



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TERREMOTOS EN LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

PEDRO ASTUDILLO RAMÍREZ

TUTOR

DR. PIERRE MICHEL BAYARD



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mathematician is measured by the amount of false theorems he has proven.

Michael Spivak

AGRADECIMIENTOS

A lo largo de mi carrera universitaria han ocurrido eventos en mi vida que nunca creí posible, a veces notaba que el sendero en el cual estaba caminando era rocoso, difícil de atravesar y en gran parte sentí que nunca habría un final pues no hallaba una luz para guiarme, el motor que me mantuvo de pie fueron mis objetivos, las luces del camino mis amigos, la fuerza de mis pasos mi familia.

Agradezco infinitamente al doctor Pierre Michel Bayard por haberme aceptado como su tesista, a pesar de nunca haber escuchado de mí con anterioridad. Su paciencia a la hora de corregir el trabajo y su experiencia son inigualables, he aprendido varias cosas fuera de lo académico gracias a sus consejos. Siempre estará en mi memoria la emoción con la que anhelaba realizar un proyecto bajo su tutoría, en todo momento el honor ha sido mío, espero con total franqueza que el trabajo sea de su agrado.

A los sinodales que estén leyendo esto, agradezco su tiempo y dedicación al trabajo presente, cualquier comentario o crítica será siempre bien recibida.

A los docentes que, a lo largo de mi trayectoria universitaria, fueron corrigiéndome les agradezco eternamente sus enseñanzas, pues de no ser por ellos, seguiría viendo a las matemáticas como algo inalcanzable para todos nosotros que no somos genios.

Agradezco especialmente a la doctora Elsa Puente por haber rectificado muchas veces mi comportamiento y modo de aprendizaje, pues a pesar de haberle causado varios problemas a lo largo de mi trayectoria siempre me recibía con los brazos abiertos para apoyarme en toda situación, incluso fuera de la academia. Gracias.

El apoyo constante que he recibido por parte de mi familia a lo largo de mi vida ha sido desde lo más profundo del corazón, a mi mamá, que dedicó su vida entera a criarnos a mi hermana y a mí, le agradezco cada momento que no comió por alimentarnos a nosotros, cada segundo que pasó por lugares donde la maltrataban solamente para brindarnos las mejores condiciones de vida y poder seguir con nuestros estudios, por haber soportado nuestra etapa adolescente llena de discusiones, mal entendidos y quejas, por todo ello y más que no recuerdo, gracias mamá, siempre serás mi ejemplo a seguir y todo lo que he logrado y lograré es gracias a ti. A mi hermana que, a pesar de haber vivido momentos en los que nos sentíamos distanciados, quiero con toda mi alma, le agradezco todo lo que me ha enseñado a base de su experiencia, siempre he querido mostrarle lo mucho que vale como persona, lo tanto que ha logrado en la vida a su corta edad y todo lo que podrá lograr. A todos esos logros le doy mi

apoyo incondicional, incluso si en algún día no estemos cerca el uno del otro, siempre serás mi única y más querida hermana.

Finalmente, debo de agradecer a todos mis compañeros y amigos que he hecho a lo largo de mi vida, pues sin ellos me habría perdido en un hoyo sin fondo de pensamientos y obsesión insana, a todos ellos, gracias, siempre recordaré sus nombres y experiencias que vivimos juntos. Los nombraré en orden de aparición:

Axel Pérez, Victor Manuel Goiz, Jesús Carbajal, Eduardo Calderón, Enrique Chávez, Ricardo Rosales, Francisco C. Ibarra, Anel Flores, Francisco Chávez, Alexis Núñez, David Lázaro, Iván Reyes, Lolbé Castañeda, Xochilt Paulin, Héctor Nieto, Jorge Arturo Quiroz Cabrera, Francisco Alvarado, Lorenzo Alvarado, Ninive Atenea, Isaac Alberto Estrella, Emmanuel Delgadillo, Eduardo Hernández, Fernando Valencia, Balam Angesanti, Mauro Aldair Pérez, Zadh Argumedo, Álvaro Kiedis, Leslie Ramirez, Miguel Sánchez, Abril Espinoza, Raquel Laguna, Paulina Sánchez, Hugo Víctor García e Iñaki Mendieta.

A todos ¡**Gracias!** no sería nadie sin ustedes.

A mi novia, Mariana Flores, le agradezco toda su paciencia y apoyo incluso cuando ella misma no estaba del todo bien, siempre me ha mostrado su total amor y devoción hacia mi, espero que esta breve dedicatoria sea una de tantas muestras de mi cariño hacia ti, gracias, de todo corazón, por darme una oportunidad de estar contigo siempre.

CONTENIDOS

Agradecimientos	v
1 Elementos de la geometría hiperbólica	1
1.1 Topología en el plano complejo extendido	1
1.2 Transformaciones de Möbius	2
1.3 Clasificación	4
1.4 Modelos de la geometría hiperbólica	10
2 Estructuras hiperbólicas relativas	13
2.1 Definiciones	13
2.2 Clasificación	14
3 Terremotos en la geometría hiperbólica	17
3.1 Terremotos	17
3.2 Ejemplos	24
3.3 Consecuencias	27
4 La geología es transitiva	35
4.1 El enunciado principal	35
4.2 Homeomorfismos de extremo izquierdo	36
4.3 Envoltentes convexas	43
4.4 Construcción del terremoto	51
4.5 Ejemplo	56
4.6 La geología es transitiva	57
Apéndice A Topología	59
A.1 Orden circular	59
A.2 Funciones cubriente	60

Apéndice B Análisis	63
B.1 Envoltentes convexas	63
Bibliografía	64

INTRODUCCIÓN

Un terremoto es, a grandes rasgos, una transformación del plano hiperbólico en si mismo que traslada a lo largo de geodésicas ciertas regiones de manera *controlada*. Resulta interesante estudiar con dicha herramienta el comportamiento geométrico que resulta después de operar el terremoto.

El propósito de esta tesis es presentar una demostración clara del teorema sobre la transitividad de la geología presentado por Thurston en su artículo original [Thurston, 1986], el cual es una clasificación de las estructuras hiperbólicas mediante terremotos.

También esclareceremos las construcciones dadas en [Pfeil, 2017], las cuales serán la referencia principal a la hora de llenar los huecos argumentales propuestos en el artículo original, desglosando los argumentos y dando más generalidad en los ejemplos presentados.

En el primer capítulo introducimos los conceptos básicos de la geometría hiperbólica bidimensional, tales como transformación de Möbius, eje de traslación de una transformación hiperbólica y los diferentes modelos de la geometría hiperbólica donde se trabajará el resto de la tesis, en el cual usamos material proveniente de [Anderson, 1999] y [Lascurain, 2015].

El segundo capítulo está dedicado a la clasificación de diferentes métricas en el plano hiperbólico. Más específicamente, clasificaremos a las estructuras hiperbólicas continuas basándonos enteramente en [Thurston, 1986] y apoyados de construcciones dadas en [Pfeil, 2017].

Al inicio del tercer capítulo se definen las nociones de laminación geodésica en el plano hiperbólico y el de terremoto para estudiar en el resto del capítulo las propiedades más importantes que los definen. Al final del mismo, demostraremos que todo terremoto izquierdo da pie a un homeomorfismo del círculo en si mismo que preserva la orientación.

En el cuarto capítulo haremos seguimiento del artículo [Asaka, 2022] para demostrar el teorema principal de Thurston, el cual afirma que todo homeomorfismo del círculo en si mismo resulta de restringir un terremoto en la frontera.

CAPÍTULO 1

ELEMENTOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

En este primer capítulo introduciremos los principales modelos de la geometría hiperbólica, sus propiedades básicas y las diferentes herramientas principales para poder comparar sus diferentes métricas.

1.1 Topología en el plano complejo extendido

Definimos los siguientes conjuntos que usaremos a lo largo del texto:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^2 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}, \\ \mathbb{S}^1 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \\ \mathbb{D}^2 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.\end{aligned}$$

Asumiremos que \mathbb{C} tiene la topología usual, y denotamos por $\hat{\mathbb{C}}$ a la compactificación por un punto del plano complejo, es decir, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

A este último conjunto lo llamaremos **plano complejo extendido**, en el cual definimos la siguiente métrica, llamada **métrica cordal**:

$$d_C(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & \text{si } z_2 = \infty. \end{cases}$$

El siguiente resultado se demuestra en [Lascurain, 2015]:

Teorema 1.1.1:

La métrica cordal y euclídeana inducen la misma topología en \mathbb{C} .

Un hecho interesante es que, bajo la métrica cordal, las bolas abiertas son de la siguiente manera:

$$B_\varepsilon(z) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u - z| < \varepsilon\}, \tag{1.1}$$

$$B_\varepsilon(\infty) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| > \varepsilon\} \cup \{\infty\}, \tag{1.2}$$

para cada $\varepsilon > 0$ y $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, un conjunto es abierto en $\hat{\mathbb{C}}$ si cada punto del mismo tiene una bola centrada en el punto de la forma (1.1) o (1.2).

1.2 Transformaciones de Möbius

Definiremos funciones que sean continuas en la esfera de Riemann respecto a la métrica cordal.

Recordemos que un homeomorfismo entre espacios topológicos es una función biyectiva, continua y cuya inversa es continua.

Teorema 1.2.1:

Las funciones $f, g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definidas para cada $z \in \hat{\mathbb{C}}$ como sigue:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty, & \text{si } z = 0 \\ 0, & \text{si } z = \infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

$$g(z) = \begin{cases} az + b, & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{si } z = \infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$, son homeomorfismos.

La demostración de este hecho se encuentra en [Anderson, 1999].

Ahora, damos la siguiente definición:

Definición 1.2.1:

Una transformación de Möbius es una función $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq -d/c$, si $c \neq 0$, como sigue:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1.5}$$

siendo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

En la ecuación (1.5) podemos multiplicar a los coeficientes por un factor λ^{-1} , donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $\lambda^2 = ad - bc$, para obtener la condición $ad - bc = 1$.

Decimos que las transformaciones de Möbius que cumplen esta última condición son normalizadas.

Además, tenemos los siguientes casos a partir de la definición anterior:

- si $c = 0$, entonces $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, por lo que definimos $T(\infty) = \infty$,
- si $c \neq 0$, asumiendo que $z \neq 0$, entonces:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$$

y definimos en este caso $T(\infty) = \frac{a}{c}$.

Como consecuencia, $T(\infty) = \infty$ si y sólo si $c = 0$.

- Finalmente notemos que

$$T\left(\frac{-d}{c}\right) = \frac{a\frac{-d}{c} + b}{c\frac{-d}{c} + d} = \frac{a\frac{-d}{c} + b}{0},$$

y por ende definimos $T\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$.

En conclusión, las transformaciones de Möbius se extienden de manera natural al plano complejo extendido. Más aún, son composiciones de funciones de la forma (1.3) y (1.4) ya que:

- si $T(\infty) = \infty$, entonces $T(z) = \alpha z + \beta$, para algunos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
- si $T(\infty) \neq \infty$, entonces $c \neq 0$ y podemos escribir lo siguiente:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la observación anterior:

Teorema 1.2.2:

Las transformaciones de Möbius son funciones continuas en $\hat{\mathbb{C}}$. Más aún, son homeomorfismos respecto a la métrica cordal.

Definimos al siguiente conjunto:

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Notemos que, por el primer teorema de isomorfismo de Noether, existe un isomorfismo entre el cociente

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) := \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathbf{Ker}(\mu)$$

y las transformaciones de Möbius (normalizadas), donde $\mu : \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{Möb}^+$ está definida para cada $T \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ como sigue:

$$\mu(T) = \mu \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

En lo que sigue usaremos dicha identificación libremente.

1.3 Clasificación

En \mathbb{C} existen las líneas rectas y las circunferencias de radio positivo. Podemos extender esta noción a $\hat{\mathbb{C}}$ declarando que las líneas rectas ahora son consideradas como circunferencias de radio infinito. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.3.1:

Las transformaciones de Möbius son conformes y mandan circunferencias en circunferencias.

Demostración: Por las observaciones anteriores, basta demostrar el teorema para funciones de la forma (1.3) y (1.4). Para ello, recordemos que las circunferencias en $\hat{\mathbb{C}}$ son descritas de la siguiente forma:

$$C = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0\},$$

donde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ y $\beta \in \mathbb{C}$.

- Sea $w = az + b$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$, entonces $z = \frac{1}{a}(w - b)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación que define a C se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma \\ &= \alpha \left(\frac{1}{a}(w - b)\right) \overline{\left(\frac{1}{a}(w - b)\right)} + \beta \left(\frac{1}{a}(w - b)\right) + \bar{\beta} \overline{\left(\frac{1}{a}(w - b)\right)} + \gamma \\ &= \frac{\alpha}{|a|^2} (w - b)\overline{(w - b)} + \frac{\beta}{a}(w - b) + \overline{\left(\frac{\beta}{a}\right)} \overline{(w - b)} + \gamma \\ &= \frac{\alpha}{|a|^2} (w\bar{w} - b\bar{w} - \bar{b}w + b\bar{b}) - \frac{b\beta}{a} + \frac{\beta}{a}w + \overline{\left(\frac{\beta}{a}\right)}\bar{w} - \overline{\left(\frac{b\beta}{a}\right)} + \gamma \\ &= \frac{\alpha}{|a|^2} w\bar{w} - \frac{b\alpha}{|a|^2} \bar{w} - \frac{\bar{b}\alpha}{|a|^2} w + \frac{b\bar{b}\alpha}{|a|^2} - 2\operatorname{Re}\left(\frac{b\beta}{a}\right) + \gamma + \frac{\beta}{a}w + \overline{\left(\frac{\beta}{a}\right)}\bar{w} \\ &= -2\operatorname{Re}\left(\frac{b\beta}{a}\right) + \alpha \frac{|b|^2}{|a|^2} + \gamma + \left(\frac{\beta}{a} - \frac{\bar{b}\alpha}{|a|^2}\right)w + \left(\overline{\left(\frac{\beta}{a}\right)} - \frac{b\alpha}{|a|^2}\right)\bar{w} + \frac{\alpha}{|a|^2}w\bar{w} \\ &= c_1 + b_1w + \bar{b}_1\bar{w} + a_1w\bar{w}, \end{aligned}$$

donde $c_1 = -2\operatorname{Re}\left(\frac{b\beta}{a}\right) + \alpha \frac{|b|^2}{|a|^2} + \gamma \in \mathbb{R}$, $b_1 = \frac{\beta}{a} - \frac{\bar{b}\alpha}{|a|^2} \in \mathbb{C}$ y $a_1 = \frac{\alpha}{|a|^2} \in \mathbb{R}$. El conjunto de soluciones de esta última expresión, de nuevo, representa una circunferencia en $\hat{\mathbb{C}}$.

- Sea $w = \frac{1}{z}$, entonces $z = \frac{1}{w}$. Sustituyendo esta última expresión en la ecuación que define a C se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma \\ &= \alpha \left(\frac{1}{w}\right) \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \beta \left(\frac{1}{w}\right) + \bar{\beta} \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \gamma \\ &= \frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{\beta}{w} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{w}} + \gamma. \end{aligned}$$

Multiplicando esta última igualdad por $w\bar{w}$ se tiene lo siguiente:

$$0 = \alpha + \beta\bar{w} + \bar{\beta}w + \gamma w\bar{w}.$$

El conjunto de soluciones de esta última expresión representa una circunferencia en $\hat{\mathbb{C}}$.

Por lo tanto las transformaciones de Möbius mandan circunferencias en circunferencias. Ahora, para demostrar que son conformes recordemos que el ángulo en un punto donde dos curvas suaves C_1 y C_2 se intersectan se define como el ángulo formado entre sus vectores tangentes en el mismo punto. Denotemos a este ángulo por $\angle(C_1, C_2)$.

- Sea $f(z) = az + b$ y $f(\infty) = \infty$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$. Sean X_1 y X_2 dos rectas euclidianas que se intersectan en un punto $x \in \mathbb{C}$ y forman un ángulo de θ_1, θ_2 con el eje horizontal respectivamente. Entonces $f(X_1)$ y $f(X_2)$ son rectas euclidianas que se intersectan en el punto $f(x)$. Sean $f(z_i) \in f(X_i)$, y m_i las pendientes de $f(X_i)$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces:

$$m_i = \frac{\text{Im}(f(z_i) - f(x))}{\text{Re}(f(z_i) - f(x))} = \frac{\text{Im}(a(z_i - x))}{\text{Re}(a(z_i - x))} = \tan(\alpha + \theta_i),$$

siendo $\alpha \in [0, 2\pi)$ el ángulo formado entre a y el eje horizontal, como se muestra en la **Figura 1.1**.

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \angle(f(X_1), f(X_2)) &= \arctan(m_2) - \arctan(m_1) \\ &= (\alpha + \theta_2) - (\alpha + \theta_1) \\ &= \theta_2 - \theta_1 \\ &= \angle(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto la función f es conforme.

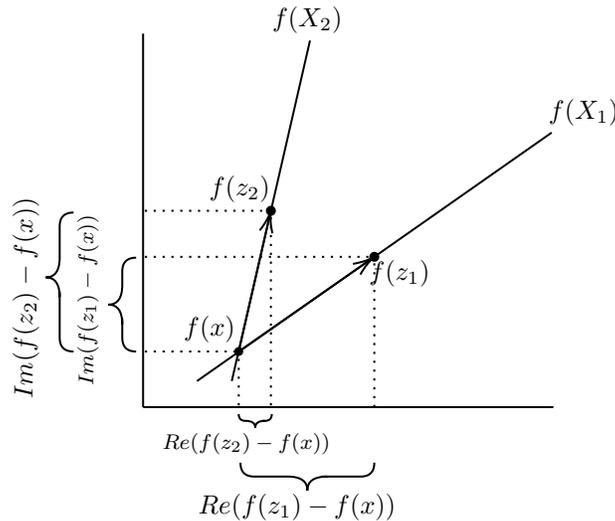


Figura 1.1: Ángulo entre dos rectas euclidianas.

- Consideremos a la función $g(z) = \frac{1}{z}$ como una función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$g(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right),$$

entonces:

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

donde $a = y^2 - x^2$, $b = 2xy$ y $\lambda = x^2 + y^2 > 0$, pues $(x, y) \neq (0, 0)$. Veamos que esta última matriz preserva ángulos, pues para cada par de vectores $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} Dg(x, y) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot Dg(x, y) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\lambda^4} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda^4} (a^2 + b^2)(x_1 y_1 + x_2 y_2) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particular, el ángulo se preserva entre vectores tangentes y por lo tanto la transformación $g(z) = \frac{1}{z}$ es conforme.

En consecuencia, las transformaciones de Möbius mandan circunferencias en circunferencias y son conformes. □

En analogía a las técnicas del álgebra, definimos a la conjugación de transformaciones de Möbius:

Definición 1.3.1:

Decimos que $T, S \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ son conjugadas si existe $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $T = \varphi \circ S \circ \varphi^{-1}$.

Con las siguientes definiciones clasificamos a las transformaciones de Möbius por medio de los puntos que fijan. Supondremos en lo que sigue que dichas funciones no son la identidad, pues se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.3.2:

Si $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ fija tres o más puntos en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces T es la función identidad.

Demostración: Sea T una transformación de Möbius, diferente de la identidad, dada de la siguiente manera:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Entonces, $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de T si y sólo si se cumple lo siguiente:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Tenemos dos casos:

- Si $c \neq 0$, entonces el polinomio anterior puede tener a lo más dos raíces distintas. Además, si $z = \infty$, entonces $T(z) = \frac{a}{c}$, es decir, ∞ no es un punto fijo.
- Si $c = 0$, entonces $T(\infty) = \infty$ y además:

$$(d - a)z - b = 0.$$

Por lo tanto:

- Si $a \neq d$, entonces T tiene exactamente un punto fijo en \mathbb{C} :

$$z = \frac{b}{d - a}.$$

- Si $a = d$ y $b \neq 0$, entonces T no tiene ningún punto fijo en \mathbb{C} .
- Finalmente, si $a = d$ y $b = 0$, entonces T fija a todos los números complejos.

Por lo tanto, si T no es la identidad, tiene a lo más dos puntos fijos. □

Con el teorema anterior motivamos las siguientes definiciones:

Definición 1.3.2:

Decimos que $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ es parabólica si fija exactamente un punto en $\hat{\mathbb{C}}$.

Mediante conjugaciones se puede argumentar que las transformaciones de este estilo son conjugadas a la función $f(z) = z + 1$, cuyo único punto fijo es $z = \infty$. La acción de esta transformación sobre $\hat{\mathbb{C}}$ es la de una traslación paralela al eje real.

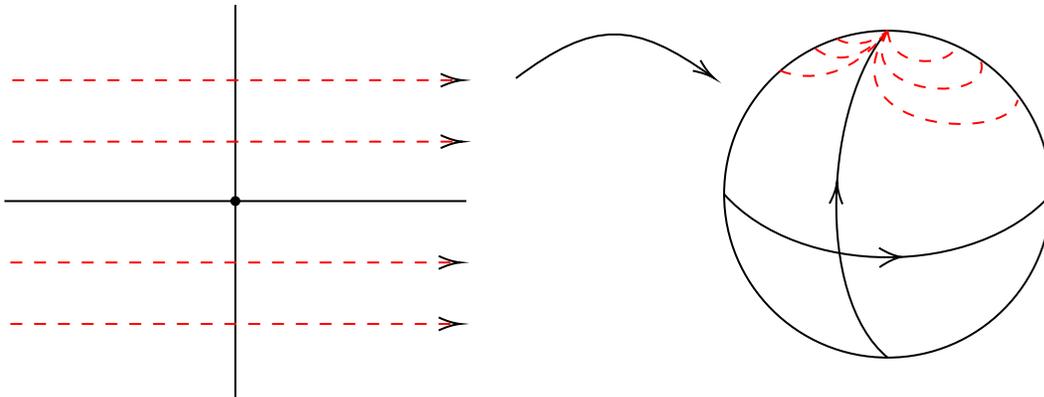


Figura 1.2: Acción de una transformación parabólica en el plano complejo extendido.

Existen otros tipos de transformaciones de Möbius cuyas acciones sobre el plano complejo extendido guardan un significado geométrico profundo.

Definición 1.3.3:

Supóngase que $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ fija dos puntos en $\hat{\mathbb{C}}$ y que es conjugada a la función $f(z) = \alpha z$, para algún $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Si $\alpha = e^{i\vartheta}$, para algún $\vartheta \in (0, 2\pi)$, decimos que T es elíptica,
2. si $\alpha \in [0, \infty)$, decimos que T es hiperbólica,
3. si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin [0, \infty)$, decimos que T es loxodrómica.

Explicamos el significado geométrico de cada una de ellas como sigue:

1. Elíptica:

Para cada $z \in \mathbb{C}$ multiplicar por el factor $\alpha = e^{i\vartheta}$ rota al punto un ángulo de ϑ radianes alrededor del origen en sentido antihorario. Así, su acción sobre el plano complejo extendido consiste en simplemente rotar entorno al origen.

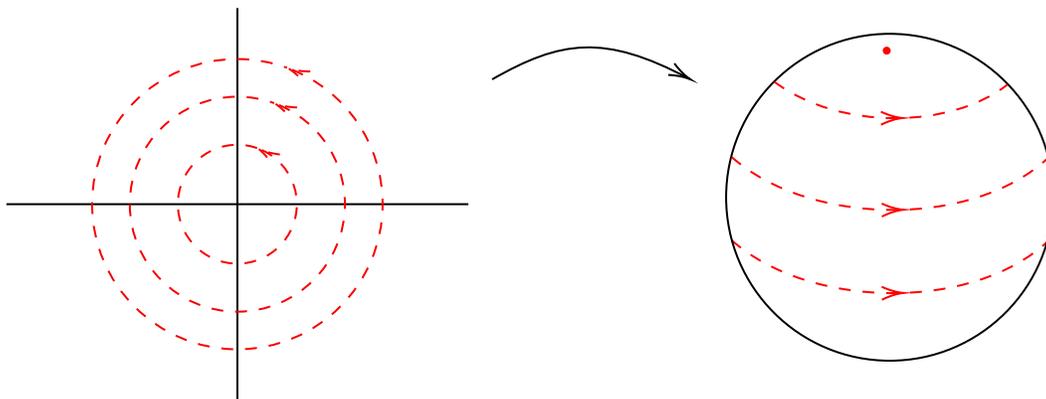


Figura 1.3: Acción de una transformación elíptica.

2. Hiperbólica:

En este caso α es un número real positivo, por lo que, dado $z \in \mathbb{C}$, el número αz yace en la misma dirección que z . Así, una transformación hiperbólica “expande” ó “contrae” a los puntos del plano, dependiendo de la magnitud de α .

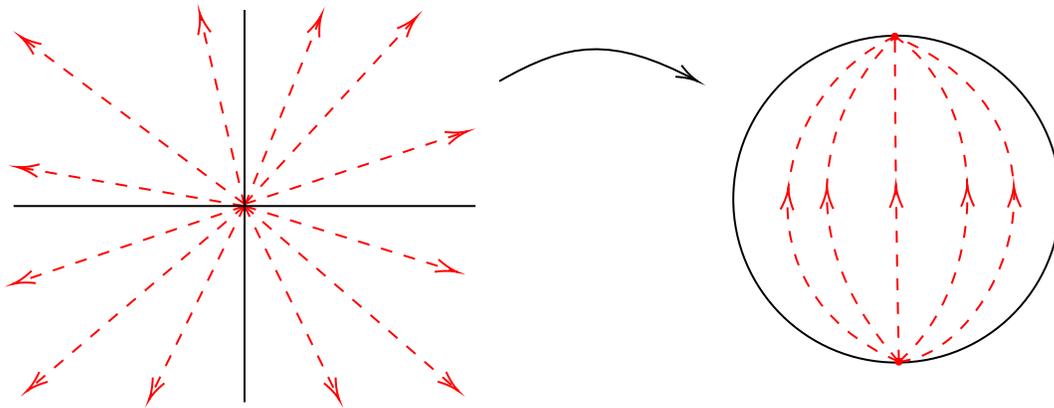


Figura 1.4: Acción de una transformación hiperbólica.

3. Loxodrómica:

En este último caso se combinan ambos fenómenos, pues al ser $|\alpha| \neq 1$, entonces $\alpha = \rho e^{i\vartheta}$ para algunos $\rho \neq 1$ y $\vartheta \in (0, 2\pi)$. Por ende, dado un punto $z \in \mathbb{C}$, al multiplicarlo por α lo estaremos rotando entorno al origen y alejándolo ó acercándolo, dependiendo de la magnitud de ρ .

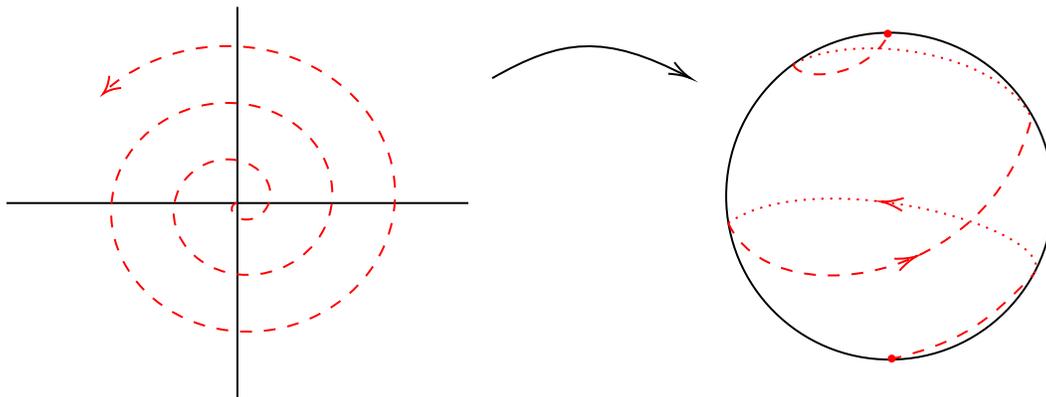


Figura 1.5: Acción de una transformación loxodrómica.

Las transformaciones hiperbólicas jugarán un papel esencial en el trabajo presente.

Un primer intento de clasificar a las transformaciones de Möbius es, mediante conjugaciones, llevar a cada elemento de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ en su forma estándar (aquellas funciones dadas en la **Definición 1.3.3**). Podemos refinar su clasificación mediante la traza:

Definición 1.3.4:

Sea $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ de la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Definimos a la traza de T como $\tau(T) = (a + d)^2$.

Notemos que τ con esta definición es una función bien definida. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores.

Teorema 1.3.3:

Sean $A, B \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$, entonces $\tau(A \circ B) = \tau(B \circ A)$. Más aún, si A y B son conjugadas, entonces $\tau(A) = \tau(B)$.

Con toda esta herramienta en mano enunciamos el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [Anderson, 1999] pág. 46:

Teorema 1.3.4:

Sea $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$.

- T es parabólica si y sólo si $\tau(T) = 4$,
- T es elíptica si y sólo si $\tau(T) \in [0, 4)$,
- T es loxodrómica si y sólo si $Im(\tau(T)) \neq 0$ ó $\tau(T) \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

1.4 Modelos de la geometría hiperbólica

Sólo hemos considerado transformaciones del plano extendido en si mismo, sin embargo buscamos trabajar con aquellas que fijen al siguiente subespacio:

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}.$$

Sea

$$\mathbf{Möb}^+(\mathbb{H}^2) = \{T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) \mid T(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2\}, \quad (1.6)$$

con el siguiente resultado podemos describir de manera explícita a sus elementos:

Teorema 1.4.1:

Los elementos de $\mathbf{Möb}^+(\mathbb{H}^2)$ son de la forma:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.

Un hecho no trivial es que las geodésicas en \mathbb{H}^2 son semicircunferencias centradas en la frontera y semirectas perpendiculares a la frontera, por ello recomendamos al lector consultar la demostración en [do Carmo, 1976], pág. 430.

Definición 1.4.1:

Definimos al modelo del plano semisuperior como al conjunto \mathbb{H}^2 dotado con la métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Con esta definición se cumple que los elementos de $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$ son isometrías del plano semisuperior. Este modelo es el estándar para la geometría hiperbólica plana.

La transformación $C : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ definida para cada $z \in \mathbb{H}^2$ como

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

motiva la definición del siguiente modelo.

Definición 1.4.2:

El modelo del disco de Poincaré es el conjunto \mathbb{D}^2 dotado con la métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

En donde las isometrías que preservan la orientación son de la forma:

$$n(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\alpha} z + \bar{\beta}},$$

para cada $z \in \mathbb{D}^2$ y cada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

Finalmente, hacemos una mención breve sobre el modelo de Klein para la geometría hiperbólica, el cual es el disco unitario dotado de una métrica Riemanniana tal que las geodésicas son líneas rectas en el sentido Euclideano.

En general, una métrica hiperbólica se define como una métrica Riemanniana de curvatura constante igual a -1 . Un resultado de suma importancia es saber que existe una única superficie simplemente conexa con una métrica hiperbólica completa, salvo isometrías. Para una demostración del mismo referimos al lector a [Bruno, 2016].

En cada uno de los modelos tenemos una frontera visual diferente, la cual denotaremos por \mathbb{S}_∞^1 . Así, en el modelo del plano semisuperior queda identificado con $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mientras que en el modelo del disco de Poincaré queda identificado con \mathbb{S}^1 .

CAPÍTULO 2

ESTRUCTURAS HIPERBÓLICAS RELATIVAS

Se sabe que toda métrica hiperbólica completa en \mathbb{H}^2 es isométrica a la métrica usual en \mathbb{H}^2 .

Por ello, es de particular interés clasificar a las isometrías que admiten extensiones continuas en \mathbb{S}_∞^1 .

En este capítulo se clasifican, salvo isometrías, cierto tipo de métricas del plano hiperbólico enfocándonos en los comportamientos de las mismas en la frontera.

2.1 Definiciones

Es de importancia conocer cómo se comportan las métricas hiperbólicas en la frontera, para ello nos basta estudiar aquellas que son isométricas entre si junto con la siguiente condición:

Definición 2.1.1:

Sean h_1 y h_2 dos métricas hiperbólicas completas en \mathbb{H}^2 . Defínase una relación como sigue:

$h_1 \sim h_2$ si y sólo si existe una isometría $\varphi : (\mathbb{H}^2, h_1) \rightarrow (\mathbb{H}^2, h_2)$ tal que:

- a) φ es isotópica a la función identidad $Id_{\mathbb{H}^2}(z) = z$,
- b) existe una extensión continua $\bar{\varphi} : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ de φ tal que $\bar{\varphi}|_{\mathbb{S}_\infty^1} = Id_{\mathbb{S}_\infty^1}$.

Donde una isotopía es una familia continua de un parámetro de homeomorfismos.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la definición:

Lema 2.1.1:

La relación anterior es de equivalencia.

A las clases de equivalencia les llamaremos estructuras hiperbólicas relativas en $(\mathbb{H}^2, \mathbb{S}_\infty^1)$.

Podemos afirmar entonces que dos métricas hiperbólicas completas definen la misma estructura hiperbólica relativa si una de las métricas se obtiene de la otra por una deformación que fija a la frontera de \mathbb{H}^2 .

A lo largo del texto presente **siempre** denotaremos a la extensión de una función f añadiendo una barra horizontal encima de la misma, en este caso por ejemplo \bar{f} .

Nos interesaremos en las estructuras hiperbólicas relativas que son continuas en el infinito en el sentido siguiente:

Definición 2.1.2:

Sea $[g]$ una estructura hiperbólica relativa en $(\mathbb{H}^2, \mathbb{S}_\infty^1)$. Decimos que es continua en el infinito si existe una isometría $G : (\mathbb{H}^2, g) \rightarrow (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})$ con una extensión que es continua en \mathbb{S}_∞^1 .

De manera más general, podríamos haber definido de manera análoga estructuras hiperbólicas relativas en $(\mathbb{H}^2, \mathbb{S}_\infty^1)$ que son “*algo*” en el infinito. Por ejemplo, Lipschitz, lineales, isométricas, etc...

Sin embargo, las estructuras hiperbólicas relativas en $(\mathbb{H}^2, \mathbb{S}_\infty^1)$ que son continuas en el infinito (las cuales llamaremos **estructuras hiperbólicas relativas continuas** simplemente) son clasificadas mediante homeomorfismos de \mathbb{S}_∞^1 en si mismo que preservan la orientación.

Sea

$$\mathbf{Hom}^+(\mathbb{S}_\infty^1) = \{f : \mathbb{S}_\infty^1 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^1 \mid f \text{ es un homeomorfismo y preserva la orientación}\}.$$

El conjunto $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ es naturalmente un subgrupo de $\mathbf{Hom}^+(\mathbb{S}_\infty^1)$, por lo que el conjunto de clases laterales $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \setminus \mathbf{Hom}^+(\mathbb{S}_\infty^1)$ está bien definido.

2.2 Clasificación

Las estructuras hiperbólicas relativas continuas son clasificadas por los homeomorfismos del círculo en si mismo que preservan la orientación, salvo isometrías:

Teorema 2.2.1:

Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de estructuras hiperbólicas relativas continuas y $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \setminus \mathbf{Hom}^+(\mathbb{S}_\infty^1)$.

Demostración: Definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{A} = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \setminus \mathbf{Hom}^+(\mathbb{S}_\infty^1) \text{ y } \mathcal{B} = \{\text{estructuras hiperbólicas relativas continuas}\}.$$

Sea $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ la función definida para cada $[g] \in \mathcal{B}$ como $P([g]) = [\overline{G}|_{\mathbb{S}^1_\infty}]$, siendo $G : (\mathbb{H}^2, g) \rightarrow (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})$ una isometría con una extensión \overline{G} que es continua en \mathbb{S}^1_∞ , y donde los corchetes del lado derecho de la igualdad representan a la clase lateral izquierda cuyo representante es $\overline{G}|_{\mathbb{S}^1_\infty}$.

Se cumple lo siguiente:

- **P está bien definida.**

Sean h y g dos métricas hiperbólicas completas en \mathbb{H}^2 tales que $[h] = [g]$ en \mathcal{B} . Entonces, por la definición de estructura hiperbólica relativa, existe una isometría φ entre ambas métricas h y g de tal manera que su extensión $\overline{\varphi} : \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}^1_\infty \rightarrow \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}^1_\infty$ es tal que $\overline{\varphi}|_{\mathbb{S}^1_\infty} = Id_{\mathbb{S}^1_\infty}$. Sean $H : (\mathbb{H}^2, h) \rightarrow (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})$ y $G : (\mathbb{H}^2, g) \rightarrow (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})$ isometrías dadas por la **Definición 2.1.2**, entonces, $G \circ \varphi \circ H^{-1} \in Isom(\mathbb{H}^2) \cong \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$, es decir, existe una isometría $\alpha : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $G \circ \varphi = \alpha \circ H$.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{H}^2, h) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{H}^2, g) \\
 \downarrow H & & \downarrow G \\
 (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}}) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})
 \end{array}
 \quad \Longrightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 \overline{\mathbb{H}^2} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{\mathbb{H}^2} \\
 \downarrow \overline{H} & & \downarrow \overline{G} \\
 \overline{\mathbb{H}^2} & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & \overline{\mathbb{H}^2}
 \end{array}$$

Figura 2.1: Las diferentes isometrías y sus extensiones.

En consecuencia, las extensiones de estas funciones cumplen lo siguiente:

- (i) $(\overline{G} \circ \overline{\varphi})|_{\mathbb{S}^1_\infty} = \overline{G}|_{\mathbb{S}^1_\infty} \circ \overline{\varphi}|_{\mathbb{S}^1_\infty} = \overline{G}|_{\mathbb{S}^1_\infty}$,
- (ii) $(\overline{\alpha} \circ \overline{H})|_{\mathbb{S}^1_\infty} = \overline{\alpha}|_{\mathbb{S}^1_\infty} \circ \overline{H}|_{\mathbb{S}^1_\infty}$.

Es decir, al ser $\overline{G} \circ \overline{\varphi} = \overline{\alpha} \circ \overline{H}$, entonces $\overline{G}|_{\mathbb{S}^1_\infty} \circ (\overline{H}|_{\mathbb{S}^1_\infty})^{-1} = \overline{\alpha}|_{\mathbb{S}^1_\infty} \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$. Por lo tanto $[\overline{G}|_{\mathbb{S}^1_\infty}] = [\overline{H}|_{\mathbb{S}^1_\infty}]$.

- **P es una función inyectiva.**

Supóngase que $[h], [g] \in \mathcal{B}$ son tales que $[\overline{H}|_{\mathbb{S}^1_\infty}] = [\overline{G}|_{\mathbb{S}^1_\infty}]$, donde $H : (\mathbb{H}^2, h) \rightarrow (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})$ y $G : (\mathbb{H}^2, g) \rightarrow (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})$ son isometrías con extensiones que son continuas en \mathbb{S}^1_∞ . Entonces por definición existe una isometría $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $\overline{G}|_{\mathbb{S}^1_\infty} = \overline{\varphi}|_{\mathbb{S}^1_\infty} \circ \overline{H}|_{\mathbb{S}^1_\infty}$.

Sea $\psi := G^{-1} \circ \varphi \circ H$, la cual es una isometría entre (\mathbb{H}^2, h) y (\mathbb{H}^2, g) , pues es la composición de isometrías, y además es isotópica a la identidad, ya que es una composición funciones isotópicas a la identidad. Entonces,

$$\overline{\psi}|_{\mathbb{S}^1_\infty} = \overline{G}^{-1}|_{\mathbb{S}^1_\infty} \circ \overline{\varphi}|_{\mathbb{S}^1_\infty} \circ \overline{H}|_{\mathbb{S}^1_\infty} = Id_{\mathbb{S}^1_\infty}.$$

Se sigue que ψ es isotópica a la identidad (véase [Pfeil, 2017] pág. 14) y por definición $[h] = [g]$. Por lo tanto f es una función inyectiva.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{H}^2, h) & \xrightarrow{\psi} & (\mathbb{H}^2, g) \\
 H \downarrow & & \downarrow G \\
 (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{H}^2}} & (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})
 \end{array}$$

- **P es una función sobreyectiva.**

Sea $[\varphi] \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \setminus \mathbf{Hom}^+(\mathbb{S}^1_\infty)$.

Como cada homeomorfismo del círculo en si mismo que preserva la orientación se puede extender a un difeomorfismo del disco en si mismo (véase [Pfeil, 2017]), la métrica h en \mathbb{H}^2 definida como sigue:

$$h(x, y) = d_{\text{estándar}}(\varphi(x), \varphi(y)),$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, está bien definida.

Entonces $\varphi : (\mathbb{H}^2, h) \rightarrow (\mathbb{H}^2, d_{\text{estándar}})$ es una isometría por definición¹ y se tiene además que $P([h]) = [\bar{\varphi}|_{\mathbb{S}^1_\infty}]$.

En conclusión, P es una función biyectiva □

Los homeomorfismos de \mathbb{S}^1 en si mismo clasifican a las estructuras hiperbólicas relativas continuas, salvo isometrías.

¹Como comenta Thurston en [Thurston, 1986]: “...todo homeomorfismo de $\overline{\mathbb{H}^2}$ en si mismo cuya extensión es continua en \mathbb{S}^1_∞ induce una métrica completa en \mathbb{H}^2 , única salvo isometrías.”

CAPÍTULO 3

TERREMOTOS EN LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

A modo de analogía, presentaremos primero de manera intuitiva el concepto de terremoto izquierdo (derecho) para posteriormente definirlo de manera rigurosa en el plano hiperbólico.

Un terremoto en la tierra surge de un “movimiento” de la tierra causado por el desplazamiento de las placas tectónicas. Pensemos por un momento en un evento catastrófico, en el cual ocurre un terremoto de tal magnitud que ocasione el desplazamiento, digamos a la izquierda, del terreno frente a nosotros. De inmediato notaríamos una grieta que divide a nuestro terreno cercano en dos zonas, en la que nos encontramos parados y aquella que se desplaza. En este punto hemos asignado de manera natural una orientación a nuestra zona del terreno, de tal forma que nos es posible decidir si el desplazamiento fue hacia la izquierda o hacia la derecha. Con este ejercicio mental podemos ahora abstraer el concepto de un terremoto al plano hiperbólico.

3.1 Terremotos

Asumiremos que la orientación con la que trabajaremos es la usual (antihoraria) y que las isometrías preservan dicha orientación.

Definición 3.1.1:

Una laminación geodésica λ del plano hiperbólico es una colección de geodésicas, ajenas por pares, cuya unión es un subconjunto cerrado L de \mathbb{H}^2 .

Decimos que las geodésicas son las brechas de λ , el lugar de la laminación es la unión ajena de las brechas y a las componentes de $\mathbb{H}^2 \setminus L$ les llamamos zonas.

Las zonas junto con las brechas forman los estratos de λ .

Con toda esta terminología en mano podemos escribir de manera rigurosa la siguiente definición:

Definición 3.1.2:

Sea λ una laminación geodésica del plano hiperbólico.

Un λ -terremoto izquierdo E es una función biyectiva del plano hiperbólico en si mismo que cumple lo siguiente:

1. La restricción de E a cualquier estrato A de λ coincide con una isometría, denotada por $(E|_A)$ y
2. para cualesquiera dos estratos diferentes A y B de λ , la isometría de comparación

$$cmp(A, B) = (E|_A)^{-1} \circ (E|_B) : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

es una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación l separa débilmente a A y B , y que además traslada los puntos hacia la izquierda visto desde A .

Siendo que l separa débilmente a A y B si cualquier trayectoria que une a dos puntos $a \in A$ y $b \in B$ interseca a l .

Un λ -terremoto derecho se define de manera análoga, sólo falta pedir que la traslación ahora sea hacia la derecha.

Definición 3.1.3:

Sean λ_s y λ_t dos laminaciones en el plano hiperbólico.

Un terremoto izquierdo es un λ_s -terremoto izquierdo $E : (\mathbb{H}^2, \lambda_s) \rightarrow (\mathbb{H}^2, \lambda_t)$ tal que, para cada estrato A de λ_s , $E(A)$ es un estrato de λ_t , y para cada estrato B de λ_t existe un estrato C de λ_s tal que $E(C) = B$.

Esto último es equivalente a decir que “*un terremoto izquierdo manda a los estratos del dominio a los estratos del codominio y viceversa*”.

Como habrá de esperarse, un terremoto derecho se define de manera completamente análoga, sin embargo, no habrá necesidad de distinguir entre ambos pues todo terremoto derecho se define a partir de uno izquierdo, y viceversa:

Teorema 3.1.1:

Sean λ_s y λ_t dos laminaciones geodésicas en el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 y sea $E : (\mathbb{H}^2, \lambda_s) \rightarrow (\mathbb{H}^2, \lambda_t)$ un terremoto izquierdo, entonces E^{-1} es un terremoto derecho.

Notemos que aquí es evidente el por qué se pide que E sea una función biyectiva.

Demostración: Se verifican los siguientes tres puntos:

- E^{-1} es una función biyectiva.

Ya que E lo es.

- Para cada estrato A_t de λ_t , $E^{-1}|_{A_t}$ es una isometría.

En efecto, sabemos que existe un estrato A_s de λ_s tal que $E(A_s) = A_t$, por lo que ocurre lo siguiente:

$$E^{-1}|_{A_t} = E^{-1}|_{E(A_s)} = (E|_{A_s})^{-1}.$$

Como $E|_{A_s}$ coincide con la isometría $(E|_{A_s})$, entonces $E^{-1}|_{A_t}$ también coincide con una isometría, a saber, $(E|_{A_s})^{-1}$.

- Para cada par de estratos A_t y B_t de λ_t la isometría de comparación $cmp(A_t, B_t)$ es una transformación hiperbólica cuyo eje separa débilmente a A_t y B_t .

Notemos que si la isometría de comparación $cmp(A_t, B_t)$ es respecto a E^{-1} , entonces ocurre lo siguiente:

$$cmp(A_t, B_t) = (E^{-1}|_{A_t})^{-1} \circ (E^{-1}|_{B_t}) = (E|_{A_s}) \circ (E|_{B_s})^{-1},$$

Ahora, sean x_1 y x_2 los extremos del eje de separación l_s de la isometría de comparación respecto a E , $cmp(A_s, B_s)$, que separa a A_s y B_s . Sean además $y_1 = (E|_{A_s})(x_1) = (E|_{B_s})(x_1)$ y $y_2 = (E|_{A_s})(x_2) = (E|_{B_s})(x_2)$, entonces para cada $i \in \{1, 2\}$ se tiene lo siguiente:

$$cmp(A_t, B_t)(y_i) = (E|_{A_s}) \circ (E|_{B_s})^{-1}(y_i) = y_i.$$

Es decir, la transformación $cmp(A_t, B_t)$ fija a los puntos y_1 y y_2 , por lo que es una transformación hiperbólica con eje $l_t = (E|_{A_s})(l_s) = (E|_{B_s})(l_s)$.

Notemos que las transformaciones $(E|_{A_s})$ y $(E|_{B_s})$ preservan la orientación, por lo que $A_t = (E|_{A_s})(A_s)$ y $(E|_{B_s})(A_s)$ se encuentran del mismo lado de l_t . Análogamente, los estratos $B_t = (E|_{B_s})(B_s)$ y $(E|_{A_s})(B_s)$ se encuentran del otro lado de l_t , por ende l_t separa débilmente a los estratos A_t y B_t .

- $cmp(A_t, B_t)$ traslada a los puntos hacia la derecha, visto desde A_t .

En efecto, sea x_1 el punto repulsor fijo de $cmp(A_s, B_s)$.

Sea $w \in \mathbb{S}_\infty^1$ diferente de y_1 y y_2 (véase **Figura 3.1**), entonces $z = (E|_{B_s})^{-1}(w)$ cumple lo siguiente:

$$cmp(A_t, B_t)(w) = (E|_{A_s}) \circ (E|_{B_s})^{-1}((E|_{B_s})(z)) = (E|_{A_s})(z).$$

Como x_1 es el punto repulsor para $cmp(A_s, B_s)$, z se encuentra más cerca de x_1 que $cmp(A_s, B_s)(z)$. Se sigue que, aplicando $(E|_{A_s})$ a z y x_1 , $(E|_{A_s})(z) = cmp(A_t, B_t)(w)$ está más cerca de $(E|_{A_s})(x_1) = y_1$ que w .

Es decir, $cmp(A_t, B_t)(w)$ está más cerca de y_1 que w .

Por lo tanto, $cmp(A_t, B_t)$ traslada a los puntos hacia la derecha, visto desde A_t .

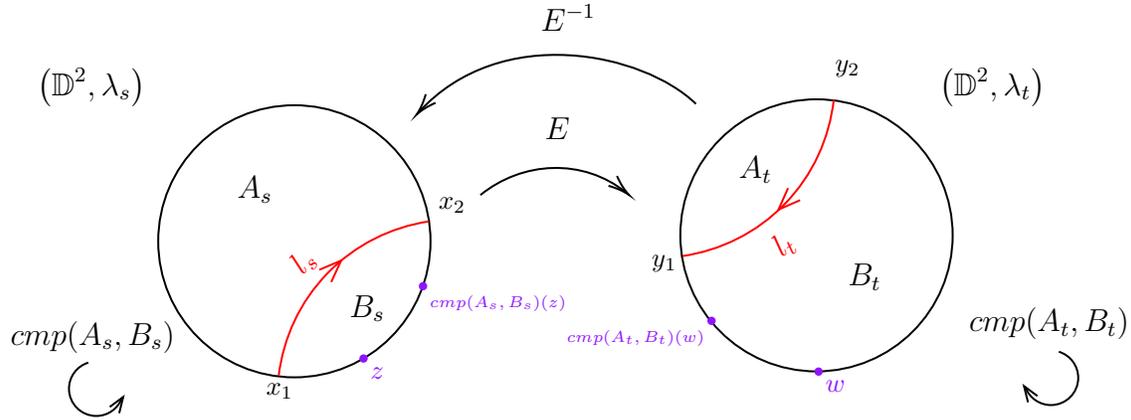


Figura 3.1: Un terremoto izquierdo E induce un terremoto derecho E^{-1} .

En consecuencia, E^{-1} es un terremoto derecho. □

Por la proposición anterior podemos reducir nuestro discurso a terremotos izquierdos únicamente. Así, cuando mencionemos **un terremoto** nos referiremos a un terremoto izquierdo.

Naturalmente se tienen varios tipos de terremotos, entre los cuales se encuentran aquellos con laminaciones finitas, como aquellos descritos en los ejemplos. El siguiente resultado nos será útil a la hora de querer construir terremotos a partir de una laminación finita dada:

Lema 3.1.1:

Sean S y T transformaciones hiperbólicas con ejes de traslación ajenos que además se “trasladan en la misma dirección”. Entonces $S \circ T$ es una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación separa en el sentido débil a los ejes de S y de T .

Por “trasladar en la misma dirección” nos referimos a que la región acotada por los ejes de traslación de S y T induce una orientación en los ejes tal que concuerda con la dirección de traslación de uno pero no con la otra dirección.

Demostración:

Trabajaremos en el modelo del disco de Poincaré.

Sean s^+, t^+ y s^-, t^- los puntos atractores y repulsores, respectivamente, de las transformaciones S y T , que además son sus puntos fijos.

Consideremos a los siguientes intervalos:

$$I = (s^+, t^+) \text{ y } J = (t^-, s^-).$$

Notemos que S y T mandan puntos en I a puntos en I , y análogamente T^{-1} y S^{-1} mandan puntos de J en J . Por lo tanto, $S \circ T$ tiene un punto fijo $x^+ \in I$ y $(S \circ T)^{-1}$ tiene un punto fijo en $x^- \in J$, en consecuencia $S \circ T$ es una transformación hiperbólica

cuyo eje de traslación, determinado por los puntos x^+ y x^- , separa débilmente a los ejes de traslación de S y T . \square

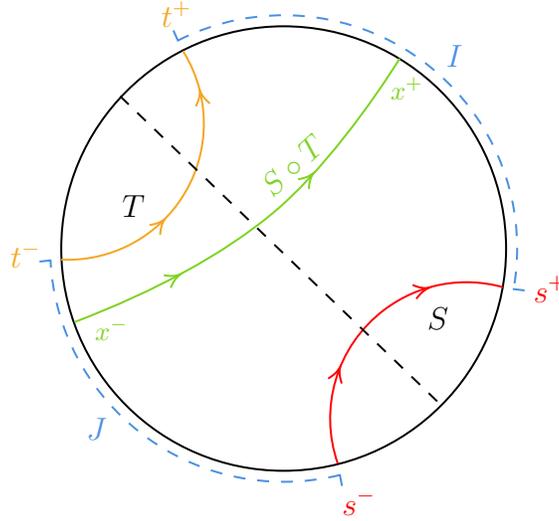


Figura 3.2: El eje de traslación de $S \circ T$ separa débilmente a los ejes de S y T .

El procedimiento general para definir terremotos por partes viene descrito en el siguiente resultado:

Lema 3.1.2:

Sea λ una laminación finita y $E : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ una función que es una isometría en cada estrato de λ . Entonces E es un λ -terremoto izquierdo si y sólo si la isometría de comparación $cmp(A, B)$ de dos estratos adyacentes A y B es una transformación hiperbólica que traslada la brecha que los separa hacia la izquierda, visto desde A .

Demostración:

\implies) Es inmediato por la **Definición 3.1.2**.

\impliedby) Veamos que E es un λ -terremoto izquierdo, para lo cual debemos verificar que se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cualesquiera dos estratos $A \neq B$ de λ , la isometría de comparación $cmp(A, B)$ es una transformación hiperbólica cuyo eje separa débilmente a A y B , que además se traslada en dirección positiva respecto a la orientación de A .

En efecto, una trayectoria que une a un par de puntos en A y B , respectivamente, interseca a una cantidad finita de estratos $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ (los cuales podemos asumir sin pérdida de generalidad que están enumerados en ese orden). En consecuencia, al ser

$$cmp(A, B) = cmp(A_0, A_1) \circ cmp(A_1, A_2) \circ \dots \circ cmp(A_{n-1}, A_n),$$

se sigue mediante un argumento inductivo en el número de estratos y por el **Lema 3.1.1** que $cmp(A, B)$ es una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación l separa a A y B , y que traslada a los puntos hacia la izquierda visto desde A .

2. **E es una función biyectiva del plano hiperbólico en si mismo.**

Sean $x, y \in \mathbb{H}^2$ tales que $E(x) = E(y)$. Si $A \neq B$ son dos estratos y $x \in A$ pero $y \in B$, entonces al ser

$$(E|A)(x) = E(x) = E(y) = (E|B)(y),$$

se tiene que $cmp(A, B)(x) = y$. Pero hemos demostrado anteriormente que $cmp(A, B)$ es una isometría hiperbólica que separa débilmente a A y B , por lo que x debe estar en un lado de l opuesto al que debe de estar de y . Por lo tanto, $cmp(A, B)(x) = y$ es una contradicción, es decir, x y y están en el mismo estrato, digamos C . Así, ocurre lo siguiente:

$$(E|C)(x) = E(x) = E(y) = (E|C)(y),$$

y como consecuencia $x = y$, pues $(E|C)$ es una isometría.

Por lo tanto, E es una función inyectiva.

Finalmente, notemos que $E(\partial A) = \partial E(A)$, para cada estrato A . Por lo tanto, al ser la laminación finita, se sigue que $Im(E)$ es un conjunto cerrado.

Ahora, sea $y \notin Im(E)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \cap Im(E) = \emptyset$. Podemos asumir que esta bola es maximal respecto a la contención. Entonces, existe un punto z en la cerradura de $B_\varepsilon(y)$ que también está en $Im(E)$. Como z debe estar en la frontera de la imagen, existe una brecha l de la laminación tal que $z \in E(l)$. Recordemos que l es adyacente a dos estratos $A \neq B$, por lo que $E(l)$ es adyacente a los conjuntos $E(A)$ y $E(B)$, y por ende $B_\varepsilon(y)$ interseca a alguno de los dos, lo cual contradice el hecho de que $B_\varepsilon(y)$ sea ajeno a $Im(E)$.

Por lo tanto, E es una función suprayectiva, y por ende biyectiva.

□

El siguiente resultado, consecuencia de los dos lemas anteriores, nos asegura que es suficiente estudiar a los terremotos con laminaciones finitas, los cuales llamaremos simples:

Teorema 3.1.2:

El conjunto de terremotos izquierdos con una laminación finita es denso en el conjunto de todos los terremotos izquierdos, con la topología de convergencia uniforme en conjuntos compactos.

Demostración: Considere la siguiente métrica en el producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_{\mathbb{H}^2}(x_1, x_2), d_{\mathbb{H}^2}(y_1, y_2)\},$$

donde $d_{\mathbb{H}^2}$ denota a la métrica hipérbolica usual en \mathbb{H}^2 .

Para cada subconjunto $X \subseteq \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ y cada $\varepsilon > 0$ definimos la vecindad tubular de radio ε como el siguiente conjunto:

$$X_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \mid d((x, y), X) < \varepsilon\}.$$

Sea E un λ -terremoto izquierdo, y sea $A = \{A_i\}_{i \in I}$ el conjunto de los estratos asociados a la laminación λ .

Dados un subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{H}^2$ y $\varepsilon > 0$, definimos el siguiente conjunto, el cual es compacto en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$:

$$\mathcal{K} = \mathbf{cl}\{(x, E(x)) \mid x \in K\}.$$

Notemos que $\mathbf{cl}(E(K))$ es un conjunto compacto. Ahora, dado $(x, y) \in \mathcal{K}$, entonces por definición de cerradura, existe $z \in K$ tal que $d((z, E(z)), (x, y)) < \varepsilon$. En consecuencia, se tiene que $(x, y) \in \{(a, E(a)) \mid a \in A_i \cap K\}_\varepsilon$, para algún $i \in I$.

Es decir, se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{K} \subseteq \bigcup_{i \in I} \{(x, E(x)) \mid x \in A_i \cap K\}_\varepsilon.$$

Entonces, por compacidad, existe un subcolección finita de vecindades tubulares que cubren a \mathcal{K} de la siguiente manera:

$$\mathcal{K} \subseteq \bigcup_{j=1}^n \{(x, E(x)) \mid x \in A_{i_j} \cap K\}_\varepsilon, \quad (3.1)$$

para algún $n \geq 1$.

Sea $x \in K$, entonces $(x, E(x)) \in \mathcal{K}$ y así existe $y \in A_{i_j} \cap K$, para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $d((x, E(x)), (y, E(y))) < \varepsilon$.

Por el **Lema 3.1.1** los ejes de traslación de las isometrías de comparación entre los estratos $\{A_{i_j}\}_{j=1}^n$ separan débilmente por pares a los estratos. Sea l la laminación formada por dichos ejes de comparación y defínase al estrato B_{i_j} como la componente conexa de $\mathbb{H}^2 \setminus l$ que contiene a A_{i_j} .

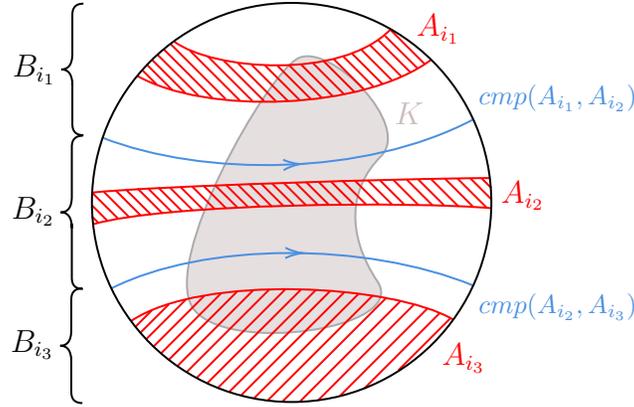


Figura 3.3: Construcción de la laminación finita l del terremoto F .

Definimos al l -terremoto izquierdo F como $(F|B_{i_j}) = (E|A_{i_j})$, las cuales son isometrías por definición, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces F es un terremoto simple por el **Lema 3.1.2**.

Para finalizar, demostraremos que **F aproxima a E sobre el compacto K** .

En efecto, por la ecuación (3.1) se cumple lo siguiente:

$$\{(x, E(x)) \mid x \in K\} \subseteq \{(x, F(x)) \mid x \in K\}_\varepsilon,$$

así, para cada $x \in K$, existe $y \in K$ tal que $d((x, E(x)), (y, F(y))) < \varepsilon$. Es decir, la gráfica de F sobre K aproxima a la gráfica de E . \square

Los terremotos simples son densos.

3.2 Ejemplos

Con la herramienta desarrollada, damos los siguientes ejemplos donde trabajaremos en el modelo del espacio semisuperior \mathbb{H}^2 :

- 1) Sean $a > 0$ y $\varphi(z) = e^{-a}z$, para cada $z \in \mathbb{H}^2$, una isometría que preserva la orientación. Consideremos a la laminación λ que consiste de la única geodésica que une al origen con ∞ , a saber:

$$l = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) = 0\}.$$

Definimos a los siguiente conjuntos:

$$A = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) > 0\} \text{ y } B = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) < 0\},$$

entonces tenemos en total tres estratos de λ , A, B y l .

Sean $(E|A) = Id$ y $(E|B) = \varphi = (E|l)$, entonces $cmp(A, B) = \varphi$ es una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación l separa débilmente a A y B que además mueve los puntos hacia la izquierda visto desde A .

Lo único que hace falta notar es que $cmp(B, A) = \varphi^{-1}$ es una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación l separa débilmente a A y B , y que además mueve los puntos hacia la izquierda visto desde B .

Además $cmp(B, l) = Id = cmp(l, B)$.

Así, por el resultado anterior se tiene asociado un λ -terremoto izquierdo E .

2) Sea

$$K = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) = 0\}$$

y considere la laminación λ que tiene como único elemento a K .

Al ser

$$\mathbb{H}^2 \setminus K = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) > 0\} \cup \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) < 0\}$$

se tienen dos zonas

$$A = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) < 0\}, \text{ y } B = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) > 0\}.$$

Dado $a > 1$, defínanse las siguientes isometrías para cada $z \in \mathbb{H}^2$ como sigue:

$$(E|A)(z) = \frac{1}{a}z, \quad (E|B)(z) = az, \text{ y } (E|K)(z) = z.$$

Claramente cada una de las funciones es una isometría hiperbólica que preserva la orientación y fija a los puntos 0 y ∞ .

Notemos que así,

$$(E|A)^{-1} = (E|B) \text{ y } (E|K)^{-1} = (E|K).$$

Por lo tanto, las isometrías de comparación son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} cmp(A, B)(z) &= (E|A)^{-1} \circ (E|B)(z) = (E|B)(az) = a^2z, \\ cmp(B, K)(z) &= (E|B)^{-1} \circ (E|K)(z) = (E|A)(z) = \frac{1}{a}z, \\ cmp(A, K)(z) &= (E|A)^{-1} \circ (E|K)(z) = (E|B)(z) = az, \\ cmp(B, A)(z) &= (E|B)^{-1} \circ (E|A)(z) = (E|A)\left(\frac{1}{a}z\right) = \frac{1}{a^2}z, \\ cmp(K, B)(z) &= (E|K)^{-1} \circ (E|B)(z) = (E|K)(az) = az, \\ cmp(K, A)(z) &= (E|K)^{-1} \circ (E|A)(z) = (E|K)\left(\frac{1}{a}z\right) = \frac{1}{a}z, \end{aligned}$$

para cada $z \in \mathbb{H}^2$.

Además, es claro que cada isometría de comparación es hiperbólica, preserva la orientación, fija al origen y ∞ , y por ende a la geodésica que los une, los ejes de estas isometrías separan en el sentido débil a cada par de estratos, y cada isometría de comparación $cmp(A, B)$ mueve a los puntos hacia la izquierda visto desde A .

Hacemos hincapié en el hecho de que $cmp(A, B) = cmp(B, A)^{-1}$, $cmp(B, K) = cmp(K, B)^{-1}$ y $cmp(A, K) = cmp(K, A)^{-1}$.

Por lo tanto, la función E definida para $z \in \mathbb{H}^2$ como

$$E(z) = \begin{cases} (E|A)(z), & \text{si } z \in A \\ (E|K)(z), & \text{si } z \in K \\ (E|B)(z), & \text{si } z \in B \end{cases}$$

es por definición un λ -terremoto izquierdo.

- 3) Retomamos el ejemplo presentado en [Pfeil, 2017], pág. 28., el cual expone un comportamiento particular para puntos en \mathbb{S}_∞^1 que están acotados por zonas cuyo diámetro tiende a ser cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea l_n la geodésica que conecta a los puntos de la frontera $-e^{-n}$ y e^{-n} , como se muestra en la **Figura 3.4**. Sea λ la laminación dada por las geodésicas l_n , las zonas A_n entre l_{n-1} y l_n y A_0 la zona restante. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea ψ_n la isometría que manda al eje imaginario a l_n dada para $z \in \mathbb{H}^2$ como

$$\psi_n(z) = \frac{e^{-n}z - e^{-n}}{z + 1}.$$

Sea $\varphi(z) = e^2z$ una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación es el eje imaginario. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la transformación $\psi_n \circ \varphi \circ \psi_n^{-1}$ es hiperbólica, cuyo eje de traslación es l_n .

Definimos de manera recursiva lo siguiente:

$$(E|A_0) = Id_{\mathbb{H}^2} \text{ y } (E|A_n) = (E|A_{n-1}) \circ (\psi_n \circ \varphi \circ \psi_n^{-1}).$$

Además, sea $(E|l_n) = (E|A_n)$, entonces las isometrías de comparación para estratos adyacentes A_n y A_{n+1} son

$$cmp(A_n, A_{n+1}) = (E|A_n)^{-1} \circ ((E|A_n) \circ (\psi_{n+1} \circ \varphi \circ \psi_{n+1}^{-1})) = \psi_{n+1} \circ \varphi \circ \psi_{n+1}^{-1}.$$

Ahora, si A_m y A_n son estratos arbitrarios con $m > n$, entonces

$$cmp(A_n, A_m) = cmp(A_n, A_{n+1}) \circ cmp(A_{n+1}, A_{n+2}) \circ \dots \circ cmp(A_{m-1}, A_m).$$

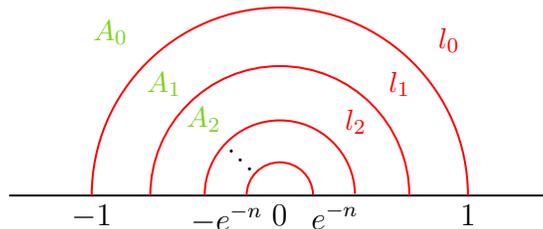


Figura 3.4: Base de vecindades alrededor del origen cuyo diámetro tiende a cero.

Con este ejemplo se tiene un terremoto con una infinidad de brechas que se acumulan en un punto de \mathbb{S}_∞^1 .

3.3 Consecuencias

Aunque los terremotos en general no sean continuos, siempre pueden extenderse de manera que en la frontera \mathbb{S}_∞^1 sean continuos. Enunciamos el siguiente lema cuya demostración puede consultarse en [Pfeil, 2017] pág. 25:

Lema 3.3.1:

Sea E un terremoto, entonces E es una función suprayectiva si y sólo si para cualquier sucesión de brechas $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y cualquier sucesión de semiplanos $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con frontera igual a l_n tales que $H_{n+1} \subseteq H_n$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ consiste en un solo punto en \mathbb{S}_∞^1 , la sucesión $\{E(l_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumple las mismas propiedades.

Ahora, enunciamos el resultado de extensión a la frontera:

Teorema 3.3.1:

Si E es un λ -terremoto, entonces existe una única función

$$E_\infty : \mathbb{S}_\infty^1 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^1,$$

tal que E junto con E_∞ forman una función continua en cada punto $x \in \mathbb{S}_\infty^1$.

Demostración: Sea $x \in \mathbb{S}_\infty^1$.

- Definiremos a $E_\infty(x)$ distinguiendo dos casos:

1. Si x está en la cerradura de un estrato A , defínase $E_\infty(x) = (E|A)(x)$. Al ser $(E|A)$ una isometría se tiene que $E_\infty(x) \in \mathbb{S}_\infty^1$. Veamos además que esto está bien definido, pues si x está en la cerradura de dos estratos $A \neq B$, entonces como el eje de traslación de la isometría $cmp(A, B)$ separa débilmente a A y B , x debe de estar en la cerradura del eje de traslación. Por lo tanto, $cmp(A, B)(x) = x$, es decir, $(E|A)(x) = (E|B)(x)$. Por lo tanto, en este caso, $E_\infty(x)$ está bien definido.
2. Finalmente, si x no está en la cerradura de ningún estrato (como el caso que se muestra en la **Figura 3.4** para $x = 0$), entonces tiene una base de vecindades rodeadas por brechas cuyo diámetro tiende a cero. Por el **Lema 3.3.1**, bajo el terremoto estas brechas convergen a un único punto al cual denotaremos como $E_\infty(x)$.

- E_∞ es una función biyectiva.

Notemos que $G = E^{-1}$ es un terremoto derecho por el **Teorema 3.1.1**. En consecuencia, G también puede extenderse a una función G_∞ en \mathbb{S}_∞^1 siguiendo la construcción dada en los pasos anteriores, por lo tanto, dado $x \in \mathbb{S}_\infty^1$:

1. Si x está en la cerradura de un estrato A se cumple lo siguiente:

$$G_\infty(E_\infty(x)) = (E|A)^{-1}((E|A)(x)) = x.$$

Análogamente $E_\infty(G_\infty(x)) = x$.

2. Cuando x no está en la cerradura de ningún estrato, por construcción, se tiene que $G_\infty(E_\infty(x))$ es el único punto al cual convergen las imágenes de las brechas bajo $G \circ E = Id_{\mathbb{S}_\infty^1}$, por lo tanto es igual a x . Análogamente $E_\infty(G_\infty(x)) = x$.

Por lo tanto $G_\infty \circ E_\infty = Id_{\mathbb{S}_\infty^1} = E_\infty \circ G_\infty$, es decir, E_∞ es biyectiva.

- **E_∞ preserva el orden circular.**

Sean $x, y, z \in \mathbb{S}_\infty^1$ tales que (x, y, z) se encuentran en orden circular. Tenemos varios casos:

1. Si x, y y z están en la cerradura del mismo estrato A , entonces

$$((E|A)(x), (E|A)(y), (E|A)(z)) = (E_\infty(x), E_\infty(y), E_\infty(z))$$

se encuentra en orden circular, pues $(E|A)$ es una isometría.

2. Sin pérdida de generalidad, si x, y están en la cerradura de un estrato A y z está en la cerradura de otro estrato diferente B , entonces el eje de traslación de la isometría $cmp(A, B)$ separa a los puntos x, y de z , y así $(x, y, cmp(A, B)(z))$ está en orden circular. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & ((E|A)(x), (E|A)(y), (E|A)(cmp(A, B)(z))) \\ &= ((E|A)(x), (E|A)(y), (E|B)(z)) \\ &= (E_\infty(x), E_\infty(y), E_\infty(z)) \end{aligned}$$

está en orden circular.

3. Si x, y y z están en la cerradura de tres estratos diferentes A, B y C , respectivamente, supóngase que $(E_\infty(x), E_\infty(y), E_\infty(z))$ no está en orden circular, entonces por definición $(E_\infty(y), E_\infty(x), E_\infty(z))$ sí está en orden circular. Asíumase, sin pérdida de generalidad, que $(E|C) = Id$, entonces $cmp(C, A) = (E|A)$ y $cmp(C, B) = (E|B)$ son dos transformaciones hiperbólicas tales que sus ejes de traslación separan a z de x y y respectivamente, y que además trasladan los puntos hacia la izquierda visto desde C .

Siguiendo la notación presentada en [Pfeil, 2017], sean A^+ y A^- los puntos fijos de $(E|A)$ y sean B^+ y B^- los puntos fijos de $(E|B)$ como se muestra en la **Figura 3.5**, donde el signo $+$ representa al punto atractor y el signo $-$ representa al punto repulsor.

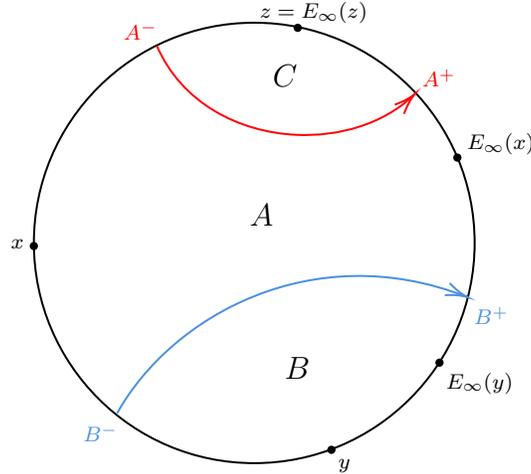


Figura 3.5: Situación donde x, y y z se encuentran en la cerradura de tres estratos distintos.

- (a) Notemos que (x, y, A^+) está en orden circular, pues de lo contrario (x, A^+, y) estaría en orden circular y al estar $(E_\infty(y), E_\infty(z), x)$ en orden circular, entonces $(A^+, y, E_\infty(z))$ también está en orden circular. Por lo tanto $(E_\infty(x), E_\infty(y), E_\infty(z))$ también está en orden circular, lo cual es una contradicción.
- (b) Sean cmp^+ y cmp^- los puntos fijos de la isometría $cmp(B, A)$, cuyo eje de traslación separa a los puntos x y y , y que además traslada a los puntos a la izquierda visto desde B . Entonces (x, cmp^+, y) está en orden circular. Sean $w = cmp(B, A)(x)$ y $t = cmp(B, A)(y)$ (véase **Figura 3.6**), entonces (x, w, cmp^+, t, y) está en orden circular.

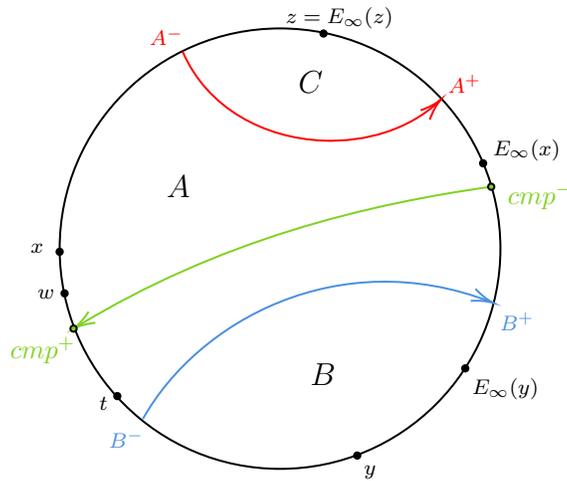


Figura 3.6: (x, w, cmp^+, t, y) está en orden circular.

(c) Como (x, w, y) está en orden circular, entonces:

$$\begin{aligned} ((E|B)(x), (E|B)(w), (E|B)(y)) &= ((E|B)(x), (E|A)(x), (E|B)(y)) \\ &= ((E|B)(x), E_\infty(x), E_\infty(y)) \end{aligned}$$

también **está en orden circular**.

(d) Aplicando $(E|A)$ a (x, y, A^+) se tiene que

$$((E|A)(x), (E|A)(y), (E|A)(A^+)) = (E_\infty(x), (E|B)(t), A^+)$$

también **está en orden circular**.

(e) (y, B^+, x) **está en orden circular**, pues de lo contrario (y, x, B^+) estaría en orden circular, y como (y, z, x) también está en orden circular, se tendría que (y, z, B^+) está en orden circular, lo cual es una contradicción, ya que el eje de traslación de $(E|B)$ separa a y de z y su dirección de traslación es hacia la izquierda visto desde z . Por lo tanto, aplicando la transformación $(E|B)$ se tiene que

$$((E|B)(y), (E|B)(B^+), (E|B)(x)) = (E_\infty(y), B^+, (E|B)(x))$$

también **está en orden circular**.

(f) Notemos que $(E|B)(t)$ y $(E|B)(x)$ se encuentran del mismo lado del eje de traslación de $(E|B)$, por ende x y t también se encuentran en el mismo lado también. Así, (t, B^-, y) y (x, cmp^+, B^-) **están en orden circular**.

(g) Finalmente, al ser $cmp(A, B)(B^-) = (E|A)^{-1}(B^-)$, entonces la isometría $cmp(A, B)$ aleja al punto B^- de A^+ , pero lo acerca hacia cmp^+ . Además, al ser cmp^+ un punto repulsor de la isometría $cmp(A, B) = (cmp(B, A))^{-1}$, el punto B^- se aleja de cmp^+ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $(E_\infty(x), E_\infty(y), E_\infty(z))$ **está en orden circular**.

4. Sin pérdida de generalidad, supóngase que x no está en la cerradura ningún estrato A pero y y z están en la cerradura de algunos estratos distintos B y C . Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{S}_\infty^1$ una sucesión que converge a y , entonces para N suficientemente grande se tiene que (x, y_N, z) está en orden circular y por lo tanto $(E_\infty(x), E_\infty(y_N), E_\infty(z))$ también está en orden circular. Como definimos a $E_\infty(y)$ como el punto límite de la sucesión $\{E(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, el cual además es diferente de $E_\infty(x)$ y de $E_\infty(z)$, entonces $(E_\infty(x), E_\infty(y), E_\infty(z))$ está en orden circular.
5. Supóngase sin pérdida de generalidad que x y y no están en la cerradura de ningún estrato pero z está en la cerradura de algún estrato A . Entonces tomando un punto $w \in \mathbb{S}_\infty^1$ tal que (x, w, y) está en orden circular se tiene que (x, w, z) y (w, y, z) también están en orden circular. Por lo tanto, $(E_\infty(x), E_\infty(w), E_\infty(z))$ y $(E_\infty(w), E_\infty(y), E_\infty(z))$ están en orden circular, y por definición se tiene que $(E_\infty(x), E_\infty(y), E_\infty(z))$ está en orden circular.

6. Finalmente, si ningún punto está en la cerradura de algún estrato, podemos proceder de manera análoga al punto anterior encontrando un punto w tal que (x, w, y) está en orden circular, y por ende (w, y, z) también está en orden circular, de donde $(E_\infty(x), E_\infty(y), E_\infty(z))$ está en orden circular.

En conclusión, E_∞ preserva el orden circular.

De aquí en adelante, identificaremos a \mathbb{S}_∞^1 con \mathbb{S}^1 .

- **E_∞ es una función continua.**

Recordemos que, para cada $a, b \in \mathbb{S}^1$ definimos a los intervalos (a, b) de la siguiente manera:

$$(a, b) = \{z \in \mathbb{S}^1 \mid (a, z, b) \text{ están en orden circular}\}.$$

Recordemos además que la colección de dichos intervalos forma una subbase para la topología usual en \mathbb{S}^1 .

Notemos que la función E_∞^{-1} también preserva el orden circular, por lo tanto, para cada $x, y \in \mathbb{S}^1$ ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} z \in E_\infty^{-1}((x, y)) &\iff (x, E_\infty(z), y) \text{ está en orden circular} \\ &\iff (E_\infty^{-1}(x), z, E_\infty^{-1}(y)) \text{ está en orden circular} \\ &\iff z \in (E_\infty^{-1}(x), E_\infty^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E_\infty^{-1}((x, y)) = (E_\infty^{-1}(x), E_\infty^{-1}(y))$, lo que implica que E_∞ es una función continua. Además, al ser una función con un dominio compacto y un contradominio Hausdorff, E_∞ resulta ser un homeomorfismo.

- **La extensión \overline{E} de E definida como sigue:**

$$\overline{E}(z) = \begin{cases} E(z) & , \text{ si } z \in \mathbb{H}^2 \\ E_\infty(z) & , \text{ si } z \in \mathbb{S}_\infty^1 \end{cases}$$

es continua para cada $x \in \mathbb{S}^1$.

Sean $x \in \mathbb{S}^1$ y $\varepsilon > 0$. Distinguiamos dos casos:

1. Si x está en la cerradura de algún estrato A , sea $\delta > 0$ tal que, para cada $z \in \mathbb{S}^1$ se cumple lo siguiente:

$$\|x - z\| < \delta \implies \|E_\infty(x) - E_\infty(z)\| < \varepsilon.$$

Supóngase además que $(E|_A) = Id$ para que así, para cada estrato $B \neq A$, se cumpla que $cmp(A, B) = (E|_B)$ sea una transformación hiperbólica que mueve a los puntos a la izquierda visto desde A y su eje de traslación l separe débilmente a A y B .

Sea C un estrato que intersecta a la bola $B_\delta(x)$, y sea l_C el eje de traslación de la isometría $cmp(A, C)$.

- (a) Si ambos extremos de l_C están en $B_\delta(x)$, entonces $C \subseteq B_\delta(x)$.

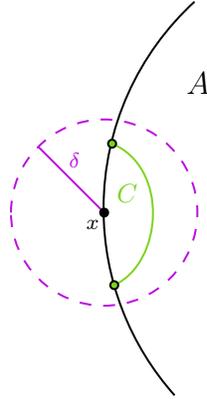


Figura 3.7: Caso en el que ambos extremos de l_C estén dentro de $B_\delta(x)$.

Por lo tanto, para cada $y \in C$ se cumple lo siguiente:

$$\overline{E}(y) \in \overline{E}(C) \subseteq B_\varepsilon(\overline{E}(x)).$$

- (b) Si un único extremo de l_C está dentro de $B_\delta(x)$, sea $\delta_C > 0$ tal que, para cada $t, w \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty^1$, cumple lo siguiente:

$$\|t - w\| < \delta_C \implies \|(E|B)(t) - (E|B)(w)\| < \varepsilon.$$

Sea

$$\mathcal{B} = \{\text{estratos } B \text{ de } \lambda \mid l_B \text{ tiene exactamente un punto en } B_\delta(x)\}.$$

En [Pfeil, 2017] pág. 34, se demuestra que $\inf\{\delta_B \mid B \in \mathcal{B}\} > 0$. Así, sea $\eta = \min\{\delta, \inf\{\delta_B \mid B \in \mathcal{B}\}\} > 0$. Entonces, para cada $y \in B_\delta(x)$ existe un estrato B que intersecciona a $B_\eta(x) \subseteq B_\delta(x)$ tal que y está en la cerradura de B . Además, tenemos que $l_C \subseteq B_\eta(x)$ ó bien que sólo un extremo de l_C está en $B_\eta(x)$. De cualquier manera se tiene que $\overline{E}(y) \in B_\varepsilon(\overline{E}(x))$.

2. Si x no está en la cerradura de algún estrato, sea $\delta > 0$ tal que, para cada $z \in \mathbb{S}^1$, ocurre lo siguiente:

$$\|x - z\| < \delta \implies \|E_\infty(x) - E_\infty(z)\| < \varepsilon.$$

Como ocurre en el ejemplo 3), x tiene una base de vecindades $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ acotadas por brechas $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n y y_n son los extremos de l_n . Notemos que, para N suficientemente grande, $x_N, y_N \in B_\delta(x)$.

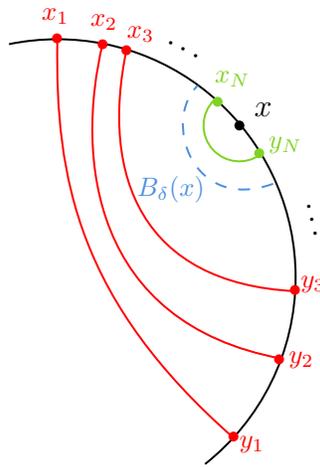


Figura 3.8: Sucesión de brechas l_n que acotan a las vecindades V_n de x .

Sea $\eta = \min\{\|x - x_N\|, \|x - y_N\|\}$, entonces $B_\eta(x) \subseteq V_N$. Finalmente, al estar $\bar{E}(V_N)$ acotado por $\bar{E}(l_N)$ se sigue que $\bar{E}(B_\eta(x)) \subseteq B_\varepsilon(\bar{E}(x))$.

Por lo tanto, \bar{E} es también una función continua.

□

Todo terremoto tiene una extensión continua en la frontera.

CAPÍTULO 4

LA GEOLOGÍA ES TRANSITIVA

En este capítulo se dará a conocer de una manera constructiva cómo asociar un terremoto a un homeomorfismo del círculo en si mismo.

4.1 El enunciado principal

El teorema principal del artículo de Thurston es un recíproco del **Teorema 3.3.1**. En este trabajo seguiremos muy cercanamente las demostraciones dadas en [Asaka, 2022] y [Pfeil, 2017], usando notación y construcciones de ambos textos.

Teorema 4.1.1:

Para cualquier homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1_\infty \rightarrow \mathbb{S}^1_\infty$ que preserve la orientación, existe un único terremoto E cuya extensión a \mathbb{S}^1_∞ coincide con f .

Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserve la orientación. Identifiquémoslo con una extensión $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ que preserve la orientación. Consideremos la siguiente clase lateral izquierda:

$$C = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \cdot f \subseteq \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \setminus \mathbf{Hom}^+(\mathbb{S}^1_\infty),$$

la cual es un espacio topológico, pues $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ lo es¹. En efecto, basta definir la función $H : \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow C$ para cada $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ como sigue:

$$H(\varphi) = \varphi \circ f,$$

la cual además resulta ser un homeomorfismo, cuya inversa se define como la *post*-composición con f^{-1} .

Sea $x_0 \in \mathbb{H}^2$, entonces $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ tiene una fibración sobre \mathbb{H}^2 , donde la proyección $ev_{x_0} : \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2$ se define, para cada $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$, como

$$ev_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0),$$

¹De hecho, es una 3-variedad.

la cual es sobreyectiva y continua, pues $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en \mathbb{H}^2 y para cada $\varepsilon > 0$ si $\sup\{d_c(\varphi(z), \psi(z)) \mid z \in \mathbb{H}^2\} < \varepsilon$, entonces $d_C(\varphi(x_0), \psi(x_0)) < \varepsilon$. En consecuencia, las fibras son de la forma:

$$ev_{x_0}^{-1}(\{z\}) = \{\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid \varphi(x_0) = z\},$$

por lo tanto

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) = \bigcup_{z \in \mathbb{H}^2} ev_{x_0}^{-1}(\{z\}).$$

Esta fibración da pie a una fibración $p : C \rightarrow \mathbb{H}^2$ mediante H^{-1} descrita para cada $(\varphi \circ f) \in C$ como:

$$p(\varphi \circ f) = \varphi(x_0).$$

Algunos elementos de C cuando actúan en el círculo \mathbb{S}^1 tienen puntos fijos, otros no tienen ningún punto fijo, por ejemplo, las transformaciones hiperbólicas tienen dos puntos fijos por definición.

4.2 Homeomorfismos de extremo izquierdo

Definiremos una clase especial de homeomorfismos del círculo en si mismo, pues con ellos podremos construir el terremoto buscado.

Definición 4.2.1:

Sea $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo. Decimos que h es de extremo izquierdo si:

1. h tiene al menos un punto fijo, y
2. el único homeomorfismo cubriente $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de h que tiene puntos fijos satisface lo siguiente:

$$\forall x (x \in \mathbb{R} \implies \tilde{h}(x) \geq x).$$

Donde por definición de función cubriente se cumple lo siguiente:

$$e^{i\tilde{h}(t)} = h(e^{it}),$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

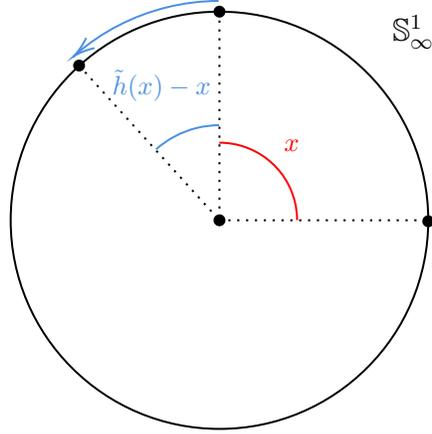


Figura 4.1: Una función de extremo izquierdo mueve puntos hacia la izquierda en \mathbb{S}_∞^1 , excepto por los puntos que fija.

Defínase el siguiente conjunto:

$${}^2XL = \{h \in C \mid h \text{ es de extremo izquierdo}\}.$$

Veamos que XL es un plano. De manera más precisa:

Teorema 4.2.1:

XL es homeomorfo a \mathbb{H}^2 .

Demostración:

Trabajaremos en el modelo del disco de Poincaré.

Fijamos $x_0 = 0$. Basta demostrar que $p|_{XL} : XL \rightarrow \mathbb{H}^2$ es un homeomorfismo, pues p es una función continua y sobreyectiva.

• $p|_{XL}$ es biyectiva:

Sea $y \in \mathbb{D}^2$. Al ser p sobreyectiva, existe $f_0 \in C$ tal que $p(f_0) = y$. Nótese además que por definición $f_0 = \varphi_0 \circ f$, para algún $\varphi_0 \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Sea $h \in p^{-1}(\{y\})$, entonces $p(h) = y$, y de nuevo, por definición existe $\varphi_1 \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $h = \varphi_1 \circ f$. Entonces, al ser

$$h = \varphi_1 \circ f = (\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\varphi_0 \circ f) = \varphi \circ f_0,$$

donde $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$, cualquier elemento h de $p^{-1}(\{y\})$ es de la forma $\varphi \circ f_0$, para algún $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Además, se cumple lo siguiente:

$$\varphi(y) = \varphi(f_0(x_0)) = h(x_0) = y.$$

Es decir, y es un punto fijo de φ . Consideremos ahora dos casos:

² X de ¡ X -tremo!

1. Cuando $y = 0$.

Las isometrías que fijan al origen actúan como rotaciones del círculo. En efecto, por definición una isometría φ del disco se define para cada $z \in \mathbb{D}^2$ como sigue:

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}},$$

donde $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Entonces, al ser 0 un punto fijo

$$\varphi(0) = 0 \implies \beta = 0.$$

Por lo tanto

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z}{\bar{\alpha}} = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^2 z = e^{i\vartheta} z,$$

para algún ángulo $\vartheta \in \mathbb{R}$.

En consecuencia

$$p^{-1}(\{0\}) = \{r_{\vartheta} \circ f_0 \mid \vartheta \in [0, 2\pi)\},$$

donde r_{ϑ} denota una rotación en torno al origen por un ángulo ϑ . Por lo tanto, la fibra $p^{-1}(\{0\})$ es un círculo.

Sea $F_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f_0 , es decir, para cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:

$$e^{iF_0(t)} = f_0(e^{it}).$$

Por definición $r_{\vartheta} \circ f_0 = h \in p^{-1}(\{0\})$, para algún $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Sea H un levantamiento de h , entonces:

$$e^{iH(t)} = h(e^{it}) = (r_{\vartheta} \circ f_0)(e^{it}) = r_{\vartheta}(e^{iF_0(t)}) = e^{i(F_0(t)+\vartheta)},$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $H = F_0 + \vartheta + 2\pi k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

En consecuencia, todos los levantamientos de elementos en $p^{-1}(\{0\})$ son de la forma $F_0 + T$, para algún número real T , el cual únicamente depende del ángulo de rotación ϑ .

Por la **Definición A.2.1**, al ser f_0 un homeomorfismo que preserva la orientación, se cumple lo siguiente para cada $t \in \mathbb{R}$

$$F_0(t + 2\pi) = F_0(t) + 2\pi.$$

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $g(t) = F_0(t) - t$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$g(t + 2\pi) = F_0(t + 2\pi) - (t + 2\pi) = F_0(t) + 2\pi - t - 2\pi = F_0(t) - t = g(t).$$

Es decir, g es una función 2π -periódica y por lo tanto alcanza su mínimo en el intervalo compacto en $[0, 2\pi]$. Ahora, sea

$$T = -\min\{F_0(t) - t \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:

$$(F_0(t) + T) - t = (F_0(t) - t) + T \geq -T + T = 0,$$

donde la desigualdad se vuelve una igualdad al menos una vez. Así, si $t \in \mathbb{R}$, entonces $F_0(t) + T \geq t$.

En consecuencia, el homeomorfismo $h \in p^{-1}(\{0\})$ de levantamiento $F_0 + T$ es un homeomorfismo de extremo izquierdo que está determinado únicamente por F_0 , pues T también lo está.

Nótese que a cualquier otro elemento en $p^{-1}(\{0\})$ le corresponde un número diferente T , por lo cual no puede satisfacer la desigualdad anterior con la igualdad al menos una vez.

Por lo tanto $XL \cap p^{-1}(\{0\})$ tiene un único elemento.

2. Cuando $y \in \mathbb{D}^2$ es arbitrario.

Sea ψ una isometría tal que $\psi(y) = 0$, e identifique cada punto z con su imagen $\psi(z) := z_y$ (por ejemplo $y_y = 0$).

Sea $h : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ dada en coordenadas usuales, entonces $h_y = \psi \circ h \circ \psi^{-1}$ es la función correspondiente en y -coordenadas. En efecto, para cada $z_y \in \mathbb{D}^2$ se cumple lo siguiente:

$$h_y(z_y) = (\psi \circ h \circ \psi^{-1})(\psi(z)) = \psi(h(z)) = (h(z))_y.$$

Ahora, si $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ es una isometría que fija y , entonces:

$$\varphi_y(0) = (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})(0) = \psi(\varphi(y)) = \psi(y) = 0,$$

es decir, φ_y actúa como una rotación del círculo.

Cambiando a y -coordenadas se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_y &= \psi \circ h \circ \psi^{-1} \\ &= \psi \circ (\varphi \circ f_0) \circ \psi^{-1} \\ &= (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f_0 \circ \psi^{-1}) \\ &= \varphi_y \circ (f_0)_y, \end{aligned}$$

donde φ_y actúa como una rotación.

Por lo tanto, este caso es completamente análogo al anterior $y = 0$. Únicamente resta verificar que ser un homeomorfismo de extremo izquierdo es independiente de las coordenadas.

Sean $g \in XL$ y $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de g tal que $G(t) \geq t$, para cada $t \in \mathbb{R}$, y Ψ, Ψ^{-1} levantamientos de ψ y ψ^{-1} respectivamente tales que $(\Psi^{-1})^{-1} = \Psi$. Notemos que, por definición, como ψ y ψ^{-1} preservan la orientación, entonces Ψ y Ψ^{-1} son funciones monótonas crecientes.

Veamos que $\Psi \circ G \circ \Psi^{-1}$ es un levantamiento de g_y . Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} e^{i(\Psi \circ G \circ \Psi^{-1})(t)} &= \psi \left(e^{i(G \circ \Psi^{-1})(t)} \right) \\ &= \psi \circ g \left(e^{i\Psi^{-1}(t)} \right) \\ &= \psi \circ g \circ \psi^{-1} \left(e^{it} \right) \\ &= g_y \left(e^{it} \right). \end{aligned}$$

Donde además, por monotonicidad, si $G(t) \geq t$ entonces $(\Psi \circ G \circ \Psi^{-1})(t) \geq t$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, si $g \in XL$, entonces $g_y \in XL$.

Análogamente, si $g_y \in XL$, entonces $g \in XL$.

En consecuencia, para cada $y \in \mathbb{D}^2$ el conjunto $XL \cap p^{-1}(\{y\})$ tiene un sólo elemento, es decir, $p|_{XL}$ es una función biyectiva.

• **$p|_{XL}$ es un homeomorfismo.**

Por un lado sabemos que p es una función continua, por lo que $p|_{XL}$ también es una función continua.

Basta demostrar entonces que $(p|_{XL})^{-1}$ es una función continua.

Sea $h \in C$, entonces $h = \varphi \circ f$, para algún $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$. Para encontrar un $f_0 \in C$ tal que $f_0(x_0) = y$ basta encontrar una isometría φ_0 tal que $\varphi_0(f(x_0)) = y$.

Sean $\psi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $\psi(f(x_0)) = 0$ y φ la función inversa de la isometría α definida para cada $z \in \mathbb{D}^2$ como sigue:

$$\alpha(z) = \frac{z - y}{1 - \bar{y}z}.$$

Defínase $\varphi_0 = \varphi \circ \psi$, entonces $f_0 = \varphi_0 \circ f \in C$ satisface lo siguiente:

$$f_0(x_0) = (\varphi \circ \psi)(f(x_0)) = \varphi(0) = y.$$

Como f y ψ son independientes de y y φ depende de manera continua de y , entonces f_0 depende de manera continua de y .

Ahora, encontraremos un levantamiento de f_0 que dependa de manera continua de f_0 .

Sea $0 < \delta < 2$, y sean $g_1, g_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dos homeomorfismos que preservan la orientación que además cumplen lo siguiente:

$$\sup \{ \|g_1(e^{ir}) - g_2(e^{ir})\| \mid r \in \mathbb{R} \} < \delta < 2,$$

pues así ningún par de puntos $g_1(e^{ir})$ y $g_2(e^{ir})$ serán antipodales. Y sean G_1 y G_2 dos levantamientos de g_1 y g_2 respectivamente. Supóngase además lo siguiente:

$$|G_1(0) - G_2(0)| \leq \pi,$$

lo cual puede hacerse pues cualesquiera dos levantamientos G y G' de g difieren por un múltiplo de 2π ya que por definición:

$$e^{iG(t)} = g(e^{it}) = e^{iG'(t)},$$

y en consecuencia $G = G' + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

– Supóngase que $|G_1(0) - G_2(0)| = \pi$, entonces

$$-1 = e^{i\pi} = e^{i(G_1(0) - G_2(0))} = e^{iG_1(0)} (e^{iG_2(0)})^{-1} = g_1(1)(g_2(1))^{-1},$$

es decir, $g_1(1) = -g_2(1)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $|G_1(0) - G_2(0)| < \pi$.

– Si $|G_1(u) - G_2(u)| > \pi$, para algún $u \in \mathbb{R}$, entonces por el teorema del valor intermedio existe $0 \leq u_0 \leq u$ tal que $|G_1(u_0) - G_2(u_0)| = \pi$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto

$$\sup\{|G_1(r) - G_2(r)| \mid r \in \mathbb{R}\} < \pi. \quad (4.1)$$

Además, al ser $G_1 - G_2$ una función 2π -periódica el supremo es de hecho un máximo.

Recordemos que $\varepsilon_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida como $\varepsilon_0(t) = e^{it}$ es una función cubriente, y para cada punto en \mathbb{S}^1 existe un abierto U y una colección de abiertos ajenos $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en \mathbb{R} tal que:

$$\varepsilon_0^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V_k. \quad (4.2)$$

En cuyo caso decimos que U está cubierto uniformemente.

Notemos que los conjuntos V_k de (4.2) son de la forma $V_0 + 2\pi k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Tomando U un abierto en \mathbb{S}^1 suficientemente pequeño entonces para cada $x, y \in \varepsilon_0^{-1}(U)$, si $|x - y| < \pi$, entonces por las ecuaciones (4.1) y (4.2) se tiene que $x, y \in V_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Al ser $(\varepsilon_0|_{V_k})^{-1}$ una función continua, para cada $k \in \mathbb{Z}$, entonces por definición dado $t \in \mathbb{S}^1$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para cada $s \in \mathbb{S}^1$ si $\|t - s\| < \delta_\varepsilon$, entonces $\left| (\varepsilon_0|_{V_k})^{-1}(t) - (\varepsilon_0|_{V_k})^{-1}(s) \right| < \varepsilon$.

Nótese que δ_ε no depende de k . Supóngase que $t \in U$ y sean $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $t = \varepsilon_0(\tau) = e^{i\tau}$ y $m \in \mathbb{Z}$ tal que $G_1(\tau) \in V_m$. Entonces se cumple lo siguiente:

$$(\varepsilon_0|_{V_m})^{-1}(g_1(t)) = (\varepsilon_0|_{V_m})^{-1}(g_1(\varepsilon_0|_{V_m}(\tau))) = (\varepsilon_0|_{V_m})^{-1}(\varepsilon_0|_{V_m}(G_1(\tau))) = G_1(\tau),$$

pues $\varepsilon_0|_{V_m}$ es un homeomorfismo.

Así, si $\|g_1(t) - g_2(t)\| < \delta_\varepsilon$, entonces $G_1(\tau)$ y $G_2(\tau)$ yacen en el mismo V_m , y por la continuidad de $(\varepsilon_0|_{V_m})^{-1}$ se tiene que $|G_1(\tau) - G_2(\tau)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como \mathbb{S}^1 es compacto existe una cantidad finita de bolas $\{B_i\}_{i=1}^n$ de radio a lo más $\delta_\varepsilon > 0$ que cubren a \mathbb{S}^1 y que están uniformemente cubiertas. Sea $\delta_1 < \min\{\delta_\varepsilon, 2\}$.

Para cada B_i y cada $u \in B_i$ con $u = e^{i\theta}$, para algún $\theta \in \mathbb{R}$, hemos demostrado que si $\|g_1(u) - g_2(u)\| < \delta_1$, entonces $|G_1(\theta) - G_2(\theta)| < \varepsilon$. Por lo tanto:

$$\sup\{\|g_1(\omega) - g_2(\omega)\| \mid \omega \in \mathbb{S}^1\} < \delta_1 \implies \sup\{|G_1(w) - G_2(w)| \mid w \in \mathbb{R}\} < \varepsilon.$$

Si se tiene un homeomorfismo g_1 y un levantamiento G_1 , y se varía un poco g_1 a un homeomorfismo g_2 , entonces existe un levantamiento G_2 de g_2 que está cerca de G_1 .

Ahora se demostrará que el ínfimo de una función depende de manera continua de la función.

Sean $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos homeomorfismos que preservan la orientación. Supongamos que $\sup\{|h_1(r) - h_2(r)| \mid r \in \mathbb{R}\} < \delta$, para algún $\delta > 0$.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $h_2(x_n) \rightarrow \inf\{h_2(u) \mid u \in [-\infty, \infty)\}$, entonces

$$h_2(x_n) > h_1(x_n) - \delta,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, y además:

$$\inf\{h_2(u)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} h_2(x_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf h_1(x_n) - \delta \geq \inf\{h_1(u) \mid u \in \mathbb{R}\} - \delta.$$

Análogamente se tiene que $\inf\{h_1(u) \mid u \in \mathbb{R}\} \geq \inf\{h_2(u) \mid u \in \mathbb{R}\} - \delta$.

Por lo tanto, al ser ambos ínfimos finitos:

$$|\inf\{h_1(u) \mid u \in \mathbb{R}\} - \inf\{h_2(w) \mid w \in \mathbb{R}\}| \leq \delta.$$

Finalmente, demostraremos que una función en \mathbb{S}^1 depende de manera continua de su levantamiento.

Al ser $\varepsilon_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ una función continua y periódica es también uniformemente continua, es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|r_1 - r_2| < \delta$, entonces $\|\varepsilon_0(r_1) - \varepsilon_0(r_2)\| < \varepsilon$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ que cumplen la relación anterior, y sean $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ homeomorfismos que preservan la orientación con levantamientos $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente.

Supóngase que $\sup\{|F_1(r) - F_2(r)| \mid r \in \mathbb{R}\} < \delta$, entonces por la sobreyectividad y continuidad uniforme de ε_0 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sup\{|f_1(\omega) - f_2(\omega)| \mid \omega \in \mathbb{S}^1\} &= \sup\{|f_1(\varepsilon_0(\tau)) - f_2(\varepsilon_0(\tau))| \mid \tau \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup\{|\varepsilon_0(F_1(\tau)) - \varepsilon_0(F_2(\tau))| \mid \tau \in \mathbb{R}\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la construcción de la función inversa $(p|_{XL})^{-1}$ es continua, es decir, si se toman dos puntos en \mathbb{H}^2 suficientemente cercanos, entonces los levantamientos que los tienen como puntos fijos difieren sólo un poco y por ende sus homeomorfismos de extremo izquierdo correspondientes también.

En consecuencia $p|_{XL}$ es un homeomorfismo. □

4.3 Envoltentes convexas

Ahora, es de nuestro interés considerar al conjunto de puntos fijos de una transformación $g \in XL$, el cual denotaremos por $\mathbf{fix}(g) \subseteq \mathbb{S}_\infty^1$. Sea $H(g) \subseteq \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty^1$ la envolvente convexa³ de $\mathbf{fix}(g)$. Se tienen tres casos notables:

1. Si $\mathbf{fix}(g)$ tiene dos puntos, entonces $H(g)$ es la geodésica hiperbólica que los une.
2. En general, si $\mathbf{fix}(g)$ es un conjunto finito, entonces $H(g)$ es el polígono hiperbólico ideal con vértices en $\mathbf{fix}(g)$ ⁴. En particular, si $\mathbf{fix}(g)$ es un solo punto, entonces $H(g) = \mathbf{fix}(g)$.
3. Si $\mathbf{fix}(g)$ es un conjunto 1-dimensional, está acotado por las geodésicas que unen puntos de $\mathbf{fix}(g)$.

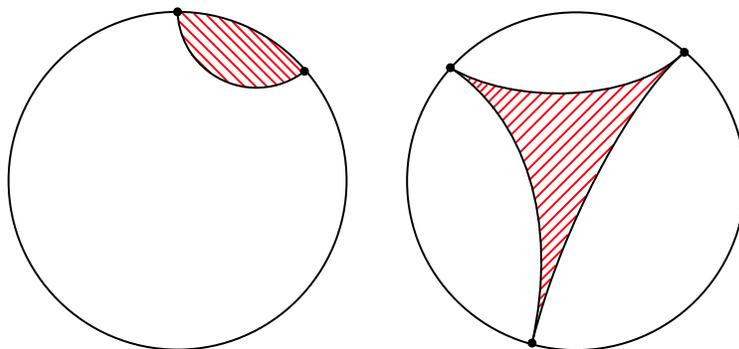


Figura 4.2: Envoltente convexa de dos casos para $\mathbf{fix}(g)$ cuando contiene un intervalo y cuando tiene tres puntos, respectivamente.

Usaremos a las envoltentes convexas para definir una laminación, por ello requerimos que no se crucen entre si.

Teorema 4.3.1:

Las envoltentes convexas $H(g)$, con $g \in XL$, no se cruzan entre si. Es decir, si $g_1, g_2 \in XL$ son tales que $\mathbf{fix}(g_1)$ y $\mathbf{fix}(g_2)$ tienen más de un punto y $H(g_1) \neq H(g_2)$, entonces $H(g_2)$ está contenido en la cerradura de $\mathbb{D}^2 \setminus H(g_1)$.

³En este caso estamos considerando a la envolvente convexa en el sentido hiperbólico.

⁴Un polígono cuyos lados son geodésicas y con vértices en el infinito.

Demostración: Sean $g_1, g_2 \in XL$ tales que $\mathbf{fix}(g_1)$ y $\mathbf{fix}(g_2)$ tienen más de un punto y tales que $H(g_1) \neq H(g_2)$.

Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ tales que $g_1 = \varphi_1 \circ f$ y $g_2 = \varphi_2 \circ f$. Entonces se cumple lo siguiente:

$$g_1 \circ g_2^{-1} = (\varphi_1 \circ f) \circ (\varphi_2 \circ f)^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Así, $g_1 \circ g_2^{-1}$ puede extenderse a una isometría en todo el plano, la cual preserva ángulos y manda geodésicas a geodésicas.

Supóngase que $H(g_2)$ no está contenido en la cerradura de $\mathbb{D}^2 \setminus H(g_1)$. Entonces se tienen dos casos:

1. $H(g_2) \subseteq H(g_1)$.

En este caso $\mathbf{fix}(g_2) \subseteq \mathbf{fix}(g_1)$.

- Si $\mathbf{fix}(g_2)$ tiene más de dos puntos, entonces g_1 y g_2 tienen al menos tres puntos fijos en común x_1, x_2 y x_3 . Por lo que $g_1 \circ g_2^{-1}$ es una isometría que fija a tres puntos. En consecuencia $g_1 \circ g_2^{-1} = Id$, es decir, $g_1 = g_2$, una contradicción.
- Si $\mathbf{fix}(g_2)$ tiene exactamente dos puntos, entonces $H(g_2)$ es una geodésica l con extremos x_2 y y_2 , los cuales también son puntos fijos de g_1 . Por lo tanto, $g_1 \circ g_2^{-1}$ es una isometría que fija a x_2 y y_2 , es decir, es una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación es l .

Sean x_1 y y_1 dos puntos fijos de g_1 , los cuales están en lados diferentes de l (véase **Figura 4.3 (b)**).

Notemos que $g_1 \circ g_2^{-1}$ mueve a los puntos x_1 y y_1 en sentido horario, pues $g_1, g_2 \in XL$ y g_1 los fija. Pero esto es una contradicción, pues $g_1 \circ g_2^{-1}$ es una transformación hiperbólica y x_1, y_1 yacen en lados opuestos de l .

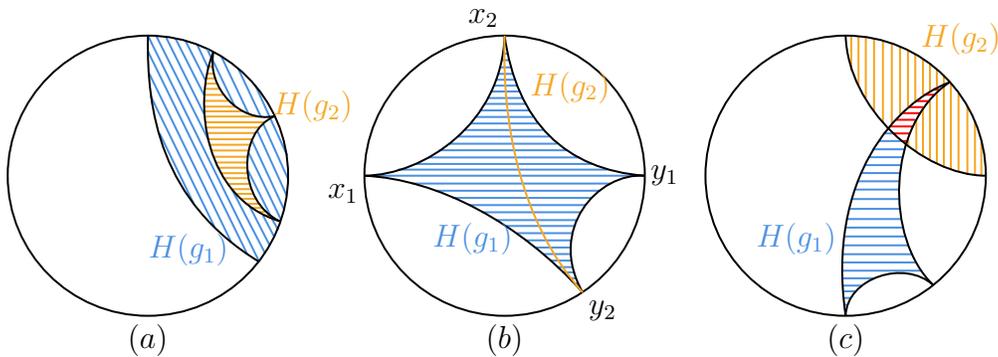


Figura 4.3: Si $H(g_2)$ no está contenido en la cerradura de $\mathbb{D}^2 \setminus H(g_1)$ está contenido en $H(g_1)$ (a) ó algunas geodésicas que acotan a $H(g_1)$ y a $H(g_2)$ se intersectan en algún punto interior (c).

2. **Alguna geodésica l_1 que acota a $H(g_1)$ y alguna geodésica l_2 que acota a $H(g_2)$ se intersectan en algún punto interior del plano.**

Sean x_1, y_1 y x_2, y_2 los extremos de l_1 y l_2 respectivamente, los cuales son puntos fijos de g_1 y g_2 , respectivamente.

Como $H(g_1) \neq H(g_2)$, podemos asumir que $l_1 \neq l_2$. Así, al menos tres de los puntos x_1, y_1, x_2 y y_2 son distintos por pares. Así, podemos asumir que l_1 y l_2 se intersectan en un punto de \mathbb{D}^2 . Sean α el ángulo hiperbólico entre x_1 y y_2 (véase **Figura 4.4**).

Nótemos que α es el ángulo entre $(g_1 \circ g_2^{-1})(x_1)$ y $(g_1 \circ g_2^{-1})(y_2)$, pues $g_1 \circ g_2^{-1}$ es una isometría. Sin embargo, analicemos lo que ocurre con los puntos. Como $g_1 \in XL$ y g_2 fija a x_2 y a y_2 , entonces $g_1 \circ g_2^{-1}$ mueve a los puntos x_2 y y_2 en sentido antihorario. Análogamente, como $g_2 \in XL$ y g_1 fija a los puntos x_1 y y_1 , entonces $g_1 \circ g_2^{-1}$ mueve a los puntos x_1 y y_1 en sentido horario.

Así, el ángulo formado por las geodésicas $(g_1 \circ g_2^{-1})(l_1)$ y $(g_1 \circ g_2^{-1})(l_2)$ es mayor a α , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $g_1 \circ g_2^{-1}$ fija a las geodésicas l_1 y l_2 , por lo que fija a los puntos x_1, x_2, y_1 y y_2 . En consecuencia, al ser una isometría, es idénticamente la identidad, es decir, $g_1 = g_2$, lo cual es una contradicción.

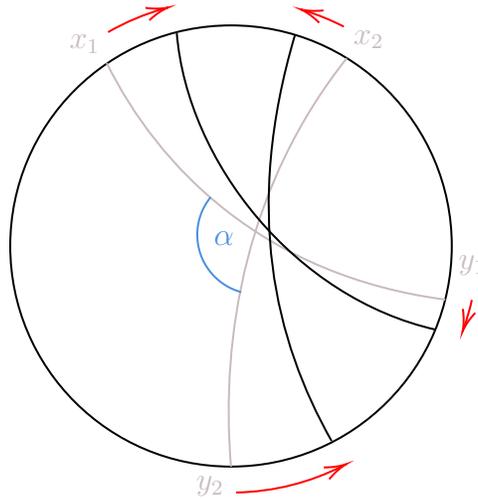


Figura 4.4: La isometría $g_1 \circ g_2^{-1}$ incrementa el ángulo α , lo cual es una contradicción.

En cualquier caso se llega a una contradicción.

Por lo tanto $H(g_2)$ está contenido en la cerradura de $\mathbb{D}^2 \setminus H(g_1)$. □

Si $g_1, g_2 \in XL$ son distintos, entonces los conjuntos $\mathbf{fix}(g_1)$ y $\mathbf{fix}(g_2)$ no se intersectan.

Para finalizar esta sección, demostraremos algunas propiedades sobre la continuidad de las envolventes convexas.

Teorema 4.3.2:

Para cada $h \in XL$ y cualquier vecindad U de $H(h)$ en $\mathbf{cl}(\mathbb{D}^2)$, existe una vecindad V de h en XL tal que si $g \in V$, entonces $H(g) \subseteq U$.

Demostración:

Trabajaremos en el modelo de Klein, por ello consideraremos la métrica euclídeana usual.

La demostración se divide en dos pasos:

- U contiene una vecindad convexa y abierta U_0 de $H(h)$.

Los conjuntos $H(h)$ y $\mathbb{D}^2 \setminus U$ son cerrados, y como $H(h) \cap (\mathbb{D}^2 \setminus U) = \emptyset$, entonces

$$d(H(h), \mathbb{D}^2 \setminus U) = \varepsilon > 0.$$

Definimos al siguiente conjunto:

$$U_0 = \left\{ x \in \mathbb{D}^2 \mid d(x, H(h)) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \subseteq U.$$

Veamos que U_0 es **convexo**.

En efecto, sean $x, y \in U_0$ y $x_1, y_1 \in H(h)$ tales que $\|x - x_1\| < \varepsilon/2$ y $\|y - y_1\| < \varepsilon/2$. Para cada $0 \leq t \leq 1$ sean $z = tx + (1-t)y$ y $z_1 = tx_1 + (1-t)y_1$. Como $H(h)$ es convexo, $z_1 \in H(h)$. Además, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|z - z_1\| &= \|(tx + (1-t)y) - (tx_1 + (1-t)y_1)\| \\ &= \|t(x - x_1) + (1-t)(y - y_1)\| \\ &\leq t\|x - x_1\| + (1-t)\|y - y_1\| \\ &< t\frac{\varepsilon}{2} + (1-t)\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z \in U_0$. En consecuencia, podemos asumir que U es convexo.

- **Existe una cota inferior para la distancia que mueve h en $\mathbb{S}^1 \setminus U$.**

Supóngase por contradicción que dicha cota no existe, entonces existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus U$ tal que $\|z_n - h(z_n)\| \rightarrow 0$.

Como \mathbb{S}^1 es compacto existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a algún $z_0 \in \mathbb{S}^1$. Así, $h(z_{n_k}) \rightarrow h(z_0)$, y por lo tanto $h(z_0) = z_0$, pues h es continua. Es decir, $z_0 \in \mathbf{fix}(h) \subseteq H(h) \subseteq U$.

Al ser $\mathbb{S}^1 \setminus U$ un conjunto cerrado $z_{n_k} \rightarrow z_0 \in \mathbb{S}^1 \setminus U$. En consecuencia $z_0 \in (\mathbb{S}^1 \cap U) \cap \mathbf{fix}(h) \subseteq (\mathbb{S}^1 \setminus U) \cap U$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, existe $m > 0$ tal que $m \leq \|t - h(t)\|$, para cada $t \in \mathbb{S}^1 \setminus U$.

Sean $0 < \varepsilon < m$ y

$$V = \{g \in XL \mid \sup\{\|g(t) - h(t)\| \mid t \in \mathbb{S}^1\} < \varepsilon\}.$$

Sea $g \in V$ y $g_0 \in \mathbf{fix}(g)$, y supóngase que $g_0 \in \mathbb{S}^1 \setminus U$, entonces h mueve a g_0 por lo menos una distancia m . Así

$$m \leq \|g_0 - h(g_0)\| = \|g(g_0) - h(g_0)\| < \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, para cada $g \in V$ se tiene que $\mathbf{fix}(g) \subseteq \mathbb{S}^1 \cap U$, y como U es convexo y $H(g)$ es la envolvente convexa de $\mathbf{fix}(g)$, se sigue por minimalidad que $H(g) \subseteq U$. \square

Denotemos por $\mathbf{cl}(A)$ a la cerradura de A .

Recuerde que XL es topológicamente un plano, a saber \mathbb{H}^2 , el cual tiene compactificación igual a $\mathbf{cl}(\mathbb{D}^2)$. Por ende, podemos considerar a la compactificación \overline{XL} .

Definimos al conjunto $\partial XL = \overline{XL} \setminus XL$, cuyos elementos no son funciones, sino puntos en \mathbb{S}_∞^1 .

Veremos ahora que la función $\overline{H} : \overline{XL} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{cl}(\mathbb{D}^2))$ definida para cada $g \in \overline{XL}$ como:

$$\overline{H}(g) = \begin{cases} H(g) & , \text{ si } g \in XL \\ \{g\} & , \text{ si } g \in \partial XL \end{cases}$$

donde $\mathcal{P}(A)$ denota al conjunto potencia de A , es una función continua en el siguiente sentido:

Teorema 4.3.3:

Para cada $h \in \overline{XL}$ y cada vecindad abierta U de $\overline{H}(h)$ en $\mathbf{cl}(\mathbb{D}^2)$, existe una vecindad abierta V de h en \overline{XL} tal que si $g \in V$, entonces $\overline{H}(g) \subseteq U$.

Para demostrar el teorema anterior usaremos el siguiente resultado:

Lema 4.3.1:

Sea $z \in \mathbb{H}^2$. Todo elemento $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ puede escribirse de la forma $\varphi = \tau \circ \rho$, donde ρ es una transformación elíptica que fija a z y τ es una transformación hiperbólica que manda a z al punto $\varphi(z)$.

Demostración: Sea τ una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación es la geodésica entre z y $\varphi(z)$, la cual se traslada de z a $\varphi(z)$. Entonces $(\tau^{-1} \circ \varphi)(z) = z$, por lo que $\rho = \tau^{-1} \circ \varphi$ es una transformación elíptica que fija a z .

Por lo tanto, $\varphi = \tau \circ \tau^{-1} \circ \varphi = \tau \circ \rho$. \square

Demostración: (Teorema 4.3)

Sea $h \in \overline{XL}$ y U una vecindad abierta de $\overline{H}(h)$ en $\mathbf{cl}(\mathbb{D}^2)$.

- Si $h \in XL$, entonces $\overline{H}(h) = H(h)$.

Por el **Teorema 4.3** existe una vecindad V de h en XL tal que si $g \in V$, entonces $\overline{H}(g) = H(g) \subseteq U$.

- Si $h \in \partial XL$.

En este caso $\overline{H}(h) = \{h\}$.

Recuérdese que se identifica a $g \in XL$ con un punto $g(x_0) \in \mathbb{D}^2$, para un punto fijo x_0 y que además $\partial XL \cong \mathbb{S}^1$.

Supóngase que U es de la siguiente forma:

$$U = U_\eta(h) = \{g \in \mathbb{S}^1 \mid \|g - h\| < \eta\} \cup \{g \in XL \mid \|g(x_0) - h\| < \eta\},$$

para algún $\eta > 0$.

Sean $0 < \varepsilon < \eta$ y $V = U_\varepsilon(h)$.

1. Si $g \in V \cap \mathbb{S}^1$, entonces $\overline{H}(g) = \{g\} \subseteq V \subseteq U$, y por lo tanto terminamos la demostración.
2. Sea $g \in V \cap XL$. Podemos asumir que U es un conjunto convexo (véase cómo se construyó en el **Teorema 4.3**). Basta demostrar que $\mathbf{fix}(g) \subseteq U$, pues por minimalidad se tendrá que $H(g) \subseteq U$.

Supóngase por contradicción que g tiene un punto fijo $z_0 \notin U$. Entonces por definición $\|z_0 - h\| \geq \eta$. Sea $z_1 \in U_{\eta-\varepsilon}(z_0)$ un punto cerca de z_0 en la dirección antihoraria. Notemos que $z_1 \notin V$, ya que

$$\|z_1 - h\| \geq \|z_0 - h\| - \|z_1 - z_0\| > \eta - (\eta - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Por definición de $XL \subseteq C$, existe $\varphi \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $g = \varphi \circ f$. Como en el **Corolario 4.3** existen una transformación hiperbólica τ que manda al punto $f(x_0)$ a $\varphi(f(x_0)) = g(x_0)$ y una transformación elíptica ρ que fija a $f(x_0)$ tales que $\varphi = \tau \circ \rho$.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $f(x_0) = 0$, pues podemos cambiar de coordenadas como en el **Teorema 4.2**.

En [Pfeil, 2017] pág. 48 se demuestra que la distancia de traslación de τ crece arbitrariamente mucho cuando $\varepsilon \ll 1$.

Como $g(x_0) \in U_\varepsilon(h)$ y el eje de traslación l de τ pasa por los puntos 0 y $g(x_0)$, el punto extremo atractor de l está en $U_\varepsilon(h)$.

Por lo tanto z_0 y z_1 no son este punto fijo, pues ambos están en $\mathbb{S}^1 \setminus U_\varepsilon(h)$.

Al ser $f^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una función continua y \mathbb{S}^1 es un conjunto compacto, f^{-1} es uniformemente continua. Así, existe $\delta_\eta > 0$ tal que si $\|z - w\| < \eta$, entonces $\|f(z) - f(w)\| < \delta_\eta$, para cada $z, w \in \mathbb{S}^1$.

Sea $\delta = \|f(z_0) - f(z_1)\|$, el cual es tal que $\delta < \delta_\eta$, ya que $\|z_0 - z_1\| < \eta$. Al ser ρ una isometría se tiene que $\|\rho(f(z_0)) - \rho(f(z_1))\| = \delta$.

Ahora, recordemos que z_0 es un punto fijo de $g = \tau \circ \rho \circ f$, por lo que $\tau^{-1}(z_0) = \tau^{-1}(g(z_0)) = \rho(f(z_0))$.

En consecuencia $\|\tau^{-1}(z_0) - \rho(f(z_1))\| = \delta$.

Como estamos considerando funciones que preservan la orientación se tiene que $\rho(f(z_1))$ está del lado antihorario de $\rho(f(z_0))$. Por lo que, aplicando τ a estos puntos tendremos que $g(z_1)$ está del lado horario de z_0 , y además z_1 está del lado horario de z_0 .

En [Pfeil, 2017] pág. 48 se demuestra que $\|z_0 - g(z_1)\| > \|z_0 - z_1\|$. Y por lo tanto g mueve en sentido horario al punto z_1 , lo cual es una contradicción pues $g \in XL$.

Por lo tanto $\mathbf{fix}(g) \subseteq U$, y así $H(g) \subseteq U$.

En conclusión, para cada $g \in V$ se tiene que $\overline{H}(g) \subseteq U$. □

La función \overline{H} es continua.

Finalmente, veremos que las geodésicas que acotan a las envolventes convexas forman una laminación para el terremoto que construiremos. Para ello definimos la siguiente notación:

Sean $g \in XL$ y $\lambda = \{l_g^i\}_{i \in I}$ la familia no vacía de las geodésicas que acotan al conjunto $H(g)$.

Para demostrar que λ es una laminación basta demostrar que la unión de sus elementos (los cuales no se intersectan) es un conjunto cerrado en \mathbb{H}^2 .

Teorema 4.3.4:

La unión de todas las geodésicas en λ es un conjunto cerrado.

Demostración:

Trabajaremos en el modelo de Klein.

Sea $L = \bigcup_{l \in \lambda} l$, el cual queremos demostrar que es un conjunto cerrado en \mathbb{D}^2 .

Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L$ una sucesión tal que $z_n \rightarrow z$, para algún $z \in \mathbb{D}^2$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $l_n \in \lambda$ la geodésica (única por el **Teorema 4.3**) tal que $z_n \in l_n$, y sean $x_n, y_n \in \mathbb{S}^1$ los extremos de l_n .

Como \mathbb{S}^1 es compacto, existen dos subsucesiones $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{y_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tales que $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{S}^1$ y $y_{n_l} \rightarrow y \in \mathbb{S}^1$. Supóngase sin pérdida de generalidad que $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$.

Notemos que $x \neq y$, pues de lo contrario las geodésicas l_n se acumularían a un punto $p \in \mathbb{S}^1$, y por lo tanto $p \notin \mathbb{D}^2$. Sea l la geodésica que conecta a los puntos x y y .

Por definición, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in XL$ tal que l_n es una componente de la frontera de $H(g_n)$, y además $x_n, y_n \in \mathbf{fix}(g_n)$.

Al ser \overline{XL} compacto, existe una subsucesión $\{g_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converge a algún $g \in \overline{XL}$. Supóngase sin pérdida de generalidad que $g_n \rightarrow g$.

- **Cuando $g \in \partial XL$.**

En este caso $H(g) = \{g\}$. Al ser \overline{H} una función continua para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\mathbf{fix}(g_n) \subseteq \overline{H}(g_n) \subseteq U_\varepsilon(\overline{H}(g)) = U_\varepsilon(g)$.

En consecuencia $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, sólo ocurre el siguiente caso:

- **Cuando $g \in XL$.**

Demostraremos que $x, y \in \mathbf{fix}(g)$. Notemos que ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|x - g(x)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - g(x)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n(x_n) - g(x)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n(x_n) - g(x_n)\| + \|g(x_n) - g(x)\|. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Recordemos que XL es un espacio topológico bajo la topología de convergencia uniforme. Así existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces:

$$\sup\{\|g_n(\omega) - g(\omega)\| \mid \omega \in \mathbb{S}^1\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Análogamente, como g es una función continua, existe $\delta > 0$ tal que para cada $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^1$, si $\|\omega_1 - \omega_2\| < \delta$, entonces $\|g(\omega_1) - g(\omega_2)\| < \varepsilon/2$.

Además, como $x_n \rightarrow x$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $\|x_n - x\| < \delta$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces para cada $n \geq N$ se cumple lo siguiente:

$$\|x_n - g(x)\| \leq \|g_n(x_n) - g(x_n)\| + \|g(x_n) - g(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En consecuencia $\|x - g(x)\| = 0$, es decir, $g(x) = x$.

Análogamente se tiene que $y \in \mathbf{fix}(g)$.

Por lo tanto $l \subseteq H(g)$. Además, como l_n convergen a l no es posible que l esté en el interior de $H(g)$, es decir, es una componente de la frontera de $H(g)$. Así que $l \subseteq L$.

Demostraremos que $z \in l$, la cual recordemos es una línea recta. Por lo tanto, basta demostrar lo siguiente:

$$\|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|.$$

Por un lado se tiene por la desigualdad del triángulo lo siguiente:

$$\|x - z\| + \|z - y\| \geq \|x - y\|.$$

Además, por la continuidad de la norma se cumple también lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|x - z\| + \|z - y\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x - z_n\| + \|z_n - y\|) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x - x_n\| + \|x_n - z_n\| + \|z_n - y_n\| + \|y_n - y\|) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x - x_n\| + \|x_n - y_n\| + \|y_n - y\|) \\ &= \|x - y\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $z \in l$. Es decir, L es un conjunto cerrado.

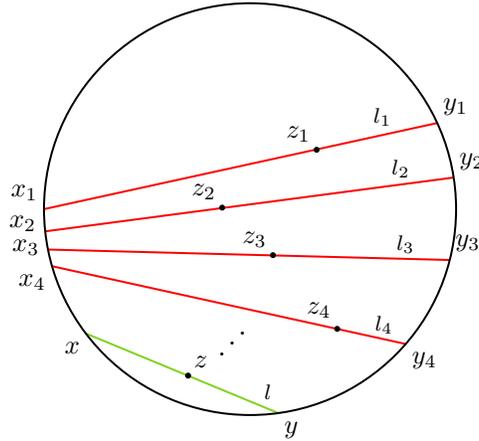


Figura 4.5: Una sucesión de geodésicas converge a una componente de la frontera de $H(g)$ que tiene al punto z .

□

Las geodésicas que acotan a las envolventes convexas $H(\square)$ forman una laminación del plano.

Únicamente falta verificar una propiedad importante sobre las envolventes convexas, que cubran al plano en su totalidad, pues para poder definir un terremoto usando a los elementos de XL , debemos mostrar que para cada $x \in \mathbb{H}^2$ **existe** un elemento $g \in XL$ tal que $x \in H(g)$.

Esta parte del argumento es muy técnica, pues implementa técnicas de análisis mediante *convoluciones* implementando *teoría del grado*. Por ende, referimos al lector a [Pfeil, 2017] pág. 51 para una prueba del siguiente teorema:

Teorema 4.3.5:

Las cerraduras convexas de elementos en $g \in XL$ cubren a \mathbb{H}^2 .

4.4 Construcción del terremoto

Con las herramientas construidas podemos proceder a dar una demostración del teorema principal del artículo [Thurston, 1986].

Por supuesto, seguimos la notación que hemos estado usando a lo largo de este capítulo.

Demostración del Teorema 4.1.1:

1. **Existencia.**

Construiremos un λ -terremoto izquierdo E tal que $E|_{S_\infty^1} = f$.

Sea A un estrato de λ , y sea $f_A \in XL$ tal que $A \subseteq H(f_A)$, la cual existe pues $\bigcup_{g \in XL} H(g) \supseteq \mathbb{H}^2$.

Veamos que sólo puede haber una única elección para definir f_A .

- **Si A es una zona.**

Denotemos por $\mathbf{int}(B)$ al interior de un conjunto B .

Supóngase que $A \subseteq H(g_A)$, para algún $g_A \in XL$. Entonces al ser A un abierto por definición $A \subseteq \mathbf{int}(H(f_A)) \cap \mathbf{int}(H(g_A))$. Esto último sólo ocurre cuando $f_A = g_A$, pues las envolventes convexas no se intersectan si $f_A \neq g_A$.

Por lo tanto, en este caso sólo existe una única definición de f_A .

- **Si A es una brecha.**

Supóngase que x y y son los extremos de A . Entonces hay varias elecciones de f_A que podemos hacer, pero todas tienen como puntos fijos a x y y .

Fijemos por el momento una elección f_A .

Por definición de los elementos en XL , existe $\varphi_A \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $f_A = \varphi_A^{-1} \circ f$.

Definimos $E|_A = \varphi_A|_A$. Demostraremos ahora que E definido así es un terremoto que extiende a f en la frontera.

(a) **Para cada estrato A , $E|_A$ coincide con la restricción de alguna isometría en \mathbb{H}^2 .**

Pues por construcción se definió así.

(b) **Para cualesquiera dos estratos $A \neq B$, la isometría de comparación $cmp(A, B)$ es una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación separa débilmente A y B , y traslada a los puntos hacia la izquierda visto desde A .**

Para cualesquiera dos estratos $A \neq B$ se cumple lo siguiente:

$$cmp(A, B) = \varphi_A^{-1} \circ \varphi_B = (\varphi_A^{-1} \circ f) \circ (f^{-1} \circ \varphi_B) = f_A \circ f_B^{-1}. \quad (4.3)$$

Sean l_A y l_B geodésicas en ∂A y ∂B , respectivamente, que separan débilmente A de B , con extremos $x_A, y_A \in \mathbb{S}_\infty^1$ y $x_B, y_B \in \mathbb{S}_\infty^1$ respectivamente, y supóngase además que (x_A, x_B, y_B, y_A) están en orden circular.

Si A ó B son brechas, definimos $l_A = A$ ó $l_B = B$.

Definimos a los siguientes intervalos:

$$J = (x_A, x_B) \cup \{x_A, x_B\} \quad \text{y} \quad I = (y_B, y_A) \cup \{y_B, y_A\}.$$

Tenemos ahora varios casos a considerar, pues puede ocurrir que alguno de los dos intervalos sea un punto ó que ambos lo sean.

- **Cuando ningún intervalo es degenerado.**

En analogía con la demostración del **Lema 3.1.1**, sean x_A, x_B puntos repulsores y y_A, y_B puntos atractores. Como $f_A \in XL$ fija a y_A , entonces $f_A(I) \subseteq I$. Análogamente, como $f_B \in XL$ y fija a y_B , entonces $f_B^{-1}(J) \subseteq J$.

Por lo tanto, de la expresión (4.3) se sigue que $cmp(A, B)$ tiene un punto fijo $y \in I$.

Análogamente, $(cmp(A, B))^{-1}$ tiene un punto fijo $x \in J$.

Por lo tanto $cmp(A, B)$ es una isometría con al menos dos puntos fijos en la frontera y no es la identidad, pues $\mathbf{fix}(f_A) \neq \mathbf{fix}(f_B)$. Es decir, $cmp(A, B)$ es una isometría hiperbólica cuyo eje de traslación separa débilmente A y B . Además, la traslación debe ser hacia la izquierda visto desde A ya que $cmp(A, B)(I) \subseteq I$.

- **Cuando ambos intervalos son degenerados.**

Supóngase que $I = \{x\}$ y $J = \{y\}$. Entonces al ser A y B adyacentes, de nuevo, $cmp(A, B)$ es una isometría hiperbólica cuyo eje de traslación separa débilmente A y B .

Supóngase sin pérdida de generalidad que $z \in \mathbf{fix}(f_B) \setminus \mathbf{fix}(f_A)$, y supóngase que la traslación hacia la izquierda visto desde A es trasladar de x a y . Entonces se cumple lo siguiente:

$$cmp(A, B)(z) = f_A(f_B^{-1}(z)) = f_A(z).$$

El cual es un punto en sentido antihorario de z .

Así, $cmp(A, B)$ traslada los puntos hacia la izquierda visto desde A .

- **Cuando alguno de los dos intervalos es degenerado.**

En este caso l_A y l_B se intersectan en al menos un punto, lo cual es una contradicción. Por ende, este caso no ocurre.

(c) **E es una función inyectiva.**

Como lo muestra la demostración del **Lema 3.1.2**, la inyectividad no depende de la laminación.

(d) **E es una función suprayectiva.**

Siguiendo la demostración dada en [Pfeil, 2017], se usará el **Lema 3.3.1**.

Sean $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de brechas y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de *semi-planos* acotados por l_n tales que $H_{n+1} \subseteq H_n$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{x\} \subseteq \mathbb{S}_\infty^1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $x_n \in \mathbb{S}_\infty^1$ y $y_n \in \mathbb{S}_\infty^1$ los extremos de l_n . Entonces $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow x$. Además, por definición a cada l_n le corresponde un $\varphi_n \circ f \in XL$ tal que $(E|_{l_n}) = \varphi_n^{-1}$.

Por construcción se tiene que $x_n, y_n \in \mathbf{fix}(\varphi_n \circ f)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\varphi_n^{-1}(x_n) = \varphi_n^{-1}(\varphi_n(f(x_n))) = f(x_n),$$

y análogamente $f(y_n) = \varphi_n^{-1}(y_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Al ser f una función continua se tiene lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{-1}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{-1}(y_n).$$

Por lo tanto las geodésicas $E(l_n) = \varphi_n^{-1}(l_n)$ se acumulan a un único punto en la frontera. En consecuencia, por el **Lema 3.3.1**, E es una función suprayectiva.

(e) **E coincide con f en la frontera.**

Sea $x \in \mathbb{S}_\infty^1$.

- **Si x está en la cerradura de un estrato A .**

En este caso $x \in \mathbf{fix}(f_A)$, y por ende:

$$E_\infty(x) = (E|A)(x) = \varphi_A(x) = \varphi_A(f_A(x)) = f(x).$$

Por lo que $f = E_\infty$ en este caso.

- **Cuando x no está en la cerradura de ningún estrato.**

Entonces existe una base de vecindades de x acotadas por brechas cuyo diámetro tiende a cero. Tomando a la sucesión formada por los extremos de estas brechas, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{S}_\infty^1$ tal que $x_n \rightarrow x$ y cada x_n está en la cerradura de alguna brecha l_n .

Se sigue por continuidad lo siguiente:

$$E_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Así que $E_\infty = f$.

Por lo tanto E extiende a f .

Esto concluye la existencia del terremoto buscado.

2. Unicidad.

Sea E' un λ' -terremoto izquierdo tal que $E'_\infty = f = E_\infty$, para alguna laminación λ' del plano.

Demostraremos que las laminaciones λ y λ' son iguales.

Sea A un estrato de λ' . Como E' es un terremoto, entonces $(E'|A) = \varphi_A$, para alguna isometría $\varphi_A \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$. Defínase $h = \varphi_A^{-1} \circ E'$, la cual tiene una extensión natural a \mathbb{S}_∞^1 como sigue:

$$h_\infty = \varphi_A^{-1} \circ E'_\infty = \varphi_A^{-1} \circ f.$$

Notemos que ocurre lo siguiente:

$$h|_A = \varphi_A^{-1} \circ E'|_A = \varphi_A^{-1} \circ \varphi_A = Id_{\mathbb{H}^2}|_A.$$

Veamos que $h_\infty \in XL$ y que tiene al menos dos puntos fijos.

- $h_\infty \in XL$ y tiene al menos dos puntos fijos.

Al ser $h_A = Id_{\mathbb{H}^2}|_A$, se tiene que h_∞ fija a todos los puntos de $\mathbf{cl}(A) \cap \mathbb{S}_\infty^1$. Ahora, sea $x \in \mathbb{S}_\infty^1 \setminus \mathbf{cl}(A)$.

- Si x está en la cerradura de algún estrato.

Sea $B \neq A$ otro estrato de λ' tal que $x \in \mathbf{cl}(B)$, entonces se cumple lo siguiente:

$$h_\infty(x) = \varphi_A^{-1}((E'|B)(x)) = \varphi_A^{-1}(\varphi_B(x)) = \mathit{cmp}(A, B)(x).$$

Por definición, el eje de traslación de $\mathit{cmp}(A, B)$ separa débilmente A y B , y además mueve los puntos hacia la izquierda visto desde A . Por lo tanto, h_∞ mueve a x en sentido antihorario fuera de $\mathbf{cl}(A)$.

- Si x no está en la cerradura de algún estrato.

En este caso existe una sucesión de brechas $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en λ' que acotan a zonas anidadas que convergen al punto x . Podemos suponer entonces que, sin pérdida de generalidad, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{S}_\infty^1$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $x_n \in l_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por la continuidad de h_∞ se sigue que $h_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n)$, y por el caso anterior cada punto x_n es movido en sentido antihorario por h_∞ . Así, h_∞ mueve a x en sentido antihorario también.

Por lo tanto h_∞ preserva la orientación y cualquier levantamiento de h_∞ es creciente, es decir, $h_\infty \in XL$.

Se tiene entonces que $A \subseteq H(h_\infty)$. Sea $A_E = H(h_\infty)$, el cual es un estrato de λ . Entonces hemos demostrado hasta ahora que $A \subseteq A_E$.

- Cuando A es una zona.

Al ser $A \subseteq A_E$, entonces A_E también es una zona, y por construcción f_{A_E} está determinada de manera única.

Además, por construcción ocurre lo siguiente:

$$E|_A = (E|_{A_E})|_A = \varphi_A|_A = E'|_A. \quad (4.4)$$

Es decir, E y E' coinciden en cualquier zona A de λ' .

Ahora, sean $C, D \subseteq A_E$ zonas de λ' . Entonces por la observación anterior se cumple lo siguiente:

$$(E'|C) = (E|_{A_E}) = (E'|D),$$

por lo que $\mathit{cmp}(C, D) = Id_{\mathbb{H}^2}$, y esto ocurre si alguno de los estratos está contenido en la cerradura del otro.

Así, al ser C y D zonas se tiene que $C = D$. En consecuencia $A = A_E$, pues los estratos de λ' cubren \mathbb{H}^2 .

Es decir, cualquier zona de λ' es una zona de λ .

- **Cuando A es una brecha.**

En este caso A_E también es una brecha por definición, y por ende se sigue que $A = A_E$.

Por lo tanto $A = A_E$ y así $\lambda = \lambda'$.

Notemos que la ecuación (4.4) nos dice que los terremotos coinciden en las zonas, sin embargo para una brecha l se demuestra en [Pfeil, 2017] que $(E'|l)$ y $(E|l)$ difieren por una isometría hiperbólica cuyo eje de traslación es l .

Por ello, los terremotos son únicos salvo en las brechas donde puede haber discontinuidades.

Esto concluye la demostración.

4.5 Ejemplo

Siguiendo la increíble construcción dada en [Pfeil, 2017] daremos un ejemplo de cómo asociar un terremoto a un homeomorfismo del círculo en si mismo.

Sean $a > 0$ y $f : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la función definida como $f(\infty) = \infty$ y para cada $x \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ e^{-ax}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Notemos que f es un homeomorfismo que preserva la orientación. Sea $\gamma_t(z) = e^t z$ una transformación hiperbólica cuyo eje de traslación une a los puntos 0 y ∞ . Entonces $(\gamma_t \circ f)(\infty) = \infty$ y para cada $z \in \mathbb{R}$ ocurre lo siguiente:

$$(\gamma_t \circ f)(z) = \begin{cases} e^t z, & \text{si } z \geq 0 \\ e^{t-a} z, & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Tenemos entonces los siguientes posibles casos:

- Si $t = a$, entonces $\gamma_t \circ f$ deja a los puntos $z < 0$ fijos y mueve a los puntos $z \geq 0$ a la derecha, por lo tanto $\gamma_t \circ f \in XL$ y además $\mathbf{fix}(\gamma_t \circ f) = (-\infty, 0] \cup \{\infty\}$,
- cuando $0 < t < a$, entonces $\gamma_t \circ f$ deja fijo a $z = 0$ y mueve a todos los demás puntos a la derecha, por ende $\gamma_t \circ f \in XL$ y $\mathbf{fix}(\gamma_t \circ f) = \{0, \infty\}$,
- en caso de que $t > a$ la función $\gamma_t \circ f$ mueve a los puntos $z < 0$ a la izquierda, así que $\gamma_t \circ f \notin XL$,
- si $t = 0$, entonces $\gamma_t \circ f$ fija a los puntos $z \geq 0$ y mueve a todos los puntos $z < 0$ a la derecha, en consecuencia $(\gamma_t \circ f) \in XL$ y $\mathbf{fix}(\gamma_t \circ f) = [0, \infty]$,
- finalmente, si $t < 0$, entonces $\gamma_t \circ f$ mueve a los puntos $z > 0$ a la izquierda, por lo tanto $(\gamma_t \circ f) \notin XL$.

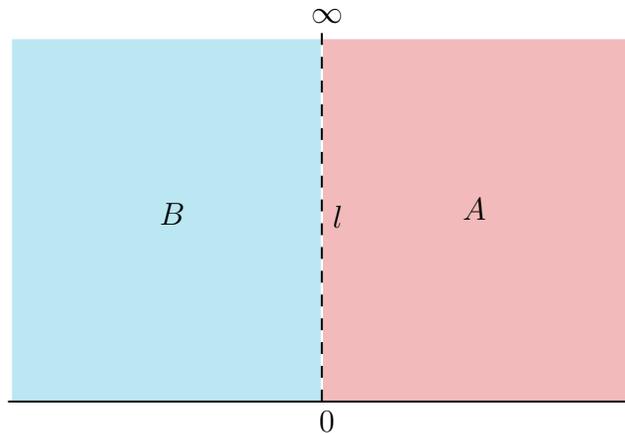


Figura 4.6: Laminación asociada al terremoto construido en el ejemplo.

Con los puntos fijos podemos calcular las cerraduras convexas como sigue:

- $H(\gamma_a \circ f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0 \text{ y } \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$,
- $H(\gamma_0 \circ f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ y } \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$,
- y para $0 < t < a$ se tiene $H(\gamma_t \circ f) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} \cup \{0, \infty\}$.

Notemos así que estas cerraduras convexas cubren a \mathbb{H}^2 . En consecuencia la laminación λ ya queda determinada únicamente por estos elementos. Definimos los siguientes estratos (véase **Figura 4.6**):

$$A = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}, \quad B = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) < 0\} \quad \text{y} \quad l,$$

donde l es la única geodésica que une a 0 con ∞ . Ahora, definimos a las funciones f_A y f_B , que son las únicas tales que $A \subseteq H(f_A)$ y $B \subseteq H(f_B)$, como $f_A = \gamma_0 \circ f$ y $f_B = \gamma_a \circ f$, con lo cual nuestro terremoto queda definido en cada zona como sigue:

$$(E|A) = (\gamma_0)^{-1} = \operatorname{Id} \quad \text{y} \quad (E|B) = (\gamma_a)^{-1},$$

donde $(\gamma_a)^{-1}(z) = e^{-a}z$, para cada $z \in B$. Como es de esperarse, no hay una única función f_l tal que $l \subseteq H(f_l)$, por ello tomamos $t_0 \in (0, a)$ y definimos:

$$(E|l) = (\gamma_{t_0})^{-1},$$

donde $(\gamma_{t_0})^{-1}(z) = e^{-t_0}z$.

Con todo esto hemos construido un terremoto E tal que $E = f$ en \mathbb{S}_∞^1 .

4.6 La geología es transitiva

Para finalizar este trabajo mostraremos el siguiente corolario, el cual clasifica a las estructuras hiperbólicas relativas haciendo uso de terremotos.

Corolario 4.6.1:

Para cualesquiera dos estructuras hiperbólicas relativas $[h]$ y $[h']$ en \mathbb{H}^2 existe un terremoto que manda una a la otra.

Demostración: Sean $f \in P([h])$ y $g \in P([h'])$, donde P es la función definida en el **Teorema 2.2.1**. Entonces $g \circ f^{-1} \in \mathbf{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$.

En consecuencia, por el **Teorema 4.1.1** existe un terremoto izquierdo E tal que $E_\infty = g \circ f^{-1}$, único excepto en las brechas. \square

La geología es transitiva.

APÉNDICE A

TOPOLOGÍA

Daremos a conocer las definiciones básicas de topología para seguir la lectura del texto.

A.1 Orden circular

En esta breve sección introducimos la notación necesaria para hablar sobre el tipo de orientación en \mathbb{S}^1 . Para ello, recordemos que la orientación usual en \mathbb{S}^1 es en sentido *antihorario*.

Definición A.1.1:

Una familia F de triadas de puntos en un conjunto X está en orden circular si cumple los siguientes axiomas:

1. $(a, b, c) \in F \implies (b, c, a) \in F$ y $(c, a, b) \in F$,
2. $(a, b, c) \in F \implies (b, a, c) \notin F$,
3. $(a, b, c) \in F$ y $(c, d, a) \in F \implies (b, c, d) \in F$ y $(d, a, b) \in F$.

Decimos que la triada $(a, b, c) \in F$ está en orden circular, y de manera más general, decimos que una n -ada de puntos (x_1, x_2, \dots, x_n) en X está en orden circular si cada subtriada de puntos (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) está en orden circular.

En la orientación usual de \mathbb{S}^1 una triada de puntos (x, y, z) está en orden circular si y sólo si cuando recorremos desde x en sentido antihorario a \mathbb{S}^1 encontramos primero a y , y luego a z .

Con esto, podemos definir cuándo una función preserva la orientación de \mathbb{S}^1 como sigue:

Definición A.1.2:

Una función $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ preserva el orden circular si para cada $x, y, z \in \mathbb{S}^1$ ocurre lo siguiente:

Si (x, y, z) están en orden circular, entonces $(f(x), f(y), f(z))$ también está en orden circular.

Con la noción de orden circular podemos definir a los intervalos en \mathbb{S}^1 como sigue:

Definición A.1.3:

Para cada par de puntos $x, y \in \mathbb{S}^1$ definimos al intervalo (x, y) como el siguiente conjunto:

$$(x, y) = \{z \in \mathbb{S}^1 \mid (x, z, y) \text{ está en orden circular}\}.$$

A.2 Funciones cubriente

Para estudiar conceptos homotópicos entre espacios, resulta útil definir a los **espacios cubrientes**:

Definición A.2.1:

Sean E y X dos espacios topológicos, y $q : E \rightarrow X$ una función continua y sobreyectiva. Decimos que q es una función cubriente de X si E es un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias, y para cada $x \in X$ existe un abierto U de x tal que $q^{-1}(U)$ es la unión ajena de subconjuntos conexos y abiertos de E , que son homeomorfos a U bajo q .

Bajo estas hipótesis, llamamos a E un espacio cubriente de X .

Ejemplo:

- Sea $\varepsilon_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$\varepsilon_0(x) = e^{2\pi i x}.$$

Entonces, ε_0 es una función cubriente de \mathbb{S}^1 .

Pues la preimagen de cada abierto de la forma:

$$\begin{aligned} X^+ &= \{x + iy \mid x > 0\}, Y^+ = \{x + iy \mid y > 0\}, \\ X^- &= \{x + iy \mid x < 0\}, Y^- = \{x + iy \mid y < 0\}, \end{aligned}$$

es la unión numerable de intervalos ajenos de longitud $\frac{1}{2}$. Notemos que estos abiertos cubren a \mathbb{S}^1 . Además, en cada uno de estos la función ε_0 admite una

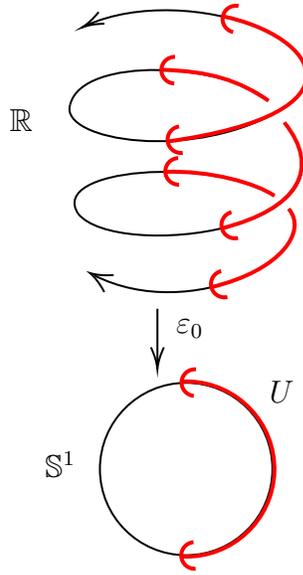


Figura A.1: Ilustración de cómo actúa la función cubriente ε_0 .

inversa local continua:

$$\varepsilon_0^{-1}(x + iy) = n + \frac{1}{2\pi} \arcsin(y), \text{ en } X^+$$

$$\varepsilon_0^{-1}(x + iy) = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arcsin(y), \text{ en } X^-$$

$$\varepsilon_0^{-1}(x + iy) = n + \frac{1}{2\pi} \arccos(y), \text{ en } Y^+$$

$$\varepsilon_0^{-1}(x + iy) = n - \frac{1}{2\pi} \arcsin(y), \text{ en } Y^-.$$

Varias propiedades vienen asociadas a las funciones cubrientes, entre ellas, la siguiente es la más importante en este texto:

Definición A.2.2:

Sean $q : E \rightarrow X$ una función cubriente y $f : Y \rightarrow X$ cualquier función continua. Un levantamiento de f es una función continua $F : Y \rightarrow E$ tal que $q \circ F = f$.

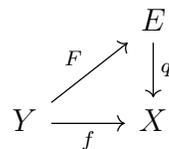


Figura A.2: Diagrama que caracteriza a un levantamiento.

Definimos lo siguiente:

Definición A.2.3:

Sean $q_1 : E_1 \rightarrow X$ y $q_2 : E_2 \rightarrow X$ dos funciones cubrientes del mismo espacio topológico. Un morfismo cubriente es una función continua $f : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $q_2 \circ f = q_1$.

Ejemplo:

- Dada cualquier función $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, existe un homeomorfismo cubriente $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(e^{ix}) = e^{2\pi i F(x)}$.

Con toda esta maquinaria damos la definición de **cubriente universal**. El siguiente resultado se demuestra en [Lee, 2011], pág. 298:

Teorema A.2.1:

Cualesquiera dos cubrientes simplemente conexos del mismo espacio son isomorfos. A este único espacio cubriente se le llama cubriente universal.

Ejemplos:

- El cubriente universal de \mathbb{S}^1 es \mathbb{R} .
- El cubriente universal de cualquier superficies hiperbólica es \mathbb{H}^2 .

Ahora podemos relacionar el concepto de un levantamiento con los homeomorfismos del círculo en si mismo.

Definición A.2.4:

Decimos que un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ preserva la orientación si cualquier levantamiento F es creciente.

El siguiente resultado es demostrado en [Pfeil, 2017] pág. 13.

Teorema A.2.2:

Un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ preserva el orden circular si y sólo si preserva la orientación.

APÉNDICE B

ANÁLISIS

B.1 Envoltentes convexas

Definimos a los conjuntos convexas como sigue:

Definición B.1.1:

Sean X un espacio afín y $A \subseteq X$. Decimos que A es convexo si para cada $x, y \in A$, el segmento de recta que une x y y se queda contenido en A , es decir:

$$\{z \in X \mid \exists t \in [0, 1](z = x + (1 - t)y)\} \subseteq A.$$

Ejemplos:

- En \mathbb{R} con su métrica usual, el intervalo $[0, 1]$ es convexo.
- El plano sin un punto no es un conjunto convexo.

Podemos generar a partir de cualquier subconjunto de un espacio afín un conjunto convexo como sigue:

Definición B.1.2:

Sea X un espacio afín. Definimos a la envolvente convexa de un subconjunto $A \subseteq X$ como el siguiente conjunto:

$$\text{env}(A) = \bigcap \{C \subseteq X \mid A \subseteq C \text{ y } C \text{ es un conjunto convexo.}\}$$

Ejemplos:

- Para cualquier conjunto convexo, su envolvente convexa es el mismo.
- La envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{S}_{∞}^1 es un polígono hiperbólico ideal tomando al modelo de Klein como espacio modelo.

BIBLIOGRAFÍA

- [Anderson, 1999] Anderson, J. W. (1999). *Hyperbolic Geometry*. Springer undergraduate mathematics series. Springer.
- [Asaka, 2022] Asaka, T. (2022). Earthquake maps of a once-punctured torus. Available online at: <https://www.cajpn.org/refs/thesis/18M-Asaka.pdf>.
- [Bruno, 2016] Bruno, M. (2016). An introduction to geometric topology. *CreateSpace Independent Publishing Platform.*, (arXiv:1610.02592).
- [do Carmo, 1976] do Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc.
- [Lascurain, 2015] Lascurain, A. (2015). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. Temas de matemáticas. Prensas de Ciencias.
- [Lee, 2011] Lee, J. M. (2011). *Introduction to topological manifolds*. Springer.
- [Pfeil, 2017] Pfeil, M. K. (2017). Earthquakes in the hyperbolic plane. Master's thesis, Heidelberg University.
- [Thurston, 1986] Thurston, W. P. (1986). Earthquakes in two-dimensional hyperbolic geometry. In *Fundamentals of Hyperbolic Manifolds*, pages 269–290. Cambridge University Press.

