Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Físicas

Procesos de producción y decaimiento de partículas en presencia de un campo magnético externo

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JORGE IGOR JABER URQUIZA

TUTOR PRINCIPAL:

DR. ÁNGEL SÁNCHEZ CECILIO

(FC-UNAM)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. JOSÉ ALEJANDRO AYALA MERCADO

(ICN-UNAM)

DRA. GABRIELLA PICCINELLI BOCCHI

(FES ARAGÓN-UNAM)

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, septiembre de 2024.

A mi familia.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Posgrado en Ciencias Físicas.

A mi tutor, el Dr. Ángel Sánchez Cecilio.

A los miembros de mi comité tutor, el Dr. José Alejandro Ayala Mercado y la Dra. Gabriella Piccinelli Bocchi.

A los miembros del jurado, el Dr. Sarira Sahu, el Dr. Hermes León Vargas, la Dra. María Elena Tejeda Yeomans, el Dr. Pablo Roig Garcés y el Dr. Rubén Flores Mendieta, les agradezco los valiosos comentarios y correcciones del presente trabajo.

Al Prof. Igor Shovkovy le agradezco la oportunidad que me brindó para poder realizar una estancia de investigación en Arizona State University.

Finalmente agradezco el apoyo que me proporcionó el CONAHCyT, la DGAPA-UNAM bajo el proyecto PAPIIT-IN108123, el Posgrado en Ciencias Físicas y la Facultad de Ciencias.

Resumen

El objetivo principal del presente trabajo de tesis es estudiar los efectos de la presencia de un campo magnético externo en distintos procesos de producción y decaimiento en física de partículas. Ésto motivado principalmente por las condiciones físicas que se presentan en las colisiones de iones pesados relativistas donde la presencia de un campo magnético modifica las propiedades de la materia fuertemente interactuante. Además, es posible extender el análisis a otro tipo de escenarios como lo son objetos astrofísicos y el Universo temprano.

Contenido de la tesis

- En el capítulo 1 se estudia la interacción entre una partícula escalar y dos bosones vectoriales no masivos en presencia de un campo magnético externo y se presenta una metodología novedosa que ayuda a obtener expresiones compactas y analíticas para una intensidad de campo magnético arbitraria. Además, pretende hacer más transparente y sencillo el tratamiento de las complicaciones que se presentan en los cálculos con campo magnético como lo son: la descomposición tensorial, la fase de Schwinger, la integración sobre los momentos del lazo, el tratamiento de la traza espinorial y la regularización UV.

- A partir de la metodología presentada en el capítulo anterior, en el segundo capítulo se estudia el proceso de decaimiento de un pión neutro mediante emisión de fotones en presencia de un campo magnético externo. A partir de una expresión analítica para la amplitud de probabilidad para una intensidad de campo magnético arbitraria, se discuten y analizan distintas aproximaciones de intensidad de campo magnético para diferentes regímenes cinemáticos.

- En el tercer capítulo se estudia el proceso de producción de fotones mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético externo. Además de obtener una expresión analítica para la amplitud de probabilidad para una intensidad de campo magnético arbitraria, este proceso resalta la importancia de trabajar con la base ortogonal magnética para obtener una descomposición tensorial simplificada.

- En el capítulo 4 se encuentra una expresión analítica para la sección eficaz del bosón de Higgs en presencia de un campo magnético externo y se lleva a cabo el cálculo explícito en la aproximación de campo débil para momentos transversos bajos.

- Finalmente, en el quinto capítulo, se presentan las conclusiones del trabajo de tesis y se dan a conocer los posibles caminos para un desarrollo a futuro.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Interacción entre una partícula escalar y dos bosones vectoriales no masivos en presencia de un campo magnético externo

En este capítulo se estudia la interacción entre una partícula escalar y dos bosones vectoriales no masivos en presencia de un campo magnético externo. Para ello, se presenta con detalle la metodología desarrollada para calcular amplitudes de probabilidad de procesos a un lazo en presencia de un campo magnético homogéneo de intensidad arbitraria. El propósito principal del presente capítulo es introducir las herramientas y desarrollar la metodología que se usará posteriormente en los Capítulos 2-4, donde se consideran distintos procesos de producción y decaimiento de partículas en presencia de un campo magnético homogéneo. El grueso de este capítulo forma parte del artículo publicado en Phys. Rev. D [1], en el cuál figuro como autor.

1.1. Introducción

En múltiples áreas de la física, los campos escalares son un objeto de estudio fundamental, ya que impulsan diversos fenómenos físicos interesantes a diferentes escalas de energía. Estos incluyen la superconductividad en la materia condensada [2], la superconductividad del color y la superfluidez en objetos astrofísicos compactos [3–5], la expansión acelerada en las primeras etapas del Universo [6–8] y la generación de masa dentro del Modelo Estándar de las Partículas Elementales (ME) [9, 10].

En las últimas décadas se han realizado grandes esfuerzos y avances teóricos para comprender, con mayor precisión, las propiedades de los campos escalares fundamentales. Un ejemplo notable es el bosón de Higgs, cuyos estudios de sus diferentes canales de decaimiento ($H \longrightarrow \gamma\gamma$) [11–14] y producción ($gg \longrightarrow H$) [15–17], a través de bosones vectoriales no masivos condujeron a su descubrimiento [18–22]. Por otro lado, para los campos escalares no fundamentales, la desintegración en dos fotones ha demostrado ser un proceso relevante en cromodinámica cuántica (QCD), ya que se utiliza para explorar la estructura de los mesones y representa una importante contribución a la dispersión hadrónica luz por luz. Por ejemplo, el decaimiento de un pión neutro mediante emisión de fotones, $\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma$, pone a prueba la simetría quiral [23,24]. De este modo, la interacción entre una partícula escalar y dos bosones vectoriales no masivos es relevante tanto para campos fundamentales como compuestos.

Dado que los procesos mencionados, para partículas escalares, pueden realizarse en colisiones relativistas de iones pesados [25–27], donde los fenómenos físicos se enriquecen por las condiciones extremas creadas, es de esperar que la interacción entre las partículas se vea modificada. Una condición que se ha considerado recientemente en las colisiones periféricas es la presencia de campo magnético [28–31], lo cual introduce nuevos efectos en el sistema [32,33]. En este punto, una pregunta que surge naturalmente es: ¿cómo afecta el campo magnético externo la interacción del campo escalar?

Esta cuestión ha sido abordada en distintos escenarios y procesos físicos como el decaimiento de piones [34, 35] así como en los procesos de producción [36] y decaimiento [37] del bosón de Higgs mediante bosones vectoriales. Particularmente, la referencia [37] considera correcciones procedentes del sector electro-débil del ME al decaimiento del bosón de Higgs a dos fotones en presencia de un campo magnético, y encuentra que la tasa de decaimiento presenta una singularidad cuando se consideran valores de campo magnético grandes.

En general, la presencia de un efecto de campo magnético externo ha sido estudiada por varios autores, en un número más amplio de procesos de partículas y observables físicos, enfrentándose con cálculos bastante complejos independientemente del formalismo utilizado para incorporar el efecto del campo magnético en el proceso: el tiempo propio de Schwinger o las funciones propias de Ritus [38–40].

En ambos formalismos es posible obtener expresiones en términos de niveles de Landau, las cuales resultan útiles para estudiar situaciones físicas en donde el campo magnético define la escala de energía dominante. En este último escenario, denominado límite de campo magnético intenso, los cálculos se simplifican significativamente ya que las únicas contribuciones provienen del nivel más bajo de Landau (LLL) y una reducción dimensional mejora el comportamiento en el límite ultravioleta (UV) [41]. Sin embargo, en este régimen, no existe un tratamiento claro para las divergencias UV y, en algunos casos, parecen depender del campo magnético [42]. Ésto contrasta con los resultados obtenidos con un formalismo diferente donde las divergencias son independientes del campo magnético para cualquier intensidad dada de campo magnético [38, 43]. En general, los cálculos en términos de niveles de Landau se complican notoriamente para una intensidad de campo magnético arbitraria [44–48] debido a que todos los niveles contribuyen al proceso [49].

El formalismo del tiempo propio de Schwinger se utiliza para explorar tanto las regiones de intensidad de campo magnético intenso [41] como débil [49]. Esta última se estudia realizando una expansión en serie de potencias en B (siendo B la intensidad de campo magnético) conservando únicamente los términos principales [50, 51]. Estudios recientes, sobre procesos de producción y decaimiento de partículas en la región de campo magnético débil [36,52–54], han demostrado que el momento de la partícula inicial desempeña un papel crucial en estos procesos [55, 56].

Aunque se han logrado obtener algunos avances analíticos, así como intuición física, en las regiones de campo magnético intenso y débil, hay aspectos que aún escapan al análisis. Por ejemplo, las diferentes condiciones cinemáticas y el papel desempeñado por la fase de Schwinger son puntos que requieren mayor atención, siendo ésta última especialmente relevante en procesos que involucran estados asintóticos cargados [57] o en correcciones radiativas a funciones de tres puntos [49, 58–60].

La presencia de campo magnético externo introduce una complicación adicional en la descomposición de la estructura tensorial en funciones de correlación de bosones vectoriales. Esto se observa claramente en los cálculos de los tensores de polarización de fotones [39,61,62] o gluones [63] y en la amplitud de la producción de fotones mediante fusión de gluones [59, 60, 64], entre otros ejemplos.

En términos generales, los cálculos que involucran fluctuaciones cuánticas cargadas, vestidas por un campo magnético, se suelen realizar tomando la suma sobre los espines del lazo en etapas tempranas del cálculo. Esto resulta en expresiones largas y complejas que dificultan cualquier tratamiento analítico para una intensidad de campo magnético arbitraria, como se ilustra en muchos de los estudios mencionados anteriormente, así como en las referencias [65–68].

Con el objetivo de obtener expresiones analíticas compactas para una intensidad de campo magnético arbitraria, a partir de las cuales se puedan estudiar las regiones de campo magnético intenso y débil en diferentes regímenes cinemáticos, este trabajo presenta una metodología novedosa que pretende hacer más transparente y sencillo el tratamiento de las complicaciones que se presentan en los cálculos con campo magnético como lo son: la descomposición tensorial, la fase de Schwinger, la integración sobre los momentos del lazo, el tratamiento de la traza espinorial y la regularización UV [1].

1.2. Modelo

Con el fin de explorar la influencia de un campo magnético en la producción (el decaimiento) de bosones escalares a través de la fusión (emisión) de dos **bosones vectoriales no masivos** (BV), se considera el siguiente modelo basado en la electrodinámica cuántica

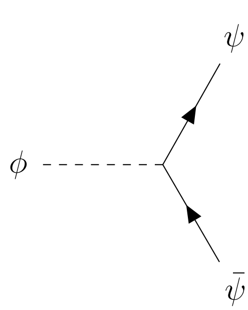
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\hat{\psi} + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi - \frac{1}{2}m_{\phi}^{2}\phi^{2} - h\phi\bar{\psi}\psi, \tag{1.1}$$

donde $\psi(x)$ y $\phi(x)$ son campos fermiónicos y bosónicos respectivamente, y

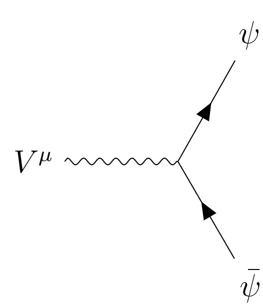
$$D^{\mu} \equiv \partial^{\mu} + igV^{\mu}(x) \quad \text{y} \quad B^{\mu\nu} = \partial^{\mu}V^{\nu}(x) - \partial^{\nu}V^{\mu}(x), \tag{1.2}$$

son la derivada covariante y el tensor de intensidad de campo asociados al campo vectorial Abeliano $V^{\mu}(x)$.

Las reglas de Feynman asociadas a las interacciones del Lagrangiano dado en la Ec. (1.1) corresponden a los siguientes vértices



$= -ih,$



$= -ig\gamma^{\mu},$ (1.3)

donde h y g son las constantes de acoplamiento de fermiones cargados con bosones escalares y vectoriales, respectivamente.

En general, el proceso de producción (decaimiento) de una partícula escalar mediante fusión (emisión) de BV

$$V^\mu + V^\nu \longrightarrow \phi \;\; (\text{ó} \quad \phi \longrightarrow V^\mu + V^\nu),$$

está descrito por el elemento de matriz invariante

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\equiv \mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu\left(p_1,\lambda_1\right)\epsilon_\nu\left(p_2,\lambda_2\right)\\ &= \langle w|(p_1,\mu,\lambda_1),(p_2,\nu,\lambda_2)\rangle\,\epsilon_\mu\left(p_1,\lambda_1\right)\epsilon_\nu\left(p_2,\lambda_2\right),\end{aligned} \tag{1.4}$$

donde p_i y λ_i, con $i=1,2$, son el momento y las polarizaciones de los BV, $\epsilon_\mu\left(p_i,\lambda_i\right)$ los vectores de polarización que describen a los estados asintóticos de los BV, y w es el momento del escalar.

En el modelo elegido, dado por la Ec. (1.1), las contribuciones a orden dominante a $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ están asociadas a diagramas de Feynman del tipo que se muestra en la Figura 1.1.

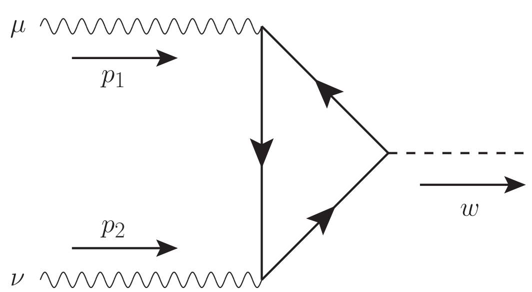


Figura 1.1: Diagrama de Feynman que ilustra la interacción de los sectores escalar y vectorial a un lazo.

Las amplitudes $\mathcal{M}$, para los procesos de emisión y fusión, comparten la misma estructura ya que están conectadas entre sí mediante la simetría de cruce. A partir de los elementos de la matriz invariante podemos construir dos observables físicos que permiten cuantificar cada proceso: la sección eficaz y la tasa de decaimiento.

La sección eficaz diferencial para la producción de escalares mediante fusión de BV, $V^\mu + V^\nu \longrightarrow \phi$, se está dada por [69]

$$d\sigma = \frac{\sum_{\text{espín}}|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{\left(p_1\cdot p_2\right)^2}}\frac{d^3w}{(2\pi)^3 2E_w}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1+p_2-w\right), \tag{1.5}$$

donde E_w es la energía del bosón escalar.

Por otra parte, la tasa de decaimiento diferencial, $\phi \longrightarrow V^\mu + V^\nu$, es [69]

$$d\Gamma = \frac{\sum_{\text{espín}}|\mathcal{M}|^2}{2E_w}\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(w-p_1-p_2\right), \tag{1.6}$$

donde E_i es la energía de los BV.

Los factores que acompañan a la amplitud $\mathcal{M}$ hacen referencia a la cinemática de los estados finales, dependen de la naturaleza de las partículas involucradas en el proceso y son independientes de la interacción. Por tanto, toda la información sobre la interacción se encuentra codificada dentro de la amplitud.

Para el caso particular del proceso de decaimiento, $\phi \to V^{\mu} + V^{\nu}$ (calculado en las referencias [14, 16] en el contexto de la física del bosón de Higgs), la amplitud toma la forma

$$\mathcal{M}(H \to \gamma\gamma) = \frac{g^2 h}{(4\pi)^4 m_W} A_f(\tau_f)\,(p_1 \cdot p_2\ g^{\mu\nu} - p_2^{\mu} p_1^{\nu})\,\epsilon_{\mu}(p_1)\epsilon_{\nu}(p_2), \tag{1.7}$$

donde el factor $A_f(\tau)$ está dado por

$$A_f(\tau) = 2[\tau + (\tau - 1) f(\tau)]/\tau^2, \tag{1.8}$$

con $\tau = 4m_f^2/m_H^2$ y

$$f(\tau) = \begin{cases} \arcsin^2(\tau^{-1/2}) & \text{si } \tau \geq 1, \\ -\frac{1}{4}\left(\ln \frac{1+\sqrt{1-\tau}}{1-\sqrt{1-\tau}}\right)^2 & \text{si } \tau < 1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Como la amplitud en la Ec. (1.7) describe la intensidad de la interacción entre estas tres partículas, el traslape en la Ec. (1.4) podría tratarse como un vértice efectivo y asociarse pictóricamente con el diagrama de Feynman mostrado en la Figura 1.2. Dado que estamos interesados en un escenario físico donde un campo magnético externo está presente, esperamos que la intensidad de la interacción se modifique. El cálculo del vértice efectivo, y por tanto de la amplitud, en presencia de un campo magnético externo es el objetivo principal de este capítulo.

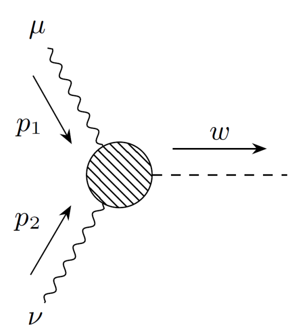


Figura 1.2: Vértice efectivo que representa la interacción entre una partícula escalar neutra y dos BV.

Basándonos en fundamentos generales, como simetrías y propiedades de las partículas, en la siguiente sección se presentan las ideas que cimientan la estructura tensorial de la Ec. (1.7). Esto nos permitirá construir la estructura tensorial de vértices en presencia de un campo magnético externo de una manera sencilla.

1.3. Estructura tensorial

De forma general, el vértice efectivo mostrado en la Figura 1.2, debe satisfacer

$$p_1^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu}(p_1, p_2) = p_2^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu}(p_1, p_2) = 0, \tag{1.10}$$

donde p_1^μ y p_2^ν son los momentos de los BV. En la electrodinámica cuántica, dichas relaciones son conocidas como identidades de Ward [70,71], y emergen de la conservación de la corriente y aseguran que la amplitud sea transversal antes el momento de los VB.

Además, debido a la indistinguibilidad entre los dos VB iniciales, el vértice efectivo debe de ser invariante ante el intercambio bosónico, es decir

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \mathcal{M}^{\nu\mu}(p_2, p_1). \tag{1.11}$$

Además de estas propiedades, el vértice efectivo también debe de ser invariante bajo las transformaciones discretas de conjugación de carga (C) y paridad (P) [72]. Nótese que el vértice efectivo debe cumplir las propiedades anteriores independientemente de si las partículas están en el vacío o en presencia de un campo magnético externo. A continuación analizamos su forma tensorial general en ambos escenarios.

1.3.1. Estructura tensorial en el vacío

Para obtener la estructura tensorial del vértice efectivo, el primer paso es construir la forma más general de un tensor de rango dos a partir de los vectores que se tienen a disposición. En el caso del vacío éstas son

$$p_1^\mu,\ p_2^\mu,\ g^{\mu\nu} \text{ y } \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{1.12}$$

con p_i^μ el momento de los BV, $g^{\mu\nu} = diag(+,-,-,-)$ el tensor métrico y $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ el tensor de Levi-Civita. Entonces, la forma más general para el vértice efectivo en el vacío está dada por

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}}(p_1, p_2) = A_1 g^{\mu\nu} + A_2 p_1^\mu p_2^\nu + A_3 p_1^\nu p_2^\mu + A_4 p_1^\mu p_1^\nu + A_5 p_2^\mu p_2^\nu + A_6 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}, \tag{1.13}$$

donde los coeficientes dependen de los escalares de Lorentz que se puedan formar a partir de la Ec. (1.12). Nótese que para un teoría invariante bajo paridad, el coeficiente A_6 se anula.

Al exigir que la estructura general Ec. (1.13), cumpla con las propiedades dadas por las Ecs. (1.10, 1.11), así como considerando que los VB están en capa de masa ($p_1^2 = p_2^2 = 0$), la estructura del vértice efectivo en el vacío se reduce a

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}}(p_1, p_2) = A_1 \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \right] + A_2 p_1^\mu p_2^\nu, \tag{1.14}$$

donde el primer término comparte la estructura tensorial con la Ec. (1.7). Nótese que el segundo término de la Ec. (1.14) no contribuye a la amplitud debido a que los vectores de polarización de los BV son ortogonales a su momento, $p_i^\mu \epsilon_\mu(p_i) = 0$. Otro aspecto importante que no se debe pasar por alto es que las estructuras tensoriales en la Ec. (1.14) son ortogonales entre sí.

Por otro lado, en general, la amplitud invariante puede escribirse como

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_\mu(p_1, \lambda_1) \epsilon_\nu(p_2, \lambda_2), \tag{1.15}$$

donde $\epsilon_\mu(p,\lambda)$ son los vectores de polarización de los BV. Entonces, en el caso particular en que los BV están en capa de masa, la suma sobre polarizaciones de la amplitud que aparece en las Ecs. (1.5) y (1.6) está dada por

$$\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{\lambda_1=\pm1}\sum_{\lambda_2=\pm1} \mathcal{M}^{\mu\nu}\mathcal{M}^{*\alpha\beta}\epsilon_\mu(p_1,\lambda_1)\epsilon_\nu(p_2,\lambda_2)\epsilon^*_\alpha(p_1,\lambda_1)\epsilon^*_\beta(p_2,\lambda_2), \tag{1.16}$$

donde, por simplicidad, la suma sobre las polarizaciones físicas se ha escrito en la base de polarización lineal.

Utilizando la propiedad ampliamente conocida

$$\sum_{\lambda=\pm1} \epsilon_\mu(p,\lambda)\epsilon^*_\alpha(p,\lambda) = -g_{\mu\alpha} + \frac{p_\mu a_\alpha + p_\alpha a_\mu}{p\cdot a} + a^2\frac{p_\mu p_\alpha}{(p\cdot a)^2} \equiv \mathcal{P}_{\mu\alpha}(p,a)\,, \tag{1.17}$$

con a^μ un vector auxiliar arbitrario (independiente de p^μ), la Ec. (1.16) puede reescribirse como

$$\sum_{\lambda_1=\pm1}\sum_{\lambda_2=\pm1} |\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^{\mu\nu}\mathcal{P}_\mu{}^\alpha(p_1,a)\,\mathcal{M}^*_{\alpha\beta}\mathcal{P}_\nu{}^\beta(p_2,b)\,. \tag{1.18}$$

Este resultado es válido para cualquier BV en capa de masa, independientemente de si existe o no un campo magnético externo.

Utilizando la descomposición del vértice efectivo en vacío, dada por la Ec. (1.14), se obtiene

$$\sum_{\lambda_1=\pm1}\sum_{\lambda_2=\pm1} |\mathcal{M}_{\text{vac.}}|^2 = (D-2)|A_1|^2 \xrightarrow{d=4} 2|A_1|^2, \tag{1.19}$$

corroborando la Ec. (1.7). Nótese que el resultado final es independiente de la elección de los dos vectores auxiliares a^μ y b^μ. Además, como se discutió anteriormente, el factor A_2 no contribuye a la amplitud.

1.3.2. Estructura tensorial en presencia de un campo magnético

En presencia de un campo magnético externo constante hay que tener en cuenta que el número de cuadrivectores independientes aumenta a ocho [39, 61, 62]

$$p_i^\mu,\ F^{\mu\nu}p_{i\nu},\ F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu}p_{i\nu}\ \text{ y }\ F^{*\mu\nu}p_{i\nu}, \tag{1.20}$$

donde $i = 1, 2$, con $F^{\mu\nu}$ el tensor de Faraday asociado al campo magnético externo y

$$F^*_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\gamma\delta}F^{\gamma\delta}, \tag{1.21}$$

su dual.

Para construir la estructura tensorial más general se usan dos conjuntos ortogonales de cuadrimomentos linealmente independientes que dependen de cada uno de los momentos de los BV [61]

$$l_i^\mu \equiv p_i^\mu,\quad L_i^\mu \equiv \hat{F}^{\mu\nu}p_{i\nu},\quad L_i^{*\mu} \equiv \hat{F}^{*\mu\nu}p_{i\nu}\quad \text{y}\quad G_i^\mu \equiv \frac{l^2}{L^2}\hat{F}^{\mu\alpha}\hat{F}_{\alpha\beta}p_i^\beta + l_i^\mu, \tag{1.22}$$

donde $\hat{F}^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu}/|B|$. La condición de ortogonalidad de la base es

$$F^{\mu\nu} F^{*}_{\mu\nu} = 0, \tag{1.23}$$

y se satisface trivialmente para el caso de un campo magnético puro. Además, al ser una base ortogonal para el espacio completo, cumplen la siguiente relación de completez

$$g^{\mu\nu} = \frac{l_i^\mu l_i^\nu}{l_i^2} + \frac{L_i^\mu L_i^\nu}{L_i^2} + \frac{L_i^{*\mu} L_i^{*\nu}}{L_i^{*2}} + \frac{G_i^\mu G_i^\nu}{G_i^2}, \tag{1.24}$$

con $i = 1, 2$.

Trabajar con estas dos bases, que no están relacionadas entre sí, tiene muchas ventajas, por ejemplo, los estados de polarización de los BV se pueden describir con los vectores de su base correspondiente. Debido a la condición de transversalidad, la proyección de su momento l_i^μ siempre es cero; cada uno de los BV sólo puede estar en tres estados de polarización L_i^μ, $L_i^{*\mu}$ y G_i^μ[1]

Al tomar en cuenta que cada uno de los índices de Lorentz el vértice efectivo está asociado a uno de los BV, la estructura tensorial más general del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo está dada por [73, 74]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB}(p_1,p_2) =& a_1^{++}\hat{L}_1^\mu \hat{L}_2^\nu + a_2^{++}\hat{L}_1^{*\mu}\hat{L}_2^{*\nu} + a_3^{++}\hat{G}_1^\mu \hat{G}_2^\nu + a_4^{+-}\hat{L}_1^\mu \hat{L}_2^{*\nu} \\ &+ a_5^{+-}\hat{L}_1^{*\mu}\hat{L}_2^\nu + a_6^{-+}\hat{L}_1^\mu \hat{G}_2^\nu + a_7^{-+}\hat{G}_1^\mu \hat{L}_2^\nu + a_8^{--}\hat{L}_1^{*\mu}\hat{G}_2^\nu + a_9^{--}\hat{G}_1^\mu \hat{L}_2^{*\nu}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

donde los superíndices $\pm$ en los coeficientes a_k indican su comportamiento bajo las transformaciones de conjugación de carga (primero) y paridad (segundo), respectivamente, y el "ˆ"sobre los vectores significa que están normalizados a la unidad. Esta estructura está fuertemente ligada al teorema de Furry [61] y recurre al comportamiento del campo tensor electromagnético bajo transformaciones de paridad y carga, de tal forma que los invariantes de Lorentz disponibles para los coeficientes con los que se muestran en la Tabla 1.1. Nótese que $p_2\hat{F}^*p_1$ es un pseudoescalar debido a que $\hat{F}^{*\mu\nu}$ es un pseudotensor.

Invariante	Conjugación de carga	Paridad
$p_2 \cdot p_1$	par (+)	par (+)
$p_{2\perp} \cdot p_{1\perp}$	par (+)	par (+)
$p_2\hat{F}p_1$	impar (-)	par (+)
$p_2\hat{F}^*p_1$	impar (-)	impar (-)

Tabla 1.1: Invariantes de Lorentz disponibles en presencia de un campo magnético externo.

Al exigir simetría de intercambio bosónico, Ec. (1.11), la estructura tensorial del vértice efectivo se simplifica

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB}(p_1,p_2) =& a_1^{++}\hat{L}_1^\mu \hat{L}_2^\nu + a_2^{++}\hat{L}_1^{*\mu}\hat{L}_2^{*\nu} + a_3^{++}\hat{G}_1^\mu \hat{G}_2^\nu + \frac{a_4^{+-}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_1^\mu \hat{L}_2^{*\nu} + \hat{L}_1^{*\mu}\hat{L}_2^\nu\right) \\ &+ \frac{a_6^{-+}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_1^\mu \hat{G}_2^\nu - \hat{G}_1^\mu \hat{L}_2^\nu\right) + \frac{a_8^{--}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_1^{*\mu}\hat{G}_2^\nu - \hat{G}_1^\mu \hat{L}_2^{*\nu}\right). \end{aligned} \tag{1.26}$$

[1]Si se tienen BV reales, que cumplen con la relación de dispersión $l_i^2 = 0$, sólo existen dos estados de polarización debido a que el estado G^μ se reduce a l^μ.

Además, por construcción, el vértice cumple inmediatamente las condiciones de transversalidad, Ec. (1.10). En comparación con la estructura tensorial del vacío, se tienen 4 estructuras nuevas.

Como se mencionó anteriormente, los estados de polarización G^μ sólo están presentes para BV virtuales. Por tanto, las contribuciones del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo para BV reales, están dadas únicamente por

$$\mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}(p_1, p_2) = a_1^{++}\hat{L}_1^\mu \hat{L}_2^\nu + a_2^{++}\hat{L}_1^{*\mu}\hat{L}_2^{*\nu} + \frac{a_4^{+-}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_1^\mu \hat{L}_2^{*\nu} + \hat{L}_1^{*\mu}\hat{L}_2^\nu\right). \tag{1.27}$$

Con la descomposición tensorial ortogonal anterior para el vértice efectivo en presencia de un campo magnético, se puede calcular fácilmente la amplitud cuadrada para el proceso usando la Ec. (1.18), dando como resultado

$$\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}_{qB}|^2 = \sum_{\lambda_1=\pm 1}\sum_{\lambda_2=\pm 1} |\mathcal{M}_{qB}|^2 = |a_1^{++}|^2 + |a_2^{++}|^2 + |a_4^{+-}|^2, \tag{1.28}$$

donde las condiciones de capa de masa, $p_1^2 = p_2^2 = 0$, fueron usadas. Cada uno de los coeficientes puede obtenerse proyectando todo el vértice con su estructura tensorial correspondiente, es decir

$$\begin{aligned}
a_1^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\hat{L}_{1\mu}\hat{L}_{2\nu}, \\
a_2^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\hat{L}_{1\mu}^*\hat{L}_{2\nu}^*, \\
a_4^{+-} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1\mu}\hat{L}_{2\nu}^* + \hat{L}_{1\mu}^*\hat{L}_{2\nu}\right).
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Una vez obtenidos los coeficientes, proyectando el vértice efectivo sobre la base ortogonal, los observables físicos se pueden calcular directamente. Por ejemplo, sustituyendo la Ec. (1.28) en Ec. (1.5) y realizando la integración y el promedio sobre espines, se puede obtener la sección eficaz no polarizada en presencia de un campo magnético

$$\sigma_{qB}\left(\phi \longrightarrow VV\right) = \frac{1}{8m_\phi^2}\left(|a_1^{++}|^2 + |a_2^{++}|^2 + |a_4^{+-}|^2\right) 2\pi\delta\left(\mathcal{S} - m_\phi^2\right), \tag{1.30}$$

donde $\mathcal{S} = (p_1 + p_2)^2$, m_ϕ es la masa de la partícula escalar y la delta de Dirac asegura que ésta sea producida en capa de masa.

Hasta ahora, basándonos en fundamentos generales, se ha escrito el vértice efectivo en términos de estructuras tensoriales ortogonales. Sin embargo, no conocemos la forma explícita de la amplitud que codifica la microfísica que permite la interacción entre estas tres partículas. En general, hasta un cierto orden de aproximación, el cálculo de $\mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}$ (que requiere una suma finita de diagramas de Feynman) no se expresa en una forma cerrada de estructuras tensoriales ortogonales como en la Ec. (1.27). En la siguiente sección, nos centraremos en el cálculo del vértice efectivo a un lazo, lado izquierdo de la Ec. (1.27).

1.3.3. Vectores de polarización

En la literatura [75, 76], los vectores de polarización asociados a la base introducida en la Ec. (1.22), son

$$\epsilon^{\mu}_{\text{long.}} \equiv \frac{L^{\mu}}{\sqrt{-p_{\perp}^{2}}} \quad \text{y} \quad \epsilon^{\mu}_{\text{trans.}} \equiv \frac{L^{*\mu}}{\sqrt{p_{\parallel}^{2}}}, \tag{1.31}$$

donde la notación anterior se refiere a los modos “longitudinal” y “transversal” de acuerdo a la descomposición de Adler [77], para fotones en capa de masa. Esta nomenclatura indica la posición del vector campo magnético, de la onda del fotón, con respecto al plano formado por el momento del fotón y el campo magnético externo, como se muestra en la Fig. 1.3(a) donde se ha implementado el siguiente código de colores de flechas: verde para el campo magnético externo $\vec{B}$, negro para el momento del VB $\vec{p}$, azul para los vectores de polarización $\vec{\epsilon}$ y rojo para su correspondiente campo magnético generalizado $\vec{\mathcal{B}}$. Como se está trabajando con BV específicos, los modos se refieren a las orientaciones de $\vec{\mathcal{B}}$ de su onda asociada.

Cabe señalar que los vectores en la Ec. (1.31) no cumplen con la Ec. (1.17) porque no son totalmente ortogonales al momento del BV, en un sentido de 3-dimensional, como se muestra en la Fig. 1.3(a). En esta figura, mientras $\vec{\mathcal{B}}$ es ortogonal a $\vec{p}$ para ambos modos, el campo eléctrico generalizado $\vec{\mathcal{E}}$ (que define la dirección del vector de polarización) no es ortogonal al momento para el modo “transversal”

$$\vec{\epsilon}_{\text{trans.}} \cdot \vec{p} \neq 0, \tag{1.32}$$

como también es observado por Hattori y Satow [63]. De esta forma, el modo “transversal” no describe una polarización física pura. La situación cambia cuando $\vec{p}$ es perpendicular a $\vec{B}$, como se puede ver en la Fig. 1.3(b). Allí, la base se vuelve totalmente ortogonal y se cumple la Ec. (1.17).

Dado que los vectores de polarización en la Ec. (1.31), que a partir de ahora se denominarán como vectores de polarización de Adler, no se corresponden con los de polarización física en todos los casos. Entonces, hay que construir un vector de polarización alternativo para el caso general. Esto se puede hacer sustituyendo $\vec{\epsilon}_{\text{trans.}}$ por

$$\vec{\epsilon}_{T} = \frac{1}{|\vec{p}||\vec{L}|}\vec{L} \times \vec{p}. \tag{1.33}$$

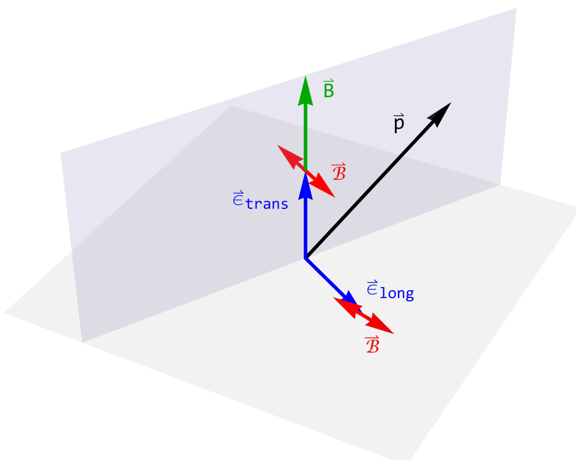
Este nuevo vector puede generalizarse de la siguiente manera

$$\epsilon^{\mu}_{T} = \frac{1}{E_{p}\sqrt{-p_{\perp}^{2}}}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_{\nu} \hat{F}_{\alpha\sigma} p^{\sigma} p_{\beta}, \tag{1.34}$$

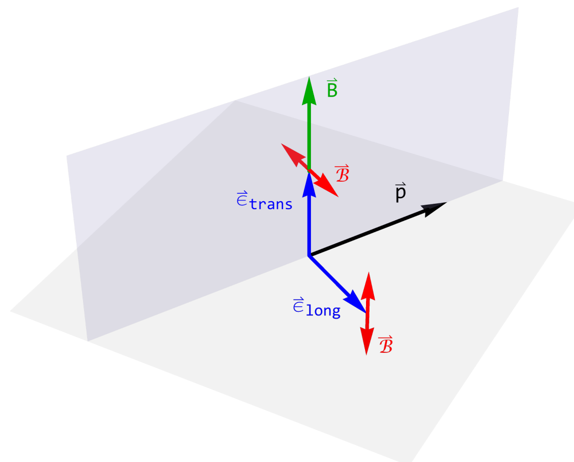
con $n^{\nu} \equiv (1, 0, 0, 0)$. Dado que los vectores de polarización modificados son totalmente ortogonales, como se puede observar en la Fig. 1.3(c), se satisface la relación (1.17)

$$\sum_{\lambda=\text{long.},T} \epsilon_{\mu}(p, \lambda)\epsilon^{*}_{\alpha}(p, \lambda) = -g_{\mu\alpha} + \frac{p_{\mu}n_{\alpha} + p_{\alpha}n_{\mu}}{p \cdot n} + n^{2}\frac{p_{\mu}p_{\alpha}}{(p \cdot n)^{2}}. \tag{1.35}$$

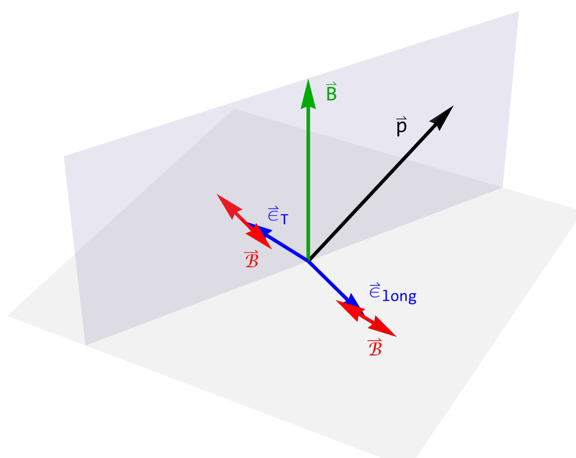
Una alternativa para calcular la Ec. (1.16) es proyectar sobre los vectores de polarización antes de realizar la suma. En el caso donde hay un campo magnético externo, el elemento de matriz $\mathcal{M}_{qB}$ se descompone de acuerdo a la Ec. (1.27) y con los vectores de polarización modificados asociados a los modos "longitudinal" y T. Entonces, al sumar las diferentes contribuciones, se obtiene el resultado de la Ec. (1.28).



(a) Caso arbitrario para los vectores de polarización de Adler.



(b) Caso con $\vec{p} \perp \vec{B}$ para los vectores de polarización de Adler.



(c) Caso arbitrario para los vectores de polarización modificados.

Figura 1.3: Vectores de polarización para diferentes situaciones físicas. Se implementa el siguiente código de colores de flechas: verde para el campo magnético externo $\vec{B}$, negro para el momento del BV $\vec{p}$, azul para los vectores de polarización $\vec{\epsilon}$ y rojo para su correspondiente campo magnético generalizado $\vec{\mathcal{B}}$. El campo eléctrico generalizado $\vec{\mathcal{E}}$ va a lo largo del vector de polarización correspondiente.

Como última observación, nótese que los vectores de polarización construidos a partir del campo magnético externo se "rompen" si el momento de BV está alineado con el campo magnético externo $\vec{p} \parallel \vec{B}$. En ese caso, la estructura tensorial del vértice efectivo en presencia de un campo magnético obtenida no es válida, Ec. (1.27). No obstante, se puede realizar el mismo análisis con un conjunto diferente de vectores de polarización para los BV.

1.4. Vértice efectivo a un lazo en presencia de un campo magnético

Para incorporar los efectos del campo magnético en el vértice efectivo a un lazo, mostrado en la Figura 1.2, consideramos la propagación de partículas fermiónicas cargadas en presencia de un campo magnético externo homogéneo, cuya estructura general es la siguiente [78]

$$S^{qB}(x,y) = \Omega(x,y) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{S}^{qB}(p) e^{-ip\cdot(x-y)}, \tag{1.36}$$

donde

$$\Omega(x',x'') = \exp\left(-iq \int_{x''}^{x'} A_\mu(x) dx^\mu \right), \tag{1.37}$$

es la fase de Schwinger, con q la carga eléctrica de los fermiones y $A_\mu(x)$ el cuadripotencial asociado al campo magnético. En el caso particular de un campo magnético homogéneo a lo largo de la dirección z ($F^{21} = -F^{12} = B$), la parte traslacionalmente invariante del propagador fermiónico toma la forma [78]

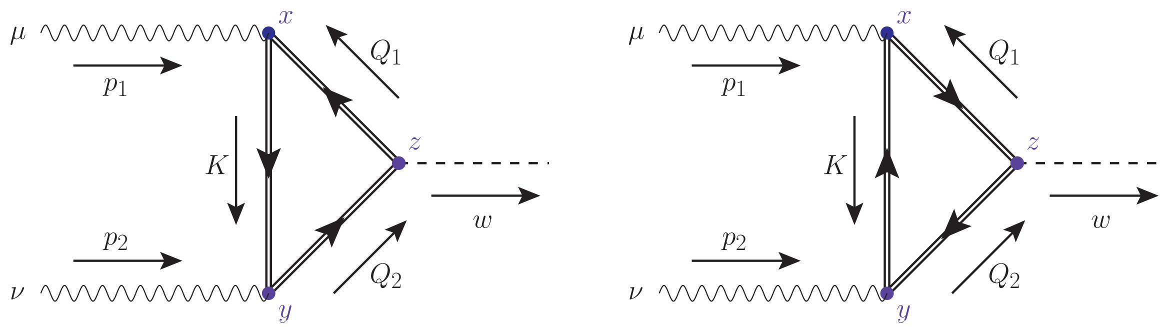
$$\begin{aligned} \tilde{S}^{qB}(p) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(qBs)} \exp\left[-is\left(m^2 - p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right) \right] \\ \times \left(\left(m + \not{p}_\parallel \right) e^{iqBs\Sigma_3} + \frac{\not{p}_\perp}{\cos(qBs)} \right), \end{aligned} \tag{1.38}$$

con $qB = \mathrm{sign}(qB)|qB|$. Las componentes del momento $p_\parallel$ y $p_\perp$, paralela y perpendicular al campo magnético, están dadas por

$$p_\parallel^\mu \equiv (p^0, 0, 0, p^3) \qquad \text{y} \qquad p_\perp^\mu \equiv (0, p^1, p^2, 0), \tag{1.39}$$

y satisfacen $p^2 = p_\parallel^2 + p_\perp^2$. Finalmente, m es la masa de los fermiones y $\Sigma_3 \equiv i\gamma^1\gamma^2$ que se puede identificar con la matriz de espín a lo largo de la dirección del campo.

En la Figura 1.4, se muestran los dos diagramas de Feynman que contribuyen al proceso a un lazo, el efecto del campo magnético está representado una línea doble en los propagadores fermiónicos. Una observación importante es que ambos diagramas son muy similares, la diferencia que se observa es que la dirección en la que fluye la carga (el sentido de los propagadores fermiónicos) es opuesta, es decir, en un diagrama la carga circula hacia la derecha mientras que en el otro circula hacia la izquierda. A este tipo de diagramas se les conoce como “conjugados de carga”, lo cual es de gran relevancia en el análisis posterior y se analiza de forma detallada en el Apéndice A.



(a) Diagrama I. (b) Diagrama II.

Figura 1.4: Diagramas de Feynman a un lazo para la interacción $VV\Phi$ en presencia de un campo magnético externo. El campo magnético externo se indica mediante la línea doble en los propagadores fermiónicos, las flechas internas indican el flujo de carga y las flechas externas el flujo de momento. x, y y z indican los puntos de interacción en el espacio de configuraciones.

Aplicando las reglas de Feynman, Ec. (1.3), a los diagramas mostrados en la Figura 1.4, se obtienen las siguientes expresiones analíticas

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(I)}}(x,y,z) = -\mathcal{TR}\left[(-ig\gamma^\mu)\,S^{^{qB}}(x,z)\,(-ih)\,S^{^{qB}}(z,y)\,(-ig\gamma^\nu)\,S^{^{qB}}(y,x)\right], \qquad (1.40)$$

y

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(II)}}(x,y,z) = -\mathcal{TR}\left[(-ig\gamma^\mu)\,S^{^{qB}}(x,y)\gamma^\nu\,(-ig\gamma^\nu)\,S^{^{qB}}(y,z)\,(-ih)\,S^{^{qB}}(z,x)\right], \qquad (1.41)$$

donde g y h son las constantes de acoplamiento de fermiones cargados con bosones vectoriales y escalares, respectivamente. El operador $\mathcal{TR}$ indica una traza funcional, es decir, la suma de todos los grados de libertad internos.

Las Ecs. (1.40, 1.41), están relacionadas por la conjugación de carga, $\hat{\mathcal{C}}$,

$$\hat{\mathcal{C}}\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(I)}}\hat{\mathcal{C}}^{-1} = \mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(II)}}, \qquad (1.42)$$

como se muestra en el Apéndice A Por ello, de ahora en adelante, el cálculo se centrará en la contribución del diagrama I.

El vértice efectivo en el espacio de momentos se puede obtener llevando a cabo una suma sobre las posiciones espacio-temporales de los vértices de interacción de los diagramas con las respectivas ondas planas de las partículas externas

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB}(p_1,p_2,w) = \int d^Dx\,d^Dy\,d^Dz\,\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB}(x,y,z)e^{-ip_1\cdot x}e^{-ip_2\cdot y}e^{+iw\cdot z}. \qquad (1.43)$$

A pesar de que las Ecs. (1.40, 1.41) no presentan divergencias ultravioletas en el caso del vacío, es importante que se realicen los cálculos en una dimensión arbitraria D, para obtener resultados consistentes con la literatura [79] se debe de utilizar el método de regularización dimensional para tratar con las divergencias logarítmicas aparentes asociadas a los diagramas. Nótese que se utilizan ondas planas debido a que las partículas externas son neutras.

Sustituyendo el propagador de la Ec. (1.36) en la Ec. (1.40), el diagrama I en el espacio de momento toma la forma

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2,w) = &-ihg^2\int\frac{d^DK\,d^DQ_1\,d^DQ_2}{(2\pi)^D(2\pi)^D(2\pi)^D}\\
&\times\int d^Dx\,d^Dy\,d^Dz\,e^{-i(p_1+Q_1-K)\cdot x}e^{-i(p_2+K-Q_2)\cdot y}e^{-i(-w+Q_2-Q_1)\cdot z}\\
&\times e^{i\frac{qB}{2}\left(x\hat{F}z+z\hat{F}y+y\hat{F}x\right)}\,Tr\left[\gamma^\mu\tilde{S}^{qB}(Q_1)\tilde{S}^{qB}(Q_2)\gamma^\nu\tilde{S}^{qB}(K)\right],
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

donde Tr denota la traza sobre el espín y se define la notación $a\hat{F}b\equiv a_\mu\hat{F}^{\mu\nu}b_\nu$. Nótese que en la ecuación anterior, el factor exponencial, junto a Tr, surge de las fases de Schwinger en cada propagador fermiónico (para más detalles, ver Apéndice B). Debido a este factor, la integración en el espacio de configuraciones de la expresión anterior no es directa, como en el caso del vacío.

En lo que sigue, se muestra una metodología que nos permite obtener una expresión analítica cerrada para el vértice efectivo, Ec. (1.44), en un campo magnético homogéneo de intensidad arbitraria.

1.4.1. Integración en el espacio de configuraciones

Comencemos realizando las integrales sobre el espacio de coordenadas. Debido a la presencia del campo magnético surgen dos tipos de integrales, asociadas a las componentes paralela y perpendicular. La integración sobre el espacio de coordenadas paralelas en Ec. (1.44) puede realizarse directamente, dando

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2,w) = &-ihg^2\int\frac{d^DK\,d^DQ_1\,d^DQ_2}{(2\pi)^D(2\pi)^D(2\pi)^D}(2\pi)^{D_\parallel}\delta^{(D_\parallel)}_\parallel(p_1+Q_1-K)\\
&\times(2\pi)^{D_\parallel}\delta^{(D_\parallel)}_\parallel(p_2+K-Q_2)\,(2\pi)^{D_\parallel}\delta^{(D_\parallel)}_\parallel(-w+Q_2-Q_1)\\
&\times Tr\left[\gamma^\mu\tilde{S}^{qB}\left(Q_{1\perp},Q_{1\parallel}\right)\tilde{S}^{qB}\left(Q_{2\perp},Q_{2\parallel}\right)\gamma^\nu\tilde{S}^{qB}\left(K_\perp,K_\parallel\right)\right]\\
&\times\int d^{D_\perp}x_\perp\,d^{D_\perp}y_\perp\,d^{D_\perp}z_\perp\,e^{-i(p_1+Q_1-K)_\perp\cdot x_\perp}e^{-i(p_2+K-Q_2)_\perp\cdot y_\perp}\\
&\times e^{-i(-w+Q_2-Q_1)_\perp\cdot z_\perp}e^{i\frac{qB}{2}\left(x\hat{F}z+z\hat{F}y+y\hat{F}x\right)}.
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

A partir de la ecuación anterior, es fácil observar la conservación de los momentos paralelos en cada vértice. Nótese que el factor exponencial de la fase de Schwinger no se vio afectado porque las contracciones $a\hat{F}b$ sólo admiten componentes perpendiculares.

En cambio, la integración sobre las componentes perpendiculares es un poco más complicada. Para llevar a cabo esta integración en la Ec. (1.45), vamos a aislar la siguiente estructura

$$
\begin{aligned}
I_\perp\equiv&\int d^{D_\perp}x_\perp\,d^{D_\perp}y_\perp\,d^{D_\perp}z_\perp\,e^{-i(p_1+Q_1-K)_\perp\cdot x_\perp}e^{-i(p_2+K-Q_2)_\perp\cdot y_\perp}\\
&\times e^{-i(-w+Q_2-Q_1)_\perp\cdot z_\perp}e^{i\frac{qB}{2}\left(x\hat{F}z+z\hat{F}y+y\hat{F}x\right)}.
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

Debido a la mezcla de coordenadas que aparece en el factor exponencial de la fase de Schwinger, no es posible identificar deltas de Dirac como en el caso anterior. Este factor rompe la conservación de los momentos perpendiculares en cada vértice al mezclar los puntos de interacción. Sin embargo, la integración puede realizarse componente a componente como se muestra en el Apéndice B y, una vez completada, la conservación global del momento perpendicular se hace explícita.

Por ejemplo, en el primer paso, la integración sobre $x_\perp$ da lugar a una función delta de Dirac con un argumento que depende de $y_\perp$ y $z_\perp$. En el segundo paso, la integración sobre $y_\perp$ es directa gracias a la delta de Dirac previamente obtenida. Finalmente, la integral sobre $z_\perp$ se identifica de nuevo como una función delta de Dirac, cuyo argumento muestra la conservación de los momentos perpendiculares, obteniendo

$$I_\perp = \left(\frac{4\pi}{|qB|}\right)^{D_\perp} (2\pi)^{D_\perp} \delta_\perp^{(D_\perp)}\left(p_1 + p_2 - w\right) e^{i\frac{2}{qB}(p_1+Q_1-K)\hat{F}(p_2+K-Q_2)}, \tag{1.47}$$

donde el factor exponencial procede de las fases de Schwinger, ver Ec. (B.16). Diferentes órdenes de integración sobre $x_\perp$, $y_\perp$ y $z_\perp$ dan resultados diferentes que parecen depender del orden de integración. Sin embargo, cuando se realiza la integración sobre los momentos de lazo, el resultado final es el mismo independientemente del orden de integración en el espacio de coordenadas.

Sustituyendo el resultado de la Ec. (1.47) en la Ec. (1.45), se obtiene

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1, p_2, w) =& - ihg^2 \left(\frac{4\pi}{|qB|}\right)^{D_\perp} (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(p_1 + p_2 - w\right) \\ & \times \int \frac{d^D K\, d^{D_\perp} Q_{1\perp}\, d^{D_\perp} Q_{2\perp}}{(2\pi)^D (2\pi)^{D_\perp} (2\pi)^{D_\perp}} e^{i\frac{2}{qB}(p_1+Q_1-K)\hat{F}(p_2+K-Q_2)} \\ & \times Tr\left[\gamma^\mu \tilde{S}^{qB}\left(Q_{1\perp}, (K-p_1)_\parallel\right) \tilde{S}^{qB}\left(Q_{2\perp}, (K+p_2)_\parallel\right) \gamma^\nu \tilde{S}^{qB}\left(K_\perp, K_\parallel\right)\right] \\ \equiv& - ihg^2 \left(\frac{4\pi}{|qB|}\right)^{D_\perp} (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(p_1 + p_2 - w\right) G_{(I)}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

donde adicionalmente se ha realizado la integración sobre $Q_{1\parallel}$ y $Q_{2\parallel}$, y contribuye al factor de conservación del momento completo que, por simplicidad, se omitirá de ahora en adelante. Se ha introducido la notación $G_{(I)}$ de antemano para trabajar con las integrales de momento en la siguiente parte.

Hasta ahora, hemos terminado con la integración en el espacio de coordenadas y realizado la integración trivial del momento. Quedan cuatro integrales de momento por realizar, tres perpendiculares y una paralela, que requieren un procedimiento más exhaustivo. A continuación presentamos una metodología para abordar este tipo de integración.

1.4.2. Integración en el espacio de momentos

La integración en el espacio de momentos de la Ec. (1.48) se puede realizar mediante integrales Gaussianas. Un aporte importante de este trabajo fue desarrollar un procedimiento

para llevar a cabo dicha integración sin calcular la traza espinorial, esto da como resultado expresiones más compactas y sencillas para trabajar
En un procedimiento de cálculo estándar de la Ec. (1.48), el siguiente paso es realizar la suma sobre los espines en el lazo. Este paso da lugar a una enorme cantidad de términos que se hacen realmente difíciles de tratar. En lugar del procedimiento estándar, calcularemos primero las integrales sobre todos los momentos del lazo, dejando al final la suma sobre espines. Con este objetivo en mente, escribamos la expresión con la que vamos a trabajar

$$\begin{aligned} G_{(I)} = \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2 \mathrm{c_2}^2 \mathrm{c_3}^2} \int \frac{d^D K\, d^{D_\perp} Q_{1\perp}\, d^{D_\perp} Q_{2\perp}}{(2\pi)^D (2\pi)^{D_\perp} (2\pi)^{D_\perp}} e^{i\frac{2}{qB}(p_1+Q_1-K)\hat{F}(p_2+K-Q_2)} \\ \times\, e^{is_1\left((K-p_1)_\parallel^2 - m^2\right) + is_2\left((K+p_2)_\parallel^2 - m^2\right) + is_3\left(K_\parallel^2 - m^2\right)} e^{i\frac{\mathrm{t_1}}{qB}Q_{1\perp}^2 + i\frac{\mathrm{t_2}}{qB}Q_{2\perp}^2 + i\frac{\mathrm{t_3}}{qB}K_\perp^2} \\ \times\, Tr\left[\gamma^\mu \left(\mathbb{M}_1 + \not{Q}_{1\perp}\right)\left(\mathbb{M}_2 + \not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu \left(\mathbb{M}_3 + \not{K}_\perp\right)\right], \end{aligned} \tag{1.49}$$

donde se han sustituido los propagadores fermiónicos de la Ec. (1.38) y se ha introducido la notación

$$\mathbb{M}_1 \equiv \left(m + (\not{K} - \not{p}_1)_\parallel\right) e^{(1)}, \tag{1.50}$$

$$\mathbb{M}_2 \equiv \left(m + (\not{K} + \not{p}_2)_\parallel\right) e^{(2)}, \tag{1.51}$$

$$\mathbb{M}_3 \equiv \left(m + \not{K}_\parallel\right) e^{(3)}, \tag{1.52}$$

que enfatiza la naturaleza matricial de estas cantidades, con

$$e^{(j)} \equiv \mathrm{c_j} e^{iqBs_j\Sigma_3}, \tag{1.53}$$

y $\mathrm{c_j} \equiv \cos(qBs_j)$, $\mathrm{t_j} \equiv \tan(qBs_j)$ con s_j los parámetros de Schwinger de cada propagador fermiónico. En la Ec. (1.49), se separaron las componentes perpendicular y paralela debido a que las integrales correspondientes a cada una de ellas son independientes entre sí.

Para realizar la integración sobre una de las componentes perpendiculares, por ejemplo $Q_{1\perp}$, nótese que la integral respectiva

$$G_{(I)}^{Q_{1\perp}} \equiv \int \frac{d^{D_\perp} Q_{1\perp}}{(2\pi)^{D_\perp}} e^{i\left(\frac{\mathrm{t_1}}{qB}Q_{1\perp}^2 + \frac{2}{qB}Q_1\hat{F}(p_2+K-Q_2)\right)} Tr\left[\gamma^\mu \left(\mathbb{M}_1 + \not{Q}_{1\perp}\right)\left(\mathbb{M}_2 + \not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu \left(\mathbb{M}_3 + \not{K}_\perp\right)\right], \tag{1.54}$$

puede ser llevada a una forma Gaussiana haciendo el cambio de variable

$$l_{Q_{1\perp}}^\mu \equiv Q_{1\perp}^\mu - \frac{1}{\mathrm{t_1}}\hat{F}^{\mu\nu}\left(Q_2 - K - p_2\right)_{\perp\nu}, \tag{1.55}$$

para obtener

$$\begin{aligned} G_{(I)}^{Q_{1\perp}} =& e^{-\frac{i}{qB\mathrm{t_1}}(Q_2-K-p_2)_\perp^2} \int \frac{d^{D_\perp} l_{Q_{1\perp}}}{(2\pi)^{D_\perp}} e^{i\frac{\mathrm{t_1}}{qB} l_{Q_{1\perp}}^2} \\ &\times\, Tr\left[\gamma^\mu \left(\mathbb{M}_1 + \not{l}_{Q_{1\perp}} + \frac{1}{\mathrm{t_1}}\hat{\not{F}}\left(Q_2 - K - p_2\right)_\perp\right)\left(\mathbb{M}_2 + \not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu \left(\mathbb{M}_3 + \not{K}_\perp\right)\right], \end{aligned} \tag{1.56}$$

donde el precio de escribir el argumento exponencial como un único término cuadrático se paga dando lugar a términos extra en la traza espinorial de la forma $\hat{\not{F}} a = \gamma^\mu \hat{F}_{\mu\nu} a^\nu$. Una observación relevante es que el "shift" proviene del factor exponencial de la fase de Schwinger.

En la expresión anterior, la traza espinorial es una función polinómica de orden 1 sobre la variable $l_{Q_{1\perp}}$. Utilizando el resultado generalizado de la integración Gaussiana y argumentos de simetría, se puede mostrar fácilmente que el término lineal desaparece, dando como resultado

$$\begin{aligned} G_{(I)}^{Q_{1\perp}} =& e^{-\frac{i}{qB\mathrm{t}_1}(Q_2-K-p_2)_\perp^2} \frac{1}{(2\pi)^{D_\perp}} \left(\sqrt{\frac{-i\pi qB}{\mathrm{t}_1}}\right)^{D_\perp} \\ & \times Tr\left[\gamma^\mu \left(\mathbb{M}_1 + \frac{1}{\mathrm{t}_1}\hat{\not{F}}\left(Q_2-K-p_2\right)_\perp\right)\left(\mathbb{M}_2 + \not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu \left(\mathbb{M}_3 + \not{K}_\perp\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Al sustituir la Ec. (1.57) en la Ec. (1.49), se llega a

$$\begin{aligned} G_{(I)} =& \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c}_1{}^2 \mathrm{c}_2{}^2 \mathrm{c}_3{}^2} \frac{1}{(2\pi)^{D_\perp}} \left(\sqrt{\frac{-i\pi qB}{\mathrm{t}_1}}\right)^{D_\perp} \\ & \times \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} e^{is_1\left((K-p_1)_\parallel^2 - m^2\right) + is_2\left((K+p_2)_\parallel^2 - m^2\right) + is_3\left(K_\parallel^2 - m^2\right)} \\ & \times e^{i\frac{\mathrm{t}_3}{qB}K_\perp^2} e^{i\frac{2}{qB}(p_1-K)\hat{F}(p_2+K)} e^{-\frac{i}{\mathrm{t}_1 qB}(K+p_2)_\perp^2} \\ & \times \int \frac{d^{D_\perp} Q_{2\perp}}{(2\pi)^{D_\perp}} e^{\frac{i}{qB}\left(\mathrm{t}_2 - \frac{1}{\mathrm{t}_1}\right)Q_{2\perp}^2} e^{i\frac{2}{qB}\left((p_1-K)\hat{F}Q_2 + \frac{1}{\mathrm{t}_1}(K+p_2)_\perp \cdot Q_{2\perp}\right)} \\ & \times Tr\left[\gamma^\mu \left(\mathbb{M}_1 + \frac{1}{\mathrm{t}_1}\hat{\not{F}}\left(Q_2-K-p_2\right)_\perp\right)\left(\mathbb{M}_2 + \not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu \left(\mathbb{M}_3 + \not{K}_\perp\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.58}$$

En la ecuación anterior, dado que la estructura funcional de $Q_{2\perp}$ es bastante similar a la de $Q_{1\perp}$ en la Ec. (1.54), la integración se puede realizar mediante un procedimiento similar: haciendo un "shift" que nos permite escribir el argumento exponencial como un único término cuadrático [2] y observando que la traza espinorial es una función polinómica de orden 2 sobre la variable $Q_{2\perp}$ que, por argumentos de simetría, contribuyen a la integral con los términos cuadrático y constante.

Con estas ideas en mente, dado que el resto de integrales sobre $K_\perp$ y $K_\parallel$ comparten una estructura funcional similar a las de $Q_{1\perp}$ y $Q_{2\perp}$, se pueden realizar mediante el procedimiento mencionado. La diferencia radica en que la traza espinorial será una función polinomial de orden 3 sobre dichas variables. En el caso general, la traza será una función polinomial de orden n sobre la variable de integración, aportando a la integral sólo las potencias pares.

El cálculo explícito de integrales restantes se presenta en el Apéndice C.

[2] El "shift" es un poco más complicado que en el caso anterior ya que adquiere contribuciones del factor exponencial de Schwinger y de la integración sobre $Q_{1\perp}$.

Una vez realizada la integración de los momentos del lazo, el resultado final para la contribución del diagrama I es el siguiente

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2) =& ihg^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\frac{|qB|^{D_\perp/2}}{2^D\pi^{D/2}} \\
&\times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(qB)}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1s_3p_{1\parallel}^2 + s_2s_3p_{2\parallel}^2 + s_1s_2w_\parallel^2\right)} e^{-\frac{i}{qB}\frac{\mathrm{t_1t_3}p_{1\perp}^2 + \mathrm{t_2t_3}p_{2\perp}^2 + \mathrm{t_1t_2}w_\perp^2 + 2\mathrm{t_1t_2t_3}p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}} \\
&\times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m e^{(1)} + \not{U}_1\right)\left(m e^{(2)} + \not{U}_2\right)\gamma^\nu\left(m e^{(3)} + \not{U}_3\right)\right] \\
&\quad + \frac{im}{2s}\Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad\qquad + 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right]\Bigg) \\
&\quad + \frac{im\,qB}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)} \\
&\qquad \times \Bigg(- D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu e^{(3)}\right] + D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\left(e^{(1)}+e^{(2)}\right)\gamma^\nu\right] \\
&\qquad\qquad - 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\nu_\perp\right] - 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\right] \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha_\perp\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad\qquad - \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu e^{(3)}\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{1.59}$$

donde

$$\not{U}_1 = \left(-\frac{s_3\not{p}_{1\parallel} + s_2\not{w}_\parallel}{s}\right)e^{(1)} + \frac{\mathrm{t_3}\not{p}_{1\perp} + \mathrm{t_2}\not{w}_\perp - \mathrm{t_2t_3}\hat{\not{F}}p_2}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}, \tag{1.60}$$

$$\not{U}_2 = \left(\frac{s_1\not{w}_\parallel + s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)} + \frac{-\mathrm{t_3}\not{p}_{2\perp} - \mathrm{t_1}\not{w}_\perp - \mathrm{t_1t_3}\hat{\not{F}}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}, \tag{1.61}$$

$$\not{U}_3 = \left(\frac{s_1\not{p}_{1\parallel} - s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)} + \frac{-\mathrm{t_1}\not{p}_{1\perp} + \mathrm{t_2}\not{p}_{2\perp} + \mathrm{t_1t_2}\hat{\not{F}}w}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}, \tag{1.62}$$

y $s \equiv s_1+s_2+s_3$. Como se mencionó anteriormente, al haberse realizado la integración sobre todos los momentos, el resultado anterior es general y no depende del orden de integración sobre el espacio de coordenadas (ver Ec. (1.47) y su discusión). Vale la pena recordar que el resultado anterior corresponde al diagrama I, la expresión asociada al diagrama II puede obtenerse mediante un cálculo directo a partir de la Ec. (1.41) o mediante la conjugación de carga de la Ec. (1.59), como se muestra en la Ec. (1.42). Ambos procedimientos dan origen al siguiente resultado

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(II)}(p_1,p_2) =& ihg^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\frac{|qB|^{D_\perp/2}}{2^D\pi^{D/2}} \\
&\times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(qB)}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1s_3p_{1\parallel}^2+s_2s_3p_{2\parallel}^2+s_1s_2w_\parallel^2\right)} e^{-\frac{i}{qB}\frac{\mathrm{t_1t_3}p_{1\perp}^2+\mathrm{t_2t_3}p_{2\perp}^2+\mathrm{t_1t_2}w_\perp^2-2\mathrm{t_1t_2t_3}p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}} \\
&\times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m\,e^{(3)}+\not{\mathbb{V}}_3\right)\gamma^\nu\left(m\,e^{(2)}+\not{\mathbb{V}}_2\right)\left(m\,e^{(1)}+\not{\mathbb{V}}_1\right)\right] \\
&\qquad + \frac{im}{2s}\Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)}e^{(1)}\right] + 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)}e^{(1)}\right] \\
&\qquad\qquad + 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu_\parallel e^{(2)}e^{(1)}\right]\Bigg) \\
&\qquad + \frac{im\,qB}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)} \\
&\qquad\quad \times \Bigg(- D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\right] + D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\left(e^{(1)}+e^{(2)}\right)\right] \\
&\qquad\qquad - 2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu_\perp e^{(1)}\right] - 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp\gamma^\nu e^{(2)}\right] \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu\gamma^\alpha_\perp e^{(1)}\right]\hat{F}_{\beta\alpha} \\
&\qquad\qquad - \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^\alpha_\perp\right]\hat{F}_{\beta\alpha} \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\gamma^\alpha_\perp\right]\hat{F}_{\beta\alpha}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{1.63}
$$

con

$$
\not{\mathbb{V}}_1 = \left(\frac{s_3\not{p}_{1\parallel}+s_2\not{w}_\parallel}{s}\right)e^{(1)} + \frac{-\mathrm{t_3}\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t_2}\not{w}_\perp-\mathrm{t_2t_3}\hat{\not{F}}p_2}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}, \tag{1.64}
$$

$$
\not{\mathbb{V}}_2 = \left(-\frac{s_1\not{w}_\parallel+s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)} + \frac{\mathrm{t_3}\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t_1}\not{w}_\perp-\mathrm{t_1t_3}\hat{\not{F}}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}, \tag{1.65}
$$

$$
\not{\mathbb{V}}_3 = \left(-\frac{s_1\not{p}_{1\parallel}-s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)} + \frac{\mathrm{t_1}\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t_2}\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t_1t_2}\hat{\not{F}}w}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}. \tag{1.66}
$$

Una de diferencias entre las expresiones asociadas a cada uno de los diagramas, Ecs. (1.59)-(1.63) radica en que el orden de las matrices gamma en las trazas espinoriales está invertido como usualmente ocurre en diagramas conjugados de carga. Además, se tienen signos contrarios en términos que contienen al tensor $\hat{F}$; por ejemplo, el signo del último término de la fase

$$\exp\left[-\frac{i}{qB}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3p_{1\perp}^2+\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3p_{2\perp}^2+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2w_{\perp}^2\pm 2\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}\right]. \tag{1.67}$$

Es decir, las contribuciones magnéticas asociadas a los diagramas de la Figura 1.4 tienen una fase contraria. Ésto dará origen a términos de interferencia.

Vale la pena señalar que dentro del esquema de regularización dimensional, no hay términos divergentes en el caso de vacío como se muestra más adelante. Por lo tanto, la Ec. (1.59) y las expresiones subsiguientes no tienen términos divergentes.

Además de las modificaciones a la interacción $VV\phi$ introducidas por el campo magnético externo, una importante contribución del presente trabajo es el desarrollo de una metodología que nos permite realizar la integración del momento dentro del lazo preservando la traza espinorial sin realizar ninguna aproximación cinemática. De tal forma que se obtiene un resultado general, para una intensidad de campo arbitraria, expresado de una manera más manejable ya que se escribe en términos de integrales [1]. Dichas integrales pueden ser calculadas mediante procedimientos estándar una vez que se realizan las aproximaciones pertinentes para estudiar la región de interés.

Aunque las Ecs. (1.59) y (1.63) son un resultado exacto, las integrales restantes no pueden calcularse analíticamente debido a su intrincada forma. Para comprender mejor el efecto del campo magnético en la estructura analítica del vértice efectivo, en el siguiente capítulo se exploran distintas regiones de intensidad de campo magnético.

1.4.3. Límite de campo cero

Para corroborar que los resultados obtenidos hasta el momento son correctos, hay que verificar que se reproducen las expresiones para el caso del vacío al tomar el límite $|qB| \longrightarrow 0$ en la Ec. (1.59). En este límite, el comportamiento de las distintas funciones que aparecen en las expresiones anteriores es el siguiente

$$\cos(qBs_j) \approx 1, \quad \tan(qBs_j) \approx qBs_j \quad \text{y} \quad e^{(j)} \approx \mathbf{I}.$$

Entonces, una vez que se llevan a cabo estas sustituciones en la Ec. (1.59), y tras algunas manipulaciones sencillas, se reduce a

$$\begin{aligned}\lim_{|qB|\to 0} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2) =& ihg^2\,(-i)^{D/2+1}\,\frac{1}{2^D\pi^{D/2}}\int dv_1\; dv_2\; dv_3\;\delta(1-v_1-v_2-v_3)\\ &\times\int_0^\infty ds\; s^{2-D/2}\; e^{is\left(v_1v_3p_1^2+v_2v_3p_2^2+v_1v_2w^2-m^2\right)}\\ &\times\Bigg\{Tr\big[\gamma^\mu\,(m-v_3\not{p}_1-v_2\not{w})\,(m+v_1\not{w}+v_3\not{p}_2)\\ &\qquad\times\gamma^\nu\,(m+v_1\not{p}_1-v_2\not{p}_2)\,\big]\\ &+\frac{im}{2s}\Big(-D_\parallel\,Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel\gamma^\nu\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu_\parallel\right]\Big)\\ &+\frac{im}{2s}\Big(D_\perp\,Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu]-2D_\perp\,Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu]\\ &\qquad+2\,Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu_\perp]+2\,Tr[\gamma^\mu_\perp\gamma^\nu]\Big)\Bigg\},\end{aligned} \tag{1.68}$$

donde se ha realizado el cambio de variables $s_j = sv_j$ tal que $s \equiv s_1 + s_2 + s_3$, con $s \in [0,\infty]$ y $v_j \in [0,1]$ de tal forma que se cumpla la relación $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.

No se ha simplificado totalmente la Ec. (1.68) para no perder de vista cómo contribuyen los múltiples términos en la traza de la Ec. (1.59) al vértice efectivo en el vacío. En particular, las dos últimas líneas de la ecuación anterior se simplifican a

$$N^{\mu\nu}_{\text{vac.}(I)} = \frac{im}{2s}\Big((4-D)\;Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu]\Big). \tag{1.69}$$

Este término muestra una aparente divergencia logarítmica, debida al factor $\frac{1}{s}$ extra, que debe tratarse con cuidado[3] La integración sobre s en la Ec. (1.68) puede realizarse directamente usando representaciones integrales de la función Gamma [76, 80]

$$\int_0^\infty s^{n-\frac{D}{2}}e^{-i\Delta_m^2 s}ds = \left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D}{2}-(n+1)}\Gamma\left(n+1-\frac{D}{2}\right), \tag{1.70}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}(I)}(p_1,p_2) =& ihg^2\,(-i)^{D/2+1}\,\frac{1}{2^D\pi^{D/2}}\Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right)\int dv_1\; dv_2\; dv_3\;\delta(1-v_1-v_2-v_3)\\ &\times\Bigg\{\left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D}{2}-3}\;Tr\big[\gamma^\mu\,(m-v_3\not{p}_1-v_2\not{w})\,(m+v_1\not{w}+v_3\not{p}_2)\\ &\qquad\times\gamma^\nu\,(m+v_1\not{p}_1-v_2\not{p}_2)\,\big]\\ &+\frac{im}{4-D}\left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D}{2}-2}\Big((4-D)\;Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu]\Big)\Bigg\},\end{aligned} \tag{1.71}$$

[3]Recordemos que, en el formalismo del tiempo propio de Schwinger, el comportamiento divergente UV se traslada a la región $s \longrightarrow 0$.

donde $\Delta_m^2 \equiv m^2 - v_1 v_3 p_1^2 - v_2 v_3 p_2^2 - v_1 v_2 w^2$.

En la Ec. (1.71), el último término enfatiza la importancia de trabajar dentro del esquema de regularización dimensional [79]. Una vez que el comportamiento ultravioleta se regulariza en la integración s y el resultado no tiene términos divergentes, es posible tomar con seguridad el límite $D \longrightarrow 4$, obteniendo

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}(I)}(p_1,p_2) =& ihg^2 \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dv_1 \int_0^{1-v_1} dv_2 \\ & \times \Bigg\{ \frac{1}{m^2 - v_1(1-v_1-v_2)p_1^2 - v_2(1-v_1-v_2)p_2^2 - v_1 v_2 w^2} \\ & \quad \times Tr\big[\gamma^\mu \left(m + (v_1 - 1)\not{p}_1 - v_2 \not{p}_2\right)\left(m + v_1 \not{p}_1 + (1-v_2)\not{p}_2\right) \\ & \qquad \times \gamma^\nu \left(m + v_1 \not{p}_1 - v_2 \not{p}_2\right)\big] \\ & \qquad - m\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\nu\right] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{1.72}$$

donde adicionalmente se ha realizado la integración sobre la variable v_3.

Sumando las contribuciones de los dos diagramas que se muestran el la Figura 1.4, y calculando la traza, los dos factores de forma en la Ec. (1.14) pueden identificarse como

$$A_1 = \frac{hg^2 m}{\pi^2} \int_0^1 dv_1 \int_0^{1-v_1} dv_2 \, \frac{4v_1 v_2 - 1}{\tau - 4v_1 v_2}, \tag{1.73}$$

$$A_2 = -\frac{2hg^2 m}{\pi^2 m_\phi^2} \int_0^1 dv_1 \int_0^{1-v_1} dv_2 \, \frac{(2v_1 - 1)(2v_2 - 1)}{\tau - 4v_1 v_2}, \tag{1.74}$$

donde las partículas externas cumplen con las condiciones de capa de masa, dadas por

$$p_1^2 = p_2^2 = 0 \quad \text{y} \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{m_\phi^2}{2}, \tag{1.75}$$

con m_ϕ la masa de la partícula escalar, y se ha introducido la notación $\tau \equiv 4m^2/m_\phi^2$. Estas integrales han sido calculadas de forma analítica por varios autores [13–15, 81] y pueden expresarse en términos de funciones logarítmicas, trigonométricas o polilogarítmicas (Li_2). En particular, en esta última forma los coeficientes vienen dados por [36]

$$A_1 = \frac{hg^2 m}{4\pi^2} \left[(\tau - 1)\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\tau}} \right) + (\tau - 1)\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{1-\sqrt{1-\tau}} \right) - 2 \right], \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned} A_2 =& -\frac{hg^2 m}{2\pi^2 m_\phi^2} \Bigg[8\sqrt{\tau - 1}\cot^{-1}(\tau - 1) + (\tau + 1)\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\tau}} \right) \\ & + (\tau + 1)\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{1-\sqrt{1-\tau}} \right) - 10 \Bigg], \end{aligned} \tag{1.77}$$

que puede expresarse como en las Ecs. (1.7)-(1.9), para el contexto de Higgs. De esta manera, se ha corroborado que el procedimiento reproduce los resultados del caso de vacío reportados en la literatura.

Aunque en el caso del vacío no existe una dirección espacial privilegiada, se tiene la posibilidad de describir los estados de polarización de los BV con respecto a una dirección espacial arbitraria. Sin pérdida de generalidad, es posible elegir la dirección z de tal manera que, a través de un tensor antisimétrico, esté conectada con las otras dos direcciones. Entonces, la descomposición tensorial dada por la Ec. (1.27) sigue siendo válida. En este contexto, el tensor antisimétrico $\hat{F}^{\mu\nu}$ debe tratarse como un elemento auxiliar sin ningún significado físico.

Teniendo esto en mente, el resultado del vacío puede expresarse en términos de una base tipo Ritus proyectando el vértice efectivo como en la Ec. (1.29), dando

$$a^{++}_{1,\text{vac.}} = \mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}} \hat{L}_{1\mu} \hat{L}_{2\nu} = \frac{A_1}{|p_{1\perp}||p_{2\perp}|} \left((p_1 \cdot p_2)_\perp - \frac{p_2 \hat{F} p_1}{p_1 \cdot p_2} \right), \tag{1.78}$$

$$a^{++}_{2,\text{vac.}} = \mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}} \hat{L}^*_{1\mu} \hat{L}^*_{2\nu} = \frac{A_1}{|p_{1\perp}||p_{2\perp}|} \left((p_1 \cdot p_2)_\parallel - \frac{p_2 \hat{F}^* p_1}{p_1 \cdot p_2} \right), \tag{1.79}$$

$$a^{+-}_{4,\text{vac.}} = \mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{L}_{1\mu} \hat{L}^*_{2\nu} + \hat{L}^*_{1\mu} \hat{L}_{2\nu} \right) = -\frac{\sqrt{2} A_1}{|p_{1\perp}||p_{2\perp}|} \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left(p_2 \hat{F}^* p_1 \right). \tag{1.80}$$

Nótese que los coeficientes sólo dependen de A_1, como era de esperarse.

Siguiendo la Ec. (1.28), se tiene que la amplitud puede expresarse como

$$\sum_{\lambda_1=\pm1} \sum_{\lambda_2=\pm1} |\mathcal{M}_{\text{vac.}}|^2 = |a^{++}_{1,\text{vac.}}|^2 + |a^{++}_{2,\text{vac.}}|^2 + |a^{+-}_{4,\text{vac.}}|^2 = 2|A_1|^2, \tag{1.81}$$

corroborando el resultado de la Ec. (1.19). Esta última igualdad necesita emplear las condiciones de capa de masa y la conservación de energía-momento para ser demostrada.

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, en la Ec. (1.68) es posible rastrear fácilmente los términos de la Ec. (1.59) que contribuyen al término divergente en la Ec. (1.69), éstos son

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}_{qB\,(I)} = &\frac{im}{2s} \Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} e^{(2)} \gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)} e^{(2)} \gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} e^{(2)} \gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right] \Bigg) \\ &+ \frac{im\; qB}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3\right)} \Bigg(- D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\nu e^{(3)}\right] + D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu \left(e^{(1)} + e^{(2)}\right) \gamma^\nu\right] \\ &\qquad - 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} \gamma^\nu_\perp\right] - 2\, Tr\left[\gamma^\mu_\perp e^{(2)} \gamma^\nu\right] \Bigg). \end{aligned} \tag{1.82}$$

A partir de esta ecuación se observa cómo el campo magnético divide los términos divergentes en estructuras paralelas y perpendiculares. Nótese que el campo magnético no da lugar a nuevas divergencias, es decir, todas ellas proceden exclusivamente del vacío como señala Schwinger [38].

Hasta este punto, se ha mostrado que las divergencias UV que se presentan en la interacción $VV\phi$ se pueden regularizar al trabajar en el esquema de regularización dimensional, es decir, son divergencias aparentes. Sin embargo, como la metodología presentada en este capítulo puede aplicarse a interacciones que realmente presenten un comportamiento UV divergente en el vacío, a continuación se esboza el proceso general para obtener las contribuciones magnéticas finitas.

En las Ecs. (1.68) y (1.82), los términos "problemáticos" en los casos de vacío y campo magnético ya están aislados, restando los términos divergentes regularizados a campo magnético cero se puede obtener la parte finita [82, 83]

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB,\text{regularizado}} = \mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB} - \mathcal{N}^{\mu\nu}_{\text{vac.}} = (\mathcal{N}^{\mu\nu}_{qB} + \text{términos finitos}) - \mathcal{N}^{\mu\nu}_{\text{vac.}}, \tag{1.83}$$

donde se han definido

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{\mu\nu}_{qB} =& hg^2 \left(-i\right)^{D_\perp + D/2+1} \frac{|qB|^{D_\perp/2}}{2^D \pi^{D/2}} \int dv_1\ dv_2\ dv_3\ \delta(1 - v_1 - v_2 - v_3) \\ &\times \int_0^\infty ds\ s^{2-D_\parallel/2} \left(\frac{\text{sign}\left(qB\right)}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}\right)^{D_\perp/2} \frac{1}{\mathrm{c}_1{}^2\mathrm{c}_2{}^2\mathrm{c}_3{}^2} \\ &\times e^{is\left(v_1 v_3 p_{1\parallel}^2 + v_2 v_3 p_{2\parallel}^2 + v_1 v_2 w_\parallel^2 - m^2\right)} e^{-\frac{i}{qB}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3 p_{1\perp}^2 + \mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 p_{2\perp}^2 + \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 w_\perp^2 + 2\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 p_2 \hat{F} p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}} N^{\mu\nu}_{qB}\end{aligned} \tag{1.84}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{\mu\nu}_{\text{vac.}} =& -hg^2 \left(-i\right)^{D/2+1} \frac{1}{2^D \pi^{D/2}} \int dv_1\ dv_2\ dv_3\ \delta(1 - v_1 - v_2 - v_3) \\ &\times \int_0^\infty ds\ s^{2-D/2}\ e^{is\left(v_1 v_3 p_1^2 + v_2 v_3 p_2^2 + v_1 v_2 w^2 - m^2\right)} N^{\mu\nu}_{\text{vac.}},\end{aligned} \tag{1.85}$$

donde la omisión del subíndice I hace referencia a las contribuciones completas al proceso.

A continuación, el análisis presentado en esta sección dará una idea de cómo tratar los términos divergentes en dos importantes regiones ampliamente utilizadas en la literatura: las regiones de intensidad de campo magnético intenso y débil.

Capítulo 2

Decaimiento de un pión neutro mediante emisión de fotones en presencia de un campo magnético externo

En el presente capítulo se estudia el efecto de un campo magnético externo en la tasa de decaimiento de un pión neutro mediante emisión de fotones. Para ello, se calcula la contribución dominante a la amplitud $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ en presencia de un campo magnético homogéneo de intensidad arbitraria usando la metodología desarrollada en el Capítulo 1. Además, se discuten y analizan distintas aproximaciones (de intensidad de campo magnético) tomando en cuenta que existe una jerarquía entre las distintas escalas de energía involucradas, dependiendo del contexto físico en el que se de el proceso.

2.1. Justificación

Uno de los temas más recurrentes en cualquier rama de la física son las simetrías. Su papel en la física de partículas y, en general, en cualquier teoría cuántica de campos es de suma importancia.

Las simetrías, y sus patrones de "ruptura", proporcionan herramientas generales para clasificar tanto a las partículas fundamentales como a las compuestas. Imponen restricciones a las ecuaciones de movimiento, explican diversas leyes de conservación, las degeneraciones en distintos estados de vacío, las jerarquías de masas, entre otros aspectos. En resumen, el entendimiento de las simetrías ofrece una visión más profunda de los procesos observados en la naturaleza y permite un enfoque sistemático en la construcción de modelos en la física de partículas elementales [33, 84].

Sin embargo, la ausencia de ciertas simetrías también puede tener un impacto igualmente significativo. Este es el caso cuando la simetría está presente en el Lagrangiano clásico, pero desaparece en la teoría cuántica. A este tipo de simetrías ausentes se les denomina anómalas.

Es un hecho bien conocido que simetrías globales continuas implican corrientes conservadas, según el teorema de Noether. Si una simetría es anómala, entonces no es realmente una simetría y la corriente asociada no se conserva. Esta situación tiene consecuencias graves para teorías en las que la corriente se acopla a un bosón vectorial no masivo, como la electrodinámica cuántica (QED) o una teoría de Yang-Mills, por ejemplo, las identidades de Ward pueden producir polarizaciones longitudinales no físicas y violar unitariedad [84]. Por lo tanto, en una teoría cuántica unitaria, las simetrías de norma deben estar libres de anomalías. Este es un requisito fundamental para una teoría cuántica consistente. Por ejemplo, en el Modelo Estándar, esto obliga a que la carga eléctrica esté cuantizada y a que las cargas de quarks y leptones estén relacionadas [84].

Las anomalías de simetrías asociadas a bosones de norma se denominan anomalías de norma. Si una simetría no es de norma, no ocurre nada terriblemente grave si es anómala. Es decir, las anomalías globales no conducen a incoherencias (la expresión ”sin anomalías”se refiere únicamente a la ausencia de anomalías de norma) [84]. De hecho, hay muchas anomalías globales en el Modelo Estándar. Por ejemplo, el problema CP de la interacción fuerte [85] o la conservación del número bariónico, es decir, la simetría que impide que los quarks se conviertan en antiquarks. De hecho, la violación del número bariónico es una condición necesaria para explicar porqué la materia predomina sobre la antimateria en el Universo [86].

La historia de las anomalías comenzó con el problema de la tasa de decaimiento del pión neutro en un par de fotones, $\pi^0 \to \gamma\gamma$, su modo principal de decaimiento. El valor medido de la tasa de decaimiento parecía contradecir la conservación aproximada de la corriente axial-vectorial [87]. Cuantitativamente, la tasa de decaimiento (tiempo de vida medio) $\Gamma\left(\pi^0 \to \gamma\gamma\right) \simeq 7.76$ eV ($\tau \simeq 8.38 \times 10^{-17}$ s) es aproximadamente tres órdenes de magnitud mayor (menor) a la predicha ingenuamente a partir de una simetría axial $\mathrm{U}(1)_A$ en las ecuaciones de movimiento [88, 89]. El descubrimiento de la anomalía cuántica para esta simetría proporcionó una elegante solución a este enigma [23, 24].

Adler [23], Bell & Jackiw [24] encontraron que los diagramas de Feynman triangulares (ver Figura 2.1) modifican las ecuaciones de la conservación parcial de las corrientes axiales. Estos diagramas presentan anomalías debidas a una divergencia de la corriente axial-vectorial no encontrada en la cromodinámica cuántica (QCD) clásica, esto produce una corriente que no satisface las identidades de Ward [84, 88, 89]. Para fotones reales, el cálculo del diagrama triangular para el decaimiento del pión, dando cuenta de la corriente axial parcialmente conservada (PCAC) debido a la anomalía, ha proporcionado una confirmación de la hipótesis de los colores de los quarks [23, 84, 88].

La ausencia de la simetría quiral $\mathrm{U}(1)_A$ en un sistema cuántico puede expresarse formalmente como la no conservación de la corriente axial. En particular, en la QED, las corrientes de Noether asociadas a las simetrías vectorial y axial están dadas por

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \text{y} \quad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi, \tag{2.1}$$

respectivamente. Al usar las ecuaciones de movimiento es fácil mostrar que

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\mu j_5^\mu = 2im\,\bar{\psi}\gamma^5\psi. \tag{2.2}$$

con m la masa de los fermiones. Así, clásicamente, la simetría vectorial se conserva exactamente (lo cual es importante ya que es la simetría de norma) mientras que la simetría axial sólo se conserva en el límite no masivo.

Para conectar ésto con el cálculo del decaimiento de pión neutro, se puede interpretar el diagrama de Feynman de la Figura 2.1 como que el operador compuesto que se acopla el pión tiene un valor no nulo en presencia de un campo electromagnético de fondo [84]

$$\langle A| \bar{\psi}\gamma^5\psi |A\rangle = i\frac{e^2}{32\pi^2}\frac{1}{m}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}. \tag{2.3}$$

Ésto sólo es consistente si la corriente axial no se conserva en presencia de un campo electromagnético de fondo de acuerdo con [33, 84]

$$\langle A| \partial_\mu j_5^\mu |A\rangle = -\frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Esta es una relación de operadores no perturbativa por lo que no recibe correcciones radiativas, es decir, es correcta en todos los órdenes de la teoría de perturbaciones [90, 91]. La interpretación (semiclásica) más sencilla de la relación de anomalía es que los números de fermiones izquierdos y derechos, también válida para la teoría de norma no-abeliana $\mathrm{SU}(3)_c$ de interacciones fuertes, no se conservan por separado cuando $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu} \neq 0$ [33].

Con ésto, varias propiedades quirales de la materia relativista magnetizada han sido inspiradas en las anomalías, por ejemplo, posibles fenómenos de transporte anómalos que pueden manifestarse [33, 92, 93]. Los efectos quirales de este tipo pueden afectar a la física de las colisiones de iones pesados [92–97], estrellas compactas [98–100], el Universo temprano [101–103], entre otros. Particularmente, los decaimientos de piones en presencia de un campo magnético han sido un objeto de estudio recientemente [34, 35].

2.2. Modelo

Para describir las interacciones mesónicas y electromagnéticas que gobiernan la desintegración de un pión neutro a fotones, se considera un Lagrangiano del tipo Nambu-Jona-Lasinio [104]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}\left(i\not{D} - m\right)\Psi - G\left((\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2\right), \tag{2.5}$$

donde $\Psi(x) = (\psi_u(x), \psi_d(x))^T$ son los campos fermiónicos asociados a los quarks con masa m, $\vec{\tau}$ son las matrices de Pauli en el espacio de sabor y G es la constante de acoplamiento. La derivada covariante y el tensor electromagnético se definen como

$$D^\mu \equiv \partial^\mu + iqA^\mu(x) \quad \text{y} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x), \tag{2.6}$$

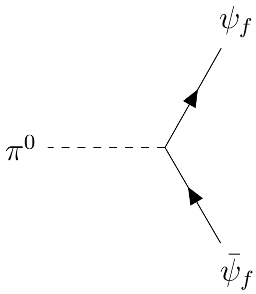
respectivamente, con $q \equiv \mathrm{diag}\,(2/3, -1/3)\,|e|$, la carga eléctrica de los quarks en términos de la carga elemental e.

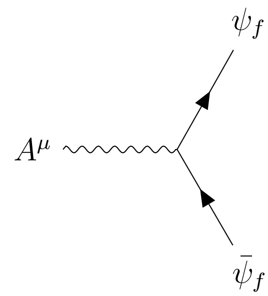
Una vez que este modelo se bosoniza por un procedimiento estándar [104], las interacciones quark-mesón surgen de forma natural de tal manera que en el Lagrangiano emergente la interacción entre quarks y mesones toma la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}\left(i\not{D} - m\right)\Psi - ig\bar{\Psi}\gamma^5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\;\Psi - \frac{1}{4G}\sigma^2 - \frac{1}{4G}\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}, \tag{2.7}$$

donde $\vec{\pi}(x) \equiv -2G\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi = (\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x))^T$ y $\sigma \equiv -2G\bar{\Psi}\Psi$ son los campos auxiliares bosonizados del pión y de la partícula sigma, respectivamente. Además, se ha añadido el acoplamiento pión-quark g al término de interacción, este acoplamiento puede expresarse en términos de la constante de desintegración del pión y la masa del quark constituyente, a través de la relación Goldberger-Treiman [104, 105].

A partir del Lagrangiano NJL bosonizado, Ec. (2.7), se sigue que las reglas de Feynman para la interacción entre el pión neutro y los quarks son las siguientes:



$$= -g\gamma^5,$$


$$= -iq_f\gamma^\mu, \tag{2.8}$$

donde el subíndice f denota el sabor de los quarks: “up” o “down”.

Dado que el Lagrangiano NJL en la Ec. (2.7) es un modelo efectivo válido hasta una cierta escala de energía Λ_{UV}, los propagadores dentro de este modelo deben reflejar que la escala máxima de energía es Λ_{UV}, y que no puede ser excedida por ningún proceso cuántico. Para tener en cuenta esta limitación energética, los propagadores se deben escribir como

$$S(y,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S(k) e^{-i\cdot(x-y)} \longrightarrow \int_{-\Lambda_{\text{UV}}}^{\Lambda_{\text{UV}}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S(k) e^{-i\cdot(x-y)}. \tag{2.9}$$

Los límites de integración originales pueden recuperarse eliminando los modos de alta energía en el propagador de la siguiente manera

$$S(y,x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S(k) e^{\frac{i}{\Lambda_{\text{UV}}}(k^2-m^2+i\epsilon)} e^{-i\cdot(x-y)}. \tag{2.10}$$

En el formalismo del tiempo propio de Schwinger, la ecuación anterior para el propagador fermiónico libre toma la siguiente forma [106, 107]

$$S(k) \longrightarrow i \int_{1/\Lambda_{\text{UV}}^2}^{1/\mu_{\text{IR}}^2} ds\, (\not{k} + m)\, e^{is(k^2-m^2+i\epsilon)}, \tag{2.11}$$

donde adicionalmente se ha introducido un corte infrarrojo μ_{IR}, que tiene en cuenta que el modelo no es válido en el régimen de muy baja energía debido a la falta de confinamiento [104, 107]

De forma general, el decaimiento de un pión neutro a través del proceso de emisión de fotones

$$\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma,$$

se describe mediante el elemento matricial invariante

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv \mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu(p_1,\lambda_1)\,\epsilon_\nu(p_2,\lambda_2)\,, \\ &= \langle p_\pi|(p_1,\mu,\lambda_1),(p_2,\nu,\lambda_2)\rangle\,\epsilon_\mu(p_1,\lambda_1)\,\epsilon_\nu(p_2,\lambda_2)\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde p_i y λ_i, con $i = 1, 2$, son los momentos y estados de polarización de los fotones, $\epsilon_\mu(p_i, \lambda_i)$ son los vectores de polarización que describen sus estados asintóticos y p_π es le momento del pión neutro. A partir de las reglas de Feynman dadas por la Ec. (2.8) se puede observar que no hay un acoplamiento directo entre piones y fotones, entonces las contribuciones de orden dominante a $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ provienen de correcciones radiativas similares al diagrama de Feynman mostrado en la Figura 2.1.

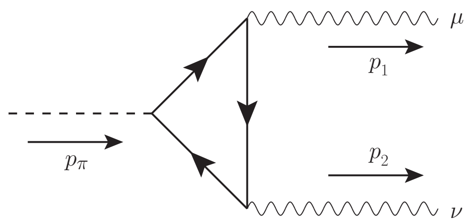


Figura 2.1: Diagrama de Feynman a un lazo que ilustra el proceso de decaimiento de un pión neutro a través de emisión de fotones.

A partir del análisis realizado en la Sección 1.3 donde, a partir de principios y simetrías fundamentales, se discute la construcción de las estructuras tensoriales en presencia de un campo magnético, es inmediato ver que la estructura tensorial para el vértice efectivo del decaimiento de un pión en presencia de un campo magnético externo para fotones reales está dada por

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB}(p_1, p_2) = c_1^{+-} \hat{L}_1^\mu \hat{L}_2^\nu + c_2^{+-} \hat{L}_1^{*\mu} \hat{L}_2^{*\nu} + \frac{c_4^{++}}{\sqrt{2}} \left(\hat{L}_1^\mu \hat{L}_2^{*\nu} + \hat{L}_1^{*\mu} \hat{L}_2^\nu \right), \tag{2.13}$$

donde los superíndices $\pm$ en los coeficientes c_k indican su comportamiento bajo las transformaciones de carga (primero) y paridad (segundo). Nótese que el único cambio respecto a la estructura dada por la Ec. (1.27) es el comportamiento ante paridad de los coeficientes c_k, ésto es debido a que el pión es una partícula pseudoescalar.

Con ésto se resalta la importancia de la metodología presentada para la obtención de la estructura tensorial del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo a partir de una base ortonormal y primeros principios. Tomando en cuenta el análisis de la Sección 1.3, el resultado de la Ec. (2.13) se obtuvo trivialmente al cambiar el signo de la transformación ante paridad.

Por otro lado, de acuerdo a la Ec. (1.6), la tasa de decaimiento diferencial para el proceso $\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma$ está dada por

$$d\Gamma = \frac{\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}|^2}{2E_\pi} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_\pi - p_1 - p_2\right), \tag{2.14}$$

donde p_π y E_π son el momento y la energía del pión inicial y E_i las energías de los fotones salientes.

Con la descomposición tensorial ortogonal para el vértice efectivo, dada por la Ec. (2.13), la tasa de decaimiento diferencial en presencia de un campo magnético toma la forma

$$d\Gamma_{qB} = \frac{\left(|c_1^{+-}|^2 + |c_2^{+-}|^2 + |c_4^{++}|^2\right)}{2E_\pi} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_\pi - p_1 - p_2\right), \tag{2.15}$$

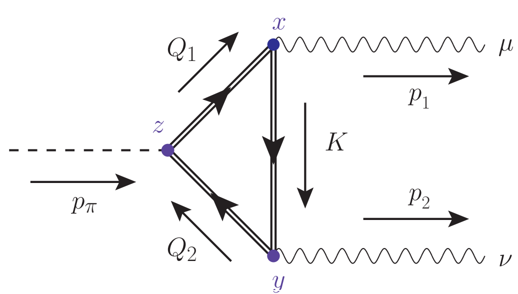
donde cada coeficiente puede obtenerse proyectando todo el vértice con su estructura tensorial correspondiente, es decir

$$\begin{aligned} c_1^{+-} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\hat{L}_{1\mu}\hat{L}_{2\nu}, \\ c_2^{+-} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\hat{L}_{1\mu}^{*}\hat{L}_{2\nu}^{*}, \\ c_4^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1\mu}\hat{L}_{2\nu}^{*}+\hat{L}_{1\mu}^{*}\hat{L}_{2\nu}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

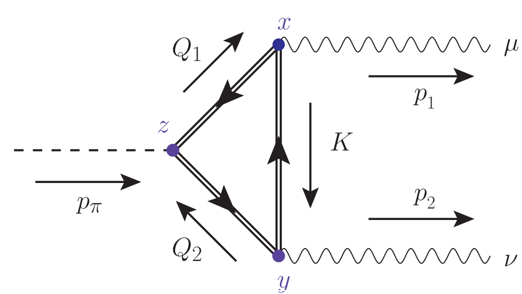
Entonces, una vez obtenidos los coeficientes, proyectando el vértice efectivo sobre la base ortogonal, las observables físicos se pueden calcular directamente.

2.3. Vértice efectivo a un lazo en presencia de un campo magnético

Para incorporar los efectos del campo magnético en el proceso de decaimiento del pión neutro, se utiliza el propagador vestido con los efectos del campo magnético dado por las Ecs. (1.36)-(1.38). En la Figura 2.2, se muestran los dos diagramas de Feynman "conjugados de carga" que contribuyen al proceso a un lazo. El efecto del campo magnético está representado por una línea doble en los propagadores fermiónicos.



(a) Diagrama I.



(b) Diagrama II.

Figura 2.2: Diagramas de Feynman a un lazo del decaimiento de un pión neutro mediante emisión de fotones en presencia de un campo magnético externo. El campo magnético externo se indica mediante la línea doble en los propagadores fermiónicos, las flechas internas indican el flujo de carga y las flechas externas el flujo de momento. x, y y z indican los puntos de interacción en el espacio de configuraciones.

Aplicando las reglas de Feynman, Ec. (2.8), a los diagramas mostrados en la Figura 2.2, se obtienen las siguientes expresiones analíticas

$$i\mathcal{M}_{qB_{(I)}}^{\mu\nu}(x,y,z) = -\mathcal{TR}\left[\left(-iq_f\gamma^{\mu}\right)S^{q^B}(x,z)\left(-g\gamma^5\right)S^{q^B}(z,y)\left(-iq_f\gamma^{\nu}\right)S^{q^B}(y,x)\right], \tag{2.17}$$

y

$$i\mathcal{M}_{qB_{(II)}}^{\mu\nu}(x,y,z) = -\mathcal{TR}\left[\left(-iq_f\gamma^{\mu}\right)S^{q^B}(x,y)\gamma^{\nu}\left(-iq_f\gamma^{\nu}\right)S^{q^B}(y,z)\left(-g\gamma^5\right)S^{q^B}(z,x)\right], \tag{2.18}$$

donde q_f y g son las contantes de interacción correspondientes. Además, el operador $\mathcal{TR}$ indica la traza funcional.

El vértice efectivo en el espacio de momentos se puede obtener de la siguiente manera

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB}(p_1, p_2, p_\pi) = \int d^4x\, d^4y\, d^4z\, \mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB}(x, y, z) e^{-ip_\pi \cdot z} e^{+ip_1 \cdot x} e^{+ip_2 \cdot y}. \tag{2.19}$$

Nótese que, a diferencia de la Ec. (1.43), en este caso no es necesario trabajar en una dimensión arbitraria D. Ésto se debe a que las teorías quirales no presentan divergencias en correcciones radiativas asociadas a diagramas de Feynman con una sola interacción axial [108].

Sustituyendo el propagador de la Ec. (1.36) en la Ec. (2.17), el diagrama I en el espacio de momento toma la forma

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1, p_2, p_\pi) =& igq_f^2 \int \frac{d^4K\, d^4Q_1\, d^4Q_2}{(2\pi)^4 (2\pi)^4 (2\pi)^4} \\ & \times \int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{-i(-p_1+Q_1-K)\cdot x} e^{-i(-p_2+K-Q_2)\cdot y} e^{-i(p_\pi+Q_2-Q_1)\cdot z} \\ & \times e^{i\frac{qB}{2}\left(x\hat{F}z + z\hat{F}y + y\hat{F}x\right)}\, Tr\left[\gamma^\mu \tilde{S}^{qB}(Q_1)\gamma^5 \tilde{S}^{qB}(Q_2)\gamma^\nu \tilde{S}^{qB}(K)\right], \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde Tr denota la traza sobre el espín y se usa la notación $a\hat{F}b \equiv a_\mu \hat{F}^{\mu\nu} b_\nu$.

Siguiendo el procedimiento presentado en el Capítulo 1, la integración sobre los espacios de configuración y momento de la Ec. (2.20) puede realizarse analíticamente, obteniéndose una expresión cerrada para la amplitud en presencia de un campo magnético homogéneo de intensidad arbitraria. El resultado final está dado por

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2) = -igq_f^2\frac{|q_fB|}{16\pi^2}&\int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_fB)}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}\right)e^{-ism_f^2}\\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1s_3p_{1\parallel}^2+s_2s_3p_{2\parallel}^2+s_1s_2p_{\pi\parallel}^2\right)}e^{-\frac{i}{q_fB}\frac{\mathrm{t_1t_3}p_{1\perp}^2+\mathrm{t_2t_3}p_{2\perp}^2+\mathrm{t_1t_2}p_{\pi\perp}^2+2\mathrm{t_1t_2t_3}p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}}\\
&\times\Bigg\{Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f\,e^{(1)}-\not{V}_1\right)\gamma^5\left(m_f\,e^{(2)}-\not{V}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f\,e^{(3)}-\not{V}_3\right)\right]\\
&\quad+\frac{im_f}{2s}\Bigg(-6\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right]+2\,Tr\left[\gamma_\parallel^\mu e^{(1)}\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right]\\
&\qquad\qquad+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5e^{(2)}\gamma_\parallel^\nu e^{(3)}\right]\Bigg)\\
&\quad+\frac{im_f\,q_fB}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)}\\
&\qquad\times\Bigg(2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5\gamma^\nu\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu e^{(3)}\right]\\
&\qquad\quad-2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5\gamma_\perp^\nu\right]-2\,Tr\left[\gamma_\perp^\mu\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu\right]\\
&\qquad\quad+\mathrm{t_1}\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5\gamma_\perp^\alpha\gamma^\nu\gamma_\perp^\beta\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\\
&\qquad\quad-\mathrm{t_2}\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma_\perp^\alpha\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu\gamma_\perp^\beta\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\\
&\qquad\quad+\mathrm{t_3}\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma_\perp^\alpha\gamma^5\gamma_\perp^\beta\gamma^\nu e^{(3)}\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

donde

$$
\not{V}_1 = \left(-\frac{s_3\not{p}_{1\parallel}+s_2\not{p}_{\pi\parallel}}{s}\right)e^{(1)}+\frac{\mathrm{t_3}\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t_2}\not{p}_{\pi\perp}-\mathrm{t_2t_3}\hat{\not{F}}p_2}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}},
\tag{2.22}
$$

$$
\not{V}_2 = \left(\frac{s_1\not{p}_{\pi\parallel}+s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)}+\frac{-\mathrm{t_3}\not{p}_{2\perp}-\mathrm{t_1}\not{p}_{\pi\perp}-\mathrm{t_1t_3}\hat{\not{F}}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}},
\tag{2.23}
$$

$$
\not{V}_3 = \left(\frac{s_1\not{p}_{1\parallel}-s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)}+\frac{-\mathrm{t_1}\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t_2}\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t_1t_2}\hat{\not{F}}p_\pi}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}},
\tag{2.24}
$$

con

$$
e^{(j)} \equiv \mathrm{c_j}e^{iq_fBs_j\Sigma_3},
\tag{2.25}
$$

y $\mathrm{c_j}\equiv\cos\left(q_fBs_j\right)$, $\mathrm{t_j}\equiv\tan\left(q_fBs_j\right)$ con s_j los parámetros de Schwinger de cada propagador fermiónico. El resultado para el diagrama II está dado por la Ec. (C.45).

Aunque la Ec. (2.21), y su análoga para el diagrama II Ec. (C.45), son un resultado exacto, las integrales restantes no pueden calcularse analíticamente debido a su intrincada forma. Para comprender mejor el efecto del campo magnético en la estructura analítica del vértice efectivo, en la siguiente sección se exploran tres regiones diferentes de intensidad de campo magnético y se discuten los escenarios físicos que comprende cada una de ellas.

2.3.1. Límite de campo cero

Antes de explorar las distintas regiones de intensidad de campo magnético, se verifica rápidamente que los resultados obtenidos reproducen el caso del vacío al tomar el límite $|qB| \longrightarrow 0$. De forma similar a la Sección 1.4.3 al tomar el comportamiento límite de las funciones trigonométricas

$$\cos(q_f B s_j) \approx 1, \quad \tan(q_f B s_j) \approx q_f B s_j \quad \text{y} \quad e^{(j)} \approx \mathbf{I},$$

la Ec. (2.21) se reduce a

$$\begin{aligned}
\lim_{|qB|\to 0} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB\,(I)}(p_1,p_2) = igq_f^2 \frac{1}{16\pi^2} & \int dv_1\ dv_2\ dv_3\ \delta(1-v_1-v_2-v_3) \\
& \times \int_{1/\Lambda^2_{\text{UV}}}^{1/\mu^2_{\text{IR}}} ds\ s^{2-D/2} e^{is\left(v_1 v_3 p_1^2 + v_2 v_3 p_2^2 + v_1 v_2 p_\pi^2 - m_f^2\right)} \\
& \times \Bigg\{ Tr\Big[\gamma^\mu \left(m_f + v_3 \not{p}_1 + v_2 \not{p}_\pi\right) \gamma^5 \left(m_f - v_1 \not{p}_\pi - v_3 \not{p}_2\right) \\
& \qquad \times \gamma^\nu \left(m_f - v_1 \not{p}_1 + v_2 \not{p}_2\right)\Big] \\
& \qquad + \frac{im_f}{2s}\Big(-8\,Tr\left[\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu\right]\Big)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

donde se ha realizado el cambio de variables $s_j = s v_j$ tal que $s \equiv s_1 + s_2 + s_3$, con $s \in [1/\Lambda^2_{\text{UV}}, 1/\mu^2_{\text{IR}}]$ y $v_j \in [0,1]$ de tal forma que se cumpla la relación $v_1+v_2+v_3 = 1$. Para resaltar la similitud del resultado anterior con la Ec. (1.68), se ha dejado expresada la dimensión como D a pesar de que se está trabajando en 4 dimensiones. Con ello, se puede identificar un factor global $s^{2-D/2}$ de forma explícita que, de forma práctica, es 1.

El último término de la Ec. (2.26) muestra una aparente divergencia logarítmica debida al factor $\frac{1}{s}$ extra. En realidad este término es nulo

$$N^{\mu\nu}_{\text{vac.}(I)} = \frac{im_f}{2s}\Big(-8\,Tr\left[\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu\right]\Big) = 0, \tag{2.27}$$

debido a que la presencia de la matriz γ^5 anula la traza. Ésto corrobora la aseveración hecha previamente de que los diagramas con sólo una interacción axial no presentan divergencias ultravioletas [108].

Las integrales sobre la variable s en la Ec. (2.26) se pueden identificar con representaciones integrales de la funciones Gama incompletas [80]

$$\int_{1/X}^{\infty} s^{n-\frac{D}{2}} e^{-i\Delta_m^2 s} ds = \left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D}{2}-(n+1)} \Gamma\left(n+1-\frac{D}{2}, \frac{\Delta_m^2}{X}\right), \tag{2.28}$$

$$\int_{0}^{1/X} s^{n-\frac{D}{2}} e^{-i\Delta_m^2 s} ds = \left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D}{2}-(n+1)} \gamma\left(n+1-\frac{D}{2}, \frac{\Delta_m^2}{X}\right), \tag{2.29}$$

de tal forma que

$$\int_{1/\Lambda_{\rm UV}^2}^{1/\mu_{\rm IR}^2} s^{n-\frac{D}{2}} e^{-i\Delta_m^2 s} ds = \left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D}{2}-(n+1)} \left[\Gamma\left(n+1-\frac{D}{2}\right) - \Gamma\left(n+1-\frac{D}{2}, \frac{\Delta_m^2}{\mu_{\rm IR}^2}\right) \right.$$
$$\left. - \gamma\left(n+1-\frac{D}{2}, \frac{\Delta_m^2}{\Lambda_{\rm UV}^2}\right)\right], \tag{2.30}$$

con $\varDelta_m^2 \equiv m_f^2 - v_1 v_3 p_1^2 - v_2 v_3 p_2^2 - v_1 v_2 p_\pi^2$, dando como resultado

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}(I)}(p_1,p_2) = igq_f^2 \frac{1}{16\pi^2} \int & dv_1\ dv_2\ dv_3\ \delta(1-v_1-v_2-v_3) \\ & \times \frac{1}{i\Delta_m^2}\left[\Gamma\left(1\right) - \Gamma\left(1, \frac{\Delta_m^2}{\mu_{\rm IR}^2}\right) - \gamma\left(1, \frac{\Delta_m^2}{\Lambda_{\rm UV}^2}\right)\right] \\ & \times \Bigg\{ Tr\Big[\gamma^\mu\left(m_f + v_3 \not{p}_1 + v_2 \not{p}_\pi\right)\gamma^5 \left(m_f - v_1\not{p}_\pi - v_3\not{p}_2\right) \\ & \qquad \times \gamma^\nu\left(m_f - v_1\not{p}_1 + v_2\not{p}_2\right)\Big]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde ya se ha evaluado $D = 4$. Nótese que ninguna de las funciones Gamma exhiben divergencias.

Considerando partículas externas reales, que cumplen con las condiciones de capa de masa

$$p_1^2 = p_2^2 = 0 \quad \text{ y } \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{p_\pi^2}{2}, \tag{2.32}$$

las funciones Gamma incompletas pueden aproximarse por su comportamiento alrededor del punto relevante del estudio, que es

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_m^2}{\Lambda_{UV}^2} &= \frac{m_f^2 - v_1 v_2 m_\pi^2}{\Lambda_{UV}^2} \sim -v_1 v_2 \frac{m_\pi^2}{\Lambda_{UV}^2}, \\ \frac{\Delta_m^2}{\mu_{IR}^2} &= \frac{m_f^2 - v_1 v_2 m_\pi^2}{\mu_{IR}^2}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Es decir, hay que comparar las masas de las partículas involucradas con los cortes de la teoría. Una vez hecho esto, las integrales restantes sobre los parámetros v_1 y v_2 puede realizarse de forma similar a la Sección 1.4.3.

Al tomar los límites $\Lambda_{UV} \longrightarrow \infty$ y $\mu_{IR} \longrightarrow 0$, la Ec. (2.31) toma la forma

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}(I)}(p_1,p_2) = igq_f^2 \frac{m_f m_\pi^2}{\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta} \int_0^1 dv_1 \int_0^{1-v_1} dv_2\ \frac{1}{\tau - 4v_1 v_2}, \tag{2.34}$$

donde adicionalmente se ha realizado la traza sobre espines, la integral sobre el parámetro v_3, se han implementado las condiciones de capa de masa, Ec. (2.32), y se ha introducido la notación $\tau \equiv 4m_f^2/m_\pi^2$. La Ec. (2.34) es consistente con la Ec. (30.9) en la referencia [84].

Similarmente a las Ecs. (1.73)-(1.77), el resultado se puede expresar en términos de las funciones polilogarítmicas Li_2. Sumando las contribuciones de ambos diagramas en la Figura 2.2, idénticas en el límite de campo cero, el resultado final para el vértice efectivo en el vacío está dado por

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{\text{vac.}}(p_1,p_2) = gq_f^2\frac{m_f m_\pi^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_{1\alpha}p_{2\beta}\left[\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\tau}}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{1-\sqrt{1-\tau}}\right)\right]. \tag{2.35}$$

Por otro lado, el primer resultado correcto para la tasa de decaimiento del pión neutro a un par de fotones fue calculada por Steinberger en 1949 [109]. El modelo consistía en un acoplamiento directo entre el pión y el protón, de manera que los fermiones dentro del lazo en los diagramas de Feynman, ver Figura 2.1, son protones. En dicho caso $m_f = m_p \gg m_\pi$, de tal forma que es posible ignorar la masa del pión. Con ello, la integral de la Ec. (2.34) se vuelve trivial, dando como resultado final para la amplitud de probabilidad del decaimiento de un pión neutro a dos fotones

$$\mathcal{M}_{\text{vac.}} = ge^2\frac{1}{4\pi^2 m_p}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_{1\alpha}p_{2\beta}\epsilon^*_\mu\left(p_1,\lambda_1\right)\epsilon^*_\nu\left(p_2,\lambda_2\right), \tag{2.36}$$

que es el resultado reportado en la literatura [84,109]. Ésto corrobora que el límite de campo cero es correcto.

Para calcular de forma explícita el elemento de matriz $\mathcal{M}$ dado por la Ec (2.36) es necesario conocer la constante de acoplamiento g. En el modelo de Steinberger, el acoplamiento del pión neutro con los protones está dado por $g = m_p/F_\pi$, donde F_π es la constante de desintegración del pión que se puede obtener a partir de los decaimientos leptónicos (por ejemplo: $\pi^- \longrightarrow e^-\bar{\nu}_e$ y $\pi^- \longrightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu$), y es de gran importancia para la física hadrónica de bajas energías [110,111]. De ésta forma, la tasa total de decaimiento se puede obtener a partir de la Ec. (1.6) dando como resultado

$$\Gamma\left(\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma\right) = \frac{\alpha_e^2}{64\pi^3}\frac{m_\pi^3}{F_\pi^2} = 7.77\ \text{eV}, \tag{2.37}$$

donde α_e es la constante de estructura fina. Este resultado es independiente de la masa de los fermiones dentro del lazo, en este caso el protón, y da un resultado muy cercando al valor determinado experimentalmente $7.802 \pm 0.052 \pm 0.105$ eV [69,112].

Aunque el resultado calculado por Steinberger mediante un lazo de protones es correcto, ¿se obtendría el mismo resultado trabajando con una teoría donde los grados de libertad son quarks?

Recordando que el correlador de la corriente axial es una relación no perturvativa, cuando se trabaja en el límite quiral (piones no masivos) la tasa de decaimiento del pión neutro a fotones a un lazo es exacta, es decir, no recibe correcciones de orden superior. Además, como la Ec. (2.37) no depende de la masa de los fermiones dentro del lazo, no es necesario conocer la masa de los quarks para repetir el cálculo en el nuevo modelo. En otras palabras, se puede tomar a Ψ como el doblete protón-neutrón o como el doblete de quarks “up” y “down”.

Al tomar a Ψ como el doblete (u,d), se tienen dos contribuciones a al elemento de matriz $\mathcal{M}$ en la Ec. (2.36) y cada una de ellas es proporcional al cuadrado de la respectiva carga eléctrica del quark, $q \equiv \mathrm{diag}\left(2/3,-1/3\right)|e|$. Adicionalmente, se debe de sumar sobre los colores de los quarks. Nótese que la contribución del quark "up" es similar a la del portón ya que están en la entrada superior del doblete y tienen el mismo factor de isoespín $(+1/2)$, mientras que para el quark "down" tiene el signo opuesto por estar en la entrada inferior $(-1/2)$. Esto da como resultado que la tasa de decaimiento, dada por la Ec. (2.37), se deba de multiplicar por el factor

$$N_c^2 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 - \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right]^2 = \frac{N_c^2}{9}. \tag{2.38}$$

Como en resultado de la Ec. (2.37) ya es correcto, se puede concluir que el número de colores es tres, $N_c = 3$. Históricamente esta fue una de las primeras constricciones para la teoría de las interacciones fuertes [23] y es una forma simple de corroborar el número de colores en la QCD.

2.4. Comportamiento del vértice efectivo en distintas regiones de intensidad de campo magnético

2.4.1. Sobre la virtualidad de las partículas de lazo y las distintas regiones de intensidad de campo magnético

En la sección anterior se ha obtenido la amplitud modificada por un campo magnético externo de intensidad arbitraria. Aunque la expresión resultante es general, no es posible seguir avanzando en esa dirección debido a que las integrales restantes no se pueden calcular analíticamente. En este punto, se suelen realizar aproximaciones para obtener alguna idea sobre el efecto del campo magnético en el proceso físico.

Las regiones de intensidad de campo magnético más recurrentes en la literatura son las de campo intenso y campo débil que se obtienen al imponer que la intensidad de campo magnético es mucho mayor o menor que la masa del fermión en el lazo, ésto es, $|qB| \gg m^2$ ó $|qB| \ll m^2$, respectivamente. Sin embargo, existen otras escalas energéticas que juegan un rol importante en la aproximación, por ejemplo, los momentos invariantes p_i^2 de las partículas externas (que para partículas reales son las masas invariantes) o el momento transverso $p_{i\perp}$. A continuación se realiza un análisis detallado de la forma en que todas estas escalas de energía diferentes se comparan entre sí. Para ello, considérese la siguiente expresión genérica

$$\int_{1/\Lambda_{\mathrm{UV}}^2}^{1/\mu_{\mathrm{IR}}^2} ds\ F\left(qB, s, p_i^2, p_{i\perp}, m_i\right), \tag{2.39}$$

que encapsula todas las escalas de energía implicadas en las Ecs. (1.59) y (2.21).

Nótese que en el formalismo del tiempo propio de Schwinger, una vez realizada la integración sobre los momentos del lazo de forma Gaussiana, los cortes de la teoría se transfieren a los límites de integración sobre el parámetro s. Así, el parámetro de Schwinger codifica información sobre la energía de la partícula dentro de la fluctuación cuántica que contribuye a la integral, es decir, el intervalo de integración del parámetro s determina las energías de las partículas dentro del lazo. En este punto, una pregunta natural es: ¿los cortes de la teoría están relacionado de alguna manera con las otras escalas de energía para diferentes regiones de intensidad de campo magnético?

Para responder la pregunta anterior, y resaltar el papel que desempeña cada una de las escalas de energía, considérese por simplicidad un proceso en el que no interviene ningún momento de partículas externas. Un buen ejemplo de este tipo de interacciones podría ser el trabajo sobre catálisis magnética [41], donde se estudiaron los efectos de un campo magnético intenso sobre el condensado de quarks. En ese trabajo, dado que los autores estaban interesados en estudiar los efectos del campo magnético sobre el estado fundamental a través del condensado fermiónico, introdujeron un corte UV en el límite inferior en la integración sobre el parámetro s

$$\int_{1/\Lambda_{\mathrm{UV}}^2}^{1/\mu_{\mathrm{IR}}^2} ds\ F\left(qB, s, m\right) \longrightarrow \int_{1/\Lambda_{\mathrm{qB}}^2}^{1/\mu_{\mathrm{IR}}^2} ds\ F\left(qB, s, m\right), \tag{2.40}$$

donde Λ_{qB} es una escala de energía a partir de la cual la relación $|qB|s \gg 1$ se cumple en el intervalo de integración sobre s. De esta forma, lograron mantener las contribuciones principales de las funciones hiperbólicas[1] dadas por su comportamiento asintótico y, por tanto, extraer el valor del condensado de quarks en el límite de campo magnético intenso. En otras palabras, el comportamiento en el límite de campo magnético intenso se logra extraer imponiendo un nuevo corte UV, Λ_{qB}.

Por otro lado, como se ha mencionado anteriormente, los límites de integración están relacionados con la energía que fluye en el lazo cuántico, por lo que, con la redefinición de la región de integración sobre s en la Ec. (2.40), los autores se limitaron a analizar el efecto del campo magnético en lazos cuánticos de partículas con energía inferior a Λ_{qB}. Con esto en mente, la región de campo magnético intenso requiere que la energía de la partícula del lazo no exceda de Λ_{qB}.

Nótese que el corte UV asociado a la regularización de las divergencias UV del vacío, Λ_{UV}, es diferente a Λ_{qB}, ya que el primero está asociado a los límites energéticos de la teoría del vacío y el segundo surge de la comparación con la intensidad del campo magnético $|qB|$. Además, se debe satisfacer que $\Lambda_{\mathrm{UV}} > \Lambda_{\mathrm{qB}}$. Vale la pena señalar que, en este régimen, las divergencias UV del vacío no están presentes ya que la región $s \longrightarrow 0$ se ha retirado.

Los hallazgos, sobre el efecto de un campo magnético intenso sobre el condensado de quarks, apuntan a un aumento en el apareamiento fermión-antifermión por el fuerte campo magnético, al que se identificó como el fenómeno de catálisis magnética [41]. Dado que la partícula en el lazo tiene una masa pequeña, en comparación con la intensidad del campo magnético, estas partículas experimentan una reducción dimensional debido al campo magnético, lo que potencia el apareamiento de partículas de tal manera que el condensado de quarks crece linealmente con el campo magnético. Este fenómeno también fue encontrado con el enfoque del nivel más bajo de Landau (LLL)[2], en el cual las partículas del lazo no tienen suficiente energía para acceder a niveles de Landau más altos ya que la separación energética entre dos niveles está dada por $\sqrt{|qB|}$ y la energía de las partículas está acotada por Λ_{qB}, lo que implica que $|qB| > \Lambda_{\mathrm{qB}}^2$.

[1]En la forma explícita de la función $F\left(qB, s, m\right)$.

[2]En este modelo, la energía de la partícula se vuelve discreta en términos de los llamados niveles de Landau

Hasta este punto, pareciera que el límite de campo intenso no requiere una comparación directa entre la masa de las partículas del lazo y el campo magnético, ahora se mostrará que es necesario imponer una jerarquía entre ellos. Luego de una simple manipulación, el lado izquierdo de la Ec. (2.40) se puede separar de la siguiente forma

$$\int_{m^2/\Lambda_{\rm UV}^2}^{m^2/\mu_{\rm IR}^2} ds\ \tilde{F}\left(\frac{qB}{m^2},s\right)=\int_{m^2/\Lambda_{\rm UV}^2}^{m^2/\Lambda_{\rm qB}^2} ds\ \tilde{F}\left(\frac{qB}{m^2},s\right)+\int_{m^2/\Lambda_{\rm qB}^2}^{m^2/\mu_{\rm IR}^2} ds\ \tilde{F}\left(\frac{qB}{m^2},s\right), \tag{2.41}$$

donde adicionalmente se ha reescalado la variable $s \longrightarrow m^2 s$. La contribución principal de la integral completa depende de la jerarquía entre m^2 y $\Lambda_{\rm qB}^2$. En el caso cuando $\Lambda_{\rm qB}^2 \gg m^2$, el segundo término del lado derecho de la Ec. (2.41) es la contribución principal de la integral; entonces, la Ec. (2.40) se puede tomar como una igualdad (tal como se hace en la referencia [41]). En esta región se satisface que $|qB| \gg m^2$, que es la forma usual de definir el límite de campo magnético intenso en la literatura.

De forma similar, el comportamiento en la región de campo magnético débil debe considerar un nuevo corte IR, $\mu_{\rm qB} > \mu_{\rm IR}$, a partir del cual la relación $|qB|s \ll 1$ es válida a lo largo del intervalo de integración sobre el parámetro s

$$\int_{1/\Lambda_{\rm UV}^2}^{1/\mu_{\rm IR}^2} ds\ F\left(qB,s,m\right)\longrightarrow\int_{1/\Lambda_{\rm UV}^2}^{1/\mu_{\rm qB}^2} ds\ F\left(qB,s,m\right). \tag{2.42}$$

Es decir, la región de campo magnético débil requiere que la energía de la partícula dentro del lazo sea mayor a $\mu_{\rm qB}$. Se están cortando las fluctuaciones cuánticas de baja energía (infrarrojas). Una vez hecho esto, el enfoque comúnmente seguido en la literatura para la región de campo débil es realizar algún tipo de expansión de Taylor sobre qBs para calcular analíticamente la integración sobre el parámetro s. [41, 49–53, 55, 56].

Por otro lado, realizando una separación similar a la hecha en la Ec. (2.41), el lado derecho de la Ec. (2.42) toma la forma

$$\int_{m^2/\Lambda_{\rm UV}^2}^{m^2/\mu_{\rm IR}^2} ds\ \tilde{F}\left(\frac{qB}{m^2},s\right)=\int_{m^2/\Lambda_{\rm UV}^2}^{m^2/\mu_{\rm qB}^2} ds\ \tilde{F}\left(\frac{qB}{m^2},s\right)+\int_{m^2/\mu_{\rm qB}^2}^{m^2/\mu_{\rm IR}^2} ds\ \tilde{F}\left(\frac{qB}{m^2},s\right). \tag{2.43}$$

Entonces, llevando a cabo un análisis análogo al de la Ec. (2.41), se concluye que el primer término en el lado derecho de la Ec. (2.43) es la principal contribución a la integral cuando la jerarquía entre las escalas de energía es la siguiente $m^2 \gg |qB|$, $m^2 \gg \mu_{\rm qB}^2$ y $\mu_{\rm qB}^2 > |qB|$.

En términos de la metodología de los niveles de Landau, las partículas que se consideran en el régimen de campo débil tienen la energía suficiente para transitar entre niveles de Landau arbitrarios, $|qB| < \mu_{\rm qB}^2$. Entonces, no hay restricciones sobre la ocupación y todos los niveles deben de ser considerados.

La discusión presentada en esta sección revela que las energías de las partículas del lazo son relevantes y definen los diferentes regímenes de intensidad de campo magnético. Además, se ha abordado el enfoque a partir del cuál se obtienen los diferentes regímenes de intensidad de campo magnético imponiendo una jerarquía entre las distintas escalas de energía: m, $|qB|$, $\mu_{\rm qB}$ y $\Lambda_{\rm qB}$. Por supuesto, si la teoría del vacío sólo es válida para determinadas energías, entre $\mu_{\rm IR}$ y $\Lambda_{\rm UV}$, las escalas de energía mencionadas deben estar dentro de esos límites.

A continuación, se analiza el comportamiento del vértice efectivo en las regiones de campo magnético intenso y débil.

2.4.2. Límite de campo intenso

Teniendo en cuenta que en la Ec. (2.21) las escalas físicas son los momentos de fotones p_i, la masa de los quarks m_f y intensidad de campo magnético $|q_fB|$, se pueden hacer diferentes aproximaciones dependiendo de la jerarquía de escalas entre estas cantidades.

Como se discutió anteriormente, el régimen de campo magnético intenso suele obtenerse imponiendo que la intensidad del campo magnético sea mucho mayor que la masa del fermión $|q_fB| \gg m_f^2$. Sin embargo, hay otra escala de energía que juega un papel importante en la estructura efectiva del vértice, el momento perpendicular los fotones $p_{i\perp}$, que puede verse en la Ec. (2.21) donde hay un factor exponencial que implica una combinación del momento perpendicular y el campo magnético, dado por

$$\exp\left[-\frac{i}{q_fB}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3p_{1\perp}^2+\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3p_{2\perp}^2+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2p_{\pi\perp}^2+2\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}\right], \tag{2.44}$$

por lo que cualquier aproximación que se realice sobre este término debe hacerse con cuidado [55, 56]. En el caso particular cuando la intensidad del campo magnético es la escala de energía más alta

$$m_f^2, |p_{i\perp}|^2 \;\ll\; |q_fB|$$

la exponencial en la Ec. (2.44), puede aproximarse trivialmente a uno.

Para estudiar el límite de campo magnético intenso en la Ec. (2.21), siguiendo la referencia [41], se traslada la expresión al espacio Euclideano realizando las sustituciones $p^0 \longrightarrow ip_4$ con p cualquiera de los momentos, $\gamma^0 \longrightarrow i\gamma_4$, $\gamma_i \equiv \gamma^i$ con $i = 1, 2, 3$ y $s_j \longrightarrow -is_j$. Una vez realizadas las sustituciones, el comportamiento asintótico de las funciones trigonométricas hiperbólicas en esta región

$$\tanh(|q_fB|s_j) \longrightarrow 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{sech}(|q_fB|s_j) \longrightarrow 0,$$

da el vértice efectivo en el límite de campo magnético intenso

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{qB\,(I)}_{E\;\mu\nu}(p_1,p_2) = -gq_f^2\frac{|q_fB|}{8\pi^2}&\int dv_1\;dv_2\;dv_3\;\delta(1-v_1-v_2-v_3)\\ &\times\int_{1/\Lambda_{qB}^2}^{1/\mu_{IR}^2} ds\;s^{2-D_\parallel/2}e^{-s\left(v_1v_3p_{1\parallel}^2+v_2v_3p_{2\parallel}^2+v_1v_2p_{\pi\parallel}^2+m_f^2\right)}\\ &\times\Bigg\{Tr\Big[\gamma_{\parallel\mu}\left(m_f-v_3\not{p}_{1\parallel}-v_2\not{p}_{\pi\parallel}\right)\gamma_5\left(m_f+v_1\not{p}_{\pi\parallel}+v_3\not{p}_{2\parallel}\right)\\ &\qquad\times\gamma_{\parallel\nu}\left(m_f+v_1\not{p}_{1\parallel}-v_2\not{p}_{2\parallel}\right)\Delta_+\Big]\\ &\qquad-\frac{m_f}{2s}\bigg(-8\,Tr\left[\gamma_{\parallel\mu}\gamma_5\gamma_{\parallel\nu}\Delta_+\right]\bigg)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

donde el subíndice E hace referencia al espacio Euclideano con $p^2 \equiv p_4^2 + \vec{p}^{\,2}$, y Λ_{qB} es el corte ultravioleta a partir del cual la intensidad del campo magnético es la escala de energía más alta. Δ_+ es uno de los proyectores de espín definidos como

$$\Delta_\pm \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} \pm i\,\mathrm{sign}(q_f B)\gamma_1\gamma_2\right), \tag{2.46}$$

que sintetizan el comportamiento del factor de interacción espín-campo magnético

$$e^{q_f B s_j \Sigma_3} = e^{|q_f B| s_j}\Delta_+ + e^{-|q_f B| s_j}\Delta_-, \tag{2.47}$$

en el límite de campo magnético intenso, en el espacio Euclidiano.

Nótese que en la Ec. (2.45) sólo aparece el proyector Δ_+, lo que indica que los fermiones con espín a lo largo de la dirección del campo magnético son los únicos que contribuyen al proceso. En consecuencia, el resultado se expresa sólo con estructuras paralelas. La ausencia de estructuras perpendiculares indica que los fermiones están constreñidos al LLL, este fenómeno es la reducción dimensional [41]. Vale la pena recordar que se está trabajando en 4 dimensiones pero se está escribiendo $D_\parallel$, en lugar de 2, para resaltar que las componentes paralelas son las únicas contribuciones.

Al comparar la expresión anterior con el caso del vacío, Ec. (2.26), se observa que las integrales restantes son muy similares. Entonces, la integración sobre el parámetro s de la Ec. (2.45) da como resultado

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{qB\,(I)}_{E\;\mu\nu}(p_1,p_2) = {}& -g q_f^2 \frac{|q_f B|}{8\pi^2}\int dv_1\; dv_2\; dv_3\; \delta(1-v_1-v_2-v_3)\\
&\times \Bigg\{ \left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D_\parallel}{2}-3}\left[\Gamma\left(3-\frac{D_\parallel}{2}\right) - \Gamma\left(3-\frac{D_\parallel}{2},\frac{\Delta_m^2}{\mu_{\mathrm{IR}}^2}\right) - \gamma\left(3-\frac{D_\parallel}{2},\frac{\Delta_m^2}{\Lambda_{\mathrm{qB}}^2}\right)\right]\\
&\quad\times\, Tr\big[\gamma_{\parallel\mu}\left(m_f - v_3\not{p}_{1\parallel} - v_2\not{p}_{\pi\parallel}\right)\gamma_5\left(m_f + v_1\not{p}_{\pi\parallel} + v_3\not{p}_{2\parallel}\right)\\
&\qquad\times \gamma_{\parallel\nu}\left(m_f + v_1\not{p}_{1\parallel} - v_2\not{p}_{2\parallel}\right)\Delta_+\big]\\
&\quad + \left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D_\parallel}{2}-2}\left[\Gamma\left(2-\frac{D_\parallel}{2}\right) - \Gamma\left(2-\frac{D_\parallel}{2},\frac{\Delta_m^2}{\mu_{\mathrm{IR}}^2}\right) - \gamma\left(2-\frac{D_\parallel}{2},\frac{\Delta_m^2}{\Lambda_{\mathrm{qB}}^2}\right)\right]\\
&\qquad\times 4m_f\, Tr\left[\gamma_{\parallel\mu}\gamma_5\gamma_{\parallel\nu}\Delta_+\right]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.48}$$

donde $\Delta_m^2 = m_f^2 + v_1 v_3 p_{1\parallel}^2 + v_2 v_3 p_{2\parallel}^2 + v_1 v_2 p_{\pi\parallel}^2$. Nótese que no hay divergencias en la Ec. (2.48) ya que la región $s \longrightarrow 0$ está excluida en el límite de campo fuerte.

La integración sobre el parámetro v_3 es inmediata, obteniendo

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{qB\,(I)}_{E\;\mu\nu}(p_1,p_2) = gq_f^2\frac{|q_fB|}{8\pi^2}\int_0^1 dv_1\int_0^{1-v_1}dv_2\left[\Gamma\left(2\right)-\Gamma\left(2,\frac{\Delta_m^2}{\mu_{\mathrm{IR}}^2}\right)-\gamma\left(2,\frac{\Delta_m^2}{\Lambda_{\mathrm{qB}}^2}\right)\right] \\ \times\frac{1}{\left(m_f^2+v_1(1-v_1-v_2)p_{1\parallel}^2+v_2(1-v_1-v_2)p_{2\parallel}^2+v_1v_2p_{\pi\parallel}^2\right)^2} \\ \times\, Tr\big[\gamma_{\parallel\mu}\left(m_f+(v_1-1)\,\not{p}_{1\parallel}-v_2\not{p}_{2\parallel}\right) \\ \times\,\gamma_5\left(m_f+v_1\not{p}_{1\parallel}+(1-v_2)\,\not{p}_{2\parallel}\right) \\ \times\,\gamma_{\parallel\nu}\left(m_f+v_1\not{p}_{1\parallel}-v_2\not{p}_{2\parallel}\right)\Delta_+\big], \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde adicionalmente se ha anulado el último término por cuestiones de traza. Como era de esperar, en el límite de campo magnético intenso, existe una dependencia lineal con el campo magnético que puede relacionarse con las contribuciones del LLL [41].

En el límite cuando $\mu_{\mathrm{IR}}\longrightarrow 0$, la expresión anterior toma la forma

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{qB\,(I)}_{E\;\mu\nu}(p_1,p_2) = gq_f^2\frac{|q_fB|}{8\pi^2}\int_0^1 dv_1\int_0^{1-v_1}dv_2\;\Gamma\left(2,\frac{\Delta_m^2}{\Lambda_{\mathrm{qB}}^2}\right) \\ \times\frac{1}{\left(m_f^2+v_1(1-v_1-v_2)p_{1\parallel}^2+v_2(1-v_1-v_2)p_{2\parallel}^2+v_1v_2p_{\pi\parallel}^2\right)^2} \\ \times\, Tr\big[\gamma_{\parallel\mu}\left(m_f+(v_1-1)\,\not{p}_{1\parallel}-v_2\not{p}_{2\parallel}\right) \\ \times\,\gamma_5\left(m_f+v_1\not{p}_{1\parallel}+(1-v_2)\,\not{p}_{2\parallel}\right) \\ \times\,\gamma_{\parallel\nu}\left(m_f+v_1\not{p}_{1\parallel}-v_2\not{p}_{2\parallel}\right)\Delta_+\big], \end{aligned} \tag{2.50}$$

donde se han usado las propiedades de las funciones Gamma incompletas. Considerando las partículas externas están en capa de masa y la jerarquía entre las escalas de energía en el límite de campo intenso $m_f^2, |p_{i\perp}|^2 \ll |q_fB|$, similarmente a la Ec. (2.33), la función Gamma incompleta puede aproximarse por su comportamiento alrededor del punto de estudio relevante

$$\frac{\Delta_m^2}{\Lambda_{qB}^2}\sim -v_1v_2\frac{m_\pi^2}{\Lambda_{qB}^2}, \tag{2.51}$$

donde el último resultado se obtuvo utilizando las condiciones de capa de masa, en el espacio Euclídeo, y considerando la jerarquía entre las escalas de energía en el límite de campo fuerte $m_f^2, |p_{i\perp}|^2 \ll |q_fB|$. En este punto está claro que hay que tener en cuenta otra comparación entre escalas de energía $m_\pi^2 \lesseqgtr |q_fB|$. Entonces, las integrales restantes sobre los parámetros v_1 y v_2 puede realizarse de forma similar al caso del vacío.

Por otro lado, partiendo del análisis para las estructuras tensoriales en el caso del vacío, la estructura de vértice efectivo en el límite de campo magnético intenso tendría la forma

$$\mathcal{M}^{qB}_{E\;\mu\nu} = \tilde{A}_1\delta_{\parallel\mu\nu}+\tilde{A}_2p_{1\parallel\mu}\,p_{2\parallel\nu}+\tilde{A}_3p_{1\parallel\nu}\,p_{2\parallel\mu}+\tilde{A}_4p_{1\parallel\mu}\,p_{1\parallel\nu}+\tilde{A}_5p_{2\parallel\mu}\,p_{2\parallel\nu}, \tag{2.52}$$

de forma similar a la Ec. (1.13). Proyectando la Ec. (2.52) sobre la base ortogonal (ver Ec. (1.29)), se observa que la única contribución a la amplitud proviene de fotones en el estado de polarización L^* (los vectores de polarización longitudinales L no cuentan con componentes paralelas mientas que los vectores de polarización transversales L^* sí).

No obstante, existe un régimen cinemático diferente que puede estudiarse cuando los momentos perpendiculares BV dejan de ser una escala de energía suave. En esta región, los fermiones adquieren dinámica perpendicular ya que la jerarquía entre escalas de energía se convierte en

$$m_f^2 \ll |q_f B| \lesssim |p_{i\perp}|^2,$$

lo que permite a los fermiones transitar hacia niveles de Landau superiores. En esta región cinemática la exponencial en la Ec. (2.44) ya no se puede aproximar a la unidad, sin embargo, estas configuraciones se suprimen exponencialmente por su comportamiento en espacio Euclidiano, ésto es

$$\exp\left[-\frac{1}{4|q_f B|}\left(|p_{1\perp}|^2 + |p_{2\perp}|^2 + |p_{\pi\perp}|^2 + i2\text{sign}(q_f B) p_2 \hat{F} p_1\right)\right]. \tag{2.53}$$

Nótese que la comparación entre distintas escalas de energía se puede encontrar de forma explícita como un cociente o tomarse de forma indirecta mediante el reescalamiento del parámetro s.

2.4.3. Aproximaciones de campo débil

En el trabajo realizado por Tsai y Erber [55, 56], en el que analizaron el efecto de un campo magnético sobre las contribución de alta virtualidad a la autoenergía del fotón en la QED, destacaron la importancia del papel desempeñado por los momentos de las partículas externas p_i y descubrieron que diferentes cinemáticas de partículas externas conducían a dos aproximaciones de campo magnético débil. Además, de acuerdo con las ideas planteadas en la Sección 2.4.1, los autores mostraron que la contribución de la región $s \longrightarrow \infty$ se suprime en el régimen de campo magnético débil. Es decir, se puede eliminar con seguridad el segundo término del lado derecho de la Ec. (2.43) y luego, si la teoría lo permite, tomar el límite $m^2/\mu_{\text{qB}}^2 \longrightarrow \infty$.

Como se discutió anteriormente, el régimen de campo débil se obtiene al considerar la intensidad del campo magnético como la escala de energía más baja

$$|q_f B| \ \ll \ m_f^2, \ |p_{i\perp}|^2.$$

Una vez más, el factor exponencial de la Ec. (2.44)

$$\mathcal{X}(q_f B, s, v_j, p_{i\perp}) \equiv \exp\left[-\frac{i}{q_f B}\frac{\text{t}_1\text{t}_3 p_{1\perp}^2 + \text{t}_2\text{t}_3 p_{2\perp}^2 + \text{t}_1\text{t}_2 p_{\pi\perp}^2 + 2\text{t}_1\text{t}_2\text{t}_3 p_2 \hat{F} p_1}{\text{t}_1\text{t}_2\text{t}_3 - \text{t}_1 - \text{t}_2 - \text{t}_3}\right], \tag{2.54}$$

debe de tratarse con cuidado ya que es una función de tres escalas de energía y cuyo comportamiento depende de la jerarquía entre m_f y $p_{i\perp}$. En cualquier caso, se puede realizar una expansión en serie de potencias sobre $q_f Bs$ en la Ec. (2.21) [55, 56], por lo que la forma general del vértice efectivo para las aproximaciones de campo débil es la siguiente

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2) = igq_f^2 \frac{1}{16\pi^2} &\int dv_1\ dv_2\ dv_3\ \delta(1-v_1-v_2-v_3) \\ &\times \int_0^\infty ds\ s^{2-D/2}\ e^{-ism_f^2} e^{is\left(v_1v_3p_1^2+v_2v_3p_2^2+v_1v_2p_\pi^2\right)} \\ &\qquad \times \mathcal{X}_{\text{bajo/alto}}(q_fB,s,v_j,p_{i\perp})\ K(q_fBs,v_i,p_{i\perp}), \end{aligned} \tag{2.55}$$

donde las funciones $\mathcal{X}_{\text{bajo/alto}}(q_fB,s,v_j,p_{i\perp})$ corresponden a las aproximaciones de campo débil con momento perpendicular bajo o alto, respectivamente y corresponden a distintas aproximaciones para la exponencial dada en la Ec. (2.54). La función $K(q_fBs,v_i,p_{i\perp})$ es un polinomio sobre q_fBs con la siguiente forma

$$\begin{aligned} K(q_fBs,v_i,p_{i\perp}) \approx &\left(1+\frac{(q_fB)^2 s^2}{3}\left(2v_1^2+2v_2^2+2v_3^2+v_2v_3+v_1\left(v_2+v_3\right)\right)\right) \\ &\times\Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f\mathcal{E}^{(1)}-\not{\mathcal{U}}_1\right)\gamma^5\left(m_f\mathcal{E}^{(2)}-\not{\mathcal{U}}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f\mathcal{E}^{(3)}-\not{\mathcal{U}}_3\right)\right] \\ &\quad + \frac{im_f}{2s}\Bigg(-6\,Tr\left[\gamma^\mu\mathcal{E}^{(1)}\gamma^5\mathcal{E}^{(2)}\gamma^\nu\mathcal{E}^{(3)}\right] \\ &\qquad + 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel\mathcal{E}^{(1)}\gamma^5\mathcal{E}^{(2)}\gamma^\nu\mathcal{E}^{(3)}\right] \\ &\qquad + 2\,Tr\left[\gamma^\mu\mathcal{E}^{(1)}\gamma^5\mathcal{E}^{(2)}\gamma^\nu_\parallel\mathcal{E}^{(3)}\right]\Bigg) \\ &\quad + \frac{im_f}{2}\left(-\frac{1}{s}+\frac{(q_fB)^2 s}{3}\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2-v_1v_2-v_1v_3-v_2v_3\right)\right) \\ &\quad \times\Bigg(2\,Tr\left[\gamma^\mu\mathcal{E}^{(1)}\gamma^5\gamma^\nu\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5\mathcal{E}^{(2)}\gamma^\nu\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu\mathcal{E}^{(3)}\right] \\ &\qquad - 2\,Tr\left[\gamma^\mu\mathcal{E}^{(1)}\gamma^5\gamma^\nu_\perp\right]-2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp\gamma^5\mathcal{E}^{(2)}\gamma^\nu\right] \\ &\qquad + q_fBsv_1\,Tr\left[\gamma^\mu\mathcal{E}^{(1)}\gamma^5\gamma^\alpha_\perp\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\ &\qquad - q_fBsv_2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^5\mathcal{E}^{(2)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\ &\qquad + q_fBsv_3\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^5\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu\mathcal{E}^{(3)}\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\Bigg)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

donde se ha definido

$$\mathcal{E}^{(j)} \equiv \mathbf{I} + i\Sigma_3 q_fBsv_j - \mathbf{I}\left(q_fB\right)^2 s^2 v_j^2, \tag{2.57}$$

y

$$
\begin{aligned}
\mathscr{U}_1 =& \left(-\frac{s_3 \not{p}_{1\parallel} + s_2 \not{p}_{\pi\parallel}}{s}\right)\left(\mathbf{I} + i\Sigma_3 q_f B s v_1 - \mathbf{I}\left(q_f B\right)^2 s^2 v_1^2\right) \\
&+ \left(-\frac{1}{q_f B s} + \frac{q_f B s}{3}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_1 v_2 - v_1 v_3 - v_2 v_3\right)\right) \\
&\times \left(q_f B s v_3 \not{p}_{1\perp} + q_f B s v_2 \not{p}_{\pi\perp} - \left(q_f B\right)^2 s^2 v_2 v_3 \hat{\not{F}} p_2\right),
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{U}_2 =& \left(+\frac{s_1 \not{p}_{\pi\parallel} + s_3 \not{p}_{2\parallel}}{s}\right)\left(\mathbf{I} + i\Sigma_3 q_f B s v_2 - \mathbf{I}\left(q_f B\right)^2 s^2 v_2^2\right) \\
&+ \left(-\frac{1}{q_f B s} + \frac{q_f B s}{3}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_1 v_2 - v_1 v_3 - v_2 v_3\right)\right) \\
&\times \left(-q_f B s v_3 \not{p}_{2\perp} - q_f B s v_1 \not{p}_{\pi\perp} - \left(q_f B\right)^2 s^2 v_1 v_3 \hat{\not{F}} p_1\right),
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{U}_3 =& \left(+\frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s}\right)\left(\mathbf{I} + i\Sigma_3 q_f B s v_3 - \mathbf{I}\left(q_f B\right)^2 s^2 v_3^2\right) \\
&+ \left(-\frac{1}{q_f B s} + \frac{q_f B s}{3}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_1 v_2 - v_1 v_3 - v_2 v_3\right)\right) \\
&\times \left(-q_f B s v_1 \not{p}_{1\perp} + q_f B s v_2 \not{p}_{2\perp} + \left(q_f B\right)^2 s^2 v_1 v_2 \hat{\not{F}} p_\pi\right).
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

La Ec. (2.56) es un esbozo ya a orden $\mathcal{O}\left(\left(q_f B\right)^2\right)$ pero también incluye algunos términos de orden superior debido a la forma en que fue escrita. Esta forma fue elegida debido que es más compacta que las expansiones formales hasta $\mathcal{O}\left(\left(q_f B\right)^2\right)$.

A continuación, se analizan dos aproximaciones diferentes en función de la cinemática de los fotones salientes [52, 53]. Empecemos considerando la jerarquía en la que la masa del fermión es la escala de energía más alta, es decir

$$
|q_f B| \ll m_f^2 \quad \text{y} \quad |p_{i\perp}|^2 \lesssim m_f^2.
$$

En la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, el factor exponencial en la Ec. (2.44) puede expandirse en una serie de Taylor. Los términos principales, a orden $\mathcal{O}\left((q_f B)^2\right)$, son

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\text{bajo}}(q_f B, s, v_j, p_{i\perp}) =& 1 + i 2 q_f B s^2 v_1 v_2 v_3 \; p_2 \hat{F} p_1 - 2 (q_f B)^2 s^4 v_1^2 v_2^2 v_3^2 \; p_2 \hat{F} p_1 \\
&+ i \frac{(q_f B)^2 s^3}{3}\left(-v_2^2 + v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3\right) v_1 v_3 p_{1\perp}^2 \\
&+ i \frac{(q_f B)^2 s^3}{3}\left(-v_1^2 + v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3\right) v_2 v_3 p_{2\perp}^2 \\
&+ i \frac{(q_f B)^2 s^3}{3}\left(-v_3^2 + v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3\right) v_1 v_2 w_\perp^2.
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

Bajo estas condiciones físicas, cada término de la Ec. (2.21) puede expandirse en una serie de Taylor en $q_f B s$, entonces, el vértice efectivo puede expresarse como

$$
\mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \mathcal{M}_{\text{vac.}}^{\mu\nu}(p_1, p_2) + \tilde{\mathcal{M}}_{qB}^{\mu\nu}(p_1, p_2), \tag{2.62}
$$

donde el primer término corresponde al vacío (ver Ec. (2.26)) y el segundo es un polinomio en q_fB que contiene todos los efectos del campo magnético sobre el proceso. Debido al teorema de Furry, la función polinomial sólo contiene potencias pares de q_fB ya que las potencias impares se anulan una vez considerados los dos diagramas de Feynman mostrados en Figura 2.2. En esta aproximación se aísla la contribución del vacío, por lo que el tratamiento de las divergencias no se ve modificado por el campo magnético.

La integración sobre el parámetro s de la Ec. (2.55), en la aproximación de momento bajo, puede realizarse fácilmente término a término utilizando representaciones integrales de las funciones Gamma, Ecs. (1.70), (2.28)-(2.30). Nótese que los términos con potencias no nulas en q_fB contienen factores extra de s en el numerador, lo que mejora su comportamiento en la vecindad de $s \longrightarrow 0$ (región UV). Considerando a las partículas externas en capa de masa, las integrales restantes sobre v_1 y v_2 pueden realizarse analíticamente de forma similar a las Ecs. (1.76)-(1.77),(2.34).

La aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo en la Ec. (2.62) puede obtenerse mediante un enfoque diferente, comúnmente utilizado en la literatura, donde los propagadores fermiónicos que incorporan los efectos del campo magnético se expanden en una serie de potencias en q_fB al comienzo del cálculo [49–51]. Como se muestra en la referencia [53], ambas aproximaciones conducen a los mismos resultados, sin embargo, en la forma en que se plantea la aproximación se manifiesta explícitamente que los resultados están restringidos al régimen de momento perpendicular bajo. En este sentido, la metodología presentada en este trabajo es más general ya que nos permite analizar diferentes regiones de campo magnético y regímenes cinemáticos a partir de una expresión analítica válida para una intensidad de campo magnético arbitraria.

Por otro lado, si el momento perpendicular de los fotones es la mayor escala de energía

$$|q_fB| \ll m_f^2 < |p_{i\perp}|^2,$$

no es posible realizar una expansión en serie de Taylor del término exponencial en la Ec. (2.54), como se realizó anteriormente, debido a que hay factores de $p_{i\perp}$ que hacen que el argumento exponencial sea mayor que uno. Sin embargo, una expansión de potencias en q_fB en las funciones trigonométricas de la exponencial es válido, dando como resultado

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\text{grande}}(q_fB, s, v_j, p_{i\perp}) = e^{i2q_fBs^2v_1v_2v_3\ \ p_2\hat{F}p_1} & e^{i\frac{(q_fB)^2s^3}{3}(-v_2^2+v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3)v_1v_3p_{1\perp}^2} \\ & \times e^{i\frac{(q_fB)^2s^3}{3}(-v_1^2+v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3)v_2v_3p_{2\perp}^2} \\ & \times e^{i\frac{(q_fB)^2s^3}{3}(-v_3^2+v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3)v_1v_2p_{\pi\perp}^2}.\end{aligned} \tag{2.63}$$

En este nuevo régimen, llamado campo débil con momento perpendicular grande, no se puede llevar a cabo una separación similar a la Ec. (2.62) ya que las contribuciones del vacío se mezclan con las magnéticas. Entonces, las divergencias UV no pueden separarse como en el caso anterior. Además, como la dependencia en q_fB no está totalmente contenida en una función polinómica, las integrales sobre el parámetro s no se pueden realizar mediante representaciones integrales de la función Gamma sino que toman formas más intrincadas y deben de analizarse en cada caso [53].

Capítulo 3

Producción de fotones mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético externo

En este capítulo se estudia el efecto de un campo magnético externo en la tasa de producción de fotones mediante fusión de gluones. Para ello, se calcula la contribución dominante a la amplitud $\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}$ en presencia de un campo magnético homogéneo de intensidad arbitraria usando la metodología desarrollada en el Capítulo 1. En este proceso resalta la importancia de trabajar en la base ortogonal presentada en la Sección 1.3 cuando se tiene un campo magnético externo. El análisis aquí mostrado forma parte central del trabajo publicado en Phys. Rev. D [113], en el cual figuro como autor.

3.1. Justificación

La descripción de los fenómenos físicos que se manifiestan a escalas nuclear y subnuclear se pueden estudiar mediante la QCD que, actualmente, es el modelo que describe a la interacción fuerte. La QCD es una teoría de norma no-abeliana, con un grupo de simetría local $SU(3)_C$, donde los grados de libertad fundamentales son los quarks y los gluones [114–116].

La QCD es una teoría sumamente exitosa pues ha logrado hacer predicciones que se han comprobado por más de medio siglo en los distintos aceleradores de partículas alrededor del mundo. Una de los fenómenos que ha sido capaz de explicar es el confinamiento de color, es decir, que no es posible aislar a quarks y gluones, partículas con carga de color, como estados asintóticos en la naturaleza [117, 118]. La consecuencia principal de este fenómeno es que los quarks y gluones forman estados sin color llamados hadrones.

Otra característica que exhibe la QCD es la llamada libertad asintótica [119, 120]: la interacción fuerte se debilita a medida que se incrementa la energía y los partones, quarks y gluones, se comportan como partículas libres. Este cambio radical en el comportamiento de la materia hadrónica se debe a que la constante de acoplamiento decrece a medida que la energía aumenta, lo que sugiere que un sistema de hadrones (con quarks confinados) sufre una transición de fase en donde los quarks y gluones están libres ("plasma de quarks y gluones"), esta transición ocurre cuando se tiene una densidad muy grande (aproximadamente

1 GeV/fm^3 [121, 122]) o una temperatura muy alta (entre 150 y 180 MeV[1] [104, 123, 124]).

La producción de materia fuertemente interactuante en reacciones de iones pesados a altas energías es un gran aliado para estudiar las propiedades de la QCD. En este tipo de colisiones relativistas, se ha predicho teóricamente que es posible crear un ambiente extremo de alta temperatura y densidad que evoluciona en el tiempo [125]. Los grados de libertad que dominen en el sistema dependerán de la etapa de la colisión [126]:

- Antes de que se de la colisión, debido a que el factor de Lorentz alcanza órdenes de magnitud de $\gamma \sim 10^2 - 10^3$, los núcleos se contraen en la dirección del haz formando "panqueques" compuestos principalmente de gluones con gran momento transverso (al plano de la reacción).

- Al tiempo t=0 fm/c, los dos núcleos colisionan y las interacciones se empiezan a producir. En estas interacciones iniciales es cuando los jets hadrónicos, fotones directos, pares de dileptones, quarks pesados y bosones vectoriales son producidos [126].

- Pasado un tiempo t$\sim$0.2 fm/c, los gluones de los núcleos se liberan y se crea un estado denominado "glasma" conformado por materia partónica fuera del equilibrio con una alta densidad [127, 128]. La mayoría de los estado hadrónicos observados al final de la colisión son producidos a partir de los gluones liberados en esta etapa.

- Los partones (quarks y gluones) que componen el "glasma" comienzan a interactuar fuertemente entre ellos de tal forma que rápidamente se alcanza un equilibrio térmico (local) a un tiempo aproximado de t$\sim$1 fm/c después de la colisión. La gran rapidez con la que se alcanza la termalización parece incompatible con los cálculos perturbativos pero es posible tratarla con modelos hidrodinámicos.

- El resultado de esta termalización es una fase de QCD a alta temperatura conocida como "plasma de quarks y gluones" (QGP). La abundante producción y el estudio detallado de esta fase de la materia es el principal objetivo de los programas de colisiones de iones pesados relativistas en los experimentos del "Relativistic Heavy Ion Collider" (RHIC) y, en menor medida, del "Large Hadron Collider" (LHC).

- A medida que el tiempo avanza, el plasma se expande y se enfría gradualmente hasta que los partones empiezan a forman estados de color neutro. A esta etapa se le conoce como hadronización y ocurre cuando la temperatura es del orden de la temperatura crítica para el desconfinamiento. En el LHC, el tiempo estimado de la hadronización es de t$\sim$10 fm/c.

- Para tiempos de orden de 10 fm/$c \lesssim$ t $\lesssim$20 fm/c, se tiene un gas de hadrones interactuante en expansión donde la temperatura sigue bajando.

- Finalmente, al tiempo t$\sim$20 fm/c, la densidad del gas es tan bajo que hadrones dejan de interactuar entre sí y se llega a una etapa de "congelamiento" (freeze-out).

[1] $\frac{1}{40} eV \sim 20°C$.

Los fotones son excelentes candidatos para investigar las propiedades de la materia fuertemente interactuante en las colisiones de iones pesados relativistas. Al no tener carga de color, no se ven afectados por los procesos dominados por la interacción fuerte, lo que les permite escapar libremente del sistema. De este modo, los fotones pueden proporcionar información valiosa sobre la evolución espacio-temporal del sistema.

A pesar de que los fotones sí pueden interactuar con partículas cargadas eléctricamente, las etapas iniciales de la colisión (pre-equilibrio) están dominadas por los gluones, así que están libres de interacciones electromagnéticas. Posteriormente, durante las etapas termalizadas (QGP y hadronización), los fotones sí interactúan electromagnéticamente con los quarks y algunos hadrones de manera que se generan más fotones mediante procesos de dispersión y decaimiento. Entonces, para obtener información de las propiedades de la materia fuertemente interactuante y los procesos que gobiernan cada una de las etapas de las colisiones de iones pesados relativistas, la descripción de los distintos mecanismos de producción de fotones es de vital importancia. Afortunadamente, tanto los cálculos teóricos actuales como las mediciones experimentales permiten considerar los distintos mecanismos de producción de fotones y distinguirlos entre sí [129–133]. Adicionalmente, los modelos teóricos describen con precisión la distribución del momento invariante de los fotones para rangos de p_T hasta 3 GeV [134].

Por otro lado, los experimentos de ALICE (en el LHC) [132, 135, 136], PHENIX y STAR (en el RHIC) [137–141] han realizado mediciones directas de los fotones que se producen en las distintas etapas de las colisiones de iones pesados relativistas, de tal manera que se pueden clasificar las fuentes principales de fotones como [129, 131, 142, 143]:

- Fotones directos (“direct photons”): son fotones producidos durante cualquiera de las etapas de la evolución de la colisión antes de que se formen los estados finales (hadrones). Éstos a su vez se pueden subdividir en las siguientes categorías:
  - Fotones tempranos (“prompt photons”): provenientes de interacciones partónicas en las etapas al iniciales de la colisión antes de llegar al equilibrio. También pueden tener contribuciones de radiación tipo sincrotrón.
  - Fotones térmicos (“thermal photons”): originados durante las etapas donde ya se alcanzó un equilibrio térmico. Éstos pueden generarse mediante distintos procesos ya que se dan tanto en el QGP y como en el gas hadrónico.
  - Otras fuentes: fotones que provienen de otros procesos como la fragmentación, conversión o frenado (“Bremsstrahlung”) de jets e incluso el decaimiento de resonancias de corta duración (ω, ϕ, a_1).
- Fotones de decaimiento (“decay photons”): se originan mediante decaimientos electromagnéticos hadrónicos en la etapa de freeze-out, por ejemplo $\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma$.

Sin embargo, los cálculos teóricos no logran reproducir de manera totalmente satisfactoria los resultados experimentales. Particularmente se encuentra una sobreproducción de fotones en la región de momento invariante $p_T \lesssim 3$ GeV, así como discrepancias en la distribución angular de los fotones [132, 139–141]. Esta diferencia entre las partes teórica y experimental es conocida como el rompecabezas de los fotones directos (“direct photon puzzle”) [144].

Las diferencias observadas entre la cantidad y distribución de los fotones predichas teóricamente y los resultados experimentales podrían deberse a la existencia de mecanismos de producción de fotones que aún no han sido contemplados, por ejemplo, la presencia de un campo magnético sería capaz de abrir nuevos canales para la producción de fotones. Teóricamente se ha estudiado la posibilidad de que, en colisiones periféricas de iones pesados, los espectadores (materia que no participa en la colisión) puedan originar campos magnéticos con intensidades de hasta $eB \sim m_\pi^2$ donde m_π es la masa de pión y e la magnitud de la carga del electrón, localizados en la región de los participantes. Estos campos magnéticos son muy intensos al inicio y decaen exponencialmente, con un tiempo característico de $\sim$fm/c [28,30–32]. La presencia de estos campos magnéticos rompen la invariancia rotacional al fijar una dirección en el espacio así que, además de proporcionar nuevos canales para la producción de fotones, también podrían causar cambios en la distribución angular (particularmente, la presencia del campo magnético aumenta el flujo elíptico correspondiente al segundo armónico en la expansión de Fourier).

Es importante resaltar que el tiempo característico de los campos magnéticos creados en colisiones periféricas coincide con las etapas iniciales de la evolución donde los gluones fuera de equilibro son los grados de libertad dominantes. Ésto origina una posibilidad muy interesante: la presencia del campo magnético abre un nuevo canal de producción de fotones mediante fusión de gluones.

3.2. Estructura tensorial

El proceso de producción de fotones mediante fusión de gluones

$$gg \longrightarrow \gamma,$$

está descrito por el elemento de matriz invariante

$$\begin{aligned} \mathcal{M} =& \langle (p_3, \alpha, \lambda) | (p_1, \mu, \sigma, a), (p_2, \nu, \sigma', b) \rangle \, \epsilon_\mu (p_1, \sigma) \, \epsilon_\nu (p_2, \sigma') \, \epsilon^*_\alpha (p_3, \lambda) \\ \equiv& \mathcal{M}^{\mu\nu\alpha} \epsilon_\mu (p_1, \sigma, a) \, \epsilon_\nu (p_2, \sigma', b) \, \epsilon^*_\alpha (p_3, \lambda) \, , \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde p_1 y p_2 son los momentos de los gluones con polarizaciones σ y σ' e índices de color a y b, respectivamente. p_3 es el momento asociado al fotón con polarización λ y $\epsilon_\mu (p_i)$ los vectores de polarización que describen los estados asintóticos correspondientes. Nótese que, a diferencia de los casos anteriores, el vértice efectivo $\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}$ es un tensor de rango tres debido a que ahora se tienen tres BV como estados asintóticos.

A partir de la metodología planteada en la Sección 1.3, se puede escribir la estructura tensorial para el vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo, $\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB}$, en términos de los vectores de polarización dados en la Ec. 1.22 a partir de simetrías y principios fundamentales. Tomando en cuenta que ahora se tienen tres BV, la estructura tensorial más general consta de 27 términos y es de la forma

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB}(p_1, p_2, p_3) \sim \underbrace{\left(\hat{L}^\mu_{1,a} + \hat{L}^{*\mu}_{1,a} + \hat{G}^\mu_{1,a}\right)}_{\text{gluón}} \otimes \underbrace{\left(\hat{L}^\nu_{2,b} + \hat{L}^{*\nu}_{2,b} + \hat{G}^\nu_{2,b}\right)}_{\text{gluón}} \otimes \underbrace{\left(\hat{L}^\alpha_{3} + \hat{L}^{*\alpha}_{3} + \hat{G}^\alpha_{3}\right)}_{\text{fotón}}, \tag{3.2}$$

donde el subíndice $i = 1, 2, 3$ codifica el momento p_i al que está asociado cada estado de polarización. Adicionalmente, los índices de color a y b diferencian a los estados de polarización gluónicos y fotónicos.

Al igual que en los casos anteriores, las simetrías fundamentales que deben de satisfacerse son las condiciones de ortogonalidad e invariancia ante intercambio bosónico (véanse Ecs. (1.10)-(1.11)), que en este caso se ven como

$$p_{1\mu}\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, p_3) = p_{2\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, p_3) = p_{3\alpha}\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, p_3) = 0, \tag{3.3}$$

y

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, p_3) = \mathcal{M}^{\nu\mu\alpha}(p_2, p_1, p_3). \tag{3.4}$$

Por construcción, la Ec. (3.2) satisface trivialmente las identidades de Ward generalizadas. Por otro lado, al exigir la simetría de intercambio bosónico, la estructura tensorial del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, p_3) =& b_1^{++}\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\hat{L}_3^{\alpha} + b_2^{++}\hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu}\hat{L}_3^{\alpha} + b_3^{++}\hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu}\hat{L}_3^{\alpha} \\
&+ \frac{b_4^{+-}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu} + \hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\right)\hat{L}_3^{\alpha} + \frac{b_5^{-+}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu} + \hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\right)\hat{L}_3^{\alpha} \\
&+ \frac{b_6^{--}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu} + \hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu}\right)\hat{L}_3^{\alpha} \\
&+ b_7^{+-}\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\hat{L}_3^{*\alpha} + b_8^{+-}\hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu}\hat{L}_3^{*\alpha} + b_9^{+-}\hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu}\hat{L}_3^{*\alpha} \\
&+ \frac{b_{10}^{++}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu} + \hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\right)\hat{L}_3^{*\alpha} + \frac{b_{11}^{--}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu} + \hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\right)\hat{L}_3^{*\alpha} \\
&+ \frac{b_{12}^{-+}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu} + \hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu}\right)\hat{L}_3^{*\alpha} \\
&+ b_{13}^{-+}\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\hat{G}_3^{\alpha} + b_{14}^{-+}\hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu}\hat{G}_3^{\alpha} + b_{15}^{-+}\hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu}\hat{G}_3^{\alpha} \\
&+ \frac{b_{16}^{--}}{\sqrt{22}}\left(\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu} + \hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\right)\hat{G}_3^{\alpha} + \frac{b_{17}^{++}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1,a}^{\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu} + \hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{\nu}\right)\hat{G}_3^{\alpha} \\
&+ \frac{b_{18}^{+-}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1,a}^{*\mu}\hat{G}_{2,b}^{\nu} + \hat{G}_{1,a}^{\mu}\hat{L}_{2,b}^{*\nu}\right)\hat{G}_3^{\alpha},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde los superíndices $\pm$ en los coeficientes b_k indican su comportamiento bajo las transformaciones de conjugación de carga (primero) y paridad (segundo), respectivamente, de tal forma que el vértice efectivo sea invariante ante CP. Nótese que esta estructura tensorial es válida para fotones y gluones arbitrarios, es decir, pueden ser partículas virtuales ya que se toman en cuenta tres estados de polarización distintos.

Al restringir el cálculo a BV en capa de masa,

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = 0 \quad \text{y} \quad p_1 \cdot p_2 = 0, \tag{3.6}$$

los estados de polarización G^μ no están presentes y la estructura tensorial de la Ec. (3.5) se simplifica. Además, los momentos de los BV quedan constreñidos a ser colineales, es decir

$$p_1^\mu = \frac{\omega_1}{\omega_3}p_3^\mu \quad \text{y} \quad p_2^\mu = \frac{\omega_2}{\omega_3}p_3^\mu, \tag{3.7}$$

con ω_i las energías de cada uno de los BV. Esta constricción provoca que tres de los cuatro invariantes de Lorentz mostrados en la Tabla (1.1) se anulen idénticamente

$$(p_i \cdot p_j)^{++} = \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_3^2} p_3^2 = 0, \qquad \left(p_i \hat{F} p_j\right)^{-+} = \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_3^2} p_3 \hat{F} p_3 = 0,$$

$$(p_i \cdot p_j)_{\perp}^{++} = \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_3^2} p_{3\perp}^2 \neq 0, \qquad \left(p_i \hat{F}^* p_j\right)^{--} = \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_3^2} p_3 \hat{F}^* p_3 = 0,$$

con $i, j = 1, 2, 3$.

Entonces, al considerar que tanto el fotón como los gluones están en capa de masa, se anulan las contribuciones del los estados de polarización G^μ y se pierden los invariantes necesarios para poder escribir las estructuras tensoriales impares (ante conjugación de carga o ante paridad) en la Ec. (3.5). Por tanto, las contribuciones del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo para BV reales se reducen sólo a tres estructuras

$$\mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu\alpha}(p_3) = b_1^{++} \hat{L}_a^\mu \hat{L}_b^\nu \hat{L}^\alpha + b_2^{++} \hat{L}_a^{*\mu} \hat{L}_b^{*\nu} \hat{L}^\alpha + \frac{b_{10}^{++}}{\sqrt{2}} \left(\hat{L}_a^\mu \hat{L}_b^{*\nu} + \hat{L}_a^{*\mu} \hat{L}_b^\nu\right) \hat{L}^{*\alpha}, \tag{3.8}$$

donde se han retirado los subíndices 1, 2 y 3, ya que los momentos de los BV son colineales.

Con la descomposición tensorial ortogonal anterior para el vértice efectivo, a partir de la Ec. (1.18), se puede calcular fácilmente la amplitud cuadrada para el proceso dando como resultado

$$\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}_{qB}|^2 = |b_1^{++}|^2 + |b_2^{++}|^2 + |b_{10}^{++}|^2, \tag{3.9}$$

donde cada coeficiente puede obtenerse proyectando todo el vértice con su estructura tensorial correspondiente, es decir

$$\begin{aligned} b_1^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu\alpha} \hat{L}_\mu^a \hat{L}_\nu^b \hat{L}_\alpha, \\ b_2^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu\alpha} \hat{L}_\mu^{a*} \hat{L}_\nu^{b*} \hat{L}_\alpha, \\ b_{10}^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{L}_\mu^a \hat{L}_\nu^{b*} + \hat{L}_\mu^{a*} \hat{L}_\nu^b\right) \hat{L}_\alpha^*. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nótese que de las 27 estructuras que se tenían inicialmente para el vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo, Ec. 3.2, sólo tres de ellas contribuyen a la amplitud de probabilidad cuando nos restringimos a partículas reales.

Recordando los vectores de polarización introducidos en la Ec. (1.22)

$$\epsilon_{\text{long.}}^\mu \equiv \frac{L^\mu}{\sqrt{-p_\perp^2}} \quad \text{y} \quad \epsilon_{\text{trans.}}^\mu \equiv \frac{L^{*\mu}}{\sqrt{p_\parallel^2}}, \tag{3.11}$$

en la descomposición dada por la Ec. (3.8) se puede notar que hay una contribución de polarizaciones longitudinales puras mientras que hay dos contribuciones con dos polarizaciones transversales y una polarización longitudinal.

Vale la pena resaltar que la descomposición tensorial en la Ec. (3.8) se dedujo de primeros principios y es válida para cualquier intensidad de campo magnético[2], en particular, se debe de cumplir en el régimen de campo magnético intenso (véase Sección 2.4.2).

[2]Dada la condición de originalidad de la base, Ec. (1.23), la descomposición también es válida para distintas configuraciones de campo electromagnéticos, por ejemplo, campos homogéneos ortogonales $\vec{B} \perp \vec{E}$.

De acuerdo a la discusión alrededor de la Ec. (2.52), en el régimen de campo intenso las únicas contribuciones a la amplitud provienen de BV con polarizaciones transversales, es decir, la descomposición tensorial tiene únicamente estructuras paralelas (los vectores de polarización longitudinales L no cuentan con componentes paralelas mientas que los transversales L^* sí). Ésto se debe al fenómeno de reducción dimensional que restringe el movimiento de los fermiones en el lazo a la dirección paralela al campo magnético [41]. Por tanto, basados en la estructura tensorial de la Ec. (3.8), las contribuciones al proceso de producción de fotones mediante fusión de gluones en el límite de campo intenso son nulas como se muestra de forma explícita en la Sección 3.3.2.

En las referencias [59, 60, 64], que también estudian el proceso de producción de fotones mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético, se considera la siguiente jerarquía entre escalas de energía

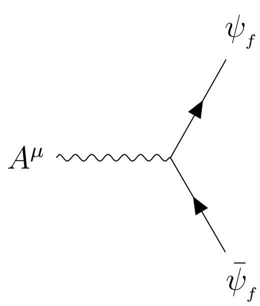
$$m_f^2 \ll |qB| \lesssim |p_{i\perp}|^2.$$

La masa de los quarks es la escala de energía más pequeña mientras que el momento de los BV puede ser del orden del campo magnético, de tal forma que es posible que los quarks dentro del lazo adquieran movimiento en la dirección perpendicular al campo. Bajo estas suposiciones físicas, la estructura tensorial propuesta presenta contribuciones con dos polarizaciones transversales y una longitudinal, es decir, sólo contribuyen los coeficientes b_2^{++} y b_{10}^{++}. Al no considerar estructuras con dos polarizaciones longitudinales y una transversal (como la asociada al coeficiente b_1^{++}), las expresiones presentadas en las referencias mencionadas no son consistentes con las identidades de Ward generalizadas, Ec. (3.3), como los autores mencionan.

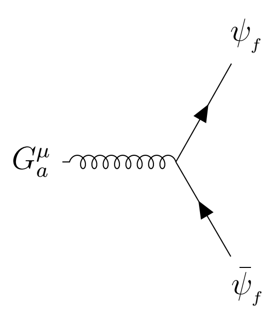
Lo anterior resalta nuevamente la importancia de obtener una estructura tensorial que brinde facilidades para avanzar analíticamente con el cálculo. La metodología presentada para la obtención de la estructura tensorial del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo, a partir de una base ortonormal y primeros principios, es un aporte importante de este trabajo.

3.3. Vértice efectivo a un lazo en presencia de un campo magnético

El proceso de producción de fotones mediante fusión de gluones no tiene contribuciones a nivel árbol debido a que no hay un vértice de interacción directo entre gluones y fotones en el ME. Este proceso ocurre mediante correcciones radiativas de QCD, en tal contexto, los vértices de interacción relevantes están dados por



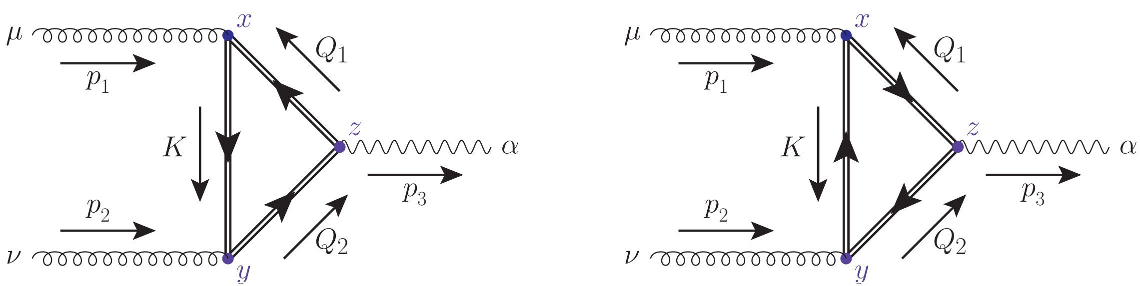
$= -iq_f\gamma^\mu,$



$= -ig_s\gamma^\mu t^a.$ (3.12)

donde el subíndice f denota el sabor del quark, g_s es la constante de acoplamiento fuerte entre los gluones y los quarks, q_f es la carga eléctrica del quark y las matrices t^a representan los generadores del grupo de simetría local $SU(3)$.

Los diagramas de Feynman a orden dominante de la producción de fotones mediante fusión de gluones, similares al diagrama triangular que se muestra en la Figura 1.1, no contribuyen al proceso en el caso del vacío debido al teorema de Furry [145]. Sin embargo, la presencia de un campo magnético externo hace que los diagramas a orden dominante mostrados en la de la Figura 3.1, adquieran nuevas contribuciones de tal forma que no se anulen entre sí.



(a) Diagrama I. (b) Diagrama II.

Figura 3.1: Diagramas de Feynman a un lazo para la producción de fotones mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético externo. El campo magnético externo se indica mediante la línea doble en los propagadores fermiónicos. Las flechas internas indican el flujo de carga y las flechas externas el flujo de momento. x, y y z indican los puntos de interacción en el espacio de configuraciones.

Aplicando las reglas de Feynman, Ec. (3.12), a los diagramas mostrados en la Figura 3.1, se obtienen las siguientes expresiones analíticas

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (I)}(x,y,z) = -\mathcal{TR}\left[\left(-ig_s\gamma^\mu t^a\right) S^{qB}(x,z)\left(-iq_f\gamma^\alpha\right) S^{qB}(z,y)\left(-ig_s\gamma^\nu t^b\right) S^{qB}(y,x)\right], \tag{3.13}$$

y

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (II)}(x,y,z) = -\mathcal{TR}\left[\left(-ig_s\gamma^\mu t^a\right) S^{qB}(x,y)\gamma^\nu\left(-ig_s\gamma^\nu t^b\right) S^{qB}(y,z)\left(-iq_f\gamma^\alpha\right) S^{qB}(z,x)\right], \tag{3.14}$$

donde el operador de traza funcional $\mathcal{TR}$ indica la suma sobre todos los grados de libertad indeterminados dentro del lazo: el momento, el espín (Tr) y el color de los quarks (tr).

Aplicando la metodología planteada en el Capítulo 1, se llega a la siguiente expresión analítica para la contribución del diagrama I al vértice de la producción de fotones mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético de intensidad arbitraria

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (I)}(p_1,p_2) =\ & iq_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D \pi^{D/2}} \\
& \times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
& \times e^{\frac{i}{s}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2 + s_2 s_3 p_{2\parallel}^2 + s_1 s_2 p_{3\parallel}^2\right)} e^{-\frac{i}{q_f B}\frac{\mathrm{t_1 t_3} p_{1\perp}^2 + \mathrm{t_2 t_3} p_{2\perp}^2 + \mathrm{t_1 t_2} p_{3\perp}^2 + 2\mathrm{t_1 t_2 t_3} p_2 \hat{F} p_1}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}} \\
& \times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f e^{(1)} + \not{V}_1\right)\gamma^\alpha\left(m_f e^{(2)} + \not{V}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f e^{(3)} + \not{V}_3\right)\right] \\
& \quad + \frac{i}{2s}\Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha e^{(2)} \gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right] \\
& \qquad - D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha \not{V}_2 \gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)}\gamma^\alpha \not{V}_2\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
& \qquad - D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu \not{V}_3\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha_\parallel e^{(2)}\gamma^\nu \not{V}_3\right]\Bigg) \\
& \quad + \frac{i\, q_f B}{2\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)} \\
& \qquad \times \Bigg(D_\perp\, Tr[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha \gamma^\nu] - 2\, Tr[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha \gamma^\nu_\perp] + D_\perp\, Tr[\gamma^\mu \gamma^\alpha \not{V}_2 \gamma^\nu] \\
& \qquad - 2\, Tr[\gamma^\mu_\perp \gamma^\alpha \not{V}_2 \gamma^\nu] + D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu \not{V}_3] - 2\, Tr[\gamma^\mu \gamma^\alpha_\perp \gamma^\nu \not{V}_3] \\
& \qquad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha \gamma^\beta_\perp \gamma^\nu \gamma^\sigma_\perp\right]\hat{F}_{\beta\sigma} - \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\beta_\perp \gamma^\alpha \not{V}_2 \gamma^\nu \gamma^\sigma_\perp\right]\hat{F}_{\beta\sigma} \\
& \qquad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\beta_\perp \gamma^\alpha \gamma^\sigma_\perp \gamma^\nu \not{V}_3\right]\hat{F}_{\beta\sigma}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

con

$$
\not{V}_1 = \left(-\frac{s_3 \not{p}_{1\parallel} + s_2 \not{p}_{3\parallel}}{s}\right) e^{(1)} + \frac{\mathrm{t_3}\not{p}_{1\perp} + \mathrm{t_2}\not{p}_{3\perp} - \mathrm{t_2 t_3}\hat{\not{F}} p_2}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}, \tag{3.16}
$$

$$
\not{V}_2 = \left(\frac{s_1 \not{p}_{3\parallel} + s_3 \not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(2)} + \frac{-\mathrm{t_3}\not{p}_{2\perp} - \mathrm{t_1}\not{p}_{3\perp} - \mathrm{t_1 t_3}\hat{\not{F}} p_1}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}, \tag{3.17}
$$

$$
\not{V}_3 = \left(\frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(3)} + \frac{-\mathrm{t_1}\not{p}_{1\perp} + \mathrm{t_2}\not{p}_{2\perp} + \mathrm{t_1 t_2}\hat{\not{F}} p_3}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}. \tag{3.18}
$$

Al considerar a las partículas externas en capa de masa, sus momentos se vuelven colineales como se muestra en la Ec. (3.7). Con ello, uno de los invariantes de Lorentz que se anulan es $p_2 \hat{F} p_1$, de tal forma que la fase relativa entre los diagramas conjugados de carga desaparece

$$
e^{-\frac{i}{q_f B}\frac{\mathrm{t_1 t_3} p_{1\perp}^2 + \mathrm{t_2 t_3} p_{2\perp}^2 + \mathrm{t_1 t_2} p_{3\perp}^2 \pm 2\mathrm{t_1 t_2 t_3} p_2 \hat{F} p_1}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}} \longrightarrow e^{-\frac{i}{q_f B}\frac{\mathrm{t_1 t_3} p_{1\perp}^2 + \mathrm{t_2 t_3} p_{2\perp}^2 + \mathrm{t_1 t_2} p_{3\perp}^2}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}}.
$$

Como consecuencia, a diferencia de los casos reportados anteriormente en las Secciones 1.4 y 2.3, no existe una interferencia entre diagramas.

La expresión general para el vértice efectivo en presencia de un campo magnético cuando se tienen BV reales está dada por

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (I)}(\omega_i, p_3) = {} & iq_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D \pi^{D/2}} \\
& \times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
& \times e^{-is\frac{p_{3\perp}^2}{\omega_3^2}\left(v_1 v_3 \omega_1^2 + v_2 v_3 \omega_2^2 + v_1 v_2 \omega_3^2\right)} e^{-\frac{i}{q_f B}\frac{p_{3\perp}^2}{\omega_3^2}\frac{\mathrm{t_1 t_3}\omega_1^2 + \mathrm{t_2 t_3}\omega_2^2 + \mathrm{t_1 t_2}\omega_3^2}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}} \\
& \times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu \left(m_f e^{(1)} + \not{V}_1\right)\gamma^\alpha\left(m_f e^{(2)} + \not{V}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f e^{(3)} + \not{V}_3\right)\right] \\
& \quad + \frac{i}{2s}\Bigg(- D_\parallel Tr\left[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha e^{(2)}\gamma_\parallel^\nu e^{(3)}\right] \\
& \qquad - D_\parallel Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha \not{V}_2 \gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma_\parallel^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha \not{V}_2\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
& \qquad - D_\parallel Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu \not{V}_3\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma_\parallel^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu \not{V}_3\right]\Bigg) \\
& \quad + \frac{i\, q_f B}{2\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)} \\
& \qquad \times \Bigg(D_\perp Tr[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha \gamma^\nu] - 2\, Tr[\gamma^\mu \not{V}_1\gamma^\alpha\gamma_\perp^\nu] + D_\perp Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha \not{V}_2 \gamma^\nu] \\
& \qquad - 2\, Tr[\gamma_\perp^\mu \gamma^\alpha \not{V}_2 \gamma^\nu] + D_\perp Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu \not{V}_3] - 2\, Tr[\gamma^\mu \gamma_\perp^\alpha\gamma^\nu \not{V}_3] \\
& \qquad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu \not{V}_1 \gamma^\alpha \gamma_\perp^\beta \gamma^\nu \gamma_\perp^\sigma\right]\hat{F}_{\beta\sigma} - \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma_\perp^\beta \gamma^\alpha \not{V}_2 \gamma^\nu\gamma_\perp^\sigma\right]\hat{F}_{\beta\sigma} \\
& \qquad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma_\perp^\beta \gamma^\alpha \gamma_\perp^\sigma \gamma^\nu \not{V}_3\right]\hat{F}_{\beta\sigma}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

donde se ha usado el hecho de que $p_{3\parallel}^2 = -p_{3\perp}^2 > 0$, y las matrices $\not{V}_i$ toman la forma

$$
\not{V}_1 = \left(-\frac{\omega_1 s_3 + \omega_3 s_2}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel} e^{(1)} + \frac{\left(\omega_1 \mathrm{t_3} + \omega_3 \mathrm{t_2}\right)\not{p}_{3\perp} - \omega_2 \mathrm{t_2 t_3}\hat{\not{F}} p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)}, \tag{3.20}
$$

$$
\not{V}_2 = \left(\frac{\omega_3 s_1 + \omega_2 s_3}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel} e^{(2)} + \frac{\left(-\omega_2 \mathrm{t_3} - \omega_3 \mathrm{t_1}\right)\not{p}_{3\perp} - \omega_1 \mathrm{t_1 t_3}\hat{\not{F}} p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)}, \tag{3.21}
$$

$$
\not{V}_3 = \left(\frac{\omega_1 s_1 - \omega_2 s_2}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel} e^{(3)} + \frac{\left(-\omega_1 \mathrm{t_1} + \omega_2 \mathrm{t_2}\right)\not{p}_{3\perp} + \omega_3 \mathrm{t_1 t_2}\hat{\not{F}} p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)}. \tag{3.22}
$$

Como ya es de esperarse la Ec. (3.19), y su análoga para el diagrama II Ec. (C.61), son un resultado exacto pero nos es posible seguir adelante analíticamente con el cálculo debido a la intrincada forma de las integrales sobre los parámetros de Schwinger s_i. A continuación se muestra, como ya se había adelantado, que el proceso de producción de fotones mediante fusión de gluones no tiene contribuciones en el vacío y en el régimen de campo intenso. Además, se discute una región un distinta a las presentadas en la Sección 2.4, la región de campo magnético intermedio.

3.3.1. Límite de campo cero

Análogamente a las Secciones 1.4.3 y 2.3.1, el comportamiento del vacío se puede obtener al tomar el límite $|qB| \longrightarrow 0$ donde las funciones trigonométricas se comportan de acuerdo a

$$\cos(q_f B s_j) \approx 1, \quad \tan(q_f B s_j) \approx q_f B s_j \quad \text{y} \quad e^{(j)} \approx \mathbf{I}.$$

Entonces, la Ec. (3.15) se reduce a

$$\begin{aligned}
\lim_{|qB|\to 0} i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (I)}(p_1, p_2) = {} & iq_f g_s^2 \left(-i\right)^{D/2+1} \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right] \frac{1}{2^D \pi^{D/2}} \\
& \times \int dv_1\ dv_2\ dv_3\ \delta(1 - v_1 - v_2 - v_3) \\
& \times \int_0^\infty ds\ s^{2-D/2} e^{is\left(v_1 v_3 p_1^2 + v_2 v_3 p_2^2 + v_1 v_2 p_3^2 - m_f^2\right)} \\
& \times \Bigg\{ Tr\Big[\gamma^\mu \left(m_f - v_2 \not{p}_3 - v_3 \not{p}_1\right) \gamma^\alpha \left(m_f + v_1 \not{p}_3 + v_3 \not{p}_2\right) \\
& \qquad \times \gamma^\nu \left(m_f + v_1 \not{p}_1 - v_2 \not{p}_2\right)\Big] \\
& + \frac{i\left(2 - D\right)}{2s} \Bigg(Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \left(v_1 \not{p}_1 - v_2 \not{p}_2\right)\right] \\
& \qquad + Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\alpha \left(v_1 \not{p}_3 + v_3 \not{p}_2\right) \gamma^\nu\right] \\
& \qquad + Tr\left[\gamma^\mu \left(-v_2 \not{p}_3 - v_3 \not{p}_1\right) \gamma^\alpha \gamma^\nu\right] \Bigg) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde se ha realizado el cambio de variables usual $s_j = s v_j$ tal que $s \equiv s_1 + s_2 + s_3$, con $s \in [0, \infty]$ y $v_j \in [0, 1]$ de tal forma que se cumpla la relación $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. Nótese la similitud de la expresión anterior con las Ec. (1.68) y (2.26), en especial en la primera traza.

Similarmente la contribución del diagrama II, dada por la Ec. (C.53), se reduce a

$$\begin{aligned}\lim_{|qB|\to 0} i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (II)}(p_1,p_2) = {}& iq_f g_s^2 \left(-i\right)^{D/2+1} \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right] \frac{1}{2^D \pi^{D/2}} \\ & \times \int dv_1\ dv_2\ dv_3\ \delta(1-v_1-v_2-v_3) \\ & \times \int_0^\infty ds\ s^{2-D/2} e^{is\left(v_1 v_3 p_1^2 + v_2 v_3 p_2^2 + v_1 v_2 p_3^2 - m_f^2\right)} \\ & \times \Bigg\{ Tr\Big[\gamma^\mu \left(m_f - v_1 \not{p}_1 + v_2 \not{p}_2\right) \gamma^\nu \left(m_f - v_1 \not{p}_3 - v_3 \not{p}_2\right) \\ & \qquad \times \gamma^\alpha \left(m_f + v_2 \not{p}_3 + v_3 \not{p}_1\right) \Big] \\ & + \frac{i\left(2-D\right)}{2s} \Bigg(Tr\left[\gamma^\mu \left(-v_1 \not{p}_1 + v_2 \not{p}_2\right) \gamma^\nu \gamma^\alpha\right] \\ & \qquad + Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\nu \left(-v_1 \not{p}_3 - v_3 \not{p}_2\right) \gamma^\alpha\right] \\ & \qquad + Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \left(v_2 \not{p}_3 + v_3 \not{p}_1\right)\right] \Bigg) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Nótese que las únicas diferencias entre las Ecs. (3.23) y (3.24) son el orden de las matrices de Dirac dentro de las trazas y los signos de los momentos $\not{p}_i$.

Es fácil mostrar que estas diferencias llevan a que los términos con un número impar de matrices Gama se sumen (nulos), mientras que los que tiene un número par se resten. Con ello, al sumar ambas contribuciones, la amplitud para el proceso se anula

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{\text{vac.}\,(I)} + \mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{\text{vac.}\,(II)} = 0, \tag{3.25}$$

como se esperaba por el teorema de Furry [145]: los diagramas de Feynman con un número impar de inserciones de bosones de norma no contribuyen a la amplitud de probabilidad, en el caso del vacío.

3.3.2. Límite de campo intenso

Teniendo en cuenta las escalas físicas que aparecen en la Ec. (3.19) son las energías de BV ω_i, el momento perpendicular del fotón $p_{3\perp}^2$, la masa de los quarks m_f y intensidad de campo magnético $|q_f B|$, se pueden hacer diferentes aproximaciones dependiendo de la jerarquía de escalas entre estas cantidades.

En las colisiones de iones pesados relativistas la intensidad de campo máxima se alcanza en los primeros instantes de la colisión y es del orden de $m_\pi^2 \sim 2\times 10^4$ MeV^2. Mientras tanto, el espectro del momento trasverso de los fotones va desde los MeV hasta los GeV. Entonces, momentos trasversos del orden de 200-400 MeV son equiparables a la intensidad de campo magnético.

Teniendo en mente el estudio del espectro de fotones de baja energía, $p_{3\perp} \ll 200$ MeV, y considerando únicamente las contribuciones de los quarks ligeros (up, down y strange), la jerarquía entre las escalas de energía que se tiene es la siguiente

$$m_f^2, |p_{i\perp}|^2 \ \ll \ |q_f B|$$

que, como se discutió anteriormente en la Sección 2.4.2, define el régimen de campo magnético intenso.

El límite de campo intenso se puede estudiar trasladando las expresiones al espacio Euclideano de acuerdo con $p^0 \longrightarrow ip_4$, $\gamma^0 \longrightarrow i\gamma_4$, $\gamma_i \equiv \gamma^i$ con $i = 1, 2, 3$ y $s_j \longrightarrow -is_j$. Una vez realizadas dichas sustituciones en la Ec. (3.15), el comportamiento asintótico de las funciones trigonométricas hiperbólicas en esta región

$$\tanh(|q_f B| s_j) \longrightarrow 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sech}(|q_f B| s_j) \longrightarrow 0,$$

da el vértice efectivo en el límite de campo magnético intenso

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{qB\,(I)}_{E\ \mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = & -iq_f g_s^2 \,\mathrm{tr}\left[t^a t^b\right] |q_f B|^{D_\perp/2} \frac{(-1)^{D_\perp}}{\pi^{D/2} 4^{D_\perp - 1} 2^{D_\parallel - 1}} \\
& \times \int dv_1\ dv_2\ dv_3\ \delta(1 - v_1 - v_2 - v_3) \\
& \times \int_{1/\Lambda_{qB}^2}^{\infty} ds\ s^{2 - D_\parallel/2}\ e^{-s\left(v_1 v_3 p_{1\parallel}^2 + v_2 v_3 p_{2\parallel}^2 + v_1 v_2 p_{3\parallel}^2 + m_f^2\right)} \\
& \times \Bigg\{ Tr\Big[\gamma_{\parallel\mu} \left(m_f + v_2 \not{p}_{3\parallel} + v_3 \not{p}_{1\parallel}\right) \gamma_{\parallel\alpha} \left(m_f - v_1 \not{p}_{3\parallel} - v_3 \not{p}_{2\parallel}\right) \\
& \qquad \times \gamma_{\parallel\nu} \left(m_f - v_1 \not{p}_{1\parallel} + v_2 \not{p}_{2\parallel}\right) \Delta_+\Big] \\
& - \frac{(2 - D_\parallel)}{2s} \Bigg(Tr\left[\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\alpha}\gamma_{\parallel\nu} \left(-v_1 \not{p}_{1\parallel} + v_2 \not{p}_{2\parallel}\right) \Delta_+\right] \\
& \qquad + Tr\left[\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\alpha} \left(-v_1 \not{p}_{3\parallel} - v_3 \not{p}_{2\parallel}\right) \gamma_{\parallel\nu} \Delta_+\right] \\
& \qquad + Tr\left[\gamma_{\parallel\mu} \left(v_2 \not{p}_{3\parallel} + v_3 \not{p}_{1\parallel}\right) \gamma_{\parallel\alpha}\gamma_{\parallel\nu} \Delta_+\right] \Bigg) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

donde el subíndice E hace referencia al espacio Euclideano con $p^2 \equiv p_4^2 + \vec{p}^{\,2}$, Λ_{qB} es el corte ultravioleta a partir del cual la intensidad del campo magnético es la escala de energía más alta y Δ_+ es uno de los proyectores de espín definidos por la Ec. (2.46).

De igual forma se puede obtener la contribución del diagrama II, a partir de la Ec. (C.53), en el límite de campo intenso

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{qB\,(II)}_{E\;\mu\nu\alpha}(p_1,p_2) = & -iq_f g_s^2 \,\mathrm{tr}\left[t^a t^b\right] |q_f B|^{D_\perp/2} \frac{(-1)^{D_\perp}}{\pi^{D/2} 4^{D_\perp-1} 2^{D_\parallel-1}} \\
& \times \int dv_1\; dv_2\; dv_3\; \delta(1-v_1-v_2-v_3) \\
& \times \int_{1/\Lambda^2_{qB}}^{\infty} ds\; s^{2-D_\parallel/2}\; e^{-s\left(v_1 v_3 p^2_{1\parallel} + v_2 v_3 p^2_{2\parallel} + v_1 v_2 p^2_{3\parallel} + m_f^2\right)} \\
& \times \Bigg\{ Tr\Big[\gamma_{\parallel\mu}\left(m_f + v_1 \not{p}_{1\parallel} - v_2 \not{p}_{2\parallel}\right)\gamma_{\parallel\nu}\left(m_f + v_1 \not{p}_{3\parallel} + v_3 \not{p}_{2\parallel}\right) \\
& \qquad \times \gamma_{\parallel\alpha}\left(m_f - v_2 \not{p}_{3\parallel} - v_3 \not{p}_{1\parallel}\right)\Delta_+\Big] \\
& - \frac{\left(2-D_\parallel\right)}{2s}\Bigg(Tr\left[\gamma_{\parallel\mu}\left(v_1 \not{p}_{1\parallel} - v_2 \not{p}_{2\parallel}\right)\gamma_{\parallel\nu}\gamma_{\parallel\alpha}\Delta_+\right] \\
& + Tr\left[\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\left(v_1 \not{p}_{3\parallel} + v_3 \not{p}_{2\parallel}\right)\gamma_{\parallel\alpha}\Delta_+\right] \\
& + Tr\left[\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\gamma_{\parallel\alpha}\left(-v_2 \not{p}_{3\parallel} - v_3 \not{p}_{1\parallel}\right)\Delta_+\right] \Bigg) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Al igual que en el límite de campo cero, las únicas diferencias entre las Ecs. (3.26) y (3.27) son el orden de las matrices de Dirac dentro de las trazas y los signos de los momentos $\not{p}_{i\parallel}$.

Nuevamente, los términos con un número impar de matrices Gamma se suman mientras que los que tiene un número par se restan, dando como resultado una contribución nula en el régimen de campo intenso

$$\mathcal{M}^{qB\,(I)}_{E\;\mu\nu\alpha} + \mathcal{M}^{qB\,(II)}_{E\;\mu\nu\alpha} = 0. \tag{3.28}$$

Este resultado ya se había adelantado desde el punto de vista de la estructura tensorial en la Ec. (3.8) ya que al no tener ninguna contribución con los tres BV con polarizaciones transversales L^*, no se pude tener una estructura tensorial puramente paralela como lo exige el límite de campo magnético intenso (ver Sección 2.4.2), en el sentido de la reducción dimensional.

3.3.3. Región de campo magnético intermedio

Anteriormente se mostró que las contribuciones para el proceso de producción de fotones mediante fusión de gluones se anulan en el límite de campo intenso. Este régimen sólo es válido para fotones de baja energía.

Por otro lado, considerando ahora fotones más energéticos $p_{3\perp} \gg 600$ MeV, la jerarquía entre las escalas de energía cambia dando como resultado

$$m_f^2 \;\ll\; |q_f B| \;\ll\; |p_{3\perp}|^2.$$

Una región que no se ha discutido previamente y que se designará como régimen de campo magnético intermedio.

Teniendo en mente que el resultado para una intensidad de campo arbitraria, dada por la Ec. (3.19), a grandes rasgos se puede sintetizar en la siguiente expresión genérica

$$\int_0^\infty ds\ F\left(q_f B, s, m_f, p_{3\perp}, \omega_i\right), \tag{3.29}$$

la cual encapsula todas las escalas de energía implicadas. Realizando una separación similar a la hecha en la Ec. (2.41), la expresión anterior se ve como

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ds\ \tilde{F}\left(\frac{q_f B}{|p_{3\perp}|^2}, s, \frac{m_f}{|p_{3\perp}|}, \frac{\omega_i}{|p_{3\perp}|}\right) = & \int_0^{|p_{3\perp}|^2/\mu_{\mathrm{qB}}^2} ds\ \tilde{F}\left(\frac{q_f B}{|p_{3\perp}|^2}, s, \frac{m_f}{|p_{3\perp}|}, \frac{\omega_i}{|p_{3\perp}|}\right) \\ & + \int_{|p_{3\perp}|^2/\mu_{\mathrm{qB}}^2}^\infty ds\ \tilde{F}\left(\frac{q_f B}{|p_{3\perp}|^2}, s, \frac{m_f}{|p_{3\perp}|}, \frac{\omega_i}{|p_{3\perp}|}\right),\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde se ha reescalado la variable $s \longrightarrow |p_{3\perp}|^2 s$ y se ha introducido una nueva escala de energía μ_{qB} a partir del cual la relación $|q_f B|s \ll 1$ es válida a lo largo del intervalo de integración sobre el parámetro s.

Al tomar en cuenta que la relación entre la intensidad de campo magnético y el momento perpendicular del fotón es

$$|q_f B| \ \ll \ |p_{3\perp}|^2,$$

la contribución principal a la integral es el primer término del lado derecho de la Ec. (3.30). Es decir, cuando la jerarquía entre las escalas de energía es $|p_{3\perp}|^2 \gg |q_f B|$, $|p_{3\perp}|^2 \gg \mu_{\mathrm{qB}}^2$ y $\mu_{\mathrm{qB}}^2 > |q_f B|$, la contribución principal proviene de quarks con bajas virtualidades. Además, como en esta región se cumple que $|q_f B|s \ll 1$, se tiene la posibilidad de hacer una expansión en serie en potencias de $q_f B s$ similar a las presentadas en la Sección 2.4.3.

Como se había resaltado anteriormente, al llevar a cabo la expansión en series de Taylor, el factor exponencial, que en este caso toma la forma

$$\mathcal{X}(q_f B, s, v_j, p_{3\perp}, \omega_i) \equiv \exp\left[-i\frac{p_{3\perp}^2}{q_f B}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3\omega_1^2 + \mathrm{t}_2\mathrm{t}_3\omega_2^2 + \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\omega_3^2}{\omega_3^2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3\right)}\right], \tag{3.31}$$

debe de tratarse con cuidado. En este caso, no es posible realizar una expansión en serie de Taylor debido a que en el argumento de la exponencial aparece el factor global $p_{3\perp}^2/q_f B$. Sin embargo, una expansión de potencias en $q_f B$ en las funciones trigonométricas de la exponencial es válido, dando como resultado

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\mathrm{intermedio}}(q_f B, s, v_j, p_{3\perp}, \omega_i) = & e^{ip_{3\perp}^2\frac{(q_f B)^2 s^3}{3}\left(-v_2^2+v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3\right)v_1v_3\omega_1^2/\omega_3^2} \\ & \times e^{ip_{3\perp}^2\frac{(q_f B)^2 s^3}{3}\left(-v_1^2+v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3\right)v_2v_3\omega_2^2/\omega_3^2} \\ & \times e^{ip_{3\perp}^2\frac{(q_f B)^2 s^3}{3}\left(-v_3^2+v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3\right)v_1v_2\omega_3^2/\omega_3^2}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Nótese la gran similitud con la Ec. (2.63), así como la diferencia al no contener términos lineales en $q_f B$. Ésto se debe a que la respectiva fase entre los diagramas de la Figura 3.1 se anula, al considerar a los BV en capa de masa, debido a que es proporcional a $p_2\hat{F}p_1$.

Por tanto, al realizar una expansión en serie de potencias sobre $q_f Bs$ en la Ec. (3.19), la forma general del vértice efectivo para la región de campo magnético intermedio está dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2) = &\, iq_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\frac{1}{2^D\pi^{D/2}} \\ &\times \int dv_1\, dv_2\, dv_3\, \delta(1-v_1-v_2-v_3) \\ &\times \int_0^\infty ds\ s^{2-D/2}\ e^{-ism_f^2}\mathcal{X}_{\text{intermedio}}(q_f B, s, v_j, p_{i\perp})\ K(q_f Bs, v_i, p_{3\perp}, \omega_i), \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde se ha realizado el cambio de variables usual $s_j = sv_j$ tal que $s \equiv s_1 + s_2 + s_3$, con $s \in [0,\infty]$ y $v_j \in [0,1]$ de tal forma que se cumpla la relación $v_1+v_2+v_3 = 1$ y se ha tomado el límite $|p_{3\perp}|^2/\mu^2_{\text{qB}} \longrightarrow \infty$ ya que dichas contribuciones están suprimidas exponencialmente [55, 56]. La función $K(q_f Bs, v_i, p_{3\perp}, \omega_i)$ es un polinomio sobre $q_f Bs$ con una forma muy parecida a la Ec. (2.56).

Similarmente al régimen de campo débil con momento perpendicular grande, las contribuciones del vacío se mezclan con las magnéticas y no se puede realizar una separación similar a la Ec. (2.62). Por ello, es importante tener un manejo cuidadoso de los términos con divergencias UV; en el caso del vacío ambos diagramas tienen términos divergentes pero se cancelan idénticamente como se mostró en la Sección 3.3.1.

Además, como la dependencia en $q_f B$ no está totalmente contenida en una función polinómica, las integrales sobre el parámetro s no se pueden realizar mediante representaciones integrales de la función Gama sino que toman formas más intrincadas. En este caso las integrales sobre s dan como resultado funciones hipergeométricas generalizadas

$${}_pF_q\left(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...(b_p)_n}\frac{z^n}{n!}, \tag{3.34}$$

donde $(x)_n$ es el símbolo de Pochhammer.

El análisis presentado hasta este punto ha sido mi contribución al trabajo publicado en Phys. Rev. D [113]. El resto del estudio se centra en la integración numérica sobre los parámetros v_1 y v_2.

En el siguiente capítulo, mediante un estudio numérico, se analiza el efecto de un campo magnético en el proceso de producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones.

Capítulo 4

Producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético externo

En este capítulo se estudia el efecto de un campo magnético externo sobre la tasa de producción del bosón de Higgs mediante fusión de gluones. Para ello, se calcula la contribución dominante de sección eficaz del bosón de Higgs en presencia de un campo magnético homogéneo de intensidad arbitraria usando la metodología desarrollada en el Capítulo 1. Considerando el escenario físico donde se da el proceso, existe una jerarquía entre las distintas escalas de energía que lleva a un régimen tal como se discute Capítulo 2. Se comparan los resultados obtenidos para la tasa de decaimiento, en el vacío y en presencia de un campo magnético, y se presenta una breve discusión sobre los resultados obtenidos con el apoyo de gráficas, así como su interpretación física.

4.1. Justificación

Hasta el momento, el estudio del bosón de Higgs se ha basado en las datos obtenidos de colisiones protón-protón [18–22]. De tal manera que todas las investigaciones a las que se han hecho referencia se enfocan únicamente en la física del bosón de Higgs en el vacío [11–17]. Sin embargo, pueden ser extendidas a escenarios donde los efectos de agentes externos pudieran cambiar las propiedades globales del bosón de Higgs [146–148].

Actualmente, se está estudiando la posibilidad de la detección de bosones de Higgs en otros tipos de colisiones; por ejemplo, en las colisiones de iones pesados relativistas que se estudian actualmente en RHIC y en LHC y, próximamente, en el “Future Circular Collider” (FCC) también en el CERN [25, 26]. En tales procesos, dependiendo de la etapa de la posible formación y decaimiento del bosón de Higgs, se tendrían que considerar los efectos del glasma [149] y/o del QGP, así como aquellos debidos a la centralidad y a la energía de la colisión, como son: temperatura, densidad y/o la presencia de un campo magnético [28, 29, 32].

Vale la pena mencionar que se ha estudiando la posible formación del QGP en colisiones de nucleones [150, 151], e incluso la presencia de campos magnéticos [152, 153]. Entonces, el análisis de la producción de bosones de Higgs en colisiones protón-protón también podría verse modificado por agentes externos.

Los efectos de estos agentes externos en las propiedades del bosón de Higgs deben de ser tomados en cuenta para poder comparar correctamente los resultados teóricos con las mediciones experimentales ya que podrían ayudar a discernir o fortalecer si posibles desviaciones experimentales respecto de las predicciones del ME pueden ser interpretadas como física más allá del Modelo Estándar (BSM). Una desviación de los datos experimentales con respecto a las predicciones teóricas podría ser atribuida erróneamente a nueva física cuando en realidad se debía al efecto de agentes externos que no fueron considerados en la cálculos.

Además, el QGP que se crea en las colisiones de iones pesados relativistas se puede utilizar como un modelo para el Universo temprano inmediatamente después del Big Bang y, por tanto, también tiene implicaciones para la cosmología [148]. De tal forma que investigar y comprender los efectos del QGP sobre el bosón de Higgs nos podría ayudar a comprender distintos procesos que se dieron en las etapas tempranas del Universo.

Pasadas las etapas iniciales de la colisión de iones pesados se forma el QGP; en los experimentos realizados en el LHC se ha encontrado que el tiempo característico para la expansión y enfriamiento del sistema es del orden de 10 fm/c [154–156], con c la velocidad de la luz en el vacío. Teniendo en cuenta la vida media del bosón de Higgs, $\tau \sim 47$ fm/c [69], se observa que esta es mayor que el tiempo característico del QGP, de modo que alguna de las siguientes situaciones físicas podría presentarse:

- Que un bosón de Higgs producido en las etapas iniciales de la colisión, antes de la formación del QGP, sea afectado por el plasma y modifique algunas de sus propiedades como la tasa de decaimiento, distribución cinemática, etc.
- Que un bosón de Higgs sea producido dentro del QGP de manera que el efecto principal del medio termalizado se observará en la tasa de producción.
- Que un bosón de Higgs sea producido después del enfriamiento del QGP, en esta última situación la producción del Higgs se verá afectada debido al efecto que tenga el QGP sobre las partículas que posteriormente darán origen al Higgs.

Recordando que en las colisiones periféricas de iones pesados se ha estimado la creación de campos magnéticos de gran intensidad y corta duración [28, 31], si el bosón de Higgs es producido en una etapa de la colisión en presencia de este campo magnético externo, una pregunta natural que surge es ¿como se verá afectada su tasa de producción (en la sección eficaz)? [36] La respuesta a la pregunta anterior dependerá del momento exacto de la producción pues el campo magnético, al decaer rápidamente, podría ser intenso o débil. Esta última consideración, asociada a un escenario físico, es particularmente importante pues permite cuantificar analíticamente el efecto del campo magnético mediante algún tipo de aproximación [36, 53, 54].

La producción de bosones de Higgs mediante la fusión de gluones es un proceso de gran relevancia debido a que contribuye con más del 90 % de la sección eficaz a 13 TeV [69], esto es causado por la gran densidad de gluones que se crea en las etapas previas a la colisión, fenómeno conocido como saturación de gluones [157]. La contribución, a la producción de

Higgs mediante la fusión de gluones, debido a interacciones puras de QCD es alrededor del 95 % mientras que interacciones tipo QCD-electrodébil (QCD-EW) contribuyen con aproximadamente 5 % [69].

Por otro lado, uno de los muchos procesos físicos que contribuyen a la tasa de decaimiento del bosón de Higgs son las emisiones de dos bosones vectoriales (di-boson modes): $H \longrightarrow \gamma\gamma$, WW y ZZ [158]. Particularmente, Nielsen ha calculado la tasa de decaimiento de bosones de Higgs a dos fotones en presencia de un campo magnético externo utilizando el formalismo de tiempo propio de Schwinger [37], encontrando que la tasa de decaimiento presenta una singularidad cuando se consideran valores de campo magnético grandes. La parte principal de ese trabajo se centra en la aparición de inestabilidades procedentes del sector electrodébil en el ME. Aunque la contribución de los quarks se discute brevemente en la Sección V, no se presenta ninguna expresión analítica para una configuración cinemática arbitraria de los fotones. Además, los resultados presentados parecen ser calculados sin utilizar ningún esquema de regularización y se limitan a la región de campo intenso para una configuración particular de los momentos de los fotones.

4.2. Sección eficaz

La sección eficaz del bosón de Higgs a través del proceso de fusión de gluones

$$gg \longrightarrow H,$$

está asociada al elemento de matriz invariante

$$\begin{aligned}\mathcal{M} =& \langle p_H|(p_1,\mu,\sigma,a),(p_2,\nu,\sigma',b)\rangle\,\epsilon_\mu\left(p_1,\sigma\right)\epsilon_\nu\left(p_2,\sigma'\right)\\ \equiv& \mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu\left(p_1,\sigma,a\right)\epsilon_\nu\left(p_2,\sigma',b\right),\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde p_1 y p_2 son los momentos de los gluones incidentes con polarizaciones σ y σ' e índices de color a y b respectivamente, p_H es el momento asociado al bosón de Higgs producido.

A partir del elemento de matriz invariante anterior, es posible obtener la sección eficaz diferencial para la producción de bosones de Higgs a partir de la Ec. (1.5). De tal forma, la sección eficaz no polarizada está dada por

$$\begin{aligned}\sigma\left(gg \longrightarrow H\right) &= \frac{1}{2m_H^2}\int\frac{d^3p_H}{(2\pi)^3 2E_H}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1+p_2-p_H\right)\overline{\sum}_{\text{color,espín}}|\mathcal{M}|^2\\ &= \frac{1}{2m_H^2}2\pi\delta\left(\mathcal{S}-m_H^2\right)\overline{\sum}_{\text{color,espín}}|\mathcal{M}|^2,\end{aligned} \tag{4.2}$$

con E_H y m_H la energía y la masa del bosón de Higgs producido, respectivamente, y se usa la notación $\mathcal{S} \equiv (p_1+p_2)^2$. La delta de Dirac en la segunda igualdad asegura que el bosón de Higgs sea producido en la capa de masa.

La "sección eficaz completa" (full cross section), de la producción de Higgs mediante fusión de gluones, se obtiene "pesando" la sección eficaz con las distribuciones de gluones de la respectiva colisión; por ejemplo, para una colisión protón-protón se tiene que [81]

$$\sigma_{\text{FCS}}\left(pp \longrightarrow H\right) = \int_\tau^1 dx_1\int_{\tau/x_1}^1 dx_2\rho_g\left(x_1,m_H^2\right)\rho_g\left(x_2,m_H^2\right)\sigma_{gg\longrightarrow H}(\mathcal{S}=x_1x_2m_H^2), \tag{4.3}$$

donde x_1 y x_2 son las fracciones de momento correspondientes a cada gluón, ρ_g es la densidad de gluones en el protón y $\tau \equiv 4m_f^2/m_H^2$, con m_f la masa de los quarks involucrados.

A partir de la descomposición tensorial obtenida en la Sección 1.3.2 para el vértice efectivo de una interacción entre un bosón escalar y dos BV, en presencia de un campo magnético externo, se puede escribir inmediatamente la estructura tensorial para la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones

$$\mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}(p_1,p_2) = a_1^{++}\hat{L}_1^{\mu}\hat{L}_2^{\nu} + a_2^{++}\hat{L}_1^{*\mu}\hat{L}_2^{*\nu} + \frac{a_4^{+-}}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_1^{\mu}\hat{L}_2^{*\nu} + \hat{L}_1^{*\mu}\hat{L}_2^{\nu}\right), \tag{4.4}$$

que gracias a la estructura ortogonal, permite calcular fácilmente la amplitud para el proceso

$$\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}_{qB}|^2 = |a_1^{++}|^2 + |a_2^{++}|^2 + |a_4^{+-}|^2, \tag{4.5}$$

donde cada uno de los coeficientes se obtiene al proyectar el vértice en las diferentes estructuras tensoriales

$$\begin{aligned} a_1^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\hat{L}_{1\mu}\hat{L}_{2\nu}, \\ a_2^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\hat{L}_{1\mu}^{*}\hat{L}_{2\nu}^{*}, \\ a_4^{+-} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_{1\mu}\hat{L}_{2\nu}^{*} + \hat{L}_{1\mu}^{*}\hat{L}_{2\nu}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Una vez que se ha obtenido el promedio de espines, lo que resta por hacer es promediar sobre colores. Para ello, es conveniente redefinir los coeficientes de acuerdo a

$$a_i = \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right]\tilde{a}_i = \frac{\delta^{ab}}{2}\tilde{a}_i. \tag{4.7}$$

Con esto se extrae el factor obtenido de la traza de color en la representación fundamental, de tal forma que el promedio sobre los colores de los gluones, en la representación adjunta, está dado por

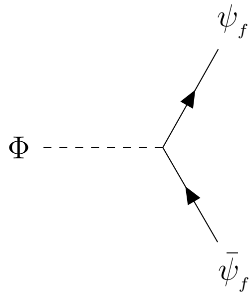
$$\overline{\sum}_{\text{color,espín}}|\mathcal{M}_{qB}|^2 = \frac{\delta^{ab}\delta_{ab}}{2^2\cdot 8^2\cdot 4}\left(|\tilde{a}_1^{++}|^2 + |\tilde{a}_2^{++}|^2 + |\tilde{a}_4^{+-}|^2\right) = \frac{1}{128}\left(|\tilde{a}_1^{++}|^2 + |\tilde{a}_2^{++}|^2 + |\tilde{a}_4^{+-}|^2\right). \tag{4.8}$$

Finalmente, al sustituir el resultado anterior en la Ec. (4.2), se obtiene la siguiente expresión analítica para la sección eficaz no polarizada de producción de Higgs mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético

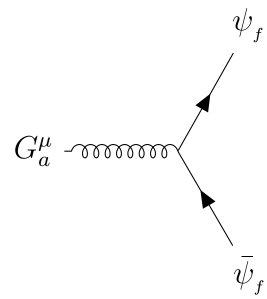
$$\sigma_{qB}\left(gg \longrightarrow H\right) = \frac{1}{256 m_H^2}\left(|\tilde{a}_1^{++}|^2 + |\tilde{a}_2^{++}|^2 + |\tilde{a}_4^{+-}|^2\right) 2\pi\delta\left(\mathcal{S} - m_H^2\right). \tag{4.9}$$

4.3. Vértice efectivo a un lazo en presencia de un campo magnético

Es importante mencionar que, al no existir un acoplamiento directo entre el bosón de Higgs y los bosones de norma de la interacción nuclear fuerte [84,116], el proceso de producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones no tiene contribuciones a nivel árbol en el ME y ocurre únicamente mediante correcciones radiativas de QCD. En este contexto, los vértices de interacción relevantes están dados por



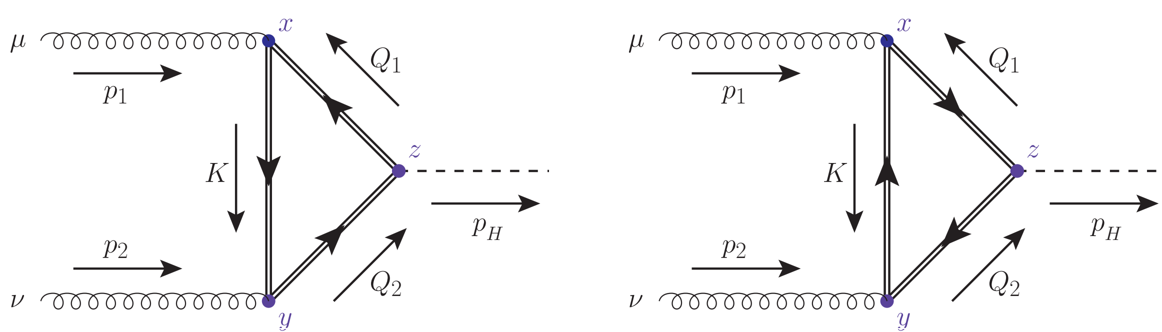
$$= -ig_f,$$



$$= -ig_s t^a \gamma^\mu, \tag{4.10}$$

donde el subíndice f denota el sabor del quark, g_s es la constante de acoplamiento fuerte entre los gluones y los quarks, g_f es la constante de acoplamiento entre los quarks y el bosón de Higgs y las matrices t^a representan los generadores del grupo de simetría local $SU(3)$.

Las contribuciones dominantes a la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones, involucran un lazo de quarks como se muestra pictóricamente en los diagramas de Feynman de la Fig. 4.1. La presencia del campo magnético externo se ve reflejada en la forma en que los quarks se propagan ya que, al ser eléctricamente cargados, se acoplan con el campo magnético modificando su movimiento.



(a) Diagrama I. (b) Diagrama II.

Figura 4.1: Diagramas de Feynman que contribuyen al proceso a un lazo en presencia de un campo magnético externo, la contribución del campo está representada por una línea doble en los propagadores fermiónicos. Las flechas en los propagadores representan el flujo de carga, mientras que las flechas exteriores son la dirección del momento.

Aplicando las reglas de Feynman, Ec. (4.10), a los diagramas mostrados en la Figura 4.1, se obtienen las siguientes expresiones analíticas para el vértice efectivo

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(I)}}(x,y,z) = -\mathcal{TR}\left[\left(-ig_s t^a \gamma^\mu\right) S^{^{qB}}(x,z)\left(-ig_{_f}\right) S^{^{qB}}(z,y)\left(-ig_s t^b \gamma^\nu\right) S^{^{qB}}(y,x)\right], \tag{4.11}$$

y

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(II)}}(x,y,z) = -\mathcal{TR}\left[\left(-ig_s t^a \gamma^\mu\right) S^{^{qB}}(x,y)\gamma^\nu \left(-ig_s t^b \gamma^\nu\right) S^{^{qB}}(y,z)\left(-ig_{_f}\right) S^{^{qB}}(z,x)\right], \tag{4.12}$$

donde el operador de traza funcional $\mathcal{TR}$ indica la suma sobre todos los grados de libertad indeterminados dentro del lazo: el momento, el espín (Tr) y el color de los quarks (tr).

Aplicando la metodología planteada en el capítulo anterior, se llega a la siguiente expresión analítica para la contribución del diagrama I al vértice de la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético de intensidad arbitraria

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2) =& ig_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp+D/2+1}\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D\pi^{D/2}} \\
&\times\int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1s_3p^2_{1\parallel}+s_2s_3p^2_{2\parallel}+s_1s_2p^2_{H\parallel}\right)} e^{-\frac{i}{q_fB}\frac{\mathrm{t_1t_3}p^2_{1\perp}+\mathrm{t_2t_3}p^2_{2\perp}+\mathrm{t_1t_2}p^2_{H\perp}+2\mathrm{t_1t_2t_3}p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}} \\
&\times\Bigg\{Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f e^{(1)}+\not{V}_1\right)\left(m_f e^{(2)}+\not{V}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f e^{(3)}+\not{V}_3\right)\right] \\
&\quad+\frac{im_f}{2s}\Bigg(-D_\parallel\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right]\Bigg) \\
&\quad+\frac{im_f\,q_fB}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)} \\
&\qquad\times\Bigg(-D_\perp\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu e^{(3)}\right]+D_\perp\,Tr\left[\gamma^\mu\left(e^{(1)}+e^{(2)}\right)\gamma^\nu\right] \\
&\qquad-2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\nu_\perp\right]-2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\right] \\
&\qquad+\mathrm{t_1}\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha_\perp\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad-\mathrm{t_2}\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad+\mathrm{t_3}\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu e^{(3)}\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}\tag{4.13}$$

con

$$\not{V}_1=\left(-\frac{s_3\not{p}_{1\parallel}+s_2\not{p}_{H\parallel}}{s}\right)e^{(1)}+\frac{\mathrm{t_3}\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t_2}\not{p}_{H\perp}-\mathrm{t_2t_3}\hat{\not{F}}p_2}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}},\tag{4.14}$$

$$\not{V}_2=\left(\frac{s_1\not{p}_{H\parallel}+s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)}+\frac{-\mathrm{t_3}\not{p}_{2\perp}-\mathrm{t_1}\not{p}_{H\perp}-\mathrm{t_1t_3}\hat{\not{F}}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}},\tag{4.15}$$

$$\not{V}_3=\left(\frac{s_1\not{p}_{1\parallel}-s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)}+\frac{-\mathrm{t_1}\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t_2}\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t_1t_2}\hat{\not{F}}p_H}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}.\tag{4.16}$$

En la Sección C.4 se muestran las expresiones correspondientes para el diagrama II. Vale la pena mencionar que los resultados adecuados para la producción de bosones de Higgs en el vacío se obtienen de forma trivial al particularizar el límite de campo cero estudiado en la Sección 1.4.3.

Aunque la Ec. (4.13), y su análoga para el diagrama II Ec. (C.65), son un resultado exacto, las integrales restantes sobre los parámetros de Schwinger no pueden calcularse analíticamente debido a su intrincada forma. Por ello, para conocer los efectos del campo magnético externo sobre el vértice efectivo, es necesario realizar algún tipo de aproximación que permitan llevar a cabo el análisis de estas integrales para distintas situaciones físicas.

Las escalas físicas presentes en las expresiones mencionadas son los momentos de los gluones incidentes p_1 y p_2, la masa de los quarks en lazo m_f y la combinación de la carga de los quarks con el campo magnético $q_f B$. Una jerarquía entre estas escalas de energía podría ser determinada y dependerá de la situación física presente en la producción de Higgs y, de acuerdo a ésta, se podrán realizar distintas aproximaciones que facilitaran el cálculo de la sección eficaz.

4.4. Aproximación de campo débil con momentos transversos bajos

Antes que nada, vale la pena notar que en las aproximaciones de campo débil se puede dar a entender que se refieren a campos magnéticos "pequeños" pero esto no siempre es cierto. Debido a que, como se analizó en la Sección 2.4.3, estas aproximaciones se toman cuando $|qB| \ll m_f^2$, entonces, el límite máximo de la intensidad del campo magnético está determinado por el quark que sea elegido para hacer el análisis. En la Tabla 4.1 se muestran los valores máximos de campo magnético permitidos para que la aproximación de campo débil sea válida.

Sabor	Masa	Carga eléctrica $[e]$	$\lvert qB\rvert_{max}$ [GeV^2]
Up (u)	2.16±0.07 MeV	2/3	$\sim 1.0 \times 10^{-6}$
Down (d)	4.70±0.07 MeV	-1/3	$\sim 4.4 \times 10^{-6}$
Strange (s)	93.5±0.08 MeV	-1/3	$\sim 1.7 \times 10^{-3}$
Charm (c)	1.2730±0.0046 GeV	2/3	$\sim 3.2 \times 10^{-1}$
Bottom (b)	4.183±0.007 GeV	-1/3	~ 3.5
Top (t)	172.57±0.29 GeV	2/3	$\sim 6.0 \times 10^{3}$

Tabla 4.1: Orden del campo magnético máximo a partir de la cual la aproximación de campo débil pierde validez, se toma $|qB|_{max} = 0.2m_f^2$. Las masas de los quarks fueron tomadas de la referencia [69].

Para tener un punto de comparación, el campo máximo que se crea en las colisiones de iones pesados relativistas está dado por

$$|eB|_{max} \simeq 10m_\pi^2 \sim 2.0 \times 10^5 \text{ MeV}^2 = 2.0 \times 10^{-1} \text{ GeV}^2.$$

Entonces, el campo magnético de las etapas iniciales de colisiones de iones pesados relativistas puede considerarse "débil" para los quarks pesados pero no para los demás.

En el contexto de la física del Higgs, el caso del vacío está muy estudiado en la literatura [15–17, 81] y se ha encontrado que la contribución principal a la sección eficaz de la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones proviene del quark top

$$\frac{\sigma_{LO}^{\text{top}}(gg \longrightarrow H)}{\sigma_{LO}^{\text{bottom}}(gg \longrightarrow H)} \sim 130, \tag{4.17}$$

$$\frac{\sigma_{LO}^{\text{top}}(gg \longrightarrow H)}{\sigma_{LO}^{\text{charm}}(gg \longrightarrow H)} \sim 5400, \tag{4.18}$$

y es considerablemente mayor a las contribuciones de los otros quarks[1]. Al ser el quark top el que da la contribución principal a la sección eficaz de la producción del bosón Higgs mediante fusión de gluones en el vacío, una aproximación de campo débil es idónea para explorar los efectos del campo magnético externo $|q_f B| \ll m_f^2$.

En el presente trabajo, dado el contexto físico de la producción de bosones de Higgs, el análisis se restringe a la contribución del quark top mediante la aproximación campo débil con momentos transversos bajos

$$|q_f B| \ll m_f^2 \quad \text{y} \quad |p_{i\perp}|^2 \lesssim m_f^2.$$

Esta aproximación nos brinda la posibilidad de explorar una amplia región cinemática iniciando desde cero hasta momentos del orden de 170 GeV.

Estudios recientes muestran que el momento de los bosones de Higgs producidos en colisiones portón-protón tiene un espectro muy amplio. En particular, el momento en el plano transverso de la reacción p_T va desde unos pocos GeV hasta los TeV [159, 160]. Ésto es relevante para el presente estudio ya que p_T puede tener componentes perpendiculares al campo magnético producido en las colisiones de iones pesados relativistas, por ejemplo: considerando al campo magnético sobre el eje z, el plano trasverso de la reacción podría estar defino por el $y-z$ mientras que el plano perpendicular al campo magnético es el $x-y$, de tal forma que tienen una componente en común.

Antes de presentar los resultados obtenidos, es conveniente delimitar la regiones de validez de la aproximación de campo débil en términos de la masa del Higgs y la masa de los quarks. Como ya se mencionó, en este estudio sólo se van a considerar las contribuciones del quark top, entonces, se deduce fácilmente que el punto crítico (para la masa del Higgs) alrededor de la cual la aproximación de campo débil se rompe es

$$m_H^{\text{crítica}} \sim 346.2 \text{ GeV}.$$

Éste corresponde a $\tau = 1$, es decir, $4m_{\text{top}}^2 = m_H^2$. Ahora, si se toma fija la masa del bosón de Higgs $m_H = 125.2$ GeV [69], la aproximación de campo débil no es válida alrededor del punto

$$m_f^{\text{crítica}} \sim 62.5 \text{ GeV}.$$

Por otra lado, si la intensidad del campo magnético está dada por $|q_f B| = N m_f^2$ con $N \ll 1$ y la variable es m_H, el intervalo alrededor de $m_H^{\text{crítica}}$ donde la aproximación de campo débil no es válida está dado por $m_H^{\text{crítica}} \pm \Delta m$, con

$$\Delta m > \sqrt{N} m_f. \tag{4.19}$$

[1]Ésto se debe mayormente a que el Higgs presenta acoplamientos tipo Yukawa grandes.

Al tomar como el campo máximo $qB_{max} = 0.2m_{\text{top}}^2$, el intervalo corresponde a

$$\Delta m > 78 \text{ GeV}. \tag{4.20}$$

Si ahora la masa del Higgs está fija y la variable es la masa de los quarks, el intervalo alrededor de $m_f^{\text{crítica}}$ donde la aproximación de campo débil no es válida es $m_f^{\text{crítica}} \pm \Delta m$, con

$$\Delta m > \frac{\sqrt{N}}{2} m_H, \tag{4.21}$$

que, al tomar como campo máximo $qB_{max} = 0.2m_f^2$, a

$$\Delta m > 28 \text{ GeV}. \tag{4.22}$$

De acuerdo a la discusión presentada en la Sección 2.4.3, a nivel de cálculo, la aproximación de campo débil con momentos transversos bajos consiste en realizar una expansión en potencias de $q_f B$ en las Ecs. (4.13) y (C.69). De este punto en adelante todos los cálculos fueron realizados con la ayuda del software Mathematica 13.0 y la extensión FeynCalc 9.3.1 y no se escribirán de forma explícita en el presente texto debido a la cantidad de términos que contienen. A continuación se describe brevemente el procedimiento que se sigue para obtener los resultados finales.

En el primer paso del desarrollo se factorizaron las fases contrarias asociadas a cada diagrama obteniendo una expresión de la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu} &= \mathcal{M}_{qB(I)}^{\mu\nu}(p_1,p_2) + \mathcal{M}_{qB(II)}^{\mu\nu}(p_1,p_2) \\
&= \int dv_1\, dv_2\, dv_3\, \delta(1-v_1-v_2-v_3) \\
&\quad \times \int_0^\infty ds\, s^{2-D/2} e^{is\left(v_1 v_3 p_1^2 + v_2 v_3 p_2^2 + v_1 v_2 p_3^2 - m_f^2\right)} \left[\frac{e^{-\Phi} - e^{\Phi}}{2} \left(\mathcal{T}_{qB\,(I)}^{\mu\nu} - \mathcal{T}_{qB\,(II)}^{\mu\nu} \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{e^{-\Phi} + e^{\Phi}}{2} \left(\mathcal{T}_{qB\,(I)}^{\mu\nu} + \mathcal{T}_{qB\,(II)}^{\mu\nu} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.23}$$

donde Φ está dada por

$$\Phi = \frac{i}{q_f B} \frac{2\text{t}_1\text{t}_2\text{t}_3 p_2 \hat{F} p_1}{\text{t}_1\text{t}_2\text{t}_3 - \text{t}_1 - \text{t}_2 - \text{t}_3}, \tag{4.24}$$

las funciones $\mathcal{T}_{qB}^{\mu\nu}$ corresponden a la parte de las trazas en las Ecs. (4.13) y (C.69), y se ha realizado el cambio de variables usual $s_j = sv_j$ tal que $s \equiv s_1 + s_2 + s_3$, con $s \in [0, \infty]$ y $v_j \in [0,1]$ de tal forma que se cumpla la relación $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. En la Ec. (4.23) se observa que la diferencia entre las fases, de los diagramas conjugados de carga, dará origen a distintos patrones de interferencia dependiendo de la cinemática de los gluones. La expansión de esta expresión se obtuvo hasta orden cuadrático en el campo $(q_f B)^2$.

Las integrales sobre s en la Ec. (4.23), resultantes de la expansión, se pueden identificar con las representaciones integrales de la función Gamma dadas por la Ec. (1.70),

$$\int_0^\infty s^{n-\frac{D}{2}} e^{-i\Delta_m^2 s} ds = \left(i\Delta_m^2\right)^{\frac{D}{2}-(n+1)} \Gamma\left(n+1-\frac{D}{2}\right) \tag{4.25}$$

y, como se ha discutido a lo largo del trabajo, las integrales sobre s se tienen que realizar en D dimensiones para reproducir los resultados reportados en la literatura. Vale la pena resaltar que los polinomios resultantes de la expansión de las Ecs. (4.13) y (C.69) no presentan divergencias UV, es decir, no es necesario llevar a cabo un proceso de renormalización.

Una vez realizada la integración sobre la variable s, se lleva a cabo la traza espinorial. Éste es el procedimiento que requiere más tiempo y recursos computacionales. Después de llevar a cabo la traza es cuando se regresa a trabajar en $D = 4$. En este punto es cuando se observa una cancelación entre los términos lineales en $q_f B$, esto es consistente con el teorema de Furry.

Para poder realizar de forma analítica las integrales restantes, sobre los parámetros v_i, se lleva el vértice efectivo a la capa de masa usando las relaciones

$$p_1^2 = p_2^2 = 0 \quad \text{y} \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{m_H^2}{2}. \tag{4.26}$$

El orden para realizar las integrales restantes es indistinto: la primera integración es trivial, mientras que la segunda arroja polinomios en la tercera variable y la última integración da como resultado funciones trigonométricas, logarítmicas y polilogarítmicas que tienen como argumentos las escalas físicas del problema. En particular, es de gran utilidad escribirlas en términos de la variable adimensional $\tau \equiv 4m_f^2/m_H^2$.

El resultado final de este procedimiento es una expresión para el vértice efectivo total en la aproximación de campo débil con momentos transversos bajos. Una vez obtenida esta expresión, es posible obtener los distintos "factores de forma" al proyectarla sobre las diferentes estructuras tensoriales del vértice efectivo como se muestra en la Ec. (4.6)

$$\begin{aligned} a_1^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu} \hat{L}_{1\mu} \hat{L}_{2\nu}, \\ a_2^{++} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu} \hat{L}_{1\mu}^* \hat{L}_{2\nu}^*, \\ a_4^{+-} &= \mathcal{M}_{qB}^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{L}_{1\mu} \hat{L}_{2\nu}^* + \hat{L}_{1\mu}^* \hat{L}_{2\nu} \right). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Finalmente, a partir de los factores de forma y la Ec. (4.9), es posible obtener la sección eficaz no polarizada de la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético

$$\sigma_{qB} \left(gg \longrightarrow H \right) = \frac{1}{256 m_H^2} \left(|\tilde{a}_1^{++}|^2 + |\tilde{a}_2^{++}|^2 + |\tilde{a}_4^{+-}|^2 \right) 2\pi \delta \left(\mathcal{S} - m_H^2 \right), \tag{4.28}$$

donde los factores de forma se redefinieron de acuerdo a la Ec. (4.7)

$$a_i = \mathrm{tr} \left[t^a t^b \right] \tilde{a}_i = \frac{\delta^{ab}}{2} \tilde{a}_i. \tag{4.29}$$

En el cálculo explícito de la sección eficaz, Ec. (4.28), en la aproximación de campo débil con momentos transversos bajos aparecen los distintos invariantes de Lorentz dados en la Tabla 1.1. Éstos se pueden parametrizar en términos del ángulo que se subtiende entre los gluones en el plano perpendicular θ, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (p_1 \cdot p_2)_\perp &= -|p_{1\perp}||p_{2\perp}| \cos\theta, \\ p_2 \hat{F} p_1 &= |p_{1\perp}||p_{2\perp}| \sin\theta, \\ p_1 \hat{F}^* p_2 &= p_{1z} \sqrt{p_{2z}^2 - p_{2\perp}^2} - p_{2z} \sqrt{p_{1z}^2 - p_{1\perp}^2}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Vale la pena recordar que $k_\perp^2 = -k_x^2 - k_y^2 < 0$, ver Ec. (1.39).

Para estudiar el efecto de la fase que surge entre los dos diagramas de la Figura 4.1, ver Ecs. (4.23)-(4.24), el procedimiento anterior se repitió sin considerar las fases de Schwinger en los propagadores fermiónicos dados por la Ec. (1.36). Es decir, se parte de las Ecs. (4.11)-(4.12) pero sólo se considera la parte traslacionalmente invariante de los propagadores, Ec. (1.38). Aplicando la metodología desarrollada en la Sección 1.4, las consideraciones anteriores dan como resultado las Ecs. (C.73)-(C.77). Una de las diferencias principales entre estas expresiones y las Ecs. (4.13) y (C.69) es la ausencia de los términos que contienen al tensor electromagnético $\hat{F}^{\mu\nu}$.

A partir de las Ecs. (C.73)-(C.77) se obtuvo la sección eficaz no polarizada, dada por la Ec. (4.28), en la aproximación de campo magnético débil con momentos transversos bajos. Con estos resultados, es posible vislumbrar el efecto que tienen las fases de Schwinger, y la interferencia entre diagramas que surge, sobre la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones.

Con todo lo anterior ya es posible llevar a cabo el análisis del comportamiento de la sección eficaz en presencia de un campo magnético externo y su comparación respecto al caso del vacío, en donde es conveniente definir la siguiente cantidad

$$\hat{\sigma} = \frac{v^2}{g_s^4}\sigma, \tag{4.31}$$

con $v \sim 246$ GeV el valor de expectación del Higgs en el vacío.

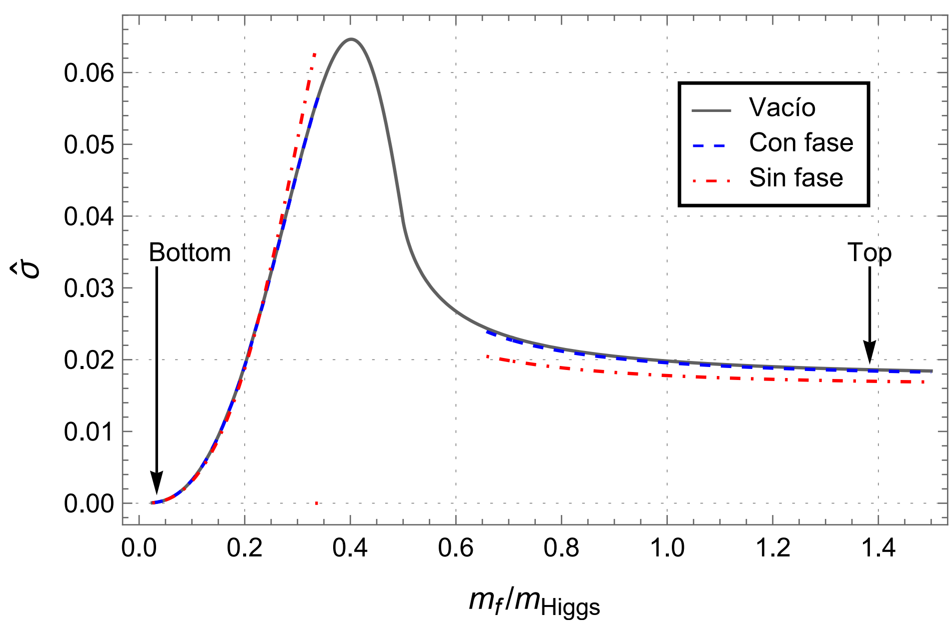


Figura 4.2: Comportamiento de la sección eficaz dada por la Ec. (4.31) como función de la masa de los quarks dentro del lazo fermiónico. Se toma $|q_f B| = 0.15 m_f^2$, $\theta = \pi$, $|p_{i\perp}| = 0.3 m_f$ y $|p_{iz}| = \frac{1}{2}\sqrt{m_H^2 - 4(0.3 m_f)^2}$ en sentidos opuestos. Los bosones de Higgs producidos con la elección de parámetros anteriores se encuentran en reposo.

En la Figura 4.2 se muestra el comportamiento de la sección eficaz dada por la Ec. (4.31) en función de la masa de los quarks con un ángulo de colisión entre los gluones de $\theta = \pi$ y manteniendo una proporción fija de los momentos transversos y la intensidad de campo magnético con la masa de los quarks. La masa del bosón de Higgs se ha fijado en el valor $m_H = 125.2$ GeV.

La elección de las componentes z de los momentos de los gluones que se consideran en la Figura 4.2 es tal que los bosones de Higgs producidos sean reales (véase Ec. (4.26)) y se encuentren en reposo. En términos de los parámetros que se manejan, la condición de capa de masa que se debe satisfacer toma la siguiente forma

$$\sqrt{p_{1z}^2 + |p_{1\perp}|^2}\sqrt{p_{1z}^2 + |p_{1\perp}|^2} - |p_{1\perp}||p_{2\perp}|\cos\theta - p_{1z}p_{2z} = \frac{m_H^2}{2}. \tag{4.32}$$

Nótese que hay un intervalo, alrededor del umbral $m_H = 2m_f$, en donde no es válida la aproximación de campo débil, ya que se debe de cumplir que

$$\frac{|q_f B|}{m_H^2 - 4m_f^2} \ll 1.$$

En la Figura 4.2 se observa que en la región por debajo del umbral, el comportamiento de las curvas que consideran los efectos del campo magnético cambia: inicialmente está por encima del caso del vacío pero van disminuyendo hasta cruzarlo y finalmente se pegan al caso del vacío a medida que la masa del quark tiende a cero, el efecto de campo se hace cada vez menor. Por otra parte, por encima del umbral, el comportamiento de las curvas indicaría que el campo magnético tiende a disminuir la sección eficaz. La curva que no considera la fase va siempre por debajo de la que sí la considera, entonces para una colisión de gluones frontal que produce al Higgs en reposo la interferencia entre los diagramas conjugados de carga pareciera ser constructiva. Nótese que, tanto el campo magnético como los momentos transversos aumentan en proporción a la masa de los quarks, por lo que en esta gráfica se resalta el efecto de diferentes sabores de los quarks sujetos a la misma jerarquía de escalas; siendo el quark top el que domina el proceso de producción de Higgs como ya se había mencionado anteriormente. Debido a esto, el análisis se centrará en esta contribución.

De ahora en adelante, para cuantificar de forma más precisa el efecto, tanto del campo magnético como del momento transverso de los gluones, es conveniente definir la “respuesta del sistema” como

$$\Delta\sigma \equiv \frac{\sigma_{qB} - \sigma_{\text{vacío}}}{\sigma_{\text{vacío}}}. \tag{4.33}$$

Puesto que hay diferentes grados de libertad involucrados en la respuesta del sistema, a continuación se analizan diferentes regímenes para intentar determinar el efecto de cada uno de ellos.

4.4.1. Fusión frontal de gluones en el plano transverso

Por simplicidad, considérese una “fusión frontal” de gluones totalmente contenida en el plano perpendicular, a la dirección del campo magnético. Como resultado, los bosones de Higgs se producen a lo largo de la “línea de colisión”. En esta fusión, la configuración cinemática para los gluones está dada por: $p_{1z} = p_{2z} = 0$ y $\theta = \pi$, los valores de $|p_{i\perp}|$ cumplen con la siguiente condición

$$4|p_{1\perp}||p_{2\perp}| = m_H^2, \tag{4.34}$$

que se obtiene de la Ec. (4.34) para los parámetros preestablecidos.

En las Figuras 4.3 y 4.4, se muestra el comportamiento de los factores de forma a_1^{++}, a_2^{++} y la respuesta del sistema en función de la intensidad del campo magnético para distintos valores del momento perpendicular del bosón de Higgs $|p_{H\perp}|$.

Los valores correspondientes para el momento perpendicular de los gluones se muestran en la Tabla 4.2. Nótese que los valores para el momento de los gluones se pueden intercambiar entre sí, el único cambio que surge es el sentido en el que el bosón de Higgs es producido. Vale la pena resaltar que las curvas rojas corresponden a bosones de Higgs producidos en reposo, similarmente al caso mostrado en la Figura 4.2.

$\lvert p_{H\perp}\rvert/m_{\text{top}}$	$\lvert p_{1\perp}\rvert/m_{\text{top}}$	$\lvert p_{2\perp}\rvert/m_{\text{top}}$
1.000	1.117	0.117
0.500	0.690	0.190
0.000	0.362	0.362

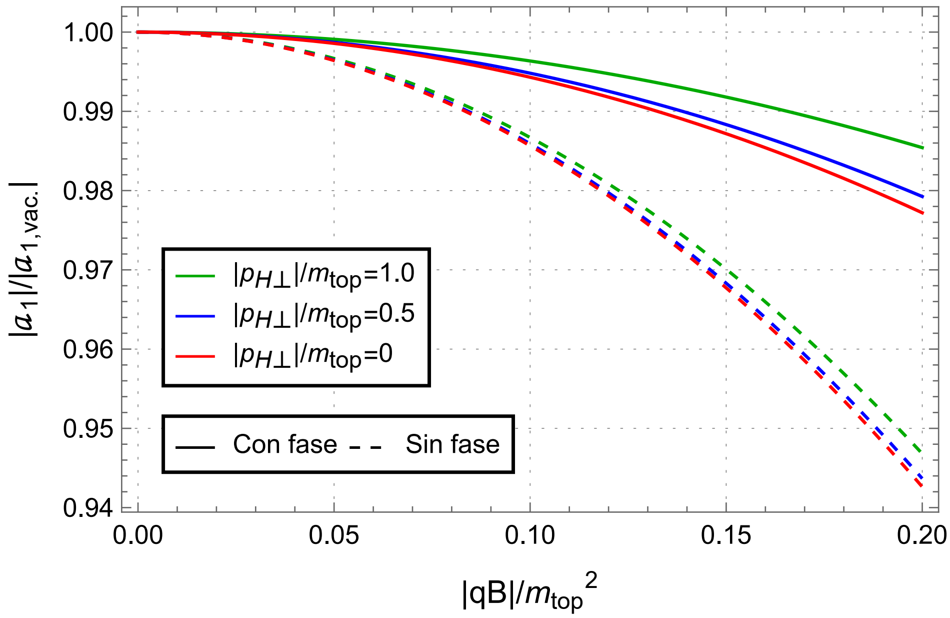
Tabla 4.2: Distribuciones de momento perpendicular para una fusión frontal de gluones en el plano transverso tomando $|p_{i,z}| = 0$ y $\theta = \pi$.

La Figura 4.3 muestra el comportamiento de los factores de forma en función de la intensidad de campo magnético. En la Figura 4.3(a), el factor de forma a_1^{++} disminuye a medida que la intensidad del campo magnético aumenta, mientras que en la Figura 4.3(b), el factor de forma a_2^{++} aumenta con la intensidad del campo magnético. Esto indica que la contribución debida a gluones con estados de polarización L se reduce con el campo magnético, mientras que la contribución de los estados de polarización L^* aumenta. Además, ambos factores de forma aumentan a medida que aumenta el momento perpendicular del bosón de Higgs. Vale la pena notar que en la Figura 4.3 no se muestra el factor de forma a_4^{+-} debido a que es idénticamente cero, ésto indica que la fusión de gluones en diferentes estados de polarización (uno en el estado L y el otro en el estado L^*) no contribuye a la amplitud.

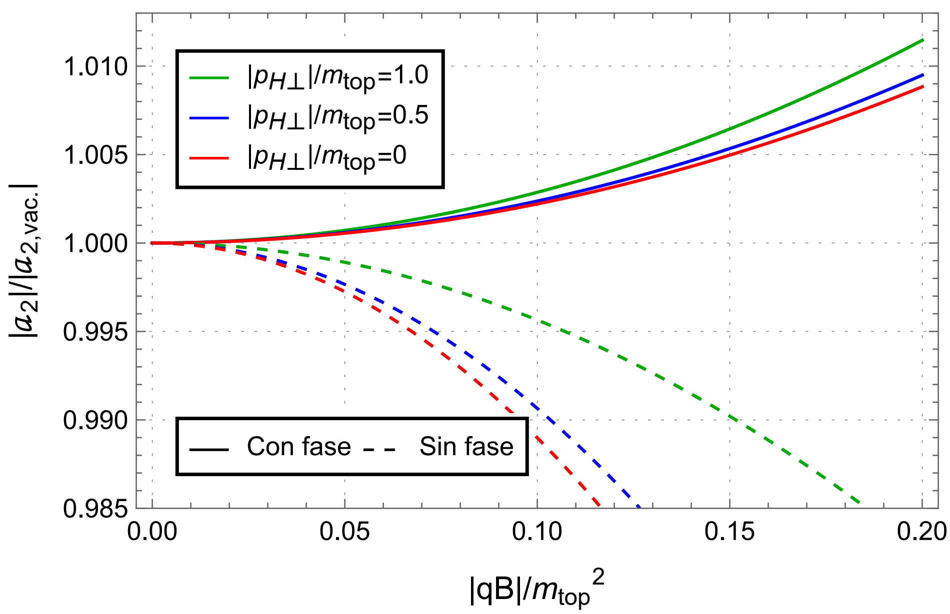
Por otro lado, las curvas que no consideran a la fase para el factor de forma a_1^{++} siempre van por debajo, lo que indica que se tiene una interferencia constructiva entre los diagramas. Este hecho se enfatiza en la gráfica para el factor de forma a_2^{++}, donde el comportamiento cambia radicalmente al considerar la fase: pasa de disminuir a aumentar la contribución a medida que la intensidad del campo magnético crece.

Los efectos del campo magnético externo sobre la respuesta del sistema se muestran en la Figura 4.4. En ella se muestra que la respuesta del sistema disminuye a medida que aumenta la intensidad del campo magnético. Ésto indica que la tasa de producción se reduce por la presencia del campo magnético. Además, como en la figura anterior, la sección eficaz aumenta a medida que crece el momento perpendicular del bosón de Higgs.

En esta figura se observa que el efecto del campo en la respuesta del sistema se ve acentuada a medida que la intensidad de campo magnético aumenta y es negativa. Esto indica que la tasa de producción se reduce en presencia del campo magnético. Además, a



(a) Efecto del campo magnético en el factor de forma a_1^{++}.



(b) Efecto del campo magnético en el factor de forma a_2^{++}.

Figura 4.3: Comportamiento de los factores de forma, para una fusión frontal de gluones totalmente contenida en el plano transverso dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función de la intensidad de campo magnético $|qB|$ para diferentes valores de momento perpendicular del bosón de Higgs $|p_{H\perp}|$. Se toma $p_{i,z} = 0$ y $\theta = \pi$, de tal manera que los bosones de Higgs se producen sobre la línea de la fusión.

medida que el momento perpendicular del bosón de Higgs se incrementa, la respuesta del sistema aumenta (es decir, la tasa de producción aumenta). Otro punto a notar es que, al igual que en la figura anterior, las curvas que no consideran la fase van por debajo de las que sí la consideran, entonces para una fusión de gluones frontal la interferencia entre los diagramas es constructiva.

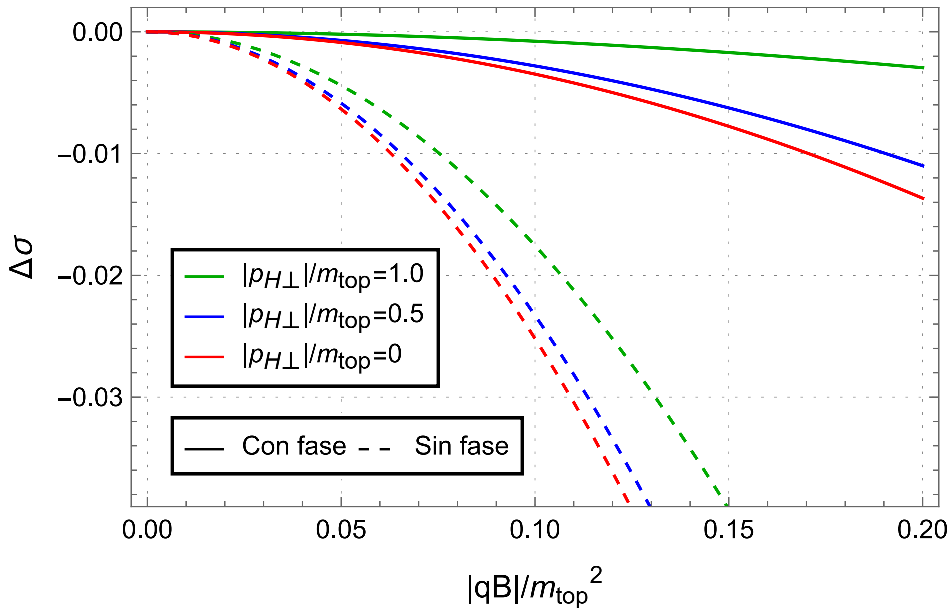


Figura 4.4: Comportamiento de la respuesta del sistema para una fusión frontal de gluones totalmente contenida en el plano transverso dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función de la intensidad de campo magnético $|qB|$ para diferentes valores de momento transverso del bosón de Higgs $|p_{H\perp}|$. Se toma $|p_{i,z}| = 0$ y $\theta = \pi$, de tal manera que los bosones de Higgs se producen sobre la línea de la colisión.

Observando detenidamente las Figuras 4.3 y 4.4, se puede notar que el principal efecto del campo magnético sobre la respuesta del sistema proviene del factor de forma a_1^{++}, lo que indica que los estados de polarización L son más sensibles a la presencia del campo magnético.

En la Figura 4.5 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema como función del momento perpendicular del bosón de Higgs para distintas intensidades de campo magnético. El comportamiento de las curvas en esta figura coincide con lo observado en la Figura 4.4, la respuesta del sistema es negativa y se acentúa a medida que la intensidad de campo magnético se incrementa y crece a medida que el momento perpendicular del bosón de Higgs aumenta. Otra nota importante es que la energía total de la colisión se incrementa a media $|p_{H\perp}|$ aumenta, así que bien podría ser que la sección eficaz con campo magnético esté creciendo debido a que la energía de la colisión va en aumento. Además, debido a que las curvas para los casos sin fase van por debajo, se sigue presentando el fenómeno de interferencia constructiva entre los diagramas.

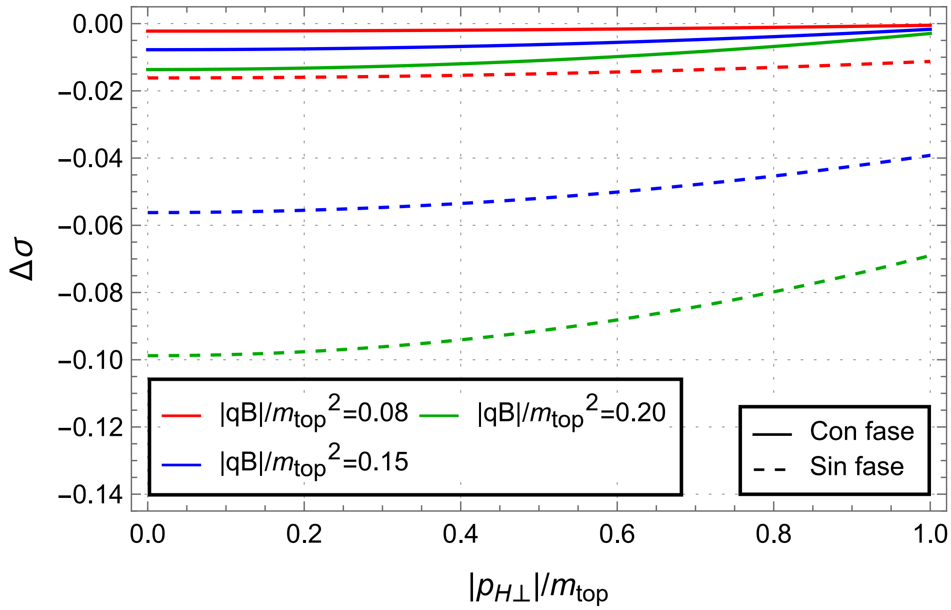


Figura 4.5: Comportamiento de la respuesta del sistema para una fusión frontal de gluones totalmente contenida en el plano transverso dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función del momento perpendicular del bosón de Higgs $|p_{H\perp}|$ para diferentes valores de la intensidad de campo magnético $|qB|$. Se toma $|p_{i,z}| = 0$ y $\theta = \pi$, de tal manera que los bosones de Higgs se producen sobre la línea de la colisión.

4.4.2. Fusión frontal de gluones con momento a lo largo del campo magnético

Hasta el momento se han analizado dos tipos distintos de configuraciones para los gluones incidentes pero siempre considerando que el momento del Higgs a lo largo de la dirección del campo magnético es nulo, es decir, $|p_{H,z}| = 0$. A continuación se explora el efecto del momento sobre el eje z sobre la producción de bosones de Higgs.

Con este propósito, considérese una "fusión frontal" de gluones con componentes tanto paralelas como perpendiculares al campo magnético. La configuración cinemática para los gluones está dada por: $|p_{i\perp}| = 0.2m_{\text{top}}$, $\theta = \pi$, $p_{1,z} = 0.42m_{\text{top}}$ y $p_{2,z} = -0.21m_{\text{top}}$, de tal forma que los bosones de Higgs producidos se mueven únicamente en la dirección del campo magnético. Vale la pena recordar que los valores anteriores satisfacen la condición de capa de masa dada por la Ec. (4.32), además de que los valores para el momento de los gluones en el eje z se pueden intercambiar entre sí, el único cambio que surge es el sentido en el que el bosón de Higgs es producido.

En la Figura 4.6 se muestra el comportamiento de los factores de forma, a_1^{++} y a_2^{++}, en función de la intensidad de campo magnético. En la Figura 4.6(a), el factor de forma a_1^{++} disminuye a medida que la intensidad del campo magnético aumenta, en la Figura 4.6(b), el factor de forma a_2^{++} presenta el mismo comportamiento pero de manera menos acentuada. Esto indica que la contribución debida a gluones con estados de polarización L se reduce más con el campo magnético que la contribución debida a gluones con estados de polarización L^*, es decir, las polarizaciones L son más sensibles a la presencia del campo magnético.

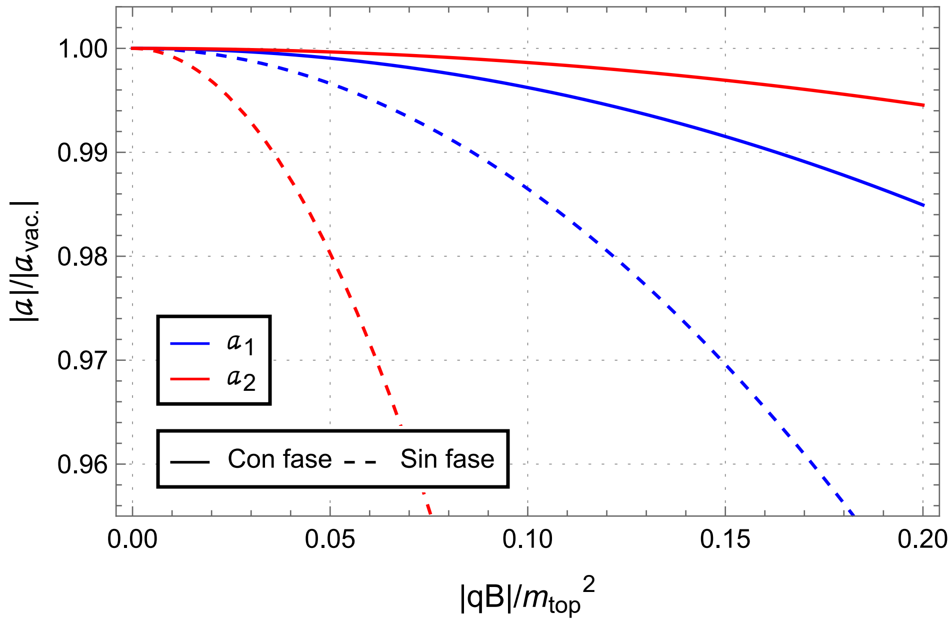


Figura 4.6: Comportamiento de los factores de forma a_1^{++} y a_2^{++}, para una fusión frontal de gluones dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función de la intensidad de campo magnético $|qB|$. Se toma $p_{1z} = 0.42m_{top}$, $p_{2z} = -0.21m_{top}$, $|p_{i\perp}| = 0.2m_{top}$ y $\theta = \pi$. En este caso, los bosones de Higgs se producen sobre el eje z.

Al igual que en la configuración anterior, ver Figura 4.3, no se muestra el factor de forma a_4^{+-} debido a que es idénticamente cero, lo que indica que la fusión de gluones en diferentes estados de polarización (uno en el estado L y el otro en el estado L^*) no contribuye a la amplitud. Esta contribución se anula para ángulos múltiplos de π.

Por otro lado, las curvas que no consideran a la fase para ambos factores de forma, a_1^{++} y a_2^{++}, siempre van por debajo. Ésto indica que existe una interferencia constructiva entre los diagramas.

En la Figura 4.7 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema como función de la intensidad de campo magnético. En ella se observa que la respuesta del sistema disminuye a medida que aumenta la intensidad del campo magnético. Ésto indica que la tasa de producción se reduce por la presencia del campo magnético. Además, como en la figura anterior, la curva para el caso sin fase va por debajo, es decir, se tiene una interferencia constructiva.

Es importante mencionar que se repitieron las Figuras 4.6 y 4.7 variado el momento de los gluones $p_{i,z}$ de acuerdo a la Ec. (4.32), es decir, se consideraron distintos momentos para el Higgs producido $p_{H,z}$ y las curvas obtenidas fueron exactamente las mismas. Ésto indica que la sección eficaz para este tipo de configuración de fusión no es sensible ante la variación del momento en la dirección del campo magnético, ésto se puede observar claramente en la Figura 4.8.

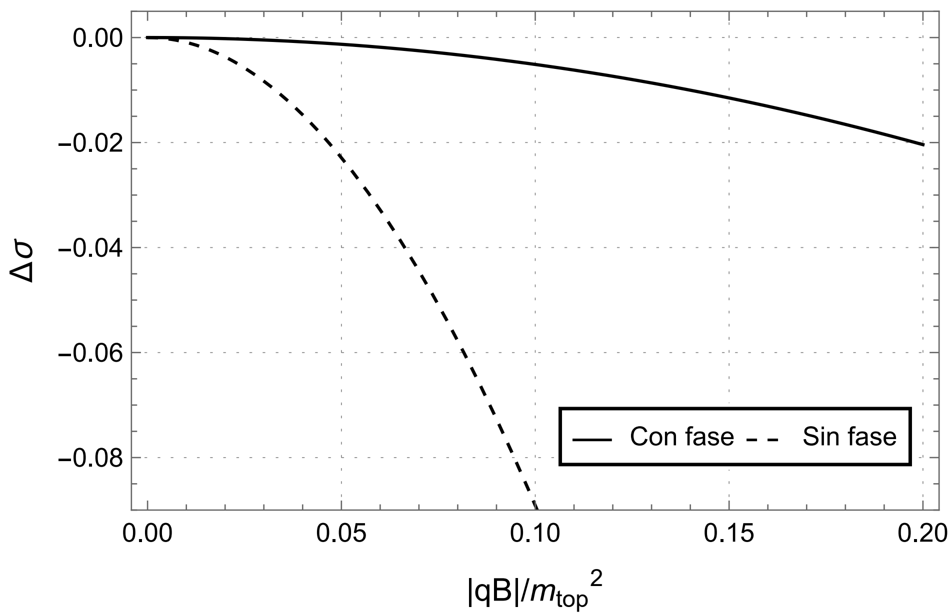


Figura 4.7: Comportamiento de la respuesta del sistema, para una fusión frontal de gluones dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función de la intensidad de campo magnético $|qB|$. Se toma $p_{1z} = 0.42m_{top}$, $p_{2z} = -0.21m_{top}$, $|p_{i\perp}| = 0.2m_{top}$ y $\theta = \pi$. En este caso, los bosones de Higgs se producen sobre el eje z.

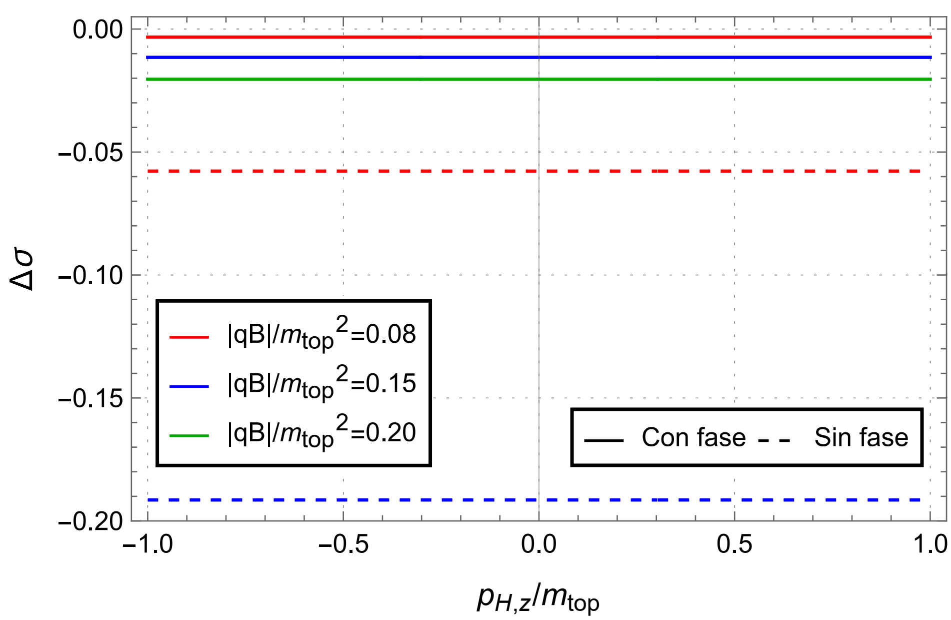


Figura 4.8: Comportamiento de la respuesta del sistema, para una fusión frontal de gluones dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función del momento en z del bosón de Higgs $p_{H,z}$ para distintas intensidades de campo magnético $|qB|$. Se toma $p_{1z} = 0.42m_{top}$, $p_{2z} = -0.21m_{top}$, $|p_{i\perp}| = 0.2m_{top}$ y $\theta = \pi$. En este caso, los bosones de Higgs se producen sobre el eje z.

En la Figura 4.8 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema como función del momento en z del bosón de Higgs $p_{H,z}$ para distintos valores de la intensidad de campo magnético $|qB|$. En la gráfica se observa que la respuesta del sistema no es afectada al variar $p_{H,z}$, mientras que disminuye a medida que la intensidad de campo magnético aumenta. Vale la pena resaltar que la variación del momento del bosón de Higgs a lo largo del campo magnético no afecte la producción parece razonable ya que el campo magnético sólo modifica la dinámica en las direcciones perpendiculares.

4.4.3. Fusión de gluones para distintos ángulos en el plano transverso

Las configuraciones para los gluones que se han analizado hasta el momento consideran un ángulo en el plano transverso de $\theta = \pi$, es decir, los momentos perpendiculares de los gluones siempre van en la misma dirección pero en sentidos contrarios. Una consecuencia de ésto es la nula contribución de gluones en diferentes estados de polarización (uno en el estado L y el otro en el estado L^*), es decir, el factor de forma a_4^{+-} es idénticamente cero.

A continuación se analiza el efecto del ángulo θ en la producción de bosones de Higgs. Para ello, considérese una fusión de gluones donde los momentos sobre el eje z se anulen entre así de tal forma que el Higgs sea producido únicamente con movimiento en la dirección perpendicular al campo magnético.

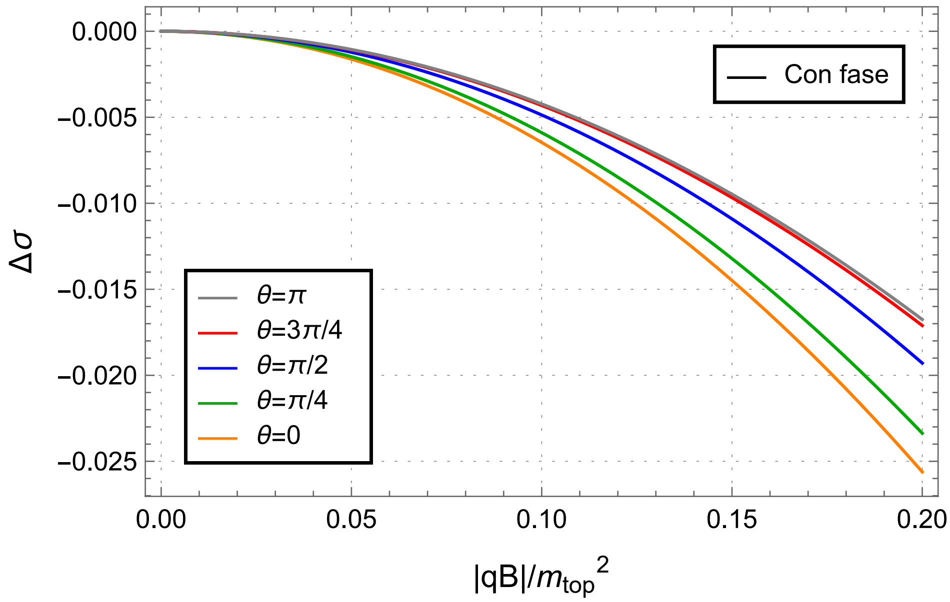
En la Figura 4.9 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema como función de la intensidad de campo magnético qB para distintos ángulos de fusión de los gluones en el plano transverso θ, tomando un momento perpendicular fijo $|p_{i\perp}| = 0.3m_{top}$ y con momentos en z iguales en magnitud pero contrarios en sentido. Debido a que las variables están relacionadas por la Ec. (4.32),

$$\sqrt{p_{1z}^2 + |p_{1\perp}|^2}\sqrt{p_{1z}^2 + |p_{1\perp}|^2} - |p_{1\perp}||p_{2\perp}|\cos\theta - p_{1z}p_{2z} = \frac{m_H^2}{2}, \tag{4.35}$$

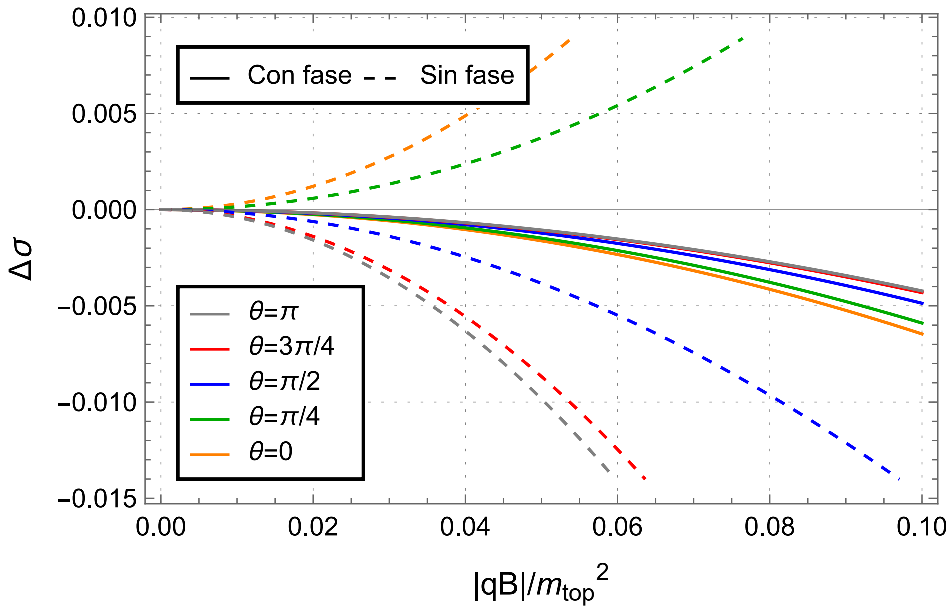
la energía de las reacción varía con el ángulo θ como se muestra en la Tabla 4.3. Los bosones de Higgs para dichas configuraciones de fusión son producidos en el plano transverso debido a que los momentos en z son de la misma magnitud pero de sentidos opuestos. Particularmente, para la curva $\theta = \pi$, los bosones de Higgs se producen en reposo.

θ	E_H^2
0	$m_H^2 + 4\,(0.3m_{\text{top}})^2$
$\pi/4$	$m_H^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)(0.3m_{\text{top}})^2$
$\pi/2$	$m_H^2 + 2\,(0.3m_{\text{top}})^2$
$3\pi/4$	$m_H^2 + \left(2-\sqrt{2}\right)(0.3m_{\text{top}})^2$
π	m_H^2

Tabla 4.3: Distribuciones de energía de reacción para una fusión de gluones tomando $|p_{i\perp}| = 0.3m_{top}$ y con momentos en z iguales en magnitud pero en sentidos contrarios.

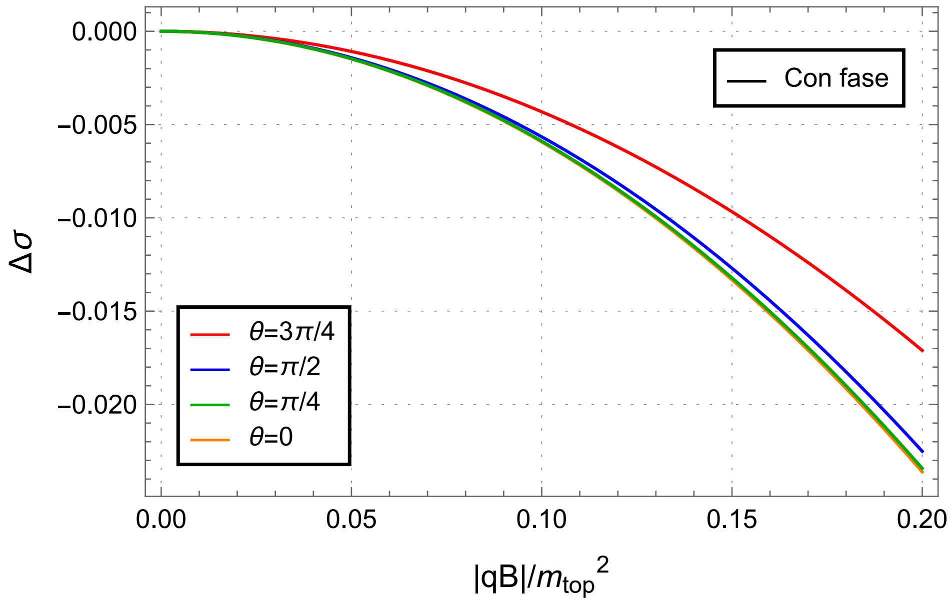


(a) Efecto del campo magnético en la respuesta del sistema.

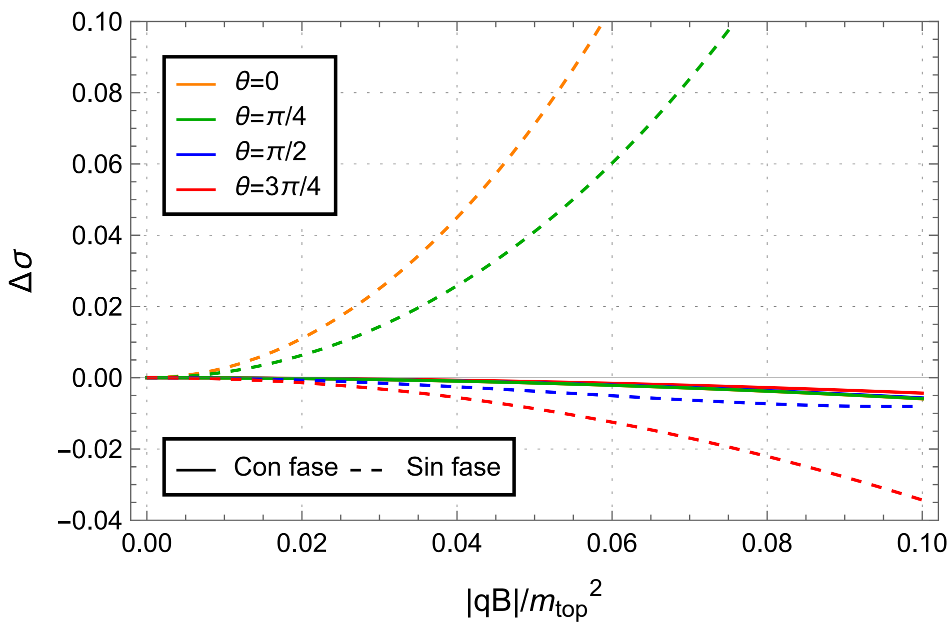


(b) Comparación con el caso sin fase.

Figura 4.9: Comportamiento de la respuesta del sistema dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función de la intensidad de campo magnético para distintos valores del ángulo entre los gluones en el plano perpendicular θ. Se considera una cantidad de momento transverso fijo $|p_{i\perp}| = 0.3m_{top}$ y $|p_{1z}| = |p_{2z}|$ en sentidos opuestos, todos sujetos a la restricción dada por la Ec. (4.32). Los bosones de Higgs se producen en el plano transverso y para $\theta = \pi$ se encuentran en reposo.



(a) Efecto del campo magnético en la respuesta del sistema.



(b) Comparación con el caso sin fase.

Figura 4.10: Comportamiento de la respuesta del sistema dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función de la intensidad de campo magnético para distintos valores del ángulo entre los gluones en el plano perpendicular θ. Se considera una energía fija $E_H^2 = m_H^2 + 0.04 \left(2 - \sqrt{2}\right) m_{\text{top}}^2$ y $|p_{1z}| = |p_{2z}|$ en sentidos opuestos, todos sujetos a la restricción dada por la Ec. (4.32). Los bosones de Higgs se producen en el plano transverso.

En la Figura 4.9(a) se observa que para todos los ángulos el comportamiento es el mismo al observado anteriormente: la respuesta del sistema es negativa y se acentúa a medida que la intensidad de campo magnético aumenta. Además, la respuesta del sistema disminuye más rápidamente entre menor sea el ángulo de fusión en el plano transverso. En la Figura 4.9(b) se muestra la comparación de la gráfica anterior con el caso sin fase, aquí se observan dos comportamientos distintos: mientras que para las curvas con $\theta = \pi/2, 3\pi/4$ y π se preserva el comportamiento de las curvas con fase y se presenta una interferencia destructiva entre los diagramas, para los ángulos $\theta = 0$ y $\pi/4$ se presenta el comportamiento opuesto, la respuesta del sistema es positiva y aumenta a medida que la intensidad de campo magnético se incrementa, y se presenta la interferencia constructiva entre diagramas.

En la Figura 4.10 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema como función de la intensidad de campo magnético qB para distintos ángulos de fusión de los gluones en el plano transverso θ, tomando una energía fija $E_H^2 = m_H^2 + 0.04\left(2-\sqrt{2}\right) m_{\text{top}}^2$ con $|p_{1\perp}| = |p_{2\perp}|$ y momentos en z iguales en magnitud pero contrarios en sentido, todo sujeto a la restricción de la Ec. (4.32). Nuevamente, los bosones de Higgs son producidos en el plano transverso. Vale la pena señalar que en esta configuración no es posible considerar el caso $\theta = 0$ porque el bosón de Higgs producido está en reposo y no tiene la energía que se ha fijado.

El comportamiento que se observa en la Figura 4.10 es el mismo que en la figura anterior: la respuesta del sistema disminuye con la intensidad de campo magnético y aumenta con el ángulo de fusión. Además se presenta una interferencia constructiva para los ángulos $\theta = \pi/2, 3\pi/4$ y π mientras que se tiene interferencia destructiva para $\theta = 0$ y $\pi/4$.

4.4.4. Fusión de gluones con distintas orientaciones respecto al campo magnético

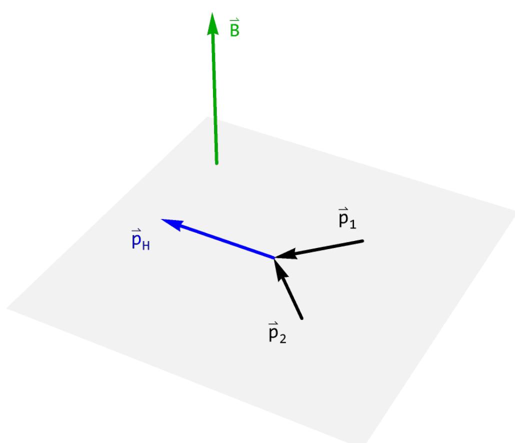
Hasta este punto se han analizado el efecto de distintas variables, como son el momento perpendicular, el momento a lo largo del campo y el ángulo de fusión en el plano transverso, en la producción de Higgs mediante fusión de gluones. A continuación se analiza un parámetro que no aparece de forma explícita: la dirección de producción del bosón de Higgs respecto al campo magnético.

Debido a que existe una simetría rotacional en el plano transverso, la dirección de producción del bosón de Higgs en dicho plano no es relevante y no depende del ángulo entre la fusión de gluones. El ángulo que es relevante para la producción es el que se subtiende entre la dirección del Higgs y el eje z y se obtiene de la siguiente forma

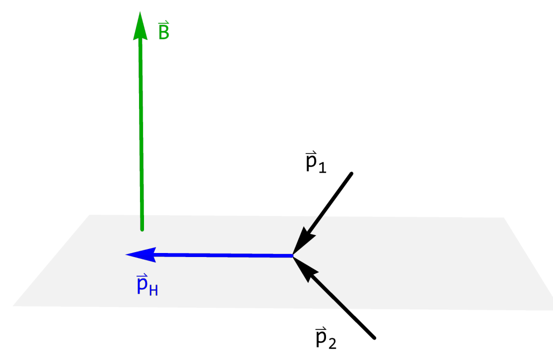
$$\alpha = \arctan\left(\frac{|\vec{p}_{H\perp}|}{|p_{H,z}|}\right). \tag{4.36}$$

En la Figura 4.11 se muestran tres orientaciones, respecto al campo magnético, para el proceso de producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones. Mientras que las orientaciones que se muestran en las Figuras 4.11(a) y 4.11(b) son puramente perpendiculares y corresponden a un ángulo $\alpha = \pi/2$, la Figura 4.11(c) muestra una orientación paralela al campo magnético correspondiente a un ángulo $\alpha = 0$.

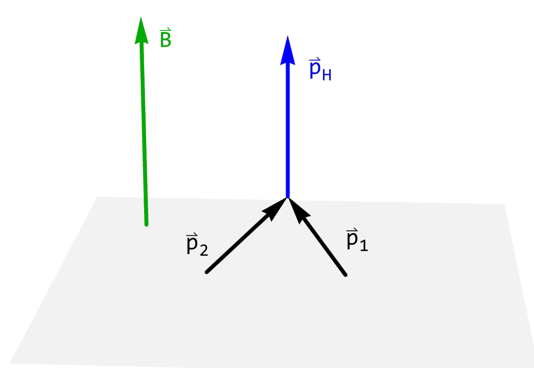
Otro aspecto interesante que se puede observar en la Figura 4.11 es la orientación de los gluones incidentes. Por ejemplo, las Figuras 4.11(a) y 4.11(b) tienen una orientación perpendicular para el bosón de Higgs, respecto al campo magnético, pero distintas orientaciones de los gluones. En la primera, los gluones están contenidos totalmente en el plano transverso por lo que se le denominará “perpendicular pura”, mientras que en la segunda cuentan con componentes paraleles y perpendiculares por lo que se le llama “perpendicular compuesta”. Finalmente, la Figura 4.11(c) tiene una orientación paralela para el bosón de Higgs pero los gluones cuentan con componentes paralelas y perpendiculares por lo que se denomina “paralela compuesta”. Vale la pena resaltar que no es posible analizar una orientación “paralela pura”, donde los gluones tengan únicamente componentes a lo largo del campo, ya que la base ortogonal para los estados de polarización se “rompe” como se menciona al final de la Sección 1.3.3.



(a) Perpendicular pura.



(b) Perpendicular compuesta.



(c) Paralela compuesta.

Figura 4.11: Representación pictórica de distintas orientaciones del proceso de producción de Higgs mediante fusión de gluones respecto al campo magnético $\vec{B}$. El momento de los gluones incidentes está representado por $\vec{p}_i$, mientras que $\vec{p}_H$ es el momento del bosón de Higgs.

En la Figura 4.12 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema como función de la intensidad de campo magnético qB para las distintas orientaciones mostradas en la Figura 4.11, tomando el ángulo de fusión y momentos de los gluones fijos, dados por $\gamma = \pi/2$ y $|\vec{p}_i| = m_H/\sqrt{2}$, de tal manera que le energía total del proceso está dada por $E_H = \sqrt{2}m_H$. Las configuraciones respectivas de los momentos de los gluones para cada orientación se muestran en la Tabla 4.4.

En la Figura 4.12 se puede observar el comportamiento usual para las curvas con fase: la respuesta del sistema disminuye a medida que la intensidad de campo magnético aumenta. Además, la curva que disminuye más rápidamente corresponde a la orientación "perpendicular compuesta", seguida de la "paralela compuesta" y finalmente la "perpendicular pura" se mantiene casi constante indicando que el campo magnético no afecta a esta orientación. Por otro lado, al considerar las curvas sin fase, se observa una interferencia constructiva para las orientaciones "perpendicular pura" y "paralela compuesta", mientras que se presenta una interferencia destructiva para la orientación "perpendicular compuesta".

Orientación	α	θ	$\lvert\vec{p}_{i\perp}\rvert$	$\lvert p_{i,z}\rvert$
Perpendicular pura	$\pi/2$	$\pi/2$	$m_H/\sqrt{2}$	0
Perpendicular compuesta	$\pi/2$	0	$m_H/2$	$m_H/2$
Paralela compuesta	0	π	$m_H/2$	$m_H/2$

Tabla 4.4: Configuraciones del ángulo de emisión del bosón de Higgs α, el ángulo de fusión de los gluones en el plano transverso θ y de los momentos de los gluones para las distintas orientaciones mostradas en la Figura 4.11 tomando una energía de $E_H = \sqrt{2}m_H$ y un ángulo de fusión $\gamma = \pi/2$.

Nótese que las orientaciones "perpendicular pura" y "paralela compuesta" están conectadas mediante una rotación sobre la línea que une las bases de los momentos de los gluones en la Figura 4.11. Si se mide el ángulo de elevación δ a partir de plano transverso, éste se puede conectar con al ángulo de producción de los bosones de Higgs respecto al campo magnético (véase Ec. (4.36)), mediante

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

De tal manera que el ángulo $\alpha = 0$ corresponde a la orientación "perpendicular pura" mientras que $\alpha = \pi/2$ a la "paralela compuesta".

En la Figura 4.13 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema como función del ángulo de producción de bosones de Higgs α para distintas intensidades de campo magnético $|qB|$, tomando un ángulo de fusión y momentos de los gluones fijos, dados por $\gamma = \pi/2$ y $|\vec{p}_i| = m_H/\sqrt{2}$, de tal manera que la energía total del proceso está dada por $E_H = \sqrt{2}m_H$.

En la gráfica se observa que la respuesta del sistema decrece a medida que la intensidad de campo magnético aumenta. Además, la respuesta del sistema se incrementa a medida que el ángulo al que salen los bosones de Higgs, respecto al campo, crece. Ésto indica que la producción a lo largo del campo magnético se inhibe, lo que corrobora los resultados de la Figura 4.12, donde la curva correspondiente a la orientación "perpendicular pura" va por encima de la curva para la orientación "paralela compuesta".

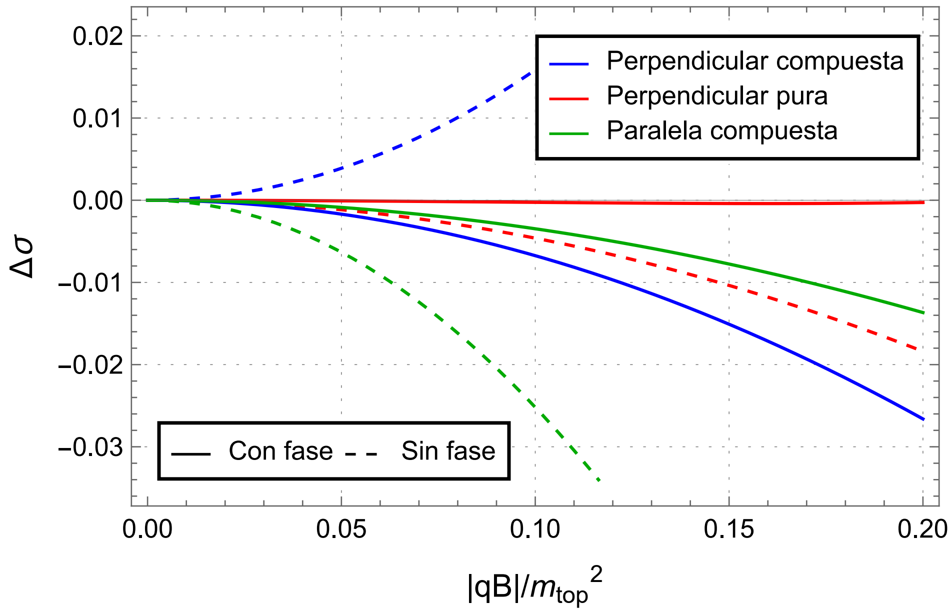


Figura 4.12: Comportamiento de la respuesta del sistema, para una fusión de gluones con un ángulo $\gamma = \pi/2$ dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función de la intensidad de campo magnético $|qB|$ para distintas orientaciones del proceso. Se toma $|\vec{p}_i| = m_H/\sqrt{2}$, lo que corresponde a una energía fija de $E_H = \sqrt{2}m_H$.

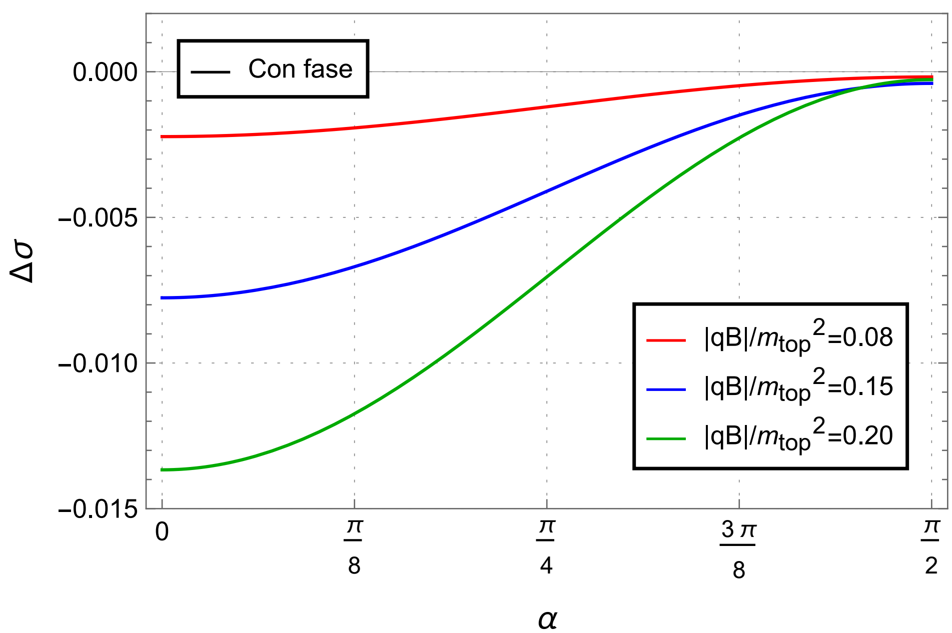


Figura 4.13: Comportamiento de la respuesta del sistema, para una fusión de gluones con un ángulo $\gamma = \pi/2$ dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, del ángulo de producción de bosones de Higgs α para distintas intensidad de campo magnético $|qB|$. Se toma $|\vec{p}_i| = m_H/\sqrt{2}$, lo que corresponde a una energía fija de $E_H = \sqrt{2}m_H$.

A continuación, para llevar a cabo un análisis completo, nótese que las orientaciones "perpendicular pura" y "paralela compuesta" están conectadas mediante una rotación sobre la línea de producción de los bosones de Higgs. Si se mide un ángulo de elevación a partir de plano transverso, $\beta = 0$ corresponde a la orientación "perpendicular pura" mientras que $\beta = \pi/2$ a la"perpendicular compuesta". Vale la pena resaltar que todas las orientaciones intermedias se deben de considerar como perpendiculares compuestas pues los gluones correspondientes tienen componentes tanto paralelas como perpendiculares.

En la Figura 4.14 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema como función del ángulo de elevación β para distintas intensidades de campo magnético $|qB|$, tomando un ángulo de fusión y momentos de los gluones fijos, dados por $\gamma = \pi/2$ y $|\vec{p}_i| = m_H/\sqrt{2}$, de tal manera que le energía total del proceso está dada por $E_H = \sqrt{2}m_H$.

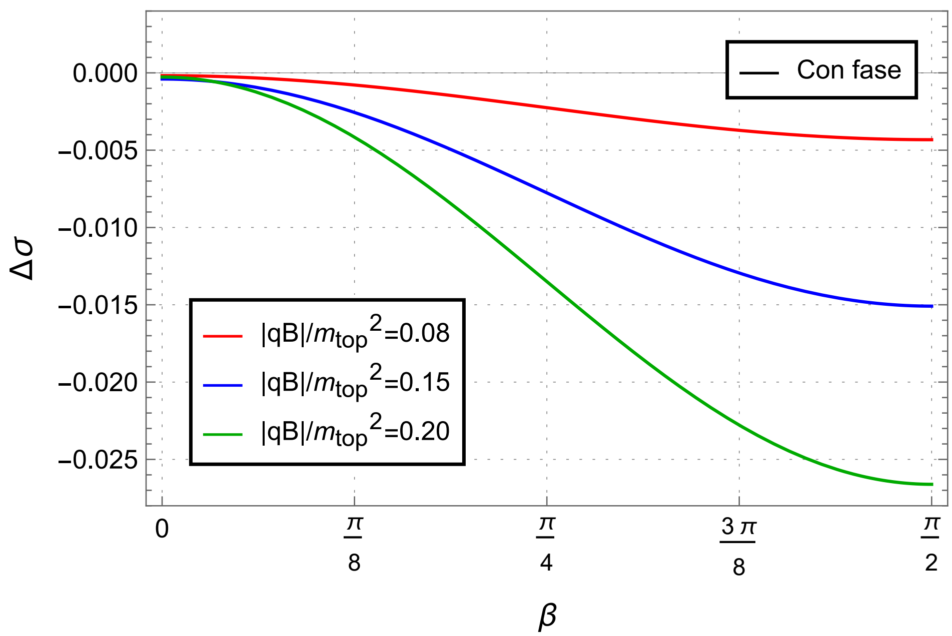


Figura 4.14: Comportamiento de la respuesta del sistema, para una fusión de gluones con un ángulo $\gamma = \pi/2$ dentro de la aproximación de campo débil con momento perpendicular bajo, en función del ángulo de elevación β para distintas intensidad de campo magnético $|qB|$. Se toma $|\vec{p}_i| = m_H/\sqrt{2}$, lo que corresponde a una energía fija de $E_H = \sqrt{2}m_H$.

En la gráfica se observa nuevamente que la respuesta del sistema disminuye a medida que la intensidad de campo magnético aumenta. Además, disminuye a medida que el ángulo de elevación crece, es decir, el campo magnético inhibe a las orientaciones donde los gluones tienen una mayor cantidad de momento a lo largo de la dirección del campo. Nótese que la escala del eje y es mayor a la de la Figura 4.13, de tal forma que el punto correspondiente a la orientación "paralela compuesta" está por debajo al de la "perpendicular compuesta" tal como se observa en la Figura 4.12.

Finalmente, vale la pena resaltar que la orientación de los gluones incidentes es de vital importancia ya que se debe de tener en cuenta para calcular la sección eficaz total, dada por la Ec. (4.3), donde es necesario conocer las distribuciones de momento de los gluones dentro de los hadrones involucrados en la colisión.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se realizó un análisis detallado sobre los efectos de un campo magnético uniforme en distintos procesos de producción y decaimiento de partículas. Además de los resultados encontrados, este estudio es de gran interés porque aborda las problemáticas más comunes en los cálculos, en presencia de un campo magnético externo, reportados en la literatura como lo son: la descomposición tensorial, la fase de Schwinger, la integración sobre los momentos del lazo, el tratamiento de la traza espinorial y la regularización UV.

Inicialmente se consideró un proceso genérico de interacción entre dos bosones vectoriales no masivos y una partícula escalar neutra. En el primer capítulo se presentó una metodología novedosa para calcular la amplitud de probabilidad del proceso $V^\mu + V^\nu \longrightarrow \phi$ en presencia de un campo magnético externo homogéneo de intensidad arbitraria.

Utilizando los estados de polarización de los bosones vectoriales no masivos, relevantes en el escenario físico de interés, junto con consideraciones físicas generales que deben satisfacerse en la interacción, se obtuvo una estructura tensorial general para la amplitud del proceso, escrita en términos de estructuras ortogonales. Este último punto facilita la obtención de las observables físicas, reduciéndolo al cálculo explícito de la amplitud.

Partiendo de un Lagrangiano basado en la electrodinámica cuántica, para estudiar la interacción entre una partícula escalar y dos bosones vectoriales en un campo magnético externo, el análisis se centró en las contribuciones a orden dominante correspondientes a diagramas de Feynman triangulares con un lazo de fermiones cargados. El campo magnético se incorporó al proceso empleando los propagadores fermiónicos en el formalismo de tiempo propio de Schwinger. Las contribuciones asociadas a estos diagramas se calcularon para una intensidad de campo magnético arbitraria llevando a cabo la integración en el espacio fase en D-dimensiones sin realizar la traza espinorial explícitamente. El resultado final se expresó en términos del tiempo propio de Schwinger de una manera simple y compacta.

Tomando el límite de campo magnético cero, las expresiones obtenidas con la nueva metodología coinciden con los resultados reportados en la literatura para el caso de vacío (en el contexto de la física de Higgs), incluyendo el tratamiento de los términos divergentes dentro del esquema de regularización dimensional.

Junto con el cálculo de la amplitud, se realizó un tratamiento claro de las fases de Schwinger y los factores que surgen de ellas, obteniendo una comprensión más profunda de su rol en la interacción de las partículas.

A partir de la metodología desarrollada, se presentaron los resultados exactos de las contribuciones a orden dominante para los procesos de decaimiento de piones neutros a fotones, $\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma$, y producción de fotones mediante fusión de gluones , $gg \longrightarrow \gamma$, en presencia de un campo magnético externo.

Una ventaja de disponer de un resultado exacto, expresado en términos del tiempo propio de Schwinger en lugar de una suma infinita sobre los niveles de Landau, es que permite estudiar diferentes regiones de la intensidad de campo magnético sin ninguna restricción sobre la cinemática de las partículas involucradas en el proceso, lo que contrasta con un enfoque ampliamente utilizado en la literatura en el que cualquier aproximación, realizada al principio del cálculo, restringe el estudio a una única región cinemática y de intensidad de campo.

El análisis que se llevó a cabo, a partir de las virtualidades de los fermiones dentro del lazo cuántico, revela que existe una jerarquía de escalas energéticas más amplia que la habitual. Entonces, surgen un mayor número de situaciones físicas: regiones de campo magnético intenso y débil a bajo y alto momento perpendicular, así como una región de campo intermedio.

De forma genérica, en el límite de campo magnético intenso, se encontró que sólo las estructuras tensoriales paralelas están presentes en la amplitud y las perpendiculares se suprimen exponencialmente. Además, en este límite, las divergencias UV están ausentes ya que la región $s \longrightarrow 0$ está excluida, por una escala de energía física Λ_{qB} a partir de la cual este límite es válido. Por el contrario, en la región de campo débil, el límite $s \longrightarrow \infty$ queda excluido inicialmente por un corte infrarrojo μ_{qB} a partir del cuál la aproximación es válida.

En la región de campo débil se estudiaron dos aproximaciones distintas basadas en la cinemática de los bosones vectoriales no masivos: a bajo y alto momento perpendicular. En la primera de ellas fue posible separar las contribuciones del vacío y del campo magnético, siendo esta última libre de divergencias por lo que el comportamiento UV está completamente contenido en el del vacío. Esta separación no puede realizarse en la aproximación de momento perpendicular alto, ya que existe un factor exponencial que mezcla las contribuciones del vacío y del campo magnético.

Particularmente para la producción de fotones mediante fusión de gluones, se explotaron los estados de polarización para la construcción de una estructura tensorial ortogonal válida para una intensidad arbitraria de campo magnético, la cuál, considerando únicamente partículas reales, se reduce a sólo tres términos. Observando que esta estructura tensorial no tiene contribuciones con los tres bosones vectoriales con polarizaciones transversales L^*, se dedujo al instante que las contribuciones al proceso en el límite de campo magnético intenso son nulas como se ha reportado en la literatura mediante cálculos explícitos. Ésto se corroboró fácilmente en el presente trabajo a partir de la expresión general para un campo magnético arbitrario al tomar el límite de campo intenso.

Al contextualizar la situación física para la producción de fotones mediante fusión de gluones en las etapas iniciales de las colisiones de iones pesados relativistas y el rompecabezas de los fotones (photon puzzle) que se da, la jerarquía entre las escalas de energía llevó a la región de campo intermedio donde la intensidad de campo magnético es mucho mayor que la masa de los quarks ligeros dentro del lazo pero menor que el momento perpendicular de los fotones producidos.

El presente trabajo también se analizó cómo un campo magnético uniforme afecta la tasa de producción del bosón de Higgs mediante la fusión de gluones $gg \longrightarrow H$. Este estudio es de gran interés ya que recientemente se ha encontrado la posibilidad de detectar una señal en el canal de Higgs durante las colisiones de iones pesados relativistas, tanto en los aceleradores actuales como en los futuros.

Debido a que el quark top da la mayor contribución a la sección eficaz en el vacío, el análisis se centró en comparar dicha contribución con el resultado en presencia de campo magnético. Considerando distintas configuraciones para los gluones iniciales, así como de los demás parámetros, se analizó el efecto del campo magnético sobre el proceso de producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones dentro de la aproximación de campo débil a bajo momento perpendicular.

Los resultados indican que la sección eficaz se ve inhibida por la presencia del campo magnético, para un momento perpendicular fijo del bosón de Higgs, y aumenta a medida que crece el momento perpendicular del Higgs. Este comportamiento se hereda principalmente del factor de forma a_1, destacando que los estados de polarización L son más sensibles a la presencia de campo magnético.

Por otro lado, se encontró que mientras que el momento del Higgs a lo largo de la dirección del campo magnético no es relevante, tanto el ángulo entre los gluones incidentes en el plano transverso como la orientación del proceso juegan un papel relevante. Al considerar, ya sea una cantidad de momento perpendicular o una energía fija, la sección eficaz disminuye a medida que el ángulo que se subtiende entre los gluones en el plano transverso decrece. Es decir, la producción de bosones es máxima cuando se da una fusión frontal en el plano trasverso.

Finalmente, los resultados indican que la producción de bosones de Higgs se ve inhibida principalmente en la dirección del campo magnético y alcanza su punto máximo cuando tanto el momento del Higgs como el de los gluones están contenidos en el plano perpendicular al campo. Además, se observa que uno de los efectos de la fase de Schwinger es inhibir la respuesta del proceso ante el campo magnético.

En conclusión, la metodología presentada en este trabajo simplifica el cálculo explícito de la amplitudes de probabilidad a un lazo para diversos procesos de producción y decaimiento de partículas en presencia de un campo magnético homogéneo. Además, facilita la obtención de las observables físicas y extiende el alcance del análisis a un rango más amplio de regiones cinemáticas de las partículas involucradas.

Cabe mencionar que en el presente trabajo falta de incluir los resultados explícitos para el decaimiento del pión neutro mediante fotones así como para la emisión de fotones a través de fusión de gluones, así como el análisis de la producción de bosones de Higgs en la aproximación de campo débil con momentos perpendicular altos.

Por otra parte, el plasma de quarks y gluones que se crea en las colisiones de iones pesados relativistas puede servir como un modelo del Universo primigenio poco después del Big Bang, ofreciendo implicaciones significativas para la cosmología. Entonces, explorar y entender los efectos de este plasma en el bosón de Higgs podría proporcionar información sobre diversos procesos ocurridos en las primeras etapas del Universo.

Como se discutió durante el trabajo, en las situaciones físicas que se consideraron, existen otros "agentes externos" que pueden repercutir en los procesos de producción o decaimiento como lo son la temperatura y densidad finitas.

Si bien el trabajo realizado se centró en diagramas de Feynman triangulares, la metodología desarrollada se puede extender de forma directa a procesos con un mayor número de partículas externas, por ejemplo, las contribuciones al proceso

$$gg \longrightarrow g\gamma,$$

están asociadas con diagramas de caja. Otro punto importante sería desarrollar una metodología para poder analizar procesos que involucren partículas cargadas como estados asintóticos como el cálculo de la autoenergía de los bosones $W^{\pm}$.

Finalmente, los resultados obtenidos a lo largo de esta investigación pueden aplicarse a diversos procesos físicos donde un campo escalar desempeñe un papel central. Ejemplos de esto incluyen la inflación (campo inflatónico), el estudio de objetos astrofísicos compactos (superfluidez de color) o la producción de distintas partículas (pseudo)escalares en las colisiones de iones pesados relativistas, como mesones ρ, B, D, entre otros.

Con todo lo anterior, la perspectiva a futuro de este trabajo, tanto en términos de cálculos explícitos como de desarrollo de metodología, es prometedora y podría ser relevante en la física de alta precisión tanto en la actualidad como en el futuro.

Apéndice A

Conjugación de carga

En el contexto de las teorías fermiónicas, la conjugación de carga se implementa mediante la matriz
$$C = i\gamma^2\gamma^0, \tag{A.1}$$
con
$$\hat{\mathcal{C}}\hat{\psi}(x)\hat{\mathcal{C}}^{-1} = C\hat{\bar{\psi}}^T(x) \equiv \hat{\psi}^c(x), \tag{A.2}$$
donde T indica el biespinor transpuesto.

Al incorporar un campo electromagnético, la conjugación de carga de la teoría ampliada debe de extenderse al campo de norma de la siguiente forma [145]
$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x) &\xrightarrow{\mathcal{C}} \hat{\psi}^c(x),\\ \hat{A}^\mu(x) &\xrightarrow{\mathcal{C}} -\hat{A}^\mu(x).\end{aligned} \tag{A.3}$$
En este caso, la operación de conjugación de carga se implementa mediante la matriz C y un cambio de signo en el campo de norma.

Usando la relación
$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T, \tag{A.4}$$
es fácil de mostrar que el propagador fermiónico en el vacío transforma de la siguiente forma
$$\begin{aligned}C\tilde{S}(p)C^{-1} &= \tilde{S}(-p)^T,\\ CS(x,y)C^{-1} &= S(y,x)^T.\end{aligned} \tag{A.5}$$
Las relaciones análogas a la Ec. (A.5) para los propagadores en presencia de un campo magnético están dadas por
$$\begin{aligned}C\tilde{S}^{qB}(p)C^{-1} &= \tilde{S}^{-qB}(-p)^T,\\ CS(x,y)^{qB}C^{-1} &= S^{-qB}(y,x)^T.\end{aligned} \tag{A.6}$$
Por tanto
$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{C}}\tilde{S}^{qB}(p)\hat{\mathcal{C}}^{-1} &= C\tilde{S}^{qB}(p)C^{-1}\Big|_{A^\mu\to -A^\mu} = \tilde{S}^{qB}(-p)^T,\\ \hat{\mathcal{C}}S^{qB}(x,y)\hat{\mathcal{C}}^{-1} &= CS^{qB}(x,y)C^{-1}\Big|_{A^\mu\to -A^\mu} = S^{qB}(y,x)^T.\end{aligned} \tag{A.7}$$

A partir de las relaciones (A.7) se puede mostrar que las expresiones para las contribuciones al vértice efectivo de ambos diagramas están relacionadas de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{C}}\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(I)}}\hat{\mathcal{C}}^{-1} = C\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(I)}}C^{-1}\Big|_{A^\mu\to -A^\mu} = \mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(II)}}, \tag{A.8}$$

es decir, los diagramas I y II son diagramas conjugados de carga como se menciona en la Fig. 1.4. Como último punto, vale la pena mencionar que, a diferencia del caso del vacío, la contribución de cada diagrama es distinta.

Apéndice B

Factores de fase

B.1. Fase de Schwinger

Para seguir adelante con el cálculo es necesario determinar la fase que acarrea cada uno de los diagramas a partir de la Ec. (B.3)

$$\Omega_q(x', x'') = \exp\left(-iq \int_{x''}^{x'} A_\mu(x) dx^\mu\right). \tag{B.1}$$

Escribiendo el cuadripotencial $A^\mu(x)$ que genera un campo magnético homogéneo en la dirección z en una norma completamente arbitraria, como

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2} x_\nu F^{\nu\mu} + \partial^\mu \chi(x), \tag{B.2}$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday con $F^{21} = -F^{12} = B$ las únicas componentes no nulas, y $\chi(x)$ una función arbitraria de clase $\mathcal{C}^2$. La fase de Schwinger asociada a cada propagador fermiónico toma la forma

$$\Omega(x, y) = e^{i\frac{qB}{2} x_\mu \hat{F}^{\mu\nu} y_\nu} e^{-iq(\chi(x)-\chi(y))}, \tag{B.3}$$

donde la integración en el espacio de coordenadas se realizó siguiendo una línea recta y con $\hat{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}/B$.

A partir de la Ec. (B.3) se puede encontrar la forma del producto de las fases que aparecen asociadas a los diagramas I y II, Ecs. (1.40)-(1.41), éstas son

$$\Omega(x, y)\Omega(y, z)\Omega(z, x) = e^{i\frac{qB}{2}\hat{F}^{\mu\nu}(x_\mu y_\nu + y_\mu z_\nu + z_\mu x_\nu)}, \tag{B.4}$$

$$\Omega(y, x)\Omega(z, y)\Omega(x, z) = e^{-i\frac{qB}{2}\hat{F}^{\mu\nu}(x_\mu y_\nu + y_\mu z_\nu + z_\mu x_\nu)}, \tag{B.5}$$

con

$$\hat{F}^{\mu\nu}\left(x_\mu y_\nu + y_\mu z_\nu + z_\mu x_\nu\right) = -x_2 y^1 + x_1 y^2 - y_2 z^1 + y_1 z^2 - z_2 x^1 + z_1 x^2. \tag{B.6}$$

Nótese que las fases totales sí son invariantes norma mientras que las fases de cada propagador no lo son. Se puede mostrar que, para un lazo cerrado con un número arbitrario de propagadores donde todos cargan su respectiva fase, el resultado total es invariante de norma [75].

Otro punto importante es que los diagramas I y II tienen asociadas fases contrarias, esto causa términos de interferencia en la sección eficaz que en el caso del vacío no estaban presentes (debido a que la contribución de ambos diagramas es exactamente la misma).

En el caso particular de elegir la norma simétrica del cuadripotencial

$$A^{\mu} = \left(0, -\frac{B}{2}x^2, \frac{B}{2}x^1, 0\right), \tag{B.7}$$

la forma de la fase de Schwinger asociada a cada propagador está dada por

$$\Omega_q(x,y) = e^{i\frac{qB}{2}x_\mu \hat{F}^{\mu\nu}y_\nu} = e^{i\frac{qB}{2}(x^1y_2 - x^2y_1)}. \tag{B.8}$$

B.2. Integración en el espacio de configuraciones

Con el propósito de ilustrar el procedimiento de integración en el espacio de configuraciones para el vértice efectivo, a continuación se calcula la contribución del diagrama I dada por la Ec. (1.40).

Tomando la transformada de Fourier del vértice efectivo, Ec. (1.43), es inmediato realizar la integración sobre las componentes paralelas identificando deltas de Dirac tal como se muestra en la Ec. (1.45)

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2,w) =& - ihg^2 \int \frac{d^DK\, d^DQ_1\, d^DQ_2}{(2\pi)^D(2\pi)^D(2\pi)^D}(2\pi)^{D_\parallel}\delta_\parallel^{(D_\parallel)}\left(p_1+Q_1-K\right) \\ &\times (2\pi)^{D_\parallel}\delta_\parallel^{(D_\parallel)}\left(p_2+K-Q_2\right)(2\pi)^{D_\parallel}\delta_\parallel^{(D_\parallel)}\left(-w+Q_2-Q_1\right) \\ &\times Tr\left[\gamma^\mu \tilde{S}^{qB}\left(Q_{1\perp},Q_{1\parallel}\right)\tilde{S}^{qB}\left(Q_{2\perp},Q_{2\parallel}\right)\gamma^\nu\tilde{S}^{qB}\left(K_\perp,K_\parallel\right)\right] \\ &\times \int d^{D_\perp}x_\perp\, d^{D_\perp}y_\perp\, d^{D_\perp}z_\perp\, e^{-i(p_1+Q_1-K)_\perp\cdot x_\perp}e^{-i(p_2+K-Q_2)_\perp\cdot y_\perp} \\ &\qquad\qquad \times e^{-i(-w+Q_2-Q_1)_\perp\cdot z_\perp}e^{i\frac{qB}{2}\left(x\hat{F}z+z\hat{F}y+y\hat{F}x\right)}. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Nótese que las integración sobre las componentes paralelas en el espacio de configuración da la conservación de momento paralelo en cada uno de los vértices del diagrama como sucede en el vacío.

La integración sobre las componentes perpendiculares del espacio de configuración está dada por la Ec. (1.46)

$$I_\perp \equiv \int d^{D_\perp}x_\perp\, d^{D_\perp}y_\perp\, d^{D_\perp}z_\perp\, e^{-i(p_1+Q_1-K)_\perp\cdot x_\perp}e^{-i(p_2+K-Q_2)_\perp\cdot y_\perp}e^{-i(-w+Q_2-Q_1)_\perp\cdot z_\perp}e^{i\frac{qB}{2}\left(x\hat{F}z+z\hat{F}y+y\hat{F}x\right)}. \tag{B.10}$$

Ahora, se llevará a cabo de forma explícita el procedimiento discutido bajo la Ec. (1.46).

Identificando la integral sobre $x_\perp$ con la representación integral de la delta de Dirac, se obtiene que

$$\begin{aligned} I_\perp =& \int d^{D_\perp}x_\perp\, d^{D_\perp}y_\perp\, d^{D_\perp}z_\perp\, e^{-ix_\perp\cdot\left(a_\perp+\frac{qB}{2}\hat{F}(y-z)\right)}e^{-iy_\perp\cdot b_\perp}e^{-iz_\perp\cdot c_\perp}e^{i\frac{qB}{2}z\hat{F}y} \\ =& \int d^{D_\perp}y_\perp\, d^{D_\perp}z_\perp\, (2\pi)^{D_\perp}\delta^{(D_\perp)}\left(a_\perp+\frac{qB}{2}\hat{F}\,(y-z)\right)e^{-iy_\perp\cdot b_\perp}e^{-iz_\perp\cdot c_\perp}e^{i\frac{qB}{2}z\hat{F}y}, \end{aligned} \tag{B.11}$$

donde se definieron

$$a = p_1 + Q_1 - K, \tag{B.12}$$

$$b = p_2 + K - Q_2, \tag{B.13}$$

$$c = -w + Q_2 - Q_1. \tag{B.14}$$

Haciendo uso de las propiedades generalizadas de la delta de Dirac se puede evaluar la integral sobre $y_\perp$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_\perp =& \int d^{D_\perp}y_\perp\, d^{D_\perp}z_\perp\, (2\pi)^{D_\perp}\left(\frac{4}{(qB)^2|\det\hat{F}|}\right)^{D_\perp/2}\delta^{(D_\perp)}\left((y-z)_\perp+\frac{2}{qB}a\hat{F}\right) \\ & \times e^{-iy_\perp\cdot b_\perp}e^{-iz_\perp\cdot c_\perp}e^{i\frac{qB}{2}z\hat{F}y} \\ =&(2\pi)^{D_\perp}\left(\frac{4}{(qB)^2|\det\hat{F}|}\right)^{D_\perp/2}\int d^{D_\perp}z_\perp\, e^{-iz_\perp\cdot(a_\perp+b_\perp+c_\perp)}e^{i\frac{2}{qB}a\hat{F}b}. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Y finalmente se llega a que

$$I_\perp = \left(\frac{4\pi}{|qB|}\right)^{D_\perp}(2\pi)^{D_\perp}\delta_\perp^{(D_\perp)}\left(p_1+p_2-w\right)e^{i\frac{2}{qB}(p_1+Q_1-K)\hat{F}(p_2+K-Q_2)} \tag{B.16}$$

Nótese que en este caso aparece la delta de conservación de momento perpendicular total (para el diagrama completo y no para cada vértice como sucedió en la parte paralela) y también un factor de fase que proviene de la combinación de las fases de Schwinger de los propagadores fermiónicos. Vale la pena mencionar que diferentes órdenes de integración sobre $x_\perp$, $y_\perp$ y $z_\perp$ dan resultados distintos para la fase

$$\Omega_{xyz} = i\frac{2}{qB}a_\mu\hat{F}^{\mu\nu}b_\nu = i\frac{2}{qB}(p_1+Q_1-K)\hat{F}(p_2+K-Q_2), \tag{B.17}$$

$$\Omega_{zxy} = i\frac{2}{qB}c_\mu\hat{F}^{\mu\nu}a_\nu = i\frac{2}{qB}(-w+Q_2-Q_1)\hat{F}(p_1+Q_1-K), \tag{B.18}$$

$$\Omega_{yzx} = i\frac{2}{qB}b_\mu\hat{F}^{\mu\nu}c_\nu = i\frac{2}{qB}(p_2+K-Q_2)\hat{F}(-w+Q_2-Q_1). \tag{B.19}$$

donde los subíndices indican el orden de integración (de izquierda a derecha) en el espacio de configuración. Debido a esto, se podría pensar que el resultado final depende del orden de integración. Sin embargo, al llevar a cabo la integración completa sobre los momentos de los fermiones dentro del lazo, el resultado final es el mismo indistintamente de la elección de una de las fases anteriores.

Como se mencionó al inicio de esta sección, las fases anteriores están asociadas al diagrama I. Las fases correspondientes para el diagrama II son las contrarias, esto se debe al signo relativo entre las fases totales de Schwinger como se observa en las Ecs. (B.4)-(B.5).

Apéndice C

Integración de los momentos del lazo

En este apéndice se desarrolla el procedimiento para calcular las integrales sobre los momentos del vértice efectivo que aparecen en la Sección 1.4. Además, se dan las expresiones finales para los distintos procesos estudiados en la presente tesis.

C.1. Integración en el espacio de momentos

Para ilustrar el procedimiento de la integración sobre los momentos de los fermiones en el lazo considérese la Ec. (1.48), dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB\,(I)}(p_1,p_2,w) =& -ihg^2\left(\frac{4\pi}{|qB|}\right)^{D_\perp}(2\pi)^D\delta^{(D)}\left(p_1+p_2-w\right)\\ &\times\int\frac{d^DK\,d^{D_\perp}Q_{1\perp}\,d^{D_\perp}Q_{2\perp}}{(2\pi)^D(2\pi)^{D_\perp}(2\pi)^{D_\perp}}e^{i\frac{2}{qB}(p_1+Q_1-K)\hat{F}(p_2+K-Q_2)}\\ &\times Tr\left[\gamma^\mu\tilde{S}^{qB}\left(Q_{1\perp},(K-p_1)_\parallel\right)\tilde{S}^{qB}\left(Q_{2\perp},(K+p_2)_\parallel\right)\gamma^\nu\tilde{S}^{qB}\left(K_\perp,K_\parallel\right)\right]\\ \equiv& -ihg^2\left(\frac{4\pi}{|qB|}\right)^{D_\perp}(2\pi)^D\delta^{(D)}\left(p_1+p_2-w\right)G_{(I)}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

En este resultado ya se ha realizado la integración sobre los momentos $Q_{1\parallel}$ y $Q_{2\parallel}$ de forma trivial al evaluar las deltas de Dirac de la conservación de momento paralelo (ver Ec. (1.45)). Además se ha definido la función $G_{(I)}$ como

$$\begin{aligned} G_{(I)} =& \int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c}_1{}^2\mathrm{c}_2{}^2\mathrm{c}_3{}^2}\int\frac{d^DK\,d^{D_\perp}Q_{1\perp}\,d^{D_\perp}Q_{2\perp}}{(2\pi)^D(2\pi)^{D_\perp}(2\pi)^{D_\perp}}e^{i\frac{2}{qB}(p_1+Q_1-K)\hat{F}(p_2+K-Q_2)}\\ &\times e^{is_1\left((K-p_1)_\parallel^2-m^2\right)+is_2\left((K+p_2)_\parallel^2-m^2\right)+is_3\left(K_\parallel^2-m^2\right)}e^{i\frac{\mathrm{t}_1}{qB}Q_{1\perp}^2+i\frac{\mathrm{t}_2}{qB}Q_{2\perp}^2+i\frac{\mathrm{t}_3}{qB}K_\perp^2}\\ &\times Tr\left[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1+\not{Q}_{1\perp}\right)\left(\mathbb{M}_2+\not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\right], \end{aligned} \tag{C.2}$$

donde

$$\mathbb{M}_1 \equiv \left(m + (\not{K} - \not{p}_1)_{\parallel}\right) e^{(1)}, \tag{C.3}$$
$$\mathbb{M}_2 \equiv \left(m + (\not{K} + \not{p}_2)_{\parallel}\right) e^{(2)}, \tag{C.4}$$
$$\mathbb{M}_3 \equiv \left(m + \not{K}_{\parallel}\right) e^{(3)}, \tag{C.5}$$

con

$$e^{(j)} \equiv \mathrm{c_j} e^{iqBs_j\Sigma_3}, \tag{C.6}$$

y $\mathrm{c_j} \equiv \cos(qBs_j)$, $\mathrm{t_j} \equiv \tan(qBs_j)$ con s_j los parámetros de Schwinger de cada propagador fermiónico[1].

Las integrales que se muestran en la Ec. (C.2) se pueden resolver a partir del resultado general para una integral Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}, \tag{C.7}$$

con la condición de que $\Re(A) > 0$, al manipular las exponenciales de tipo $e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ de la siguiente forma

$$e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \exp\left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right] \exp\left[\alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right], \tag{C.8}$$

donde la primera exponencial es independiente de la integración y sale como un factor constante.

Por ejemplo, la integración sobre la variable $Q_{1\perp}$ se puede identificar con

$$G_{(I)}^{Q_{1\perp}} \equiv \int \frac{d^{D_\perp}Q_{1\perp}}{(2\pi)^{D_\perp}} e^{i\left(\frac{\mathrm{t_1}}{qB}Q_{1\perp}^2 + \frac{2}{qB}Q_1\hat{F}(p_2+K-Q_2)\right)} Tr\left[\gamma^\mu \left(\mathbb{M}_1 + \not{Q}_{1\perp}\right)\left(\mathbb{M}_2 + \not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu \left(\mathbb{M}_3 + \not{K}_\perp\right)\right], \tag{C.9}$$

Completando el cuadrado de la exponencial y definiendo

$$l_{Q_{1\perp}}^\mu \equiv Q_{1\perp}^\mu - \frac{1}{\mathrm{t_1}}\hat{F}^{\mu\nu}\left(Q_2 - K - p_2\right)_{\perp\nu}, \tag{C.10}$$

se puede llevar la expresión anterior a la forma de una integral Gaussiana

$$\begin{aligned} G_{(I)}^{Q_{1\perp}} =& e^{-\frac{i}{qB\mathrm{t_1}}(Q_2-K-p_2)_\perp^2} \int \frac{d^{D_\perp}l_{Q_{1\perp}}}{(2\pi)^{D_\perp}} e^{i\frac{\mathrm{t_1}}{qB}l_{Q_{1\perp}}^2} \\ &\times Tr\left[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1 + \not{l}_{Q_{1\perp}} + \frac{1}{\mathrm{t_1}}\hat{\not{F}}\left(Q_2 - K - p_2\right)_\perp\right)\left(\mathbb{M}_2 + \not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3 + \not{K}_\perp\right)\right], \end{aligned} \tag{C.11}$$

donde el cambio de variable realizado da lugar a términos extra en la traza espinorial de la forma $\hat{\not{F}}a = \gamma^\mu \hat{F}_{\mu\nu}a^\nu$. Nótese que el "shift" de la integración Gaussiana proviene de la integración de las fases de Schwinger de los propagadores como se observa en la Ec. (C.2).

[1] s_1 corresponde al propagador con momento Q_1, s_2 a Q_2 y s_3 a K.

Recordando que ese factor de fase es contrario para el diagrama II, los "shift" en ese caso tienen un signo diferente.

En la expresión anterior, la traza espinorial es una función polinómica de orden 1 sobre la variable $l_{Q_{1\perp}}$. Utilizando el resultado generalizado de la integración Gaussiana (Ec. (C.7)), la integración da como resultado

$$\begin{aligned} G_{(I)}^{Q_{1\perp}} =& e^{-\frac{i}{qB\mathrm{t}_1}(Q_2-K-p_2)_\perp^2}\frac{1}{(2\pi)^{D_\perp}}\left(\sqrt{\frac{-i\pi qB}{\mathrm{t}_1}}\right)^{D_\perp} \\ &\times Tr\left[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1+\frac{1}{\mathrm{t}_1}\hat{\not{F}}\left(Q_2-K-p_2\right)_\perp\right)\left(\mathbb{M}_2+\not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\right], \end{aligned} \tag{C.12}$$

donde el término lineal en $l_{Q_{1\perp}}$ no contribuye debido a que da lugar a una función impar integrada sobre un intervalo par.

Sustituyendo el resultado anterior en la Ec. (C.2), se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} G_{(I)} =& \int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c}_1{}^2\mathrm{c}_2{}^2\mathrm{c}_3{}^2}\frac{1}{(2\pi)^{D_\perp}}\left(\sqrt{\frac{-i\pi qB}{\mathrm{t}_1}}\right)^{D_\perp} \\ &\times\int\frac{d^DK}{(2\pi)^D}e^{is_1\left((K-p_1)_\parallel^2-m^2\right)+is_2\left((K+p_2)_\parallel^2-m^2\right)+is_3\left(K_\parallel^2-m^2\right)} \\ &\times e^{i\frac{\mathrm{t}_3}{qB}K_\perp^2}e^{i\frac{2}{qB}(p_1-K)\hat{F}(p_2+K)}e^{-\frac{i}{\mathrm{t}_1qB}(K+p_2)_\perp^2} \\ &\times\int\frac{d^{D_\perp}Q_{2\perp}}{(2\pi)^{D_\perp}}e^{\frac{i}{qB}\left(\mathrm{t}_2-\frac{1}{\mathrm{t}_1}\right)Q_{2\perp}^2}e^{i\frac{2}{qB}\left((p_1-K)\hat{F}Q_2+\frac{1}{\mathrm{t}_1}(K+p_2)_\perp\cdot Q_{2\perp}\right)} \\ &\times Tr\left[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1+\frac{1}{\mathrm{t}_1}\hat{\not{F}}\left(Q_2-K-p_2\right)_\perp\right)\left(\mathbb{M}_2+\not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\right]. \end{aligned} \tag{C.13}$$

Aquí se observa que la integración sobre la variable $Q_{2\perp}$ tendrá un "shift" más complicado pero el procedimiento para llevarla a cabo será exactamente el mismo. Esto se extiende a las integrales sobre las variables $K_\perp$ y $K_\parallel$.

La integración sobre la variable $Q_{2\perp}$ en la Ec. (C.13) se puede identificar con

$$\begin{aligned} G_{(I)}^{Q_{2\perp}} =& \int\frac{d^{D_\perp}Q_{2\perp}}{(2\pi)^{D_\perp}}e^{\frac{i}{|qB|}\left(\mathrm{t}_2-\frac{1}{\mathrm{t}_1}\right)Q_{2\perp}^2}e^{i\frac{2}{|qB|}\left((p_1-K)\hat{F}Q_2+\frac{1}{\mathrm{t}_1}(K+p_2)_\perp\cdot Q_{2\perp}\right)} \\ &\times Tr\left[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1+\frac{1}{\mathrm{t}_1}\hat{\not{F}}\left(Q_2-K-p_2\right)_\perp\right)\left(\mathbb{M}_2+\not{Q}_{2\perp}\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\right]. \end{aligned} \tag{C.14}$$

Definiendo

$$l_{Q_{2\perp}}^\mu \equiv Q_{2\perp}^\mu+\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left((K+p_2)_\perp^\mu-\mathrm{t}_1\hat{F}^{\mu\nu}\left(K-p_1\right)_\nu\right), \tag{C.15}$$

se puede llevar la Ec. (C.14) a una forma Gaussiana

$$
\begin{aligned}
G_{(I)}^{Q_{2\perp}} =& e^{-\frac{i}{|qB|}\frac{1}{\mathrm{t}_1(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1)}\left((K+p_2)_\perp-\mathrm{t}_1\hat{F}(K-p_1)\right)^2}\int\frac{d^{D_\perp}Q_{2\perp}}{(2\pi)^{D_\perp}}e^{\frac{i}{|qB|}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}{\mathrm{t}_1}l_{Q_{2\perp}}^2}\\
&\times Tr\Bigg[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1+\frac{1}{\mathrm{t}_1}\hat{\not{F}}\left(l_{Q_{2\perp}}-\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left((K+p_2)_\perp-\mathrm{t}_1\hat{F}\left(K-p_1\right)_\perp\right)-K_\perp-p_{2\perp}\right)\right)\\
&\qquad\times\left(\mathbb{M}_2+\not{l}_{Q_{2\perp}}-\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left(\not{K}+\not{p}_2\right)_\perp-\mathrm{t}_1\hat{\not{F}}\left(K-p_1\right)_\perp\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

En el resultado anterior se tiene un polinomio de orden 2 en $l_{Q_{2\perp}}$. En este caso, sólo contribuyen los términos cuadrático y constante a la integración Gaussiana, dando como resultado

$$
\begin{aligned}
G_{(I)}^{Q_{2\perp}} =& e^{-\frac{i}{|qB|}\frac{1}{\mathrm{t}_1(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1)}\left((K+p_2)_\perp-\mathrm{t}_1\hat{F}(K-p_1)\right)^2}\frac{1}{(2\pi)^{D_\perp}}\left(\sqrt{\frac{-i\pi\mathrm{t}_1|qB|}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}}\right)^{D_\perp}\\
&\times\Bigg\{Tr\Bigg[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1-\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\hat{\not{F}}\left(\mathrm{t}_2\left(K+p_2\right)_\perp-\hat{F}(K-p_1)_\perp\right)\right)\\
&\qquad\times\left(\mathbb{M}_2-\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left(\left(\not{K}+\not{p}_2\right)_\perp-\mathrm{t}_1\hat{\not{F}}\left(K-p_1\right)_\perp\right)\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\Bigg]\\
&\qquad+\frac{i|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1\right)}Tr\left[\gamma^\mu\hat{\not{F}}\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\right]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

donde se introducido la notación. $\hat{\not{F}}\hat{F}a\equiv\gamma^\mu\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\nu\alpha}a_\alpha$ y $\hat{\not{F}}=\gamma^\alpha\hat{F}_{\alpha\beta}\gamma^\beta$. Sustituyendo el resultado en la Ec. (C.13), y después de algunas manipulaciones, se obtiene

$$
\begin{aligned}
G_{(I)} =& \int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c}_1{}^2\mathrm{c}_2{}^2\mathrm{c}_3{}^2}\frac{1}{(2\pi)^{2D_\perp}}\left(\sqrt{\frac{-i\pi|qB|}{\mathrm{t}_1}}\right)^{D_\perp}\left(\sqrt{\frac{-i\pi\mathrm{t}_1|qB|}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}}\right)^{D_\perp}\\
&\times\int\frac{d^DK_\parallel}{(2\pi)^{D_\parallel}}e^{is_1\left((K-p_1)_\parallel^2-m^2\right)+is_2\left((K+p_2)_\parallel^2-m^2\right)+is_3\left(K_\parallel^2-m^2\right)}e^{-\frac{i}{|qB|}\frac{\mathrm{t}_1p_{1\perp}^2+\mathrm{t}_2p_{2\perp}^2+2\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}}\\
&\times\int\frac{d^DK_\perp}{(2\pi)^{D_\perp}}e^{\frac{i}{|qB|}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}K_\perp^2}e^{i\frac{2}{|qB|}\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2(p_1+p_2)\hat{F}K_\perp+(\mathrm{t}_1p_{1\perp}+\mathrm{t}_2p_{2\perp})\cdot K_\perp\right)}\\
&\quad\times\Bigg\{Tr\Bigg[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1-\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\hat{\not{F}}\left(\mathrm{t}_2\left(K+p_2\right)_\perp-\hat{F}(K-p_1)_\perp\right)\right)\\
&\qquad\times\left(\mathbb{M}_2-\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left(\left(\not{K}+\not{p}_2\right)_\perp-\mathrm{t}_1\hat{\not{F}}\left(K-p_1\right)_\perp\right)\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\Bigg]\\
&\qquad+\frac{i|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1\right)}Tr\left[\gamma^\mu\hat{\not{F}}\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{C.18}
$$

Nótese que las integrales sobre las componentes paralela y perpendicular del momento K^μ son diferentes e independientes, esto es debido a la separación de la dinámica en estas componentes por la presencia del campo magnético externo.

Sin pérdida de generalidad, se pueden trabajar primero las componentes perpendiculares

$$
\begin{aligned}
G^{K_\perp}_{(I)} = \int \frac{d^D K_\perp}{(2\pi)^{D_\perp}} & e^{\frac{i}{|qB|}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}K_\perp^2} e^{i\frac{2}{|qB|}\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left(-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 K_\perp \hat{F}(p_1+p_2)+(\mathrm{t}_1 p_{1\perp}-\mathrm{t}_2 p_{2\perp})\cdot K_\perp\right)} \\
& \times \left\{ Tr\left[\gamma^\mu \left(\mathbb{M}_1 - \frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\hat{\not{F}}\left(\mathrm{t}_2\left(K+p_2\right)_\perp - \hat{F}(K-p_1)_\perp\right)\right)\right.\right. \\
& \qquad \times \left(\mathbb{M}_2 - \frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left(\left(\not{K}+\not{p}_2\right)_\perp - \mathrm{t}_1\hat{\not{F}}\left(K-p_1\right)_\perp\right)\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\Big] \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{i|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1\right)} Tr\left[\gamma^\mu \hat{\not{F}}\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3+\not{K}_\perp\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{C.19}
$$

Llevando a cabo l cambio de variable

$$
l^\mu_{K_\perp} \equiv K^\mu_\perp + \frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}\left(\mathrm{t}_1 p^\mu_{1\perp} - \mathrm{t}_2 p^\mu_{2\perp} - \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{F}^{\mu\nu}\left(p_1+p_2\right)_\nu\right), \tag{C.20}
$$

las integrales en la Ec. (C.19) se pueden llevar a la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
G^{K_\perp}_{(I)} =& e^{\frac{i}{|qB|}\frac{\left(\mathrm{t}_1 p_{1\perp}-\mathrm{t}_2 p_{2\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{F}(p_1+p_2)\right)^2}{(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1)(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3)}} \int \frac{d^D K_\perp}{(2\pi)^{D_\perp}} e^{\frac{i}{|qB|}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1} l^2_{K_\perp}} \\
& \times \left\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(\mathbb{M}_1 - \frac{\mathrm{t}_2}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\hat{\not{F}}\left(l_{K_\perp} - \frac{\mathrm{t}_1 p_{1\perp}-\mathrm{t}_2 p_{2\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{F}\left(p_1+p_2\right)_\perp}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3} + p_{2\perp}\right)\right.\right.\right. \\
& \qquad + \left.\frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\hat{\not{F}}\hat{F}\left(l_{K_\perp} - \frac{\mathrm{t}_1 p_{1\perp}-\mathrm{t}_2 p_{2\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{F}\left(p_1+p_2\right)_\perp}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3} - p_{1\perp}\right)\right) \\
& \qquad \times \left(\mathbb{M}_2 - \frac{1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\left(\not{l}_{K_\perp} - \frac{\mathrm{t}_1\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t}_2\not{p}_{2\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{\not{F}}\left(p_1+p_2\right)_\perp}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3} + \not{p}_{2\perp}\right)\right. \\
& \qquad\qquad + \left.\frac{\mathrm{t}_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}\hat{\not{F}}\left(l_{K_\perp} - \frac{\mathrm{t}_1 p_{1\perp}-\mathrm{t}_2 p_{2\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{F}\left(p_1+p_2\right)_\perp}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3} - p_{1\perp}\right)\right) \\
& \qquad\qquad\qquad \times \gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3 + \not{l}_{K_\perp} - \frac{\mathrm{t}_1\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t}_2\not{p}_{2\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{\not{F}}\left(p_1+p_2\right)_\perp}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}\right)\Bigg] \\
& + \left.\frac{i|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1\right)} Tr\left[\gamma^\mu\hat{\not{F}}\gamma^\nu\left(\mathbb{M}_3 + \not{l}_{K_\perp} - \frac{\mathrm{t}_1\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t}_2\not{p}_{2\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{\not{F}}\left(p_1+p_2\right)_\perp}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}\right)\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{C.21}
$$

donde ahora se tiene un polinomio de orden 3 en $l_{K_\perp}$. Nuevamente sólo contribuyen los términos cuadrático y constante, así que integración Gaussiana da como resultado

$$
\begin{aligned}
G^{K_\perp}_{(I)} =& e^{\frac{i}{|qB|}\frac{\left(\mathrm{t}_1 p_{1\perp} - \mathrm{t}_2 p_{2\perp} - \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 \hat{F} w\right)^2}{(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 - 1)(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3)}} \frac{1}{(2\pi)^{D_\perp}} \left(\sqrt{\frac{-i\pi\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 - 1\right)|qB|}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}}\right)^{D_\perp} \\
&\times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu \tilde{\mathbb{M}}_1 \tilde{\mathbb{M}}_2 \gamma^\nu \tilde{\mathbb{M}}_3\right] \\
&\quad + \frac{i|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3\right)} \\
&\qquad \times \Bigg(- D_\perp \, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\nu \tilde{\mathbb{M}}_3\right] + D_\perp \, Tr\left[\gamma^\mu \left(\tilde{\mathbb{M}}_1 + \tilde{\mathbb{M}}_2\right) \gamma^\nu\right] \\
&\qquad\quad - 2\, Tr\left[\gamma^\mu \tilde{\mathbb{M}}_1 \gamma^\nu_\perp\right] - 2\, Tr\left[\gamma^\mu_\perp \tilde{\mathbb{M}}_2 \gamma^\nu\right] + \mathrm{t}_3\, Tr\left[\gamma^\mu \hat{\not{F}} \gamma^\nu \tilde{\mathbb{M}}_3\right] \\
&\qquad\quad - \mathrm{t}_2\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\beta_\perp \hat{F}_{\beta\alpha} \tilde{\mathbb{M}}_2 \gamma^\nu \gamma^\alpha_\perp\right] + \mathrm{t}_1\, Tr\left[\gamma^\mu \tilde{\mathbb{M}}_1 \gamma^\alpha_\perp \hat{F}_{\alpha\beta} \gamma^\nu \gamma^\beta_\perp\right] \Bigg) \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.22}
$$

donde se han definido

$$
\tilde{\mathbb{M}}_i \equiv \mathbb{M}_i + \not{\mathbb{C}}_i, \tag{C.23}
$$

con

$$
\not{\mathbb{C}}_1 = \frac{\mathrm{t}_3 \not{p}_{1\perp} + \mathrm{t}_2 \not{w}_\perp - \mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 \hat{\not{F}} p_{2\perp}}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}, \tag{C.24}
$$

$$
\not{\mathbb{C}}_2 = \frac{-\mathrm{t}_3 \not{p}_{2\perp} - \mathrm{t}_1 \not{w}_\perp - \mathrm{t}_1\mathrm{t}_3 \hat{\not{F}} p_{1\perp}}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}, \tag{C.25}
$$

$$
\not{\mathbb{C}}_3 = \frac{-\mathrm{t}_1 \not{p}_{1\perp} + \mathrm{t}_2 \not{p}_{2\perp} + \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 \hat{\not{F}} w_\perp}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}, \tag{C.26}
$$

y se utilizó la conservación del momento $(p_1 + p_2)_\perp = w_\perp$. Al sustituirse este resultado en la

Ec. (C.18), es posible escribirse como

$$
\begin{aligned}
G_{(I)} = \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2 \mathrm{c_2}^2 \mathrm{c_3}^2} \frac{1}{(2\pi)^{3D_\perp}} & \left(\sqrt{\frac{-i\pi|qB|}{\mathrm{t}_1}}\right)^{D_\perp} \left(\sqrt{\frac{-i\pi \mathrm{t}_1|qB|}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1}}\right)^{D_\perp} \left(\sqrt{\frac{-i\pi\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2-1\right)|qB|}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}}\right)^{D_\perp} \\
& \times e^{-im^2(s_1+s_2+s_3)} e^{-\frac{i}{|qB|}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3 p_{1\perp}^2+\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 p_{2\perp}^2+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 w_\perp^2+2\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}} \\
& \times \int \frac{d^D K_\parallel}{(2\pi)^{D_\parallel}} e^{is_1(K-p_1)_\parallel^2+is_2(K+p_2)_\parallel^2+is_3K_\parallel^2} \\
& \times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu \tilde{\mathbb{M}}_1 \tilde{\mathbb{M}}_2 \gamma^\nu \tilde{\mathbb{M}}_3\right] \\
& \quad + \frac{i|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3\right)} \\
& \quad \times \Bigg(- D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\tilde{\mathbb{M}}_3\right] + D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\left(\tilde{\mathbb{M}}_1+\tilde{\mathbb{M}}_2\right)\gamma^\nu\right] \\
& \quad - 2\, Tr\left[\gamma^\mu\tilde{\mathbb{M}}_1\gamma_\perp^\nu\right] - 2\, Tr\left[\gamma_\perp^\mu\tilde{\mathbb{M}}_2\gamma^\nu\right] + \mathrm{t}_3\, Tr\left[\gamma^\mu \hat{\not{F}} \gamma^\nu \tilde{\mathbb{M}}_3\right] \\
& \quad - \mathrm{t}_2\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma_\perp^\beta \hat{F}_{\beta\alpha}\tilde{\mathbb{M}}_2\gamma^\nu\gamma_\perp^\alpha\right] + \mathrm{t}_1\, Tr\left[\gamma^\mu\tilde{\mathbb{M}}_1\gamma_\perp^\alpha\hat{F}_{\alpha\beta}\gamma^\nu\gamma_\perp^\beta\right] \Bigg) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{C.27}
$$

Finalmente, la integración asociada a la variable $K_\parallel$ está dada por

$$
\begin{aligned}
G_{(I)}^{K_\parallel} = \int & \frac{d^D K_\parallel}{(2\pi)^{D_\parallel}} e^{is_1(K-p_1)_\parallel^2+is_2(K+p_2)_\parallel^2+is_3K_\parallel^2} \\
& \times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu \tilde{\mathbb{M}}_1 \tilde{\mathbb{M}}_2 \gamma^\nu \tilde{\mathbb{M}}_3\right] \\
& \quad + \frac{i|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3\right)} \\
& \quad \times \Bigg(- D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\tilde{\mathbb{M}}_3\right] + D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\left(\tilde{\mathbb{M}}_1+\tilde{\mathbb{M}}_2\right)\gamma^\nu\right] \\
& \quad - 2\, Tr\left[\gamma^\mu\tilde{\mathbb{M}}_1\gamma_\perp^\nu\right] - 2\, Tr\left[\gamma_\perp^\mu\tilde{\mathbb{M}}_2\gamma^\nu\right] + \mathrm{t}_3\, Tr\left[\gamma^\mu \hat{\not{F}} \gamma^\nu \tilde{\mathbb{M}}_3\right] \\
& \quad - \mathrm{t}_2\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma_\perp^\beta \hat{F}_{\beta\alpha}\tilde{\mathbb{M}}_2\gamma^\nu\gamma_\perp^\alpha\right] + \mathrm{t}_1\, Tr\left[\gamma^\mu\tilde{\mathbb{M}}_1\gamma_\perp^\alpha\hat{F}_{\alpha\beta}\gamma^\nu\gamma_\perp^\beta\right] \Bigg) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{C.28}
$$

que definiendo

$$
l_{K_\parallel}^\mu \equiv K_\parallel^\mu - \frac{s_1 p_{1\parallel}^\mu - s_2 p_{2\parallel}^\mu}{s_1+s_2+s_3}, \tag{C.29}
$$

pude llevarse a una forma Gaussiana

$$
\begin{aligned}
G_{(I)}^{K_\parallel} =& e^{\frac{i}{s_1+s_2+s_3}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2 + s_2 s_3 p_{2\parallel}^2 + s_1 s_2 w_\parallel^2\right)} \int \frac{d^D l_{K_\parallel}}{(2\pi)^{D_\parallel}} e^{i(s_1+s_2+s_3) l_{K_\parallel}^2} \\
&\times \Bigg\{ Tr\Bigg[\gamma^\mu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(1)} + \left(m - \not{p}_{1\parallel}\right) e^{(1)} + \not{\mathbb{C}}_1 \right) \\
&\qquad \times \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(2)} + \left(m + \not{p}_{2\parallel}\right) e^{(2)} + \not{\mathbb{C}}_2 \right) \\
&\qquad\qquad \times \gamma^\nu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(3)} + m\, e^{(3)} + \not{\mathbb{C}}_3 \right) \Bigg] \\
&\quad + \frac{i|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3\right)} \\
&\qquad \times \Bigg(- D_\perp\, Tr\Bigg[\gamma^\mu\gamma^\nu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(3)} + m\, e^{(3)} + \not{\mathbb{C}}_3 \right) \Bigg] \\
&\qquad + D_\perp\, Tr\Bigg[\gamma^\mu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(1)} + \left(m - \not{p}_{1\parallel}\right) e^{(1)} + \not{\mathbb{C}}_1 \right) \gamma^\nu \Bigg] \\
&\qquad + D_\perp\, Tr\Bigg[\gamma^\mu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(2)} + \left(m + \not{p}_{2\parallel}\right) e^{(2)} + \not{\mathbb{C}}_2 \right) \gamma^\nu \Bigg] \\
&\qquad - 2\, Tr\Bigg[\gamma^\mu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(1)} + \left(m - \not{p}_{1\parallel}\right) e^{(1)} + \not{\mathbb{C}}_1 \right) \gamma_\perp^\nu \Bigg] \\
&\qquad - 2\, Tr\Bigg[\gamma_\perp^\mu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(2)} + \left(m + \not{p}_{2\parallel}\right) e^{(2)} + \not{\mathbb{C}}_2 \right) \gamma^\nu \Bigg] \\
&\qquad + \mathrm{t}_3\, Tr\Bigg[\gamma^\mu \hat{\not{F}} \gamma^\nu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(3)} + m\, e^{(3)} + \not{\mathbb{C}}_3 \right) \Bigg] \\
&\qquad - \mathrm{t}_2\, Tr\Bigg[\gamma^\mu \gamma_\perp^\beta \hat{F}_{\beta\alpha} \Bigg(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(2)} + \left(m + \not{p}_{2\parallel}\right) e^{(2)} \\
&\qquad\qquad + \not{\mathbb{C}}_2 \Bigg) \gamma^\nu \gamma_\perp^\alpha \Bigg] \\
&\qquad + \mathrm{t}_1\, Tr\Bigg[\gamma^\mu \left(\left(\not{l}_{K_\parallel} + \frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s_1+s_2+s_3} \right) e^{(1)} + \left(m - \not{p}_{1\parallel}\right) e^{(1)} + \not{\mathbb{C}}_1 \right) \\
&\qquad\qquad \times \gamma_\perp^\alpha \hat{F}_{\alpha\beta} \gamma^\nu \gamma_\perp^\beta \Bigg] \Bigg) \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{C.30}
$$

La expresión anterior contiene un polinomio de orden 3 en $l_{K_\parallel}$ que, siguiendo la metodología presentada, da como resultado

$$\begin{aligned}
G^{K_\parallel}_{(I)} =& e^{\frac{i}{s_1+s_2+s_3}\left(s_1 s_3 p^2_{1\parallel}+s_2 s_3 p^2_{2\parallel}+s_1 s_2 w^2_{\parallel}\right)} \frac{1}{(2\pi)^{D_\parallel}} \sqrt{\frac{i\pi}{s_1+s_2+s_3}} \left(\sqrt{\frac{-i\pi}{s_1+s_2+s_3}}\right)^{D_\parallel - 1} \\
&\times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu \left(m e^{(1)} + \not{U}_1\right) \left(m e^{(2)} + \not{U}_2\right) \gamma^\nu \left(m e^{(3)} + \not{U}_3\right)\right] \\
&\quad + \frac{im}{2s} \left(-D_\parallel Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} e^{(2)} \gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)} e^{(2)} \gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} e^{(2)} \gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right]\right) \\
&\quad + \frac{im|qB|}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3\right)} \\
&\qquad \times \Bigg(- D_\perp Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\nu e^{(3)}\right] + D_\perp Tr\left[\gamma^\mu \left(e^{(1)} + e^{(2)}\right)\gamma^\nu\right] - 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} \gamma^\nu_\perp\right] \\
&\qquad\qquad - 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp e^{(2)} \gamma^\nu\right] + \mathrm{t}_1\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} \left(\gamma^\alpha_\perp \hat{F}_{\alpha\beta}\right) \gamma^\nu \gamma^\beta_\perp\right] \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t}_2\, Tr\left[\gamma^\alpha_\perp \gamma^\mu \left(\hat{F}_{\alpha\beta} \gamma^\beta_\perp\right) e^{(2)} \gamma^\nu\right] + \mathrm{t}_3\, Tr\left[\gamma^\mu \not{\hat{F}} \gamma^\nu e^{(3)}\right] \Bigg) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{C.31}$$

donde se han definido

$$\not{U}_1 = \left(-\frac{s_3 \not{p}_{1\parallel} + s_2 \not{w}_\parallel}{s}\right) e^{(1)} + \frac{\mathrm{t}_3 \not{p}_{1\perp} + \mathrm{t}_2 \not{w}_\perp - \mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 \not{\hat{F}} p_2}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}, \tag{C.32}$$

$$\not{U}_2 = \left(+\frac{s_1 \not{w}_\parallel + s_3 \not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(2)} + \frac{-\mathrm{t}_3 \not{p}_{2\perp} - \mathrm{t}_1 \not{w}_\perp - \mathrm{t}_1\mathrm{t}_3 \not{\hat{F}} p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}, \tag{C.33}$$

$$\not{U}_3 = \left(+\frac{s_1 \not{p}_{1\parallel} - s_2 \not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(3)} + \frac{-\mathrm{t}_1 \not{p}_{1\perp} + \mathrm{t}_2 \not{p}_{2\perp} + \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 \not{\hat{F}} w}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_3}, \tag{C.34}$$

y $s \equiv s_1 + s_2 + s_3$. Sustituyendo el resultado de la integración sobre $l_{K_\parallel}$ en la Ec. (C.27), la expresión final para la integración sobre los momentos de los fermiones en lazo toma la forma

$$
\begin{aligned}
G_{(I)} = \frac{1}{(2\pi)^{D_\parallel}} \frac{1}{(2\pi)^{3D_\perp}} \int & \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2} e^{-ism^2} e^{\frac{i}{s}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2 + s_2 s_3 p_{2\parallel}^2 + s_1 s_2 w_\parallel^2\right)} \\
& \times e^{-\frac{i}{|qB|}\frac{\mathrm{t_1 t_3} p_{1\perp}^2 + \mathrm{t_2 t_3} p_{2\perp}^2 + \mathrm{t_1 t_2} w_\perp^2 + 2\mathrm{t_1 t_2 t_3} p_2 \hat{F} p_1}{\mathrm{t_1 t_2 t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}}} \sqrt{\frac{i\pi}{s}} \left(\sqrt{\frac{-i\pi}{s}}\right)^{D_\parallel - 1} \\
& \times \left(\sqrt{\frac{-i\pi|qB|}{\mathrm{t_1}}}\right)^{D_\perp} \left(\sqrt{\frac{-i\pi\mathrm{t_1}|qB|}{\mathrm{t_1 t_2} - 1}}\right)^{D_\perp} \left(\sqrt{\frac{-i\pi\left(\mathrm{t_1 t_2} - 1\right)|qB|}{\mathrm{t_1 t_2 t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}}}\right)^{D_\perp} \\
& \times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu \left(m e^{(1)} + \not{U}_1\right)\left(m e^{(2)} + \not{U}_2\right)\gamma^\nu \left(m e^{(3)} + \not{U}_3\right)\right] \\
& \quad + \frac{im}{2s}\Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} e^{(2)} \gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma_\parallel^\mu e^{(1)} e^{(2)} \gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
& \qquad + 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} e^{(2)} \gamma_\parallel^\nu e^{(3)}\right] \Bigg) \\
& \quad + \frac{im|qB|}{2\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}\right)} \\
& \qquad \times \Bigg(- D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu \gamma^\nu e^{(3)}\right] + D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu \left(e^{(1)} + e^{(2)}\right)\gamma^\nu\right] \\
& \qquad - 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} \gamma_\perp^\nu\right] - 2\, Tr\left[\gamma_\perp^\mu e^{(2)} \gamma^\nu\right] \\
& \qquad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} \left(\gamma_\perp^\alpha \hat{F}_{\alpha\beta}\right)\gamma^\nu \gamma_\perp^\beta\right] \\
& \qquad + \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma_\perp^\alpha \gamma^\mu \left(\hat{F}_{\alpha\beta}\gamma_\perp^\beta\right) e^{(2)} \gamma^\nu\right] \\
& \qquad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu \not{\hat{F}} \gamma^\nu e^{(3)}\right] \Bigg) \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{C.35}
$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. (C.1) se obtiene una expresión analítica para el vértice efectivo en presencia de un campo magnético de intensidad arbitraria

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(I)}}(p_1,p_2) =& ih g^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp+D/2+1}\frac{|qB|^{D_\perp/2}}{2^D\pi^{D/2}} \\
&\times\int\frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c}_1{}^2\mathrm{c}_2{}^2\mathrm{c}_3{}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(qB)}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2+s_2 s_3 p_{2\parallel}^2+s_1 s_2 w_\parallel^2\right)} e^{-\frac{i}{qB}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3 p_{1\perp}^2+\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 p_{2\perp}^2+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 w_\perp^2+2\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}} \\
&\times\Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m\,e^{(1)}+\not{\mathcal{V}}_1\right)\left(m\,e^{(2)}+\not{\mathcal{V}}_2\right)\gamma^\nu\left(m\,e^{(3)}+\not{\mathcal{V}}_3\right)\right] \\
&\quad+\frac{im}{2s}\Bigg(-D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad\qquad+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right]\Bigg) \\
&\quad+\frac{im\,qB}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3\right)} \\
&\qquad\times\Bigg(-D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu e^{(3)}\right]+D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\left(e^{(1)}+e^{(2)}\right)\gamma^\nu\right] \\
&\qquad\qquad-2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\nu_\perp\right]-2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\right] \\
&\qquad\qquad+\mathrm{t}_1\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha_\perp\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad\qquad-\mathrm{t}_2\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad\qquad+\mathrm{t}_3\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu e^{(3)}\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.36}
$$

que es la expresión dada en la Ec. (1.59).

Nótese que los “shifts” para las integrales Gaussianas dependen explícitamente de la fase que se elige para el diagrama luego de la integración en el espacio de configuraciones (véanse Ecs. (B.17)-(B.19)). Sin embargo, el resultado final es indistinto de la elección. Al llevar a cabo la integración sobre los momentos de los quarks dentro del lazo, los “shifts” de cada integración se “compensan” entre sí para que el resultado sea independiente de la elección. Este punto se corroboró de forma explícita calculándose nuevamente las integrales Gaussianas pero ahora considerando cada una de las respectivas fases y comparar los resultados obtenidos. Como esta fase sólo involucra las componentes perpendiculares de los momentos, la integración Gaussiana de la parte paralela queda intacta. Esto da la certeza de que los resultados que se han obtenido hasta ahora son correctos y la elección de la fase que se llegó a hacer en algún punto es irrelevante.

La contribución del diagrama II, que se muestra en la Figura 1.4, al vértice efectivo se puede obtener de dos formas distintas: llevando el cálculo explícito de la Ec. (1.41) o aplicando la operación de conjugación de carga, dada por la Ec.(A.8), al resultado del diagrama I dado por la Ec. (C.36). Ambos procedimientos dan origen al siguiente resultado

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(II)}(p_1,p_2) =& ihg^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp+D/2+1}\frac{|qB|^{D_\perp/2}}{2^D\pi^{D/2}} \\
&\times\int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(qB)}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}\right)^{D_\perp/2}e^{-ism^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1s_3p_{1\parallel}^2+s_2s_3p_{2\parallel}^2+s_1s_2w_\parallel^2\right)}e^{-\frac{i}{qB}\frac{\mathrm{t_1t_3}p_{1\perp}^2+\mathrm{t_2t_3}p_{2\perp}^2+\mathrm{t_1t_2}w_\perp^2-2\mathrm{t_1t_2t_3}p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}} \\
&\times\Bigg\{Tr\left[\gamma^\mu\left(m\,e^{(3)}+\not{\mathbb{Y}}_3\right)\gamma^\nu\left(m\,e^{(2)}+\not{\mathbb{Y}}_2\right)\left(m\,e^{(1)}+\not{\mathbb{Y}}_1\right)\right] \\
&\qquad+\frac{im}{2s}\Bigg(-D_\parallel\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)}e^{(1)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)}e^{(1)}\right] \\
&\qquad\qquad+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu_\parallel e^{(2)}e^{(1)}\right]\Bigg) \\
&\qquad+\frac{im\,qB}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)} \\
&\qquad\times\Bigg(-D_\perp\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\right]+D_\perp\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\left(e^{(1)}+e^{(2)}\right)\right] \\
&\qquad\qquad-2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu_\perp e^{(1)}\right]-2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp\gamma^\nu e^{(2)}\right] \\
&\qquad\qquad+\mathrm{t_1}\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu\gamma^\alpha_\perp e^{(1)}\right]\hat{F}_{\beta\alpha} \\
&\qquad\qquad-\mathrm{t_2}\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^\alpha_\perp\right]\hat{F}_{\beta\alpha} \\
&\qquad\qquad+\mathrm{t_3}\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\gamma^\alpha_\perp\right]\hat{F}_{\beta\alpha}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.37}
$$

con

$$
\not{\mathbb{Y}}_1=\left(\frac{s_3\not{p}_{1\parallel}+s_2\not{w}_\parallel}{s}\right)e^{(1)}+\frac{-\mathrm{t_3}\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t_2}\not{w}_\perp-\mathrm{t_2t_3}\not{\hat{F}}p_2}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}},\tag{C.38}
$$

$$
\not{\mathbb{Y}}_2=\left(-\frac{s_1\not{w}_\parallel+s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)}+\frac{\mathrm{t_3}\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t_1}\not{w}_\perp-\mathrm{t_1t_3}\not{\hat{F}}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}},\tag{C.39}
$$

$$
\not{\mathbb{Y}}_3=\left(-\frac{s_1\not{p}_{1\parallel}-s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)}+\frac{\mathrm{t_1}\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t_2}\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t_1t_2}\not{\hat{F}}w}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}.\tag{C.40}
$$

C.2. Expresiones del vértice efectivo para el decaimiento de piones neutros mediante emisión fotones

Las expresiones analíticas para el vértice efectivo, asociadas a los diagramas de la Figura 2.2, para el decaimiento de piones neutros a un par de fotones en presencia de un campo magnético de intensidad arbitraria son

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(I)}}(p_1,p_2) = -igq_f^2\frac{|q_fB|}{16\pi^2}&\int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_fB)}{\mathrm{t_1t_2t_3}-\mathrm{t_1}-\mathrm{t_2}-\mathrm{t_3}}\right)e^{-ism_f^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1s_3p_{1\parallel}^2+s_2s_3p_{2\parallel}^2+s_1s_2p_{\pi\parallel}^2\right)}e^{-\frac{i}{q_fB}\frac{\mathrm{t_1t_3}p_{1\perp}^2+\mathrm{t_2t_3}p_{2\perp}^2+\mathrm{t_1t_2}p_{\pi\perp}^2+2\mathrm{t_1t_2t_3}p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3}-\mathrm{t_1}-\mathrm{t_2}-\mathrm{t_3}}} \\
&\times\Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f\,e^{(1)}-\not{\mathbb{U}}_1\right)\gamma^5\left(m_f\,e^{(2)}-\not{\mathbb{U}}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f\,e^{(3)}-\not{\mathbb{U}}_3\right)\right] \\
&\quad+\frac{im_f}{2s}\Bigg(-6\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)}\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad\qquad+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right]\Bigg) \\
&\quad+\frac{im_f\,q_fB}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3}-\mathrm{t_1}-\mathrm{t_2}-\mathrm{t_3}\right)} \\
&\qquad\times\Bigg(2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5\gamma^\nu\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad\quad-2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5\gamma^\nu_\perp\right]-2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu\right] \\
&\qquad\quad+\mathrm{t_1}\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^5\gamma^\alpha_\perp\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad\quad-\mathrm{t_2}\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^5e^{(2)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad\quad+\mathrm{t_3}\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^5\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu e^{(3)}\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.41}
$$

con

$$
\not{\mathbb{U}}_1=\left(-\frac{s_3\not{p}_{1\parallel}+s_2\not{p}_{\pi\parallel}}{s}\right)e^{(1)}+\frac{\mathrm{t_3}\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t_2}\not{p}_{\pi\perp}-\mathrm{t_2t_3}\hat{\not{F}}p_2}{\mathrm{t_1t_2t_3}-\mathrm{t_1}-\mathrm{t_2}-\mathrm{t_3}},
\tag{C.42}
$$

$$
\not{\mathbb{U}}_2=\left(\frac{s_1\not{p}_{\pi\parallel}+s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)}+\frac{-\mathrm{t_3}\not{p}_{2\perp}-\mathrm{t_1}\not{p}_{\pi\perp}-\mathrm{t_1t_3}\hat{\not{F}}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3}-\mathrm{t_1}-\mathrm{t_2}-\mathrm{t_3}},
\tag{C.43}
$$

$$
\not{\mathbb{U}}_3=\left(\frac{s_1\not{p}_{1\parallel}-s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)}+\frac{-\mathrm{t_1}\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t_2}\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t_1t_2}\hat{\not{F}}p_\pi}{\mathrm{t_1t_2t_3}-\mathrm{t_1}-\mathrm{t_2}-\mathrm{t_3}},
\tag{C.44}
$$

y

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB\,(II)}(p_1,p_2) = & -igq_f^2\frac{|q_fB|}{16\pi^2}\int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c}_1{}^2\mathrm{c}_2{}^2\mathrm{c}_3{}^2}\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_fB)}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}\right)e^{-ism_f^2} \\
& \times e^{\frac{i}{s}\left(s_1s_3p_{1\parallel}^2+s_2s_3p_{2\parallel}^2+s_1s_2p_{\pi\parallel}^2\right)}e^{-\frac{i}{q_fB}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3p_{1\perp}^2+\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3p_{2\perp}^2+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2p_{\pi\perp}^2-2\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}} \\
& \times\Bigg\{Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f\,e^{(3)}-\not{\mathbb{Y}}_3\right)\gamma^\nu\left(m_f\,e^{(2)}-\not{\mathbb{Y}}_2\right)\gamma^5\left(m_f\,e^{(1)}-\not{\mathbb{Y}}_1\right)\right] \\
& \quad+\frac{im_f}{2s}\Bigg(-6\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^5e^{(1)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^5 e^{(1)}\right] \\
& \qquad\qquad+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu_\parallel e^{(2)}\gamma^5e^{(1)}\right]\Bigg) \\
& \quad+\frac{im_f\,q_fB}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3\right)} \\
& \qquad\times\Bigg(2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5e^{(1)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^5\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\gamma^5\right] \\
& \qquad\quad-2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu_\perp\gamma^5e^{(1)}\right]-2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^5\right] \\
& \qquad\quad+\mathrm{t}_1\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu\gamma^\alpha_\perp\gamma^5e^{(1)}\right]\hat{F}_{\beta\alpha} \\
& \qquad\quad-\mathrm{t}_2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^5\gamma^\alpha_\perp\right]\hat{F}_{\beta\alpha} \\
& \qquad\quad+\mathrm{t}_3\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\gamma^5\gamma^\alpha_\perp\right]\hat{F}_{\beta\alpha}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.45}
$$

con

$$
\not{\mathbb{Y}}_1=\left(\frac{s_3\not{p}_{1\parallel}+s_2\not{p}_{\pi\parallel}}{s}\right)e^{(1)}+\frac{-\mathrm{t}_3\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t}_2\not{p}_{\pi\perp}-\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3\hat{\not{F}}p_2}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}, \tag{C.46}
$$

$$
\not{\mathbb{Y}}_2=\left(-\frac{s_1\not{p}_{\pi\parallel}+s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)}+\frac{\mathrm{t}_3\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t}_1\not{p}_{\pi\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3\hat{\not{F}}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}, \tag{C.47}
$$

$$
\not{\mathbb{Y}}_3=\left(-\frac{s_1\not{p}_{1\parallel}-s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)}+\frac{\mathrm{t}_1\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t}_2\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\hat{\not{F}}p_\pi}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}. \tag{C.48}
$$

C.3. Expresiones del vértice efectivo para la producción de fotones mediante fusión de gluones

Las expresiones analíticas para el vértice efectivo, asociadas a los diagramas de la Figura 3.1, de la producción fotones mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético de intensidad arbitraria son

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (I)}(p_1,p_2) &= iq_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp+D/2+1}\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D\pi^{D/2}} \\
&\quad\times\int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c}_1{}^2\mathrm{c}_2{}^2\mathrm{c}_3{}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
&\quad\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1s_3p_{1\parallel}^2+s_2s_3p_{2\parallel}^2+s_1s_2p_{3\parallel}^2\right)} e^{-\frac{i}{q_fB}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3p_{1\perp}^2+\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3p_{2\perp}^2+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2p_{3\perp}^2+2\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}} \\
&\quad\times\Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f\,e^{(1)}+\not{\mathbb{U}}_1\right)\gamma^\alpha\left(m_f\,e^{(2)}+\not{\mathbb{U}}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f\,e^{(3)}+\not{\mathbb{U}}_3\right)\right] \\
&\qquad+\frac{i}{2s}\Bigg(-D_\parallel\,Tr\left[\gamma^\mu\not{\mathbb{U}}_1\gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu\not{\mathbb{U}}_1\gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right] \\
&\qquad\qquad-D_\parallel\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha\not{\mathbb{U}}_2\gamma^\nu e^{(3)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)}\gamma^\alpha\not{\mathbb{U}}_2\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad\qquad-D_\parallel\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu\not{\mathbb{U}}_3\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha_\parallel e^{(2)}\gamma^\nu\not{\mathbb{U}}_3\right]\Bigg) \\
&\qquad+\frac{i\,q_fB}{2\left(\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3\right)} \\
&\qquad\quad\times\Bigg(D_\perp\,Tr[\gamma^\mu\not{\mathbb{U}}_1\gamma^\alpha\gamma^\nu]-2\,Tr[\gamma^\mu\not{\mathbb{U}}_1\gamma^\alpha\gamma^\nu_\perp]+D_\perp\,Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\not{\mathbb{U}}_2\gamma^\nu] \\
&\qquad\qquad-2\,Tr[\gamma^\mu_\perp\gamma^\alpha\not{\mathbb{U}}_2\gamma^\nu]+D_\perp\,Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\not{\mathbb{U}}_3]-2\,Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^\nu\not{\mathbb{U}}_3] \\
&\qquad\qquad+\mathrm{t}_1\,Tr\left[\gamma^\mu\not{\mathbb{U}}_1\gamma^\alpha\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu\gamma^\sigma_\perp\right]\hat{F}_{\beta\sigma}-\mathrm{t}_2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\alpha\not{\mathbb{U}}_2\gamma^\nu\gamma^\sigma_\perp\right]\hat{F}_{\beta\sigma} \\
&\qquad\qquad\qquad+\mathrm{t}_3\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\alpha\gamma^\sigma_\perp\gamma^\nu\not{\mathbb{U}}_3\right]\hat{F}_{\beta\sigma}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.49}
$$

con

$$
\not{\mathbb{U}}_1=\left(-\frac{s_3\not{p}_{1\parallel}+s_2\not{p}_{3\parallel}}{s}\right)e^{(1)}+\frac{\mathrm{t}_3\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t}_2\not{p}_{3\perp}-\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3\not{\hat{F}}p_2}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}, \tag{C.50}
$$

$$
\not{\mathbb{U}}_2=\left(\frac{s_1\not{p}_{3\parallel}+s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)}+\frac{-\mathrm{t}_3\not{p}_{2\perp}-\mathrm{t}_1\not{p}_{3\perp}-\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3\not{\hat{F}}p_1}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}, \tag{C.51}
$$

$$
\not{\mathbb{U}}_3=\left(\frac{s_1\not{p}_{1\parallel}-s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)}+\frac{-\mathrm{t}_1\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t}_2\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\not{\hat{F}}p_3}{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_3}, \tag{C.52}
$$

y

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (II)}(p_1,p_2) = {} & i q_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D \pi^{D/2}} \\
& \times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
& \times e^{\frac{i}{s}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2 + s_2 s_3 p_{2\parallel}^2 + s_1 s_2 p_{3\parallel}^2\right)} e^{-\frac{i}{q_f B}\frac{\mathrm{t_1 t_3} p_{1\perp}^2 + \mathrm{t_2 t_3} p_{2\perp}^2 + \mathrm{t_1 t_2} p_{3\perp}^2 - 2\mathrm{t_1 t_2 t_3} p_2 \hat{F} p_1}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}} \\
& \times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu \left(m_f e^{(3)} + \mathbb{Y}_3\right)\gamma^\nu\left(m_f e^{(2)} + \mathbb{Y}_2\right)\gamma^\alpha\left(m_f e^{(1)} + \mathbb{Y}_1\right)\right] \\
& \quad + \frac{i}{2s}\Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^\alpha \mathbb{Y}_1\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu_\parallel e^{(2)}\gamma^\alpha \mathbb{Y}_1\right] \\
& \qquad - D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu \mathbb{Y}_2\gamma^\alpha e^{(1)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(3)}\gamma^\nu \mathbb{Y}_2\gamma^\alpha e^{(1)}\right] \\
& \qquad - D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu \mathbb{Y}_3\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^\alpha e^{(1)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu \mathbb{Y}_3\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^\alpha_\parallel e^{(1)}\right]\Bigg) \\
& \quad + \frac{i\, q_f B}{2\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)} \\
& \qquad \times \Bigg(D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha \mathbb{Y}_1] - 2\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu_\perp\gamma^\alpha\mathbb{Y}_1] + D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\mathbb{Y}_2\gamma^\alpha] \\
& \qquad\quad - 2\, Tr[\gamma^\mu_\perp\gamma^\nu\mathbb{Y}_2\gamma^\alpha] + D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\mathbb{Y}_3\gamma^\nu\gamma^\alpha] - 2\, Tr[\gamma^\mu\mathbb{Y}_3\gamma^\nu\gamma^\alpha_\perp] \\
& \qquad\quad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\sigma_\perp\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\gamma^\alpha\mathbb{Y}_1\right]\hat{F}_{\sigma\beta} - \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\sigma_\perp\gamma^\nu\mathbb{Y}_2\gamma^\alpha\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\sigma\beta} \\
& \qquad\quad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu\mathbb{Y}_3\gamma^\nu\gamma^\sigma_\perp\gamma^\alpha\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\sigma\beta}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.53}
$$

con

$$
\mathbb{Y}_1 = \left(\frac{s_3\, \not{p}_{1\parallel} + s_2\, \not{p}_{3\parallel}}{s}\right) e^{(1)} + \frac{-\mathrm{t_3}\,\not{p}_{1\perp} - \mathrm{t_2}\,\not{p}_{3\perp} - \mathrm{t_2 t_3}\,\not{\hat{F}} p_2}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}, \tag{C.54}
$$

$$
\mathbb{Y}_2 = \left(-\frac{s_1\, \not{p}_{3\parallel} + s_3\, \not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(2)} + \frac{\mathrm{t_3}\,\not{p}_{2\perp} + \mathrm{t_1}\,\not{p}_{3\perp} - \mathrm{t_1 t_3}\,\not{\hat{F}} p_1}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}, \tag{C.55}
$$

$$
\mathbb{Y}_3 = \left(-\frac{s_1\, \not{p}_{1\parallel} - s_2\, \not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(3)} + \frac{\mathrm{t_1}\,\not{p}_{1\perp} - \mathrm{t_2}\,\not{p}_{2\perp} + \mathrm{t_1 t_2}\,\not{\hat{F}} p_3}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}. \tag{C.56}
$$

Al considerar a las partículas externas en capa de masa, sus momentos se vuelven colineales y la Ec. (C.49) toma la forma

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\ (I)}(p_1,p_2) &= iq_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\frac{|q_fB|^{D_\perp/2}}{2^D\pi^{D/2}} \\
&\times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_fB)}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
&\times e^{-is\frac{p_{3\perp}^2}{\omega_3^2}\left(v_1v_3\omega_1^2+v_2v_3\omega_2^2+v_1v_2\omega_3^2\right)} e^{-\frac{i}{q_fB}\frac{p_{3\perp}^2}{\omega_3^2}\frac{\mathrm{t_1t_3}\omega_1^2+\mathrm{t_2t_3}\omega_2^2+\mathrm{t_1t_2}\omega_3^2}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}} \\
&\times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f e^{(1)}+\not{V}_1\right)\gamma^\alpha\left(m_f e^{(2)}+\not{V}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f e^{(3)}+\not{V}_3\right)\right] \\
&\quad + \frac{i}{2s}\Bigg(-D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu \not{V}_1\gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\,Tr\left[\gamma^\mu\not{V}_1\gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right] \\
&\qquad - D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha \not{V}_2\gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)}\gamma^\alpha\not{V}_2\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad - D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha e^{(2)}\gamma^\nu \not{V}_3\right] + 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha_\parallel e^{(2)}\gamma^\nu\not{V}_3\right]\Bigg) \\
&\quad + \frac{i\,q_fB}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)} \\
&\qquad \times \Bigg(D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\not{V}_1\gamma^\alpha\gamma^\nu] - 2\,Tr[\gamma^\mu\not{V}_1\gamma^\alpha\gamma^\nu_\perp] + D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\not{V}_2\gamma^\nu] \\
&\qquad - 2\,Tr[\gamma^\mu_\perp\gamma^\alpha\not{V}_2\gamma^\nu] + D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\not{V}_3] - 2\,Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^\nu\not{V}_3] \\
&\qquad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu\not{V}_1\gamma^\alpha\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu\gamma^\sigma_\perp\right]\hat{F}_{\beta\sigma} - \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\alpha\not{V}_2\gamma^\nu\gamma^\sigma_\perp\right]\hat{F}_{\beta\sigma} \\
&\qquad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta_\perp\gamma^\alpha\gamma^\sigma_\perp\gamma^\nu\not{V}_3\right]\hat{F}_{\beta\sigma}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.57}
$$

con

$$\not{V}_1 = \left(-\frac{\omega_1 s_3+\omega_3 s_2}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel}e^{(1)} + \frac{\left(\omega_1\mathrm{t_3}+\omega_3\mathrm{t_2}\right)\not{p}_{3\perp} - \omega_2\mathrm{t_2t_3}\,\hat{\not{F}}p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)}, \tag{C.58}$$

$$\not{V}_2 = \left(\frac{\omega_3 s_1+\omega_2 s_3}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel}e^{(2)} + \frac{\left(-\omega_2\mathrm{t_3}-\omega_3\mathrm{t_1}\right)\not{p}_{3\perp} - \omega_1\mathrm{t_1t_3}\,\hat{\not{F}}p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)}, \tag{C.59}$$

$$\not{V}_3 = \left(\frac{\omega_1 s_1-\omega_2 s_2}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel}e^{(3)} + \frac{\left(-\omega_1\mathrm{t_1}+\omega_2\mathrm{t_2}\right)\not{p}_{3\perp} + \omega_3\mathrm{t_1t_2}\,\hat{\not{F}}p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)}, \tag{C.60}$$

y la Ec. (C.53) toma la forma

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha}_{qB\,(II)}(p_1,p_2) = {} & i q_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\,\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D \pi^{D/2}} \\
& \times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
& \times e^{-is\frac{p_{3\perp}^2}{\omega_3^2}\left(v_1 v_3 \omega_1^2 + v_2 v_3 \omega_2^2 + v_1 v_2 \omega_3^2\right)}\, e^{-\frac{i}{q_f B}\frac{p_{3\perp}^2}{\omega_3^2}\frac{\mathrm{t_1 t_3}\omega_1^2 + \mathrm{t_2 t_3}\omega_2^2 + \mathrm{t_1 t_2}\omega_3^2}{\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}}} \\
& \times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f e^{(3)} + \not{\mathbb{Y}}_3\right)\gamma^\nu\left(m_f e^{(2)} + \not{\mathbb{Y}}_2\right)\gamma^\alpha\left(m_f e^{(1)} + \not{\mathbb{Y}}_1\right)\right] \\
& \qquad + \frac{i}{2s}\Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^\alpha \not{\mathbb{Y}}_1\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu_\parallel e^{(2)}\gamma^\alpha\not{\mathbb{Y}}_1\right] \\
& \qquad\qquad - D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\not{\mathbb{Y}}_2\gamma^\alpha e^{(1)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(3)}\gamma^\nu\not{\mathbb{Y}}_2\gamma^\alpha e^{(1)}\right] \\
& \qquad\qquad - D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu\not{\mathbb{Y}}_3\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^\alpha e^{(1)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu\not{\mathbb{Y}}_3\gamma^\nu e^{(2)}\gamma^\alpha_\parallel e^{(1)}\right]\Bigg) \\
& \qquad + \frac{i\, q_f B}{2\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)} \\
& \qquad\quad \times \Bigg(D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\not{\mathbb{Y}}_1] - 2\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu_\perp\gamma^\alpha\not{\mathbb{Y}}_1] + D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\not{\mathbb{Y}}_2\gamma^\alpha] \\
& \qquad\qquad - 2\, Tr[\gamma^\mu_\perp\gamma^\nu\not{\mathbb{Y}}_2\gamma^\alpha] + D_\perp\, Tr[\gamma^\mu\not{\mathbb{Y}}_3\gamma^\nu\gamma^\alpha] - 2\, Tr[\gamma^\mu\not{\mathbb{Y}}_3\gamma^\nu\gamma^\alpha_\perp] \\
& \qquad\qquad + \mathrm{t}_1\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\sigma_\perp\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\gamma^\alpha\not{\mathbb{Y}}_1\right]\hat{F}_{\sigma\beta} - \mathrm{t}_2\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\sigma_\perp\gamma^\nu\not{\mathbb{Y}}_2\gamma^\alpha\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\sigma\beta} \\
& \qquad\qquad + \mathrm{t}_3\, Tr\left[\gamma^\mu\not{\mathbb{Y}}_3\gamma^\nu\gamma^\sigma_\perp\gamma^\alpha\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\sigma\beta}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.61}
$$

con

$$
\not{\mathbb{Y}}_1 = \left(\frac{\omega_1 s_3 + \omega_3 s_2}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel} e^{(1)} + \frac{\left(-\omega_1 \mathrm{t}_3 - \omega_3 \mathrm{t}_2\right)\not{p}_{3\perp} - \omega_2 \mathrm{t}_2 \mathrm{t}_3 \hat{\not{F}} p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)}, \tag{C.62}
$$

$$
\not{\mathbb{Y}}_2 = \left(-\frac{\omega_3 s_1 + \omega_2 s_3}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel} e^{(2)} + \frac{\left(\omega_2 \mathrm{t}_3 + \omega_3 \mathrm{t}_1\right)\not{p}_{3\perp} - \omega_1 \mathrm{t}_1 \mathrm{t}_3 \hat{\not{F}} p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)}, \tag{C.63}
$$

$$
\not{\mathbb{Y}}_3 = \left(-\frac{\omega_1 s_1 - \omega_2 s_2}{\omega_3 s}\right)\not{p}_{3\parallel} e^{(3)} + \frac{\left(\omega_1 \mathrm{t}_1 - \omega_2 \mathrm{t}_2\right)\not{p}_{3\perp} + \omega_3 \mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2 \hat{\not{F}} p_3}{\omega_3\left(\mathrm{t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3}\right)}. \tag{C.64}
$$

C.4. Expresiones del vértice efectivo para la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones

Las expresiones analíticas para el vértice efectivo, asociadas a los diagramas de la Figura 4.1, de la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético de intensidad arbitraria son

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB_{(I)}}(p_1,p_2) =& i g_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D \pi^{D/2}} \\
&\times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2 + s_2 s_3 p_{2\parallel}^2 + s_1 s_2 p_{H\parallel}^2\right)} e^{-\frac{i}{q_f B}\frac{\mathrm{t_1t_3}p_{1\perp}^2 + \mathrm{t_2t_3}p_{2\perp}^2 + \mathrm{t_1t_2}p_{H\perp}^2 + 2\mathrm{t_1t_2t_3}p_2 \hat{F} p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}} \\
&\times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f e^{(1)} + \not{V}_1\right)\left(m_f e^{(2)} + \not{V}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f e^{(3)} + \not{V}_3\right)\right] \\
&\quad + \frac{im_f}{2s}\Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] + 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)} e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad\qquad + 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)} e^{(2)}\gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right]\Bigg) \\
&\quad + \frac{im_f\, q_f B}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}\right)} \\
&\qquad \times \Bigg(- D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu e^{(3)}\right] + D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\left(e^{(1)} + e^{(2)}\right)\gamma^\nu\right] \\
&\qquad\qquad - 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\nu_\perp\right] - 2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\right] \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\alpha_\perp\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad\qquad - \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\gamma^\beta_\perp\right]\hat{F}_{\alpha\beta} \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha_\perp\gamma^\beta_\perp\gamma^\nu e^{(3)}\right]\hat{F}_{\alpha\beta}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{C.65}
$$

con

$$
\not{V}_1 = \left(-\frac{s_3\not{p}_{1\parallel} + s_2\not{p}_{H\parallel}}{s}\right)e^{(1)} + \frac{\mathrm{t_3}\not{p}_{1\perp} + \mathrm{t_2}\not{p}_{H\perp} - \mathrm{t_2t_3}\hat{\not{F}}p_2}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}, \tag{C.66}
$$

$$
\not{V}_2 = \left(\frac{s_1\not{p}_{H\parallel} + s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)} + \frac{-\mathrm{t_3}\not{p}_{2\perp} - \mathrm{t_1}\not{p}_{H\perp} - \mathrm{t_1t_3}\hat{\not{F}}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}, \tag{C.67}
$$

$$
\not{V}_3 = \left(\frac{s_1\not{p}_{1\parallel} - s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)} + \frac{-\mathrm{t_1}\not{p}_{1\perp} + \mathrm{t_2}\not{p}_{2\perp} + \mathrm{t_1t_2}\hat{\not{F}}p_H}{\mathrm{t_1t_2t_3-t_1-t_2-t_3}}, \tag{C.68}
$$

y

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB\,(II)}(p_1,p_2) =& i g_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D_\perp + D/2+1}\,\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D \pi^{D/2}} \\
&\times \int \frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t_1t_2t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2 + s_2 s_3 p_{2\parallel}^2 + s_1 s_2 p_{H\parallel}^2\right)} e^{-\frac{i}{q_f B}\frac{\mathrm{t_1t_3}p_{1\perp}^2 + \mathrm{t_2t_3}p_{2\perp}^2 + \mathrm{t_1t_2}p_{H\perp}^2 - 2\mathrm{t_1t_2t_3}p_2\hat{F}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}}} \\
&\times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f e^{(3)} + \mathbb{Y}_3\right)\gamma^\nu\left(m_f e^{(2)} + \mathbb{Y}_2\right)\left(m_f e^{(1)} + \mathbb{Y}_1\right)\right] \\
&\quad + \frac{im_f}{2s}\Bigg(- D_\parallel Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)} e^{(1)}\right] + 2\,Tr\left[\gamma_\parallel^\mu e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)} e^{(1)}\right] \\
&\qquad\qquad + 2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma_\parallel^\nu e^{(2)} e^{(1)}\right]\Bigg) \\
&\quad + \frac{im_f\, q_f B}{2\left(\mathrm{t_1t_2t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}\right)} \\
&\qquad \times \Bigg(- D_\perp Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\right] + D_\perp Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\left(e^{(1)} + e^{(2)}\right)\right] \\
&\qquad\qquad - 2\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma_\perp^\nu e^{(1)}\right] - 2\,Tr\left[\gamma_\perp^\mu\gamma^\nu e^{(2)}\right] \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t_1}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma_\perp^\beta\gamma^\nu\gamma_\perp^\alpha e^{(1)}\right]\hat{F}_{\beta\alpha} \\
&\qquad\qquad - \mathrm{t_2}\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma_\perp^\beta\gamma^\nu e^{(2)}\gamma_\perp^\alpha\right]\hat{F}_{\beta\alpha} \\
&\qquad\qquad + \mathrm{t_3}\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\gamma_\perp^\beta\gamma_\perp^\alpha\right]\hat{F}_{\beta\alpha}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.69}
$$

con

$$
\mathbb{Y}_1 = \left(\frac{s_3\,\not{p}_{1\parallel} + s_2\,\not{p}_{H\parallel}}{s}\right) e^{(1)} + \frac{-\mathrm{t_3}\,\not{p}_{1\perp} - \mathrm{t_2}\,\not{p}_{H\perp} - \mathrm{t_2t_3}\,\not{\hat{F}}p_2}{\mathrm{t_1t_2t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}}, \tag{C.70}
$$

$$
\mathbb{Y}_2 = \left(-\frac{s_1\,\not{p}_{H\parallel} + s_3\,\not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(2)} + \frac{\mathrm{t_3}\,\not{p}_{2\perp} + \mathrm{t_1}\,\not{p}_{H\perp} - \mathrm{t_1t_3}\,\not{\hat{F}}p_1}{\mathrm{t_1t_2t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}}, \tag{C.71}
$$

$$
\mathbb{Y}_3 = \left(-\frac{s_1\,\not{p}_{1\parallel} - s_2\,\not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(3)} + \frac{\mathrm{t_1}\,\not{p}_{1\perp} - \mathrm{t_2}\,\not{p}_{2\perp} + \mathrm{t_1t_2}\,\not{\hat{F}}p_H}{\mathrm{t_1t_2t_3} - \mathrm{t_1} - \mathrm{t_2} - \mathrm{t_3}}. \tag{C.72}
$$

Al repetir el cálculo pero considerando que los propagadores vestidos de campo magnético no tienen la fase de Schwinger, las expresiones analíticas para el vértice efectivo de la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético de intensidad arbitraria son

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(I)}(p_1,p_2) =& ig_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D+1}\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D\pi^{D/2}} \\
&\times\int\frac{ds_1\,ds_2\,ds_3}{\mathrm{c_1}^2\mathrm{c_2}^2\mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(-\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2+s_2 s_3 p_{2\parallel}^2+s_1 s_2 p_{H\parallel}^2\right)} e^{\frac{i}{q_f B}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3 p_{1\perp}^2+\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 p_{2\perp}^2+\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 p_{H\perp}^2}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}} \\
&\times\Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f\,e^{(1)}+\tilde{\not{\mathcal{V}}}_1\right)\left(m_f\,e^{(2)}+\tilde{\not{\mathcal{V}}}_2\right)\gamma^\nu\left(m_f\,e^{(3)}+\tilde{\not{\mathcal{V}}}_3\right)\right] \\
&\quad+\frac{im_f}{2s}\Bigg(-D_\parallel\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu e^{(3)}\right] \\
&\qquad+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}e^{(2)}\gamma^\nu_\parallel e^{(3)}\right]\Bigg) \\
&\quad+\frac{im_f\,q_f B}{2\left(\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3\right)}\Bigg(D_\perp\,Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu e^{(3)}\right]-D_\perp\,Tr\left[\gamma^\mu\left(e^{(1)}+e^{(2)}\right)\gamma^\nu\right] \\
&\qquad+2\,Tr\left[\gamma^\mu e^{(1)}\gamma^\nu_\perp\right]+2\,Tr\left[\gamma^\mu_\perp e^{(2)}\gamma^\nu\right]\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.73}
$$

con

$$
\tilde{\not{\mathcal{V}}}_1 = \left(-\frac{s_3\not{p}_{1\parallel}+s_2\not{p}_{H\parallel}}{s}\right)e^{(1)}-\frac{\mathrm{t}_3\not{p}_{1\perp}+\mathrm{t}_2\not{p}_{H\perp}}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}, \tag{C.74}
$$

$$
\tilde{\not{\mathcal{V}}}_2 = \left(\frac{s_1\not{p}_{H\parallel}+s_3\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(2)}+\frac{\mathrm{t}_3\not{p}_{2\perp}+\mathrm{t}_1\not{p}_{H\perp}}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}, \tag{C.75}
$$

$$
\tilde{\not{\mathcal{V}}}_3 = \left(\frac{s_1\not{p}_{1\parallel}-s_2\not{p}_{2\parallel}}{s}\right)e^{(3)}+\frac{\mathrm{t}_1\not{p}_{1\perp}-\mathrm{t}_2\not{p}_{2\perp}}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}, \tag{C.76}
$$

y

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{qB(II)}(p_1,p_2) =& i g_f g_s^2 \mathrm{tr}\left[t^a t^b\right](-i)^{D+1}\frac{|q_f B|^{D_\perp/2}}{2^D \pi^{D/2}} \\
&\times \int \frac{ds_1\, ds_2\, ds_3}{\mathrm{c_1}^2 \mathrm{c_2}^2 \mathrm{c_3}^2}\left(\frac{1}{s}\right)^{D_\parallel/2}\left(-\frac{\mathrm{sign}\,(q_f B)}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}\right)^{D_\perp/2} e^{-ism_f^2} \\
&\times e^{\frac{i}{s}\left(s_1 s_3 p_{1\parallel}^2 + s_2 s_3 p_{2\parallel}^2 + s_1 s_2 p_{H\parallel}^2\right)} e^{\frac{i}{q_f B}\frac{\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3 p_{1\perp}^2 + \mathrm{t}_2\mathrm{t}_3 p_{2\perp}^2 + \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2 p_{H\perp}^2}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}} \\
&\times \Bigg\{ Tr\left[\gamma^\mu\left(m_f\, e^{(3)} + \tilde{\mathbb{V}}_3\right)\gamma^\nu\left(m_f\, e^{(2)} + \tilde{\mathbb{V}}_2\right)\left(m_f\, e^{(1)} + \tilde{\mathbb{V}}_1\right)\right] \\
&\quad + \frac{i m_f}{2s}\Bigg(- D_\parallel\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)} e^{(1)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu_\parallel e^{(3)}\gamma^\nu e^{(2)} e^{(1)}\right] \\
&\qquad\qquad + 2\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu_\parallel e^{(2)} e^{(1)}\right]\Bigg) \\
&\quad + \frac{i m_f\, q_f B}{2\left(\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3\right)}\Bigg(D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu e^{(3)}\gamma^\nu\right] - D_\perp\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\left(e^{(1)}+e^{(2)}\right)\right] \\
&\qquad\qquad + 2\, Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu_\perp e^{(1)}\right] + 2\, Tr\left[\gamma^\mu_\perp\gamma^\nu e^{(2)}\right]\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C.77}
$$

con

$$
\tilde{\mathbb{V}}_1 = \left(\frac{s_3\, \not{p}_{1\parallel} + s_2\, \not{p}_{H\parallel}}{s}\right) e^{(1)} + \frac{\mathrm{t}_3\, \not{p}_{1\perp} + \mathrm{t}_2\, \not{p}_{H\perp}}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}, \tag{C.78}
$$

$$
\tilde{\mathbb{V}}_2 = \left(-\frac{s_1\, \not{p}_{H\parallel} + s_3\, \not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(2)} - \frac{\mathrm{t}_3\, \not{p}_{2\perp} + \mathrm{t}_1\, \not{p}_{H\perp}}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}, \tag{C.79}
$$

$$
\tilde{\mathbb{V}}_3 = \left(-\frac{s_1\, \not{p}_{1\parallel} - s_2\, \not{p}_{2\parallel}}{s}\right) e^{(3)} - \frac{\mathrm{t}_1\, \not{p}_{1\perp} - \mathrm{t}_2\, \not{p}_{2\perp}}{\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2+\mathrm{t}_3}. \tag{C.80}
$$

Bibliografía

[1] Jorge Jaber-Urquiza and Angel Sanchez. Interaction field strength between a scalar particle and two massless vector bosons in the presence of an external magnetic field. *Phys. Rev.* D, **107**(11):116024, 2023.

[2] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. On the Theory of Superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **20**:1064–1082, 1950.

[3] P. W. Anderson and N. Itoh. Pulsar glitches and restlessness as a hard superfluidity phenomenon. *Nature*, **256**:25–27, 1975.

[4] Joseph K. Swiggum et al. A Multiwavelength Study of Nearby Millisecond Pulsar PSR J1400−1431: Improved Astrometry and an Optical Detection of Its Cool White Dwarf Companion. *Astrophys. J.*, **847**(1):25, 2017. [Erratum: Astrophys. J. **895**, 150 (2020)].

[5] Mark G. Alford, Krishna Rajagopal, and Frank Wilczek. QCD at finite baryon density: Nucleon droplets and color superconductivity. *Phys. Lett.* B, **422**:247–256, 1998.

[6] Andrei D. Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology.* Contemporary Concepts in Physics Volume 5. CRC Press, 1990.

[7] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology.* Cambridge University Press, Oxford, 2005.

[8] Tonatiuh Matos, Francisco Siddhartha Guzman, and L. Arturo Urena-Lopez. Scalar field as dark matter in the universe. *Class. Quant. Grav.*, **17**:1707–1712, 2000.

[9] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, **13**:508–509, 1964.

[10] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. Global Conservation Laws and Massless Particles. *Phys. Rev. Lett.*, **13**:585–587, 1964.

[11] John R. Ellis, Mary K. Gaillard, and Dimitri V. Nanopoulos. A Phenomenological Profile of the Higgs Boson. *Nucl. Phys.* B, **106**:292, 1976.

[12] M. I. Kotsky and Oleg I. Yakovlev. On the resummation of double logarithms in the process Higgs —> gamma gamma. *Phys. Lett.* B, **418**:335–344, 1998.

[13] Da Huang, Yong Tang, and Yue-Liang Wu. Note on Higgs Decay into Two Photons $H \to \gamma\gamma$. *Commun. Theor. Phys.*, **57**:427–434, 2012.

[14] William J. Marciano, Cen Zhang, and Scott Willenbrock. Higgs Decay to Two Photons. *Phys. Rev.* D, **85**:013002, 2012.

[15] H. M. Georgi, S. L. Glashow, M. E. Machacek, and Dimitri V. Nanopoulos. Higgs Bosons from Two Gluon Annihilation in Proton Proton Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, **40**:692, 1978.

[16] M. Spira, A. Djouadi, D. Graudenz, and P. M. Zerwas. Higgs boson production at the LHC. *Nucl. Phys.* B, **453**:17–82, 1995.

[17] Abdelhak Djouadi. The Anatomy of electro-weak symmetry breaking. I: The Higgs boson in the standard model. *Phys. Rept.*, **457**:1–216, 2008.

[18] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.* B, **716**:1–29, 2012.

[19] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC. *Phys. Lett.* B, **716**:30–61, 2012.

[20] Chung Kao and Joshua Sayre. Confirming the LHC Higgs Discovery with WW. *Phys. Lett.* B, **722**:324–329, 2013.

[21] CMS Collaboration. Updated measurements of the Higgs boson at 125 GeV in the two photon decay channel. Rep. No. CMS-PAS-HIG-13-001, 2013.

[22] ATLAS Collaboration. Measurements of the properties of the Higgs-like boson in the two photon decay channel with the ATLAS detector using 25 fb^{-1} of proton-proton collision data. Rep. No. ATLAS-CONF-2013-012, 2013.

[23] Stephen L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, **177**:2426–2438, 1969.

[24] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi^0 \to \gamma\gamma$ in the σ model. *Nuovo Cim.* A, **60**:47–61, 1969.

[25] Edmond L. Berger, Jun Gao, Adil Jueid, and Hao Zhang. Production and hadronic decays of Higgs bosons in heavy ion collisions. *Phys. Rev. Lett.*, **122**(4):041803, 2019.

[26] David d'Enterria, Daniel E. Martins, and Patricia Rebello Teles. Higgs boson production in photon-photon interactions with proton, light-ion, and heavy-ion beams at current and future colliders. *Phys. Rev.* D, **101**(3):033009, 2020.

[27] P. Braun-Munzinger and J. Stachel. Pion Production in Heavy Ion Collisions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **37**:97–131, 1987.

[28] V. Skokov, A. Yu. Illarionov, and V. Toneev. Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions. *Int. J. Mod. Phys.* A, **24**:5925–5932, 2009.

[29] Kirill Tuchin. Particle production in strong electromagnetic fields in relativistic heavy-ion collisions. *Adv. High Energy Phys.*, **2013**:490495, 2013.

[30] L. McLerran and V. Skokov. Comments About the Electromagnetic Field in Heavy-Ion Collisions. *Nucl. Phys.* A, **929**:184–190, 2014.

[31] Yang Zhong, Chun-Bin Yang, Xu Cai, and Sheng-Qin Feng. A systematic study of magnetic field in Relativistic Heavy-ion Collisions in the RHIC and LHC energy regions. *Adv. High Energy Phys.*, **2014**:193039, 2014.

[32] Dmitri E. Kharzeev, Larry D. McLerran, and Harmen J. Warringa. The Effects of topological charge change in heavy ion collisions: 'Event by event P and CP violation'. *Nucl. Phys.* A, **803**:227–253, 2008.

[33] Vladimir A. Miransky and Igor A. Shovkovy. Quantum field theory in a magnetic field: From quantum chromodynamics to graphene and Dirac semimetals. *Phys. Rept.*, **576**:1–209, 2015.

[34] G. S. Bali, B. B. Brandt, G. Endrődi, and B. Gläßle. Weak decay of magnetized pions. *Phys. Rev. Lett.*, **121**(7):072001, 2018.

[35] Prabal Adhikari and Brian C. Tiburzi. Chiral Symmetry Breaking and Pion Decay in a Magnetic Field. arXiv:2406.00818 [hep-ph], 2024.

[36] Jorge Jaber-Urquiza. *Efectos de un campo magnético en la tasa de producción del bosón de Higgs mediante fusión de gluones.* Tesis de Maestría, Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM, 2020.

[37] N. K. Nielsen. Higgs boson decay into two photons in an electromagnetic background field. *Phys. Rev.* D, **90**(1):016010, 2014.

[38] Julian S. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, **82**:664–679, 1951.

[39] V. I. Ritus. Radiative corrections in quantum electrodynamics with intense field and their analytical properties. *Annals Phys.*, **69**:555–582, 1972.

[40] E. J. Ferrer, V. de la Incera, D. Manreza Paret, A. Pérez Martínez, and A. Sanchez. Insignificance of the anomalous magnetic moment of charged fermions for the equation of state of a magnetized and dense medium. *Phys. Rev.* D, **91**(8):085041, 2015.

[41] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy. Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field. *Nucl. Phys.* B, **462**:249–290, 1996.

[42] Alejandro Ayala, José Luis Hernández, L. A. Hernández, Ricardo L. S. Farias, and R. Zamora. Magnetic field dependence of the neutral pion mass in the linear sigma model with quarks: The strong field case. *Phys. Rev.* D, **103**(5):054038, 2021.

[43] J. P. Carlomagno, D. Gomez Dumm, S. Noguera, and N. N. Scoccola. Neutral pseudoscalar and vector meson masses under strong magnetic fields in an extended NJL model: Mixing effects. *Phys. Rev.* D, **106**(7):074002, 2022.

[44] Snigdha Ghosh and Sabyasachi Ghosh. One-loop Kubo estimations of the shear and bulk viscous coefficients for hot and magnetized Bosonic and Fermionic systems. *Phys. Rev.* D, **103**:096015, 2021.

[45] Sarthak Satapathy, Snigdha Ghosh, and Sabyasachi Ghosh. Kubo estimation of the electrical conductivity for a hot relativistic fluid in the presence of a magnetic field. *Phys. Rev.* D, **104**(5):056030, 2021.

[46] Sarthak Satapathy, Snigdha Ghosh, and Sabyasachi Ghosh. Quantum field theoretical structure of electrical conductivity of cold and dense fermionic matter in the presence of a magnetic field. *Phys. Rev.* D, **106**(3):036006, 2022.

[47] Aritra Das, Aritra Bandyopadhyay, and Chowdhury Aminul Islam. Lepton pair production from a hot and dense QCD medium in the presence of an arbitrary magnetic field. *Phys. Rev.* D, **106**(5):056021, 2022.

[48] Xinyang Wang and Igor A. Shovkovy. Rate and ellipticity of dilepton production in a magnetized quark-gluon plasma. *Phys. Rev.* D, **106**(3):036014, 2022.

[49] Tzuu-Kang Chyi, Chien-Wen Hwang, W. F. Kao, Guey-Lin Lin, Kin-Wang Ng, and Jie-Jun Tseng. The weak field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field. *Phys. Rev.* D, **62**:105014, 2000.

[50] Alejandro Ayala, Jorge David Castaño Yepes, L. A. Hernández, Jordi Salinas San Martín, and R. Zamora. Gluon polarization tensor and dispersion relation in a weakly magnetized medium. *Eur. Phys. J.* A, **57**(4):140, 2021.

[51] Alejandro Ayala, Ricardo L. S. Farias, S. Hernández-Ortiz, L. A. Hernández, D. Manreza Paret, and R. Zamora. Magnetic field-dependence of the neutral pion mass in the linear sigma model coupled to quarks: The weak field case. *Phys. Rev.* D, **98**(11):114008, 2018.

[52] Gabriella Piccinelli and Angel Sanchez. Magnetic Field Effect on Charged Scalar Pair Creation at Finite Temperature. *Phys. Rev.* D, **96**(7):076014, 2017.

[53] Jorge Jaber-Urquiza, Gabriella Piccinelli, and Angel Sánchez. Response to an External Magnetic Field of the Decay Rate of a Neutral Scalar Field into a Charged Fermion Pair. *Phys. Rev.* D, **99**(5):056011, 2019.

[54] Jorge Jaber-Urquiza. *Efectos de un campo magnético en la tasa de decaimiento de una partícula escalar neutra a fermiones cargados.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2018.

[55] Wu-yang Tsai and Thomas Erber. Photon Pair Creation in Intense Magnetic Fields. *Phys. Rev.* D, **10**:492, 1974.

[56] Wu-yang Tsai and Thomas Erber. The Propagation of Photons in Homogeneous Magnetic Fields: Index of Refraction. *Phys. Rev.* D, **12**:1132, 1975.

[57] J. P. Carlomagno, D. Gomez Dumm, M. F. Izzo Villafañe, S. Noguera, and N. N. Scoccola. Charged pseudoscalar and vector meson masses in strong magnetic fields in an extended NJL model. *Phys. Rev.* D, **106**(9):094035, 2022.

[58] V. V. Skobelev. Two photon axion decay in an external electromagnetic field. *J. Exp. Theor. Phys.*, **88**:209–212, 1999.

[59] Alejandro Ayala, Jorge David Castano-Yepes, Cesareo A. Dominguez, Luis A. Hernandez, Saul Hernandez-Ortiz, and Maria Elena Tejeda-Yeomans. Prompt photon yield and elliptic flow from gluon fusion induced by magnetic fields in relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rev.* D, **96**(1):014023, 2017. [Erratum: Phys. Rev. D **96**, 119901 (2017)].

[60] Alejandro Ayala, Jorge David Castaño Yepes, Isabel Dominguez Jimenez, Jordi Salinas San Martín, and María Elena Tejeda-Yeomans. Centrality dependence of photon yield and elliptic flow from gluon fusion and splitting induced by magnetic fields in relativistic heavy-ion collisions. *Eur. Phys. J.* A, **56**(2):53, 2020.

[61] I. A. Batalin and A. E. Shabad. Photon green function in a stationary homogeneous field of the most general form. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **60**:894–900, 1971.

[62] H. Perez Rojas and A. E. Shabad. Polarization of relativistic electron and positron gas in a strong mangnetic field. Propagation of electromagnetic waves. *Annals Phys.*, **121**:432–455, 1979.

[63] Koichi Hattori and Daisuke Satow. Gluon spectrum in a quark-gluon plasma under strong magnetic fields. *Phys. Rev.* D, **97**(1):014023, 2018.

[64] Alejandro Ayala, Jorge David Castaño Yepes, L. A. Hernández, Ana Julia Mizher, María Elena Tejeda-Yeomans, and R. Zamora. Anisotropic photon emission from gluon fusion and splitting in a strong magnetic background: The two-gluon one-photon vertex. *Phys. Rev.* C, **106**(6):064905, 2022.

[65] M. Coppola, D. Gomez Dumm, S. Noguera, and N. N. Scoccola. Neutral and charged pion properties under strong magnetic fields in the NJL model. *Phys. Rev.* D, **100**(5):054014, 2019.

[66] Xinyang Wang, Igor A. Shovkovy, Lang Yu, and Mei Huang. Ellipticity of photon emission from strongly magnetized hot QCD plasma. *Phys. Rev.* D, **102**(7):076010, 2020.

[67] Xinyang Wang and Igor Shovkovy. Photon polarization tensor in a magnetized plasma: Absorptive part. *Phys. Rev.* D, **104**(5):056017, 2021.

[68] Jorge Jaber-Urquiza and Igor A. Shovkovy. Scalar boson emission from a magnetized relativistic plasma. *Phys. Rev.* D, **108**(9):096009, 2023.

[69] S. Navas et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev.* D, **110**(3):030001, 2024.

[70] John Clive Ward. An Identity in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, **78**:182, 1950.

[71] Y. Takahashi. On the generalized Ward identity. *Nuovo Cim.*, **6**:371, 1957.

[72] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii. *Quantum Electrodynamics.* Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics Vol. 4. Pergamon, 1980.

[73] V. O. Papanyan and V. I. Ritus. Vacuum polarization and photon splitting in an intense field. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **61**:2231–2241, 1971.

[74] V. O. Papanyan and V. I. Ritus. Three-photon interaction in an intense field and scaling invariance. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **65**:1756–1771, 1973.

[75] A. Kuznetsov and N. Mikheev. Electroweak processes in external electromagnetic fields. *Springer Tracts Mod. Phys.*, **197**:1–120, 2004.

[76] W. Dittrich and H. Gies. *Probing the quantum vacuum. Perturbative effective action approach in quantum electrodynamics and its application*, volume 166. 2000.

[77] Stephen L. Adler. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. *Annals Phys.*, **67**:599–647, 1971.

[78] Andrea Erdas. Neutrino self-energy in external magnetic field. *Phys. Rev.* D, **80**:113004, 2009.

[79] J. Gegelia and Ulf-G Meißner. Once more on the Higgs decay into two photons. *Nucl. Phys.* B, **934**:1–6, 2018.

[80] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Applied Mathematics Series. Dover Publications, 1965.

[81] S. Bentvelsen, E. Laenen, and P. Matylinski. *Notes on Higgs production through gluon fusion at leading order.* NIKHEF, 2005.

[82] Sidney S. Avancini, Ricardo L. S. Farias, Norberto N. Scoccola, and William R. Tavares. NJL-type models in the presence of intense magnetic fields: the role of the regularization prescription. *Phys. Rev.* D, **99**(11):116002, 2019.

[83] Snigdha Ghosh, Arghya Mukherjee, Nilanjan Chaudhuri, Pradip Roy, and Sourav Sarkar. Thermo-magnetic spectral properties of neutral mesons in vector and axial-vector channels using NJL model. *Phys. Rev.* D, **101**(5):056023, 2020.

[84] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model.* Cambridge University Press, 2014.

[85] Steven Weinberg. The U(1) Problem. *Phys. Rev.* D, **11**:3583–3593, 1975.

[86] A. D. Sakharov. Violation of CP Invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **5**:32–35, 1967.

[87] F. Bastianelli and P. van Nieuwenhuizen. *Path integrals and anomalies in curved space.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2006.

[88] R. Miskimen. Neutral pion decay. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **61**:1–21, 2011.

[89] A. M. Bernstein and Barry R. Holstein. Neutral Pion Lifetime Measurements and the QCD Chiral Anomaly. *Rev. Mod. Phys.*, **85**:49, 2013.

[90] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics.* Oxford University Press, 1984.

[91] J. F. Donoghue, E. Golowich, and Barry R. Holstein. *Dynamics of the Standard Model.* CUP, 2014.

[92] Dmitri E. Kharzeev. The Chiral Magnetic Effect and Anomaly-Induced Transport. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **75**:133–151, 2014.

[93] Jinfeng Liao. Anomalous transport effects and possible environmental symmetry 'violation' in heavy-ion collisions. *Pramana*, **84**(5):901–926, 2015.

[94] Massimo D'Elia. Lattice QCD Simulations in External Background Fields. *Lect. Notes Phys.*, **871**:181–208, 2013.

[95] B. I. Abelev et al. Azimuthal Charged-Particle Correlations and Possible Local Strong Parity Violation. *Phys. Rev. Lett.*, **103**:251601, 2009.

[96] L. Adamczyk et al. Beam-energy dependence of charge separation along the magnetic field in Au+Au collisions at RHIC. *Phys. Rev. Lett.*, **113**:052302, 2014.

[97] Betty Abelev et al. Charge separation relative to the reaction plane in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, **110**(1):012301, 2013.

[98] James Charbonneau and Ariel Zhitnitsky. Topological Currents in Neutron Stars: Kicks, Precession, Toroidal Fields, and Magnetic Helicity. *JCAP*, **08**:010, 2010.

[99] James Charbonneau, Kelsey Hoffman, and Jeremy Heyl. Large Pulsar Kicks from Topological Currents. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **404**:L119–L123, 2010.

[100] Akira Ohnishi and Naoki Yamamoto. Magnetars and the Chiral Plasma Instabilities. arXiv:1402.4760 [astro-ph.HE].

[101] Massimo Giovannini and M. E. Shaposhnikov. Primordial hypermagnetic fields and triangle anomaly. *Phys. Rev.* D, **57**:2186–2206, 1998.

[102] Alexey Boyarsky, Jurg Frohlich, and Oleg Ruchayskiy. Self-consistent evolution of magnetic fields and chiral asymmetry in the early Universe. *Phys. Rev. Lett.*, **108**:031301, 2012.

[103] Hiroyuki Tashiro, Tanmay Vachaspati, and Alexander Vilenkin. Chiral Effects and Cosmic Magnetic Fields. *Phys. Rev.* D, **86**:105033, 2012.

[104] Michael Buballa. NJL model analysis of quark matter at large density. *Phys. Rept.*, **407**:205–376, 2005.

[105] S. P. Klevansky. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, **64**:649–708, 1992.

[106] Dietmar Ebert, Thorsten Feldmann, and Hugo Reinhardt. Extended NJL model for light and heavy mesons without q - anti-q thresholds. *Phys. Lett.* B, **388**:154–160, 1996.

[107] R. J. Hernández-Pinto, L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, M. A. Bedolla, and I. M. Higuera-Angulo. Electromagnetic form factors and charge radii of pseudoscalar and scalar mesons: A comprehensive contact interaction analysis. *Phys. Rev.* D, **107**(5):054002, 2023.

[108] Christian Schubert. On the gamma(5) problem of dimensional renormalization. HD-THEP-93-46, 1993.

[109] J. Steinberger. On the use of subtraction fields and the lifetimes of some types of meson decay. *Phys. Rev.*, **76**:1180–1186, 1949.

[110] Pieter Maris, Craig D. Roberts, and Peter C. Tandy. Pion mass and decay constant. *Phys. Lett.* B, **420**:267–273, 1998.

[111] J. Gasser and G. R. S. Zarnauskas. On the pion decay constant. *Phys. Lett.* B, **693**:122–128, 2010.

[112] I. Larin et al. Precision measurement of the neutral pion lifetime. *Science*, **368**(6490):506–509, 2020.

[113] Alejandro Ayala, Santiago Bernal-Langarica, Jorge Jaber-Urquiza, and José Jorge Medina-Serna. Two-gluon one-photon vertex in a magnetic field and its explicit one-loop approximation in the intermediate field strength regime. *Phys. Rev.* D, **110**:076021, 2024.

[114] Murray Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, **8**:214–215, 1964.

[115] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2. *Developments in the Quark Theory of Hadrons*, Vol. 1 (1964 - 1978):22–101, 1964.

[116] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein. *Quantum chromodynamics.* Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[117] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Phys. Rev.* D, **10**:2445–2459, 1974.

[118] Jeff Greensite. *An introduction to the confinement problem.* Lect. Notes Phys. Vol. 821. Springer, 2011.

[119] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, **30**:1343–1346, 1973.

[120] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, **30**:1346–1349, 1973.

[121] M. Rodríguez Cahuantzi. MEXnICA, Mexican group in the MPD-NICA experiment at JINR. *J. Phys. Conf. Ser.*, **912**(1):012016, 2017.

[122] A. Andronic et al. Hadron Production in Ultra-relativistic Nuclear Collisions: Quarkyonic Matter and a Triple Point in the Phase Diagram of QCD. *Nucl. Phys.* A, **837**:65–86, 2010.

[123] Adam Miklos Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, Misha A. Stephanov, and J. J. M. Verbaarschot. On the phase diagram of QCD. *Phys. Rev.* D, **58**:096007, 1998.

[124] Patrick Steinbrecher. The QCD crossover at zero and non-zero baryon densities from Lattice QCD. *Nucl. Phys.* A, **982**:847–850, 2019.

[125] N. Armesto and E. Scomparin. Heavy-ion collisions at the Large Hadron Collider: a review of the results from Run 1. *Eur. Phys. J. Plus*, **131**(3):52, 2016.

[126] Edmond Iancu. QCD in heavy ion collisions. In *2011 European School of High-Energy Physics,* 197–266, 2014.

[127] T. Lappi and L. McLerran. Some features of the glasma. *Nucl. Phys.* A, **772**:200–212, 2006.

[128] Larry McLerran and Bjoern Schenke. The Glasma, Photons and the Implications of Anisotropy. *Nucl. Phys.* A, 929:71–82, 2014.

[129] Simon Turbide, Ralf Rapp, and Charles Gale. Hadronic production of thermal photons. *Phys. Rev.* A, **69**:014903, 2004.

[130] W. Liu and R. Rapp. Low-energy thermal photons from meson-meson bremsstrahlung. *Nucl. Phys.* A, **796**:101–121, 2007.

[131] Jacopo Ghiglieri, Juhee Hong, Aleksi Kurkela, Egang Lu, Guy D. Moore, and Derek Teaney. Next-to-leading order thermal photon production in a weakly coupled quark-gluon plasma. *JHEP*, **05**:010, 2013.

[132] Jaroslav Adam et al. Direct photon production in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. *Phys. Lett.* B, **754**:235–248, 2016.

[133] Erwann Masson. Direct Photon Measurements with the ALICE Experiment at the LHC. *MDPI Proc.*, **10**(1):1, 2019.

[134] Jean-François Paquet, Chun Shen, Gabriel S. Denicol, Matthew Luzum, Björn Schenke, Sangyong Jeon, and Charles Gale. Production of photons in relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rev.* C, **93**(4):044906, 2016.

[135] Daniel Lohner. Measurement of Direct-Photon Elliptic Flow in Pb-Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. *J. Phys. Conf. Ser.*, **446**:012028, 2013.

[136] M. Germain. Direct photon measurements in pp and Pb–Pb collisions with the ALICE experiment. *Nucl. Phys.* A, **967**:696–699, 2017.

[137] A. Adare et al. Enhanced production of direct photons in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} =$ 200 GeV and implications for the initial temperature. *Phys. Rev. Lett.*, **104**:132301, 2010.

[138] A. Adare et al. Observation of direct-photon collective flow in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions. *Phys. Rev. Lett.*, **109**:122302, 2012.

[139] A. Adare et al. Centrality dependence of low-momentum direct-photon production in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{_{NN}}} = 200$ GeV. *Phys. Rev.* C, **91**(6):064904, 2015.

[140] A. Adare et al. Azimuthally anisotropic emission of low-momentum direct photons in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{_{NN}}} = 200$ GeV. *Phys. Rev.* C, **94**(6):064901, 2016.

[141] L. Adamczyk et al. Direct virtual photon production in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} =$ 200 GeV. *Phys. Lett.* B, **770**:451–458, 2017.

[142] Peter Brockway Arnold, Guy D. Moore, and Laurence G. Yaffe. Photon emission from quark gluon plasma: Complete leading order results. *JHEP*, **12**:009, 2001.

[143] Nathan P. M. Holt, Paul M. Hohler, and Ralf Rapp. Thermal photon emission from the $\pi\rho\omega$ system. *Nucl. Phys.* A, **945**:1–20, 2016.

[144] Gabor David. Direct real photons in relativistic heavy ion collisions. *Rept. Prog. Phys.*, **83**(4):046301, 2020.

[145] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory.* Cambridge University Press, 1996.

[146] G. Gamow. Expanding universe and the origin of elements. *Phys. Rev.*, **70**:572–573, 1946.

[147] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow. The origin of chemical elements. *Phys. Rev.*, **73**:803–804, 1948.

[148] Ulrich Heinz and Raimond Snellings. Collective flow and viscosity in relativistic heavy-ion collisions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **63**:123–151, 2013.

[149] Jürgen Berges, Klaus Reygers, Naoto Tanji, and Raju Venugopalan. How brightly does the Glasma shine? Photon production off-equilibrium. *Nucl. Phys.* A, **967**:708–711, 2017.

[150] Raghunath Sahoo. Possible Formation of QGP-droplets in Proton-Proton Collisions at the CERN Large Hadron Collider. *AAPPS Bull.*, **29**(4):16–21, 2019.

[151] M. T. AlFiky, O. T. ElSherif, and A. M. Hamed. Onset of the Jet Quenching Phenomenon. *JETP Lett.*, **111**(1):8–17, 2020.

[152] Jan Ambjorn and P. Olesen. W condensate formation in high-energy collisions. *Phys. Lett.* B, **257**:201–206, 1991.

[153] V. A. Okorokov. Magnetic field in nuclear collisions at ultra high energies. *MDPI Physics*, **1**(2):183–193, 2019.

[154] Megan Connors, Christine Nattrass, Rosi Reed, and Sevil Salur. Jet measurements in heavy ion physics. *Rev. Mod. Phys.*, **90**:025005, 2018.

[155] Roman Pasechnik and Michal Šumbera. Phenomenological Review on Quark–Gluon Plasma: Concepts vs. Observations. *Universe*, **3**(1):7, 2017.

[156] Chun Shen and Ulrich Heinz. Collision Energy Dependence of Viscous Hydrodynamic Flow in Relativistic Heavy-Ion Collisions. *Phys. Rev.* C, **85**:054902, 2012. [Erratum: Phys. Rev. C **85**, 049903 (2012)].

[157] Ernst Sichtermann. Gluon Saturation and EIC. *Nucl. Phys.* A, **956**:233–239, 2016.

[158] Georges Aad et al. Measurements of the Higgs boson production and decay rates and constraints on its couplings from a combined ATLAS and CMS analysis of the LHC pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV. *JHEP*, **08**:045, 2016.

[159] Vardan Khachatryan et al. Searches for invisible decays of the Higgs boson in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$, 8, and 13 TeV. *JHEP*, **02**:135, 2017.

[160] Albert M Sirunyan et al. Inclusive search for a highly boosted Higgs boson decaying to a bottom quark-antiquark pair. *Phys. Rev. Lett.*, **120**(7):071802, 2018.