que, nuevamente, $S_u \subseteq N_k(u) \setminus N_k(v)$ y $S_v \subseteq N_k(v) \setminus N_k(u)$. Como $r < k < \frac{n+r}{2} < n$ se tiene que $0 < k-r < \frac{n-r}{2} < n-r$ y por lo tanto $0 < k-r < n-r-1$. Se concluye que $|S_u| = |S_v| = \binom{n-|u \cup v|}{k-r} \geq \binom{n-(r+1)}{k-r} > 1$, y así $N_k(u) \triangle N_k(v) \notin E(F_k G)$.

Obsérvese que, en el argumento anterior, si u, v son dos configuraciones de r fichas adyacentes en $F_r G$, entonces $N_k(u) \setminus N_k(v) = S_u$ y $N_k(v) \setminus N_k(u) = S_v$, más aún, en este caso existe un $S_u S_v$ -apareamiento en $F_k G$ cuya biyección subyacente es un isomorfismo entre las subgráficas de $F_k G$ inducidas por S_u y S_v . En efecto, llamando $u \setminus v = \{x\}$ y $v \setminus u = \{y\}$ para alguna $xy \in E(G)$, veamos que como $M^{xy} \in M_w$ para toda $w \in S_u$ entonces M^{xy} está definida en todo S_u y su imagen está contenida en S_v . De forma análoga, M^{yx} es una función definida en todo S_v y con imagen en S_u . Más aún, $M^{yx} = (M^{xy})^{-1}$ ya que

$$M^{yx}(M^{xy}(w)) = (((w \setminus \{x\}) \cup \{y\}) \setminus \{y\}) \cup \{x\} = w.$$

Por lo tanto, M^{xy} es una biyección que, al construirse con base en movimientos, sabemos que subyace al $S_u S_v$ -apareamiento $\{w M^{xy}(w) \in E(F_k G) : w \in S_u\}$. Finalmente, para ver que M^{xy} es un isomorfismo entre $[S_u]_{F_k G}$ y $[S_v]_{F_k G}$ veamos que, si dos configuraciones en S_u , w y w' , son adyacentes, entonces existe un movimiento $M^{zz'} \in M_w$ tal que $M^{zz'}(w) = w'$. Como $w, w' \in S_u$ entonces $\{z, z'\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, de forma que $M^{zz'} \in M_{M^{xy}(w)}$ y

$$M^{zz'}(M^{xy}(w)) = (w \setminus \{x, z\}) \cup \{y, z'\} = (w' \setminus \{x\}) \cup \{y\} = M^{xy}(w').$$

Por lo tanto $M^{xy}(w)$ y $M^{xy}(w')$ son adyacentes en $F_k G$. Para ver que la adyacencia en la gráfica $[S_v]_{F_k G}$ también implica la adyacencia en de sus preimágenes en $[S_u]_{F_k G}$ se hace el mismo argumento ahora con la función inversa $M^{yx} : S_v \rightarrow S_u$. Se concluye que $M^{xy} : [N_k(u) \setminus N_k(v)]_{F_k G} \rightarrow [N_k(v) \setminus N_k(u)]_{F_k G}$ es un isomorfismo siempre que $uv \in E(F_k G)$.

Lo anterior sugiere definir una variante de las gráficas de fichas en la que se permita mover varias fichas a la vez: para G una gráfica de orden $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in [n]$ y $l \in [k]$ definimos $P_l F_k G$, la **gráfica de k fichas con movimientos l -paralelos**, como $V(P_l F_k G) = \binom{V(G)}{k}$ y, para $u, v \in V(P_l F_k G)$ distintos, $uv \in E(P_l F_k G)$ si y solo si existe un $(u \setminus v)(v \setminus u)$ -apareamiento de cardinalidad a lo más l en G . Un ejemplo de estas gráficas se puede ver en la Figura 2.8. Entonces, si consideramos N_k como una función de $F_r G$ en $P_l F_a F_k G$ con $a = \binom{r}{k}$ y $l = \binom{r-1}{k-1}$ si $k \leq r$, o $a = \binom{n-r}{k-r}$ y $l = \binom{n-r-1}{k-r-1}$ si $r \leq k$, resulta ser un monomorfismo, por lo que $F_r G$ es una subgráfica de $P_l F_a F_k G$ que, además, es inducida. Esto lo argumentamos en la demostración de siguiente resultado.

Proposición 2.3.2. *Si G es una gráfica de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ y $r, k \in [n]$ son tales que $k \leq \frac{n}{2}$ y $\frac{r}{2} < k < \frac{n+r}{2}$ entonces*

$$N_k(F_r G) = [N_k[V(F_r G)]]_{P_l F_a F_k G} \cong F_r G,$$

con $a = \binom{r}{k}$ y $l = \binom{r-1}{k-1}$ si $k \leq r$, y $a = \binom{n-r}{k-r}$ y $l = \binom{n-r-1}{k-r-1}$ si $r \leq k$.

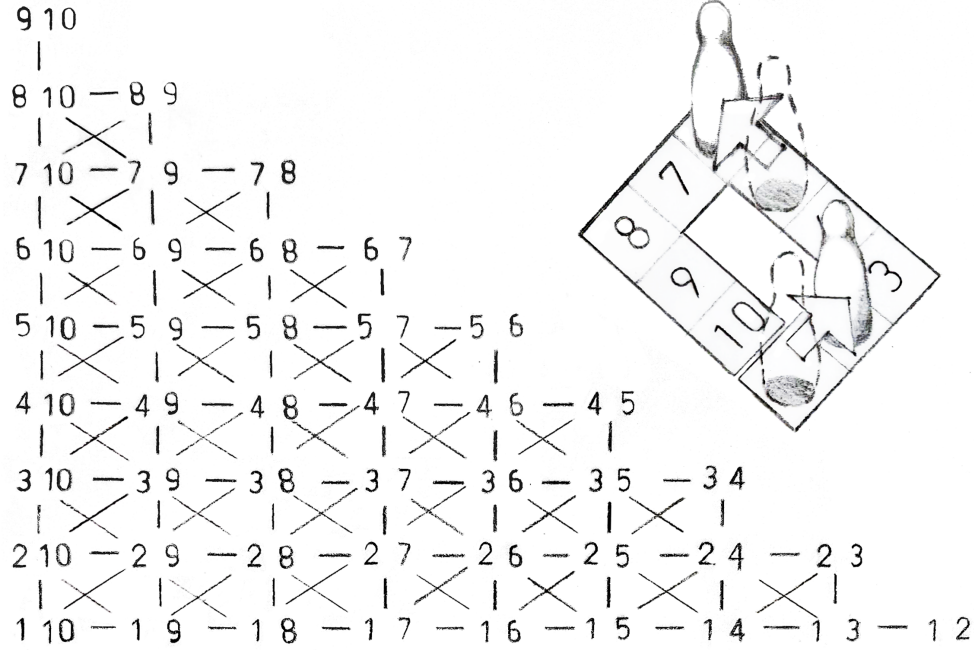


Figura 2.8: Gráfica de 2 fichas con movimientos 2-paralelos de P_{10} y el tablero que modela.

Demostración. Primero notemos que el caso $r = k$ es inmediato, por lo que solo analizaremos los casos donde r y k no son iguales, y que la condición $\frac{r}{2} < k < \frac{n+r}{2}$ se pide para que, cuando $k \leq r$, entonces $r - k < r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$, lo que asegura que la cantidad de fichas en $[u]_G$ no excede la mitad de los vértices. De la misma forma cuando $r \leq k$, se tiene que $k - r < \frac{n-r}{2}$, asegurando que la cantidad de fichas en $G - u$ no excede la mitad de los vértices. Por supuesto, esta hipótesis no pierde generalidad ya que, como discutimos al inicio de este capítulo, todas las gráficas de fichas son isomorfas a una gráfica de fichas con a lo más tantas fichas como la mitad de los vértices.

Para el caso $k < r$ supongamos que a y l son como en el enunciado, por la Proposición 2.3.1 sabemos que $N_k : V(F_r G) \rightarrow V(P_l F_a F_k G)$ es inyectiva, ahora veamos que es morfismo: si $u, v \in V(F_r G)$ son adyacentes entonces $u = I \cup \{x\}$ y

$v = I \cup \{y\}$ con $I = u \cap v$ y $xy \in E(G)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} N_k(u) &= \{w \in N_k(u) : x \in w\} \cup \{w \in N_k(u) : x \notin w\} \\ &= \{w \cup \{x\} : w \in V(F_{k-1}I)\} \cup N_k(I), \text{ y} \\ N_k(v) &= \{w \in N_k(v) : y \in w\} \cup \{w \in N_k(v) : y \notin w\} \\ &= \{w \cup \{y\} : w \in V(F_{k-1}I)\} \cup N_k(I). \end{aligned}$$

De manera que $|N_k(u) \triangle N_k(v)| = 2|F_{k-1}I| = 2\binom{r-1}{k-1} = 2l$, para ver que hay un emparejamiento de $N_k(u) \setminus N_k(v)$ y $N_k(v) \setminus N_k(u)$ hay que notar que las configuraciones del primero son de la forma $w \cup \{x\}$ con $w \in V(F_k I)$ y se pueden hacer corresponder biyectivamente con las configuraciones $w \cup \{y\} \in N_k(v) \setminus N_k(u)$, estas parejas de configuraciones siempre son adyacentes y por lo tanto $N_k(u)N_k(v) \in E(P_l F_a F_k G)$.

Para ver que es un isomorfismo consideremos $u, v \in V(F_r G)$ diferentes tales que $N_k(u)N_k(v) \in E(P_l F_a F_k G)$, como u y v son diferentes $|N_k(u) \triangle N_k(v)| \geq 2\binom{r-1}{k-1} = 2l$, sin embargo, ya que estas dos k -vecindades son adyacentes moviendo a lo más l fichas, necesariamente $|N_k(u) \triangle N_k(v)| = 2l$.

Si existieran $x_1, x_2 \in u \setminus v$ diferentes, entonces existirían $y_1, y_2 \in v \setminus u$ diferentes, si $R = [u \setminus \{x_1, x_2\}]_G$ entonces

$$\begin{aligned} N_k(u) &= V(F_k R) \cup \{w \cup \{x_1\} : w \in V(F_{k-1} R)\} \\ &\quad \cup \{w \cup \{x_2\} : w \in V(F_{k-1} R)\} \\ &\quad \cup \{w \cup \{x_1, x_2\} : w \in V(F_{k-2} R)\}, \end{aligned}$$

y análogamente para v . Por lo tanto, $|N_k(u) \triangle N_k(v)| \geq 2(2\binom{r-2}{k-1} + \binom{r-2}{k-2})$, por la Regla de Pascal, $\binom{r-2}{k-1} + \binom{r-2}{k-2} = \binom{r-1}{k-1} = l$, por lo tanto $|N_k(u) \triangle N_k(v)| \geq 2(l + \binom{r-2}{k-1}) > 2l$, lo que es una contradicción. Así podemos afirmar que $u = I \cup \{x\}$ y $v = I \cup \{y\}$ con $I = u \cap v$, resta ver que $xy \in E(G)$, y esto es así ya que para cualesquiera $z \in N_k(u) \setminus N_k(v)$ y $z' \in N_k(v) \setminus N_k(u)$, se cumple que $\{x, y\} \subset z \triangle z'$, como ya sabemos que N_k es morfismo, si existen u y v adyacentes en $F_r G$, es necesario que xy sea una arista de G .

El caso $r < k$ se argumenta de forma similar, para ver que es morfismo se observa que para $u, v \in V(F_r G)$ diferentes y adyacentes, si $S = G - (u \cup v)$, $u \setminus v = \{x\}$ y $v \setminus u = \{y\}$, entonces

$$\begin{aligned} N_k(u) &= \{w \in N_k(u) : y \in w\} \cup \{w \in N_k(u) : y \notin w\} \\ &= N_k(u \cup v) \cup \{w \cup u : w \in V(F_{k-r}(G - u \cup v))\}, \text{ y} \\ N_k(v) &= \{w \in N_k(v) : x \in w\} \cup \{w \in N_k(v) : x \notin w\} \\ &= N_k(u \cup v) \cup \{w \cup v : w \in V(F_{k-r}(G - u \cup v))\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|N_k(u) \triangle N_k(v)| = 2|F_{k-1}S| = 2\binom{n-r-1}{k-r} = 2l$, y el emparejamiento de los elementos de la forma $w \cup \{y\} \in N_k(u) \setminus N_k(v)$ con $w \cup \{y\} \in N_k(v) \setminus N_k(u)$ justifican que $N_k(u)N_k(v) \in E(P_l F_a F_k G)$.

Si ahora suponemos que $u, v \in V(F_r G)$ son diferentes y tales que $N_k(u)N_k(v) \in E(P_l F_a F_k G)$, como sabemos que $|N_k(u) \triangle N_k(v)| = 2l$ se puede argumentar de forma muy semejante al caso anterior que $u = I \cup \{x\}$ y $v = I \cup \{y\}$ con $I = u \cap v$. Nuevamente el hecho de que N_k es un morfismo nos permite concluir que $xy \in E(G)$. ■

Naturalmente, si $F_k G$ es una gráfica de fichas, $l \in [k]$, y $u \in V(F_k G)$, definimos un **movimiento l -paralelo de u** , o simplemente un **movimiento paralelo**, como una función $M : u \rightarrow V(G)$ tal que $|\text{sop}(M)| \leq l$ y $\{xM(x) \in E(G) : x \in \text{sop}(M)\}$ es un $u(V(G) \setminus u)$ -apareamiento. El término paralelo se explica si recordamos que decimos que dos líneas son paralelas cuando no inciden en un punto común, por lo que un apareamiento no es otra cosa que una colección de líneas de G paralelas por pares. Además, un movimiento 1-paralelo de u coincide con la de un movimiento usual de u en $F_k G$, por lo que la noción de movimiento paralelo generaliza la de movimiento. Denotamos $P_l M_u$ al conjunto de todos los movimientos l -paralelos de u . Observemos que a un movimiento l -paralelo M , a diferencia de un movimiento usual, no es posible describirlo con una notación semejante a M^{xy} , ya que ahora son varias fichas las que se mueven y, aún si damos los conjuntos $A = \text{sop}(M)$ y $B = M[\text{sop}(M)]$, no es necesariamente cierto que existe un único AB -apareamiento. Sin embargo, tras un poco de reflexión, el lector podrá convencerse de que, si la gráfica G tiene cuello mayor que $2l$, entonces de existir un emparejamiento entre A y B , dos conjuntos de cardinalidad a lo más l , debe ser único. De forma que, en este caso, los movimientos l -paralelos son susceptibles no solo de la notación M^{AB} , sino de un análisis semejante al que realizamos en $F_k G$ para encontrar una biyección entre los caminos de $F_k G$ y parejas de ciertas palabras de movimientos (en este caso, los movimientos serán de configuraciones $w \in N_r(u)$ con $r \in [l]$) y sus configuraciones iniciales. Sin embargo, en este texto no emprendemos esta dirección de investigación y nos conformamos con apoyarnos en la noción de movimiento l -paralelo para entender a $P_l F_k G$ como la gráfica cuyos vértices son las configuraciones de k fichas en los vértices de G y en donde dos de ellas son adyacentes si es posible mover a lo más l fichas “simultáneamente” a lo largo de un $u(V(G) \setminus u)$ -apareamiento.

Obsérvese que, por la Proposición 2.3.1, si $|k - r| = 1$ entonces $N_k(u) \cong G - u$ o $N_k(u) \cong [u]_G$, por lo que $N_k[V(F_r G)]$ se puede entender como la colección de todas las subgráficas inducidas de cierto tamaño ($n - r$ ó r) de G . En particular, si $r = 1$ y $k = 2$, entonces $\{N_k(\{x\}) : x \in V(G)\}$ es el mazo de G y, como en este caso $l = \binom{n-r-1}{k-r} = \binom{n-2}{1} = n - 2$, la Proposición 2.3.2 nos asegura que las cartas

de G se pueden encontrar como subgráficas inducidas en F_2G cuyos conjuntos de vértices son configuraciones de $n - 1$ fichas en F_2G que inducen una gráfica isomorfa a G en $P_{n-2}F_{n-1}F_2G$. Se tiene que cualesquiera dos de estas cartas, $[N_2(\{x\})]_{F_2G}$ y $[N_2(\{y\})]_{F_2G}$ para $x, y \in V(G)$, se intersectan en exactamente un vértice de F_2G , a saber $N_2(\{x\}) \cap N_2(\{y\}) = \{\{x, y\}\}$. Es decir que, como entre cualesquiera dos cartas existe una única configuración de F_2G que está en ambas, para cada configuración de F_2G existen exactamente dos cartas que le contienen, y hay n cartas, entonces $(\{N_2(\{x\})\}, V(F_2G))$ es una estructura de incidencia $S_1(2, 2, n)$. Así, toda gráfica de dos fichas admite que su conjunto de vértices sea las líneas de un conjunto un sistema de incidencia así. Además, el conjunto de aristas con extremos en $S_x = N_2(\{x\}) \setminus N_2(\{y\})$ y $S_y = N_2(\{y\}) \setminus N_2(\{x\})$, como ya vimos, contiene un $S_x S_y$ -apareamiento asociado a M^{xy} si $xy \in E(G)$; sucede que, si $xy \in E(G)$, estas son todas las $S_x S_y$ -aristas y, si $xy \notin E(G)$, entonces $E(S_x, S_y) = \emptyset$. Como consecuencia, si $E(S_x, S_y) \neq \emptyset$ entonces $xy \in E(G)$, de forma que, para todo $z \in V(G) \setminus \{x, y\}$, se tiene que $\{x, z\}\{y, z\} \in E(S_x, S_y)$ y, además, es la única arista de $E(N_2(\{z\}))$ que está en $E(S_x, S_y)$. Se sigue que $\{E(S_x, S_y) \cap E(N_2(\{z\}))\}_{z \in V(G) \setminus \{x, y\}}$ es una partición de $E(S_x, S_y)$. Todavía más, como el hecho de que dos configuraciones de dos fichas, u y v , sean adyacentes implica que $u \cap v \neq \emptyset$, entonces de hecho toda arista de F_2G es de la forma $\{x, z\}\{y, z\}$ para alguna $z \in V(G)$ y $xy \in E(G)$, por lo que toda arista está en $E(S_x, S_y)$ para una y solo una arista $xy \in E(G)$. De forma que $\{E(S_x, S_y)\}_{xy \in E(G)}$ es también una partición de $E(F_2G)$. Veremos que, como consecuencia de la Proposición 2.3.2, la existencia de una estructura de incidencia cuyas líneas son los vértices de una gráfica H que cumpla todo lo anterior implica que $H \cong F_2G$. Es decir que estas propiedades determinan únicamente a la gráfica de dos fichas de G . Este resultado se puede extender para dar una caracterización de F_kG . Para argumentar esto, introducimos la noción de un **sistema de incidencia no-degenerado**, el cual es un sistema de incidencia en donde no existen dos puntos p y q tales que $(p) = (q)$. En una geometría así, es posible identificar a cada punto X con la colección de líneas con las que incide y tomar la incidencia inducida por la pertenencia. Todas las estructuras con las que trabajamos en este argumento son no-degeneradas, por lo que siempre suponemos que son pares (P, L) tales que $P \subseteq \mathcal{P}(L)$. Además, a lo largo del siguiente argumento denotamos, para $X, Y \subseteq V(H)$ para alguna gráfica H ,

$$E_H(X \setminus Y, Y \setminus X) = S(X, Y).$$

Teorema 2.3.3. *Sean G y H dos gráficas, con G de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in [n]$, entonces $H \cong F_kG$ si y sólo si $V(H)$ admite ser el conjunto de líneas de un $k - (1, k, n)$ -diseño*

$(P, V(H))$ tal que

$$E(H) = \bigcup_{\{X,Y\} \in \binom{P}{2}} S(X, Y) \text{ y}$$

$\{S(X, Y) \cap E([W])_H : W \in \binom{P \setminus \{X,Y\}}{k-1}\}$ es una partición de $S(X, Y)$ para cualesquiera dos $X, Y \in P$ que satisfacen $S(X, Y) \neq \emptyset$.

Demostración. Suponemos $H = F_k G$ y verificaremos que la familia $P = \{N_k(\{x\})\}_{x \in V(G)}$ forma un conjunto de puntos tal que la estructura de incidencia $(P, V(F_k G))$ es un diseño como lo buscamos. Notemos que esto no pierde generalidad ya que, si $H \cong F_k G$, existe $f : F_k G \rightarrow H$ un isomorfismo, de forma que $P' = \{f[X]\}_{X \in P}$ es un conjunto de puntos de la estructura de incidencia $(P', V(H))$ que es un diseño como lo buscamos siempre que $(P, V(F_k G))$ lo sea. Recordemos que, para mostrar que $(P, V(F_k G))$ es un $k - (1, k, n)$ -diseño debemos ver que para cualesquiera k puntos $N_k(\{x_1\}), \dots, N_k(\{x_k\}) \in P$ existe una única línea $u \in V(F_k G)$ tal que $u \in \bigcap_{i \in [k]} N_k(\{x_i\})$. Conviene observar que, para todo $w \subseteq V(G)$ con $|w| \leq k$, se cumple que

$$\bigcap_{z \in w} N_k(\{z\}) = N_k(w),$$

de forma que la existencia de la línea u que buscamos es equivalente a que u sea la configuración $\{x_1, \dots, x_k\}$. Además, cualquier línea $u = \{x_1, \dots, x_k\} \in V(F_k G)$ incide con exactamente k puntos, a saber, $N_k(\{x_1\}), \dots, N_k(\{x_k\})$. Por último, es claro que hay n puntos, uno por cada $x \in V(G)$, de manera que en efecto se trata de un $k - (1, k, n)$ -diseño.

Ahora vemos que $E(F_k G) = \bigcup_{\{X,Y\} \in \binom{P}{2}} S(X, Y)$ ya que, si $uv \in E(F_k G)$, entonces $u \triangle v = \{x, y\} \in E(G)$, por lo que $u \in N_k(\{x\}) \setminus N_k(\{y\})$ y $v \in N_k(\{y\}) \setminus N_k(\{x\})$, lo que implica que $uv \in S(N_k(\{x\}), N_k(\{y\}))$. Por otro lado, si $S(N_k(\{x\}), N_k(\{y\})) \neq \emptyset$, entonces existen $u \in N_k(\{x\}) \setminus N_k(\{y\})$ y $v \in N_k(\{x\}) \setminus N_k(\{y\})$ tales que $u \triangle v \in E(G)$. Pero, como $\{x, y\} \subseteq u \triangle v \in E(G)$, entonces $u \triangle v = \{x, y\}$ y $xy \in E(G)$. Se sigue que $u \cap v \in \binom{V(G) \setminus \{x,y\}}{k-1}$ y, por lo tanto, $u, v \in N_k(\{z\})$ para toda $z \in u \cap v$, con lo que se deduce que

$$uv \in S(N_k(\{x\}), N_k(\{y\})) \cap E\left(\bigcap_{z \in u \cap v} N_k(\{z\})\right) = S(N_k(\{x\}), N_k(\{y\})) \cap N_k(u \cap v).$$

En general, si $xy \in E(G)$, entonces el conjunto $S(N_k(\{x\}), N_k(\{y\})) \cap E(N_k(w))$, para algún $w \in \binom{V(H) \setminus \{x,y\}}{k-1}$, es el unitario formado por la arista $(w \cup \{x\})(w \cup \{y\}) \in E(F_k G)$. Así que la familia formada por estos conjuntos es una partición de $S(N_k(\{x\}), N_k(\{y\}))$.

Ahora, suponemos que existe $(P, V(H))$ un $k - (1, k, n)$ -diseño que satisface las hipótesis para alguna gráfica H . Definimos una gráfica G con conjunto de vértices P y en donde dos vértices, X y Y , son adyacentes si y sólo si $S(X, Y) \neq \emptyset$. Afir-
mamos que $H \cong F_k G$. Para ello definimos la correspondencia $f: V(H) \rightarrow V(F_k G)$ dada por $u \mapsto (u)$. Como $(P, V(H))$ es un $k - (1, k, n)$ -diseño, se tiene que f en efecto tiene contradominio en $V(F_k G)$, ya que toda línea incide con exactamente k puntos, y, como por cualesquiera k puntos $X_1, \dots, X_k \in P$ existe una única línea $u \in V(H)$ tal que $f(u) = \{X_1, \dots, X_k\}$, entonces f es una biyección. Ahora veremos que es un isomorfismo. Si u y v son dos vértices de H adyacentes, entonces, como $E(H) = \bigcup_{\{X, Y\} \in \binom{P}{2}} S(X, Y)$, existen dos X y Y en P tales que $uv \in S(X, Y)$. Luego $\{S(X, Y) \cap E([Z])_H : Z \in \binom{P \setminus \{X, Y\}}{k-1}\}$ es una partición de $S(X, Y)$, por lo que existe $W \in \binom{P \setminus \{X, Y\}}{k-1}$ tal que $uv \in E((W))$. Si $W = \{X_1, \dots, X_{k-1}\}$, entonces, como sin pérdida de la generalidad $u \in X \setminus Y$ y $v \in Y \setminus X$, se concluye que

$$\begin{aligned} f(u) &= \{X_1, \dots, X_{k-1}, X\} \text{ y} \\ f(v) &= \{X_1, \dots, X_{k-1}, Y\}. \end{aligned}$$

De forma que $f(u) \triangle f(v) = \{X, Y\}$ y, como $uv \in S(X, Y)$, entonces $XY \in E(G)$. Por lo tanto, si $uv \in E(H)$ entonces $f(u)f(v) \in E(F_k G)$. Ahora, si $f(u)f(v) \in E(F_k G)$ para algunos $u, v \in V(H)$, entonces, de forma muy semejante, $f(u) = \{X_1, \dots, X_{k-1}, X\}$ y $f(v) = \{X_1, \dots, X_{k-1}, Y\}$ con $XY \in E(G)$. Se sigue que $S(X, Y) \neq \emptyset$ y así que, como $W = \{X_1, \dots, X_k\} \in \binom{P \setminus \{X, Y\}}{k-1}$, se tiene que

$$S(X, Y) \cap E((W)) \neq \emptyset.$$

Es decir que existe una arista entre dos vértices de H que inciden con todos los puntos de W y uno de ellos con x y otro con y . Es decir, que la arista tiene por extremos a los únicos vértices que inciden con los k puntos $X_1, \dots, X_{k-1}, X$ y $X_1, \dots, X_{k-1}, Y$. Como la geometría es un $k - (1, k, n)$ -diseño, estos vértices son únicos y, por lo tanto, $uv \in E(H)$. Se concluye que f es un isomorfismo de H en $F_k G$. ■

Inspirados por este resultado, si H es una gráfica y P es una colección de subconjuntos de vértices de H tal que $(P, V(H))$ satisface las hipótesis del Teorema 2.3.3 para algunas $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \llbracket u \rrbracket$, le decimos una **estructura de k fichas** de H . Observemos que, por el Teorema 2.3.3 y la Proposición 2.3.2, las gráficas inducidas en H por los elementos de una estructura de k fichas en H son isomorfas a $F_{k-1}(G - x)$, con G la gráfica construída en el Teorema 2.3.3 tal que $H \cong F_k G$. Es decir, son las gráficas de $k - 1$ fichas de las cartas de G . Definimos entonces, el **k -mazo** de una gráfica G con al menos $k + 1$ vértices, como

$$D_k G = \{F_k(G - x) : x \in V(G)\}.$$

A sus elementos, naturalmente, les decimos las k -cartas de G . Es claro que, el concepto de 1-mazo coincide con el de mazo ya que $F_1G \cong G$ para toda gráfica. Por lo anterior se tiene la siguiente consecuencia de la Proposición 2.3.2 y el Teorema 2.3.3.

Corolario 2.3.4. *Una familia de gráficas $D = \{H_1, \dots, H_n\}$ es un k -mazo si y sólo si existe una gráfica H que admite una estructura de $k + 1$ fichas $P = \{X_1, \dots, X_n\}$ tal que $[X_i]_H \cong H_i$ para toda $i \in [n]$.*

Demostración. La Proposición 2.3.2 y el Teorema 2.3.3 muestran que todo k -mazo de una gráfica G satisface el enunciado ya que $\{N_{k+1}(\{x\})\}_{x \in V(G)}$ es una estructura de $k + 1$ fichas en $H = F_{k+1}G$ tal que $[N_{k+1}(\{x\})]_{F_{k+1}G} \cong F_k(G - x)$ para cada $x \in V(G)$.

Por otro lado, si $\{H_1, \dots, H_n\}$ es una familia de gráficas para la cual existe una gráfica H que admite una estructura de k fichas $P = \{X_1, \dots, X_n\}$ tal que $[X_i]_H \cong H_i$ entonces se tiene que $X_i = N_{k+1}(\{X_i\})$ con $X_i \in V(G)$ para G la gráfica construida en la demostración del Teorema 2.3.3, cuyo conjunto de vértices es P y que cumple $H \cong F_{k+1}G$. Por lo tanto, por la Proposición 2.3.2 se concluye que $H_i \cong [X_i]_H \cong [N_{k+1}(\{X_i\})]_{F_{k+1}G} \cong F_k(G - X_i)$ para cada $X_i \in V(G)$. ■

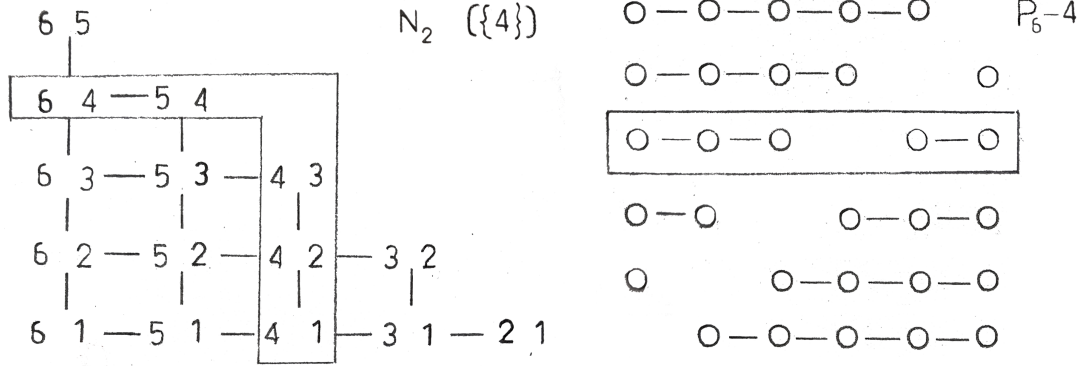


Figura 2.9: Estructura de 2 fichas formada por las 2-vecindades de F_2P_8 y el 1-mazo asociado.

Para concluir esta sección, observemos que, si existieran dos gráficas de $k > 1$ fichas F_kG y F_kH tales que $F_kG \cong F_kH$ entonces la existencia de un isomorfismo $f: F_kG \rightarrow F_kH$ implica que toda estructura de k fichas de F_kG es también una

estructura de k fichas en $F_k H$. En [22] se conjetura que, si $F_k G \cong F_k H$, entonces $G \cong H$, de ser cierta esta afirmación se tendría que cualesquiera dos estructuras de k fichas en la misma gráfica tendrían asociado el mismo $(k - 1)$ -mazo. Proponemos que, recíprocamente, para cada $(k - 1)$ -mazo existe una única gráfica que admite una estructura de k fichas que da lugar a él y que, por lo tanto, es equivalente que dos gráficas tengan el mismo $(k - 1)$ -mazo es a que tengan la misma gráfica de k fichas.

Conjetura 2.3.5. Sean G y H gráficas de orden n con $n \geq 3$ y $k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, entonces $F_k G \cong F_k H$ si y sólo si existe una biyección $r: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $F_{k-1}(G - x) \cong F_{k-1}(H - r(x))$ para toda $x \in V(G)$.

2.4. Gráfica de fichas etiquetadas

La forma en que hemos definido las gráficas de fichas modela una situación en la que las fichas son idénticas, esto ya que las configuraciones de fichas son conjuntos de vértices y, por lo tanto, la única forma de referirse a una de ellas es mediante el vértice en el que se encuentra. Sin embargo, gracias a la noción de movimiento, si es posible alcanzar una configuración v a partir de otra u con la sucesión de movimientos $m^{x_1 y_1} \dots m^{x_t y_t}$, entonces la función $M^{x_t y_t} \circ \dots \circ M^{x_1 y_1}: u \rightarrow v$ es una biyección que asigna a cada ficha $x \in u$ una única ficha $y \in v$, de forma que la ficha de u que estaba en el vértice x ocupa el vértice y de la configuración v después de dicha sucesión de movimientos. En cambio, si no quisiéramos registrar todos los movimientos que realizamos, una alternativa para saber qué ficha de u termina algún vértice de v es marcar las fichas con símbolos diferentes antes de realizar la sucesión de movimientos, de esta forma podríamos relacionar una ficha en una configuración con la única ficha de la otra configuración que tiene la misma marca. Notemos que, de hacer esto, ya no podríamos identificar la posición de las fichas con el conjunto de vértices que ocupan, ya que ahora que las fichas están marcadas, podemos diferenciar entre todas las formas en que los símbolos se pueden asignar a las fichas de una misma configuración. Esta discusión nos invita a considerar otra variante de las gráficas de fichas en donde este sea el caso. Esta idea surge naturalmente al considerar el popular rompecabezas 15-*puzzle*, para jugarlo se necesitan quince fichas enumeradas del uno al quince y un tablero semejante a uno de ajedrez con cuatro casillas por lado. El juego consiste en colocar las fichas en las casillas, dejando la casilla de la esquina inferior derecha desocupada, e intentar manipularlas, deslizando una a la vez a una casilla adyacente desocupada, hasta lograr posicionar las fichas como se muestra en la Figura 2.10. A principios de 1880, Johnson y Story [33] mostraron que es posible ordenar las fichas como lo indica el juego solo si la posición inicial de las

fichas es una permutación par de la configuración de la Figura 2.10. En 1974, Wilson [54] generalizó este resultado planteando el juego en cualquier tablero cuya gráfica subyacente es 2-conexa, de orden n , y hay $n - 1$ fichas etiquetadas en él. Mostró que el comportamiento del rompecabezas depende de si la gráfica es bipartita. Si lo es, solo se pueden obtener las permutaciones pares, en otro caso, es posible conseguir las todas. Una década más tarde, Kornhauser [35] generalizó el juego al caso cuando el tablero es cualquier gráfica y hay cualquier cantidad de fichas menor que su orden, además dio un criterio para saber cuando es posible llevar las fichas de una configuración etiquetada a otra. Bajo una definición apropiada de la gráfica cuyos vértices son las

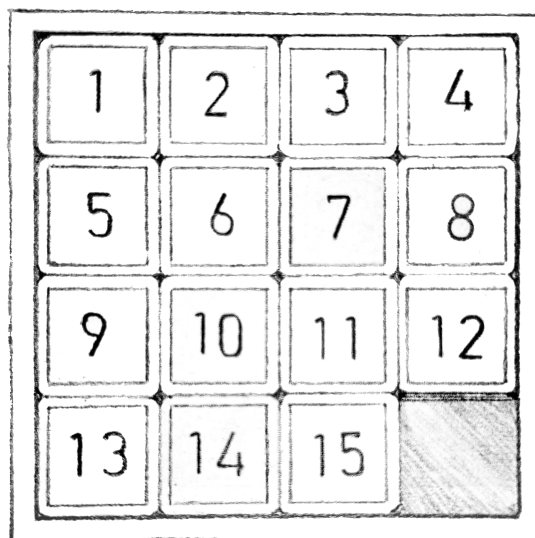


Figura 2.10: La configuración ganadora del 15-*puzzle*.

posibles maneras de posicionar fichas etiquetadas en un tablero, lo anterior intenta dar solución al problema de decisión sobre cuando dos de ellas están en la misma componente conexa. En esta sección desarrollaremos estos resultados bajo nuestro marco de trabajo, basado en la idea de los movimientos de fichas, lo que no solo nos permitirá demostrar de forma sencilla la solución al caso más general del 15-*puzzle*, sino que además veremos que, gracias a la existencia del movimiento subyacente de cualquier camino en $F_k G$, estos resultados son válidos incluso cuando las fichas no tienen etiquetas. Así obtendremos una interesante propiedad de $F_k G$ en términos de un grupo cociente del grupo de caminos cerrados simplificados basados en u para cualquier $u \in V(F_k G)$, la cual podrá entenderse como una “etiquetación intrínseca” de las fichas en $F_k G$.

Sea G es una gráfica de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in [n]$, definimos la **gráfica de k fichas etiquetadas**, denotada F_k^*G , como

$$F_k^*G = [\{(x_1, \dots, x_k) \in V(G)^k : x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}]_{G \square k}.$$

La definición del producto caja asegura que los vértices de esta gráfica, a los que llamamos **configuraciones etiquetadas**, se pueden interpretar como las posiciones de k fichas en vértices diferentes de G , y dos configuraciones etiquetadas son adyacentes si una se puede obtener de la otra mediante el movimiento de una ficha a lo largo de una arista de G . El ordenamiento de las listas es información adicional que distingue a los vértices de la configuración de acuerdo a la entrada de la lista en la que aparecen, es decir, el contenido de la i -ésima entrada se puede entender como la casilla que ocupa la ficha marcada con la i -ésima etiqueta. Para el caso en que hay $n - 1$ fichas en una gráfica de orden n , Wilson define una configuración etiquetada en ella como una función biyectiva de $V(G)$ en $\{1, \dots, n - 1, \emptyset\}$ y dos de ellas, f y g , son adyacentes si existe una transposición $(xy) \in S_{V(G)}$ con $xy \in E(G)$, $f(x) = \emptyset$ y $g = f \circ (xy)$, es decir, el vacío se mueve a un espacio adyacente. Ambas definiciones son equivalentes por el isomorfismo $f \mapsto (f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(n - 1))$. Al definir las configuraciones etiquetadas con base en el producto caja, éstas son funciones biyectivas de $\{1, \dots, k\}$ en $V(G)$, lo que nos permite considerar una menor cantidad de fichas sin agregar elementos al contradominio que denoten espacios vacíos, lo que complicaría el lenguaje al considerar cualquier cantidad de fichas, distinta de $n - 1$.

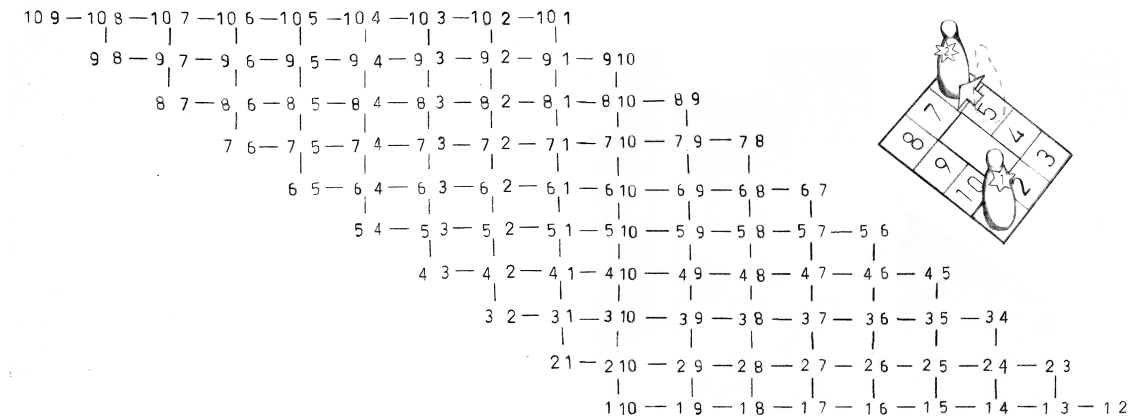


Figura 2.11: La gráfica $F_2^*C_8$ y el tablero que modela.

Definimos $\Lambda: V(F_k^*G) \rightarrow V(F_kG)$ como $\Lambda(x_1, \dots, x_k) = \{x_1, \dots, x_k\}$, esta función es un morfismo pues, para dos configuraciones etiquetadas $\hat{u} = (x_1, \dots, x_k)$ y

$\hat{v} = (y_1, \dots, y_k)$ adyacentes, existe una única $j \in [k]$ tal que $x_j \neq y_j$ y además $x_j y_j \in E(G)$, de forma que $\Lambda(\hat{u}) \Delta \Lambda(\hat{v}) = \{x_j, y_j\} \in E(G)$. Sin embargo, a menos que k sea uno, Λ no es un isomorfismo, esto es fácil de verificar pues cada forma posible de enlistar los vértices de una configuración u se corresponde con una configuración etiquetada cuya imagen bajo Λ es u . Nos referimos a $\Lambda^{-1}[\{u\}]$ como el conjunto de etiquetados de u y a uno de sus elementos como un **etiquetado** de u . A pesar de que Λ no es un isomorfismo, si consideramos dos configuraciones u y v adyacentes en $F_k G$ y $\hat{u} = (x_1, \dots, x_k)$ un etiquetado de u , entonces existe un único etiquetado de v adyacente a $\hat{u}$. Esto es decir que, como los vecinos de $\Lambda(\hat{u})$ están en biyección con los movimientos de $\Lambda(\hat{u})$, entonces los vecinos de una configuración etiquetada $\hat{u}$ en $F_k^* G$ están en biyección con los movimientos $m^{xy} \in M_{\Lambda(\hat{u})}$, ya que para cada movimiento así existe un único vecino de $\hat{u}$ dado por $M^{xy} \circ \hat{u}$. Por esto, decimos que las fichas de $\Lambda(\hat{u})$ son también fichas de $\hat{u}$ y que los movimientos de $\Lambda(\hat{u})$ son los movimientos de $\hat{u}$. Esta terminología no ocasiona conflictos ya que, intuitivamente, para efectos de los movimientos que es válido realizar en un tablero, es lo mismo jugar con fichas idénticas o con fichas etiquetadas; la única diferencia entre los movimientos de configuraciones y de configuraciones etiquetadas se encuentra en formalismo de tomar la composición de una configuración etiquetada $\hat{u}: [k] \rightarrow V(G)$ con el movimiento, en lugar de la imagen directa de un conjunto de vértices de G , para obtener el resultado de realizar ese movimiento. Para justificar cuidadosamente lo anterior, definimos un **isomorfismo local**, de una gráfica G en otra gráfica H , como un morfismo $f: G \rightarrow H$ tal que para cada $x \in V(G)$ la restricción de f a la vecindad x es un isomorfismo de gráficas, es decir, si

$$f|_{N(x)}: [N(x)]_G \rightarrow [N(f(x))]_H$$

es un isomorfismo para toda $x \in V(G)$. Se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.4.1. *Si G es una gráfica de orden n , con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in [n]$, entonces $\Lambda: F_k^* G \rightarrow F_k G$ es un isomorfismo local.*

Demostración. Sea $\hat{u} = (x_1, \dots, x_k) \in V(F_k^* G)$ y denotemos $u = \Lambda(\hat{u})$, mostraremos que $\Lambda|_{N(\hat{u})}$ es un isomorfismo entre $[N(\hat{u})]_{F_k^* G}$ y $[N(u)]_{F_k G}$. Primero veamos que $N(u) \subset \Lambda[N(\hat{u})]$, para ello tomamos cualquier $v \in N(u)$ y suponemos que $v \neq u$. Es claro que, si $u \in \Lambda[N(\hat{u})]$, entonces $u \setminus v = \{x_i\}$ y $v \setminus u = \{y\}$ con $x_i y \in E(G)$, de forma que $M^{x_i y} \circ \hat{u} = (x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k)$ es un etiquetado de v adyacente a $\hat{u}$, lo que necesitábamos exhibir.

Para ver que es inyectiva e isomorfismo consideremos $\hat{v}_1 = (y_1, \dots, y_k)$ y $\hat{v}_2 = (z_1, \dots, z_k)$ diferentes en $N(\hat{u})$. Si alguno de los dos es $\hat{u}$, se tiene que $\hat{v}_1 \hat{v}_2 \in E(F_k^* G)$,

por ser diferentes $\Lambda(\hat{v}_1) \neq \Lambda(\hat{v}_2)$, y $\Lambda(\hat{v}_1)\Lambda(\hat{v}_2) \in E(F_k G)$. De otra forma, existen únicas $i, j \in [k]$ tales que $y_i, z_j \notin u$. En cambio, si $i \neq j$ entonces $\hat{v}_1\hat{v}_2 \notin E(F_k^* G)$ y $\Lambda(\hat{v}_1)\Delta\Lambda(\hat{v}_2) = \{x_i, y_i, x_j, z_j\}$, por lo que $\Lambda(\hat{v}_1) \neq \Lambda(\hat{v}_2)$ y $\Lambda(\hat{v}_1)\Lambda(\hat{v}_2) \notin E(F_k G)$. Si $i = j$, necesariamente $y_i \neq z_i$. En ese caso $\Lambda(\hat{v}_1) \cap \Lambda(\hat{v}_2) = \{y_i, z_i\}$ y, entonces, $\Lambda(\hat{v}_1)\Lambda(\hat{v}_2) \in E(F_k G)$ si y solo si $y_i z_i \in E(G)$, lo que es equivalente a $\hat{v}_1\hat{v}_2 \in E(F_k^* G)$. Se concluye que $\Lambda|_{N(\hat{u})}$ es un isomorfismo y, por lo tanto, que Λ es un isomorfismo local. ■

Como consecuencia del lema anterior afirmamos que, si $\hat{u}_0$ y $\hat{u}_1$ son dos etiquetados de u , entonces $N(\hat{u}_0) \cap N(\hat{u}_1) = \emptyset$. En efecto, como Λ es un isomorfismo local, si existiera $\hat{v} \in N(\hat{u}_0) \cap N(\hat{u}_1)$ se sigue que existen dos etiquetados $\hat{u}_0, \hat{u}_1 \in N(v)$ tales que $\Lambda(\hat{u}_0) = \Lambda(\hat{u}_1)$, lo que es una contradicción. Es posible demostrar otros resultados con un espíritu parecido de “separar” los etiquetados de las configuraciones cercanas a una configuración dada, por ejemplo, si G tiene cuello mayor que 3 entonces

$$[\Lambda^{-1}[N(u)]]_{F_k^* G} \cong k! [N(u)]_{F_k G}.$$

Para ver esto, indexemos $\Lambda^{-1}[\{u\}] = \{\hat{u}_i : i \in [k!]\}$ y notemos que, como Λ es un isomorfismo local,

$$\Lambda^{-1}[N(u)] \subseteq \bigcup_{i \in [k!]} N(\hat{u}_i).$$

Por lo tanto, $\{N(\hat{u}_i) : i \in [k!]\}$ es una partición de $\Lambda^{-1}[N(u)]$ y, como para toda $i \in [k!]$ se tiene que Λ es un isomorfismo entre $[N(\hat{u}_i)]_{F_k^* G}$ y $[N(u)]_{F_k G}$, podemos definir $f : \Lambda^{-1}[N(u)] \rightarrow N(u) \times [k!]$ como $f(v) = (\Lambda(\hat{v}), i)$ si $\hat{v} \in N(\hat{u}_i)$. Para ver que f es un isomorfismo basta ver que, si $i \neq j$, $\hat{v}_i \in N(\hat{u}_i) \setminus \{\hat{u}_i\}$, y $\hat{v}_j \in N(\hat{u}_j) \setminus \{\hat{u}_j\}$, entonces $\hat{v}_i\hat{v}_j \notin E(F_k^* G)$, pues $\hat{u}_i$ no es adyacente a nadie en $N(\hat{u}_j)$ y viceversa ya que Λ es un isomorfismo local.

Denotemos $\hat{u}_i = (x_1, \dots, x_k)$, $\hat{u}_j = (y_1, \dots, y_k)$, $\hat{v}_i = (a_1, \dots, a_k)$, y $\hat{v}_j = (b_1, \dots, b_k)$, sabemos que existen $r, s \in [k]$ tales que $a_r \in \Lambda(\hat{v}_i) \setminus u$ y $b_s \in \Lambda(\hat{v}_j) \setminus u$. Si $\Lambda(\hat{v}_i) \neq \Lambda(\hat{v}_j)$ entonces $a_r \neq b_s$ o $x_r \neq y_s$, si ambas condiciones se cumplen entonces

$$|\Lambda(\hat{v}_i)\Delta\Lambda(\hat{v}_j)| = |\{x_r, a_r, y_s, b_s\}| = 4.$$

Por lo tanto $\Lambda(\hat{v}_i)\Lambda(\hat{v}_j) \notin E(F_k G)$. Si $a_r = b_s$, entonces $\Lambda(\hat{v}_i) \setminus \Lambda(\hat{v}_j) = \{y_s\}$ y $\Lambda(\hat{v}_j) \setminus \Lambda(\hat{v}_i) = \{x_r\}$, como G es libre de triángulos $x_r y_s \notin E(G)$ y así $\Lambda(\hat{v}_i)\Lambda(\hat{v}_j) \notin E(F_k G)$. Si $x_r = y_s$, de forma análoga se deduce que $\Lambda(\hat{v}_i)\Delta\Lambda(\hat{v}_j) = \{a_r, b_s\}$ y, nuevamente, como G no tiene triángulos, $a_r b_s \notin E(G)$. En cualquier caso, como Λ es un morfismo y las imágenes de $\hat{v}_i$ y $\hat{v}_j$ no son adyacentes, se tiene que $\hat{v}_i\hat{v}_j \notin E(F_k^* G)$. Por

otro lado, si $\Lambda(\hat{v}_i) = \Lambda(\hat{v}_j)$, como Λ es un isomorfismo local, no existe $\hat{w} \in N(\hat{v}_i) \setminus \{\hat{v}_i\}$ tal que $\Lambda(\hat{w}) = \Lambda(\hat{v}_i)$, de forma que $\hat{v}_i \hat{v}_j \notin E(F_k^*G)$, lo que demuestra la afirmación.

De forma similar, si G tiene cuello mayor que cuatro, para toda $u \in V(F_kG)$

$$\Lambda^{-1} \left[\bigcup_{v \in N(u)} N(v) \right]_{F_k^*G} \cong k! \left[\bigcup_{v \in N(u)} N(v) \right]_{F_kG}.$$

Este resultado generaliza el Lema 2.4.1 en el sentido de que, dado cualquier etiquetado de u y una configuración v a distancia a lo más dos de u en F_kG , existe un único etiquetado de v a distancia a lo más dos de cualquier etiquetado de u . Sin embargo, la principal consecuencia del Lema 2.4.1 es el siguiente resultado.

Proposición 2.4.2. *Para toda gráfica G de orden $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in [n]$ y $u \in V(F_kG)$, si $P: P_m \rightarrow F_kG$ es un camino tal que $P_1 = u$ y $\hat{u}$ es un etiquetado de u , entonces existe un único camino $Q: P_m \rightarrow F_k^*G$ tal que*

$$\begin{aligned} Q_1 &= \hat{u} \\ &y \\ P &= \Lambda \circ Q. \end{aligned}$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre m , para $m = 1$ es claro pues $Q_1 = \hat{u}$ es el único camino que satisface las condiciones en este caso. Supongamos que para $m \geq 1$ se cumple el resultado, y consideremos un camino $P: P_{m+1} \rightarrow F_kG$ con $P_1 = u$. Por hipótesis inductiva, $P|_{V(P_m)}: P_m \rightarrow F_kG$ es un camino para el que se cumple el resultado, de forma que existe un único camino $Q': P_m \rightarrow F_k^*G$ tal que $Q'_1 = \hat{u}$ y $P|_{V(P_m)} = \Lambda \circ Q'$.

Por lo anterior, en caso de existir un camino Q como el que buscamos deberá cumplir que $Q|_{V(P_m)} = Q'$, por lo tanto, resta ver que existe una única forma de extender Q' a un camino de $m+1$ vértices que satisfaga las condiciones. Pero sabemos que esto es así gracias a que Λ es un isomorfismo local, ya que existe un único $x \in N(Q'_m)$ tal que $\Lambda(x) = P_{m+1}$. Definiendo

$$Q_i = \begin{cases} Q'_i & i \in [m] \\ x & i = m+1 \end{cases}$$

concluimos que $Q: P_{m+1} \rightarrow F_k^*G$ es el único camino tal que $Q_1 = \hat{u}$ y $P = \Lambda \circ Q$. ■

Al camino Q en el teorema anterior le decimos el **levantamiento** de P con etiquetado inicial $\hat{u}$, y lo denotamos $P^{\hat{u}}$. Obsérvese que, además, cualquier camino Q en F_k^*G es el levantamiento de un camino en F_kG , a saber, $Q = (\Lambda \circ Q)^{Q_1}$.

Recordemos que, si P y Q son caminos en $F_k G$ tales que el vértice final de P es igual al inicial de Q , como las palabras de movimientos $w(P)$ y $w(Q)$ se construyen a partir de las palabras de flechas de P y Q , y con base en estas últimas se define la concatenación de caminos, se tiene que $w(PQ) = w(P)w(Q)$. Por lo tanto, el movimiento subyacente de PQ se obtiene de la composición $M(Q) \circ M(P)$. Todavía más, si P no es un camino simplificado, en su palabra de flechas aparece un par de términos consecutivos de la forma $(u, v)(v, u)$, estos dan lugar a la pareja de términos consecutivos $m^{xy}m^{yx}$, con $u \setminus v = \{x\}$ y $v \setminus u = \{y\}$, en la palabra de movimientos de P . Así, como $M^{xy} = (M^{yx})^{-1}$, se sigue que el movimiento subyacente a P será idéntico a aquel asociado a cualquier camino obtenido de una cancelación elemental. Por lo tanto, el movimiento subyacente de un camino en $F_k G$ solo depende de su reducción simplificada. Por lo anterior, si nos restringimos al grupo $\mathcal{C}(u)$ para cualquier $u \in V(F_k G)$, la función $M: \mathcal{C}(u) \rightarrow S_u$ dada por $M([P]) = M(P)$ para cualquier $P \in [P]$ está bien definida y, además, $M([PQ]) = M([Q]) \circ M([P])$. En estricto sentido, este no es un morfismo de grupos pues la asignación voltea el orden en que se operan los factores. Esto es una consecuencia de las convenciones notacionales sobre cómo escribimos los términos de las palabras –de izquierda a derecha– y de la composición de funciones –de derecha a izquierda–, y se ve reflejada también en la definición de movimiento subyacente frente a aquella de palabra de movimientos de un camino. Es decir, si definimos una operación de concatenación de caminos simplificados $c: \mathcal{C}(u)^2 \rightarrow \mathcal{C}(u)$ como $PcQ = QP$, entonces se tiene que $M([PQ]) = M([P])cM([Q])$ y, por lo tanto, M es un morfismo del grupo definido sobre $\mathcal{C}(u)$ equipado con la operación c en S_u con la composición. Es fácil ver que c es equivalente a la concatenación usual de caminos pues la función dada por tomar el camino inverso $^{-1}: \mathcal{C}(u) \rightarrow \mathcal{C}(u)$ es una función biyectiva que además satisface que $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = P^{-1}cQ^{-1}$, por lo que es un isomorfismo de $\mathcal{C}(x)$ con la concatenación de caminos simplificados en $\mathcal{C}(u)$ con c . Por lo tanto, abusamos del lenguaje diciendo que M es un morfismo de $\mathcal{C}$ en S_u y obviamos la cuestión del orden de los factores. Definimos entonces el grupo $\Sigma(u)$ como el subgrupo de S_u que induce el morfismo M , ya que sus elementos son las imágenes bajo M de elementos en $\mathcal{C}(u)$, los solemos denotar por $M(P)$ para $P \in \mathcal{C}(u)$. Notemos que, como M es un epimorfismo de $\mathcal{C}(u)$ en $\Sigma(u)$, entonces este grupo también es un grupo cociente de $\mathcal{C}(u)$. Este cociente es tal que $\Sigma(u)$ es independiente de la configuración u , solo depende de G y el número de fichas. Para ver esto consideremos u y v dos configuraciones de k fichas en G y R una uv -trayectoria en $F_k G$, definimos un isomorfismo de grupos $f: \Sigma(v) \rightarrow \Sigma(u)$ dado por $f(M(P)) = M(R^{-1}PR)$. Es claro que es un morfismo

pues

$$\begin{aligned}
 f(M(P) \cdot M(Q)) &= M(R^{-1}PQR) \\
 &= M(R) \circ M(Q) \circ M(P) \circ M(R)^{-1} \\
 &= M(R) \circ M(Q) \circ M(R)^1 \circ M(R) \circ M(P) \circ M(R)^{-1} \\
 &= f(M(P)) \cdot f(M(Q)),
 \end{aligned}$$

y es biyectiva ya que podemos definir su inversa $f^{-1} : \Sigma(u) \rightarrow \Sigma(v)$ como $f^{-1}(M(P')) = M(RP'R^{-1})$ para $P' \in \Sigma(u)$. Por esto, denotaremos el grupo de reetiquetados de cualquier configuración de k fichas en G como $\Sigma_k G$ y le decimos el **grupo de reetiquetados de k fichas** de G . La Proposición 2.4.2, nos dice que un camino en $F_k^* G$ está únicamente determinado por un camino de $F_k G$ y un etiquetado de su vértice inicial. Como los caminos en $F_k G$ están determinados por su palabra de movimientos y una configuración inicial de ella, entonces cada camino Q de $F_k^* G$ se puede identificar con el par formado por la palabra de movimientos $w(\Lambda \circ Q)$ y un etiquetado de una configuración inicial de ella. Más aún, si $u, v \in V(F_k G)$ y P es un uv -camino de $F_k G$, se tiene que el movimiento subyacente de P es tal que $M(P) \circ \hat{u} = \hat{v}$ es el vértice final de $P^{\hat{u}}$ para cualquier $\hat{u}$ etiquetado de u . Como consecuencia de todo lo anterior, cuando la gráfica G es conexa, el problema de saber qué configuraciones etiquetadas se pueden alcanzar desde una inicial, $\hat{u}$, es equivalente al de saber que otras etiquetaciones de $\Lambda(\hat{u})$ se pueden alcanzar desde $\hat{u}$. En efecto, como en este caso $F_k G$ es conexa, para cualesquiera dos configuraciones etiquetadas, $\hat{u}$ y $\hat{v}$, existirá un $\Lambda(\hat{u})\Lambda(\hat{v})$ -camino, por lo que $\hat{u}$ alcanza a algún etiquetado de $\Lambda(\hat{v})$ a través del levantamiento de ese camino con configuración etiquetada inicial $\hat{u}$. Así, saber si $\hat{u}$ puede alcanzar a $\hat{v}$ a través de una sucesión de movimientos se reduce a conocer los etiquetados de $\Lambda(\hat{v})$ que puede alcanzar $\hat{v}$, lo que es conocer el grupo $\Sigma_k G$. También se tiene la siguiente consecuencia de la Proposición 2.4.2, que relaciona la cantidad de componentes conexas de la gráfica de $F_k^* G$ con la cardinalidad de $\Sigma_k G$.

Corolario 2.4.3. *Sea G una gráfica conexa de orden n con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in [n]$. Si denotamos $\sigma = |\Sigma_k G|$ entonces $F_k^* G$ tiene $\frac{k!}{\sigma}$ componentes conexas isomorfas por pares.*

Demostración. Primero veamos que, para cualesquiera dos etiquetados $\hat{u}_0$ y $\hat{u}_1$ de una configuración $u \in V(F_k G)$, si $\hat{u}_0 = (x_1, \dots, x_k)$, entonces existe una permutación $\alpha \in S_k$ tal que $\hat{u}_1 = (x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(k)}) = \hat{u}_0 \circ \alpha$. Definimos $A : V(F_k^* G) \rightarrow V(F_k^* G)$ como $A(\hat{w}) = \hat{w} \circ \alpha$ para toda configuración etiquetada $\hat{w}$. Es claro que A es una biyección pues su inversa es la función $\hat{w} \mapsto \hat{w} \circ \alpha^{-1}$. Además, como Λ es un isomorfismo local, dos configuraciones etiquetadas $\hat{v}$ y $\hat{w}$ son adyacentes en $F_k^* G$ si y solo

si $\Lambda(\hat{v})$ y $\Lambda(\hat{w})$ son vecinos en $F_k G$ y, como $\Lambda \circ A = \Lambda$, esto ocurre siempre y cuando $A(v)A(w) \in E(F_k^* G)$. Así, A es morfismo y, por el mismo argumento, su inversa también lo es, por lo que A es un automorfismo de $F_k^* G$ tal que la evaluación de $\hat{u}_0$ bajo A es $\hat{u}_1$. Recordando que la conexidad de G asegura que en todas las componentes conexas de $F_k^* G$ hay algún etiquetado de u , se concluye que las componentes conexas de $F_k^* G$ son isomorfas por pares.

Para ver que hay exactamente $\frac{k!}{\sigma}$ componentes conexas notemos que cualesquiera dos elementos en $\Sigma_k G$, es decir, dos movimientos subyacentes $M(P)$ y $M(Q)$, dan lugar a dos etiquetados de u en la componente conexa de $F_k^* G$ en donde está $\hat{u}$, a saber $M(P) \circ \hat{u}$ y $M(Q) \circ \hat{u}$. Así que en cada componente conexa de $F_k^* G$ hay σ etiquetados de u , como en total hay $k!$ etiquetados de u concluimos que la cantidad de componentes conexas es $\frac{k!}{\sigma}$. ■

Para ilustrar todo lo anterior, calculemos el grupo de permutaciones de k fichas de algunas gráficas. Si $G \cong K_n$, para toda $k \in \llbracket n-1 \rrbracket$ se tiene que $\Sigma_k G \cong S_k$. En efecto, para cualquier $u \in V(F_k G)$ y $x, y \in u$ definimos $_{xy}P$ como el camino cerrado basado en u dado por la siguiente sucesión de movimientos: “llevamos la ficha en x a algún vértice z con $z \in V(G) \setminus u$, el cual existe pues $k \leq n-1$; movemos la ficha en y a x y, finalmente, llevamos la ficha en z a y ”. Como para cada pareja $x, y \in u$ se cumple que $M(_{xy}P) = (xy) \in S_u$ y, ya que las transposiciones generan a S_u , se concluye que $\Sigma_k G = S_u$, que es isomorfo a S_k . Si $G \cong P_m$, entonces $\Sigma_k^* G = \langle I_u \rangle_{S_u}$, esto se argumenta por inducción sobre ℓ , la longitud de un camino cerrado basado en u para algún $u \in V(F_k G)$. Si $\hat{u} = (x_1, \dots, x_k)$ es un etiquetado de u tal que $x_1 < \dots < x_k$ en el orden lineal que induce el isomorfismo con P_m , observemos que, después de un movimiento, el orden en el que se encuentran las fichas sobre la trayectoria no cambia. Es decir, si $M^{xy} \circ \hat{u} = (y_1, \dots, y_k)$ para algún $M^{xy} \in M_u$, se satisfecerá que $y_1 < \dots < y_k$. Por lo tanto, si consideramos $Q = u_1 \cdots u_\ell u_{\ell+1} \in \mathcal{C}(u)$ tal que $\ell > 1$ se tiene que $\hat{w} = M(Q u_\ell) \circ \hat{u} = (z_1, \dots, z_k)$ satisface $z_1 < \dots < z_k$ por hipótesis inductiva y, por el paso base, $M^{xy} \circ \hat{w}$ satisfecerá lo mismo para cualquier $M^{xy} \in M_{\Lambda(\hat{w})}$. Por lo que $M(Q) \circ \hat{u} = (y_1, \dots, y_k)$ es un etiquetado de u que satisface $y_1 < \dots < y_k$, como hay una única forma de ordenar linealmente un subconjunto de un orden lineal, entonces $M(Q) \circ \hat{u} = \hat{u}$ para toda $M(Q) \in \Sigma_k G$. Por lo tanto $M(Q) = I_u$ y, entonces, $\Sigma_k P_m = \langle I_u \rangle_{S_u}$. De forma similar, si $G \cong C_n$, $k \in \llbracket n-1 \rrbracket$, y $\hat{u}_1 = (x_1, \dots, x_k)$ es un etiquetado de una configuración $u \in F_k G$ tal que $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$, tomando índices módulo k , en el orden cíclico de $\mathbb{Z}_n$ para toda $i \in [k]$, entonces cualquier otro etiquetado de u en la componente conexa de $F_k^* G$ donde está $\hat{u}_1$ tendrá la misma propiedad. Existen k formas de ordenar cíclicamente k elementos en $\mathbb{Z}_n$, pues cada una de ellas queda determinada por el vértice que ocupe la primera ficha, explícitamente, estas son la colección de las $\hat{u}_i = (x_i, \dots, x_k, x_1, \dots, x_{i-1})$ con

$i \in [k]$. Se deduce que, la función de $\mathbb{Z}_k$ en $\Sigma^*(u)$ que a cada i le asocia la clase de caminos basados en u cuyo levantamiento con etiquetado inicial $\hat{u}$ tiene su extremo final en $\hat{u}_i$ es un isomorfismo de grupos. Concluimos que $\Sigma_k C_n \cong \mathbb{Z}_k$. Apoyados en estos ejemplos podemos ver que en general $\Sigma_k G$ no es isomorfo a $\Sigma_{n-k}^* G$ y, por lo tanto, $F_k^* G$ no es isomorfa a $F_{n-k}^* G$, lo que contrasta con el caso para gráficas de fichas no etiquetadas.

La consecuencia que más nos interesará de la Proposición 2.4.2 es el hecho de que podemos considerar la acción de $\Sigma_k G$ sobre u dada, para $P \in \mathcal{C}(u)$, por $x \rightarrow M(P)(x)$. Es decir, la acción usual de S_u sobre u restringida al subgrupo $\Sigma_k G$. Por la Proposición 2.4.4, se tiene que ésta induce la partición de u dada por sus órbitas, a la órbita de una ficha de u en x la denotamos $O_u(x)$ y no es otra cosa que la colección de todos los vértices de u en los que es posible colocar a la ficha de u en x tras permutar las fichas de u con alguna sucesión de movimientos. A estas órbitas les decimos las **órbitas de la configuración** u . Se sigue que, si $O_1, \dots, O_\ell$ son las órbitas de u , como para todo $M(P) \in \Sigma_k G$ e $i \in [\ell]$ se tiene que $M(P)|_{O_i} \in S_{O_i}$, entonces

$$\Sigma_k G \subseteq \prod_{i=1}^{\ell} S_{O_i}.$$

Además definimos el **subtablero** de x , que denotamos $B_u(x)$, como la gráfica

$$B_u(x) = [\{M(P)(x) : P : P_m \rightarrow F_k G \text{ con vértice inicial } u\}]_G.$$

El subtablero de una ficha es la subgráfica de G a la que puede llegar la ficha en x bajo alguna sucesión de movimientos, es decir, la parte de G a la que está confinada esta ficha. Es claro que, si dos fichas de u , en x y en y están en la misma órbita, entonces $B_u(y) = B_u(x)$, por lo que no hay ambigüedad al referirse al subtablero B_i de una órbita O_i de u . Además, por la definición de los subtableros, si existe $M(P) \in \Sigma_k G$ tal que $M(P)|_{O_i} = \alpha \in S_{O_i}$ para alguna órbita O_i de u , de cardinalidad r_i y con subtablero B_i , entonces $\alpha \in \Sigma_{r_i} B_i$. Es decir, si es posible permutar las fichas de u en O_i realizando movimientos de todas las fichas de u en G , entonces es posible lograr esa misma permutación de r_i fichas en el subtablero de la órbita O_i . Así se deduce que

$$\Sigma_k G \subseteq \prod_{i=1}^{\ell} \Sigma_{r_i} B_i \subseteq \prod_{i=1}^{\ell} S_{O_i}.$$

Por lo tanto, dada una configuración en $F_k G$, el grupo $\Sigma_k G$ la divide en sus órbitas, de forma que sabemos que es imposible que dos fichas en órbitas diferentes intercambien lugar. Es decir, podemos diferenciar entre fichas que están en órbitas diferentes, de forma que las fichas de $F_k G$ están “intrínsecamente etiquetadas” por su órbita.

Veamos que, si G es una gráfica 2-conexa y $k \in [n - 1]$, entonces $F_k G$ tiene una única órbita. Si G tiene únicamente dos vértices se cumple trivialmente pues $G \cong K_2$ y $k = 1$, de forma que el unitario formado por la única ficha es la única órbita de cualquier configuración. En cambio, cuando G tiene más de dos vértices, por ser 2-conexa, existe un ciclo que contiene a x y a cualquier otra ficha $y \in u$. Si en este ciclo hay una casilla desocupada, como ya conocemos la forma en que se pueden permutar las fichas sobre un ciclo, es posible lograr que la ficha en x ocupe el vértice y tras una permutación de las fichas en el ciclo. En otro caso, por la Proposición 1.4.5, existen dos trayectorias internamente ajenas desde algún espacio desocupado hacia el ciclo. Si los extremos de estas trayectorias sobre el ciclo son x y y , entonces existe un ciclo que contiene a x , y y al espacio desocupado, por lo que se procede como en el primer caso. Si no es así, podemos llevar el espacio vacío al ciclo, realizar la permutación deseada como el caso anterior, y regresarlo a su posición inicial. Concluimos que, si hay al menos un espacio vacío en una gráfica 2-conexa, entonces todas las fichas de cualquier configuración están en la misma órbita. Por lo tanto, cuando una gráfica G es 2-conexa el anterior análisis no nos ayuda a conocer $\Sigma_k G$ pues la única órbita está formada por todas las fichas y su subtablero es toda G . Sin embargo, lo anterior tiene como consecuencia que, si G es separable y hay $n - 1$ fichas en ella, entonces para cada órbita existe un bloque de G tal que su subtablero es dicho bloque. En efecto, si una ficha de una configuración $u \in V(F_{n-1} G)$ está en x , un vértice de G que no es de corte, entonces $B_u(x)$ es el único bloque al que pertenece x ; de otra forma $B_u(x)$ es el bloque al que pertenece la primera arista de cualquier xz -trayectoria, con z el vértice desocupado. Esto es así ya que, si la ficha empieza posicionada en un vértice de corte, solo podrá moverse cuando el espacio vacío recorre una arista incidente con él, naturalmente, los movimientos de una ficha en esta situación solo pueden hacerse hacia el bloque que debe cruzar el espacio vacío para llegar a este vértice. Por otro lado, si la ficha no está posicionada en un vértice de corte, entonces, para salir del bloque en el que se encuentra, es necesario que llegue a un vértice de corte, pero, en el movimiento que realiza la ficha para ocuparlo, el espacio vacío se mueve hacia bloque en el que estaba la ficha, de manera que el siguiente movimiento de la ficha será hacia un vértice en ese bloque. Esto implica que, aquellas fichas cuyo subtablero es un bloque trivial, son el único elemento en su órbita. En efecto, si hubiera otra ficha en su órbita, ésta debería estar siempre en el mismo bloque, lo que haría imposible que se movieran las fichas de esa órbita, contradiciendo por ello que estén en la misma órbita. En cambio, las fichas cuyo subtablero es un bloque no-trivial están relacionadas con todas aquellas que tienen el mismo subtablero, ya que es posible poner un espacio vacío en el bloque junto con todas ellas, y se concuye gracias al análisis de las gráficas 2-conexas. Por lo tanto, en el caso $k = n - 1$ existen

tantas órbitas como bloques en G , y además $\Sigma_k G = \prod_{i=1}^{\ell} \Sigma_{n_i-1} B_i$ con $B_1, \dots, B_{\ell}$ los bloques de G de orden $r_1, \dots, r_{\ell}$. Así, conocer $\Sigma_{n-1} G$ se reduce a conocer los grupos $\Sigma_{n_i-1} B$ con B una gráfica 2-conexa de orden n_i .

En [54] se muestra que, para una gráfica G que es 2-conexa, distinta de un ciclo, y de la gráfica Θ_0 que se ve en la Figura 2.12, se tiene que $\Sigma_{n-1} G \cong A_{n-1}$ si G es bipartita, y $\Sigma_{n-1} G \cong S_{n-1}$ si no lo es. Además, $\Sigma_6 \Theta_0 \cong S_5$ y, recordemos, $\Sigma_{n-1} C_n \cong \mathbb{Z}_{n-1}$. El argumento que se da consiste en observar primero que, si la gráfica es bipartita, apoyados en el isomorfismo $\phi: F_{n-1} G \rightarrow G$, podemos asociar cada camino P en $F_{n-1} G$ con el camino en G dado por $\phi \circ P$. Es decir, usamos el isomorfismo entre estas dos gráficas para describir el camino que siguen $n-1$ fichas en G mediante el camino que sigue el único espacio vacío que hay. De esta forma, como G es bipartita, se deduce que todos los caminos cerrados en $F_{n-1} G$ tienen longitud par. Además, como ya hemos discutido, en este artículo se definen a las configuraciones etiquetadas como funciones de $V(G)$ en $\{1, \dots, n-1, \emptyset\}$, por lo que identifican el movimiento de la ficha en x de una configuración u , como la transposición $(x\emptyset)$ de $\{1, \dots, n-1, \emptyset\}$. De manera que la composición de una configuración etiquetada con su definición y esta noción de movimiento tiene como resultado la configuración que esperaríamos de mover la ficha en x al vértice en donde se encuentra el espacio vacío. Por lo tanto, para todo camino $P \in \mathcal{C}(u)$ con $w(P) = m^{x_1 x_2} \dots m^{x_m x_{m+1}}$, le asocian la permutación de $\{1, \dots, n-1, \emptyset\}$ dada por $(x_1 x_{m-1}) \circ (x_{m-1} x_{m-2}) \circ \dots \circ (x_3 x_2) \circ (x_2 x_1)$. Se deduce que, como todo camino cerrado en $F_{n-1} G$ tiene longitud par, estas permutaciones están en $A_{\{1, \dots, n-1, \emptyset\}}$. Como además estas permutaciones dejan fijo a $\emptyset$, pues vienen de caminos cerrados basados en u , si las restringimos a u obtenemos permutaciones pares de u . Así, los movimientos subyacentes a los caminos cerrados de $F_{n-1} G$ están en A_u , es decir, $\Sigma_{n-1} G \subseteq A_u$. Más aún, si G no es bipartita, existirá un camino cerrado de longitud impar que inducirá una permutación impar de u , de forma que es necesario que la gráfica sea bipartita para que esto suceda. Ahora, veremos que, si G es bipartita, es posible obtener todas las permutaciones pares de una configuración de $n-1$ fichas, con lo que podremos concluir la afirmación. Para lograr esto, en [54] primero centran su análisis en las gráficas 2-conexas con *número de Betti dos*, es decir, intuitivamente, gráficas que se obtienen a partir de la unión de dos ciclos ajenos al identificar subgráficas isomorfas a trayectorias de la misma longitud de cada uno de ellos. Alternativamente, son gráficas que se obtienen a partir de un ciclo agregando vértices y aristas nuevas que formen una trayectoria entre dos vértices de él. Éstas son gráficas que admiten una parametrización a través de la longitud de las tres xy -trayectorias internamente ajenas que unen a x y y , los dos únicos vértices de grado tres en esta gráfica. Denotamos a la gráfica de este tipo tal que dichas trayectorias tienen longitud r, s y t , con $r, s, t \in \mathbb{Z}^+$ y $t \leq s \leq r$, como $\Theta(r, s, t)$. La

gráfica Θ_0 es un ejemplo de una gráfica de esta familia, de hecho $\Theta_0 = \Theta(2, 2, 1)$. Es suficiente estudiar esta familia de gráficas pues cualquier otra gráfica 2-conexa que no es un ciclo contiene alguna de estas como subgráfica, por lo que se puede utilizar este resultado como base —de una cierta inducción— para demostrar que el resultado es válido para todas las gráficas 2-conexas. La idea principal es que, en $\Theta(r, s, t)$, si llamamos A , B , y C a las xy -trayectorias de longitud r , s y t respectivamente (véase la Figura 2.12), y consideramos una configuración de $n - 1$ fichas cuyo único espacio vacío está en x , entonces, usando el camino que sigue el espacio vacío para referirnos al camino que siguen las $n - 1$ fichas, $M(CA^{-1}BC^{-1}AB)$ es igual a $(a_r y) \circ (b_1 c_1)$ si $t > 1$ y a $(a_r y b_1)$ si $t = 1$. Como la colección de todos los 3-ciclos, así como la de todas las composiciones de dos transposiciones, generan el grupo alternante A_n , entonces bastaría ver que $\Sigma_{n-1}\Theta(r, s, t)$ es 4-transitiva si $t > 1$, y 3-transitiva si $t = 1$. En [54] no muestran esto, sino que se ve que los grupos de reetiquetados de $n - 1$ fichas de gráficas del tipo $\Theta(r, s, t)$ siempre tienen un 3-ciclo y son 2-transitivos, lo cual, con un poco más de trabajo, se puede ver que es suficiente para generar A_n . Sin embargo, esta solución utiliza una cantidad de movimientos del orden de $\mathcal{O}(n^5)$ para obtener las permutaciones. El argumento de [35] es más eficiente ya que necesita $\mathcal{O}(n^3)$ movimientos para lograrlo, procedemos a explicarlo a grandes rasgos. Si $\max\{r, s, t\} \geq 3$, se puede ver sin demasiada dificultad que se pueden llevar cualesquiera cuatro fichas a los vértices de la xy -trayectoria P con al menos tres vértices internos pues, al borrar sus vértices internos, obtenemos un ciclo, así que x y cualquier otro vértice fuera de P están en un ciclo común. Llevando el espacio vacío a este ciclo es posible hacer girar las fichas en él hasta colocar la ficha deseada en x sin modificar las fichas en vértices internos de P . De esta manera podemos colocar en los tres vértices internos de P y x a cualesquiera cuatro fichas queelijamos. Concatenando el camino que lleva una primera colección de cuatro fichas a estos vértices con el inverso del camino que lleva una segunda colección de cuatro fichas ahí, obtenemos un camino que lleva a la primera colección de 4 fichas en la segunda. Esto es que $\Sigma_k\Theta(r, s, t)$ es 4-transitivo si $\max\{r, s, t\} \geq 3$, por lo que podemos concluir en este caso. Resta analizar lo que sucede si $\max\{r, s, t\} \leq 2$, estas gráficas resultan tener un comportamiento muy irregular, tanto en [54] como en [35], las tratan de manera particular. No es posible demostrar que el grupo de reetiquetados de estas gráficas es 3-transitivo ya que $\Theta(1, 1, 1)$ no lo satisface. Además, Θ_0 es una de estas gráficas, esta es la única excepción a la sencilla caracterización de $\Sigma_{n-1}G$ que cumplen todas las demás gráficas 2-conexas, pues es la única cuya gráfica de $n - 1$ fichas etiquetadas tiene más de dos componentes conexas, en efecto, como $\Sigma_6\Theta_0 \cong S_5$, usando el Corolario 2.4.3 se deduce que tiene seis componentes. Todo lo anterior nos da un criterio general para resolver la generalización de 15-puzzle

a cualquier gráfica G con $n - 1$ fichas en ella. En efecto, para saber si es posible obtener una permutación de una configuración u dada, basta ver que la permutación que necesitamos realizar se restringe a una permutación en cada órbita de u , y que la permutación que debemos hacer de aquellas órbitas cuyo subtablero es un bloque no-trivial y bipartito es par. Si todo lo anterior sucede, entonces es posible obtener dicha permutación con movimientos de las fichas, en otro caso es imposible lograrlo.

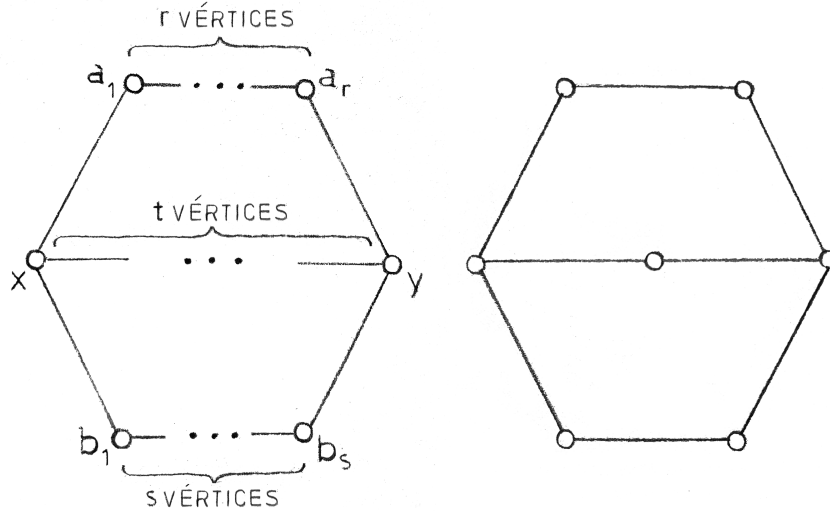


Figura 2.12: Las gráficas $\Theta(r, s, t)$ y $\Theta_0 = \Theta(2, 2, 1)$.

Resulta que en todos los demás casos, si G es una gráfica de orden n con $n > 2$, $k \in \llbracket n - 2 \rrbracket$, y $F_k G$ tiene órbitas $O_1, \dots, O_\ell$ con cardinalidades $r_1, \dots, r_\ell$ respectivamente, se cumple que $\Sigma_k G \cong \prod_{i=1}^\ell S_{r_i}$. Esto es que, en este caso, siempre es posible conseguir todas las permutaciones de las fichas de una configuración que se restrinjan a una permutación en cada órbita. Para argumentar esto primero definimos la relación $\sim_u$ en u como $x \sim_u y$ si y sólo si $x \in O_u(y)$, con esto enunciamos el siguiente resultado.

Proposición 2.4.4. *Para toda gráfica G de orden n , con $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in [n - 2]$, $u \in F_k G$ y $x, y \in u$, se cumple que $x \sim_u y$ si y sólo si $(xy) \in \Sigma_k G$.*

Demostración. Observamos primero que, si $(xy) \in \Sigma_k G$ es claro que $x \sim_u y$, por lo tanto nos ocupamos de demostrar solo la otra implicación. Para ello denotamos por $S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$, al conjunto de vértices de corte de grado al menos tres, a sus elementos les decimos “respiraderos” de G . Decimos que una ficha que está en un

respiradero, z , está “ahogada” si existe un puente, e , incidente con z , tal que todos los espacios vacíos de G están en la componente conexa de $G - e$ en donde no está z . Dados dos vértices $z, z' \in V(G)$ denotamos $A_{zz'}$ al conjunto

$$\{w \in V(G) : z \text{ está en toda } wz'\text{-trayectoria}\}$$

Así definimos

$$\begin{aligned} R_1(u) &= \{(z, i) \in u \times [\ell] : z \text{ no es de corte y existe una } zs_i\text{-trayectoria sin puentes}\}, \\ R_2(u) &= \{(z, i) \in u \times [\ell] : z \text{ es de corte, } z \neq s_i \text{ y } d(z, s_i) + 1 \leq |V(G) \setminus (A_{zs_i} \cup u)|\}, \\ R_3(u) &= \{(z, i) \in u \times [\ell] : z \text{ es de corte, } z = s_i \text{ y no está ahogada}\}, \\ R_4(u) &= \{(i, j) \in [\ell]^2 : d(s_i, s_j) \leq n - k - 2\}, \text{ y} \\ R(u) &= R_1(u) \cup R_2(u) \cup R_3(u) \cup R_4(u). \end{aligned}$$

Dividimos el argumento en dos partes, primero veremos que, si x y y no son de corte y existe una xy -trayectoria sin puentes, entonces $x \sim_u y$ y $(xy) \in \Sigma_k G$. De otra forma, afirmamos que $x \sim_u y$ si y solo si existen $i_1, \dots, i_t \in [\ell]$ tales que $(x, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{t-1}, i_t), (y, i_t) \in R(u)$ y esto implicará que $(xy) \in \Sigma_k G$.

Para ver lo primero, supongamos que $x, y \in u$ no son de corte y que P es una xy -trayectoria sin puentes. Se sigue que P solo usa aristas en bloques no triviales, denotémoslos $B_1, \dots, B_r$ de acuerdo al orden en que son recorridos. Si $r > 1$, como x y y no son de corte, es posible llevar un espacio vacío a algún vértice de B_1 , y otro a un vértice de B_2 que no sea de corte y que sea adyacente al único vértice $z \in B_1 \cap B_2$, sin mover las fichas en x y y . Entonces, ya que tanto la ficha en x como un espacio vacío se encuentran en B_1 simultáneamente, se tiene que $B_1 \subseteq B_u(x)$. Así, movemos la ficha en x a z y, luego, al espacio vacío adyacente que colocamos en B_2 . Al hacer esto, la ficha no bloquea el acceso a B_1 a las fichas en B_2 , por lo tanto, es posible colocar ambos espacios vacíos, junto con la ficha, en vértices de B_2 . Un argumento inductivo sobre r asegura que es posible llevar la ficha que inicia en x y dos espacios vacíos hasta B_r sin mover a y . En el caso en que x y y están en el mismo bloque no trivial B junto con dos espacios vacíos, es posible mover la ficha en x a un vértice de corte z y, luego, a uno de sus vecinos fuera del bloque, a , dejando los dos espacios vacíos en B . Estos espacios los usamos para mover la ficha que inicia en y a un vecino de z en B , que llamamos b , para luego colocarlos en z y en otro de sus vecinos dentro del bloque, c . Llamemos a esta configuración v . Movemos la ficha en a hasta c , aquella en b hacia a , y, por último, la que está en c hacia b . Como el resultado de estos últimos movimientos es la transposición de la ficha en a con aquella en b de v , al deshacer los movimientos que hicimos para llegar a v desde u ,

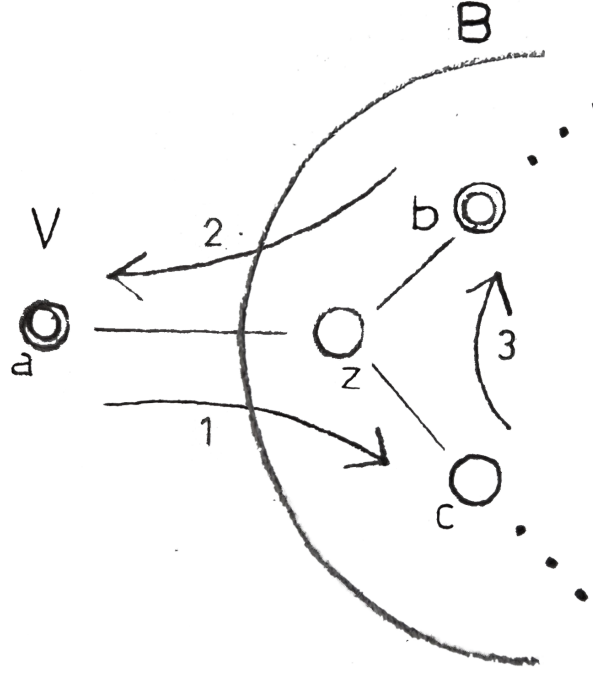


Figura 2.13: Imagen de configuración v y los movimientos que transponen las fichas en a y b .

obtenemos la transposición de las fichas en x y y de u . Se concluye que, en este caso, $(xy) \in \Sigma_k G$.

Por otro lado, para argumentar que, de existir $i_1, \dots, i_t \in [\ell]$ tales que

$$(x, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{t-1}, i_t), (y, i_t) \in R(u),$$

entonces $x \sim_u y$, procedemos por inducción sobre t . Si alguno de x o y no es de corte, por la definición de $R_1(u)$ existe un camino hacia s_{i_1} o s_{i_t} , respectivamente, sin puentes. Por el argumento previo, sabemos que podemos llevar la ficha en dicho vértice hasta este respiradero sin ahogarla. Si la otra ficha tampoco estaba en un vértice de corte, entonces, como ya lo mostramos en otro caso, suponemos que hay un puente en toda xy -trayectoria y, por ello, existe un vértice de corte distinto de aquel en donde colocamos la primera ficha, en donde, podemos colocar a la segunda ficha sin ahogarla. Por lo tanto, suponemos que x y y son de corte.

El caso base, cuando $t = 1$, es que exista $i \in [\ell]$ tal que $(x, i), (y, i) \in R(u)$. El primer subcaso del caso base es que, sin pérdida de la generalidad, $(x, i) \in R_3(u)$.

Entonces, como la ficha en x no está ahogada, existen al menos dos de sus vecinos en los cuales es posible colocar espacios vacíos sin moverla, llamémoslos a y b . Si P es una xy -geodésica, ésta utiliza a lo más un de vecino de x , suponemos que no utiliza a ni c , con c algún vecino de x que podría ser b . Si a no es de corte, movemos la ficha en x ahí y los $d(y, s_i) + 1$ espacios vacíos que existen en $V(G) \setminus (A_{ys_i})$ a los vértices $V(P) \cup \{c\} \setminus \{y\}$. Llamamos a esta configuración v , movemos la ficha en y a c , la ficha en a hasta y , y aquella en c al vértice a . El resultado de estos movimientos transpone las fichas en a y y de v , nuevamente, al deshacer los movimientos realizados para llegar a v , obtenemos la transposición de las fichas en x y y de u . Por otro lado, si a es de corte, movemos la ficha en x a b , llevando las fichas en $V(G) \setminus A_{bs_i}$ a los espacios vacíos de $A_{as_i} \setminus \{a\}$. Como existen al menos $d(y, s_i) + 1$ espacios vacíos en $V(G) \setminus A_{ys_i}$, si deja de ser posible mover fichas a vértices de $A_{as_i} \setminus \{a\}$ y aún no hay $d(y, s_i) + 1$ espacios vacíos en $V(G) \setminus (A_{ys_i} \cup A_{as_i})$, es porque hay fichas en $A_{bs_i} \setminus A_{ys_i}$ y la ficha en b no les permite salir. En esta situación el vértice c debe estar desocupado, así que podemos mover la ficha en b a él para ahora permitir el flujo de fichas en A_{bs_i} a A_{as_i} .

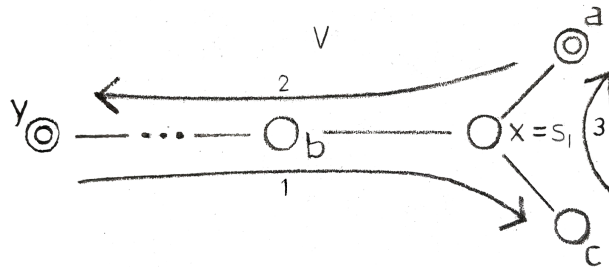


Figura 2.14: Proceso realizado en el primer subcaso del caso $t = 1$ si a es de corte.

Finalmente, movemos la ficha en c al vértice a , obteniendo una configuración con suficientes espacios vacíos en $V(G) \setminus (A_{ys_i} \cup A_{as_i})$ para quitar todas las fichas en $V(P) \cup \{c\} \setminus \{y\}$ sin mover a las fichas en a y y . Llamamos a esta configuración v , movemos la ficha en y a c , la que está en a la colocamos en y , y, por último, aquella en c la movemos al vértice a , lo que resulta en la transposición de las fichas en a y y de v . Este proceso se ilustra en la Figura 2.14. De la misma forma que antes, se construye la transposición de las fichas x y y de u .

El segundo subcaso es que $(x, i), (y, i) \in R_2(u)$. Podemos suponer, sin pérdida de la generalidad, que $x \notin A_{ys_i}$, pues no es posible que x esté en toda ys_i -trayectoria y y esté en toda xs_i -trayectoria. Por lo tanto, si P es una xs_i -trayectoria que no pasa

por y y c un vecino de s_i fuera de P , como hay al menos $d(x, s_i) + 1$ espacios vacíos en $V(G) \setminus A_{xs_i}$, es posible quitar las fichas en $V(P) \cup \{c\} \setminus \{x\}$ sin mover las fichas en x y y . Moviendo la ficha en x a s_i , obtenemos una configuración v en la cuál la ficha en s_i no está ahogada y, como no movimos a y , la cantidad de fichas en $V(G) \setminus A_{ys_i}$ no cambió, deducimos que se cumple que $d(y, s_i) + 1 \leq |V(G) \setminus (A_{ys_i} \cup v)|$ y, gracias al primer subcaso, concluimos que el caso base es cierto.

El paso inductivo es sencillo, supongamos que el resultado es válido para $t \geq 1$ y que existen $i_1, \dots, i_{t+1} \in [\ell]$ tales que $(x, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_t, i_{t+1}), (y, i_{t+1}) \in R(u)$. Si $(y, i_{t+1}) \in R_2(u)$, P es una ys_{t+1} -geodésica, y c es un vecino de s_{t+1} que no está en P , realizamos el mismo procedimiento descrito en el segundo subcaso base para permitir el flujo de espacios vacíos en $A_{ys_{t+1}}$ al conjunto $V(P) \cup \{c\} \setminus \{y\}$ para luego mover la ficha que inició en y a s_{t+1} sin ahogarla. Renombrando a esta configuración como u y $y = s_{t+1}$, se tiene que siempre podemos suponer que $(y, i_{t+1}) \in R_3(u)$. Como $(i_t, i_{t+1}) \in R_4(u)$, si Q es una $s_t s_{t+1}$ -geodésica y d un vecino de s_t fuera de ella, realizando el procedimiento descrito en el primer subcaso base para quitar todas las fichas de $V(Q) \cup \{c, d\}$ para luego mover la ficha que inició en s_{t+1} hasta s_t , obtenemos una configuración v tal que la ficha en s_t no está ahogada. Por lo tanto $(x, i_1), (i_1, i_2), \dots, (s_{i_t}, i_t) \in R(v)$. Así, por hipótesis inductiva, es posible transponer las fichas en s_t y en x de v y, revirtiendo los movimientos realizados para llegar a esta configuración, se obtiene la transposición de las fichas en x y y de u , concluyendo la inducción.

Para concluir esta proposición resta demostrar que, si $x \sim_u y$, entonces existen $i_1, \dots, i_t \in [\ell]$ tales que $(x, i_1), (i_1, i_2), \dots, (y, i_t) \in R(u)$. Supongamos primero que existe una xy -trayectoria sin puentes, podemos suponer que x es un vértice de corte pues, si no es así, como hay dos espacios vacíos en la gráfica es posible llevar uno de ellos al bloque donde está x sin mover a la ficha en x y utilizarlo para mover esta ficha a un vértice de corte en su bloque. Entonces, como x está en al menos un bloque no-trivial, es un respiradero, llamémoslo s_j . Si la ficha en x no está ahogada, se concluye inmediatamente que $(x, j) \in R_3(u)$ y $(y, j) \in R_1(u)$. Si la ficha en x está ahogada, solo puede moverse a lo largo del único puente incidente en x , digamos xa , hacia el cual están los espacios vacíos. Por lo tanto, mientras esta ficha se encuentre en un vértice de grado dos, solo podrá regresar a x o seguir alejándose de x mediante el único puente que tiene disponible para hacerlo, dejando espacios vacíos en todos los vértices que va recorriendo en el proceso. Lo anterior implica que, si la ficha que inicia en y sí puede llegar a aquella en x , la ficha que inicia en x eventualmente ocupa un respiradero, s_i , distinto de s_j . Llamémos v a la configuración en donde esto sucede. Como la ficha que inició en x solo se movió sobre puentes, la cantidad de fichas de u que hay en A_{xy} y de v que hay en $A_{s_i y}$ es la misma. Afirmamos que hay

al menos dos espacios vacíos de v en $A_{s_i y}$, argumentaremos por contrapositiva que, si existe solo un espacio vacío en $A_{s_i y}$ (el caso en donde no existe ninguno es idéntico a excepción de que las fichas en $A_{x s_i}$ no podrán ocupar s_i), entonces y no está en la órbita de x . En este caso se tiene que, la ficha en s_i solo puede moverse hacia vértices de $A_{s_i y}$ en la componente de $G - s_i$ que tiene al único espacio vacío en $A_{s_i y}$. Al hacerlo, este espacio vacío se mueve a s_i , de forma que todos los espacios vacíos en la gráfica se encuentran en la trayectoria que siguió la ficha que inició en x para llegar hasta s_i , llamémosla P . Así, las fichas de esta configuración llenan todos los vértices de $A_{s_i y} \setminus \{s_i\}$ y $A_{x s_i}$, y todos los espacios vacíos están en $V(P)$. Afirmamos que las fichas en $A_{x s_i}$ están confinadas a los vértices de $(V(G) \setminus A_{s_i y}) \cup \{s_i\}$. Para esto hacemos un argumento parecido al que hicimos para demostrar, en el caso $k = n - 1$, que toda ficha está confinada al único bloque en el que se encuentra la arista hacia donde está el espacio vacío. En efecto, si una ficha de v en $A_{x s_i}$ se mueve, debe hacerlo hacia algún vértice de P , al que llamamos z , entonces hay $\ell(z P s_i)$ espacios vacíos en $A_{z y}$, además, como las aristas de P son puentes, la cantidad de espacios vacíos en dirección de s_i disminuye en uno cada vez que la ficha se mueve sobre P en dirección de s_i . Por lo tanto, aún si esta ficha logra llegar a s_i , estará ahogada, ya que todos los espacios vacíos estarán en $V(G) \setminus A_{s_i y}$. Así, la ficha que inició en y jamás podrá ocupar vértices en $A_{s_i y} \setminus \{s_i\}$. Como en este caso la ficha que inició en x sí puede ocupar un vértice de este conjunto, la primera jamás podrá llegar a la posición que ocupa la segunda. Se deduce que el tablero de x no está contenido en el de y y, entonces, y no está en la órbita de x . Se concluye que existen al menos dos espacios vacíos en $A_{s_i y}$ y así que $(x, i) \in R_2(u)$, $(i, j) \in R_4(u)$, y $(y, j) \in R_1(u)$, como queríamos ver.

Por último, suponemos que toda xy -trayectoria pasa por un puente. Sea P una xy -trayectoria. Procedemos por inducción sobre el número de respiraderos en vértices internos de P . En el caso en que no hay respiraderos entonces, como P pasa por puentes pero ningún respiradero, todas las aristas de P son puentes y todos sus vértices internos tienen grado dos. De forma semejante al argumento anterior, para que la ficha en y pueda ser llevada a la posición que ocupa la ficha en x en u , es necesario que alguna de ellas pueda llegar a un respiradero s_{i_0} . Supongamos que es la ficha que inicia en x la que lo hace, nuevamente, como solo recorrió puentes, hay espacios vacíos en toda la trayectoria que recorrió para llegar a este respiradero. Si en esta configuración la ficha en s_{i_0} está ahogada o solo existe un espacio vacío en $A_{s_{i_0} y}$, entonces para que la ficha en y pueda llegar a los vértices de $A_{s_{i_0} y}$ a los que puede llegar la ficha que inicia en x , es necesario que esta última pueda alcanzar otro respiradero s_{i_1} de tal forma que, al hacerlo, tenga un espacio vacío en $A_{s_{i_1} s_{i_0}}$ hacia el cual moverse, permitiendo que las fichas (entre aquellas la que inició en y) que se

encuentran en $A_{s_{i_1}s_{i_0}}$ puedan pasar a los vértices de P . Se sigue que la ficha en y también puede llegar a s_{i_1} y moverse a un vecino fuera del camino que sigue hasta él, por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} |V(G) \setminus (A_{xs_{i_1}} \cup u)| &\geq d(x, s_{i_1}) + 1, \text{ y} \\ |V(G) \setminus (A_{ys_{i_1}} \cup u)| &\geq d(y, s_{i_1}) + 1, \end{aligned}$$

se concluye que $(x, i_1), (y, i_1) \in R(u)$. Por otro lado, si la ficha que inicia en x puede llegar a s_{i_0} de forma que existan dos espacios vacíos en $A_{s_{i_0}y}$ pero no sucede que

$$|V(G) \setminus (A_{ys_{i_0}} \cup u)| \geq d(y, s_{i_0}) + 1,$$

entonces, para que la ficha en y pueda llegar a los vértices de $A_{s_{i_0}y}$ a los que puede llegar aquella que inicia en x , es necesario que llegue a un respiradero s_{i_1} , distinto de s_{i_0} , y después, a un vecino de s_{i_1} fuera del camino que recorrió para alcanzarlo, permitiendo que todas aquellas fichas en la $s_{i_0}s_{i_1}$ -trayectoria que no puedan llevarse a espacios vacíos de $A_{s_{i_0}x}$ se muevan a espacios de $A_{s_{i_1}y}$, de otra forma las fichas que inician en x y y siempre estarán separadas por aquellas fichas que no sea posible sacar de la $s_{i_0}s_{i_1}$ -trayectoria, que está formada por vértices de corte, lo que está en contradicción con la suposición de que y está en la órbita de x . De aquí se concluye que

$$\begin{aligned} |V(G) \setminus (A_{xs_{i_0}} \cup u)| &\geq d(x, s_{i_0}) + 1, \\ |V(G) \setminus (A_{ys_{i_1}} \cup u)| &\geq d(y, s_{i_1}) + 1 \text{ y} \\ d(s_{i_0}, s_{i_1}) &\geq n - k - 2. \end{aligned}$$

Para el paso inductivo, notemos que si alguno de x o y no es de corte entonces está relacionado, mediante $R_1(u)$, con algún respiradero en la xy -trayectoria. Supongamos sin pérdida de generalidad que x no es de corte. Luego, es posible llevar la ficha en x al respiradero que aparece en P más cercano, pues está dentro de su bloque no-trivial. Si hacemos esto, el camino que une a esta ficha con la que está en y tendrá un respiradero menos en sus vértices internos que en los de P , y podemos concluir por hipótesis inductiva. Por otro lado, si suponemos que tanto x como y son de corte, llamando s_{i_r} al último respiradero que aparece en P , si

$$|V(G) \setminus (A_{ys_{i_r}} \cup u)| \geq d(y, s_{i_r}) + 1$$

entonces $(y, i_r) \in R_2(u)$, llevamos la ficha en y a s_{i_r} , y volvemos a concluir por inducción. Así que suponemos que no hay suficientes espacios vacíos en el lado correcto

de y para que ésta llegue a un vecino que s_{i_r} fuera de la única ys_{i_r} -trayectoria. Sin embargo, como es necesario que la ficha en y haga esto para llegar a x , esta ficha debe poder llegar a otro respiradero fuera de P , $s_{i_{r+1}}$, y permitir que las fichas que le impiden llegar un vecino de s_{i_r} se muevan a vértices de $A_{s_{i_{r+1}}s_{i_r}}$. Esto implica que

$$\begin{aligned}(y, i_{r+1}) &\in R_2(u) \text{ y} \\ (i_{r+1}, i_r) &\in R_4(u),\end{aligned}$$

movemos la ficha que inició en y a s_{i_r} y concluimos por inducción. ■

Todo este trabajo da frutos pues nos permite demostrar el Teorema 2.4.5 que, entre otras consecuencias que discutiremos en el Capítulo 3, da una solución al caso más general del 15-puzzle: jugado en tableros arbitrarios y con cualquier cantidad de fichas.

Teorema 2.4.5. *Si G es una gráfica de orden n , con $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \llbracket n \rrbracket$, y $u \in V(F_k G)$ tiene órbitas $O_1, \dots, O_\ell$ de cardinalidades $r_1, \dots, r_\ell$ y subtableros $B_1, \dots, B_\ell$, respectivamente, entonces*

$$\Sigma_k G \cong \prod_{i=1}^{\ell} \Sigma_{r_i} B_i.$$

Más aún, si $k < n - 1$, entonces $\Sigma_{r_i} B_i = S_{r_i}$ para toda $i \in [\ell]$, por lo tanto

$$\Sigma_k G \cong \prod_{i=1}^{\ell} S_{r_i}.$$

Demostración. Primero recordemos que, por definición de órbita, para cualesquiera $[P] \in \Sigma_k G$ e $i \in [\ell]$, se cumple que $[P]|_{O_i} \in S_{O_i}$. Por lo tanto, $\Sigma_k G \subseteq \prod_{i=1}^{\ell} S_{O_i}$. Además, como las fichas de cada órbita se mueven solo en su subtablero, es posible realizar la permutación que sufre O_i en $F_{r_i} B_i$ para toda $i \in [\ell]$. Así,

$$\Sigma_k G \subseteq \prod_{i=1}^{\ell} \Sigma_{r_i} B_i \subseteq \prod_{i=1}^{\ell} S_{O_i}.$$

En el caso $k = n - 1$ es claro que la primera contención es una igualdad ya que los subtableros coinciden con los bloques de G y, una vez que se lleva el espacio vacío a uno de ellos, B_i , las fichas que quedan en él nunca podrán salir, por lo que los movimientos válidos para ellas coinciden con los movimientos válidos que tendrían de encontrarse jugando en cualquier copia isomorfa de B_i . La segunda contención,

sin embargo, no es necesariamente una igualdad, pues los bloques que solo contienen ciclos pares solo admitirán permutaciones pares.

Por otro lado, si $n < k - 1$, se sigue del Lema 2.4.4 que es posible transponer cualesquiera dos fichas en la misma órbita, como estas transposiciones generan al grupo simétrico de cada órbita, la segunda contención es una igualdad. ■

Capítulo 3

Policías y ladrones

3.1. Introducción

Una de las ideas más comunes en todo tipo de juegos, desde niños jugando a las atrapadas en el recreo hasta dos Grandes Maestros disputándose el campeonato mundial de ajedrez, es la de persecución y captura. Y es que la tensión entre dos sujetos, uno que intenta restringir el movimiento del otro y el segundo que intenta evitarlo, es una experiencia humana universal, que predomina en nuestra imaginación, y hace muy natural la pregunta ¿es posible para el persecutor dar captura al evasor, o éste podrá escapar indefinidamente? Como es de esperarse, la respuesta depende de exactamente en qué juego estemos pensando. Por simplicidad, analicemos un juego de atrapadas entre dos niños que corren a exactamente la misma velocidad en un patio de juegos. En este caso, la capacidad del persecutor de atrapar al evasor depende de la forma que tenga el patio de juegos. En efecto, es fácil convencerse de que, si éste fuera un pasillo del ancho justo para que pase un niño a la vez, entonces al persecutor le basta dirigirse hacia el evasor, quien, al llegar al final del pasillo, no tendrá más opción que esperar a su captura o moverse hacia su perseguidor. En cambio, si en algún lugar del patio existe una región circular que los niños no pueden atravesar (por ejemplo, un área verde sobre la que no tienen permitido jugar), a cualquier posición en la que se encuentre uno de los niños es posible asociarle el único punto del perímetro de esta área en el que se intersecta con la recta que pasa por la posición del niño y el centro del círculo. De esta forma, vemos que el juego que realizan los niños en el patio da lugar también a uno que juegan los puntos asociados a su posición en la circunferencia. Sabemos que, si el persecutor lograra capturar, entonces el punto asociado a la posición de ambos sería el mismo, por lo que en el juego que se lleva a cabo en la orilla del área verde, también se logra la captura. Por

lo tanto, si el evasor sabe evitar ser capturado en la orilla del círculo y puede moverse en el patio de forma que el punto sobre la circunferencia asociado a su posición siga la estrategia para evitar captura, entonces el evasor podrá evitar ser capturado. Para quien haya jugado atrapadas alguna vez, lo anterior es una sobreexplicación de algo que es empíricamente evidente: el perseguido puede evitar ser capturado indefinidamente moviéndose alrededor de la circunferencia en el mismo sentido que lo haga su persecutor. Esta situación se ilustra en la Figura 3.1 Sin embargo, esta estrategia colapsa rápidamente si introducimos un segundo persecutor en el juego, en este caso, uno de ellos puede dedicarse a moverse a lo largo de una línea que radía del centro del área verde, intentando igualar la distancia a la que está el evasor del perímetro, con la intención de “cortarle el paso” al evasor que intente seguir la estrategia de moverse siempre en la misma dirección que un persecutor. Así, llegamos naturalmente a la pregunta ¿cuál es la menor cantidad de persecutores necesarios para asegurar la captura de un evasor? En este capítulo estudiamos el planteamiento discreto de estas preguntas, cuando el espacio en donde se mueven los jugadores se puede modelar como un tablero e instauramos un sistema de turnos alternantes tal que, en el turno de cada jugador, éste puede elegir moverse a una casilla adyacente o quedarse en el mismo lugar. A este juego se le conoce como el juego de *policías y ladrones*¹ en gráficas. Por razones obvias, usamos el término policía como sinónimo de persecutor y ladrón como sinónimo de evasor.

Intuitivamente, dada una gráfica G , una partida de policías y ladrones en G se desarrolla con dos jugadores, un ladrón y un equipo de policías, de la siguiente forma:

1. Los policías eligen sus posiciones iniciales, colocándose en cualesquiera vértices de la gráfica. En cualquier momento del juego, dos o más policías pueden ocupar el mismo vértice.
2. El ladrón elige su posición inicial, colocándose en cualquier vértice de la gráfica.
3. Los jugadores se mueven en turnos alternantes a vértices adyacentes, empezando por los policías, quienes se pueden mover todos en su turno.
4. Los policías ganan si se llega a una posición en donde existe un policía ocupando el mismo vértice que el ladrón. El ladrón gana si puede evitar que los policías ganen.

Este juego fue definido independientemente por Quillot [48] en 1978 y por Nowakowski y Winkler [41] en 1983, quienes estudiaron únicamente el caso en donde hay

¹ *cops and robbers* o *cops and robber*

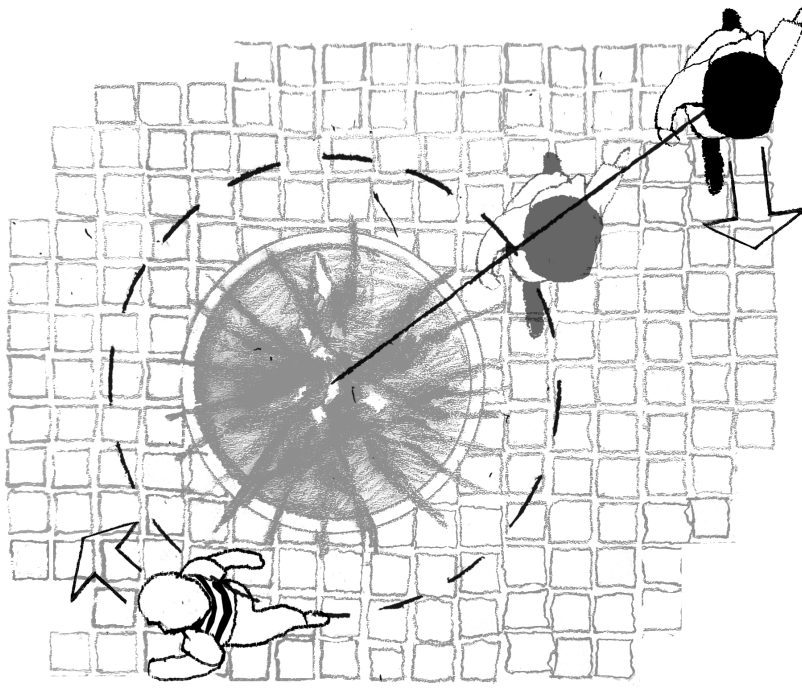


Figura 3.1: La estrategia de evasión si hay un obstáculo circular en el patio de juegos.

un policía. Fueron Aigner y Fomme [1], en 1984, quienes generalizaron el juego permitiendo la presencia de más de un policía y definiendo el *número policiaco*² de G como el menor número de policías necesarios para asegurar la captura del ladrón. Esta invariante ha sido ampliamente estudiada, véanse [6] y [27].

Formalmente, para cualquier gráfica G de orden n , con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $c \in \llbracket n \rrbracket$, una **partida de policías y ladrones con c policías en G** es una función $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow V(G)^{c+1}$ tal que

1. Para toda $i \in \llbracket c+1 \rrbracket$ y $t \in \mathbb{N}$ se cumple que $f_i(t)f_i(t+1) \in E(G)$.
2. Los policías ganan la partida f si existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f_i(t) = f_{c+1}(t)$ o $f_i(t+1) = f_{c+1}(t)$. El ladrón gana si no ganan los policías.

En este contexto, a los elementos en el dominio de la partida les decimos **turnos**, y a las funciones $f_i = \pi_i \circ f$, con π_i las únicas funciones que caracterizan al producto de gráficas de acuerdo a la Proposición 1.4.2, les decimos **piezas**. En particular, a las

²*cop number*

primeras c piezas $f_1, \dots, f_c$ les decimos **policías** —más aún, f_i es el i -ésimo policía— y a f_{c+1} el **ladrón**. De esta forma, cualquier evaluación de una partida de policías y ladrones, $f(t)$, es una lista de vértices de G que se interpreta como aquellos en los se encuentran los policías y el ladrón después de la t -ésima ronda de turnos. Es por esto que a la evaluación en un turno t de cualquier pieza de f le decimos su **posición al turno t** o su **t -ésima posición**. La primera posición de cualquier pieza, $f_i(1)$, se corresponde con la elección de su posición inicial, la condición $f_i(t)f_i(t+1) \in E(G)$ es que dos posiciones consecutivas de una pieza deben estar unidas por una arista de G y, si en algún turno t se satisface la segunda condición, es decir que $f_i(t) = f_{c+1}(t)$ o $f_i(t+1) = f_{c+1}(t)$, decimos que el i -ésimo policía **captura** al ladrón en el turno t . Subrayamos que la disyunción con la que se define la captura refleja la alternancia de los turnos, ya que pensamos que el turno del ladrón sucede después de que el policía elija su t -ésima posición, entonces el ladrón puede ser capturado de dos formas: si decide que su t -ésima posición sea un vértice ocupado por el policía al turno t , o si, en el turno $t+1$ algún policía alcanza la posición ocupada por el ladrón al turno t . Una **estrategia para el ladrón** es una función $e : V^{c+1} \rightarrow V(G)$ tal que $f_{c+1}(t)e(f(t)) \in E(G)$ para toda partida f y $t \in \mathbb{Z}^+$; el ladrón sigue esta estrategia en la partida f si, para toda $t \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $f_{c+1}(t+1) = e(f(t))$. Una **estrategia para los policías** es una función $e : V^{c+1} \rightarrow V(G)^c$ tal que, para toda $i \in \llbracket c \rrbracket$ y $t \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $f_i(t)e_i(f(t)) \in E(G)$, en donde $e_i = \pi_i \circ e$. Naturalmente, los policías siguen esta estrategia en f si $f_i(t+1) = e_i(t)$ para toda $i \in \llbracket c \rrbracket$ y $t \in \mathbb{Z}^+$. Una estrategia, para los policías o para el ladrón, es **ganadora** si se gana en toda partida en la que se le sigue. Nótese que, por lo tanto, la existencia de estrategias ganadoras para los policías o para el ladrón son afirmaciones mutuamente excluyentes. Finalmente, definimos el **número policiaco** de G como el mínimo $c \in \llbracket n \rrbracket$ tal que existe una estrategia ganadora para los policías. Como n policías siempre tienen la estrategia ganadora dada por elegir todos una primera posición diferente, el número de policiaco está bien definido. A las gráficas que cumplen $c(G) \leq k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$ les decimos **k -copwin**, en particular, a las gráficas 1-copwin les decimos simplemente **copwin**. A $m^{f_i(t)f_{i+1}(t+1)}$ le decimos el movimiento de la i -ésima ficha (o del i -ésimo policía o del ladrón), es claro que podemos describir una partida de policías y ladrones especificando una posición inicial y los movimientos que realiza cada ficha en cada turno. De esta forma, recuperamos el lenguaje de movimientos para las piezas de un juego de policías y ladrones. El primer paso para estudiar una invariante de gráficas es computarla para las familias más clásicas, de esto se encarga la Proposición 3.1.1.

Proposición 3.1.1. *Para $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $c(P_n) = 1$, $c(K_n) = 1$, y $c(O_n) = n$. Además, si $n \geq 4$ entonces $c(W_n) = 1$ y $c(C_n) = 2$.*

Demostración. Esto es claro para K_n y W_n ya que existen vértices universales, por lo tanto, un policía que se posicione en uno de ellos en el primer turno podrá capturar al ladrón apenas este elija su posición inicial. Sabemos que n vértices son suficientes para capturar en O_n porque son suficientes para capturar en cualquier gráfica de orden n , además son necesarios ya que, si jugáramos con menos policías, existiría un vértice sin policía y que es su propia componente conexa, de forma que los policías no podrán llegar a él. Por lo tanto, si el ladrón se coloca en este vértice en el primer turno, jamás será capturado.

Para ver que $c(P_n) = 1$, denotemos R al ladrón y A al policía. Si definimos $\rho : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ como

$$\rho(t) = d(A(t+1), R(t)),$$

notemos que, si $\rho(t) = 0$ para algun turno t , entonces R es capturado al turno t . Definimos una estrategia para A en P_n de la siguiente forma: si A no ha capturado a R después de que el policía eligiera su $(t+1)$ -ésima posición, entonces el ladrón tiene dos posibilidades, moverse en dirección de su captor o en dirección opuesta. Si elige lo primero —y si esto no resulta en la captura del ladrón al turno t — el policía se moverá en dirección del ladrón al turno $t+2$, por lo tanto, $\rho(t+1) = \rho(t) - 2$. Si realiza lo segundo, el policía se moverá en la misma dirección que él, así $\rho(t+1) = \rho(t)$. Se deduce de esto que la función ρ es no-decreciente si el policía sigue esta estrategia. Además, como el ladrón eventualmente llegará a un extremo de la trayectoria y no podrá realizar más movimientos del segundo tipo, la función decrece estrictamente tras una cantidad finita de movimientos. Esto demuestra que existe $t_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\rho(t_0) = 0$, lo que prueba la afirmación.

Por último, para ver que $c(C_n) = 2$, primero veamos que un policía no basta para capturar. Definimos la función ρ de la misma forma que anteriormente para un policía y un ladrón en C_n . Notemos que, sea cual sea el movimiento que realice el policía al turno $t+1$, si el ladrón se mueve en el mismo sentido del ciclo que él lo hizo, entonces, sin importar el movimiento del policía al turno $t+2$, se tiene que $\rho(t+1) \geq \rho(t)$. Por lo tanto, ésta es una estrategia ganadora para el ladrón, de forma que $c(C_n) > 1$. Para ver que dos policías son suficientes basta colocar un primer policía en cualquier vértice del ciclo y no moverlo durante la partida, si el ladrón no quiere ser capturado por él, está restringido a jugar en el resto de los vértices. Sin embargo, éstos inducen una trayectoria en donde puede ser capturado por un segundo policía. ■

El argumento anterior, particularmente lo correspondiente a K_n y W_n , permite reparar en una cota superior obvia para el número policiaco de una gráfica: su número de dominación. En efecto, es claro que, si posicionamos a los policías en un conjunto

dominante, podrán capturar al primer turno. Sin embargo, esta cota es mala ya que existen familias de gráficas en donde la diferencia entre estos parámetros es arbitrariamente grande. Por ejemplo, las trayectorias, que tienen número de dominación $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ y número policiaco 1. Esta demostración también introduce una técnica que resulta muy útil para argumentar que las estrategias son ganadoras: mostrar propiedades sobre la monotonía de la función ρ . Por ejemplo, la unicidad de la trayectoria entre cualesquiera dos vértices de un árbol implica que, si definieramos la función ρ para un policía y un ladrón en él, el ladrón, así como sucede en las trayectorias, tendrá la disyuntiva de moverse en dirección del policía (hacia el siguiente vértice sobre la única trayectoria que lo une a él) o en dirección opuesta (cualquier otro vértice) y, nuevamente, si el policía siempre se mueve en dirección del ladrón, ρ será no-creciente y eventualmente decrecerá ya que el ladrón eventualmente llegará a una hoja y no tendrá más movimientos que eviten la disminución de la distancia entre ellos.

Para concluir esta introducción al juego de policías y ladrones, mostraremos que el número policiaco puede ser arbitrariamente grande, es decir, construiremos una familia en la que pueden encontrarse gráficas con número policiaco tan grande como se desee. Para ello, nos será de utilidad el siguiente resultado de Aigner y Fomme [1] que encuentra condiciones suficientes para que el grado mínimo de una gráfica acote inferiormente su número policiaco.

Proposición 3.1.2. *Si G es una gráfica con cuello al menos 5, entonces $c(G) \geq \delta(G)$.*

Demostración. Supongamos que $\delta(G) - 1$ policías juegan en G , mostraremos que existe una estrategia ganadora para el ladrón. Denotamos R al ladrón, $A_1, \dots, A_{\delta(G)-1}$ a los policías, y definimos, para cada $i \in [\delta(G) - 1]$, la función $\rho : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ como

$$\rho_i(t) = d(A_i(t+1), R(t)).$$

Veamos que, si existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $\rho_i(t) \geq 2$ para toda $i \in [\delta(G) - 1]$, como en G no hay ciclos de longitud cuatro, entonces cada policía es adyacente a lo más a un vecino de $R(t)$, por lo tanto, existe un vecino del ladrón que no es adyacente a ningún policía. Se deduce que, si el ladrón se mueve a este vértice en el turno $t+1$, se cumplirá que $\rho_i(t+1) \geq 2$. Lo anterior implica que, si siempre es posible que el ladrón elija su primera posición de forma que $\rho(1)_i \geq 2$ para toda $i \in [\delta(G) - 1]$, el ladrón podrá moverse en cada turno a un vértice que preserve esta propiedad y, por lo tanto, esto será una estrategia ganadora para él. Para ver que esto es posible, llamemos $\mathcal{P} = \{A_1(1), \dots, A_{\delta(G)-1}(1)\}$ y consideremos $z \in V(G) \setminus \mathcal{P}$. Si X es el conjunto de vecinos de z fuera de $\mathcal{P}$ y Y el conjunto de vecinos de z en $\mathcal{P}$,

entonces, como no existen ciclos de longitud tres, no hay vértices en X adyacentes a vértices en Y . Además, como no hay ciclos de longitud cuatro, dos vértices de Y no comparten vecinos. Se deduce que los policías que son adyacentes a vértices de Y están contenidos en $\mathcal{P} \setminus X$ y no hay policías adyacentes a dos vértices de Y . Como $|Y| \geq \delta(G) - |X|$ y $\delta(G) - 1 - |X| \geq |\mathcal{P} \setminus X|$, existe algún vértice en Y que no es adyacente a ningún policía, y, por lo tanto, está a distancia al menos dos de todos los policías, siendo esto lo que queríamos demostrar. ■

Vale la pena mencionar que la Proposición 3.1.2 fue generalizada por Frankl [25], quien mostró que, para toda $t \in \mathbb{Z}^+$, si G es una gráfica con cuello al menos $8t - 3$, entonces $c(G) > (\delta(G) - 1)^t$.

Las Proposiciones 1.3.2 y 3.1.2 tienen como consecuencia que la gráfica bipartita asociada al plano proyectivo $GP(2, p^n)$, para cualquier p primo y $n \in \mathbb{Z}^+$, tiene número de policía al menos $p^n + 1$. En efecto, como la gráfica es bipartita, no tiene ciclos de longitud tres, y, como dos líneas de un plano proyectivo se intersectan en un único punto, no pueden existir ciclos de longitud cuatro, por lo que su cuello es al menos 5. Así, como estas gráficas son $(p^n + 1)$ -regulares, gracias a la Proposición 3.1.2 se deduce que el número policiaco de estas gráficas es al menos $p^n + 1$. Esto muestra que existen gráficas con número de policía arbitrariamente grande.

3.2. Sombras, productos, y caracterizaciones

Para motivar el concepto de *sombra*, retomemos el ejemplo en donde un equipo de dos niños intentan capturar a un tercero en un patio de juegos con una obstrucción circular. Fijémonos en que la estrategia descrita para los perseguidores al inicio del Capítulo 3 depende fundamentalmente de nuestra capacidad de asociar a cada posición en el patio de juegos una posición en el perímetro del área verde y en la línea que radia de su centro sobre la cual se mueve uno de los perseguidores. Sin embargo, admitimos que esta solución dista mucho de ser un argumento válido para afirmar que es posible realizar esta estrategia y capturar al ladrón, la razón de esto es en gran parte la falta de precisión respecto a exactamente cómo debe ser esta asociación para que lo anterior tenga sentido. Veremos que, en el caso discreto que nos ocupa, tiene sentido pedir que esta asociación debe ser una correspondencia entre las posiciones de todo el espacio y las posiciones en una parte restringida de él, de forma que las posiciones en la parte restringida son puntos fijos y los movimientos válidos en el espacio se convierten en movimientos válidos en la parte restringida. A la imagen de una pieza bajo una correspondencia así es a lo que le diremos la *sombra* de la pieza, veremos que este es un concepto clave para entender las gráficas k -copwin y,

en general, para diseñar estrategias tanto de evasión como de captura. El segundo ingrediente de esta sección es el producto de gráficas, particularmente las potencias de gráficas, que resultan ser el “hábitat natural” de las partidas de policías y ladrones jugadas en esas gráficas. A continuación, desarrollaremos estas ideas y las usaremos para demostrar las dos caracterizaciones que Clarke y MacGillivray [15] dan de las gráficas k -copwin, que generalizan las propias de Nowakowski y Winkler [41] para las gráficas copwin.

Para formalizar el concepto de sombra, consideremos f , una partida de policías y ladrones jugada en una gráfica G , y H un retracto de G con retracción $g : G \rightarrow H$, entonces, la **sombra de f_i proyectada por g al turno t** es $g(f_i(t))$. La importancia de la sombra proviene de que las estrategias ganadoras para los policías se heredan a sus sombras, esto queda enunciado en el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. *Si H es un retracto de G , entonces $c(H) \leq c(G)$.*

Demostración. Antes de ver que $c(G)$ policías son suficientes para capturar en H , observemos que, en general, la existencia de una estrategia ganadora para los policías en G no implica la existencia de una estrategia ganadora para los policías en una subgráfica inducida, ya que éstos pueden necesitar salir de la subgráfica para llevar a cabo su estrategia. Un ejemplo claro de esto lo ofrecen las ruedas, que son copwin pero la gráfica obtenida al borrar el vértice dominante es un ciclo, en donde se necesitan al menos dos policías si su longitud es al menos cuatro. Es por esto que es necesaria la existencia de una retracción $g : G \rightarrow H$, pues con ella podemos definir la **sombra de una estrategia** para los policías $e = (e_1, \dots, e_{c(G)})$ como $g \circ e = (g \circ e_1, \dots, g \circ e_{c(G)})$. Dado que g es un morfismo, preserva adyacencias, por lo tanto $g \circ e$ es una estrategia para los policías en H . Para ver que la sombra de una estrategia ganadora en G es ganadora en H , identificamos a H con la subgráfica de G isomorfa a H tal que $V(H) \subset V(G)$ y pensamos que en G se desarrollan dos partidas de policías y ladrones simultáneamente: una jugada por el ladrón, quien se restringe a los vértices de H , y los policías, que siguen la estrategia e en G ; y otra que juegan en H las sombras de los policías, que siguen la estrategia $g \circ e$, y del ladrón. Así, dado que g es una retracción, $g|_{V(H)} = Id_{V(H)}$, de forma que la sombra del ladrón coincide con la posición que realmente ocupa y, cuando los policías capturan al ladrón en G , sus sombras lo hacen en H . Se concluye que $c(G)$ policías son suficientes para capturar en H . ■

Observemos que, como consecuencia de la Proposición 3.2.1, si H es un retracto de G , es posible capturar a la sombra del ladrón en H con $c(H)$ policías y, una vez que ha sucedido esto, podemos asignar al policía que lo logra, la misión de recapturarla en

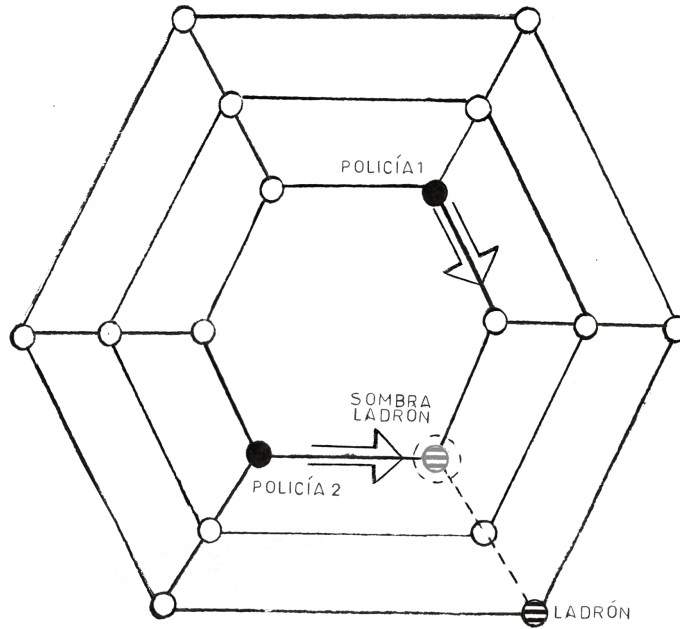


Figura 3.2: Las estrategias de las sombras sobre $[\{1\}]_{P_n} \times C_m$ de dos policías y un ladrón que juegan en $P_n \times C_m <$.

cada turno. De manera que, si los policías siguen esta estrategia, el ladrón ya no podrá ocupar ningún vértice de H , ya que, de hacerlo, su sombra coincidirá con su posición y será capturado en ese turno por el policía dedicado a recapturar su sombra. Por lo tanto, $c(H)$ policías son suficientes para confinar al ladrón a jugar en $G - V(H)$, dejando uno de ellos encargado de “defender” los vértices H . En esta situación, si tuviéramos otros $c(G - V(H))$ policías en la partida, podríamos capturar al ladrón en G . De esta forma se argumenta el siguiente corolario de la Proposición 3.2.1.

Corolario 3.2.2. *Si H es un retracto de G , entonces*

$$c(G) \leq \max\{c(H), c(G - V(H)) + 1\}.$$

Demostración. ■

Las retracciones de un punto juegan un papel particularmente importante en la estructura de las gráficas copwin, pues la existencia de una de ellas, $g : G \rightarrow G - x$,

dada por

$$g(z) = \begin{cases} y & z = x \\ z & z \neq x, \end{cases}$$

para dos vértices x y y , es equivalente a que $N(x) \subseteq N(y)$. Observemos que, entonces, si en el turno t el ladrón ocupa el vértice x y un policía está en y , el ladrón será capturado al turno t . De hecho, si un ladrón siempre puede ser capturado por un solo policía, es necesario que exista un vértice que tiene su vecindad contenida en la de otro. Ya que, de otra forma, siempre existe un vecino de la posición del ladrón que no es adyacente al vértice en que se encuentra el policía y el ladrón podría moverse a él en cada turno, asegurando que el policía no lo captura al turno siguiente. Es por este análisis que a un vértice x le decimos una **esquina** de G si existe otro, y , tal que $N(x) \subseteq N(y)$. Resulta que las gráficas copwin son exactamente aquellas a las que se les pueden ir borrando esquinas hasta quedarnos sin vértices. Precisamente, decimos que una gráfica G es **desmantelable** si es posible ordenar sus vértices, $x_1, \dots, x_n$, de forma que x_i es una esquina de $[\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}]_G$ para toda $i \in [n]$. A un ordenamiento de este tipo de decimos un **desmantelamiento** de G . El siguiente resultado es gracias a Nowakowski y Winkler [41].

Proposición 3.2.3. *Una gráfica G es copwin si y sólo si es desmantelable.*

Demostración. Para ver que una gráfica copwin es desmantelable, lo hacemos por inducción sobre su orden. En el caso base, cuando $n = 1$, no hay nada que probar. Si $n > 1$, por la discusión anterior, debe existir una esquina en G , llamémosla x_0 . Como $G - x_0$ es un retracts, por la Proposición 3.2.1, se tiene que $c(G - x_0) = 1$ y, por hipótesis inductiva, existe un desmantelamiento de $G - x_0$, dado por $x_1, \dots, x_{n-1}$, de forma que $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ es un desmantelamiento de G .

El argumento de la otra implicación es parecido. Por inducción sobre el orden de G , como es evidente que las gráficas de orden uno son copwin, basta ver el paso inductivo. Para ello, sea x el último vértice en un desmantelamiento de G y y otro vértice tal que $N(x) \subseteq N(y)$. Por lo tanto, existe una retracción de un punto $g : G \rightarrow G - x$ tal que $g(x) = y$. Así, como es claro que borrar el último vértice de una gráfica desmantelable resulta en una gráfica desmantelable de orden menor, gracias a la hipótesis inductiva, tenemos que $G - x$ es copwin. De forma que el policía puede capturar a la sombra del ladrón en $G - x$. Si la sombra del ladrón no fuera igual a su posición, es porque éste se encuentra en x , y, como el policía captura a su sombra en $G - x$, él se encuentra en y . Como $N(x) \subseteq N(y)$ se concluye que el ladrón será capturado al siguiente turno y, por lo tanto, G es copwin. ■

Este resultado lo entendemos como una generalización de la estructura de los árboles, que se caracterizan por tener un desmantelamiento en donde cada esquina de él es una hoja.

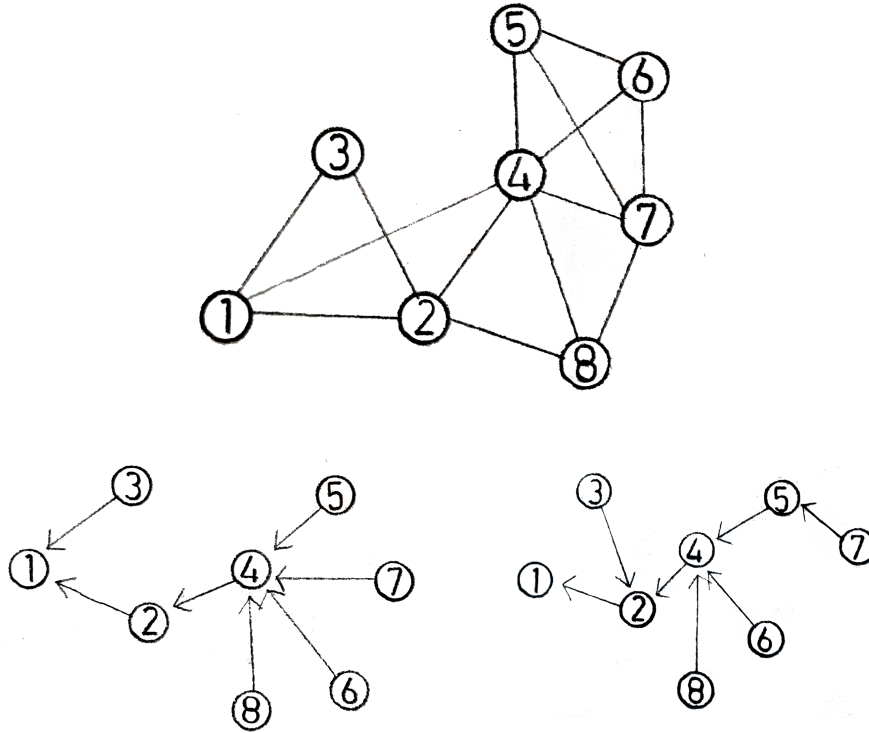


Figura 3.3: Dos desmantelamientos de una gráfica copwin y su similitud con dos árboles.

Además, con base en la Proposición 3.2.3 es posible construir una estrategia ganadora para el policía que captura en a lo más n movimientos. A esta estrategia le decimos una **estrategia sin retroceso**, y queda descrita en el siguiente resultado.

Corolario 3.2.4. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y G una gráfica copwin de orden n , entonces un policía puede capturar al ladrón en a lo más n movimientos.

Demostración. Supongamos que $x_1, \dots, x_n$ es un desmantelamiento de G , llamemos G_i a la gráfica $[\{x_i, \dots, x_n\}]_G$, y g_i a la retracción de G_i en G_{i+1} . Definimos $F_1 = Id_{V(G)}$ y, para $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la retracción de G en G_i dada por $F_i = g_{i-1} \circ \dots \circ g_1$. Notemos que G_i es la gráfica obtenida de borrar los primeros $i - 1$ vértices del desmantelamiento y, como cada g_i es una retracción, para cada $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, se satisface

que $F_{i-1}(x)F_i(x) \in E(G)$. Así, la estrategia sin retroceso inducida por el desmantelamiento es aquella en donde el policía captura la sombra del ladrón proyectada por F_{n-i+1} sobre G_{n-i+1} en el i -ésimo turno. Esta estrategia está bien definida ya que G_n es un único vértice, que será la posición inicial del policía, y la sombra del ladrón proyectada por F_{n-i+1} es adyacente a la proyectada por F_{n-i} en todos los turnos. Finalmente, como $F_1 = Id$, esta estrategia resulta en la captura del ladrón en no más de n turnos. ■

En [41] se preocupan por estudiar el número policiaco en gráficas cuyo conjunto de vértices puede ser infinito, a pesar de que no tratamos este caso en el presente texto, mencionamos que la caracterización de la Proposición 3.2.3 falla para este tipo de estructuras. Además, la estrategia sin retroceso está lejos de optimizar la cantidad de turnos necesarios para la captura, las ruedas son un ejemplo claro de esto. Con la intención de resolver estas dificultades, Nowakowski y Winkler desarrollan una caracterización alternativa, definiendo una colección de relaciones $<_\alpha \subseteq V(G)^2$ para algunos $\alpha \in \mathbb{Z}$, que deben entenderse como que, si $x <_\alpha y$ y en algún turno el ladrón está en x y el policía en y , entonces el ladrón es capturado en a lo más α turnos a partir de ese momento. Con esta técnica, además de una caracterización de las gráficas copwin, podremos construir una estrategia que optimiza el número de movimientos del policía y será una herramienta central para generalizar esta caracterización a una para las gráficas k -copwin. Las relaciones $<_\alpha$ las definen recursivamente, es natural que $<_0 = I_{V(G)}$ pues esta relación está formada por las parejas de vértices, (x, y) , tales que el policía en y puede capturar al ladrón en x sin hacer ningún movimiento. Para $\alpha > 0$, se define $x <_\alpha y$ si y sólo si, para toda $x' \in N(x)$, existen $y' \in N(y)$ y $\beta \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket$ tales que $x' <_\beta y'$. Como es claro que $\beta < \alpha$ implica $<_\beta \subseteq <_\alpha$, por la finitud de $V(G)$ existe un $\gamma \in \mathbb{Z}$ tal que $<_\alpha = <_\gamma$ para toda $\alpha \geq \gamma$. A la relación $<_\gamma$ la denotamos simplemente $<$. Con esto, enunciamos una segunda caracterización de las gráficas copwin.

Proposición 3.2.5. *Una gráfica G es copwin si y sólo si $< = V(G)^2$.*

Demostración. Para la primera implicación procederemos por contraposición, suponiendo que existen $x_1, y_1 \in V(G)$ tales que $x_1 \not< y_1$ y viendo que, entonces, G no es copwin. En efecto, si tales vértices existieran, podemos suponer que el policía empieza en y_1 y el ladrón en x_1 . Esto es válido ya que, si G es copwin, el policía debe tener una estrategia ganadora con posición inicial en cualquier vértice, pues las gráficas copwin son conexas y, por ello, el policía puede colocarse en la posición que desee para empezar a seguir una estrategia ganadora en un número finito de turnos. Entonces, por la definición de $<$, existe $x_2 \in N(x_1)$ tal que $x_2 \not< y_2$ para toda

$y_2 \in N(y_1)$. Por lo tanto, denotando x_i y y_i a la posición del ladrón y el policía al turno i respectivamente, usando recursión sobre i es posible elegir $x_{i+1} \in N(x_i)$ tal que $x_{i+1} \nprec y_{i+1}$. En particular, el ladrón siempre se puede mover a un vértice que no es vecino del policía, asegurando que el juego se extiende al menos un turno más. Así, esta es una estrategia ganadora para el ladrón y la gráfica no es copwin.

Para la implicación faltante, supongamos que $\prec = \prec_\gamma$ para alguna $\gamma \in \mathbb{Z}^+$. Veamos que, si $x_1, y_1 \in V(G)$ son las posiciones iniciales del ladrón y el policía, respectivamente, entonces el policía tiene una estrategia que captura en a lo más α turnos si y solo si $x_1 \prec_\alpha y_1$. Esto es claro si $\alpha = 0$, por lo tanto, veamos que el paso inductivo es válido. Suponiendo $x_1 \prec_\alpha y_1$ para alguna $\alpha \in [\gamma]$ y $x_1 \neq y_1$, por la definición de $\prec_\alpha$, esto es equivalente a que para toda $x_2 \in N(x_1)$ exista $y_2 \in N(y_1)$ tal que $x_2 \prec_{\alpha-1} y_2$. Por lo tanto, tras el movimiento del ladrón a algún x_2 , el policía mueve al correspondiente y_2 y, por hipótesis inductiva, el policía tiene una estrategia que captura en a lo más $\alpha - 1$ turnos con posiciones iniciales x_2 y y_2 . Esto último es equivalente a que el policía tenga una estrategia que captura en a lo más α turnos con posiciones iniciales x_1 y y_1 , con lo que se concluye la afirmación. Como al seguir esta estrategia se logra una captura en no más de α turnos, si además en cada turno encontramos la menor α tal que $x_1 \prec_\alpha y_1$, se logra una captura en la menor cantidad de turnos posible. ■

Como hemos discutido, a pesar de que esta caracterización no nos brinda una intuición geométrica respecto a cómo se ven las gráficas copwin, resulta mucho más fácil de generalizar esta idea para obtener una caracterización de las gráficas k -copwin que, una vez tengamos, nos servirá para encontrar un análogo a la Proposición 3.2.3 también en este caso. Para ello, recordamos que una partida de policías y ladrones es una función $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow V(G)^{c+1}$ tal que $f_i(t)f_i(t+1) \in E(G)$ para toda $i \in \llbracket c+1 \rrbracket$, lo que es equivalente a que, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, la función $f|_{[n]}$ es un morfismo de P_n en G^{c+1} . Es decir, una partida de policías y ladrones se puede entender como un camino infinito en G^{c+1} , y es en los vértices de esta gráfica en donde existirá un orden análogo a un desmantelamiento. Antes de ver esto, enunciamos el siguiente resultado, que muestra otra relación importante entre el juego de policías y ladrones y el producto de gráficas.

Proposición 3.2.6. *Si G y H son gráficas k -copwin para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $G \times H$ es k -copwin.*

Demostración. Si e y e' son estrategias ganadoras para k policías en G y H respectivamente, entonces, por la definición de la adyacencia en el producto de gráficas, la función $(e, e') : V(G)^{k+1} \times V(H)^{k+1} \rightarrow V(G)^k \times V(H)^k$ es una estrategia ganadora

para k policías en $V \times H$. Para ser más específicos, las estrategias e y e' son idénticas a e y e' cuando los policías, en G y en H respectivamente, no han capturado; una vez que lo han hecho, recapturan en cada turno, de forma que es cuestión de tiempo para que la otra estrategia también logre capturar y, entonces, se capture al ladrón en $G \times H$. ■

Las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.6 muestran que la familia de gráficas k -copwin es cerrada bajo retracciones y productos, a una familia de gráficas que satisface estas dos condiciones se le conoce como una **variedad**. Las variedades se estudian en [21, 42] con el objetivo de desarrollar un esquema general de clasificación de gráficas.

Siguiendo a Clark y MacGillivray [15], generalizamos la relación $<$ al caso de k policías de la forma natural, através de una colección de relaciones $<_\alpha$ que indiquen cuando los policías capturarán en no más de α turnos. Es decir, $<_0 \subseteq V(G)^k \times V(G)$ está formado por todas las parejas (p, x) tales que x está en alguna coordenada de p , y, si $\alpha > 0$, definimos que $x <_\alpha p$ si y sólo si para toda $x' \in N(x)$ existe $p' \in N(p)$ tal que $x' <_\beta p'$ para algún $\beta \in \llbracket 0, \alpha \rrbracket$. Nuevamente, estas relaciones satisfacen que $<_\beta \subseteq <_\alpha$ si $\beta \leq \alpha$ y, por la finitud de G , existe una $\gamma \in \mathbb{Z}$ tal que $<_\gamma = <_{\gamma'}$ para toda $\gamma < \gamma'$. Y denotamos $<_\gamma$ por $<$. Obsérvese que en el uso de esta notación se da por entendida la cantidad de policías a la que nos referimos, esto no debe causar conflictos ya que nunca analizaremos dos juegos simultáneamente, pero es importante tenerlo presente para evitar confusiones.

Teorema 3.2.7. *Una gráfica es k -copwin si y sólo si $< = V(G)^k \times V(G)$.*

La demostración del Teorema 3.2.7 es idéntica a la de la Proposición 3.2.5 salvo que los policías ahora son vértices de $V(G)^k$ sustituyendo esto en la demostración de la Proposición 3.2.3 obtenemos el argumento de esta afirmación, por ello la omitimos.

Para ver el orden de eliminación al que da lugar el Teorema 3.2.7, diremos que un vértice de $G^k \times G$, (p, x) , es **removable** respecto a $S \subseteq V(G^k \times G)$ si $x <_0 p$ o si, para toda $x' \in N(x)$, existe $p' \in N(p)$ tal que $(p', x') \in S$. Un **k -desmantelamiento** de G es un orden de los vértices de $G^k \times G$ tal que (p, x) es removable respecto a $\{(p', x') : (p', x') \text{ es menor que } (p, x)\}$. A una gráfica que tiene un k -desmantelamiento le decimos **k -desmantelable**, por supuesto, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.2.8. *Una gráfica G es k -copwin si y sólo si es k -desmantelable.*

Demostración. La primera implicación se sigue del Teorema 3.2.7 ya que, ordenando de cualquier forma todas las parejas $(p, x) \in <_0$, luego todas aquellas en $<_1 \setminus <_0$, y así sucesivamente, añadiendo en cualquier orden las parejas en $<_{i+1} \setminus <_i$, se obtiene un k -desmantelamiento de G . Para la otra implicación mostraremos por inducción

que, si $\leq$ es un k -desmantelamiento de G y si en una partida de policías y ladrones sucede que al turno $t + 1$ los policías están en $p \in V(G)^k$ y al turno t los ladrones están en $x \in V(G)$, si (p, x) es el α -ésimo elemento de $\leq$, los policías tienen una estrategia para capturar en menos de α turnos. Esto es claro para $\alpha = 1$, ya que el primer vértice de un k -desmantelamiento es removible respecto al conjunto vacío, lo que implica que x es una coordenada de p y, por lo tanto, los policías están capturando al ladrón. Ahora, si α es mayor que uno, para cualquier $x' \in N(x)$ hacia donde decida mover el ladrón al turno $t + 1$, existe $p' \in N(p)$ tal que $(p', x') \leq (p, x)$. Como (p', x') es, a lo más, el $(\alpha - 1)$ -ésimo elemento de $\leq$, la hipótesis inductiva asegura que los policías tienen una estrategia para capturar en menos de $\alpha - 1$ pasos desde esta posición, lo que implica que tienen una estrategia para capturar en menos de α pasos desde (p, x) . ■

Finalmente, veamos que un 1-desmantelamiento da lugar a un dismantelamiento de G , para ello recordemos que en este caso el policía ocupa un vértice $y \in V(G)$. Consideremos (y, x) el primer elemento del 1-desmantelamiento tal que $x \neq y$, como todas las parejas anteriores son de la forma (x', x') y para cada vecino de x hay un vecino de y tales que forma una pareja previa del 1-desmantelamiento, entonces $N(x) \subseteq N(y)$. Habiendo encontrado una equina de G , construimos un 1-desmantelamiento de $G - x$ partiendo del 1-desmantelamiento de G eliminando las parejas de la forma (y', x) para toda $y' \in V(G)$, reemplazando aquellas del tipo (x, x') para $x' \in V(G)$ por (y, x') , y eliminando las instancias repetidas de estas últimas. Como $N(x) \subseteq N(y)$, si (x, x') es removible, entonces también lo es (y, x') . Por lo tanto, este es un 1-desmantelamiento de $G - x$ y, como en cada aplicación de este procedimiento se encuentra una esquina de la gráfica, al repetirlo $n - 1$ veces más obtenemos un dismantelamiento de G .

En [12], Bonato y MacGillivray definen un juego de *policías y ladrones generalizado*, que representa una generalización tremenda de los juegos que hemos considerado hasta ahora. Sin entrar en demasiados detalles, lo definen como un juego de dos jugadores —el ladrón y el policía— en donde ambos cuentan con información perfecta, hay un conjunto de posiciones para el policía $\mathcal{P}_P$ y otro para el ladrón $\mathcal{P}_L$, el conjunto de posiciones permitidas del juego es cualquier $S \subseteq \mathcal{P}_P \times \mathcal{P}_L$, y un estado del juego es una pareja de la forma $((p, l), X)$ con $(p, l) \in S$ y $X \in \{P, L\}$, que indica la posición actual del juego a la vez que el jugador que debe mover a continuación. De esta forma, para cada estado del juego existe una relación simétrica, que entendemos como un conjunto no-vacío de movimientos válidos, $A_P(p, l) \subseteq \mathcal{P}_P^2$ o $A_L(p, l) \subseteq \mathcal{P}_L^2$, tales que cambian la posición del policía o del ladrón, respectivamente, y cambian el jugador al que le toque mover. Por lo tanto, los movimientos que puede realizar cada jugador no dependen únicamente de su propia posición, si no también de la de su oponente. Además, se fija con anterioridad un conjunto de “posiciones de captu-

ra” $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}_P \times \mathcal{P}_L$ y, después de que ambos jugadores elijan sus posiciones iniciales, empezando por el policía, mueven alternadamente, de acuerdo al conjunto de movimientos permitidos. El policía gana si en algún momento de la partida la posición del juego está en $\mathcal{F}$, el ladrón gana si el policía no gana. Los autores muestran que incluso en un contexto así de general es posible obtener una caracterización de las gráficas en donde el policía puede ganar semejante a aquellas de la Proposición 3.2.5 y el Teorema 3.2.7.

En [12] también definen un juego de movimientos independientes como aquel en donde A_P y A_L solo dependen de la posición del policía y el ladrón, respectivamente. Por ejemplo, policías y ladrones es un juego de movimientos independientes. En este caso, podemos definir G_P como la gráfica con conjunto de vértices $\mathcal{P}_P$ y en donde $pp' \in E(G_P)$ si y solo si $(p, p') \in A_P(p, l)$ para toda $l \in \mathcal{P}_L$. De forma completamente análoga se define G_L . En este texto nos restringimos a trabajar con juegos de este tipo, ya que son estos los que podemos definir como una 3-tupla $(G_P, G_L, \mathcal{F})$ con G_P y G_L gráficas, y $\mathcal{F} \subseteq V(G_P) \times V(G_L)$. De forma que, para nosotros, un **juego policías y ladrones generalizado** es una 3-tupla de esta forma y una **partida** de él es una función $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow G_P \times G_L$ tal que

1. $f(t)f(t+1) \in E(G_P \times G_L)$ para toda $t \in \mathbb{Z}^+$, y
2. Los policías ganan en f si $f(t) = (f_P(t), f_L(t)) \in \mathcal{F}$ o $(f_P(t+1), f_L(t)) \in \mathcal{F}$ para alguna $t \in \mathbb{Z}^+$. Los ladrones ganan en f si no lo hacen los policías.

Naturalmente, una estrategia para el policía es una función $\eta: V(G_P) \times V(G_L) \rightarrow V(G_P)$ tal que $f_P(t)\eta(f(t)) \in E(G_P)$, se dice que el policía sigue esta estrategia en f si $f_P(t+1) = \eta(f(t))$ para toda $t \in \mathbb{Z}^+$, y que es ganadora si el policía gana en toda partida donde siga η . De forma análoga se definen las estrategias y las estrategias ganadoras del ladrón. Con esta definición volvemos a recuperar la terminología de movimientos observando que, ahora, estos se realizan en cada turno por el policía—o los policías— en G_P , y por el ladrón —o los ladrones— en G_L . Bonato y MacGillivray muestran que, en este caso, además se puede dar una caracterización de las gráficas en donde gana el policía semejante a aquellas de la Proposición 3.2.3 y el Teorema 3.2.8. Para finalizar esta sección, demostraremos estas generalizaciones y las usamos para definir algunas variaciones del juego de policías y ladrones. Prevenimos al lector que la demostración será idéntica a aquellas de la Proposición 3.2.5 y el Teorema 3.2.8, sin embargo, desarrollamos los detalles para dispersar las dudas de cualquier escéptico. Para hacer esto, reciclaremos los términos “removable” y “desmantelamiento”, obsérvese que la forma en que lo haremos generaliza el contexto en el que originalmente definimos estas nociones y, por lo tanto, no causa conflictos en el

lenguaje. Primero, dada una partida de policías y ladrones generalizada, decimos que un vértice (p, l) de $G_P \times G_L$ es **removible** respecto a $S \subseteq V(G_P) \times V(G_L)$ si $(p, l) \in \mathcal{F}$ o si, para toda $l' \in N(l)$ existe $p' \in N(p)$ tal que $(p', l') \in S$. Un **desmantelamiento** de $G_P \times G_L$ es un orden lineal de sus vértices tal que, si cada $(p, l) \in V(G_P) \times V(G_L)$ es removible respecto al conjunto de vértices que lo preceden en el orden. Además, definiremos $<_0$ como la relación entre $V(G_L)$ y $V(G_P)$ dada por $l <_0 p$ si y sólo si $(p, l) \in \mathcal{F}$ y, recursivamente, para $p \in V(G_P)$, $l \in V(G_L)$, y $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, que $l <_\alpha p$ siempre que para toda $l' \in N(l)$ exista $p' \in N(p)$ tal que $l' <_{\alpha-1} p'$. Nuevamente, $<_0 \subseteq <_1 \subseteq \dots \subseteq V(G_P) \times V(G_L)$ y, como solo consideramos gráficas con conjuntos de vértices finitos, existe $\gamma \in \mathbb{Z}$ tal que $<_\gamma = <_{\gamma'}$ para toda γ' mayor que γ . Denotamos a $<_\gamma$ por $<$ y, con base en esto, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.9. *En un juego de policías y ladrones generalizado $(G_P, G_L, \mathcal{F})$, si G_P es conexa, entonces existe una estrategia ganadora para los policías si y sólo si $< = V(G_P) \times V(G_L)$, lo que es equivalente a que $G_P \times G_L$ tenga un desmantelamiento.*

Demostración. Primero veamos que, si $< \neq V(G_P) \times V(G_L)$ entonces existen $p \in V(G_P)$ y $l \in V(G_L)$ tales que $l \nless p$. Por lo tanto, $(p, l) \notin \mathcal{F}$ y existe $l' \in N(l)$ tal que, para toda $p' \in N(p)$ se tiene que $l' \nless p'$. Ahora observemos que, si el policía tiene una estrategia ganadora, entonces tiene una estrategia ganadora empezando desde cualquier vértice de G_P , ya que, como G_P es conexa, puede utilizar los primeros turnos de cualquier juego para colocarse en la posición inicial que desee. Por lo tanto, podemos suponer que la posición inicial del policía es p y, con base en eso, construimos una estrategia ganadora para el ladrón definiendo que su primera jugada será l y, en cada turno posterior, se moverá hacia algún vecino del vértice en que se encuentre, para el cual sucede que ninguno de los vecinos del policía está relacionado con él, el cual debe existir siempre que la posición actual del ladrón no esté relacionada con la del policía. Evidentemente, cada vez que el ladrón sigue esta estrategia en un turno, sin importar lo que haga el policía, en el siguiente turno sus posiciones seguirán sin estar relacionadas a través de $<$. Como, en particular, todas las parejas de $\mathcal{F}$ forman parte de $<$, se deduce que el policía no puede ganar mientras el ladrón siga esta estrategia.

Ahora, mostraremos que, si la posición del policía al turno $t + 1$ y del ladrón al turno t en una partida de policías y ladrones generalizado, para alguna $t \in \mathbb{Z}^+$, son $p \in V(G_P)$ y $l \in V(G_L)$ respectivamente, entonces $l <_\alpha p$ para algún entero $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ si y solo si los policías tienen una estrategia para ganar en a lo más α turnos. La afirmación es evidente si $\alpha = 0$, por lo tanto lo mostraremos por inducción sobre α . Así, suponemos que $(p, l) \notin \mathcal{F}$ y que $l <_\alpha p$ para algún $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Se sigue, por la definición de $<_\alpha$, que debe para toda $l' \in N(l)$ existe $p' \in N(p)$ tal que $l' <_{\alpha-1} p'$.

Así, si al turno $t+2$ los policías mueven al vecino de p que cumple lo anterior para la posición del ladrón al turno $t+1$, podemos concluir, usando la hipótesis inductiva, que los policías tienen una estrategia para capturar en no más de $\alpha-1$ turnos desde p' , lo que muestra que tienen una estrategia para ganar en no más de α turnos desde p . De forma muy semejante, si suponemos que los policías tienen una estrategia para capturar en a lo más α turnos desde p , entonces para cada $l' \in N(l)$, esta estrategia indica que el policía deben moverse a algún p' desde el cual tiene una estrategia para capturar en no más de $\alpha-1$ turnos. Nuevamente, por la hipótesis inductiva, se deduce que $l' <_{\alpha-1} p'$, de forma que $l <_{\alpha} p$, como queríamos ver. Se deduce inmediatamente que, si $\leq = V(G_P) \times V(G_L)$ entonces los policías tienen una estrategia ganadora, pues capturan en a lo más γ turnos sin importar las posiciones iniciales. Recíprocamente, si los policías tienen una estrategia para ganar, como esa estrategia asegura que es posible capturar en una cantidad finita de pasos dado cualquier par de posiciones iniciales $p \in V(G_P)$ y $l \in V(G_L)$, entonces $\leq = V(G_P) \times V(G_L)$.

Por otro lado, si suponemos que $\leq = V(G_P) \times V(G_L)$, definimos $S_0 = <_0$ y para $i \in \llbracket \gamma \rrbracket$, recursivamente, $S_{i+1} = <_{i+1} \setminus S_i$. Entonces dotamos a cada S_i de un orden lineal arbitrario $\leq_i$ y, con base en ellos, definimos un orden lineal sobre $V(G_P) \times V(G_L)$ en donde, para $(p, l), (p', l') \in V(G_P) \times V(G_L)$, se tiene que

$$(p', l') \leq (p, l) \text{ si y solo si existen enteros } \beta < \alpha \text{ tales que } (p', l') \in S_{\beta} \text{ y } (p, l) \in S_{\alpha} \\ \text{o si } (p', l') \leq_{\alpha} (p, l) \text{ para alguna } \alpha \in \llbracket 0, \gamma \rrbracket.$$

Afirmamos que $\leq$ es un desmantelamiento de $G_P \times G_L$. Las parejas en S_0 evidentemente cumplen la condición de que $\leq$ sea un desmantelamiento pues $S_0 = \mathcal{F}$. Y, por la definición de $<$, para todo $(p, l) \in S_{\alpha}$ con $\alpha > 0$, y para cualquier $l' \in N(l)$ existe $p' \in N(p)$ tal que $(p', l') \in S_{\beta}$ para alguna $\beta < \alpha$. Así, todo $(p, l) \in V(G_P) \times V(G_L)$ cumple la condición necesaria para que $\leq$ sea un desmantelamiento de $G_P \times G_L$.

Finalmente, si suponemos que $\leq$ es un demantelamiento de $G_P \times G_L$, mostraremos por inducción que si (p, l) es el α -ésimo elemento de un desmantelamiento de $G_P \times G_L$ entonces, si en alguna partida de policías y ladrones generalizada sucede, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, que el policía que se encuentra en p al turno $t+1$ y el ladrón se encuentra en l al turno t , entonces el policía puede capturar en a lo más $\alpha-1$ turnos. Esto es evidente para $\alpha = 1$ ya que el primer vértice de un desmantelamiento de $G_P \times G_L$ es removible respecto al conjunto vacío, por lo que debe suceder que está en $\mathcal{F}$. Si ahora suponemos que (p, l) es el α -ésimo elemento del desmantelamiento con $\alpha > 1$, entonces sabemos que, sin importar que movimiento realice el ladrón, digamos que lo hace a l' , existe p' , un vecino de p , tal que $(p', l') \leq (p, l)$. Por lo tanto, (p', l') es a lo más el $(\alpha-1)$ -ésimo elemento del desmantelamiento y, por hipótesis de inducción, el policía capturará al ladrón en no más de $\alpha-2$ turnos. Se concluye que si existe un

desmantelamiento de $G_P \times G_L$ entonces, desde cualquier posición inicial de ambos jugadores, el policía capturará en a lo más $|V(G_P \times G_L)| = |V(G_P)||V(G_L)|$ turnos.

■

Con este resultado podemos idear juegos como el de **policías perezosos y ladrones**, en el que restringimos la movilidad de los policías, permitiendo que en cada turno solo uno de ellos pueda moverse a un vértice distinto. Si jugamos con $c \in \mathbb{Z}^+$ policías en una gráfica G , este es el juego $(G^{\square^c}, G, \mathcal{F})$ en donde $\mathcal{F}$ está formado por todos los pares ordenados $(\hat{p}, x)$ tales que x es una coordenada de $\hat{p}$. Si queremos permitir que más policías se muevan en cada turno, definimos la función $\text{dif}: V(G)^c \times V(G)^c \rightarrow \mathcal{P}(\binom{V(G)}{2})$ dada por

$$\text{dif}(\hat{p}, \hat{p}') = \{\hat{p}_i \hat{p}'_i : \hat{p}_i \neq \hat{p}'_i\}.$$

Además, denotamos $d_h(\hat{p}, \hat{p}') = |\text{dif}(\hat{p}, \hat{p}')|$, entero al que le decimos la **distancia de Hamming** entre $\hat{p}$ y $\hat{p}'$. Entonces, para cualquier gráfica G , $k \in \llbracket n \rrbracket$, y $r \in \llbracket k \rrbracket$, definimos la **k -ésima potencia r -parcial** de G como la gráfica $G^{(k,r)}$ con conjunto de vértices $V(G)^k$ y en donde dos vértices $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son adyacentes si y sólo si

$$\text{dif}(\hat{x}, \hat{y}) \subseteq E(G)$$

y

$$d_h(\hat{x}, \hat{y}) \leq r.$$

Es claro que $G^{(k,1)} = G^{\square^k}$ y que $G^{(k,k)} = G^k$. Entonces, definimos el juego de **policías con r movimientos y ladrones** jugado en G con c policías, para alguna $c \in \llbracket n \rrbracket$ como $(G^{(c,r)}, G, \mathcal{F})$ en donde $\mathcal{F}$ es el conjunto de las parejas $(\hat{p}, x) \in V(G)^c \times V(G)$ tales que x está en una coordenada de $\hat{p}$. Así, si jugamos en G con c policías, el juego de policías y ladrones es el juego de policías con c movimientos y ladrones, y el juego de policías perezosos y ladrones en G es el juego de policías con un movimiento y ladrones. Con esto, definimos el **numero r -policiaco** de una gráfica G como la menor $c \in \mathbb{Z}^+$ tal que los policías tienen una estrategia ganadora para el juego de policías con r movimientos y ladrones jugado con c policías en G , al que denotamos $c_r(G)$. Es claro que, como $E(G^{(k,1)}) \subseteq E(G^{(k,2)}) \subseteq \dots \subseteq E(G^{(k,k)})$, entonces toda estrategia ganadora para c policías en el juego de policías con r movimientos y ladrones es también una estrategia ganadora para c policías en el juego de policías y ladrones con r' movimientos para toda $r \leq r'$. Se sigue que no tiene sentido considerar juegos en donde admitamos que los policías realicen más de $c(G)$ movimientos, ya que en estos juegos siempre existe una estrategia ganadora de los policías. Además, se tiene que toda gráfica G cumple

$$c(G) = c_{c(G)}(G) \leq \dots \leq c_1(G) \leq \gamma(G).$$

Si, por otro lado, queremos modificar la gráfica G_L para hacer justicia a la utilización del plural “ladrones”, hemos de ser cuidadosos. Puede parecer tentador definir un juego de policías y ladrones con r ladrones jugado en G como $(G, G^r, \mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ las parejas $(y, \hat{l})$ tales que y está en alguna coordenada de $\hat{l}$. Es decir, el juego en donde permitimos que cada ladrón se mueva en cada turno a un vértice adyacente a su posición y el policía gana si captura a alguno de los ladrones. Sin embargo, esto resulta en un juego poco interesante, en efecto, este juego se ganará si y sólo si G es copwin. Es fácil convencerse de esto ya que, si G es copwin, el policía sigue la estrategia que existe para capturar a un ladrón en G fijándose solamente en los movimientos que realice una coordenada cualquiera de $\hat{l}$, a la que eventualmente capturará. En cambio, si G no es copwin, los ladrones elegirán posicionarse todos en el mismo vértice de G en el primer turno y moverán todos de la misma forma que lo haría un único ladrón siguiendo la estrategia de evasión que tiene en G . No es de sorprender que si un policía puede capturar a un solo ladrón, pueda capturar a alguno entre varios, más bien, esperaríamos que la modificación de la gráfica G_L le hiciera más difícil a los ladrones evadir. Sin embargo, esto no sucede en este juego ya que cualquier cantidad de ladrones pueden ocupar la misma posición simultaneamente, por lo que pueden actuar como si se tratara de un solo ladrón. Por esto, e inspirados en la definición que hicimos para las gráficas de fichas con movimientos paralelos definimos, dada una gráfica G de orden n , con $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \llbracket n \rrbracket$ y $r \in \llbracket k \rrbracket$, definimos la **gráfica de k fichas con movimientos r -compuestos**, a la que denotamos $C_r F_k G$, como la gráfica imagen

$$\Lambda(\{(x_1, \dots, x_k) \in V(G)^k : x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\})_{G^{(k,r)}}.$$

Naturalmente, hemos de definir un **movimiento r -compuesto** de una configuración $u \in V(C_r F_k G) = V(F_k G)$ como una función inyectiva $M: u \rightarrow V(G)$ tal que $|\text{sop } M| \leq r$ y $xM(x) \in E(G)$ para toda $x \in \text{sop } M$. Sobre este concepto damos por evidentes dos cosas: primero, la definición de movimiento 1-compuesto es equivalente a la de movimiento 1-paralelo y a la de movimiento de una configuración en $F_k G$; segundo, dos configuraciones de k fichas u y v son adyacentes en $C_r F_k G$ si y sólo si existe M , un movimiento r -compuesto de u , tal que $v = M[u]$. Para justificar la razón del término “compuesto”, así como entender un poco mejor la adyacencia de $C_r F_k G$, definimos, para cada configuración de k fichas u , un **u -ciclo** como un ciclo C de G tal que $V(C) \subseteq u$. Además, para cada u -ciclo $C = x_0 \cdots x_m x_0$, definimos $M(C): u \rightarrow V(G)$ como

$$M(C)(x) = \begin{cases} x_{i+1} & \text{si } x = x_i \text{ para alguna } i \in \llbracket 0, m \rrbracket \text{ y} \\ x & \text{si } x \notin V(C). \end{cases}$$

A $M(C)$ le decimos el **movimiento del u -ciclo C** . Además, para facilitar la notación, en el siguiente enunciado denotamos por $f + g$, para cualesquiera funciones $f: u \rightarrow V(G)$ y $g: u \rightarrow V(G)$ tales que $\text{sop } f \cap \text{sop } g = \emptyset$, a la función de u en $V(G)$ dada por

$$(f + g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \text{sop } f \\ g(x) & \text{si } x \in \text{sop } g \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil convencerse que esta “suma” de funciones es asociativa, por lo tanto, es correcto definir, para $f_1, \dots, f_s$ cualquier colección de funciones de u en $V(G)$ con soportes ajenos por pares, la función $\sum_{i=1}^s f_i$ como $f_1 + \dots + f_s$. Apoyados en esto demostramos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.10. *Para cualquier u , configuración de k fichas en G , una función $M: u \rightarrow V(G)$ es un movimiento r -compuesto de u si y sólo si existe una familia de u -ciclos ajenos por pares, $C_1, \dots, C_s$, y Q un camino en $F_k G$ con configuración inicial u , el cual cumple que $M(Q)(x) \in N(x)$ para toda $x \in \text{sop } M(Q)$, tales que*

$$\text{sop } M(X) \cap \text{sop } M(Y) = \emptyset \text{ para cualesquiera } X, Y \in \{Q, C_1, \dots, C_s\},$$

$$M = M(Q) + \sum_{i=1}^s M(C_i), \text{ y}$$

$$\ell(Q) + \sum_{i=1}^s \ell(C_i) \leq r.$$

Demostración. Esto lo demostramos por inducción sobre r . Para $r = 1$ se tiene que $S_r F_k G = F_k G$, por lo tanto, para toda $u \in V(F_k G)$, como los movimientos de u son sus movimientos 1-compuestos y estos se corresponden con los caminos de longitud a lo más 1 en $F_k G$ con configuración inicial u . Por esto se concluye que en este caso se cumple la afirmación. Si $r > 1$ y consideramos M un movimiento r -compuesto con $|\text{sop } M| > 1$, afirmamos que para cada $x \in \text{sop } M$ existe un entero positivo m tal que tal que $M^m(x) \notin u$ o $M^m(x) = x$. Para ver esto veamos que, si tomamos $x_0 \in \text{sop } M$ cualquiera y si definimos recursivamente $x_{i+1} = M(x_i)$ mientras $x_i \in u$, por la finitud de u , debe suceder que $x_{m+1} = M(x_m) \notin u$ o que $x_{m+1} = x_i$ con $i \in \llbracket m \rrbracket$ para algún entero $m \in \llbracket k \rrbracket$.

En el primer caso, si $M(x_m) \notin u$, se deduce que $(x_0, x_1), \dots, (x_m, x_{m+1}) \in M$ y, definiendo $P = x_1 x_2 \dots x_m x_{m+1}$, se tiene que $\hat{P}$ — que recordemos, es el camino obtenido de mover la ficha en x_m a x_{m+1} , luego la ficha en x_{m-1} a x_m , y así

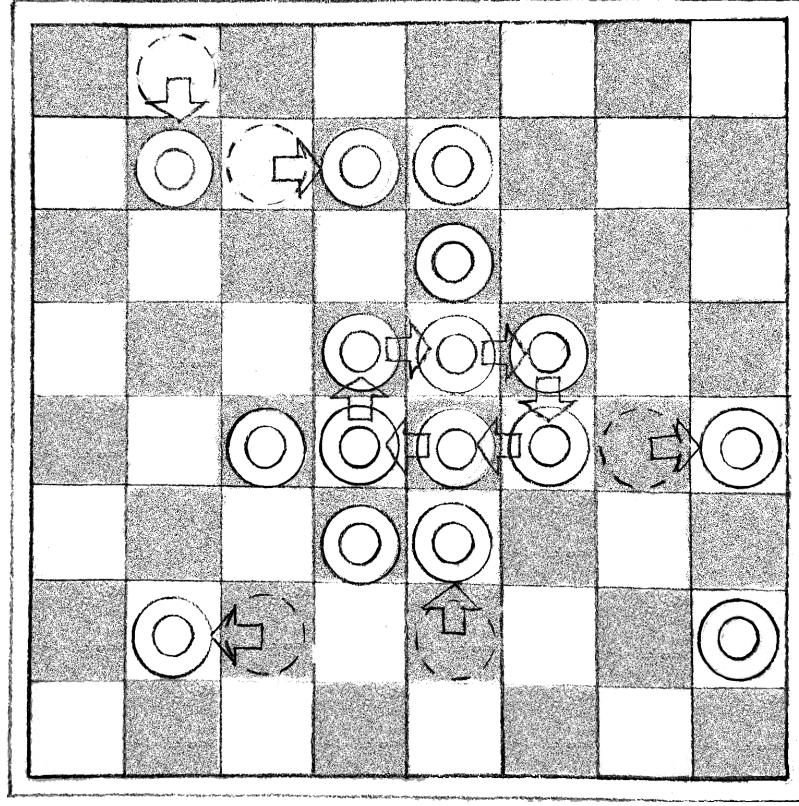


Figura 3.4: Diagrama de un movimiento compuesto de una configuración de 16 fichas en $P_8 \times P_8$.

sucesivamente hasta mover aquella ficha en x_0 a x_1 — es tal que $M(\hat{P})|_{\text{sop } M(\hat{P})} = \{(x_0, x_1), \dots, (x_m, x_{m+1})\}$. Por lo tanto, si definimos

$$M'(x) = \begin{cases} M(x) & \text{si } x \notin \text{sop } M(\hat{P}) = \{x_0, \dots, x_m\} \\ x & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se tiene que $M': u \rightarrow V(G)$ es tal que $\text{sop } M' = \text{sop } M \setminus \text{sop } M(\hat{P})$. Por lo tanto, como $|\text{sop } M(\hat{P})| = m$, M' es un movimiento $(r - m)$ -compuesto de u . Así podemos aplicar hipótesis de inducción para concluir que existen $C_1, \dots, C_s$ y Q' un camino en $F_k G$ que satisface que $M(Q')(x) \in N(x)$ para toda $x \in \text{sop } M(Q')$, y que son tales

que

$\text{sop } M(X) \cap \text{sop } M(Y) = \emptyset$ para cualesquiera dos $X, Y \in \{Q', C_1, \dots, C_m\}$,

$$M' = M(Q') + \sum_{i=1}^s M(C_i) \text{ y}$$

$$\ell(Q') + \sum_{i=1}^s \ell(C_i) \leq r - m.$$

Como $\text{sop } M(\hat{P}) \cap \text{sop } M' = \emptyset$, entonces se sigue que podemos realizar los movimientos que realiza el camino Q' , seguidos de los que realiza $\hat{P}$, para obtener un camino Q de longitud $\ell(Q') + m$ tal que

$$M(Q) = M(Q') + M(\hat{P}).$$

Como Q' y $\hat{P}$ satisfacen que $M(Q')(y) \in N(y)$ y $M(\hat{P})(z) \in N(z)$ para cualesquiera $y \in \text{sop } M(Q')$ y $z \in \text{sop } M(\hat{P})$, entonces $M(Q)(x) \in N(x)$ para toda $x \in \text{sop } M(Q)$. Además, como $\text{sop } M(Q) = \text{sop } M(\hat{P}) \cup \text{sop } M(Q')$, entonces $\text{sop } M(Q) \cap \text{sop } M(C_i) = \emptyset$ para toda $i \in \llbracket s \rrbracket$ y, así, que

$\text{sop } M(X) \cap \text{sop } M(Y) = \emptyset$ para cualesquiera $X, Y \in \{Q, C_1, \dots, C_s\}$,

$$M = M(Q) + \sum_{i=1}^s M(C_i), \text{ y}$$

$$\ell(Q) + \sum_{i=1}^s \ell(C_i) \leq r.$$

En el segundo caso, cuando $x_{m+1} = x_i$ para alguna $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, aseguramos que $i = 0$. Si no fuera así, entonces $M(x_{i-1}) = M(x_m) = x_i$, por lo tanto $M: u \rightarrow V(G)$ no es inyectiva, lo que es una contradicción a que M sea un movimiento r -compuesto. Por lo tanto, como $M(x_m) = x_0$, entonces, $C = x_0 x_1 \dots x_m x_0$ es un u -ciclo y además $\{(x_0, x_1), \dots, (x_{m-1}, x_m)(x_m, x_0)\} \subseteq \text{sop } M$. Si definimos ahora

$$M'(x) = \begin{cases} M(x) & \text{si } x \notin \text{sop } M(C) = \{x_0, \dots, x_m\} \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De la misma forma que en el primer caso, M' es un movimiento $(r - m)$ -compuesto y aplicando la hipótesis inductiva en él se concluye la afirmación.

La afirmación recíproca es directa, debemos demostrar que cualquier función $M: u \rightarrow V(G)$ de la forma $M(Q) + \sum_{i=1}^s M(C_i)$, para $Q, C_1, \dots, C_s$ como en el enunciado, es un movimiento r -compuesto. Sin embargo, es claro que una función así es inyectiva porque $M(Z)$ es una función inyectiva para cualquier $Z \in \{Q, C_1, \dots, C_s\}$. Además, $\text{sop } M = \text{sop } M(Q) \cup \bigcup_{i=1}^s \text{sop } M(C_i)$ y $|\text{sop } M(Z)| = \ell(Z)$, así como $xM(Z)(x) \in N(x)$, para toda $Z \in \{Q, C_1, \dots, C_s\}$ y $x \in \text{sop } M(Z)$. Por lo tanto, M cumple que

$$|\text{sop } M| = \ell(Q) + \sum_{i=1}^s \ell(C_i) \leq r \text{ y}$$

$$xM(x) \in N(x) \text{ para toda } x \in \text{sop } M.$$

■

La Proposición 3.2.10 se entiende como que los movimientos r -compuestos de una configuración u mueven hasta r fichas de u de forma que, o cada ficha de un u -ciclo se desliza al siguiente vértice en el orden cíclico, o existe una secuencia en que se pueden realizar movimientos de $F_k G$ para obtener la configuración final. Véase la Figura 3.4. A los movimientos r -compuestos de u de la forma $M = \sum_{i=1}^s M(C_i)$ para una colección de u -ciclos $C_1, \dots, C_s$ con conjuntos de vértices ajenos por pares, les llamamos **movimientos r -circulares** de u . Así mismo, a aquellos de la forma $M(Q)$ para Q un camino en $F_k G$ con configuración inicial u , les decimos **movimientos r -secuenciales** de u . Por lo tanto, la Proposición 3.2.10 dice que los movimientos r -compuestos de u son precisamente aquellos de la forma $M_1 + M_2$ con M_1 y M_2 movimientos r_1 -circular y r_2 -secuencial de u con soportes ajenos y tales que $r_1 + r_2 \leq r$. Observemos que, como los movimientos circulares de u son biyecciones de su soporte en sí mismo — ya que el movimiento de cada u -ciclo que lo compone cumple esto — entonces los movimientos circulares no contribuyen a cambiar la configuración de fichas al realizarlos. Es decir, como las configuraciones no están etiquetadas, los movimientos circulares son intrascendentes. Por lo tanto, los vecinos en $C_r F_k G$ están en correspondencia con los movimientos r -secuenciales de u , los cuales son, precisamente, las configuraciones que se pueden alcanzar desde u moviendo a lo más r fichas diferentes de u a vértices desocupados por u diferentes. Gracias a esto, podemos entender a la gráfica $S_r F_k G$ como la gráfica que modela un tablero con k fichas posicionadas casillas distintas y en el que, en cada turno, podemos mover hasta r fichas diferentes a vértices adyacentes desocupados.

Por todo lo anterior, esta gráfica nos permite plantear la siguiente pregunta, si los policías pueden capturar en G permitiendo que varios de ellos ocupen el mismo vértice de G , ¿pueden hacerlo si no lo permitimos? Formalmente, esto es decidir

si, para toda gráfica G con número policiaco c , los policías tienen una estrategia ganadora en el juego $(C_c F_c G, G, \mathcal{F})$, con $\mathcal{F}$ el conjunto de las parejas (v, x) tales que $x \in v$. Intuitivamente, ya que para los ladrones el poder ocupar el mismo vértice les sirve para comportarse como si fueran una menor cantidad de ladrones de los que son, es razonable pensar que el colocar varios policías en la misma casilla no es particularmente ventajoso para ellos, ya que cubren menos vértices de G . Sin embargo, también es intuitivamente obvio que, cuando admitimos que haya varias piezas del policía en la misma casilla, los policías no se estorban mutuamente, lo que les aporta mayor movilidad. Lamentablemente, la investigación cuidadosa de este juego escapa a los objetivos de este trabajo.

Por otro lado, gracias a esta gráfica podemos pensar también en un juego de policías y ladrones en donde haya un equipo de ladrones en el juego, y que estos no puedan ocupar la misma posición simultáneamente, y si alguno de ellos es capturado, el ladrón pierde. Para esto, dada una gráfica G , $k \in \llbracket n \rrbracket$, y $t \in \llbracket k \rrbracket$, definimos el juego de **policías y ladrones con movimientos t -compuestos** jugado con k ladrones en G como $(G, C_t F_k G, \mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ el conjunto formado por todas las parejas (x, u) tales que $x \in u$. Definimos el **número t -criminal** de G como la menor $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que el policía tiene una estrategia ganadora para policías y ladrones con movimientos t -compuestos jugada en G con k ladrones. A este entero lo denotamos $r_t(G)$ y, en particular, a $r_1(G)$ lo denotamos por $r(G)$ y le decimos el **número criminal** de G . Finalizamos esta sección calculando el número criminal de algunas familias de gráficas.

Proposición 3.2.11. *Para $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $r(P_n) = 1$, $r(K_n) = 1$ y $r(O_n) = n$. Además, si $n \geq 4$ entonces $r(W_n) = 1$ y $r(C_n) = 2$.*

Demostración. Observemos que, si $k = 1$ entonces $r \in \llbracket k \rrbracket$ es equivalente a $r = 1$ y, por lo tanto $S_r F_k G = F_k G \cong G$. De forma que este juego coincide con el juego de policías y ladrones cuando $k = 1$. Como consecuencia de esto, si G es copwin entonces $r(G) = 1$, por lo que, gracias a la Proposición 3.1.1 la afirmación es cierta para P_n, K_n y W_n . Además, la afirmación es trivial para O_n ya que, si no hay al menos tantos ladrones como vértices de una gráfica vacía, existe una configuración de fichas que no contiene al vértice que ocupa el policía. Por lo tanto, si los ladrones la eligen como posición inicial, como el policía quedará en una componente conexa que no tiene a ninguna ficha del ladrón, nunca podrá capturar.

Para ver que $r(C_n) = 2$ primero nos convencemos de que $r(C_n) > 1$ ya que $c(C_n) > 1$ y ya hemos visto que, cuando $k = 1$, entonces este juego coincide con el de policías y ladrones. Para ver que el policía tiene una estrategia ganadora para el juego $(C_n, F_2 C_n, \mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ el conjunto de parejas $(y, u) \in V(C_n) \times V(F_2 C_n)$ tales que

$y \in u$, afirmamos que basta con que, en cada turno, el policía se mueva al siguiente vértice en el orden cíclico de C_n . Al hacerlo, el conjunto de los vértices de C_n que están entre la posición que ocupa el policía y cualquiera de las fichas del ladrón en el orden cíclico disminuye en 1. En el mismo turno, el ladrón solo puede responder moviendo una de sus fichas. Si mueve alguna de ellas al vértice anterior en el orden cíclico, entonces, al ver cuál ha sido el resultado de esta ronda de turnos, la cantidad de aristas entre cada ficha de ladrón y el policía de acuerdo al orden cíclico disminuye. Así, si el ladrón responde de esta forma a la estrategia del policía, la cantidad de aristas entre alguna ficha y el policía será cero en una cantidad finita de turnos, por lo que será capturado si responde de esta forma suficientes veces. Por otro lado, si el ladrón decide mover su ficha al siguiente vértice en el orden cíclico, entonces “cancela” el acercamiento que había realizado el policía hacia ella, de forma que al final de una ronda de turnos, la cantidad de aristas entre esta ficha y el policía será igual que antes de iniciarla. Sin embargo, para la otra ficha del ladrón la cantidad de aristas al policía aún habrá disminuído. Se deduce que, sin importar qué haga el ladrón, perderá en una cantidad finita de turnos. ■

3.3. Número policiaco de gráficas de fichas

Dedicaremos la última sección de este texto a estudiar el número de policías en las gráficas de fichas de las trayectorias, los ciclos, y las gráficas completas. Pero, antes, empezaremos precisando la forma en que los conceptos que desarrollamos en la Sección 2.4 se relacionan con el juego de policías y ladrones jugados en gráficas de fichas. La idea es, como ya hemos anticipado, que las órbitas de las configuraciones de fichas se pueden entender como una “etiquetación intrínseca” de las fichas. Explícitamente, dadas u y v dos configuraciones de k fichas en una gráfica conexa G de orden n , con órbitas $O_1, \dots, O_\ell$ y $O'_1, \dots, O'_\ell$ respectivamente, afirmamos que para todo uv -camino P y cualquier $i \in [\ell]$ existe $j \in [\ell]$ tal que $M(P)[O_i] = O'_j$. Esto debe ser así ya que si existieran O'_j y $O'_{j'}$ dos órbitas de v tales que existen $x \in M(P)[O_i] \cap O'_j$ y $y \in M(P)[O_i] \cap O'_{j'}$, entonces $M(P^{-1})(x)$ y $M(P^{-1})(y)$ son dos fichas distintas de O_i . Como $k < n - 1$ se tiene que el grupo de reetiquetados de las fichas de O_i en su subtablero es el simétrico de O_i , de forma que es posible transponer a $M(P^{-1})(x)$ y $M(P^{-1})(y)$ tras realizar el movimiento asociado a un camino Q . Concluimos que $M(PQP^{-1})(x) = y$ y $M(PQP^{-1})(y) = x$, esto muestra que es posible transponer fichas en órbitas diferentes de v , lo que es una contradicción a que estas órbitas sean distintas. De forma análoga, si $M(P)[O_i]$ fuera subconjunto propio de alguna $O'_{j'}$, entonces debe suceder que $M(P^{-1})[O'_{j'}]$ tiene fichas tanto de O_i como de una segunda órbita de u , lo que sabemos que es imposible. Más

aún, la biyección que tomar la imagen directa bajo $M(P)$ induce, entre el conjunto de órbitas de u y aquel de v , es independiente del uv -camino que consideremos. Esto es claro ya que si consideramos P y P' dos uv -caminos y suponemos que O_i y $O_{i'}$ son órbitas de u tales que $M(P)[O_i] = M(P')[O_{i'}]$, entonces se sigue que $M(PP^{-1})[O_i] = O_{i'}$, por lo que se deduce que $O_i = O_{i'}$. Todo lo anterior nos lleva a lo siguiente: si consideramos $u \in V(F_k G)$ y ennumeramos a sus órbitas como $O_1, \dots, O_\ell$ entonces, para toda $v \in V(F_k G)$ e $i \in [\ell]$, denotamos $O_i(v)$ a la órbita de v dada por $M(P)[O_i]$ para cualquier uv -camino P . Esta información es útil, tanto para el ladrón como para el policía, en una partida jugada en una gráfica de fichas $F_k G$ ya que nos permite “dividir” la posición de ambos jugadores (u, v) en una colección de posiciones $(O_1(u), O_1(v)), \dots, (O_\ell(u), O_\ell(v))$ en sus subtableros, $B_1, \dots, B_\ell$, respectivamente. En cada turno, los jugadores solo pueden mover una ficha, por lo que cada movimiento se traduce en que solo una estas posiciones cambia, y el policía debe capturar todas las órbitas para ganar. Por esto, una partida de policías y ladrones en $F_k G$ es muy similar a una partida de policías y ladrones en $\square_{i=1}^\ell F_{r_i} B_i$, en donde $r_i = |O_i|$. Sin embargo, es importante notar que, ya que los subtableros pueden sobrelaparse, es decir $V(B_i) \cap V(B_j)$ puede ser no-vacío, no todas ℓ -tuplas $(u_1, \dots, u_\ell)$ con $u_i \in V(F_{r_i} B_i)$ se obtienen de posiciones válidas en $F_k G$. De hecho, no es difícil convencerse que la correspondencia entre $F_k G$ y $\square_{i=1}^\ell F_{r_i} B_i$, que recién describimos, es un isomorfismo entre $F_k G$ y la subgráfica de $\square_{i=1}^\ell F_{r_i} B_i$ inducida por

$$\{(u_1, \dots, u_\ell) \in \square_{i=1}^\ell F_{r_i} B_i \mid u_i \cap u_j = \emptyset\}.$$

Esta construcción es semejante a la forma en que definimos las gráficas de fichas etiquetadas con base en productos de gráficas, lo que formaliza la idea de “etiquetación intrínseca”, con la importante diferencia de que no se trata de la potencia de una gráfica, si no del producto de ℓ gráficas distintas.

Conjeturamos que gracias a la relación que existe entre $F_k G$ y $\square_{i=1}^\ell F_{r_i} B_i$, es posible acotar $c(F_k G)$ en función de $c(F_{r_1} B_1), \dots, c(F_{r_\ell} B_\ell)$. Específicamente, proponemos que es posible construir una estrategia de evasión para el ladrón en $F_k G$ jugando contra $\sum_{i=1}^\ell (c(F_{r_i} B_i) - 1)$ policías. Para esbozar la idea denotamos por $A_1, \dots, A_c$ y R a los policías y el ladrón que juegan en $F_k G$, respectivamente, con $c = \sum_{i=1}^\ell (c(F_{r_i} B_i) - 1)$. Sabemos que, para que algún policía A_i capture a R al turno t , cada órbita de él, $O_j(A_i(t+1))$, debe capturar a la correspondiente órbita del ladrón, $O_j(R(t))$. Sin embargo, $O_j(R)$ tiene una estrategia para evadir a $c(F_{r_i} B_i) - 1$ policías, por lo que $O_j(R)$ puede ejecutarla contra una colección de policías cada vez que alguno de ellos mueve una de sus fichas en O_j , asegurando así que $c(F_{r_j} B_j) - 1$ policías no le capturan. Es decir, por ejemplo, las fichas de la órbita $O_1(R)$ siguen su estrategia de evasión en respuesta a los movimientos que realicen las fichas de

$O_1(A_1), \dots, O_1(A_{c(F_{r_1} B_1)})$, asegurando que los policías $A_1, \dots, A_{c(F_{r_1} B_1)-1}$ nunca podrán capturar la primera órbita del ladrón y, por lo tanto, no pueden capturar a R en $F_k G$. De forma idéntica lo hace el ladrón con cada una de sus órbitas, de forma que los conjuntos de policías que evade cada una de sus órbitas son ajenos por pares. Se concluye que ningún policía podrá capturar al ladrón ya que para todos existirá una órbita del ladrón que juega su estrategia de evasión contra las fichas de su correspondiente órbita. Por supuesto, este argumento supuso la afirmación en cursiva, que no tiene por qué ser cierta ya que, como la intersección entre subtableros puede no ser vacía, al intentar la estrategia de evasión de una órbita, las fichas de una órbita pueden encontrarse en el vértice al que una ficha en la primera necesita moverse. Suponemos que debe ser posible definir una función que acote inferiormente la distancia entre el ladrón y el policía de manera tal que, mientras el ladrón pueda ejecutar sus estrategias de evasión en cada órbita no disminuirá y, cuando no le sea posible llevarla a cabo en alguna órbita, podrá realizar movimientos provechosos en otra órbita, contrarrestando el efecto negativo que la imposibilidad de mover sus fichas en la primera le causó. Otro hecho, que Kornhauser [35] demuestra, es que la intersección de dos subtableros siempre induce una trayectoria, lo cual es intuitivamente claro ya que, de haber un vértice de grado al menos tres en la intersección de dos subtableros, éste podría ser utilizado por las fichas en ambas órbitas para transponerse. Esto nos invita a pensar que quizá esta imposibilidad de ejecutar una estrategia de evasión no puede suceder, pues la ficha del ladrón tendría que buscar moverse hacia un vértice que induce una trayectoria en su subtablero, por lo que una ficha del policía que entre a dicha trayectoria detrás de ella seguro podrá capturarla — dicho de otra forma, existirá una cantidad finita de movimientos que la mantengan a distancia no-decreciente de la ficha del policía que la busca capturar y, una vez agotados, deberá moverse en dirección contraria, hacia su persecutor.

Notemos que en ésta dirección de análisis general para acotar el número policiaco de gráficas de fichas no tiene sentido analizar al caso en que hay $n - 1$ fichas en una gráfica de orden n , ya que esto es equivalente a tener una sola ficha en ella y, por lo tanto, al juego de policías y ladrones estándar. Por lo tanto, de ser posible obtener un resultado de este tipo, por el Teorema 2.4.5, podríamos acotar $c(F_k G)$ para cualquier G y k si conocemos el número policiaco de gráficas de fichas con grupos de reetiquetados isomorfos a grupos simétricos, pues siempre sucede que $\Sigma_{r_i} B_i \cong S_{r_i}$. Desafortunadamente, esta empresa supera los alcances de este texto, por lo que nos limitamos a indicarla como una posible dirección de investigación. Sin embargo, las gráficas con las que nos ocuparemos en esta sección representan una selección de casos sencillos de las diversas problemáticas que la anterior aproximación al problema de calcular $c(F_k G)$ presenta:

1. Las trayectorias, que son gráficas en donde cada ficha es su propia órbita, por lo que determinar su número de policía es un buen primer paso para entender cómo utilizar las estrategias de captura que existen para cada órbita para capturar todas las fichas.
2. Los ciclos, que forman la familia de gráficas con grupos de reetiquetados distinto de un producto de grupos simétricos (recordemos que $k < n - 1$), por lo que de cualquier forma habría que tratarlos por separado.
3. Las gráficas completas, que son el caso más simple de una gráfica con grupo de reetiquetados isomorfo a un grupo simétrico.

Iniciamos viendo primero que el número policiaco de la gráfica de k fichas de una trayectoria es el mismo que el número policiaco que el del producto caja de k copias de la trayectoria, es decir

$$c(F_k P_n) = c(P_n^{\square k}) = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil.$$

Para hacerlo nos apoyamos fuertemente en las técnicas utilizadas para calcular $c(P_n^{\square k})$, ideadas por M. Maamoun y H. Meyniel [38] en 1987, las cuales se adaptan fácilmente para capturar en $F_k P_n$. Para evitar ser repetitivos, nos restringimos a mostrar cómo se hace este argumento para el caso de las gráficas de fichas sin exponer el argumento original para los productos caja. Es decir, que damos por sabido que $c(P_n^{\square k}) = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ pero no lo utilizamos en ningún argumento.

Nos ponemos manos a la obra demostrando la siguiente proposición, que muestra que es necesaria esta cantidad de policías para poder capturar a un ladrón en $F_k P_n$.

Proposición 3.3.1. *Si n y k son enteros tales que $4 \leq 2k \leq n$, entonces $c(F_k P_n) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$.*

Demostración. De la misma forma que para las gráficas completas, como $F_n P_n$ es la gráfica trivial de orden 1 y $F_1 P_n \cong F_{n-1} P_n \cong P_n$, por la Proposición 3.1.1 se tiene que siempre que $k \in \{1, n-1, n\}$ entonces $c(F_k P_n) = 1$.

Para el caso $4 \leq 2k \leq n$ veamos que no es posible capturar a un ladrón en $F_k P_n$ con menos de $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. Para ello veremos que el ladrón tiene una estrategia de evasión para $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil - 1$ policías en un retracto de $F_k P_n$. Este retracto será una subgráfica de $F_k P_n$ isomorfa a $P_2^{\square k}$, gráfica a la que, por razones obvias, se le conoce como el cubo de dimensión k y que es usual denotar por Q_k , convención que adoptaremos y por la cual definimos

$$Q_k = [\{u \in V(F_k P_n) : u_i \in \{2i, 2i-1\}\}]_{F_k P_n}.$$

Interpretamos esta definición como la subgráfica de $F_k P_n$ inducida por aquellas configuraciones en donde a cada ficha le asignamos un par de vértices consecutivos en P_n para moverse. De hecho, la i -ésima ficha de P_n está en los extremos de la $(2i - 1)$ -ésima arista de P_n , ya que $2i$ y $2i - 1$ son los extremos de ésta. Es fácil ver que los conjuntos de extremos son ajenos para cualesquiera dos pares de estas aristas y, por lo tanto, cada ficha en una configuración en Q_k siempre puede realizar un movimiento —y solo un movimiento— a lo largo de la arista a la que está confinada para que la configuración resultante vuelva a estar en Q_k . Esto implica que esta gráfica es isomorfa a $P_2^{\square k}$, para verlo observamos que a cada configuración $u \in Q_k$ le podemos asociar el único vértice de $\hat{v} \in V(P_2^{\square k})$ tal que $u_i = v_i \pmod 2$, como ya hemos dicho, cada vecino de u dentro de Q_k se obtiene de mover una de sus fichas al otro extremo de la arista $(2i - 1)2i$, lo que cambia la paridad de dicha entrada del vértice asociado en $P_n^{\square k}$ y, por lo tanto, los vecinos de u en Q_k se corresponden biyectivamente con los vecinos del vértice que le asociamos en $P_n^{\square k}$. La función descrita en lo anterior es además una biyección ya que basta con colocar las fichas en $2i$ o $2i - 1$ de acuerdo a la paridad de la i -ésima entrada de un vértice en $P_2^{\square k}$ para obtener una configuración en la preimagen de éste. En general, todas las configuraciones de $F_k P_n$ se pueden asociar con el vértice de $P_n^{\square k}$ que en cada entrada tiene 1 o 2 de acuerdo a la paridad del vértice en el que se encuentra u_i . Como en P_n cada ficha solo puede moverse a vértices cuya paridad es distinta a la de aquel en el que está, entonces configuraciones adyacentes dan lugar a vértices de $P_n^{\square k}$ adyacentes bajo esta asignación, es decir, es un morfismo de gráficas. Así, como existe un epimorfismo $\phi: F_k P_n \rightarrow P_n^{\square k}$ que se restringe a un isomorfismo $\phi|_{V(Q_k)}: Q_k \rightarrow P_n^{\square k}$, entonces $\phi^{-1} \circ \phi: F_k P_n \rightarrow Q_k$ es una retracción de $F_k P_n$ en Q_k .

Ahora sí, veamos que en Q_k se necesitan al menos $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ policías para capturar a un ladrón, para esto nos referiremos a los vértices de Q_k por medio de la k -tupla asociada a él en el isomorfismo con $P_2^{\square k}$. Observemos primero que

$$\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{k+1}{2} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil.$$

Mostraremos que el ladrón puede elegir su posición inicial de forma que no será capturado en el primer turno, para esto, debemos mostrar que la k -tupla asociada a la configuración inicial del ladrón difiere en al menos dos entradas con la k -tupla asociada a la configuración inicial de cada policía. Veamos que cada policía está en una k -tupla cuyo grado es k , por lo tanto, hay $k + 1$ configuraciones a distancia a lo más 1 de cada policía. Así, si hay $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$ policías en Q_k , entonces hay $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil (k + 1)$

configuraciones que el ladrón debe evitar. Como $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil < \frac{k-1}{2} + 1$, entonces

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil (k+1) &< \left(\frac{k-1}{2} + 1 \right) (k+1) = \frac{k^2-1}{2} + k+1 \\ &= \frac{k^2+2k+1}{2} = \frac{(k+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, en Q_k existen 2^k vértices, de forma que, mientras $\frac{(k+1)^2}{2} < 2^k$ entonces será posible elegir una posición inicial segura para el ladrón. Sin embargo, esto es cierto para $k \geq 2$ ya que se cumple para $k = 2$ y 2^k tiene un crecimiento exponencial respecto a k , mientras que $\frac{(k+1)^2}{2}$ tiene uno polinomial (se puede ver que la función de k dada por $\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$ tiene derivada negativa si $k \geq 2$, por lo que las evaluaciones de la función $\frac{(k+1)^2}{2}$ son una porción cada vez más pequeña de las evaluaciones de 2^k). Así, es posible para el ladrón sobrevivir a la primera ronda.

Para concluir que $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$ policías no pueden capturar al ladrón supongamos que, después del turno de los policías, hay ℓ policías que capturan $k-1$ fichas del ladrón y ℓ' policías que capturan $k-2$ de sus fichas, en donde $\ell + \ell' \leq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil$, podemos suponer que se da la igualdad, al hacerlo no se pierde generalidad ya que podemos ignorar a todos los policías que capturan a lo más $k-3$ fichas, pues estos jamás podrán capturarnos al siguiente turno sin importar lo que hagamos. Por lo tanto, existen $\ell + 2\ell'$ entradas de la k -tupla del ladrón que no están siendo capturadas por alguno de estos policías, sin embargo notemos que, como $\ell \geq 1$ pues de otra forma no es necesario que el ladrón mueva ficha alguna en este turno, entonces

$$\ell + 2\ell' < 2 \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \leq k.$$

Así, debe existir al menos una ficha capturada por todos los $\ell + \ell'$ policías que capturan $k-1$ o $k-2$ entradas, al moverla evitamos que cualquier policía capture en el turno siguiente. Aplicando esta estrategia en cada turno, el ladrón evade a los $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$ policías indefinidamente. ■

Ahora, mostraremos el siguiente lema, que nos será útil para demostrar que $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ policías son suficientes para capturar en $F_k P_n$.

Lema 3.3.2. *Un policía puede capturar en $F_2 P_n$, con $n \geq 4$, si el ladrón no puede permanecer indefinidamente en la misma configuración.*

Demostración. Denotamos A y R al policía y ladrón, de forma que la posición de cualquiera de los dos jugadores después de jugar su t -ésimo turno es $A(t)$ y $R(t)$

respectivamente. Etiquetamos las fichas de ambos y denotamos A_i y R_i , con $i \in \{1, 2\}$, a la i -ésima ficha del policía y ladrón respectivamente, naturalmente, $A_i(t)$ y $R_i(t)$ es la posición de la i -ésima ficha de A o R después de su t -ésimo turno. La etiquetación de ambos jugadores la hacemos de forma que $A_1(1) < A_2(1)$ y $R_1(1) < R_2(1)$, como $\Sigma_2 P_n = 0$ sabemos que estas desigualdades se cumplirán para toda $t \in \mathbb{Z}^+$. Ahora definimos las siguientes funciones, $\delta_1, \delta_2, \delta, \rho_1, \rho_2, \rho : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ como

$$\begin{aligned}\delta_1(t) &= d(A_1(t), R_1(t)), & \delta_2(t) &= d(A_2(t), R_2(t)), \\ \rho_1(t) &= d(A_1(t+1), R_1(t)), & \rho_2(t) &= d(A_2(t+1), R_2(t)), \\ \delta(t) &= \delta_1(t) + \delta_2(t), & \text{y } \rho(t) &= \rho_1(t) + \rho_2(t).\end{aligned}$$

La función δ nos servirá para definir la estrategia que seguirá el policía, mientras que ρ nos servirá para demostrar que esta estrategia es en efecto ganadora. Observemos que $\delta(t)$ es una función que depende de las posiciones de ambos jugadores antes del $(t+1)$ -ésimo movimiento del policía, mientras que $\rho(t)$ se mide inmediatamente después de que el policía realice dicho movimiento.

El policía jugará de la siguiente forma: “Si $\delta(t) = 0 \pmod{2}$ entonces el policía no mueve. Si $\delta(t) = 1 \pmod{2}$ entonces el policía mueve alguna de sus fichas, $A_i(t)$, hacia $R_i(t)$.”

Primero veamos que el policía siempre puede mover una de sus fichas, $A_i(t)$, en dirección de la ficha del ladrón $R_i(t)$ que intenta capturar ya que, de no ser así, es porque la segunda ficha del policía $A_j(t)$ es el vértice adyacente a $A_i(t)$ en la dirección en que se encuentra $R_i(t)$. Sin embargo, suponiendo sin pérdida de la generalidad que $A_i(t) < A_j(t)$, se sigue que $A_i(t) + 1 = A_j(t) \leq R_i(t) < R_j(t)$, por lo que $A_j(t)$ puede moverse en dirección de $R_j(t)$.

Observemos que, cuando el policía sigue esta estrategia, si $\rho(t) = 0 \pmod{2}$ entonces $\rho(t+1) = 0 \pmod{2}$. Esto es así ya que, si $\rho(t) = 0 \pmod{2}$ y el ladrón no mueve ficha alguna en su $(t+1)$ -ésimo movimiento, entonces $\delta(t+1) = \rho(t) = 0 \pmod{2}$ y, por lo tanto, el policía tampoco mueve, de forma que $\rho(t+1) = 0 \pmod{2}$. Por otro lado, si el ladrón sí mueve en el $(t+1)$ -ésimo turno, $\delta(t+1) = 1 \pmod{2}$, por lo que el policía mueve alguna de sus fichas en dirección de la correspondiente ficha del ladrón. Dependiendo de si el ladrón movió su ficha en dirección de la ficha del policía que lo quiere capturar o en dirección opuesta tendremos que $\rho(t+1) = \rho(t) - 2$ o $\rho(t+1) = \rho(t)$. En cualquier caso $\rho(t+1) = 0 \pmod{2}$.

Por otro lado, si $\rho(t) = 1 \pmod{2}$, entonces $\rho(t+1) = 0 \pmod{2}$. En efecto, si $\rho(t) = 1 \pmod{2}$ y el ladrón no mueve entonces $\delta(t+1) = 1 \pmod{2}$, por lo que el policía mueve una de sus fichas en dirección de las fichas que quiere capturar, por lo que $\rho(t+1) = \rho(t) - 1$. Por otro lado, si el ladrón sí mueve una ficha entonces

$\delta(t+1) = 0 \pmod{2}$ y el policía no mueve, de forma que $\rho(t+1) = \rho(t) + 1$ o $\rho(t+1) = \rho(t) - 1$, así que $\rho(t+1) = 0 \pmod{2}$.

Por todo lo anterior, en a lo más un turno se tendrá que $\rho(t) = 0 \pmod{2}$ y, en este caso, ρ es no-creciente y el único movimiento que el ladrón puede realizar en su $(t+1)$ -ésimo movimiento de forma que $\rho(t+1)$ no es estrictamente más pequeño que $\rho(t)$ es mover una de sus fichas en dirección contraria de la ficha de A que quiere capturarlo. Como existe una cantidad finita de movimientos de este tipo que una ficha puede realizar, ya que cada ficha eventualmente alcanzará un extremo de la trayectoria, y como el ladrón tiene que mover eventualmente ya que no puede permanecer en la misma configuración indefinidamente, entonces existe un turno T tal que $\rho(T) = 0$, lo que significa que el ladrón es capturado al turno T . ■

Con esto, finalmente enunciamos el siguiente teorema, en donde mostramos que $c(F_k P_n) = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. Para hacerlo, generalizamos la notación del lema anterior, denotando por $X_i(t)$ a las órbitas $O_i(X(t))$ de cualquier pieza X . Además, esta notación la consideramos de tal forma que las fichas de una configuración $v \in V(F_k P_n)$ satisfacen $O_1(v) < O_2(v) < \dots < O_k(v)$. Como $\Sigma_k P_n = 0$, cada ficha es la única en su órbita, por lo que a $X_i(t)$ le decimos la i -ésima ficha de X al turno t . A $X_i(t)$ también le decimos simplemente la i -ésima ficha de X cuando el turno al que hacemos alusión es claro.

Teorema 3.3.3. Sean $n, k \in \mathbb{Z}^+$, si $n \geq 2k$ entonces $c(F_k P_n) = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$.

Demostración. Lo demostramos por inducción sobre k . Para $k = 1$ sabemos que es cierto ya que $c(F_1 P_n) = c(P_n) = 1$ y $\lceil \frac{1+1}{2} \rceil = 1$, veamos que también es cierto para $k = 2$. Para esto veamos que un primer policía puede aplicar la estrategia descrita en el Lema 3.3.2, de forma que si el ladrón sigue moviendo sus fichas, eventualmente será capturado. Por lo tanto, el segundo policía puede acercarse al ladrón en cada movimiento en que éste no mueva. Es claro que esto resulta en la captura del ladrón. Gracias a la Proposición 3.3.1, y como $\lceil \frac{2+1}{2} \rceil = 2$, concluimos que $c(F_2 P_n) = 2$.

Ahora consideremos $k > 2$, para ver que $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ policías pueden capturar en $F_k P_n$ elegimos la posición inicial de los policías de forma que cada uno tenga sus últimas dos fichas en los últimos dos vértices de P_n . Es decir $A_i(k-1) = n-1$ y $A_i(k) = n$ para $i \in \llbracket \lceil \frac{k+1}{2} \rceil \rrbracket$. Como $2k \leq n$ entonces $2(k-2) \leq n-2$, así, por hipótesis de inducción, se tiene que $\lceil \frac{(k-2)+1}{2} \rceil = \lceil \frac{k-1}{2} \rceil = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil - 1$ policías pueden capturar las primeras $k-2$ fichas del ladrón, que juegan en P_{n-2} . Una vez un policía ha capturado, siempre que el ladrón mueva alguna de sus primeras $k-2$ fichas, este policía moverá la correspondiente ficha para recapturar. Por otro lado, si el ladrón mueve alguna de sus últimas dos fichas, entonces este policía aplica la estrategia descrita

en el el Lema 3.3.2 para capturar las dos fichas restantes. Se concluye que el ladrón, para no ser capturado por éste policía eventualmente deja de mover sus últimas dos fichas, por lo que los $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$ policías restantes pueden simplemente capturar estas dos fichas estáticas y, luego, aplicar su estrategia ganadora para capturar las $k-2$ fichas restantes. Por hipótesis inductiva sabemos que esta cantidad de policías es capaz de hacer esto, por lo que se concluye, gracias al 3.3.1 que $c(F_k P_n) = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. ■

Ahora, mostraremos que $c(F_k P_n) = c(F_k C_n)$ para $k \in \{2, 3\}$. Este resultado es inesperado en vista de los resultados obtenidos por Neufeld y Nowakowski [39], en donde muestran que $c(C_n^{\square k}) = k+1$ si $n \geq 4$. Podemos ver que, a diferencia de lo que ocurre en la trayectoria, $c(F_k C_n) \neq c(C_n^{\square k})$ al menos para $k \in \{2, 3\}$. Así, este resultado se puede entender intuitivamente como que, mientras que para las trayectorias es igual de complicado capturar una colección fichas que pueden ocupar el mismo vértice simultáneamente, en el ciclo no es así, pues es considerablemente más fácil capturar en $F_k C_n$ que en $C_n^{\square k}$. Eurísticamente, esto se explica ya que cada ficha en una configuración de $F_k C_n$ con $k \geq 2$ está confinada a jugar como lo haría en la trayectoria a menos que se utilice algún turno para mover a las demás fichas, es decir, que las demás fichas en el ciclo impiden el movimiento de las demás de tal forma que capturar en $F_k C_n$ se vuelve muy parecido a capturar en $F_k P_n$. Conjeturamos que, en general, cuando $k \geq 2$, se cumple que $c(F_k C_n) = c(F_k P_n)$ y en este sentido mostraremos que esto es así cuando $k = 2$ y $k = 3$. Primero mostraremos que son necesarios $c(F_k P_n)$ policías para capturar en $F_k C_n$, para ello, así como lo hicimos para las trayectorias, argumentaremos que $F_k C_n$ tiene como retracts una gráfica isomorfa a $P_2^{\square k}$, sin embargo, como no todos los ciclos son gráficas bipartitas, no es tan sencillo construir una retracción explícitamente con base en una bipartición como con las trayectorias. Para solventar esta dificultad apelaremos a la teoría conocida sobre los llamados **retracts absolutos**, estas son las gráficas H tales que son retracts de toda gráfica G que la tenga como subgráfica y que, para cualesquiera $x, y \in V(H) \subseteq V(G)$, se satisface $d_H(x, y) = d_G(x, y)$. A una gráfica H que cumple esta última condición le decimos una **subgráfica isométrica** de G . Bandelt [9] mostró que estas gráficas son precisamente los retracts de productos caja de trayectorias, en particular $P_2^{\square k}$ es una de estas gráficas al ser el producto caja de k copias de P_2 . Desgraciadamente, la justificación íntegra de este hecho requiere del desarrollo de varios conceptos relacionados con esta familia de gráficas, los cuales se salen del alcance de este texto, por esto damos por hecho este resultado y al lector interesado lo dirigimos a [29] y [31].

Proposición 3.3.4. *Si n y k son enteros tales que $4 \leq 2k \leq n$, entonces $c(F_k C_n) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$.*

Demostración. Como ya hemos dicho, ya que $P_2^{\square k}$ es un retracto absoluto, es suficiente mostrar que existe una subgráfica isométrica de $F_k C_n$ isomorfa a $P_2^{\square k}$. Para esto hacemos una construcción idéntica a la que hicimos para $F_k P_n$ definiendo

$$Q_k = [\{u \in V(F_k C_n) : u_i \in \{2i, 2i - 1\}\}]_{F_k C_n},$$

en donde $u_i < u_{i+1}$ para toda $i \in \llbracket k - 1 \rrbracket$, considerando el orden lineal de $\mathbb{Z}$. Es decir, etiquetamos las fichas de cualquier configuración en el ciclo de acuerdo al orden lineal que existe en $V(C_n) = \llbracket n \rrbracket \subseteq \mathbb{Z}$. Así, la definición de Q_k la podemos entender pensando que coloreamos alternadamente las aristas del ciclo de dos colores, las de la forma $\{2i, 2i - 1\}$ de azul y aquellas de la forma $\{2i - 1, 2i\}$ de rojo, y Q_k está formada por aquellas configuraciones en las que hay una y solo una ficha en cada una de las primeras k aristas azules. Nuevamente, es claro que estas configuraciones se corresponden biyectivamente con los vértices de $P_2^{\square k}$ asociando a cada $u \in V(Q_k)$ la única k -tupla cuya i -ésima entrada tiene la misma paridad que u_i . Como en un movimiento se puede mover una ficha sobre la arista a la que está confinada, cambiando la paridad del vértice en que se encuentra, entonces esta correspondencia es un isomorfismo entre Q_k y $P_2^{\square k}$.

Ahora, veamos que Q_k en efecto es una subgráfica isométrica de $F_k C_n$, es decir que, para cualesquiera $u, v \in V(Q_k)$, se tiene que $d_{Q_k}(u, v) = d_{F_k C_n}(u, v)$. Como $Q_k \cong P_2^{\square k}$, entonces la distancia dentro de Q_k entre dos configuraciones u y v es igual a la cantidad de fichas en u que no coinciden con la posición de una ficha en v , esto es

$$d_{Q_k}(u, v) = \frac{1}{2}|u \triangle v|,$$

Naturalmente, una trayectoria de longitud mínima dentro de Q_k de u a v se obtiene de mover cada una de las fichas $u_i \in u$ tal que $u_i \neq v_i$, sobre la arista $\{2i, 2i - 1\}$ a la posición de v_i . Además, es claro que $\frac{1}{2}|u \triangle v| \leq d_{F_k C_n}(u, v)$ ya que para llegar de u a v es necesario que todas las fichas en $u \setminus v$ se muevan a algún vértice en v , como $\frac{1}{2}|u \triangle v| = |u \setminus v|$ y cada una de estas fichas se debe mover al menos una vez, entonces $d_{Q_k}(u, v) \leq d_{F_k C_n}(u, v)$. Como para cualquier subgráfica H de una gráfica G se satisface, para cualesquiera $x, y \in V(H) \subseteq V(G)$, que $d_G(x, y) \leq d_H(x, y)$ pues todo xy -camino en H es también un xy -camino en G , concluimos que $d_{Q_k}(u, v) = d_{F_k C_n}(u, v)$ para toda $u, v \in V(Q_k)$. Finalmente, como sabemos que $P_2^{\square k}$ es un retracto absoluto y Q_k es una subgráfica isométrica de $F_k C_n$ isomorfa a $P_2^{\square k}$, entonces Q_k es un retracto de $F_k C_n$. Por la Proposición 3.3.1 sabemos que $c(Q_k) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ y, por la Proposición 3.2.1, concluimos que $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil \leq c(F_k C_n)$. ■

Es interesante observar que en el argumento anterior no fue necesario apelar específicamente al hecho de que la gráfica con la que tratamos es la gráfica de fichas de un ciclo, es decir, para mostrar que existe una subgráfica isométrica de $F_k C_n$ isomorfa a $P_2^{\square k}$ solo fue necesario notar que C_n tiene un apareamiento de tamaño k , a saber, el formado por las primeras k aristas azules, de la forma $\{2i, 2i - 1\}$, en C_n . En general, si G es una gráfica en la que existe un apareamiento de tamaño al menos k , podemos definir la subgráfica de $F_k G$ inducida por todas las configuraciones de k fichas en G en las que hay una y solo una ficha en cada una de las aristas de dicho apareamiento. Esta subgráfica es isomorfa a $P_2^{\square k}$, para verlo basta enumerar las fichas de cualquier forma e interpretar cada arista del apareamiento como una copia de P_2 —entendiendo sus extremos como los vértices 1 y 2—, y con base en ello asociar cada configuración de esta subgráfica con la k -tupla en la que en la i -ésima coordenada se encuentra el vértice de P_2 en donde se encuentra la i -ésima ficha de la configuración. Esta subgráfica de $F_k G$ es isométrica por la misma razón que lo expuesto en la Proposición 3.3.4: dadas dos configuraciones u y v en ella se tiene que $\frac{1}{2}|u \triangle v| \leq d_{F_k G}(u, v)$ ya que en todo uv -camino en $F_k G$ cada ficha en $u \setminus v$ debe llegar a algún vértice en v , por lo que cada una de ellas se debe mover al menos una vez, y dentro de esta subgráfica de $F_k G$ isomorfa a $P_2^{\square k}$ existe una uv -trayectoria cuya longitud es precisamente esta cantidad. Nuevamente, como $P_2^{\square k}$ es un retracto absoluto se deduce que $P_2^{\square k}$ es un retracto de $F_k G$ y, gracias a la Proposición 3.2.1, se concluye que $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil \leq c(F_k G)$. Este resultado lo dejamos enunciado a continuación.

Corolario 3.3.5. *Sea G una gráfica, si existe un apareamiento de tamaño k en G entonces $c(F_k G) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$.*

Ahora, mostraremos que $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ policías son suficientes para capturar en $F_k C_n$ si $k = 2$ y $k = 3$. Para esto, primero veremos que $F_2 C_n$ tiene un retracto isomorfo a C_n , lo que nos ayudará a demostrar un lema análogo al 3.3.2 que usaremos para hacer un argumento semejante al del Teorema 3.3.3 para determinar $F_2 C_n$.

Proposición 3.3.6. *Si $n \geq 4$ entonces $F_2 C_n$ tiene un retracto isomorfo a C_n*

Demostración. Para construir la retracción que buscamos, empezamos por etiquetar cualquier configuración $u \in V(F_2 C_n)$ apoyándonos en el orden lineal que existe en $V(C_n) = \llbracket n \rrbracket$, de forma que $u_1 < u_2$. Con esto definimos una función $\varphi: V(F_2 C_n) \rightarrow V(F_2 C_n)$ dada, para $u = \{u_1, u_2\} \in V(F_2 C_n)$, por

$$\varphi(u) = \begin{cases} \{u_1 - 1, u_2 + 1\} & \text{si } 1 \notin u \text{ y } u_1 - 1 \neq u_2 + 1 \\ u & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, φ deja fijas todas las configuraciones de 2 fichas en C_n tales que tienen alguna ficha en 1 o si $u_1 = 2$ y $u_k = n$, en otro caso φ mueve tanto la ficha en u_1 como aquella en u_k a lo largo de una arista en dirección del vértice 1. Obsérvese que en lo anterior la suma es aquella en $\mathbb{Z}_n$, por lo que $u_2 + 1$ puede ser 1 si $u_2 = n$. En la Figura 3.5 podemos ver un boceto de la forma en que φ afecta a las configuraciones que no deja fijas.

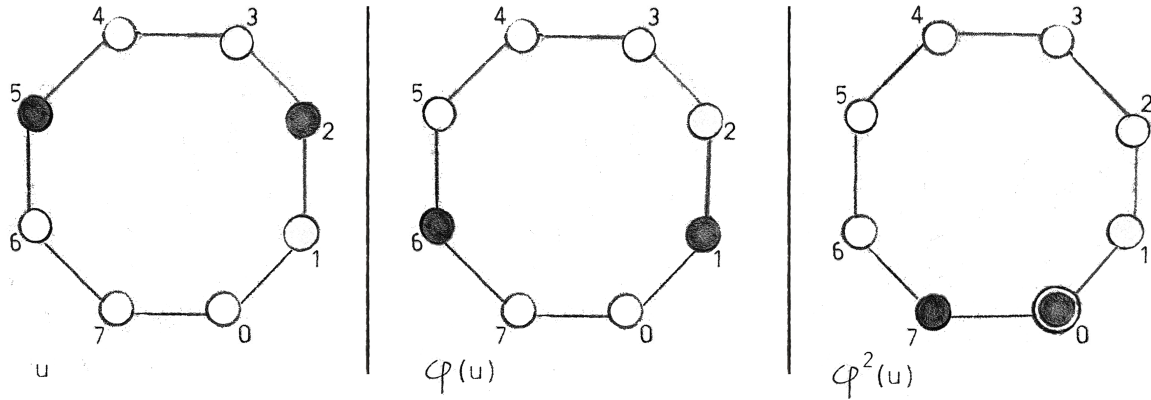


Figura 3.5: Ejemplo de dos iteraciones de φ de la evaluación de φ en una configuración. Obsérvese que $\varphi^2(u)$ es una configuración fija de φ .

Es evidente que dos configuraciones adyacentes que son fijas bajo φ tienen imágenes adyacentes bajo φ ; tampoco es difícil ver que dos configuraciones adyacentes en $F_k C_n$ que no son fijas bajo φ también tendrán imágenes adyacentes bajo φ ya que si u y v son tales configuraciones y $v = M^{u_i(u_i \pm 1)}(u)$, entonces $\varphi(v) = M^{\varphi(u)_i(\varphi(u)_i \pm 1)}(\varphi(u))$. Por lo tanto, para concluir que φ es un morfismo resta ver que, si u y v son configuraciones adyacentes en $F_k C_n$ tales que $\varphi(u) \neq u$ y $\varphi(v) = v$, entonces $\varphi(u)\varphi(v) \in E(F_k C_n)$. Para ello vemos que, si $1 \in v$, es necesario que $u = M^{12}(v)$ o $u = M^{1n}(v)$, suponiendo sin pérdida de la generalidad que $u = M^{12}(v)$, entonces $\varphi(u) = (u \setminus \{2, u_2\}) \cup \{u_2 + 1, 1\} = (v \setminus \{u_2\}) \cup \{u_2 + 1\} = M^{v_2(v_2+1)}(v)$. Por otro lado, si $v = \{2, n\}$, entonces $u = M^{23}(v)$ o $u = M^{n(n-1)}(v)$, suponiendo sin pérdida de la generalidad que $u = M^{23}(v) = \{3, n\}$, se tiene que $\varphi(u) = \{2, 1\}$, lo que es $\varphi(u) = M^{n1}(v)$. Así, se concluye que en cualquier caso $\varphi(u)\varphi(v) \in E(F_k C_n)$, por lo que φ es un morfismo de gráficas.

Notemos que para toda $u \in V(F_2 C_n)$, si $c = \min\{u_1, n + 1 - u_2\}$, entonces $\varphi^c(u)$ es una configuración fija bajo φ . Es decir, al iterar la evaluación del morfismo φ en

cualquier configuración de F_2C_n eventualmente se llega a una configuración fija bajo φ . Como existe una cantidad finita de configuraciones en F_2C_n , entonces existe una $C \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\varphi^C(u)$ es fija bajo φ para toda $u \in V(F_kC_n)$, así que definimos el morfismo $\phi: F_kC_n \rightarrow F_kC_n$ como $\phi = \varphi^C$. Es claro que ϕ es un morfismo pues es composición de morfismos, además, como $\phi(F_kC_n)$ está formada por las configuraciones de F_kC_n fijas bajo φ , entonces también son configuraciones fijas bajo ϕ , por lo que ϕ es una retracción de F_2C_n .

Para concluir, resta ver que $\phi[F_kC_n] \cong C_n$. Para esto recordamos que $V(\phi(F_kC_n)) = \{u \in V(F_kC_n) : 1 \in u \text{ o } u_1 - 1 = u_2 + 1\}$ y definimos $g: V(\phi(F_kC_n)) \rightarrow V(F_1C_n)$ de tal forma que para $u \in V(\phi(F_kC_n))$

$$g(u) = \begin{cases} u \setminus \{1\} & \text{si } 1 \in u \\ \{1\} & \text{si } 1 \notin u. \end{cases}$$

Esta función es inyectiva ya que, dada cualquier configuración $g(u)$ en la imagen de g , si $1 \in g(u)$ entonces $u = \{2, n\}$ y, si $1 \notin g(u)$, entonces $u = g(u) \cup \{1\}$. También es cierto que g es suprayectiva, para verlo consideremos una configuración $v = \{x\} \in F_1C_n$, si $x = 1$ entonces $u = \{2, n\}$ es tal que $g(u) = v$ y, si $x \neq 1$ entonces $u = \{1, x\}$ satisface que $g(u) = v$. Se concluye que g es un isomorfismo y, por lo tanto, $\phi(F_2C_n) \cong F_1C_n \cong C_n$. ■

Lema 3.3.7. *En una partida de policías y ladrones jugada en F_2C_n , con n un entero tal que $n \geq 4$, un policía que ha capturado la sombra del ladrón en $\phi(F_2C_n)$ puede capturar al ladrón si éste no puede permanecer indefinidamente en la misma configuración.*

Demostración. Suponemos que en una partida de policías y ladrones jugada en F_2C_n , justo antes de que el ladrón realice su $(T+1)$ -ésimo movimiento, un policía A se encuentra en $\phi(F_2C_n)$ capturando la sombra del ladrón R , es decir, que $A(T+1) = \phi(R(T))$. Si el ladrón se encuentra en algún vértice de $\phi(F_2C_n)$ entonces $A(T+1) = R(T)$ porque ϕ es una retracción, por lo que el policía ha capturado al ladrón, así que suponemos que el ladrón no se encuentra en $\phi(F_2C_n)$. Por la definición de ϕ sabemos que debe existir una mínima $C \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\varphi^C(R(T)) = \phi(R(T))$, afirmamos que el policía A puede jugar de forma que para toda $t \geq T$ existe $c(t) \in \llbracket 0, C \rrbracket$ tal que $\varphi^{c(t)}(R(t)) = A(t+1)$, que la función $c: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \llbracket 0, C \rrbracket$ es no-creciente, y que el ladrón solo puede realizar una cantidad finita de movimientos consecutivos tales que c no decrece estrictamente. Esto lo demostramos por inducción sobre t , suponiendo que justo antes del $(t+1)$ -ésimo movimiento del ladrón se satisface que existe $c(t) \in \llbracket 0, C \rrbracket$

tal que $\varphi^{c(t)}(R(t)) = A(t+1)$, entonces el policía juega de acuerdo a la siguiente estrategia:

1. Si en su $(t+1)$ -ésimo movimiento el ladrón no mueve, el policía no mueve en su $(t+2)$ -ésimo movimiento.
2. Si en su $(t+1)$ -ésimo movimiento el ladrón mueve de forma que $R_1(t+1) = R_1(t) - 1$, el policía responde en su $(t+2)$ -ésimo movimiento de forma que $A_2(t+2) = A_2(t+1) - 1$.
3. Si en su $(t+1)$ -ésimo movimiento el ladrón mueve de forma que $R_1(t+1) = R_1(t) + 1$, el policía responde en su $(t+2)$ -ésimo movimiento de forma que $A_1(t+2) = A_1(t+1) + 1$.
4. Si en su $(t+1)$ -ésimo movimiento el ladrón mueve de forma que $R_2(t+1) = R_2(t) + 1$, el policía responde en su $(t+2)$ -ésimo movimiento de forma que $A_1(t+2) = A_1(t+1) + 1$.
5. Si en su $(t+1)$ -ésimo movimiento el ladrón mueve de forma que $R_2(t+1) = R_2(t) - 1$, el policía responde en su $(t+2)$ -ésimo movimiento de forma que $A_2(t+2) = A_2(t+1) - 1$.

Para argumentar que el seguimiento de esta estrategia tiene como resultado la existencia de un $c(t+1) \in \llbracket 0, c(t) \rrbracket$ tal que $\varphi^{c(t+1)}(R(t+1)) = A(t+2)$ notemos que, para que dos configuraciones $u, v \in V(F_2C_n)$ sean tales que $\varphi^c(v) = u$, con c la mínima tal que satisface esto, es necesario y suficiente que los intervalos —medidos en el sentido positivo del ciclo, de acuerdo al orden que existe en $\mathbb{Z}$ — satisfagan que $||[u_1, v_1]|| = ||[v_2, u_2]|| = c$. En otras palabras, $\varphi^c(v) = u$ siempre y cuando $u_1 = v_1 - c$ y $u_2 = v_2 + c$. Esto es así ya que, al iterar la evaluación de φ sobre v en c ocasiones, obtenemos como resultado la configuración $\{v_1 - c, v_2 + c\}$. Por lo tanto, sabemos por hipótesis que $R_1(t) - c(t) = A_1(t+1)$ y $R_2(t) + c(t) = A_2(t+1)$. De esta forma, es fácil comprobar que la estrategia anterior preserva esta condición de igualdad entre la longitud de estos intervalos. Por ejemplo, si R mueve como lo indica **2.** provoca que la longitud del intervalo $[A_1(t+1), R(t)]$ disminuya en 1, por lo que el policía responde en su $(t+2)$ -ésimo movimiento acortando en 1 la longitud del intervalo $[R_2(t), A_1(t+1)]$, por lo que, en este caso $c(t+1) = c(t) - 1$; en cambio, si el ladrón mueve como se describe en **3.** está aumentando la distancia entre $A_1(t+1)$ y $R_1(t)$ en uno, y el policía responde moviendo A_1 , contraarrestando esto y asegurando que $c(t+1) = c(t)$. El caso que se describe en **4.** es el análogo a **2.** para las fichas A_2 y R_2 , mientras que el caso **5.** es el análogo a **3.** Concluimos que en efecto existe $c(t+1)$ como la buscábamos

y, además, los movimientos del ladrón que no provocan que $c(t+1) < c(t)$ son mover R_1 positivamente y R_2 negativamente (casos **3.** y **5.**), por lo que, si el ladrón insiste en realizar únicamente movimientos así, sus fichas eventualmente chocarán y se verá forzado a realizar un movimiento que haga disminuir a c .

Lo anterior implica, como el ladrón no puede permanecer indefinidamente en la misma configuración, que para alguna $t \geq T$ se tendrá $c(t) = 0$ y, así, que el ladrón será capturado por el policía al turno t . ■

Teorema 3.3.8. *Para todo entero $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \geq 4$ se satisface $c(F_2C_n) = 2$.*

Demostración. Por la Proposición 3.3.6, y como $c(C_n) = 2$, con dos policías es posible que uno de ellos capture la sombra del ladrón en $\phi(F_2C_n)$. Acto seguido, dicho policía aplicará la estrategia descrita en el Lema 3.3.7, por lo que capturará al ladrón si éste sigue moviendo sus fichas, de forma que, para evitarlo, el ladrón debe dejar de moverse eventualmente. El segundo policía puede capturar acercándose al ladrón cada vez que éste no mueva en un turno. ■

Vale la pena observar que la construcción de la retracción ϕ se puede repetir para F_kC_n siempre que $k \geq 2$. Esto es así ya que podemos generalizar φ , para que sea una función de F_kC_n en F_kC_n , definiendo que ésta deja fijas todas las configuraciones en $N_k(\{1\}) \cup N_k(\{2, n\})$ mientras que, a cualquier otra configuración $u = \{u_1, \dots, u_k\} \in V(F_kC_n)$ con $u_1 < \dots < u_k$ en el orden lineal de $\mathbb{Z}$, la manda a la configuración resultante de mover la ficha en u_1 a $u_1 - 1 \pmod k$ y aquella en u_k a $u_k + 1 \pmod k$. Haciendo un análisis análogo al que se hizo en la Proposición 3.3.6 es fácil ver que φ sigue siendo un morfismo, y, como para cada configuración en $V(F_kC_n)$ existe una cantidad finita de veces que podemos iterar la evaluación de φ antes de que llegue a alguna configuración que deja fija, podemos definir ϕ de forma análoga a como lo hicimos antes y, por lo tanto, volverá a ser una retracción de F_kC_n . Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en el caso $k = 2$, no se cumple que $\phi(F_kC_n) \cong F_{k-1}C_n$. Para verlo definimos $g: V(\phi(F_kC_n)) \rightarrow F_{k-1}C_n$ como

$$g(u) = \begin{cases} u \setminus \{1\} & \text{si } 1 \in u \\ (u \setminus \{2, n\}) \cup \{1\} & \text{si } 1 \notin u. \end{cases}$$

Obsérvese que, cuando $k = 2$, la regla de correspondencia de g es idéntica a la del isomorfismo entre $\phi(F_2C_n)$ y C_n que construimos en la Proposición 3.3.6 y, de forma análoga a lo que hicimos antes, es posible ver que esta definición de g resulta en un monomorfismo. Pero, cuando $k > 2$, no resulta ser un isomorfismo porque las

configuraciones en $N_{k-1}(\{1, 2\}) \cup N_{k-1}(\{1, n\})$ no forman parte de la imagen de ϕ , pues todas las configuraciones en $N_{k-1}(\{1\})$ que están en la imagen de ϕ necesariamente tienen espacios vacíos en 2 y n . Este problema no surge cuando $k = 2$ ya que $N_1(\{1, 2\}) = N_1(\{1, n\}) = \emptyset$, por lo que no hay configuraciones de C_n que no son alcanzadas por ϕ y así que ϕ sí es un isomorfismo en este caso. Por lo tanto, en general, esta idea solo nos permite afirmar que $F_k C_n$ tiene un retracto isomorfo a una subgráfica inducida de $F_{k-1} C_n$, a saber $F_{k-1} C_n - N_{k-1}(\{1, 2\}) \cup N_{k-1}(\{1, n\})$. Sabemos que no es posible concluir una relación entre el número policiaco de una gráfica y una subgráfica inducida cualquiera, pero, si fuera cierto que $c(\phi(F_k C_n)) \leq c(F_{k-1} C_n)$, podríamos utilizar tantos policías como son necesarios para capturar en $F_{k-1} C_n$ para capturar la sombra del ladrón en $\phi(F_k C_n)$ con un policía —obsérvese que esto implica, en particular, que este policía capturará las $k - 2$ fichas que no son afectadas por ϕ : $R_2, \dots, R_{k-1}$ — y aplicar una estrategia como la del Lema 3.3.7, en donde recaptura cada vez que el ladrón mueve una de las $k - 2$ fichas que ya han sido capturadas, para obligar al ladrón a dejar de mover R_1 y R_k . Cuando el ladrón está en esta situación, para el resto de policías capturarlo se reduce a capturar las $k - 2$ fichas que sí puede mover, las cuales juegan en una trayectoria, es decir, se reduce a capturar en $F_{k-2} P_m$ para alguna $m < n$. Como $c(F_k P_n) - 1$ policías pueden lograr esto último, haciendo un argumento inductivo, se podría concluir que $c(F_k P_n)$ policías pueden ejecutar esta estrategia de captura en $F_k C_n$. Conjeturamos que esto es así, sin embargo, no hemos sido capaces de obtener una demostración satisfactoria en el curso de esta investigación, por lo que nos conformamos indicar esta idea para futuras indagaciones en el tema.

A continuación, veremos que para $k = 3$ también sucede que $c(F_k C_n) = c(F_k P_n)$, es decir, que $c(F_3 C_n) = 2$ si $n \geq 6$. Para ello, utilizaremos una técnica diferente que la que usamos en el Teorema 3.3.8, la idea en la que se basa este argumento se resume a continuación: un policía jugando una partida de policías y ladrones en $F_3 C_n$ siempre puede capturar una ficha del ladrón, llamemos A_0 a la ficha del policía que captura a la ficha R_0 del ladrón al turno t , es decir, que $A_0(t + 1) = R_0(t)$. Así, justo antes del $(t + 1)$ -ésimo movimiento del ladrón las otras dos fichas de cada uno se encuentran en vértices de la trayectoria $C_n - A_0(t + 1) = C_n - R_0(t)$, por lo que las etiquetamos como A_1, A_2 y R_1, R_2 de la forma en la que se deberían etiquetar en la trayectoria para que A_i pueda capturar a R_i , esto da lugar a tres posibles situaciones, a las que llamamos S_1, S_2 y S_3 (véase la Figura 3.6). De ahora en adelante, el policía recapturará R_0 con A_0 siempre que el ladrón mueva esta ficha y al policía le sea posible realizar el mismo movimiento — más adelante veremos qué sucede cuando esto no es posible— y se acercará sin llegar a capturar, con A_1 o A_2 , a R_1 o R_2 respectivamente, siempre que el ladrón mueva alguna de estas dos fichas, en otro

caso no se moverá. Como se puede ver en la Figura 3.6, en cada situación existen diferentes secciones del ciclo que la ficha A_i debe recorrer para llegar a capturar R_i , con base en ellas podremos definir una función $\rho: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ que acota superiormente la distancia entre la configuración del policía y la del ladrón dada por la suma de las longitudes de estas secciones del ciclo. Afirmamos que, al seguir la estrategia que se está describiendo, esta función es no-creciente y que, al pasar de una situación S_i a otra S_j , con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, el ladrón debe realizar un movimiento tal que ρ decrece estrictamente, por lo que eventualmente debe decidir permanecer en una de estas tres situaciones. Finalmente, veremos que en cada una de estas situaciones, para evitar ser capturado por el policía, el ladrón se ve forzado a jugar de forma que un segundo policía puede darle captura. Desarrollamos los detalles de esta estrategia y demostramos que es ganadora en el Teorema 3.3.9

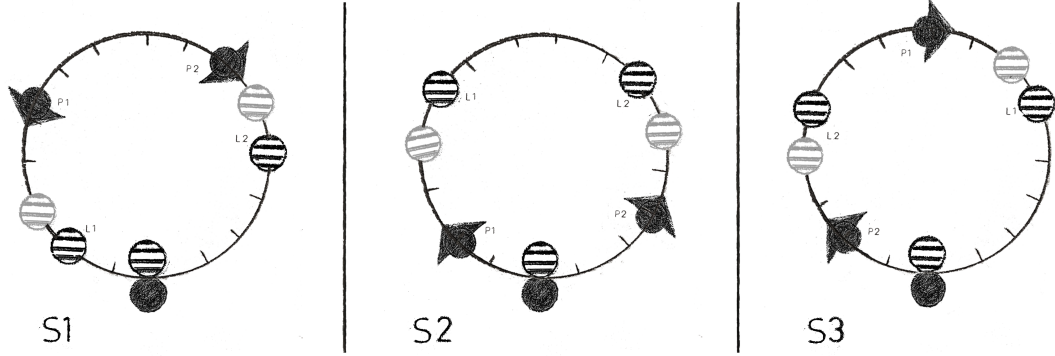


Figura 3.6: Las tres situaciones en las que se pueden encontrar un ladrón y un policía que captura una de sus fichas.

Teorema 3.3.9. *Para todo entero $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \geq 6$ se satisface que $c(F_3C_n) = 2$.*

Demostración. Suponemos que el ciclo está dibujado de forma que, al mover una ficha en sentido antihorario, ésta pasa de ocupar el vértice x a ocupar $x + 1 \pmod n$, también diremos que éste es un movimiento positivo de la ficha en x . Extendemos este lenguaje para decir que una ficha que se mueve de x a $x - 1 \pmod n$ realiza un movimiento en sentido horario o negativo. Además, dados $x, y \in V(C_n)$, denotamos por $[x, y]$ a la xy -trayectoria en C_n dada por $(x, x + 1, \dots, y - 1, y)$, a esta subgráfica le decimos el intervalo positivo de x a y y siempre es una trayectoria, pues si $x = y$

entonces $[x, y] = [\{x\}]_{C_n} \cong P_1$, por lo que hablaremos también de la longitud de $[x, y]$ a la que denotamos por $|[x, y]|$.

Empecemos por ver que un policía en efecto puede capturar una de las fichas del ladrón en F_3C_n , para ello basta que el policía etiquete las fichas del ladrón, R_0, R_1 y R_2 , e intenta dar captura a R_0 . El policía eligirá una de sus fichas y, sin importar lo que haga el ladrón, la moverá siempre sobre el ciclo en sentido antihorario. Si en algún momento esta ficha no puede realizar un movimiento en este sentido, es porque otra de las fichas del policía se encuentra en el vértice hacia el cual quiere mover su ficha destacada, como nuestro objetivo es capturar a R_0 con cualquier ficha del policía, éste simplemente cambiará la ficha destacada por aquella que le estorba, que ya está en la posición en la que quería ponerla. Más aún, como el policía aún puede mover esta nueva ficha, esta circunstancia es incluso ventajosa para el policía, pues para efectos prácticos es como si el policía hubiese movido dos veces su ficha destacada en el mismo turno. Es claro que para que un ladrón jugando en C_n evada a un policía que sigue esta estrategia (moverse siempre en sentido antihorario), éste eventualmente debe moverse solo en sentido positivo, pues la longitud del intervalo positivo entre el policía y el ladrón es no-decreciente y disminuirá siempre que el ladrón no mueva positivamente. Sin embargo, R_0 no puede hacer esto, ya que al intentar moverse siempre en sentido antihorario eventualmente chocará con alguna de sus otras fichas, viéndose forzado a moverla y perdiendo un turno para mover a R_0 , o deberá mover R_0 hacia un vértice ocupado por alguna de las otras fichas del policía, en cuyo caso habremos logrado nuestro objetivo de capturar R_0 . Así, es válido suponer que empezamos la partida en alguna de las tres situaciones que se ven en la la Figura 3.6.

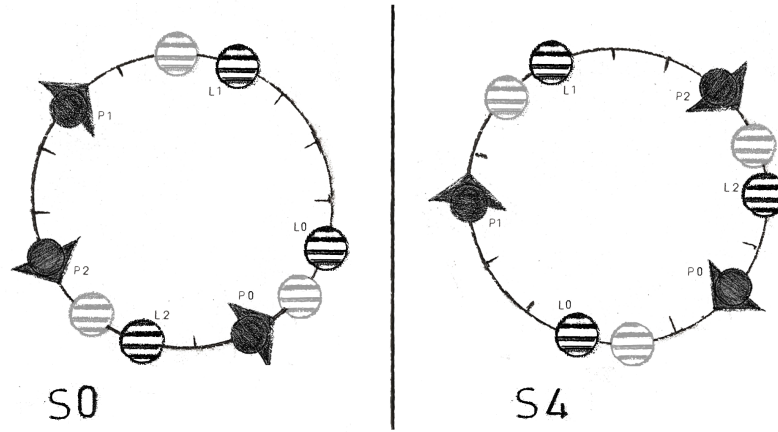
Suponemos que las fichas del policía A , quien captura R_0 , son etiquetadas de acuerdo a la situación en la que se encuentren al inicio de la partida como ya hemos descrito y se ilustra en la Figura 3.6. Subrayamos que si alguna A_i , con $i \in \{1, 2\}$, se encontrara capturando a R_i , entonces, mientras el ladrón no mueva una de sus fichas capturadas, A solo necesita capturar la tercera ficha del ladrón, que se encuentra confinada en una trayectoria junto con la ficha del policía que desea capturarla. Esto último puede lograrlo moviendo únicamente su ficha que no ha capturado ya que $c(P_m) = 1$ para toda $m \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, en este caso podemos suponer que el ladrón mueve alguna de sus dos fichas capturadas, y entonces podemos reetiquetar las fichas del ladrón de ser necesario para que la única ficha capturada sea R_0 y, ahora sí, estemos en S_1, S_2 o S_3 . Entonces, con base en esa etiquetación, definimos la función $\rho: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ como

$$\rho(t) = \begin{cases} |[R_1(t), A_1(t+1)]| + |[A_2(t+1), R_2(t)]| & \text{si están en la situación } S_1, \\ |[A_1(t+1), R_1(t)]| + |[R_2(t), A_2(t+1)]| & \text{si están en la situación } S_2, \\ |[A_1(t+1), R_1(t)]| + |[A_2(t+1), R_2(t)]| & \text{si están en la situación } S_3. \end{cases}$$

Observemos también que, técnicamente, S_3 describe dos situaciones análogas, pues es posible también que las fichas A_1 y A_2 se encuentren “del otro lado” de las fichas R_1 y R_2 , no hacemos distinción entre estos casos ya que se lidia con ellos de forma perfectamente análoga y su consideración solo serviría para entorpecer el lenguaje.

Como ya hemos dicho, el policía A jugará recapturando a R_0 con A_0 siempre que el ladrón mueva R_0 , y A_0 pueda hacerlo, y acercando A_1 o A_2 a R_1 o R_2 , respectivamente, si el ladrón mueve alguna de estas últimas fichas, con la condición de que, en este último caso, no suceda que el resultado de este movimiento sea que A_1 o A_2 capture a R_1 o R_2 . Naturalmente, al decir que A_1 y A_2 se acercan a R_1 y R_2 , nos referimos a moverse de manera que la longitud de alguno de los intervalos que se están considerando para definir ρ en esa situación disminuya. Por otro lado, la condición de no capturar R_i , con $i \in \{1, 2\}$, con A_i la podemos interpretar intuitivamente como que A_i no está intentando capturar a R_i , si no a una “ficha virtual” que se encuentra justo detrás de R_i en la dirección en que A_i la persigue. Estas “fichas virtuales” se ilustran en la Figura 3.6 con perímetro punteado. Por otro lado, veamos que solo en las situaciones S_2 y S_3 puede suceder que R_0 realiza un movimiento tras el cual A_0 no puede recapturarlo, y esto sucede cuando R_0 se mueve hacia la posición de A_1 o A_2 . Estos movimientos provocan que el ladrón pueda escapar de las situaciones S_1 , S_2 y S_3 sin provocar que ρ disminuya y, más aún, provocarían que ρ deje de estar definida. Para solventar esta situación es necesario introducir dos situaciones adicionales: S_0 y S_4 , con las cuales también expandimos la definición de ρ . Estas situaciones se muestran en la Figura 3.7, en donde también se indican los intervalos del ciclo que se deben considerar para definir ρ en estos casos, por lo que nos abstendremos de escribir la definición de ρ en estos casos. Así como S_3 , se tiene que S_4 también representa dos situaciones análogas que no trataremos por separado. Cuando se encuentre en algunas de estas situaciones, de forma análoga a las primeras tres, el policía moverá cualquiera de sus fichas, acercándose a la ficha virtual que quiere capturar.

Observemos que en todas las situaciones, cuando el ladrón realiza un $(t+1)$ -ésimo movimiento con una de sus fichas que no ha sido capturada de forma que la longitud del intervalo entre la ficha del policía que la quiere capturar y ella disminuye, entonces el $(t+2)$ -ésimo movimiento del policía, que también provoca que la longitud de alguno de estos intervalos disminuya, provoca que $\rho(t+1) = \rho(t) - 2$. Mientras

Figura 3.7: Las situaciones S_0 y S_4 .

que, si el ladrón utiliza su $(t + 1)$ -ésimo movimiento para alejar R_i de A_i , entonces se tendrá que $\rho(t + 1) = \rho(t)$. Así se ve que ρ es no-creciente. Además, como el policía nunca realiza un movimiento que capture una de las fichas que no ha capturado, para pasar de una situación a otra el ladrón debe, en algún momento, mover una de sus fichas hacia la ficha del policía que la busca capturar, **provocando que ρ disminuya estrictamente**. Aquí es importante subrayar que la única situación en que el policía sí moverá una de sus fichas hacia la verdadera posición de ficha del ladrón que persigue es si esto tiene como resultado que A capture a R , cosa que solo puede ocurrir si se encuentran en alguna de las situaciones S_1 , S_2 o S_3 , si tanto A_1 como A_2 están capturando a las fichas virtuales del ladrón, y si el ladrón mueve una de sus dos fichas no-capturadas hacia la ficha del policía que la quiere capturar. En particular, si se encuentran en la situación S_0 o S_4 , el policía está capturando todas las fichas virtuales, y el ladrón mueve una de sus fichas hacia la posición de la ficha del policía que la quiere capturar, entonces el policía no moverá, aún así tendremos que $\rho(t + 1) = \rho(t) - 1$. Por todo esto, y como ρ es claramente una cota superior de la distancia entre $A(t + 1)$ y $R(t)$, el ladrón eventualmente debe permanecer en la misma situación S_i para alguna $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

Como sabemos que para evitar que ρ disminuya, el ladrón solo puede mover una de sus fichas de forma que la longitud del intervalo entre la ficha del policía que lo quiere capturar y ella disminuya, eventualmente, dependiendo de la situación en la que decida permanecer, para evitar ser capturado por A , el ladrón debe jugar como a continuación:

- S0. R_0 y R_1 solo se mueven positivamente, mientras que R_2 solo se mueve negativamente, por lo que eventualmente deja de mover todas sus fichas.
- S1. R_1 solo se mueve negativamente y R_2 solo positivamente, por lo que eventualmente solo se mueve R_0 .
- S2. R_1 solo se mueve positivamente y R_2 solo se mueve negativamente, por lo que eventualmente solo se mueve R_0 .
- S3. R_1 y R_2 solo se mueven positivamente.
- S4. Todas las fichas del ladrón se mueven positivamente.

Finalmente, veamos que al comportarse de esta forma, un segundo policía B puede capturar al ladrón. Esto es evidente en el caso de $S0$, así mismo para $S1$ y $S2$ pues basta con que el policía B capture primero las fichas estáticas R_1 y R_2 , y luego capture a R_0 , que juega en una trayectoria. En los casos $S3$ y $S4$ el policía B etiqueta sus fichas de forma congruente a como están etiquetadas las fichas del ladrón, es decir, que ambas configuraciones etiquetadas estén en la misma componente conexa de $F_3^*C_n$. En cada turno el policía B mueve alguna de sus fichas que no ha capturado negativamente, de forma que la longitud del intervalo positivo entre la i -ésima ficha del ladrón y la i -ésima ficha del policía disminuye. El policía B recaptura siempre que una ficha capturada se mueva positivamente. Para ver que esta estrategia es ganadora podemos definir $\rho': \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ como

$$\rho'(t) = |[R_0(t), B_0(t+1)]| + |[R_1(t), B_1(t+1)]| + |[R_2(t), B_2(t+1)]|.$$

En vista de que el policía B recaptura siempre que una ficha capturada se mueve positivamente y en otro caso mueve alguna ficha que no ha capturado en dirección negativa, ρ' es no-creciente. Además, los únicos movimientos que pueden realizar R_1 y R_2 de forma que ρ' no disminuya es moverse positivamente una vez han sido capturadas, por lo que podemos asumir que B las captura a ambas. En esta situación, para evitar que ρ' disminuya, el ladrón solo puede mover R_1 y R_2 positivamente o R_3 negativamente, cosa que solo puede hacer una cantidad finita de veces antes de que sus fichas colisionen. Se concluye que en cualquiera de las situaciones el policía B puede capturar a R . ■

Para finalizar este texto, veremos que k policías siempre pueden capturar en $F_k K_n$ y que son necesarios $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ policías para hacerlo.

Proposición 3.3.10. *Para cualesquiera enteros $n, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $2k \leq n$, se satisface que $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil \leq c(F_k K_n) \leq k$.*

Demostración. La desigualdad $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil \leq c(F_k K_n)$ se sigue del el Corolario 3.3.5. La otra desigualdad la argumentaremos por inducción sobre k . La base se sigue de que $c(K_n) = 1$, por lo que suponemos que es válido para $k - 1 \geq 1$ y veremos que también lo es para k . Supongamos que tenemos k policías en una partida de policías y ladrones jugada en $F_k K_n$. Entonces podemos ignorar una de las fichas del ladrón y capturar las $k - 1$ restantes con algún policía. Este policía recapturará las fichas del ladrón capturadas si éste las mueve a un vértice desocupado por él en K_n , en otro caso, capturará con su única ficha que no ha capturado a la única ficha del ladrón que no ha sido capturada. Se sigue que el ladrón no podrá mover la ficha que no ha sido capturada por este policía y tampoco podrá mover al vértice que la ficha de este policía que no ha capturado ninguna ficha. En particular, el ladrón está confinado a jugar con solo las $k - 1$ fichas que han sido capturadas en una gráfica isomorfa a K_{n-2} . Por hipótesis de inducción, sabemos que los $k - 1$ policías restantes pueden capturarlas después de capturar la ficha del ladrón que no se puede mover, capturando al ladrón. ■

Por último, veamos que, si $n \geq 10k$, entonces esta cantidad de policías es necesaria para lograr la captura del ladrón.

Proposición 3.3.11. *Sean $n, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n \geq 10k$, entonces $c(F_k K_n) \geq k$.*

Demostración. Para ver que lo anterior se cumple, es suficiente ver que, si hay $k - 1$ policías en $F_k K_n$, el ladrón está en una configuración $u \in V(F_k K_n)$ y algún policía ocupa una configuración adyacente a u , siempre existe un vecino de u que no es adyacente a la configuración de ningún policía. Esto asegura que siempre que el ladrón está forzado a moverse, puede hacerlo de forma segura para sobrevivir un turno más.

Primero observemos que, como los vecinos de $u = \{x_1, \dots, x_k\}$ en $F_k K_n$ se obtienen de mover una de las fichas de u a un vértice en donde no hay ficha de u , entonces éstos se pueden clasificar en k conjuntos, a los que denotamos $N_{x_1}, \dots, N_{x_n}$, definidos como:

$$N_{x_i} = \{(u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\} : z \in V(K_n) \setminus u\}.$$

Es claro que cada $|N_{x_i}| = n - k$. Además, como cualesquiera $z_1, z_2 \in V(K_n) \setminus u$ son adyacentes, se tiene que $[N_{x_i}]_{F_k K_n} \cong K_{n-k}$, por lo que, al haber un policía en una configuración de N_{x_i} , el ladrón ya no podrá moverse a ninguna configuración en N_{x_i}

sin ser capturado. Así mismo, si definimos para cada $z \in V(F_k K_n) \setminus u$ el conjunto L_z como

$$L_z = \{(u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\} : x_i \in u\},$$

se tiene ahora que $|L_z| = k$ y, nuevamente, $[L_z]_{F_k K_n} = K_k$. Por lo tanto, si un policía se encuentra en $(u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\}$, el ladrón no podrá moverse a ninguna configuración en $N_{x_i} \cup L_u$. Sin embargo, si v es un vecino de u que no está en $N_{x_i} \cup L_u$, es decir, si $v = (u \setminus \{x_j\}) \cup \{y\}$ con $x_j \neq x_i$ y $y \neq z$, se tiene que $|((u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\}) \triangle ((u \setminus \{x_j\}) \cup \{y\})| = 4$, por lo que estos vértices no son adyacentes. Se sigue que, si todos los $k - 1$ policías se encuentran en algún vecino de u , es decir, en alguna configuración de N_{x_i} para algún $x_i \in u$, existirá alguna N_{x_j} en donde no se encuentre policía alguno, y a lo más $k - 1$ configuraciones de N_{x_j} serán vecinos de algún policía por estar en algún L_z . Como $k \leq n - k$ pues $2k \leq n$, entonces existirá alguna configuración en N_{x_j} que no es adyacente a ningún policía. Resta ver que, si existen policías fuera de la vecindad de u , aún así no será posible que defiendan todos los vecinos de u .

Supondremos que cada uno de los $k - 1$ policías son adyacentes a algún vecino de u , de otra forma el análisis sería equivalente a ver que tantos policías como aquellos que sí son adyacentes a algún vecino de u no pueden capturar al ladrón, lo cual es evidente si $k - 1$ policías no pueden hacerlo. Supongamos que hay ℓ policías en configuraciones adyacentes a u y ℓ' que son adyacentes a algún vecino de u pero no a u . Veamos que, si v es una configuración adyacente a un vecino de u genérico, digamos $(u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\}$, entonces $(u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\}$ se puede obtener de v moviendo una ficha y de v a alguna de $(u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\}$. Sin embargo, como v no es adyacente a u , esta ficha no se puede mover a z , ya que entonces v ya contendría a $u \setminus \{x_i\}$. Por lo tanto, $v = (u \setminus \{x_i, x_j\}) \cup \{y, z\}$. Se sigue que v es adyacente a únicamente cuatro vecinos de u , a saber: $(u \setminus \{x_i\}) \cup \{z\}$, $(u \setminus \{x_i\}) \cup \{y\}$, $(u \setminus \{x_j\}) \cup \{z\}$ y $(u \setminus \{x_j\}) \cup \{y\}$. Así, el ladrón solo puede moverse a vecinos que estén en un N_{x_i} en el que no se encuentre policía alguno y, dentro de éste, debe hacerlo a una configuración que no esté en algún L_z en donde se encuentra un policía. Suponiendo que cada uno de los ℓ policías en la vecindad de u están en un N_{x_i} diferente habrá $k - \ell$ de estos conjuntos en donde no se encuentra un policía, si también sucede que cada policía está en un conjunto L_z diferente, en cada uno de los N_{x_i} en donde no se encuentra un policía tendrá $(n - k - \ell)$ posibilidades para moverse sin ser capturado. Se sigue que el ladrón tiene a lo más $(k - \ell)(n - k - \ell)$ vecinos disponibles para moverse sin ser capturado por un policía que se encuentra en una configuración adyacente a u . Por otro lado, cada uno de los ℓ' ladrones que no se encuentran en configuraciones adyacentes a u , son adyacentes a 4 vecinos de u , por lo que, para que el ladrón no tenga opción alguna para moverse sin ser capturado, deberá satisfacerse que $(k - \ell)(n - k - \ell) \leq 4\ell'$. Para concluir, veremos que esta desigualdad no se puede satisfacer si $n = 10k$.

Recordando que $\ell + \ell' = k - 1$ se tiene $\ell' = k - \ell - 1$, lo que sustituiremos en la desigualdad anterior para obtener $(k - \ell)(n - (k + \ell)) \leq 4(k - \ell - 1)$. Simplifiquemos lo anterior:

$$\begin{aligned}
 (k - \ell)(n - (k + \ell)) &\leq 4(k - \ell - 1), \\
 n(k - \ell) - (k - \ell)(k + \ell) &\leq 4(k - \ell - 1), \\
 10k(k - \ell) - (k^2 - \ell^2) &\leq 4(k - \ell - 1), \\
 10k^2 - 10k\ell - k^2 + \ell^2 &\leq 4(k - \ell - 1), \\
 9k^2 - 10k\ell + \ell^2 &\leq 4(k - \ell - 1), \\
 9k^2 - 6k\ell + \ell^2 - 4k\ell &\leq 4(k - \ell - 1), \\
 (3k - \ell)^2 &\leq 4(k - \ell + k\ell - 1), \\
 (3k - \ell)^2 &\leq 4(k - 1)(\ell + 1).
 \end{aligned}$$

Observemos que, como $\ell \leq k - 2$, entonces $3k - \ell \geq 2k + 2$ y $(2k + 2)^2 = 4(k + 2)^2$. Finalmente, como $k + 2 > k - 1 \geq \ell + 1$, entonces

$$(3k - \ell)^2 \geq 4(k + 2)^2 > 4(k - 1)(\ell + 1).$$

Por lo que $(3k - \ell)^2 \leq 4(k - 1)(\ell + 1)$ no se puede satisfacer y así se concluye que existe algún vecino de u no-adyacente a policía alguno. Finalmente $k - 1 < c(F_k K_n)$.

■

Índice alfabético

- K_n , 34
- O_n , 34
- P_n , 35
- k -hipergráfica, 26
- árbol, 46
 - de bloques y cortes, 46
 - generador, 48
- bosque
 - de bloques y cortes, 44
- órbita, 15
 - configuración, 82
- tiene una propiedad , 8
- acíclica, 46
- acción, 15
 - k -transitiva, 16
 - transitiva, 16
- arista, 27
 - XY -arista, 28
 - de corte, 43
- bandera, 20
 - maximal, 20
- bipartición, 48
 - estructura de incidencia, 50
- biyección
 - subyacente, 50
- bloque, 44
 - terminal, 47
 - trivial, 44
- bosque, 46
- camino, 36
 - basado, 36
 - cerrado, 36
 - invertido, 42
 - restringido, 37
 - simplificado, 39
- cancelación elemental, 39
- captura, 98
- cardinalidad, 8
- cartas, 32
- ciclo
 - u -ciclo, 114
 - gráfica, 35
 - de S_X , 16
- clan, 35
- clases de equivalencia, 7
- cociente
 - grupo, 14
- coclan, 35
- colores, 48
- componente
 - k -conexa, 44
- componente conexa, 43
- composición, 5
- concatenación, 11
 - de caminos, 37
 - de caminos simplificados, 41
- configuración, 51
- configuración inicial, 55
- configuraciones etiquetadas, 75

- conjunto, 2
 - dominante, 35
 - finito, 8
 - indexador, 6
 - no-vacío, 2
 - potencia, 3
 - separador, 43
 - unitario, 2
 - vacío, 2
- contradominio, 5
- coordenada, 9
- copwin, 98
 - k -copwin, 98
- corte
 - por aristas, 43
 - por vértices, 43
- cuello, 42
- desmantelamiento, 111
 - k -desmantelamiento, 108
 - por hojas, 48
- diámetro, 42
- diferencia, 3
 - simétrica, 3
- diseño, 26
- distancia, 42
 - de Hamming, 113
- dominio, 5
- elemento, 2
- empareamiento, 50
- enteros, 7
 - no-negativos, 8
 - positivos, 8
- enumeración, 8
- epimorfismo
 - de gráficas, 31
- esquina, 104
- estabilizador, 15
- estrategia
 - ganadora, 98
 - para el ladrón, 98
 - para los policías, 98
 - sin retroceso, 105
- estructura de k fichas, 71
- estructura de incidencia, 21
 - simple, 22
- etiquetado, 76
- evaluación, 4
- extremo, 28
 - del camino, 36
- factorización completa, 17
- fibra, 28
- fichas, 54
- fijo, 5
- flecha, 38
- función, 4
 - biyectiva, 6
 - creciente, 5
 - decreciente, 5
 - estrictamente creciente, 5
 - estrictamente decreciente, 5
 - identidad, 12
 - inversa, 6
 - inyectiva, 5
 - monótona, 5
 - no-creciente, 5
 - no-decreciente, 5
 - no-monótona, 5
 - restricción, 5
 - suprayectiva, 5
- geometría, 20
 - de rango r , 20
- gráfica, 26
 - k -conexa, 43
 - k -desmantelable, 108

- bipartita, 48
- ciclo, 35
- cociente, 29
- completa, 34
- conexa, 42
- de k fichas, 51
- de k fichas con movimientos l -paralelos, 65
- de k fichas con movimientos r -compuestos, 114
- de k fichas etiquetadas, 75
- desmantelable, 104
- imagen, 29
- isomorfa, 31
- nula, 28
- reflexiva, 27
- trayectoria, 34
- trivial, 28
- vacía, 34
- grado, 21, 28
- grupo, 11
 - alternante, 19
 - de caminos simplificados, 42
 - de reetiquetados de k fichas, 80
 - generado, 13
 - simétrico, 12
 - subgrupo, 13
- hoja, 46
- homomorfismo
 - de gráficas, 28
 - de grupos, 13
- imagen directa, 5
- incidir, 20
- indexación, 5
- inducción, 7
- intersección, 3
- intervalo, 8
- inverso, 11
- isomorfismo
 - de gráficas, 31
 - local, 76
- juego
 - policías con r movimientos y ladrones, 113
 - policías perezosos y ladrones, 113
 - policías y ladrones con movimientos t -compuestos, 119
 - policías y ladrones generalizado, 110
- kernel, 14
- línea, 21
 - repetida, 22
- ladrón, 98
- lazo, 27
- levantamiento, 78
- longitud
 - de un camino, 38
- máximo, 4
 - por contención, 4
- mínimo, 4
 - por contención, 4
- múltiplo, 9
- maximal, 4
 - por contención, 4
- mazo, 32
 - k -mazo, 71
- minimal
 - por contención, 4
- minmal, 4
- monoide, 11
- monomorfismo
 - de gráficas, 31
- morfismo, 13
 - de gráficas, 28

- de grupos, 13
- epimorfismo de grupos, 13
- isomorfismo de grupos, 13
- monomorfismo de grupos, 13
- movimiento
 - l -paralelo, 68
 - r -compuesto, 114
 - u -ciclo, 115
 - circular, 118
 - configuración, 54
 - ficha, 54
 - secuencial, 118
 - subyacente, 55
- número
 - de fichas, 54
- número criminal, 119
 - t -criminal, 119
- número de dominación, 35
- número policiaco, 98
 - numero r -policiaco, 113
- neutro, 11
- objetos geométricos, 20
- operación, 10
 - asociativa, 11
 - binaria, 10
 - conmutativa, 12
 - unitaria, 10
- orden
 - i -ésimo elemento, 9
 - cíclico, 10
 - gráfica, 28
 - lineal, 4
 - parcial, 4
 - plano proyectivo, 25
- palabra, 11
 - de movimientos, 55
 - válida, 55
 - vacía, 11
- par, 2
 - ajeno, 3
 - ordenado, 4
- partición, 7
- partida
 - policías y ladrones, 97
- pase, 54
 - configuración, 54
- permutación, 12
- permutaciones
 - impares, 19
 - pares, 19
- pieza, 97
- plano
 - afín, 25
- plano proyectivo, 23
- policías, 98
- posición, 98
- potencia, 9
- potencia r -parcial, 113
- preimagen, 5
- producto
 - caja, 33
 - cartesiano, 9
 - de gráficas, 32
 - de grupos, 14
- punto, 21
- puente, 43
- reducción, 39
- relación, 4
 - antisimétrica, 4
 - binaria, 4
 - de equivalencia, 4
 - de incidencia, 20
 - reflexiva, 4
 - simétrica, 4

- ternaria, 10
- total, 4
- transitiva, 4
- resto, 9
- retracción, 32
 - de un punto, 32
- retracto, 32
 - absoluto, 128
- rueda, 36
- separa, 43
- signo, 19
- sistema de incidencia
 - no-degenerado, 69
- sombra, 102
 - de una estrategia, 102
- soporte, 5
- subconjunto, 3
 - k -subconjunto, 8
 - subconjunto propio, 3
- subgráfica, 31
 - inducida, 32
 - isométrica, 128
 - máxima por contención, 43
- subtablero, 82
- término, 11
- transposición, 16
- trayectoria, 35
 - internamente ajenas, 37
- tupla, 9
- turno, 97
- unión, 2
- vértice, 27
 - coloreado, 48
 - de corte, 43
 - final, 36
 - independientes, 35
 - inicial, 36
 - interno, 36
 - removible, 108, 111
 - universal, 35
- vértices
 - adyacentes, 28
- variedad, 108
- vecindad, 28
- vecindario
 - k -vecindad, 60
- vecino, 28

Bibliografía

- [1] M. Aigner y M. Fomme, A game of cops and robbers, *Discrete Applied Mathematics*, 8, (1984) 1–11. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(84\)90073-8](https://doi.org/10.1016/0166-218X(84)90073-8)
- [2] Y. Alavi, M. Behzad, P. Erdős, y D. R. Lick, Double vertex graphs, *J. Combin. Inform. System Sci.*, 16(1), (1991) 37–50.
- [3] Y. Alavi, M. Behzad, y J. E. Simpson, Planarity of double vertex graphs, *Graph theory, combinatorics, algorithms, and applications*, (1991) 472-485.
- [4] Y. Alavi, D. R. Lick, y Liu, Hamiltonian cycles in double vertex graphs of bipartite graphs, *Congressus Numerantium*, 93, (1993) 65–72.
- [5] Y. Alavi, D. R. Lick, y J. Liu, Hamiltonian properties of graphs and double vertex graphs. *Congressus Numerantium*, (1994) 33–44.
- [6] B. Alspach, D. Dyer, D. Hanson y B. Yang, Sweeping and searching in graphs: a brief survey, *Matematiche*, 59, (2006) 5-37.
- [7] K. Audenaert, C. Godsil, G. Royle, y T. Rudolph, Symmetric squares of graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 97(1), (2007) 74-90. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2006.04.002>
- [8] D. Avella y G. Campero. (2017) **Curso introductorio de álgebra I**, Papirhos.
- [9] H. J. Bandelt Retracts of Hypercubes *Journal of Graph Theory*, 8(4), (1984) 501-510. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190080407>
- [10] Beth, T., Jungnickel, D., y Hanfried. L. (1999) **Design Theory**, Cambridge University Press.
- [11] Beutelspacher, A. (1998) **Projective Geometry: from foundations to applications**, Cambridge University Press.

- [12] A. Bonato y G. MacGillivray, Characterizations and algorithms for generalized Cops and Robbers games, arXiv preprint: 1704.05655. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.05655>
- [13] A. Cauchy. Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme, J. de l'École Poly XVII Cahier, X, (1815) 1-28.
- [14] Carrol, M.T., Rykken, E. (2018) **Geometry: The line and the circle**, MAA Press.
- [15] N. Clarke y G. MacGillivray, Characterization of k -copwin graphs, Discrete Mathematics, 312(8), (2012) 1421-1425. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.01.002>
- [16] C. Dalfó, F. Duque, R. Fabila-Monroy, M. A. Fiol, C. Huemer, A. L. Trujillo-Negrete, F. J. Zaragoza Martínez, On the Laplacian spectra of token graphs, Linear Algebra and its Applications, 625, (2021) 322-348. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.05.005>.
- [17] H. de Alba, W. Carballosa, J. Leaños, y L. M. Rivera, Independence and matching numbers of some token graphs, Australas. J Comb., 76, (2020) 387-403. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.06370>
- [18] J. Deepalakshmi y G. Marimuthu, Characterization of token graphs, J. Eng. Technol, 6, (2017) 310-317.
- [19] J. Deepalakshmi, G. Marimuthu, A. Somasundaram y S. Arumugam, On the 2-token graph of a graph, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 17:1, (2020) 265-268. <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2019.05.002>
- [20] Diestel, R. **Graph Theory, Second Edition**, Springer (2000).
- [21] D. Duffus y I. Rival, A structure theory for ordered sets, Discrete Mathematics, 35, (1981) 53-118. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(81\)90201-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(81)90201-6)
- [22] R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, C. Huemer, F. Hurtado, J. Urrutia, D. R. Wood, Token Graphs, Graphs and Combinatorics, 28.3, (2012) 365-380. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0910.4774>.
- [23] R. Fabila-Monroy, J. Leaños, y A. L Trujillo-Negrete, On the connectivity of token graphs of trees, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, 24, (2018) 777-790. <https://doi.org/10.1007/s00373-018-1913-9>

- [24] A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, y A. Levi. **Foundations of Set Theory**, Elsevier (1973).
- [25] P. Frankl, Cops and robbers in graphs with large girth and Cayley graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 17, (1987) 301-305. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(87\)90033-3](https://doi.org/10.1016/0166-218X(87)90033-3)
- [26] J. M. Gómez Soto, J. Leños, L. M. Ríos-Castro, L. M. Rivera, The packing number of the double vertex graph of the path graph, *Discrete Applied Mathematics*, 247, (2018) 327-340. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.03.085>
- [27] G. Hahn, Cops, robbers and graphs, *Tatra Mountain Mathematical Publications*, 36, (2007) 163-176.
- [28] F. Harary, A survey on the reconstruction conjecture, *Graphs and Combinatorics*, (2006) 18-28. <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0066431>
- [29] Hell, P. y Nešetřil, J. **Grphs and Homomorphisms** Oxford Lecture Series in Mathematics and it's Applications 28 (2004).
- [30] K. Harbacek y T. Jech **Introduction to set theory**, Marcel Dekker Inc. (1999)
- [31] W. Imrich y S. Klavžar. **Product graphs, structure and recognition** Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization (2000).
- [32] G. L. Johns, Generalized distance in graphs, Western Michigan University. Dissertations, 2180, (1988). <https://scholarworks.wmich.edu/dissertations/2180>
- [33] W. W. Johnson, W. E. Story, Notes on the 15-puzzle. *American Journal of Mathematics*, 2(4), (1879) 397-404. <https://www.jstor.org/stable/2369492>
- [34] P. J. Kelly, On Isometries of Square Sets. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51(12), (1945) 960-963.
- [35] D. M. Kornhauser Coordinating pebble motion on graphs, the diameter of permutation groups, and applications. MIT LCS Technical Report, 320, (1984). <https://hdl.handle.net/1721.1/149593>
- [36] J. Leños, C. Ndjatchi, The Edge-Connectivity of Token Graphs, *Graphs and Combinatorics*, 37, (2021) 1013-1023. <https://doi.org/10.1007/s00373-021-02301-0>

- [37] J. Leaños, A. L. Trujillo-Negrete, The Connectivity of Token Graphs, *Graphs and Combinatorics*, 34, (2018) 777–790. <https://doi.org/10.1007/s00373-018-1913-9>.
- [38] M. Maamoun y H. Meyniel, On a game of policemen and robber, *Discrete Applied Mathematics*, 17, (1987) 307-309.
- [39] S. Neufeld y R. Nowakowski, A game of cops and robbers played on products of graphs, *Discrete Mathematics*, 186, (1998) 253-268.
- [40] K. Menger, (1928) **Dimensionstheorie**, Teubner Verlag.
- [41] R. J. Nowakowski y P. Winkler, Vertex to vertex pursuit in a graph, *Discrete Mathematics*, 43, (1983) 235-239. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(83\)90160-7](https://doi.org/10.1016/0012-365X(83)90160-7)
- [42] R. Nowakowski y I. Rival, The smallest graph variety containing all paths, *Discrete Mathematics*, 43, (1983) 223-234. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(83\)90159-0](https://doi.org/10.1016/0012-365X(83)90159-0)
- [43] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, Karl Menger, MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews, Escocia, Marzo 2014 <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menger>. Consultado el 25 de mayo del 2024.
- [44] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, Stanisław Marcin Ulam, MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews, Escocia, Junio 1998 <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ulam>. Consultado el 25 de mayo del 2024.
- [45] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, Karl Kelly, MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews, Escocia, Noviembre 2004 <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kelly>. Consultado el 25 de mayo del 2024.
- [46] C. O'Neil, Connectivity of n-tuple vertex graphs, *J. Combin. Inform. System Sci.*, (1995).
- [47] B. Pascal. (2015) **Obras matemáticas**. Colección Mathema, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [48] A. Quillot, Jeux et pointes fixes sur les graphes, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris, VI, (1978) 131-145.

- [49] E. Riehl. **Category Theory in Context**, Courier Dover Publications (2017).
- [50] J. Rotman. **An introduction to the theory of groups**, Springer-Verlag (1994).
- [51] T. Rudolph, Constructing physically intuitive graph invariants, ArXiv (2002).
<https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0206068>
- [52] S. M. Ulam. (1960) **A collection of mathematical problems**, Interscience Publishers Inc.
- [53] D. Weinreich, n-Tuple Vertex Graphs, Line Graphs, and a Conjecture on Hamiltonicity, *Congressus Numerantium*, (1997) 91-96.
- [54] R. M. Wilson, Graph puzzles, homotopy, and the alternating group, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(1), (1974) 86-96.
[https://doi.org/10.1016/0095-8956\(74\)90098-7](https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90098-7)
- [55] B. W. Zhu, J. Liu, D. R. Lick, y Y. Alavi, Connectivity relationships between a graph and its double vertex graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 12, (1994) 23-27.
- [56] B. Zhu, J. Liu, D. R. Lick, y Y. Alavi, n-Tuple vertex graphs, *Congressus Numerantium*, (1992) 97-97.