



Universidad Nacional Autónoma de México  
Maestría en ciencias (Física)

PLANOS ANTICOHERENTES DE ESPÍN

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

CRISTO IGOR VÁZQUEZ MOTA

TUTOR PRINCIPAL:

DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS  
ICN, UNAM

México, CD. MX. Marzo, 2024



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

A mis docentes y en especial a mi tutor, Chryssomalis, por su ayuda, infinita paciencia y dedicación. Agradecerle también a toda mi familia por darme ánimo durante este proceso. A mis amigos de toda la vida que me acompañan desde siempre. Y también al proyecto DGAPA-PAPIIT de la UNAM IN 111920.

# Contents

Agradecimientos	i
<b>1 Introducción y Motivación</b>	<b>2</b>
<b>2 El espacio de Hilbert, su dual y el espacio de Hilbert-Schmidt</b>	<b>6</b>
2.1 El espacio de Hilbert	6
2.2 Espacio dual	8
2.3 Espacio Hilbert-Schmidt	9
2.3.1 Tensores de polarización	10
<b>3 Estados anticoherentes de espín <math>s</math></b>	<b>14</b>
3.1 Espacio proyectivo	14
3.2 Matrices de densidad	15
3.3 Representación estelar de estados de espín $s$	16
3.4 Estados anticoherentes	17
3.4.1 Anticoherencia, varianza total y enredamiento	18
3.4.2 Explorando estados anticoherentes	19
<b>4 Planos anticoherentes de espín <math>s</math></b>	<b>29</b>
4.1 El Grassmanniano	29
4.1.1 Encajamiento de Plücker	30
4.2 Representación estelar de planos	32
4.3 Planos anticoherentes	34
4.3.1 Función de coherencia y varianza total	34

4.3.2	Matriz Hessiana de la función de coherencia . . . . .	39
4.3.3	Puntos singulares en espines enteros . . . . .	41
4.3.4	Explorando planos antioherentes . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>55</b>

# Chapter 1

## Introducción y Motivación

La física cuántica ha sido un campo fascinante y desafiante que ha revolucionado nuestra comprensión del universo desde su concepción inicial hasta la actualidad. Dentro de este vasto campo, la teoría de espines ocupa un lugar destacado, ofreciendo un marco conceptual crucial para entender los fenómenos cuánticos a nivel fundamental. Los sistemas de espín no solo son de gran importancia teórica, sino que también tienen aplicaciones prácticas en una amplia gama de áreas, desde la física de materia condensada hasta la computación cuántica y la criptografía.

La evolución cíclica de estados de espín produce fases geométricas independientes de la parametrización temporal, conocidas como fases de Berry [1, 2]. La generalización no abeliana de estas fases surge de la evolución cíclica de subespacios degenerados de dimensión  $k$  de un Hamiltoniano de evolución. En este contexto, a cada curva cerrada  $\gamma$  en el Grassmanniano<sup>1</sup> se le asigna una matriz unitaria  $U_\gamma$ , que, al igual que su contraparte abeliana, no depende de la parametrización temporal de la curva [3, 4, 5]. Más aún, cuando la evolución está dada por rotaciones en el límite adiabático (muy lentas), los  $k$ -planos anticoherentes tienen una holonomía no abeliana de naturaleza topológica, de modo que es invariante bajo cualquier perturbación  $SO(3)$  del Hamiltoniano [6]. Estas fases geométricas, tanto abelianas como no abelianas, se utilizan en la implementación de compuertas cuánticas, donde su inmunidad a las reparametrizaciones y perturbaciones contribuye a la robustez del cómputo cuántico resultante.

---

<sup>1</sup>El espacio de subespacios lineales de un espacio vectorial.

Por otro lado, en sistemas multipartitos  $\mathcal{H}^{\otimes k}$  de  $k$  partículas del mismo espín, es común enfocarse en subespacios totalmente simétricos o antisimétricos, como al tratar con bosones o fermiones [7], en física atómica y molecular (en los determinantes de Slater utilizados en el método de Hartree-Fock), o en el estudio de la estructura nuclear. Los estados antisimétricos también han demostrado ser útiles en el procesamiento de información cuántica [8], así como en la criptografía cuántica [9]. En particular, los estados  $k$ -partitos de espín  $s$  totalmente antisimétricos  $\wedge$ -factorizables tienen una descripción matemática idéntica a la de un  $k$ -plano en  $\mathcal{H}$ , por lo que el estudio de  $k$ -planos puede ser fácilmente trasladado a las áreas antes mencionadas.

Y no solo eso, sino que además, el isomorfismo de Murnaghan

$$m : \mathcal{H}_s^{\vee k} \longrightarrow \mathcal{H}_{s+\frac{k-1}{2}}^{\wedge k},$$

proporciona una equivalencia entre sistemas de múltiples bosones y sistemas de múltiples fermiones [10, 11]. De esta manera, concluimos que el estudio de los planos anticoherentes y las herramientas desarrolladas en torno a estos se vuelven relevantes para el estudio de otros sistemas cuánticos en ámbitos completamente diferentes.

En este contexto, el presente trabajo se enfoca en el estudio de los estados anticoherentes y los  $k$ -planos anticoherentes en sistemas de espín, explorando su estructura, propiedades y posibles aplicaciones. La noción de anticoherencia surge como un concepto fundamental en la caracterización de estados cuánticos, distinguiendo a los estados de espín con el comportamiento menos clásico posible y conectando con fenómenos como el enredamiento cuántico. Los  $k$ -planos anticoherentes, por otro lado, ofrecen una perspectiva novedosa la cuantificación de estados multipartitos.

La motivación detrás de este trabajo es doble. En primer lugar, se busca profundizar en nuestra comprensión de los sistemas de espín desde una perspectiva geométrica y algebraica, aprovechando herramientas y conceptos provenientes de la geometría diferencial y la teoría de representaciones. Esta aproximación no solo enriquece nuestra comprensión teórica, sino que también puede conducir a aplicaciones prácticas, como la mejora de algoritmos en computación cuántica o el diseño de protocolos de comunicación cuántica más robustos.

En segundo lugar, este trabajo aspira a ampliar el alcance y la influencia de los

conceptos de anticoherencia y  $k$ -planos en diversas áreas de la física cuántica y la ciencia de la información. La conexión entre la anticoherencia y el enredamiento ha sido objeto de estudio en sistemas multipartitos de qubits, y se espera que su extensión a sistemas multipartitos de qudits a través de los  $k$ -planos arroje luz sobre fenómenos aún más complejos. En resumen, este trabajo representa un esfuerzo por explorar nuevas fronteras en la teoría de espines cuánticos, ofreciendo una nueva visión sobre la naturaleza de la coherencia cuántica de espín y su papel en la física contemporánea.

La estructura de esta tesis se divide en tres partes. En el Capítulo 2, realizamos una revisión de los conceptos asociados al espacio de Hilbert de un sistema de espín  $s$ , con un enfoque especial en la construcción del espacio dual, el espacio de aplicaciones lineales sobre  $H$ , la teoría de representaciones de  $SU(2)$  y los tensores de polarización. Estos conceptos proporcionarán las bases necesarias para las técnicas estándar en sistemas de espín que se utilizarán en los capítulos siguientes.

En el Capítulo 3, presentamos los conceptos relacionados con los sistemas de espín que pretendemos estudiar. Desde un enfoque geométrico del espacio de estados físicos hasta la representación estelar de los estados; exploramos herramientas clave para identificar nuevos estados anticoherentes. Introducimos también el concepto de varianza total y su relación con la anticoherencia y el enredamiento. Los resultados principales de este capítulo incluyen la exploración de la subvariedad de estados anticoherentes en espines bajos, la visualización de las transformaciones que preservan la anticoherencia a través de la representación estelar y la construcción de una nueva familia de estados anticoherentes, los estados  $(s, 2m)$ -bipiramidales, que proporcionan una base anticoherente para el espacio de Hilbert de espines enteros.

En el Capítulo 4, desarrollamos herramientas que extienden los conceptos de espacio de Hilbert, espacio proyectivo y matriz de densidad de un estado a un subespacio lineal del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Además, presentamos la generalización de la constelación de Majorana de un estado a una Multiconstelación de Majorana de un  $k$ -plano. Definimos un  $k$ -plano anticoherente como aquel que pasa por el origen en  $\mathcal{H}$ , donde todos los estados son anticoherentes. Analizamos la coherencia del plano en términos de otras representaciones, así como sus derivadas y matriz Hessiana. También exploramos los  $k$ -planos anticoherentes en espines bajos y damos una construcción general de familias

$(k - 1)$ -paramétricas de  $k$ -planos anticoherentes formados por estados bipiramidales.

Finalmente, en el Capítulo 5, recopilamos los principales resultados obtenidos, su importancia y las posibles direcciones de investigación futura.

# Chapter 2

## El espacio de Hilbert, su dual y el espacio de Hilbert-Schmidt

Poco se puede decir sobre el espacio de estados cuánticos de espín  $s$  que no sea de conocimiento general. La intención de este capítulo es recapitular los conceptos necesarios y fijar la notación para el seguimiento de los capítulos posteriores. El contenido de la sección 2.3 es tal vez menos popular en los textos estándar de mecánica cuántica. A lo largo de toda la tesis se usan unidades donde  $\hbar = 1$  y se asume la convención de suma.

### 2.1 El espacio de Hilbert

Para un sistema cuántico de espín  $s$ , el conjunto de estados que el sistema puede ocupar corresponde a un espacio complejo de Hilbert  $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$  de dimensión  $n = 2s + 1$ <sup>1</sup>, con el producto interno estándar en  $\mathbb{C}^n$ , donde el grupo de Lie  $SU(2)$  actúa a través de la representación irreducible de dimensión  $n$ , también llamada representación irreducible de espín  $s$

$$g \triangleright |\psi\rangle = D^{(s)}(g) |\psi\rangle, \quad g \in SU(2), \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}.$$

La representación  $D^{(s)}$  asocia a cada elemento  $g \in SU(2)$  con una matriz unitaria  $D^{(s)}(g) \in U(n)$ . Dado que  $SU(2)$  es un grupo de Lie conexo y compacto, todos sus

---

<sup>1</sup>Siempre se va a asumir que  $n = 2s + 1$ .

elementos son de la forma  $g = e^{-iX}$  con algún  $X \in \mathfrak{su}(2)$ . La representación de espín  $s$  también asocia a cada elemento de álgebra  $X \in \mathfrak{su}(2)$  una matriz hermitiana  $X^{(s)} \equiv D^{(s)}(X) \in \mathfrak{u}(n)$ , de tal modo que  $D^{(s)}(g) = e^{-iX^{(s)}}$ . El índice  $(s)$  será omitido en la representación cuando no haya ambigüedad con el espín que se está usando.

Es conocido que el grupo  $SU(2)$  es la doble cubierta del grupo de rotaciones  $SO(3)$ , es decir,  $SU(2)/Z_2 \cong SO(3)$ . Para exhibir un homomorfismo entre los grupos, tomemos como base en  $\mathfrak{su}(2)$  las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

un vector unitario  $\hat{\mathbf{n}} = (n^1, n^2, n^3) \in \mathbb{R}^3$  y un ángulo  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . El elemento del álgebra  $\frac{\alpha}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma} = \frac{\alpha}{2}n^A \sigma_A$  define por exponenciación un elemento del grupo  $g = e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma}} \in SU(2)$  que puede actuar sobre el mismo álgebra con la representación adjunta  $\text{Ad}_g$ . El homomorfismo viene dado por el hecho de que

$$e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma}} \sigma_A e^{i\frac{\alpha}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma}} = \text{Ad}_g(\sigma_A) = \sigma_B (R_{\alpha, \hat{\mathbf{n}}})^B_A, \quad (2.1)$$

donde  $(R_{\alpha, \hat{\mathbf{n}}})^B_A$  representa las entradas de la matriz de rotación  $R_{\alpha, \hat{\mathbf{n}}} \in SO(3)$  alrededor del eje  $\hat{\mathbf{n}}$  con ángulo  $\alpha$ . El homomorfismo es 2:1 ya que tanto  $g$  como  $-g$  dan lugar a la misma matriz de rotación en  $SO(3)$ . La identidad (2.1) se extiende a otras representaciones como

$$e^{-i\alpha\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{S}} S_A e^{i\alpha\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{S}} = S_B (R_{\alpha, \hat{\mathbf{n}}})^B_A, \quad (2.2)$$

donde  $S_A \equiv S_A^{(s)} = D^{(s)}(\frac{1}{2}\sigma_A)$ ,  $A = 1, 2, 3^2$ , son los *operadores de espín*.

Se considera como la base estándar de  $\mathcal{H}$  al conjunto de eigenvectores normalizados<sup>3</sup>  $\{|s, m\rangle\}$  en común del operador  $S_z$  y del *operador Casimir*  $C \equiv C^{(s)} = \sum_A S_A^2 = s(s+1)I_n$ <sup>4</sup>:

$$C |s, m\rangle = s(s+1) |s, m\rangle, \quad S_z |s, m\rangle = m |s, m\rangle, \quad m = -s, \dots, s.$$

Los vectores  $|s, m\rangle \in \mathcal{H}$  representan al estado físico de un sistema donde, al medir la proyección del espín a lo largo del eje  $z$  del laboratorio, por ejemplo, con un experimento

<sup>2</sup>Cuando se hace referencia a una base cartesiana, se entiende que el índice toma valores  $A = x, y, z$ .

<sup>3</sup>Respecto al producto interno en  $\mathcal{H}$ .

<sup>4</sup> $I_n$  es la matriz identidad  $n \times n$ .

tipo Stern-Gerlach, siempre se obtiene como resultado  $m$ . En esta base, un estado genérico se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle, \quad \text{o como vector columna} \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_s \\ \vdots \\ c_{-s} \end{pmatrix}.$$

Cuando no se quiere hacer referencia a esta base, se puede asumir una expresión genérica como  $|\psi\rangle = \psi^i e_i$ , con  $\{e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , una base en  $\mathcal{H}$ .

## 2.2 Espacio dual

Dado un espacio complejo de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión  $n$ , siempre existe el espacio de Hilbert dual  $\mathcal{H}^*$ , definido como el espacio de aplicaciones lineales de  $\mathcal{H}$  a los números complejos; en el caso de dimensión finita, estos dos espacios son isomorfos. Una vez elegida una base  $\{e_i\}$  en  $\mathcal{H}$ , el producto interno está dado por

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv \sum_i \bar{\phi}^i \psi^i \in \mathbb{C}, \quad |\psi\rangle = \psi^i e_i \in \mathcal{H}, \quad |\phi\rangle = \phi^i e_i \in \mathcal{H}. \quad (2.3)$$

A pesar de que el producto interno está en términos de una base, este no depende de la elección de la base.

Se define al *vector dual* de  $|\phi\rangle$  como aquella aplicación lineal  $|\phi\rangle^* \in \mathcal{H}^*$  tal que  $|\phi\rangle^*(|\psi\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle$  para todo  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ . Se usa como notación estándar  $\langle\phi| \equiv |\phi\rangle^*$ . Como el producto interno es no degenerado, el mapeo  $|\phi\rangle \mapsto \langle\phi|$  es un isomorfismo de  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{H}^*$ .

Para cualquier base  $\{e_i\}$  no necesariamente ortogonal en  $\mathcal{H}$ , siempre existe una única *base dual*  $\{e^i\}$  en  $\mathcal{H}^*$  que satisface  $e^i(e_j) = \langle e^i|e_j\rangle = \delta_j^i$ . En esta base,  $\langle\psi| = \psi_i e^i$  con  $\psi_i = \langle\psi|e_i\rangle = \bar{\psi}^i$ , es decir, si en una base  $|\psi\rangle = (\psi^1, \dots, \psi^n)^T$ , entonces su vector dual es de la forma  $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = (\bar{\psi}^1, \dots, \bar{\psi}^n)$ .

La representación dual del grupo  $SU(2)$  se da por la matriz conjugada transpuesta,

$$g \triangleright \langle\psi| = \langle\psi| D^{(s)}(g)^\dagger = \langle\psi| D^{(s)}(g^{-1}), \quad g \in SU(2), \quad \langle\psi| \in \mathcal{H}^*.$$

En consecuencia, utilizando la ecuación (2.2), se puede mostrar que el vector de valores esperados de los operadores de espín  $\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle \equiv (\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle)$  se transforma efectivamente como un vector en  $\mathbb{R}^3$

$$\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle' = R_{\alpha, \hat{n}} \cdot \langle \vec{\mathbf{S}} \rangle,$$

donde  $\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle'$  son los valores esperados en el estado  $|\psi\rangle' = e^{-i\alpha \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{S}}} |\psi\rangle$ . Esta característica es fundamental para las representaciones estelares presentadas en las secciones 3.3 y 4.2, y nos proporciona una valiosa intuición sobre la naturaleza de los estados anticonherentes.

## 2.3 Espacio Hilbert-Schmidt

Se define el espacio de *Hilbert-Schmidt*  $\mathcal{HS} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ , como el espacio de operadores lineales en  $\mathcal{H}$ , es decir, los elementos de  $\mathcal{HS}$  se pueden representar con matrices complejas  $n \times n$ . Este espacio es, por sí mismo, un espacio de Hilbert de dimensión compleja  $n^2$ , cuando está equipado con la forma hermitiana

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^\dagger B), \quad A, B \in M_n(\mathbb{C}), \quad (2.4)$$

ya que en dimensión finita, todos los operadores son acotados y todas las trazas existen. El factor  $1/2$  asegura que estemos de acuerdo con las convenciones estándar en la mecánica cuántica<sup>5</sup>.

El producto escalar da lugar a una distancia euclidiana, la *distancia de Hilbert-Schmidt*

$$D_{HS}^2(A, B) \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}[(B^\dagger - A^\dagger)(B - A)], \quad (2.5)$$

que en su versión infinitesimal define la *métrica de Hilbert-Schmidt* (HS)

$$ds_{HS}^2 \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(dA^\dagger dA). \quad (2.6)$$

Sobre un elemento  $|\psi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{HS}$ , el grupo  $SU(2)$  actúa por conjugación de la matriz de representación correspondiente. Extendiendo por linealidad a todo  $\mathcal{HS}$ , tenemos

$$g \triangleright A = D^{(s)}(g) A D^{(s)}(g^{-1}), \quad g \in SU(2), \quad A \in M_n(\mathbb{C}).$$

---

<sup>5</sup>Ver la ecuación (3.6).

Más aún, en teoría de representaciones es conocido que la representación en el producto tensorial se descompone en representaciones irreducibles como  $s \otimes s^* = 0 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 2s$ . Por lo tanto, debe existir una base en  $M_n(\mathbb{C})$  tal que una matriz en esa base se transforma como una suma directa de espines  $l$  con  $l = 0, 1, \dots, 2s$  bajo la acción de  $SU(2)$ . Precisamente esta base es la que define a los tensores de polarización.

### 2.3.1 Tensores de polarización

Un tensor de polarización  $T_{lm}^{(s)}$  es una matriz compleja<sup>6</sup>  $n \times n$  definida por

$$T_{lm}^{(s)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2s+1}} \sum_{m_1, m_2=-s}^s C_{sm_1, lm}^{sm_2} |s, m_2\rangle \langle s, m_1|, \quad m = -l, \dots, l, \quad l = 0, \dots, 2s, \quad (2.7)$$

donde  $C_{sm_1, lm}^{sm_2}$  son los coeficientes de Clebsh-Gordan y  $\{|s, m\rangle\}$  la base estándar en  $\mathcal{H}$ . Las  $\sum_{l=0}^{2s} (2l+1) = (2s+1)^2 = n^2$  matrices  $T_{lm}$  (el índice  $(s)$  se omite cuando no hay ambigüedad en el espín que se está trabajando) forman una base ortogonal en  $\mathcal{HS}$  con respecto al producto interno (2.4)

$$\text{Tr}(T_{lm}^\dagger T_{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.8)$$

y cumplen las relaciones

$$T_{lm}^\dagger = (-1)^m T_{l-m}, \quad (2.9)$$

$$D^{(s)}(g) T_{lm} D^{(s)}(g^{-1}) = \sum_{m'} (D^{(l)}(g))_{m'm} T_{lm'}, \quad g \in SU(2), \quad (2.10)$$

con  $(D^{(l)}(g))_{m'm}$  las componentes de la matriz  $D^{(l)}(g)$  en la base  $\{|l, m\rangle\}$ . De echo, los únicos operadores que satisfacen las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) están dados por (2.7).

Dado un elemento  $g(t) = e^{-itX} \in SU(2)$ , el lado izquierdo de (2.10) es de la forma

$$e^{-itX^{(s)}} T_{lm} e^{itX^{(s)}} = T_{lm} - it [X^{(s)}, T_{lm}] + \frac{(-it)^2}{2!} [X^{(s)}, [X^{(s)}, T_{lm}]] + \dots,$$

mientras que del lado derecho simplemente aparece  $D^{(l)}(g) = e^{-itX^{(l)}}$ . Tomando la derivada respecto a  $t$  en  $t = 0$  tenemos la versión infinitesimal de (2.10)

$$[X^{(s)}, T_{lm}] = \sum_{m'} (X^{(l)})_{m'm} T_{lm'},$$

---

<sup>6</sup>En realidad se ha definido de tal manera que sus entradas son números reales, pero para nuestros fines se considera en  $M_n(\mathbb{C})$ .

y en particular, para los operadores de espín  $S_A$ ,  $A = 1, 2, 3$ ,

$$[S_A^{(s)}, T_{lm}] = \sum_{m'} (S_A^{(l)})_{m'm} T_{lm'}. \quad (2.11)$$

Las propiedades (2.10) y (2.11) son la realización de que las matrices  $T_{lm}$  transforman bajo la representación irreducible de espín  $l$ . Para utilizar esta propiedad de los tensores de polarización, será conveniente interpretar a la matriz  $A$  como un vector complejo.

### Vectorización

Ya que  $M_n(\mathbb{C})$  es por sí mismo un espacio vectorial de dimensión compleja  $n^2$ , cualquier matriz  $A \in M_n(\mathbb{C})$  se puede escribir como un vector columna de  $n^2$  entradas complejas en una base dada. En particular, en la base de tensores de polarización la descomposición está descrita por

$$A = \sum_{l,m} A^{lm} T_{lm}, \quad (2.12)$$

con  $A^{lm} = \text{Tr}(T_{lm}^\dagger A)$ . Si arreglamos que los  $n^2$  números complejos  $A^{lm}$  estén arreglados en  $2s + 1$  bloques de tamaño  $2l + 1$  donde  $l$  está fija y  $m = -l, \dots, l$ , el vector columna de la matriz  $A$  tiene la siguiente forma

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} |A^{2s}\rangle \\ \vdots \\ |A^0\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde  $|A^l\rangle = \sum_{m=-l}^l A^{lm} |l, m\rangle$  con  $l = 0, \dots, 2s$ , y la identificación de  $T_{lm}$  con  $|l, m\rangle$  se justifica a continuación. Bajo la acción de  $SU(2)$  la matriz  $A$  se transforma como

$$\begin{aligned} A' &= D^{(s)}(g) A D^{(s)}(g^{-1}) \\ &= \sum_{l,m,m'} (D^{(l)}(g))_{m'm} A^{lm} T_{lm'} \\ &= \sum_{l,m'} (A')^{lm'} T_{lm'}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

entonces los vectores  $|A^l\rangle$  se transforman como

$$\begin{aligned} |(A')^l\rangle &= \sum_{m'=-l}^l (A')^{lm'} |l, m'\rangle \\ &= \sum_{m, m'} (D^{(l)}(g))_{m'm} A^{lm} |l, m'\rangle \\ &= D^{(l)}(g) |A^l\rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

es decir, transforman como espinores de espín  $l$ , y la vectorización en (2.13) muestra explícitamente la descomposición de  $A$  en sus componentes irreducibles. Entonces la acción de  $SU(2)$  ahora en la vectorización de  $A$  está dada por

$$g \triangleright |A\rangle \equiv |D^{(s)}(g)AD^{(s)}(g^{-1})\rangle = \bigoplus_{l=0}^{2s} D^{(l)}(g) |A^l\rangle. \quad (2.16)$$

El análogo infinitesimal (2.11) se obtiene de manera muy similar

$$S_A \triangleright |B\rangle \equiv |[S_A^{(s)}, B]\rangle = \bigoplus_{l=0}^{2s} S_A^{(l)} |B^l\rangle. \quad (2.17)$$

Y como consecuencia directa también tenemos la identidad

$$\sum_A |[S_A^{(s)}, [S_A^{(s)}, B]]\rangle = \bigoplus_{l=0}^{2s} C^{(l)} |B^l\rangle = \bigoplus_{l=0}^{2s} l(l+1) |B^l\rangle, \quad (2.18)$$

donde  $C^{(l)} = l(l+1)I_{2l+1}$  es la representación de espín  $l$  del operador de Casimir  $C = \sum_A S_A^2$ .

Será de interés calcular las componentes del espín en cada bloque irreducible, en términos únicamente de  $B$  y  $S_A^{(s)}$ . Para esto, notemos que el producto interno estándar entre vectores es proporcional a la forma hermitiana en  $\mathcal{HS}$

$$\langle A|B\rangle = \sum_{l'm'm} \overline{A^{l'm'}} B^{lm} \delta_{l'l} \delta_{m'm} = \text{Tr}(A^\dagger B), \quad (2.19)$$

donde se ha usado la descomposición de las matrices en tensores de polarización y la ortogonalidad de la base (2.8). De aquí que

$$\text{Tr}(B^\dagger [S_A^{(s)}, B]) = \sum_{l=0}^{2s} \langle B^l | S_A^{(l)} | B^l \rangle, \quad (2.20)$$

pero por la ciclicidad de la traza, el lado derecho de la ecuación anterior se puede poner como  $\text{Tr}(S_A^{(s)} [B, B^\dagger])$ , por lo que en una matriz  $B$  que sea normal (por ejemplo,

hermitiana o unitaria), la suma de los vectores de espín de cada bloque irreducible es cero. Por otro lado también tenemos que

$$\sum_A \text{Tr} \left( B^\dagger \left[ S_A^{(s)}, \left[ S_A^{(s)}, B \right] \right] \right) = \sum_{l=0}^{2s} l(l+1) |B^l|^2, \quad (2.21)$$

con  $|B^l|^2 = \langle B^l | B^l \rangle$ .

# Chapter 3

## Estados anticonherentes de espín $s$

### 3.1 Espacio proyectivo

Para un sistema cuántico de espín  $s$ , todas las cantidades observables y su dinámica están en términos del estado  $|\psi\rangle$ , el producto interno (2.3), y la estructura lineal de  $\mathcal{H}$ . Puede parecer que la descripción cuántica de la naturaleza es matemáticamente más simple que su contraparte clásica, pero esta es un artificio de las herramientas que se están usando; en realidad, esta descripción es redundante. Es conocido que en mecánica cuántica los estados que difieren por una fase global o un factor de normalización representan al mismo estado físico. En la práctica, se toman únicamente estados normalizados  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$  para que sea válida una interpretación estadística y se hace una elección arbitraria de la fase global del estado. El verdadero estado físico del sistema no está representado por un vector  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , sino más bien por el rayo  $[\psi]$  de estados que apuntan en la misma dirección de  $|\psi\rangle$ , dado por

$$[\psi] = \{\lambda |\psi\rangle, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}.$$

El conjunto de rayos en  $\mathbb{C}^n$  conocido como el *espacio proyectivo*  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , es una variedad compleja diferenciable de dimensión  $n - 1$ , donde parecen residir verdaderamente los estados físicos del sistema. En varios estudios, se realiza una descripción de las cantidades físicas y la dinámica en  $\mathcal{H}$  pero trasladada al espacio  $\mathbb{C}P^{n-1}$  [12, 13, 14].

Un vector  $|\psi\rangle = \psi^i e_i \in \mathbb{C}^n$  define un rayo  $[\psi] \in \mathbb{C}P^{n-1}$  con *coordenadas homogéneas*  $\psi^i$ , también denotadas como  $[\psi^1 : \dots : \psi^n]$ , simplemente como el rayo que pasa por

$|\psi\rangle$ . Las coordenadas homogéneas no son propiamente coordenadas, ya que cualquier múltiplo de  $|\psi\rangle$  define el mismo rayo. Sin embargo, suelen ser fáciles de utilizar. Por otro lado, las *coordenadas afines* de  $[\psi]$  se definen vía

$$Z^\alpha = (1, z^2, \dots, z^n), \quad z^i = \psi^i / \psi^1,$$

cuando  $\psi^1 \neq 0$ . Para los rayos donde  $\psi^1 = 0$ , se toman otras coordenadas donde se realiza el cociente con el primer  $\psi^i$  diferente de cero. Cada una de las coordenadas afines cubre un parche distinto de  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

El producto interno en  $\mathcal{H}$  proporciona una noción de distancia entre estados, representada por el ángulo entre ellos

$$\cos^2(D_{FS}(|\psi\rangle, |\phi\rangle)) = \frac{\langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}, \quad (3.1)$$

donde  $D_{FS}$  es la *distancia de Fubini-Study* (FS) en  $\mathcal{H}$ . Dado que (3.1) no depende de la fase o normalización de los estados, también define una noción de distancia en  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , expresada en coordenadas afines como

$$\cos^2(D_{FS}([\psi], [\phi])) = \frac{\bar{W} \cdot Z \bar{Z} \cdot W}{\bar{W} \cdot W \bar{Z} \cdot Z}, \quad W = [\phi] \in \mathbb{C}P^{n-1}, \quad Z = [\psi] \in \mathbb{C}P^{n-1}, \quad (3.2)$$

donde el producto punto se define por  $\bar{A} \cdot B = \sum_\alpha \bar{A}^\alpha B^\alpha$ . Para llegar a una expresión local, se toma  $W^\alpha = Z^\alpha + dZ^\alpha$  y se desarrolla hasta segundo orden en  $dZ^\alpha$  (y segundo orden en  $D_{FS}$ ). El resultado es la *métrica de Fubini-Study* de  $\mathbb{C}P^{n-1}$  [12]

$$ds_{FS}^2 = \frac{d\bar{Z} \cdot dZ \bar{Z} \cdot Z - \bar{Z} \cdot dZ d\bar{Z} \cdot Z}{\bar{Z} \cdot Z \bar{Z} \cdot Z}. \quad (3.3)$$

## 3.2 Matrices de densidad

Las matrices de densidad son una herramienta fundamental en la caracterización de estados cuánticos; permiten generalizar la descripción a *estados mixtos* que resultan de mezclas estadísticas de múltiples estados puros. Además de su utilidad en la formulación teórica, las matrices de densidad proporcionan una representación conveniente de los estados cuánticos, ya que la matriz es única para cada rayo  $[\psi]$ . Para un *estado puro* del sistema, se define su *matriz de densidad* como el operador

$$\rho = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}, \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (3.4)$$

La matriz resultante es hermitiana, tiene traza unitaria y es idempotente:

$$\rho^\dagger = \rho, \quad \text{Tr } \rho = 1, \quad \rho^2 = \rho. \quad (3.5)$$

Por lo tanto, la expresión (3.4) define un encajamiento  $\varphi: \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathfrak{u}(n)$  del espacio proyectivo en el subespacio de matrices hermitianas  $\mathfrak{u}(n) \subset M_n(\mathbb{C})$ . Una matriz de densidad que representa a un estado mixto no satisface la tercera propiedad en (3.5); en su lugar, se demanda que la matriz sea definida no negativa y en consecuencia,  $\text{Tr } \rho^2 < 1$ . Sin embargo, por ahora nos enfocamos solo en estados puros. Es importante notar que la distancia de Hilbert-Schmidt entre matrices de densidad de estados puros da lugar a la distancia de Fubini-Study

$$D_{HS}^2(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\rho_2^\dagger - \rho_1^\dagger)(\rho_2 - \rho_1)] = 1 - \cos^2(D_{FS}([\psi], [\phi])), \quad (3.6)$$

donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las matrices de densidad de  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  respectivamente, y se han usado todas las propiedades (3.5). Si los puntos en  $\mathbb{C}P^{n-1}$  son muy cercanos, se puede expandir el lado derecho de (3.6) hasta segundo orden resultando en  $ds_{HS}^2 = ds_{FS}^2$ , es decir, el mapeo  $\varphi$  es una isometría.

### 3.3 Representación estelar de estados de espín $s$

Una representación sumamente útil para visualizar los estados de espín  $s$  es la conocida *representación estelar* o *constelación de Majorana* [12, 15, 16]. Esta consiste en un mapeo del estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  a  $2s$  puntos (llamados *estrellas*) distribuidos sobre la esfera  $S^2$ . El mapeo se realiza de la siguiente manera: los coeficientes del estado  $|\psi\rangle$  en la base estándar de  $\mathcal{H}$  definen el *polinomio de Majorana* de orden  $2s$ , expresado como sigue

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle \longrightarrow P_{|\psi\rangle}(\zeta) = \sum_{m=-s}^s (-1)^{s-m} \sqrt{\binom{2s}{s-m}} c_m \zeta^{s+m}, \quad (3.7)$$

donde  $\zeta$  es una variable compleja. Luego, las  $2s$  raíces complejas, con posibles multiplicidades,  $\zeta_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, 2s$  del polinomio se mapean a la esfera unitaria mediante la proyección estereográfica desde el polo sur. La constelación de estrellas resultante recibe el nombre de *representación estelar* de  $|\psi\rangle$ . Si el polinomio de Majorana resulta

de grado  $r < 2s$ , es decir, que  $c_m = 0$  para  $-s + r + 1 \leq m \leq s$ , entonces  $\zeta = \infty$  se considera una raíz de multiplicidad  $2s - r$ , y bajo la proyección estereográfica se mapea a  $2s - r$  estrellas en el polo sur de la esfera.

La representación estelar de un estado es una manifestación del bien conocido hecho de que los estados puros de espín  $s$  son equivalentes a estados totalmente simétricos compuestos por  $2s$  espines  $1/2$ . La forma específica de los coeficientes del polinomio (3.7) hace que las posiciones de las estrellas en  $S^2$  correspondan con la representación de los respectivos  $2s$  espines  $1/2$  en la esfera de Bloch [18]. Como consecuencia directa de esto, al realizar una rotación sobre el estado  $|\psi\rangle$ , su representación estelar se transforma con la misma rotación rígida de la esfera.

### 3.4 Estados anticoherentes

Un estado *coherente*  $|\hat{\mathbf{n}}\rangle$  de espín  $s$  es aquel que se asemeja tanto como sea posible a un vector de espín clásico que apunta en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  [17]. La noción de *anticoherencia* de un estado, que indica en qué medida sus propiedades se alejan de un comportamiento clásico, se introdujo por primera vez en [15], donde el autor postula que el opuesto de apuntar en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  es *apuntar a ninguna parte*. Por lo tanto, los *estados anticoherentes de primer orden*<sup>1</sup> se definen como aquellos donde se satisface que

$$\langle \psi | S_A | \psi \rangle = 0, \quad A = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

con  $S_A$  los operadores de espín  $s$ .

La anticoherencia de un estado es fácil de visualizar en términos de su representación estelar. En el caso de un estado coherente  $|\hat{\mathbf{n}}\rangle$ , la constelación de Majorana consiste en  $2s$  estrellas coincidentes en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  [18], mientras que la constelación de un estado anticoherente suele tener un arreglo de estrellas uniformemente distribuidas sobre la esfera [19]. En el caso de espines altos, se conocen varios estados anticoherentes cuyas constelaciones de Majorana definen los vértices de poliedros regulares, o tienen un grupo de simetría no trivial, por ejemplo, formando sólidos platónicos, arquimedianos,

---

<sup>1</sup>En este trabajo solo se trabajará con anticoherencia de primer orden. Para mayores órdenes de anticoherencia véase [15].

de Catalan o de Kepler-Poinsot [20]. Para una caracterización detallada de los estados anticoherentes a partir de grupos de simetría discreta en espines bajos, véase [21].

### 3.4.1 Anticoherencia, varianza total y enredamiento

En un sistema cuántico donde las observables esenciales forman un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo de Lie  $G$ , se define la *varianza total* de un estado normalizado  $|\psi\rangle$  como

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{g}}(|\psi\rangle) = \sum_i \langle \psi | X_i^2 | \psi \rangle - \langle \psi | X_i | \psi \rangle^2, \quad (3.9)$$

donde los operadores  $X_i \in \mathfrak{g}$  forman una base ortonormal del álgebra de Lie con respecto a su métrica  $G$ -invariante. La varianza total aparece por primera vez en [22], como una medida de las fluctuaciones cuánticas de las observables en un estado. Cuanto menores sean las fluctuaciones, el sistema pierde indeterminación en sus propiedades físicas y se asemeja a un estado clásico, mientras que mayores sean las fluctuaciones, mayor es el carácter cuántico del sistema. De esta manera, la varianza total se propone como una medida de la *cuantividad* del estado en relación con sus observables esenciales.

En un sistema compuesto de múltiples subsistemas (o *sistema multipartito*), el *enredamiento* de un estado es una propiedad intrínsecamente cuántica, cuanto mayor sea el enredamiento del estado se espera que la cuantividad del mismo sea mayor. Y ya que un estado de espín  $s$  se asocia con un estado simétrico de  $2s$  espines  $1/2$ , la varianza total se propone como una medida del enredamiento del estado multipartito de  $2s$  qubits [22].

La varianza total del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  en estados de espín  $s$  es de la forma

$$\Delta(|\psi\rangle) \equiv \mathbb{D}_{\mathfrak{su}(2)}(|\psi\rangle) = s(s+1) - |\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle|^2, \quad (3.10)$$

donde se ha utilizado el operador Casimir  $C = \sum_A S_A^2 = s(s+1)I_n$ . Dado que el módulo del vector de valores esperados del espín está acotado entre 0 y  $s$ , la varianza alcanza su máximo y mínimo global en los estados que extremizan  $|\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle|$ , es decir, los estados coherentes con  $\Delta_{\min} = s$  y los estados anticoherentes con  $\Delta_{\max} = s(s+1)$ .

En un reciente artículo [23], se explora con detalle la conexión entre la varianza total, el enredamiento y la velocidad rotacional de un estado. Se encuentra que la velocidad

de un estado factorizable es la suma de las velocidades de sus partes, mientras que la velocidad de un estado enredado siempre es mayor que la suma de las velocidades de sus partes. También se muestra que el módulo al cuadrado de la velocidad, con la métrica FS, que adquiere un estado al ser rotado, promediado en todos los ejes de rotación  $\hat{\mathbf{n}}$ , es proporcional a la varianza total

$$\Delta(|\psi\rangle) = 3 \int_{S^2} |v_{\hat{\mathbf{n}}}|^2 d\hat{\mathbf{n}}. \quad (3.11)$$

La velocidad de rotación promediada en todas las direcciones también aparece en el contexto de rotores cuánticos, donde se buscan estados con la mayor sensibilidad a rotaciones. Los estados óptimos para detectar rotaciones infinitesimales alrededor de un eje desconocido son aquellos que maximizan la velocidad rotacional promediada, y estos, a su vez, según la ecuación (3.11), son los estados anticoherentes [24, 25].

La varianza total no es la única medida de enredamiento que se maximiza en los estados anticoherentes: la entropía de enredamiento también se maximiza para cualquier bipartición  $(1, 2s - 1)$  de los  $2s$  qubits en estados anticoherentes [21]. Además, en medidas geométricas de enredamiento, también aparecen estados anticoherentes con simetrías discretas, como estados maximalmente enredados [16, 26, 27].

### 3.4.2 Explorando estados anticoherentes

#### Dimensión de la variedad

La dimensión real del espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^{n-1}$  de un sistema de espín  $s$  es  $2(n-1) = 4s$ , donde las propias coordenadas esféricas  $(\theta_i, \phi_i)$  de las  $2s$  estrellas en la constelación de Majorana se pueden usar como coordenadas de la variedad. La condición que define la anticoherencia (3.8) impone tres ecuaciones independientes, al menos para  $s > 1$ , por lo que la subvariedad de estados anticoherentes es de dimensión  $4s - 3$ . Sin embargo, en estos  $4s - 3$  grados de libertad también está la orientación de la constelación, que no sustenta ningún análisis; se puede pensar como una reorientación de nuestro sistema de coordenadas en el laboratorio. Entonces hay  $4s - 6$  grados de libertad en la forma de la constelación de Majorana de estados anticoherentes; estos se pueden tomar de muchas maneras, por ejemplo, usando los ángulos entre las estrellas o las distancias relativas

entre ellas. A continuación se presenta una exploración detallada de los estados anticonherentes en espines bajos, usando como punto de partida estados con simetrías discretas y mostrando las deformaciones que los conectan manteniendo la anticonherencia.

### Espín 1 y 3/2

Para espín  $s = 1/2$ , es claro que no puede haber anticonherencia, ya que cualquier estado tiene proyección máxima a lo largo de alguna dirección  $\hat{\mathbf{n}} \in S^2$ . En el caso de  $s = 1$ , no es difícil demostrar que el valor esperado del espín  $\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle$  se encuentre a lo largo de la línea que pasa por el punto medio entre las dos estrellas. Siendo el único grado de libertad la distancia del vector de espín al origen, o también el ángulo entre las estrellas [28]. Resultando que los estados anticonherentes son aquellos donde las estrellas son antipodales, ver la figura 3.1.

Como generalización del ejemplo anterior, podemos identificar una subvariedad de estados anticonherentes para cada espín entero: la constelación del estado  $|s, 0\rangle$  está dada por  $s$  estrellas situadas en el polo norte de la esfera y  $s$  en el polo sur; por su simetría bajo rotaciones alrededor del eje  $z$ , concluimos que  $\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle$  no puede tener componentes en  $x$  ni en  $y$ . Además, como también es invariante bajo reflexiones respecto al plano  $xy$ , tampoco puede tener componente en  $z$ . Es decir,  $|s, 0\rangle$  siempre es un estado anticonherente, y su órbita bajo rotaciones se puede identificar con el espacio de puntos antipodales en la esfera  $S^2/Z_2 \cong \mathbb{RP}^2$ . Para el caso de  $s = 1$ , todos los estados anticonherentes pertenecen a esta subvariedad.

Para espín  $3/2$ , el valor esperado del espín no necesariamente se corresponde con el baricentro de la constelación o algún otro punto especial formado con las posiciones de las estrellas; en general, no hay una relación sencilla entre las estrellas y  $\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle$ . Sin embargo, siempre tendremos argumentos de simetría para construir estados anticonherentes. Por ejemplo, si las estrellas de la constelación están a lo largo del ecuador de la esfera, el espín del estado no tendrá componente en  $z$ . Adicionalmente, si se impone que la constelación tenga dos simetrías bajo reflexión respecto a dos planos verticales, entonces también se garantiza que el vector de espín no tenga componentes en  $x$  ni en  $y$ . El resultado es el estado GHZ, cuya constelación está dada por un triángulo equilátero en el ecuador, ver 3.1. Los planos de simetría son aquellos que pasan por las alturas

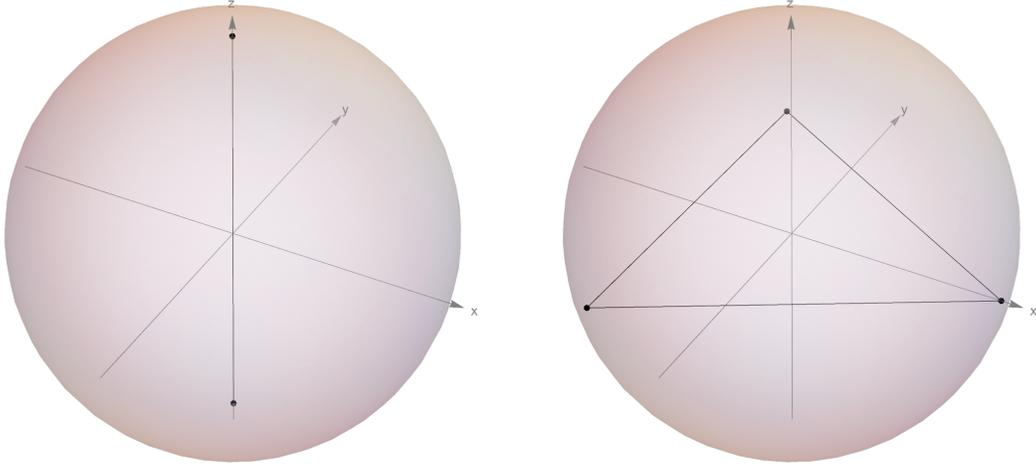


Figure 3.1: Constelación de Majorana de los estados anticoherentes con espín  $s = 1$  (izquierda) y  $s = 3/2$  (derecha).

del triángulo, y el mismo plano del triángulo. En este caso, podemos identificar a los estados anticoherentes la órbita del estado GHZ bajo rotaciones  $SO(3)$  módulo el grupo de simetrías del triángulo.

Para cualquier espín  $s$ , se define el estado GHZ como  $|\text{GHZ}^{(s)}\rangle = |s, -s\rangle + |s, s\rangle$ , y su constelación está dada por un polígono regular de  $2s$  vértices en el ecuador. De nuevo, por argumentos de simetría, concluimos que todo estado GHZ es anticoherente.

## Espín 2

Además del estado de proyección cero y el GHZ, para  $s = 2$  uno de los sólidos platónicos, el tetraedro, define a un tercer estado anticoherente con un grupo de simetría no trivial. El estado tetraédrico es de especial relevancia desde su primera aparición, debido a que es el primero en poseer mayor orden de anticoherencia [15]<sup>2</sup>. En otros trabajos también se puede encontrar que el estado tetraédrico maximiza el enredamiento en un sistema de 4-qubits [29, 27].

En [21] se presenta una parametrización del espacio de formas anticoherentes 2

<sup>2</sup>Órdenes superiores de anticoherencia implican que momentos superiores de la distribución de probabilidad  $\left|\langle \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{S}} \rangle\right|^2$ , sean independientes de la dirección de medición  $\hat{\mathbf{n}}$ .

dimensionales, dada por

$$|\psi_{\text{anti}}\rangle = (1, 0, \mu, 0, 1)^T, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (3.12)$$

en la base estándar del espacio de Hilbert. Para explorar las deformaciones que mantienen a un estado anticoherente, encontramos dos curvas

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \left( \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, 0, -\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)^T, \\ |\psi_2\rangle &= \left( \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, 0, -i \sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)^T, \end{aligned} \quad (3.13)$$

que conectan al estado GHZ con el de proyección cero y con el tetraédrico respectivamente. En  $t = 0$  las estrellas están en los vértices de un cuadrado ubicado en el plano  $xy$ , correspondiente al estado GHZ. A medida que  $t$  aumenta, las estrellas de  $|\psi_1\rangle$  se mueven a lo largo del ecuador de forma simétrica en direcciones opuestas y se encuentran en pares en el eje  $x$  en  $t = \pi/6$  (estado de proyección cero de  $S_x$ ). Por otro lado, las estrellas de  $|\psi_2\rangle$  se mueven verticalmente de manera simétrica fuera del plano ecuatorial y coinciden con los vértices de un tetraedro en  $t = \pi/4$ , ver 3.2. A lo largo de ambas curvas el movimiento de las estrellas es simétrico, por lo que es fácil argumentar por qué todos los estados intermedios son anticoherentes.

## Espín 5/2

En el caso de espín  $s = 5/2$ , hay siete formas simétricas de la constelación de Majorana que no son equivalentes a través de transformaciones *Stochastic Local Operations and Classical Communication* (SLOCC), es decir, para llevar al sistema de una de estas formas a otra necesariamente tiene que cambiar el enredamiento [21]. Nos referimos a las formas simétricas mencionadas como: pirámide cuadrada, pirámide triangular, bpirámide, bpirámide isósceles, triángulo, cometa y pentágono.

Para explorar las deformaciones que mantienen a un estado anticoherente, nos fijamos en la carta local donde no hay estrellas en el polo sur, y separamos las componentes no nulas del estado, utilizando componentes nulas, de tal manera que  $\langle \psi | S_+ | \psi \rangle = \langle \psi | S_- | \psi \rangle = 0$ ; luego se resuelve la ecuación  $\langle \psi | S_z | \psi \rangle = 0$  parametrizando las componentes no nulas con parámetros reales. El resultado son dos familias 2-paramétricas de estados anticoherentes no normalizados,

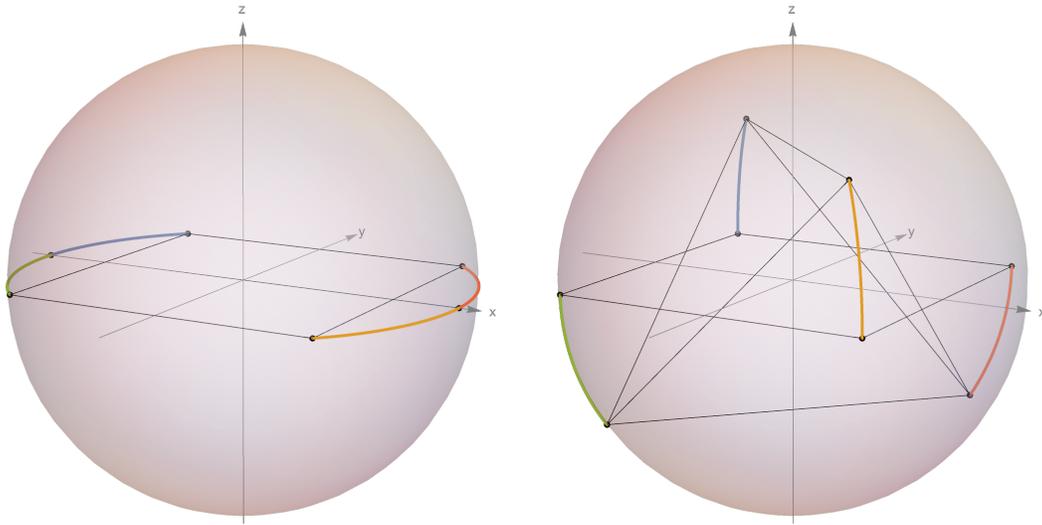


Figure 3.2: Trayectorias de las estrellas de Majorana de las curvas  $|\psi_1\rangle$  para  $0 \leq t \leq \pi/6$  (izquierda) y  $|\psi_2\rangle$  para  $0 \leq t \leq \pi/4$  (derecha).

$$|\psi_1\rangle = \left( 1, 0, \sqrt{5} \sinh q, 0, \sqrt{\frac{5}{3}} e^{i\phi} \cosh q, 0 \right)^T,$$

$$|\psi_2\rangle = \left( 1, 0, 0, \sqrt{5} \sin \alpha, 0, e^{i\beta} \cos \alpha \right)^T,$$

que conectan las siete formas mencionadas de la siguiente manera:

La constelación de Majorana de la familia  $|\psi_1\rangle$  en  $q = 0, \phi = 0$  tiene la forma de una pirámide cuadrada con el vértice fuera de la base en el polo norte de la esfera. Manteniendo  $\phi = 0$  y aumentando el valor de  $q$ , la estrella en el polo norte no se mueve, mientras que las estrellas que forman la base se aproximan de manera simétrica, deformando la base cuadrada en un rectángulo dentro del mismo plano horizontal, hasta un valor crítico  $q \approx 0.489$ , donde las estrellas se encuentran por pares en el plano  $yz$  formando un triángulo. Luego, si se continúa aumentando  $q$ , las estrellas coincidentes salen simétricamente en direcciones opuestas dentro del mismo plano  $yz$  hasta llegar a la forma del pentágono regular (un estado GHZ rotado) en  $q \approx 1.146$ . A partir de este valor de  $q$ , las dos estrellas simétricas superiores continúan subiendo notablemente más lento que las estrellas simétricas inferiores; ambos movimientos acercan a las estrellas asintóticamente hasta que en el límite  $q \rightarrow \infty$ , las estrellas inferiores se encuentran

en el polo sur, logrando la forma de una cometa, ver las figuras 3.3(a)-3.3(d).

En la misma familia de estados, ahora fijamos  $\phi = \pi$ . En  $q = 0$ , la constelación de Majorana forma un pirámide cuadrada rotada  $\pi/4$  alrededor del eje  $z$  respecto a la pirámide del estado en  $q = 0, \phi = 0$ . A medida que  $q$  aumenta, las estrellas de la base salen del plano horizontal en direcciones opuestas de manera simétrica, dos hacia arriba y dos hacia abajo, de tal manera que para  $q \approx 0.279$ , las estrellas forman los vértices de una bipirámide de base triangular, con la base en el plano  $yz$ , y los vértices antipodales a lo largo del eje  $x$ . Conforme  $q$  continúa aumentando, las estrellas continúan su movimiento vertical, acercándose dos de ellas al polo norte y dos de ellas al polo sur, a lo largo del plano  $zx$  y  $yz$  respectivamente. En valores genéricos de  $q$ , con  $\phi = \pi$ , la constelación tiene la forma de una bipirámide irregular, donde todas sus caras forman triángulos isósceles. Como estos estados tienen el mismo grupo de simetría, se agrupan en una única clase de estados simétricos, la de las bipirámides isósceles, ver las figuras 3.3(e)-3.3(g).

En la familia de estados anticoherentes  $|\psi_2\rangle$ , fijemos  $\beta = 0$ . Cuando  $\alpha = 0$ , la forma de la constelación es la de un pentágono regular en el plano ecuatorial, de hecho, es el estado GHZ. Conforme  $\alpha$  aumenta, tres estrellas del pentágono se mueven hacia abajo, y dos hacia arriba. Esta vez, aunque los movimientos son simétricos bajo reflexión respecto al plano  $zx$ , las trayectorias de las estrellas no se mantienen dentro de un mismo plano. Específicamente, las curvas que trazan cuatro de las estrellas en el espacio tienen torsión no nula, a diferencia de las trayectorias mostradas anteriormente. A medida que  $\alpha$  se aproxima a  $\pi/2$ , las dos estrellas que suben se aproximan al polo norte mientras que las estrellas que bajan forman un triángulo equilátero en un plano horizontal, de tal manera que en  $\alpha = \pi/2$ , la constelación forma una pirámide triangular, ver la figura 3.3(h).

De esta manera, podemos concluir que para  $s = 5/2$  las clases de equivalencia, bajo transformaciones SLOCC, de estados anticoherentes con simetría, se pueden conectar con transformaciones continuas que involucran las deformaciones descritas y rotaciones, sugiriendo que la subvariedad de estados anticoherentes es conexa. A pesar de que pudimos encontrar dos familias 2-paramétricas de formas de estados anticoherentes en el espacio de Hilbert para espín  $s = 5/2$ , la parametrización de la subvariedad completa

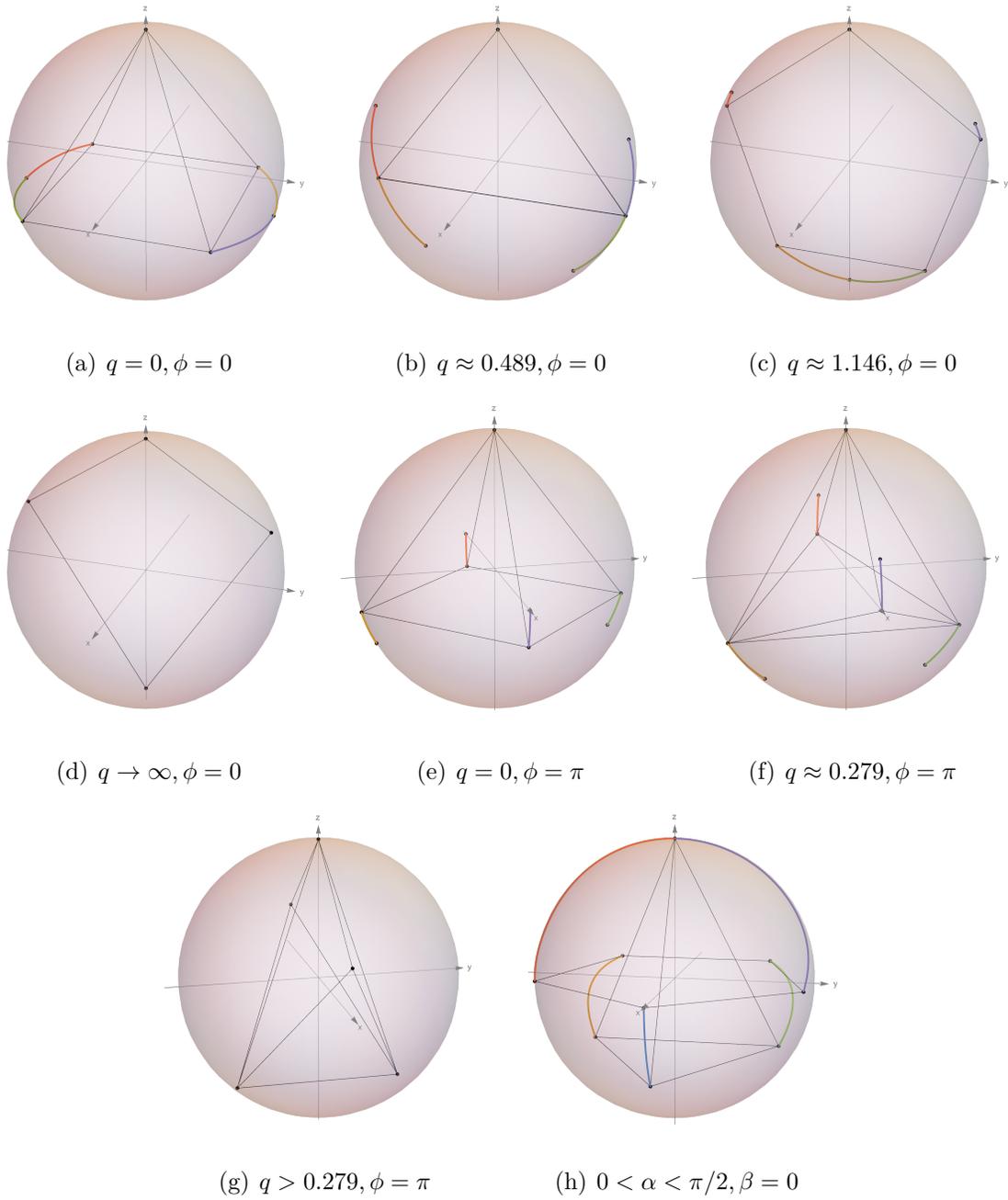


Figure 3.3: Constelación de Majorana de las familias de estados anticoherentes  $|\psi_1\rangle$  (a-g) y  $|\psi_2\rangle$  (h).

de estados anticoherentes de dimensión 4 supone una mayor dificultad y se deja como un problema abierto.

Por último, cabe mencionar que para valores genéricos de  $\phi$  y de  $\beta$ , en ambas familias

se pueden encontrar estados anticonherentes que no poseen alguna simetría, mostrando así que la simetría no es una propiedad de los estados anticonherentes. Sin embargo, los estados simétricos son un punto de partida conveniente para explorar una vecindad de la variedad de estados anticonherentes.

### Estados bipiramidales en espines superiores

Las soluciones a las ecuaciones que definen la anticonherencia (3.8) son los ceros de tres polinomios homogéneos de orden (1,1) en las variables  $(\psi^i, \bar{\psi}^i)$  de las componentes del estado  $|\psi\rangle$  en una base ortonormal. Encontrar una caracterización de la solución a las ecuaciones de anticonherencia, incluso en el espacio proyectivo (donde se reducen 2 variables reales) usando, por ejemplo, coordenadas afines, no es tarea fácil y en general es un problema abierto para  $s > 2$ . Por esta razón, al menos hasta el momento, no hay una construcción canónica para coordenadas de la subvariedad de estados anticonherentes. Sin embargo, los argumentos de simetría nos permiten encontrar algunas familias de estados anticonherentes que comparten alguna propiedad geométrica de su representación estelar. Motivado por las formas de los estados anticonherentes presentados anteriormente, a continuación presentamos una nueva familia de estados (en su mayoría anticonherentes) que forman una base para el espacio de Hilbert de cualquier espín.

Dado un sistema de espín  $s$  y un eigenvalor no negativo  $m$  de  $S_z$ , definimos a los estados  $(s, 2m)$ -bipiramidales (no normalizados) como

$$|\text{bip}_{2m}^{(s)}\rangle = |s, m\rangle + |s, -m\rangle. \quad (3.14)$$

El polinomio de Majorana  $P(\zeta)$  de un estado bipiramidal es proporcional a  $\zeta^{s-m}(\zeta^{2m} + (-1)^{2m})$ , lo que implica que su constelación se compone de  $s - m$  estrellas en el polo norte de la esfera,  $2m$  estrellas distribuidas en un polígono regular de  $2m$  lados en el ecuador, y las restantes  $s - m$  estrellas en el polo sur, formando así una bípirmide  $2m$ -agonal, como se muestra en la figura 3.4.

Las estrellas de los estados con  $2m = 0, 1, 2, 2s$  no forman propiamente una bípirmide, pero están incluidos dentro de esta familia. En particular, los estados con  $2m = 0, 2s$

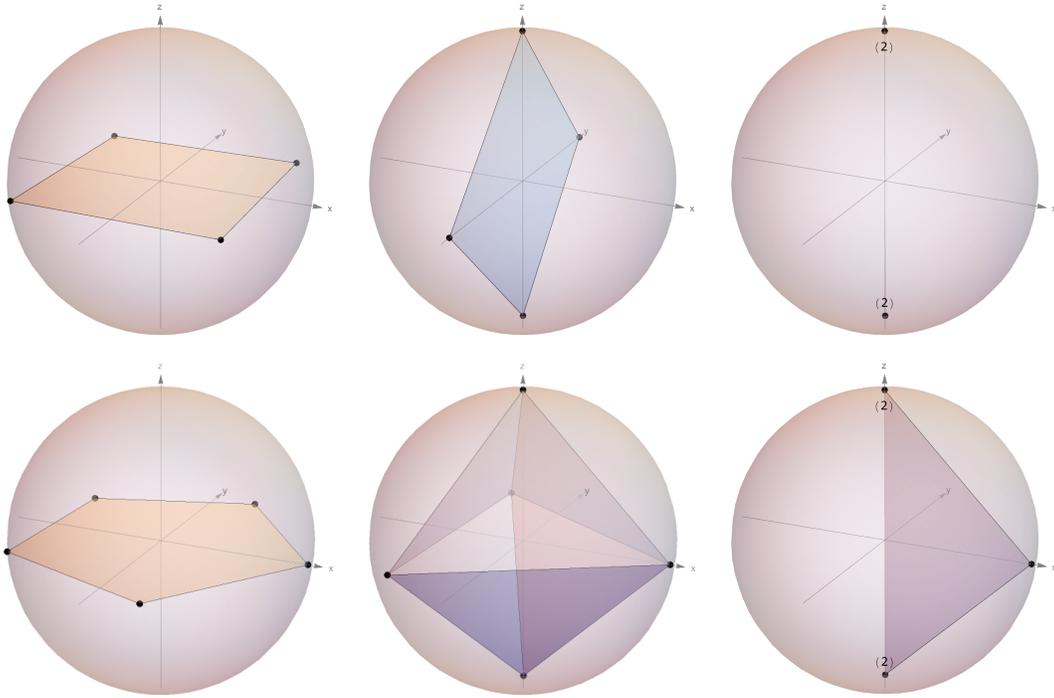


Figure 3.4: Constelación de Majorana de los estados  $(s, 2m)$ -bipiramidales. En la fila superior  $s = 2$ , y  $2m = 4, 2, 0$  de izquierda a derecha. En la fila inferior  $s = 5/2$ , y  $2m = 5, 3, 1$  de izquierda a derecha. Se ha etiquetado a las estrellas con el número de estrellas coincidentes en la misma posición.

son el eigenestado de proyección cero de  $S_z$  y el estado GHZ, respectivamente. La constelación de estados bipiramidales con  $2m = 1$  siempre forma un triángulo con vértices en los polos de la esfera y en la dirección positiva del eje  $x$ . Mientras que para  $2m = 2$ , la constelación forma un cuadrado con vértices en los polos de la esfera y en los puntos antipodales del eje  $y$ , ver la figura 3.4. Debido a la simetría de las constelaciones, es fácil demostrar que en esta familia, los estados son anticoherentes.

**Proposición 1.** *Los estados  $(s, 2m)$ -bipiramidales con  $2m \neq 1$  son estados anticoherentes.*

*Proof.* Dado que las bipirámides son invariantes bajo un grupo discreto de rotaciones alrededor del eje  $z$  y una reflexión respecto al plano  $xy$ , la componente del espín en el plano  $xy$  y a lo largo del eje  $z$  es cero. El único caso que no tiene la primera simetría

es si  $2m = 1$ . □

Notemos que si un estado bipyramidal es rotado por un ángulo  $\pi/2m$  se transforma como

$$D^{(s)}(R_{\frac{\pi}{2m}, \hat{z}}) \left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2}} |s, m\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}} |s, -m\rangle \sim |s, m\rangle - |s, -m\rangle \equiv \left| \text{bip}_{2m}^{\perp(s)} \right\rangle,$$

donde vamos a tomar como definición  $\left| \text{bip}_0^{(s)} \right\rangle \equiv \left| \text{bip}_0^{\perp(s)} \right\rangle \equiv |s, 0\rangle$ . Entonces los estados  $\left| \text{bip}_{2m}^{\perp(s)} \right\rangle$  también definen bipyramides y por ende, son anticonherentes. Un cálculo directo muestra que para espines enteros, el conjunto  $\left\{ \left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle, \left| \text{bip}_{2m}^{\perp(s)} \right\rangle \right\}$ ,  $m = 0, \dots, s$  es una base ortogonal de estados anticonherentes del espacio de Hilbert. Mientras que para espines semienteros los estados  $\left\{ \left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle, \left| \text{bip}_{2m}^{\perp(s)} \right\rangle \right\}$ ,  $m = 1/2, \dots, s$  forman una base ortogonal del espacio de Hilbert, donde los estados con  $2m \neq 1$  son anticonherentes.

# Chapter 4

## Planos antioherentes de espín $s$

### 4.1 El Grassmanniano

La generalización natural del espacio proyectivo es ahora considerar el conjunto de planos de dimensión  $k$  (o  $k$ -planos) que pasan por el origen en  $\mathbb{C}^n$ , también conocido como el *Grassmanniano*  $\text{Gr}_{k,n}$  [12]. Dado un  $k$ -plano  $\Pi$  en  $\mathbb{C}^n$  y una base  $\{v_1, \dots, v_k\}$  en  $\Pi$ , se tiene la matriz  $n \times k$  de componentes:

$$V = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^n & \cdots & v_k^n \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Un cambio de base  $v \rightarrow w$  en  $\Pi$ , dado por  $w_i = M^j_i v_j$ , donde  $M \in GL(k; \mathbb{C})$  es la matriz de cambio de base, define una nueva matriz de componentes  $W = VM$ , que representa al mismo plano. Las componentes de la matriz  $V$  son conocidas como las *coordenadas homogéneas* de  $\Pi$ . De manera similar al espacio proyectivo, las coordenadas homogéneas del plano son una descripción redundante, por lo que hay que fijar de alguna manera la base que representa al plano. Entonces, se puede elegir un cambio de base  $M$  como la inversa de la matriz definida por las primeras  $k$  columnas de  $V$  cuando esta matriz es invertible. Tras el cambio de base, resulta

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} I_k \\ \tilde{V}_1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

donde  $\tilde{V}_1$  es una matriz  $(n-k) \times k$ , y sus componentes se definen como las *coordenadas afines* para  $\text{Gr}_{k,n}$ . Si la matriz formada por las primeras  $k$  columnas no es invertible, entonces se hace otra elección de columnas que sí lo sea y se elige la base del plano de tal manera que la nueva elección de columnas forme la identidad  $k \times k$ . Cada una de estas coordenadas afines cubre un parche distinto de  $\text{Gr}_{k,n}$ .

El Grassmanniano es una variedad diferenciable compacta de dimensión real  $2k\tilde{k}$ , donde  $\tilde{k} = n - k$  es la dimensión del espacio ortogonal, con una noción de distancia entre planos heredada del producto interno en  $\mathbb{C}^n$ . Presentar la distancia natural en  $\text{Gr}_{k,n}$  no es tan inmediato como en el caso de  $\mathbb{C}P^{n-1}$ ; para esto, es necesario presentar algunos conceptos previos.

### 4.1.1 Encajamiento de Plücker

Así como el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  brinda una estructura lineal para los estados del sistema, el álgebra exterior hace lo mismo para los subespacios de  $\mathcal{H}$ . El  $k$ -ésimo producto exterior de  $\mathcal{H}$ , denotado  $\Lambda^k(\mathcal{H})$  [30], es el espacio de Hilbert generado por combinaciones lineales de elementos de la forma

$$|\psi_1\rangle \wedge |\psi_2\rangle \wedge \cdots \wedge |\psi_k\rangle, \quad |\psi_i\rangle \in \mathcal{H}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

donde  $\wedge$  denota el producto exterior de vectores (producto tensorial antisimetrizado). Si  $|\Phi\rangle \in \Lambda^k(\mathcal{H})$ , entonces  $|\Phi\rangle$  se denomina un  $k$ -vector. Además, si  $|\Phi\rangle$  puede expresarse como un producto exterior de  $k$  elementos de  $\mathcal{H}$ , se dice que es  $\wedge$ -factorizable.

Una base ortonormal  $\{e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , en  $\mathcal{H}$  define una *base de Plücker* en  $\Lambda^k(\mathcal{H})$  de la siguiente manera:

$$e_I \equiv e_{i_1 \dots i_k} = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, \quad (4.3)$$

donde el multiíndice  $I = i_1 \dots i_k$  es un conjunto de índices no repetidos ordenados de forma ascendente. En esta base, un elemento genérico  $|\Phi\rangle \in \Lambda^k(\mathcal{H})$  tiene la forma

$$|\Phi\rangle = \sum_I \Phi^I e_I, \quad \Phi^I \in \mathbb{C}.$$

Es importante destacar que aunque una base de  $k$ -vectores  $\wedge$ -factorizables genera  $\Lambda^k(\mathcal{H})$ , no todos los elementos de  $\Lambda^k(\mathcal{H})$  son  $\wedge$ -factorizables.

Dado un  $k$ -plano  $\Pi \subset \mathcal{H}$  generado por los vectores  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , definimos a  $|\Pi\rangle \in \wedge^k \mathcal{H}$  como el  $k$ -vector  $\wedge$ -factorizable formado por el producto exterior de los  $k$  vectores que lo generan. En una base de Plücker, los  $\binom{n}{k}$  números  $\Pi^I$  de la descomposición  $|\Pi\rangle = \Pi^I e_I$  son las *coordenadas de Plücker* del plano  $\Pi$ . Como  $|\Pi\rangle$  está formado por productos antisimetrizados, resulta que bajo un cambio de base en el plano, su  $k$ -vector se transforma como  $|\Pi\rangle \longrightarrow \det(M) |\Pi\rangle$  con  $M$  la matriz  $k \times k$  de cambio de base, y en coordenadas de Plücker  $\Pi^I \longrightarrow \det(M) \Pi^I$ . Esto significa que el encajamiento de  $\text{Gr}_{k,n}$  en  $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$  dado por las coordenadas de Plücker, concentra toda la redundancia de la elección de base en el plano en la indeterminación de un único factor complejo, diferente de cero. De manera análoga a la redundancia en la descripción de un estado en  $\mathcal{H}$ , se define entonces el *encajamiento de Plücker* como el mapeo

$$\varphi: \text{Gr}_{k,n} \longrightarrow \mathbb{C}P^{\binom{n}{k}-1}, \quad \varphi: \Pi \mapsto [|\Pi\rangle], \quad (4.4)$$

donde  $[|\Pi\rangle]$  es el rayo en  $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$  que pasa por  $|\Pi\rangle$ .

Componiendo el encajamiento de Plücker con el encajamiento de  $\mathbb{C}P^{\binom{n}{k}-1}$  en  $\mathfrak{u}(\binom{n}{k})$  dado por las matrices de densidad, tenemos el siguiente mapeo

$$\Phi: \text{Gr}_{k,n} \longrightarrow \mathfrak{u}\left(\binom{n}{k}\right), \quad \Phi: \Pi \mapsto R \equiv \frac{|\Pi\rangle\langle\Pi|}{\langle\Pi|\Pi\rangle}. \quad (4.5)$$

Ahora queremos mostrar que este mapeo es una isometría.

El espacio vectorial  $\wedge^k \mathcal{H} \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{k}-1}$  es, de hecho, un espacio de Hilbert con el producto interno heredado de  $\mathcal{H}$ :

$$\langle |\phi_1\rangle \wedge \dots \wedge |\phi_k\rangle, |\psi_1\rangle \wedge \dots \wedge |\psi_k\rangle \rangle \equiv \det \begin{pmatrix} \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_1 | \psi_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_k | \psi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_k | \psi_k \rangle \end{pmatrix} \equiv \det (\langle \phi_i | \psi_j \rangle),$$

para  $k$ -vectores  $\wedge$ -factorizables. Para el resto de  $k$ -vectores, el producto interno se extiende por linealidad. Este producto interno proporciona una generalización de la noción de distancia de Fubini-Study en  $\text{Gr}_{k,n}$  [31]:

$$\cos^2(D_{FS}(\Pi, \Sigma)) = \frac{\det (\langle \phi_i | \psi_j \rangle) \det (\langle \psi_i | \phi_j \rangle)}{\det (\langle \phi_i | \phi_j \rangle) \det (\langle \psi_i | \psi_j \rangle)},$$

ya que bajo un cambio de base en el plano, por la linealidad del producto interno, esta expresión permanece invariante. También es importante mencionar que una base de

Plücker es ortonormal con este producto interno. Además, se puede mostrar que

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle,$$

donde del lado derecho está el producto interno de dos vectores genéricos  $|\Phi\rangle, |\Psi\rangle \in \wedge^k \mathcal{H}$  con el producto interno heredado de  $\mathcal{H}$ , y del lado izquierdo, el producto hermítico estándar en  $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$  dado por  $\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_I \bar{\Phi}^I \Psi^I$  en coordenadas de Plücker. Entonces, la distancia FS toma una forma más familiar:

$$\cos^2(D_{FS}(\Pi, \Sigma)) = \frac{\langle \Sigma | \Pi \rangle \langle \Pi | \Sigma \rangle}{\langle \Sigma | \Sigma \rangle \langle \Pi | \Pi \rangle},$$

A partir de aquí, la demostración de que a nivel local, la métrica FS en  $\text{Gr}_{k,n}$  se corresponde con la métrica HS en  $\mathfrak{u}\left(\binom{n}{k}\right)$  es idéntica a la demostración para el encajamiento  $\varphi: \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathfrak{u}(n)$ .

## 4.2 Representación estelar de planos

Desde el punto de vista del álgebra geométrica, un  $k$ -plano  $\Pi$  en un espacio vectorial está caracterizado por el producto exterior de  $k$  vectores que lo generan. Sin embargo, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, el producto exterior de estados corresponde a un estado multipartito totalmente antisimétrico. El estado  $|\Pi\rangle$  se define como

$$|\Pi\rangle = |\psi_1\rangle \wedge \dots \wedge |\psi_k\rangle, \quad (4.6)$$

donde  $\Pi = \text{span}\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ ,  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ , y  $|\Pi\rangle \in \wedge^k(\mathcal{H}) \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$  con  $n = 2s + 1$ . Este estado tiene la misma descripción matemática que un estado multipartito de  $k$  espines  $s$  totalmente antisimétrico, que además es  $\wedge$ -factorizable.

Las rotaciones en el espacio físico se representan mediante la acción de  $SU(2)$  en  $\mathcal{H}$  como  $|\psi\rangle \mapsto D^{(s)}(g) |\psi\rangle$ , donde  $D^{(s)}$  es la representación irreducible de dimensión  $2s + 1$  de  $SU(2)$  y  $g \in SU(2)$ . Esta acción se extiende naturalmente a  $\wedge^k(\mathcal{H})$  como

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \wedge \dots \wedge |\psi_k\rangle \mapsto D^{(s,k)}(g) |\Psi\rangle \equiv D^{(s)}(g) |\psi_1\rangle \wedge \dots \wedge D^{(s)}(g) |\psi_k\rangle, \quad (4.7)$$

cuando el estado  $|\Psi\rangle \in \wedge^k(\mathcal{H})$  es  $\wedge$ -factorizable, y se extiende al resto de estados por linealidad. La representación  $D^{(s,k)}$  no es irreducible en general, pero se sabe de la

teoría de representaciones [32, 33] que mediante un cambio de base adecuado de la base de Plücker a una base *Block Diagonal* (BD), la representación toma una forma diagonal por bloques donde aparecen  $m_j^{(s,k)}$  copias de  $D^{(j)}$ , con  $j = j_{\text{mín}}, \dots, j_{\text{máx}}$ .

En la base BD, el estado asociado a un plano se descompone como

$$|\Pi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi^{j_{\text{máx}}}\rangle \\ \vdots \\ |\psi^{j,\alpha}\rangle \\ \vdots \\ |\psi^{j_{\text{mín}}}\rangle \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

donde en el término genérico  $|\psi^{j,\alpha}\rangle$ ,  $j_{\text{mín}} \leq j \leq j_{\text{máx}}$  y  $\alpha$  etiqueta la copia del bloque irreducible de espín  $j$  cuando  $m_j^{(s,k)} > 1$ . Se define como la *representación estelar o multiconstelación de Majorana* de un  $k$ -plano al conjunto de constelaciones, cada una asociada al estado  $|\psi^{j,\alpha}\rangle$ , de la descomposición (4.8). Una consecuencia inmediata de esta construcción es que bajo una rotación del plano  $\Pi$ , cada una de las constelaciones de su representación estelar se transforma por la misma rotación sobre la esfera. En esta propiedad radica la utilidad de las representaciones estelares, ya que codifican de manera visual las simetrías de un plano.

En términos computacionales, no es complicado encontrar la multiconstelación de Majorana de un  $k$ -plano, pero se deben considerar algunas sutilezas. En [34] se describe detalladamente cómo encontrar una base BD, y en consecuencia, la multiconstelación de Majorana de un producto tensorial antisimetrizado de estados. A continuación y a manera de resumen, se destacan algunos puntos a considerar, ordenados de lo más general a lo más particular.

- La construcción anterior de la representación estelar se aplica en general para estados  $k$ -partitos antisimétricos de espín  $s$ . Los  $k$ -planos son un caso particular donde el estado es  $\wedge$ -factorizable.
- A diferencia de los estados de espín  $s$ , la representación estelar de un plano no codifica toda la estructura del plano: la constelación de cada uno de los elementos en la descomposición (4.8) no toma en cuenta la fase ni la normalización de

cada estado. Para el estado  $|\Pi\rangle$ , esto equivale a ignorar el peso que tiene cada estado en la descomposición. En [34], como alternativa, se agrega una *constelación observadora*, definida a partir del vector de pesos de los estados, pero esto depende de una elección arbitraria de estados de referencia con los que se miden las fases globales de cada estado. Y aunque se elige una construcción menos arbitraria donde la constelación observadora resulta invariante bajo rotaciones, esta no está definida para estados con simetrías rotacionales.

- El espín más alto que aparece en la descomposición es  $j_{\text{máx}} = \frac{1}{2}k(2s + 1 - k)$ . El siguiente espín más alto es  $j_{\text{máx}} - 2$ , y ambos siempre tienen multiplicidad 1. Los espines  $j_{\text{máx}} - 1/2$ ,  $j_{\text{máx}} - 1$ , y  $j_{\text{máx}} - 3/2$  nunca aparecen.
- Cuando hay multiplicidad en la descomposición en representaciones irreducibles de  $SU(2)$  ( $m_j^{(s,k)} > 1$ ), significa que hay todo un subespacio de estados en  $\Lambda^k(\mathcal{H})$ , de dimensión  $m_j^{(s,k)} > 1$ , de eigenvectores simultáneos de  $S^2$  y  $S_z$  en la representación  $D^{(s,k)}$  con el mismo eigenvalor. Para construir los multipletes de espín  $j$  correspondientes, se debe hacer una elección de estados ortogonales con la máxima proyección  $m = j$ , y luego aplicar el operador  $S_-$   $2j$  veces a cada uno. Los estados resultantes son una base para cada multiplete de espín  $j$ . En consecuencia, la multiconstelación de los bloques con el mismo  $j$  depende de esta elección arbitraria. En este trabajo no habrá descomposiciones con multiplicidades, por lo que no será necesario establecer un criterio de selección de estos estados.

## 4.3 Planos anticoherentes

### 4.3.1 Función de coherencia y varianza total

Un  $k$ -plano  $\Pi$  que pasa por el origen en  $\mathcal{H}$  es llamado *anticoherente* si y solo si

$$\langle \psi_i | S_A | \psi_j \rangle = 0, \quad A = 1, 2, 3, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad (4.9)$$

donde  $\{|\psi_i\rangle\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , es una base ortonormal en  $\Pi$ . La definición de anticoherencia implica que cualquier estado dentro del plano es un estado anticoherente. La *coherencia*

de  $\Pi$  se define como

$$f_{\Pi} = \sum_{A=1}^3 \sum_{i,j=1}^k |\langle \psi_i | S_A | \psi_j \rangle|^2, \quad (4.10)$$

tal que  $\Pi$  es anticoherente si y solo si  $f_{\Pi} = 0$ , es decir, si  $f$  tiene un mínimo global en  $\Pi$ . El requerimiento de ortonormalización en la base puede ser omitido escribiendo (4.10) en la forma

$$f_{\Pi} = \sum_{A=1}^3 \text{Tr}(\rho_{\Pi} S_A \rho_{\Pi} S_A), \quad (4.11)$$

con

$$\rho_{\Pi} \equiv \rho = \sum_{i=1}^k |\psi_i\rangle\langle\psi^i|, \quad (4.12)$$

donde ahora  $\{|\psi_i\rangle\}$  es una base arbitraria en  $\Pi$  y  $\{|\psi^i\rangle\}$  es la base dual,  $\langle\psi_i|\psi^j\rangle = \delta_i^j$ , en otras palabras,  $\rho$  es el proyector (matriz de densidad) sobre  $\Pi$ , cumpliendo

$$\rho^\dagger = \rho, \quad \rho^2 = \rho, \quad \text{Tr}\rho = k. \quad (4.13)$$

La ecuación (4.11) deja claro que  $f_{\Pi}$  no depende de la base elegida en  $\Pi$ . En lo siguiente, identificamos al plano  $\Pi$  con el proyector correspondiente  $\rho$ , y escribimos,  $f_{\Pi} \equiv f_{\rho}$ . El mapeo  $\varphi: \text{Gr}_{k,n} \rightarrow \mathbf{u}(n)$ ,  $\Pi \mapsto \rho_{\Pi}$ , encaja el Grassmannian dentro del espacio vectorial de matrices hermitianas  $\mathbf{u}(n)$ . Escribimos la imagen de este mapeo como  $\mathcal{G}_{k,n}$ .

Como se mencionó en la sección 3.4.1, la varianza total de un estado de espín es proporcional al módulo al cuadrado de la velocidad adquirida por el estado bajo rotaciones, promediada sobre el eje de rotación. Extendemos esta definición a  $\text{Gr}_{k,n}$ : la velocidad de un  $k$ -plano con matriz de densidad  $\rho$  bajo una rotación alrededor del eje  $\hat{\mathbf{n}}$  es

$$v_{\hat{\mathbf{n}}} = i[\rho, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}], \quad (4.14)$$

con módulo al cuadrado

$$\begin{aligned} |v_{\hat{\mathbf{n}}}|^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} v_{\hat{\mathbf{n}}}^2 \\ &= n^A n^B \text{Tr}(\rho S_A S_B - \rho S_A \rho S_B). \end{aligned}$$

Integrando sobre la esfera unitaria donde  $\hat{\mathbf{n}}$  reside (con  $\int_{S^2} d\hat{\mathbf{n}} = 1$ ), encontramos para

la varianza total de un  $k$ -plano

$$\begin{aligned}\Delta\rho &\equiv 3 \int_{S^2} |v_{\hat{\mathbf{n}}}|^2 d\hat{\mathbf{n}} \\ &= s(s+1)k - \sum_{A=1}^3 \text{Tr}(\rho S_A \rho S_A),\end{aligned}\quad (4.15)$$

donde se ha utilizado

$$\sum_{A=1}^3 S_A^2 = s(s+1)I, \quad \text{y} \quad \int_{S^2} n^A n^B d\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{3} \delta^{AB}.\quad (4.16)$$

Comparando con (4.11) tenemos la relación entre varianza total y coherencia

$$\Delta\rho = s(s+1)k - f_\rho.\quad (4.17)$$

### Coherencia en términos del proyector

Usando la ciclicidad de la traza, el módulo al cuadrado de la velocidad también se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}|v_{\hat{\mathbf{n}}}|^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} v_{\hat{\mathbf{n}}}^2 \\ &= -\frac{1}{2} n^A n^B \text{Tr}([S_A, \rho][S_B, \rho]) \\ &= -\frac{1}{2} n^A n^B \text{Tr}([[S_B, \rho], S_A]\rho) \\ &= \frac{1}{2} n^A n^B \text{Tr}([S_A, [S_B, \rho]]\rho).\end{aligned}\quad (4.18)$$

Integrando sobre la esfera unitaria, obtenemos una segunda expresión para la varianza total

$$\Delta\rho = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 \text{Tr}([S_A, [S_A, \rho]]\rho).\quad (4.19)$$

Ahora tomamos la descomposición de  $\rho$  en la base de tensores de polarización  $\rho = \rho^{lm} T_{lm}$ . De la expresión (2.21) tenemos que

$$\Delta\rho = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{2s} l(l+1) |\rho^l|^2,\quad (4.20)$$

con  $|\rho^l| = \sum_{m=-l}^l |\rho^{lm}|^2$ . Y para la coherencia del plano resulta

$$f_\rho = s(s+1)k - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{2s} l(l+1) |\rho^l|^2.\quad (4.21)$$

## Coherencia en la base BD

Consideramos los encajamientos

$$\varphi: \text{Gr}_{k,n} \rightarrow \mathfrak{u}(n), \quad \text{y} \quad \Phi: \text{Gr}_{k,n} \rightarrow \mathfrak{u}\left(\binom{n}{k}\right), \quad (4.22)$$

como fueron definidos en las secciones 4.3.1 y 4.1.1 respectivamente, con la métrica FS en  $\text{Gr}_{k,n}$ , y la métrica HS en los  $\mathfrak{u}$ 's. Hemos demostrado que  $\Phi$  es una isometría, mostraremos aquí que  $\varphi$  también lo es. Bajo una transformación unitaria generada por  $X \in \mathfrak{u}(n)$ , tenemos  $\dot{\rho} = -i[X, \rho]$  y

$$\begin{aligned} |\dot{\rho}|^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\rho}^2) \\ &= \text{Tr}(\rho X^2) - \text{Tr}(\rho X \rho X) \\ &= \sum_{r=1}^k \langle \psi_r | X^2 | \psi_r \rangle - \sum_{j,l=1}^k |\langle \psi_j | X | \psi_l \rangle|^2 \\ &= \sum_{r=1}^k \langle v_r | v_r \rangle - \langle v_r^{\parallel} | v_r^{\parallel} \rangle \\ &= \sum_{r=1}^k \langle v_r^{\perp} | v_r^{\perp} \rangle, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $|v_r\rangle = -iX|\psi_r\rangle$  es la velocidad de  $|\psi_r\rangle$  bajo la transformación, y  $|v_r^{\parallel}\rangle, |v_r^{\perp}\rangle$  son sus componentes paralelas y perpendiculares a  $\Pi$ , respectivamente. Por otro lado, la velocidad de  $|\Pi\rangle$  bajo la misma transformación es

$$\begin{aligned} |V\rangle &= -i\mathbb{X}|\Pi\rangle \\ &\equiv -i \sum_{r=1}^k |\psi_1\rangle \wedge \dots \wedge X|\psi_r\rangle \wedge \dots \wedge |\psi_k\rangle \\ &= \sum_{r=1}^k |\psi_1\rangle \wedge \dots \wedge |v_r\rangle \wedge \dots \wedge |\psi_k\rangle \\ &= -i \langle X \rangle |\Pi\rangle + |V^{\perp}\rangle, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde

$$\langle X \rangle \equiv \sum_{r=1}^k \langle \psi_r | X | \psi_r \rangle, \quad |V^{\perp}\rangle \equiv \sum_{r=1}^k |\psi_1\rangle \wedge \dots \wedge |v_r^{\perp}\rangle \wedge \dots \wedge |\psi_k\rangle. \quad (4.25)$$

El primer término en (4.24) genera un cambio infinitesimal de fase para  $|\Pi\rangle$ , por lo tanto, no aparece en la matriz de densidad  $R$  descrita en (4.5) ni en su derivada,

$$\begin{aligned}
\dot{R} &= -i[\mathbb{X}, R] \\
&= |V\rangle\langle\Pi| + |\Pi\rangle\langle V| \\
&= |V^\perp\rangle\langle\Pi| + |\Pi\rangle\langle V^\perp|.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Entonces, usando  $\langle\Pi|\Pi\rangle = 1$  y  $\langle\Pi|V^\perp\rangle = 0$ , encontramos

$$\begin{aligned}
|\dot{R}|^2 &= \frac{1}{2}\text{Tr}\dot{R}^2 \\
&= \langle V^\perp|V^\perp\rangle \\
&= \sum_{r=1}^k \langle v_r^\perp|v_r^\perp\rangle,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

lo que prueba la afirmación.

La varianza total ahora se puede calcular en términos de  $R$ ,

$$\Delta(R) = \sum_{A=1}^3 \text{Tr}(RS_A^2) - \text{Tr}(RS_ARSA), \tag{4.28}$$

por lo que, usando (4.17), obtenemos

$$f(R) = s(s+1)k - \sum_{A=1}^3 \text{Tr}(RS_A^2) + \text{Tr}(RS_ARSA). \tag{4.29}$$

Evaluando esto en la base BD, obtenemos

$$f(R) = s(s+1)k + \sum_{\ell\alpha} n_{\ell\alpha}^2 - \sum_{\ell\alpha} \ell(\ell+1)|z_{\ell\alpha}|^2, \tag{4.30}$$

donde

$$n_{\ell\alpha}^2 = \sum_{A=1}^3 n_{\ell\alpha A}^2, \quad n_{\ell\alpha A} = \langle\Pi_{\ell\alpha}|S_A^{(\ell)}|\Pi_{\ell\alpha}\rangle, \quad |z_{\ell\alpha}|^2 = \langle\Pi_{\ell\alpha}|\Pi_{\ell\alpha}\rangle, \tag{4.31}$$

y  $|\Pi_{\ell\alpha}\rangle$  son los componentes irreducibles de  $|\Pi\rangle$ , indexados por su valor de espín  $\ell$  y el índice de multiplicidad  $\alpha$ .

### 4.3.2 Matriz Hessiana de la función de coherencia

Definimos la forma bilineal  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathfrak{u}(n) \times \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \sum_{A=1}^3 \text{Tr}(X S_A Y S_A). \quad (4.32)$$

Gracias a las propiedades de la traza,  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  es una forma simétrica y las derivadas de sus entradas siguen la ley de Leibniz.

La coherencia de un  $k$ -plano es la forma cuadrática evaluada en  $\rho \in \mathcal{G}_{n,k}$ , asociada a esta forma bilineal. Para calcular la matriz Hessiana, consideramos coordenadas  $u^i$  reales en  $\mathcal{G}_{n,k} \equiv \mathcal{G}^1$ , de modo que

$$f_{\rho(u)} = \langle\langle \rho(u), \rho(u) \rangle\rangle, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial f_{\rho(u)}}{\partial u^i} = 2 \left\langle\left\langle \frac{\partial \rho(u)}{\partial u^i}, \rho(u) \right\rangle\right\rangle, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial^2 f_{\rho(u)}}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left( \left\langle\left\langle \frac{\partial^2 \rho(u)}{\partial u^i \partial u^j}, \rho(u) \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \frac{\partial \rho(u)}{\partial u^i}, \frac{\partial \rho(u)}{\partial u^j} \right\rangle\right\rangle \right). \quad (4.35)$$

Ahora, fijamos un  $\rho$  y tomamos una base  $\{\hat{Y}_i\}$  en  $T_\rho \mathcal{G}$  definida por  $\hat{Y}_i = -i[Y_i, \rho]$ , donde  $Y_i \in \mathfrak{u}(n)$ . Luego, utilizando la acción del grupo  $U(n)$ , generamos una vecindad en  $\mathcal{G}$  alrededor de  $\rho$  de la siguiente manera: definimos  $X(u) = u^i Y_i \in \mathfrak{u}(n)$  y  $g(u) = e^{-iX(u)} \in U(n)$ . Un plano  $\rho(u)$  dentro de esta vecindad se expresa como

$$\begin{aligned} \rho(u) &= \text{Ad}_g \triangleright \rho \\ &= e^{-i \text{ad}_X} \triangleright \rho \\ &= (1 - i \text{ad}_X - \frac{1}{2} \text{ad}_X^2 + \dots) \triangleright \rho \\ &= \rho - i u^i [Y_i, \rho] - \frac{1}{2} u^i u^j [Y_i, [Y_j, \rho]] + \mathcal{O}(u^3), \end{aligned} \quad (4.36)$$

de donde vemos que

$$\begin{aligned} \rho|_{u=0} &= \rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial u^i} \Big|_{u=0} &= -i[Y_i, \rho], \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^i \partial u^j} \Big|_{u=0} &= -\frac{1}{2} ([Y_i, [Y_j, \rho]] + [Y_j, [Y_i, \rho]]). \end{aligned} \quad (4.37)$$

---

<sup>1</sup>Solo por simplificar la notación, omitimos los índices  $n, k$ .

No es inmediato reconocer por qué el lado derecho de la tercera línea en (4.37) es invariante bajo el intercambio de índices  $i \longleftrightarrow j$ , mientras que el lado izquierdo sí lo es. Para justificar esto, tomemos un símbolo de Schubert  $\sigma$ , es decir, una  $k$ -tupla  $\sigma = \{r_1, \dots, r_k\}$  de enteros de 1 a  $n$ , con  $r_1 < \dots < r_k$ . Definimos a  $\rho_\sigma$  como la matriz de proyección diagonal con unidades en las filas especificadas por  $\sigma$ , y a  $Y_{r,s}(z) \in \mathfrak{u}(n)$  como la matriz con entradas distintas de cero iguales a  $z \in \mathbb{C}$  en la posición  $(r, s)$  y  $\bar{z}$  en la posición  $(s, r)$ . Entonces, el conjunto de matrices  $\{\hat{Y}_{r,s}(1), \hat{Y}_{r,s}(i)\}$ , generadas como  $\hat{Y}_{r,s}(z) = -i[Y_{r,s}(z), \rho_\sigma]$ , donde ya sea  $r$  o  $s$ , pero no ambos, pertenecen a  $\sigma$ , genera el espacio tangente  $T_{\rho_\sigma}\mathcal{G}$  (ver [35]).

Además, los generadores  $\{Y_{r,s}(1), Y_{r,s}(i)\}$  del álgebra  $\mathfrak{u}(n)$  satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} i[Y_{r,s}(1), Y_{p,q}(1)] &= Y_{r,p}(i)\delta_{sq} + Y_{r,q}(i)\delta_{sp} + Y_{s,p}(i)\delta_{rq} + Y_{s,q}(i)\delta_{rp}, \\ i[Y_{r,s}(i), Y_{p,q}(i)] &= Y_{r,p}(i)\delta_{sq} - Y_{r,q}(i)\delta_{sp} - Y_{s,p}(i)\delta_{rq} + Y_{s,q}(i)\delta_{rp}, \\ i[Y_{r,s}(1), Y_{p,q}(i)] &= Y_{r,p}(1)\delta_{sq} - Y_{r,q}(1)\delta_{sp} + Y_{s,p}(1)\delta_{rq} - Y_{s,q}(1)\delta_{rp}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Y dado que para generar  $T_{\rho_\sigma}\mathcal{G}$ , cada par  $(r, s)$  y  $(p, q)$ , tiene solo un índice en  $\sigma$ , los términos en el lado derecho de las ecuaciones (4.38) que pueden ser distintos de cero son aquellos cuyo delta tiene ambos índices dentro o fuera de  $\sigma$ , en cuyo caso el generador que lo multiplica tiene ambos índices fuera o dentro de  $\sigma$ , respectivamente. Por otro lado, mientras que  $\rho_\sigma$  es una proyección en el  $k$ -plano que define  $\sigma$ ,  $Y_{a,b}(z)$  es una transformación unitaria infinitesimal, análoga a una rotación en el plano  $(a, b)$ , entonces si ambos índices  $(a, b)$  están dentro o fuera de  $\sigma$ , no importa en qué orden se haga la proyección y la rotación, es decir,  $[\rho_\sigma, Y_{a,b}(z)] = 0$ . Entonces, tomando el conmutador con  $\rho_\sigma$  en las ecuaciones (4.38), tenemos  $[\rho_\sigma, [Y_i^\sigma, Y_j^\sigma]] = 0^2$ , pero podemos trasladar la misma relación de conmutación a cualquier punto  $\rho \in \mathcal{G}$  usando la acción de  $U(n)$  en  $T_{\rho_\sigma}\mathcal{G}$ , enviando  $(\rho_\sigma, Y_i^\sigma) \mapsto (g\rho_\sigma g^{-1}, gY_i^\sigma g^{-1}) \equiv (\rho, Y_i)$ , con algún  $g \in U(n)$ .

Finalmente, usando la identidad de Jacobi,  $[\rho, [Y_i, Y_j]] = 0$  implica que  $[Y_i, [Y_j, \rho]] = [Y_j, [Y_i, \rho]]$ , lo que muestra la simetría en la expresión (4.37). Sustituyendo lo anterior en (4.35), tenemos el gradiente y la matriz Hessiana de la función de coherencia en

---

<sup>2</sup>Se han reindexado los elementos del conjunto  $\{Y_{r,s}(1), Y_{r,s}(i)\} \equiv \{Y_j^\sigma\}$  que generan la base  $\{\hat{Y}_{r,s}(1), \hat{Y}_{r,s}(i)\} \equiv \{\hat{Y}_j^\sigma\}$  para  $T_{\rho_\sigma}\mathcal{G}$ .

términos del  $k$ -plano y de los generadores de una base en su espacio tangente

$$\frac{\partial f_\rho}{\partial u^i} = -2i \langle\langle [Y_i, \rho], \rho \rangle\rangle, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial^2 f_\rho}{\partial u^i \partial u^j} = -2 (\langle\langle [Y_i, [Y_j, \rho]], \rho \rangle\rangle + \langle\langle [Y_i, \rho], [Y_j, \rho] \rangle\rangle). \quad (4.40)$$

La importancia de estas expresiones radica en que se pueden conocer las primeras y segundas derivadas en  $\rho$  (y en general, derivadas de cualquier orden) de la función de coherencia sin calcular ninguna derivada explícitamente, a cambio de conocer a las matrices  $\{Y_i\}$  que generan una base  $\{\hat{Y}_i\}$  en  $T_\rho \mathcal{G}$ . Más aún, si se conocen los generadores de una base del espacio tangente en un punto concreto  $\rho_0 \in \mathcal{G}$ , las derivadas de la coherencia se extienden a una vecindad de  $\rho_0$  por la acción de  $U(n)$  sobre el espacio tangente  $T_{\rho_0} \mathcal{G}$ . El hecho es que ya se ha descrito explícitamente el espacio tangente a los planos  $\rho_\sigma$ , y tomando los diferentes símbolos de Schubert  $\sigma$  se puede cubrir todos los abiertos en  $\mathcal{G}$ . Por lo tanto, el problema de encontrar las derivadas de la coherencia en un plano arbitrario  $\rho$  se reduce a encontrar el valor de los parámetros  $u^i$  tales que  $\rho = e^{-iu^i Y_i^\sigma} \rho_\sigma e^{iu^i Y_i^\sigma}$ , para el símbolo de Schubert  $\sigma$  apropiado, y luego realizar una serie de operaciones matriciales numéricas.

### 4.3.3 Puntos singulares en espines enteros

El encajamiento del Grassmanniano en  $\mathfrak{u}(n)$  dado por las ecuaciones (4.12) y (4.13) define un conjunto de ecuaciones algebraicas para las componentes de  $\rho$ , lo que establece a  $\mathcal{G}$  como una variedad algebraica. Los  $k$ -planos anticoherentes están determinados por una ecuación algebraica adicional  $f_\rho = 0$ , definiendo así una subvariedad algebraica de  $\mathcal{G}$ . Por ejemplo, la ecuación (4.21) muestra explícitamente que la ecuación algebraica es de orden cuadrático en las componentes de  $\rho$  en la base de tensores de polarización.

Uno de los principales objetivos de esta investigación fue caracterizar la topología del espacio de planos anticoherentes utilizando las herramientas de la conocida teoría de Morse-Bott [35]. Sin embargo, esta teoría requiere que las subvariedades críticas de una función sean subvariedades diferenciables. En esta sección, detallaremos por qué la subvariedad de estados anticoherentes para espines enteros no es diferenciable, exhibiendo puntos singulares de la subvariedad. Para ver esto, nos centramos en los

estados anticoherentes de espín  $s = 2$ , analizamos el espacio tangente de un estado GHZ y lo comparamos con el espacio tangente de un estado de proyección cero a lo largo del eje  $z$ .

A lo largo de esta sección nos referimos a los 1-planos (estados físicos) indistintamente por su matriz densidad  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  y su estado  $|\psi\rangle$ , pero todos los cálculos se refieren a  $\rho \in \mathcal{G}$  dentro del espacio  $\mathfrak{u}(n)$ . Todos los estados y matrices están expresados en la base de eigenvectores de  $S_z$ .

**Ejemplo:**  $s = 2, k = 1$

### Espacio tangente de un estado GHZ

El eigenvector  $|2, 2\rangle$  de  $S_z$  define el 1-plano  $\rho_\sigma \in \mathcal{G}$ , con  $\sigma = \{1\}$ , donde conocemos una base de su espacio tangente. Utilizamos la acción de  $U(n)$  en  $T\mathcal{G}$  para obtener una base en el espacio tangente del estado  $|\text{GHZ}^{(2)}\rangle = (1, 0, 0, 0, 1)^T$ , con un  $g \in U(n)$  apropiado que envía  $|2, 2\rangle \mapsto |\text{GHZ}^{(2)}\rangle$ . Calculamos la matriz Hessiana de la coherencia  $H_\rho(f)$  en el estado  $\rho = \rho_{\text{GHZ}}$  usando esta base de acuerdo con la ecuación (4.40) y encontramos una base ortonormal de sus eigenvectores en  $T_{\rho_{\text{GHZ}}}\mathcal{G}$ . Los vectores de la base se obtienen de  $\hat{Y}_i = -i[Y_i, \rho_{\text{GHZ}}]$  con los generadores:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
Y_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, & Y_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
Y_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Las matrices  $i = 1, 2, 3$  generan eigenvectores con eigenvalores positivos, por lo tanto, no son tangentes a la subvariedad de estados anticoherentes<sup>3</sup>. Para  $i = 4, 5, 6$ , los eigenvectores correspondientes son proporcionales a los campos fundamentales de rotación alrededor de los ejes  $x, y, z$ , respectivamente, por lo que son direcciones tangentes a la subvariedad. Para determinar si las direcciones restantes son tangentes a la subvariedad, debemos encontrar dos curvas de estados anticoherentes o *curvas anticoherentes*, que pasen por el estado GHZ y tengan como vectores tangentes a  $\hat{Y}_7$ , y  $\hat{Y}_8$  respectivamente. Las curvas dadas por<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
|\psi_7\rangle &= e^{-itY_7} |\text{GHZ}^{(2)}\rangle = \left( \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, 0, -\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)^T, \\
|\psi_8\rangle &= e^{-itY_8} |\text{GHZ}^{(2)}\rangle = \left( \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, 0, -i \sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)^T,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

satisfacen el requisito, y entonces  $i = 7, 8$  también son direcciones tangentes a los estados anticoherentes. Vale la pena mencionar que la acción del exponencial de los generadores de los vectores tangentes a la subvariedad no siempre define una curva anticoherente, en este caso fue suerte. En la figura 3.2 se muestran las trayectorias de las estrellas de la constelación de Majorana a lo largo de estas curvas.

---

<sup>3</sup>Todas las direcciones tangentes a una subvariedad de  $f_\rho$  constante son eigenvectores de la matriz Hessiana con eigenvalor 0. La afirmación en la dirección opuesta no siempre es válida [35].

<sup>4</sup>Así se encontraron las curvas dadas en (3.13).

## Espacio tangente de un estado de proyección cero

Ahora analizamos el eigenvector  $|2, 0\rangle$  de  $S_z$ , su de matriz densidad está dada por  $\rho_\sigma$  con  $\sigma = \{3\}$ , por lo que el calculo de la matriz Hessiana en el estado es inmediato. Encontramos una base ortonormal  $\{\hat{Y}_i\}$  de eigenvectores de  $H_{\rho_{\{3\}}}(f)$  para el espacio tangente  $T_{\rho_{\{3\}}}\mathcal{G}$ . Los generadores de los vectores de la base son:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 Y_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 Y_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 Y_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En este caso, solo hay dos direcciones  $i = 1, 2$  con eigenvalores positivos, y las seis restantes tienen eigenvalor cero. Los vectores tangentes  $i = 3, 4$  coinciden con los campos fundamentales de las rotaciones alrededor de los ejes  $x, y$  respectivamente. Recordemos que la rotación alrededor del eje  $z$  deja invariante al estado, por lo que su campo

fundamental es nulo en  $|2, 0\rangle$ . Respecto a los otros generadores, esta base también tiene la propiedad de que la acción de su exponencial da lugar a curvas anticoherentes.

$$\begin{aligned}
|\psi_5\rangle &= e^{-itY_5} |2, 0\rangle = \left( -\frac{i \sin t}{\sqrt{2}}, 0, \cos t, 0, -\frac{i \sin t}{\sqrt{2}} \right)^T, \\
|\psi_6\rangle &= e^{-itY_6} |2, 0\rangle = \left( -\frac{i \sin t}{\sqrt{2}}, 0, \cos t, 0, \frac{i \sin t}{\sqrt{2}} \right)^T, \\
|\psi_7\rangle &= e^{-itY_7} |2, 0\rangle = \left( \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, 0, \cos t, 0, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right)^T, \\
|\psi_8\rangle &= e^{-itY_8} |2, 0\rangle = \left( -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, 0, \cos t, 0, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right)^T.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Además, la curva  $|\psi_8\rangle$  conecta el estado de proyección cero con un estado GHZ rotado, como se muestra en la figura 4.1. Por lo tanto, ambos estados están en la misma componente conexa de estados anticoherentes y, en consecuencia, esta componente no puede ser una subvariedad diferenciable, ya que la dimensión de los espacios tangentes en dos puntos diferentes, 5 para el estado GHZ y 6 para el  $|2, 0\rangle$ , no coincide.

Para visualizar una vecindad alrededor del estado  $|2, 0\rangle$ , usamos las partes real e imaginaria de las coordenadas afines  $z_i = x_i + iy_i$ , de modo que  $|\psi\rangle = (z_1, z_2, 1, z_3, z_4)^T$ , y fijamos el plano  $z_2 = z_3 = 0$ . Adicionalmente, si  $z_1 = z_4 = 1/\mu$ , entonces  $|\psi\rangle$  es proyectivamente equivalente a la familia de estados anticoherentes módulo SLOCC presentada en (3.12), es decir, en esta carta están todas las formas de estados anticoherentes. La coherencia en estos estados resulta

$$f(\rho) = \frac{4(x_1^2 - x_4^2 + y_1^2 - y_4^2)^2}{(1 + x_1^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_4^2)^2}, \tag{4.43}$$

por lo tanto, un estado en esta carta es anticoherente si y solo si  $x_1^2 - x_4^2 + y_1^2 - y_4^2 = 0$ . Para  $x_4$  constante, los estados anticoherentes forman un hiperboloide en el espacio  $x_1$ - $y_1$ - $y_4$ , y si  $x_4 = 0$  la superficie toma la forma de un doble cono con intersección en el estado  $|2, 0\rangle$  ubicado en el origen de coordenadas, como se muestra en la figura 4.2. Esta estructura de doble cono refleja por qué el estado  $|2, 0\rangle$  tiene más vectores tangentes linealmente independientes que un punto genérico de la subvariedad de estados anticoherentes, y nos da indicios de que podría ser un punto patológico en la subvariedad.

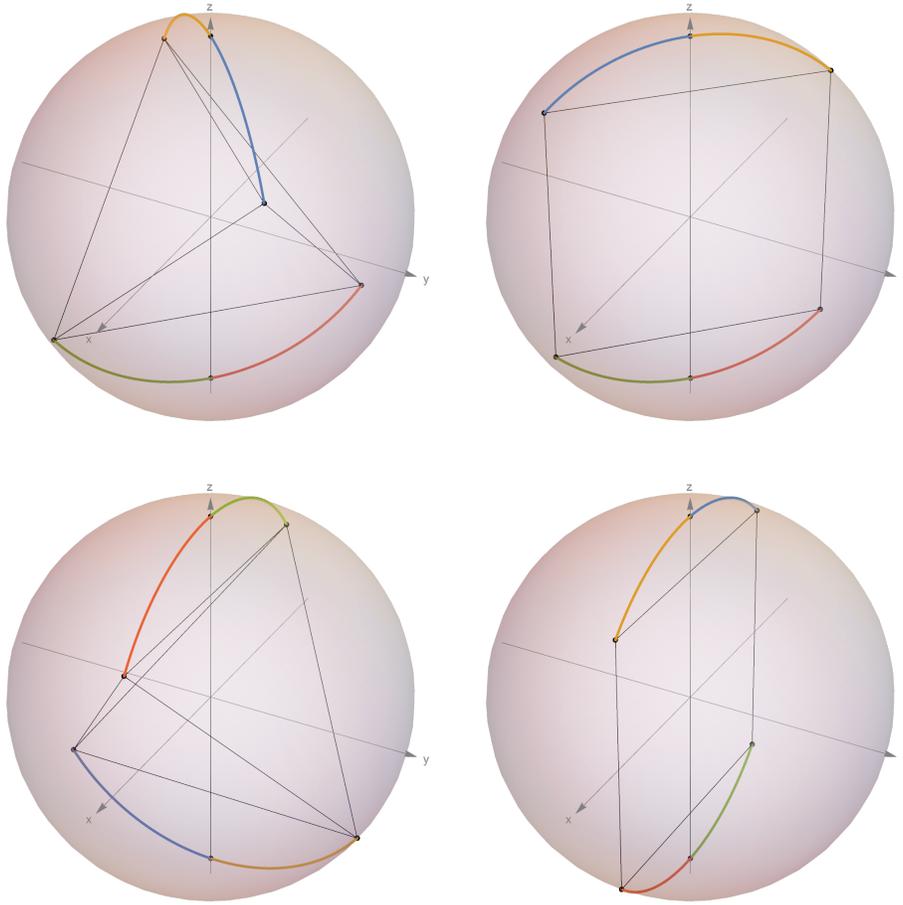


Figure 4.1: Trayectorias de las estrellas de Majorana de las curvas  $|\psi_5\rangle$  y  $|\psi_7\rangle$  para  $0 \leq t \leq \pi/4$  (columna izquierda), y  $|\psi_6\rangle$ ,  $|\psi_8\rangle$  para  $0 \leq t \leq \pi/6$  (columna derecha). En  $t = 0$ , las estrellas están en los polos de la esfera, constelación correspondiente al estado  $|2, 0\rangle$ . A medida que  $t$  aumenta, las estrellas de  $|\psi_5\rangle$ ,  $|\psi_7\rangle$  se mueven en pares a lo largo de planos verticales ortogonales, hasta que forman los vértices de un tetraedro en  $t = \pi/4$ . Por otro lado, las estrellas de  $|\psi_6\rangle$ ,  $|\psi_8\rangle$  se mueven en planos verticales y coinciden con los vértices de un cuadrado (un estado GHZ rotado) en  $t = \pi/6$ .

### El estado de proyección cero es un punto singular

Sea  $V$  una variedad algebraica incrustada en  $\mathbb{R}^n$  definida por las ecuaciones

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, k,$$

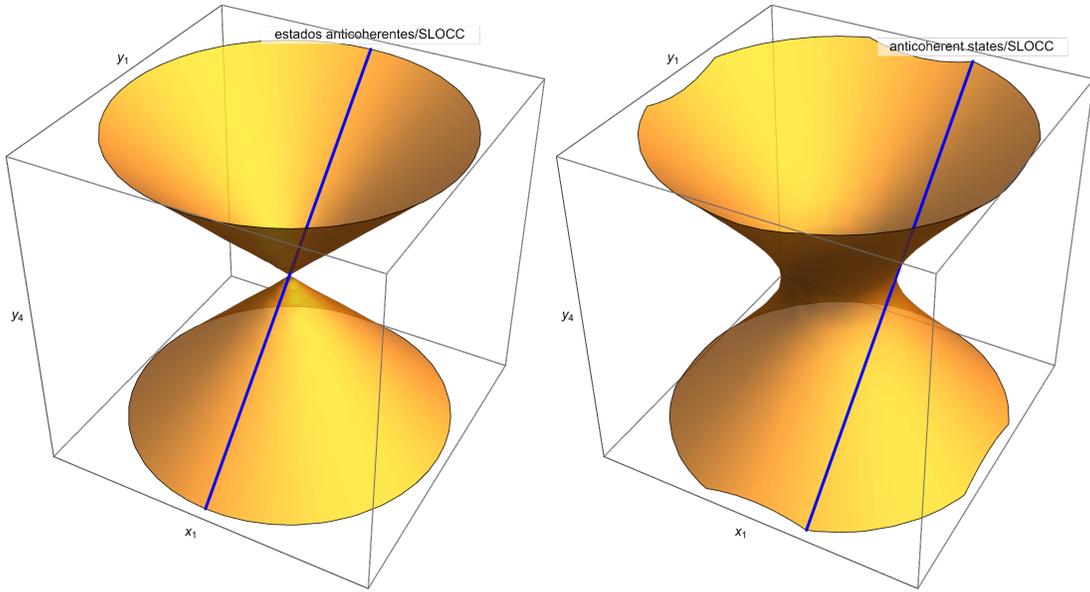


Figure 4.2: Superficie de estados anticonherentes en el plano  $z_2 = z_3 = 0$  con  $x_4 = 0$  (izquierda) y  $x_4 = 1$  (derecha). La línea azul es el conjunto de estados anticonherentes con la parametrización  $(1, 0, \mu, 0, 1)^T$  con  $\mu \in \mathbb{C}$ .

con  $F_i$  polinomios de  $n$  variables. Se dice que un punto  $p \in V$  es un *punto singular* si la matriz Jacobiana  $(J_p)_{ij} \equiv \partial F_i(p)/\partial x_j$  tiene un rango menor en  $p$  que en otros puntos de la variedad. Los puntos que no son singulares se llaman *puntos regulares* de  $V$ . El contenido geométrico de la definición anterior es el siguiente: en un punto  $p \in V$ , la matriz  $J_p$  tiene como filas los vectores gradiente de los polinomios que definen  $V$ , es decir, los vectores normales a  $V$  en  $p$ , por lo que el rango de  $J_p$  significa el número de direcciones linealmente independientes normales a  $V$  en  $p$ . El hecho de que la matriz  $J_p$  tenga un rango menor que en los otros puntos significa que hay más direcciones tangentes a la variedad  $V$  en  $p$ , justo como sucede en el estado  $|2, 0\rangle$ .

Explícitamente, tomamos una base ortonormal  $\{e_i\}$  de matrices hermitianas en  $\mathfrak{u}(n)$ <sup>5</sup>, y escribimos un 1-plano de la forma  $\rho = \rho^i e_i$  con  $\rho^i \in \mathbb{R}$ . El encajamiento del Grassmanniano en  $\mathfrak{u}(n)$  dado por  $\rho^2 - \rho = 0$  y  $\text{Tr}(\rho) - 1 = 0$ , define a  $\mathcal{G}$  como el conjunto de raíces simultáneas de  $n^2 + 1$  polinomios de orden cuadrático o lineal. Como

<sup>5</sup>Para este ejemplo no podemos usar la base de tensores de polarización porque no son matrices hermitianas.

sabemos,  $\mathcal{G}$  sí es una variedad suave y además homogénea, en el sentido de que todos los puntos son  $U(n)$ -equivalentes. Las ecuaciones que definen la subvariedad anticonherente  $\langle S_A \rangle = \text{Tr}(\rho S_A) = 0$ , añaden tres polinomios de primer grado, que también se pueden ver como  $\mathcal{G}$  intersecada por tres hiperplanos en  $\mathfrak{u}(n)$ . Entonces, tenemos  $n^2 + 4$  polinomios  $F_i$  para las  $n^2$  variables  $\rho^i$ . La matriz Jacobiana  $J_p$  se calcula de manera directa, y en nuestro caso de interés  $s = 2$ ,  $n = 5$ , tenemos que  $\text{Rank}(J_{\text{GHZ}}) = 20$  mientras que  $\text{Rank}(J_{|2,0\rangle}) = 19$ , lo que muestra que  $|2,0\rangle$  es un punto singular. En ambos casos, el espacio vectorial generado por los vectores que no son normales a la subvariedad coincide con el espacio de eigenvectores con eigenvalor cero de la matriz Hessiana. Pero aún más, para espines  $s = 3, 4, 5$  el mismo cálculo muestra que

$$\text{Rank}(J_{|s,0\rangle}) = \text{Rank}(J_{\text{GHZ}}) - 1. \quad (4.44)$$

Estamos convencidos de que una demostración formal de la ecuación (4.44) para cualquier espín entero, y para cualquier estado anticonherente además del GHZ, usaría el hecho de que los estados de proyección cero son los únicos estados anticonherentes con una simetría rotacional continua (la rotación alrededor del eje donde la proyección de su espín es cero). Esta situación no ocurre en estados anticonherentes de espín semientero, pero queda abierta la pregunta de si puede ocurrir en  $k$ -planos anticonherentes con  $k > 1$ .

### 4.3.4 Explorando planos anticonherentes

#### El valor $k$ está acotado

Dada la matriz de densidad  $\rho \in \mathcal{G}_{k,n}$  de un  $k$ -plano, denotamos por  $\rho^\perp$  a la matriz de densidad del  $(n - k)$ -plano en las direcciones ortogonales restantes. Como proyectores, deben satisfacer la identidad  $\rho + \rho^\perp = I_n$ , así que

$$\begin{aligned} f(\rho^\perp) &= f(I_n - \rho) \\ &= \langle\langle I_n - \rho, I_n - \rho \rangle\rangle \\ &= \langle\langle I_n, I_n \rangle\rangle - 2 \langle\langle I_n, \rho \rangle\rangle + f(\rho) \\ &= s(s + 1)(2s + 1 - 2k) + f(\rho) \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde se ha utilizado que  $\langle\langle I_n, I_n \rangle\rangle = \sum_A \text{Tr}(S_A^2) = s(s + 1)(2s + 1)$  y  $\langle\langle I_n, \rho \rangle\rangle = \sum_A \text{Tr}(S_A^2 \rho) = s(s + 1)k$ . Por lo tanto,  $\rho$  es un plano anticonherente  $k$ -dimensional si

y solo si  $f(\rho^\perp) = s(s+1)(2s+1-2k)$ , y dado que la coherencia es no negativa para cualquier plano, la igualdad solo puede satisfacerse si  $k \leq n/2$ .

Además, para  $s$  semientero,  $n$  es par y la igualdad  $n/2 = k$  puede satisfacerse, pero en ese caso, la ecuación (4.45) implica que tanto  $\rho$  como  $\rho^\perp$  son planos anticoherentes. Si tomamos una base  $\{|\psi_i\rangle, |\phi_j\rangle\}$  en el espacio de Hilbert, tal que  $\{|\psi_i\rangle\}$  es una base para el plano definido por  $\rho$  y  $\{|\phi_j\rangle\}$  una base para el plano definido por  $\rho^\perp$ , en esta base de estados anticoherentes los operadores de espín tienen la forma

$$S_A = \begin{pmatrix} 0 & B_A \\ C_A & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $B_A, C_A$  y los ceros son matrices de  $k \times k$ , y es fácil ver que los operadores  $S_A$  no pueden satisfacer el álgebra de  $SU(2)$ , por lo tanto, la igualdad no puede satisfacerse y solo pueden existir  $k$ -planos anticoherentes con  $k < n/2$ .

## Espines bajos

El primer sistema donde pueden existir 2-planos anticoherentes es en estados de espín  $s = 2$ , donde la parametrización de formas anticoherentes (3.12) ya define un plano anticoherente de estados de la forma

$$|\psi_{\text{anti}}\rangle = a |\text{GHZ}^{(2)}\rangle + b |2, 0\rangle \sim |\text{GHZ}^{(2)}\rangle + \mu |2, 0\rangle,$$

es decir,  $|\text{GHZ}^{(2)}\rangle$  y  $|2, 0\rangle$  forman una base para el plano.

En espín  $s = 5/2$ , no puede haber 3-planos, pero sí 2-planos. Sin embargo, ninguna pareja de estados anticoherentes de la base bipyramidal del espacio de Hilbert, definida en (3.14), forma una base para un 2-plano anticoherente. Para entender por qué la base de estados piramidales falla en definir planos anticoherentes de espín  $5/2$ , hay que escribir los estados piramidales en la base de eigenestados de  $S_z$ :

$$|\text{bip}_5^{(5/2)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |\text{bip}_3^{(5/2)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\text{bip}_3^{\perp(5/2)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\text{bip}_5^{\perp(5/2)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donde los estados bipiramidales con  $2m = 1$  son descartados porque no son anticoherentes. Para que un par de estos estados definan un plano anticoherente, se deben satisfacer las ecuaciones (4.9) para cada par de elementos de la base. Si tomamos, por ejemplo, un estado bipiramidal y su ortogonal (bipirámides con el mismo número de vértices en la base), como  $S_z |\text{bip}_{2m}^{\perp(s)}\rangle \sim |\text{bip}_{2m}^{(s)}\rangle$ , nunca se va a cumplir  $\langle \text{bip}_{2m}^{(s)} | S_z | \text{bip}_{2m}^{\perp(s)} \rangle = 0$ . Entonces, necesariamente las bipirámides deben tener un número diferente de vértices en la base.

Si ahora tomamos  $|\text{bip}_{2m}^{(s)}\rangle$  y  $|\text{bip}_{2m'}^{(s)}\rangle$  con  $2m \neq 2m'$ , al aplicar los operadores  $S_+$  y  $S_-$  a un estado bipiramidal, las posiciones con componentes diferentes de cero en el vector columna del estado suben o bajan un lugar según sea el caso. Al tomar el producto interno con otro estado bipiramidal, la proyección resultante no puede ser cero si no hay al menos dos lugares de diferencia entre las entradas no nulas de los estados. Por esta razón, el estado con  $2m = 5$  no puede formar un plano con el estado que tiene  $2m' = 3$  o su ortogonal<sup>6</sup>.

No obstante, para sistemas de espín mayor, habrá suficiente espacio entre las componentes de los estados bipiramidales para que estos formen la base de un plano anticoherente. a continuación, se generaliza este razonamiento para construir familias de planos anticoherentes.

## Planos bipiramidales

Ahora formalizamos la construcción de familias de planos anticoherentes usando estados bipiramidales.

---

<sup>6</sup>Ya que  $\langle \psi | S_+ | \phi \rangle = \langle \psi | S_- | \phi \rangle = 0 \iff \langle \psi | S_x | \phi \rangle = \langle \psi | S_y | \phi \rangle = 0$ .

**Proposición 2.** Si  $2m', 2m \neq 1$  y  $|m' - m| \geq 2$  entonces los estados  $\left| \text{bip}_{2m'}^{(s)} \right\rangle$  y  $\left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle$  generan un 2-plano anticoherente.

*Proof.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $m' > m$  y  $m' \geq m + 2$ . Dado que los estados  $\left| \text{bip}_{2m'}^{(s)} \right\rangle$  y  $\left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle$  son anticoherentes, los términos  $\langle \psi_1 | S_A | \psi_1 \rangle$  y  $\langle \psi_2 | S_A | \psi_2 \rangle$  en la función de coherencia (4.10) son cero. Por otro lado, el estado  $S_z \left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle$  solo tiene componentes en  $|s, m\rangle$  y  $|s, -m\rangle$ , por lo que  $\langle \text{bip}_{2m'}^{(s)} | S_z \left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle = 0$ . Y de manera similar,  $S_\pm \left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle$  solo tiene componentes en  $|s, m \pm 1\rangle$  y  $|s, -m \pm 1\rangle$ , por lo que  $\langle \text{bip}_{2m'}^{(s)} | S_\pm \left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle = 0$ , y dado que  $S_x$  y  $S_y$  son combinaciones lineales de  $S_+$  y  $S_-$ , los términos  $\langle \psi_1 | S_A | \psi_2 \rangle$  en la función de coherencia también son cero.  $\square$

**Proposición 3.** Si los estados  $\left| \text{bip}_{2m'}^{(s)} \right\rangle$  y  $\left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle$  generan un 2-plano anticoherente, entonces  $\left| \text{bip}_{2m'}^{(s)} \right\rangle$  y  $R_z^{(s)}(t) \left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle$  generan una familia uniparamétrica de 2-planos anticoherentes.

*Proof.* Como  $\left| \text{bip}_{2m}^{(s)} \right\rangle$  es anticoherente, al rotarlo se mantiene anticoherente. Además, la matriz de rotación  $R_z^{(s)}(t)$  es diagonal en la base de eigenestados de  $S_z$ , y al aplicarla en un estado bipiramidal, las componentes no nulas del estado solo adquieren una fase, manteniendo únicamente componentes en  $|s, m\rangle$  y  $|s, -m\rangle$ . Por lo tanto, los argumentos de la demostración anterior se siguen.  $\square$

**Proposición 4.** Dado un conjunto de proyecciones  $\{m_1, \dots, m_k\}$  tal que  $2m_i \neq 1$  y  $|m_i - m_j| \geq 2$  para todo  $i, j$ , entonces los estados  $\left\{ \left| \text{bip}_{2m_i}^{(s)} \right\rangle \right\}$  generan un  $k$ -plano anticoherente.

*Proof.* Dado que cada pareja de estados en  $\left\{ \left| \text{bip}_{2m_i}^{(s)} \right\rangle \right\}$  forma un 2-plano anticoherente, se satisfacen todas las ecuaciones (4.9).  $\square$

**Proposición 5.** Si los estados  $\left| \text{bip}_{2m_i}^{(s)} \right\rangle$  generan un  $k$ -plano anticoherente, entonces  $\left| \text{bip}_{2m_1}^{(s)} \right\rangle$  y los estados  $R_z^{(s)}(t_i) \left| \text{bip}_{2m_i}^{(s)} \right\rangle$   $i = 2, \dots, k$ , generan una familia  $(k-1)$ -paramétrica de  $k$ -planos anticoherentes.

*Proof.* Por extensión de los argumentos anteriores.  $\square$

Si se busca un  $k$ -plano anticoherente generado por estados bipiramidales, o  $k$ -plano bipiramidal, el mínimo de proyecciones necesarias son  $m_i = 0, 2, \dots, 2(k-1)$ , por lo que

el primer valor de espín donde se puede formar un  $k$ -plano bipiramidal es  $s = 2(k - 1)$ . De esta manera, siempre se puede encontrar un  $k$ -plano bipiramidal para cualquier valor de  $k$ , en un espacio de Hilbert suficientemente grande.

### 2-planos bipiramidales de espín 3

En espín  $s = 3$ , las combinaciones de la base bipiramidal que pueden formar 2-planos anticonherentes son

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \text{span}\{|\text{bip}_6^{(3)}\rangle, |\text{bip}_2^{(3)}\rangle\}, \\ \Pi_2 &= \text{span}\{|\text{bip}_6^{(3)}\rangle, |\text{bip}_0^{(3)}\rangle\}, \\ \Pi_3 &= \text{span}\{|\text{bip}_4^{(3)}\rangle, |\text{bip}_0^{(3)}\rangle\}\end{aligned}$$

La descomposición en bloques irreducibles del espacio de 2-planos es  $3 \wedge 3 = 5 \oplus 3 \oplus 1$  [34]. Al hacer el cambio a la base BD se obtiene

$$\begin{aligned}|\Pi_1\rangle &= |\text{bip}_6^{(3)}\rangle \wedge |\text{bip}_2^{(3)}\rangle = \left( \sqrt{2} |\text{bip}_8^\perp{}^{(5)}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\text{bip}_4^\perp{}^{(5)}\rangle \right) \oplus \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} |\text{bip}_4^\perp{}^{(3)}\rangle \right) \oplus 0, \\ |\Pi_2\rangle &= |\text{bip}_6^{(3)}\rangle \wedge |\text{bip}_0^{(3)}\rangle = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} |\text{bip}_6^\perp{}^{(5)}\rangle \right) \oplus \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} |\text{bip}_6^\perp{}^{(3)}\rangle \right) \oplus 0.\end{aligned}$$

Y el plano  $\Pi_3$  se obtiene como una rotación del plano  $\Pi_1$  alrededor del eje  $x$  por un ángulo de  $\pi/2$ . En las figuras 4.3 y 4.4 se muestra la multiconstelación de cada plano comparada con la base bipiramidal del mismo. Es notable cómo la multiconstelación de los planos refleja todas las simetrías discretas de la base. Por esta razón, la constelación de Majorana es la representación predilecta para estudiar la anticonherencia, incluso en planos.

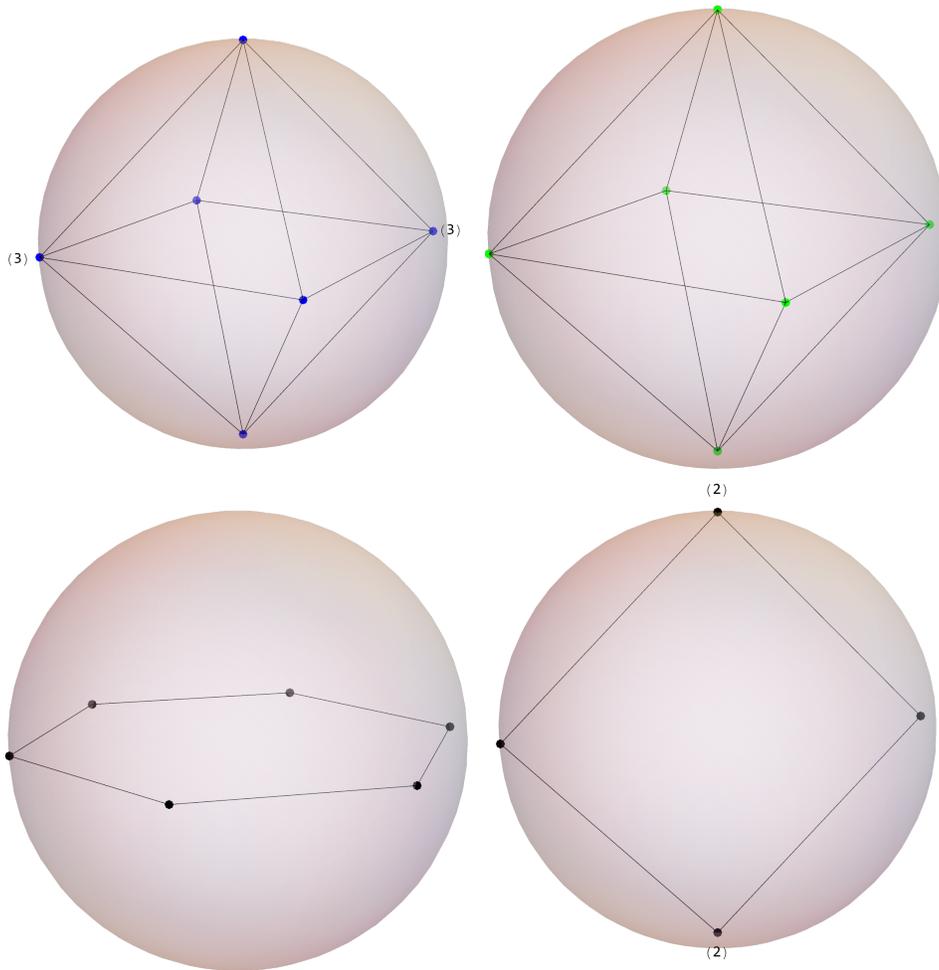


Figure 4.3: Multiconstellación del plano  $\Pi_1$ . En el renglón superior se muestran las constelaciones del sector  $j = 5$  (izquierda) y  $j = 3$  (derecha) de la base BD. En el renglón inferior se muestran las constelaciones de los estados  $|\text{bip}_6^{(3)}\rangle$  (izquierda) y  $|\text{bip}_2^{(3)}\rangle$  (derecha) que generan al plano. Se ha etiquetado a las estrellas con el número de estrellas coincidentes en la misma posición.

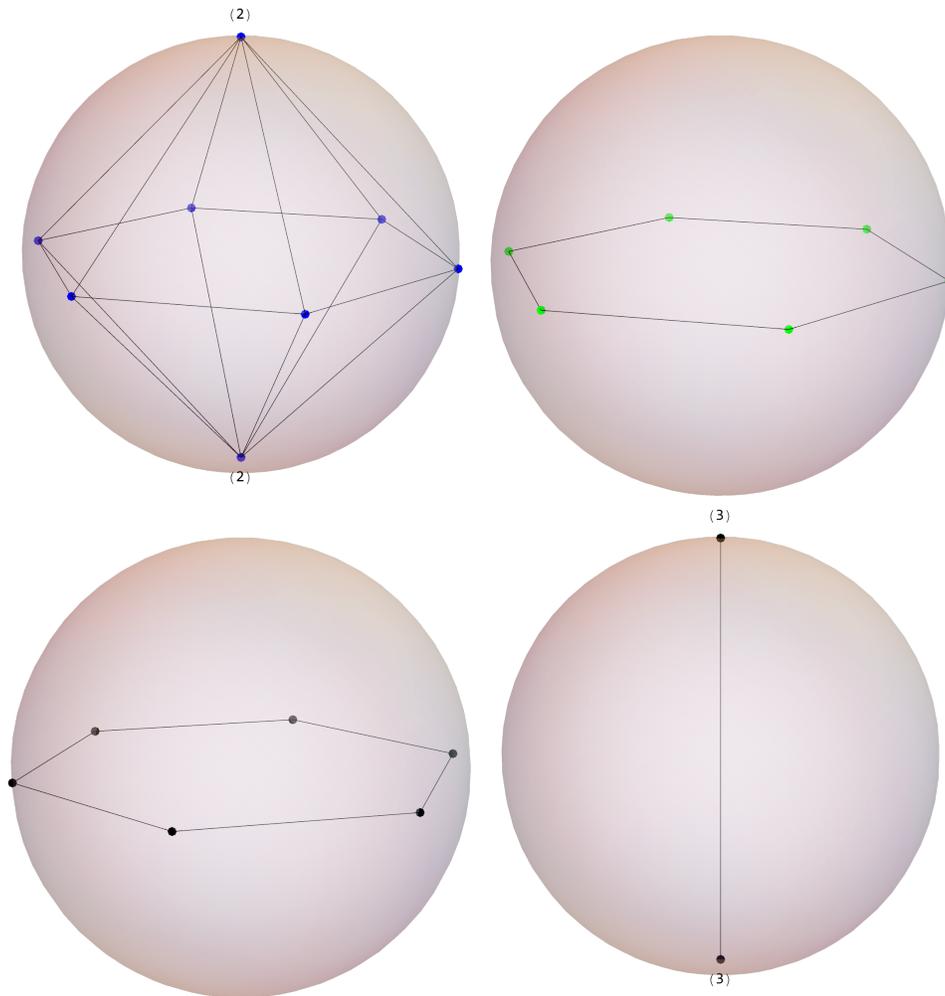


Figure 4.4: Multiconstellación del plano  $\Pi_2$ . En el renglón superior se muestran las constelaciones del sector  $j = 5$  (izquierda) y  $j = 3$  (derecha) de la base BD. En el renglón inferior se muestran las constelaciones de los estados  $|\text{bip}_6^{(3)}\rangle$  (izquierda) y  $|\text{bip}_0^{(3)}\rangle$  (derecha) que generan al plano. Se ha etiquetado a las estrellas con el número de estrellas coincidentes en la misma posición.

# Chapter 5

## Conclusiones y Trabajo Futuro

En el Capítulo 3, se presentaron varios conceptos relacionados con los estados de sistemas cuánticos de espín  $s$ , destacando su utilidad como herramientas para el estudio de tales sistemas. Además, se exploró un enfoque geométrico para el estudio de estos sistemas, tanto desde la perspectiva de la geometría diferencial a través de la variedad que define el espacio de estados físicos  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ , como desde la representación estelar, que permite visualizar las transformaciones que preservan la anticoherencia de un estado en el espacio físico  $\mathbb{R}^3$ .

Se introdujo el concepto de anticoherencia y se destacó su relación con otras nociones físicas como la varianza total y el enredamiento, subrayando la importancia de su estudio. Los resultados principales de este capítulo incluyen la exploración de los estados anticoherentes en espines bajos, mostrando cómo se pueden encontrar utilizando argumentos de simetría, así como la visualización de las transformaciones que preservan la anticoherencia a través de la representación estelar. Un desafío interesante es encontrar una parametrización de la subvariedad de estados anticoherentes, módulo transformaciones SLOCC, que sea manejable en términos computacionales.

Motivados por las figuras geométricas que surgen en las constelaciones de estados anticoherentes de espines bajos, se generalizó este concepto a una familia de estados anticoherentes para cualquier espín: los estados  $(s, 2m)$ -bipiramidales. Esta familia proporciona una base de estados anticoherentes en el espacio de Hilbert para espines enteros, y una base con dos estados no anticoherentes para espines semienteros.

En el Capítulo 4, se realizaron generalizaciones al promover estados a planos de espín  $s$ . Se desarrolló el trasfondo necesario para trabajar en el Grassmanniano, presentando la generalización de la constelación de Majorana a una Multiconstelación de Majorana para los planos. Se destacó que los  $k$ -planos, matemáticamente, representan estados  $k$ -partitos totalmente antisimetrizados  $\wedge$ -factorizables de espín  $s$ , abriendo la puerta a posibles conexiones con el enredamiento de sistemas multiqudits.

Bajo nuestra definición, un plano anticoherente es un subespacio lineal del espacio de Hilbert donde todos los estados son anticoherentes. Se propuso una medida de la coherencia de un plano, que caracteriza a los planos anticoherentes como la subvariedad crítica de una función. Usando técnicas estándar de geometría diferencial, se encontraron las primeras y segundas derivadas de la función de coherencia en términos únicamente de la matriz de proyección del plano y su espacio tangente como variedad encajada en  $u(n)$ . Sin embargo, los estados de proyección cero se revelaron como puntos singulares de la subvariedad de estados anticoherentes, lo que implica que las herramientas de la teoría de Morse-Bott no pueden caracterizar la topología de esta subvariedad. Una dirección de investigación futura es la revisión de la teoría de Morse-Bott para encontrar generalizaciones de las subvariedades críticas no diferenciables, o bien, estudiar el espacio de formas anticoherentes, es decir, el espacio de estados anticoherentes módulo rotaciones  $SO(3)$ .

La función de coherencia también permitió acotar la dimensionalidad de un plano anticoherente, demostrando que no puede ser mayor o igual que la mitad de la dimensión del espacio de Hilbert. Esta cota es crucial para la posible aplicación de  $k$ -planos anticoherentes en computación cuántica y teoría de la información. Sin embargo, la relación entre anticoherencia y enredamiento para  $k$ -planos requiere una revisión exhaustiva para comprender las implicaciones de la cota de  $k$  en los sistemas  $k$ -partitos correspondientes.

En conclusión, este trabajo destaca la importancia del estudio de los  $k$ -planos de espín  $s$  debido a su conexión con áreas como la computación cuántica, la información cuántica, la óptica cuántica y los sistemas multipartitos bosónicos y fermiónicos. Aunque los  $k$ -planos anticoherentes desempeñan un papel importante en varios trabajos, aún queda mucho por desarrollar sobre los  $k$ -planos en sí mismos en la literatura

estándar. Este trabajo pretende extender las bases matemáticas de diversas áreas en una sola descripción, tanto cualitativa como cuantitativamente, lo que proporciona claridad en la fenomenología correspondiente y posiciona el estudio de planos como un tema de interés en otros contextos.

# Bibliography

- [1] M. V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 392, no. 1802, pp. 45–57, 1984.
- [2] Y. Aharonov and J. Anandan, “Phase change during a cyclic quantum evolution,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 16, p. 1593, 1987.
- [3] F. Wilczek and A. Zee, “Appearance of gauge structure in simple dynamical systems,” *Physical Review Letters*, vol. 52, no. 24, p. 2111, 1984.
- [4] J. Anandan, “Non-adiabatic non-abelian geometric phase,” *Physics Letters A*, vol. 133, no. 4-5, pp. 171–175, 1988.
- [5] N. Mukunda and R. Simon, “Quantum kinematic approach to the geometric phase. i. general formalism,” *Annals of Physics*, vol. 228, no. 2, pp. 205–268, 1993.
- [6] C. Chryssomalakos, L. Hanotel, E. Guzmán-González, and E. Serrano-Ensástiga, “Toponomic quantum computation,” *Modern Physics Letters A*, vol. 37, no. 27, p. 2250184, 2022.
- [7] K. Eckert, J. Schliemann, D. Bruß, and M. Lewenstein, “Quantum correlations in systems of indistinguishable particles,” *Annals of Physics*, vol. 299, p. 88–127, July 2002.
- [8] J. Schliemann, J. I. Cirac, M. Kuś, M. Lewenstein, and D. Loss, “Quantum correlations in two-fermion systems,” *Physical Review A*, vol. 64, July 2001.

- [9] I. Jex, G. Alber, S. Barnett, and A. Delgado, “Antisymmetric multi-partite quantum states and their applications,” *Fortschritte der Physik*, vol. 51, p. 172–178, Feb. 2003.
- [10] B. G. Wybourne, “Hermite’s reciprocity law and the angular-momentum states of equivalent particle configurations,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 10, no. 3, pp. 467–471, 1969.
- [11] F. D. Murnaghan, “A generalization of hermite’s law of reciprocity,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 37, no. 7, pp. 439–441, 1951.
- [12] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge: Cambridge University Press, second edition ed., 2017.
- [13] T. W. Kibble, “Geometrization of quantum mechanics,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 65, pp. 189–201, 1979.
- [14] A. Heslot, “Quantum mechanics as a classical theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 31, pp. 1341–1348, Mar 1985.
- [15] J. Zimba, “Anticoherent spin states via the Majorana representation,” *Electronic Journal of Theoretical Physics*, vol. 3, no. 10, pp. 143–156, 2006.
- [16] A. U. Devi, Sudha, and A. Rajagopal, “Majorana representation of symmetric multiqubit states,” *Quantum Information Processing*, vol. 11, no. 3, pp. 685–710, 2012.
- [17] D. Markham and V. Vedral, “Classicality of spin-coherent states via entanglement and distinguishability,” *Physical Review A*, vol. 67, Apr. 2003.
- [18] C. Chryssomalakos, E. Guzmán-González, and E. Serrano-Ensástiga, “Geometry of spin coherent states,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 51, p. 165202, mar 2018.

- [19] J. Crann, R. Pereira, and D. W. Kribs, “Spherical designs and anticoherent spin states,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 25, p. 255307, 2010.
- [20] C. L. Hanotel Pinzón and C. Chryssomalakos, *Geometry of multipartite quantum systems*. 2022.
- [21] D. Baguette, F. Damanet, O. Giraud, and J. Martin, “Anticoherence of spin states with point group symmetries,” *Physical Review A*, vol. 92, p. 052333, 11 2015.
- [22] J.-P. Gazeau, J. Nešetřil, and B. Rovan, eds., *Physics and theoretical computer science: from numbers and languages to (quantum) cryptography*. No. v. 7 in NATO security through science series, Amsterdam ; Washington: IOS Press, 2007.
- [23] C. Chryssomalakos, A. G. Flores-Delgado, E. Guzmán-González, L. Hanotel, and E. Serrano-Ensástiga, “Speed excess and total acceleration: a kinematical approach to entanglement,” 2024.
- [24] J. Martin, S. Weigert, and O. Giraud, “Optimal Detection of Rotations about Unknown Axes by Coherent and Anticoherent States,” *Quantum*, vol. 4, p. 285, June 2020.
- [25] C. Chryssomalakos and H. Hernández-Coronado, “Optimal quantum roto-sensors,” *Phys. Rev. A*, vol. 95, p. 052125, May 2017.
- [26] A. Z. Goldberg, M. Grassl, G. Leuchs, and L. L. Sánchez-Soto, “Quantumness beyond entanglement: The case of symmetric states,” *Physical Review A*, vol. 105, no. 2, p. 022433, 2022.
- [27] M. Aulbach, D. Markham, and M. Muraio, “Geometric entanglement of symmetric states and the majorana representation,” in *Theory of Quantum Computation, Communication, and Cryptography: 5th Conference, TQC 2010, Leeds, UK, April 13-15, 2010, Revised Selected Papers 5*, pp. 141–158, Springer, 2011.
- [28] B. H. M, “Non-Abelian geometric phases carried by the spin fluctuation tensor,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 59, p. 062105, June 2018.

- [29] D. Baguette, T. Bastin, y J. Martin, “Multiqubit symmetric states with maximally mixed one-qubit reductions,” *Physical Review A*, vol. 90, p. 032314, Sept. 2014. arXiv:1407.1738 [quant-ph].
- [30] I. R. Shafarevich y A. O. Remizov, *Linear algebra and geometry*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Volume 2*, vol. 61. John Wiley & Sons, 1996.
- [32] T. Curtright, T. Van Kortryk, y C. K. Zachos, “Spin multiplicities,” *Physics Letters A*, vol. 381, no. 5, pp. 422–427, 2017.
- [33] J. A. Gyamfi y V. Barone, “On the composition of an arbitrary collection of  $su(2)$  spins: an enumerative combinatoric approach,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 51, no. 10, p. 105202, 2018.
- [34] C. Chryssomalakos, E. Guzmán-González, L. Hanotel, y E. Serrano-Ensástiga, “Stellar Representation of Multipartite Antisymmetric States,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 381, pp. 735–764, Jan. 2021.
- [35] A. Banyaga, D. Hurtubise, y D. Ajayi, *Lectures on Morse homology*, vol. 29. Springer, 2004.