



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MECÁNICA – METAL-MECÁNICA

MODELADO PARAMÉTRICO DE CONTACTO ENTRE SUPERFICIES CON
RUGOSIDAD GAUSSIANA:
UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
M. EN C. JORGE LUIS FLORES ALARCÓN

TUTOR PRINCIPAL:
DR. RAFAEL SCHOUWENAARS, FACULTAD DE INGENIERÍA

COMITÉ TUTOR:
DR. CARLOS GABRIEL FIGUEROA ALCÁNTARA, FACULTAD DE INGENIERÍA
DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS FACULTAD DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., DICIEMBRE 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi familia. A mi mamá, papá y mi hermano, que me han apoyado y acompañado a lo largo de mi vida, para lograr mis objetivos. Así como a Ciri, con sus incontables momentos de compañía.

A mi tutor principal, el Dr. Rafael Schouwenaars, que, a diez años de conocernos, sigue siendo un mentor en el camino de la ciencia.

A los miembros del comité tutor, el Dr. Carlos Gabriel Figueroa Alcántara, y el Dr. Fernando Velázquez Villegas, por sus valiosos aportes y correcciones al proyecto y a la tesis.

A los miembros del jurado, el Dr. Armando Ortiz Prado y Dr. Francisco Sánchez Arévalo, por su tiempo dedicado a la revisión de esta tesis y propuesta de mejoras al trabajo.

A los profesores de la Unidad de Investigación y Asistencia Técnica en Materiales. Al Dr. Miguel Ángel Ramírez Toledo por su apoyo en la realización de las simulaciones y al Dr. Edgar Isaac Ramírez Díaz, por su guía en dudas puntuales en el refinamiento de las simulaciones.

Al Departamento de Ciencias del Estado Sólido de la Universidad de Gante por todas las facilidades para realizar la estancia de investigación; especialmente, al profesor Dr. Diederik Depla y su grupo de trabajo, por la paciencia para enseñar el uso del equipo y guiar la investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología que a través del programa de becas nacionales me apoyo durante mis estudios de doctorado con una beca. A la Coordinación de Estudios de Posgrado, por la beca que me permitió realizar la estancia en la Universidad de Gante. Se agradece el apoyo financiero brindado por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico mediante los proyectos PAPIIT IN114718 y IN113123.

Y finalmente, a la Universidad Nacional Autónoma de México que sigue aportando a mi formación profesional.

Resumen

El contacto es un problema que se ha investigado ampliamente en las disciplinas de la mecánica teórica y aplicada y tiene un papel clave en la ingeniería y en procesos naturales. Dado que todas las superficies son rugosas, el contacto entre superficies ocurre sobre varios puntos o zonas al mismo tiempo. El área de contacto verdadera es distinta del área de contacto aparente. Para una correcta determinación del área de contacto verdadera, se requiere una descripción objetiva y cuantitativa de la rugosidad en superficies de contacto, donde la distribución de alturas de las superficies es un factor crucial.

Numerosos estudios se han propuesto para explicar el contacto de superficies rugosas. Entre ellos, existen avanzados métodos numéricos que simulan la topografía directamente. El método de elemento finito se utiliza en el presente trabajo porque permite agregar propiedades elastoplásticas a los materiales, a comparación de elementos de fronteras que no lo permite, y requiere menos potencia computacional que dinámica molecular.

Para el desarrollo de la tesis, se generó un modelo a gran escala de dos superficies en contacto mediante elemento finito con un mallado gradual, donde se programaron materiales con propiedades elásticas y elastoplásticas. Las superficies fueron generadas mediante midpoint algorithm y transformada de Fourier. En total se realizaron 442 simulaciones para estudiar los distintos escenarios. Se realizaron optimizaciones de malla y de área de contacto, y se analizaron métodos de determinación de dimensión fractal en contornos y superficies.

Se concluyó que el método de transformada de Fourier resultó el mejor método tanto para generar superficies fractales, como para medir dimensión fractal en superficies. En contacto elástico, la fuerza escala exactamente con la magnitud de la rugosidad. El contacto de superficies incrementa la dimensión fractal de la superficie de contacto.

Se definió el límite de cedencia equivalente, $\bar{\sigma}$, como un factor crucial en la caracterización del comportamiento plástico de cuerpos en contacto. Se estudió la paradoja plástica, donde el colapso del cuerpo sucede antes de alcanzarse el contacto completo, porque las zonas en contacto plástico cargan más fuerza que las zonas en contacto elástico. El límite de plasticidad completa definido por Tabor y utilizado ampliamente en la literatura, no es correcto. Apenas se cumple en pocos puntos de contacto, por lo que se utiliza un límite de plasticidad incipiente para caracterizar la transición plástica.

Abstract

Contact is a widely investigated problem in theoretical and applied mechanics. It has a key role in many engineering and natural processes. All surfaces are rough, so contact occurs at several spots or zones at the same time. This means that the true contact area is different from the apparent area. To achieve a correct determination of the true contact area, a quantitative and objective description of roughness in contacting surfaces is required. A correct description of the surface height distribution is crucial.

Many studies using different modelling techniques are available to analyze the contact between rough surfaces. Advanced numerical methods allow to incorporate the simulated topography into detail. This work uses the finite element method in this work, as it allows adding elastoplastic properties, compared to boundary element method that do not allow it, and it is used over molecular dynamics, as it requires less computational power.

In this thesis, a model of two contacting surfaces (spheric or flat) was generated and analyzed using the finite element method. Materials with elastic and elastoplastic properties were programmed. Surfaces were generated by the midpoint algorithm and Fourier transform. The study consisted of 442 simulations in three different types of simulations. Mesh and contact area optimizations were performed, and methods for determining the fractal dimension of surfaces and contours were analyzed.

It was concluded that the Fourier transform method was optimal to generate fractal surfaces and to estimate fractal dimension of surfaces. Scaling of the contact force with the magnitude of the surface roughness was rigorously obeyed. The fractal dimension of the contact surface increases during loading.

An equivalent yield limit, $\bar{\sigma}$, was defined as a crucial factor in characterizing plastic behavior of bodies in contact. The plastic paradox was studied, which refers to the observation that the bulk of the material reaches total plasticity before the surface reaches complete contact, because the plastic zones carry more load than the elastic ones. The theoretical limit for total plasticity as defined by Tabor is wrong, as total plasticity is only reached at a few contact points. An incipient plastic limit is defined instead to characterize the plastic transition.

Índice

1. Introducción	8
1.1. Superficies gaussianas y fractales	8
1.2. Mecánica de Contacto	9
1.2.1. Área de estudio	9
1.2.2. Fricción	9
1.2.3. Desgaste	11
1.2.4. Historia de la mecánica de contacto	12
1.3. Fractales	14
1.3.1. Ejemplos de fractales	14
1.3.2. Definición	17
1.3.3. Fractales determinísticos y aleatorios	18
1.4. Objetivo	19
2. Superficies fractales y su análisis	20
2.1. Estudio de superficies	20
2.1.1. Rugosidad	20
2.1.2. Parámetros de medición de rugosidad	21
2.1.3. Medición de la rugosidad	25
2.2. Fractales	29
2.2.1. Definición y escalamiento	29
2.2.2. Dimensión Fractal	30
2.2.3. Exponente de Hurst	31
2.2.4. Base matemática	31
2.3. Algoritmos para generación de superficies aleatorias	33
2.3.1. Método de desplazamiento aleatorio de punto medio	33
2.3.2. Método espectral aleatorio	34
2.3.3. Función generalizada de Weierstrass-Mandelbrot	35
2.3.4. Transformada de Fourier	35
2.4. Métodos de obtención de dimensión fractal	36
2.4.1. Método Yardstick	37
2.4.2. Método de conteo de cajas	38
2.4.3. Método de área-perímetro	39
2.4.4. Método de conteo diferencial de cajas	40
2.4.5. Método de prisma triangular	40
2.4.6. Método de análisis de fluctuaciones sin tendencia	41
2.4.7. Densidad espectral de potencia y funciones relacionadas	42
3. Mecánica de contacto y métodos numéricos	44
3.1. Modelos de mecánica de contacto	44

3.1.1.	Teoría de Hertz de contacto elástico	44
3.1.2.	Funciones Potenciales de Boussinesq y Cerruti	45
3.1.3.	Modelo de Greenwood-Williamson	49
3.1.4.	Teoría de Bush, Gibson y Thomas	50
3.1.5.	Teoría de Persson	51
3.2.	Simulaciones de mecánica de contacto	53
3.2.1.	Métodos de elemento de frontera	54
3.2.2.	Métodos de elemento finito	56
3.2.3.	Dinámica molecular	58
3.2.4.	Métodos multiescala	59
3.3.	Métodos de generación de superficies	60
3.3.1.	Lapeado	60
3.3.2.	Electropulido	61
3.3.3.	Electrodepósito	62
3.3.4.	Proyección térmica	63
3.3.5.	Granallado láser	65
3.3.6.	Depósito químico y físico de vapor	66
3.3.7.	Pulverización catódica	67
3.3.8.	Electroerosión	69
3.3.9.	Chorro de arena	70
3.3.10.	Matriz de decisiones	71
3.4.	Hipótesis	73
4.	Metodología	74
4.1.	Simulación por elementos finitos	74
4.1.1.	Construcción del modelo	74
4.1.2.	Procesamiento de datos	77
4.1.3.	Esquema de trabajo	79
4.2.	Análisis de datos	82
4.2.1.	Calibración de resultados	82
4.2.2.	Corrección de área	83
4.2.3.	Comparación entre BCM y YM	84
4.2.4.	Evaluación del método de conteo de cajas	87
4.2.5.	Corrección de desplazamiento, fuerza y área	89
4.2.6.	Comparación entre tamaños	90
4.2.7.	Comparación de métodos de cálculo de dimensión fractal en superficies	91
5.	Resultados	96
5.1.	Simulación de contacto de superficies planas elastoplásticas	96
5.1.1.	Desplazamiento, fuerza y área	96
5.1.2.	Dimensión fractal	97
5.1.3.	Área de contacto vs superficies sin contacto	99
5.2.	Simulación de contacto de superficies planas elastoplásticas	100
5.2.1.	La transición plástica en la mecánica de contacto	100

5.2.2.	La transición plástica en superficies rugosas	104
5.2.3.	Desplazamiento, fuerza y área para simulaciones elastoplásticas	106
5.2.4.	Redistribución plástica	108
5.3.	Simulación de modelo esférico sobre plano elástico	113
5.3.1.	Comparación con Hertz	113
5.3.2.	Presiones de contacto en relación con el esfuerzo de cedencia	114
6.	Discusión	116
6.1.	Simulación y análisis de superficies fractales	116
6.1.1.	Simulación de superficies	116
6.1.2.	Análisis de métodos de determinación de dimensión fractal en superficies	117
6.1.3.	Análisis de métodos de determinación de dimensión fractal en contornos y percolación	118
6.2.	Evaluación de modelo plano sobre plano	119
6.2.1.	Convergencia de malla	119
6.2.2.	Escalamiento	119
6.3.	Modelos avanzados	120
6.3.1.	Transición plástica	120
6.3.2.	Criterio para la transición elastoplástica	121
6.3.3.	Modelo de contacto elástico esfera sobre plano	122
6.4.	Redefinición del esquema de simulación propuesto	123
6.4.1.	Refinamiento de simulaciones	123
6.4.2.	Simulaciones consecuentes	124
7.	Conclusiones	125
8.	Referencias	127
9.	Apéndice	143

1. Introducción

1.1 Superficies gaussianas y fractales

Para muchos componentes en la ingeniería mecánica, el acabado de la superficie tiene un alto impacto en el rendimiento y durabilidad de las partes. Las superficies rugosas suelen desgastarse más rápido y tener coeficientes de fricción mayores que las superficies lisas. En algunos casos, las irregularidades en una superficie forman un sitio de inicio para grietas o corrosión, pero en otros casos, generan una adhesión deseable.

La superficie de los materiales es fundamental para el estudio de fenómenos como fractura, fatiga o desgaste, por lo que es importante analizar su rugosidad. Ésta es el conjunto de irregularidades geométricas de la superficie; también puede definirse como el conjunto de asperezas con respecto a la longitud de la base [1].

Las técnicas de ingeniería de superficies se usan en muchas industrias como la automotriz, aeroespacial, energía, electrónica, biomédica, textil, petrolera, química, acero y construcción. Estas permiten modificar propiedades físicas, químicas, eléctricas, electrónicas, magnéticas, mecánicas, así como su resistencia a corrosión o al desgaste.

La ingeniería de superficies se refiere a una serie de tecnologías que buscan diseñar y modificar las propiedades de la superficie en función de las condiciones de uso de un componente. Existen dos categorías principales para optimizar las propiedades de las superficies y la resistencia de los materiales. Estas son los recubrimientos y la modificación directa de la superficie.

Las tecnologías de recubrimiento se realizan depositando un material sobre el sustrato. El objetivo principal es modificar las propiedades de la superficie en lugar de modificar las propiedades del material entero. Las tecnologías de modificación de superficie afectan directamente al sustrato. Algunos ejemplos son el endurecimiento mediante flama, tratamientos de difusión como carburación, tratamientos de alta energía como implantación de iones. Estos procesos se suelen usar para controlar la fricción, mejorar la resistencia al desgaste y corrosión y cambiar las propiedades físicas o mecánicas del producto [2].

Durante la manufactura, la superficie del material se deforma mediante contacto, fricción o desgaste, por lo que ahondar en la mecánica del contacto de los materiales es un tema de importancia.

La distribución de las alturas en la superficie es un aspecto importante para el estudio de superficies y está íntimamente relacionada a los procesos previos aplicados al material. Si bien se conocen muchos ejemplos donde la distribución de alturas no es gaussiana [3], la hipótesis de una distribución normal es una buena aproximación y es el punto de partida para caracterizar las desviaciones de las superficies [4]. Asimismo, en muchos, pero no todos los ejemplos, se observa que las superficies se pueden describir mediante conceptos de fractales aleatorios [5]. Las superficies aleatorias gaussianas con carácter fractal forman un subconjunto importante de todas las posibles topografías superficiales y presentan un objeto de estudio importante en las ciencias de superficies.

1.2 Mecánica de contacto

1.2.1 Área de estudio

La mecánica de contacto estudia la deformación de sólidos que hacen contacto en áreas contiguas o disjuntas. Este contacto puede incluir esfuerzos perpendiculares y esfuerzos de fricción actuando tangencialmente a las superficies.

Encontrar el área de contacto real cuando dos sólidos entran en contacto ha sido campo de interés desde el trabajo de Hertz [6], donde se da solución al contacto sin fricción de dos cuerpos elásticos con un perfil elíptico. Este problema tiene una gran importancia práctica, debido a que el área de contacto real tiene influencia en varias propiedades físicas como en transferencia de calor, adhesión, fricción y desgaste en contacto estacionario o en deslizamiento [7]. La apertura entre dos sólidos en contacto es de crucial importancia en el estudio de la percolación. Dada la complejidad de los mecanismos de interacción en superficies, una aproximación teórica es muy útil para predecir el comportamiento en contacto.

1.2.2 Fricción

La fuerza de fricción se da entre dos superficies rugosas que entran en contacto. Ésta fuerza se opone al deslizamiento y se genera debido a las imperfecciones que existen en las superficies de los materiales o debido a una interacción química. La fricción es uno de los pocos fenómenos de la física clásica que no se puede explicar de manera satisfactoria. El concepto de fricción está estrechamente relacionado con el de contacto. Aun así, los avances en la mecánica de contacto no han generado modelos que relacionen estos dos conceptos directamente, dado que los problemas de fricción involucran una mayor complejidad por la cantidad de parámetros.

Las leyes de Amontons son la base para describir los problemas de fricción [8]. La primera ley de Amontons menciona que la fricción entre dos cuerpos es proporcional a la fuerza normal, $T = \mu P$, con μ el coeficiente de fricción. La segunda ley de Amontons menciona que la fricción es independiente del área de contacto entre los dos cuerpos. Esta segunda ley parece no tener sentido, pero la explicación está en la diferencia entre el área nominal de contacto que toma en cuenta la segunda ley de Amontons y el área de contacto verdadera, obtenida de las asperezas en una superficie.

La probabilidad de encontrar un punto de contacto entre las asperezas de una superficie con la otra superficie es baja si la fuerza normal es baja. En ese caso, el área de contacto real sería pequeña y la presión puntual en el área de contacto sería alta. Al aumentar la fuerza normal, la cantidad de asperezas que influyen en el área de contacto real aumentan y la fuerza se divide en un área mayor. Si se considera la distribución de asperezas en las superficies como una función exponencial (Distribución de Poisson) y a las asperezas como esféricas, se obtiene el modelo de Greenwood-Williamson [9], el cual confirma la segunda ley de Amontons de manera cuantitativa [10] y se estudiará más adelante.

El área de contacto de cada aspereza individual incrementa al aumentar la fuerza normal, pero al mismo tiempo, se generan nuevos puntos de contacto, por lo que el área promedio de cada aspereza es constante. La presión promedio de contacto, p_m , definida por la fuerza normal dividida por el área real de contacto es constante. Lo anterior explica por qué la fricción es independiente del área aparente de contacto.

En el caso de fricción estática, los átomos en contacto ejercen una fuerza de atracción por lo que se genera un enlace químico o físico entre las dos superficies si estas se encuentran en distancias del radio de equilibrio r_0 de alrededor de 0.2 nm. En este caso, el coeficiente de fricción depende del área de contacto y de la energía de los enlaces formados. Si los enlaces son de carácter químico, como en el caso de dos metales afines, la fuerza será elevada, se obtendrá un coeficiente de fricción mayor que uno. Si las superficies están contaminadas, oxidadas o lubricadas, se crearán enlaces físicos con una energía mucho menor, y el coeficiente de fricción será entre 0 y 1 [11].

La disipación de energía en sólidos sujetos a condiciones elásticas se da por fricción interna, que se basa en el movimiento de segmentos de dislocaciones y la interacción de estos fenómenos con las imperfecciones en el material [11].

1.2.3 Desgaste

El desgaste se define como el fenómeno de remoción de material de una superficie, debido a la interacción con otra. En la industria, los elementos de maquinaria pierden su funcionalidad debido al desgaste y el diseño de maquinaria avanzada puede verse limitado por este fenómeno [12]. La remoción de material en el desgaste se causa por tres fenómenos: fundición por contacto en la superficie, disolución química o separación física de átomos que deriven en microfracturas [13]. Los principales mecanismos de desgaste son abrasión, adhesión, corrosión y fatiga.

El desgaste usualmente se lleva a cabo por dos o más mecanismos simultáneamente. El mecanismo dominante de desgaste puede variar por cambios en las propiedades de la superficie del material o respuestas en la superficie hacia la temperatura, provocadas por fricción, así como por la formación de depósitos de contaminantes en la superficie. La tasa de desgaste es controlada mediante un balance entre generación de partículas y la pérdida de partículas. La razón de la generación de partículas es influenciada por muchos factores, como la naturaleza del material y la cantidad de partículas retenidas. Dado que el fenómeno de desgaste suele llevarse por una combinación de mecanismos, es importante comprender cada uno de ellos [14].

El desgaste por adhesión se define por la existencia de enlaces fuertes entre las superficies que impiden el deslizamiento, Esto genera deformación plástica seguida de un agrietamiento en un ángulo inclinado con la superficie. Cuando la grieta llega a la intercara de contacto, se forma una partícula [15].

El desgaste por abrasión que sucede cuando existen partículas sueltas en la superficie. Éstas pueden remover material en forma de microvirutas, formando surcos en la superficie más blanda [12]. Las propiedades del material y su resistencia al desgaste son importantes en este mecanismo [15].

El desgaste por fatiga ocurre típicamente en contacto rodante, debido a esfuerzos cortantes en el interior del material. Éstos provocan la formación y propagación de grietas que corren paralelas a la superficie, hasta alcanzar una extensión crítica donde se provoca el desprendimiento de material [12].

Los mecanismos anteriores de desgaste se caracterizan por la deformación y fractura en la región de contacto a bajo el efecto de los esfuerzos y la cinemática del fenómeno, por lo que se conocen como desgaste mecánico.

El desgaste por corrosión se genera por una reacción química al existir deslizamiento en un ambiente con líquidos o gases corrosivos. Si estos productos se adhieren a la superficie, generan una capa protectora que, al desprenderse, desgasta el material [12]. La remoción del material se lleva a cabo a partir de la

disolución de iones en las películas de fluido en la zona de desgaste. Este fenómeno se conoce como desgaste químico.

1.2.4 Historia de la mecánica de contacto

El contacto entre superficies rugosas ha sido sujeto importante de estudio en los últimos dos siglos. Hertz cimentó las bases de la mecánica de contacto en 1882 [6] al analizar el contacto sin fricción, ni adhesión entre un sólido elástico y un semiespacio infinito, que se observa en el inciso a) de la figura 1.1. Archard [16] propuso un modelo con la rugosidad representada como asperezas esféricas, en el que el área de contacto verdadera es proporcional a la carga. En el inciso b) de la figura 1.1 se encuentra representado, y se observan las distintas escalas de asperezas. El modelo de Greenwood y Williamson [9] se observa en el inciso c), y se compone de asperezas esféricas idénticas aplicadas al modelo mediante una distribución gaussiana en las alturas de las asperezas. Cada aspereza se calcula mediante la teoría de Hertz de forma independiente. Greenwood y Williamson introducen el concepto de distribución de alturas estocástica para asperezas del mismo radio. Whitehouse y Archard [17] aplicaron la teoría de serie temporal aleatoria a los perfiles de altura, mientras que Bush et al. [18] utilizan asperezas en forma de paraboloides y procesos aleatorios en la distribución de alturas. Persson [19] incluyó la rugosidad a distintas escalas, en las que existe contacto en perfiles de longitud de onda larga, pero no en cavidades pequeñas.

Desde que Mandelbrot [20] popularizó el concepto de superficies fractales aleatorias, los fractales se volvieron un tema común de investigación en la segunda parte del siglo XX. Majumdar y Bhushan [21] [22] introdujeron el concepto de superficies fractales aleatorias en tribología. El uso de la geometría fractal para superficies rugosas ha sido criticado. Whitehouse [23] señaló que varios procesos de manufactura suelen utilizar estadísticas de Markov o Poisson, en lugar de movimiento fractal browniano, pero en longitudes pequeñas, la geometría fractal es dominante. Se puede pensar en una autopista y en cómo se observa dependiendo la escala que se utilice. Se tiene inicialmente la escala más grande, si se analiza la autopista desde esta escala, se observará que cruza montañas y valles, tendiendo desniveles notables. En cambio, si el observador va sobre un coche, en general se observará plana. Finalmente, si se analiza el asfalto minuciosamente, se observará que es rugoso, por lo que su estructura es fractal desde 10 mm hasta escalas nanométricas [24] [25].

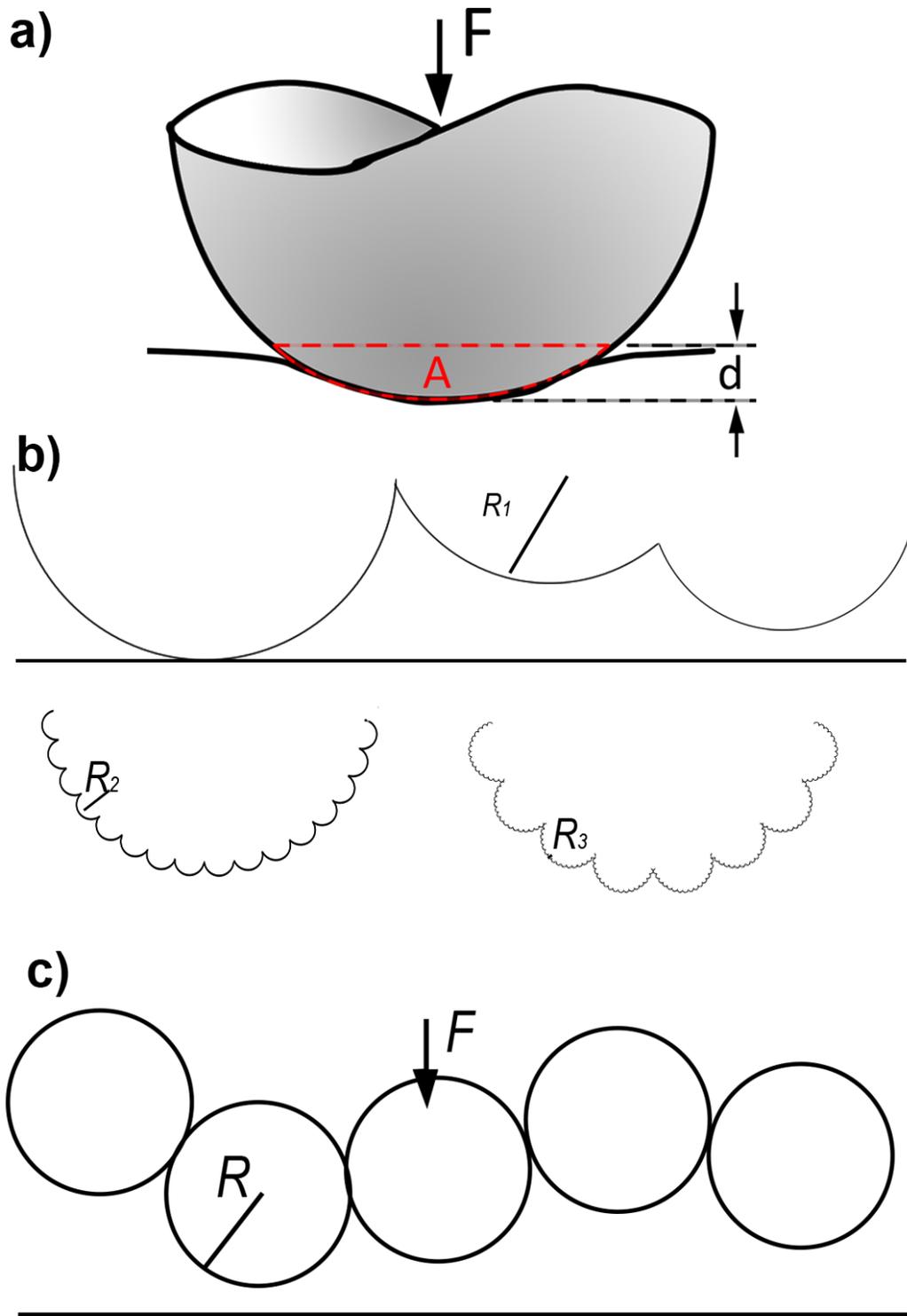


Figura 1.1. Modelos de mecánica de contacto: a) Hertz [6], b) Archard [16] y c) Greenwood y Williamson [9].

1.3 Fractales

1.3.1 Ejemplos de fractales

A continuación, se mencionan algunos ejemplos de fractales. Primero se muestran fractales geométricos. El copo de nieve de Koch tiene un iniciador que es un triángulo equilátero. Cada segmento recto se divide en tres y el segmento medio se reemplaza con un triángulo. Este proceso se repite con los lados las veces que se requiera.

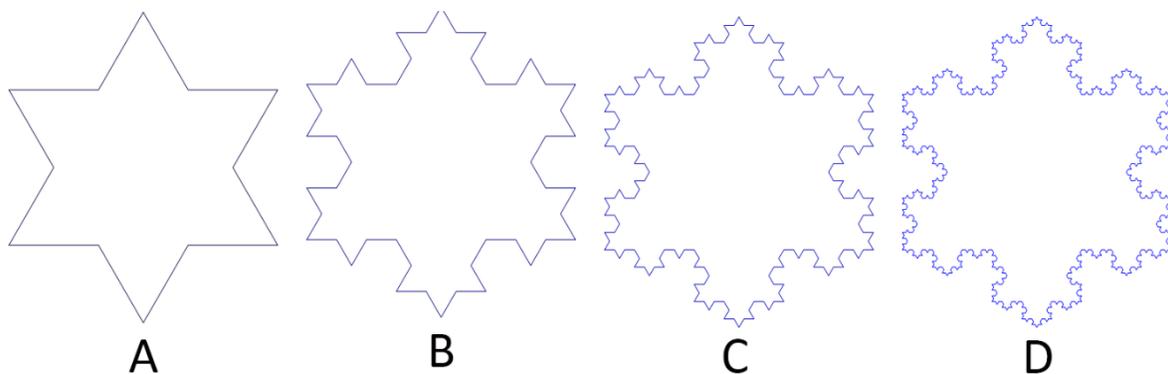


Figura 1.2. Primeras cuatro iteraciones del copo de nieve de Koch [26].

El conjunto de Cantor se crea iterativamente eliminando el tercio medio de un segmento de recta. Consiste en todos los números reales del intervalo $[0,1]$ que no requieren del dígito 1 para ser expresado como una fracción ternaria.

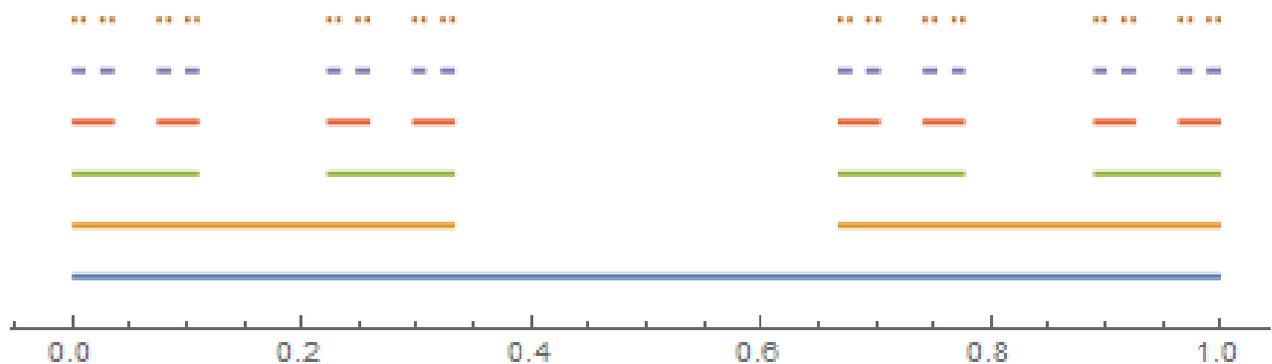


Figura 1.3. Seis iteraciones del conjunto de Cantor [27].

El triángulo de Sierpinski se construye mediante un triángulo equilátero en el que se le remueve subconjuntos de triángulos repetidamente. El triángulo equilátero original se subdivide en cuatro triángulos y se remueve el central.

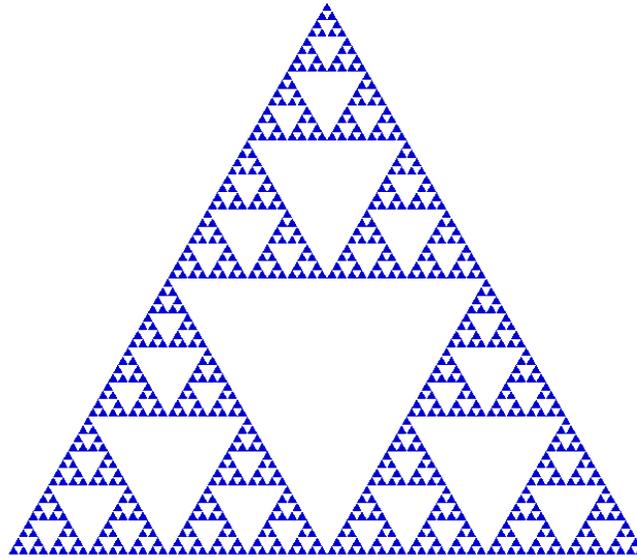


Figura 1.4. Triángulo de Sierpinski a la sexta iteración [28].

Existe una variación del triángulo de Sierpinski que es llamada la alfombra de Sierpinski que empieza con un cuadrado. El cuadrado se corta en 9 subcuadrados en una cuadrícula de 3x3, y se remueve el subcuadrado central. Después, se repite el mismo procedimiento sobre los otros ocho subcuadrados.

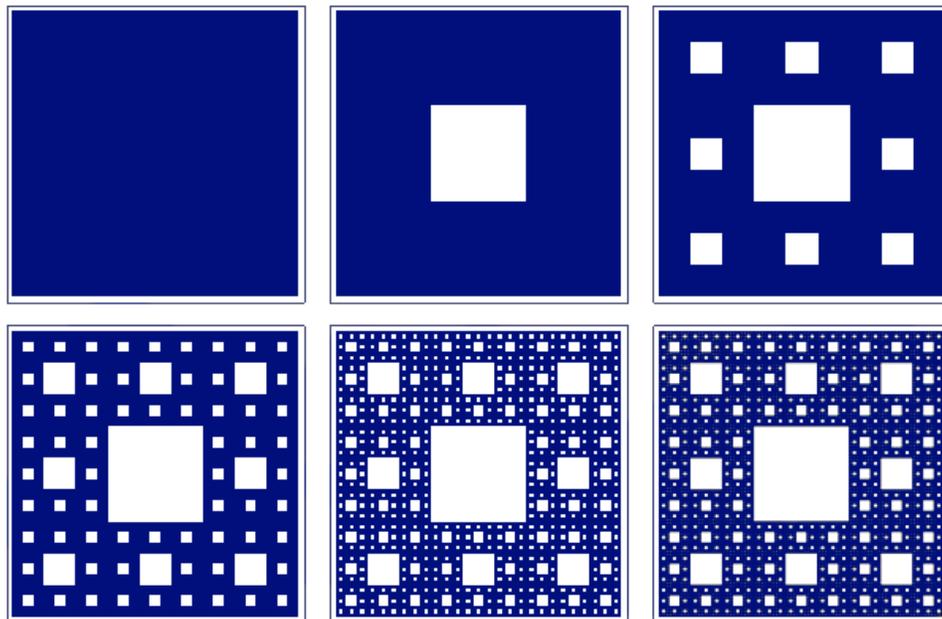


Figura 1.5. Alfombra de Sierpinski a la sexta iteración.

En 1967, con su artículo ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña? [29], Mandelbrot observó que las costas también son fractales. Al acercarse en una vista aérea a una zona de la costa, aparecen nuevos detalles con el mismo carácter de los detalles a gran escala.

Las curvas geográficas tienen tantos detalles que su longitud se vuelve infinita o indefinida. Cada porción de curva puede considerarse como una imagen a menor escala del todo, al menos en un sentido estadístico. Esta propiedad se conoce como autosimilitud estadística. Hablar de longitudes para estas curvas no tiene mucho sentido, por lo que es más útil describirlas mediante dimensiones [29].

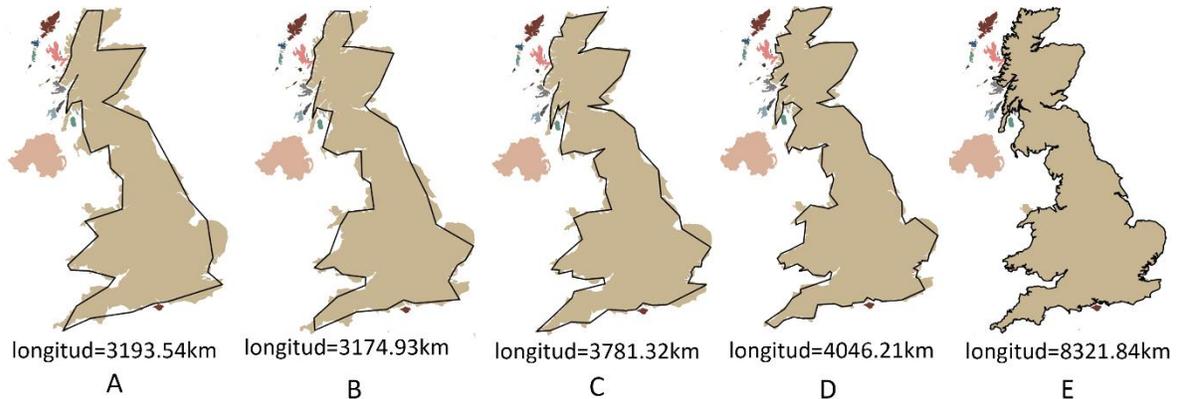


Figura 1.6. Medición de la costa de Gran Bretaña utilizando una unidad de medida grande (A) y reduciendo esta unidad (E). Se observa que, al utilizar una unidad de medida pequeña, la longitud total de la costa es mayor [29].

Finalmente, en la figura 1.7 se muestra una superficie de rugosidad aleatoria generada mediante el algoritmo de punto medio, con el cual se generan paisajes realísticos variando la altura de los puntos en la superficie de forma iterativa. Este método se explicará a detalle en el siguiente capítulo. Las propiedades fractales se observan sólo en sentido estadístico, esto significa que aun cuando visualmente la figura no se replica al acercarse a una sección de la figura como en el caso de los fractales geométricos, propiedades como la dimensión fractal y rugosidad se replican en fracciones de la superficie.

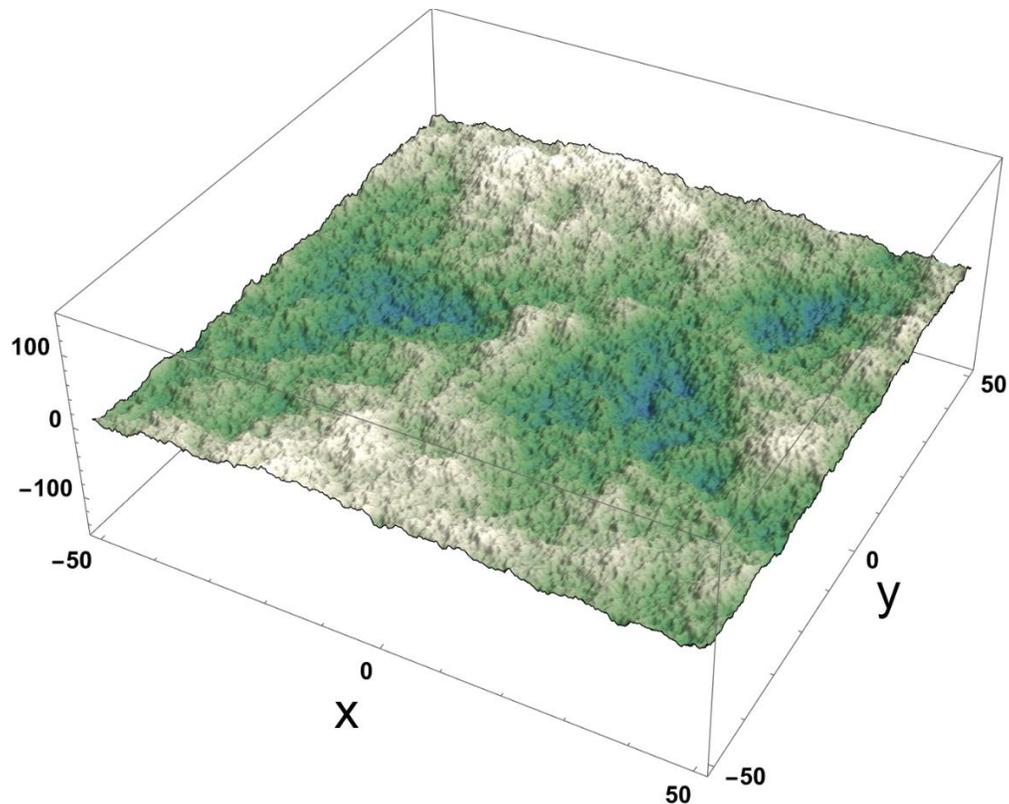


Figura 1.7. Superficie de rugosidad aleatoria realista generada.

1.3.2 Definición

En la naturaleza existen muchos patrones que no pueden ser explicados mediante figuras geométricas comunes como esferas, conos, círculos, cuadrados, y otras geometrías regulares. Todos estos objetos contienen dimensión topológica, o dicho de otro modo, que se pueden describir mediante un número de variables reales independientes. La dimensión topológica es el número de coordenadas necesarias para especificar un objeto geométrico. Un rectángulo tiene dos dimensiones, mientras que un cubo o una esfera tienen tres dimensiones [30].

En la naturaleza existe un nivel de complejidad distinto en sus patrones con una variedad infinita de escalas de longitud, que no pueden ser explicados por la dimensión topológica. Hausdorff [31] introdujo la dimensión de Hausdorff en 1918, que puede explicarse como una medición de rugosidad. En figuras tradicionales, la dimensión de Hausdorff es igual que la dimensión topológica. Pero en objetos más complejos, la dimensión de Hausdorff se vuelve no entera.

La existencia de estos patrones alejados de la geometría euclidiana inspiró a Mandelbrot a investigar la morfología de lo amorfo, desarrollando una nueva

geometría de la naturaleza que describe patrones irregulares y fragmentados a nuestro alrededor mediante la identificación de figuras llamadas fractales. Por definición, un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica [20]. Los elementos fractales tienen una estructura geométrica recursiva, es decir que se observan los mismos elementos independientemente de la escala utilizada, propiedad que recibe el nombre de autosimilitud, el copo de nieve de Koch, el conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpinski observados en la sección anterior son ejemplos de fractales autosimilares.

A las dimensiones no enteras se les llama dimensiones fractales. La dimensión fractal de un objeto está relacionado con sus propiedades topológicas. Por ejemplo, una superficie con una dimensión fractal baja tendrá pocas montañas y valles, mientras que una superficie con dimensión fractal alta estará cubierto de muchos accidentes topográficos. La dimensión fractal indica la densidad de un objeto en el espacio en el que se encuentra. Es una medida de la complejidad de la figura geométrica. La dimensión fractal se calcula con una relación de una propiedad intrínseca, como es la masa, el área o el perímetro, y una propiedad característica, como lo es la longitud efectiva o la escala [32].

1.3.3 Fractales determinísticos y aleatorios

Los fractales pueden clasificarse en determinísticos y aleatorios. Los fractales determinísticos son aquellos que se componen de escalamientos y copias rotadas de sí mismo, por lo que al aumentar la escala se puede observar una copia idéntica. Los fractales geométricos (como el copo de nieve de Koch, o el conjunto de Cantor) y algebraicos (como el conjunto de Julia) entran en esta categoría [33].

Los fractales aleatorios incluyen un componente de aleatoriedad que permiten simular un fenómeno natural. Un ejemplo de fractal aleatorio se observa en la superficie generada en la figura 1.7 que, a pesar de seguir una generación por pasos, se asemeja a una superficie realista y se observa natural en toda la superficie. Al ser aleatorios, estos fractales exhiben propiedades estadísticamente autosimilares, pero no geométricas, por lo que sólo el grado de irregularidad o fragmentación es igual en cualquier escala, pero no se observa una imagen idéntica como en los geométricos.

1.4 Objetivo

El objetivo general de la tesis es realizar un estudio paramétrico, analizado estadísticamente, de simulaciones de elementos finitos de contacto normal de superficies con rugosidad aleatoria.

Los objetivos específicos son los siguientes:

Primero, demostrar la viabilidad de la simulación a gran escala de problemas de mecánica de contacto en superficies con rugosidad aleatoria fractal, usando modelos de elemento finito y análisis estadístico de los resultados.

Para ello, es necesario desarrollar los algoritmos que permitan analizar los resultados de las simulaciones en términos de los detalles de las curvas fuerza-desplazamiento, área de contacto-desplazamiento, presiones de contacto y dimensión fractal, tomando en cuenta el carácter estocástico de los fenómenos estudiados.

Finalmente, expandir la metodología establecida para la simulación de contacto en materiales elastoplásticos y geometrías no planas.

2. Superficies fractales y su análisis

2.1 Estudio de superficies

2.1.1 Rugosidad

La rugosidad se define como la variación consecutiva o aleatoria de un valor de altura nominal en una superficie con respecto a un plano de referencia [34]. Estas desviaciones de altura pueden ser representadas mediante crestas y valles. El estudio de la rugosidad se realiza mediante estadística, por ello, se realiza un muestreo representativo de la superficie. A partir del análisis de esa zona, se encuentra la distribución de las alturas y se extrapola la rugosidad medida hacia toda la superficie. Dentro de los parámetros de análisis, algunos son dependientes del área, mientras que otros pueden describir a la superficie de manera independiente [35].

Los estudios topográficos tienen una naturaleza multiescala. La rugosidad en sí misma es un conjunto de rugosidades superpuestas a distintas escalas, por lo que la rugosidad tiene una fuerte dependencia de la resolución del instrumento de medición, que define la escala que se obtiene. La tendencia en análisis topográfico es lograr caracterizar la rugosidad de una superficie en diversas escalas [35]. Los distintos niveles de una superficie se pueden dividir de esta manera:

- Macro-rugosidad: Resultado de ondulaciones de maquinado, vibraciones excesivas, defectos del material o tratamientos térmicos que generan deformaciones en la superficie.
- Rugosidad (nano y micro-rugosidad): Fluctuaciones en la altura de las superficies, las cuales se caracterizan por ser mayores que escalas moleculares.

Como se ha mencionado anteriormente, la rugosidad de las superficies provoca que el área de contacto real sea mucho más pequeña que el área nominal [9] [16], en cualquier superficie se tendrán irregularidades que pueden ser analizadas hasta niveles atómicos [36]. Estas irregularidades son conocidas como asperezas y el conjunto de ellas definen la rugosidad de la superficie [35] [37] [38].

Las superficies se pueden categorizar dependiendo de su distribución de alturas. Las no homogéneas varían significativamente de una zona a otra, mientras que las

homogéneas contienen una distribución que puede ser determinista o aleatoria. Una superficie determinista tiene un patrón definido de distribución que resulta en la repetición de una textura definida. Si no se puede detectar un patrón, se define como superficie aleatoria. Las superficies aleatorias pueden ser isotrópicas, si son uniformemente aleatorias, por lo que no tienen una distribución dependiente del sentido de medición o zona de muestreo, o anisotrópicas, si tienen un sentido preferente de distribución que suele ser generado por herramientas o procesos de mecanizado con una trayectoria definida, como en el caso de operaciones de torneado y fresado.

Existen procesos donde la forma final de la rugosidad es resultado de la distribución aleatoria de eventos discretos, e independiente de la distribución de cada evento. Estos procesos son incrementales, como en el caso del pulido, lapeado, o electropulido y tienen una distribución gaussiana [34] [39] [40].

2.1.2 Parámetros de medición de rugosidad

Se tiene un perfil con rugosidad $z(x)$ cuyas alturas se miden a partir de una línea de referencia. La línea que divide por la mitad al área definida por el perfil se llama línea media. Lo anterior se observa en la figura 3.1. Cuando se habla de rugosidad de una superficie, se habla de las variaciones de la altura respecto a la línea de referencia. Las mediciones de rugosidad se suelen realizar sobre una línea de muestreo midiendo el perfil en una sola dirección, al realizar múltiples líneas paralelas consecutivas, se obtiene el perfil de una superficie [41].

Los parámetros de rugosidad más utilizados son los siguientes:

- Rugosidad promedio o media aritmética de alturas (R_a).

Es la media aritmética de la desviación vertical desde la línea media en todo el perfil y se calcula mediante la ecuación 2.1.

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |z - m| dx \quad (2.1)$$

Donde:

$$m = \frac{1}{L} \int_0^L z dx \quad (2.2)$$

Con L como la longitud total del perfil medido. La varianza se define de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \frac{1}{L} \int_0^L (z - m)^2 dx \quad (2.3)$$

Donde σ es la desviación estándar.

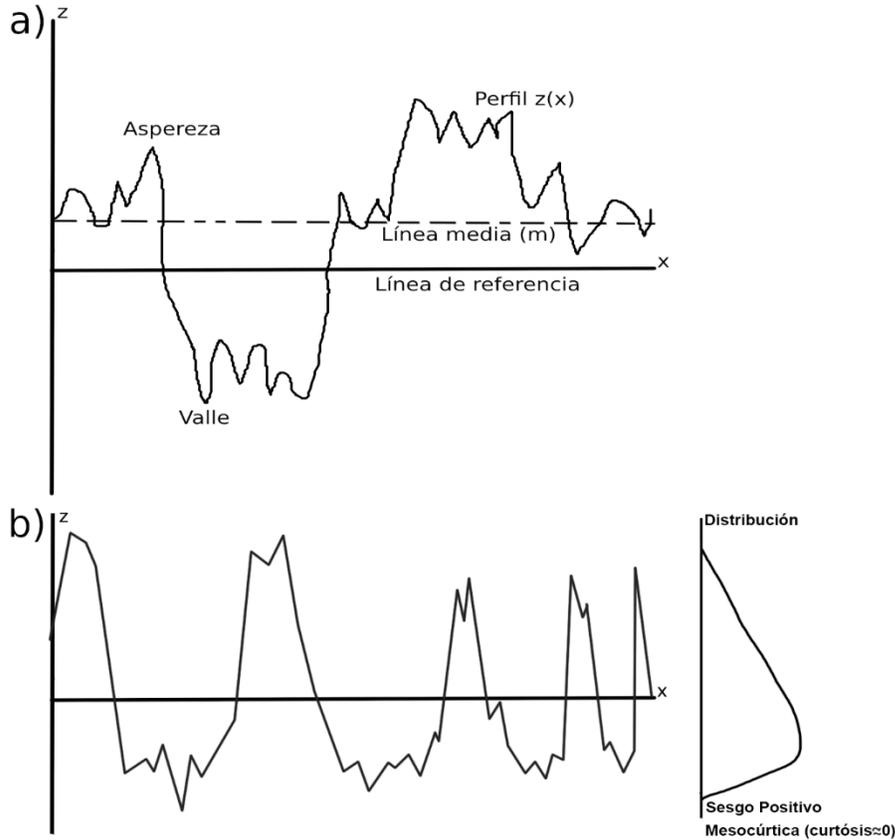


Figura 2.1. a) Esquema de un perfil de rugosidad [39]. b) Parámetros de curtosis y sesgo caracterizados en un perfil de rugosidad.

La media aritmética no da información sobre la longitud de onda y es poco sensible ante los cambios pequeños de alturas, y es dependiente de la longitud del muestreo [42].

- Media cuadrática (R_{rms} o R_q).

Es la desviación estándar de la media aritmética de la desviación vertical desde la línea media en todo el perfil. Se obtiene mediante la ecuación 2.4.

$$R_{rms} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L (z - m)^2 dx} \quad (2.4)$$

Este parámetro analiza estadísticamente la distribución del área de muestreo y es más sensible a los cambios de altura que R_a [41]. En el caso de las superficies gaussianas, existe una relación entre R_a y R_{RMS} que se describe en la siguiente ecuación:

$$R_{rms} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_a \quad (2.5)$$

Existen otros parámetros menos utilizados para la descripción de perfiles de rugosidad, como la rugosidad máxima (R_{max}), que corresponde a la distancia máxima que hay entre el pico más alto y el valle más bajo, la asimetría o sesgo (S_k) y curtosis (K) [39] [40] [43].

Cuando se trata de medir las características horizontales de un perfil de rugosidad, se utilizan los parámetros de espaciamento. En estos parámetros se encuentra la cuenta de picos (Pc), donde se determina la cantidad de intersecciones del perfil sobre dos líneas paralelas a la misma distancia de la línea media, una por arriba y otra por debajo. El resultado que se obtiene es el número de picos por unidad de longitud en el área de analizada [41]. Se encuentra también el espaciamento promedio de picos locales adyacentes (S), que se define como la distancia promedio entre picos locales consecutivos. Dentro de estos parámetros, también existe la medición del radio promedio de las asperezas (r_p), que calcula el promedio del radio de curvatura de todas las asperezas.

También existen funciones que caracterizan la función completa como las siguientes:

- Función de auto correlación (ACF, por sus siglas en inglés).

La ACF describe la dependencia general de valores en una posición respecto a los de otra posición. Se utiliza para procesar señales, porque aporta información de la relación entre la longitud de onda y la amplitud de una superficie. La ecuación que describe este concepto es la siguiente [41]:

$$ACF(\delta x) = \frac{1}{L} \int_0^L y(x)y(x + \delta x)dx \quad (2.6)$$

Con δx como el cambio de distancia y $y(x)$ como el perfil de altura.

- Densidad espectral de potencia (PSD, por sus siglas en inglés).

La PSD es una función que permite caracterizar la amplitud y el espaciamento de las asperezas. Se calcula mediante una descomposición del perfil de la superficie mediante la transformación de Fourier, en sus componentes sinusoidales en la frecuencia espacial (f). Para una superficie en dos dimensiones, la ecuación es la siguiente [41]:

$$PSD = \frac{1}{L} \left| \int_0^L y(x) \exp(-i 2\pi f x) dx \right|^2 \quad (2.7)$$

Finalmente, existen parámetros híbridos que combinan amplitud y espaciamento. En estos parámetros se encuentran las pendientes:

- Perfil de pendiente en línea promedio (γ).

Este parámetro representa el perfil de la pendiente en la línea promedio. Se calculan las pendientes individuales del perfil en cada intersección con la línea promedio.

Después, se calcula el promedio de esas pendientes. La ecuación que la caracteriza es la siguiente [41]:

$$\gamma = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \tan^{-1} \left(\frac{\delta y_i}{\delta x_i} \right) \quad (2.8)$$

Con n como el número total de intersecciones del perfil con la línea promedio sobre toda la longitud de la superficie.

- Pendiente promedio de la superficie (Δ_a)

Este parámetro se define como el promedio absoluto de la pendiente. Se ha postulado que el comportamiento relacionado con la fricción, el contacto elástico, la fatiga y la lubricación son afectadas por este parámetro. Se calcula mediante el promedio de todas las pendientes calculadas por cada dos puntos sucesivos. La fórmula que describe esta característica es la siguiente [41]:

$$\Delta_a = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta y_i}{\delta x_i} \quad (2.9)$$

- Pendiente RMS del perfil (Δ_q)

Este parámetro es la media cuadrática de la pendiente promedio del perfil y se calcula así [41]:

$$\Delta_q = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\delta y_i}{\delta x_i} - \theta_m \right)^2}, \quad \theta_m = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \quad (2.10)$$

- Curva de soporte

La curva de soporte (Bearing Area) o curva Abbott-Firestone es un método de caracterización de superficie, que es importante cuando se requiere estudiar características referentes a la integridad de la superficie, como en aplicaciones tribológicas, caracterizada por la distribución de picos y valles [44], así como para propiedades de sellado de superficies. Esta curva se describió en 1933 por Abbott y Firestone [45].

Matemáticamente, la curva de soporte es la función acumulada de densidad de probabilidad del perfil de alturas de la superficie y se puede obtener integrando la función de densidad de probabilidad. La figura 2.2 ilustra un perfil de rugosidad, con su respectiva curva de soporte. Se observa el porcentaje de soporte que va incrementando a medida que se consideran más puntos del perfil de rugosidad. Este porcentaje de soporte también puede definirse mediante cuantiles. Los cuantiles son puntos que delimitan el rango de la distribución de probabilidad en intervalos continuos. Los cuantiles comunes tienen nombres como el cuartil, que divide la distribución en cuatro (0.25, 0.50, y 0.75), los deciles que dividen en diez o los percentiles que dividen en cien partes.

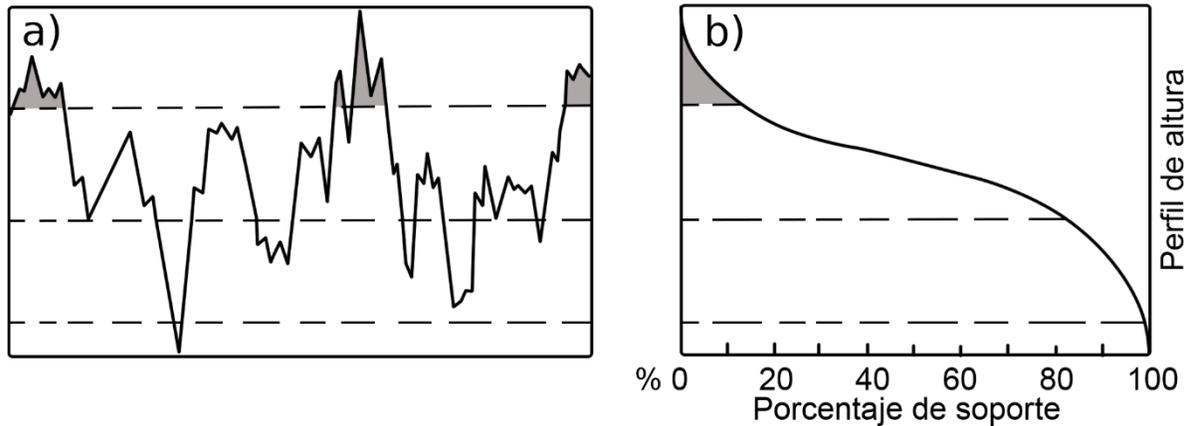


Figura 2.2. a) Perfil de rugosidad y b) curva de soporte de dicho perfil de rugosidad.

Las ecuaciones 2.1 a 2.10 corresponden a lo que se puede considerar como una descripción clásica de ingeniería de cómo describir la rugosidad. Desde el punto de vista de la teoría de los procesos estocásticos, las ecuaciones 2.7 a 2.10 son matemáticamente imprecisas. Existen mucho más parámetros y funciones que se pueden definir, pero pocos son universalmente válidos. Sin embargo, existen argumentos suficientes para enfocarse en la R_{rms} y la ACF , que tiene una relación única con la PSD [46]. Para superficies cuya distribución no es gaussiana, la situación es más compleja.

Es claro que la teoría matemática de los procesos estocásticos provee mucha más información sobre la rugosidad de lo que se ha contemplado en el área de la metrología ingenieril. Estos conceptos sólo permean gradualmente en la ingeniería. Esta tesis sólo utiliza algunos conceptos básicos de esta teoría, limitados a las superficies aleatorias gaussianas con carácter fractal.

2.1.3 Medición de la rugosidad

La medición de la rugosidad y la determinación de las propiedades estadísticas de superficies son importantes en este trabajo. Existen varias técnicas para realizar la medición de la rugosidad con un rango de análisis en diversas escalas. Se pueden realizar mediciones nanométricas mediante difracción de electrones de baja energía, métodos de haz molecular o microscopía de fuerza atómica, mientras que se pueden realizar mediciones micrométricas mediante perfilometría [34].

-Perfilometría.

La perfilometría es una de las técnicas más usadas y aceptadas para mediciones de rugosidad. Existen dos variaciones de esta técnica, la perfilometría de contacto o mecánica, y la perfilometría óptica.

La perfilometría mecánica es una técnica de medición del perfil topográfico mediante contacto. Se utiliza una punta especial muy fina de diamante para barrer la superficie de manera precisa mientras se registra su movimiento vertical con resolución nanométrica, detectando las irregularidades. El resultado es una línea en la que el eje x es la longitud de escaneo, mientras que el eje y es la altura. Para obtener un perfil completo de una superficie, se requeriría realizar mediciones de varias líneas. La perfilometría de contacto tiene una gran desventaja y es que, al existir contacto directo, puede dañar la superficie analizada [47]. La ventaja que tiene este perfilómetro es que no es sensible al color o a las superficies reflectantes, por lo que su uso es más general.

La perfilometría óptica es una técnica de caracterización topográfica no destructiva y sin contacto. Se pueden realizar escaneos lineales o tridimensionales. Esta técnica utiliza un haz de luz para detectar las características de la superficie y requiere que las superficies a medir sean reflejantes [48]. Las mediciones son más rápidas que en los perfilómetros de contacto. Existen distintos métodos de perfilometría óptica como son: interferometría, confocal, cromática, detección de enfoque y proyección de patrones. A continuación, se muestra una descripción de los métodos:

El perfilómetro confocal permite medir la altura de superficies con textura muy variable. Para ello, se proyecta un haz de luz a través de una pequeña apertura, conocida como apertura confocal, que es reflejada mediante un espejo hacia la muestra. Una segunda pequeña apertura posicionada en el plano focal filtra sólo la luz donde la muestra esté enfocada; el detector sólo recibirá esa señal [49]. El escaneo se realiza barriendo la muestra verticalmente por etapas. La altura en cada punto se obtiene detectando un máximo en la intensidad de luz, el equipo calcula la distancia hacia ese punto, y se asigna el valor correspondiente de altura. Después, se realiza un escaneo lateral sobre la superficie, moviendo el detector, para obtener los valores máximos en cada punto y reconstruir la superficie.

En el perfilómetro interferométrico, un haz de luz atraviesa un divisor. Una parte del haz se dirige a la superficie por analizar, mientras que la otra parte, al espejo de referencia. Ambas luces reflejadas se combinan y se forma un patrón de franjas de interferencia. Cuando existe diferencia de pocas ondas de longitud, ocurre interferencia. La interferencia contiene la información del contorno de la superficie. Dentro de la perfilometría de interferencia, se utilizan dos tipos de barridos, el desplazamiento de fase (que mide topografía de superficies muy lisas y continuas), donde la muestra es barrida verticalmente en etapas, y mediante el algoritmo de perfilado producen un mapa de fase de la superficie, que se transforma en un mapa

de alturas correspondiente; y el barrido vertical con luz blanca (para superficies moderadamente rugosas), donde la muestra se barre verticalmente en etapas de manera que cada punto de la superficie atraviesa el foco y la altura se obtiene detectando el máximo.

Las técnicas que se menciona a continuación son más baratas y menos eficientes que las anteriores. El perfilómetro de proyección de patrones, proyecta un patrón conocido en la muestra, y compara lo que es proyectado con lo reflejado por la muestra [50]. Al comparar ambas superficies, permite reconstruir la muestra mediante procesamiento en software.

El perfilómetro de detección de foco determina el enfoque mediante la búsqueda de altos contrastes [50]. En esas zonas fija el enfoque, y al conocer la longitud de la óptica, se determina la distancia. Primero se realiza el escaneo vertical para encontrar el enfoque mediante un sensor de cámara, y se genera un volumen tridimensional. Después de obtener la información, se eliminan las partes fuera de foco y se obtiene a la representación de la superficie de la muestra.

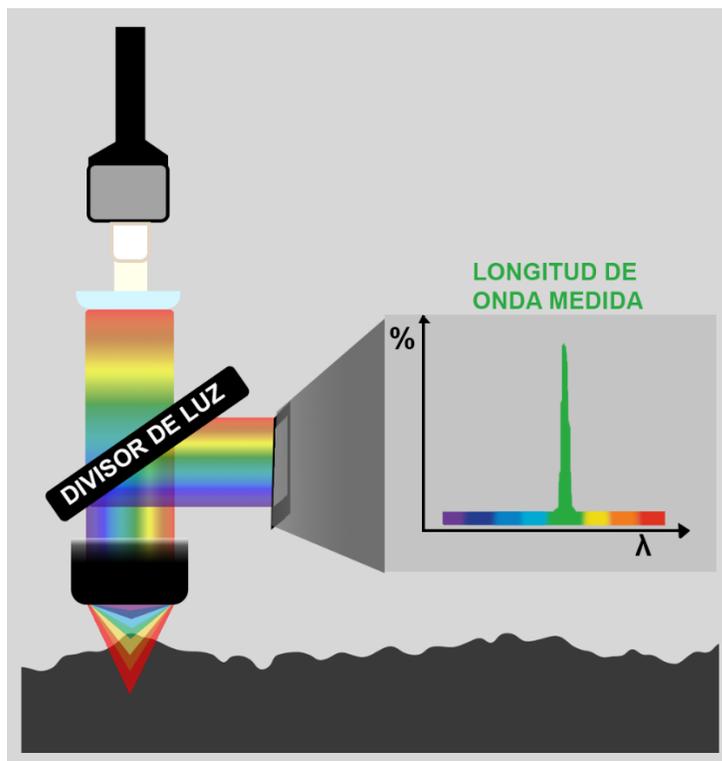


Figura 2.3. Esquema de un perfilómetro óptico cromático.

Finalmente, se tiene la perfilometría óptica cromática, donde se envía una luz blanca a través de una serie de lentes con alta aberración cromática para separar la luz en longitudes de onda individuales con distintos puntos focales. La longitud de onda con la mayor intensidad se detecta y traduce esa longitud de onda a la altura de la

superficie [48]. Este proceso se realiza en una fracción de segundo y se realiza un barrido moviendo la muestra mediante motores para realizar un mapa de alturas de la superficie. El perfilómetro con el que cuenta el equipo de trabajo en la Unidad de Investigación y Asistencia Técnica en Materiales (UDIATEM) pertenece a esta técnica y tiene una resolución vertical entre 9nm y $270\ \mu\text{m}$, y una resolución lateral de $4\ \mu\text{m}$.

-Microscopía de fuerza atómica (AFM)

El microscopio de fuerza atómica es una herramienta poderosa y versátil para la medición de topografía. Por su facilidad de uso y amplio rango de uso, el AFM se ha convertido en una herramienta cada vez más importante en la medición de rugosidad de superficies. A través del AFM se obtiene un perfil 3D en escala nanométrica, mediante la medición de fuerzas entre una punta afilada (con un radio menor a $10\ \text{nm}$) y la superficie, a una distancia muy corta ($0.2\text{-}10\ \text{nm}$) entre ellas.

La punta se encuentra sobre un cantiléver flexible. Las fuerzas que actúan entre la punta y la pieza generan deflexión del cantiléver, la cual se mide por medio de un láser que incide sobre este [51]. Los principales componentes de un AFM son la punta, el cantiléver, el escáner, el láser, el procesador de datos y el fotodetector; estos elementos se muestran en la figura 2.4.

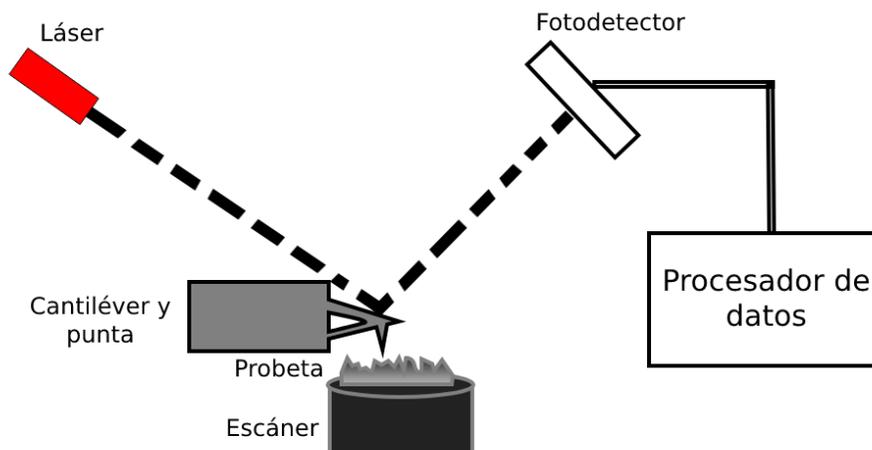


Figura 2.4. Representación esquemática del AFM [52].

Existen tres modos principales de obtención de datos en AFM: El modo contacto, donde la separación entre punta y superficie es menor a 0.5nm , el contacto

intermitente (Tapping), que ocurre en el rango de 0.5 a 2 nm, y el modo sin contacto, donde la separación es entre 0.1 y 10 nm [52].

En el modo contacto, la fuerza en la punta es repulsiva. Las fuerzas entre la punta y la muestra permanecen constantes manteniendo una deflexión en el cantiléver. El modo contacto tiene algunas ventajas: el escaneo es rápido, bueno para superficies rugosas y puede ser usado para análisis de fricción [51]. La desventaja de este modo es que las fuerzas pueden deformar muestras suaves.

En el modo intermitente (tapping mode en inglés), se realiza contacto intermitente con la superficie, llevando el cantiléver a una frecuencia de resonancia de cientos de Hz. La punta apenas y toca la superficie de la muestra durante el escaneo. Este modo suele preferirse en polímeros y películas delgadas [52]. En el modo sin contacto no existe contacto entre superficie y punta, y el cantiléver oscila sobre la superficie durante el escaneo.

La resolución vertical del mapa topográfico del equipo que se cuenta en la UDIATEM puede ser menor a 1nm y hasta 14 μm , y la resolución lateral puede ser de 1 nm. La longitud de escaneo puede ser de 0.7 nm hasta 125 μm [48].

2.2 Fractales

2.2.1 Definición y escalamiento

El término fractal fue acuñado por el matemático Benoit Mandelbrot en 1975 [53]. Mandelbrot se basó en el latín *fractus*, que significa “fracturado”. Como Mandelbrot observó en 1967 [29], la medición del perímetro de una costa depende del instrumento de medición; conforme el instrumento tenga una menor escala, se descubren más detalles y, por ende, la longitud media es mayor. También, a pesar de que las mediciones se escalen, tienen una tendencia a parecerse a la superficie original. Estas características definen la autosimilitud de la geometría fractal [29].

En el sentido matemático, las superficies son estadísticamente autosimilares cuando a diferentes direcciones o escalas, los parámetros estadísticos escalan con el mismo factor (autosimilar) o escalan de la misma manera (autoafín). En superficies donde se requiere una escala diferente en cada dirección para observar la similitud se habla de autoafinidad. En el caso del estudio topográfico, la mayoría de las superficies son autoafines [54].

La autosimilitud y autoafinidad se definen matemáticamente por [54]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \lambda x \\ Z(x) \rightarrow \mu Z(x) \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Donde al escalar una variable, la función escala, pero con otro valor. Ese valor se representa por una función de tipo:

$$\mu = \lambda^H \quad (2.12)$$

Donde H es el exponente de rugosidad de Hurst, el cual varía entre uno y cero. En el caso donde existe autosimilitud, H tiene un valor igual a uno, por lo que se cumple que $\mu = \lambda$, siendo el mismo valor de escalamiento en las dos direcciones. $Z(x)$ es estadísticamente invariante cuando se cumple lo anterior [54]. La rugosidad de una superficie gaussiana puede ser descrita independientemente de la longitud del muestreo y rango, mediante la dimensión fractal D o el exponente de Hurst, H . El componente fractal significa que todas las características de la superficie escalan a un exponente de D o H . Aplica para densidad de máximos y distancia entre ellos, picos, entre otras.

2.2.2 Dimensión fractal, D

La dimensión fractal es una medida de la complejidad de una figura geométrica o un patrón, así como la capacidad de llenar un espacio. Para dimensiones que describen figuras geométricas ordinarias, la dimensión fractal es igual que la dimensión topológica. Estas relaciones de escalamiento se pueden definir matemáticamente mediante una regla general de escalamiento, donde N es la cantidad de unidades de medición (como aristas, rectángulos, cubos), ε el factor de escalamiento y D la dimensión fractal:

$$N = \varepsilon^{-D} \quad (2.13)$$

Esta ecuación confirma lo observado en la geometría y dimensión topológica: en el caso de una línea, el resultado será uno; para la superficie de una circunferencia o un rectángulo, la dimensión será dos; mientras que, la dimensión del volumen de un cubo o esfera, será tres.

Las mismas reglas aplican para la geometría fractal, pero se lleva a cabo de forma menos intuitiva. Como ejemplo se puede tomar el copo de nieve de Koch, donde un extremo se mide con longitud de 1 inicialmente, y al cambiar la longitud de medición a $1/3$ en la siguiente iteración, existirán 4 longitudes en lugar de tres. En este caso $N = 4$ cuando $\varepsilon = \frac{1}{3}$, por lo que reacomodando la ecuación 2.13, D se calcula de la siguiente manera:

$$D = -\frac{\log N}{\log \varepsilon} \quad (2.14)$$

siendo la dimensión fractal del copo de nieve de Koch $D = 1.2619$. Se observa que, en el caso de los fractales, el número no será entero. Al estudiar contornos, la dimensión se encontrará entre uno y dos, en una superficie será entre dos y tres. La parte fraccionaria será la tendencia que tiene un elemento a acercarse a la siguiente dimensión euclidiana [55].

2.2.3 Exponente de Hurst, H

El exponente de Hurst se utiliza como medida de dependencia de largo alcance en una serie temporal. El concepto se utilizó inicialmente en hidrología, para la determinación del tamaño óptimo de una presa para condiciones volátiles de lluvia durante un largo período de tiempo [56]. El nombre del exponente deriva de Harold Hurst. En geometría fractal, el exponente de Hurst es una medida de la correlación leve o fuerte en una serie de datos [57]. El exponente de Hurst está relacionado con la dimensión fractal por medio de la siguiente ecuación:

$$D = E + 1 - H \quad (2.15)$$

Donde E es la dimensión euclidiana del fenómeno analizado. Para un perfil de rugosidad, $E=1$, y para una superficie, $E=2$ [54].

2.2.4 Base matemática

El que exista un incremento en la varianza al incrementar el tamaño del dominio en el que se analice una variable aleatoria se define por el teorema de Plancherel [58] para superficies autoafines con un espectro de potencia en forma de ley de potencia. Se describe la topografía de la superficie como función $z(x, y)$ con un espectro de potencia isotrópico:

$$P(r) = \begin{cases} 0, & r < r_l \\ Cr^{-2(H+1)}, & r_l < r < r_u \\ 0, & r_u \end{cases} \quad (2.16)$$

Donde $r = \sqrt{k^2 + l^2}$, la magnitud del vector de onda k con componentes (k, l) . r_l y r_u son los radios de corte inferior y superior del dominio de la frecuencia. C es una constante. La longitud medida corresponde a la máxima longitud de onda $\lambda_u = 2\pi/r_l$ y la resolución $\lambda_l = 2\pi/r_u$. La varianza de la altura se da por:

$$z^2 = \int_0^\infty 2\pi P(r) dr = \pi C \frac{r_l^{-2H} - r_u^{-2H}}{H} \quad (2.17)$$

Para $r_l/r_u \ll 1$, el segundo término en el numerador se puede obviar, por lo que la desviación estándar $\sigma = \sqrt{z^2} \sim r_l^{-H} \sim \lambda_u^H$, o sea, la rugosidad r.m.s. incrementa con la longitud de medición λ_u . Si la frecuencia λ_u fuera infinita, la varianza sería infinita, por lo que no existiría, por lo que es necesario realizar un corte superior para tener una varianza real.

La resolución λ_l puede ser de tamaño atómico en recubrimientos de diamante [59], mientras que la máxima longitud de onda λ_u puede ser tan grande como el universo observable [60]. El radio de corte suele ser impuesto por limitaciones instrumentales. En ciencias de materiales y en la tribología, λ_u se observa como la escala donde la rugosidad deja de crecer con la longitud medida [24] [25] [59]. En simulaciones numéricas, λ_u/λ_l se determina por el tamaño del conjunto de datos, y λ_u se puede asignar como 1.

Según Nayak [61], los parámetros estadísticos que caracterizan una superficie gaussiana isotrópica y aleatoria pueden ser expresados en términos de momentos, m_n , del PSD de cualquier perfil extraído de la superficie:

$$m_n = \int_{r_u}^{r_l} r^n \text{PSD}(r) dr \quad (2.18)$$

Sayles y Thomas [62] mostraron que los PSD en la naturaleza o hechos por el hombre obedecen la siguiente ley de potencia:

$$\text{PSD}(r) = K r^{-(5-2D)}, \quad 1 < D < 2 \quad (2.19)$$

Siendo K una constante que depende de la amplitud de la rugosidad. Juntando las dos anteriores ecuaciones, se tiene:

$$m_n = K \int_{r_u}^{r_l} r^{n-(5-2D)} dr \quad (2.20)$$

Que puede ser integrada para los primeros tres momentos distintos de cero. Considerando $r_l \gg r_u$, se obtienen las siguientes aproximaciones [63]:

$$m_0 \cong \frac{-K}{2D-4} \left(\frac{2\pi}{\lambda_l} \right)^{2D-4} \quad (2.21a)$$

$$m_2 \cong \frac{K}{2D-2} \left(\frac{2\pi}{\lambda_u} \right)^{2D-2} \quad (2.21b)$$

$$m_4 \cong \frac{K}{2D} \left(\frac{2\pi}{\lambda_u} \right)^{2D} \quad (2.21c)$$

Por lo que, la rugosidad r.m.s., R_{rms} , la pendiente r.m.s., m_{rms} , y la curvatura r.m.s., k_{rms} , pueden definirse mediante la raíz cuadrada de los momentos espectrales:

$$R_{rms} = \sqrt{m_0} \quad (2.22a)$$

$$m_{rms} = \sqrt{m_2} \quad (2.22b)$$

$$k_{rms} = \sqrt{m_4} \quad (2.22c)$$

2.3 Algoritmos para generación de superficies aleatorias

2.3.1 Método de desplazamiento aleatorio de punto medio

El Método de desplazamiento aleatorio de punto medio (Random Midpoint Displacement method, RMDM) o también llamado algoritmo de punto medio (MPA) fue introducido en 1982 por Fournier [64]. Este método genera campos de alturas realistas. Es una técnica recursiva aplicada al movimiento browniano para generar superficies fractales aleatorias. Ha sido utilizada para el estudio del movimiento de las nubes, para generar terrenos en videojuegos mediante computación gráfica, donde se popularizó el método, y para la generación de relieves fractales [65] [66]. En teoría, el método permite la generación de superficies gaussianas.

- a) El método inicia con un cuadrado en el plano X-Y. Cada uno de los vértices del cuadrado se desplazan en dirección z con un valor aleatorio obtenido de una distribución de Gauss con desviación estándar definida. Esto se observa en el inciso a de la figura 2.5.
- b) El dominio se divide en cuatro cuadrados para tener una cuadrícula de 2x2. Los 5 nuevos vértices generados se desplazan de nuevo en dirección z un valor aleatorio. Este valor aleatorio se obtiene mediante una distribución gaussiana con una desviación estándar proporcional a f^n , con $f = 2^{D-3}$ y n el paso de la subdivisión, por lo que a medida que la superficie se refina, los desplazamientos de altura serán menores (inciso b de la figura 2.5).
- c) El proceso se repite de nuevo, generando nuevos cuadrados más pequeños, hasta un número determinado de iteraciones.

El desplazamiento en cada iteración se rige por la siguiente fórmula:

$$y = \bar{y} + escala \times Aleatorio \quad (2.23)$$

Donde y es el valor de desplazamiento que se aplicará, \bar{y} es el valor promedio de las alturas de los vértices vecinos y el valor de escala está relacionado al valor de rugosidad que se busque obtener.

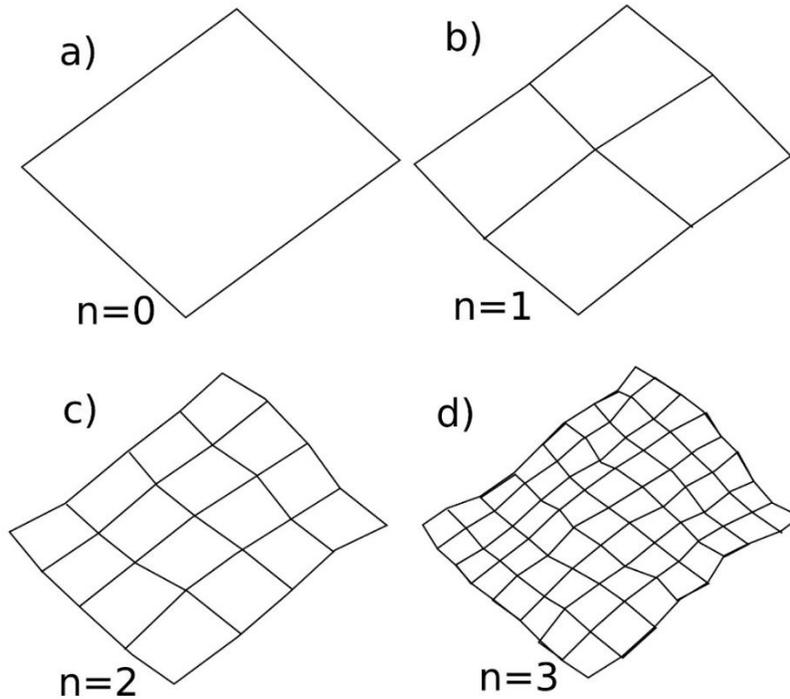


Fig. 2.5. Evolución al realizar iteraciones mediante el MPA.

2.3.2 Método espectral aleatorio

El Método espectral aleatorio (Random Spectral method, RSM) se basa en el análisis de superficies aleatorias de Longuet-Higgins [67] de 1957, en el que se analizó una superposición aleatoria de ondas de diferentes frecuencias mediante series infinitas de cosenos, donde la amplitud escala en términos del espectro de potencia. Longuet-Higgins estudió la superficie marina. Nayak [61], y posteriormente Greenwood [68] utilizaron esta teoría para determinar las propiedades estadísticas importantes en la mecánica de contacto, particularmente la altura y curvatura principal de las asperezas, lo que permite refinar el modelo de Greenwood-Williamson [9].

El método se describe en la siguiente fórmula:

$$z(x, y) = \frac{2\pi(b-a)}{N} \sum_{n=1}^N c(r) \cos[r(2\pi x \cos \theta + 2\pi y \sin \theta + \varphi)] \quad (2.24)$$

Con z como la altura de la superficie, N el número de términos en la serie, r la longitud del vector de onda, a y b como el recorte alto y bajo de longitud del vector de onda, θ el ángulo entre el vector de onda y el eje x , y φ como el ángulo de fase aleatorio. La amplitud $c(r)$ es:

$$c(r) = r^{-7+2D} = r^{-(2H-1)} \quad (2.25)$$

Los ángulos θ y φ son escogidos aleatoriamente del intervalo $[-\pi, \pi]$. El valor de r es escogido aleatoriamente entre $[a, b]$ de tal forma que los vectores de onda se distribuyen uniformemente en el espacio de frecuencia. En teoría, el método permite la generación de superficies gaussianas.

2.3.3 Función generalizada de Weierstrass-Mandelbrot

La función original de Weierstrass fue definida por Karl Weierstrass en 1872, y sirvió para contrarrestar la creencia de que en una función continua $y = f(x)$, y siempre se puede diferenciar con excepción de un juego contable de puntos aislados [69]. Esta función es continua en todos lados, pero diferenciable en ningún punto. Más adelante, Mandelbrot estudió las propiedades fractales de la función, por lo que su nombre cambió a Weierstrass-Mandelbrot [70].

Para generar superficies gaussianas aleatorias mediante Weierstrass-Mandelbrot, se utiliza la siguiente fórmula [71] [72]:

$$z(x, y) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-2} \sqrt{\frac{\log \gamma}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \gamma^{(D-3)n} \cos \left[\varphi - \cos \left(2\pi \gamma^n \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\arctan \frac{x^2}{y^2} - \frac{\pi m}{M}) + \varphi \right) \right]} \quad (2.26)$$

donde L es la longitud de la superficie simulada, G es la rugosidad fractal, y γ la lacunaridad. El ángulo de fase φ se define aleatoriamente en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

La función generalizada de Weierstrass-Mandelbrot produce una superficie rugosa, pero su transformada de Fourier no es aleatoria y tiene poca similitud con lo que se observa en las mediciones. Dado que los problemas de contacto pueden ser descritos tanto en el espacio físico como en el espacio de Fourier, es deseable que las superficies modeladas sean fiables en ambos dominios. También, la implementación de la función es numéricamente ineficiente [73].

2.3.4 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una transformación matemática que se usa para llevar señales del dominio del tiempo al de la frecuencia, y viceversa. Tiene muchas aplicaciones en matemáticas, física, ingeniería, procesamiento de señales, probabilidad, óptica, entre otras.

Para generar superficies rugosas aleatorias mediante Transformada de Fourier, se requieren dos funciones estadísticas con parámetros específicos: una función de correlación y una distribución de altura [74].

El método de transformada de Fourier [74] [75] [76] utiliza variables aleatorias independientes con distribución normal $\{g_{ij}\}$ en una cuadrícula $2^{n_0} \times 2^{n_0}$. Esta cuadrícula es transformada al dominio de la frecuencia utilizando la transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT), definiendo entonces $\{\widehat{g}_{ij}\} = \mathcal{F}\{g_{ij}\}$. Para filtrar la cuadrícula, se multiplica por el espectro de potencia $P(k, l)$ en el dominio de la frecuencia y se aplica la transformada inversa de Fourier (IFT) $\{\widehat{g}_{ij}\}$:

$$z(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left(\left(\text{Re}(\widehat{g}_{ij}) + i \text{Im}(\widehat{g}_{ij}) \right) \sqrt{P \left(\sqrt{k_i^2 + l_i^2} \right)} \right) \quad (2.27)$$

Donde $i = \sqrt{-1}$. La combinación lineal de la parte real e imaginaria en la ecuación 2.10 genera un número real $z(x, y)$. FFT es un método muy eficiente de sumar senos y cosenos mediante una transformada de Fourier discreta. Es equivalente al método de Longuet-Higgins [67], pero la ecuación 2.27 permite utilizar de forma eficiente 2^{2n_0} términos armónicos, caso contrario a la ecuación 2.24 del método aleatorio espectral y 2.26 del método de Weierstrass-Mandelbrot, donde los tiempos computacionales serían ineficientes. La transformada de Fourier no genera directamente superficies gaussianas, se requiere ajustar los recortes de longitudes de onda para obtenerlas [77].

2.4 Métodos de obtención de dimensión fractal

Elegir un método que provea una determinación fiable y consistente de la dimensión fractal no es sencillo. Existen varios métodos, pero cada uno tiene sus limitaciones y usos específicos. Un punto importante en el análisis de los métodos es la diferencia entre la teoría y la práctica. Cada uno de los métodos involucra un límite hacia 0 del tamaño de la observación. En imágenes o datos con resolución finita, es común que no se puede refinar la observación hasta la escala requerida, o que ciertos detalles que son importantes para la determinación de D no están representados en los datos.

Asimismo, se asume que las curvas y superficies sean continuas. En datos discretos, puede ser que un punto sobre la curva que es esencial para la determinación correcta de D se encuentra entre dos puntos discretos y desaparece del análisis numérico, creando resultados erróneos [78]. Gran parte de las discusiones en la literatura sobre el “mejor” método no toman en cuenta estos errores numéricos [46], mientras la base matemática generalmente es exacta y

todos los métodos dan el mismo resultado, excepto en casos muy particulares [79]. A continuación, se revisan los métodos más comunes usados en la determinación de la dimensión fractal, primero en contornos, y luego en superficies.

2.4.1 Método Yardstick

El método Yardstick, (de la regla o del divisor, YM) se ha utilizado por mucho tiempo para determinar la longitud de curvas en la cartografía. Se utiliza para obtener dimensión fractal mediante contornos. Se trata de elegir una longitud de “paso” y recorrer la distancia a medir con ese paso, obteniendo la cantidad de pasos n_p requeridos para cubrir la línea totalmente. Sistemáticamente se reduce el tamaño del paso o divisor y se repite el proceso. Se obtiene la relación entre el tamaño de paso y la cantidad de pasos para recorrer la trayectoria. Para obtener la dimensión fractal, la ecuación es la siguiente:

$$\frac{\log L(\tau)}{\log \tau} = 1 - D_Y \quad (2.28)$$

Con $L(\tau) = n_p \tau$ la longitud aproximada total de la curva, τ , el tamaño de paso, y D la dimensión fractal. La representación del método se observa en la figura 1.6, donde se midió la costa de Inglaterra [29].

Un problema aparente de este método es el residuo que queda, debido a que es posible que la línea deba cubrirse mediante un número no entero de pasos. La solución más utilizada es agregar la fracción del último paso, pero se ha encontrado que esto produce dimensiones un poco mayores que al redondear el número de pasos [80].

Existen opiniones encontradas respecto al método. Algunos autores encuentran resultados fiables al conocer la dimensión fractal previamente [81] o resultados cercanos a otros métodos como el análisis espectral [82], mientras que, en otros artículos, las dimensiones fractales obtenidas no son cercanas al valor real [83].

Otros detalles que provocan diferencias en el método son: el punto de inicio al contar, la elección del tamaño máximo y mínimo de paso, y las islas pequeñas [84]. Para solucionar el problema existente con el punto de inicio, se seleccionan varios puntos de inicio y promediar sus valores. Después de utilizar 50 puntos de inicio aleatorios, la desviación estándar de las dimensiones fractales se minimiza [85].

Sobre la elección del tamaño de pasos existen también detalles a tomar en cuenta. La elección de pasos muy pequeños provocará longitudes que no variarán entre sí. Esto sucede cuando el paso se hace más pequeño que la distancia entre los puntos discretos en un registro digital. Si estos valores se incluyen para determinar la dimensión fractal, decrecerán la pendiente, por lo que reducirán la dimensión fractal.

Entonces, el paso más pequeño debe ser el doble de la distancia más corta entre cualquier punto [85], y la mitad del promedio de la distancia entre puntos adyacentes [86]. En una curva continua que se puede observar a todas las escalas, el problema no existe.

Tampoco es deseable elegir un tamaño mínimo de paso muy grande que reduzca la cantidad de puntos utilizados en la determinación de la pendiente. Para el tamaño máximo de paso no existen tantos detalles a considerar. Es claro que, para describir una curva cerrada, se requieren por lo menos tres segmentos. A mayor tamaño máximo de paso, el tamaño del residuo será mayor, lo que afecta el valor y variabilidad de la dimensión.

Otro parámetro a tomar en cuenta es la cantidad de incrementos de pasos que se requieren para obtener resultados fiables. En general, se recomiendan entre cinco y ocho incrementos de pasos. Del punto de vista estadístico, conviene que el paso se vaya duplicando entre cada incremento, para mejorar la efectividad de la regresión lineal. Duplicar el incremento lleva a dos problemas: que existen menos incrementos posibles, y que pequeñas islas se excluyan del análisis [83], por lo que hay que buscar un balance entre utilizar pasos geométricos y alcanzar los incrementos necesarios.

Una solución sencilla ante este problema es incrementar las longitudes de acuerdo a una serie geométrica cuya razón es una raíz entera de 2 ($2^{-1/2}$ o $2^{-1/4}$). Esto produce el doble o cuatro veces los puntos, mientras conserva la equidistancia en una gráfica logarítmica.

2.4.2 Método de conteo de cajas

El método de conteo de cajas (Box counting method, BCM), también conocido como método de conteo de celdas, se ha utilizado para calcular áreas cartográficas irregulares [87], y puede ser aplicado a puntos, líneas, áreas y volúmenes, para obtener la dimensión fractal, por lo que es útil tanto para contornos como para superficies.

Para contornos, la aplicación del método se da de la siguiente manera: Se cubre el área total con una sola caja. Luego, se divide la caja en cuatro cuadrantes y se cuenta la cantidad de cuadrantes ocupados, es decir, si la curva pasa por el cuadrante, el valor asociado es 1, en caso de lo contrario, es 0. Enseguida, se divide cada cuadrante en otros cuatro sub cuadrantes y se continúa realizando hasta que el tamaño mínimo de cuadrante sea igual a la resolución de los datos, tomando nota del número de cuadrantes ocupados con al menos un punto de la curva en cada

paso. La dimensión fractal se obtiene mediante la gráfica log-log que deriva de la siguiente ecuación:

$$-D_{BCM} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log n_m}{\log m} \quad (2.29)$$

Con n , como el número de cuadrantes ocupados y b , como el tamaño de caja.

BCM requiere una gran cantidad de datos para obtener una correcta dimensión. En este método, las islas pequeñas no son un problema. Sobre los tamaños mínimos y máximos de cajas, se recomienda no utilizar los dos primeros conjuntos de cajas (con 1 y 4 cajas) [88], ni utilizar los conjuntos cuando se alcanza la máxima resolución de datos.

Este método presenta un problema con los residuos. Si las cajas no cubren los datos de forma completa (como en una caja de 257x257), algunas celdas quedarán fuera si se realizan los pasos de forma geométrica. Algunos autores sugieren recolocar los datos en conjuntos cuadrados que puedan ser divididos en enteros, cosa que no siempre es viable. Otra solución, para imágenes rectangulares es hacer dos mediciones, iniciando de ambos lados del rectángulo, omitir el residuo en ambos casos, y promediar el resultado [88].

2.4.3 Método de área-perímetro

La dimensión perímetro-área fue descrita inicialmente por Mandelbrot [20] para obtener dimensión fractal de contornos de islas. El método de área-perímetro (Área-perimeter method, APM) se utiliza para obtener la dimensión fractal de lagos, contornos e islas. La implementación del método es sencilla. El área no cambia mucho al ser medida mediante diferentes escalas, mientras que el perímetro cambia significativamente [89].

$$\frac{\log A}{\log P} = \frac{2}{D_{AP}} \quad (2.30)$$

Con A como el área y P como el perímetro. Esta dimensión fractal tiene una correlación inversa respecto a otras dimensiones fractales. Valores cercanos a dos de dimensión perímetro-área indican una estructura casi lineal, mientras que valores cercanos a uno, indican un área cubierta casi en su totalidad [32].

2.4.4 Método de conteo diferencial de cajas

El método de conteo diferencial de cajas (Differential box counting, DBC) es una variación del método de conteo de cajas. Este método considera las diferencias en escala vertical y horizontal determinando un rango Δz en el dominio, utilizando cajas de tamaño vertical $\Delta z/m$. La falta de resolución vertical se estudia considerando sólo las cajas más altas y más bajas que contienen parte de la superficie en cada columna de cajas, pues las cajas intermedias contendrán también parte de la superficie [78]. La ecuación 2.29 es ahora:

$$D_{DBC} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_i \left[m \frac{M_i - m_i}{\Delta z} \right]}{\log m} \quad (2.31)$$

Donde la suma se obtiene mediante todas las cajas, M_i y m_i son los valores máximos y mínimos del cuadrado i . El método es muy parecido al estimador Hall-wood [90] [91]. En la figura 2.6 se observa la comparación entre ambos métodos de conteo de cajas.

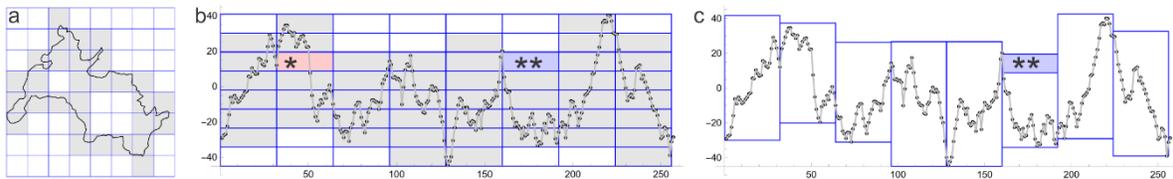


Figura 2.6. a) Concepto original del método de conteo de cajas. Las casillas grises contienen parte del contorno, por lo que son contadas. b) Método de conteo de cajas con escalamiento vertical. Las cajas marcadas con * y ** se pierden en el conteo, pues la curva pasa a través de la caja, pero no existen puntos dentro de la caja, debido a la falta de resolución vertical. c) Conteo de cajas diferencial. Permite un cambio vertical y cuenta todos los individuos dentro de su intervalo. A pesar de ello, la casilla ** sigue sin ser contada.

2.4.5 Método de prisma triangular

El método de prisma triangular (triangular prism method, TPM) es un método eficiente y relativamente fácil de implementar y se puede asociar intuitivamente con el método Yardstick popularizado por Mandelbrot [29] (figura 2.7). TPM extiende el método, cubriendo la superficie con un mallado de triángulos. En un principio, este método aplica sólo en geometrías auto similares, dado que la superficie no escala linealmente con la altura [92]. No obstante, Schouwenaars et al. [78] estudiaron el efecto de la escala vertical y demostraron que el método da el resultado correcto para superficies auto-afines, siempre y cuando la resolución horizontal y vertical de los datos sean lo suficientemente finas. El método consiste en la suma de áreas de

triángulos de los puntos de un cuadrado conformado por cuatro puntos adyacentes de la superficie. El área total de la superficie, s_{Tot} , es la suma de todas las áreas obtenidas mediante los triángulos sobre la cuadrícula de lado a , por lo tanto:

$$D_{TPM} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\log s_{Tot}}{\log a} \quad (2.32)$$

TPM requiere de pequeños valores de a para una buena convergencia de la dimensión fractal, por lo que se requieren grandes cantidades de datos [78].

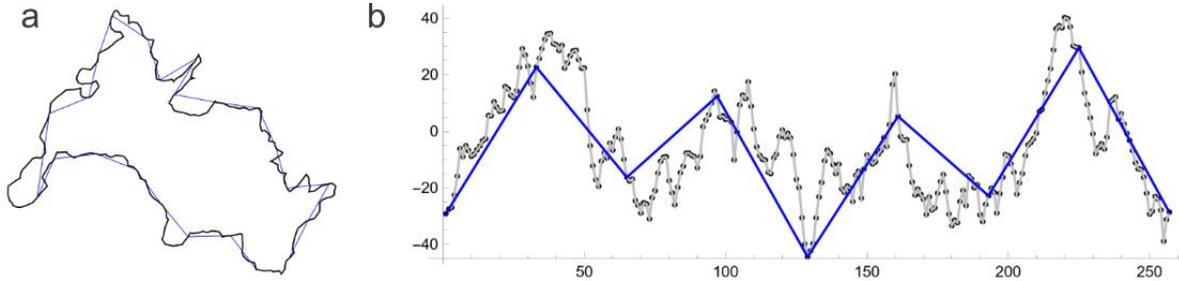


Fig. 2.7. a) Concepto original del método yardstick. El contorno se aproxima mediante líneas de longitud fija. b) TPM para la estimación de dimensión fractal en series temporales. La longitud de las líneas entre puntos se aproxima mediante la longitud de las líneas azules sobre intervalos con ancho a . Mediante teorema de Pitágoras, el método es sensible al escalamiento vertical.

2.4.6 Método de análisis de fluctuaciones sin tendencia

El método de análisis de fluctuaciones sin tendencia (detrended fluctuation analysis method, DTF) se propuso originalmente como una técnica para detectar y cuantificar las correlaciones de largo alcance [93] en secuencias de ADN. Se concibe como un método para eliminar tendencias locales y mostrar la tendencia a largo plazo de un conjunto de datos. Se ha utilizado en análisis de variabilidad de ritmo cardiaco [94], en análisis financiero [95] y en procesos no estacionarios de variable única [96]. En lugar de analizar la varianza de la función sobre un intervalo de tiempo Δt , se genera una regresión lineal o polinomial en la función acumulada sobre Δt , y la variancia residual de dicha regresión se analiza como función de Δt .

El método ha sido adaptado para procesos aleatorios de dos variables por Gu y Zhou [97] [98] con un énfasis en análisis multifractal. La función acumulativa $Z(x, y)$ se calcula sobre cada subdivisión cuadrada de lado a . Un ajuste polinomial $f(x, y)$ se ajusta a cada uno de los cuadrados. Se suele usar un polinomio de segundo grado o un ajuste lineal. La variancia residual \bar{v}_a promediada sobre todos los cuadrados, obedece $\bar{v}_a \sim a^H$, por lo tanto:

$$D_{DTF} = 3 - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\log \bar{v}_a}{\log a} \quad (2.33)$$

Se suelen usar regresiones lineales y polinomios de segundo grado para $f(x, y)$ como el siguiente polinomio:

$$f(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{02}xy + c_{11}y^2 \quad (2.34)$$

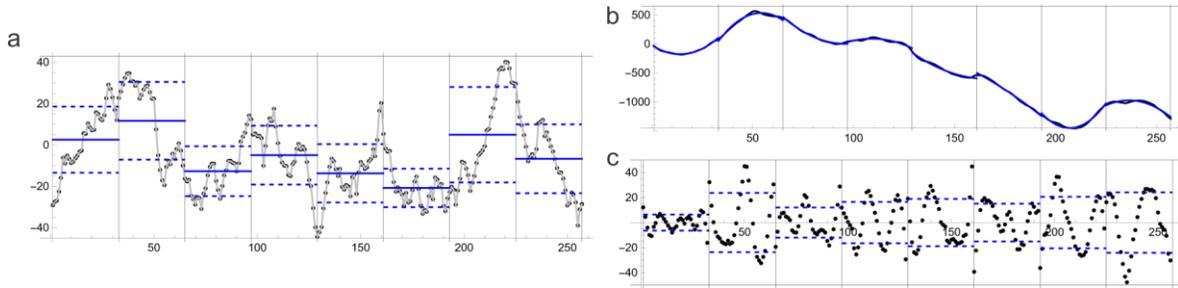


Figura 2.8. a) Ilustración de método de longitud-rugosidad (RLM) para una serie de tiempo. La variación vertical (desviación estándar) se muestra en líneas punteadas relativo a la media (línea azul). b) Valores acumulados (negro) con el ajuste del polinomio utilizado en DTF (ecuación 2.34) superpuesto. c) Residuos ajustados mostrando la desviación estándar residual (línea punteada) para cada intervalo.

2.4.7 Densidad espectral de potencia y funciones relacionadas

En la mayoría de las superficies generadas, la función $z(x, y)$ se describe alrededor de un valor promedio que suele ser cero. A continuación, se definen tres funciones relacionadas para conjuntos de datos discretos en formato (x_i, y_j) con $i, j \rightarrow 2^{n_0}$. La función real de autocorrelación se define así:

$$R(\xi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(x, y)z(x - \xi, y - \psi) dx dy \quad (2.35)$$

O en valores discretos:

$$R(\xi_k, \psi_l) = \frac{1}{2^{2n_0}} \sum_{i=1}^{2^{n_0}} \sum_{j=1}^{2^{n_0}} z(x_i, y_j)z(x_i - \xi_k, y_j - \psi_l) \quad (2.36)$$

La convolución que se observa en la ecuación 2.35 se puede realizar en el dominio de la frecuencia como una multiplicación, así como la convolución discreta en la ecuación 2.36 se puede realizar mediante una multiplicación después de aplicar la transformada rápida de Fourier, seguida de una transformada inversa de Fourier. La densidad espectral de potencia (Power spectral density, PSD) es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, y es:

$$P(k, l) = \mathcal{F}(R(x, y)) = |\mathcal{F}(h(x, y))|^2 \quad (2.37)$$

El variograma [99], función de correlación de alturas [100] o función de estructura [101] se define como:

$$\gamma(\xi, \psi) = \langle (h(x, y)h(x - \xi, y - \psi))^2 \rangle \quad (2.38)$$

Dado que $\gamma(\xi, \psi) = 1 - R(\xi, \psi)$, las tres funciones $R(\xi, \psi)$, $P(k, l)$ y $\gamma(\xi, \psi)$ contienen la misma información [100] [34]. Su implementación numérica, así como sus campos de aplicación pueden diferir, por lo que pueden existir diferencias en el valor resultante de D .

El variograma o función de estructura es usado ampliamente en geociencia [102] [103] [104], pero es poco usado en tribología o en superficies. El variograma puede ser usado sin definir un nivel de referencia y puede ser calculado para conjuntos de datos con puntos espaciados de forma irregular, algo común en exploración geológica [105]. En el caso de aplicaciones de tribología, los perfilómetros y microscopios de fuerza atómica incluyen correcciones ocultas y cálculos del PSD en forma de caja negra [106] [107]. Por lo tanto, su uso es relativamente general en esta área, pero la falta de acceso a los algoritmos usados involucra el riesgo de que los resultados pueden no ser confiables.

3. Mecánica de contacto y métodos numéricos

3.1 Modelos de mecánica de contacto

3.1.1 Teoría de Hertz de contacto elástico

Con el objetivo de calcular el área real de contacto, se han propuesto varias teorías. La primera aproximación la propuso Hertz [6] en su teoría de contacto elástico. Las condiciones de la teoría de Hertz se resumen a continuación.

Las deformaciones deben ser pequeñas, y dentro del rango elástico, cada sólido se debe considerar como un semiespacio elástico, no se considera el efecto de la fricción y las superficies deben ser continuas, curvas y no conformes. Dos superficies son no conformes entre sí, cuando los perfiles de las superficies son muy diferentes, y por lo tanto, no embonan exactamente sin deformación. El primer contacto entre ambas superficies se realiza en un punto o línea de contacto [8].

A continuación, se aborda el caso de contacto de dos sólidos de revolución bajo el efecto de una carga normal P que se incluye en la teoría de contacto de Hertz y se puede observar en la figura 3.1.

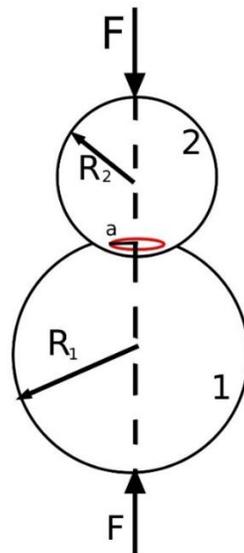


Figura 3.1. Modelo de Hertz del contacto de dos sólidos de revolución bajo el efecto de una carga normal P [6].

Se consideran dos superficies esféricas, con radio de curvatura R_1 y R_2 respectivamente, sometidas a una carga normal F y con un área de contacto circular con radio a . Es posible calcular el radio del área de contacto como se observa a continuación:

$$a = \left(\frac{3Fr}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.1)$$

Siendo r el radio de curvatura relativo que se calcula como:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.2)$$

E^* es el módulo elástico reducido, y se obtiene de acuerdo a:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (3.3)$$

Con E_1 y E_2 como los módulos elásticos de cada superficie en contacto y ν_1 y ν_2 los coeficientes de Poisson. La distribución de presiones depende de la distancia r hacia el punto de contacto inicial. Se calcula con la siguiente ecuación:

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

Donde p_0 es la máxima presión de contacto, que se presenta en el punto de contacto inicial y se observa que:

$$p_0 = \frac{3F}{2\pi a^2} = \left(\frac{6FE^*}{r^2\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.5)$$

Finalmente, el acercamiento mutuo entre puntos distantes se puede calcular mediante:

$$u_z = \frac{a^2}{r} = \left(\frac{9F^2}{16rE^{*2}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.6)$$

3.1.2 Funciones potenciales de Boussinesq y Cerruti.

En el siglo XIX, Boussinesq [108] y Cerruti [109] realizaron un método para encontrar esfuerzos y desplazamientos en un semiespacio elástico debido a cargas en la superficie mediante la teoría de potenciales. Love [110] después retomó ambas aproximaciones que se explican a continuación. En este resumen, se

presentan las ecuaciones más importantes, el problema completo se puede estudiar en libros de referencia [8].

Se consideran los esfuerzos y deformaciones producidos en un semiespacio elástico limitado por un plano de superficie $z = 0$ bajo acción de presión normal $p(x, y)$ y cargas tangenciales $q_x(x, y)$ y $q_y(x, y)$. Sólo se estudian las zonas próximas al contacto. Al ser un sistema de esfuerzos tridimensional, pueden existir los seis componentes del esfuerzo.

Considerando un punto $C(\xi, \eta)$ en la superficie de la zona cargada y un punto $A(x, y, z)$ en el interior del sólido, la distancia entre ambos se así:

$$\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (z)^2} \quad (3.7)$$

Se definen las siguientes funciones potenciales:

$$\begin{aligned} F_1 &= \iint_S q_x(\xi, \eta) \Omega \, d\xi d\eta \\ G_1 &= \iint_S q_y(\xi, \eta) \Omega \, d\xi d\eta \\ H_1 &= \iint_S p(\xi, \eta) \Omega \, d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde:

$$\Omega = z \ln(\rho + z) - \rho \quad (3.9)$$

Por lo que se definen las funciones potenciales derivadas de 3.8 y 3.9:

$$\begin{aligned} F &= \iint_S q_x(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi d\eta \\ G &= \iint_S q_y(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi d\eta \\ H &= \iint_S p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.10)$$

Y se recombinan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z} \\ \psi &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Love [110] obtuvo los componentes de desplazamiento elástico u_x , u_y y u_z en cualquier punto $A(x, y, z)$ dentro del sólido mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{4\pi G} \left(2 \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ u_y &= \frac{1}{4\pi G} \left(2 \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ u_z &= \frac{1}{4\pi G} \left(2 \frac{\partial H}{\partial z} + (1 - 2\nu) \psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dado que los desplazamientos decaen con $1/\rho$ para puntos alejados de la zona de contacto, los desplazamientos son nulos cuando $\rho \rightarrow \infty$. Con los desplazamientos, es posible calcular los esfuerzos a partir de las deformaciones mediante la Ley de Hooke.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 \sigma_y &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 \sigma_z &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\
 \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\
 \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Si se busca conocer los desplazamientos producidos por una fuerza normal P concentrada sobre la superficie, se considera que el área S donde actúa la fuerza tiende a cero, por lo que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3.14}$$

$$\iint_S p(\xi, \eta) d\xi d\eta = P$$

En este caso, las funciones potenciales en 3.11 se reducen:

$$\psi_1 = \frac{\partial H_1}{\partial z} = H = P \ln(\rho + z) \tag{3.15}$$

$$\psi = \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{P}{\rho}$$

Y los componentes del desplazamiento elástico en el sólido de la ecuación 3.12 se resuelven como:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right) \\
 u_y &= \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{yz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{y}{\rho(\rho+z)} \right) \\
 u_z &= \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ahora bien, si se busca estudiar una presión uniforme p aplicada a una región de la superficie que consiste en un polígono, como se observa en la figura 3.2 (a), se requiere obtener la depresión \bar{u}_z en un punto $B(x, y)$ en la superficie. BH_1 , BH_2 , etc.

Son perpendiculares de longitud $h_1, h_2,$ etc. Desde B a los lados del polígono $DE, EF,$ respectivamente.

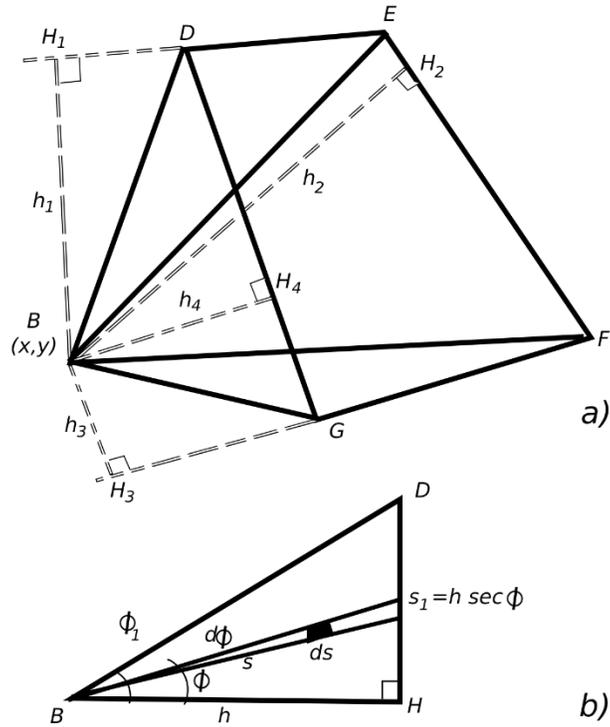


Figura 3.2. Polígono bajo presión uniforme y triángulo rectángulo que se forma.

El polígono que recibe la presión se compone mediante la suma algebraica de ocho triángulos rectángulos:

$$DEFG = (BEH_1 + BEH_2 + BFH_2 + BFH_3) \quad (3.17) \\ - (BDH_1 + BDH_4 + BGH_3 + BGH_4)$$

Por lo que el desplazamiento de B debido a la presión uniformemente distribuida en cada triángulo es:

$$(\bar{u}_z)_B = \frac{1-\nu^2}{\pi E} p \int_0^{\phi_1} h \sec \phi \, d\phi = \frac{1-\nu^2}{\pi E} p \frac{h}{2} \ln \left(\frac{1+\sin \phi_1}{1-\sin \phi_1} \right) \quad (3.18)$$

El desplazamiento total de B debido a la presión uniforme en el polígono DEFG se puede encontrar combinando los resultados de la ecuación 3.18 de los ocho triángulos rectángulos. La forma de obtener los desplazamientos y los esfuerzos de superficies poligonales bajo una presión uniforme es importante, pues en ello se basan los métodos de simulaciones de mecánica de contacto como elemento de frontera.

3.1.3 Modelo de Greenwood-Williamson

Un modelo distinto, clave en el desarrollo de la mecánica de contacto, es el de Greenwood y Williamson de 1966 [9]. En este modelo, el contacto entre dos superficies rugosas se modela como un problema de contacto entre una superficie rígida plana y un sólido elástico con superficie aleatoria rugosa que se compone de un conjunto de asperezas esféricas con el mismo radio de curvatura a (fig. 3.3). Según Barber [111], estudiar contacto elástico de dos superficies es equivalente a estudiar el contacto de una superficie plana y una superficie que contenga la suma de la rugosidad de ambas superficies. En el modelo de Greenwood-Williamson, una aspereza se define como el pico más alto en una vecindad, tal que no interfiera con el análisis de otra aspereza.

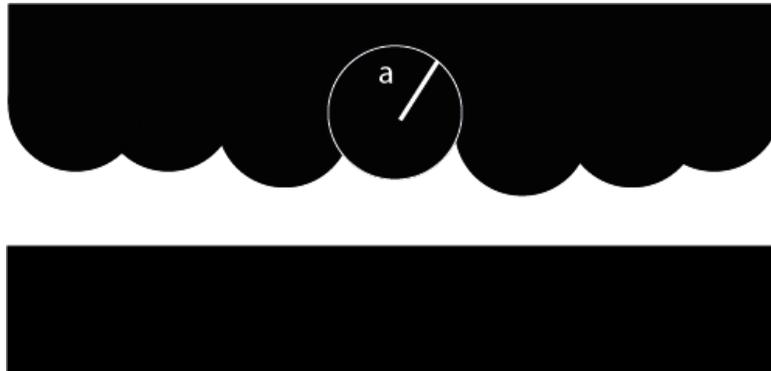


Figura 3.3. Modelo de Greenwood-Williamson: Contacto entre una superficie rugosa compuesta por asperezas esféricas y una superficie rígida plana.

Siendo d la distancia entre ambas superficies, una aspereza con altura z que sea mayor que d entrará en contacto con la superficie plana y la penetración s se obtendrá así:

$$s = z - d \quad (3.19)$$

Entonces, la probabilidad de que una aspereza de altura z entre en contacto con la superficie plana es:

$$prob(z > d) = \int_d^{\infty} p(z) dz \quad (3.20)$$

Si N es el número de asperezas en la superficie, la cantidad de puntos de contacto n será:

$$n = N \int_d^{\infty} p(z) dz \quad (3.21)$$

El área de contacto de cada aspereza es:

$$A_n = \pi a s \quad (3.22)$$

Y el área de contacto real se obtiene así:

$$A = \pi n a \int_d^\infty (z - d) p(z) dz \quad (3.23)$$

Despejando F de ecuación 3.5 de la teoría de contacto de Hertz es posible obtener una expresión para la carga normal [112]:

$$F = \frac{4}{3} n E^* a^{\frac{1}{2}} \int_d^\infty (z - d)^{\frac{3}{2}} p(z) dz \quad (3.24)$$

3.1.4 Teoría de Bush, Gibson y Thomas

Bush, Gibson y Thomas [18] desarrollaron en 1975 una teoría de mecánica de contacto donde las asperezas son modeladas como paraboloides con dos diferentes radios de curvatura, y que la rugosidad se asume en varias escalas. Esto resulta en un área de contacto real proporcional a la fuerza de contacto mientras el área de contacto verdadera A sea mucho menor al área de contacto nominal A_0 . Así, el área de contacto verdadera, (en pequeñas cargas) es proporcional a la carga sólo cuando la rugosidad se encuentra definida en diferentes escalas y el tamaño promedio de las aperezas a , es independiente de la carga aplicada [7]. La proporción entre área de contacto real y la carga es definida como:

$$A = \alpha F \quad (3.25)$$

Donde:

$$\alpha = \kappa \frac{1-\nu^2}{E} \left(\int d^2 q q^2 C(q) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

Siendo q el vector de onda, $C(q)$ su ley de potencia, y κ :

$$\kappa = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

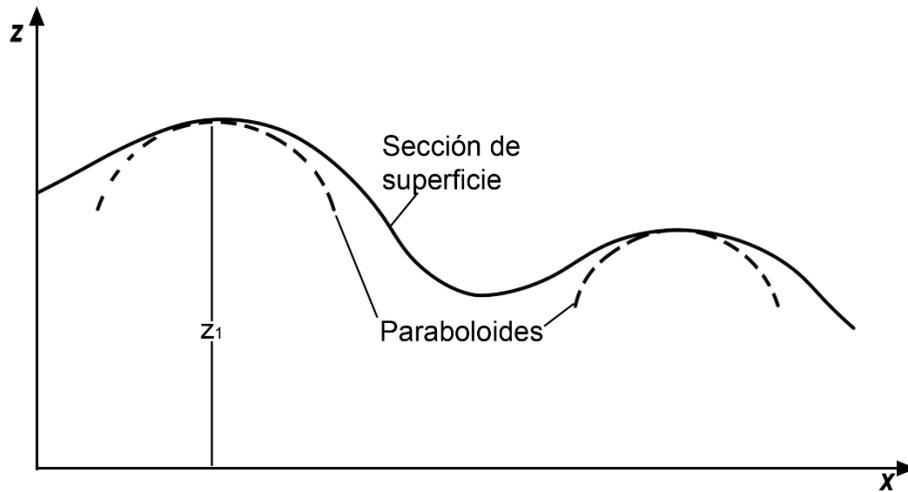


Figura 3.4. Sección de superficie generada por la teoría de Bush, Gibson y Thomas [18]. Nótese que el modelo toma en cuenta el plano X-Y, por lo que hay dos curvaturas principales en cada aspereza.

3.1.5 Teoría de Persson

Persson presentó en 2001 una teoría para la mecánica de contacto basado en el estudio de procesos estocásticos fractales [19]. En ella, se quita la restricción de que el área real de contacto tenga que ser mucho más pequeña que el área nominal de contacto. Esto se justifica porque la teoría originalmente se desarrolló para el contacto de neumáticos sobre una superficie de asfalto. La alta deformabilidad de los elastómeros permite la generación de un contacto casi completo bajo ciertas restricciones sobre la geometría de la superficie rugosa. Esto permite incluir inicialmente todas las escalas involucradas en la descripción de la rugosidad del análisis.

Definiendo $A(\zeta)$ como el área real de contacto a la escala $\lambda = L/\zeta$, se estudia la función $P(\zeta) = A(\zeta)/A_0$. Se requiere el espectro de potencia de la superficie rugosa $C(q)$ y las propiedades elásticas de los cuerpos en contacto E y ν . $P(\sigma, \zeta)$ es la distribución de esfuerzos en las áreas de contacto bajo la magnificación ζ , que satisface la ecuación:

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \quad (3.28)$$

Donde $f(\zeta) = G'(\zeta)\sigma_0^2$ y $\sigma_0 = F/A_0$, siendo la presión nominal en el área de contacto nominal. Cuando un problema está considerado a la magnificación ζ , se asume que

sólo se consideran longitudes de ondas iguales o superiores que L/ζ , por lo que fijan un tope bajo en las longitudes de ondas. La función $G(\zeta)$ se define como:

$$G(\zeta) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{E^*}{\sigma_0} \right)^2 \int_{qL}^{\zeta qL} dq q^3 C(q) \quad (3.29)$$

Con $E^* = E/(1 - \nu_1^2)$. La ecuación 3.28 es una ecuación de difusión en el que el tiempo se reemplaza por la magnificación ζ , las coordenadas espaciales con el esfuerzo σ y la “constante de difusión” $f(\zeta)$ depende de ζ . En la magnificación más pequeña $\zeta = 1$ no se observará rugosidad, por lo que aparentemente los dos cuerpos realizarían contacto total en el área nominal. En este caso, la distribución de esfuerzos sería una función delta de la forma $P(\sigma, 1) = \delta(\sigma - \sigma_0)$ (figura 3.5 a). Al aumentar la magnificación, se introducen superficies rugosas con la longitud de onda $\lambda = L/\zeta$, obteniendo regiones donde no existe contacto entre las montañas existentes. Dado que el esfuerzo eventualmente llegará a cero en la frontera entre las regiones de contacto y no contacto, la distribución de esfuerzos tendrá un comportamiento en el que se reduce hasta cero (figura 3.5 b). Al aumentar la magnificación, la distribución de esfuerzos se ensancha como en un problema de difusión (figura 3.5 c). Este comportamiento se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$P(\sigma, \zeta) = \frac{1}{A_0} \int_A d^2x \delta(\sigma - \sigma(x, \zeta)) \quad (3.30)$$

Con $\sigma(x, \zeta)$ siendo el esfuerzo en la superficie cuando sólo se consideran componentes con vector de onda $q < \zeta qL$. Con la distribución de esfuerzos, es posible obtener directamente el área de contacto real proyectada en el plano x-y. Con la ecuación 3.30 se obtiene:

$$P(\zeta) = \frac{A(\zeta)}{A_0} \int d\sigma P(\sigma, \zeta) \quad (3.31)$$

La ecuación 3.30 satisface a 3.28 cuando existe contacto completo. Con las condiciones de frontera adecuadas, y asumiendo que 3.28 se mantiene válida cuando sólo existe contacto parcial, el área de contacto puede ser obtenida de 3.28:

$$\frac{A(\zeta)}{A_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{G}} dx e^{-x^2/4} = \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{G} \right) \quad (3.32)$$

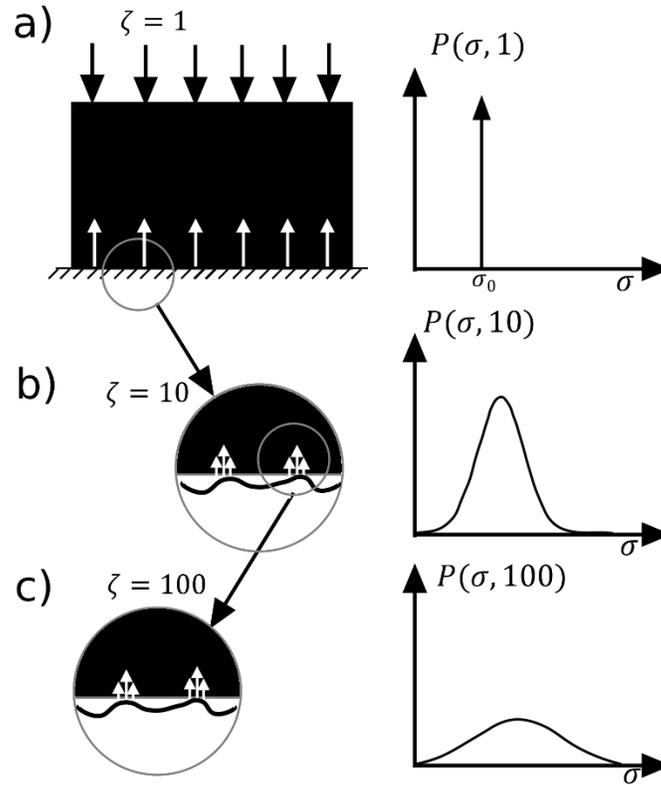


Figura 3.5. Distribución de esfuerzos en la región de contacto en la teoría de Persson con una magnificación de ζ . En la magnificación más baja, el sustrato se observa sin rugosidad y el contacto aparente es total. Al aumentar la magnificación, el área de contacto decrece, mientras que la distribución de esfuerzos se vuelve más ancha.

Incrementar la magnificación introduce longitudes de ondas más pequeñas en la rugosidad, por lo que el área real de contacto disminuye. Si no existiera un límite inferior como lo es la dimensión atómica, el área de contacto real desaparecería [113]. La teoría de Persson es flexible, por lo que la adhesión [114] y la plasticidad pueden incluirse de manera aproximada. Si la presión local de una región en magnificaciones grandes es lo suficientemente alta, el material puede deformarse plásticamente. En este caso, el área real de contacto se determina mediante el esfuerzo de fluencia de los sólidos.

3.2 Simulaciones de mecánica de contacto

En esta sección se introducen herramientas que se utilizan para estudiar la mecánica de contacto de manera numérica. Existen métodos de mecánica de medios continuos como el método de elemento de frontera (Boundary Element

Method, BEM) y método de elemento finito (Finite Element Method, FEM), métodos de dinámica molecular, modelos multiescala, entre otros.

3.2.1 Métodos de elemento de frontera

El método de elemento de frontera es un método numérico que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales parciales (Partial Differential Equations, PDE) lineales a través de la integral de la función de Green asociada a la PDE. El método utiliza condiciones de frontera para introducir los valores de la frontera en una integral, al obtener esos valores, la integral puede ser usada para calcular la solución en cualquier punto dentro del dominio.

El método de elemento de frontera realiza aproximaciones en la superficie del dominio del problema, por lo que no requiere mallas interiores. Esta reducción de dimensiones es la principal ventaja del método, comparado con el FEM. En el caso de que el dominio se extiende a infinito como en problemas sísmicos o en un semi espacio elástico, esta ventaja es determinante, pues la ecuación que rige el dominio infinito se reduce a una integral sobre la frontera del dominio [115].

Este método tiene algunas ventajas sobre otros métodos: requiere ser discretizado sólo en la frontera; en problemas donde la información relevante se obtiene de los valores de la frontera, ésta se obtiene directamente de la ecuación de frontera; mientras que en problemas donde se requiere información del interior, ésta se calcula de forma precisa.

En contraparte, BEM presenta algunas dificultades: se requiere conocimiento explícito de la solución de la ecuación (función de Green). En teoría, BEM sólo funciona para problemas lineales, ya que la integración de la función de Green es una aplicación del principio de superposición. Adecuaciones numéricas para sortear estos inconvenientes existen, pero problemas no lineales y no homogéneos son menos accesibles al método [116].

Las soluciones del método se dan con el supuesto que el sólido se puede considerar en la superficie como un semi espacio, por lo que su utilidad cubre un campo más limitado, enfocado a problemas en intercaras, caso contrario de elemento finito, que es un método numérico mucho más versátil [117]. En problemas de mecánica de contacto, el primero que aplicó BEM fue Anderson et al. [118]. En estos problemas, se utiliza una solución que relaciona desplazamiento vertical con la presión mediante una combinación de curvas armónicas en dos direcciones ortogonales como una versión de un espectro de potencia.

El método de elemento de frontera se ha hecho cada vez más útil para la resolución de problemas de contacto. En 2012, Putignano et al. [119] desarrollaron un método

en el que utilizan elemento de frontera, para estudiar el contacto elástico sin adhesión entre superficies con una malla de elementos cuadrados, donde se discretiza mediante una malla “inteligente”, que es muy fina en la frontera de la zona de contacto y los elementos son más grandes al alejarse de la frontera, lo que reduce la cantidad de elementos y con ello, el tiempo de trabajo computacional.

El método de elemento de frontera se ha utilizado de manera extensa en la mecánica de contacto y problemas de adhesión. Pohrt y Popov [120] [121] calculan la resistencia a la deformación en superficies elásticas aleatorias rugosas variando la dimensión fractal y utilizando cuerpos rectangulares y esféricos. Pohrt y Li [122], utilizan una convolución basada en transformadas rápidas de Fourier para reducir la complejidad de los problemas, lo que mejora la utilidad del método de elemento de frontera en mecánica de contacto, y permite estudiar el fenómeno de lubricación en simulaciones.

Yastrebov et al. [77] realizaron un estudio estadístico en superficies rugosas autoafines en contacto elástico y sin adhesión con el objetivo de observar la evolución del contacto real al aumentar la presión hasta un contacto completo, lo que permite comparar resultados obtenidos en elemento de frontera con modelos basados en asperezas (a valores bajos de presión), y del modelo de Persson (en valores de presión más altos). Se estudia el efecto del ancho del espectro de la superficie rugosa. Para generar una superficie periódica gaussiana, la longitud de onda más corta debe ser significativamente más pequeña que el periodo en la superficie. Se confirma que la evolución del área de contacto es no lineal. Los mismos autores muestran el efecto del exponente de Hurst y el ancho del espectro de la superficie en el área de contacto verdadera [75]. El efecto es más notorio cuando el espectro de la superficie contiene una mayor variedad de longitudes de onda.

Se han realizado también estudios mediante BEM de contacto adhesivo entre una esfera elástica [123] y un cilindro elástico [124] con un semi espacio rígido. La desventaja del método es que se limita a fenómenos lineales, por lo que no se ha explorado la parte plástica del contacto mecánico.

Para evaluar el contacto se aplica la siguiente metodología: primero se da un desplazamiento de la superficie, después, se estima el área de contacto con la intersección entre el semi espacio elástico y la superficie rígida, se calculan los desplazamientos en el área de contacto y la distribución de esfuerzos, para después calcular los desplazamientos fuera del área de contacto (figura 3.6). Finalmente, se actualiza en contacto eliminando elementos con presión negativa y agregando donde existe penetración. El método permite obtener área de contacto, distribución de esfuerzos, deformación elástica y penetración de una superficie periódica fractal autoafín en contacto con un semi espacio elástico lineal.

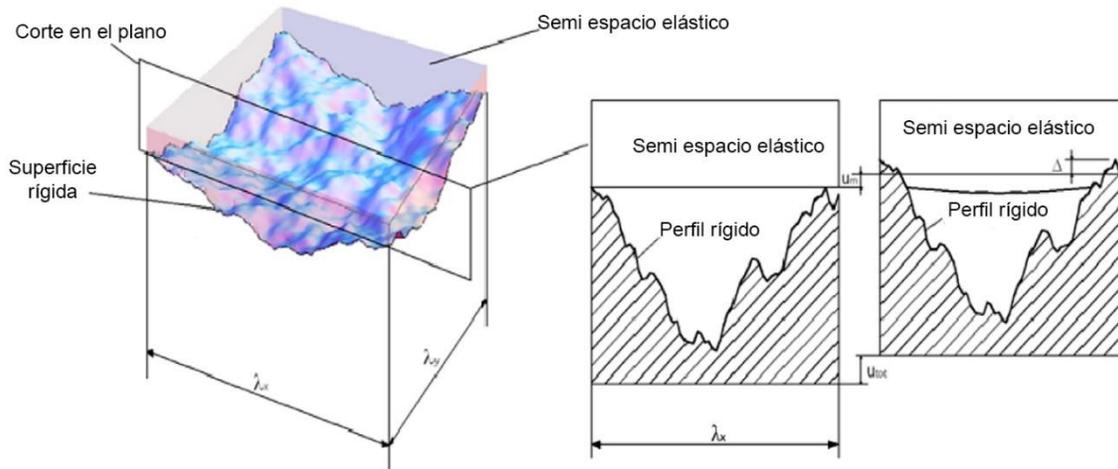


Figura 3.6. Semi espacio elástico en contacto con una superficie rígida con desplazamiento vertical [119].

3.2.2 Métodos de elemento finito

El concepto de elemento finito fue utilizado inicialmente por Clough en 1960 [125]. Sin embargo, desde 1956, la aplicación de elementos finitos se había presentado en análisis de estructuras de avión, en una publicación clave en el desarrollo del método [126]. El método de elemento finito es una técnica computacional utilizada para obtener soluciones aproximadas de problemas de valor de frontera en ingeniería [127]. El continuo se discretiza en un número finito de elementos y se estiman las características del dominio igualando los desplazamientos nodales de los elementos vecinos. El método de elemento finito se ha implementado en la resolución de una amplia variedad de problemas en ciencia aplicada e ingeniería y ha crecido rápidamente en los últimos veinte años.

La aplicación de elemento finito a problemas de mecánica de contacto se realiza mediante la discretización de volúmenes de cuerpos en contacto y una serie de algoritmos avanzados y precisos para la interacción en el contacto. Las ventajas que ofrece el método se balancean con el requerimiento de un equipo más poderoso y más tiempo de cálculo que elemento de frontera [117]. FEM permite la obtención simulaciones en donde se relaciona esfuerzo y deformación de materiales, tanto elásticos lineales como comportamientos complejos no lineales, como es el estudio de la plasticidad.

Entre los primeros que investigaron este método para problemas de contacto rugoso entre superficies aleatorias se encuentran a Hyun et al. [128], quienes estudiaron el contacto elástico entre una superficie rugosa autoafín y un sólido rígido. Se utiliza

una malla que es fina en la superficie y gruesa en zonas donde no existe contacto. Para realizar el contacto, se aplica una fuerza a cada uno de los nodos de la frontera superior del cuerpo modelado y se incrementa gradualmente. Se obtiene que el área de contacto verdadera incrementa linealmente con la carga en rangos bajos de esta.

El mismo grupo de trabajo [129], realizó una simulación de contacto entre un plano rígido y un sólido elastoplástico con superficie fractal autoafín. La plasticidad produce cambios cualitativos en la distribución de la presión local en la zona de contacto, es más probable encontrar largas zonas de contacto conectadas. Se encuentra que el trabajo plástico total es casi constante para materiales con esfuerzos de cedencia distintos.

Yastrebov et al. [130] introducen un modelo reducido que utiliza una serie de respuestas calibradas en FEM para una sola aspereza y relaciones respecto a la interacción entre asperezas, que predice las curvas de carga contra desplazamiento, el área de contacto real y el volumen libre entre una superficie con propiedades elastoplásticas y un plano rígido en contacto en segundos. Este modelo utiliza respuestas calibradas del modelo de elemento finito de una aspereza simple y reglas de interacción aspereza-aspereza.

Song et al. [131] estudian el contacto entre una placa rígida y una superficie elastoplástica rugosa mediante el análisis de plasticidad del gradiente de deformación (SGP, Strain gradient plasticity). Se muestra que la plasticidad reduce la presión de contacto en magnitud y en rango de distribución. Los resultados obtenidos se encuentran en el rango entre las predicciones de materiales elásticos puros y de la plasticidad isotrópica.

En el mismo estudio, se realiza el aplanamiento de una aspereza sinusoidal simple para observar la diferencia entre plasticidad sensible al gradiente de deformación y la plasticidad isotrópica (J_2). El gradiente de deformación inducido en SGP al aplanar la aspereza aumenta el esfuerzo por lo que la presión de contacto es mayor que en J_2 . El punto más alto de presión en SGP es siempre en el borde de contacto, mientras que en J_2 cambia entre el centro y el borde al aumentar la carga.

La presión de contacto de asperezas es dependiente del tamaño debajo de los diez micrones, donde entre más pequeñas las asperezas, son más duras. En Song et al. [132], la interacción de asperezas se toma en cuenta mediante deformación del sustrato, mientras que un modelo de plasticidad dependiente del tamaño se toma en cuenta para asperezas individuales. Para esto, se utiliza un modelo estadístico de contacto rugoso. El modelo estadístico sobreestima la presión de contacto en superficies más rugosas.

Gao et al. [133] ejecutan un análisis del contacto entre un indentador rígido esférico y una superficie rugosa con parámetros elastoplásticos, considerando las etapas de carga y descarga. Se obtienen variables como la carga del indentador, desplazamiento, área de contacto y presión de contacto media para carga y

descarga del indentador. La presión de contacto media que se obtiene depende de las propiedades del material y se encuentra una proporcionalidad entre la energía disipada plásticamente y el trabajo realizado durante la carga.

El trabajo de Kucharski et al. [134] exploran el deslizamiento en presencia de compresión normal mediante experimentación y un modelo FEM basado en Greenwood Williamson donde se utiliza un conjunto de asperezas esféricas que se deforman de forma independiente. Para ello, se modela una semiesfera y se aplica el deslizamiento y la compresión normal en su superficie. Al agregar el deslizamiento, se obtiene el mismo resultado que sólo con compresión normal aplicando una carga siete veces menor que con la carga combinada, por lo que facilita el aplanamiento de la superficie rugosa. Este efecto es dependiente del coeficiente de fricción. Finalmente, existen trabajos donde se utiliza FEM para analizar el contacto de superficies rugosas en presencia de un fluido [135].

3.2.3 Dinámica molecular

El método de dinámica molecular (Molecular dynamics, MD), se creó inicialmente para estudiar la interacción entre esferas que representan átomos, y después se expandió para distintos campos de investigación en fenómenos físicos, químicos y mecánicos. El método de dinámica molecular calcula la cinética de átomos mediante la resolución de ecuaciones newtonianas de movimiento basadas en la interacción (potencial interatómica) entre partículas.

Se utiliza para estudiar el desgaste a alta velocidad, lo que sitúa el problema en distancia y escala de tiempo de la dinámica molecular [75], en el fenómeno de mezcla mecánica entre dos superficies en contacto [136] [137] [138], en materiales con distinto régimen de desgaste, en deformación plástica y en general en fenómenos tribológicos como fricción, desgaste y adhesión. La principal desventaja del método es la cantidad de átomos que se requieren para crear simulaciones con tamaños realistas y sobre lapsos de tiempo que son relevantes en la ciencia de las ingenierías, por lo que el alto costo computacional asociado es la limitación principal del método.

Campañá y Müser [139] generaron un modelo de dinámica molecular basado en la función de Green para simular sólidos elásticos semi infinitos donde se generan interacciones elásticas de átomos en la superficie. El modelo GFMD (Green's function molecular dynamics) se aplica a varios modelos de contacto como el contacto de Hertz sin adhesión y al contacto de superficies planas elásticas. Un estudio muy extenso analizó una superficie con 65536×65536 puntos individuales [140] como referencia para la comparación con otros métodos de modelado [141].

En Yang et al. [142] se realiza un estudio de dinámica molecular del contacto entre un sólido rígido con una superficie rugosa aleatoria y un bloque elástico con una superficie plana. En cargas pequeñas, el área de contacto varía linealmente con la carga y la distancia interfacial depende logarítmicamente de la carga. Para cargas elevadas, el área de contacto se acerca al área de contacto nominal y la distancia interfacial tiende a cero.

3.2.4 Modelos multiescala

Se refiere a la técnica en donde se utilizan dos o más modelos relacionados a distintas escalas para la resolución de un problema. En este tipo de modelos, el detalle más complicado a tratar es la región de transición entre los dos modelos que se unen. Para ello, se realiza una aproximación en esa zona. El objetivo en esta zona se limita a una buena transmisión de datos entre modelos [143]. Los métodos más novedosos consideran un área donde ambos modelos son válidos simultáneamente, por lo que la transición se controla evitando errores en los datos que se obtienen.

Ejemplos de este método se han presentado por Anciaux et al. [143] [144]. En ellos, se aborda un modelo multiescala para problemas de contacto normal elástico, compuesto de paquetería de dinámica molecular, que es utilizado para abordar las interacciones entre nanoasperezas en la superficie libre, acoplado a un modelo de elemento finito que explora el contacto de una superficie rugosa con un cuerpo rígido. Los átomos se utilizan para capturar con gran detalle las fuerzas de contacto, mientras que el elemento finito se utiliza para representar las fuerzas elásticas alejadas de la zona de contacto.

Acoplar estos dos métodos reduce el tiempo computacional al reducir la cantidad de átomos en la simulación mediante el dominio continuo que describa la parte elástica del sistema completo. El método encuentra problemas en la interacción de dislocaciones y planos de deslizamiento con la zona de transición, por lo que sería deseable minimizarlas para evitar imprecisiones en los cálculos.

En el segundo artículo de Anciaux et al. [144], se realiza una modificación al esquema, utilizando dos zonas de transición para agregar temperatura a la simulación. En la zona cercana a la superficie, los nodos de la malla se guían por el desplazamiento atómico promedio, mientras que, en la zona cercana a los elementos finitos, los desplazamientos se interpolan de la malla, para dar la condición de frontera a la zona de la superficie. Se observa que entre mayor la temperatura en el sistema, más se modifica la topología, perdiendo la estabilidad de la superficie. Se detectan dos tipos de eventos plásticos en la simulación,

correspondiendo al movimiento de dislocaciones y el reordenamiento individual de átomos.

3.3 Métodos de generación de superficies

La ingeniería de superficies busca modificar la composición de la región cercana a la superficie, ya sea removiendo material, o agregando capas de material en la superficie, para mejorar las propiedades de la superficie. Las técnicas de recubrimiento de superficies pueden ser clasificadas en físicas, químicas, electroquímicas y térmicas.

En el caso de las técnicas físicas, están la deposición física de vapor, pulverización catódica, recubrimiento iónico, etc. En técnicas químicas se tiene la deposición química de vapor. En electroquímicas, existe el electrodeposición, mientras que la proyección térmica se clasifica como método térmico.

En esta sección, se presenta una breve revisión de las técnicas más comunes que permitan generar superficies con rugosidad aleatoria de manera controlado. Además de ilustrar las áreas de aplicación, tiene como objetivo determinar cuáles son los métodos más adecuados para establecer un protocolo experimental que en un futuro pueda utilizarse para verificar los métodos desarrollados en este trabajo mediante la experimentación. Un punto importante por recordar es que el AFM disponible se pueden medir rugosidades hasta $14\ \mu m$, con una resolución de alturas de $1\ nm$ y una resolución lateral de $1\ nm$. En el perfilómetro óptico, se pueden medir rugosidades hasta $270\ \mu m$ con una resolución de alturas de $9\ nm$, y una resolución lateral de $4\ \mu m$. Estos datos son necesarios para evaluar los métodos de generación de superficie que se podrían usar en un futuro en el grupo de trabajo.

3.3.1 Lapeado

El lapeado es un proceso sencillo y de bajo costo que se realiza en materiales metálicos y cerámicos [145]. Es una técnica donde se frota dos superficies con un abrasivo de grano muy fino entre ambas, para disminuir la rugosidad superficial. La Facultad de Ingeniería cuenta con equipo de lapeado con disco giratorio en los Laboratorios de Ingeniería Mecánica.

Existen dos formas de realizar el lapeado, la primera es mediante abrasivo libre, y la segunda mediante abrasivo fijo [145]. El proceso general se resume con un plato giratorio en donde partículas abrasivas entran en contacto con la pieza de trabajo.

En el lapeado de abrasivo libre, las partículas se encuentran en un fluido, y el movimiento relativo entre el plato, las partículas y la pieza de trabajo provocan la remoción de material (figura 3.7). En el lapeado de abrasivo fijo, en cambio, las partículas están adheridas a un sustrato con película abrasiva y carburo de silicio.

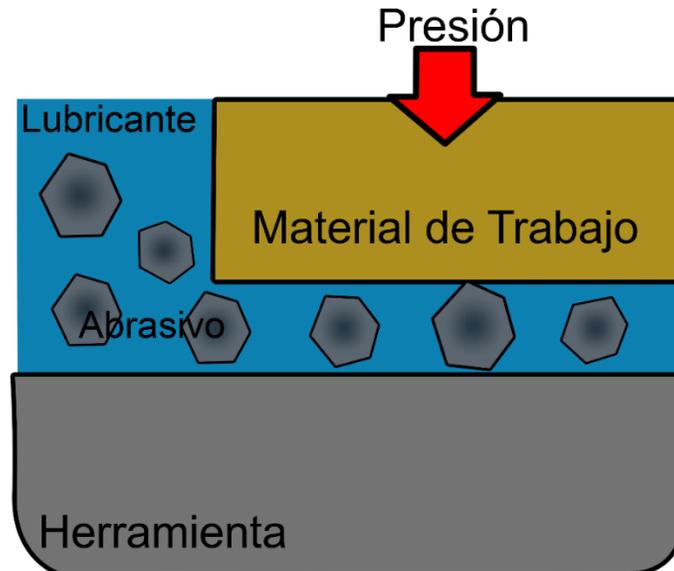


Figura 3.7. Esquema de la técnica de lapeado de abrasivo libre.

Aunque el pulido y el lapeado son muy similares, la gran diferencia está en que en pulido la remoción del material es menor. En general, después de un proceso de lapeado se recomienda realizar pulido [145]. Un proceso de lapeado puede generar rugosidades entre $0.01 \mu m$ y $0.04 \mu m$ [145].

3.3.2 Electropulido

Un proceso electroquímico es una reacción química provocada por corriente eléctrica, en donde existe oxidación-reducción, por lo que se forman iones al ganar o perder electrones. El electropulido es un proceso que se basa en remover material de la superficie de interés mediante una celda eléctrica.

Para ello, la pieza se sumerge en un electrolito, donde la celda se conecta a una fuente eléctrica. El material de trabajo funciona como ánodo, y se coloca un cátodo para cerrar el circuito. Cuando la corriente pasa, se lleva a cabo la reacción de oxidación-reducción, que provoca que los iones vayan del ánodo al cátodo, lo que resulta en la modificación de la superficie de la pieza de trabajo [146]. Este proceso se muestra en la figura 3.8.

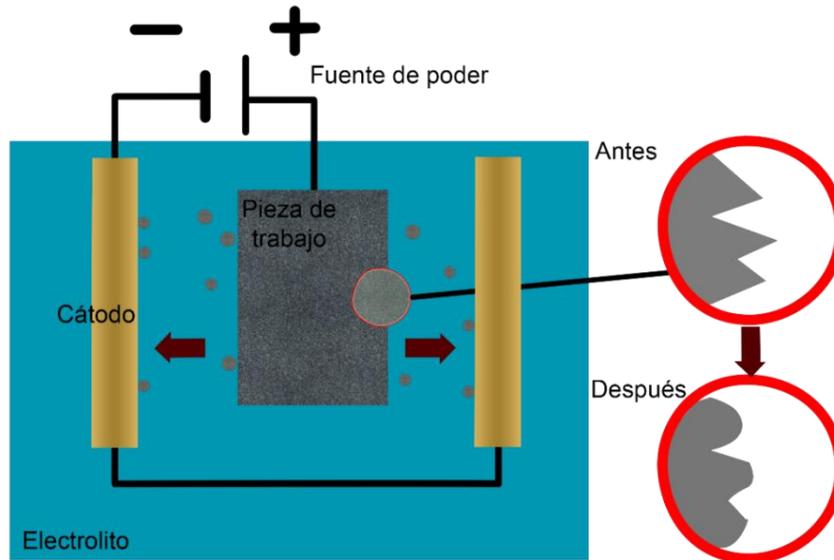


Figura 3.8. Esquema del proceso de electropulido.

El proceso elimina óxidos e incrustaciones en la superficie y da brillo a la superficie. También se utiliza para disminuir la rugosidad de las piezas. Se utiliza en la industria farmacéutica (provoca una menor adhesión de bacterias), médica, en semiconductores, o como preparación a algún proceso como soldadura, entre otras [147].

El método permite lograr rugosidades entre $0.1 \mu m$ y $1 mm$, por lo que la medición es apta para AFM o perfilómetro óptico [147]. Esta técnica se considera con costos bajos y una fácil implementación y es viable realizar en los laboratorios de la Facultad de Ingeniería.

3.3.3 Electrodeposición

El electrodeposición es un proceso en el que se deposita material mediante una reacción de óxido-reducción. El objetivo del electrodeposición es la formación de recubrimientos para dotar a la superficie de propiedades distintas al sustrato. Algunos usos de la electrodeposición son la fabricación de componentes electrónicos, nanomateriales, celdas solares, baterías e industria farmacéutica [148].

Los recubrimientos pueden aumentar la resistencia a la corrosión, agregar propiedades electromagnéticas o aumentar la dureza. El electrodeposición también cambia la apariencia de la superficie, por lo que se utiliza con fines decorativos.

Ejemplos de este proceso son agregar plata en las vajillas para un acabado superficial más atractivo, o el recubrimiento de zinc al acero para evitar la corrosión [145].

Para producir recubrimientos electrolíticos, se utiliza una celda eléctrica donde la pieza de trabajo funciona como cátodo, y se coloca un material de elección como ánodo que cierra el circuito, y un electrolito que favorece la reacción, llamado baño. En la reacción se provoca el movimiento de iones del ánodo al cátodo. El recubrimiento modifica la rugosidad de la superficie [145]. Una representación esquemática del proceso se observa en la figura 3.9.

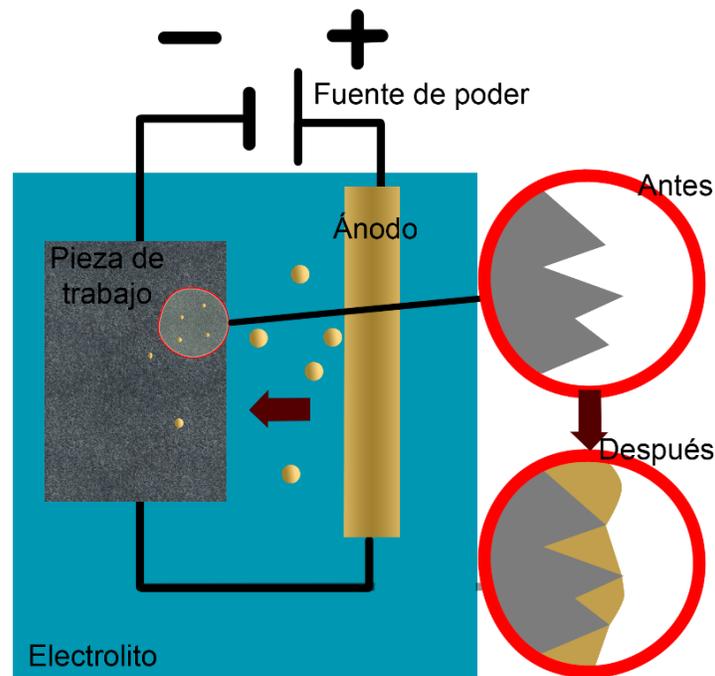


Figura 3.9. Esquema del proceso de electrodeposición.

Algunos factores afectan la rugosidad que se obtiene, como la densidad de corriente, el tipo de baño que se aplica o el área del material que se recubre. Los costos del equipo y de operación son relativamente bajos, y es de fácil implementación en los laboratorios de la Facultad de Ingeniería. Se han reportado rugosidades de $10 \mu m$ a $40 \mu m$ en recubrimientos de cobre [149].

3.3.4 Proyección térmica

La proyección térmica es un proceso en el que se disparan partículas derretidas o parcialmente derretidas a un sustrato sólido para generar un recubrimiento. Las partículas se adhieren penetrando en los poros e irregularidades. En el caso de

materiales metálicos, aumentar la temperatura puede aumentar también la cantidad de óxido en el recubrimiento [145]. En la figura 3.10 se observa cómo se lleva a cabo la proyección térmica.

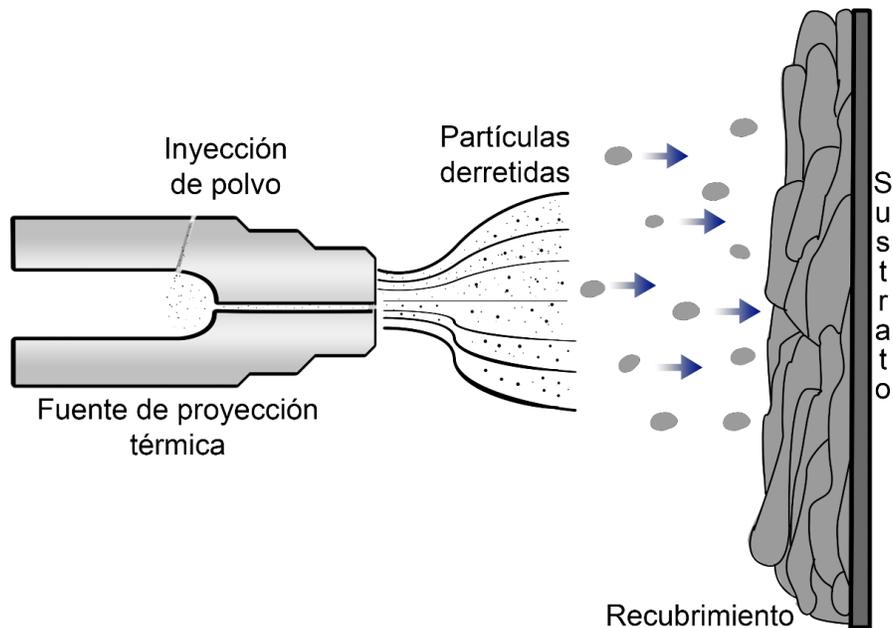


Fig. 3.10. Proceso de proyección térmica.

Dependiendo de cómo se lleva a cabo la proyección de las partículas, la proyección térmica se puede clasificar en proyección por flama, por arco eléctrico, por plasma o cinético. Existe también la proyección fría donde el recubrimiento no está fundido, sino la energía se obtiene del movimiento de las partículas, y al contacto con el sustrato existe deformación, al mismo tiempo que adhesión.

El proceso de proyección térmica tiene varios puntos a su favor: permite recubrir una gran variedad de materiales, no genera distorsión en el sustrato y no existe un límite en el ancho del sustrato. La técnica es amigable con el medio ambiente y se puede aplicar en zonas que se han dañado [145].

El proceso permite modificar variables para obtener un resultado distinto como cambiar la distancia entre la pistola y el material a recubrir, la velocidad relativa entre ambos, y el ángulo en que se dirige el disparo de la pistola con respecto a la superficie. Variando el ángulo de incidencia del chorro, es posible obtener rugosidades entre $10 \mu m$ y $70 \mu m$ [150]. Para esta técnica, no se requiere de gran experiencia, el costo es medio, y la Facultad de Ingeniería cuenta con el equipo para la generación de estos recubrimientos.

3.3.5 Granallado láser

El granallado láser es una técnica de generación de superficie basada en láser que se usa para dar tratamiento a materiales metálicos con el fin de mejorar su resistencia a la corrosión, desgaste y fatiga [151]. Estas propiedades mejoradas se atribuyen a los esfuerzos residuales y al endurecimiento de la capa superficial que resultan del láser [152]. Permite procesar componentes con geometría compleja, por lo que es usado de forma extensa en la industria.

El granallado láser tiene una desventaja importante, y es que los esfuerzos residuales compresivos, así como las capas de endurecimiento en frío tienden a relajarse mediante carga térmica o procesos térmicos [153].

El método se realiza de la siguiente manera: se coloca un recubrimiento ablativo sobre la superficie a trabajar para absorber el calor generado por el láser, promover la difusión de ondas y proteger el material, y se sumerge el material a trabajar en un medio de confinamiento, que puede ser agua o aceite. Después, se incide el láser sobre la superficie, evaporando el recubrimiento y generando plasma, que se mantiene en la superficie del material por el medio de confinamiento. Los rayos láser impactan la superficie y generan ondas de choque que se difunden, fomentando la deformación plástica del material y generando esfuerzos residuales de compresión [154].

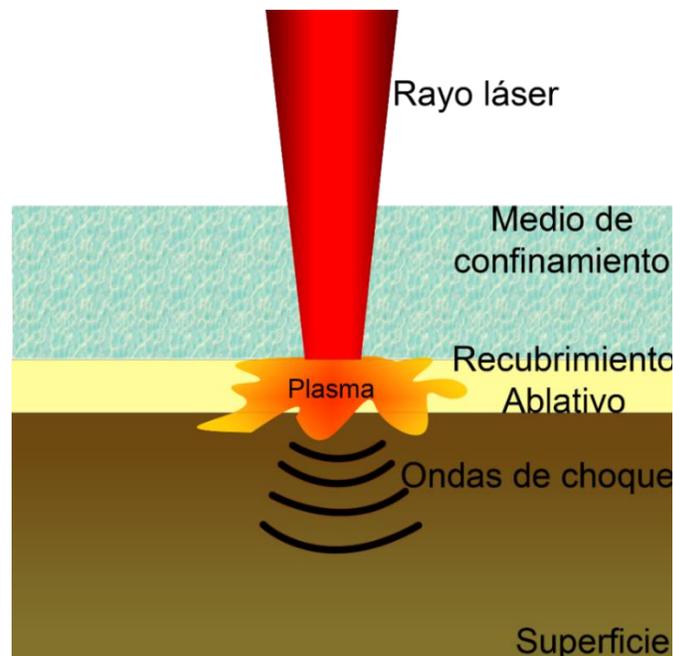


Figura 3.11. Proceso de granallado láser en caliente.

Existe una variación en el granallado láser que consiste en calentar la pieza al iniciar el proceso. Mediante este proceso se logran rugosidades de $1\ \mu m$, mientras que mediante granallado láser en frío se obtienen rugosidades cercanas a $6\ \mu m$ [131]. El granallado láser es una técnica de alto costo debido al equipo e insumos necesarios. Se requiere un amplio conocimiento técnico para obtener resultados favorables.

3.3.6 Depósito químico y físico de vapor

El depósito físico de vapor (Physical Vapor Deposition, PVD), es un proceso de recubrimiento en el que se deposita material evaporado en la superficie de un material.

El proceso se realiza de la siguiente manera: se dispara un rayo láser en una cámara de vacío a un ángulo en particular hacia un disco que contiene el material que servirá de recubrimiento, provocando una rápida evaporación. Mediante un acomodo adecuado del láser, el recubrimiento y el sustrato, los vapores se distribuyen rápidamente en la superficie del material. El vapor se condensa y se deposita en el material, el recubrimiento se adhiere, formando una capa delgada. La estructura que toma depende tanto del sustrato como del material evaporado. El sustrato debe ser calentado para facilitar la adhesión [145]. Se suele usar un gas inerte como medio dentro de la cámara de vacío para facilitar la transmisión del material evaporado. El proceso se observa en la figura 3.12.

La obtención del vapor puede ser mediante otros procesos como puede ser evaporación térmica, sublimación mediante corriente continua o pulverización catódica, donde las partículas del material depositado se obtienen mediante el bombardeo de iones de gases inertes a la superficie, como argón, nitrógeno u oxígeno.

Este método permite el depósito de materiales complejos; la presión en la cámara, la orientación del material y la distancia entre sustrato y el material son parámetros que se pueden ajustar fácilmente. Se pueden realizar materiales con varias capas de recubrimiento, y es fácil de reproducir [145]. El costo del equipo en industria es muy elevado porque se requiere una cámara de vacío grande para que sea rentable.

El proceso de depósito químico de vapor (Chemical Vapor Deposition, CVD), es similar al PVD. En lugar de utilizar material sólido para el recubrimiento, se aplica un gas específico. El láser se aplica para descomponer las partículas de gas y aumentar la temperatura del sustrato donde se va a depositar el material. Esta técnica permite un depósito localizado de capas delgadas a una gran velocidad. Las

reacciones térmicas pueden ser activadas mediante temperatura, presión, plasma, con rayos UV, u otros procesos [145]. El costo del equipo es moderado, aunque los gases requeridos son caros [155].

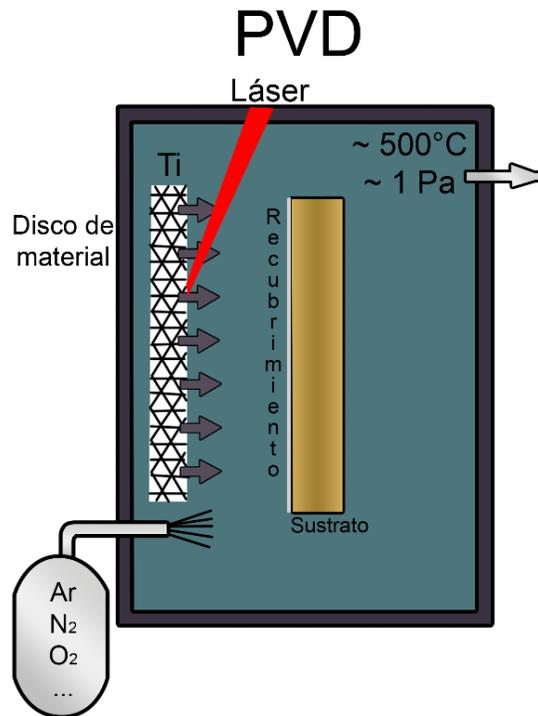


Figura 3.12. Proceso de depósito físico de vapor.

Un estudio de rugosidad realizado en recubrimientos de nitruro de titanio en piezas de acero de herramientas mediante deposición física de vapor, arrojó rugosidades entre $0.5 \mu m$ y $4.5 \mu m$ [156]. En cambio, resultados en estudios de rugosidad para herramientas sinterizadas con recubrimiento mediante deposición química de vapor, arrojaron valores de $0.13 \mu m$ hasta $0.82 \mu m$ [157], utilizando recubrimientos de nitruro de titanio y óxido de aluminio, sobre un sustrato de nitruro de silicio.

3.3.7 Pulverización catódica

La pulverización catódica es un tipo de depósito físico de vapor que se da mediante el bombardeo de iones energéticos hacia una superficie, lo que provoca la expulsión de átomos, iones o algún conjunto de ellos [145].

Existe pulverización catódica química, donde se dan reacciones químicas en la superficie entre la interacción de los iones y el material, resultando en formación de

compuestos, y existe pulverización catódica física, donde los átomos disparados penetran dentro del sólido, lo que provoca colisiones en cadena, que lleva a la expulsión de material [145]. Normalmente al hablar de pulverización catódica se habla específicamente de la física. Esta pulverización se observa en la figura 3.13.

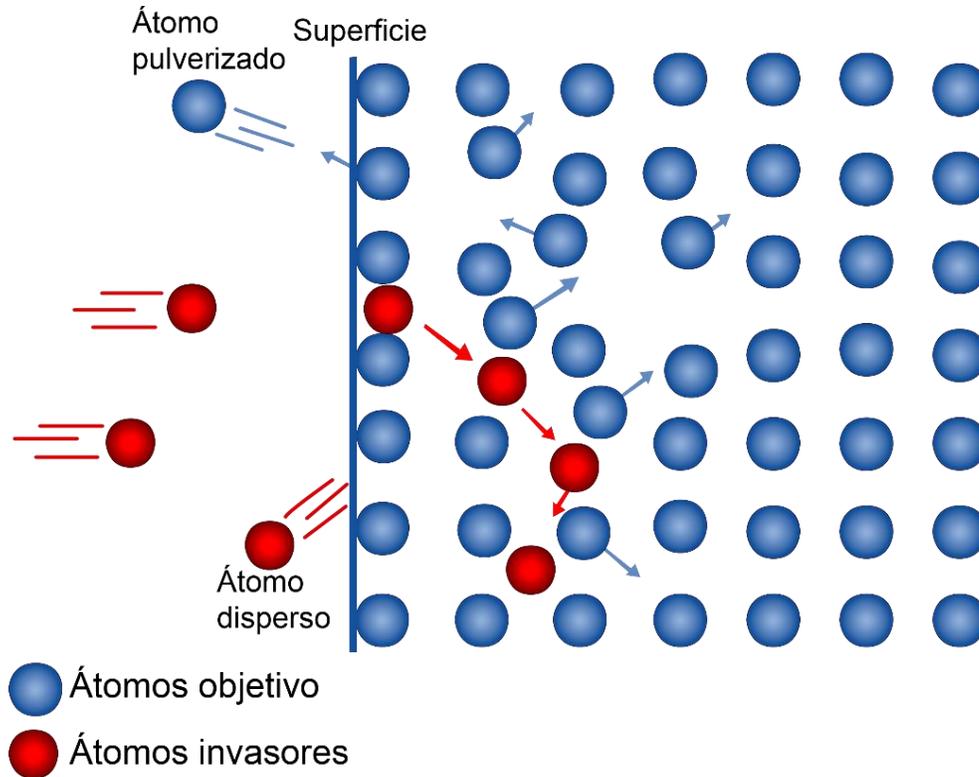


Fig. 3.13. Se observa la interacción atómica en la pulverización catódica física.

Los usos de la pulverización catódica se encuentran en gran medida en aplicaciones decorativas como en recubrimientos para carcasas de relojes o celulares, productos náuticos, armas, instrumentos musicales y joyería [145]. Se utiliza también en herramientas de corte, como taladros, o cuchillos, con el objetivo de prolongar la vida de la herramienta antes de que se pierda el filo, y en recubrimientos térmicos para ventanas.

La pulverización catódica es una técnica costosa y se requiere tener un conocimiento avanzado para realizar los recubrimientos. Se cuenta con el equipo necesario en el Instituto de Materiales de la UNAM, y se podría utilizar en colaboración con la Universidad de Gante, en Bélgica. La rugosidad resultante de esta técnica es muy pequeña. Se han reportado recubrimientos que van desde 1 *nm* hasta 30 *nm* [145] [158].

3.3.8 Electroerosión

La electroerosión es un proceso de maquinado que remueve material mediante la evaporación de la pieza de trabajo utilizando descargas eléctricas de alta frecuencia en un espacio entre el electrodo y la pieza de trabajo. Esta técnica permite maquinados muy precisos sin importar la dureza del material, por lo que se usa en creación de dados, moldes y en manufactura aeroespacial [145].

El proceso de remoción de material se realiza con descargas eléctricas pulsantes desde la base de la máquina. La base tiene la forma del negativo de la pieza a maquinar en un material conductor, ya sea cobre o grafito. La corriente eléctrica transita desde esa base. La pieza de trabajo no toca la base, el alto potencial eléctrico generado entre los dos produce un arco eléctrico. Este arco eléctrico localmente transforma la superficie en un plasma, que se condensa en el fluido de trabajo. La circulación del fluido elimina las partículas sólidas de la zona de trabajo [145].

El proceso se observa en la figura 3.14. Se han reportado rugosidades obtenidas desde $0.4 \mu\text{m}$ [145] hasta $5.8 \mu\text{m}$ [159], pero la opacidad que genera en la superficie dificulta su medición en perfilómetro óptico. El costo del proceso es medio, al igual que la dificultad para realizar el proceso. Se cuenta con un equipo en los laboratorios de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

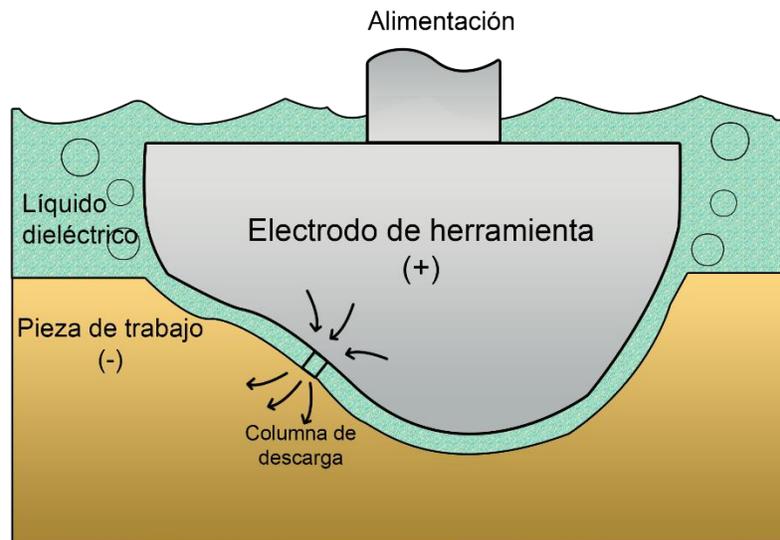


Fig. 3.14. Diagrama del proceso de electroerosión.

3.3.9 Chorro de arena

La técnica de sandblasting o chorro de arena, consiste en la acción de expulsar un abrasivo granulado mediante aire comprimido a través de una boquilla. El objetivo de la técnica puede ser limpiar una superficie, la remoción de óxido, preparación de superficies para agregar recubrimientos, mejora de coeficiente de fricción en carreteras, entre otros [160]. Los beneficios de esta técnica son los costos de mano de obra, que minimiza tiempos de trabajo, reduce tiempos de mantenimiento, consigue una mayor pureza en el material, y se obtiene una mayor adherencia de los recubrimientos.

Los abrasivos más utilizados en chorro de arena son arena de sílica, perla de vidrio, óxido de aluminio, carburo de silicio, y escoria de cobre. Se han obtenido rugosidades entre $3.68 \mu\text{m}$ y $7.14 \mu\text{m}$ en muestras de zirconia 3Y-TZP, variando el ángulo de disparo, la presión y la distancia de trabajo [161]. En otro experimento, se han obtenido rugosidades entre $0.5 \mu\text{m}$ y $3.9 \mu\text{m}$ al variar el tiempo de tratamiento entre 1 y 9 segundos en superficies de cobre de alta pureza [162]. La UNAM cuenta con el equipo en la FES Cuautitlán. El costo del proceso es bajo y es sencillo de realizar.

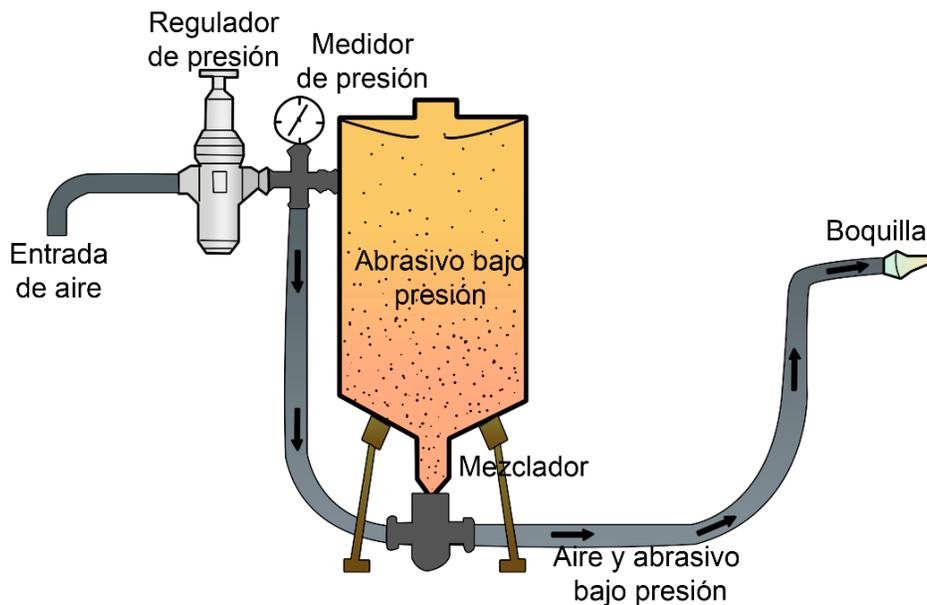


Fig. 3.15. Esquema de la herramienta requerida para la técnica de chorro de arena. Se observa la entrada de aire, la cámara donde se almacena el abrasivo bajo presión, la mezcladora donde se unen ambas sustancias, y la boquilla de donde se expulsa el material [161].

3.3.10 Matriz de decisiones

Parte del objetivo de este trabajo, es sentar las bases para posteriormente comparar las simulaciones con ensayos de contacto en superficies con rugosidad aleatoria controlada. Por ello, es importante implementar una metodología para elegir los métodos más viables para la generación de superficies rugosas en el grupo de trabajo en la Facultad de Ingeniería. El análisis se realiza mediante una matriz de decisiones.

Primero, se definen los parámetros que se utilizan para el análisis.

- Disponibilidad: Se refiere a la facilidad de acceder al uso del equipo. Serán 5 puntos si la UDIATEM cuenta con el equipo, 4 si se encuentra en la Facultad de Ingeniería, 3 si se encuentra en Ciudad Universitaria, 2 si se encuentra en la UNAM, pero fuera de Ciudad Universitaria, y 1 si la UNAM o grupos colaboradores no cuenta con el equipo.
- Caracterización: Se refiere a si se tiene el equipo requerido para medir la rugosidad generada por el método, mediante el AFM o el perfilómetro a los que tiene acceso el grupo de trabajo. Se califica con valor de 5 si se pueden medir las superficies generadas, y con valor de cero en caso de que no sea posible, sea por la rugosidad que generan, o por condiciones de las superficies generadas, como opacidad en el caso de mediciones con el perfilómetro óptico.
- Costo: Es deseable que el costo del proceso sea bajo, para realizar una amplia variedad de superficies. En el costo se incluyen los recursos requeridos para el procedimiento, como pueden ser gases, químicos, metales, así como el costo del equipo. Se califica con 5 si el costo es bajo, 3 si los insumos requeridos aumentan el costo, y 1 si los insumos y el costo del equipo es elevado.
- Dificultad: Se analiza la facilidad para aprender y replicar la generación de superficies. Entre más sencillo el proceso, más alto será el valor.
- Innovación científica: Se refiere a la relevancia del método en la investigación actual y la posibilidad de generar publicaciones de alto impacto. A mayor valor, más oportunidad de realizar una aportación innovadora.
- Relevancia tecnológica: En este rubro, se evalúan los usos que se le da al método en la industria, ya sea que se use para mecanizar, generar recubrimientos o dar un acabado superficial específico. A mayor valor, más relevancia del método en la industria.

Con esto en cuenta, en la tabla 3.1 se presentan los resultados iniciales de la matriz de decisión.

Método	Disponibilidad	Caracterización	Costo	Dificultad	Innovación científica	Relevancia tecnológica
Lapeado	4	5	5	5	1	1
Electropulido	5	5	5	4	2	2
Electrodepósito	5	5	5	4	2	4
Proyección térmica	5	5	3	4	3	4
Granallado láser	1	0	1	1	5	3
Depósito químico/físico de vapor	4	0	1	2	5	5
Pulverización catódica	3	5	1	2	5	5
Electroerosión	5	0	3	3	3	4
Chorro de arena	2	0	5	4	3	2

Tabla 3.1. Matriz de decisiones sin considerar el peso de cada rubro.

A continuación, se le asigna un peso distinto a cada uno de los rubros utilizados en el análisis. Dado que el análisis se piensa para un trabajo doctoral, lo más importante es la innovación científica que pueda aportar la generación de superficies, por lo que se le asigna un valor de 5. En segundo lugar, se posiciona la posibilidad de caracterización con 4, seguido de la utilidad en la industria con 3, lo que podría derivar en otros proyectos.

Dado que la mayoría de los equipos se encuentran con una disponibilidad asequible, el costo y la disponibilidad puntúan 2. Finalmente, la dificultad tiene un valor de 1, debido a que, aunque hay equipos complicados de usar, se busca tener capacitación de parte de los responsables del equipo. Este valor se multiplicará con el valor que se obtuvo en la tabla 3.1. Los resultados se muestran en la tabla 3.2.

Método	Disponibilidad	Caracterización	Costo	Dificultad	Innovación Científica	Relevancia tecnológica	Total
	2	4	2	1	5	3	
Lapeado	8	20	10	5	5	3	51
Electropulido	10	20	10	4	10	6	60
Electrodepósito	10	20	10	4	10	12	66
Proyección térmica	10	20	6	4	15	12	67
Granallado láser	2	0	2	1	25	9	39
Depósito químico/físico de vapor	8	0	2	2	25	15	52
Pulverización catódica	6	20	2	2	25	15	70
Electroerosión	10	0	6	3	15	12	46
Chorro de arena	4	0	10	4	15	6	39

Tabla 3.2. Matriz de decisiones considerando el peso de cada rubro.

La tabla 3.2 indica que el método que puntuó mejor es la pulverización catódica seguida por proyección térmica y el electrodepósito, por lo que estos tres métodos

serían recomendaciones para realizar superficies rugosas para ensayos de contacto. En Galván [163] se realizó un análisis similar, con diferencias en algunos métodos y una ponderación distinta de los distintos rubros. En dicho análisis, el método que puntuó mejor fue electrodeposición. Sin embargo, hay coincidencia en los tres métodos elegidos como opciones recomendadas ordenados de forma distinta.

3.4 Hipótesis

Mediante un análisis de convergencia, se puede demostrar la factibilidad de analizar el contacto entre superficies con rugosidad aleatoria mediante el método de elemento finito, usando recursos computacionales relativamente modestos (estación de trabajo).

La rugosidad entra en los modelos sólo como un factor de escala. De confirmarse esta hipótesis, las simulaciones elásticas de mecánica de contacto, utilizando diferentes rugosidades, sirven para mejorar la información estadística del proceso aleatorio.

La dimensión fractal de la superficie de contacto es distinta de la dimensión fractal de cada superficie que entrará en contacto.

Los modelos de elemento finito permiten un análisis de la transición elastoplástica mucho más fino de lo que se alcanza a través del análisis de un contacto semiesférico. Los índices de plasticidad, utilizados para analizar este fenómeno, se tienen que redefinir.

Bajo la hipótesis estándar de plasticidad continua, las asperezas finas que soportan el primer contacto, inevitablemente se deforman de manera plástica. La redistribución de las cargas debido al crecimiento de la zona de contacto limitará la deformación plástica a cargas mayores.

4. Metodología

4.1 Simulación por elementos finitos

4.1.1 Construcción del modelo

Como punto de partida, se utiliza el modelo desarrollado anteriormente en la tesis de Maya [164]. En este modelo, mediante elementos simples, se construye una columna de elementos que en la superficie contienen una cuadrícula de 9x9. Se define la unidad de longitud en el modelo como el lado de los pequeños elementos de forma cúbica en la superficie. Esta columna se replica y ordena horizontalmente hasta formar una cuadrícula lo más cercana a 256x256 en la superficie. Los elementos utilizados se observan en la figura 4.1.

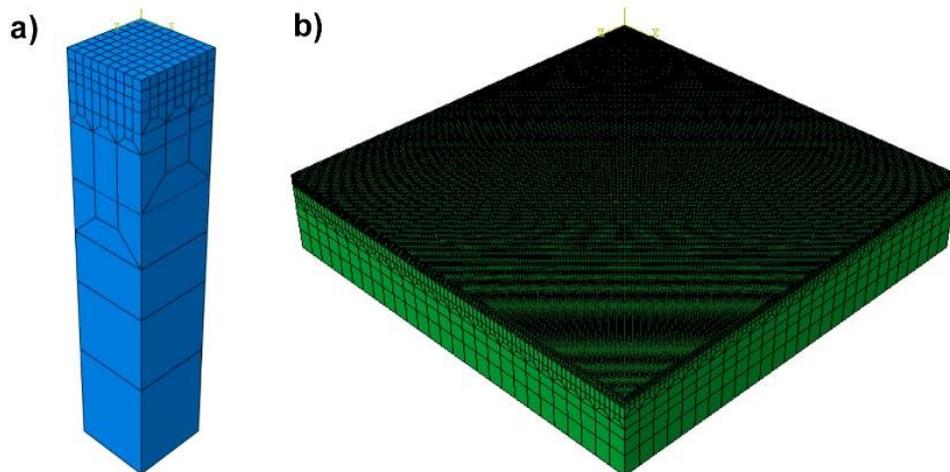


Figura 4.1. a) Celda inicial y b) modelo original sin rugosidad.

El mallado original tiene tres capas de elementos de 1x1 en la superficie, lo que resultó insuficiente para estudiar el campo de esfuerzos por debajo de las asperezas más altas. Se decidió incrementar este número a cinco, mismo que también permitirá generar una superficie con geometría de casquete esférico. Asimismo, se decidió utilizar modelos cuyo número de elementos era exactamente $2^{n_0} + 1$, con n_0 igual a 8, 9 o 10, para coincidir con los métodos de análisis de superficies fractales. El modelo de $n=10$ no fue factible en las estaciones de trabajo disponibles.

El paso inicial es la generación de superficies rugosas aleatorias. Estas superficies son generadas mediante midpoint algorithm, para las superficies planas, y transformada de Fourier para las superficies esféricas. La motivación para esta elección es que, al inicio del proyecto, no se contaba con el algoritmo de transformada de Fourier. La distribución de alturas en las superficies es aproximadamente gaussiana para las superficies planas. La geometría fractal se respeta en ambos métodos. Se utilizan dos tamaños de superficies distintas en la simulación plana elástica, para discernir qué tamaño se usará en las siguientes simulaciones. La longitud de las superficies se calcula mediante $L = 2^{n_0}$, donde se usa $n_0 = 8,9$. En la generación de superficies, se modifican los parámetros de dimensión fractal y rugosidad máxima.

Se generan 648 superficies planas para las simulaciones elásticas, mediante midpoint algorithm, distribuidos de la siguiente manera: dos diferentes tamaños con $n_0 = 8$ y $n_0 = 9$ (siendo 256 y 512 elementos de lado respectivamente), nueve dimensiones fractales, de 2.1 a 2.9, nueve rugosidades máximas, de 0.1 a 0.9, dos diferentes superficies para cada simulación de contacto (cuerpo superior e inferior) y dos juegos de superficies con las mismas características para validación estadística. Cabe indicar que, cada vez que se genere una superficie, la geometría es distinta (aleatoria) pero la distribución de alturas y la dimensión fractal son iguales.

Para las simulaciones elastoplásticas planas, se genera un total de 200 superficies, utilizando $n_0 = 9$, con cinco dimensiones fractales (2.1 a 2.9, con pasos de 0.2), cinco rugosidades máximas (de 0.1 a 0.9, con pasos de 0.2), dos límites de cedencia distintos con relevancia en materiales tribológicos (500 MPa y 1250 MPa) y dos simulaciones de cada una para validación estadística. En el caso de las superficies esféricas, se realizan 18 superficies de 512 elementos de lado, con tres dimensiones fractales (2.1 2.5 y 2.9) y tres rugosidades máximas (0.1, 0.5 y 0.9), dos juegos de cada superficie para validación estadística, todas con el mismo radio de curvatura en la esfera. En este caso en particular, la superficie plana no tiene rugosidad.

La siguiente etapa es la construcción del modelo de contacto elástico en 3D. Para ello, se utiliza el software de elemento finito ABAQUS. Se modelan dos prismas rectangulares con ancho y largo L y altura $h = 69$. Ambos sólidos se colocan con las caras que contienen los cubos de 1x1 encontradas entre sí. El cuerpo inferior en la simulación de contacto es llamado placa esclava y el superior, placa maestra. En ambos sólidos se asignan propiedades elásticas de un acero comercial ($\rho = 7800\text{kg}/\text{m}^3, E = 200\text{GPa}, \nu = 0.29$). Como se mencionó anteriormente, en el caso de las simulaciones elastoplásticas, se agregan dos parámetros más, límite de cedencia de 500 MPa y 1250MPa, sin endurecimiento. Después, se aplica una condición de frontera de desplazamiento vertical cero a la cara inferior de la placa esclava. En la cara superior de la placa maestra, se aplica un desplazamiento

vertical de 6 veces r_{max} , y se suaviza la curva para evitar cambios de velocidades bruscos.

El siguiente paso es el mallado, que es igual en ambos sólidos. Los elementos en la parte inferior son grandes y a medida que se acerca a la parte superior de los sólidos, los elementos son más finos. En la superficie se colocan cinco capas de elementos de 1x1 con un mallado estándar, lineal con elementos hexaedrales. El mallado se observa en la figura 4.2. Se construye el modelo de esta forma, con el objetivo de tener suficientes elementos en la zona de contacto y menos elementos en las regiones donde no sucede contacto y así, reducir el tiempo computacional. En el caso del modelo esférico, se suma a la superficie un casquete esférico, con 0.5 de altura y 512 de ancho.

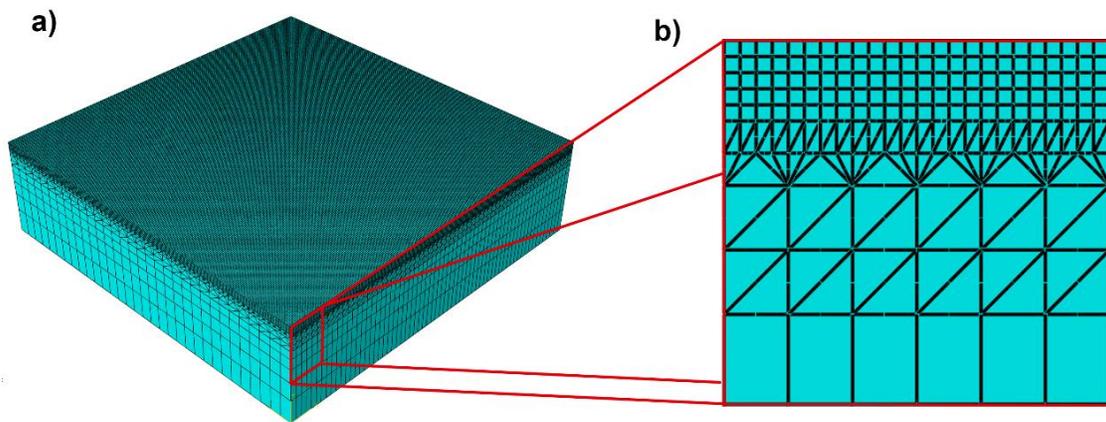


Figura 4.2. Distribución de la malla en el modelo. a) Malla completa. b) Detalle de la superficie de la placa. Se observan las cinco hileras de elementos de 1x1 en la superficie.

Para completar el modelo, se requiere agregar las superficies rugosas creadas previamente al modelo. Esto se lleva a cabo mediante la exportación de un archivo INP de una simulación base, desde ABAQUS, hacia la paquetería de *Wolfram Mathematica*. El archivo INP contiene la información de la simulación, desde las coordenadas de cada uno de los nodos en la superficie, las propiedades del material, las instrucciones que llevará a cabo la simulación, y las instrucciones de lo que se obtendrá de la misma. La rugosidad se aplica mediante un código que mueve los nodos de la superficie hacia arriba o abajo, de acuerdo a los valores de las superficies creadas con el midpoint algorithm. Para mantener una distribución adecuada de las alturas de los elementos, en la capa de la superficie se aplica el desplazamiento vertical completo obtenido en el algoritmo, mientras que la capa siguiente se mueve 4/5 veces ese valor, después 3/5, hasta modificar las cinco capas superiores. El código modifica la cantidad de desplazamiento vertical que se aplica en la simulación dependiendo del valor de rugosidad máxima que tiene la superficie respectiva. Con el procedimiento definido, se modifica un INP para cada una de las simulaciones con los parámetros mencionados previamente, y se exporta

un archivo CSV que contiene las coordenadas de cada nodo de la superficie, junto a un número de identificación (node ID) previamente asignado por Abaqus.

Con los archivos INP modificados, se crea una subrutina para Abaqus mediante Python. La subrutina hace lo siguiente: abre la simulación, eleva la altura de la placa maestra a la posición inicial (el valor de altura inicial depende de la rugosidad máxima de las superficies en la simulación), y corre la simulación. Luego, cuando la simulación está lista, extrae los datos que se usarán en el análisis de la simulación mediante archivos RPT: el área de contacto entre superficies, la fuerza de reacción de la parte inferior de la placa esclava, el desplazamiento vertical de la placa maestra, y 20 valores de presión de contacto en todos los elementos, distribuidos equitativamente en toda la simulación. Finalmente, la simulación se cierra y la subrutina abre la siguiente simulación. Este sistema permite correr una gran cantidad de simulaciones seguidas con mínima supervisión de un operador.

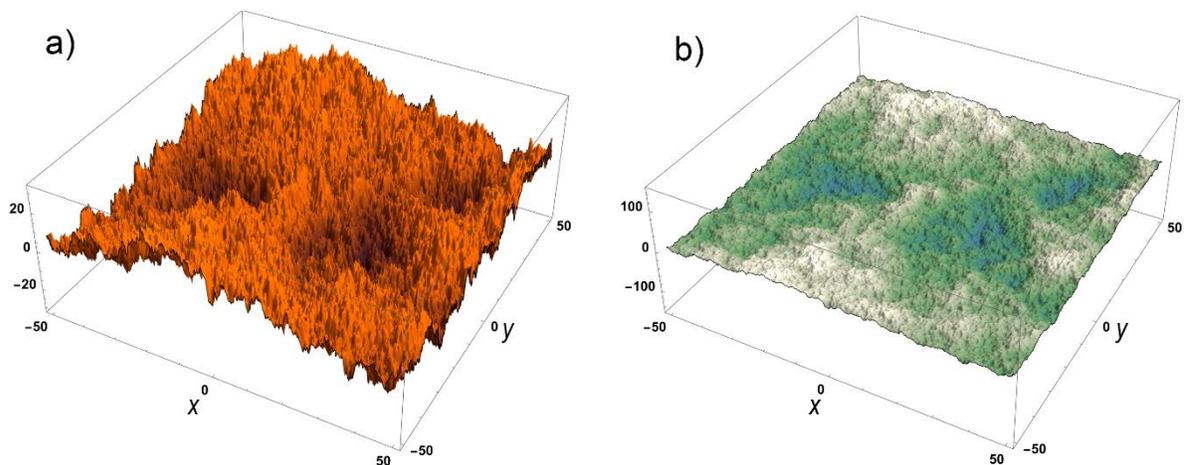


Figura 4.3. a) Superficie aleatoria generada y b) la misma superficie con la escala vertical adaptada para visualizar de manera más clara el carácter rugoso. Cabe indicar que, si se utiliza el valor correcto de rugosidad, la superficie se vería perfectamente plana.

4.1.2 Procesamiento de datos

Dada la gran cantidad de simulaciones, es deseable tener un sistema automatizado que procese los datos obtenidos en resultados que puedan analizarse. De Abaqus se obtienen archivos que contienen la presión de contacto en cada nodo en un tiempo determinado de una simulación determinada, por lo que se crea una función en Mathematica que exporta los datos de una simulación a medida que avanza el contacto, y se filtra la información necesaria en una sola tabla con las coordenadas x , y y z de cada nodo, más las presiones de contacto de cada tiempo. De esta tabla, se binarizan las presiones de contacto para obtener 1 donde haya contacto y 0 donde no exista contacto, y se ordenan mediante las coordenadas x y y . Se obtienen

los contornos de las tablas anteriores y se exporta una tabla con los contornos de contacto en los distintos tiempos de una simulación (figura 4.4).

Al evaluar la función del proceso anteriormente descrito mediante la función Table, es posible exportar varias simulaciones a la vez, lo que permite exportar distintos archivos sin intervención humana. Esto es indispensable para analizar los cientos de simulaciones correspondientes a esta investigación.

Este proceso trae algunas ventajas más:

- Inicialmente, el resultado de cada simulación pesa 300 GB, al exportar los datos, cada archivo de presión de contacto pesa 135 MB, mientras que, al procesar los datos, los archivos finales pesan 3 MB, lo que es casi 45 veces menos. Considerando que se tienen 162 simulaciones elásticas, y cada una contiene 20 presiones de contacto, serían 437 GB, que para almacenamiento puede no ser un problema real, pero correr un programa que procese toda esa información en un solo paquete se vuelve tarea imposible. En cambio, procesar 9.8 GB se vuelve una tarea viable.
- Las tablas de contornos de superficies permiten evaluar los métodos de análisis fractal y percolación en algún momento posterior sin la necesidad de tener que procesar las superficies de nuevo, lo que implica un ahorro de tiempo significativo.

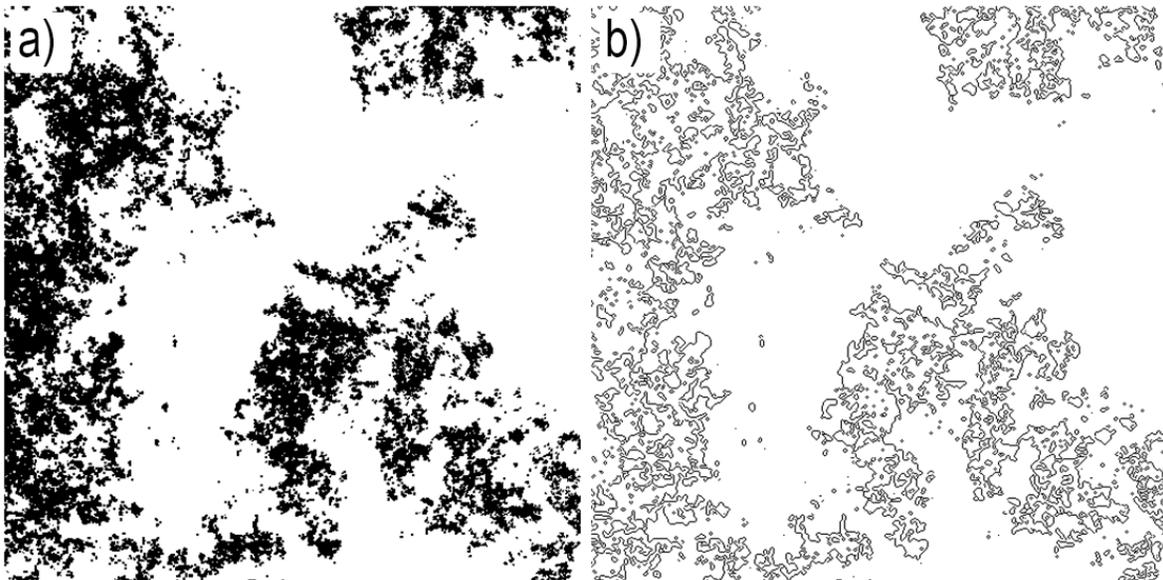


Figura 4.4. a) Presiones de contacto binarizadas de superficies en contacto y b) contornos de presión.

4.1.3 Esquema de trabajo

El proyecto es parte de una línea de investigación cuyo objetivo final es incluir la mecánica de contacto en el estudio del desgaste. Sin embargo, para alcanzar esta meta, se requieren una serie de etapas bien definidas, algunas de las cuales enmarcan este proyecto. A continuación, se detalla el esquema de trabajo completo, cuyo objetivo es demostrar la estructura y metodología de la investigación, y enseguida, se detallan las prioridades para este proyecto de investigación en específico.

El esquema completo se compone de la simulación de contacto de dos tipos de geometrías: planas y esféricas, existiendo las combinaciones de contacto de plano sobre plano, esfera sobre plano y esfera sobre esfera. En cada combinación, se puede dar contacto normal o tangencial y el comportamiento de los materiales puede ser linealmente elástico o elastoplástico. Finalmente, se contemplan dos tamaños distintos de modelo: pequeño (256x256) y grande (512x512). Este esquema se observa en la tabla 4.1.

Superficies	Orientación	Comportamiento	Tamaño
Plano-Plano	Normal	Elástico	Pequeño
Plano-Plano	Normal	Elástico	Grande
Plano-Plano	Normal	Elastoplástico	Pequeño
Plano-Plano	Normal	Elastoplástico	Grande
Plano-Plano	Tangente	Elástico	Pequeño
Plano-Plano	Tangente	Elástico	Grande
Plano-Plano	Tangente	Elastoplástico	Pequeño
Plano-Plano	Tangente	Elastoplástico	Grande
Plano-Esfera	Normal	Elástico	Pequeño
Plano-Esfera	Normal	Elástico	Grande
Plano-Esfera	Normal	Elastoplástico	Pequeño
Plano-Esfera	Normal	Elastoplástico	Grande
Plano-Esfera	Tangente	Elástico	Pequeño
Plano-Esfera	Tangente	Elástico	Grande
Plano-Esfera	Tangente	Elastoplástico	Pequeño
Plano-Esfera	Tangente	Elastoplástico	Grande
Esfera-Esfera	Normal	Elástico	Pequeño
Esfera-Esfera	Normal	Elástico	Grande
Esfera-Esfera	Normal	Elastoplástico	Pequeño
Esfera-Esfera	Normal	Elastoplástico	Grande
Esfera-Esfera	Tangente	Elástico	Pequeño
Esfera-Esfera	Tangente	Elástico	Grande
Esfera-Esfera	Tangente	Elastoplástico	Pequeño
Esfera-Esfera	Tangente	Elastoplástico	Grande

Tabla 4.1. Esquema completo de simulaciones.

Dependiendo la combinación que se realice, las simulaciones tendrán distintos parámetros que afectarán el número de simulaciones. Todas las simulaciones tienen dos parámetros iniciales: Dimensión fractal y rugosidad media. A las simulaciones elastoplásticas se agregan dos parámetros plásticos: el límite de cedencia entre el módulo de Young ($\frac{\sigma_y}{E}$) y el exponente de endurecimiento por trabajo en frío (n), tal y como aparece en la ecuación de Hollomon ($\sigma = k\varepsilon^n$). En las simulaciones tangenciales, se agrega la altura de interferencia entre superficies como parámetro. Y en las simulaciones esféricas, se toma en consideración la relación del radio de la esfera con la rugosidad media, para mantener un resultado adimensional.

Cómo punto de referencia se empieza con las *simulaciones de contacto normal de superficies elásticas planas*. Éstas se realizan en los dos tamaños (256 x 256 y 512x512). El modelo pequeño se analiza para investigar si con un modelo reducido, se puede ahorrar el tiempo de cálculo sin pérdida de precisión en el modelado.

La segunda prioridad está en las *simulaciones de contacto normal de superficies elastoplásticas planas*. Estas simulaciones no requieren trabajo para modificar el modelo, sólo requiere agregar propiedades plásticas a la simulación elástica. Las simulaciones numéricas se pueden realizar en paralelo con otras partes del trabajo, utilizando una estación de trabajo distinta. Su tiempo de simulación es mayor a las elásticas. El comportamiento elastoplástico es importante para problemas de desgaste. Por el enfoque en el uso del método de elementos de frontera en la última década, este tipo de simulaciones es escaso en la literatura.

Debido a los tiempos de simulación, las *simulaciones de contacto tangente de superficies elásticas y elastoplásticas planas* se dejarán como un trabajo derivado. Para ellas se requiere modificar el modelo existente, para incorporar condiciones de frontera perfectas para garantizar un área de contacto constante. Los nodos que salen de un extremo del modelo tienen que entrar nuevamente y de manera continua en el lado opuesto. Este tipo de simulaciones se han estudiado poco, por lo que un análisis estadístico con una gran cantidad de resultados aportaría información novedosa.

Las *simulaciones de contacto normal de superficies elásticas esférica con plana* son la tercera prioridad del esquema de trabajo, mientras que las simulaciones *elastoplásticas* son la cuarta. Su importancia radica en el hecho de que esta geometría es la más fácil de analizar experimentalmente. Además, permite formular conclusiones relativas al uso de modelos de asperezas esféricas en superficies que tienen rugosidad a todas las escalas de longitud.

Las *simulaciones de contacto tangente de superficies elásticas y elastoplásticas esférica con plana* se apartarán también como un trabajo derivado por la extensión del desarrollo y tiempo de simulación. Este tipo de contacto podría estudiarse

también de forma experimental con el equipo disponible, que consiste en celda de carga vertical y lateral. Es la geometría del clásico experimento de desgaste perno sobre disco.

Las *simulaciones de contacto normal de superficies elásticas y elastoplásticas esféricas* no se realizarán. Debido al radio equivalente en el contacto de Hertz, dos superficies rugosas esféricas se pueden representar mediante una superficie rugosa esférica y una superficie plana, por lo que el contacto de esfera sobre plano dará resultados equivalentes. Esto es válido para deformaciones plásticas pequeñas.

El objetivo final de la línea de investigación se encuentra en las *simulaciones de contacto tangente de superficies elásticas y elastoplásticas esféricas*. Bajo esta configuración, las simulaciones permitirán estudiar fenómenos asociados al desgaste. Sin embargo, no es el objetivo llegar a este punto en este doctorado, por lo que quedará como un trabajo posterior. Este paso permitirá la transición de modelado de contacto a modelado de fricción que es uno de los objetivos principales en el estudio de la tribología.

Este análisis combina los parámetros de dimensión fractal, rugosidad, radio de esfera, interferencia y en el caso elastoplástico, límite de cedencia y endurecimiento por trabajo en frío, incrementando de manera significativa la cantidad de simulaciones requeridas. Por lo tanto, es necesario explorar todos los detalles de la metodología y el análisis de datos antes de enfrentar este análisis y optimizar los modelos para identificar las condiciones que permiten generar la mayor cantidad de resultados relevantes.

Superficies	Orientación	Comportamiento	Tamaño	Prioridad
Plano-Plano	Normal	Elástico	Pequeño	Primera
Plano-Plano	Normal	Elástico	Grande	
Plano-Plano	Normal	Elastoplástico	Grande	Segunda
Plano-Plano	Tangente	Elástico	Grande	Trabajo derivado
Plano-Plano	Tangente	Elastoplástico	Grande	Trabajo derivado
Plano-Esfera	Normal	Elástico	Grande	Tercera
Plano-Esfera	Normal	Elastoplástico	Grande	Cuarta
Plano-Esfera	Tangente	Elástico	Grande	Trabajos derivados
Plano-Esfera	Tangente	Elastoplástico	Grande	
Esfera-Esfera	Normal	Elástico	Grande	No se realizará
Esfera-Esfera	Normal	Elastoplástico	Grande	Objetivo final
Esfera-Esfera	Tangente	Elástico	Grande	
Esfera-Esfera	Tangente	Elastoplástico	Grande	

Tabla 4.2. Esquema de trabajo definido después de la primera serie de simulaciones elásticas, plano sobre plano.

El esquema de trabajo reducido se muestra en la tabla 4.2. Las simulaciones se realizan mediante elementos finitos a pesar de que existen técnicas más efectivas como BEM, porque BEM no permite realizar el análisis con parámetros elastoplásticos. El proyecto en sí busca observar y analizar elementos de fricción y desgaste. En esta tesis, el esquema de trabajo se abarcó hasta la tercera prioridad, es decir, simulaciones de contacto normal con superficies elásticas plana y esférica.

4.2 Análisis de datos

4.2.1 Calibración de resultados

A medida que el proyecto avanzó, se requirieron realizar ajustes en los métodos utilizados para mejorar los resultados. Primero, se requirió realizar un ajuste en el área de contacto obtenida mediante elemento finito, pues este método genera discretización debido a la malla, lo que provoca un error en el área obtenida. Para ello, se realizó un conjunto de simulaciones de calibración, donde en lugar de utilizar simulaciones FEM, se utilizan curvas de soporte con distintas propiedades de tamaño, dimensión fractal y cuantil (para simular el avance de una simulación), para observar la desviación del área de contacto a medida que se modifican dichos parámetros.

Para determinar correctamente la dimensión fractal de los contornos, fue necesario comparar el resultado de los dos métodos programados, por lo que se realizó una comparación de ambos métodos evaluando la dimensión fractal de curvas de soporte, y con el mejor método elegido, se obtuvo una curva de corrección para mejorar el algoritmo de determinación fractal a través de dicho método. Después, para realizar una correcta comparación entre las gráficas de desplazamiento contra área y fuerza, se requirieron realizar un par de escalamientos para lograr una buena comparabilidad entre las superficies con los distintos parámetros utilizados.

Como se observó en el esquema de trabajo, se realizó una comparación entre distintos tamaños de superficie, donde se agregó el tamaño mediano (384 x 384) con la intención de tener una muestra más grande a la hora de evaluar el efecto del tamaño de las superficies. Finalmente, se realizó un estudio para determinar el mejor método para cálculo de la dimensión fractal en superficies de entre seis métodos, evaluando superficies generadas por tres métodos distintos. A continuación, se observa la metodología seguida en cada una de las calibraciones realizadas.

4.2.2 Corrección de área

El área de contacto obtenida mediante elemento finito no es precisa debido a errores provenientes de la discretización de la malla. Yastrebov et al. [165] propusieron una función correctiva para compensar los errores por discretización de malla basados en argumentos geométricos. El proceso de obtener la función se explica a detalle en [165]. La estimación del área de contacto verdadera se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$A_Y = A_D - \frac{\pi-1+\ln 2}{24} S_D \Delta x \quad (4.1)$$

donde A_Y es el área de contacto verdadera, A_D es el área de contacto discreta (el área de contacto obtenida originalmente de elemento finito), y S_D el perímetro discreto, que es el perímetro de la frontera entre contacto/no contacto, y se calcula así: $S_d = M\Delta x$, donde M es el número de cambios entre contacto y no contacto, y viceversa, en direcciones vertical y horizontal, y Δx el tamaño de los elementos en la superficie.

La corrección de área se evaluó mediante curvas de soporte. Para observar la importancia que tiene el tamaño de la superficie con la discretización de malla, se utilizaron distintos tamaños, siendo $L = 2^{10}, 2^9, 2^8, 2^7$ y 2^6 . La rugosidad máxima se fijó en 0.05, mientras que se utilizaron 19 dimensiones fractales (de 2.05 a 2.95, con pasos de 0.05) y 19 cuantiles (de 0.05 a 0.95, con pasos de 0.05) para caracterizar las distintas posibilidades. En total, se utilizaron 1805 superficies

Después, se grafica $\frac{A_Y}{A_D}$ vs q , donde q es el cuantil, para observar la desviación de los resultados a medida que se va más profundo en la superficie, así como las diferencias del área en función de las dimensiones fractales. La figura 4.5 muestra los resultados separados por dimensiones fractales. A bajas dimensiones fractales, las áreas obtenidas en los elementos discretos del modelo requieren de una corrección mínima, caso contrario a las dimensiones fractales altas. A medida que se avanza en los cuantiles, se requiere una corrección más drástica. Las superficies más grandes requieren una menor corrección, al contener más puntos, por lo que el efecto de discretización es bajo. Aun así, estas superficies requieren una corrección alta a dimensiones fractales altas. La diferencia entre superficies con $L = 2^{10}$ y $L = 2^6$ se observa de inmediato; a menor resolución, la corrección es más agresiva.

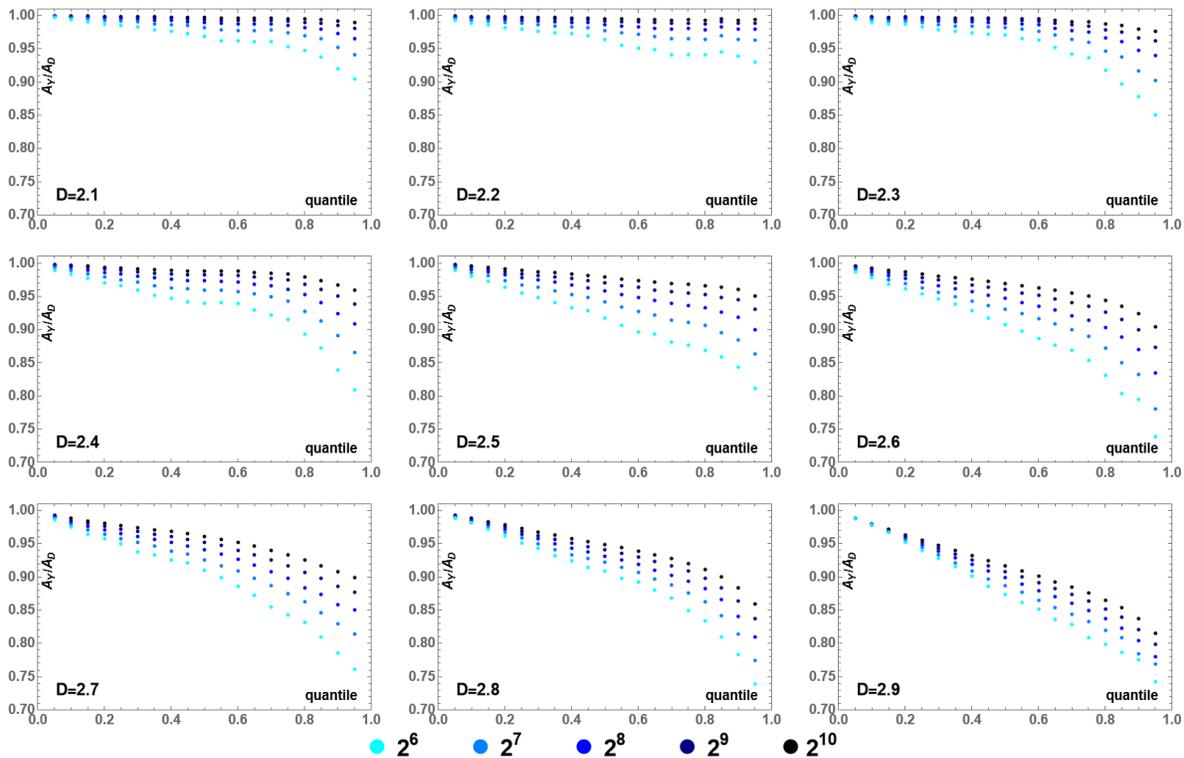


Figura 4.5. Evaluación de la corrección de área. La figura muestra nueve dimensiones fractales. Cada gráfica muestra la razón entre el área de Yastrebov y el área discreta en 19 distintos cuantiles (de 0.05 a 0.95).

Después de la evaluación, el área de Yastrebov se calcula para las superficies en contacto. Para ello, se obtienen primero el área de contacto discreta y el perímetro discreto. El área de contacto discreta se obtiene mediante el conteo de todos los puntos de contacto en la superficie, mientras que, para el perímetro discreto, se programa una función que cuenta los cambios entre contacto y no contacto. La razón entre el área discreta y el área de Yastrebov se obtienen mediante una función de interpolación como en la figura 4.5, y con ella, se genera una tabla de corrección de datos C_y , que se utiliza para corregir el área discreta de contacto que proviene de elemento finito.

4.2.3 Comparación entre BCM y YM

Se realizó la programación de dos métodos de determinación de la dimensión fractal para contornos de superficie, con la finalidad de determinar cómo varía la dimensión fractal de la superficie conforme incrementa el área de contacto. Primero, se explica la implementación del método Yardstick. La entrada de datos para este método son los contornos de contacto (figura 4.4) obtenidos previamente en el capítulo 4.1.2.

Con ellos, se obtienen las coordenadas x y y de cada punto que conforma los contornos de contacto. El objetivo inicial del código es separar cada una de las islas y obtener la secuencia de coordenadas que las conforman. De las islas se distinguen dos tipos, las que contienen puntos que tocan la orilla de la superficie y, por lo tanto, no se cierran, y las que no tocan la orilla y por lo tanto son islas que se cierran (figura 4.6 a). Se analizan primero las islas que están en las orillas, por lo que se selecciona un punto aleatorio que esté en una orilla. La función encuentra el punto más próximo que tenga una distancia de 1 en el caso de un punto recto, o de $\sqrt{2}$ en el caso de un punto en esquina (figura 4.6 b). En el momento que el código alcanza la otra orilla de esa isla, el contorno termina. Para asegurar el correcto funcionamiento del código, se agregan algunas condiciones:

- a) Si la distancia con el punto más cercano es mayor que $\sqrt{2}$, el contorno termina ahí, dado que ya no existiría continuidad con esa isla.
- b) En el caso de las islas cerradas, si existen dos opciones a la misma distancia, se elige uno aleatoriamente, ya que al final del contorno se regresará a este punto.
- c) A medida que se eligen los puntos, se van quitando de la lista original, y agregando a otra lista con los contornos ordenados por cada isla.

Al terminarse los puntos en las orillas, se continúa con las islas cerradas. Para ellas, se empieza con un punto aleatorio de los restantes y se itera el código. Una isla se completa al momento de regresar al punto de inicial de la isla (figura 4.6 c). Entonces, se empieza la siguiente isla a través de otro punto aleatorio. Esto se repite hasta que no existan más puntos. Para medir los perímetros de cada isla, se obtiene la diferencia de la norma de cada uno de los puntos contiguos, y se suma el total. Esto se realiza con cada isla y se obtiene el valor total de longitudes de los contornos de superficie.

Después, se toman cada dos puntos de cada isla y se obtiene de nuevo la distancia total del contorno. Esto se repite hasta que la longitud de puntos por elegir en cada isla es menor que uno. De las longitudes de contornos de superficie totales, se descartan el primer y último valor, y se utilizan entre 5 y 7 valores para obtener la curva log-log dividiendo el logaritmo base 2 de cada longitud obtenida entre el logaritmo base 2 de 2^n , con n , como el valor de la iteración, como lo indica la ecuación 2.28. Finalmente, se obtiene la pendiente m mediante una regresión lineal. La dimensión fractal se obtiene como:

$$D_Y = 1 - m \quad (4.2)$$

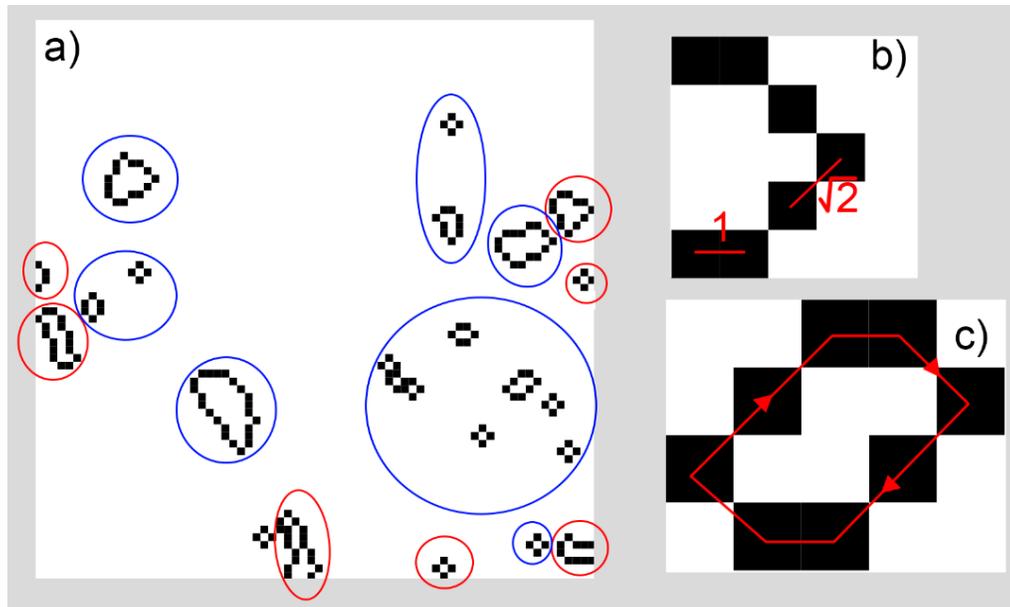


Figura 4.6. Algoritmo de Yardstick. a) Fragmento de superficie. Circulado en rojo se encuentran las islas que contienen algún punto en la orilla, y en azul las islas que no tienen puntos en la orilla. b) Ejemplo de una isla en la orilla, se observan las distancias de 1 y $\sqrt{2}$ según qué tipo de continuidad hay en los puntos. c) Isla cerrada y el seguimiento que realiza el programa para completarla.

Al igual que en YM, para BCM, se requiere como dato de inicio los contornos de presión. La implementación del método es mucho más sencilla. La superficie se divide en cajas de 2x2 (no se recomienda utilizar la resolución completa, por lo que se omiten las cajas de 1x1) y se cuentan las cajas que contengan al menos un punto del contorno dentro de ellas. Luego, el tamaño de las cajas se incrementa con un factor de dos y se realiza de nuevo el conteo que contengan parte del contorno (figura 4.7). Dado que las cajas se están haciendo cada vez más grandes, se requieren menos cajas para que cubran la superficie total. La iteración concluye cuando la superficie total se cubre con 16 cajas pues, como se mencionó anteriormente, no se recomienda utilizar los datos que contengan ni una, ni cuatro cajas [102].

Se obtiene la gráfica log-log del logaritmo base 2 de la cantidad de cajas ocupadas contra el logaritmo base 2 de b^{n-1} , donde b es el valor de lado de la caja y n el valor de iteración, como lo indica la ecuación 2.29. Se obtiene la pendiente con regresión lineal y finalmente se obtiene la dimensión fractal mediante:

$$D_{BCM} = -m \quad (4.3)$$

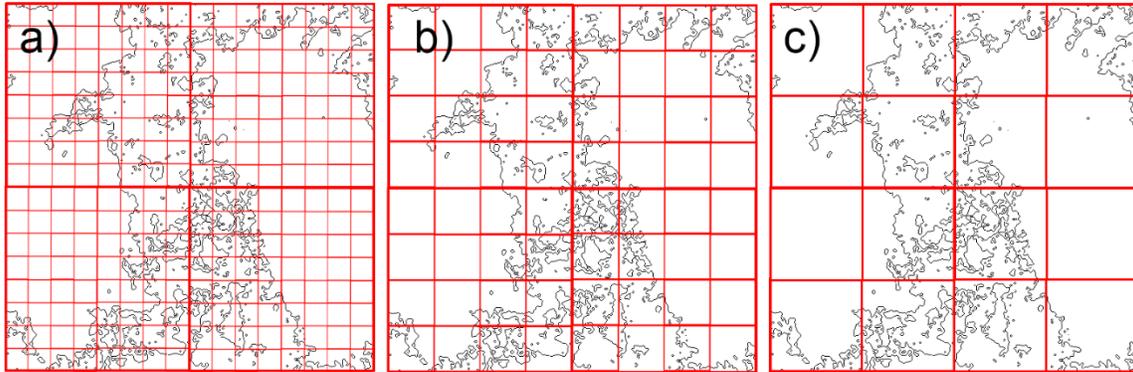


Figura 4.7. Muestra de la división que se realiza en el BCM Se observan cajas cada vez más grandes a medida que se avanza.

Al momento de evaluar ambos métodos, se detectó que el método Yardstick requiere más tiempo de cálculo debido a la necesidad de ordenar los contornos y realizar la separación por islas. Caso contrario al box count que, sin preparación previa, se puede empezar el conteo de puntos, cosa que es muy importante dada la cantidad de simulaciones realizadas en este trabajo. También se observó que cualitativamente era más preciso que Yardstick, lo cual fue corroborado por Galván [163]. Por ello, se tomó la decisión de continuar el análisis mediante el método de box count.

4.2.4 Evaluación del método de conteo de cajas

Para calcular la dimensión fractal de cada superficie, se utiliza el BCM. El método se evalúa para asegurar la calidad de los resultados. Para ello, se generaron 891 superficies (99 dimensiones fractales diferentes, de 2.01 a 2.99, nueve cuantiles distintos, entre 0.1 y 0.9, y con una rugosidad máxima de 0.05) y se realiza mediante curvas de soporte. Se obtuvieron contornos de contacto a diferentes cuantiles. Se obtienen las dimensiones fractales de todas las superficies mencionadas. La dimensión fractal obtenida su muestra mediante exponente de Hurst. Con los datos obtenidos, se grafica $1 - H_{in}$ vs $1 - H_{out}$, donde H_{in} es el exponente de Hurst de la superficie generada, y H_{out} es el exponente de Hurst calculado para la misma superficie mediante BCM. Lo anterior se observa en la figura 4.8 a

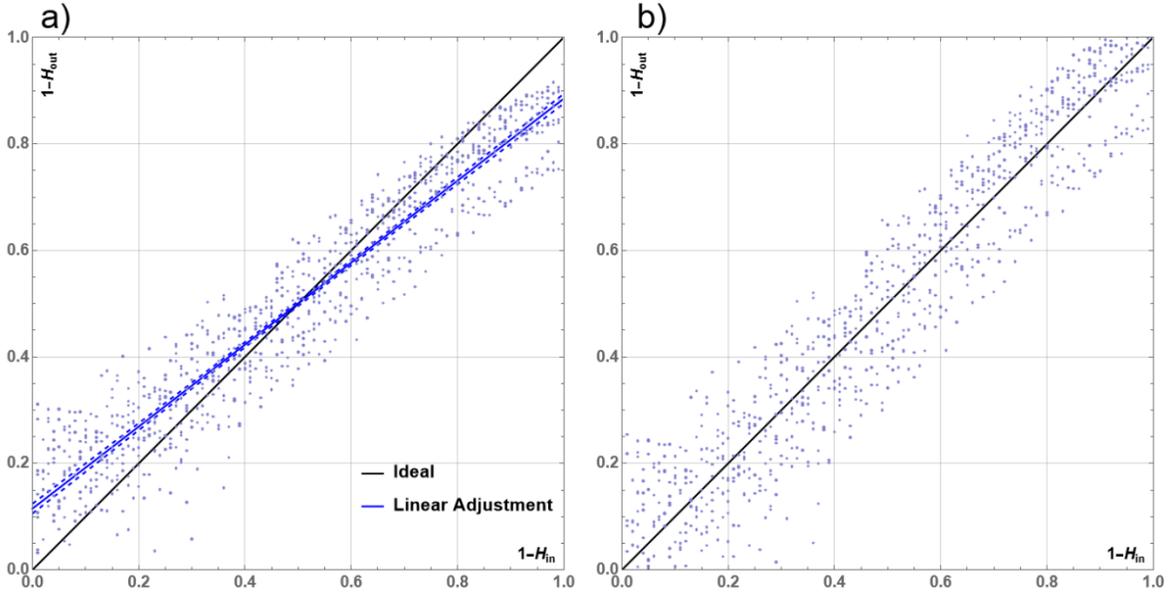


Figura 4.8. a) Datos obtenidos de la evaluación del BCM en superficies sin contacto antes de aplicar la corrección y b) después de aplicar la corrección. La línea azul en la gráfica de la izquierda representa el ajuste lineal aplicado.

Se observa que en valores menores a 0.5, el método sobre estima el valor de dimensión fractal. Pasa lo contrario en valores superiores al 0.5, donde el método infravalora la dimensión fractal. La tendencia se observa fácilmente, por lo que se calcula un ajuste para obtener resultados fiables. Se prueban tres ajustes, siendo el ajuste lineal sin anclaje al origen el que se acomoda mejor a los resultados. El ajuste lineal se puede observar en la figura 4.8 a.

Se genera una función de corrección para los datos de dimensión fractal que se observa en la siguiente ecuación:

$$D_{corr} = \frac{-b+D_{ob}}{m} \quad (4.4)$$

Siendo m y b parámetros del ajuste, y D_{ob} la dimensión fractal obtenida. En el caso de los datos para $n = 9$, los valores de m y b son: $m = 0.7699$ y $b = 0.1151$. En la figura 4.8 b se observan los datos corregidos. La línea negra muestra la referencia si los datos de entrada y de salida fueran los mismos, y se observa que, a pesar de que existe dispersión en los datos inherente a los procesos estocásticos, los datos se alinean respecto a la referencia. Finalmente, se obtiene la desviación estándar del ajuste, y se obtiene $\sigma = 0.08$ para superficies de 256×256 y $\sigma = 0.08$, para superficies de 512×512 .

4.2.5 Corrección de desplazamiento, fuerza y área

Los archivos obtenidos en Abaqus, que contienen desplazamientos, fuerzas de reacción y áreas requieren ser procesados. El archivo de desplazamientos contiene todos los desplazamientos verticales de la parte alta de la placa maestra. Para obtener el valor del desplazamiento d , se calcula el promedio de los mismos; la fuerza de reacción total F_r , se obtiene como la suma de cada fuerza de reacción en dicha zona; y el área de contacto discreta A_d , se importa directamente.

Estas variables requieren tres ajustes para que puedan ser comparables: agregar la deformación del cuerpo sólido al área, escalar modelo, y escalar la rugosidad. El primer ajuste se obtiene utilizando el coeficiente de Poisson y la forma unidimensional de la ley de Hooke. La deformación se obtiene para las direcciones x y y :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} = -\nu \frac{F_{33}}{L^2 E} \quad (4.5)$$

Con la deformación, se puede obtener la deformación de cada longitud:

$$\delta x_1 = \delta x_2 = -\nu \frac{L \sigma_{33}}{L^2 E} \quad (4.6)$$

La deformación de cuerpo sólido se sustrae de cada longitud:

$$L - \delta x_1 = L - \delta x_2 = L - \nu \frac{L \sigma_{33}}{L^2 E} = L \left(1 - \nu \frac{\sigma_{33}}{L^2 E}\right) \quad (4.7)$$

Y ambas longitudes se multiplican para obtener la corrección de cuerpo sólido:

$$A_* = A_d \left(1 - \nu \frac{\sigma_{33}}{L^2 E}\right)^2 \quad (4.8)$$

El escalamiento de rugosidad se aplica para comparar simulaciones con distintas rugosidades. Por ello, se divide la fuerza de reacción F_r y el desplazamiento d entre la rugosidad σ respectiva de cada superficie. En el caso del desplazamiento, se agrega un signo menos para rotar el sentido del desplazamiento a positivo. Por lo que la ecuación de desplazamiento, queda de la siguiente manera:

$$u = \frac{-d}{\sigma} \quad (4.9)$$

El escalamiento del modelo tiene el objetivo de transformar los datos obtenidos en adimensionales, y que no dependan de sus propiedades físicas. Por lo anterior, la fuerza se divide entre el módulo de Young E , y el área de contacto total A_0 . La rugosidad que se agregó en la corrección anterior se divide entre la longitud del área de contacto total, L . Y el área de contacto total se multiplica por la corrección de cuerpo sólido (ecuación 4.8). Por lo que, la fuerza queda de la siguiente manera:

$$F = \frac{F_r * L}{A_0 * \sigma * E * \left(1 - \nu \frac{F_r}{EA_0}\right)^2} \quad (4.10)$$

El área discreta A_d se divide entre el área de contacto total, y se multiplica por la corrección de cuerpo sólida y el factor de corrección de área C_Y , obtenida en el capítulo 4.2.2. El área queda así:

$$A = \frac{A_d * C_Y}{A_0} * \left(1 - \nu \frac{F_r}{EA_0}\right)^2 \quad (4.11)$$

4.2.6 Comparación entre tamaños

Inicialmente se realizaron dos tamaños de simulaciones. Sin embargo, con el objetivo de evaluar a los dos tamaños originales (pequeño, de 256x256, y grande, de 512x512), se realizaron algunas simulaciones con un tamaño medio, de 384x384 elementos. En la figura 4.9 se observa que las curvas de área desplazamiento para modelos de diferentes tamaños tienen diferentes comportamientos. El modelo pequeño muestra una pendiente muy distinta a partir del 20% de área de contacto. En la curva de fuerza vs desplazamiento no se observan diferencias notables.

Las simulaciones de tamaño medio y grande dan resultados indistinguibles. Esto indica que, en términos de refinamiento de malla, el modelo intermedio es suficiente. Para incorporar un margen de seguridad, y dado que el modelo grande se puede analizar en tiempos aceptables, se decidió continuar el análisis con las superficies grandes para minimizar las imprecisiones por el mallado.

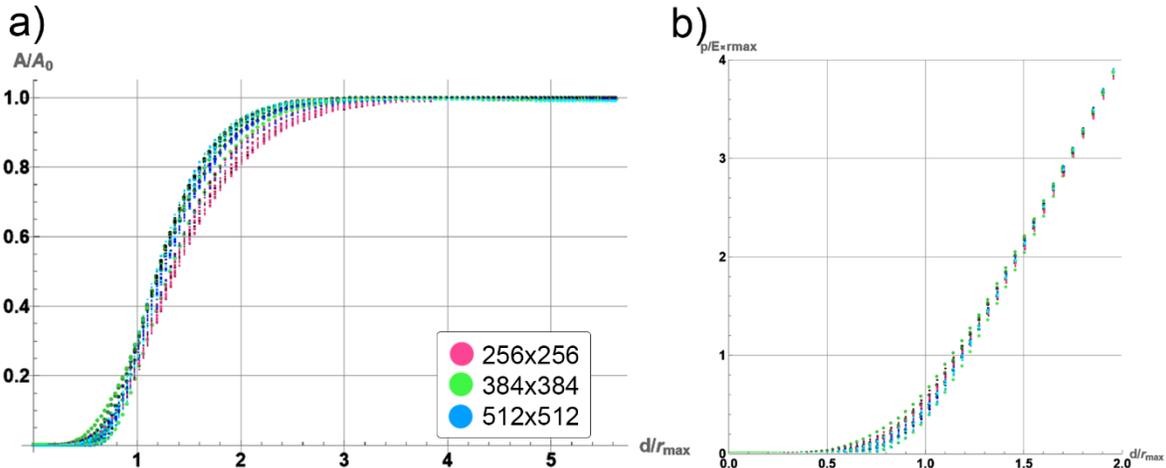


Figura 4.9. a) Curvas de área-desplazamiento y b) curvas de fuerza-desplazamiento de simulaciones de contacto en tres diferentes tamaños de superficie.

4.2.7 Comparación de métodos de cálculo de dimensión fractal en superficies

Como se observó anteriormente, los métodos de determinación de dimensión fractal D introducen una dispersión estadística y una desviación sistemática, lo que afecta en la precisión de los métodos. Para evaluar los métodos de cálculo de dimensión fractal en superficies, se realizaron 2304 superficies aleatorias con diferentes tamaños, varianzas y dimensión fractal.

Se consideraron cinco factores en el estudio: el algoritmo de generación de superficie, el tamaño de la superficie, su escalamiento vertical $\sigma_0 = \sqrt{\langle z^2 \rangle_{in}}$, el método de cálculo del exponente de Hurst H , y el valor inicial del exponente de Hurst, H_{in} . El subíndice “in” indica de manera general el dato de entrada, que es diferente del resultado “out” debido a la dispersión y desviación antes mencionadas.

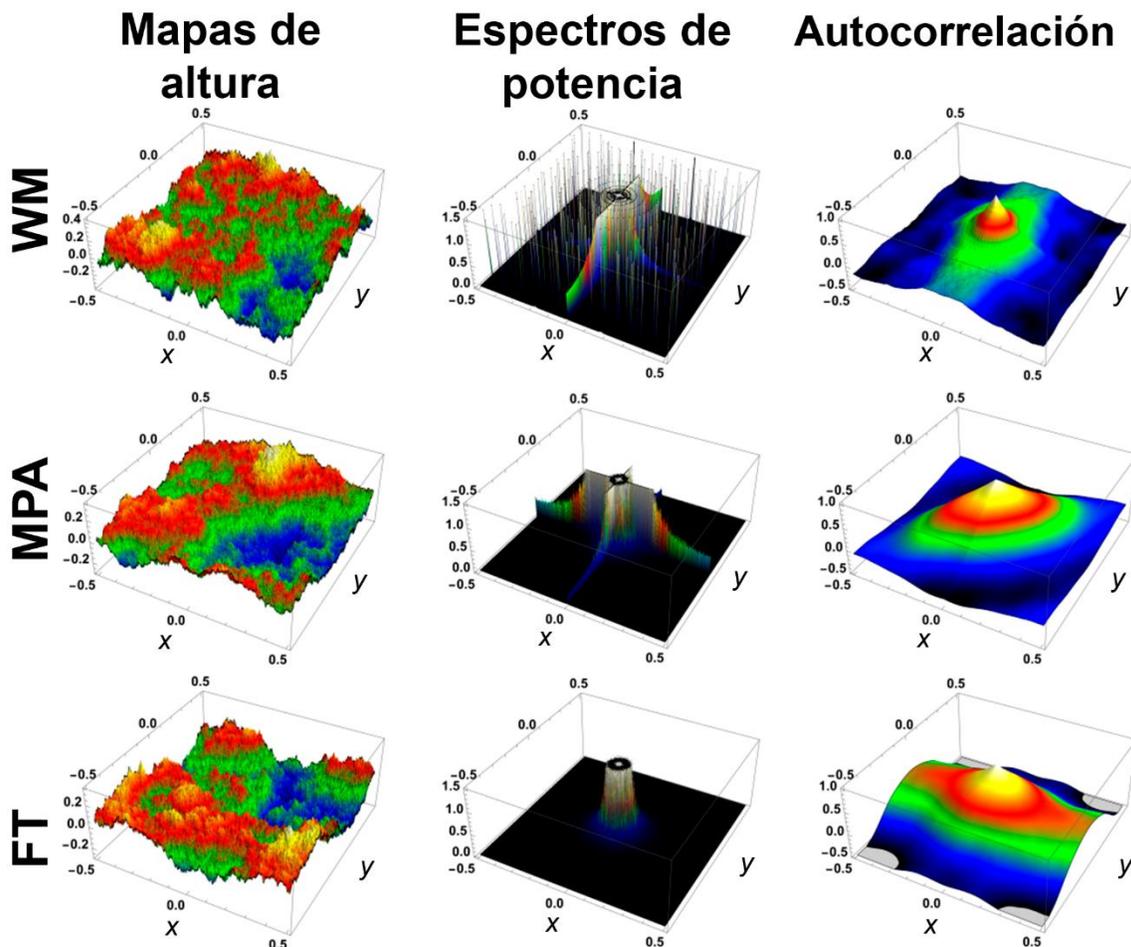


Figura 4.10. Mapas de altura, espectros de potencia y autocorrelación para Weierstrass-Mandelbrot (WM), algoritmo de punto medio (MPA) y transformada de Fourier (FT) con $n_0 = 10$ [46].

Se generaron superficies con 2^{n_0} de lado con $n_0 = 8, 9$ o 10 , mediante los métodos de Weierstrass Mandelbrot, algoritmo de punto medio y transformada de Fourier. En la figura 4.10 se observan topologías generadas con los tres métodos, donde los espectros de potencia y la autocorrelación muestran diferencias claras.

Se utilizaron tres rugosidades, siendo $0.25, 0.5$ y 1 . Se evaluaron seis métodos: Differential box-counting method (DBC), triangular prism method (TPM), detrended fluctuation (DTF), power spectrum analysis (PSA), structure function analysis (SFA) y roughness-length method (RLM), este último, basado en la gráfica log-log de la varianza medida sobre regiones cuadradas de distancia a . El valor inicial de H_{in} se varía entre $1/128$ y $127/128$ en pasos de $1/64$. Se crean dos superficies por cada combinación de método de generación de superficie, tamaño y exponente de Hurst inicial. En cada superficie, se aplica el escalamiento vertical y los seis métodos de determinación.

Este esquema permite enfocarse en la dispersión y la línea de tendencia mediante análisis de regresión lineal y la comparación de resultados mediante análisis de varianza. Se realiza una regresión lineal para cada rugosidad, y una para todos los datos, sin importar el valor de rugosidad. La varianza residual σ_{Res}^2 de los datos combinados se compara con el promedio de la varianza residual de cada valor de regresión lineal. El valor resultante *F-ratio*, se compara con el cuantil 0.9 de la distribución con sus grados de libertad n y con ello se calcula el valor P . Si el valor P es mayor que 0.1 , se decide que el método no es afectado por la rugosidad en el rango específico.

Al igual que en la evaluación de BCM, se genera una función de corrección para el exponente de Hurst:

$$H_{corr} = \frac{-a_0 + H_m}{a_1} \quad (4.12)$$

La dispersión del método se representa con σ_{out} . La precisión de cada método se puede definir mediante la diferencia entre el exponente de Hurst de entrada y el exponente de Hurst corregido para un método específico. Por ejemplo, en la desviación estándar entre el valor predicho H_{corr} y H_{in} :

$$\sigma_{pred} = \sqrt{(H_{in} - H_{corr})^2} \quad (4.13)$$

σ_{out} interactúa con a_1 para determinar σ_{pred} . σ_{pred} se obtiene mediante regresión lineal en la gráfica H_{in} vs H_m , bajo la hipótesis de que los residuos de la regresión sean independientes de H_m . Si los residuos siguen una distribución normal, se pueden obtener intervalos de confianza. La condición de normalidad se estudia mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov [166] [167].

Un resumen de los datos combinados para cada método se observa en la tabla 3.3 con los distintos tamaños de superficie, mostrando valores P y el intervalo de confianza al 90% para H_{corr} . Todos los métodos, a excepción de RLM y PSA, presentan un visible incremento de la varianza con H_{in} . Este efecto no se estudia a detalle y se ignora para el análisis estadístico. Los resultados para las superficies más grandes generadas mediante transformada de Fourier, en todas las rugosidades y para todos los métodos se observan en la figura 4.11.

Método	n_0	a_0	a_1	σ_{out}	R^2	P_F	90% CI
DTF	10	0.002	0.866	0.044	0.972	0.458	± 0.087
	9	-0.004	0.841	0.049	0.962	0.458	± 0.105
	8	0.002	0.845	0.069	0.927	0.494	± 0.13
TPM	10	0.137	0.744	0.03	0.982	0.11	± 0.067
	9	0.153	0.716	0.033	0.976	0.15	± 0.078
	8	0.175	0.691	0.039	0.964	0.025	± 0.095
RLM	10	0.144	0.741	0.024	0.988	0.487	± 0.053
	9	0.155	0.723	0.025	0.986	0.472	± 0.06
	8	0.182	0.692	0.029	0.979	0.481	± 0.071
DBC	10	0.306	0.597	0.017	0.991	0.488	± 0.048
	9	0.338	0.559	0.018	0.988	0.442	± 0.053
	8	0.375	0.52	0.023	0.978	0.489	± 0.074
SFA	10	0.107	0.787	0.016	0.995	0.487	± 0.034
	9	0.128	0.758	0.018	0.993	0.491	± 0.039
	8	0.153	0.726	0.018	0.993	0.479	± 0.042
PSA	10	0.001	1.001	0.002	1	0.4134	± 0.0032
	9	0.003	1.001	0.004	1	0.4984	± 0.0068
	8	0.007	1.007	0.008	0.999	0.4692	± 0.0137

Tabla 3.3. Resultados estadísticos para superficies generadas por transformada de Fourier para todos los métodos. Los resultados combinan todas las rugosidades. Se observa que σ_{out} y 90% CI para H_{corr} aumentan al decrecer el tamaño de superficie.

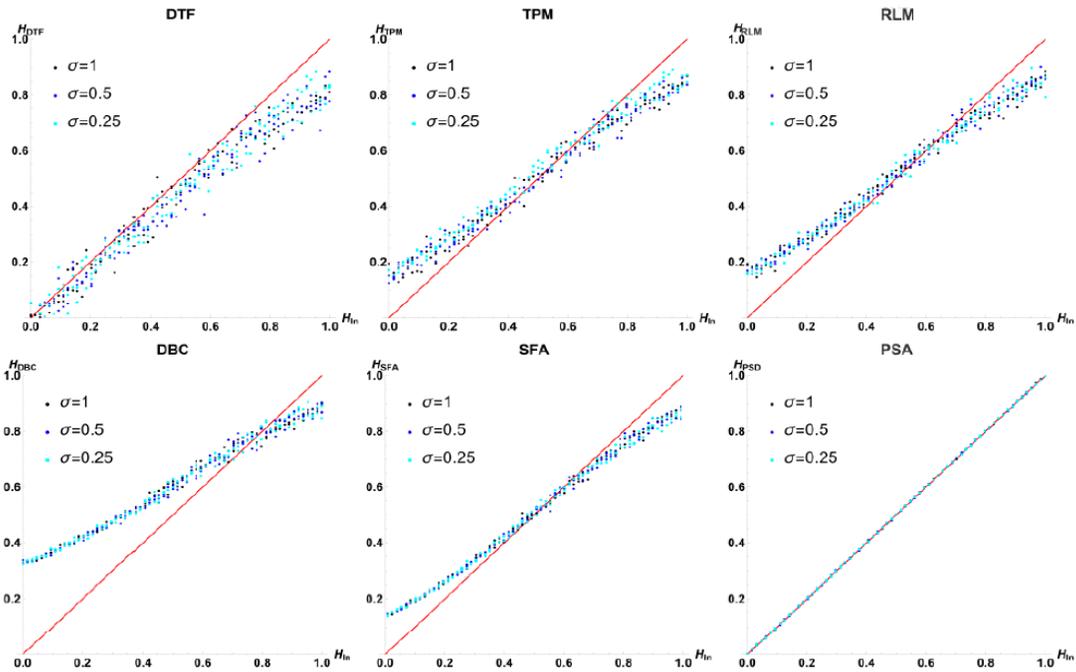


Figura 4.11. Curvas H_{FT} vs H_{in} para los tres σ_0 y todos los métodos, con el caso ideal $H_m = H_{in}$ marcado en rojo. Los métodos se muestran en orden de precisión mediante σ_{Pred} .

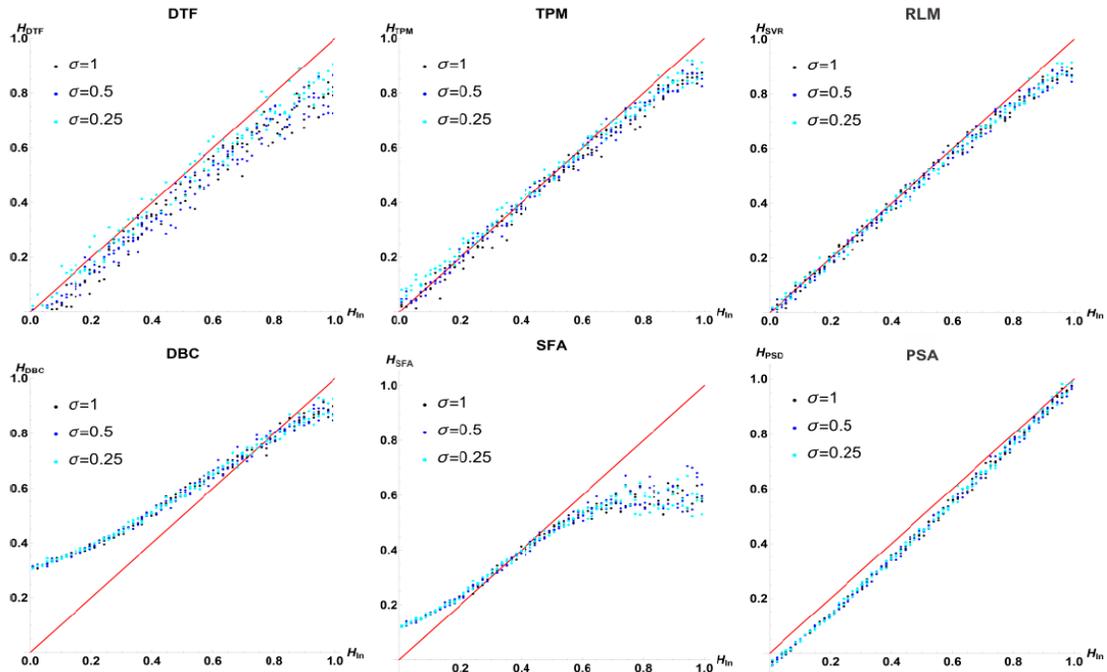


Fig. 4.12. Curvas H_{MPA} vs H_{in} para los tres σ_0 y todos los métodos, con el caso ideal $H_m = H_{in}$ marcado en rojo. DTF y TPM dependen significativamente de σ_0 . DBC y SFA tienen un sesgo mayor que en los resultados de superficies generadas por transformada de Fourier.

Los resultados para las superficies más grandes generadas mediante el MPA, en todas las rugosidades y para todos los métodos se observan en la figura 4.12; lo observado difiere de lo obtenido con transformada de Fourier. SFA muestra una tendencia muy alejada del caso ideal, especialmente en valores altos de H , donde la predominancia de los pocos primeros valores no se oculta aún con las altas fluctuaciones asociadas a un bajo H . En los resultados estadísticos (tabla 3.4), se observa que la regresión para H_{TPM} y H_{DBC} dependen significativamente de la rugosidad, como se ha observado antes [78].

Método	n_0	a_0	a_1	σ_{out}	R^2	P_F	90% CI
DTF	10	-0.014	0.884	0.047	0.967	0.004	± 0.089
	9	-0.028	0.874	0.05	0.962	0.008	± 0.077
	8	-0.042	0.86	0.062	0.942	0.011	± 0.064
TPM	10	0.034	0.893	0.029	0.988	0.015	± 0.083
	9	0.033	0.889	0.034	0.983	0.023	± 0.064
	8	0.045	0.859	0.04	0.975	0.027	± 0.077
RLM	10	0.014	0.922	0.021	0.994	0.468	± 0.039
	9	0.013	0.917	0.024	0.992	0.477	± 0.044
	8	0.017	0.901	0.032	0.985	0.415	± 0.06
DBC	10	0.268	0.641	0.018	0.99	0.488	± 0.05
	9	0.3	0.599	0.021	0.986	0.479	± 0.059
	8	0.339	0.546	0.025	0.975	0.376	± 0.079
SFA	10	0.148	0.549	0.047	0.919	0.466	± 0.036
	9	0.155	0.535	0.043	0.929	0.486	± 0.033
	8	0.165	0.511	0.037	0.943	0.488	± 0.048
PSA	10	-0.065	1.038	0.013	0.998	0.446	± 0.022
	9	-0.059	1.046	0.02	0.996	0.485	± 0.033
	8	-0.033	1.056	0.03	0.99	0.47	± 0.048

Tabla 3.4. Resultados estadísticos para superficies generadas con MPA para todos los métodos. Los resultados combinan todas las rugosidades. En general, se observa un sesgo mayor y una precisión menor que en transformada de Fourier.

5. Resultados

5.1 Simulación de contacto de superficies planas elastoplásticas

5.1.1 Desplazamiento, fuerza y área

Después de las correcciones aplicadas, se grafican el área y la fuerza contra el desplazamiento. Lo primero que se observa en la curva área-desplazamiento (figura 5.1, a)) es el efecto de la dimensión fractal en el área de contacto. En dimensiones fractales menores, el área de contacto satura a menos de dos rugosidades máximas de desplazamiento, mientras que en dimensiones fractales altas, no se alcanza la saturación.

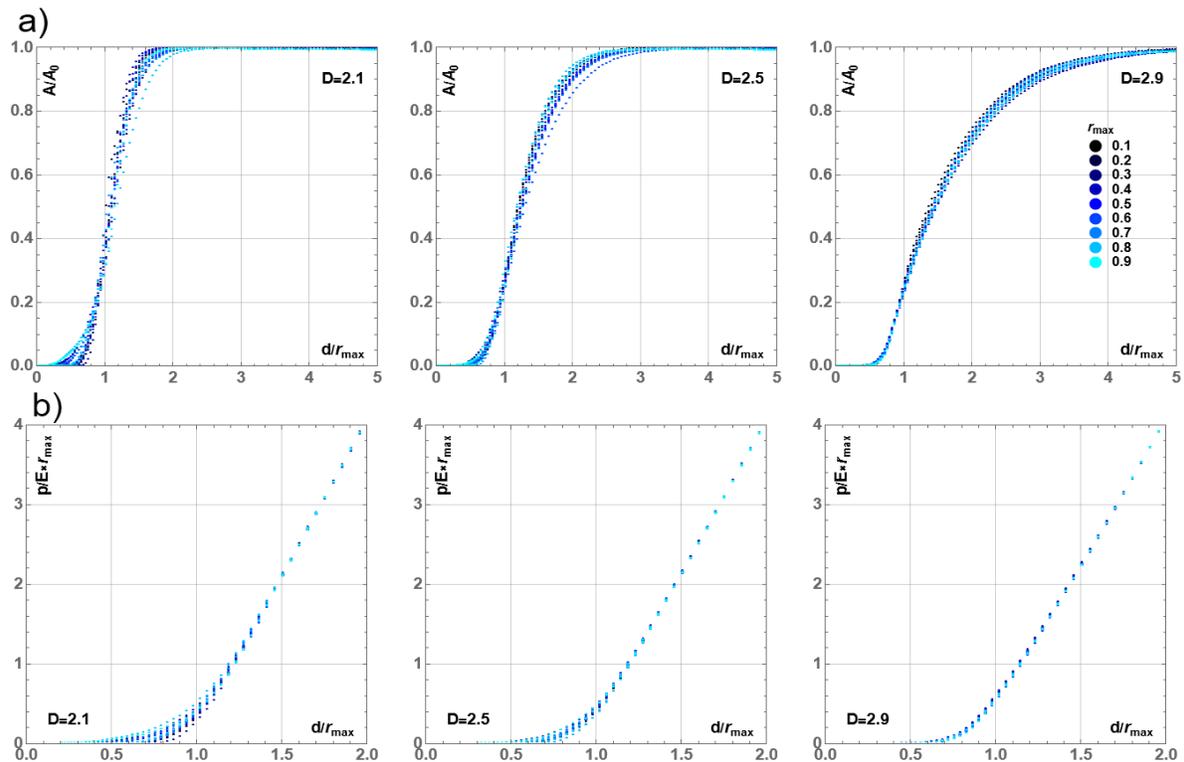


Figura 5.1. a) Curvas de área-desplazamiento y b) curvas de fuerza-desplazamiento de simulaciones de contacto divididas por dimensión fractal ($D=2.1$, 2.5 y 2.9). Cada gráfica contiene 18 curvas, que corresponden a 9 rugosidades diferentes, con dos curvas por cada rugosidad.

Al analizar las gráficas con la misma dimensión fractal, pero diferente rugosidad, se observa que la rugosidad no tiene efecto en el área de contacto y la diferencia entre curvas con distinta rugosidad es debida a la aleatoriedad de las superficies generadas. Esta observación se corrobora en el análisis estadístico realizado en el apéndice (figura 9.1), donde se confirma la hipótesis cero, que la rugosidad no es un factor relevante en la diferencia entre simulaciones elásticas, por lo que las 18 simulaciones dentro de una sola dimensión fractal se aprovechan para mejorar la estadística de los resultados.

En las curvas de fuerza-desplazamiento (figura 5.1, inciso b)), no se percibe diferencia ni en curvas con la misma dimensión fractal, ni al variar la rugosidad. La dispersión en los datos se da por aleatoriedad.

5.1.2 Dimensión fractal

De cada simulación de contacto, se obtuvieron veinte áreas de contacto para caracterizar el desplazamiento de la placa. Se ha observado que los instantes del inicio del contacto y cuando satura el área de contacto dan una mala representación para calcular la dimensión fractal. Después de realizar algunos experimentos, se decidió considerar aquellos resultados con áreas de contacto absolutos entre 0.1 y 0.9, pues son las que representan correctamente la dimensión fractal.

La figura 5.2 muestra la gráfica de $1 - H_{in}$ vs $1 - H_{out}$ después de la corrección de áreas que se obtuvo en la sección anterior, para las áreas de contacto entre 0.1 y 0.9. Salta a la vista que la dimensión fractal resultante es notoriamente más alta que la de las superficies originales. La diferencia entre la dimensión fractal de las superficies originales y la dimensión fractal después del contacto es menor a medida que la dimensión fractal es mayor, dado que no es geoméricamente posible obtener dimensiones fractales más altas. Aun así, se obtienen algunos valores de dimensión fractal arriba de 3.

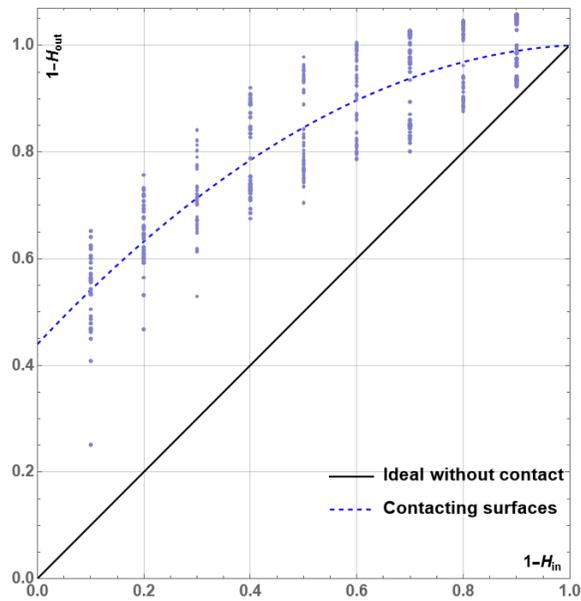


Figura 5.2. Dimensiones fractales obtenidas mediante BCM de superficies en contacto después de aplicar la corrección.

Esta diferencia también se observa si se grafica D_{out}/D_{in} con el área de contacto (figura 5.3). Las dimensiones fractales menores tienen un valor mayor de D_{out}/D_{in} lo que implica una diferencia mayor, mientras que las dimensiones fractales mayores se acercan a uno. El coeficiente mayor tiende a aparecer en los valores medios de área de contacto, por lo que se demuestra contundentemente que la dimensión fractal aumenta al existir contacto entre dos superficies con la misma dimensión fractal.

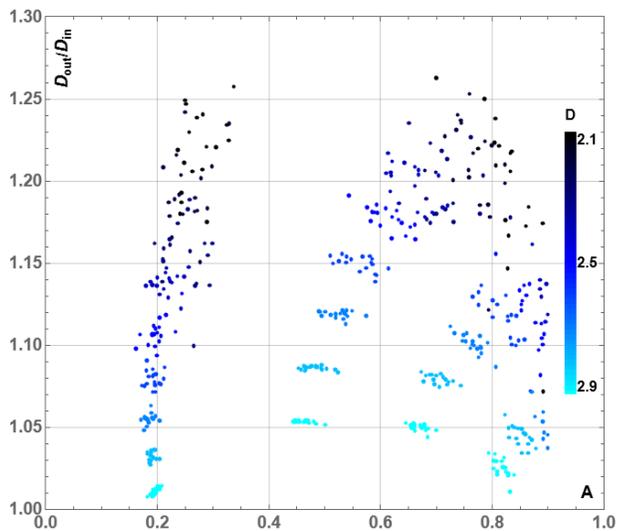


Figura 5.3. Relación entre la dimensión fractal calculada y la dimensión fractal originada contra el área de contacto. En negro se observan las dimensiones fractales menores, y en cyan las mayores.

5.1.3 Área de contacto vs superficies sin contacto.

Al comparar la diferencia entre el área de contacto obtenida y el área de soporte de las dos superficies, se muestra el por qué es necesario realizar las simulaciones de contacto. En la figura 5.4 se observan ambos casos. El área de contacto se observa con mucho más detalle en islas grandes que no detecta el área de soporte, y aparecen pequeñas islas que son invisibles en la segunda.

El fenómeno se puede explicar porque el contacto deforma la superficie. Cerca de las asperezas pequeñas, se forman ligeras depresiones por el campo de deformaciones elásticas. Al crecer el área de contacto, estas depresiones se desplazan verticalmente con su entorno. Sólo cuando se alcance la saturación, estas zonas empiezan a desaparecer, mientras que en las superficies con mayor dimensión fractal, persisten hasta el final.

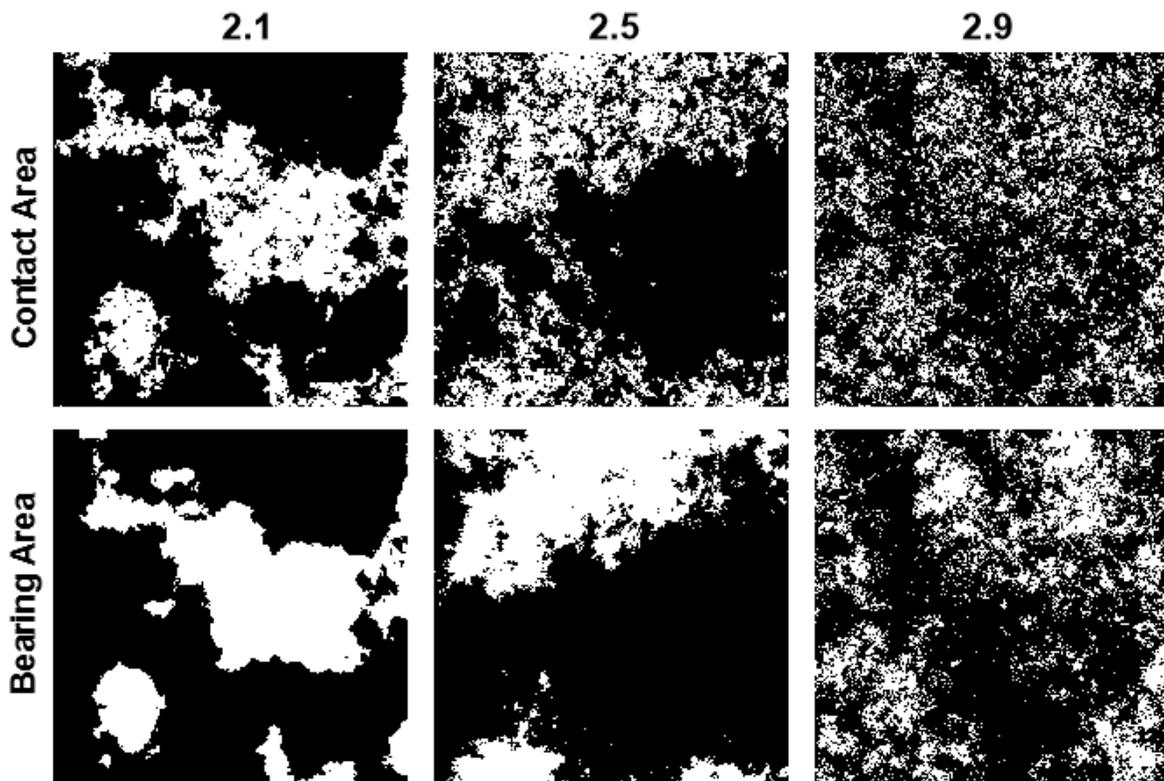


Figura 5.4. Comparación entre áreas de contacto y el área de soporte de tres superficies con dimensiones fractales distintas (2.1, 2.5 y 2.9), a 29.48%, 28.4% y 26.85% de área de contacto respectivamente.

5.2 Simulación de contacto de superficies planas elastoplásticas

5.2.1 La transición plástica en la mecánica de contacto

Para analizar la transición plástica en la mecánica de contacto, es importante predecir el comienzo de la deformación plástica en un material sujeto a un estado de esfuerzos en general. Los criterios de fluencia son funciones matemáticas empíricas que predicen el comienzo de la deformación plástica para una combinación específica de sollicitaciones en un sólido. El análisis general de los criterios de fluencia se puede encontrar en textos sobre la mecánica de sólidos, pero la aplicación específica para el caso de la mecánica de contacto merece la atención particular de esta tesis, ya que no todas las conclusiones encontradas en esta sección están disponibles en la literatura abierta.

Los criterios de fluencia más conocidos son el criterio de Tresca y el criterio de von Mises. Si bien en los libros de texto [8] aún se utiliza el primero, hoy en día, von Mises es el único que se considera en el modelado de la deformación plástica isotrópica mediante FEM. El criterio de von Mises propone que la plasticidad se alcanza cuando los componentes del estado de esfuerzos en un punto sólido satisfacen la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k^2 \quad (5.1)$$

Siendo k^2 una constante que se determina mediante ensayo de tracción del material y σ_1 , σ_2 y σ_3 como los esfuerzos principales. Si el límite que se obtiene es σ_{VM} , y se tienen las condiciones que $\sigma_1 = \sigma_{VM}$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$:

$$k^2 = \frac{\sigma_{VM}^2}{3} \quad (5.2)$$

Mediante este criterio, es posible determinar el comportamiento del esfuerzo en una superficie que esté influenciada por el modelo de Hertz a lo largo del eje vertical Z [8]. Para ello, se requieren los esfuerzos calculados mediante la presión de Hertz:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p_0(1 + \nu) \left[1 - \frac{z}{a} \tan^{-1} \left(\frac{a}{z} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (5.3)$$

$$\sigma_z = -p_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (5.4)$$

Con z la profundidad en la que se calcula el esfuerzo.

Se tienen condiciones axisimétricas en el esfuerzo, por lo que $\sigma_1 = \sigma_2$, entonces, de las ecuaciones 5.1 y 5.2, el criterio de von Mises queda así:

$$[(0 - 0)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 2\sigma_{VM}^2 \quad (5.5)$$

$$2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_{VM}^2 \quad (5.6)$$

$$\sigma_{VM} = (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (5.7)$$

Para encontrar el esfuerzo de cedencia en la presión de Hertz, se sustituyen las ecuaciones 5.3 y 5.4 en la ecuación 5.7:

$$\sigma_{VM} = p_0 \left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{-1} - (1 + \nu) \left(1 - \frac{z}{a} \tan^{-1}\left(\frac{a}{z}\right)\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{-1} \quad (5.8)$$

Para obtener el desplazamiento requerido para llegar al límite plástico se igualan las fuerzas de las ecuaciones 3.1 y 3.5 que se utilizaron en el capítulo 3:

$$\frac{2}{3} \pi p_0 a^2 = \frac{4 E^* a^3}{3 r} \quad (5.9)$$

Se sustituye a de la ecuación 3.6 en la ecuación 5.9:

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* r^{-\frac{1}{2}} u_z^{1/2} \quad (5.10)$$

Y ahora, se sustituye el p_0 de la ecuación 5.10 en la ecuación 5.8:

$$\frac{\sigma_{VM}}{E^*} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{u_z}{r}\right)^{1/2} \left(\frac{3}{2} \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1} - (1 + \nu) \left(1 - \frac{a}{z} \tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)\right)\right) \quad (5.11)$$

Es importante encontrar la relación correcta entre a y z que se utiliza para un ν dado, por lo que se realiza una sustitución en la nomenclatura con $\bar{z} = \frac{a}{z}$ y se define $\varphi(\nu, \bar{z}) = \left(\frac{3}{2} (1 + \bar{z}^2)^{-1} - (1 + \nu) \left(1 - \bar{z} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right)\right)$. La deformación plástica iniciará en la posición \bar{z}_{Max} donde \bar{z} alcanza un máximo, es decir, para $\frac{d\varphi}{d\bar{z}} = 0$. Desarrollando la derivada y resolviendo la ecuación por vía numérica, se encuentra que para $\nu = 0.3$, \bar{z} debe ser 0.48, y $\varphi(\nu) = 0.62$. Este proceso se muestra en la figura 5.5.

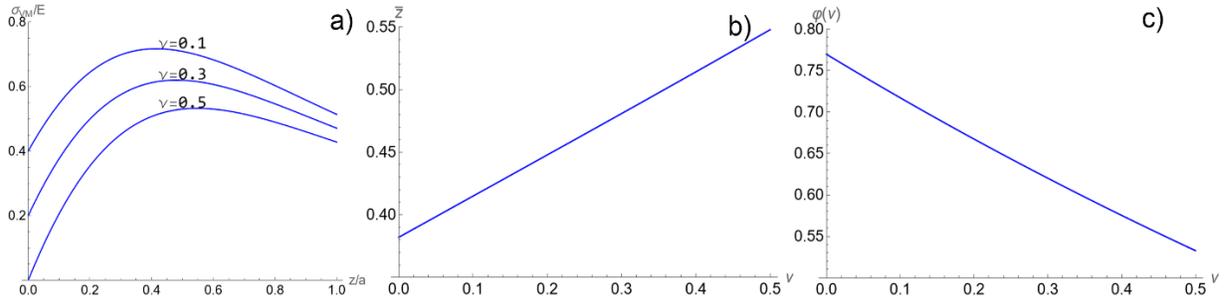


Figura 5.5. a) Se observan las distintas posibilidades de la evolución del esfuerzo de von Mises a distintos valores de ν . b) Se observa la gráfica de ν vs \bar{z} , donde se obtiene el valor de $\bar{z} = 0.48$ para $\nu = 0.3$. c) Se muestra la gráfica de $\varphi(\nu)$ vs ν . El valor de $\varphi(\nu)$ para $\nu = 0.3$ resulta ser de 0.62.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{\sigma_{VM}}{E} = \frac{2\varphi(\nu)}{\pi} \left(\frac{u_z}{r}\right)^{1/2} \approx c_1 \left(\frac{u_z}{r}\right)^{1/2} \quad (5.12)$$

con $c_1 \approx 0.4$.

El desplazamiento necesario para llegar al límite plástico es el siguiente:

$$u_y = r \left(\frac{\sigma_y}{c_1 E}\right)^2 \quad (5.13)$$

Y para obtener el radio a del área de contacto en el límite plástico:

$$a_y = \frac{r\sigma_y}{c_1 E} \quad (5.14)$$

Ahora bien, si se requiere obtener la presión de contacto p_0 al momento de la deformación plástica, se sustituye el desplazamiento:

$$p_{0y} = \frac{2}{\pi} E r^{-\frac{1}{2}} u_z^{1/2} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_y}{c_1} = \frac{\sigma_y}{\varphi(\nu)} \approx 1.61\sigma_y \quad (5.15)$$

Por lo que se requiere que la presión de contacto alcance 1.61 del esfuerzo de cedencia para se inicie la deformación plástica (para $\nu = 0.3$).

La plasticidad inicial se refiere al primer punto donde se alcanza el límite de cedencia, el cual se encuentra a una distancia de aproximadamente $0.48r$ por debajo de la superficie. En la literatura, Tabor [168] estudió en 1951 la plasticidad completa, que ocurre cuando la zona plástica alcanza la superficie. Ahí, llegó a la conclusión que la condición de plasticidad se alcanza en el momento en que la presión de contacto se acerca a tres veces el esfuerzo de cedencia. Por lo tanto, se utilizará el concepto de $p_{0y} \approx 1.61\sigma_y$ para indicar la deformación plástica incipiente y de $p_{0T} \approx 3\sigma_y$ para la deformación plástica total.

Para poder explicar las conclusiones de este trabajo en contraste con los citados previamente, es importante observar el desarrollo de contacto normal uniaxial, en una columna libre. En este caso, es evidente que la deformación plástica inicia cuando la presión $p = \sigma_y$.

Para una columna restringida por condiciones de frontera cíclicas (deformación uniaxial), se observan primero las relaciones de esfuerzo-deformación:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) \quad (5.16a)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) \quad (5.16b)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) \quad (5.16c)$$

Para definir las propiedades de columna libre y esfuerzo uniaxial se tiene que los esfuerzos en x y y son iguales, $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ y que no existe deformación para dichas direcciones $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, produciendo:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - 2\nu\sigma_{11}) \quad (5.17a)$$

$$0 = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})) \quad (5.17b)$$

Con la ecuación 5.17b, se obtiene σ_{11} en función de σ_{33} :

$$\sigma_{11} = \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_{33} \quad (5.18)$$

Aplicando el criterio de von Mises (ecuación 5.7) se tiene que:

$$\sigma_{VM} = \sigma_{33} - \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_{33} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\sigma_{33} \quad (5.19)$$

Para así encontrar el esfuerzo requerido por el material para llegar al esfuerzo de fluencia con $\nu = 0.3$:

$$\sigma_{33} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}\sigma_y = 1.75\sigma_y \quad (5.20)$$

Al observar los resultados de los factores plásticos, se observa una paradoja: las asperezas pueden resistir, según la teoría vigente, 3 veces el límite de cedencia, superior a lo que puede resistir una columna en esfuerzo. Al tener sólo 1/3 del área de contacto (o $1.75/3 \approx 0.58$ para deformación uniaxial), se puede alcanzar plasticidad completa en la columna, pero no en la superficie.

Por el escalamiento elástico observado en la primera serie de simulaciones, se sabe que p_0 será proporcional a la rugosidad, es decir, el límite de cedencia se alcanzará antes en superficies más rugosas. Conforme avanza la deformación plástica, el escalamiento deja de ser válido (esto se justifica en el apéndice), pero es válido hasta la transición plástica.

5.2.2 La transición plástica en superficies rugosas

En la misma idea de encontrar la transición plástica, existe el concepto de índice de plasticidad, ψ . Este se define como una característica de las asperezas. Éstas se encuentran en rango elástico cuando ψ es menor a uno, mientras que la deformación plástica ocurre cuando ψ es mayor a 1. A pesar de que el índice de plasticidad no provee una predicción precisa del campo de deformación, puede ser utilizado como parámetro cualitativo. En 2003, Kogut y Etsion [169] propusieron un índice de plasticidad con valor de 0.6 como el límite de contacto puramente elástico y 1.4 como la transición a contacto elastoplástico.

La primera propuesta de índice de plasticidad fue en 1966 por parte de Greenwood y Williamson [9] y la relación es la siguiente:

$$\psi_{GW} = \frac{E}{H_v} \sqrt{\frac{R_{rms}}{\rho_s}} \quad (5.21)$$

Con H_v como la dureza Vickers y ρ_s como el radio de curvatura de las asperezas. Existe una relación directa entre el esfuerzo de cedencia y la dureza Vickers propuesta por Tabor [168], $H_v \approx 3\sigma_y$, lo que enlaza con el concepto de plasticidad total antes mencionado.

Mikic [170] propuso en 1974 otra versión del índice de plasticidad, donde involucra la pendiente r.m.s, m_{rms} , que define una medición general de las pendientes en la superficie, y se obtiene mediante la raíz del segundo momento espectral de la superficie:

$$\psi_M = \frac{E}{H_v} m_{rms} \quad (5.22)$$

Sridhar y Yovanovich [171] propusieron un índice de plasticidad donde colocaron directamente la parte plástica en el numerador y la elástica en el denominador como sigue:

$$\psi_{SY} = \frac{P/H_v}{P/H_e} = \frac{E m}{H_v \sqrt{2}} \quad (5.23)$$

Donde H_e es un equivalente elástico de la dureza $H_e = \frac{E m}{H_v \sqrt{2}}$, y m es la pendiente absoluta promedio del perfil.

En 2007, Zavarise et al. [172] propusieron un modelo en el que también utilizaron la lógica de la parte elástica en el numerador y la plástica en el denominador, pero basándose en el modelo de Persson. El modelo es el siguiente:

$$\psi_P = \frac{r_u h_0}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi\beta(2-D)}{D-1} \frac{E}{H_v} \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_u}\right)^{D-1}} \quad (5.24)$$

Siendo β dependiente de la dimensión fractal, $r_u = 2\pi/\lambda_l$ y $h_0 = \sqrt{2 R_{rms}^2}$.

Ciavarella [173] propone en 2024 un índice de plasticidad definido por la relación de la presión promedio de las asperezas y la dureza:

$$\psi_C = \frac{\bar{p}_{asp}}{H_0} = \frac{E}{2H_0} \sqrt{2m_2} = \frac{1}{2} \frac{E}{H_0} \sqrt{\frac{\pi K}{1-H} r_l^{1-H}} \quad (5.25)$$

Como se puede apreciar, todos los índices de plasticidad contienen módulo de Young, dureza, y un factor que caracteriza la superficie. Cabe recalcar que en los dos últimos se observa la dimensión fractal (o exponente de Hurst) de manera expresa.

La transición elastoplástica se determina por dos factores principales, uno es la relación de $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_y}{E}$, que se denominará el límite de cedencia equivalente, y que es adimensional, mientras que el otro es la rugosidad, y guardan relación entre sí de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{\bar{\sigma}}{Er_{max}} \quad (5.26)$$

donde \bar{r} se llamará la rugosidad equivalente. Esto significa que la dureza únicamente ($H_v \approx 3\sigma_y$) no es un factor importante en la tribología. La propiedad del material que determina la transición plástica es el límite de cedencia equivalente. Algunos ejemplos se dan en la tabla 4.1. No obstante, un material con bajo $\bar{\sigma}$ y baja rugosidad mostrará el mismo grado de plasticidad que uno con alto $\bar{\sigma}$ y alta rugosidad. Como muestran Zavarise [172] y Ciavarella [173], y se ha confirmado en este trabajo, la dimensión fractal es importante también.

Material	σ_y/E
Carburo de tungsteno para corte [174]	0.00072
Bronce para bujes [175]	0.0014
Aluminio-Estaño para cojinetes [176]	0.0016
Hierro gris, grado G4000 [177]	0.0019
Diamante [178]	0.0028
Acero templado para rodamientos [177]	0.0074
Diamante nanopolicristalino [179]	0.027
Diamante policristalino de grafito [180]	0.041
Superficie nanoestructurada Cobre-Aluminio-Berilo [181]	0.062

Tabla 4.1. Algunos ejemplos del límite de cedencia equivalente para materiales utilizados en aplicaciones tribológicas.

5.2.3 Desplazamiento, fuerza y área para simulaciones elastoplásticas

A continuación, se observa lo relativo a desplazamiento, fuerza y área para las simulaciones de contacto normal en superficies planas elastoplásticas con un límite de cedencia de 500 MPa. En la figura 5.6, se observan las gráficas área-desplazamiento (inciso a) y fuerza-desplazamiento (inciso b), con 2.1, 2.5 y 2.9 de dimensión fractal respectivamente. Las curvas se recortan en el momento en que el cuerpo llega a plasticidad total, valor que es dependiente de la rugosidad máxima: simulaciones con menor rugosidad máxima, llegan a un valor de fuerza mayor, por lo que las simulaciones con la misma rugosidad coinciden en el valor. Este fenómeno tiene relación con el límite de cedencia en las simulaciones elastoplásticas.

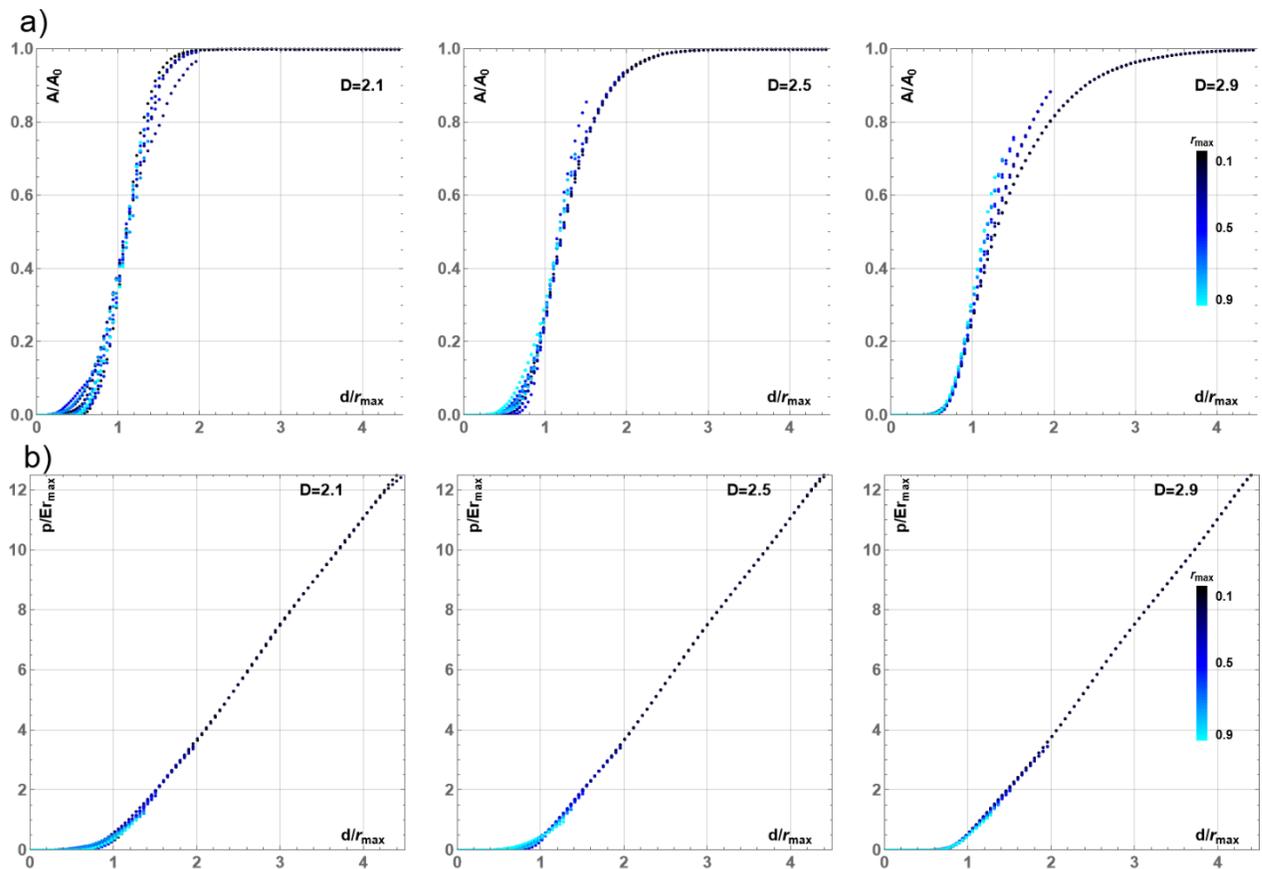


Figura 5.6. a) Curvas área-desplazamiento y b) curvas de fuerza-desplazamiento de simulaciones de contacto elastoplásticas con límite de cedencia de 500 MPa. Cada gráfica contiene 10 curvas, que corresponden a 5 rugosidades diferentes, con dos curvas por rugosidad.

Entre las curvas área-desplazamiento (figura 5.6, a) de la misma dimensión fractal, se observa una aleatoriedad inherente a las simulaciones. Al comparar dimensiones fractales bajas con altas, se observa que las curvas con dimensión fractal alta tardan en saturar más. Respecto a las curvas de fuerza-desplazamiento (figura 5.6 b), las diferencias entre curvas con la misma dimensión fractal son sutiles. La pendiente de las curvas con mayor rugosidad máxima es un poco menor, pues llegan a su valor máximo más rápido, y la pendiente se reduce para llegar al punto máximo. La dispersión en los datos por aleatoriedad no es perceptible.

En el caso de las simulaciones de contacto normal con superficies planas elastoplásticas con un límite de cedencia de 1250 MPa, el escenario es similar, pero se llega a una fuerza mayor. Las gráficas de área-desplazamiento se observan en la figura 5.7, a. Las diferencias entre simulaciones con la misma dimensión fractal y distinta rugosidad se notan imperceptibles. Cosa contraria al variar la dimensión fractal, donde la saturación en dimensión fractal baja ocurre más rápido. En el caso de fuerza-desplazamiento, las diferencias entre dimensiones fractales distintas no son perceptibles, ni al variar las rugosidades máximas, salvo por el valor máximo que alcanzan. Dado que los resultados de ambos límites de cedencia son similares, se continua el análisis con el límite de cedencia de 500 MPa.

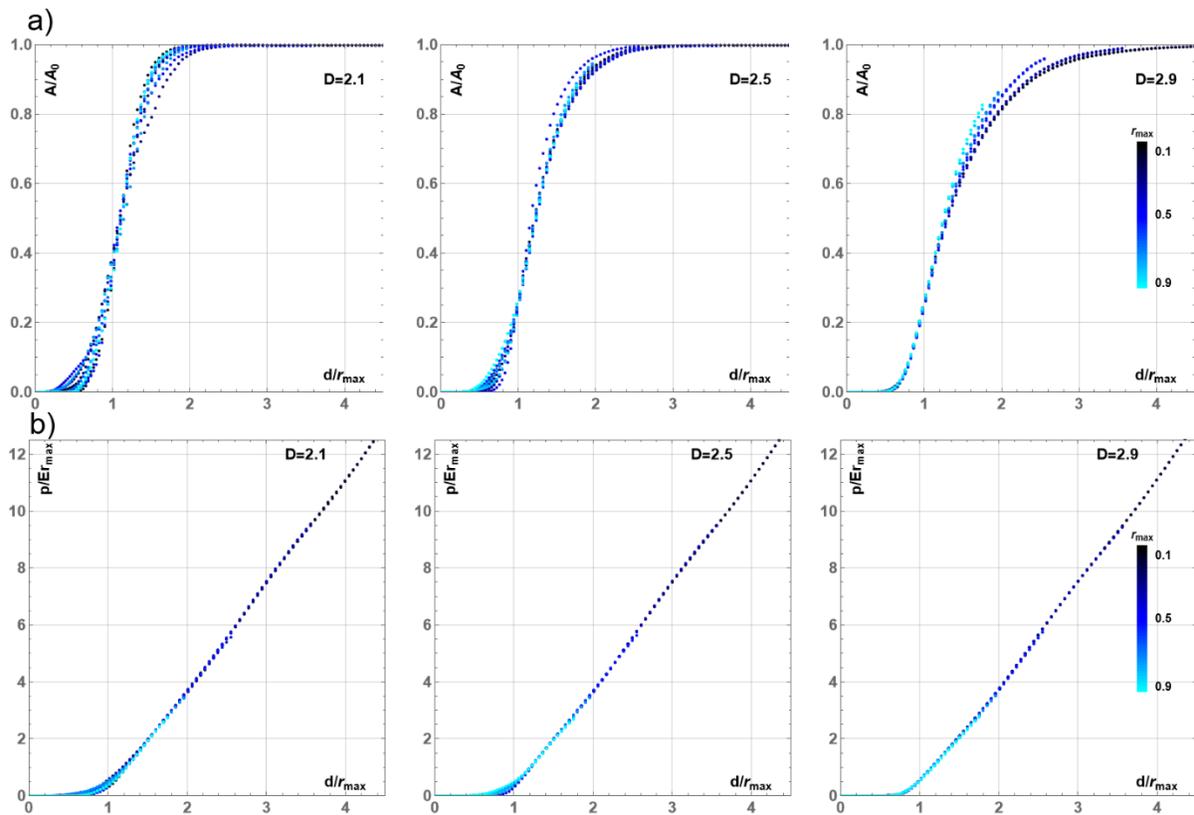


Figura 5.7. a) Curvas área-desplazamiento y b) curvas de fuerza-desplazamiento de simulaciones de contacto elastoplásticas con límite de cedencia de 1250 MPa. Cada gráfica contiene 10 curvas, que corresponden a 5 rugosidades diferentes, con dos curvas por cada rugosidad.

5.2.4 Redistribución plástica

Al transcurrir el contacto elastoplástico, se ha observado que las zonas plásticas se redistribuyen para soportar mejor la carga. En la figura 5.8 se observa un ejemplo al respecto, caracterizado en una zona de 65x65 de la simulación con límite de cedencia de 500 MPa, con $D=2.9$ y $r=0.5$. Se observa de color blanco la región donde no existe contacto, en gris donde existe contacto elástico, en color amarillo la región donde existe contacto plástico y en rojo donde se ha alcanzado el contacto plástico total. En el primer fotograma ocurre el primer contacto de la simulación, este contacto es elástico y se da en una región muy pequeña. Esta región elástica se transforma en plástica y en sus alrededores empieza a existir contacto elástico; en varias asperezas cercanas sucede lo mismo, y se forman pequeñas islas plásticas. En el tercer fotograma, la zona del primer contacto alcanza plasticidad total, mientras que su vecindad se encuentra en contacto plástico; las islas de contacto plástico se unen entre sí. En el cuarto fotograma, el bulto ha alcanzado la plasticidad incipiente, sin embargo, se observa que aún existen varios puntos sin contacto; se observa que el primer punto de contacto, que antes estaba en plasticidad total, reduce su carga, y se mantiene en zona plástica, debido a que las asperezas de su alrededor absorben su carga.

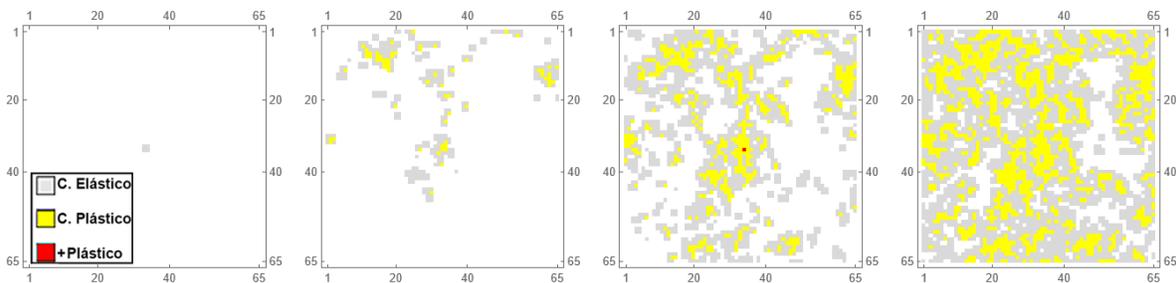


Figura 5.8. Presiones de contacto de una región 65x65 de la simulación con límite de cedencia de 500 MPa con $D=2.9$ y $r=0.5$. Se observan cuatro fotogramas, desde que inicia el contacto, hasta que el bulto alcance su límite plástico.

La figura 5.9 muestra un segundo ejemplo. En este caso, la primera zona de contacto alcanza plasticidad total inmediatamente y las zonas cercanas entran en plasticidad incipiente. En el siguiente fotograma, las zonas que en el fotograma anterior estaban en plasticidad, alcanzan plasticidad total, y sus alrededores llegan ahora a plasticidad. En el tercer fotograma, el cuerpo alcanza plasticidad total, y se observan puntos que se encontraban en plasticidad total, que se han redistribuido y su carga ha bajado, mientras que otras asperezas han alcanzado ahora plasticidad total. Esta redistribución de carga impide que se alcance el contacto total.

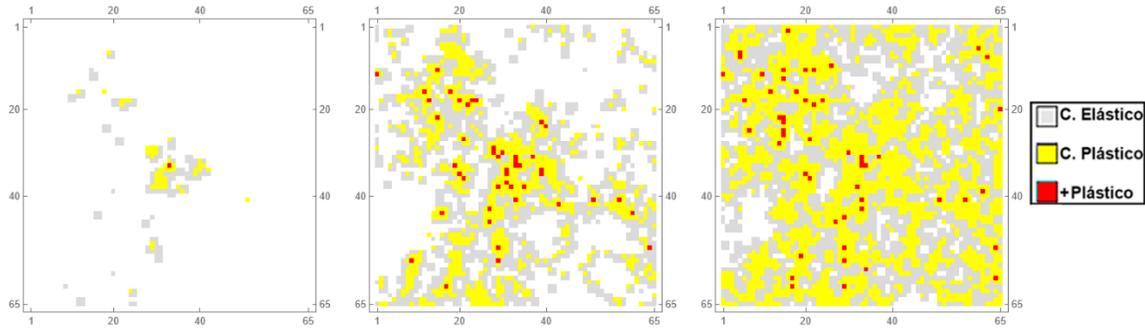


Figura 5.9. Presiones de contacto de una región 65x65 de la simulación con límite de cedencia de 500 MPa con $D=2.9$ y $r=0.9$. Se observan tres fotogramas, desde que inicia el contacto, hasta que el bulto alcance su límite plástico.

La distribución del porcentaje de área de contacto elástico y plástico se ve fuertemente influenciada por la rugosidad y la dimensión fractal. En la figura 5.10, se observa el porcentaje de área de contacto en todas las simulaciones con límite de cedencia de 500 MPa, representado en gráficas circulares. La gráfica de cada escenario es el promedio de las dos réplicas de dicha simulación. El círculo central representa el inicio de cada simulación, mientras que el círculo exterior representa el punto en el que se alcanza el colapso completo de la columna. Se utiliza el mismo código de color que en las figuras anteriores.

Se aprecia que, al tener baja rugosidad y baja dimensión fractal, las asperezas que llegan a plasticidad son casi nulas. Al aumentar cualquiera de estos dos factores, se observa que más porcentaje de área alcanza plasticidad. Al aumentar ambos factores es cuando el área de contacto plástica crece de forma notable, y en la combinación de dimensión fractal sobre 2.7 y rugosidad sobre 0.7, es cuando existen asperezas que alcanzan plasticidad total.

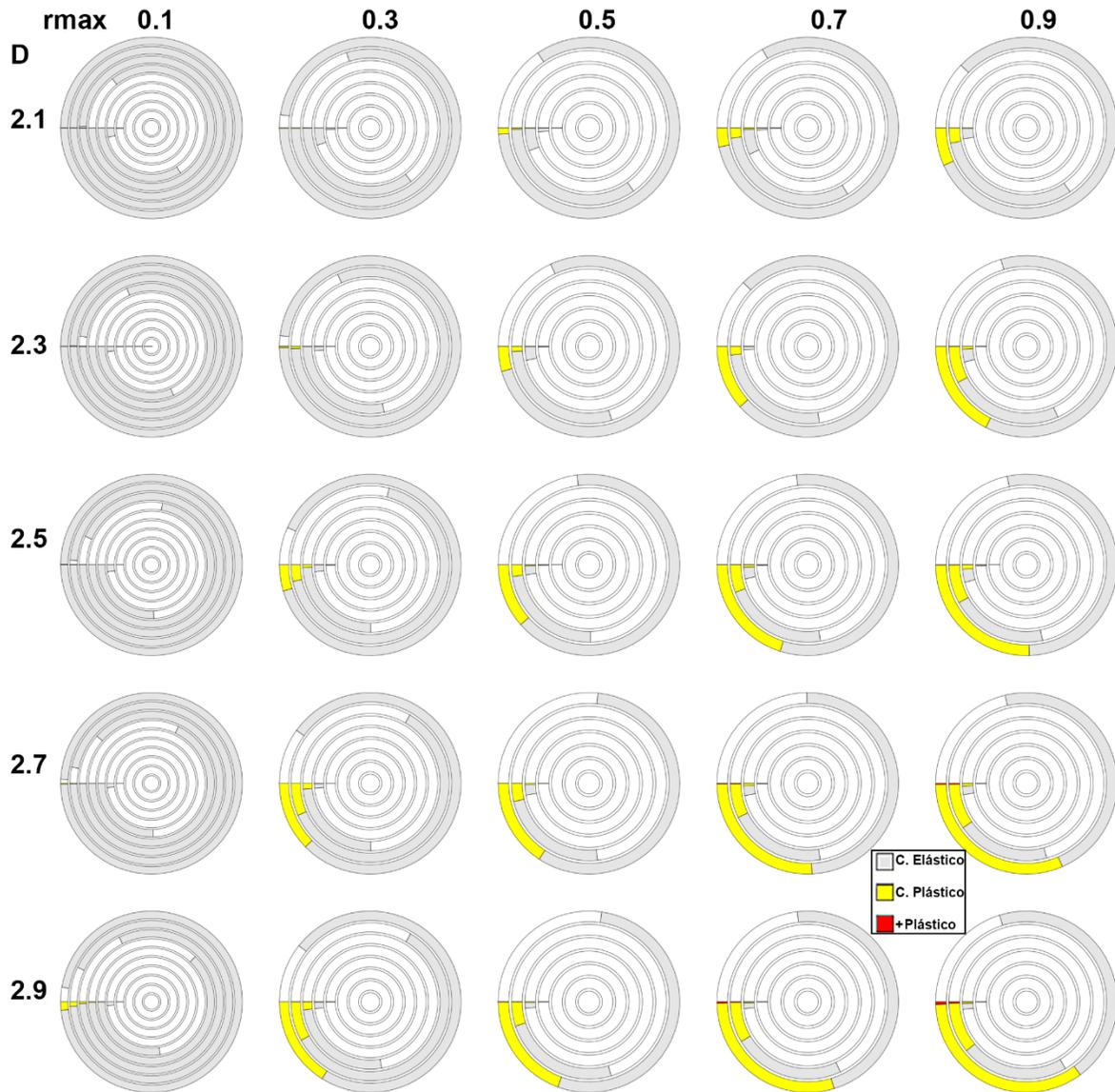


Figura 5.10. Gráficas circulares de la distribución de áreas de contacto para las simulaciones de contacto plano-plano para superficies elastoplásticas. Por renglones se observan las distintas dimensiones fractales (2.1, a 2.9, cada 0.2) y por columnas se encuentran las distintas rugosidades máximas (0.1 a 0.9, cada 0.2). A medida que incrementa el radio de cada gráfica, incrementa el desplazamiento en cada simulación, siendo el exterior el momento de colapso total. En blanco se observa el área sin contacto, en gris en contacto elástico, en amarillo en contacto plástico, y en rojo los puntos que superan el contacto plástico.

En las figuras 5.11 y 5.12, se presenta la fracción de la fuerza y del área real de contacto en estado elástico, plástico incipiente y plástico total, para todas las rugosidades, de tres dimensiones fractales (2.1, 2.5 y 2.9 respectivamente) de las

simulaciones con límite de cedencia de 500 MPa. El radio y el código de color utilizan la misma nomenclatura que en las gráficas anteriores.

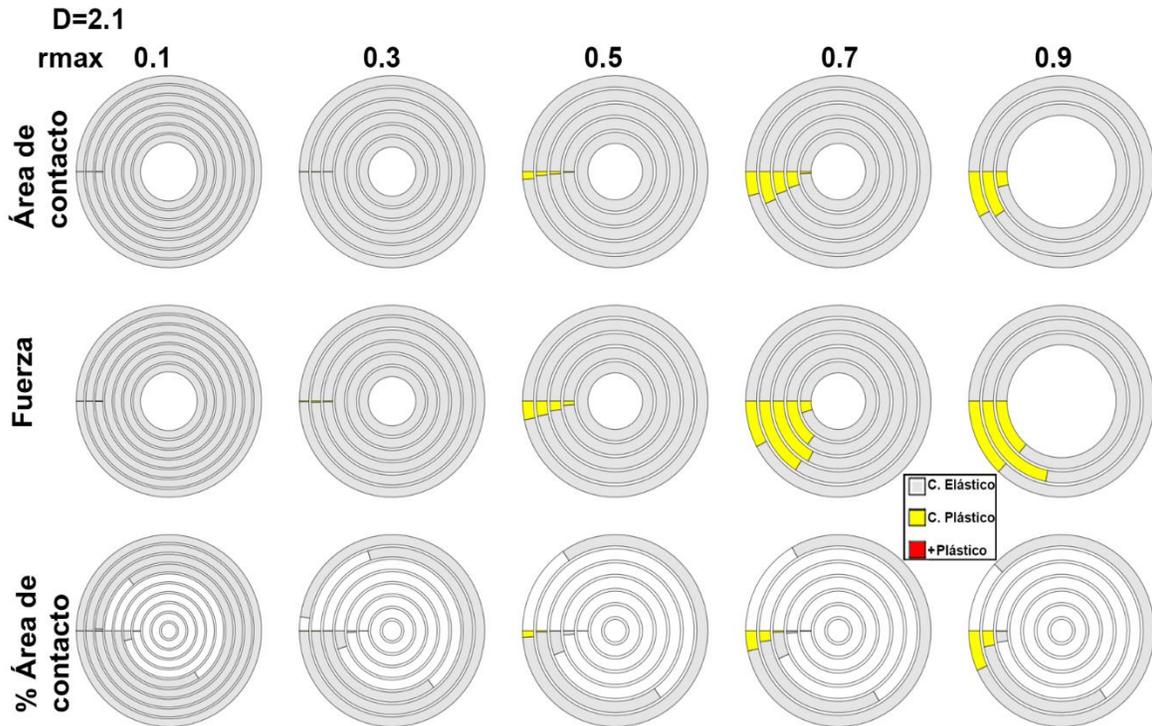


Figura 5.11. Gráficas circulares que muestran la fracción del área en contacto y de la fuerza, y el porcentaje de área de contacto para las simulaciones de contacto plano-plano para superficies con límite de cedencia de 500 MPa, y $D=2.1$. A medida que incrementa el radio de cada gráfica, incrementa el desplazamiento en cada simulación, siendo el exterior el momento en que el cuerpo del modelo alcanza plasticidad total. En blanco se observa el área sin contacto, en gris en contacto elástico, en amarillo en contacto plástico, y en rojo los puntos que superan el contacto plástico.

En las gráficas de área de contacto, se puede observar la redistribución plástica mencionada anteriormente, el avance del contacto plástico no es constante, sino incrementa y luego disminuye debido a este fenómeno. En el caso de rugosidades y dimensiones fractales altas, se observa el fenómeno también en las asperezas que alcanzan plasticidad total. La redistribución plástica es más evidente en las gráficas de fuerza. Dado que las asperezas plásticas soportan más fuerza que las elásticas, la variación en las asperezas plásticas se nota más en dichas gráficas. Evidentemente, la redistribución plástica no es notoria en el porcentaje de área de contacto, pues los puntos que se redistribuyen no dejan de estar en contacto, sino cambian la carga que soportan a medida que avanza la simulación. Se observa que cuando el cuerpo del modelo colapsa, menos de un tercio de las superficies están aún debajo del límite de cedencia.

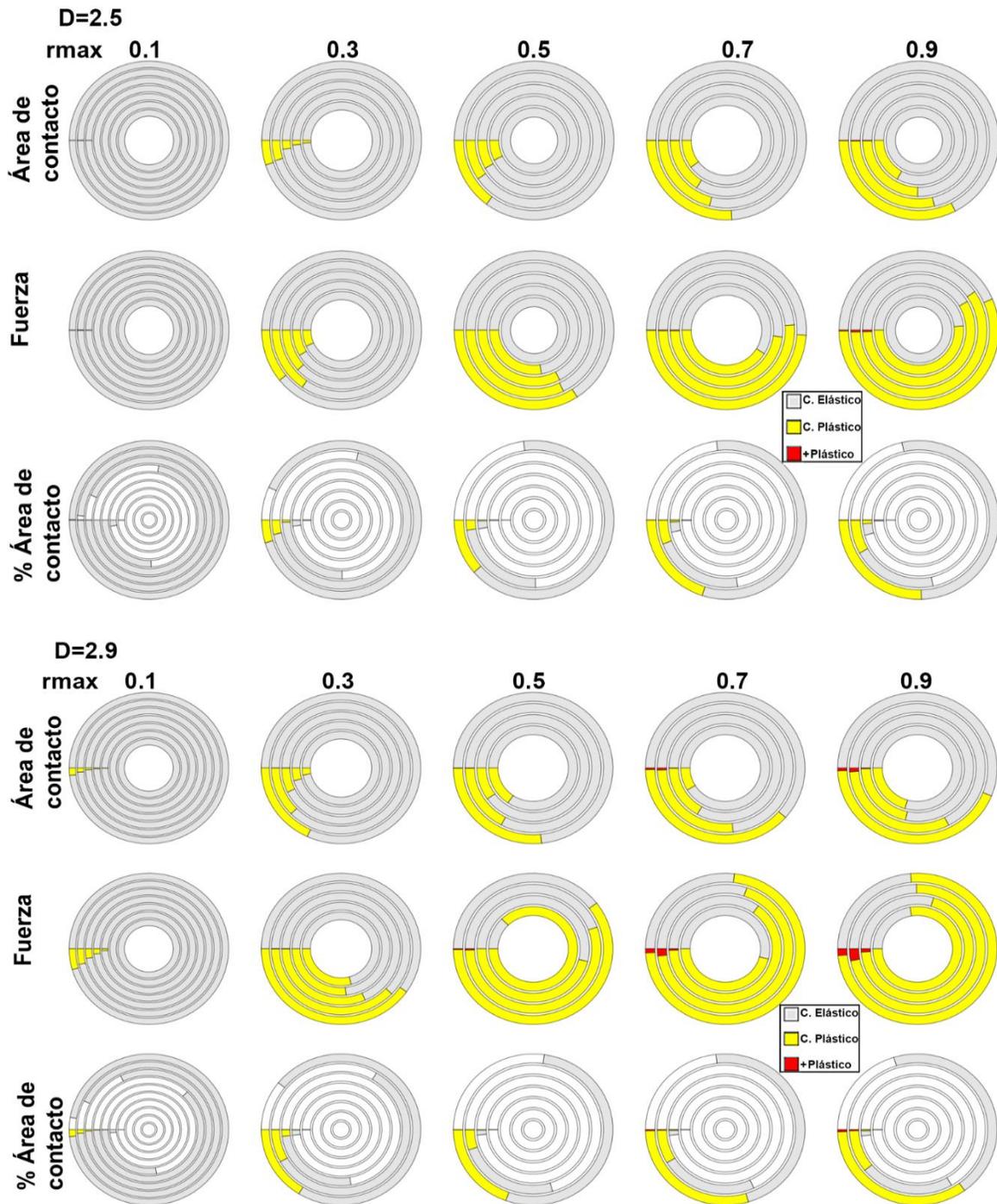


Figura 5.12. Gráficas circulares que muestran la fracción del área en contacto y de la fuerza, y el porcentaje de área de contacto para las simulaciones de contacto plano-plano para superficies con límite de cedencia de 500 MPa, y $D=2.5$ y $D=2.9$, respectivamente. A medida que incrementa el radio de cada gráfica, incrementa el desplazamiento en cada simulación, siendo el exterior el momento en que el bulto del material alcanza plasticidad total. En blanco se observa el área sin contacto, en gris en contacto elástico, en amarillo en contacto plástico, y en rojo los puntos que superan el contacto plástico.

5.3 Simulación de modelo esférico sobre plano elástico

5.3.1 Comparación con Hertz

A continuación, se muestran los resultados de las simulaciones de contacto de superficies plana con elástica. El modelo esférico que se simuló en este trabajo buscó tener una forma y altura más realista acorde con lo que los modelos en la literatura suelen mostrar, en los que se analizan semiesferas completas [121] [182] [183].

En este estudio, se sigue la aproximación de Hertz, pero en lugar de modelar un casquete hiperbólico como aproximación de una esfera en un rango de contacto muy limitado, se modela un casquete esférico con radio grande sobre la base del modelo de elemento finito existente. Esto permite comparar el modelo de Hertz original con un modelo que tiene rugosidad superpuesta. Las diferencias son notables.

En la figura 5.13 se observan las curvas de área vs fuerza. El color cyan corresponde a $D=2.2$, azul a $D=2.5$ y negro a $D=2.8$. Las líneas continuas corresponden a $r=0.2$, las rayadas a $r=0.5$ y las punteadas a 0.8 . La línea roja representa el modelo de Hertz. Cada curva es el promedio de las dos repeticiones que se realizaron por escenario. Se aprecia que existe una diferencia considerable entre el modelo de Hertz y las curvas de la simulación. La simulación más cercana al modelo de Hertz tiene la dimensión fractal más baja y la rugosidad más alta.

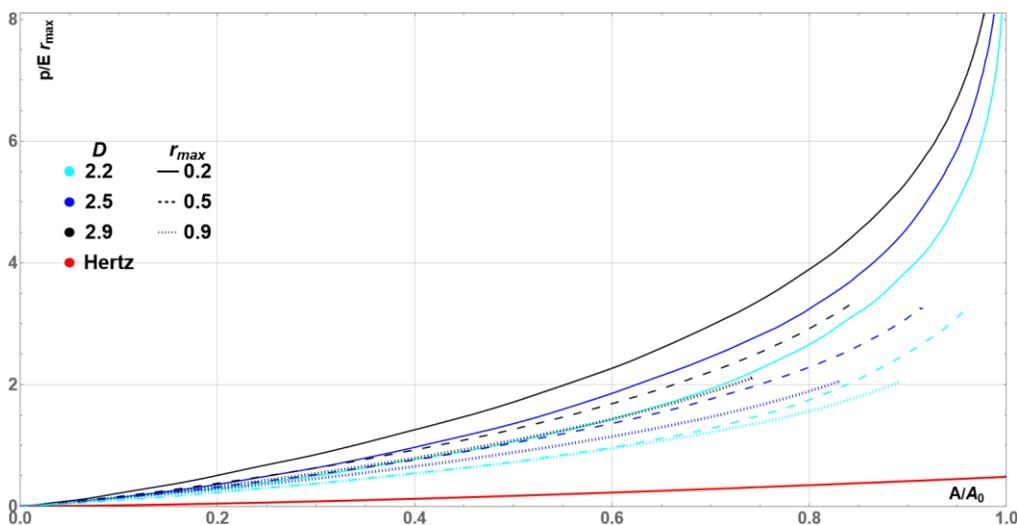


Figura 5.13. Curvas de área vs fuerza en simulación de contacto elástico de superficies esférica con plana.

5.3.2 Presiones de contacto en relación con el esfuerzo de cedencia

Después de observar la factibilidad de generar simulaciones elásticas de contacto esfera con plano, se pueden analizar los resultados en relación con el límite de cedencia. Para ello, se calcula el límite de cedencia adimensional requerido para un desplazamiento dado (ecuación 5.13). Esta fórmula da el punto en que el cuerpo esférico alcanza su límite de cedencia. Para cada valor del desplazamiento en las fórmulas de Hertz, existe un valor de límite elástico tal que $\bar{\sigma} = \sigma_y$ en \bar{z}_{Max} . Se compara la presión p en la superficie con $\bar{\sigma}$ en \bar{z}_{Max} para cada valor del desplazamiento, definiendo un material hipotético que alcance σ_y exactamente en este punto. Evidentemente, el desplazamiento es distinto a cada instante de la simulación, por lo tanto, el límite de cedencia hipotético es distinto para cada punto y en cada escenario distinto.

Dado que la escala de la rugosidad es muy baja a comparación del radio que se usó para generar el casquete esférico, y por el principio de Saint-Venant, una deformación elástica local no tiene influencia en la deformación a distancias suficientemente grandes, por lo que, los detalles de la distribución de presiones de contacto en las asperezas en la superficie no tendrían incidencia directa en el punto donde cede el sólido.

En la figura 5.14, se muestran las presiones de contacto de cuatro simulaciones de contacto de superficies esférica con plana. El círculo negro representa el área de contacto teórica de Hertz para el desplazamiento dado en cada cuadro. La nomenclatura de color vuelve a ser la misma que en las gráficas anteriores: blanco corresponde a puntos sin contacto, gris a contacto elástico ($p < p_{0y}$), amarillo contacto plástico ($p_{0y} < p < p_{0T}$), y rojo a la plasticidad completa ($p = p_{0T}$). Del lado izquierdo se encuentra el inicio del contacto de cada simulación, y del derecho, el momento antes que la zona de contacto alcance el borde del modelo. En todos los escenarios, se observa que desde el primer contacto se alcanza la plasticidad total en algunos puntos y esto se mantiene al avanzar la simulación y se propaga con las asperezas que están alrededor.

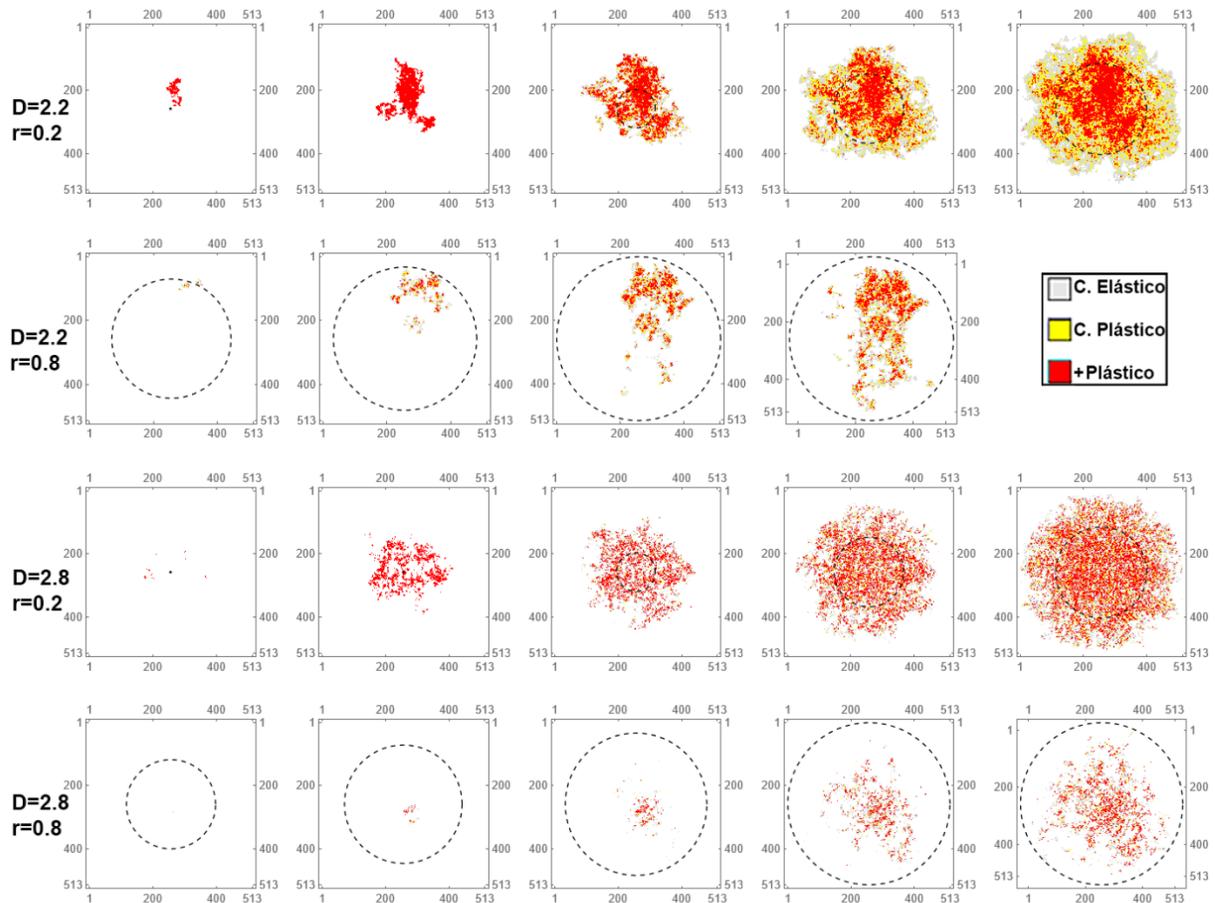


Figura 5.14. Presiones de contacto de simulación de contacto elástico de superficies esférica con plana. El círculo negro representa el área de contacto teórica de Hertz. Los recuadros de la izquierda representan el primer contacto de cada simulación, mientras que los de la derecha muestran el último resultado antes de que la zona de contacto alcance el borde del modelo.

En el caso de dimensiones fractales bajas, a medida que crece la zona con plasticidad total, sus alrededores contienen plasticidad moderada. En el caso de las dimensiones fractales altas, toda la vecindad en contacto crece con plasticidad total, mientras que siguen existiendo pequeños huecos donde no se da el contacto. En el caso de las simulaciones con rugosidad baja, el contacto teórico de Hertz predice un área más pequeña de la que en realidad sucede, en el caso de las simulaciones con rugosidad alta, el efecto es contrario, se predice un área más grande que no se llena por el contacto que sucede en la simulación.

6. Discusión

6.1 Simulación y análisis de superficies fractales

6.1.1 Simulación de superficies

Para la generación de superficies, se utilizaron los métodos de Weierstrass-Mandelbrot, algoritmo de punto medio, y transformada de Fourier. En la sección 4.2.7 se observó que el método de Weierstrass-Mandelbrot no es eficiente computacionalmente comparado con los otros métodos y tiene una desviación importante en el espectro de potencia debido a picos que se generan lejos al centro. Dada la estrecha relación entre la autocorrelación y el espectro de potencia, una superficie que no tiene el espectro teóricamente determinado, no se comportará de acuerdo a la teoría, ya que la correlación entre la altura de asperezas vecinas y la distribución espacial de las mismas dependen fuertemente de la autocorrelación.

A pesar de esto, WM aún se utiliza con cierta frecuencia [184] [185] [186] [187]. Zhang et al. [188], concluyeron que el método de análisis del espectro de potencia arroja errores cuando se utiliza WM y asociaron el problema al PSA, mientras en realidad el problema reside en WM. Esto es un ejemplo de cómo el uso de un algoritmo no adecuado puede llevar a conclusiones incorrectas.

En el caso del MPA, se observó una simetría en el espectro de potencia que se asocia las orientaciones de 45° y 90° grados que se imponen en el algoritmo. También, el espectro de potencia sufre un aplanamiento en frecuencias altas. En ocasiones, superficies generadas por MPA son dominados por la primera cima generada en el algoritmo. Este efecto se manifiesta más en dimensiones fractales bajas y causa que la información sobre el contacto a muy bajas áreas de contacto es imprecisa.

Las superficies generadas mediante transformada de Fourier demostraron que cumplen con las hipótesis iniciales para análisis fractal. Se ha mencionado [188] que es injusto realizar las superficies mediante transformada de Fourier, y al mismo tiempo determinar su dimensión fractal mediante PSA, porque en teoría, uno es el método inverso del otro, pero esto es incorrecto, ya que una inversión exacta sólo se puede ejecutar mediante la señal gaussiana generada en FT. Estos datos no se utilizan para PSA, por lo que una inversión exacta no es posible y el algoritmo PSA opera independientemente de FT.

6.1.2 Análisis de métodos de determinación de dimensión fractal en superficies

En los resultados que se muestran en el punto 4.2.7, se observa claramente el sesgo en la variable a_1 . DBC muestra sus deficiencias en este aspecto, pero el sesgo puede ser corregido mediante la calibración de a_0 y a_1 . En cambio, la dispersión σ_{out} no puede ser corregida. En ese aspecto, DBC supera otros métodos a excepción de PSA. σ_{out} se combina con el sesgo para determinar σ_{pred} y el intervalo de confianza de H_{corr} , por lo que un valor bajo de a_1 magnifica la dispersión. La baja dispersión en DBC cancela el efecto del sesgo en las superficies generadas por transformada de Fourier. Este efecto no se ha estudiado lo suficiente en literatura.

Sobre la eficiencia de los algoritmos de determinación de dimensión fractal, DBC, RLM, PSA y SFA son al menos diez veces más eficientes que TPM, que a su vez es significativamente más rápido que DTF. SFA toma el doble de tiempo que PSA, porque requiere el cálculo de la transformada inversa, sumada a la transformada de Fourier, y siendo menor su precisión, el método preferido es PSA.

El escalamiento vertical afecta a TPM, pero no se notó diferencia en los otros métodos para superficies generadas por transformada de Fourier. En el caso de superficies generadas por MPA, DTF y TPM son afectadas. Respecto a la resolución, se observa que σ_{out} incrementa al decrecer n_0 . El efecto es pequeño en todos los métodos a excepción de PSA, donde el incremento de σ_{out} es proporcional a la reducción de la resolución. Aún así, a $n_0 = 8$, PSA supera a los demás métodos a $n_0 = 10$.

La consistencia y alta precisión de PSA para superficies generadas con transformada de Fourier, lo establecen como el método recomendado para determinación de dimensión fractal en superficies. DTF y TPM pueden descartarse por su costo computacional y su baja precisión. DBC podría ser descartado por el sesgo que genera, pero en términos de precisión, el sesgo se compensa con una baja dispersión. Cabe destacar que los métodos de conteo de cajas trabajan mejor para caracterizar contornos que superficies.

En términos de precisión y eficiencia computacional, PSA es superior a los otros cinco métodos. DBC y DTF pueden filtrar desviaciones de la ley de potencia en el espectro de potencia, pero PSA encuentra claramente estas desviaciones. Como ya se mencionó, estas desviaciones pueden afectar el comportamiento de la superficie modelada, por lo que es importante su detección.

6.1.3 Análisis de métodos de determinación de dimensión fractal en contornos y percolación

Existen pocos estudios que se preocupan realmente por la parte estadística de la determinación de la dimensión fractal, y al ser superficies generadas aleatoriamente, la dispersión de los datos cobra importancia. Estudios como el de Pohrt y Popov [120] con un buen tamaño de muestra, variaciones de dimensión fractal o como el de Yastrebov [77], donde se busca asegurar la gaussianidad de las superficies como función de su ancho de banda, son ejemplos de estudios con una estadística llevada a cabo correctamente. En ese sentido, se priorizó en este trabajo realizar un esquema con variedad de dimensiones fractales y rugosidades, y con repeticiones en cada uno de los escenarios.

Se realizó el estudio de dos métodos de determinación de dimensión fractal en contornos. El BCM resultó ser un mejor método a comparación de YM en cuanto a tiempo de cálculo, siendo hasta tres veces más rápido. BCM fue más preciso, con una desviación estándar de $\sigma = 0.08$ después de las correcciones aplicadas. Dado que se suele determinar la dimensión fractal en superficies, en el ámbito de la mecánica de contacto son escasos los artículos que estudien la dimensión fractal en contornos.

Un detalle que quedó claro al determinar la dimensión fractal resultante de superficies en contacto, es que es más alta que en las superficies originales. La duda con respecto a este fenómeno es persistente en la literatura [189] [190] y ha causado confusión relativo al uso de fractales en la mecánica de contacto. El aumento de dimensión fractal antes y después del contacto llega a ser hasta 45%, y es menor a medida que la dimensión fractal es mayor, dado que no es geoméricamente posible obtener dimensiones fractales más altas. Aparte de eliminar esta duda, la importancia de esta observación radica en el hecho de que aquellos modelos teóricos que asumen que D es constante a lo largo del proceso se verán afectados en su precisión. Métodos numéricos como FEM y BEM no sufren de esta desventaja, ya que la variación de D ocurre naturalmente durante la simulación.

Para analizar de manera correcta el fenómeno de percolación, se requiere extraer una mayor cantidad de datos en el rango de la curva área-desplazamiento cerca de la transición a percolación. Con los datos obtenidos en este estudio, se determinó que este rango está entre los 35-65% de área de contacto. En un análisis futuro de percolación, se aumentaría la información a recabar en esa zona, y se reduciría la longitud total de las simulaciones, pues lo que sucede en los últimos porcentajes de contacto, no es de interés para el estudio del contacto. A la vez, un estudio que se

enfoca a la percolación, tiene que sacrificar información relativa al rango de primer contacto, con fracciones de área muy bajas.

6.2 Evaluación de modelo plano sobre plano elástico

6.2.1 Convergencia de malla

Se realizó una comparación de tres distintos tamaños de malla. Los resultados de área contra desplazamiento mostraron que la malla más pequeña (256x256) tuvo una desviación notable de las mallas mediana y grandes, por lo que se descartó ese mallado. Se decidió realizar este trabajo con las mallas grandes (512x512) pues aportaba el mayor número de información, y por la conveniencia de trabajar con un número 2^n respecto a la opción mediana (384x384).

Se tienen ejemplos de trabajos como los de Pei [128] [129] donde se utiliza un modelo de elemento finito similar al presentado en este trabajo, pero el contacto es de una superficie rugosa generada por MPS, contactando con una segunda superficie sin rugosidad; la superficie también tiene 512 elementos por lado, pero el número de simulaciones es menor, pues la variación de dimensiones fractales se reduce a tres, y no existe modificación en la rugosidad. El haber agregado dos superficies en contacto, permitió detectar la diferencia de dimensión fractal que se genera en el área de contacto.

En análisis utilizando BEM [120] [121] [122] [75] se permite llegar a superficies de 65536 de lado (utilizando fuertes recursos de supercómputo), pero sólo se caracteriza la superficie, por lo que no se puede observar el comportamiento en el interior de los sólidos en contacto, ni realizar simulaciones elastoplásticas, algo que era parte fundamental del objetivo de esta tesis. De alguna manera, los modelos elásticos sirven como referencia para los estudios elastoplásticos y esféricos, sin menospreciar la importancia de los resultados de dichos estudios. Por la gran cantidad de simulaciones realizadas en este trabajo, se puede competir con los escenarios observados en BEM en términos estadísticos y se puede considerar a 512 de lado como un tamaño suficiente para estudiar el contacto entre superficies.

6.2.2 Escalamiento

Uno de los fenómenos que se estudió en la presente tesis, fue la rugosidad máxima de las superficies. Así como se estudió el efecto del tamaño horizontal de la malla,

es importante observar el efecto del escalamiento en las superficies en contacto. A pesar de que se pueden formular argumentos teóricos que soportan el escalamiento, se sabe que los fenómenos de contacto no son lineales, la rugosidad podría afectar de una forma no lineal. Asimismo, no se podía excluir a priori que la implementación numérica eliminara el escalamiento. Por el otro lado, si se confirmara su validez, se contaría con un mayor número de simulaciones realizadas para su comparación estadística.

En el caso de las simulaciones elásticas, se comprobó que la rugosidad no es un factor relevante en las simulaciones (véase el apéndice). Para cada dimensión fractal se cuenta con 18 simulaciones equivalentes. Se puede argumentar que las curvas más bajas y más altas definen un intervalo de 90% de confianza para el comportamiento mecánico [191].

En el caso del límite elastoplástico, éste también se puede escalar dado que la transición plástica marca el fin del régimen elástico. Sin embargo, el estudio realizado en el apéndice muestra que, para comparar las simulaciones elastoplásticas, no se puede aplicar el escalamiento, ya que la rugosidad sí es relevante en la simulación de superficies en contacto después de la transición plástica. No obstante, mientras la cantidad de asperezas plásticas sea limitada, los resultados indican que se respeta el escalamiento en buena aproximación.

6.3 Modelos avanzados

6.3.1 Transición plástica

En el capítulo 5.2.1 se estudiaron los modelos que existen para caracterizar la transición plástica. Dado que existen varias teorías para delimitar las zonas plásticas y que no aparece claramente referenciado en la literatura, se calculó el punto de plasticidad incipiente p_{0y} , cuando la presión de contacto alcanza 1.61 del esfuerzo de cedencia, y el punto de plasticidad total p_{0T} , al alcanzar 3. En el capítulo 5.2.4 se muestra la distribución de las asperezas clasificándolas si están sin contacto, en contacto elástico, en contacto plástico o alcanzando el contacto plástico total. Se estudió la redistribución plástica en el material: el primer punto de contacto alcanza inicialmente plasticidad total, para luego redistribuir la carga con las asperezas en su alrededor y así reducir su propia carga.

Se observó que en bajas rugosidades el contacto sí se acerca al 100% (aunque no llega a contacto total), y es menor en rugosidades altas, donde es cercano a 75% en el punto de colapso del sólido. En situaciones donde se tiene baja rugosidad y

baja dimensión fractal, el porcentaje de asperezas que llegan a contacto plástico son casi nulas. Esto se incrementa a medida que se observan simulaciones con mayor rugosidad o dimensión fractal. Estos efectos son más notorios en el límite de cedencia de 500 MPa (figura 5.10) que en el de 1250 MPa. Esta última serie de modelos ya no se analizó en detalle. En todas las simulaciones, el porcentaje de asperezas en contacto elástico es mayor al de asperezas en contacto plástico, pero en el caso de las fuerzas que soportan las asperezas, en simulaciones que sobrepasan rugosidad de 0.5 y dimensión fractal de 2.7, las asperezas en contacto plástico soportan más fuerza que las asperezas en contacto elástico (figura 5.12) aun cuando sean menores en porcentaje de área de contacto.

Ahora bien, en ningún escenario las asperezas que alcanzan el límite plástico total superan el 5% de contacto, estas asperezas suelen incrementarse a medida que transcurre la simulación, y decrecer al acercarse el colapso del bulto por la redistribución plástica que se explicó anteriormente. El que pocas asperezas alcancen tres veces el límite de cedencia, pone en duda este criterio generalmente utilizado; el límite de 1.61 es más adecuado para caracterizar el contacto elastoplástico.

6.3.2 Criterio para la transición elastoplástica

El estudio de contacto elastoplástico demostró que el límite de cedencia equivalente y la rugosidad son cruciales para caracterizar el comportamiento plástico de dos superficies en contacto. Un límite de cedencia equivalente $\bar{\sigma}$ bajo y una rugosidad baja pueden tener el mismo comportamiento plástico que un límite de cedencia equivalente $\bar{\sigma}$ alto y una rugosidad alta, por lo que es necesario considerar ambos factores para una correcta caracterización plástica del contacto.

La plasticidad completa que menciona Tabor [168] apenas y se cumple en pocos puntos de contacto, en cambio, el valor calculado en esta tesis como límite de plasticidad incipiente da una mejor idea del comportamiento plástico. Aun así, se sigue observando la paradoja plástica, donde no se alcanza el contacto completo en ninguna condición, ni variando rugosidad, ni dimensión fractal, dado que el colapso del cuerpo sucede antes. Esto sucede porque las asperezas que entran en contacto plástico soportan más carga que las asperezas en contacto elástico, lo que provoca que pueda llegarse al límite del colapso del cuerpo, sin necesidad de que exista contacto total entre las superficies.

En el caso de los índices de plasticidad, todos contienen un factor en común para caracterizar la transición elastoplástica, y ese es la dureza. Si la dureza fuera relevante, se esperaría que más asperezas alcanzaran plasticidad completa, cosa

que no sucede. Por ello es que a los índices de plasticidad se les debe considerar como una equivalencia cualitativa, más que como indicadores precisos.

6.3.3 Modelo de contacto elástico esfera sobre plano

El modelo de contacto elástico de superficies esférica y plana demuestra que la misma metodología de simulación Monte Carlo de problemas de contacto se puede extender a geometrías más complejas. Su principal objetivo era abarcar una contradicción ampliamente encontrada en la literatura: la mayoría de los estudios pretenden modelar el contacto ligero, pero en una superficie fractal, siempre habrá una zona de contacto severa en las asperezas más altas, si estas asperezas se observan a una ampliación mayor. En el modelo utilizado aquí, la esfera Hertziana representa el pico de mayor tamaño, y la rugosidad superpuesta corresponde a una escala menor.

Al realizar la comparación con el modelo de Hertz, se observó que la diferencia es grande. En todos casos, las esferas rugosas requieren una mayor fuerza de contacto para un desplazamiento dado. Esto coincide con el efecto de escalamiento observado en simulaciones planas. A bajas rugosidades, la fuerza asociada a la compresión de las asperezas es relativamente menor que la fuerza asociada a la deformación de la esfera. Cuando la deformación de la esfera está en el orden de magnitud de la rugosidad, las asperezas fuera del círculo de contacto Hertziano pueden entrar en contacto y el área de contacto extiende fuera de este círculo.

Con asperezas más altas (0.2 contra 0.8), el escalamiento impone que la fuerza para comprimir las sea cuatro veces mayor. Esto permite comprimir la esfera sin que directamente esté en contacto. Solo las asperezas transfieren la carga y la zona de contacto es menor que en el caso de Hertz.

Se puede utilizar la simulación elástica para obtener una primera impresión de lo que se puede esperar de una simulación elastoplástica, siempre y cuando esta interpretación se haga con cuidado. La hipótesis base, es que, para cada desplazamiento, la esfera esté exactamente en el punto de transición elastoplástica ($\bar{\sigma} = p_{0y}$ en \bar{z}_{Max}). Con esa condición, cada resultado se puede interpretar como un análisis de la transición plástica.

Como las asperezas se modelaron de manera elástica, se sobrestima el esfuerzo al que estarían expuestos si fueran plásticos. Por el principio de Saint-Venant, esto no afecta el resultado de la simulación en \bar{z}_{Max} . Sin embargo, la redistribución plástica no se puede simular y, por lo tanto, todas las asperezas parecen estar en un estado plástico total.

A pesar de lo anterior, es claro que las asperezas finas superpuestas sobre una aspereza Hertziana sufrirán deformación plástica mucho antes que la esfera. Una limitada deformación plástica durante el primer contacto parece ser inevitable para superficies rugosas fractales. La hipótesis de contacto ligero parece ser difícil de justificar en este caso.

6.4 Redefinición del esquema de simulación propuesto

6.4.1 Refinamiento de simulaciones

Con lo aprendido en este trabajo, se pueden realizar adecuaciones a las simulaciones como se realizaron. La importancia de las simulaciones de contacto de superficies planas elásticas fue el desarrollo e integración de lo necesario para realizar las simulaciones, y el desarrollo de los códigos para analizar los resultados. Se comprobó que la rugosidad es un parámetro que no afecta el resultado de esas simulaciones, por lo que no es necesario utilizar distintas rugosidades.

En la comparación de métodos de determinación de dimensión fractal, se observa que es importante generar las superficies mediante transformada de Fourier, lo que evita los problemas inherentes a MPA, donde la primera montaña provoca una dispersión en la dimensión fractal, sobre todo en dimensiones fractales bajas. Transformada de Fourier es un método rápido y preciso. Las superficies deberían tener un recorte en las longitudes de onda inferiores para obtener superficies perfectamente gaussianas, como el Fourier truncado utilizado por Yastrebov [77]. Este método, genera superficies periódicas de manera automática, es decir, un contorno que sale de un lado del modelo entra del otro lado. Esto facilita el análisis de la dimensión fractal de los contornos y permite un análisis más correcto de la percolación. Asimismo, superficies periódicas son indispensables para el análisis del contacto tangente

Es importante considerar el desplazamiento total de la simulación. El tratar de alcanzar contacto completo en la simulación implica tiempo de cálculo que no se aprovecha, dada la falta de interés en esa zona. La zona de interés de las simulaciones se sitúa debajo de esos valores (por ejemplo, entre 35-65% en el caso de percolación), por lo que deberían de obtenerse más mapas de presión de contacto en esta zona, y finalizar la simulación alrededor del 70% de contacto.

A pesar de que en la literatura se realizan menos simulaciones y, por lo tanto, esquemas de trabajo más rápidos, el número de simulaciones utilizado en esta tesis es justificado, porque permitió tener observaciones estadísticas interesantes. Con lo anteriormente observado, se concluye que 5 niveles de dimensión fractal son

suficientes para realizar un análisis completo, con dos repeticiones de cada simulación para realizar comparación por pares (como lo realizado en apéndice).

6.4.2 Simulaciones consecuentes

Basado en los resultados de esta tesis, se puede delimitar el trabajo posterior. Con lo mencionado en la subsección anterior, sería recomendable realizar un estudio de simulaciones de contacto plano con plano, con 5 niveles de dimensión fractal (2.1 a 2.9, cada 0.2), cinco rugosidades y dos réplicas. Este se realizaría con propiedades elásticas y elastoplásticas, siendo la misma superficie en ambos análisis con la idea de comparar exactamente la misma superficie. Las simulaciones se recortarían a 1.5 veces la rugosidad máxima, para alcanzar el 60-80% de área de contacto, pues no se requiere avanzar más. Serían 50 simulaciones elásticas, y 50 elastoplásticas, por lo que serían aproximadamente 1800 horas de simulación, 75 días de simulaciones que podrían reducirse si se reparten sobre varias estaciones de trabajo.

Las superficies serían generadas mediante transformada de Fourier truncado, con un desplazamiento menor y con más presiones de contacto obtenidas en las zonas importantes. Se utilizaría sólo un límite de cedencia, ya que la variación de este parámetro no arroja datos significativos. Esto es inherente a la definición del límite de cedencia efectivo, que indica que variar la rugosidad o variar el límite de cedencia tiene efectos equivalentes. No hay indicaciones, en este momento, que el efecto del endurecimiento por trabajo en frío sea significativo para las simulaciones de contacto normal, ya que la plasticidad mayor se observa en los primeros contactos y disminuye en la redistribución plástica. En caso de querer estudiar el endurecimiento por trabajo en frío, valdría la pena realizar un modelo en el que exista una sola cima y analizar específicamente su alrededor.

En el caso de las simulaciones de contacto con superficies esférica y plana, se buscaría realizar simulaciones con más elementos finos por debajo de la superficie, para lograr un casquete más redondeado y tener una influencia de la esfera más balanceada a la rugosidad de la superficie. Finalmente, respecto a las simulaciones tangentes, estos deberán de formar el tema de un nuevo doctorado, debido a que la modificación del modelo y los desafíos al respecto serían suficientes para justificar un nuevo proyecto de gran alcance.

7. Conclusiones

En conclusión, es viable realizar un análisis mediante método Monte Carlo de simulaciones de contacto normal, con un método automatizado para procesar gran cantidad de simulaciones, y con la flexibilidad de modificar propiedades y geometrías.

La optimización de malla permitió ahorrar recursos computacionales para enfocarlos en la superficie. La optimización del área de contacto aumentó la precisión de las áreas discretas. La evaluación y corrección realizada en el BCM aseguró la correcta determinación de la dimensión fractal.

El estudio estadístico de métodos de determinación fractal para superficies arrojó que el método de transformada de Fourier es el mejor método de generación de superficies fractales y que PSA es el mejor método de medición de dimensión fractal, libre de sesgos y errores aleatorios.

Se comprueba que la rugosidad no provoca variaciones en fuerza ni en área en simulaciones elásticas, y, para el caso de las simulaciones elastoplásticas, afecta sólo en dimensiones fractales superiores a 2.5. Se muestra evidencia concluyente que el contacto de superficies incrementa la dimensión fractal de la superficie de contacto hasta un 45%, y es menor a medida que la dimensión fractal es mayor.

Con las simulaciones aquí presentadas, no se pudo realizar el estudio de percolación, dado la escasa información obtenida en la zona de interés para dicho fenómeno. Para estudiar percolación, se requiere enfocar las simulaciones al rango de interés (35-65% de área de contacto).

El límite de cedencia equivalente, $\bar{\sigma}$, y la rugosidad son cruciales en la definición del comportamiento plástico de dos superficies en contacto. En cambio, los índices de plasticidad no realizan una caracterización precisa de la transición plástica, pues la dureza no es un factor importante en este fenómeno, dado que muy pocas asperezas alcanzan plasticidad completa.

Se observó el fenómeno de redistribución plástica, donde las asperezas del primer contacto alcanzan niveles altos de plasticidad, para luego relajarse a medida que las asperezas contiguas redistribuyen la carga. Se confirmó la existencia de la paradoja plástica, donde no se alcanza el contacto completo en ninguna condición, ni variando rugosidad, ni dimensión fractal, dado que el colapso del cuerpo sucede antes. Las zonas de contacto plástico soportan más fuerza que las zonas de contacto elástico. La plasticidad completa de la que habló Tabor, en la que se

alcanza tres veces el valor de límite de cedencia se cumple en menos del 1% de las asperezas.

Se demostró que las asperezas finas en la superficie de una aspereza grande sufrirán deformación plástica desde el primer contacto, por lo que no existe el fenómeno de contacto ligero en superficies fractales. Las asperezas pequeñas de la superficie rápidamente soportan el peso del cuerpo, a medida que se van distribuyendo a las siguientes cimas.

8. Referencias

- [1] I. G. Goryacheva, *Contact Mechanics in tribology*, Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1998.
- [2] D. Kennedy, Y. Xue y M. Mihaylova, «Current and future applications of surface engineering,» *The Engineers Journal (Techincal)*, vol. vol. 59, pp. 27-292, 2005.
- [3] T. S. Sabino, A. C. Carneiro, R. P. Carvahlo y F. A. Pires, «The impact of non-Gaussian height distributions on the statistics of isotropic random rough surfaces,» *Tribology International*, nº 173, p. 197578, 2022.
- [4] T. H. Beuman, A. M. Turne y V. Vitelli, «Critical and umbilical points of a non-Gaussian random field,» *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 88(1), p. p.012115, 2013.
- [5] M. A. Ramírez, C. G. Figueroa, V. H. Jacobo, A. Ortiz y R. Schouwenaars, «Critical Analysis of Randomly Rough Surfaces for Contact Mechanics Through Statistical Simulation,» de *Proceedings of the 7th International Conference on Fracture Fatigue and Wear, FFW 2018*, Ghent, Springer Singapore, 2019, pp. 500-511.
- [6] H. Hertz, «Über die Berührung fester elastischer Körper (On the contact of elastic solids),» *J. Reine und Angew, Math.*, vol. 92, pp. 156-171, 1882.
- [7] B. Persson, «Contact mechanics for randomly rough surfaces,» *Surface Science Reports*, vol. 61, pp. 201-227, 2006.
- [8] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [9] J. A. Greenwood y J. P. B. Williamson, «Contact of nominally flat surfaces,» *Proceedings of the Royal Society*, vol. A295, pp. 300-330, 1966.
- [10] R. Schouwenaars, «Análisis de la deformación plástica durante el desgaste de cojinetes de deslizamiento,» *Facultad de Ingeniería, UNAM*, p. 186 pp., 2004.
- [11] J. P. Hirth, «Dislocations,» de *R. W. Cahn and P. Haasen*, Amsterdam, Elsevier, Science Publishers, 1983.

- [12] K. Kato y K. Adachi, *Modern Tribology handbook. Volume One: Wear mechanisms*, 2001.
- [13] K. Ludema, «ASM Handbook,» de *Vol. 18 Introduction to wear*, 2004.
- [14] K. Ludema, *Friction, wear, lubrication: a textbook in tribology*, Florida: CRC Press LLC, 1996.
- [15] T. A. Stolarsky, *Tribology in machine design*, London: Butterworth Heinemann, 1990.
- [16] J. F. Archard, «Elastic deformation and the laws of friction,» *Proc. R. Soc. London Ser.*, vol. A 243, pp. 190-205, 1957.
- [17] D. Whitehouse, J. Archard y D. Tabor, «The properties of random surfaces of significance in their contact,» *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 316 (1524), pp. 97-121, 1970.
- [18] A. W. Bush, R. D. Gibson y T. R. Thomas, «The elastic contact of a rough surface,» *Wear*, vol. 35, nº 87, 1975.
- [19] B. M. J. Persson, «Elastoplastic contact between randomly rough surfaces,» *Phys Rev. Lett.*, vol. 87, p. 116101, 2001.
- [20] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, 1982.
- [21] A. Majumdar y B. Bhushan, «Role of Fractal Geometry in Roughness Characterization and Contact Mechanics of Surfaces,» *Journal of Tribology*, vol. 112[2], pp. 205-216, 1990.
- [22] A. Majumdar y B. Bhushan, «Fractal Model of Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces,» *Journal of Tribology*, vol. 113 (1), pp. 1-11, 1991.
- [23] D. Whitehouse, «Fractal or fiction,» *Wear*, vol. 245(5), pp. 345-353, 2001.
- [24] A. Gujrati, S. Khanal, L. Pastewka y T. Jacobs, «Combining TEM, AFM, and profilometry for quantitative topography characterization across all scales,» *ACS appl. mater. & interfaces*, vol. 10 (34), pp. 29169-29178, 2018.
- [25] B. Persson, «On the fractal dimension of rough surfaces,» *Tribol. Letters*, vol. 54, pp. 99-106, 2014.

- [26] H. v. Koch, «Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire,» *Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik*, vol. 1, pp. 681-704, 1904.
- [27] G. Cantor, «On the Power of Perfect Sets of Points,» *Acta Mathematica*, vol. 4, pp. 381-382, 1884.
- [28] W. Sierpiński, «Sur une courbe dont tout point est un point de ramification,» *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, vol. 160, pp. 302-305, 1915.
- [29] B. Mandelbrot, «How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension,» *Science*, vol. 156 (3775), pp. 636-8, 1967.
- [30] P. Addison, *Fractal and Chaos*, Napier University, Edinburgh: US Editorial Office: Institute of Physics Publishing, 1997.
- [31] F. Hausdorff, «Dimension und äußeres Maß,» *Mathematische Annalen*, vol. 79, pp. 157-179, 1918.
- [32] B. Florio, P. Fawell y M. Small, «The use of the perimeter-area method to calculate the fractal dimension of aggregates,» *Powder Technology*, vol. 343, pp. 551-559, 2019.
- [33] S. Jampala, «Fractals: classification, generation and applications,» *Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 1992.
- [34] B. Bhushan, «Surface roughness analysis and measurement techniques,» de *Modern Tribology Handbook, Two Volume Set*, Boca Raton, 2000, pp. 79-150.
- [35] J. Raja, B. Muralikrishnan y F. Shengyu, «Recent advances in separation of roughness, waviness and form,» *Precision Engineering*, vol. 26 (2), pp. 222-235, 2002.
- [36] F. P. Bowden y D. Tabor, «The Area of Contact between Stationary and between Moving Surfaces,» *Proc. Of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences*, vol. 169 (938), pp. 391-413, 1939.
- [37] T. R. Thomas, *Rough surfaces*, Second Edition, London: Imperial College Press, 1999.
- [38] D. J. Whitehouse y M. J. Phillips, «Discrete Properties of Random Surfaces,» *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 290 (1369), pp. 267-298, 1978.

- [39] B. Bhushan, «Mechanics and materials science series,» de *Modern Tribology Handbook, Two Volume Set*, Boca Raton, 2001.
- [40] ASME-B46.1, «Surface Roughness, Waviness and Lay,» de *Surface Texture*, New York, ASME, 1985.
- [41] E. Gadelmawla, M. Koura, T. Maksoud, I. Elewa y H. Soliman, «Roughness Parameters,» *Journal of materials processing technology*, pp. 133-145, 2002.
- [42] M. Wisniewska, «Surface roughness measurements: emerging importance of the uncertainty evaluation,» *PhD Interdisciplinary Journal*, pp. 243-250, 2014.
- [43] I. 3274, «Instruments for the Measurement of Surface Roughness by Profile Methods,» de *Geometrical Product Specifications*, 1975.
- [44] M. Coba Salcedo, I. Buj Coral y G. Valencia Ochoa, «Characterization of Surface Topography with Abbot Firestone Curve,» *Contemporary Engineering Sciences*, vol. 11 (68), pp. 3397-3407, 2018.
- [45] E. J. Abbott y F. A. Firestone, «Specifying surface quality: a method based on accurate measurement and comparison,» *Mechanical Engineering*, vol. 55, pp. 569-572, 1933.
- [46] J. Flores Alarcón, C. Figueroa, V. Jacobo, F. Velázquez Villegas y R. Schouwenaars, «Statistical Study of the Bias and Precision for Six Estimation Methods for the Fractal Dimension of Randomly Rough Surfaces,» *Fractal and Fractional*, vol. 8 (3), p. 152, 2024.
- [47] T. Asakura, «Surface Roughness Measurement,» de *Speckle Metrology, Quantum Electronics*, 1978, pp. 10-49.
- [48] M. Hinojosa y M. Reyes, «La rugosidad de las superficies: Topometría,» *Ingenierías*, vol. 4 (11), pp. 27-33, 2001.
- [49] J. B. Pawley, *Handbook of Biological Confocal Microscopy*, 3era Ed, Berlin: Springer, 2006.
- [50] nanoscience, «nanoScience Instruments,» 2024. [En línea]. Available: <https://www.nanoscience.com/techniques/profilometry/>.
- [51] R. Wilson y H. Bullen, *Introduction to Scanning Probe Microscopy*, Northern Kentucky University: Highland Heights, 2007.

- [52] R. De Oliveira, D. Albuquerque, T. Cruz, F. Yamaji y F. Leite, «Measurement of the Nanoscale Roughness by Atomic Force Microscopy: Basic Principles and Applications,» de *Atomic Force Microscopy. Imaging, Measuring and Manipulating Surfaces at the Atomic Scale*, IntechOpen, 2012, pp. 147-174.
- [53] B. Mandelbrot, *Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*, Flammarion, 1975..
- [54] H. Zahouani, R. Vargiolu y J. L. Loubet, «Fractal models of surface topography and contact mechanics,» *Mathematical and Computer Modelling*, pp. 517-534, 1998.
- [55] M. S. Rahman, «Fractal analysis,» *Handbook of Food and Bioprocess Modeling Techniques*, pp. 435-450, 2006.
- [56] H. E. Hurst, «Long-term storage capacity of reservoirs,» *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 116 (770), 1951.
- [57] B. Mandelbrot, «The (Mis)Behavior of Markets,» *Journal of Statistical Physics*, vol. 122 (22), 2006.
- [58] M. Plancherel y M. Leffler, «Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies,» *Rend. Circ. Mat. Palermo (1884-1940)*, vol. 30, pp. 289-335, 1910.
- [59] A. Gujrati, A. Sanner, S. Khanal, N. Moldovan, H. Zeng, L. Pastewka y T. Jacobs, «Comprehensive topography characterization,» *Surf. Topogr. Metrol. Prop.*, vol. 9, p. 014003, 2021.
- [60] O. Philcox y S. Torquato, «Disordered Heterogeneous Universe: Galaxy Distribution and Clustering across Length Scales,» *Phys.*, vol. 13, p. 011038, 2023.
- [61] P. Nayak, «Random Process Model of Rough Surfaces,» *Journal of Tribology*, vol. 93 (3), pp. 398-407, 1971.
- [62] R. S. Sayles y T. R. Thomas, «The spatial representation of surface roughness by means of the structure function: a practical alternative to correlation,» *Wear*, vol. 42, pp. 267-276, 1977.
- [63] T. R. Thomas y B.-G. Rosen, «Determination of the optimum sampling interval for rough contact mechanics,» *Tribol. Int.*, vol. 33, pp. 601-610, 2000.
- [64] A. Fournier, D. Fussel y L. Carpenter, «Computer Rendering of Stochastic Models,» *Communications of the ACM*, vol. 25, pp. 371-384, 1982.

- [65] S. Huang y X. Li, «Improved Random Midpoint-Displacement Method for Natural Terrain Simulation,» *IEE Computer Society*, pp. 255-258, 2010.
- [66] S. Dietmar, «Chapter 2. Algorithms for random fractals,» de *The Science of Fractal Images*, New York, Springer-Verlag, 1988, pp. 71-136.
- [67] M. S. Longuet-Higgins, «The statistical analysis of random, moving surface,» *Philosophical transactions of the Royal Society A*, vol. 249, pp. 321-387, 1957.
- [68] J. Greenwood, «A simplified elliptic model of rough surface contact,» *Wear*, vol. 261 (2), pp. 191-200, 2006.
- [69] G. Edgar, *Classics on Fractals*, Boulder, CO: Westview Press, 2004.
- [70] A. Zaleski, «Fractals and The Weierstrass-Mandelbrot Function,» *Undergraduate Mathematics Journal*, vol. 13 (2) Art 7, 2010.
- [71] W. Yan y K. K., «Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces,» *Journal of Applied Physics*, vol. 84, pp. 3617-3624, 2012.
- [72] X. Yin y K. Komvopoulos, «An adhesive wear model of fractal surfaces in normal contact,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, pp. 912-921, 2010.
- [73] M. Ausloos y D. Berman, «A multivariate Weierstrass-Mandelbrot function,» *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 400, pp. 331-350, 1985.
- [74] Y. Hu y K. Tonder, «Simulation of 3-D random rough surface by 2-D digital filter and Fourier analysis,» *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, Vols. %1 de %232 (1-2), pp. 83-90, 1992.
- [75] V. Yastrebov, G. Anciaux y J.-F. Molinari, «The role of the roughness spectral breadth in elastic contact of rough surfaces,» *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 107, pp. 469-493, 2017.
- [76] H. M. Stanley y T. Kato, «An FFT-Based Method for rough surfaces contact,» *J. of Tribology*, vol. 119, pp. 481-485, 1997.
- [77] V. Yastrebov, G. Anciaux y J.-F. Molinari, «From infinitesimal to full contact between rough surfaces: Evolution of the contact area,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 52, pp. 83-102, 2015.
- [78] R. Schouwenaars, V. Jacobo y A. Ortiz, «The effect of vertical scaling on the estimation of the fractal dimension of randomly rough surfaces,» *App. Surf. Sci.*, vol. 425, pp. 838-846, 2017.

- [79] C. Bandt, N. Hung y H. Rao, «On the open set condition for self-similar fractals,» *Proc Amer. Math. Soc.*, vol. 134 (5), pp. 1369-1374, 2006.
- [80] C. A. Aviles, C. H. Scholz y J. Boatwright, «Fractal Analysis Applied to Characteristic Segments of the San Andreas Fault,» *J. Geophys.*, vol. 92 (B1), pp. 331-344, 1987.
- [81] H. O. Peitgen, H. Jurgens y D. Saupe, *Fractal for the Classroom. Part One: Introduction to Fractals and Chaos*, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [82] S. A. Brown, «A Note on the Description of Surface Roughness Using Fractal Dimension,» *Gephys. Res. Lett.*, vol. 14, pp. 1095-1098, 1987.
- [83] B. Klinkenberg y M. F. Goodchild, «The Fractal Properties of Topography: A Comparison of Methods,» *Earth surf. Proc. Landforms*, vol. 17, pp. 217-234, 1992.
- [84] B. Klinkenberg, «A Review of Methods Used to Determine the Fractal Dimension of Linea Features,» *Mathematical Geology*, vol. 26 (1), 1994.
- [85] R. Andrieu, «Estimating Fractal Dimension with the Divider Method in Geomorphology,» *Geomorphology*, vol. 5, pp. 131-141, 1992.
- [86] M. C. Shelberg, H. Moellering y N. S. Lam, «Measuring the Fractal Dimensions of Empirical Cartographic Curves,» *Proceedings: Auto-Carto*, vol. 5, pp. 481-490, 1982.
- [87] D. H. Maling, «How Long is a Piece of String?,» *Cartograph*, vol. 5, pp. 147-156, 1968.
- [88] L. Liebovitch y T. Toth, «A Fast Algorithm to Determine Fractal Dimensions by Box Counting,» *Phys. Lett. A.*, vol. 141, pp. 386-390, 1989.
- [89] M. Sakellariou, B. Nakos y C. Mitsakaki, «On the Fractal Character of Rock Surfaces,» *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abs.*, vol. 28, pp. 527-533, 1991.
- [90] T. Gneiting, H. Ševčíková y D. Percival, «Estimators of fractal dimension: Assessing the roughness of time series and spatial data,» *Stat. Sci.*, vol. 27 (2), pp. 247-277, 2012.
- [91] P. Hall y A. Wood, «On the performance of box-counting estimators of fractal dimension,» *Biometrika*, vol. 80 (1), pp. 246-251, 1993.

- [92] A. De Santis, M. Fedi y T. Quarta, «A revisitación de la superficie triangular prism para el método de estimación de la dimensión fractal de superficies fractales,» *Ann. Geofis.*, vol. 15, pp. 811-821, 1997.
- [93] C. K. Peng, S. Buldyrev, S. Havlin y H. Simons, «Organización mosaica de los nucleótidos de DNA,» *Phys. Rev. E*, vol. 49, p. 1685, 1994.
- [94] D. Towell, K. Sonnenthal, B. Kimberly, S. Lai y B. Goldstein, «Análisis lineal y no lineal de señales hemodinámicas durante sepsis y shock séptico,» *Crit. Care Med.*, vol. 28, 2000.
- [95] Y. Wang, Y. Wei y C. Wu, «Análisis de fluctuaciones desrendidas en mercados de petróleo crudo de Texas Occidental,» *Phys. A.*, vol. 390, pp. 864-875, 2011.
- [96] J. Kantelhardt, S. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde y H. Stanley, «Análisis de fluctuaciones desrendidas multifractal de series de tiempo no estacionarias,» *Phys. A Stat. Mech. Its Appl.*, vol. 316, pp. 87-114, 2002.
- [97] G. F. Gu y W. X. Zhou, «Análisis de fluctuaciones desrendidas para fractales y multifractales en dimensiones superiores,» *Phys. Rev. E.*, vol. 74, 2006.
- [98] G. F. Gu y W. X. Zhou, «Algoritmo de promedio móvil desrendido para multifractales,» *Phys. Rev. E.*, vol. 82, 2010.
- [99] R. Wen y R. Sinding-Larsen, «Incertidumbre en la dimensión fractal estimada a partir de espectros de potencia y variogramas,» *Math. Geol.*, vol. 29, pp. 727-753, 1997.
- [100] J. Kondev, C. Henley y D. Salinas, «Medidas no lineales para caracterizar morfologías de superficies rugosas,» *Physical Review E*, vol. 61(1), pp. 104-124, 2000.
- [101] K. Jiang, Z. Liu, Y. Tian, T. Zhang y C. Yang, «Método de estimación de parámetros fractales en superficies rugosas basado en el momento espectral exacto utilizando una red neuronal artificial,» *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 161, 2022.
- [102] M. Smith, «Rugosidad en las ciencias de la Tierra,» *Earth-Science Reviews*, vol. 136, pp. 202-225, 2014.
- [103] E. Pardo-Igúzquiza y P. Dowd, «Análisis fractal del paisaje marciano: un estudio de rugosidad topográfica a escala de kilómetros,» *Icarus*, vol. 372, 2022.
- [104] E. Pardo-Igúzquiza y P. Dowd, «Rugosidad de la topografía marciana: un análisis fractal a escala de metros de seis áreas seleccionadas,» *Icarus*, vol. 384, 2002.

- [105] Q. Cheng y F. Agterberg, «Fractal Geometry in Geosciences,» de *Encyclopedia of Mathematical Geosciences*, Springer International Publishing, 2022, p. 124.
- [106] H. Wang, G. Chi, Y. Jia, C. Ge, F. Yu, Z. Wang y Y. Wang, «Surface roughness evaluation and morphology reconstruction of electrical discharge machining by frequency spectral analysis,» *Measurement*, , vol. 172, 2021.
- [107] L. Eftekhari, D. Raoufi, M. Eshraghi y M. Ghasemi, «Power spectral density-based fractal analyses of sputtered yttria-stabilized zirconia thin films,» *Semicond. Sci. Tech.*, vol. 37 (10), 2022.
- [108] J. Boussinesq, «Application des Potencials a l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques,» *Paris Gauthier-Vallars*, p. 580, 1885.
- [109] V. Cerruti, «Ricerche intorno all' equilibrio de' corpi elastici isotropi,» *Reale Acccad. Linc. Roma, Ser.*, vol. 3A, pp. 81-122, 1882.
- [110] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4 Ed, Cambridge University Press, 1952.
- [111] J. R. Barber, «Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies,» *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol. 459, pp. 53-66, 2003.
- [112] V. L. Popov, *Contact Mechanics and Friction: Physical Principles and Applications*, Springer, 2010.
- [113] B. Lorenz, «Contact Mechanics and Friction of Elastic Solids on Hard and Rough Substrates,» *Schriften des Forschungszentrums Jülich Reihe Schlüsseltechnologien*, vol. 37, pp. 14-16, 2012.
- [114] B. Persson, «Adhesion between an elastic body and a randomly rough hard surface,» *Eur. Phys. J. E*, vol. 8, pp. 385-401, 2002.
- [115] F. Hartmann, «Boundary Element Methods,» de *Encyclopedia of Vibration*, Academic Press, 2001, pp. 192-202.
- [116] M. Costabel, «Principles of Boundary Element Methods,» *Computer Physics Reports*, vol. 6, pp. 243-274, 1987.
- [117] A. Vakis, V. Yastrebov, J. Scheibert, L. Nicola, D. Dini, C. Minfray, A. Almqvist, M. Paggi, S. Lee, G. Limbert, J. Molinari, G. Anciaux, R. Aghababaei, S. Echeverri Restrepo, A. Papangelo, A. Cammarata, P. Nicolini y C. Putignano, «Modeling and simulation in tribology across scales: An overview,» *Tribology International*, vol. 125, pp. 169-199, 2018.

- [118] T. Anderson, B. Frederiksson y B. G. Allan-Persson, «The boundary element method applied to two-dimensional contact problems,» de *New developments in Boundary Element Methods*, Southampton, CML Publishers, 1980.
- [119] C. Putignano, L. Afferrante, G. Carbone y G. Demelio, «A new efficient numerical method for contact mechanics of rough surfaces,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49 (2), pp. 338-343, 2012.
- [120] R. Pohrt y V. Popov, «Normal Contact Stiffness of Elastic Solids with Fractal Rough Surfaces,» *Physical Review Letters*, vol. 108 (10), p. 104301, 2012.
- [121] R. Pohrt y V. Popov, «Contact Mechanics of Rough Spheres: Crossover from Fractal to Hertzian Behavior,» *Advances in Tribology*, vol. 2013 (4), 2013.
- [122] R. Pohrt y Q. Li, «Complete boundary element formulation for normal and tangential contact problems,» *Physical Mesomechanics*, vol. 17 (4), pp. 334-340, 2014.
- [123] J. Wu y Y. Lin, «Boundary element analyses on the adhesive contact between an elastic sphere and a rigid half-space,» *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 74, pp. 61-69, 2017.
- [124] J. Wu y Y. Lin, «Boundary element analyses on the adhesive contact between an elastic cylinder and a rigid half-space,» *Tribology Letters*, vol. 67 (19), 2019.
- [125] R. Clough, *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, American Society of Civil Engineers, 1960.
- [126] M. J. Turner, R. W. Clough, M. H. C. y L. J. Topp, «Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures,» *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 23 (9), pp. 805-823, 1956.
- [127] D. Hutton, *Fundamental of Finite Element Analysis*, Mc Graw Hil, 2004.
- [128] S. Hyun, L. Pei, J. Molinari y M. Robbins, «Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces,» *Physical Review E*, vol. 70(2), p. 026117, 2004.
- [129] L. Pei, S. Hyun, J. Molinari y M. Robbins, «Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces,» *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 53 (11), pp. 2385-2409, 2005.

- [130] V. Yastrebov, J. Durand, H. Proudhon y G. Cailletaud, «Rough surface contact analysis by means of the Finite Element Method and of a new reduced model,» *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 339(7), pp. 473-490, 2011.
- [131] H. Song, E. Van der Giessen y X. Liu, «Strain gradient plasticity analysis of elasto-plastic contact between rough surfaces,» *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 96, pp. 18-28, 2016.
- [132] H. Song, A. Vakis, X. Liu y E. Van der Giessen, «Statistical model of rough surface contact accounting for size-dependent plasticity and asperity interaction,» *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 106, pp. 1-14, 2017.
- [133] C. Gao, H. Proudhon y M. Liu, «Three-dimensional finite element analysis of shallow indentation of rough strain-hardening surface,» *Friction*, vol. 7(6), pp. 587-602, 2019.
- [134] S. Kucharski y G. Starzynski, «Contact of rough surfaces under normal and tangential loading,» *Wear*, Vols. %1 de %2440-441, p. 203075, 2019,.
- [135] V. Yastrebov, A. Shvarts, G. Anciaux, J. Vignollet y J. Molinari, «Contact of rough surfaces in presence of interfacial fluid flow,» de *Congres Francais de Mécanique*, Brest, France, 2019.
- [136] S. Karthikeyan, A. Agrawal y D. Rigney, «Molecular dynamics simulations of sliding in an Fe–Cu tribopair system,» *Wear*, vol. 267 (5), pp. 1166-1176, 2009.
- [137] H. Kim, A. Emge, R. Winter, P. Keightley, W. Kim, M. Falk y D. Rigney, «Nanostructures generated by explosively driven friction: Experiments and molecular dynamics simulations,» *Acta Materialia*, vol. 57(17), pp. 5270-5282, 2009.
- [138] D. Rigney y J. Hammerberg, «Unlubricated sliding behavior of metals,» *Mrs Bulletin*, vol. 23 (6), pp. 32-36, 1998.
- [139] C. Campañá y M. H. Müser, « A practical Green's function approach to the simulation of elastic, semi-infinite solids,» *Phys Rev. B*, vol. 74, p. 075420, 2006.
- [140] M. Müser, «A dimensionless measure for adhesion and effects of the range of adhesion in contacts of nominally flat surfaces,» *Tribology International*, vol. 100, pp. 41-47, 2016.

- [141] M. Müser, W. Dapp, R. Bugnicourt, P. Sainsot, N. Lesaffre, T. Lubrecht, B. Persson, K. Harris, A. Bennett, K. Schulze y S. Rohde, «Meeting the contact-mechanics challenge,» *Tribology Letters*, vol. 65, pp. 1-18, 2017.
- [142] C. Yang y B. Persson, «Molecular Dynamics Study of Contact Mechanics: Contact Area and Interfacial Separation from Small to Full Contact,» *Physical Review Letters*, vol. 100 (2), p. 024303, 2008.
- [143] G. Anciaux y J.-F. Molinari, «Contact mechanics at the nanoscale, a 3D multiscale approach,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79(9), pp. 1041-1067, 2009.
- [144] G. Anciaux, S. Ramisetti y J. Molinari, «A finite temperature bridging domain method for MD-FE coupling and application to a contact problem,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 205, pp. 204-212, 2012.
- [145] A. Y. Nee, *Handbook of Manufacturing Engineering and Technology*, London: Springer-Verlag, 2015.
- [146] B. W. Yang, «Electropolishing of surfaces: theory and applications,» *Surface Engineering*, pp. 1-18, 2016.
- [147] N. Doron, H. David y H. Baruch, «Electropolishing effect on roughness metrics of ground stainless steel: A length scale study,» *Surface topography: Metrology and properties*, 2018.
- [148] D. S. Jayakrishnan, «Electrodeposition: The versatile technique for nanomaterials,» de *Corrosion Protection and Control Using Nanomaterials*, Woodhead Publishing, 2012, pp. 86-125.
- [149] D. P. Barkey, R. H. Muller y C. W. Tobias, «Roughness Development in Metal Electrodeposition,» *J. Electrochem. Soc.*, vol. 136 (8), 1989.
- [150] R. N. M.P. Kanouff, «Surface Roughness of Thermal Spray Coatings Made with Off-Normal Spray Angles,» *Journal of Thermal Spray Technology*, pp. 219-228, 1997.
- [151] C. S. Montross, T. Wei, L. Ye, G. Clark y Y. W. Mai, «Laser shock processing and its effects on microstructure and properties of metal alloys: A review,» *Int. J. Fatigue*, vol. 24, pp. 1021-1036, 2022.
- [152] C. Y. Yiliang Liao, «A review: Warm laser shock peening and related laser processing technique,» *Optics and Laser Technology*, 2015.

- [153] Z. Zhou, S. Bhamare, G. Ramakrishnan, S. R. Mannava, K. Langer, Y. H. Wen, Q. D. y V. K. Vasudevan, «Thermal relaxation of residual stress in laser shock peened Ti-6 Al-4V alloy,» *Surf. Coat. Technol.*, vol. 206, pp. 4619-4627, 2012.
- [154] R. Sundar, P. Ganesh, R. K. Gupta, G. Ragvendra, B. K. Pant, V. Kain, K. Ranganathan, R. Kaul y K. S. Bindra, «Laser Shock Peening and its Applications: A Review,» *Lasers Manuf. Mater. Process.*, vol. 6, p. 424–463, 2019.
- [155] K. G. Budinski, *Surface engineering for wear resistance*, New York: Prentice Hall, 1998.
- [156] J. Munemasa y T. Kumakiri, «Effect of the surface roughness of substrates on the corrosion properties of films coated by physical vapour deposition,» *Surface and coatings technology*, pp. 496-499, 1991.
- [157] A. D. Dobrzanska-Danikiewicz, K. Gołombek, D. Pakuła, J. Mikuła, M. Staszuk y Z. W. L., «Long-term development directions of PVD/CVD coatings deposited onto sintered tool materials,» *Arch Mater Sci Eng*, vol. 49(2), pp. 69-96, 2011.
- [158] D. Depla, «Chemical Stability of Sputter Deposited Silver Thin Films,» *Coatings*, vol. 12 (12), p. 1915, 2022.
- [159] I. Cueva, M. A. Ramírez, C. G. Figueroa, H. A. Juárez y R. Schouwenaars, «Physical and Numerical Simulation of Contact mechanics of Spark-eroded Tool Steel with controlled roughness,» *MEEP 2018*, pp. 180-183, 2018.
- [160] T. Drolz, *Tool and Manufacturing Engineers Handbook, Vol. 1. Machining*, 4th Ed, Society of Manufacturing Engineers, 1983.
- [161] C. Finger, M. Stlesch, M. Eisenburger, B. Breidenstein, S. Busemann y A. Greuling, «Effect of sandblasting on the surface roughness and residual stress of 3Y-TZP,» *SN Applied Sciences*, vol. 2 (1700), 2020.
- [162] L. Yuan y G. Zhou, «Enhanced CuO Nanowire Formation by Thermal Oxidation of Roughened Copper,» *J. electrochem. Soc.*, vol. 159 (4), pp. 205-209, 2012.
- [163] M. Galván, *Análisis de las técnicas para determinar la dimensión fractal a través de los contornos de superficies con rugosidad aleatoria*, Ciudad de México: UNAM, 2022.

- [164] C. D. Maya Ramírez, Modelado por elemento finito del contacto entre superficies rugosas con carácter fractal, México: Posgrado en Ciencia e Ingeniería en Materiales, UNAM, 2015, p. 121.
- [165] V. Yastrebov, G. Anciaux y J.-F. Molinari, «On the accurate computation of the true contact-area in mechanical contact of random rough surfaces,» *Tribology International*, vol. 114, pp. 161-171, 2017.
- [166] A. Kolmogorov, «Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione,» *G. Ist. Ital. Attuari.*, vol. 4, pp. 83-91, 1933.
- [167] N. Smirnov, «Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions,» *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 19 (2), pp. 279-281, 1948.
- [168] D. Tabor, «The physical meaning of indentation and scratch hardness,» *British Journal of App. Physics*, vol. 7 (5), pp. 159-166, 1956.
- [169] L. Kogut y I. Etsion, «A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces,» *Tribol. Trans.*, vol. 46, pp. 383-390, 2003.
- [170] B. Mikic, «Thermal contact conductance: theoretical considerations,» *Int. J. Heat Mass Trans.*, vol. 205, pp. 416-417, 1974.
- [171] M. Sridhar y M. Yovanovich, «Review of elastic and plastic contact conductance models: comparison with experiments,» *J. Thermophys. Heat. Trans.*, vol. 8, pp. 633-640, 1994.
- [172] G. Zavarise, M. Borri-Brunetto y M. Paggi, «On the resolution dependence of micromechanical contact models,» *Wear*, vol. 262, pp. 42-64, 2007.
- [173] M. Ciavarella, «A New Plasticity Index Including Size-Effects in the Contact of Rough Surfaces,» *Lubricants*, vol. 12, p. 83, 2024.
- [174] Azomaterials, «Tungsten Carbide – An Overview,» [En línea]. Available: <https://www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=1203>.
- [175] ASMInternational, ASM Handbook. Volume 2: Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Special-Purpose Materials, 2004.
- [176] R. Schouwenaars, J. A. Torres, V. H. Jacobo y A. Ortiz, «Tailoring the Mechanical Properties of Al-Sn-Alloys for Tribological Applications,» *Materials Science Forum*, vol. 539, pp. 317-322, 2007.
- [177] ASMInternational, ASM Handbook. Volume 1: Properties and Selection: Irons Steels and High Performance Alloys, 2004.

- [178] AZOmaterials, «Diamond (C) – Properties and Applications,» [En línea]. Available: <https://www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=262>.
- [179] H. Couvy, D. Lahiri, J. Chen, A. Agarwal y G. Sen, «Nanohardness and Young's modulus of nanopolycrystalline diamond,» *Scripta Materialia*, vol. 64 (11), pp. 1019-1022, 2011.
- [180] T. Irifune, A. Kurio, S. Sakamoto, T. Inoue y H. Sumiya, «Ultrahard polycrystalline diamond from graphite,» *Nature*, vol. 421, pp. 599-600, 2003.
- [181] C. G. Figueroa, V. H. Jacobo, J. Cortés-Pérez y R. Schouwenaars, «Surface Nanostructuring of a CuAlBe Shape Memory Alloy Produces a 10.3 ± 0.6 GPa Nanohardness Martensite Microstructure,» *Materials*, vol. 13 (24), p. 5702, 2020.
- [182] H. Eid, G. G. Adams, N. E. McGruer, A. Fortini, S. Buldyrev y D. Srolovitz, «A Combined Molecular Dynamics and Finite Element Analysis of Contact and Adhesion of a Rough Sphere and a Flat Surface,» *Tribology Transactions*, vol. 54, pp. 920-928, 2011.
- [183] A. Tiwari, A. Wang, M. H. Müser y B. N. J. Persson, «Contact Mechanics for Solids with Randomly Rough Surfaces and Plasticity,» *Lubricants*, vol. 7, p. 90, 2019.
- [184] H. Xiao, Y. Sun y Z. Chen, «Fractal modeling of normal contact stiffness for rough surface contact considering the elastic-plastic deformation,» *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, vol. 41, p. 11, 2019.
- [185] X. Yu, Y. Sun, D. Zhao y S. Wu, «A revised contact stiffness model of rough curved surfaces based on the length scale,» *Tribol. Int.*, vol. 164, p. 107206, 2021.
- [186] K. Kant, K. Sibin y R. Pitchumani, «Novel fractal-textured solar absorber surfaces for concentrated solar power,» *Sol. Energy Mater. Sol. Cells*, vol. 248, p. 112040, 2022.
- [187] F. Shen, Y.-H. Li y L.-L. Ke, «A novel fractal contact model based on size distribution law,» *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 249, p. 108255, 2023.
- [188] X. Zhang, Y. Xu y R. Jackson, «An analysis of generated fractal and measured rough surfaces in regards to their multi-scale structure and fractal dimension,» *Tribol. Int.*, vol. 105, pp. 94-101, 2017.

- [189] J. Monti, L. Pastewka y M. Robbins, « Fractal geometry of contacting patches in rough elastic contacts,» *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 160, p. 104797, 2022.
- [190] F. Borodich, A. Pepelyshev y O. Savencu, «Statistical approaches to description of rough engineering surfaces at nano and microscales,» *Tribology International*, vol. 103, pp. 197-207, 2016.
- [191] G. Lancaster, D. Iatsenko, A. Pidde, V. Ticcinelli y A. Stefanovska, «Surrogate data for hypothesis testing of physical systems,» *Physics Reports*, vol. 748, pp. 1-60, 2018.

9. Apéndice

Para confirmar si la rugosidad es un factor relevante en las simulaciones, se realiza un análisis de varianza para las simulaciones planas elásticas y elastoplásticas. La hipótesis 0 dice que la rugosidad no es un factor relevante para las simulaciones.

Primero, se realiza una interpolación con cada una de las curvas de área vs desplazamiento para agregar más datos a la muestra estadística. Después, se obtienen dos tipos de varianzas: primero, la varianza de cada una de las dimensiones fractales con todas las rugosidades máximas de cada punto de las interpolaciones anteriores de todos los puntos (variación entre las medias de las muestras), y segundo, la varianza del promedio de simulaciones por rugosidad de cada par de simulaciones (comparación por pares) para cada dimensión fractal (variación dentro de las muestras). La división de ambas varianzas nos da el número F para cada uno de los puntos de la muestra por dimensión fractal. Con ese número se realizan pruebas F con 10% de intervalo de confianza y se comparan con el valor p de cada simulación: En el caso de las simulaciones elásticas, los grados de libertad son de 17 en el numerador, y 9 en el denominador, mientras que, en las simulaciones elastoplásticas, 9 y 5 respectivamente. Estos valores se introducen en la Distribución F , y se busca el cuantil 0.9, obteniendo los valores p de 2.32 para elástico, y 3.32 para elastoplástico.

Finalmente, se evalúan todos los puntos obtenidos. En la figura 9.1 se observan las curvas de valor F para las simulaciones elásticas. Debajo de la línea roja (valor p), se observan los valores que no cumplen la hipótesis cero o, dicho de otro modo, los valores en donde la rugosidad no es relevante. Se observa que la mayoría de los valores se encuentran debajo del valor p , por lo que se afirma que la rugosidad no es relevante para la fuerza en las simulaciones elásticas.

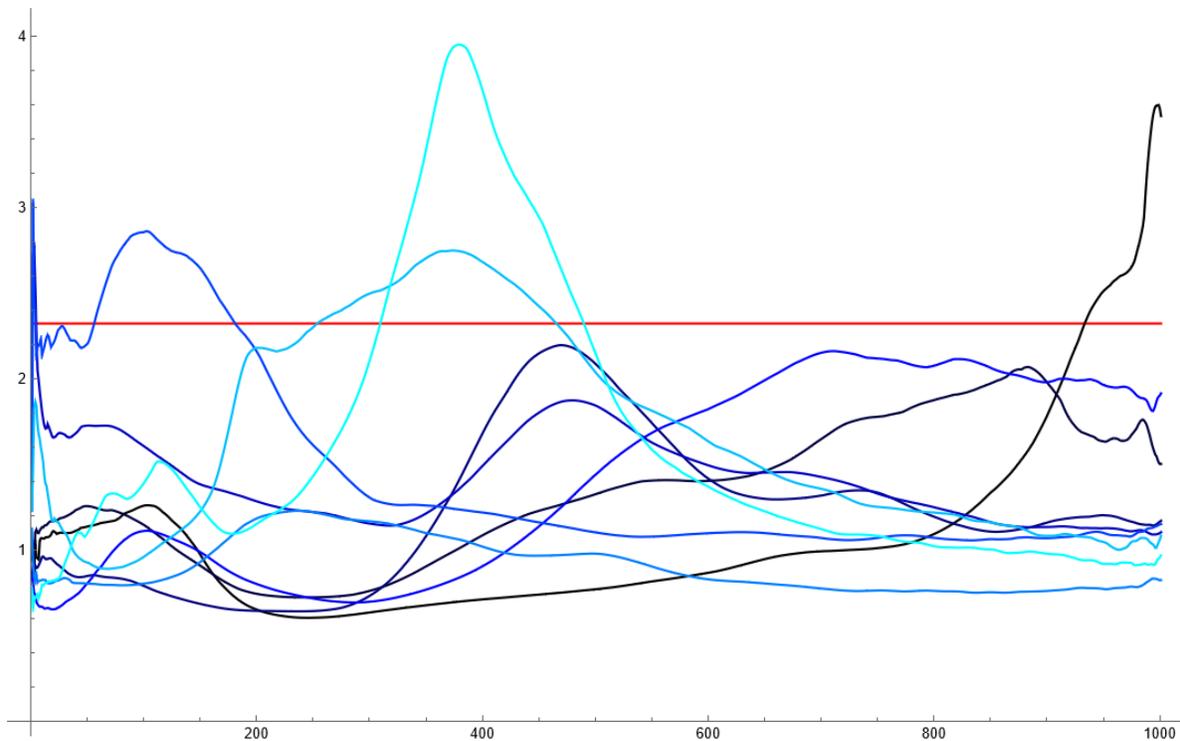


Figura 9.1. Curvas de valor F para el área en simulaciones elásticas. El espectro empieza en negro para dimensiones fractales bajas y en cyan para dimensiones fractales altas. En rojo se observa el valor p donde debajo de este valor, la hipótesis cero no se cumple.

En el caso de las simulaciones elastoplásticas, los resultados se observan en la figura 9.2. En la parte de arriba se observan para 500 MPa de límite de cedencia, y abajo para 1250 MPa. En el espectro, el negro muestra la dimensión fractal de 2.1, mientras que el cyan, 2.9. En estas simulaciones, las curvas de dimensión fractal de 2.5 para abajo no cumplen con la hipótesis cero, mientras que en las siguientes dimensiones fractales, sí se cumple, por lo que podemos afirmar que la rugosidad sí es un factor relevante para la fuerza en los resultados.

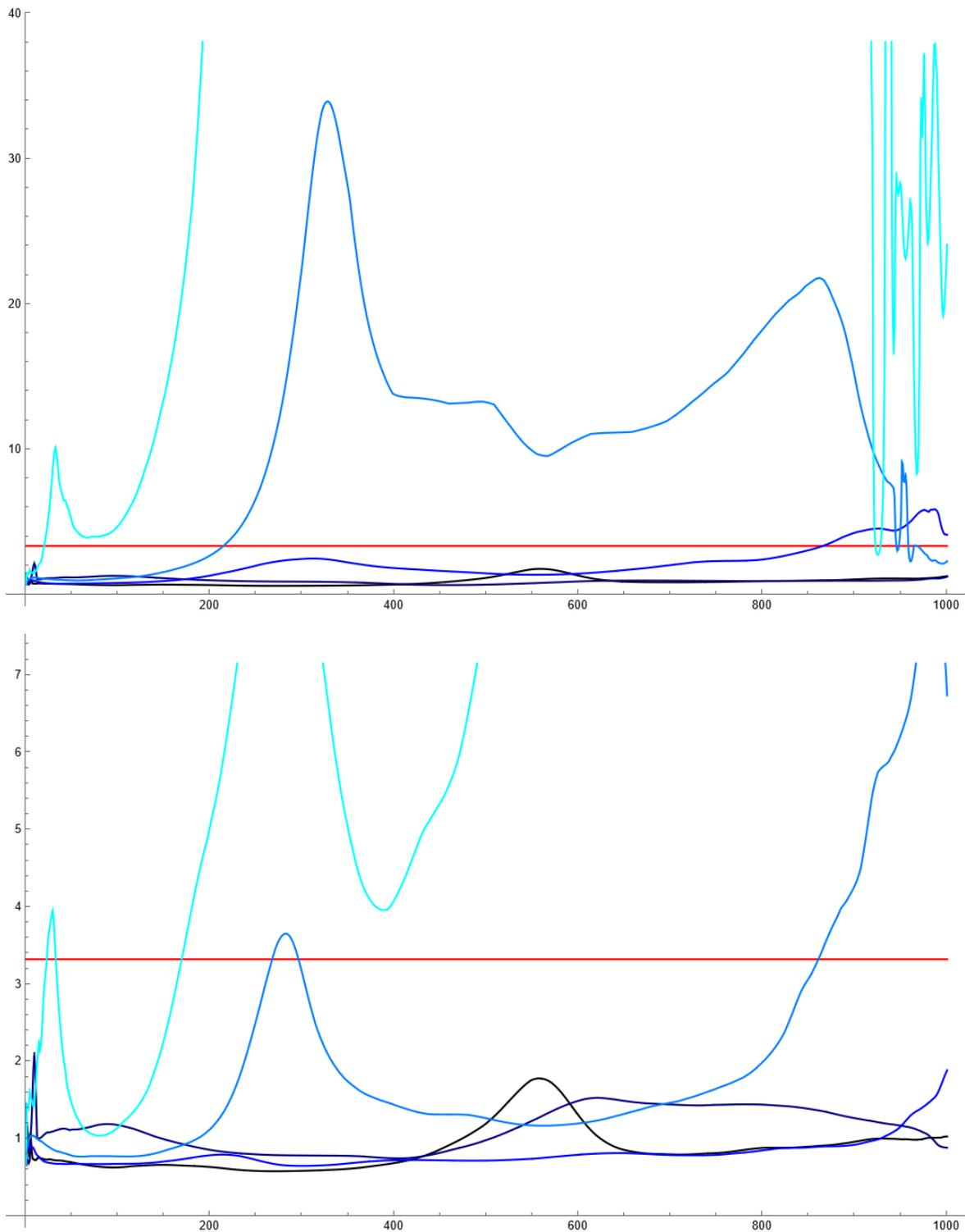


Figura 9.2. Curvas de valor F para el área en simulaciones elastoplásticas con límite de cedencia de 500 MPa (arriba) y 1250 MPa (abajo). El espectro empieza en negro para dimensiones fractales bajas y en cian para dimensiones fractales altas. En rojo se observa el valor p , debajo de este valor, la hipótesis cero no se cumple.