Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

PROPIEDADES DINÁMICAS QUE SE PRESERVAN BAJO LÍMITES INVERSOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

JOSÉ MARÍA VILLAGÓMEZ QUINTOS

TUTORA

DRA. VERÓNICA MARTINEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2024

Agradecimientos

Para comenzar, me gustaría agradecer a todas las personas que compartieron vivencia conmigo y dejaron plasmadas enseñanzas en mi, son bastos y no acabaría en esta tesis de mencionarlos. A todos aquellos profesores, compañeros, amigos y familiares que me acompañaron en mi vida académica y nutrieron esta misma. En especial, a las profesoras de matemáticas de secundaria y preparatoria que me iniciaron en este gran mundo y me prepararon para él.

A mi tutora de tesis, la Dra. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla, por su paciencia, esmero y dedicación para con esta tesis, porque sin ella no habría sido posible que me encontrara en estos momentos concluyéndola.

A mi amigo Jorge por brindarme sus conocimientos y apoyo durante esta etapa llamada tesis. A Fernanda, por animarme, alegrarme e inspirarme durante estos años de noviazgo. A mi amiga Ale, que sin sus consejos, motivación, entereza, fuerza y, por sobre todo, tiempo, no habría terminado la carrera o siquiera algún otro proyecto.

Y a mi madre, Martha Villagómez Quintos, que jamás ha dejado de creer en mí y en mis sueños. Por ese apoyo incondicional, que solo me motiva a mejorar día con día. Por ser ese faro de valores que me guían entre las tormentas. Por el amor, cariño, protección y tiempo que siempre me dedicó. Gracias madre, gracias totales.

Esta tesis estuvo parcialmente apoyada por los proyectos ”Sistemas Dinámicos Discretos y Teoría de Continuos I”(IN105624) del PAPIIT, DGAPA, UNAM; ”Teoría de Continuos e Hiperespacios dos”(AI-S-15492) del CONACYT (ahora CONAHCyT); y ”Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos I, II, III”(IN104613, IN101216, IN106319) del PAPIIT, DGAPA, UNAM.

Los resultados del capitulo 3 y 4 fueron más faciles de explicar gracias al proyecto de investigación en sistemas dinámicos de la estancia sabática (agosto 2022 - julio 2023) de la directora de tesis, la Dra. Verónica Martínez de la Vega, que fue patrocinado por el programa PASPA de la DGAPA, UNAM.

Índice general

Introducción vii

1. Preliminares 1

1.1. Continuos 1

1.2. Límites inversos 3

1.3. Teorema del Valor Intermedio 6

2. Algunos puntos especiales 7

3. Primera parte del Teorema A 37

4. Segunda parte del Teorema A 53

Introducción

Esta tesis está dirigida a alumnos y alumnas que tengan conocimientos básicos de topología como: conexidad, compacidad y espacios métricos, para trabajar en continuos. Abordaremos teoría muy básica de sistemas dinámicos discretos así como de límites inversos. Para esto, esta tesis tomará como base 6 de los 7 incisos del Teorema A del artículo *Dynamical properties of the shift maps on the inverse limit spaces* de *Shiai Li*, además de completar ciertos puntos donde creemos es necesario ahondar para una mejor compresión del lector al que va dirigido este trabajo. En otras palabras, hacer mas digerible este teorema para alumnos de licenciatura que deseen o tengan la curiosidad de conocer más sobre estos temas.

El Teorema A contiene 7 incisos, nosotros probaremos los primeros 6 incisos que son más generales. El inciso (7) del Teorema A explora el caso particular cuando f es una función continua del intervalo en el intervalo. Ese inciso ya no lo desarrollaremos en este trabajo.

En el capítulo 1, es un capítulo corto, hablaremos de definiciones fundamentales de la teoría de continuos, sistemas dinámicos y límites inversos que nos servirán durante toda la tesis.

En el capítulo 2, trataremos las definiciones de punto fijo, periódico, casi periódico, $\omega - limite$, recurrente, no vagabundo y recurrente por cadenas que serán el punto de partida del Teorema A, junto con ejemplos con los cuales trataremos de ilustrar aquello con lo que estamos trabajando. A la par, abordaremos proposiciones que nos apoyaran y servirán dentro del mismo capítulo. Este mismo es muy ilustrativo para las personas que se quieren adentrar en los sistemas dinámicos, contiene ejemplos y las demostraciones de que (1)

$$F(f) \subseteq P(f) \subseteq AP(f) \subseteq R(f) \subseteq \Lambda(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq CR(f)$$

y los contraejemplos desarrollados para probar que

$$F(f) \subsetneq P(f) \subsetneq AP(f) \subsetneq R(f) \subsetneq \Lambda(f) \subsetneq \Omega(f) \subsetneq CR(f).$$

En el capítulo 3 desarrollaremos las bases para probar los incisos (1), (2) y (3) del Teorema A. Este capítulo es complejo pues requiere de muchos resultados preliminares.

Finalmente, en el capítulo 4 desarrollaremos todas las herramientas necesarias para poder probar los incisos (4), (5) y (6) del Teorema A.

Originalmente habíamos escrito un Capítulo 5 donde comenzamos a desarrollar las herramientas para probar el inciso (7) del Teorema A, pero nos dimos cuenta que el desarrollo de solo este inciso necesitaba de resultados más elaborados que no habíamos desarrollado y que desarrollarlos alargaría mucho el trabajo.

De esta manera habremos tratado con lo que compete a esta tesis, esperando haber cumplido su objetivo de saciar la curiosidad de aquellos que instaran a leerla, o mejor aún, generar más curiosidad así como motivarlos a profundizar en este tema.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Continuos

Definición 1.1.1 Sea X un espacio topológico, diremos que X es un *continuo* si es métrico, compacto, conexo y con más de un punto.

Ejemplo 1.1.2

- El intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$.

Figura 1.1:

Ejemplo 1.1.3

- La circunferencia $\mathbb{S}^1$.

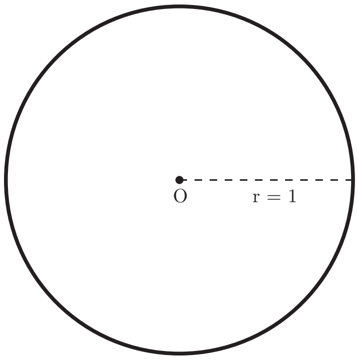

Figura 1.2:

Ejemplo 1.1.4

- El abanico armónico.

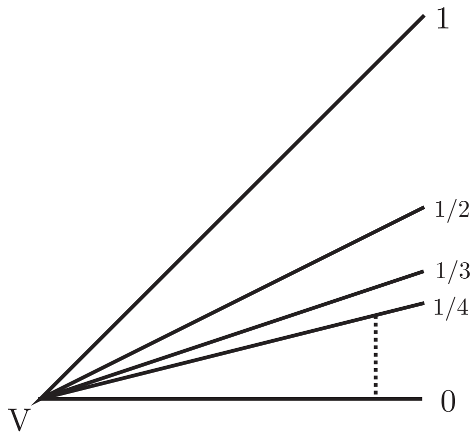

Figura 1.3:

Notación Dado un espacio métrico (X, d) y $\varepsilon > 0$ denotamos por $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ a la *bola de radio ε con centro en x.*

Definición 1.1.5 Sea $f : X \longrightarrow X$ una función continua y suprayectiva. Definimos un *sistema dinámico discreto* como la dupla (X, f).

Ejemplo 1.1.6

- (X, f) donde $X = [0, 1]$ y $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(x) = x^2$.

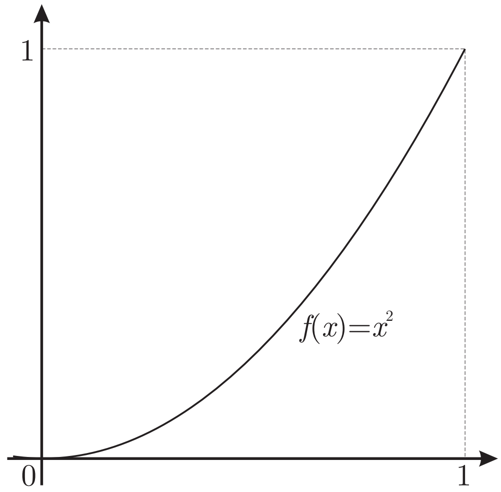

Figura 1.4:

Ejemplo 1.1.7

- (X, f) donde $X = \mathbb{S}^1$ y $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(x) = e^{\frac{\pi}{2} i} x$.

Lo siguiente que haremos será definir la *iteración n de f* como la función $f^n : X \longrightarrow X$ donde $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$ n-veces. Cabe notar que $f^0(x) = x$ es la función identidad de X en X y que $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f^1(x))$, $f^3(x) = f(f^2(x))$ y $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para toda n entero positivo. Después de esto, para cada punto $x \in X$, llamaremos al conjunto de iteraciones de $f(x)$ como la *órbita de x bajo f*, y la denotaremos así,

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \cdots\} .$$

Nota. Cuando no sea necesario o se entienda con que función se está trabajando podremos escribir $o(x, f)$ simplemente como $o(x)$.

1.2. Límites inversos

Ahora definiremos un *límite inverso*.

Definición 1.2.1 Sean X un continuo y $f : X \longrightarrow X$ una función continua, diremos que el conjunto denotado por:

$$\varprojlim(X, f) = \{\overline{x} = (x_0, x_1, \cdots) \in X \times X \times \cdots : f(x_{i+1}) = x_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

es el *límite inverso* de X bajo f. A este espacio lo dotaremos con la siguiente métrica:

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Sabemos por [13, Theorem 2.4] que como X es un continuo, entonces $\varprojlim(X, f)$ también es un continuo.

Definición 1.2.2 Sea X un continuo, $f : X \longrightarrow X$ una función continua y $\varprojlim(X, f)$ su límite inverso. Para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $\pi_n : \varprojlim(X, f) \longrightarrow X$ como $\pi_n(\overline{x}) = x_n$. Diremos que π_n es la *n-ésima proyección* de $\varprojlim(x, f)$ sobre X.

Sabemos por [7, Theorem 2, p. 3, Theorem 10, p. 6], que π_n es continua y suprayectiva, para toda $n \in \mathbb{N}$.

De esta manera, continuemos con un ejemplo sencillo que ilustre un límite inverso.

Ejemplo 1.2.3

- El siguiente ejemplo describe un Solenoide como límite inverso. En este momento no describiremos que es un solenoide ni que propiedades tiene pues se aleja mucho del objetivo de la tesis. Para ahondar en su construcción geométrica véase [15, p. 2-5].
  Sean $X = \mathbb{S}^1$ y $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ como $f(z) = z^2$, entonces $\varprojlim(X, f) = \Sigma$, donde Σ es el continuo llamado *solenoide diádico* [12, p. 678].

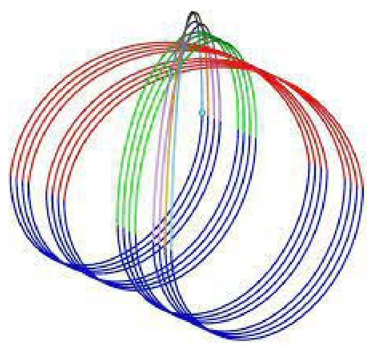

Figura 1.5: Solenoide Diádico, [15, p. 17]

Y para terminar este breve capítulo, daremos una última definición y una pequeña demostración.

Definición 1.2.4 La función $\sigma_f : \varprojlim(X, f) \longrightarrow \varprojlim(X, f)$ la definimos como

$$\sigma_f((x_0, x_1, x_2, \cdots)) = (f(x_0), x_0, x_1, x_2, \cdots)$$

y la llamaremos *función recorrimiento.*

Cuando no exista confusión sobre que función estamos trabajando, podremos simplemente escribir σ en vez de σ_f.

Lema 1.2.5 La función σ es un homeomorfismo de $\varprojlim(X, f)$.

Demostración. Sean $\overline{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots), \overline{y} = (y_0, y_1, y_2, \cdots) \in \varprojlim(X, f)$ tales que $\overline{x} \neq \overline{y}$, es decir, existen $i \in \mathbb{N}$ tales que $x_i \neq y_i$. Como x_i y y_i se encuentran en la entrada $i+1$ y $x_i \neq y_i$, tenemos que $\sigma(\overline{x}) \neq \sigma(\overline{y})$. Por lo tanto, σ es inyectiva.

Sea $\overline{y} = (y_0, y_1, \cdots) \in \varprojlim(X, f)$. Consideremos $\overline{x} = (y_1, y_2, \cdots)$. Como $f(y_{i+1}) = y_i$ para toda $i \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$. Además,

$$\sigma(\overline{x}) = (f(y_1) = y_0, y_1, y_2, \cdots) = \overline{y}.$$

Por lo tanto, σ es suprayectiva.

Probaremos ahora que σ es continua.

Sea $\varepsilon > 0$, como X es un continuo, entonces f es uniformemente continua. Por tanto, existe $\delta_1 > 0$ tal que $d(x_0, y_0) < \delta_1$ implica que $d(f(x_0), f(y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon\}$ y $\overline{x}, \overline{y} \in \varprojlim(X, f)$ tales que $\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) < \delta$ entonces

$$\overline{d}(\sigma(\overline{x}), \sigma(\overline{y})) = d(f(x_0), f(y_0)) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{i+1}} = d(f(x_0), f(y_0)) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Como $\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) < \delta$ entonces $d(x_0, y_0) < \delta_1$ y $d(f(x_0), f(y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto,

$$\overline{d}(\sigma(\overline{x}), \sigma(\overline{y})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, σ es continua.

Llamamos a σ^{-1} la *función desplazamiento* o *función corrimiento*. Veamos que σ^{-1} es continua.

Sea $\sigma^{-1}(\overline{x}) = \sigma^{-1}((x_0, x_1, \cdots)) = (x_1, x_2, \cdots)$. Sea $\epsilon > 0$. Demostraremos que existe $\delta > 0$ tal que $\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) < \delta$ implica $\overline{d}(\sigma^{-1}(\overline{x}), \sigma^{-1}(\overline{y})) < \varepsilon$.

Sea $\delta = \varepsilon$. Si $\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) < \delta$ entonces $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} < \delta$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} < \delta = \varepsilon$. Por lo tanto, $\overline{d}(\sigma^{-1}(\overline{x}), \sigma^{-1}(\overline{y})) < \varepsilon$.

Por lo tanto, σ^{-1} es continua y σ es un homeomorfismo y el lema queda demostrado.

■

1.3. Teorema del Valor Intermedio

Y para finalizar el capítulo, una mención extra al siguiente teorema.

Teorema 1.3.1 [*Teorema del Valor Intermedio*] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función continua en todo el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Capítulo 2

Algunos puntos especiales

De aquí en adelante, nuestro espacio X será un continuo y nuestra función f será continua y suprayectiva, para todos los casos, a menos que se especifique lo contrario. Continuaremos con algunas propiedades especiales en los sistemas dinámicos con los que nos interesará trabajar.

Definición 2.1 Diremos que $x \in X$ es *punto fijo de* f si $f(x) = x$, y denotaremos al conjunto de todos los puntos fijos de f en X como

$$F(f) = \{x \in X : f(x) = x\} \ .$$

Ejemplo 2.2

- Sean X un continuo, y $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(x) = x$. Notemos que $F(f) = X$.

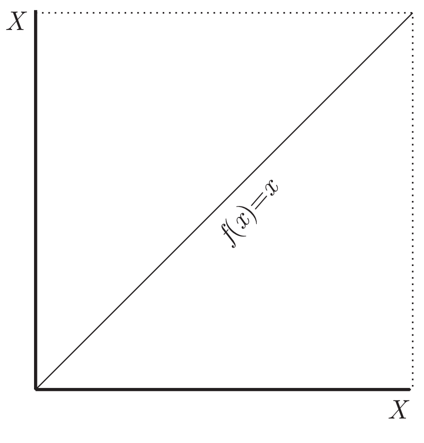

Figura 2.1:

Demostración. Sea $x \in X$, entonces $f(x) = x$. Por lo tanto, $x \in F(f)$, y como x fue arbitrario, entonces $F(f) = X$.

■

Ejemplo 2.3

- Sean $X = [0,1]$ y $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(x) = x^2$. Entonces $F(f) = \{0,1\}$.

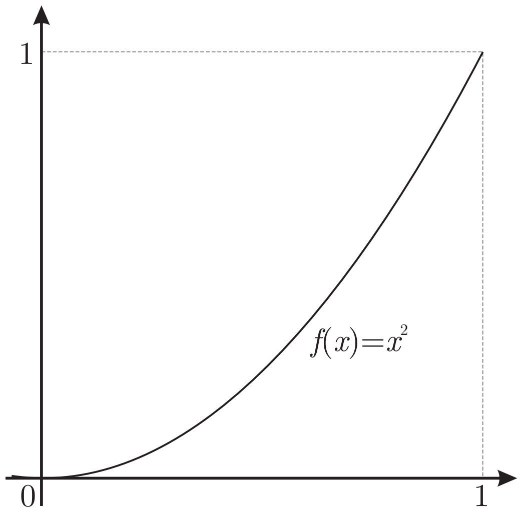

Figura 2.2:

Demostración. Si $x = 0$, entonces $f(0) = 0^2 = 0$, es decir, $f(x) = x$. Si $x = 1$, entonces $f(1) = 1^2 = 1$, entonces, $f(x) = x$.

Sea $x \in (0,1)$, entonces $f(x) = x^2 < x$, pues $x > 0$. Entonces $f(x) \neq x$, i.e, $x \notin F(f)$.

Por lo tanto, $F(f) = \{0,1\}$.

■

Ejemplo 2.4

- Sean $X = \mathbb{S}^1$ y $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = e^{\pi i}x$. Entonces $F(f) = \emptyset$.

  Demostración. Supongamos por el contrario que existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = x$. Entonces $x = f(x) = e^{\pi i}x$, entonces $1 = e^{\pi i}$, lo cual es una contradicción, pues $e^{\pi i} = -1$.

  Por lo tanto, $F(f) = \emptyset$

■

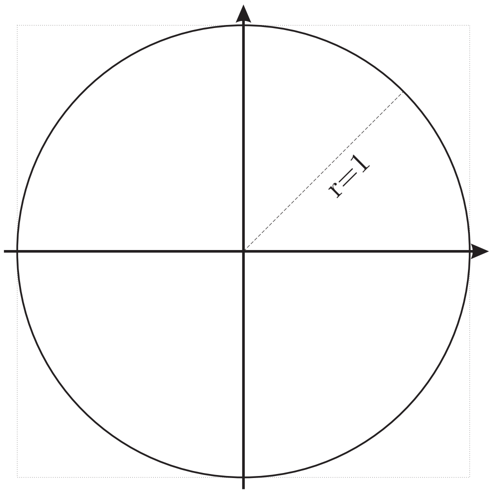

Figura 2.3:

Definición 2.5 Un punto $x \in X$ es un *punto periódico de* f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, además diremos que x *tiene periodo* k si:

$$k = \text{mín}\{n \in N : f^n(x) = x\}.$$

Al conjunto de todos los puntos periódicos de f en X lo denotaremos como:

$$P(f) = \{x \in X : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n(x) = x\}.$$

Ejemplo 2.6

- Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Entonces $P(f) = [0,1]$ con periodo menor o igual a 2.

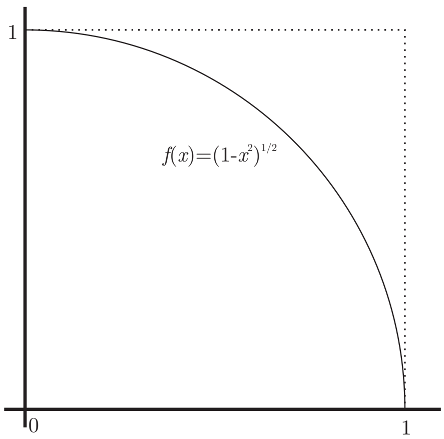

Figura 2.4:

Demostración. Sea $x \in [0,1]$. Entonces $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y por lo tanto,

$$f^2(x) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{1-1+x^2} = \sqrt{x^2} =$$
$$= |x| = x.$$

Por lo tanto, $x \in P(f)$ y es de periodo menor o igual a 2.

■

Observación $F(f) \subseteq P(f)$ y el periodo es 1.

Ejemplo 2.7

- Sean $X = \mathbb{S}^1$ y $f(x) = e^{\frac{\pi}{4}i}x$. Entonces $P(f) = X$ y el periodo de $x \in X$ es 8.

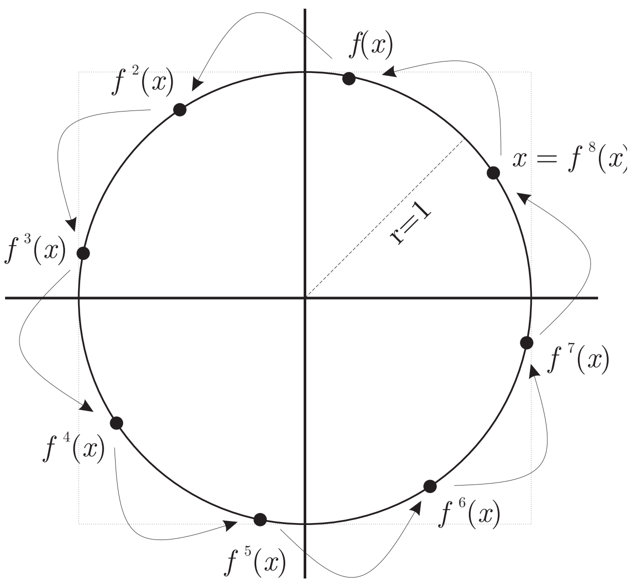

Figura 2.5:

Demostración. Sea $x \in [0,1]$, entonces $f(x) = e^{\frac{\pi}{4}i}x$, entonces

$$f^8(x) = e^{\frac{\pi}{4}i}(e^{\frac{\pi}{4}i}(e^{\frac{\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i})x) = e^{8\frac{\pi}{4}i}x = e^{2\pi i}x = x.$$

Por lo tanto, $x \in P(f)$.

Ahora, $f^k(x) = e^{k\frac{\pi}{4}i}x \neq e^{2\pi i}x = x$ para toda $k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Por lo tanto, el periodo de x bajo f es 8.

■

Proposición 2.8 Sea X un continuo y $f : X \longrightarrow X$ continua. Si $p \in F(f^n)$ entonces $p \in P(f)$.

Demostración. Sea $p \in F(f^n) \Rightarrow f^n(p) = p$, i.e., por definición de puntos periódicos $p \in P(f)$.

■

Definición 2.9 Sean $X = [0, 1]$ y $T : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2(1-x) & si\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

A T la llamaremos *función tienda.*

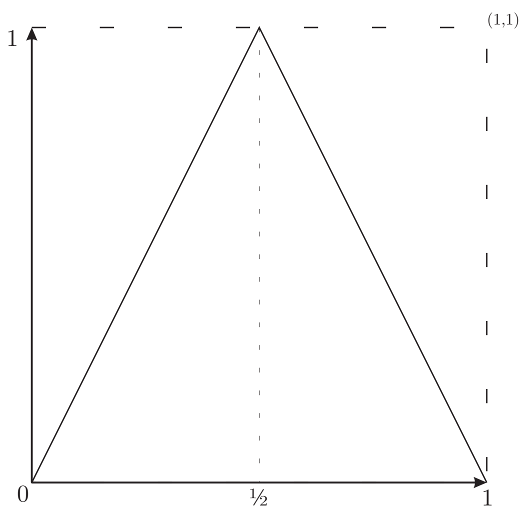

Figura 2.6:

Los siguientes tres resultados, Proposición 2.10, 2.11, 2.12, se encuentran en [8, p.96-100].

Proposición 2.10 Sea $n \in \mathbb{N}$ y T la función tienda,

entonces

$$T^n|_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \longrightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo para toda $k \in \{0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1\}$.

Demostración. Por inducción sobre n.

Base inductiva $n = 1$.

Sea $k \in \{0, \cdots, 2^n - 1\} = \{0, 1\}$. Entonces,

$$T^n(x) = T(x).$$

Si $k = 0$, entonces

$$T|_{[\frac{0}{2}, \frac{1}{2}]} : [0, \tfrac{1}{2}] \longrightarrow [0, 1],\ T|_{[0, \frac{1}{2}]}(x) = 2x$$

para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$ es homeomorfismo.

Si $k = 1$, entonces

$$T|_{[\frac{1}{2}, 1]} : [\tfrac{1}{2}, 1] \longrightarrow [0, 1],\ T|_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) = 2(1 - x)$$

para toda $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ es homemorfismo.

Hipótesis de inducción Sea

$$T^n|_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \longrightarrow [0, 1]$$

un homeomorfismo para toda $k \in \{0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1\}$.

Paso inductivo Por demostrar que

$$T^{n+1}|_{\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]} : \left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right] \longrightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo para toda $k \in \{0, 1, 2, \cdots, 2^{n+1} - 1\}$.

Consideremos

$$T^{n+1}|_{\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]} : \left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right] \longrightarrow [0, 1]$$

función. Notemos que si $0 \leq k \leq 2^n - 1$ entonces

$$0 \leq \frac{k}{2^{n+1}} \leq \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} < \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

i. e.,

$$\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Además si $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ entonces

$$\frac{1}{2} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \frac{k}{2^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} < 1,$$

i. e.,

$$\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

<u>*Caso 1*</u> Si $0 \leq k \leq 2^n - 1$.
Sea

$$T^{n+1}|_{\left[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}\right]}\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}\right]\right) = T^n\left(f\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}\right]\right)\right) =$$

$$T^n\left(\left[\frac{2k}{2^{n+1}},\frac{2(k+1)}{2^{n+1}}\right]\right) = T^n\left(\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\right).$$

Por hipótesis de inducción $T^n\left(\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\right)$ es homeomorfo a $[0,1]$ para toda $k \in \{0,\cdots,2^n-1\}$.

<u>*Caso 2*</u> Si $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$.
Sea

$$T^{n+1}|_{\left[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}\right]}\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}\right]\right) = T^n\left(f\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}\right]\right)\right) =$$

$$T^n\left(\left[2\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right),2\left(1-\frac{(k+1)}{2^{n+1}}\right)\right]\right) = T^n\left(\left[2\left(\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}\right),2\left(\frac{2^{n+1}-k-1}{2^{n+1}}\right)\right]\right) =$$

$$T^n\left(\left[2\left(\frac{2^{n+1}-k-1}{2^{n+1}}\right),2\left(\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}\right)\right]\right) = T^n\left(\left[\left(\frac{2^{n+1}-k-1}{2^n}\right),\left(\frac{2^{n+1}-k}{2^n}\right)\right]\right).$$

Ahora notemos que si $2^n \leq k \leq 2^{n+1}-1$, entonces

$$-2^n \geq -k \geq 1 - 2^{n+1},$$

entonces

$$2^{n+1} - 2^n - 1 \geq 2^{n+1} - k - 1 \geq 0,$$

entonces

$$2^n(2-1) - 1 \geq 2^{n+1} - k - 1 \geq 0,$$

entonces

$$2^n - 1 \geq 2^{n+1} - k - 1 \geq 0.$$

Nombremos $2^{n+1} - k - 1 = l$, entonces

$$0 \leq l \leq 2^n - 1.$$

Por lo tanto, aplicando hipótesis de inducción, $T^n\left(\left[\left(\frac{l}{2^n}\right),\left(\frac{l+1}{2^n}\right)\right]\right)$ es homeomorfo a $[0,1]$ para toda $l \in \{0,\cdots,2^n-1\}$. Entonces $T^n\left(\left[\left(\frac{2^{n+1}-k-1}{2^n}\right),\left(\frac{2^{n+1}-k}{2^n}\right)\right]\right)$ es homeomorfo a $[0,1]$ para toda $k \in \{2^n,\cdots,2^{n+1}-1\}$. Por lo tanto,

$$T^{n+1}|_{\left[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}\right]} : \left[\frac{k}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^{n+1}}\right] \longrightarrow [0,1]$$

es homeomorfismo para toda $k \in \{0,\cdots,2^{n+1}-1\}$ y la proposición queda demostrada.

$\blacksquare$

Proposición 2.11 Sea T la función tienda, entonces para toda $k \in \{0, \cdots, 2^n - 1\}$ existe $a_k \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ tal que $T^n(a_k) = a_k$.

Demostración. Sea $g(x) = T(x) - x$ para toda $x \in [0,1]$. Notemos por lo anterior que como $T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}])$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ entonces

$$T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(\tfrac{k}{2^n}) = 0 \text{ o } T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(\tfrac{k}{2^n}) = 1.$$

<u>*Caso 1*</u> Si $T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(\frac{k}{2^n}) = 0$.
Entonces

$$T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = 1,$$

entonces

$$g\left(\frac{k}{2^n}\right) = T^n\left(\frac{k}{2^n}\right) - \frac{k}{2^n} = T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\left(\frac{k}{2^n}\right) - \frac{k}{2^n} = 0 - \frac{k}{2^n} < 0$$

y

$$g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = T^n\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \frac{k+1}{2^n} = T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \frac{k+1}{2^n} =$$

$$1 - \frac{k+1}{2^n} = \frac{2^n - k - 1}{2^n} > 0.$$

Entonces

$$g\left(\frac{k}{2^n}\right) < 0 < g\left(\frac{k+1}{2^n}\right).$$

Entonces por *Teorema del Valor Intermedio*, existe $a_k \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ tal que $g(a_k) = 0$. Entonces $T^n(a_k) - a_k = 0$, es decir, $T^n(a_k) = a_k$.

<u>*Caso 2*</u> Si $T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(\frac{k}{2^n}) = 1$.
Entonces

$$T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = 0,$$

entonces

$$g\left(\frac{k}{2^n}\right) = T^n\left(\frac{k}{2^n}\right) - \frac{k}{2^n} = T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\left(\frac{k}{2^n}\right) - \frac{k}{2^n} = 1 - \frac{k}{2^n} = \frac{2^n - k}{2^n} > 0$$

y

$$g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = T^n\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \frac{k+1}{2^n} = T^n|_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \frac{k+1}{2^n} =$$

$$0 - \frac{k+1}{2^n} < 0.$$

Entonces

$$g\left(\frac{k}{2^n}\right) > 0 > g\left(\frac{k+1}{2^n}\right).$$

Entonces por *Teorema del Valor Intermedio*, existe $a_k \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ tal que $g(a_k) = 0$. Entonces $T^n(a_k) - a_k = 0$, es decir, $T^n(a_k) = a_k$.

Por lo tanto, existe $a_k \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ tal que $T^n(a_k) = a_k$ para cualquier $k \in \{0, \cdots, 2^n - 1\}$.

$\blacksquare$

Proposición 2.12 Sea T la función tienda, entonces $\overline{P(T)} = [0,1]$.

Demostración. Sea $x \in [0,1]$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = B_\varepsilon(x)$. Para alguna $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > \frac{1}{2^m}$, entonces para alguna $k \in \{0, 1, 2, \cdots, 2^m - 1\}$,

$$x \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\,.$$

Por la Proposición 2.11, existe $a_k \in \left(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)$ tal que $T^m(a_k) = a_k$. Entonces $a_k \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y es un punto periódico.

Así $x \in \overline{P(T)}$, y por lo tanto, $\overline{P(T)} = [0,1]$.

$\blacksquare$

Definición 2.13 Sea $x \in X$, diremos que x es un *punto casi periódico* si para cualquier abierto U de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+i}(x) \in U$ para alguna $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Y al conjunto de todos los puntos casi periódicos de f en X lo denotaremos por:

$$AP(f) = \{x \in X : x \text{ es casi periódico}\}.$$

Nota Todo punto periódico es casi periódico.

Lema 2.14 Si f es una función estrictamente creciente en $(a,b) \subset I = [0,1]$, entonces $(a,b) \cap AP(f) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que para $(a,b) \subset I$, $(a,b) \cap AP(f) \neq \emptyset$.

Entonces tomamos

$$x \in (a,b) \cap AP(f).$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = B_\varepsilon(x)$.

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left\{f^{n+i}(x) : i \in \{1, 2, 3, \cdots, N\}\right\} \cap U \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$, sea $j_0 \in \{1, \cdots, N\}$ tal que $f^{j_0}(x) \in U$.

Para $n = N$, sea $j_1 \in \{N+1, \cdots, N+N\}$ tal que $f^{j_1}(x) \in U$.

Para $n = 2N$, sea $j_2 \in \{2N+1, \cdots, 2N+N\}$ tal que $f^{j_2}(x) \in U$.

En general, para $n = kN$, sea $j_k \in \{kN+1, \cdots, kN+N\}$ tal que $f^{j_k}(x) \in U$.

Entonces hemos construido una sucesión $\{f^{j_m}(x) : m \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$j_m \in \{mN+1, \cdots, mN+N\} \quad \text{y} \quad f^{j_m}(x) \in U.$$

Como f es estrictamente creciente en (a, b) entonces para toda $m \in \mathbb{N}$

$$f^{j_m}(x) < f^{j_{m+1}}(x) \in (x, x+\varepsilon).$$

Esto implica que $o(x) \subset (x, x+\varepsilon)$. Entonces $\lim_{i\to\infty} f^i(x) = y$ para alguna $y \in (x, x+\varepsilon]$.

Ahora, sea $\varepsilon' = \frac{|y-x|}{2}$ y $U' = (x-\varepsilon', x+\varepsilon') = B_{\varepsilon'}(x)$.

Entonces existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $\{f^{n+i}(x) : i \in \{1, 2, 3, \cdots, N'\}\} \cap U \neq \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Siguiendo el mismo procedimiento obtenemos que $o(x) \subset (x, x+\varepsilon')$ y que $\lim_{i\to\infty} f^i(x) = y'$ para alguna $y' \in (x, x+\varepsilon']$, lo cual es una contradicción, pues $y' < y$.

Por lo tanto, $(a, b) \cap AP(f) = \emptyset$.

■

Ejemplo 2.15

- Sean $I = [0, 1]$ y f la función lineal definida por partes de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & si\ x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & si\ x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) & si\ x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Entonces $AP(f) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} = P(f)$. (Ver Fig. 2.7).

Demostración. Sea $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, entonces

$$f(0) = 0,\ f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2},\ f(1) = 1.$$

Sea U un abierto de x y sea $N = 1$, entonces

$$\{f^{n+i}(x) : i \in \{1\}\} = \{f^{n+1}(x)\} = \{f^n(f(x))\} = \{f^n(x)\} =$$

$$\{f^{n-1}(f(x))\} = \{f^{n-1}(x)\} = \cdots = \{f(x)\} = \{x\}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\{f^{n+i}(x) : i \in \{1\}\} \cap U = \{x\} \neq \emptyset$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x \in AP(f)$.

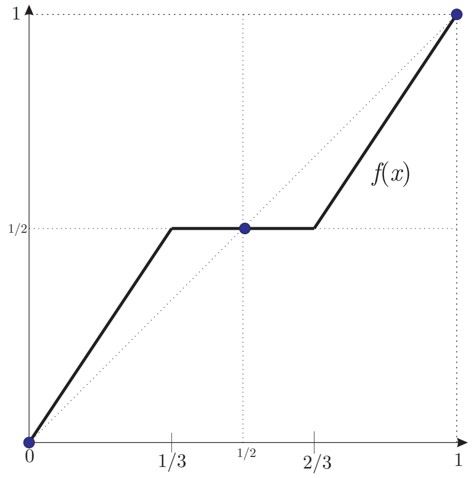

Figura 2.7:

Veamos que si $x \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $x \notin AP(f)$.

<u>*Caso 1*</u> Si $x \in (0, \frac{1}{3})$. Sea

$$U = \left[0, x + \frac{(\frac{1}{3} - x)}{2}\right)$$

abierto de x, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{3} \leq f^N(x) \leq \frac{1}{2},$$

entonces para toda $n > N$,

$$f^n(x) = \frac{1}{2} \notin U.$$

Por lo tanto, $x \notin AP(f)$.

<u>*Caso 2*</u> Si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Sea $\varepsilon = |x - \frac{1}{2}|$ y consideremos

$$U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = B_\varepsilon(x),$$

entonces

$$f(x) = \frac{1}{2} \notin U.$$

Por lo tanto, $x \notin AP(f)$.

<u>*Caso 3*</u> Si $x \in (\frac{2}{3}, 1)$. Sea $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$, y consideremos

$$U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = B_\varepsilon(x),$$

entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^N(x) \notin U,$$

entonces para toda $n > N$ tenemos que

$$f^n(x) > f^N(x).$$

Por lo tanto, $x \notin AP(f)$.

Por lo tanto, $AP(f) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Notemos que en este caso $AP(f) = F(f)$.

■

Definición 2.16 Sea $x_0 \in X$, diremos que $x \in X$ es un *punto* $\omega - limite$ de puntos en la órbita $o(x_0)$ si existe una subsucesión $\{f^{n_i}(x_0) : i \in \mathbb{N}\}$ de $o(x_0)$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = x$. Al conjunto de todos los $\omega - limite$ de la órbita $o(x_0)$ será el conjunto $\omega - limite$ de x_0 bajo f y lo denotaremos como:

$$\omega(x_0, f) = \{x \in X : x \text{ es } \omega - limite \text{ de } o(x_0, f)\}.$$

Denotaremos por:

$$\Lambda(f) = \bigcup_{x\in X} \omega(x, f)$$

al conjunto de todos los puntos $\omega - limite$ de f en X.

El siguiente ejemplo, no lo desarrollaremos, pues es elaborado y escapa al objetivo de esta tesis, sin embargo, lo utilizaremos como ejemplo en varios resultados.

Ejemplo 2.17

- Sean $X = I$ y $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función tienda de la Definición 2.9, entonces existe $x_0 \in I$ tal que $\omega(x_0, T) = I$. Entonces $\Lambda(T) = I$. (Ver Fig. 2.8).

  Demostración. En [14, Teorema 30, p. 17] se probó el siguiente teorema:

  Teorema Sea $f : I \to I$ una función continua (y suprayectiva). Si f es transitiva en I, entonces existe $x \in I$ tal que su órbita forma un conjunto denso en I y por tanto su órbita es aperiódica.

  No lo probaremos en este trabajo, pero es un resultado conocido que la función tienda T es transitiva [8, Proposición 8.2, p. 112], entonces existe $x_0 \in I$ tal que $\overline{o(x_0)} = I$. Es decir, para toda $y \in I$, existe una subsucesión de $o(x_0)$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_0)^{n_i} = y$, cumpliendo así la definición de $\omega - limite$. Por lo tanto, $I = \omega(x_0, f)$.

■

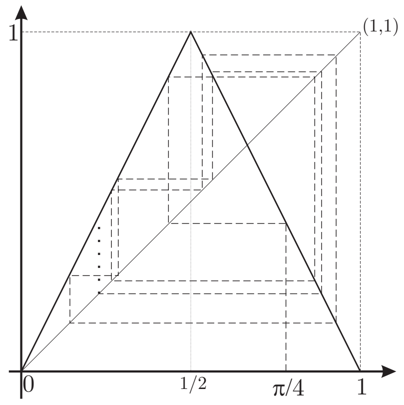

Figura 2.8:

Ejemplo 2.18

- Sea $X = [-1, 1]$ y $f : X \to X$ una función lineal definida por partes como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [-1, 0] \\ -x & si\ x \in [0, 1] \end{cases}$$

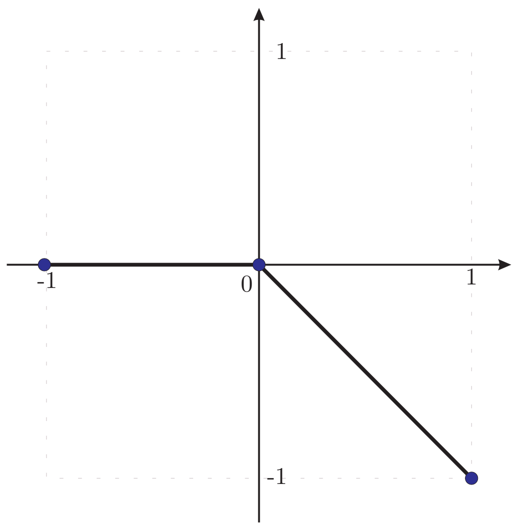

Figura 2.9:

Entonces para todo $x \in X$, $\omega(x, f) = \{0\}$.

Demostración. Sea $x \in X$. Por como está definida la función, 0 es punto fijo. Entonces tenemos dos casos.

<u>*Caso 1*</u> Sea $x \in [-1, 0]$.
Entonces $f(x) = 0$, entonces

$$f^k(f(x)) = f^k(0) = 0,$$

i. e.,

$$o(x) = \{x, 0, 0, 0, \cdots\}.$$

Así, toda subsucesión de $o(x)$ converge a 0. Por lo tanto, $\omega(x, f) = \{0\}$.

<u>*Caso 2*</u> Sea $x \in [0, 1]$.
Como $f([0, 1]) = [-1, 0]$, es decir,

$$f(x) = -x \in [-1, 0].$$

Luego,

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(-x) = 0.$$

Así,

$$o(x) = \{x, -x, 0, 0, \cdots\}.$$

Por lo tanto, $\omega(x, f) = \{0\}$.
Así concluimos que para toda $x \in X$, $\omega(x, f) = \{0\}$.

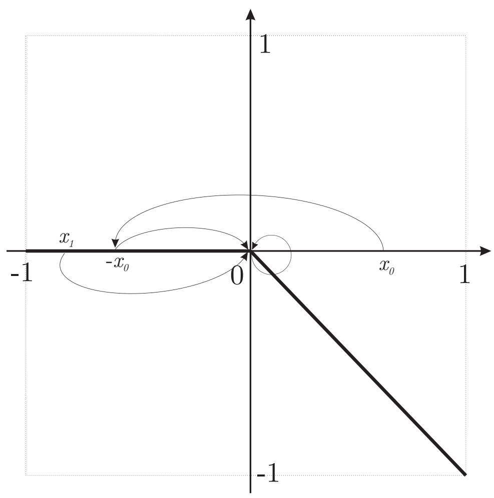

Figura 2.10:

■

Definición 2.19 Un punto $x_0 \in X$ es *punto recurrente de* f si para cualquier U abierto de x_0, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) \in U$. Así, el conjunto

$$R(f) = \{x \in X : x \text{ es un punto recurrente}\}$$

denotará a todos los puntos recurrentes de f en X.

Ejemplo 2.20

- Sea $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Dados θ, ψ, τ valores reales, donde $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\alpha, z \in \mathbb{C}$, tal que

$$\alpha = e^{i\psi},\ z = e^{i\theta} \text{ y } \psi = 2\pi\tau,$$

definimos $L_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ como $L_\alpha(z) = \alpha z$ una rotación irracional con respecto a 2π de $\mathbb{S}^1$.

Notemos que

$$L_\alpha(z) = \alpha z = e^{i\theta + 2\pi\tau}.$$

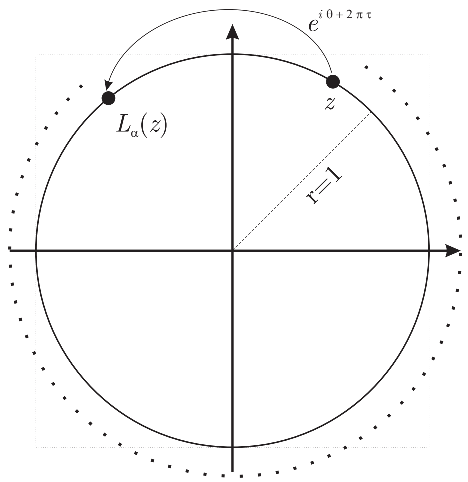

Figura 2.11:

Proposición 2.21 Si $L_\alpha(z)$ es una rotación irracional y para toda $z_0 \in \mathbb{S}^1$, la órbita de z_0 es densa en $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Sean $z_0 \in \mathbb{S}^1$, $\varepsilon > 0$ y $A \subset \mathbb{S}^1$ un subarco de longitud ε tal que $z_0 \in A$. Ahora, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2\pi}{k} < \varepsilon$. Denotemos:

$$L_\alpha^0(z_0) = z_0, L_\alpha^1(z_0) = z_1, L_\alpha^2(z_0) = z_2, \ldots, L_\alpha^k(z_0) = z_k,$$

y demos una partición P en k-subintervalos de longitud $\frac{2\pi}{k}$ del intervalo $[0, 2\pi]$.

En el intervalo $[0, 2\pi]$ tenemos k intervalos de diámetro $\frac{2\pi}{k}$ y tenemos

$$z_0, z_1, \cdots, z_k,$$

$k + 1$ puntos.

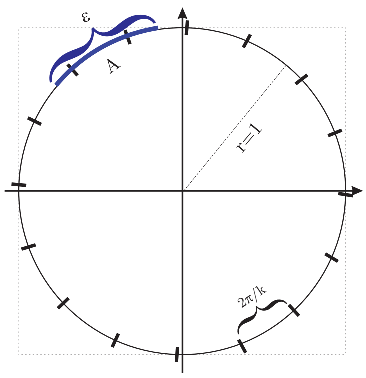

Figura 2.12:

Por principio de casillas, existe $j, l, n \in \{0, \cdots, k\}$ con $l \neq j$ tales que

$$z_j, z_l \in \left[\frac{2n\pi}{k}, \frac{2(n+1)\pi}{k}\right],$$

entonces

$$d(z_j, z_l) \leq \frac{2\pi}{k} < \varepsilon.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos poner $j > l$ y consideremos ahora la función:

$$L_\alpha^{j-l}(z_0) = e^{i\theta_0 + 2\pi\tau(j-l)},$$

es decir, la función que rota los puntos en $\mathbb{S}^1$ un ángulo de $2\pi\tau(j - l)$.

Notemos que $2\pi\tau(j-l)$ es irracional, ya que $\tau \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $j-l \in \mathbb{Z}^+$. Entonces:

$$L_\alpha^{j-l}(z_l) = L_\alpha^{j-l}(L_\alpha^l(z_0)) = L_\alpha^j(z_0) = z_j.$$

Por lo tanto,

$$L_\alpha^{j-l}(z_l) = z_j,$$

es decir que la función L_α^{j-l} rota los puntos a distancia menor que ε.

Consideremos:

$$o(z_0, L_\alpha^{j-l}) = \{L_\alpha^{0\ (j-l)}(z_0) = z_0, L_\alpha^{j-l}(z_0), L_\alpha^{2(j-l)}(z_0), \cdots, L_\alpha^{k(j-l)}(z_0), \cdots\}$$

la órbita de z_0 bajo la función L_α^{j-l}. Entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$d(L_\alpha^{n(j-l)}(z_0), L_\alpha^{(n+1)(j-l)}(z_0)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$L_\alpha^{m(j-l)}(z_0), L_\alpha^{(m+1)(j-l)}(z_0) \in A.$$

Por lo tanto, para toda $\varepsilon > 0$ y $A \subset \mathbb{S}^1$ subarco de longitud ε existe $z_i \in o(z_0, L_\alpha^{(j-l)})$ tal que

$$z_i \in A.$$

Como $o(z_0, L_\alpha^{(j-l)}) \subset o(z_0, L_\alpha)$ tenemos que $z_i \in o(z_0, L_\alpha) \cap A$, es decir, la órbita de z_0 es densa en $\mathbb{S}^1$.

■

Ahora, usaremos una definición equivalente de puntos de recurrencia, que dice, $x \in X$ es punto recurrente si y solo si x es $\omega - limite$ de si mismo, i.e., existe una subsuceción $\{n_i \in \mathbb{N} : i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = x$.

Proposición 2.22 Sea $x \in X$, x es $\omega - limite$ de $o(x)$ si y solo si x es recurrente, i.e., $x \in \omega(x, f)$ si y solo si $x \in R(f)$.

Demostración. Primero supongamos que x es $\omega - limite$ de $o(x)$. Sea U abierto de x. Demostraremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$.

Por hipótesis, sabemos que x es $\omega - limite$ de $o(x)$, i.e., existe una subsucesión $\{f^{n_i}(x) : i \in \mathbb{N}\}$ de $o(x)$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = x,$$

entonces para cualquier V abierto de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq N$

$$f^{n_i}(x) \in V.$$

Por lo tanto, x es recurrente.

Ahora tomemos $x \in R(f)$.

Caso 1. Si $x \in P(f)$.

Sea k el periodo de x. Entonces $f^k(x) = x$. Por lo tanto,

$$f^{2k}(x) = f(x) = x.$$

Y en general, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{nk}(x) = x.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^{nk}(x) = x$.

Así, $x \in \omega(x, f)$.

Caso 2. Si $x \in R(f) \setminus P(f)$.

Sea U abierto de x. Como $x \in R(f)$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x) \in U$. Sea U_1 abierto de x tal que

$$\textit{diam } (U_1) < 1$$

y

$$U_1 \subset U \setminus \{f(x), f^2(x), f^3(x), \cdots, f^{n_0}(x)\}.$$

Entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, tal que $f^{n_1}(x) \in U_1$. Sea U_2 abierto de x tal que

$$\textit{diam } U_2 < \frac{1}{2}$$

y

$$U_2 \subset U_1 \setminus \{f(x), f^2(x), f^3(x), \cdots, f^{n_0}(x), \cdots, f^{n_1}(x)\}.$$

Entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$, tal que $f^{n_2}(x) \in U_2$. De manera inductiva, construimos una subsucesión $\{f^{n_i}(x) : i \in \mathbb{N}\}$ de $o(x)$. Observemos que dada $\varepsilon > 0$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_j} < \varepsilon$. Como para toda $i > j$, $U_i \subset U_j$ entonces para toda $i > j$,

$$d(f^{n_i}(x), x) < \varepsilon.$$

Entonces $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = x$. Por lo tanto, $x \in \omega(x, f)$.

De este modo, hemos probado que las definiciones son equivalentes.

■

Definición 2.23 Sea $x \in X$, diremos que x es *no vagabundo* si para cualquier U abierto de x, existen $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(y) \in U$. Al conjunto de todos los no vagabundos, lo denotaremos por

$$\Omega(f) = \{x \in X : x \text{ es no vagabundo}\}.$$

Ejemplo 2.24

- Sea $I = [0, 1]$ y $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ la función tienda definida en Definición 2.9. Entonces $\Omega(T) = I$. (Ver Fig. 2.13).

  Demostración. Sean $x \in I$ y U abierto que contiene x. Sabemos por la Proposición 2.12 que $P(T)$ es denso en I, entonces existe $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(y) = y$. Por lo tanto, x cumple la definición de no vagabundo.

  ■

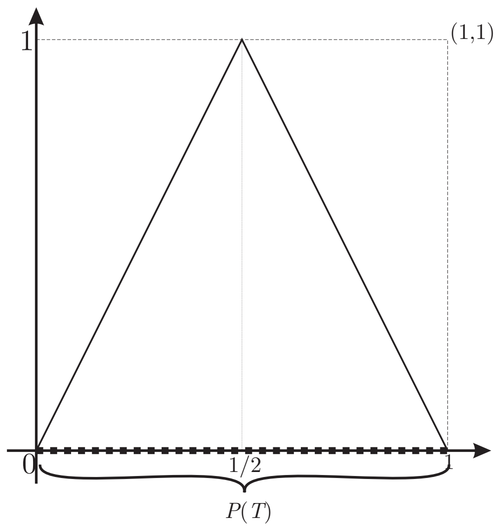

Figura 2.13:

Definición 2.25 [11, p.28] Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, diremos que Γ es una *$\varepsilon-$cadena de x a y* si $\Gamma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, donde $x_0 = x$, $x_n = y$ y para toda $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$. Además, x es un punto *recurrente por cadenas* de f si para $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena Γ de x a x. Al conjunto de todos los puntos recurrentes por cadenas lo denotaremos como:

$$CR(f) = \{x \in X : x \text{ es recurrente por cadenas}\}.$$

Ejemplo 2.26

- Sean $X = I$ y $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la función dada por $f(x) = x^2$. Entonces $CR(f) = \{0, 1\}$. (Ver Fig. 2.14).

Demostración. Sea $x_0 \in (0,1)$. Entonces

$$f([0, x_0]) = \left[0, {x_0}^2\right],$$

notemos que ${x_0}^2 < x_0$.

Sea $\varepsilon = x_0 - {x_0}^2 = x_0 - f(x_0)$ y supongamos que existe una ε -cadena que inicia en x_0

$$\Gamma = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Como $d(f(x_0), x_1) < \varepsilon$, tenemos que $|f(x_0) - x_1| < x_0 - f(x_0)$ entonces $f(x_0) - x_0 < f(x_0) - x_1$, entonces $-x_0 < -x_1$, así, $x_1 < x_0$. Por lo tanto, $f(x_1) < f(x_0)$ y además $x_1 \in [0, x_0)$.

Ahora, como $d(f(x_1), x_2) < \varepsilon$, tenemos que $|f(x_1) - x_2| < x_0 - f(x_0) < x_0 - f(x_1)$, entonces $f(x_1) - x_0 < f(x_1) - x_2$, entonces $-x_0 < -x_2$, lo que implica que $x_2 < x_0$. Por lo tanto, $f(x_2) < f(x_0)$ y además $x_2 \in [0, x_0)$.

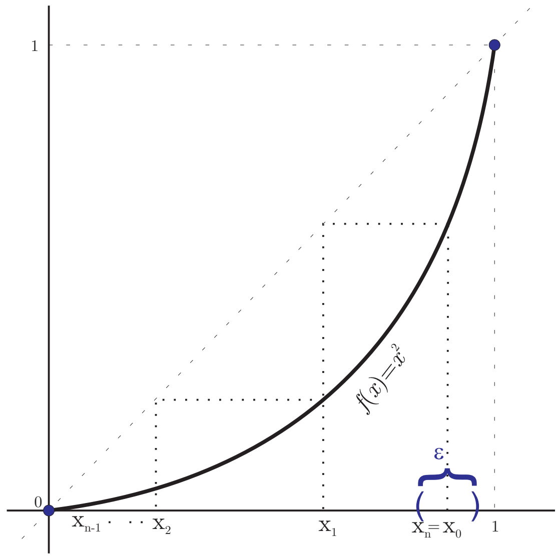

Figura 2.14:

Así, de manera inductiva, obtenemos que para toda i, $1 \leq i \leq n$, se tiene que $f(x_i) < f(x_0)$ y $x_i \in [0, x_0)$.

Por lo tanto, $x_n < x_0$ y $x_0 \notin CR(f)$.

■

Proposición 2.27 Sea X un continuo y $f : X \longrightarrow X$ una función continua. Entonces se cumplen las siguientes contenciones:

$$F(f) \subseteq P(f) \subseteq AP(f) \subseteq R(f) \subseteq \Lambda(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq CR(f)$$

Demostración.

1) $F(f) \subseteq P(f)$.

Sea $x \in F(f)$, entonces $f(x) = x$ y por definición de punto periódico, tomamos $n = 1$, entonces $f^1(x) = x$.

Por lo tanto, $x \in P(f)$.

2) $P(f) \subseteq AP(f)$.

Sean $x \in P(f)$ y U abierto tal que $x \in U$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$ y sea k el periodo de x. Entonces

$$x \in \{f^{n+i}(x) : i \in \{1, 2, 3, \cdots, k\}\} \cap U$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $x \in AP(f)$.

3) $AP(f) \subseteq R(f)$.

Sean $x \in AP(f)$ y U abierto de x, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{f^{n+i}(x) : i \in \{0, 1, \cdots, N\}\} \cap U \neq \emptyset$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen $y \in U$ y $j \in \{0, \cdots, N\}$ tales que $f^{n+j}(x) = y$. Así, $f^{n+j}(x) \in U$.

Por lo tanto, $x \in R(f)$.

4) $R(f) \subseteq \Lambda(f)$.

Sea $x \in R(f)$, por la Proposición 2.22 tenemos que x es $\omega - \textit{limite}$ de $o(x)$, i.e., $x \in \omega(x, f)$. Por definición, $\omega(x, f) \subset \Lambda(f)$.

Por lo tanto, $x \in \Lambda(f)$.

5) $\Lambda(f) \subseteq \Omega(f)$.

Sea $x \in \Lambda(f)$, entonces existe $y \in X$ tal que $x \in \omega(y)$, i.e., existe una subsucesión $\{f^{n_i}(y) : i \in \mathbb{N}\}$ de $o(y, f)$ que cumple que $\lim\limits_{i \to \infty} f^{n_i}(y) = x$.

Ahora, sea U abierto de x, como $\lim\limits_{i \to \infty} f^{n_i}(y) = x$, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para toda $j \geq J$, $f^{n_j}(y) \in U$. Sea $z = f^{n_J}(y) \in U$. Ahora, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_J + k = n_{J+1}$, entonces

$$f^k(z) = f^k(f^{n_J}(y)) = f^{n_J + k}(y) = f^{n_{J+1}}(y) \in U,$$

es decir, $f^k(z) \in U$.

Así, hemos encontrado $z \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $f^k(z) \in U$.

Por lo tanto, $x \in \Omega(f)$.

6) $\Omega(f) \subseteq CR(f)$.

Sean $x \in \Omega(f)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $U = B_\varepsilon(x) \cap f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Como $B_\varepsilon(x)$ es abierto y $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ es abierto, entonces U es abierto.

Como $x \in \Omega(f)$, existen $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(y) \in U$. Como $y \in U$ entonces $y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, entonces $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, i.e. $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. (Ver Fig. 2.15)

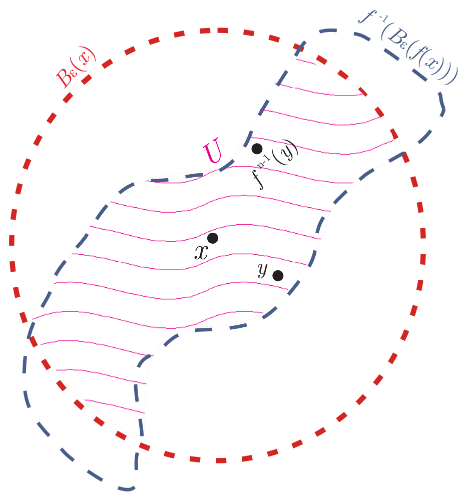

Figura 2.15:

Así, nombremos

$$x_0 = x,\ x_1 = f(y),\ x_2 = f^2(y),\ \cdots,\ x_{n-1} = f^{n-1}(y),\ x_n = x.$$

Notemos que

$$d(f(x_{n-1}), x_n) = d(f(f^{n-1}(y)), x_n) = d(f^n(y), x) < \varepsilon$$

pues $f^n(y) \in U$. Además, para $i \in \{1, 2, \cdots, n-2\}$,

$$d(f(x_i), x_{i+1}) = d(f(f^i(y)), f^{i+1}(y)) = d(f^{i+1}(y), f^{i+1}(y)) = 0 < \varepsilon.$$

Entonces para todo $x_i \in X$ con $i \in \{0, \cdots, n\}$, $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$.

Por lo tanto, $x \in CR(f)$.

■

Ahora, veremos unos ejemplos para demostrar que todas las contenciones de la Proposición 2.27 son propias.

Ejemplo 2.28

1) $F(f) \subsetneq P(f)$. Sean $X = \mathbb{S}^1$ y $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}z$. Entonces $F(f) = \emptyset$, mientras que $P(f) = X$, además de que el periodo de z es 8. (Ver Fig. 2.16) Por lo tanto,

$$F(f) = \emptyset \subsetneq X = P(f).$$

En [3, p. 79] podemos encontrar que cada elemento x del conjunto de Cantor se puede representar como $.x_1x_2x_3\cdots$, donde $x_i \in \{0, 1\}$, para toda $i \in \mathbb{N}$. A continuación, definiremos la función *sumadora*.

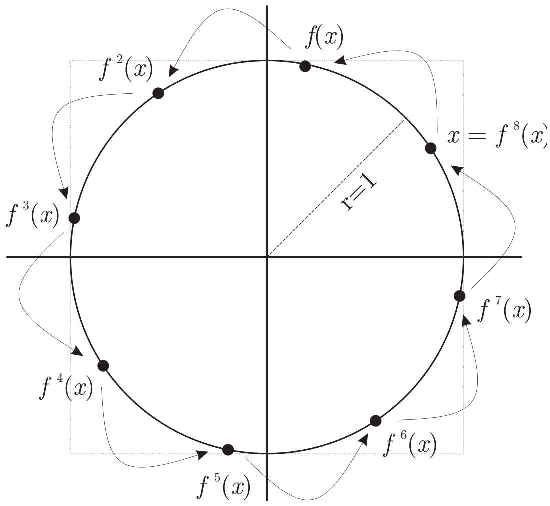

Figura 2.16:

Definición 2.29 [2, p. 133] Definimos un *entero 2-ádico* como una sucesión $\alpha = (a_0, a_1, \cdots)$, donde $a_i = 0$ o $a_i = 1$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Si tomamos $\beta = (b_0, b_1 \cdots)$ otro *entero 2-ádico*, la suma

$$\alpha + \beta = (c_0, c_1, \cdots)$$

está definida de la siguiente manera. Si $a_0 + b_0 < 2$ entonces $c_0 = a_0 + b_0$, pero si $a_0 + b_0 \geq 2$ entonces $c_0 = a_0 + b_0 - 2$ y sumamos 1 a la siguiente entrada. Los términos $c_1, c_2, \cdots$ están determinados sucesivamente de la misma forma. A esta operación suma de los *enteros 2-ádicos* la llamaremos función *sumadora*.

Ejemplos 2.30

- Sea $a = (1, 0, 1, 0, \cdots)$, i.e., $a = (a_0, a_1, a_2, \cdots)$ tal que $a_{2n} = 1$ y $a_{2n+1} = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $b = (0, 1, 0, 1, \cdots)$, i.e., $b = (b_0, b_1, b_2, \cdots)$ tal que $b_{2n} = 0$ y $b_{2n+1} = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a + b = (1, 1, 1, 1, \cdots)$.
- Sea $a = (1, 0, 1, 0, \cdots)$. Entonces $a + a = (0, 1, 0, 1, \cdots) = b$.
- Sea $c = (1, 1, 1, 1, 1, 0, \cdots)$, i.e., $c = (c_0, c_1, \cdots)$ tal que $1 = c_i$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $c_i = 0$ para $i \in \{5, 6, \cdots\}$. Sea $d = (1, 1, 1, \cdots)$, i.e., $d = (d_0, d_1, \cdots)$ tal que $d_i = 1$ para $i \in \{0, 1, 2\}$ y $d_i = 0$ para $i \in \{3, 4, \cdots\}$. Entonces $c + d = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \cdots)$.

Observación 2.31 Sea $i \in \mathbb{N}$. Definimos $\bar{i} = (x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots)$ tal que $x_j = 0$ si $j \neq i$ y $x_i = 1$. Definimos $f_i : X \longrightarrow X$ como $f_i(\alpha) = \alpha + \bar{i} =$

$(a_0+0, a_1+0, \cdots, a_{i-1}+0, a_i+1, \cdots) = (a_0, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i+1, \cdots)$.

Notemos que para $n = 2$, ${f_i}^2(\alpha) = f_i(f_i(\alpha)) = f_i(a_0, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i+1, \cdots) = (a_0, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i+2, \cdots)$.

En general, para $n \in \mathbb{N}$, ${f_i}^n(\alpha) = f_i({f_i}^{n-1}(\alpha)) = (a_0, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i+n, \cdots)$.

Además, observemos que para $r \in \mathbb{N}$ tenemos los siguientes casos.

Caso 1 Si $r = 2s$ para alguna $s \in \mathbb{N}$. Entonces

$$.x_1x_2\cdots x_{i-1}(x_i+r)\cdots = .x_1x_2\cdots x_{i-1}(x_i+(2s))\cdots =$$
$$.x_1x_2\cdots x_{i-1}x_i(x_{i+1}+s)\cdots .$$

Caso 2 Si $r = 2s+1$ con $s \in \mathbb{N}$. Entonces

$$.x_1x_2\cdots x_{i-1}(x_i+r)\cdots = .x_1x_2\cdots x_{i-1}(x_i+(2s+1))\cdots =$$
$$.x_1x_2\cdots x_{i-1}(x_i+1)(x_{i+1}+s)\cdots .$$

Como este proceso se puede repetir en la siguiente entrada, observamos que con cada paso vamos reduciendo a la mitad el valor sumado, pero a la entrada correspondiente le sumamos 0 o 1 (según el residuo sea par o impar respectivamente). Es decir, reducimos en mitades de una potencia de 2, digamos 2^m para alguna $m \in \mathbb{N}$. Entonces, el proceso termina en la entrada $i+m$. Es decir,

$$.x_1x_2\cdots x_{i-1}(x_i+r)\cdots =$$
$$.x_1\cdots x_{i-1}(x_i+c_i)(x_{i+1}+c_{i+1})\cdots(x_{i+m}+c_{i+m})(x_{i+(m+1)}+1)\cdots$$

donde $c_i \in \{0,1\}$ para toda $i \in \{1, \cdots, i+m+1\}$.

Notemos que si $x_{i+(m+1)} = 0$, esta expresión es igual a

$$.x_1x_2\cdots x_{i-1}(x_i+r)\cdots =$$
$$.x_1\cdots x_{i-1}(x_i+c_i)(x_{i+1}+c_{i+1})\cdots$$
$$\cdots(x_{i+m}+c_{i+m})(x_{i+(m+1)}+1)(x_{i+(m+2)})(x_{i+(m+3)})\cdots .$$

De lo contrario, sea $k > i+m+1$ tal que $x_k = 0$, entonces esta expresión se escribe como

$$.x_1x_2\cdots x_{i-1}(x_i+r)\cdots =$$
$$.x_1\cdots x_{i-1}(x_i+c_i)(x_{i+1}+c_{i+1})\cdots(x_{i+m}+c_{i+m})(x_{i+(m+1)}+1)\cdots$$
$$\cdots(x_{k-1}+1)(x_k+1)(x_{k+1})(x_{k+2})\cdots .$$

Esto nos servirá para el siguiente inciso.

Figura 2.17:

2) $P(f) \subsetneq AP(f)$. Sean X el conjunto de Cantor y $f : X \longrightarrow X$ la función sumadora. Entonces $P(f) = \emptyset$ mientras que $AP(f) = X$. (Ver Fig. 2.17)

Demostración Sea $f = f_1 : X \longrightarrow X$ como la definimos anteriormente. Sea $x \in X$ tal que $x = .x_1x_2x_3\cdots$ donde $x_i = 0$ o $x_i = 1$ para toda $i \in \{1, 2, 3, \cdots\}$. Supongamos que $x \in P(x)$, es decir, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(x) = x$.

Como $f^{n_1}(x) = .(x_1 + n_1)x_2x_3\cdots$ y $f^{n_1}(x) = x$ entonces

$$.(x_1 + n_1)x_2x_3\cdots = .x_1x_2x_3\cdots,$$

entonces $x_1 = (x_1 + n_1)$, es decir, $n_1 = 2n_2$ para alguna $n_2 \in \mathbb{N}$. Entonces $.(x_1 + n_1)x_2x_3\cdots = .x_1(x_2 + n_2)x_3\cdots$, pero como

$$f^{n_1}(x) = x,\ x_2 = (x_2 + n_2),$$

es decir, $n_2 = 2n_3$ para alguna $n_3 \in \mathbb{N}$. Entonces

$$.(x_1 + n_1)x_2x_3\cdots = .x_1x_2(x_3 + n_3)\cdots.$$

Como $f^{n_1}(x) = x$, entonces $x_3 = (x_3 + n_3)$, es decir, $n_3 = 2n_4$ para alguna $n_4 \in \mathbb{N}$. Así sucesivamente, hasta que para alguna $j \in \mathbb{N}$, $x_j = x_j + 2$, es decir, $.(x_1 + n_1)x_2\cdots(x_j + 2)x_{j+1}\cdots = .x_1x_2\cdots x_j(x_{j+1} + 1)\cdots$.

Entonces $x = f^{n_1}(x) = .(x_1 + n_1)x_2x_3\cdots = .x_1x_2\cdots x_j(x_{j+1} + 1)\cdots$, pero $x_{j+1} \neq (x_{j+1} + 1)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $x \notin P(f)$. Así, $P(f) = \emptyset$.

Ahora, mostremos que $AP(f) = X$.

Sea $x \in X$ tal que $x = .x_1x_2x_3\cdots$ donde $x_i = 1$ o $x_i = 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ pero $\frac{1}{2^{n-1}} \geq \varepsilon$. Entonces $B_{\frac{1}{2^n}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$. (Ver Fig. 2.18)

Observación 2.32 Entonces para todo y tal que $y = .x_1x_2x_3\cdots x_ny_{n+1}y_{n+2}\cdots$, donde $y_{n+i} = 0$ o $y_{n+i} = 1$ para toda $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $y \in B_\varepsilon(x)$.

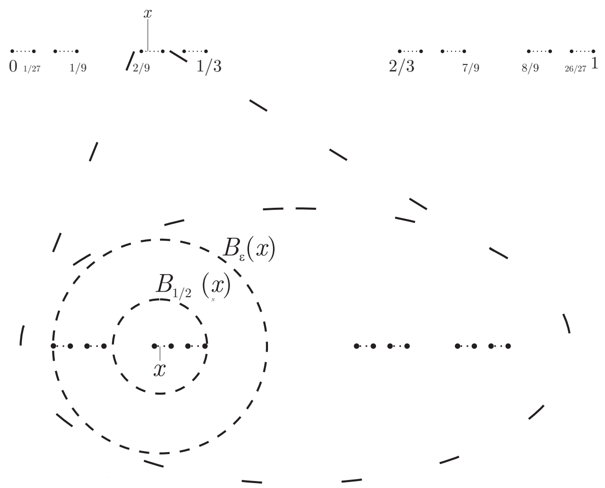

Figura 2.18:

Demostración. Se tiene que

$$\overline{d}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i} \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Sea $N = 2^n$, entonces

$$f^N(x) = f^N(.x_1x_2x_3\cdots x_nx_{n+1}\cdots) =$$

$$.(x_1+2^n)(x_2+2^{n-1})(x_3+2^{n-2})\cdots(x_n+2)(x_{n+1}+1)\cdots =$$

$$.x_1x_2x_3\cdots x_n(x_{n+1}+1)\cdots \in B_{\frac{1}{2^n}}(x).$$

Entonces $f^N(x) \in B_{\frac{1}{2^n}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$. (Ver Fig. 2.19)

■

Lema 2.33 Para toda $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \equiv 0 \mod N$ se tiene que $\{f^m(x)\} \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. (Ver Fig. 2.20)

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \equiv 0 \mod N$, entonces $m = k(N)$ para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$. Así,

$$f^m(x) = f^{kN}(x) = \underbrace{f^N(f^N(\cdots(f^N(x))))}_{k-veces} =$$

$$\underbrace{f^N(f^N(\cdots(f^N(.x_1x_2x_3\cdots x_n(x_{n+1}+1)\cdots))))}_{k-1-veces} =$$

$$\underbrace{f^N(f^N(\cdots(f^N(.x_1x_2x_3\cdots x_n(x_{n+1}+2)\cdots))))}_{k-2-veces} = \cdots =$$

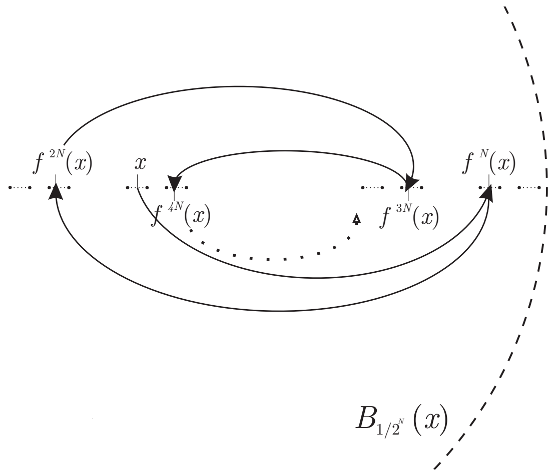

Figura 2.19:

$$f^N(.x_1x_2x_3\cdots x_n(x_{n+1}+k-1)\cdots).$$

Por la Observacion 2.32,

$$.x_1x_2x_3\cdots x_n(x_{n+1}+k)\cdots \in B_{\frac{1}{2^n}}(x)\subset B_\varepsilon(x).$$

Por lo tanto, $f^m(x)\in B_\varepsilon(x)$ y $\{f^m(x)\}\cap B_\varepsilon(x)\neq\emptyset$.

■

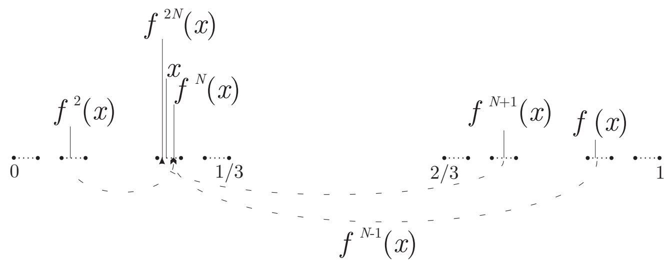

Figura 2.20:

Por lo tanto, $x\in AP(f)$.

3) $AP(f)\subsetneq R(f)$. Para este ejemplo se necesita teoría profunda que se aleja del objetivo de esta tesis, pero se puede encontrar en [6, p. 764].

4) $R(f)\subsetneq \Lambda(f)$. Sean $X=[0,1]$ y $T:X\longrightarrow X$ tal que T es la función tienda.

Demostración Observemos que $T(\frac{1}{2})=1$ y $T^n(\frac{1}{2})=0$ para toda $n\in\mathbb{N}, n>1$, entonces para $U=(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$, $T^n(\frac{1}{2})\notin U$, por lo tanto $\frac{1}{2}\notin R(T)$. Pero por el Ejemplo 2.17 existe $x_1\in X$ tal que $\omega(x_1,T)=X$, entonces

$\Lambda(T) = \bigcup_{x \in X} \omega(x, T) = X.$

Por lo tanto, $R(T) \subsetneq \Lambda(T)$. (Ver Fig. 2.21)

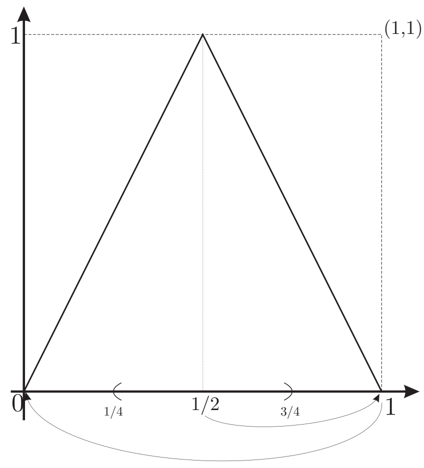

Figura 2.21:

5) $\Lambda(f) \subsetneq \Omega(f)$. Sean $I = [0,1]$ y $f : I \longrightarrow I$ la función lineal por partes definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & si\ x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ 3(\frac{1}{2} - x) & si\ x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & si\ x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ x - \frac{3}{4} & si\ x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Demostraremos que $x_0 = \frac{3}{4} \in \Omega(f)$, pero $x_0 \notin \Lambda(f)$. (Ver Fig. 2.22)

Demostración Primero demostraremos que $f^n(\frac{1}{3^{n-1}*4}) = \frac{3}{4}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por inducción sobre n.

Base inductiva Sea $n = 1$, entonces $f(\frac{1}{3^0*4}) = f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$.

Hipótesis inductiva Supongamos que $f^n(\frac{1}{3^{n-1}*4}) = \frac{3}{4}$.

Paso inductivo Por demostrar que $f^{n+1}(\frac{1}{3^n*4}) = \frac{3}{4}$.

Sea

$$f^{n+1}\left(\frac{1}{3^n * 4}\right) = f^n\left(f\left(\frac{1}{3^n * 4}\right)\right).$$

Como $\frac{1}{3^n*4} < \frac{1}{4}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$f\left(\frac{1}{3^n * 4}\right) = 3\left(\frac{1}{3^n * 4}\right) = \frac{1}{3^{n-1} * 4}.$$

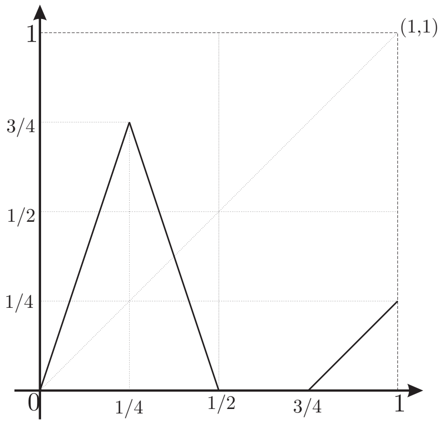

Figura 2.22:

Entonces $f^n(f(\frac{1}{3^n*4})) = f^n(\frac{1}{3^{n-1}*4})$ y por hipótesis de inducción, $f^n(\frac{1}{3^{n-1}*4}) = \frac{3}{4}$. Por lo tanto, $f^{n+1}(\frac{1}{3^n*4}) = \frac{3}{4}$.
Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1}(\frac{1}{3^n*4}) = \frac{3}{4}$.

Ahora, para $x_0 = \frac{3}{4}$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos $B_\varepsilon(x) = (\frac{3}{4}-\varepsilon, \frac{3}{4}+\varepsilon)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{4} + \frac{1}{3^{N-1}*4} \in (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}+\varepsilon)$. Llamemos $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^{N-1}*4}$, entonces

$$f(y) = y - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^{N-1}*4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{3^{N-1}*4}.$$

Por lo anterior, sabemos que $f^N(\frac{1}{3^{N-1}*4}) = \frac{3}{4} \in B_\varepsilon(\frac{3}{4})$, entonces

$$f^{N+1}(y) = f^N(f(y)) = f^N\left(\frac{1}{3^{N-1}*4}\right) = \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, existen $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^{N-1}*4} \in B_\varepsilon(\frac{3}{4})$ y $m = N+1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(y) = \frac{3}{4} \in B_\varepsilon(\frac{3}{4})$. Por lo tanto, $x_0 = \frac{3}{4} \in \Omega(f)$.

Supongamos que $\frac{3}{4} \in \Lambda(f)$, entonces existe $x \in I$ tal que $\frac{3}{4} \in \omega(x, f)$, es decir, existe $\{f^{n_i}(x) : i \in \mathbb{N}\}$ subsucesión de $o(x)$, tal que $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = \frac{3}{4}$.

Notemos que $f^{n_i}(x) \notin (\frac{3}{4}, 1]$, pues $\max(f) = \frac{3}{4}$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{8}$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_j}(x) \in \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$, entonces $f(f^{n_j}(x)) = f^{n_j+1}(x) = 0$. Por lo tanto, para toda $k \in \mathbb{N}$, $f^{n_j+k}(x) = 0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = 0$. Lo cual es una contradicción, pues $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = \frac{3}{4} \neq 0$.

Por lo tanto, $\frac{3}{4} \notin \Lambda(f)$ y $\Lambda(f) \subsetneq \Omega(f)$.

6) $\Omega(f) \subsetneq CR(f)$. Sean $I = [0,1]$ y $f : I \longrightarrow I$ la función lineal por partes definida por

$$f(0) = 0, f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, f\left(\frac{2}{3}\right) = 1, f(1) = 0.$$

(Ver Fig. 2.23)

$$f(x) = \begin{cases} 3x & si\ x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1 & si\ x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ -3x+3 & si\ x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

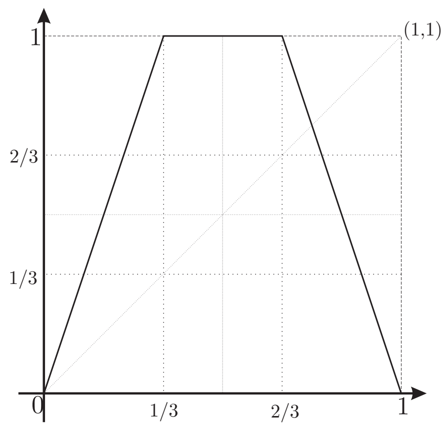

Figura 2.23:

Demostración. Sea $x_0 = \frac{1}{2}$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_0}{3^N} < \varepsilon$. Notemos que $f(x_0) = 1$ y $f(1) = 0$, entonces $d(f(1), \frac{x_0}{3^N}) = |0 - \frac{x_0}{3^N}| < \varepsilon$. Además para $i \in \{1, \cdots N\}$, $\frac{x_0}{3^i} < \frac{1}{2*3^i} < \frac{1}{3}$, por tanto $f(\frac{x_0}{3^N}) = 3 * \left(\frac{x_0}{3^i}\right) = \frac{x_0}{3^{i-1}}$.

Por tanto,

$$\Gamma = \{x_0, 1, \frac{x_0}{3^N}, \frac{x_0}{3^{N-1}}, \cdots, \frac{x_0}{3}, x_0\}$$

es una ε - cadena de x_0 en sí mismo y que $x_0 \in CR(f)$. Ahora, como $x_0 \in U = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ abierto y $f(U) = \{0\}$, además de que $f(0) = 0$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $f^n(U) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, $x_0 \notin \Omega(f)$.

Hemos probado que $F(f) \subsetneq P(f) \subsetneq AP(f) \subsetneq R(f) \subsetneq \Lambda(f) \subsetneq \Omega(f) \subsetneq CR(f)$, lo cual justifica la importancia de la definición de cada uno de estos conjuntos.

Ahora vamos a empezar el capítulo 3.

Capítulo 3

Primera parte del Teorema A

Para este capítulo, primero probaremos algunas proposiciones útiles para demostrar las partes del teorema que se tratarán a continuación.

Proposición 3.1 Sean $f : X \longrightarrow X$ continua y X un continuo, entonces para toda $x \in X$, $\omega(x, f) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $x \in X$. Como X es un continuo, entonces X es compacto, entonces la órbita de x, $o(x)$, tiene una subsucesión $\{f^{n_i}(x) : i \in \mathbb{N}\}$ que converge a un punto $y \in X$, es decir, $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y$. Así, por la definición de $\omega - limite$, $y \in \omega(x, f)$.

Por lo tanto, $\omega(x, f) \neq \emptyset$.

■

Proposición 3.2 Sea $f : X \longrightarrow X$ continua, entonces para toda $x \in X$, $\omega(x, f)$ es cerrado.

Demostración. Si $\omega(x, f) = \emptyset$ entonces $\omega(x, f)$ es cerrado, pues el conjunto vacío es cerrado.

Así, supongamos que $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Sean $y_0 \in X$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en $\omega(x, f)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Demostraremos que $y_0 \in \omega(x, f)$.

Como $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y_0, entonces para $j = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_{n_1}, y_0) < \frac{j}{2}.$$

Dado que $y_{n_1} \in \omega(x, f)$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{k_1}(x) \in B_{\frac{1}{2}}(y_{n_1}) \subset B_1(y_0).$$

Para $j = 2$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$, tal que

$$d(y_{n_2}, y_0) < \frac{1}{2j}.$$

Como $y_{n_2} \in \omega(x, f)$, entonces existe $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$, tal que

$$f^{k_2}(x) \in B_{\frac{1}{2j}}(y_{n_2}) \subset B_{\frac{1}{j}}(y_0).$$

Inductivamente, para toda $j \in \mathbb{N}$ existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que $\{k_1, \cdots, k_j\} \subset \mathbb{N}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_j$, y $f^{k_j}(x) \in B_{\frac{1}{j}}(y_0)$. (Ver Fig. 4.1)

Entonces la subsucesión $\{f^{k_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ de $o(x, f)$ cumple que $d(f^{k_j}(x), y_0) < \frac{1}{j}$, por tanto

$$\lim_{j \to \infty} f^{k_j}(x) = y_0.$$

Por lo tanto, $y_0 \in \omega(x, f)$. Así, $\omega(x, f)$ es cerrado.

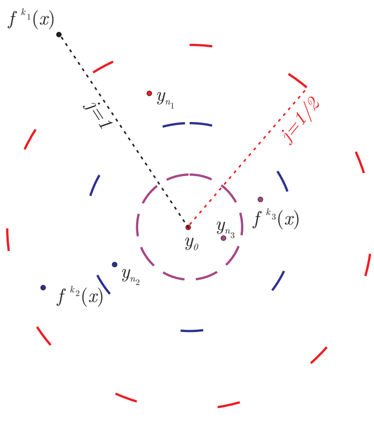

Figura 3.1:

∎

Proposición 3.3 Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua y X un espacio métrico compacto. Para toda $x \in X$ se tiene que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Es decir, $\omega(x, f)$ es fuertemente invariante bajo f.

Demostración. Sean $x \in X$ y consideremos $\omega(x, f)$.

Demostraremos que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$.

Primero sea $y_0 \in f(\omega(x,f))$. Entonces existe $z_0 \in \omega(x,f)$ tal que

$$f(z_0) = y_0.$$

Como $z_0 \in \omega(x,f)$ entonces existe una subsucesión $\{f^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ de $o(x,f)$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = z_0.$$

Como f es continua,

$$f\left(\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)\right) = \lim_{i\to\infty} f(f^{n_i}(x)) = \lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x).$$

Por otro lado,

$$f\left(\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)\right) = f(z_0) = y_0.$$

Así,

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x) = y_0.$$

Entonces la subsucesión $\{f^{n_i+1}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ de $o(x,f)$ cumple que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x) = y_0.$$

Por lo tanto, $y_0 \in \omega(x,f)$.

Ahora sea $y_0 \in \omega(x,f)$. Entonces existe una subsucesión $\{f^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ de $o(x,f)$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y_0.$$

Como X es compacto y

$$\{f^{n_i-1}(x)\}_{i=1}^{\infty} \subset X$$

es una sucesión de X, entonces existe una subsucesión $\{f^{n_{i_j}-1}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ y un punto $z_0 \in X$ tales que

$$\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x) = z_0.$$

Entonces $z_0 \in \omega(x,f)$. Además,

$$f(z_0) = f\left(\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x)\right) = \lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(x) = y_0.$$

Entonces

$$y_0 = f(z_0) \in f(\omega(x,f)).$$

Por lo tanto, $f(\omega(x,f)) = \omega(x,f)$. De este modo, $\omega(x,f)$ es fuertemente invariante.

■

Proposición 3.4 Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\omega(f^k(x), f) = \omega(x, f)$.

Demostración Primero tomaremos $k \in \mathbb{N}$ y $y \in \omega(f^k(x), f)$. Entonces existe una subsucesión $\{f^{n_j}(f^k(x)) : j \in \mathbb{N}\}$ de $o(f^k(x))$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} f^{n_j}(f^k(x)) = \lim_{j\to\infty} f^{k+n_j}(x) = y.$$

Sea $m_j = k + n_j$, entonces

$$\lim_{j\to\infty} f^{m_j}(x) = y$$

y $\{f^{m_j}(x) : j \in \mathbb{N}\}$ es una subsucesión de $o(x)$.

Por lo tanto, $y \in \omega(x, f)$.

Ahora para el regreso, sean $k \in \mathbb{N}$ y $y \in \omega(x, f)$. Entonces existe una subsucesión $\{f^{n_j}(x) : j \in \mathbb{N}\}$ de $o(x)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} f^{n_j}(x) = y.$$

Como $k, n_j \in \mathbb{N}$, entonces existe $l > 0$ tal que $k < n_i$ para toda $l \leq i$. Entonces para toda $i \geq l$, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $n_i = k + m_i$. Por lo tanto,

$$y = \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = \lim_{i\to\infty} f^{k+m_i}(x) = \lim_{i\to\infty} f^{m_i}(f^k(x)).$$

Por lo que la subsucesión $\{f^{m_i}(f^k(x)) : i \geq l\}$ de $o(f^k(x))$ cumple que

$$\lim_{i\to\infty} f^{m_i}(f^k(x)) = y.$$

De manera que, $y \in \omega(f^k(x), f)$.

Por lo tanto, $\omega(f^k(x), f) = \omega(x, f)$.

■

Definición 3.5 [2, p. 91] Dado un continuo X y una función continua $f : X \longrightarrow X$, decimos que un conjunto $M \subset X$ es *minimal con respecto a* f, si M es no vacío, cerrado e invariante bajo f, es decir, $f(M) \subset M$, además de que todo subconjunto propio, no vacío y cerrado , K, de M no es invariante.

Proposición 3.6 Un conjunto M es minimal si y solo si $\omega(x, f) = M$ para toda $x \in M$.

Demostración Primero demostraremos la ida. Sean M conjunto minimal y $x \in M$. Sabemos por las Proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3 que $\omega(x, f)$ es no vacío, cerrado y fuertemente invariante, respectivamente. Ahora, sea $y \in \omega(x, f)$ entonces existe $\{f^{n_k}(x) : k \in \mathbb{N}\}$ subsucesión de $o(x)$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y.$$

Como para toda $k \in \mathbb{N}$, $f^{n_k}(x) \in f^{n_k}(M) \subset M$ por ser M minimal, M es cerrado y por tanto $y \in M$. Hemos probado que $\omega(x, f) \subset M$. Pero M es minimal, por lo tanto $M = \omega(x, f)$.

Ahora para el regreso, sea $\omega(x, f) = M$ para toda $x \in M$, entonces por las Proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3, M es no vacío, cerrado e invariante. Más aún, sea $N \subset M$ un conjunto minimal, y sea $z \in N$. Por el argumento anterior, $\omega(z, f) = N$ y $\omega(z, f) = M$. Por lo tanto, $M = N$ y concluimos que M es minimal.

■

Lema 3.7 Sea $x \in X$ un punto recurrente pero no casi periódico ($x \in R(f)\backslash AP(f)$), entonces existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y una sucesión creciente $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{n_k}(x) \in U \quad \text{y} \quad \{f^{n_k+i}(x) : i \in \{1, \cdots, k\}\} \cap U = \emptyset.$$

Demostración. Como $x \notin AP(f)$, existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y para toda $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ que cumple que $\{f^{n_k+i}(x) : i \in \{1, \cdots, k\}\} \cap U = \emptyset$.

Sea $N \subset \mathbb{N}$ tal que $n \in N \Leftrightarrow f^n(x) \in U$. Por ser x un punto recurrente, N se puede expresar como una sucesión creciente de números naturales $\{n_m : m \in \mathbb{N}\}$ tal que $f^{n_m}(x) \in U$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y si $n_m + i \notin N \Rightarrow f^{n_m+i}(x) \notin U$.

Afirmación 1. Para toda $k \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$N_k = \{m \in \mathbb{N} : f^{n_m}(x) \in U \text{ y } \{f^{n_m+1}(x), \cdots, f^{n_m+k}(x)\} \cap U = \emptyset\}$$

es infinito.

Supóngase por el contrario que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que N_k es finito o vacío, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq M$, $f^{n_m}(x) \in U$ y $\{f^{n_m+1}(x), \cdots, f^{n_m+k}(x)\} \cap U \neq \emptyset$ (si N_k es vacío, $M = 1$ sirve).

Sea $i = \text{mín}\{1, \cdots, k\}$ tal que $f^{n_m+i}(x) \in U$, por como construimos la sucesión $\{n_m : m \in \mathbb{N}\}$, $n_m + i = n_{m+1}$.

Observación 1. Para toda $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_M$, $\{f^{n+1}(x), \cdots, f^{n+k}(x)\} \cap U \neq \emptyset$.

<u>*Caso 1*</u> Si $n = n_m$ para alguna $m \geq M$, entonces $\{f^{n_m+1}(x), \cdots, f^{n_m+k}(x)\} \cap U \neq \emptyset\}$.

<u>*Caso 2*</u> Si $n \neq n_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces $f^n(x) \notin U$y $n_M < n$, sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0 \geq M$ y $n_M \leq n_{m_0} < n < n_{m_0+1}$. Sabemos que $\{f^{n_{m_0}+1}(x), \cdots, f^{n_{m_0}+k}(x)\} \cap U \neq \emptyset$.

Veamos que $f^{n_{m_0}+1}(x) \notin U$. Si $f^{n_{m_0}+1}(x) \in U$, por la manera en que elegimos al conjunto M, $n_{m_0} + 1 = n_{m_0+1}$ y $n_{m_0} < n < n_{m_0} + 1$, lo cual es una contradicción.

Sea $j = \text{mín}\{i : f^{n_{m_0}+i}(x) \in U\}$, como $f^{n_{m_0}+1}(x) \notin U$ tenemos que

$$2 \leq j \leq k, \quad \text{y} \quad n_{m_0} + j = n_{m_0+1},$$

de manera que

$$n_{m_0} + 1 \leq n < n_{m_0+1} = n_{m_0} + j \leq n_{m_0} + k.$$

Como

$$|n_{m_0} + j - (n_{m_0} + 1)| = j - 1,$$

entonces

$$1 \leq |n - (n_{m_0} + j)| = i \leq j - 1 < k,$$

por lo que $n + i = n_{m_0} + j = n_{m_0+1}$ y $f^{n+i}(x) \in U$.

Por lo tanto, $\{f^{n+1}(x), \cdots, f^{n+k}(x)\} \cap U \neq \emptyset$ y la Observación 1 queda probada.

Sea $K = \text{máx}\{k, n_M\}$.

Observación 2. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{f^{n+1}(x), \cdots, f^{n+K}(x)\} \cap U \neq \emptyset$.

Por la Observación 1, para toda $n \geq n_M$ existe $i \in \{1, \cdots, k\} \subset \{1, \cdots, k, \cdots, K\}$ tal que $f^{n+1}(x) \in U$. Por lo tanto, para toda $n \geq n_M$,

$$\{f^{n+1}(x), \cdots, f^{n+K}(x)\} \cap U \neq \emptyset.$$

Si $n_M \neq 1$, para $n < n_M$, sea $i = n_M - n < K$, entonces $f^{n+i}(x) = f^{n+n_M-n}(x) = f^{n_M}(x) \in U$.

Por lo tanto, si $n < n_M$, $\{f^{n+1}(x), \cdots, f^{n+K}(x)\} \cap U \neq \emptyset$ y la Observación 2 queda demostrada.

La Observación 2 contradice que $x \notin AP(f)$. Esta contradicción viene de suponer que para alguna $k \in \mathbb{N}$, N_k es finito. Por tanto, para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$N_k = \{m \in \mathbb{N} : f^{n_m}(x) \in U \quad \text{y} \quad \{f^{n_m+1}(x), \cdots, f^{n_m+k}(x)\} \cap U = \emptyset\}$$

es un conjunto infinito y la Afirmación 1 queda demostrada.

Hemos probado que existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ y un abierto U de X tal que $x \in U$ y tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ el conjunto:

$$N_k = \{m \in \mathbb{N} : f^{n_m}(x) \in U \quad \text{y} \quad \{f^{n_m+1}(x), \cdots, f^{n_m+k}(x)\} \cap U = \emptyset\}$$

es infinito.

Queremos probar que existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que para toda k, $f^{n_k}(x) \in U$ y

$\{f^{n_k+1}(x), \cdots, f^{n_k+k}(x)\} \cap U = \emptyset$.

Para $k = 1$, sea $m_1 = \min\{m \in N_1\}$ y sea $a_1 = n_{m_1}$, entonces $f^{n_1}(x) \in U$ y $f^{n_1+1}(x) \notin U$.

Supongamos que hemos construido $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ tal que para $j \in \{1, \cdots, k\}$, $f^{a_j}(x) \in U$ y $\{f^{a_j+1}(x), \cdots, f^{a_j+j}(x)\} \cap U = \emptyset$.

Sea $m_{k+1} = \min\{m \in N_{k+1}$ y $m > a_k\}$. Sea $a_{k+1} = n_{m_{k+1}}$, entonces $f^{a_{k+1}}(x) = f^{n_{m_{k+1}}}(x) \in U$ y $\{f^{a_{k+1}}(x), \cdots, f^{a_{k+1}+(k+1)}(x)\} \cap U = \emptyset$, pues $a_{k+1} \in N_{k+1}$. Hemos construido una sucesión creciente $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, tal que $f^{a_k}(x) \in U$ y $\{f^{a_k+1}(x), \cdots, f^{a_k+k}(x)\} \cap U = \emptyset$ y con esto terminamos la demostración del Lema 3.7.

■

Proposición 3.8 Sea M un conjunto minimal, entonces cualquier punto $x \in M$ es casi periódico.

Demostración Sea M minimal y sea $x \in M$. Primero notemos que por la Proposición 3.6, $M = \omega(x, f)$, entonces por la Proposición 2.22, $x \in R(f)$. Supongamos por el contrario que x no es casi periódico.

Por el Lema 3.7, existe un abierto $U \subset X$, con $x \in U$ y una sucesión creciente de números naturales $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, que cumple que para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{n_k}(x) \in U$$

pero

$$f^n(x) \notin U$$

para $n \in \{n_k + 1, \cdots, n_k + k\}$. Veamos que si

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y,$$

entonces $y \in \overline{U} \cap M$. Como $f^{n_k}(x) \in U \subset \overline{U}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ entonces $y \in \overline{U}$. Además $\{f^{n_k}(x) : k \in \mathbb{N}\}$ es subsucesión de $o(x)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$$

entonces $y \in \omega(x, f) = M$. Por lo tanto $y \in \overline{U} \cap M$.

Por otro lado, $y \in M$, entonces $M = \omega(y, f)$, entonces $y \in R(f)$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(y) \in U$. Entonces existe V abierto con $y \in V$ tal que

$$f^m(V) \subset U.$$

Como

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$$

y V es un abierto que tiene a y, existe $i \geq m$ tal que

$$f^{n_i}(x) \in V.$$

Entonces

$f^{n_i+m}(x) = f^m(f^{n_i}(x)) \in U$, lo cual es una contradicción,

ya que supusimos que

$$f^n(x) \notin U$$

para $n \in \{n_i + 1, \cdots, n_i + i\}$.

Por lo tanto, $x \in AP(f)$.

■

Proposición 3.9 Si $x \in R(f)$ entonces $\overline{o(x)} = \omega(x, f)$.

Demostración Probemos primero que $\omega(x, f) \subset \overline{o(x)}$.

Sea $y \in \omega(x, f)$ entonces existe $\{f^{n_k}(x) : k \in \mathbb{N}\}$ subsucesión de $o(x)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y.$$

Por lo tanto, $y \in \overline{o(x)}$.

Ahora probemos que $\overline{o(x)} \subset \omega(x, f)$.

Sea $y \in \overline{o(x)}$. Como $x \in R(f)$ entonces existe $\{f^{n_k}(x) : k \in \mathbb{N}\}$ subsucesión de $o(x)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = x,$$

entonces

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)\right) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k+1}(x),$$

entonces $f(x) \in \omega(x, f)$. Así, $f^n(x) \in \omega(x, f)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$o(x) \subset \omega(x, f),$$

entonces

$$\overline{o(x)} \subset \overline{\omega(x, f)} = \omega(x, f).$$

Por lo tanto, $\overline{o(x)} = \omega(x, f)$.

■

Lema 3.10 Si $x \in AP(f)$ entonces $\overline{o(x)}$ es minimal.

Demostración Supongamos que $x \in AP(f)$ pero $\overline{o(x)}$ no es minimal. Entonces existe $L \subset \overline{o(x)}$ propio, no vacío, cerrado e invariante.

Afirmación. $x \notin L$. Supongamos que $x \in L$. Como L es invariante entonces $f(x) \in L$. Más aún, $f^n(x) \in L$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$o(x) \subset L,$$

entonces

$$\overline{o(x)} \subset \overline{L} = L \subsetneq \overline{o(x)},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \notin L$.

Sea U un abierto con $x \in U$ tal que $\overline{U} \cap L = \emptyset$. Como $x \in AP(f)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{f^{k+i}(x) : i \in \{0, \cdots, N\}\} \cap U \neq \emptyset$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como X es espacio métrico, existe W abierto tal que $L \subset W$ y $W \cap U = \emptyset$. Como L es compacto existe $\delta_0 > 0$ tal que para toda $p \in L$, $B_{\delta_0}(p) \subset W$. Llamemos

$$\mathcal{U}_0 = \{V_p^0 = B_{\delta_0}(p) : p \in L\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_0 = \{V_1^0, \cdots, V_{s_0}^0\}$$

a una subcubierta finita de $\mathcal{U}_0$.

Además, $V_0 = V_1^0 \cup \cdots \cup V_{s_0}^0$, entonces $L \subset V_0 \subset W$.

Por la continuidad uniforme de f, existe $\delta_1 > 0$ e $i \in \{1, \cdots, s_0\}$ tales que

$$f\left(B_{\delta_1}(p)\right) \subset B_{\delta_0}(f(p)) \quad \text{y} \quad f\left(B_{\delta_1}(p)\right) \subset V_i^0.$$

Llamemos

$$\mathcal{U}_1 = \{V_p^1 = B_{\delta_1}(p) : p \in L\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_1 = \{V_1^1, \cdots, V_{s_1}^1\}$$

a una subcubierta finita de $\mathcal{U}_1$.

Además, $V_1 = V_1^1 \cup \cdots \cup V_{s_1}^1$, entonces $L \subset V_1 \subset V_0 \subset W$. Por lo que

$$f\left(V_p^1\right) \subset V_{f(p)}^0, \quad f(V_p^1) \subset V_i^0$$

para alguna $i \in \{1, \cdots, s_0\}$ y existe $\delta_2 > 0$ e $i \in \{1, \cdots, s_1\}$ tales que

$$f\left(B_{\delta_2}(p)\right) \subset B_{\delta_1}(f(p)) \quad \text{y} \quad f^2\left(B_{\delta_2}(p)\right) \subset V_i^0, \quad f^2\left(B_{\delta_2}(p)\right) \subset B_{\delta_0}(f^2(p)).$$

Llamemos

$$\mathcal{U}_2 = \{V_p^2 = B_{\delta_2}(p) : p \in L\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_2 = \{V_1^2, \cdots, V_{s_2}^2\}$$

a una subcubierta finita de $\mathcal{U}_2$.

Además, $V_2 = V_1^2 \cup \cdots \cup V_{s_2}^2$, entonces $L \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset W$. Por lo que

$$f^2(V_p^2) \subset f(V_{f(p)}^1) \subset V_{f^2(p)}^0.$$

Inductivamente para $j \in \{1, \cdots, N\}$ podemos construir

$$\mathcal{U}_j\{V_p^j = B_{\delta_j}(p) : p \in L\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_j = \{V_1^j, \cdots, V_{s_j}^j\}$$

a una subcubierta finita de $\mathcal{U}_j$ tales que

$$V_p^j \subset V_p^{j-1} \subset \cdots \subset V_p^0 \subset W$$

y

$$f^j(V_p^j) \subset f^{j-1}\left(V_{f(p)}^{j-1}\right) \subset f^{j-2}\left(V_{f^2(p)}^{j-2}\right) \subset \cdots \subset V_{f^j(p)}^0 \subset W.$$

Llamemos $V_j = V_1^j \cup \cdots \cup V_{s_j}^j$, entonces $L \subset V_j \subset V_{j-1} \subset \cdots \subset V_0 \subset W$.

Sea $V = \bigcap\limits_{j=1}^{N} V_j$ entonces $L \subset V$ y sea $z \in V$. De manera que $z \in V^j_{k_j}$ para toda $j \in \{1, \cdots, N\}$ y para alguna $k_j \in \{1, \cdots, s_j\}$ y $V^j_{k_j} = V^j_{p_k}$ para alguna $p_k \in L$. Entonces

$$f^j(z) \in f^j\left(V^j_{k_j}\right) = f^j\left(V^j_{p_k}\right) \subset V^0_{f^j(p_k)} \subset W.$$

Como $W \cap V = \emptyset$, $f^j(z) \notin U$. Entonces $f^j(V) \cap U = \emptyset$ para toda $j \in \{0, \cdots, N\}$. Como $L \subset \overline{o(x)}$ y V es un abierto tal que $L \subset V$ tenemos que $V \cap o(x) \neq \emptyset$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in V$ y como $x \in AP(f)$ existe $q \in \{1, \cdots, N\}$ tal que $f^{m+q}(x) \in U$. Entonces para $j = q$ y $z = f^m(x) \in V$ tenemos que $f^j(z) \in U$, lo cual es una contradicción.

La contradicción viene de suponer que $\overline{o(x)}$ no es minimal.

Por lo tanto, $\overline{o(x)}$ es minimal y el lema queda demostrado.

■

Lema 3.11 Sea $W \subset X$ fuertemente invariante y cerrado. Si existe un

$$W_0 \subset \varprojlim(X, f) \text{ cerrado y fuertemente invariante}$$

tal que $\pi_0(W_0) = W$ entonces $W_0 = \varprojlim(W, f)$.

Demostración Sea $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$ tal que $\overline{x} = (x, x_1, x_2, \cdots)$. Demostraremos que $W_0 = \varprojlim(W, f)$.

Primero demostremos que $W_0 \subset \varprojlim(W, f)$. Como $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$ entonces $\sigma^i(\overline{x}) = (f^i(x), f^{i-1}(x), \cdots, x, x_1, x_2, \cdots)$. Entonces

$$\pi_i(\sigma^i(\overline{x})) = x = \pi_0(\overline{x}).$$

Ahora, ya que W_0 es fuertemente invariante, $W_0 = \sigma(W_0)$. Más aún, $W_0 = \sigma^i(W_0)$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\pi_i(W_0) = \pi_i(\sigma^i(W_0)) = \pi_0(W_0) = W_0,$$

para toda $i \geqslant 0$. Por lo tanto, como $W_0 \subset \varprojlim(X, f)$ y para toda $i \geqslant 0$, $\pi_i(W_0) = W$ tenemos que $W_0 \subset \varprojlim(W, f)$.

Ahora demostremos que $\varprojlim(W, f) \subset W_0$. Sea $\overline{y} \in \varprojlim(W, f)$, entonces $\pi_i(\overline{y}) \in W$ para toda $i \geqslant 0$. Como

$$W = \pi_i(W_0)$$

para toda $i \geqslant 0$, existe $\overline{z_i} \in W_0$ tal que $\pi_i(\overline{z_i}) = \pi_i(\overline{y})$. Como $\overline{z_i} \in W_0 \subset \varprojlim(W, f)$ y $\overline{y} \in \varprojlim(W, f)$ entonces

$$\overline{z_i} = (z_{i_0}, z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots, z_{i_i}, \cdots) = (f^i(z_{i_i}), f^{i-1}(z_{i_i}), \cdots, f(z_{i_i}), z_{i_i}, \cdots)$$

y

$$\overline{y} = (y, y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots) = (f^i(y_i), f^{i-1}(y_i), \cdots, f(y_i), y_i, \cdots),$$

entonces para toda $j \leq i$, $f^j(z_{i_i}) = f^j(y_i)$, pues $\pi_i(\overline{y}) = y_i = z_{i_i} = \pi_i(\overline{z_i})$. Entonces $\pi_j(\overline{z_i}) = \pi_j(\overline{y})$ para toda $j \leq i$. Así, $\lim\limits_{i\to\infty} \overline{z_i} = \overline{y}$.

Ahora, como W_0 es compacto, $\{\overline{z_i}\}_{i=0}^{\infty}$ tiene un punto límite $\overline{z} \in W_0$. Entonces, $\overline{y} = \overline{z}$. Por lo tanto, $\overline{y} \in W_0$. Por lo tanto, $\varprojlim(W, f) \subset W_0$.

Así concluimos que $W_0 = \varprojlim(W, f)$.

■

Teorema A Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua y $\sigma : \varprojlim(X, f) \longrightarrow \varprojlim(X, f)$ la función recorrimiento (Definición 2.24). Entonces las propiedades $(1) - (7)$, que describimos a continuación, se cumplen.

(1) Sean $x \in X$ y $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$ donde $\overline{x} = (x, x_1, x_2, \cdots)$. Entonces $\omega(\overline{x}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f)$.

(2) $R(\sigma) = \varprojlim(R(f), f)$.

(3) $AP(\sigma) = \varprojlim(AP(f), f)$.

(4) $CR(\sigma) = \varprojlim(CR(f), f)$.

(5) Si f es suprayectiva, $\Omega(\sigma) = \varprojlim(\Omega(f), f)$.

(6) Si f es suprayectiva y $\Lambda(\sigma)$ es cerrado, entonces $\Lambda(\sigma) = \varprojlim(\Lambda(f), f)$.

(7) La condición f *es suprayectiva* en **(5)** y **(6)** no es necesaria si $X = [0, 1]$. Además $\Lambda(\sigma) = \Omega(\sigma)$.

Ahora, comenzaremos a probar cada inciso del Teorema A.

Observación 3.12 Si $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$, $\overline{x} = (x, x_1, x_2, x_3, \cdots)$, entonces

(i) para toda $i \in \mathbb{N}$, $f^i(x_i) = x$,

(ii) $\omega(x_i, f) = \omega(x, f)$,

(iii) $\pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma)) = \omega(\pi_0(\overline{x}), f) = \omega(x, f)$, y

(iv) $\omega(\overline{x}, \sigma) \subset \varprojlim(\omega(x, f), f)$.

Demostración. **(i)** Sea $\overline{x} = (x, x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \varprojlim(X, f)$, entonces $f(x_1) = x$, $f(x_2) = x_1$ y $f^2(x_2) = f(x_1) = x$. Supongamos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f^i(x_i) = x$.

Probaremos que $f^{i+1}(x_{i+1}) = x$.

Como $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$, tenemos que $f(x_{i+1}) = x_i$, por tanto,

$$f^{i+1}(x_{i+1}) = f^i(f(x_{i+1})) = f^i(x_i).$$

Usando la hipótesis de inducción, sabemos que $f^i(x_i) = x$.

Por lo tanto, para toda $i \in \mathbb{N}$, $f^i(x_i) = x$.

(ii) Sea $i \in \mathbb{N}$. Entonces por (i) tenemos que $f^i(x_i) = x$, de manera que

$$\omega(x, f) = \omega(f^i(x_i), f).$$

Por la Proposición 3.4 tenemos que $\omega(f^i(x_i), f) = \omega(x_i, f)$.

Por lo tanto, para toda $i \in \mathbb{N}$, $\omega(x, f) = \omega(f^i(x_i), f) = \omega(x_i, f)$.

(iii) Primero veamos que $\pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma)) \subset \omega(\pi_0(\overline{x}), f)$. Sea $y \in \pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma))$, de manera que existe

$$\overline{y} = (y, y_1, y_2, \cdots) \in \omega(\overline{x}, \sigma) \subset \varprojlim(X, f),$$

entonces para toda $i \in \mathbb{N}$, por (i), $f^i(y_i) = y$ y por (ii), $\omega(y, f) = \omega(y_i, f)$.

Como $\overline{y} \in \omega(\overline{x}, \sigma)$ existe una sucesión creciente $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ de números naturales tal que $\sigma^{n_j}(\overline{x}) \longrightarrow \overline{y}$. Por la Definición 1.2.4,

$$\sigma^{n_j}(\overline{x}) = (f^{n_j}(x), f^{n_j-1}(x), \cdots, f^2(x), f(x), x, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

de manera que $f^{n_j}(x) \longrightarrow y$, y por la Definición 2.16,

$$y \in \omega(x, f) = \omega(\pi_0(\overline{x}), f).$$

Por lo tanto, $\pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma)) \subset \omega(\pi_0(\overline{x}), f) = \omega(x, f)$.

Ahora veamos que $\omega(x, f) = \omega(\pi_0(\overline{x}), f) \subset \pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma))$. Sea $y \in \omega(\pi_0(\overline{x}), f) = \omega(x, f)$, entonces existe una sucesión creciente $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ de números naturales tal que $f^{n_j}(x) \longrightarrow y$.

Consideremos la sucesión $\{\sigma^{n_j}(\overline{x})\}_{j=1}^{\infty}$, como $\omega(\overline{x}, \sigma)$ es compacto, existe $\overline{z} \in \varprojlim(X, f)$ y $\{n_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\sigma^{n_{j_k}}(\overline{x}) \longrightarrow \overline{z}$, entonces

$$\sigma^{n_{j_k}}(\overline{x}) = (f^{n_{j_k}}(x), f^{n_{j_k}-1}(x), \cdots, f(x), x, x_1, x_2, \cdots) \longrightarrow (z, z_1, z_2, z_3, \cdots),$$

de manera que, $f^{n_{j_k}}(x) \longrightarrow z$.

Pero como $\{n_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es subsucesión de $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $f^{n_j}(x) \longrightarrow y$, tenemos que $f^{n_{j_k}}(x) \longrightarrow y$, por tanto $\overline{z} = (y, z_1, z_2, \cdots)$ donde $f(z_1) = y$ y $f(z_{i+1}) = z_i$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\overline{z} \in \omega(\overline{x}, \sigma)$ y $y \in \pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma))$.

Por lo tanto, $\omega(x, f) = \omega(\pi_0(\overline{x}), f) \subset \pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma))$.

De ambas contenciones obtenemos que $\omega(x, f) = \pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma)) = \omega(\pi_0(\overline{x}), f)$ y (iii) queda demostrado.

(iv) Sea $\overline{z} \in \omega(\overline{x}, \sigma) \subset \varprojlim(X, f)$. Entonces existe $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ sucesión creciente de números naturales tal que $\sigma^{n_j}(\overline{x}) \longrightarrow \overline{z}$. Como

$$\sigma^{n_j}(\overline{x}) = (f^{n_j}(x), f^{n_j - 1}(x), \cdots, f^2(x), f(x), x, x_1, x_2, \cdots)$$

tenemos que

$$\{f^{n_j}(x)\}_{j=1}^{\infty} \longrightarrow z,$$

$$\{f^{n_j - 1}(x)\}_{j=1}^{\infty} \longrightarrow z_1$$

y en general

$$\{f^{n_j - k}(x)\}_{j=1}^{\infty} \longrightarrow z_k.$$

Como $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ es creciente, dada $k \in \mathbb{N}$, existe $J_k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $j > J_k$, $n_j - k > 0$. Entonces $\{n_j - k\}_{j=J_k}^{\infty}$ es una sucesión creciente de números naturales tal que la sucesión $\{f^{n_j - k}(x)\}_{j=J_k}^{\infty}$ cumple que $f^{n_j - k}(x) \longrightarrow z_k$, por tanto $z_k \in \omega(x, f)$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Y como $\overline{z} \in \varprojlim(X, f)$, tenemos que $\overline{z} \in \varprojlim(\omega(x, f), f)$ y (iv) queda demostrado.

Con esto terminamos la prueba de la Observación 3.12.

■

Ahora estamos listos para probar el Teorema A.

(1) Sean $x \in X$ y $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$ tal que satisface $\overline{x} = (x, x_1, x_2, \cdots)$. Entonces $\omega(\overline{x}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f)$.

Demostración. Por las Proposiciones 3.2 y 3.3, $\omega(\overline{x}, \sigma)$ y $\omega(x, f)$ son conjuntos fuertemente invariantes y cerrados. Como $\omega(\overline{x}, \sigma) \subset \varprojlim(\omega(x, f), f)$, por la Observación 3.12 (iv), y $\pi_0(\omega(\overline{x}, \sigma)) = \omega(x, f)$, por la Observación 3.12 (iii); podemos aplicar el Lema 3.11 y obtenemos que $\omega(\overline{x}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f)$

■

(2) $R(\sigma) = \varprojlim(R(f), f)$.

Demostración. Primero demostremos que $R(\sigma) \subset \varprojlim(R(f), f)$. Sea $\overline{x} \in R(\sigma)$ tal que $\overline{x} = (x, x_1, x_2, x_3, \cdots)$.

Por la Proposición 2.22, $\overline{x} \in \omega(\overline{x}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f) \subset \varprojlim(X, f)$. Entonces $x \in \omega(x, f)$ y para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \omega(x, f)$ y por la Observación 3.12 (ii), $\omega(x, f) = \omega(x_i, f)$.

De manera que para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \omega(x_i, f)$, y por la Proposición 2.22, $x_i \in R(f)$.

Como $f(x_{i+1}) = x_i$ y $f(x_1) = x$, hemos probado que

$$\overline{x} = (x, x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \varprojlim(R(f), f).$$

Ahora demostremos que $R(\sigma) \supset \varprojlim(R(f), f)$. Sea $\overline{x} \in \varprojlim(R(f), f)$. Entonces $x \in R(f)$ y $x_i \in R(f)$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.22, $x \in \omega(x, f)$ y $x_i \in \omega(x_i, f)$. Por la Observación 3.12 (ii), como $\overline{x} \in \varprojlim(R(f), f) \subset \varprojlim(X, f)$, tenemos que $\omega(x_i, f) = \omega(x, f)$, entonces $x, x_i \in \omega(x, f)$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Por tanto, $\overline{x} \in \varprojlim(\omega(x, f), f)$. Como, por Teorema A (1), $\omega(\overline{x}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f)$, tenemos que $\overline{x} \in \omega(\overline{x}, \sigma)$ y por la Proposición 2.22, $\overline{x} \in R(\sigma)$.

Por lo tanto, $\varprojlim(R(f), f) = R(\sigma)$, y (2) queda demostrado.

■

Observación 3.13 Si $y \in \omega(x, f)$, entonces existe $\overline{y} \in \varprojlim(\omega(x, f), f) = \omega(\overline{x}, \sigma)$ tal que $\pi_0(\overline{y}) = y$ y $\omega(\overline{y}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f)$.

Demostración. Si $y \in \omega(x, f)$, como, por la Proposición 3.3,

$f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$, existe $y_1 \in \omega(x, f)$ tal que $f(y_1) = y$.

De igual manera existe $y_2 \in \omega(x, f)$ tal que $f(y_2) = y_1$. Inductivamente,

para toda $i \in \mathbb{N}$ existe $y_{i+1} \in \omega(x, f)$ tal que $f(y_{i+1}) = y_i$.

De manera que si $y \in \omega(x, f)$, existe $\overline{y} \in \varprojlim(\omega(x, f), f) = \omega(\overline{x}, \sigma)$ tal que $\pi_0(\overline{y}) = y$.

Por el Teorema A (1),

$$\pi_0(\omega(\overline{y}, \sigma)) = \omega(y, f)$$

y

$$\omega(\overline{y}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f).$$

Con esto terminamos la prueba de la Observación 3.13. ■

(3) $AP(\sigma) = \varprojlim(AP(f), f)$.

Demostración. Primero sea $\overline{x} \in AP(\sigma) = R(\sigma)$ tal que $\overline{x} = (x, x_1, x_2, \cdots)$. Por el Teorema A (2), $R(f) = \varprojlim(R(f), f)$, entonces

(a) para toda $i \in \mathbb{N}$, $x, x_i \in R(f)$. Por la Proposición 2.22,

como $x, x_i \in R(f)$, entonces $x \in \omega(x, f)$ y $x_i \in \omega(x_i, f)$.

Como, por la Observación 3.12 (ii), $\omega(x, f) = \omega(x_i, f)$, entonces

(b) para toda $i \in \mathbb{N}$, $x, x_i \in \omega(x, f)$. Por tanto,

(c) $\overline{x} \in \varprojlim(\omega(x, f), f) = \omega(\overline{x}, \sigma)$ (Teorema A (1)).

Por (a) tenemos que para toda $i \in \mathbb{N}$, $x, x_i \in R(f)$, entonces por la Proposición 3.9 y la Observación 3.12 (ii), $\overline{o(x)} = \omega(x, f) = \omega(x_i, f) = \overline{o(x_i)}$.

Veamos que $\omega(x, f)$ es minimal. Sea $y \in o(x, f)$, entonces por la Observación 3.13, existe $\overline{y} \in \varprojlim(\omega(x, f), f) = \omega(\overline{x}, \sigma)$ tal que $\pi_0(\overline{y}) = y$.

Como $\overline{x} \in AP(\sigma)$, por la Proposición 3.9, $\omega(\overline{x}, \sigma)$ es minimal y $\omega(\overline{x}, \sigma) = \omega(\overline{y}, \sigma)$, $\overline{y} \in \omega(\overline{x}, \sigma)$. De manera que, como por el Teorema A (1),

$$\varprojlim(\omega(y, f), f) = \omega(\overline{y}, \sigma) = \omega(\overline{x}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f),$$

tenemos entonces que $\omega(y, f) = \omega(x, f)$. Como esto ocurre para toda $y \in \omega(x, f)$, por la Proposición 3.6, tenemos que $\omega(x, f)$ es minimal.

Como por la Proposición 3.8, $\omega(x, f) \subset AP(f)$ y por (b), $x, x_i \in \omega(x, f)$ para toda $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $x, x_i \in AP(f)$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\overline{x} \in \varprojlim(AP(f), f)$ y $(\subset)$ queda demostrado.

Ahora sea $\overline{x} \in \varprojlim(AP(f), f) \subset \varprojlim(R(f), f)$ con $\pi_0(\overline{x}) = x$, entonces para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_i = \pi_i(\overline{x}) \in AP(f) \subset R(f)$, entonces por las Proposiciones 3.9, 3.10 y la Observación 3.12 (ii), tenemos que $\omega(x_i, f) = \omega(x, f)$ es minimal.

Sea $\overline{y} \in \omega(\overline{x}, \sigma)$ tal que $y = \pi_0(\overline{y})$. Como $\omega(\overline{x}, \sigma) = \varprojlim(\omega(x, f), f)$, entonces $y \in \omega(x, f)$, que es minimal, así que por la Proposición 3.6, $\omega(y, f) = \omega(x, f)$.

Y por el Teorema A (1),

$$\omega(\overline{y}, \sigma) = \varprojlim(\omega(y, f), f) = \varprojlim(\omega(x, f), f) = \omega(\overline{x}, \sigma),$$

entonces $\omega(\overline{x}, \sigma) = \omega(\overline{y}, \sigma)$.

Por tanto, por la Proposición 3.6, $\omega(\overline{x}, \sigma)$ es minimal. Como

$$\overline{x} \in \varprojlim(AP(f), f) \subset \varprojlim(R(f), f) = R(\sigma),$$

entonces $\overline{x} \in R(\sigma)$. Así, por la Proposición 2.22, $\overline{x} \in \omega(\overline{x}, \sigma)$.

Y como $\omega(\overline{x}, \sigma)$ es minimal, tenemos por la Proposición 3.8 que $\overline{x} \in AP(\sigma)$. ■

El resto de la demostración del Teorema A (4) - (6) lo analizaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Segunda parte del Teorema A

Antes de comenzar con la demostración de (4) Teorema A, primero daremos una serie de resultados auxiliares. Recordemos de la Definición 2.25 que una $\varepsilon-$cadena es un subconjunto finito $\Gamma \subset X$, tal que $\Gamma = \{x = x_0, x_1, \cdots, x_n = y\}$ donde para toda $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, y que x es un punto recurrente por cadenas de f si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena Γ de x a x.

Proposición 4.1 Sea $x \in CR(f)$, entonces para todo abierto $U \subset X$ tal que $CR(f) \subset U$ y para toda $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena Γ de x a x tal que $\Gamma \subset U$.

Demostración. Supongamos que existe un abierto U con $CR(f) \subset U$ y una $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda ε_0-cadena de x a x existe un elemento en $X \setminus U$. Tomemos $\{\varepsilon_n\}$ una sucesión tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ $0 < \varepsilon_n < \varepsilon_0$ y $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea Γ_n una ε_n-cadena de x a x. Como Γ_n también es una ε_0-cadena, podemos escoger $z_n \in \Gamma_n$ tal que $z_n \in X \setminus U$. Entonces sin pérdida de generalidad, supongamos que la subsucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a $z_0 \in X \setminus U$.

Como X es un continuo, f es uniformemente continua de manera que dada $\varepsilon > 0$ existe δ, $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$, tal que para cualesquiera $u, v \in X$ si $d(u, v) < \delta$ entonces $d(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N \in \mathbb{N}$, tal que $\varepsilon_N < \delta$ y $d(z_N, z_0) < \delta$. Consideremos la ε_N-cadena:

$$\Gamma_N = \{x = x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j = z_N, x_{j+1}, \cdots, x_n = x\}.$$

Como $d(f(x_{j-1}), z_0) \leq d(f(x_{j-1}), z_N) + d(z_N, z_0) < \varepsilon_N + \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ y $d(f(z_0), x_{j+1}) \leq d(f(z_0), f(z_N)) + d(f(z_N), x_{j+1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, entonces

$$\Delta = \{x = x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}, z_0, x_{j+1}, \cdots, x_n = x\}$$

es una ε-cadena de x a x. Así, $\Delta' = \{z_0, x_{j+1}, \cdots, x_n = x, x_1, \cdots, x_{j-1}, z_0\}$ es una ε-cadena de z_0 a z_0. Como la $\varepsilon > 0$ es arbitraria, entonces $z_0 \in CR(f) \subset U$. Lo cual es una contradicción, pues $z_0 \in X \setminus U$.

Por lo tanto, para todo abierto $U \subset X$, tal que $CR(f) \subset U$ y para toda $\varepsilon > 0$ existe ε-cadena Γ de x a x, tal que $\Gamma \subset U$.

■

Lema 4.2 Si $x \in CR(f)$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena, Δ, de x a x, tal que $\Delta \subset CR(f)$.

Demostración Sea $x \in CR(f)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$. Por continuidad uniforme existe $0 < \delta < \eta$ tal que si $d(u,v) < \delta$ entonces $d(f(u), f(v)) < \eta$. Sea $U \subset X$ un abierto definido de la siguiente manera, $U = \bigcup\{B_\delta(u) : u \in CR(f)\}$. Por la Proposición 5.1, existe $\Gamma = \{x = x_0, \cdots, x_n = x\}$, una η-cadena de x a x, tal que $\Gamma \subset U$.

Por otro lado, construimos $\Delta = \{y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subset CR(f)$ tal que $y_0 = x_0 = x$, $y_n = x_n = x$ y para toda $1 \leq i \leq n-1$ $d(x_i, y_i) < \delta$. Entonces

$$d(f(y_0), y_1) = d(f(x_0), y_1) \leq d(f(x_0), x_1) + d(x_1, y_1) < \eta + \delta < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Notemos que para cada $1 \leq i \leq n-1$,

$$d(f(y_i), y_{i+1}) \leq d(f(y_i), f(x_i)) + d(f(x_i), x_{i+1}) + d(x_{i+1}, y_{i+1}) < \eta + \eta + \delta$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \eta < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, Δ es una ε-cadena de x a x, tal que $\Delta \subset CR(f)$.

■

Lema 4.3 $CR(f)$ es cerrado y fuertemente invariante.

Demostración Para probar que $CR(f)$ es cerrado, probemos que $\overline{CR(f)} = CR(f)$, i. e., $\overline{CR(f)} \subset CR(f)$.

Sea $x \in \overline{CR(f)}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f, existe $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que para toda $u, v \in X$, si $d(u,v) < \delta$ entonces

$$d(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $x \in \overline{CR(f)}$ entonces para toda $\eta > 0$ se tiene que la bola $B_\eta(x)$, cumple que

$$B_\eta(x) \cap CR(f) \neq \emptyset,$$

en particular para $\eta = \delta$. Entonces sea $y \in B_\delta(x) \cap CR(f)$. Como $y \in CR(f)$, existe δ-cadena $\Gamma = \{y, y_1, y_2, \cdots, y_n = y\}$ de y a y. Además,

$$d(f(x), y_1) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), y_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \delta < \varepsilon$$

y

$$d(f(y_{n-1}), x) \leq d(f(y_{n-1}), y) + d(y, x) < \delta + \delta < \varepsilon.$$

Entonces construimos $\Delta = \{x, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, x\}$ una ε-cadena de x a x. Por lo tanto, $x \in CR(f)$.

Por lo tanto $\overline{CR(f)} = CR(f)$, y $CR(f)$ es cerrado.

Ahora probaremos que $f(CR(f)) = CR(f)$.

Probemos primero que $f(CR(f)) \subset CR(f)$. Sea $y_0 \in f(CR(f))$. Dada $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f existe $\delta > 0$ tal que para toda $u, v \in X$, si $d(u,v) < \delta$ entonces $d(f(u), f(v)) < \varepsilon$. Tomemos $x_0 \in CR(f)$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como $x_0 \in CR(f)$, existe $\Gamma = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = x_0\}$ una δ-cadena de x_0 a x_0. Como $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para toda $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ entonces $d(f(f(x_i)), f(x_{i+1})) < \varepsilon$, para toda $i \in \{0, \cdots, n-1\}$. Así construimos

$$\Delta = \{y_0 = f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{n-1}), f(x_0) = y_0\}$$

una ε-cadena de y_0 a y_0.

Entonces $y_0 \in CR(f)$ y por tanto, $f(CR(f)) \subset CR(f)$.

Ahora probemos que $CR(f) \subset f(CR(f))$. Sea $x_0 \in CR(f)$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una $\frac{1}{n}$-cadena, llamémosla Γ_n, de x_0 a x_0. Sea z_n el penúltimo término de la cadena Γ_n. Entonces la sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que converge a $z_0 \in X$. Como z_n es el penúltimo término de Γ_n, entonces $d(f(z_n), x_0) < \frac{1}{n}$, y por continuidad de f tenemos que:

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} z_n\right) = f(z_0).$$

Por otro lado, dada $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f existe $\delta > 0$ tal que si $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ se cumple que si $u, v \in X$ y $d(u,v) < \delta$ entonces $d(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$ y además, $d(z_N, z_0) < \delta$. Llamaremos w al término anterior a z_N en la cadena $\Gamma_N = \{x_0, x_1, \cdots, w, z_N, x_0\}$. Como:

$$d(f(w), z_0) \leq d(f(w), z_N) + d(z_N, z_0) \leq \frac{1}{N} + \delta < \delta + \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y ya que $d(f(z_0), x_0) = d(x_0, x_0) = 0$, entonces construimos

$$\Delta = \{z_0, x_0, x_1, \cdots, w, z_0\}$$

una ε-cadena de z_0 a z_0. Entonces $z_0 \in CR(f)$. Como $x_0 = f(z_0)$, entonces $x_0 \in f(CR(f))$. Por lo tanto, $CR(f) \subset f(CR(f))$. Así, $CR(f) = f(CR(f))$.

Por lo tanto, $CR(f)$ es fuertemente invariante.

■

Proposición 4.4 $\Omega(f)$ es invariante.

Demostración Sea $y \in f(\Omega(f))$, entonces existe $x \in \Omega(f)$ tal que $f(x) = y$. Sea V abierto de y. Como f es continua, existe U abierto de x tal que $f(U) \subset V$. Por hipótesis, existe $z \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) \in U$. Como $z \in U$, existe $w \in V$ tal que $f(z) = w$. Además como $f^n(z) \in U$,

$$f(f^n(z)) = f^n(f(z)) = f^n(w) \in V.$$

Por lo tanto, $y \in \Omega(f)$, $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ y tenemos que $\Omega(f)$ es invariante.

■

Ahora daremos un ejemplo donde $f(\Omega(f)) \neq \Omega(f)$, es decir, $\Omega(f)$ no es fuertemente invariante.

Ejemplo 4.5 Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función definida por partes de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & si\ x \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{3}{2} - 3x & si\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 0 & si\ x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ x - \frac{3}{4} & si\ x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

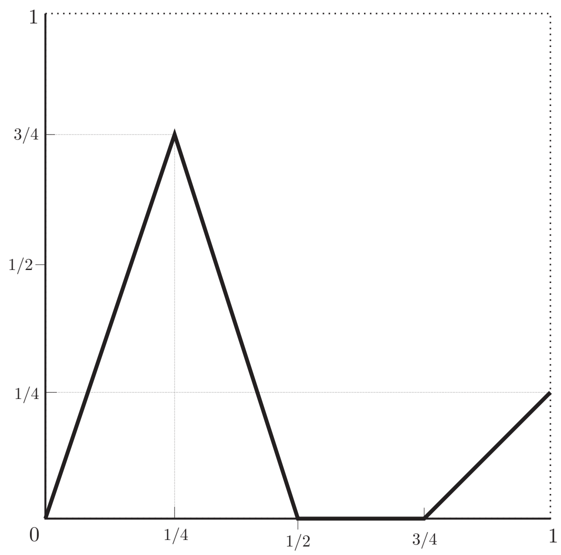

Figura 4.1:

Consideremos el punto $x_0 = \frac{3}{4}$. Sea U abierto de x_0. Sean $a, b \in [0,1]$ tales que $\frac{1}{2} < a < x_0 < b < 1$, y $A = (a,b) \subset U$. Entonces

$$f(A) = f((a,b)) = [0, b - x_0) = \left[0, b - \frac{3}{4}\right) \subset \left[0, \frac{1}{4}\right),$$

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(A) = f^n\left(\left[0, b - \frac{3}{4}\right]\right) \supset \left[0, \frac{1}{4}\right],$$

entonces

$$f^{n+1}\left(\left[0, b - \frac{3}{4}\right]\right) \supset f\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) \supset \left[0, \frac{3}{4}\right]$$

de manera que $f^{n+1}(A) \cap A \neq \emptyset$ y por tanto $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, pues $A \subset U$ (y $f^n(A) \subset f^n(U)$). Hemos probado que $x_0 = \frac{3}{4} \in \Omega(f)$.

Notemos que el único punto que, bajo f, va a dar a x_0 es $\frac{1}{4}$. El intervalo $W = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ es un conjunto abierto que tiene a $\frac{1}{4}$. Dado que

$$f(W) = f\left(\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{3}{6}, \frac{3}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

y $f^2(W) = \{0\}$ entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(W) \cap W = \emptyset$. Así, $\frac{1}{4} \notin \Omega(f)$ y, con ello, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} = x_0 \notin f(\Omega(f))$. Por lo tanto, $f(\Omega(f)) \neq \Omega(f)$.

■

Definición 4.6 Las funciones $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ se dice son (topológicamente) *semiconjugadas* si existe una función $h : X \to Y$ continua y suprayectiva tal que $h \circ f = g \circ h$. A la función h se le conoce como *semiconjugación* y a g como *factor* de f.

Observación 4.7 Si h es semiconjugación de f a g, entonces $h \circ f^n = g^n \circ h$.

Demostración. Por inducción sobre n.

Base inductiva Sea $n = 1$. Como h es semiconjugación de f a g entonces $h \circ f = g \circ h$.

Hipótesis inductiva Supongamos que $h \circ f^n = g^n \circ h$.

Paso inductivo Veamos que $h \circ f^{n+1} = g^{n+1} \circ h$.
Como $h \circ f^{n+1} = h \circ f^n(f)$ y por hipótesis de inducción $h \circ f^n(f) = g^n \circ h(f) = g^n \circ (h \circ f)$ entonces $h \circ f^{n+1} = g^n \circ (h \circ f)$. Pero por base de inducción $(h \circ f) = (g \circ h)$ entonces $g^n \circ (h \circ f) = g^n \circ (g \circ h) = g^{n+1} \circ h$.

Por tanto, $h \circ f^{n+1} = g^{n+1} \circ h$.

■

Lema 4.8 Supongamos $f : X \to X$ es semiconjugada a $g : Y \to Y$ por $h : X \to Y$. Entonces $h(\Omega(f)) \subset \Omega(g)$.

Demostración Sea $z \in h(\Omega(f))$, entonces existe $x \in \Omega(f)$ tal que $h(x) = z$. Sea V un abierto de Y tal que $z \in V$. Como h es continua, existe U abierto de

X con $x \in U$ tal que $h(U) \subset V$. Como $x \in \Omega(f)$, existe $w \in U$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(w) \in U$. Entonces $h(w) \in V$ y $h(f^n(w)) \in V$. Llamemos y a $h(w)$, i.e., $h(w) = y$. Notemos que como f es semiconjugada a g y por la Observación 4.7 tenemos que $(h \circ f^n)(w) = (g^n \circ h)(w) = g^n(h(w)) = g^n(y) \in V$. Hemos probado que si $z \in h(\Omega(f))$, para todo abierto V, existe $y \in V$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(y) \in V$. Por lo tanto, $z \in \Omega(g)$ y $h(\Omega(f)) \subset \Omega(g)$.

■

Antes de probar (4) recordemos que $\sigma : \underleftarrow{\lim}(X, f) \longrightarrow \underleftarrow{\lim}(X, f)$ es un homeomorfismo (Lema 1.2.5) y que si $\overline{x} = (x_0, x_1, \cdots) \in \underleftarrow{\lim}(X, f)$, entonces $\sigma(\overline{x}) = (f(x_0), x_0, x_1, \cdots)$ donde $f(x_{i+1}) = x_i$.

(4) $CR(\sigma) = \underleftarrow{\lim}(CR(f), f)$.

Demostración. Primero demostraremos que $CR(\sigma) \subset \underleftarrow{\lim}(CR(f), f)$. Sea $\overline{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_m, \cdots) \in CR(\sigma) \subset \underleftarrow{\lim}(X, f)$. Fijamos un entero $m \geq 0$. Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\frac{\varepsilon}{2^m}$-cadena

$$\Gamma = \{\overline{x} = \overline{x}^0, \overline{x}^1, \overline{x}^2, \cdots, \overline{x}^{n-1}, \overline{x}^n = \overline{x}\}.$$

Notemos que $\overline{d}(\sigma(\overline{x}^i), \overline{x}^{i+1}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$. Como $\overline{x}^i = (x_0^i, x_1^i, x_2^i, \cdots) \in \underleftarrow{\lim}(X, f)$, entonces $f(x_m^i) = x_{m-1}^i$, entonces por definición de límite inverso, tenemos que

$$\frac{d(f(x_m^i), x_m^{i+1})}{2^m} = \frac{d(x_{m-1}^i, x_m^{i+1})}{2^m}.$$

Ahora por definición de $\overline{d}$ en $\underleftarrow{\lim}(X, f)$ tenemos que

$$\frac{d(x_{m-1}^i, x_m^{i+1})}{2^m} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d(x_{j-1}^i, x_j^{i+1})}{2^j} + d(f(x_0^i), x_0^{i+1}) = \overline{d}(\sigma(\overline{x}^i), \overline{x}^{i+1}) < \frac{\varepsilon}{2^m},$$

de manera que $\frac{d(f(x^{i}{}_{m}), x_m^{i+1})}{2^m} = \frac{d(x_{m-1}^i, x_m^{i+1})}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2^m}$, i.e., $d(f(x_m^i), x_m^{i+1}) < \varepsilon$.

Definamos

$$\Gamma_m = \{\pi_m(\overline{x}^0), \pi_m(\overline{x}^1), \cdots, \pi_m(\overline{x}^{n-1}), \pi_m(\overline{x}^n)\}.$$

Como $\Gamma = \{\overline{x} = \overline{x}^0, \cdots, \overline{x}^{n-1}, \overline{x}^n = \overline{x}\}$ es una $\frac{\varepsilon}{2^m}$−cadena, tenemos que

$$\pi_m(\overline{x}) = x_m = x_0^m = \pi_m(\overline{x}^0) = \pi_m(\overline{x}^m) = x_n^m = x_m$$

de manera que

$$\Gamma_m = \{x_m^0 = x_m, x_m^1, \cdots, x_m^{n-1}, x_m^n = x_m\}$$

es una ε-cadena de x_m a x_m, pues $d(f(x_m^i), x_m^{i+1}) < \varepsilon$. Por lo tanto, $x_m \in CR(f)$. Ya que m es arbitraria, entonces $\overline{x} \in \underleftarrow{\lim}(CR(f), f)$.

Ahora para el regreso, sea $\varepsilon > 0$ y sea $M > 0$ el diámetro de X, i.e.,

$$M = diam(X) = \sup\{d(x,y) : x,y \in X\}.$$

Tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{i=m+1}^{\infty} \frac{M}{2^i} = \frac{M}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como X es compacto, $f : X \to X$ es uniformemente continua, entonces existe $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$ tal que si para cualesquiera $u, v \in X$, $d(u,v) < \delta$ entonces $d(f^i(u), f^i(v)) < \frac{\varepsilon}{4}$ para toda $0 < i \leq m$. Sea $\overline{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_m, \cdots) \in \varprojlim(CR(f), f)$. Como $x_m \in CR(f)$, por el Lema 5.2, existe una δ-cadena de x_m a x_m,

$$\Gamma_{x_m} = \{x_m^0 = x_m, x_m^1, \cdots, x_m^n = x_m\}$$

tal que $x_m^j \in CR(f)$ para toda $j \in \{1, \cdots, n$, además $d(f(x_m^j), x_m^{j+1}) < \delta$ para toda $0 \leq j \leq n-1$ y por la continuidad uniforme de f, $d(f^{i+1}(x_m^j), f^i(x_m^{j+1})) < \frac{\varepsilon}{4}$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{d(f^{i+1}(x_m^j), f^i(x_m^{j+1}))}{2^{m-i}} < \sum_{i=0}^{m} \frac{\frac{\varepsilon}{4}}{2^{m-i}} = \frac{\varepsilon}{4}\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^{m-i}}\right) = \frac{\varepsilon}{4}\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^i}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} * 2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, por el Lema 4.3, $CR(f) = f(CR(f))$. Entonces para toda

$$j \in \{1, 2, \cdots, n-1\},\ f^k(x_m^j) \in CR(f)$$

para toda $k \in \{0, 1, \cdots, m\}$. Además, por el mismo Lema 4.3, existe para $i \in \mathbb{N}$ un punto:

$$x_{m+i}^j \in CR(f) \text{ tal que } f(x_{m+i}^j) = x_{m+i-1}^j.$$

Entonces definimos para toda $1 \leq j \leq n-1$,

$$\overline{x}^j = (f^m(x_m^j), f^{m-1}(x_m^j), \cdots, f(x_m^j), x_m^j, x_{m+1}^j, \cdots)$$

entonces $\overline{x}^j \in \varprojlim(CR(f), f)$. Sea $\overline{x}^0 = \overline{x}^n = \overline{x}$. Ya que

$$\sigma(\overline{x}^j) = (f^{m+1}(x_m^j), f^m(x_m^j), \cdots, f(x_m^j), x_m^j, x_{m+1}^j, x_{m+2}^j, \cdots)$$

y

$$\overline{x}^{j+1} = (f^m(x_m^{j+1}), \cdots, f(x_m^{j+1}), x_m^{j+1}, x_{m+1}^{j+1}, x_{m+2}^{j+1}, \cdots)$$

entonces

$$\overline{d}(\sigma(\overline{x}^j), \overline{x}^{j+1}) = \sum_{i=0}^{m} \frac{d(f^{i+1}(x_m^j), f^i(x_m^{j+1}))}{2^{m-i}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{d(x_{i-1}^j, x_i^{j+1})}{2^i} <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

entonces $\Gamma = \{\overline{x}^0, \overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^{n-1}, \overline{x}^n\}$ es una ε-cadena. Como ε es arbitraria, $\overline{x} \in CR(\sigma)$.

Por lo tanto, $\varprojlim(CR(f), f) \subset CR(\sigma)$. Así, $CR(\sigma) = \varprojlim(CR(f), f)$.

■

Antes de probar (5) veamos primero que:

Afirmación 4.9 Para toda $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, π_i es semiconjugada de f a σ y $\pi_i(\Omega(\sigma)) \subset \Omega(f)$.

Demostración. Sea $x \in \varprojlim(X, f)$, entonces

$$f \circ \pi_i(\overline{x}) = f(\pi_i(\overline{x})) = f(x_i) = x_{i-1}.$$

Por otro lado,

$$\pi_i \circ \sigma(\overline{x}) = \pi_i(\sigma(\overline{x})) = \pi_i((f(x_0), x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots)) = x_{i-1}.$$

Por lo tanto, $f \circ \pi_i(\overline{x}) = \pi_i \circ \sigma(\overline{x})$ y por el Lema 4.8, $\pi_i(\Omega(\sigma)) \subset \Omega(f)$ ∎

(5) Si f es suprayectiva, $\Omega(\sigma) = \varprojlim(\Omega(f), f)$.

Demostración. Primero demostremos que $\Omega(\sigma) \subset \varprojlim(\Omega(f), f)$.

Sea $\overline{x} \in \Omega(\sigma)$. Entonces por la Afirmación 4.9, $x_i \in \Omega(f)$ para toda $i \geq 0$ entonces $\overline{x} \in \varprojlim(\Omega(f), f)$. Por lo tanto, $\Omega(\sigma) \subset \varprojlim(\Omega(f), f)$.

Ahora demostremos que $\varprojlim(\Omega(f), f) \subset \Omega(\sigma)$.

Sea M el diámetro de X y $\overline{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_m, \cdots) \in \varprojlim(\Omega(f), f)$. Veamos que $\overline{x} \in \Omega(\sigma)$. Sea $\varepsilon > 0$, veamos que existe $\overline{y} \in B_\varepsilon(\overline{x})$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\sigma^k(\overline{y}) \in B_\varepsilon(\overline{x})$.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{M}{2^i} = \frac{M}{2^m} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como $x_m \in \Omega(f)$ entonces para todo $U \subset X$ abierto tal que $x_m \in U$, existe $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in U$. Por la continuidad uniforme de f, para toda $i \in \{1, \cdots, m\}$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(u, v) < \delta$ entonces $d(f^i(u), f^i(v)) < \frac{\varepsilon}{8}$. Como $x_m \in \Omega(f)$ existe $y_m \in B_\delta(x_m)$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(y_m) \in B_\delta(x_m)$. Entonces $d(f^i(x_m), f^i(y_m)) < \frac{\varepsilon}{8}$ para toda $i \leq m$, como $f^i(x_m) = x_{m-1}$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{d(x_{m-i}, f^i(y_m))}{2^{m-i}} = \sum_{i=0}^{m} \frac{d(f^i(x_m), f^i(y_m))}{2^{m-i}} < \sum_{i=0}^{m} \frac{\frac{\varepsilon}{8}}{2^{m-i}} < \frac{\varepsilon}{8}(2) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Además, como $f^k(y_m) \in B_\delta(x_m)$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $d(x_m, f^k(y_m)) < \delta$, entonces

$$d(f^i(x_m), f^{k+i}(y_m)) = d(x_{m-i}, f^{k+i}(y_m)) < \frac{\varepsilon}{8}$$

por lo que

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{d(x_{m-i}, f^{i+k}(y_m))}{2^{m-i}} < \sum_{i=0}^{m} \frac{\frac{\varepsilon}{8}}{2^{m-i}} < \frac{\varepsilon}{8}(2) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por la hipótesis de que f es suprayectiva, para toda $i \geq 0$ y $y_{m+i} \in X$ existe $y_{m+i+1} \in X$ tal que $f(y_{m+i+1}) = y_{m+i}$, igualmente para toda $y'_{m+i} \in X$, $i \geq 0$, existe $y'_{m+i+1} \in X$ tal que $f(y'_{m+i+1}) = y'_{m+i}$. Así construimos

$$\overline{y} = (f^m(y_m), \cdots, f(y_m), y_m, y_{m+1}, \cdots)$$

y

$$\overline{y}' = (f^{m+k}(y_m), f^{m+k-1}(y_m), \cdots, f^{k+1}(y_m), f^k(y_m), y'_{m+1}, y'_{m+2}, \cdots)$$

$$= (f^{m+k}(y_m), f^{m+k-1}(y_m), \cdots, f^{k+1}(y_m), f^k(y_m), f^{k-1}(y_m), \cdots, y_m, y_{m+1}, \cdots).$$

Notemos que $\overline{y}$ y $\overline{y}'$ están bien definidas, $\overline{y}', \overline{y} \in \varprojlim(X, f)$ y así tenemos que

$$\sigma^k(\overline{y}) = (f^{m+k}(y_m), f^{m+k-1}(y_m), \cdots, f^k(y_m), \cdots, y_m, y_{m+1}, \cdots) = \overline{y}'.$$

Ahora, la distancia

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d(x_j, y_j)}{2^j} = \sum_{i=0}^{m} \frac{d(x_{m-i}, f^i(y_m))}{2^{m-i}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} <$$

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{d(x_{m-i}, f^i(y_m))}{2^{m-i}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{M}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

y la distancia

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}') = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d(x_j, y'_j)}{2^j} = \sum_{i=0}^{m} \frac{d(x_{m-i}, f^{i+k}(y_m))}{2^{m-i}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{d(x_i, y'_i)}{2^i} <$$

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{d(x_{m-i}, f^{i+k}(y_m))}{2^{m-i}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{M}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $\overline{y} \in B_\varepsilon(\overline{x})$ y $\overline{y}' \in B_\varepsilon(\overline{x})$. Y como $\sigma^k(\overline{y}) = \overline{y}'$ entonces $\overline{x} \in \Omega(\sigma)$. Por lo tanto, $\varprojlim(\Omega(f), f) \subset \Omega(\sigma)$.

Por lo tanto, si f es suprayectiva, $\Omega(\sigma) = \varprojlim(\Omega(f), f)$.

$\blacksquare$

Antes de probar (6) veremos algunos resultados preliminares.

Proposición 4.10 $\bigcup_{x\in X} \varprojlim(\omega(x,f),f) \subset \varprojlim\left(\bigcup_{x\in X}\omega(x,f),f\right)$.

Demostración. Sea $x_0 \in X$, entonces $\omega(x_0,f) \subset \bigcup_{x\in X}(\omega(x,f))$, por tanto

$$\varprojlim(\omega(x_0,f),f) \subset \varprojlim\left(\bigcup_{x\in X}\omega(x,f),f\right).$$

Como x_0 fue arbitrario en X, tenemos que

$$\bigcup_{x\in X}\varprojlim(\omega(x,f),f) \subset \varprojlim\left(\bigcup_{x\in X}\omega(x,f),f\right).$$

■

Por el Teorema A (1) sabemos que si $x \in X$ y $\overline{x} \in \varprojlim(X,f)$ donde $\pi_0(\overline{x}) = x$, entonces $\omega(\overline{x},\sigma) = \varprojlim(\omega(x,f),f)$, o dicho de otra forma, $\omega(\overline{x},\sigma) = \varprojlim(\omega(\pi_0(\overline{x}),f),f)$.

Proposición 4.11 Sea f suprayectiva y $x \in X$, entonces existe $\overline{x} \in \varprojlim(X,f)$ tal que $\pi_0(\overline{x}) = x$.

Demostración. Sea $\overline{x} = (x, x_1, x_2, \cdots)$ donde $x_1 \in f^{-1}(x)$ y en general para $i \in \mathbb{N}$, $x_{i+1} \in f^{-1}(x_i)$. Notemos que como f es suprayectiva, $f^{-1}(x) \neq \emptyset$ e inductivamente para $i \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(x_i) \neq \emptyset$.

Además, por construcción, $f(x_{i+1}) = f(f^{-1}(x_i)) = x_i$ y por tanto, $\overline{x} \in \varprojlim(X,f)$ con $\pi_0(\overline{x}) = x$.

■

Proposición 4.12 Sea f suprayectiva, entonces

$$\bigcup_{x\in X}\omega(x,f) = \bigcup_{\overline{x}\in\varprojlim(X,f)}\omega(\pi_0(\overline{x}),f).$$

Demostración. Primero demostremos la contención de ida. Sea $y \in \bigcup_{x\in X}\omega(x,f)$ entonces existe $x_0 \in X$ tal que $y \in \omega(x_0,f)$. Como f es suprayectiva, por la Proposición 4.11, existe $\overline{x}_0 \in \varprojlim(X,f)$ tal que $\pi_0(\overline{x}_0) = x_0$.

Entonces $y \in \omega(x_0,f) = \omega(\pi_0(\overline{x}),f)$ entonces $y \in \bigcup_{\overline{x}\in\varprojlim(X,f)}\omega(\pi_0(\overline{x}),f))$.

Por lo tanto, $\bigcup_{x\in X}\omega(x,f) \subset \bigcup_{\overline{x}\in\varprojlim(X,f)}\omega(\pi_0(\overline{x}),f)$.

Ahora para la contención de vuelta. Sea $y \in \bigcup_{\overline{x}\in\varprojlim(X,f)}\omega(\pi_0(\overline{x}),f)$ entonces existe

$$\overline{x}_0 \in \varprojlim(X,f) \text{ tal que } y \in \omega(\pi_0(\overline{x}_0),f).$$

Sea $\pi_0(\overline{x}_0) = x_0$ entonces $y \in \omega(\pi_0(\overline{x}_0), f) = \omega(x_0, f)$ entonces $y \in \bigcup_{x\in X} \omega(x, f)$. Por lo tanto, $\bigcup_{\overline{x}\in \underleftarrow{\lim}(X,f)} \omega(\pi_0(\overline{x}), f) \subset \bigcup_{x\in X} \omega(x, f)$.

Por lo tanto, de las dos contenciones obtenemos que

$$\bigcup_{\overline{x}\in \underleftarrow{\lim}(X,f)} \omega(\pi_0(\overline{x}), f) = \bigcup_{x\in X} \omega(x, f).$$

■

Proposición 4.13 Sea $\overline{x} \in \underleftarrow{\lim}(\Lambda(f), f)$, $\overline{x} = (x, x_1, x_2, \cdots)$, para toda $i \in \mathbb{N}$ existe $y_i \in X$ y un punto $\overline{x}^i = (x_0, \cdots, x_i, y'_{i+1}, y'_{i+2}, \cdots)$ donde $y'_j \in \underleftarrow{\lim}(\omega(y_i, f), f)$ para toda $j \geq i+1$ y $\overline{x}^i \in \underleftarrow{\lim}(\omega(y_i, f), f)$.

Demostración. Sea $i = 0$. Construiremos $\overline{x}^0 = (x_0, y'_1, y'_2, \cdots)$.

Como $\overline{x} \in \underleftarrow{\lim}(\Lambda(f), f)$ entonces $\pi_0(\overline{x}) = x \in \Lambda(f) = \bigcup_{x\in X} (\omega(x, f))$. Entonces existe $y \in X$ tal que $x \in \omega(y, f)$. Como, por la Proposición 3.3, $\omega(y, f)$ es fuertemente invariante tenemos que $\omega(y, f) = f(\omega(y, f))$, por tanto $x = f(y'_1)$ para algún $y'_1 \in \omega(y, f)$.

Supongamos que hemos encontrado $y'_1, y'_2, y'_3, \cdots, y'_n \in \omega(y, f)$ tales que $f(y'_1) = x$ y $f(y'_j) = y_{j-1}$ para $j \in \{2, \cdots, n\}$. Como $y'_n \in \omega(y, f)$ y $\omega(y, f) = f(\omega(y, f))$, existe $y'_{n+1} \in \omega(y, f)$ tal que $f(y'_{n+1}) = y'_n$.

De manera que, por inducción, hemos podido construir $\overline{x}^0 = (x, y'_1, y'_2, \cdots)$. Veamos que $\overline{x}^0 \in \underleftarrow{\lim}(\omega(y, f), f)$ por construcción $y'_n \in \omega(y, f)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $f(y'_1) = x \in \omega(y, f)$ y $f(y'_{n+1}) = y'_n$.

Tomemos $i \in \mathbb{N}$ y construyamos $\overline{x}^i$.

Como $\overline{x} = (x, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots) \in \underleftarrow{\lim}(\Lambda(f), f)$ entonces

$$\pi_i(\overline{x}) = x_i \in \Lambda(f) = \bigcup_{x\in X} \omega(x, f),$$

entonces existe $y_i \in X$ tal que $x_i \in \omega(y_i, f)$.

Usando inducción de manera similar que en el caso $\overline{x}^0$, tenemos que como $\omega(y_i, f) = f(\omega(y_i, f))$ existe $y'_{i+1} \in \omega(y_i, f)$ tal que $f(y'_{i+1}) = x_i$.

Y en general, si $y'_{i+1}, \cdots, y'_{i+n}$ son puntos en $\omega(y_i, f)$ tal que $f(y'_{i+1}) = x_i$ y $f(y'_{i+j+1}) = y'_j$ con $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ entonce existe $y'_{n+1} \in \omega(y_i, f)$ tal que $f(y'_{n+1}) = y'_n$.

De esta manera hemos construido $\overline{x}^i = (x, x_1, \cdots, x_i, y'_{i+1}, y'_{i+2}, \cdots)$ donde $f(y'_{i+1}) = x_i \in \omega(y_i, f)$, $y'_n \in \omega(y_i, f)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $f(y'_{i+j+1}) = y'_{i+j}$.

Notemos además que como $x_i \in \omega(y_i, f)$ y $f(x_i) = x_{i-1} \in \omega(y_i, f)$, pues $\overline{x} \in \varprojlim(\Lambda(f), f)$ y $\omega(y_i, f)$ es fuertemente invariante, usando este razonamiento sabemos que $\{x, x_1, \cdots, x_i\} \subset \omega(y_i, f)$, de manera que $\overline{x}^i \in \varprojlim \omega(y_i, f)$ y así la proposición queda demostrado. ■

Ahora ya estamos listos para probar (6).

(6) Si f es suprayectiva y $\Lambda(\sigma)$ es cerrado, entonces $\Lambda(\sigma) = \varprojlim(\Lambda(f), f)$.

Demostración. Primero demostraremos que $\Lambda(\sigma) \subset \varprojlim(\Lambda(f), f)$.

Como $\varprojlim\left(\bigcup_{x\in X} \omega(x, f), f\right) = \varprojlim(\Lambda(f), f)$ entonces

$$\Lambda(\sigma) = \bigcup_{\overline{x}\in\varprojlim(X,f)} \omega(\overline{x}, \sigma) = \bigcup_{\overline{x}\in\varprojlim(X,f)} \varprojlim(\omega(\pi_0(\overline{x}), f), f),$$

por la Proposición 4.12 y además

$$\bigcup_{\overline{x}\in\varprojlim(X,f)} \varprojlim(\omega(\pi_0(\overline{x}), f), f) = \bigcup_{x\in X} \varprojlim(\omega(x, f), f),$$

y por la Proposición 4.10

$$\bigcup_{x\in X} \varprojlim(\omega(x, f), f) \subset \varprojlim\left(\bigcup_{x\in X} \omega(x, f), f\right) = \varprojlim(\Lambda(f), f).$$

Por lo tanto, $\Lambda(\sigma) \subset \varprojlim(\Lambda(f), f)$.

Ahora demostraremos que $\varprojlim(\Lambda(f), f) \subset \Lambda(\sigma)$.

Sea $\overline{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \in \varprojlim(\Lambda(f), f)$. Entonces por la Proposición 4.13, para toda $i \in \mathbb{N}$ existe $y_i \in X$ y un punto $\overline{x}^i = (x_0, \cdots, x_i, y'_{i+1}, y'_{i+2}, \cdots)$ donde $y'_j \in \omega(y_i, f)$ para $j \geq i+1$ y $\overline{x}^i \in \varprojlim(\omega(y_i, f), f)$.

Como $\overline{x}^i \in \varprojlim(\omega(y_i, f), f) = \omega(\overline{y}_i, \sigma) \subset \Lambda(\sigma)$, tenemos que $\lim_{i\to\infty} \overline{x}^i = \overline{x}$ y $\Lambda(\sigma)$ es cerrado por hipótesis, entonces $\overline{x} \in \Lambda(\sigma)$.

Por lo tanto, $\varprojlim(\Lambda(f), f) \subset \Lambda(\sigma)$.

De las dos contenciones tenemos que $\varprojlim(\Lambda(f), f) = \Lambda(\sigma)$ y (6) queda demostrado.

■

Bibliografía

[1] George David Birkhoff. *Dynamical systems*, volume 9. American Mathematical Soc., 1927.

[2] L.S. Block and W.A. Coppel. *Dynamics in one dimension.* Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1992.

[3] Robert L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment.* CRC Press, 2018.

[4] James Dugundji. *Topology*, volume 16. Allyn and Bacon, Inc, 1966.

[5] Walter Helbig Gottschalk and Gustav Arnold Hedlund. *Topological Dynamics*, volume 36. American Mathematical Soc., 1955.

[6] W.H. Gottschalk. Almost periodic points with respect to transformation semi-groups. *Annals of Mathematics*, pages 762–766, 1946.

[7] William Thomas Ingram and William S. Mahavier. *Inverse limits: From continua to Chaos*, volume 25. Springer Science & Business Media, 2011.

[8] J.E. King and H. Méndez. *Sistemas dinámicos discretos.* Las prensas de Ciencias. UNAM, Facultad de Ciencias, 2014.

[9] Shihai Li. Dynamical properties of the shift maps on the inverse limit spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 12(1):95–108, 1992.

[10] Sergio Macías. *Topics on continua.* Springer, 2nd edition, 2005.

[11] Héctor Méndez. Notas: Dinámica discreta e hiperespacios. https://sites.google.com/site/pensamientosimperfectos/hector-mendez, 2016.

[12] S. B. Nadler. The indecomposability of the dyadic solenoid. *The American Mathematical Monthly*, 80(6):677–679, 1973.

[13] Sam B. Nadler, Jr. *Continuum theory: an introduction.* CRC Press, 1992.

[14] Manuel de Jésus Paniagua-Díaz. La función tienda y sus propiedades. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.

[15] Joel Pérez-Guerrero and Patricia Pellicer. El solenoide diádico. *Publicaciones Electrónicas*, Vol. 3, 2009.