



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN DE ALGUNOS
CONJUNTOS FRACTALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Licenciado en Matemáticas

PRESENTA:

Miguel Ángel Medina Durán

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez



Ciudad Universitaria, CDMX, 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Medina

Durán

Miguel Ángel

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

2. Datos del tutor

Dr. Vinicio Antonio Gómez Guitiérrez

Director de tesis

3. Datos del sinodal 1

Dr. Renato

Leriche

Vázquez

4. Datos del sinodal 2

Dra. Jessie Diana

Pontigo

Herrera

5. Datos del sinodal 3

Mat. Irvin

Arellano

Rosas

6. Datos del sinodal 4

M. en C. Carlos Alejandro

Hernández

Gómez

7. Datos del trabajo escrito

Cálculo de la dimensión de algunos conjuntos fractales

60 páginas

2024

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez que fué mi profesor desde primer semestre y desde entonces me cobija, me guía y aconseja, siempre buscando lo mejor para mi crecimiento personal y académico. Gracias a él creció mi amor por la geometría y le debo en gran parte toda mi buena experiencia que me llevo de la Facultad.

También quiero agradecer al Dr. Renato Leriche Vázquez por el seminario de geometría fractal impartido en el semestre 2022-2, debido a que gracias a él creció mi motivación para hacer la tesis sobre este bello tema. Así mismo, mucha de la herramienta necesaria que usé en esta tesis me la enseñó él.

A mis sinodales por tomarse el tiempo necesario para revisar la tesis, así como por sus consejos y recomendaciones sobre la misma. Así mismo, fueron mis profesores en algún momento de la carrera por lo que les agradezco todo lo aprendido, al igual que la calidez y el amor con la que imparten sus clases, contagiandome el gusto e interés por las matemáticas.

A todos mis profesores de la carrera que me formaron y me dieron herramientas invaluableles que recordaré toda mi vida, así como por toda la experiencia de vida y calidez.

A mi afectuosa familia que me llena de alegría, fortaleza y cariño. Sé que siempre estarán para mí y yo para ellos. Gracias a ellos soy lo que soy hoy en día.

A mi mamá Claudia Durán Saldivar y a mi papá Onésimo Medina Jiménez por todo su amor, apoyo y tiempo que me dan, son los mejores padres del mundo. También quiero agradecer a mi hermana Claudia Miriam Medina Durán que me acompaña en todo lo que hago, me consiente y me brinda todo su apoyo. Así como a mi hermano Jorge Humberto Medina Durán que me apoya, me guía y es mi ejemplo a seguir.

A mis amigos de la universidad, sin ellos la universidad no sería lo mismo. Gracias por todos los grandes momentos, experiencias, cariño y hermandad. Los quiero mucho y ustedes son lo mejor que me llevo de la universidad.

A Yisus, Andrés, Tony, Nico, Fanny, Jhan, Lucy, Paoli, Danny, Arez y Esaim.

A mis amigos de prepa y secundaria que a pesar de tanto tiempo seguimos cada día más unidos y sacando nuevas anécdotas.

A Yisus, Vania, Charls, Nay, Harold, Félix, Katia, Bianca, Ángel, José, Oscar y Jeshua.

A Cyron, Morita, Terry, Prim, Kira, Bartolito, Candy, Tenoch y Maki por todos los momentos compartidos y cariño incondicional.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Miguel Ángel Medina Durán. Ciudad Universitaria, CDMX, 2024

"Nomen est numen"
"To name is to know"
"Nombrar es conocer"

Dicho en Latín

Resumen/Abstract

El objetivo de esta tesis es adentrarnos en el mundo de los fractales, para esto presentaremos la Dimensión de Hausdorff que nos adentrará en el comportamiento de estos conjuntos fractales. Así mismo, abordaremos los Sistemas de Funciones Iterados y un par de teoremas, los cuales nos darán la herramienta necesaria para poder programar algunos conjuntos fractales y calcular su dimensión.

Finalmente, abordaremos el árbol áureo, donde analizaremos un par de características de este conjunto fractal y veremos si es posible su programación con la teoría antes abordada.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	XI
Introducción	1
1. Dimensión de Hausdorff	3
1.1. Antecedentes	3
1.2. Conceptos previos	4
1.3. Dimensión de Hausdorff	6
2. Sistema de Funciones Iterados	11
2.1. Conceptos previos	11
2.2. Sistema de Funciones Iterados	16
2.3. Teorema del Collage	18
3. Curvas de dimensión fraccionaria	21
3.1. Curva de Koch	29
3.2. Triángulo de Sierpinsky	31
3.3. Curva Dragón	33
3.4. Embutido de Minkowski	35
4. La proporción áurea y los fractales	39
4.1. Proporción áurea	39
4.2. Árbol áureo	40
4.3. Programar el árbol áureo	44
Conclusiones	53
A. Material extra	55
Referencias	59

Introducción

La geometría fractal es una rama de las matemáticas relativamente nueva. Estudia las curvas, superficies, etc. que tienen un comportamiento errático y que algunos matemáticos incluso describirían como monstruosas o antinaturales debido a que no tenían un comportamiento "suave" y era difícil obtener una representación visual, pero Fatou y Julia mostraron que se pueden obtener naturalmente iterando una simple función.

Gaston Julia y Pierre Fatou fueron pioneros en estudiar este tipo de curvas, pero su trabajo no tuvo mucha popularidad (aunque por su trabajo Julia ganó el "Gran Premio" de la Academia de Ciencias de Francia). Fue hasta que Benoit Mandelbrot empezó a estudiar este tipo de curvas y en 1975 la "bautizó" con la palabra "fractal" del latín "fractus", que significa "quebrado" y fue entonces cuando empezó a tomar más relevancia el tema en la comunidad matemática.

El estudio de fractales es importante debido a que aparecen naturalmente en una gran variedad de modelos matemáticos de fenómenos físicos. En la naturaleza son pocas las cosas que son triángulos, círculos o cuadrados. La mayoría de las cosas tienen formas irregulares que, cuanto más se analizan, más se parecen a un fractal. Los fractales ayudan a entender diversos fenómenos de nuestro entorno, como la forma de la costa de Gran Bretaña, el crecimiento del cáncer o el comportamiento de las acciones en la bolsa.

Este trabajo inicia con el estudio de la dimensión de Hausdorff y los Sistemas de Funciones Iterados, para con esta teoría se aborden un par de ejemplos clásicos a los que no solo les calcularé su dimensión de Hausdorff, sino que también programaré para dar una representación visual que permite entender mejor su comportamiento. Así mismo, se aborda el problema de programar el árbol áureo con esta teoría.

Luego se estudian los Sistemas de Funciones Iterados y el Teorema del Collage, así como la teoría que está detrás de estos dos conceptos que son fundamentales para entender los códigos de programación de cada conjunto fractal.

Posteriormente, se utiliza el lenguaje de programación Julia para dar una representación visual los fractales que se estudian.

Finalmente, nos enfocaremos en la proporción áurea, por lo que veremos el árbol áureo y sus características, así como si es posible tener una representación visual de este fractal con la teoría antes desarrollada.

Dimensión de Hausdorff

En este capítulo nos apoyaremos de los libros de "The Geometry of fractal sets", de Falconer K.J.[1] y de "The Fractal Geometry of Nature", de Benoit B. Mandelbrot [2] para desarrollar los conceptos previos necesarios para estudiar la dimensión de Hausdorff.

1.1. Antecedentes

Durante mucho tiempo se han estudiado diferentes tipos de curvas, superficies, etc. dando origen a la derivada, integral, límite, etc. Esto, a su vez, dio paso al cálculo diferencial e integral, donde se estudiaban diferentes ecuaciones para poder modelar estas curvas o dar aproximaciones, pero había un tipo de curva que se ignoraba. Este tipo de curva era tan errático, que era difícil de modelar o si quiera aproximarse, por lo que fue puesto de lado en un inicio.

Para ejemplificar a qué tipo de curvas nos referimos usaremos un ejemplo mencionado en Mandelbrot[2, 3]: calcular cuánto mide la costa de Gran Bretaña. A simple vista no parece un problema tan difícil. Basta con tomar un mapa y hacer la conversión según la escala, pero ¿qué tan acertada es esta medida? Una primera evaluación podría hacer notar que el mapa no incluye la orilla con suma precisión; es decir, puede que no se vea alguna playa o alguna parte de la orilla se haya perdido por ser muy pequeña. Entonces podríamos pensar en medirla por cuenta propia. Al ser una longitud demasiado grande, podríamos usar km para obtener cierta longitud aproximada, pero ¿qué pasa si disminuimos la unidad de medida?

Puede que al medir en kilómetros nos hubiésemos saltado barrancas o rocas muy grandes, pero si midiéramos con cm en lugar de con metros, ahora aparecerían más objetos como rocas más chiquitas, conchas, etc. Y así sucesivamente, volviendo al mismo problema que teníamos con el mapa. Así nuestra longitud va incrementando cada vez más conforme medimos con más precisión, incluso sería posible que la longitud tienda a infinito.

Además, nuestro margen de referencia puede variar: unos pueden empezar a medir sobre la arena, otros sobre el agua, otros a la altura donde llega la marea en cierta época del año, etc.

De esta manera nos damos cuenta que no es un problema sencillo pues nos encontramos con el tipo de curva que mencionábamos al inicio: una curva con comportamiento cada vez más

errático conforme medimos con más precisión.

Con este ejemplo vemos que este tipo de curva puede surgir en la vida real. De hecho si le hacemos zoom a los objetos de la vida cotidiana, podemos ver que se comportan de manera similar, ya que son pocos los objetos que realmente son círculos, cuadrados o triángulos. La mayoría de los objetos suelen tener formas extravagantes no muy uniformes. A este tipo de curvas Mandelbrot las nombró "fractales", del latín "fractus", que significa quebrado o roto.

Ahora bien, una herramienta para poder entender a los fractales existe la dimensión de Hausdorff. Esta dimensión nos dice qué tanto espacio ocupa un fractal o qué tan enredado es. Requerimos ciertos conceptos previos para entender este término, los cuales se explican a continuación.

1.2. Conceptos previos

Para poder definir la dimensión de Hausdorff, primero necesitamos entender un par de conceptos previos, por lo que primero definiremos lo que es la medida exterior de un conjunto. Para esto, definiremos nuestro lugar de trabajo, el cual es una sigma álgebra.

Definición 1. *Sigma álgebra* [4]

Sea X un conjunto. Una σ -álgebra es una colección no vacía Φ de subconjuntos de X que cumple dos propiedades:

- 1.-Si $E \in \Phi$ entonces $X \setminus E \in \Phi$
- 2.-Si $E_1, E_2, \dots \in \Phi$ entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \Phi$

Ahora que ya definimos el tipo de conjunto donde vamos a trabajar, toca definir lo que vamos a considerar como una medida.

Definición 2. *Medida de un conjunto*[5]

Sea X un conjunto. Una medida μ es una función definida en alguna σ -álgebra de subconjuntos de X que toma valores en $[0, \infty]$ y cumple que

$$\mu(\emptyset) = 0 \tag{1.1}$$

y también que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \tag{1.2}$$

para conjuntos disjuntos 2 a 2.

Tomando la definición de medida y debilitando la propiedad (1.2) a solo subaditividad y agregando monotonía, obtenemos la medida exterior.

Definición 3. Medida exterior de un conjunto[6]

Sea X un conjunto. Una medida exterior v en X es una función definida en todos los subconjuntos de X que toma valores en $[0, \infty]$ y cumple 3 propiedades:

$$v(\emptyset) = 0 \quad (1.3)$$

Si $A \subset A'$ entonces

$$v(A) \leq v(A') \quad (1.4)$$

y para cualquier familia numerable de subconjuntos $\{A_j\}$ de X se tiene que

$$v\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(A_j) \quad (1.5)$$

Ya que sabemos lo que es una medida exterior, podemos definir la medida exterior s -dimensional de Hausdorff, pero antes vamos a definir el diámetro de un conjunto, el cual nos servirá para definir el δ -recubrimiento.

El diámetro de un conjunto nos servirá para acotar la longitud de los conjuntos.

Definición 4. Diámetro de un conjunto [7]

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Definimos el diámetro de U como

$$|U| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in U\} \quad (1.6)$$

Donde $\|\cdot\|$ es la normal usual en $\mathbb{R}^n$.

Teniendo la definición del diámetro de un conjunto, podemos definir el δ -recubrimiento para un conjunto E .

Definición 5. δ -recubrimiento de un conjunto[8]

Sea $\{U_i\}$ una colección de conjuntos no vacíos tal que $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ para cada $i \in I$, I un conjunto de índices numerable y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Decimos que $\{U_i\}$ es un δ -recubrimiento de E si se cumple que

$$E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \quad (1.7)$$

y también que

$$0 < |U_i| \leq \delta \quad \text{para cada } i \quad (1.8)$$

Notemos que puede haber muchos δ -recubrimientos para un conjunto dado. También podemos tomar el diámetro de cada conjunto que conforma un δ -recubrimiento y sumar todos los diámetros.

1.3. Dimensión de Hausdorff

Denotaremos la medida exterior s -dimensional de Hausdorff como $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ esta va a ser el ínfimo de la suma de los diámetros de cada δ -recubrimiento elevado a la s , donde la s representa la dimensión que queremos ocupar, esto depende si estamos trabajando en un conjunto de puntos, una línea, área, volumen, etc.

Definición 6. *Medida exterior s -dimensional de Hausdorff [9]*

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $s > 0$. Para cada $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \quad (1.9)$$

donde el ínfimo está sobre todos los δ -recubrimientos $\{U_i\}$ de E .

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ tenemos la medida exterior s -dimensional de Hausdorff:

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \quad (1.10)$$

Notemos que $\mathcal{H}^s(E)$ va a crecer cuando la δ decrezca. Esto sucede porque con una δ grande hay muchas cubiertas posibles y un solo conjunto grande podría cubrir todo nuestro conjunto. En cambio, con una δ pequeña se van a restringir las posibilidades, por lo que estamos forzando a que nuestros conjuntos U_i se hagan pequeños y por ende $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ crezca.

Ahora probaremos que la medida exterior s -dimensional de Hausdorff es efectivamente es una medida exterior.

Proposición 1.3.1. $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior

$$(1) \mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$$

Demostración:

Como el conjunto vacío puede ser cubierto por un δ -recubrimiento vacío y su suma da cero, entonces

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \sum_{i=1}^{\infty} |0|^s = 0 \quad (1.11)$$

$$(2) \text{ Si } A \subset A' \text{ entonces } \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(A')$$

Demostración:

Sea $A \subset A'$. Como cualquier recubrimiento que tomemos para A' también nos va a servir para A , entonces $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(A')$

$$(3) \text{ Para cualquier familia numerable de subconjuntos } \{A_j\} \text{ de } X \text{ se tiene que } \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_j)$$

Demostración:

Sean $\{A_j\} \subset X$ una familia numerable de subconjuntos. Para cada A_j existe un δ -recubrimiento $\{F_{j,n}\}$ y su unión, es decir $\bigcup_{j,n} F_{j,n}$, es un δ -recubrimiento para $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Por lo tanto $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_j)$.

□

Definición 7. Medida de Hausdorff [1]

Restringiendo la medida exterior s -dimensional de Hausdorff a los conjuntos medibles, se obtiene la medida s -dimensional de Hausdorff, también llamada medida de Hausdorff.

Definición 8. Dimensión de Hausdorff [1]

Denotamos la dimensión de Hausdorff para un conjunto E como $\dim_H(E)$ que es un valor que cumple que

$$\mathcal{H}^s(E) = \infty \quad \text{si} \quad 0 \leq s < \dim_H(E) \quad (1.12)$$

$$\mathcal{H}^s(E) = 0 \quad \text{si} \quad \dim_H(E) < s < \infty \quad (1.13)$$

Es decir, la medida de Hausdorff se nos va a infinito si la dimensión del conjunto es mayor a s y, por otro lado, se va a 0 si la dimensión del conjunto es menor a s . Lo cual nos da a entender

1. DIMENSIÓN DE HAUSDORFF

que $\dim_H(E)$ es el punto de quiebre donde de un lado vale infinito y del otro lado vale 0. El problema planteado al inicio acerca de cuánto mide la costa de Gran Bretaña o cualquier otra figura irregular se resolvería con el valor de $\dim_H(E)$ donde E es la costa de Gran Bretaña y $\dim_H(E)$ es una medida asignada a esta curva. Con la dimensión de Hausdorff le asignamos una medida dependiendo de la cantidad de espacio que llenan.

Notemos que la dimensión de Hausdorff existe porque el límite $\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$ existe, solo que el límite puede ser infinito porque $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ incrementa su valor cuando δ disminuye.

Teorema 1.3.1. *El número s que cumple la definición de dimensión de Hausdorff es único. [1]*

Demostración:

Supongamos que existen dos números s_1, s_2 que cumplen la definición. En particular se cumple que si $0 \leq s < s_2$ entonces $\mathcal{H}^{s_2}(E) = \infty$.

Ahora, sin pérdida de generalidad, si $s_1 < s_2$ entonces $0 \leq s < s_1 < s_2$ por lo que $\mathcal{H}^{s_2}(E) = 0$, pero teníamos que cumplía que $\mathcal{H}^{s_2}(E) = \infty$ lo cual es una contradicción.

□

Como ejemplo, calcularemos la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor, el cual se construye de la siguiente manera.

Sean $E_0 = [0, 1]$, $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, etc. Donde E_{j+1} se obtiene de eliminar el tercio medio de cada intervalo de E_j . Por lo que E_j consiste de 2^j intervalos de longitud 3^{-j} . El conjunto de Cantor es $F = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$ [1].

Proposición 1.3.2. *La dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor F es $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Además su medida de Hausdorff está acotada por $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.*

Demostración: [10]

Sea $F = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$ el conjunto de Cantor. Como está constituido por 2^k intervalos de longitud 3^{-k} en el paso k -ésimo de su construcción, entonces la cubierta $\{U_i\}$ de F conformada por 2^k intervalos de longitud 3^{-k} nos da que

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq \sum |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} \quad (1.14)$$

Si tomamos $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ tenemos que

$$2^k 3^{-ks} = 2^k 3^{-k \frac{\log 2}{\log 3}} \quad (1.15)$$

$$= 2^k 2^{-k} \quad (1.16)$$

$$= 1 \quad (1.17)$$

Tomando $k \rightarrow \infty$ tenemos que $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Notemos que si $\frac{\log 2}{\log 3} < s$, entonces $\mathcal{H}^s(F) = 0$.

Por otro lado, tomando la misma sucesión podemos acotar por abajo debido a que un conjunto siempre está contenido en sí mismo, dándonos que

$$2^k 3^{-ks} = \sum |U_i|^s \leq \mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F)$$

Notemos que si $s < \frac{\log 2}{\log 3}$ entonces $\mathcal{H}^s(F) = \infty$.

Como la dimensión de Hausdorff es única y $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ cumple las dos propiedades que la definen, entonces la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor es $\dim_H F = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Ahora veamos que $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F)$.

Como F es compacto[7] y asumiendo que $\{U_i\}$ son familias de intervalos, entonces solo basta probar que para cualquier cubierta $\{U_i\}$ finita de intervalos cerrados de $[0, 1]$ se tiene que

$$\frac{1}{2} \leq \sum_i |U_i|^s \tag{1.18}$$

Para cada U_i sea k un entero tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k} \tag{1.19}$$

Entonces U_i intersecta a lo más un intervalo de E_k ya que la separación de estos intervalos es al menos 3^{-k} .

Por construcción, si $j \geq k$ entonces U_i intersecta a lo más $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ intervalos de E_j , la desigualdad se da usando la ecuación (1.19).

Si tomamos j suficientemente grandes para que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para toda U_i , entonces U_i intersectaría a todos los 2^j intervalos de longitud 3^{-j} por lo que tendríamos

$$2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{3^s} \leq \sum_i |U_i|^s \quad (1.21)$$

$$\frac{1}{3^{\frac{\log 2}{\log 3}}} \leq \sum_i |U_i|^s \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{2} \leq \sum_i |U_i|^s \quad (1.23)$$

Por lo tanto $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F)$.

□

Sistema de Funciones Iterados

Ahora que ya sabemos la parte teórica que resuelve nuestro problema inicial debido a que tenemos la herramienta necesaria para medir nuestras curvas, nos enfocaremos en explorar si es posible una representación visual de estos conjuntos tan irregulares. Para esto, nos sumergiremos en la teoría que hará posible (aunque esta teoría que veremos excluye los fractales probabilísticos o aleatorios) su representación gráfica (siguiendo "Fractals Everywhere", de Michael F. Barnsley [11]), para posteriormente programarlo. Los códigos que usaremos serán posibles gracias al lenguaje de programación Julia.

Utilizaremos los Sistemas de Funciones Iterados que se abrevian como SFI o IFS por sus siglas en inglés (Iterated Function Systems) para fundamentar el uso de nuestros códigos y el funcionamiento de los mismos. Pero antes debemos conocer un par de conceptos previos.

2.1. Conceptos previos

Antes de poder abordar los SFI debemos conocer conceptos como contracción, punto fijo, espacio métrico completo, entre otros.

Definición 9. *Espacio métrico*[12]

Un espacio métrico es una dupla (X, d) que consta de un conjunto X y una función d , llamada métrica, tal que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ cumple lo siguiente:

$$(i) \ d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$$

$$(ii) \ d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(iii) \ d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$$

$$(iv) \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$$

El espacio métrico es un buen espacio para trabajar. No obstante, debemos pedir que toda sucesión de Cauchy tenga límite dentro del mismo espacio para que sea completo y no ocurra que no converja nuestra sucesión, por lo que usaremos un espacio métrico completo.

Definición 10. *Sucesión de Cauchy* [13]

Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X es de Cauchy si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m > N \quad (2.1)$$

Definición 11. *Espacio métrico completo* [14]

Decimos que un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X converge a algún punto límite $x \in X$.

Definición 12. *Transformación* [12]

Decimos que f es una transformación si es una función de un espacio en sí mismo, es decir, $f : X \rightarrow X$ con X un conjunto.

Definición 13. *Punto fijo* [15]

Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una transformación.

Definimos un punto fijo de f como la $x \in X$ que cumple que $f(x) = x$.

Ahora definiremos una contracción, la cual será el tipo de función que utilizaremos en todos los SFI.

Definición 14. *Contracción* [16]

Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que una función $f : X \rightarrow X$ es una contracción, o contractiva, si existe $s \in [0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y) \quad \forall x, y \in X. \quad (2.2)$$

A s se le llama factor de contracción.

Ahora definiremos la métrica de Hausdorff que utilizaremos posteriormente en la sección 2.3 para abordar el Teorema del Collage, el cual es la contraparte de los SFI.

Definición 15. *Métrica de Hausdorff* [17]

Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $H(X) = \{A \subset X : A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}$.

Definimos la métrica o distancia de Hausdorff en $H(X)$ como

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) \quad (2.3)$$

donde $\vee$ es el símbolo de disyunción lógica y se define de la siguiente manera

$$d(A, B) \vee d(B, A) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} \quad (2.4)$$

por otro lado $d(A, B)$ es

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\} \quad \forall A, B \in H(X) \quad (2.5)$$

y, por último,

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\} \quad \forall x \in X, \forall B \in H(X) \quad (2.6)$$

Teorema 2.1.1. *Si X es un espacio métrico completo, entonces $H(X)$ con la métrica de Hausdorff es un espacio métrico completo.*

Proposición 2.1.1. [11]

Si $w : X \rightarrow X$ es una contracción con factor de contracción s , entonces $w : H(X) \rightarrow H(X)$ también es una contracción con el mismo factor de contracción.

Demostración:

Sea $A, B \in H(X)$ y $w : X \rightarrow X$ una contracción con factor de contracción s . Entonces

$$d(w(A), w(B)) = \max\{\min\{d(w(x), w(y)) : y \in B\} : x \in A\} \quad (2.7)$$

$$\leq \max\{\min\{sd(x, y) : y \in B\} : x \in A\} \quad (2.8)$$

$$= sd(A, B) \quad (2.9)$$

$$\therefore d(w(A), w(B)) \leq sd(A, B) \quad (2.10)$$

La desigualdad (2.8) se da por ser contracción $w : X \rightarrow X$ con factor de contracción s .

Haciendolo análogamente para $d(w(B), w(A))$ tenemos que $d(w(B), w(A)) \leq sd(B, A)$.

Por lo que $h(w(A), w(B)) \leq sh(w(A), w(B))$.

□

Notemos que las contracciones cumplen la propiedad de ser transformaciones continuas.

Proposición 2.1.2. [18]

Sea $w : X \rightarrow X$ una contracción del espacio métrico (X, d) . Entonces w es continua.

Demostración:

Sea $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $s > 0$ el factor de contracción de w .

Tomemos $\delta = \epsilon/s$ y sea $y \in B_{x,\delta}$. Entonces tenemos

$$d(w(x), w(y)) \leq sd(x, y) < s\delta < s\epsilon/s < \epsilon \quad (2.11)$$

Por lo que $w(y) \in B_{w(x),\epsilon}$ y sería continua.

□

Ahora veremos el teorema del punto fijo, que nos ayudará a demostrar el teorema que fundamentará nuestros códigos y el por qué funcionan.

Teorema 2.1.2. Teorema del punto fijo [19]

Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces existe un único $x_o \in X$ que es punto fijo y, además, para cualquier $x \in X$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_o \quad (2.12)$$

Demostración:

Sean $x \in X$ y $0 \leq s < 1$ el factor de contracción de f . Al f ser contracción tenemos

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{\min\{n,m\}} d(x, f^{|n-m|}(x)) \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

Ahora, para $k \in \mathbb{N}$, por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(x, f^k(x)) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^k(x)) \quad (2.14)$$

$$\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + d(f^2(x), f^k(x)) \quad (2.15)$$

$$\leq \dots \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \dots + d(f^{k-1}(x), f^k(x)) \quad (2.16)$$

$$\leq d(x, f(x)) + sd(x, f(x)) + s^2d(x, f(x)) + \dots + s^{k-1}d(x, f(x)) \quad (2.17)$$

$$= (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1})d(x, f(x)) \quad (2.18)$$

$$\leq \frac{1}{1-s} d(x, f(x)) \quad (2.19)$$

Donde la desigualdad (2.16) se obtiene directamente de la definición de contracción, al cumplirse la desigualdad siguiente:

$$d(f^{k-1}(x), f^k(x)) \leq sd(f^{k-2}(x), f^{k-1}(x)) \leq \dots \leq s^{k-1}d(x, f(x)) \quad (2.20)$$

Por otro lado, la desigualdad (2.19) se obtiene de calcular la serie geométrica siguiente:

$$1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s} \quad (2.21)$$

Ahora, tomando la ecuación (2.19) y sustituyendo en la ecuación (2.13) tenemos

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{\min\{m,n\}} \frac{1}{1-s} d(x, f(x)) \quad (2.22)$$

Notemos que $\frac{1}{1-s}$ es un valor fijo y $d(x, f(x))$ para un x dado también es fijo. Además, $s^{\min\{m,n\}}$ se hace tan chico como queramos a partir de una N dada debido a que $s \in [0, 1)$ y $\min\{n, m\}$ se nos va haciendo grande, por lo que $s^{\min\{m,n\}}$ se hace cada vez más pequeño, es decir:

Si $\epsilon > 0$, entonces $\exists N > 0$ tal que

$$s^{\min\{m,n\}} \frac{1}{1-s} d(x, f(x)) < \epsilon \quad \forall n, m > N \quad (2.23)$$

Por lo que la sucesión $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Como la sucesión es de Cauchy y (X, d) es un espacio completo, existe $x_o \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_o \quad (2.24)$$

Veamos que x_o es punto fijo.

$$f(x_o) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) \quad (2.25)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) \quad (2.26)$$

$$= x_o \quad (2.27)$$

2. SISTEMA DE FUNCIONES ITERADOS

La igualdad (2.26) se da del hecho de que f es una contracción, por lo que es continua y podemos sacar el límite.

Solo falta probar que es único.

Sea $y_0 \in X$ un punto fijo. Tomando la distancia de las imágenes y aplicando la definición de contracción tenemos

$$d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \leq sd(x_0, y_0) \quad (2.28)$$

$$\implies d(x_0, y_0) \leq sd(x_0, y_0) \quad (2.29)$$

$$\implies 0 \leq sd(x_0, y_0) - d(x_0, y_0) \quad (2.30)$$

$$\implies 0 \leq (s - 1)d(x_0, y_0) \quad (2.31)$$

$$(2.32)$$

Como $s - 1 < 0$ y $d(x_0, y_0) \geq 0$, forzosamente $d(x_0, y_0) = 0$. Por lo que $x_0 = y_0$. Es decir, x_0 es único.

□

2.2. Sistema de Funciones Iterados

Ahora abordaremos la definición general de los Sistemas de Funciones Iterados (SFI) .

Definición 16. *Sistemas de Funciones Iterados (SFI)* [11]

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Un Sistema de Funciones Iterados es un conjunto finito de transformaciones continuas $w_n : X \rightarrow X$.

Cuando condicionamos las transformaciones a que solo sean contracciones, se llama Sistema de Funciones Iterados Hiperbólico.

Definición 17. *Sistema de funciones Iterados Hiperbólico (SFI Hiperbólico)* [11]

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Un Sistema de Funciones Iterados Hiperbólico es un conjunto finito de contracciones $w_n : X \rightarrow X$ con factor de contracción s_n , respectivamente, para $n = 1, 2, \dots, N$.

La notación que usaremos para el SFI hiperbólico es $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ con factor de contracción $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

De ahora en adelante trabajaremos solo con SFI hiperbólicos, por lo que les llamaremos simplemente SFI.

Ahora veremos un teorema que nos dirá que al iterar nuestras transformaciones nos iremos acercando cada vez más a un conjunto, el cual será único y será el límite de las iteraciones.

Teorema 2.2.1. *Sea $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ un SFI hiperbólico con factor de contracción s . La función $W : H(X) \rightarrow H(X)$ definida por*

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \quad \forall B \in H(X) \quad (2.33)$$

es una contracción de $(H(X), h(d))$ un espacio métrico completo, con factor de contracción s y $h(d)$ es la métrica de Hausdorff inducida por la distancia d del espacio métrico X .

Teorema 2.2.2. *Teorema de existencia y unicidad del atractor de los SFIs hiperbólicos[11]*

Sea $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ un SFI hiperbólico con factor de contracción s y $W : H(X) \rightarrow H(X)$ definida por

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \quad \forall B \in H(X) \quad (2.34)$$

entonces existe un único punto fijo $A \in H(X)$ tal que

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A) \quad (2.35)$$

dado por $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$ para cualquier $B \in H(X)$

Demostración

De 2.1.1 se sigue que $(H(X), h(d))$ es un espacio métrico completo y $W : H(X) \rightarrow H(X)$ es una contracción con factor de contracción s por lo cual podemos aplicar directamente el teorema del punto fijo, por lo que tenemos que $\exists! A \in H(x)$ que cumple que $A = W(A)$ y $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$.

□

El punto fijo A es conocido como el atractor del SFI.

El teorema anterior nos permite iterar nuestro conjunto de transformaciones sobre cualquier compacto B y nos asegura que el límite es único, y que se va a parecer cada vez más al punto fijo A , el cual es el conjunto que queremos obtener, ya que este conjunto puede ser un fractal.

2.3. Teorema del Collage

Los Sistemas de Funciones Iterados SFI y el Teorema de los SFI nos dicen que podemos tomar un conjunto finito de contracciones y al iterarlo se acercará a un conjunto fijo y único. Ahora veremos la contraparte de los SFI, el cual es el Teorema del Collage. Este teorema nos dice que dado un conjunto compacto, podemos encontrar un SFI tal que su atractor sea cercano (según la distancia o métrica de Hausdorff) al conjunto compacto dado.

Primero debemos introducir un resultado antes de demostrar el Teorema del Collage.

Lema 2.3.1. *[10, 11, 18]*

Sea (X, d) un espacio métrico completo, $f : X \rightarrow X$ una contracción con factor de contracción $s \in [0, 1)$ y $x_0 \in X$ el punto fijo de f . Entonces se cumple que

$$d(x, x_0) \leq \frac{1}{1-s} d(x, f(x)) \quad \forall x \in X \quad (2.36)$$

Demostración:

Notemos que $d(a, b)$ para $a \in X$ fijo, es continua en $b \in X$. Aplicando el teorema del punto fijo y la continuidad tenemos que

$$d(x, x_0) = d(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \quad (2.37)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n d(f^{m-1}(x), f^m(x)) \quad (2.38)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x))(1 + s + \dots + s^{n-1}) \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{1-s} d(x, f(x)) \quad (2.40)$$

Donde la desigualdad (2.38) se obtiene de aplicar la desigualdad del triángulo. [20]

La desigualdad (2.39) se obtiene de la misma manera que la desigualdad (2.17) de 2.1.2

La igualdad (2.40) se obtiene del resultado de calcular la serie geométrica.

□

Ahora veremos el Teorema del Collage, el cual recibe este nombre debido a que es como si hiciéramos un collage utilizando transformaciones.

Teorema 2.3.1. *Teorema del Collage*[10, 11, 18]

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $K \in H(X)$ y $\epsilon > 0$ dados. Sea $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ un SFI con factor de contracción $0 \leq s < 1$ tal que

$$h(K, \bigcup_{n=1}^N w_n(K)) \leq \epsilon, \quad (2.41)$$

con $h(d)$ la métrica de Hausdorff. Entonces

$$h(K, A) \leq \epsilon/(1 - s), \quad (2.42)$$

donde el conjunto A es el atractor del SFI.

Demostración

Notemos que $A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$. Luego, por el lema anterior, tenemos que

$$h(K, A) \leq \frac{1}{1 - s} h(K, \bigcup_{n=1}^N w_n(K)) \leq \frac{\epsilon}{1 - s} \quad (2.43)$$

□

Curvas de dimensión fraccionaria

Ahora calcularemos la dimensión de algunos conjuntos fractales, para esto nos guiaremos en "The Fractal Geometry of Nature", de Benoit B. Mandelbrot. [2]

Primero necesitamos conocer que dada una línea recta de longitud unitaria y un número entero b , la podemos dividir en $N = b$ partes de longitud $r = 1/b$ cada una. Por lo que $r = 1/b = 1/N$.

De igual manera, dado un cuadrado, lo podemos dividir en $N = b^2$ cuadrados de lado $r = 1/b$. Por lo que $r = 1/b = 1/N^{1/2}$.

Para el cubo se tiene $r = 1/b = 1/N^{1/3}$. Y así sucesivamente.

Ahora, esta misma noción se puede aplicar a rectángulos de tamaño $0 \leq x < X$ a lo ancho y $0 \leq y < Y$ a lo largo, partidos en $N = b^2$ partes, donde cada parte es un rectángulo definido a por la siguientes desigualdades:

$$(k-1)X/b \leq x < kX/b \quad \text{cada parte del ancho} \quad (3.1)$$

$$(h-1)Y/b \leq y < hY/b \quad \text{cada parte del largo} \quad (3.2)$$

Donde k y h van de 1 a b . En este caso $r(N) = 1/b = 1/N^{1/2}$.

Para el paralelepípedo es análogo y se tiene $r = 1/b = 1/N^{1/3}$.

Ahora, usando este mismo razonamiento, para un paralelepípedo de dimensión $D \leq 3$ se tiene que [2]

$$r = 1/b = 1/N^{1/D} \quad (3.3)$$

Donde llamaremos a r el radio de similitud, el cual sería la escala que tiene cada parte.

Si despejamos D en la ecuación (3.3), tenemos:

$$r = 1/N^{1/D} \quad (3.4)$$

$$\log(r) = \log(1/N^{1/D}) \quad (3.5)$$

$$\log(r) = \frac{\log(1/N)}{D} \quad (3.6)$$

$$D = \frac{\log(1/N)}{\log(r)} \quad (3.7)$$

$$D = \frac{\log(1) - \log(N)}{\log(r)} \quad (3.8)$$

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(r)} \quad (3.9)$$

$$D = \frac{\log(N)}{\log(1/r)} \quad (3.10)$$

Por lo que podemos calcular la dimensión de un conjunto a través de las partes que lo conforman y el radio de similitud. Se puede llevar esta noción a los conjuntos fractales con la única condición de que el conjunto fractal sea autosimilar; es decir, que esté compuesto de N copias de sí mismo a escala r . A D le llamaremos dimensión de semejanza y la denotaremos como $\dim_s(F)$ para un conjunto F . [2]

Definición 18. *Dimensión de conteo de cajas* [21]

Sea $F \subset X$ un conjunto no vacío y acotado. Para $\delta > 0$ definimos $N_\delta(F)$ como el número más pequeño de conjuntos de una δ -cubierta de F y definimos la dimensión de conteo de cajas como

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (3.11)$$

Aunque no necesariamente se ven como cajas como en este caso donde las "cajas" son los elementos de la δ -cubierta. En general se llama conteo de cajas porque empaquetas en conjuntos pequeños tu conjunto grandote, asimilando la acción de guardar cajas y contarlas para ver cuántas ocupó el conjunto que queríamos empaquetar.

La dimensión de semejanza es igual a la dimensión de conteo de cajas cuando se cumple la condición de son conjuntos autosimilares.

En específico, para los conjuntos fractales que ocuparemos en esta tesis, todos son conjuntos autosimilares con mismo factor de contracción y, de hecho como veremos más adelante, cuando esto sucede nuestra dimensión de Hausdorff del capítulo 1 coincide con la dimensión de semejanza que acabamos de definir.

Primero veremos unos resultados y definiciones que nos servirán para demostrar lo mencionado en el anterior párrafo.

Lema 3.0.1. Lema [21]

Sea v una medida exterior en un conjunto acotado $F \subset X$. Sea $s > 0$ y supongamos que existen $q > 0$ y $r > 0$ tal que cumplen que $v(U) \leq q|U|^s$ para todos los conjuntos $U \subset X$ con $|U| \leq r$. Entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{v(F)}{q} \leq H^s(F) \quad (3.12)$$

Demostración

Sea $\delta < r$ positivo y U_i cualquier δ -cubierta de F . Entonces

$$v(F) \leq v(\cup_{i=1}^{\infty} U_i) \quad (3.13)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) \quad (3.14)$$

$$\leq q \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \quad (3.15)$$

Donde la ecuación (3.14) se obtiene de la hipótesis.

Tomando el ínfimo y haciendo $\delta \rightarrow 0$ tenemos $v(F) \leq qH^s(F)$.

□

Proposición 3.0.1. [21]

Si $E \subset X$ es un conjunto cerrado y no vacío entonces

$$\dim_H(E) \leq \dim_B(E) \quad (3.16)$$

Demostración

Sea $s \geq 0$ tal que $\mathcal{H}^s(E) > 1$. Tenemos que s siempre existe porque para s muy pequeña tenemos que $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Por definición de $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ podemos encontrar δ suficientemente pequeña tal que

$$1 < \mathcal{H}_\delta^s(E) \leq N_\delta(E)\delta^s \quad (3.17)$$

Ahora, tomando el logaritmo en la desigualdad tenemos

$$0 < \log(N_\delta(E)) + s \log(\delta) \quad (3.18)$$

$$\implies -s \log(\delta) < \log(N_\delta(E)) \quad (3.19)$$

$$\implies s < \frac{\log(N_\delta(E))}{-\log(\delta)} \quad (3.20)$$

$$\implies s \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(E))}{-\log(\delta)} = \dim_B(E) \quad (3.21)$$

Donde la ecuación (3.20) se obtiene debido a que $\log(\delta) < 0$ por lo que $-\log(\delta) > 0$ y la ecuación (3.21) se obtiene de tomar el límite de $\delta \rightarrow 0$.

Podemos ver la dimensión de Hausdorff como $\dim_H(E) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) > 1\}$ [21], entonces tomando el supremo sobre las posibles s tenemos que $\dim_H(E) \leq \dim_B(E)$.

□

Vamos a introducir un par de definiciones que nos ayudaran a demostrar la equivalencia entre ambas dimensiones.

Definición 19. *Condición de conjunto abierto*[21]

Sea $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ un SFI. Decimos que cumple la condición de conjunto abierto si existe un conjunto no vacío, acotado y abierto $V \subseteq X$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^N w_i(V) \subset V \quad (3.22)$$

donde los conjuntos $w_i(V)$ son disjuntos.

Definición 20. [21]

Sea $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ un SFI y E su atractor tal que $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^N w_{i_k}(B)$, donde B es un conjunto compacto lo suficientemente grande. Definimos la función

$$\phi : \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq n\} \rightarrow E \quad (3.23)$$

que manda $(i_1, i_2, \dots)$ a

$$\{x_{i_1, i_2, \dots}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} w_{i_1} \circ \dots \circ w_{i_k}(B) \quad (3.24)$$

donde ϕ la podemos interpretar como la función que asocia la dirección con el punto.

Barnsley nombra a $(i_1, i_2, \dots)$ como "dirección".

Definición 21. [21]

Sea X un conjunto finito y sea $p : X \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto p_x$ una función tal que $\sum_{x \in X} p_x = 1$. Para $k \in \mathbb{N}$ y $C \subset X^k$ definimos

$$I_C = \{(x_1, x_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid (x_1, \dots, x_k) \in C\} \quad (3.25)$$

y para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$u(I_C) = \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in C} p_{x_1} \dots p_{x_k} \quad (3.26)$$

Definición 22. [21]

Sea X un conjunto finito y sea $p : X \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto p_x$ una función tal que $\sum_{x \in X} p_x = 1$. Para cualquier conjunto $A \subset X^{\mathbb{N}}$ definimos

$$\hat{u}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} u(B_i) \mid B_i \in \mathcal{A} \ \forall i, \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\} \quad (3.27)$$

Donde $\mathcal{A} = \{I_C : k \in \mathbb{N}_0, C \subset X^k\}$ es una sigma álgebra.

Definición 23. [21]

Sea $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq n\}$, r_i los radios de similitud asociados a cada contracción y r el radio de similitud. Vamos a cortar cada $(i_1, i_2, \dots) \in I$ después del primer término para el cual se cumple que

$$\left(\min_{1 \leq i \leq n} r_i \right) r \leq r_{i_1} \dots r_{i_k} \leq r \quad (3.28)$$

donde el término $r_{i_1} \dots r_{i_k}$ siempre existe debido a que para el primer término r_1 , éste no puede ser menor que $(\min_i r_i)r$ y el producto de los términos eventualmente serán menor que r .

Ahora verifiquemos que el producto siempre estará entre estos dos límites.

Supongamos que para una secuencia $(i_1, i_2, \dots)$ existe l tal que $r_{i_1} \dots r_{i_l} > r$ y $r_{i_1} \dots r_{i_{l+1}} < (\min_i r_i)r$. Como $r_{i_{l+1}} \geq \min_i r_i$, entonces $r_{i_1} \dots r_{i_l} < r$, lo cual es una contradicción. Por lo que existe un único k -ésimo término tal que pone el producto entre ambos límites.

3. CURVAS DE DIMENSIÓN FRACCIONARIA

Definimos a Q como el conjunto de todas las secuencias finitas obtenidas de cortar cada secuencia finita como lo hicimos anteriormente.

Definición 24. *Medida exterior de v en E* [21]

Sea $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ un SFI con factores de contracción $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ y atractor E . Supongamos que se cumple la condición de conjunto abierto y s es el único valor tal que

$$\sum_{i=1}^N r_i^s = 1 \quad (3.29)$$

Definimos la medida exterior de v en E con $v(E) = 1$ como

$$v(A) = \hat{u}(\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1}, x_{i_2}, \dots \in A\}) \quad (3.30)$$

para $A \subset E$, $X = \{1, \dots, N\}$ y $p : i \rightarrow r_i^s$. Donde $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$ denota a $\phi(i_1, i_2, \dots)$ de la definición 20.

Teniendo las anteriores definiciones y resultados, podemos demostrar la equivalencia de ambas dimensiones fractales para conjuntos autosimilares.

Proposición 3.0.2. [21]

1.-Sea $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ un SFI con factores de contracción $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ respectivamente y atractor E . Supongamos que se cumple la condición de conjunto abierto, entonces s es el único valor tal que

$$\sum_{i=1}^N r_i^s = 1 \quad (3.31)$$

y $\dim_H(E) = \dim_B(E) = s$.

2.-Sea $E = \{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ un SFI con factor de contracción r , y dimensión de semejanza $D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$ entonces la dimensión de Hausdorff de E es igual a la dimensión de semejanza.

Demostración

Primero demostraremos la unicidad de s .

Como $s \rightarrow \sum_i r_i^s$ es la suma de funciones monótonas entonces es monótona. Ahora para valores positivos de s la suma se hace pequeña porque $0 < r_i < 1$ y para valores negativos de s la

suma va a ser mayor que 1. Finalmente, por el teorema del valor medio tenemos que existe s y como era una función monótona, entonces es único.

Para la dimensión de Hausdorff, daremos un límite superior y uno inferior (distinto de cero) que acote a $H^s(E)$.

Para el límite superior podemos cubrir E con las imágenes de sí mismo bajo la aplicación repetida de varias w_i .

Sea $I_k = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_j < N\}$ y sea $E_{i_1, \dots, i_k} = w_{i_1} \circ \dots \circ w_{i_k}(E)$ para $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$. Entonces se tiene que $E = \bigcup_{I_k} E_{i_1, \dots, i_k}$; la demostración de este resultado es por inducción y es la siguiente:

El caso base $k = 1$ lo tenemos por definición que sería $E = \bigcup_{i=1}^N w_i(E) = \bigcup_{I_1} w_{i_1}(E)$. Ahora si se cumple el caso para k , es decir, $E = \bigcup_{I_k} E_{i_1, \dots, i_k}$, veremos que se vale para $k + 1$

$$E = \bigcup_{i=1}^N w_i(E) \quad (3.32)$$

$$= \bigcup_{I_1} w_{i_1}(E) \quad (3.33)$$

$$= \bigcup_{I_1} w_{i_1} \left(\bigcup_{I_k} E_{i_1, \dots, i_k} \right) \quad (3.34)$$

$$= \bigcup_{I_{k+1}} E_{i_1, \dots, i_{k+1}} \quad (3.35)$$

Por lo que se cumple el resultado mencionado.

Ahora para $\delta > 0$ podemos tomar k suficientemente grande tal que

$$|E_{i_1, \dots, i_k}| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq N} r_i \right)^k |E| \leq \delta \quad (3.36)$$

Para cualquier $\delta > 0$ tenemos la δ -cubierta $\{E_{i_1, \dots, i_k}\}_{I_k}$ de E , por lo que

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \forall i \ |U_i| < \delta \right\} \quad (3.37)$$

$$\leq \sum_{I_k} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s |E|^s \quad (3.38)$$

$$= \left(\sum_{i_1=1}^m r_{i_1}^s \right) \dots \left(\sum_{i_k=1}^m r_{i_k}^s \right) |E|^s \quad (3.39)$$

$$= |E|^s \quad (3.40)$$

3. CURVAS DE DIMENSIÓN FRACCIONARIA

Tomando $\delta \rightarrow 0$ tenemos $\mathcal{H}^s(E) \leq |E|^s < \infty$.

Para el límite inferior de $\mathcal{H}_\delta^s$ nos vamos a apoyar de la desigualdad (3.12) del lema 3.0.1 aplicada a la definición 24. Por lo que existe $q > 0$ tal que

$$0 < \frac{v(E)}{q} \leq \mathcal{H}^s(E) \quad (3.41)$$

Entonces tenemos que $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$, lo cual nos da el límite inferior.

Al tener el límite inferior y superior tenemos que $\dim_H(E) = s$.

Ahora para verificar la dimensión de conteo de cajas vamos a cubrir E con una cubierta.

Tomemos r tal que $0 < r < 1$. Definamos Q como en 23 y $\sum_i r_i^s = 1$, entonces $\sum_Q (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s = 1$.

Ahora, tomando este resultado y que $(\min_{1 \leq i \leq nr_i})r \leq r_{i_1} \dots r_{i_k}$, tenemos que Q contiene a lo más $(\min_i r_i)^{-s} r^{-s}$ secuencias.

Como tenemos que para toda $\{i_1, \dots, i_k\} \in Q$ se cumple que $r_{i_1} \dots r_{i_k} \leq r$, entonces $|V_{i_1, \dots, i_k}| = r_{i_1} \dots r_{i_k} |V| \leq r |V|$, donde $V_{i_1, \dots, i_k} = w_{i_1} \circ \dots \circ w_{i_k}(V)$ y V es el que cumple la definición de condición de conjunto abierto.

Por lo que

$$\dim_B(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log(\delta)} \quad (3.42)$$

$$\leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log((\min_i r_i)^{-s} r^{-s})}{-\log(r|V|)} \quad (3.43)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} s \frac{(\min_i r_i) + \log(r)}{\log|V| + \log(r)} \quad (3.44)$$

$$= s \quad (3.45)$$

Como por el resultado de la proposición 3.0.1 tenemos que $s = \dim_H(E) \leq \dim_B(E)$, entonces $\dim_B(E) = s$.

En particular cuando $r_1 = \dots = r_n = r$ se tiene que $\dim_H(E) = \dim_B(E) = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$.

□

Ocupamos la dimensión de conteo de cajas y de semejanza porque en la práctica es más sencillo calcular esta dimensión fractal y, además, todos los fractales que veremos son autosimilares. Además, se vincula con el capítulo 2 debido a que tiene una estrecha relación con el factor de

contracción s y las transformaciones w_n de nuestros SFI. Esto debido a que nuestro radio de similitud r es el factor de contracción s de las transformaciones de nuestro SFI. Por otro lado, N corresponde con la cantidad de transformaciones w_n de nuestro SFI. De esta manera unimos la teoría que permite programar nuestros fractales y al mismo tiempo podemos calcular su dimensión de una forma más práctica.

Para ejemplificar esta noción calcularemos la dimensión de algunos conjuntos fractales y programaremos una representación visual a través de Julia. Las transformaciones que usaremos estarán en el plano complejo [22] y los códigos también, aunque también se pueden modificar para trabajar en $\mathbb{R}^2$.

El código general usado lo explicaremos en la sección "Material extra". En este capítulo solo explicaremos la descomposición de los fractales en las transformaciones que lo componen.

3.1. Curva de Koch

Código de programación de la curva de Koch

Partiendo de un segmento z , tenemos que usar 4 transformaciones para obtener la primera iteración de la curva de Koch.

1.-La primera que reduzca un tercio nuestra longitud inicial.

$$Koch_{w1}(z) = \frac{z}{3} \quad (3.46)$$

2.-La segunda que reduzca a un tercio nuestra longitud inicial, la rote 60 grados y la traslade $1/3$.

$$Koch_{w2}(z) = \frac{e^{60^\circ i} z}{3} + \frac{1}{3} \quad (3.47)$$

3.-La tercera que reduzca un tercio nuestra longitud inicial, la rote -60 grados y la traslade en lo horizontal $1/2$ y después la suba $\sqrt{1/2}$, esto debido a que en el punto $(1/2, \sqrt{1/2})$ fue donde quedo nuestra anterior transformación.

$$Koch_{w3}(z) = \frac{e^{-60^\circ i} z}{3} + \frac{\sqrt{1/2}}{3} \quad (3.48)$$

4.-La cuarta que reduzca a un tercio nuestra longitud inicial y la traslade dos tercios.

$$Koch_{w4}(z) = \frac{z}{3} + \frac{2}{3} \quad (3.49)$$

Por lo que el código sería el siguiente.

```
In [1]: using Colors, Images, FileIO

include("src/RectangularRegionV1.jl")
include("src/Attractors.jl")

r1 = 1/3
θ1 = π*60/180
θ2 = π*60/180

Koch_w1(z) = r1*z
Koch_w2(z) = r1*exp(θ2*im)*z + 1/3
Koch_w3(z) = r1*exp(θ1*im)*z + 1/2 + sqrt(1/12)*im
Koch_w4(z) = r1*z + 2/3

Koch_ifs = [Koch_w1, Koch_w2, Koch_w3, Koch_w4]

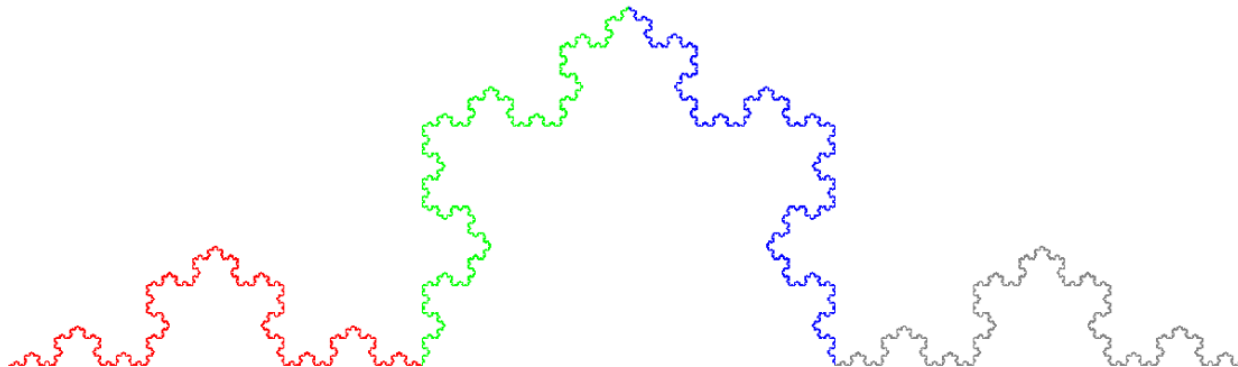
Out[1]: 4-element Vector{Function}:
Koch_w1 (generic function with 1 method)
Koch_w2 (generic function with 1 method)
Koch_w3 (generic function with 1 method)
Koch_w4 (generic function with 1 method)
```

Imagen de la curva de Koch

Al iterar estas transformaciones nos resulta la siguiente imagen, donde $Koch_{w1}(z)$ es de color rojo, $Koch_{w2}(z)$ es de color verde, $Koch_{w3}(z)$ es de color azul y $Koch_{w4}(z)$ es de color gris.

```
In [2]: draw(drawchaosgameattractorcolorsC!(Koch_ifs,
RectangularRegion(0,1,0,0.5,width=1200,height=600),
[RGB(1,0,0), RGB(0,1,0), RGB(0,0,1), RGB(0.5,0.5,0.5)], numiterations=500000))

Out[2]:
```



Cálculo de dimensión de la curva de Koch

Como para la primera iteración de la curva de Koch tenemos cuatro segmentos y su longitud es $1/3$ del segmento original, entonces $r = \frac{1}{3}$ y $N = 4$.

Entonces tenemos que su dimensión sería:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(\frac{1}{3})} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.2619 \quad (3.50)$$

Por lo que la curva de Koch ocupa más espacio que una curva normal, pero no tanta como para llenar un área.

3.2. Triángulo de Sierpinsky

Código de programación del triángulo de Sierpinsky

Partiendo de un triángulo isósceles z , vamos a necesitar 3 transformaciones para tener la primera iteración.

1.-La primera que reduzca a $1/2$ el triángulo original.

$$\Delta_{Sierpinski_{w1}}(z) = \frac{z}{2} \quad (3.51)$$

2.-La segunda que reduzca a $1/2$ el triángulo original y que lo traslade $1/2$.

$$\Delta_{Sierpinski_{w2}}(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \quad (3.52)$$

3.-La tercera que reduzca a $1/2$ el triángulo original y que lo traslade al punto $(1/4, 1/2)$, que al estar trabajando en el plano complejo, sería

$$\Delta_{Sierpinski_{w1}}(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{4} + \frac{i}{2} \quad (3.53)$$

Obteniendo el siguiente código.

3. CURVAS DE DIMENSIÓN FRACCIONARIA

```
In [1]: using Images

include("src/RectangularRegionV1.jl")
include("src/Attractors.jl")

r1 = 0.5

Δsierpinski_w1(z) = r1*z
Δsierpinski_w2(z) = r1*z + 0.5
Δsierpinski_w3(z) = r1*z + 0.25+0.5im

Δsierpinski_ifs = [Δsierpinski_w1, Δsierpinski_w2, Δsierpinski_w3]

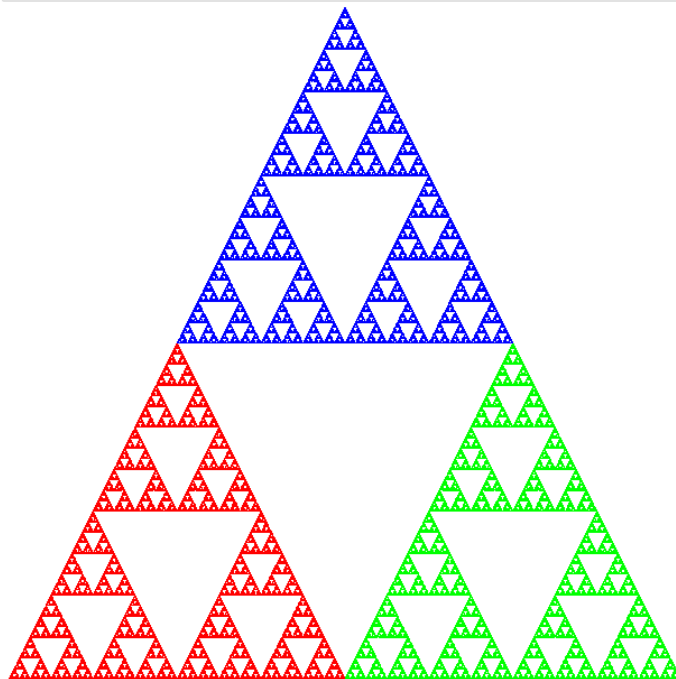
Out[1]: 3-element Vector{Function}:
 Δsierpinski_w1 (generic function with 1 method)
 Δsierpinski_w2 (generic function with 1 method)
 Δsierpinski_w3 (generic function with 1 method)
```

Imagen del triángulo del Sierpinski

Al iterar nuestras transformaciones obtenemos la siguiente imagen donde $Sierpinski_{w1}(z)$ es de color rojo, $Sierpinski_{w2}(z)$ de color verde y $\Delta Sierpinski_{w3}(z)$ de color azul.

```
In [2]: draw(drawchaosgameattractorcolorsC!(Δsierpinski_ifs,
      RectangularRegion(0,1,0,1,width=600,height=600),
      [RGB(1,0,0), RGB(0,1,0), RGB(0,0,1)], numiterations=500000))
```

Out[2]:



Cálculo de la dimensión del triángulo de Sierpinsky

Como tenemos que para la primera iteración del triángulo de Sierpinski es un triángulo que se achica en 3 triángulos pequeños que miden una cuarta parte del tamaño del original, entonces $r = 1/2$ y $N = 3$, por lo que

$$D = \frac{\log(3)}{\log(\frac{1}{2})} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.5850 \quad (3.54)$$

Por lo que el triángulo de Sierpinsky ocupa más espacio que una curva normal, pero se acerca mucho a parecerse a una.

3.3. Curva Dragón

Código de programación de la curva dragón

Partiendo de un segmento z , vamos a necesitar 2 transformaciones para formar la primera iteración de la curva dragón.

1.-La primera que reduzca $\sqrt{\frac{1}{2}}$ nuestro segmento, luego la rote $\frac{225^\circ}{180^\circ}$ y finalmente la traslade al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$Curvadragon_{w1}(z) = \frac{e^{\pi \frac{225^\circ}{180^\circ} i}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \quad (3.55)$$

2.-La segunda que reduzca $\sqrt{\frac{1}{2}}$ nuestro segmento, luego la rote $\frac{315^\circ}{180^\circ}$ y finalmente la traslade al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$Curvadragon_{w2}(z) = \frac{e^{\pi \frac{315^\circ}{180^\circ} i}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \quad (3.56)$$

```
In [1]: using Images

include("src/RectangularRegionV1.jl")
include("src/Attractors.jl")

r1 = sqrt(1/2)
θ1 = π*225/180
θ2 = π*315/180

goldendragon_approx_w1(z) = r1*exp(θ1*im)*z+1/2+1/2*im
goldendragon_approx_w2(z) = r1*exp(θ2*im)*z+1/2+1/2*im

goldendragon_approx_ifs = [goldendragon_approx_w1, goldendragon_approx_w2]

Out[1]: 2-element Vector{Function}:
 goldendragon_approx_w1 (generic function with 1 method)
 goldendragon_approx_w2 (generic function with 1 method)
```

3. CURVAS DE DIMENSIÓN FRACCIONARIA

Nota:

El factor de contracción es $\sqrt{\frac{1}{2}}$ porque es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle((0,0), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Esto debido a que la longitud de la base y la altura es $\frac{1}{2}$, por lo que la hipotenusa mide $\sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Se usa $\frac{225^\circ}{180^\circ}$ porque el triángulo formado es triángulo rectángulo, por lo que tiene dos ángulos de 45° y uno de 90° . De este modo, lo que debemos rotar el segmento centrado en el $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$. Análogo para $\frac{315^\circ}{180^\circ}$.

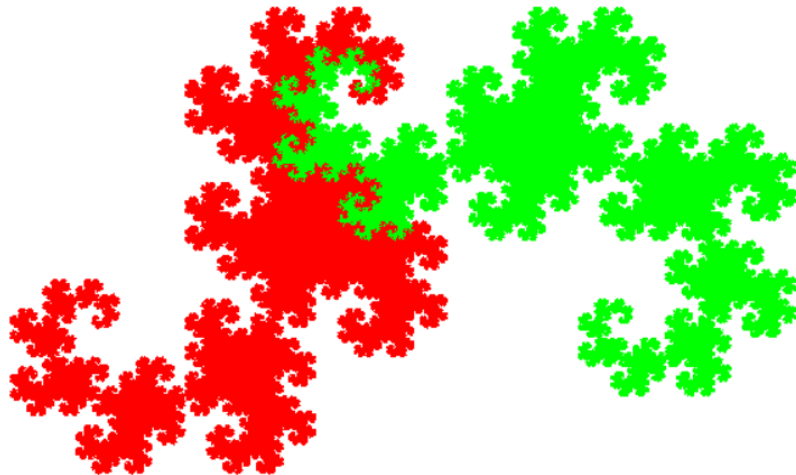
Notemos que las iteraciones de $Curvadragon_{w1}(z)$ van a crecer hacia abajo y las de $Curvadragon_{w2}(z)$ hacia arriba.

Imagen de la curva dragón

Al iterar nuestras transformaciones nos resulta la siguiente imagen donde $Curvadragon_{w1}(z)$ es de color rojo y $Curvadragon_{w2}(z)$ es de color verde.

```
In [2]: draw(drawchaosgameattractorcolorsCl(goldendragon_approx_ifs,  
      RectangularRegion(-0.5,1.5,-0.5,1;width=750,height=500),  
      [RGB(1,0,0), RGB(0,1,0)], numiterations=900000))
```

Out[2]:



Cálculo de la dimensión de la curva dragón

La curva dragón se ve difícil, pero consiste de dos segmentos para la primera iteración, ambas con factor de contracción $\sqrt{\frac{1}{2}}$, por tanto tenemos $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$ y $N = 2$. Entonces tenemos

$$D = \frac{\log(2)}{\log(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}})} = \frac{\log(2)}{\log\sqrt{2}} = \frac{\log(2)}{\frac{\log 2}{2}} = 2 \quad (3.57)$$

Por lo que la curva dragón ocupa tanto espacio como un área.

A esta curva dragón se le conoce como curva dragón de Highway.

3.4. Embutido de Minkowski

Código del embutido de Minkowski

Para la primer iteración vamos a necesitar 8 transformaciones, las cuales consisten básicamente de ir encajando cada transformación en su respectivo lugar.

1.- La primera que contraiga $\frac{1}{4}$.

$$Minkowskiembutido_{w1}(z) = \frac{z}{4} \quad (3.58)$$

2.-La segunda que contraiga $\frac{1}{4}$, rote -90° y recorra al punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

$$Minkowskiembutido_{w2}(z) = \frac{ze^{-\pi \frac{90^\circ}{180^\circ} i}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{i}{4} \quad (3.59)$$

3.-La tercera que contraiga $\frac{1}{4}$, rote 180° y recorra al punto $(\frac{2}{4}, \frac{1}{4})$.

$$Minkowskiembutido_{w3}(z) = \frac{ze^{2\pi \frac{90^\circ}{180^\circ} i}}{4} + \frac{2}{4} + \frac{i}{4} \quad (3.60)$$

4.-La cuarta que contraiga $\frac{1}{4}$, rote 180° y recorra al punto $(\frac{2}{4}, 0)$.

$$Minkowskiembutido_{w4}(z) = \frac{ze^{2\pi \frac{90^\circ}{180^\circ} i}}{4} + \frac{2}{4} \quad (3.61)$$

5.-La quinta que contraiga $\frac{1}{4}$, rote 270° y recorra al punto $(\frac{2}{4}, 0)$.

$$Minkowskiembutido_{w5}(z) = \frac{ze^{\pi \frac{270^\circ}{180^\circ} i}}{4} + \frac{2}{4} \quad (3.62)$$

6.-La sexta que contraiga $\frac{1}{4}$, recorra al punto $(\frac{2}{4}, \frac{1}{4})$.

$$Minkowskiembutido_{w6}(z) = \frac{z}{4} + \frac{2}{4} + \frac{i}{4} \quad (3.63)$$

7.-La séptima que contraiga $\frac{1}{4}$, rote 90° y recorra al punto $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

$$Minkowskiembutido_{w7}(z) = \frac{ze^{\pi \frac{90^\circ}{180^\circ} i}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{i}{4} \quad (3.64)$$

8.-La octava que contraiga $\frac{1}{4}$, rote 180° y recorra al punto $(1, 0)$.

$$Minkowskiembutido_{w8}(z) = \frac{ze^{2\pi \frac{90^\circ}{180^\circ} i}}{4} + \frac{4}{4} \quad (3.65)$$

```
In [1]: using Images

include("src/RectangularRegionV1.jl")
include("src/Attractors.jl")

r1 = 1/4
θ1 = π*90/180
θ2 = π*270/180

Minkowski_embutido_w1(z) = r1*z
Minkowski_embutido_w2(z) = r1*exp(-θ1*im)*z+1/4+1/4*im
Minkowski_embutido_w3(z) = r1*exp(2*θ1*im)*z+2/4+1/4*im
Minkowski_embutido_w4(z) = r1*exp(θ1*im)*z+2/4
Minkowski_embutido_w5(z) = r1*exp(θ2*im)*z+2/4
Minkowski_embutido_w6(z) = r1*z+2/4-1/4*im
Minkowski_embutido_w7(z) = r1*exp(θ1*im)*z+3/4-1/4*im
Minkowski_embutido_w8(z) = r1*exp(2*θ1*im)*z+4/4

Minkowski_embutido_ifs = [Minkowski_embutido_w1, Minkowski_embutido_w2, Minkowski_embutido_w3, Minkowski_embutido_w4,
Minkowski_embutido_w5, Minkowski_embutido_w6, Minkowski_embutido_w7, Minkowski_embutido_w8]

Out[1]: 8-element Vector{Function}:
Minkowski_embutido_w1 (generic function with 1 method)
Minkowski_embutido_w2 (generic function with 1 method)
Minkowski_embutido_w3 (generic function with 1 method)
Minkowski_embutido_w4 (generic function with 1 method)
Minkowski_embutido_w5 (generic function with 1 method)
Minkowski_embutido_w6 (generic function with 1 method)
Minkowski_embutido_w7 (generic function with 1 method)
Minkowski_embutido_w8 (generic function with 1 method)
```

Nota:

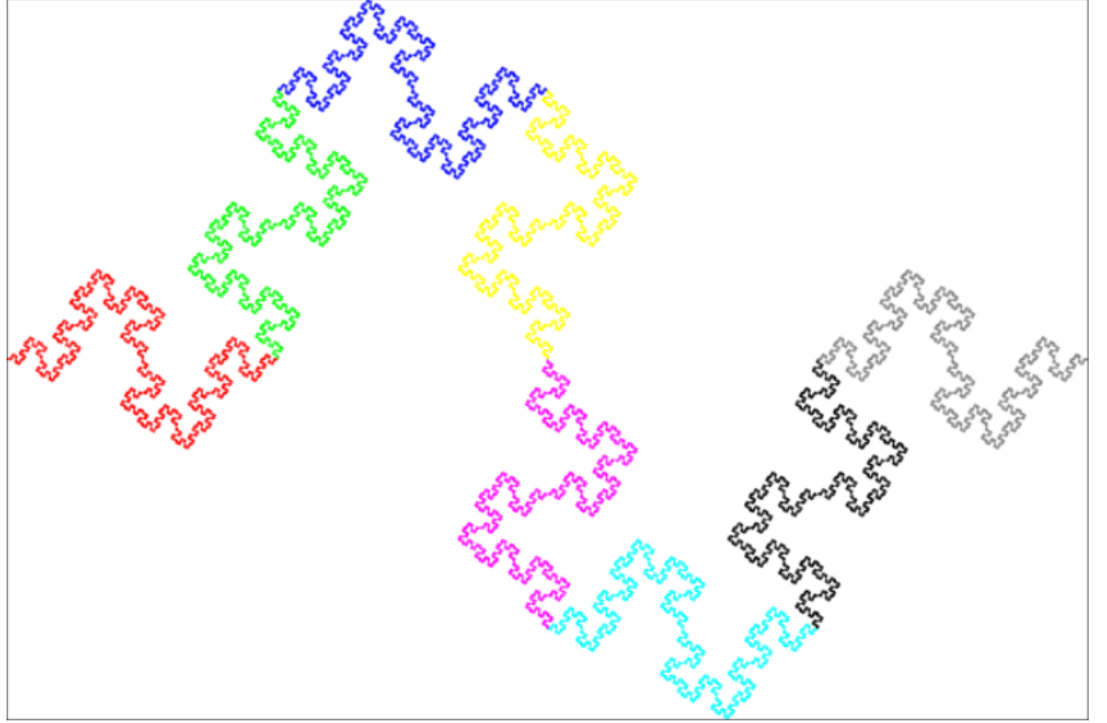
Hay transformaciones que pueden cambiar, por ejemplo, $Minkowskiembutido_{w3}(z)$ puede quedar también como $Minkowskiembutido_{w3}(z) = \frac{z}{4} + \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$ y resulta lo mismo.

Imagen del embutido de Minkowski

Al iterar nuestras transformaciones nos resulta la siguiente imagen donde $Minkowskiembutido_{w1}(z)$ es de color rojo, $Minkowskiembutido_{w2}(z)$ es de color verde, $Minkowskiembutido_{w3}(z)$ es de color azul marino, $Minkowskiembutido_{w4}(z)$ es de color amarillo, $Minkowskiembutido_{w5}(z)$ es de color rosa, $Minkowskiembutido_{w6}(z)$ es de color azul cielo, $Minkowskiembutido_{w7}(z)$ es de color negro y $Minkowskiembutido_{w8}(z)$ es de color gris.

```
In [2]: draw(drawchaosgameattractorcolorsC!(Minkowski_embutido_ifs,  
      RectangularRegion(0,1,-1/3,1/3;width=1500,height=1000),  
      [RGB(1,0,0), RGB(0,1,0), RGB(0,0,1), RGB(1,1,0),  
      RGB(1,0,1), RGB(0,1,1), RGB(0,0,0),  
      RGB(0.5,0.5,0.5)], numiterations=500000))
```

Out[2]:



Cálculo del embutido de Minkowski

El embutido de minkowski es un poco más difícil porque se debe de separar en muchas partes, más específicamente, está formado por 8 partes, cada una con factor de contracción $\frac{1}{4}$, entonces $r = \frac{1}{4}$ y $N = 8$.

Entonces tenemos que su dimensión sería:

$$D = \frac{\log(8)}{\log(\frac{1}{4})} = \frac{\log(8)}{\log(4)} = \frac{\log(2^3)}{\log(2^2)} = \frac{3\log(2)}{2\log(2)} = \frac{3}{2} \quad (3.66)$$

Por lo que el embutido de Minkowski ocupa más espacio que una curva normal, pero menos que un área. Ocupa más espacio que la curva de Koch debido a que su dimensión fractal

3. CURVAS DE DIMENSIÓN FRACCIONARIA

aproximada es 1.26 y $1.26 < \frac{3}{2}$. Así mismo, ocupa menos espacio que el triángulo de Sierpinsky debido a que su dimensión fractal aproximada es 1.58 y $\frac{3}{2} < 1.58$.

La proporción áurea y los fractales

Introduciremos en este capítulo el árbol áureo, para ello debemos saber cuál es la proporción áurea, también llamada razón áurea. Nos guiaremos en el libro "La proporción áurea", de Mario Livio [23], y después lo intentaremos programar.

4.1. Proporción áurea

La proporción áurea es una constante muy conocida alrededor del mundo, debido a que se le considera como perfecta o armoniosa. Esta constante ha sido usada en muchas obras de artes, esculturas, música y construcciones, e incluso se encuentra frecuentemente en la naturaleza[23].

Esta constante surge de un concepto muy simple que en su momento Euclides llamó proporción media y extrema.

Definición 25. *Proporción media y extrema*[24]

Sea AB una línea y sea C un punto que divide a AB , se dice que la línea AB está dividida en proporción media y extrema si

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} \quad (4.1)$$

Donde AC es el segmento mayor y CB es el segmento menor.

Si hacemos que el segmento CB mida 1 y el segmento AC mida x , tenemos la siguiente ecuación:[23]

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} \quad (4.2)$$

Multiplicando por x tenemos

$$x^2 = x + 1 \quad (4.3)$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (4.4)$$

Usando la fórmula general de segundo grado tenemos que las soluciones son las siguientes:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (4.5)$$

La solución positiva nos da el valor de la proporción áurea que es $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\dots$

Este número tiene bastantes propiedades curiosas que han cautivado por años a los matemáticos. Por ejemplo, la solución negativa de la ecuación cuadrática es igual a $-\frac{1}{\varphi}$. El cuadrado de φ es igual a 2.618033988 y su inverso es igual a 0.618033988; es decir, tienen la misma cola decimal.

También tiene una estrecha relación con la serie de Fibonacci. La razón entre dos números consecutivos de Fibonacci se va pareciendo cada vez más a *phi* entre más grandes son los términos de la sucesión. Esto se debe a que el límite de dicha razón expresada en fracciones continuas es

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (4.6)$$

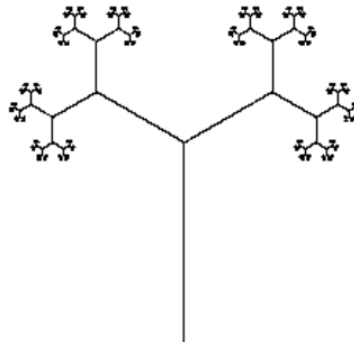
la cual es la representación en fracciones continuas de φ que al ir de uno en uno, su convergencia es demasiado lenta y le otorga a φ la característica especial de ser el más irracional de los irracionales al ser muy difícil de expresar como una fracción.

También tiene implicaciones en el crecimiento de poblaciones, en experimentos de óptica, crecimiento de árboles y formación de pétalos, conchas, galaxias, mercado bursátil, entre muchas otras. Podríamos seguir hablando de este asombroso número y sus propiedades, pero nunca acabaríamos. [23]

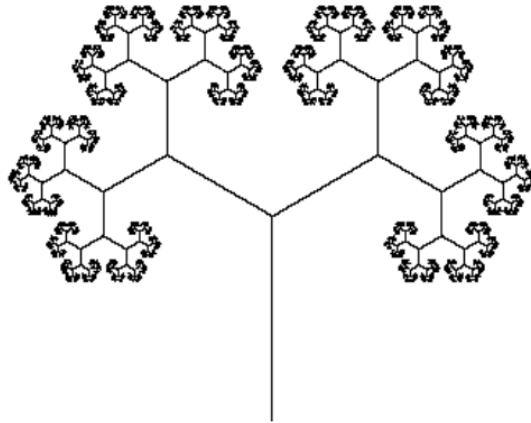
4.2. Árbol áureo

El árbol áureo es un fractal que se contruye de la siguiente manera:

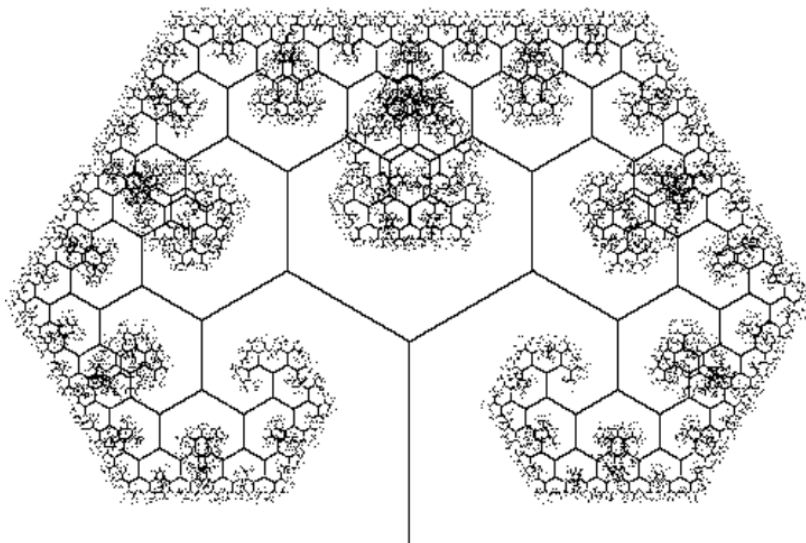
Empezamos con un segmento de longitud uno (el tallo de nuestro árbol), este se divide posteriormente en dos ramas de longitud $\frac{1}{2}$ con un ángulo de 120° entre ambas ramas y así sucesivamente, dándonos, efectivamente, un árbol.



Si tomamos un factor de reducción mayor, por ejemplo, $\frac{3}{5}$, las ramas se van acercando cada vez más.



Finalmente, si escogemos un número aún mayor, por ejemplo $\frac{7}{10}$, las ramas se traslapan.



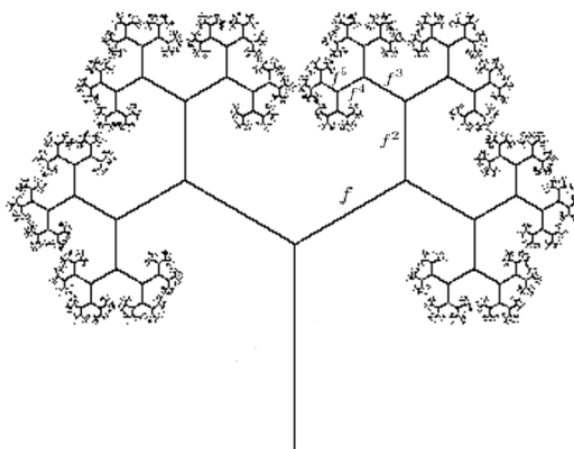
Hasta este punto no ha salido el número áureo, pero qué pasa si nos preguntamos lo siguiente: ¿cuál es el número a partir del cual las ramas se empiezan a traslapar? Sorprendentemente, se empiezan a traslapar cuando el factor de contracción es de $\frac{1}{\varphi}$. [23] Demostrémoslo.

Demostración

Trabajaremos de un solo lado de la ramificación. Sea f dicha ramificación, la segunda ramificación nos traza un camino hacia arriba y otro hacia abajo, sea f^2 el camino que va para arriba.

Notemos que a partir de la tercera ramificación se puede seguir un camino que lleve a la ramificación opuesta. Sean $f^3, f^4, \dots$ dichas ramificaciones.

La siguiente imagen esquematiza lo antes mencionado.



Notemos que basta ver que la componente horizontal que conforma la ramificación de f sea igual a la componente horizontal de $f^3 + f^4 + f^5 + \dots$

Para calcular la componente horizontal necesitamos más datos, pero notemos que el ángulo que está entre la componente horizontal respectiva y f es de 30° porque se forma un triángulo isósceles con ángulo 120° , por lo que los otros dos ángulos miden 30° cada uno.

Ahora ya podemos calcular la componente horizontal que llamaremos "ch":

$$\cos 30^\circ = \frac{ch}{f} \quad (4.7)$$

$$f \cos 30^\circ = ch \quad (4.8)$$

Haciéndolo de manera análoga para $f^3, f^4, f^5, \dots$ tenemos que

$$f \cos 30^\circ = f^3 \cos 30^\circ + f^4 \cos 30^\circ + f^5 \cos 30^\circ + \dots \quad (4.9)$$

Dividiendo entre $\cos 30^\circ$ tenemos

$$f = f^3 + f^4 + f^5 + \dots \quad (4.10)$$

La cual es una progresión geométrica [25, 26] con razón f y primer término f^3 , por lo que tenemos

$$\left(\sum_{n=3}^{\infty} f^n \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f^n \right) - 1 - f - f^2 \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{1-f} - 1 - f - f^2 \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{1-f} + \frac{(-1-f-f^2)(1-f)}{1-f} \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{1-f} + \frac{-1+f-f+f^2-f^2+f^3}{1-f} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{1-f} + \frac{-1+f^3}{1-f} \quad (4.15)$$

$$= \frac{f^3}{1-f} \quad (4.16)$$

Sustituyendo en (4.9) tenemos

$$f = \frac{f^3}{1-f} \quad (4.17)$$

$$1 = \frac{f^2}{1-f} \quad (4.18)$$

$$1-f = f^2 \quad (4.19)$$

$$f^2 + f - 1 = 0 \quad (4.20)$$

Usando la fórmula cuadrática y quedándonos con la raíz positiva obtenemos

$$f = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi} \quad (4.21)$$

□

Es por esto que este fractal es conocido como el árbol áureo, ya que sus ramas empiezan a traslaparse cuando la razón de contracción es mayor a $\frac{1}{\varphi}$ y, por el contrario, no se traslapan si su razón de contracción es menor o igual que $\frac{1}{\varphi}$. [27]

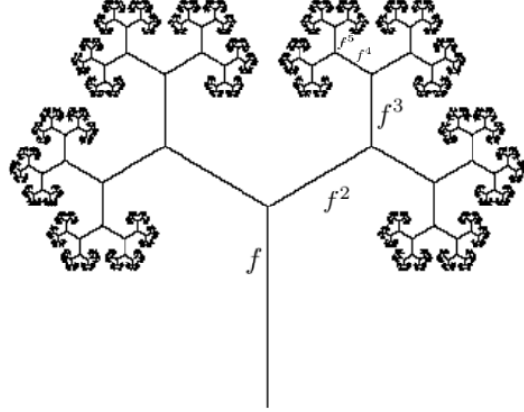
4.3. Programar el árbol áureo

En esta sección nos enfocaremos en la programación del árbol áureo con factor de contracción $\frac{1}{\varphi}$. Este árbol es el límite entre los árboles con ramas separadas y los árboles con ramas traslapadas.

Para programar el árbol áureo vamos a necesitar 3 transformaciones, pero antes necesitamos calcular la altura total de nuestro árbol áureo para saber cuánto va a medir nuestro tallo. Es decir, nuestro tallo por construcción parte de valer la unidad y luego se van construyendo las ramas, pero nuestro código funciona al revés, parte de la unidad y aplica transformaciones contractiva. Es por esto que debemos saber la proporción de nuestro tallo respecto a la altura total del árbol áureo con factor de contracción φ .

Para calcular la altura total del árbol áureo con factor de contracción $\frac{1}{\varphi}$ vamos a llamar f al tallo inicial, sin pérdida de generalidad elegiremos la rama de la derecha, la cual será f^2 . La rama que va hacia arriba será f^3 y las siguientes ramas que trazan un camino hacia arriba serán $f^4, f^5, f^6, \dots$

La siguiente imagen esquematiza el camino.



Por lo que podemos calcular la altura total a partir de las siguientes longitudes:

$$f + f^2 + f^3 + f^4 + \dots \quad (4.22)$$

Notemos que $f = 1$.

Por construcción $f^3 = \frac{1}{\varphi^2}$, $f^5 = \frac{1}{\varphi^4}$, $f^7 = \frac{1}{\varphi^6}$, ...

Por otro lado, la componente vertical de f^2 es $\frac{1}{\varphi} \cos(60^\circ) = \frac{1}{2\varphi}$, de f^4 es $\frac{1}{\varphi^3} \cos(60^\circ) = \frac{1}{2\varphi^3}$, de f^6 es $\frac{1}{\varphi^5} \cos(60^\circ) = \frac{1}{2\varphi^5}$, ...

Sustituyendo estos valores en (4.22) tenemos

$$1 + \frac{1}{2\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{2\varphi^3} + \frac{1}{\varphi^4} + \frac{1}{2\varphi^5} + \frac{1}{\varphi^6} + \dots \quad (4.23)$$

Podemos reacomodar nuestra suma de la siguiente manera

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i-1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i}} \quad (4.24)$$

Primero calcularemos la serie geométrica [26] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i-1}}$ la cual tiene coeficiente $a = \frac{1}{\varphi}$ y razón $r = \frac{1}{\varphi^2} < 1$ debido a que $\varphi > 1$.

Como la fórmula de la serie geométrica es $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = \frac{a}{1-r}$ [26], entonces tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i-1}} = \frac{\frac{1}{\varphi}}{1 - \frac{1}{\varphi^2}} \quad (4.25)$$

$$= \frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{\varphi^2-1}{\varphi^2}} \quad (4.26)$$

$$= \frac{\varphi}{\varphi^2 - 1} \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

Luego de la ecuación (4.20) y (4.21) se tiene que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, lo cual implica que $\varphi^2 - 1 = \varphi$.

Por lo que sustituyendo en (4.28) tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i-1}} = \frac{\varphi}{\varphi^2 - 1} \quad (4.29)$$

$$= \frac{\varphi}{\varphi} \quad (4.30)$$

$$= 1 \quad (4.31)$$

Ahora calcularemos la serie geométrica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i}}$ la cual tiene coeficiente $a = 1$ y razón $r = \frac{1}{\varphi^2} < 1$.

Como la fórmula de la serie geométrica es $\sum_{i=1}^{\infty} ar^i = \frac{ar}{1-r}$ [26], entonces tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i}} = \frac{\frac{1}{\varphi^2}}{1 - \frac{1}{\varphi^2}} \quad (4.32)$$

$$= \frac{\frac{1}{\varphi^2}}{\frac{\varphi^2-1}{\varphi^2}} \quad (4.33)$$

$$= \frac{1}{\varphi^2 - 1} \quad (4.34)$$

$$(4.35)$$

Teníamos que $\varphi^2 - 1 = \varphi$. Además, se tiene que $\varphi^2 - \varphi = 1$, lo cual implica que $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

Sustituyendo en (4.35) tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i}} = \frac{1}{\varphi^2 - 1} \quad (4.36)$$

$$= \frac{1}{\varphi} \quad (4.37)$$

$$= \varphi - 1 \quad (4.38)$$

Ahora que ya sabemos cuánto valen las series geométricas podemos sustituir (4.31) y (4.38) en (4.24). Dádonos lo siguiente:

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i-1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2i}} \quad (4.39)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(1) + \varphi - 1 \quad (4.40)$$

$$= \frac{1}{2} + \varphi \quad (4.41)$$

De modo que la altura del árbol áureo con razón de contracción $\frac{1}{\varphi}$ es $\frac{1}{2} + \varphi$.

Para saber el factor de contracción con el que debemos de reducir nuestra longitud unitaria basta con hacer una regla de tres. Si $\frac{1}{2} + \varphi$ es el 100 % de nuestra longitud, ¿1 qué porcentaje será?

Haciendo el despeje tenemos

$$x = \frac{100}{\frac{1}{2} + \varphi} \quad (4.42)$$

$$= \frac{100}{\frac{1+2\varphi}{2}} \quad (4.43)$$

$$= \frac{200}{1 + 2\varphi} \quad (4.44)$$

$$(4.45)$$

De este modo, nuestro factor de contracción para el tallo es $\frac{\frac{200}{1+2\varphi}}{100} = \frac{2}{1+2\varphi}$.

Nuestras transformaciones en números complejos serían las siguientes:

1.-La primera que reduzca $\frac{2}{1+2\varphi} \approx 0.47$ nuestro conjunto y mande nuestros puntos sobre la componente imaginaria (esta transformación es la del tallo).

$$Arbolaureo_{w1}(z) = 0.47 * imag(z) * i \quad (4.46)$$

4. LA PROPORCIÓN ÁUREA Y LOS FRACTALES

2.-La segunda que reduzca $\frac{1}{\varphi} \approx \frac{1}{1.61}$ nuestro conjunto, rote 60° y traslade al punto $(0, 1) = i$.

$$Arbolaureo_{w2}(z) = z \frac{e^{i \frac{\pi 60^\circ}{180^\circ}}}{\varphi} + i \quad (4.47)$$

3.-La tercera que reduzca $\frac{1}{\varphi} \approx \frac{1}{1.61}$ nuestro conjunto, rote -60° y traslade al punto $(0, 1) = i$.

$$Arbolaureo_{w2}(z) = z \frac{e^{-i \frac{\pi 60^\circ}{180^\circ}}}{\varphi} + i \quad (4.48)$$

Por lo que el código sería el siguiente:

```
In [1]: using Images
include("src/RectangularRegionV1.jl")
include("src/Attractors.jl")

r1 = 1/1.61
θ1 = π/3
θ2 = -π/3

Arbol_aureo_w1(z) = 0.47*imag(z)*im|
Arbol_aureo_w2(z) = r1*exp(im*θ1)*z + im
Arbol_aureo_w3(z) = r1*exp(im*θ2)*z + im

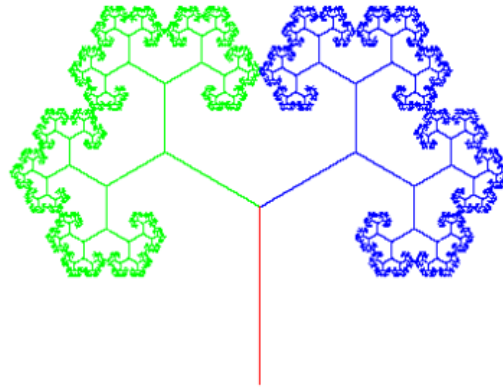
Arbol_aureo_ifs = [Arbol_aureo_w1, Arbol_aureo_w2, Arbol_aureo_w3]

Out[1]: 3-element Vector{Function}:
Arbol_aureo_w1 (generic function with 1 method)
Arbol_aureo_w2 (generic function with 1 method)
Arbol_aureo_w3 (generic function with 1 method)
```

y al iterar las transformaciones nos da la siguiente imagen, donde $Arbolaureo_{w1}$ es de color rojo, $Arbolaureo_{w2}$ es de color verde y $Arbolaureo_{w3}$ es de color azul.

```
In [2]: draw(drawchaosgameattractorcolorsC!(Arbol_aureo_ifs,
      RectangularRegion(-2,2,0,4; width=500,height=500),
      [RGB(1,0,0), RGB(0,1,0), RGB(0,0,1)], numiterations=1000000))
```

Out[2]:



Podemos calcular la dimensión fractal del árbol áureo sin ramas (solo con las copas de los árboles). Tenemos 2 transformaciones con factor de contracción $\frac{1}{\varphi}$ por lo que su dimensión fractal sería

$$D = \frac{\log(2)}{\log(\frac{1}{\varphi})} = \frac{\log(2)}{\log(\varphi)} \approx 0.6257 \quad (4.49)$$

Por lo que la copa del árbol áureo con factor de contracción $\frac{1}{\varphi}$ ocupa más espacio que un conjunto finito de puntos, pero no tanto como una curva normal.

Por último, veremos un programa enfocado en la divulgación de conjuntos fractales donde podemos obtener una representación visual del árbol áureo y otros fractales de manera más sencilla y a manera de juego.

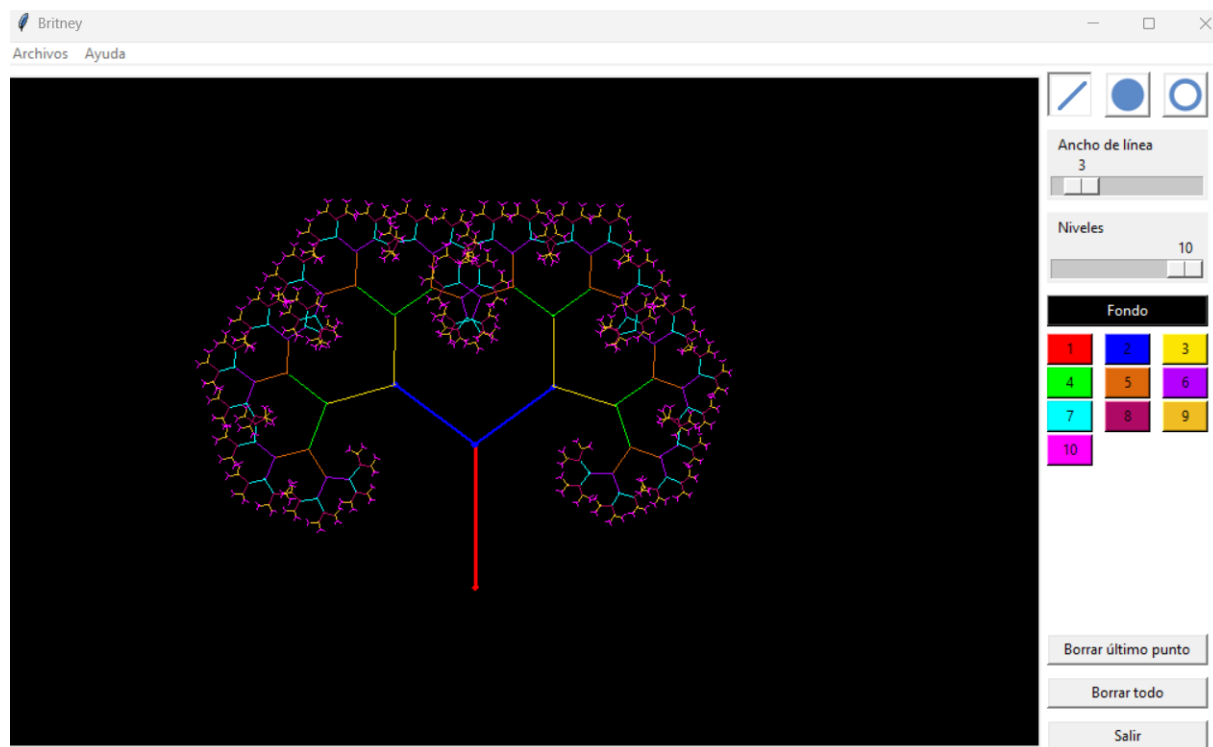
El programa Britney[28] es un software de uso libre hecho en Python desarrollado por la universidad de Buenos Aires a través del proyecto Moebius. Este programa va enfocado a la divulgación, interacción y aprendizaje de los fractales de manera lúdica. Así que no se requiere tener conocimientos en programación o conocer teoría matemática para poder construir fractales. Solo con el uso del mouse podemos dibujar segmentos y con eso construir fractales. El programa automáticamente itera un par de veces los segmentos que vamos construyendo.

Invitamos a los lectores a descargar este programa debido a que es muy fácil de usar y

4. LA PROPORCIÓN ÁUREA Y LOS FRACTALES

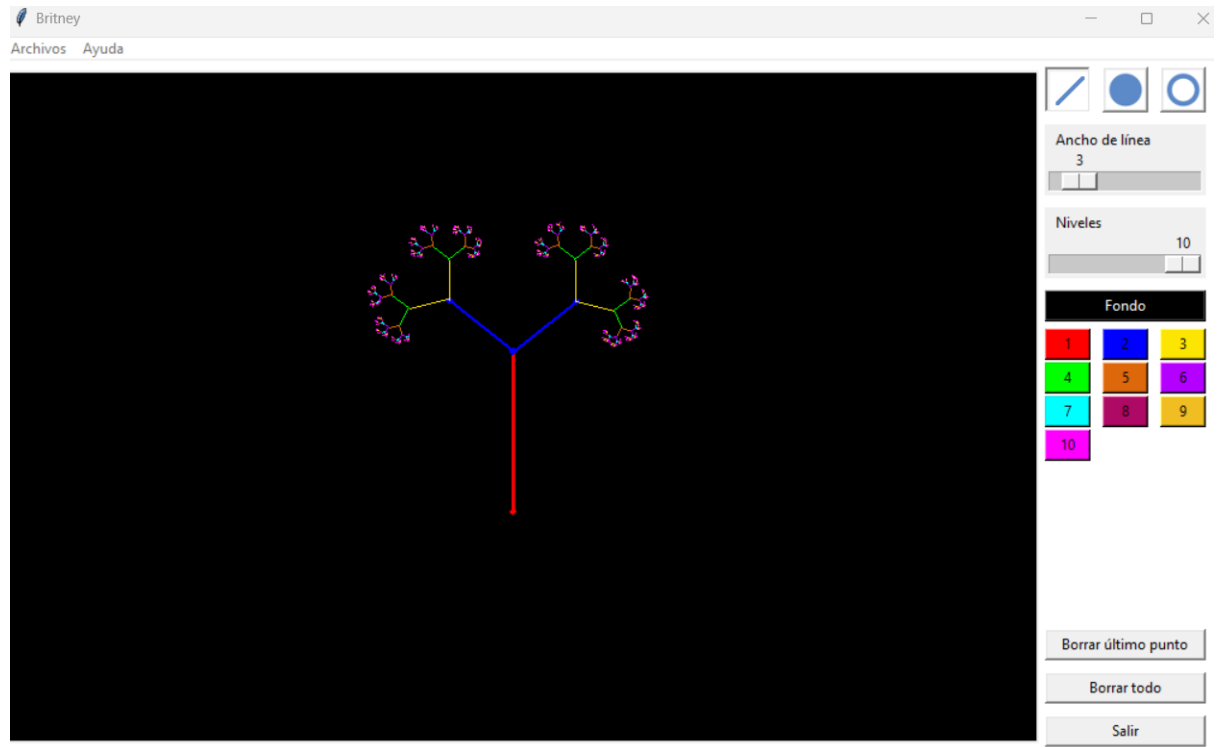
no requiere un instructivo o modo de empleo. Basta con ponerse a jugar/dibujar patrones para entender cómo es que funciona este amigable programa. La única desventaja es que no podemos hacer fractales tan precisos, pues al estar pensado para la divulgación, y sin la necesidad de saber teoría avanzada, el resultado es un fractal con ciertas imprecisiones de pulso porque se dibujan a mano alzada.

El árbol áureo traslapándose, es decir, con factor de contracción $s > \frac{1}{\phi}$, queda de la siguiente manera:

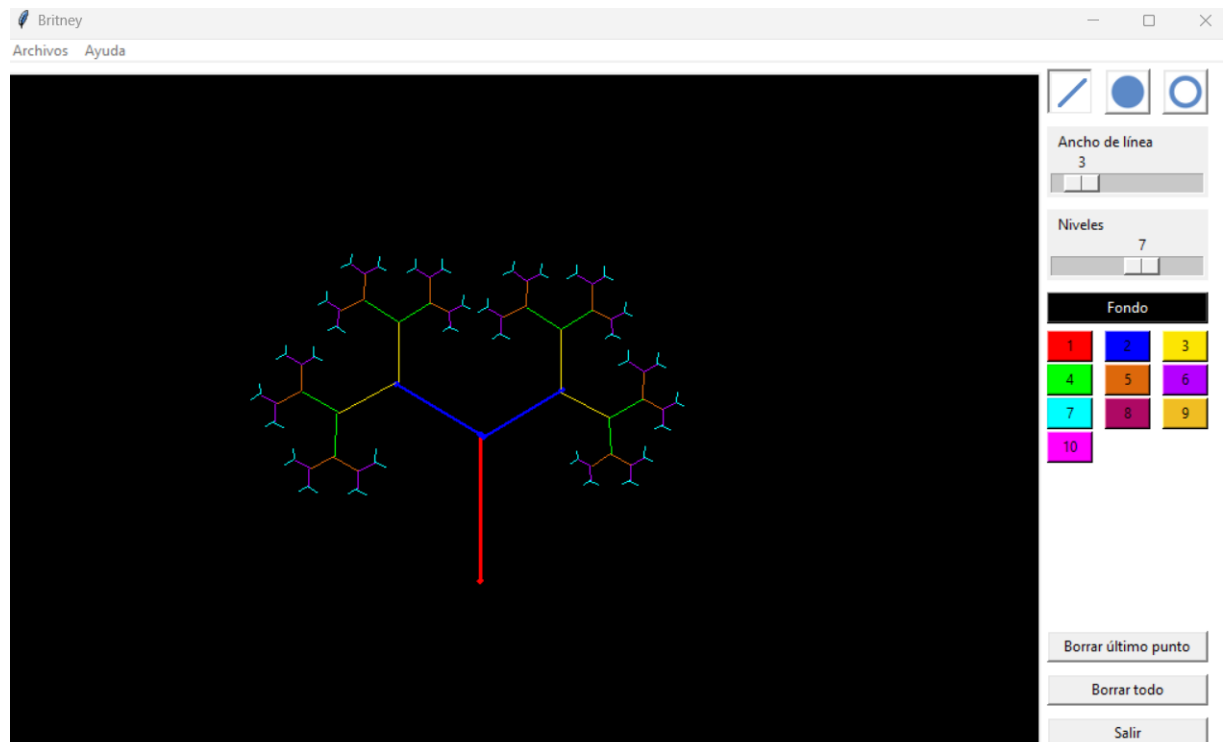


EL árbol áureo sin traslaparse, es decir, con factor de contracción $s < \frac{1}{\phi}$.

4.3 Programar el árbol áureo



El árbol áureo con factor de contracción cercano a $\frac{1}{\phi}$.



Conclusiones

Después de analizar la teoría necesaria pudimos comprender el comportamiento de estas curvas tan erráticas con compartamiento diferente al de las curvas habituales, el cual era el problema que nos aquejaba al inicio.

También logramos desarrollar teoría suficiente para poder descomponer estas curvas a las que llamamos fractales en sus diferentes partes y dar una representación visual de ellas. Al igual que dar un par de ejemplos clásicos y otros no tan conocidos. Entre los que destaca el embutido de Minkowski y la curva dragón.

Asimismo, se abordó la proporción áurea para poder construir el árbol áureo y se programó con la teoría antes vista. Se logró comprender cómo el árbol áureo puede ser representado por un SFI hiperbólico a través de 3 transformaciones.

Material extra

En este apéndice explicaremos el código que usamos para programar los fractales, pero antes debo agradecer nuevamente al Dr. Renato Leriche Vázquez porque estos códigos y el uso del programa Julia los ví en el seminario de geometría fractal del semestre 2022-2 impartido por él y son parte fundamental de esta tesis, así como motivación de la misma.

Ejemplificaremos la curva dragón (pero es análogo para los demás códigos).

El primer código que usamos fue este:

```
In [1]: using Images

include("src/RectangularRegionV1.jl")
include("src/Attractors.jl")

r1 = sqrt(1/2)
θ1 = π*225/180
θ2 = π*315/180

curva_dragon_w1(z) = r1*exp(θ1*im)*z+1/2+1/2*im
curva_dragon_w2(z) = r1*exp(θ2*im)*z+1/2+1/2*im

curva_dragon_ifs = [curva_dragon_w1, curva_dragon_w2]

Out[1]: 2-element Vector{Function}:
  curva_dragon_w1 (generic function with 1 method)
  curva_dragon_w2 (generic function with 1 method)
```

Donde "using Images" nos dice que vamos a usar la paquetería imágenes de Julia.

r_1, θ_1, θ_2 son valores fijos que usaremos para formar nuestras transformaciones, las cuales son $Curvadragon_{w1}(z)$ y $Curvadragon_{w2}(z)$, para finalmente unir las en una sola función de dos argumentos que llamaremos $curvadragon_{ifs}$, que es la función que vamos a iterar.

Por otro lado, la parte de "include(src/RectangularRegionV1.jl)" y "include(src/Attractors.jl)" nos dice que estamos incluyendo el documento de Julia "RectangularRegionV1" y "Attractors"^[18], guardados en la carpeta "src".

RectangularRegionV1.jl es el siguiente código comentado:

A. MATERIAL EXTRA

```
1  # Ponemos la estructura que tendrá una Región rectangular [xmin,xmax]x[ymin,ymax] representada por img
2  struct RectangularRegion
3      xmin
4      xmax
5      ymin
6      ymax
7      img
8      RectangularRegion(x1, x2, y1, y2, img0) = new(x1, x2, y1, y2, img0)
9      RectangularRegion(x1, x2, y1, y2; width=500, height=500, color=RGB(1,1,1)) =
10         new(x1, x2, y1, y2, fill(color, height, width))
11 end
12
13 #función que nos imprime la region rectangular
14 draw(rectreg)=rectreg.img
15
16 #Función que dada una región rectangular y un pixel, nos devuelve las coordenadas del pixel
17 pixel(rectreg, pix) = rectreg.img[pix[2],pix[1]]
18
19 #Función que le cambia el color a un pixel
20 function pixel!(rectreg, pix, color)
21     rectreg.img[pix[2],pix[1]] = color
22 end
23
24 # Función que convierte coordenadas de puntos Complejos a coordenadas en pixeles de la imagen.
25 complextopixel(rectreg, z) =
26     Int64(round((real(z) - rectreg.xmin)*(width(rectreg.img) - 1)/(rectreg.xmax - rectreg.xmin) + 1)),
27     Int64(round((rectreg.ymax - imag(z))*(height(rectreg.img) - 1)/(rectreg.ymax - rectreg.ymin) + 1))
28
29 # Función que verifica la pertenencia de los puntos a regiones rectangulares
30 containscomplex(rr, z) = ( (rr.xmin < real(z) < rr.xmax) && (rr.ymin < imag(z) < rr.ymax))
```

Que básicamente es el código para formar una región rectangular y un par de funciones que nos ayudarán a programar el documento "Attractors.jl".

Attractors.jl es el siguiente código comentado

```
1  #Función que dado el sistema de funciones iteradas, la región rectangular y los colores que queremos para cada transformación,
    transformaciones la cantidad de veces que queramos, partiendo del punto z0=0
2  function drawchaosgameattractorcolorsCI(ifs, rrA, colors; numiterations=100000, z0=0)
3
4      if length(colors) < length(ifs) #aquí nos aseguramos de tener la cantidad necesaria de colores
5          println("Faltan colores en la lista...") #Si es menor la cantidad de colores, le pedimos que ingrese más
6          return
7      end
8
9      zn = z0 #partimos de un punto inicial
10
11     for k = 1:numiterations #empezamos con la primera iteración
12
13         n = rand(1:length(ifs)) #tomamos aleatoriamente una transformación
14
15         zn = ifs[n](zn) #Le aplicamos la transformación a nuestro punto
16
17         if containscomplex(rrA, zn) # Si el punto está en la región rectangular
18             pix = complextopixel(rrA, zn) #Convertimos nuestro número complejo a pixel
19             pixel!(rrA, pix, colors[n]) #Cambiamos el color de nuestro pixel
20         end #Nos seguimos así hasta acabar todas las iteraciones
21
22     end # para k, el número de iteraciones, por lo que tenemos k pixeles cambiados de color
23
24     rrA #Nos resulta una nueva región rectangular con los pixeles cambiados de color
25 end
26
27
```

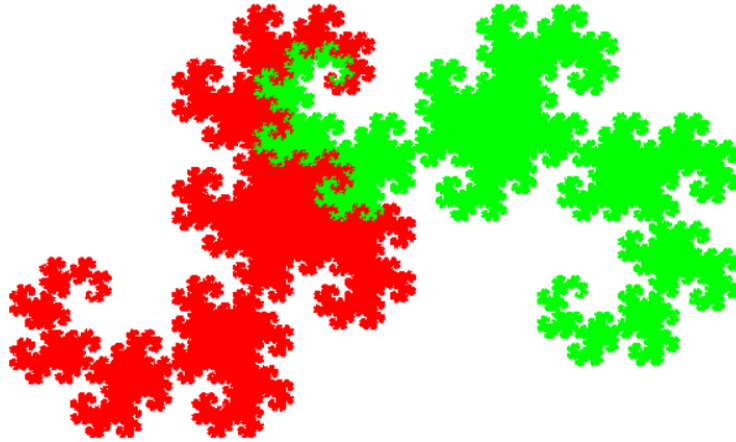
donde formamos la función que nos va a iterar nuestras transformaciones.

Notemos que la función "drawchaosgameattractorcolorsC!" parte de un punto " z_0 " y va aplicando nuestras transformaciones de manera aleatoria a ese punto y si cae dentro de nuestra región rectangular le cambia el color al pixel. Digamos que va dejando el rastro de a dónde se va moviendo nuestro punto a partir de nuestras transformaciones, por lo que al ir iterando tendremos un conjunto de pixeles(puntos) que cambiaron de color debido a que ahí fue donde nuestro punto " z_n " fue cayendo. Estos puntos son parte de nuestro fractal o se aproximan mucho al fractal y cuanto más iteremos, más se parecerá al fractal.

Podemos también poner diferente probabilidad a cada transformación, haciendo que los puntos se carguen más para un lado y nuestro fractal quede "difuminado". [29]

El segundo código que usamos fue

```
In [2]: draw(drawchaosgameattractorcolorsC!(curva_dragon_ifs,
      RectangularRegion(-0.5,1.5,-0.5,1;width=750,height=500),
      [RGB(1,0,0), RGB(0,1,0)], numiterations=900000))
Out[2]:
```



que básicamente es imprimir el código de nuestra función "drawchaosgameattractorcolorsC!" que consta de 5 entradas porque viene de la misma función que aparece en "Attractors.jl", las cuales son:

- 1.-Nuestro SFI formado por cada transformación de nuestro fractal.
- 2.-La región rectangular donde vamos a trabajar. Esta la podemos variar a nuestro gusto dependiendo de qué tan grande y centrado queremos ver nuestro fractal.
- 3.-Los colores de nuestras transformaciones, las cuales podemos escoger a nuestro gusto solo que están en formato RGB que significa "Red, Green, Blue", esto es, una función de 3 entradas que con valores del 0 al 1, donde 0 es nada de ese color y 1 es completamente saturado de ese color. Por ejemplo, (1, 0, 0) da el color rojo y (1, 1, 0) da amarillo.
- 4.-El número de iteraciones, donde al tener K iteraciones, nos dará como máximo K

puntos/píxeles cambiados de color, por lo que al tener más iteraciones nuestro conjunto se irá pareciendo más a un fractal porque habrá más posibilidad de tener píxeles que cambiaron de color. Es como máximo k puntos y píxeles porque puede pasar que se repita el píxel por donde pasa.

5.-Nuestro punto inicial $z_0 = 0$, que si no ponemos nada automáticamente pone el 0 como punto de partida.

Referencias

- [1] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press, 1° edición, 1985 (citado en las págs. [3](#), [7](#), [8](#)).
- [2] B. B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, 1° edición, 1977 (citado en las págs. [3](#), [21](#), [22](#)).
- [3] B. B. Mandelbrot. How long is the coast of Britain? *Science*, 1967 (citado en la pág. [3](#)).
- [4] A. M. Cutrín. *Fractales: la interacción entre distancia y medida*, Universidad de Santiago de Compostela, 2020 (citado en la pág. [4](#)).
- [5] G. Grabinsky. *Teoría de la medida*. Las prensas de Ciencias, 1° edición, 2000 (citado en la pág. [4](#)).
- [6] J. M. García de la fuente. *Algunas propiedades de aproximaciones de medidas de Hausdorff*, Universidad de Valladolid, 1973 (citado en la pág. [5](#)).
- [7] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, 3° edición, 1976 (citado en las págs. [5](#), [9](#)).
- [8] A. Juventeny. *Introducción a la dimensión de Hausdorff*, Universitat de Barcelona, 2016 (citado en la pág. [5](#)).
- [9] E. Rela. *Estimaciones de dimensión para conjuntos de tipo Furstenberg y teoremas de restricción para medidas de Hausdorff*, Universidad de Buenos Aires, 2010 (citado en la pág. [6](#)).
- [10] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley Sons, 1° edición, 1990 (citado en las págs. [8](#), [18](#), [19](#)).
- [11] M. F. Barnsley. *Fractals everywhere*. Morgan Kaufmann, 2° edición, 1988 (citado en las págs. [11](#), [13](#), [16-19](#)).
- [12] R. G. Bartle. *Introducción al análisis matemático*. Limusa, 1° edición, 1980 (citado en las págs. [11](#), [12](#)).
- [13] N. Haaser, J. LaSalle y J. Sullivan. *Análisis Matemático 2. Curso intermedio*. Editorial Trillas, 1° edición, 1971 (citado en la pág. [12](#)).
- [14] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Editorial MIR, 2° edición, 1975 (citado en la pág. [12](#)).
- [15] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1° edición, 1970 (citado en la pág. [12](#)).
- [16] J. C. Burkill. *Real and complex analysis*. Cambridge University Press, 1° edición, 1970 (citado en la pág. [12](#)).
- [17] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Academic Press, 1960 (citado en la pág. [12](#)).
- [18] R. Leriche Vázquez. Seminario de geometría fractal, 2022 (citado en las págs. [14](#), [18](#), [19](#), [55](#)).

- [19] M. Clapp. *Análisis matemático*. Papirhos, 3° edición, 2019 (citado en la pág. 14).
- [20] N. Haaser, J. LaSalle y J. Sullivan. *Análisis Matemático 1. Curso de introducción*. Editorial Trillas, 1° edición, 1975 (citado en la pág. 18).
- [21] J. van den Eijnden. *Fractal dimension of self-similar sets*, Radboud University, 2018 (citado en las págs. 22-26).
- [22] A. Lascurain Orive. *Curso de variable compleja*. Las prensas de ciencias, 3° edición, 2013 (citado en la pág. 29).
- [23] M. Livio. *La proporción áurea*. Ariel, 1° edición, 2017 (citado en las págs. 39, 40, 42).
- [24] Euclides. *Elementos. Libros V-IX*. Gredos, 1° edición, 1994 (citado en la pág. 39).
- [25] O. Palmas, J. Verdugo y L. Briseño. *Una mirada al cálculo a través de las sucesiones*. Las prensas de ciencias, 2° edición, 2015 (citado en la pág. 43).
- [26] J. Fernández. *Un acercamiento a los fundamentos del cálculo*. Las prensas de ciencias, 1° edición, 2016 (citado en las págs. 43, 45, 46).
- [27] F. Corbalán. *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. RBA, 1° edición, 2010 (citado en la pág. 44).
- [28] Universidad de Buenos Aires. <http://moebius.dm.uba.ar/index.php/programas/britney/descarga>, 2024 (citado en la pág. 49).
- [29] M. E. Barnsley y S. Demko. *Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals*. The Proceedings of the Royal Society of London, 3° edición, 1985 (citado en la pág. 57).