



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

CICLOS PROPIAMENTE COLOREADOS

TESIS

Para obtener el título de:

Matemático

PRESENTA:

Misael Salvador Pedraza

Directora:

Dra. María del Rocío Sánchez López

Ciudad de México

Marzo del 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	4
1. Preliminares	6
1.1. Definiciones Básicas	7
1.2. Digráficas	10
1.3. Resultados Básicos	11
2. Condición de longitud para caminos propiamente coloreados	12
2.1. Gráficas coloreadas por aristas	13
2.2. Longitud de una trayectoria o un ciclo propiamente coloreado	15
2.3. Longitud mínima de un ciclo propiamente coloreado	43
3. Ciclos propiamente coloreados de longitud 3 y 4	44
3.1. Resultados previos	45
3.2. Ciclos propiamente coloreados de longitud 3	48
3.3. Ciclos propiamente coloreados de longitud 4	50
4. Ciclos propiamente coloreados de longitud al menos 5	75
4.1. Caso 1	77
4.2. Caso 2	90
4.3. Caso 3	103
Conclusión	111
Bibliografía	113

Agradecimientos

Quiero dedicar mi trabajo a mi mamá que siempre me escucha y me apoya, a mi padre que siempre estuvo presente en mi vida, a mis tios Esteban y Modesta, pues sin ellos jamás hubiera terminado la carrera, a mis amigos que siempre alegraron mi vida y a Diana que me animó a comenzar con este trabajo y estuvo apoyandome y haciendome feliz. En especial quiero agradecer a mi asesora la Doctora María del Rocío Sánchez López quien me guió por todo mi trabajo.

Introducción

Por lo menos, alguna vez cuando estamos viendo la televisión o hablando por teléfono, la señal se llega a “cortar”; esto se conoce como interferencia. Llamamos interferencia a cualquier señal de radiofrecuencia no deseada que impide ver televisión, escuchar radio o hablar por teléfono. La interferencia puede bloquear completamente la recepción en un equipo, causar solo una pérdida temporal de la señal o afectar la calidad de las imágenes o del sonido.

Para entender aún mejor el problema anterior, imaginemos que tenemos un canal de frecuencias para la transmisión de mensajes entre algunas estaciones de una red. Para evitar las interferencias haremos lo siguiente: si un mensaje es transmitido con una determinada frecuencia, para retransmitirlo se debe utilizar una frecuencia distinta.

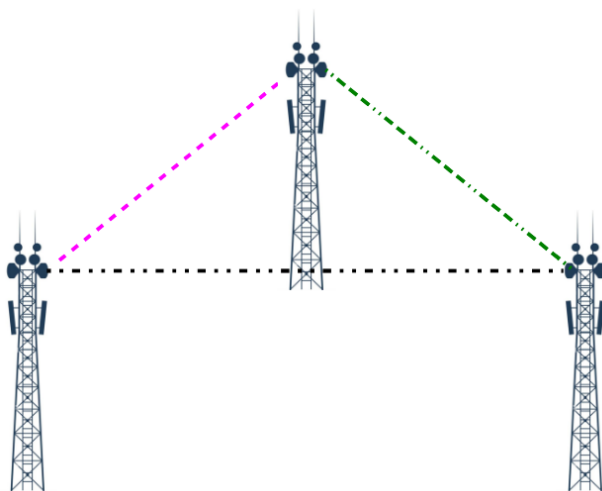


Figura 1: Transmisión de mensajes con frecuencias distintas.

De acuerdo con nuestro problema anterior, con la ayuda de la teoría de gráficas podemos modelarlo de la siguiente forma: consideraremos las estaciones como vértices y las frecuencias disponibles entre dos estaciones se representaran por medio de aristas (posiblemente múltiples) entre cualesquiera dos vértices de la gráfica. Donde a cada una de las aristas, las cuales representan frecuencias, les asignaremos un color para identificarlas.

Por lo tanto, lo que pedimos en la gráfica asociada es encontrar un camino entre dos vértices, donde las aristas consecutivas del camino deben tener asignado un color distinto. Por otro

lado, puede suceder que el mensaje que se envíe de una estación predeterminada debe volver a la misma estación. En términos de gráficas, lo que buscamos es un camino cerrado, donde las aristas consecutivas del camino deben tener asignado un color distinto. Si el camino cerrado descrito anteriormente es un ciclo, entonces lo llamaremos “ciclo propiamente coloreado”.

En una gráfica coloreada por aristas, llamamos camino propiamente coloreado a un camino que tiene la propiedad que aristas consecutivas tienen asignado un color distinto. Si a un vértice v , de una gráfica coloreada por aristas, le inciden k aristas de distinto color, diremos que el grado de color de v es k .

Los primeros en estudiar la existencia de ciclos alternantes (lo que nosotros llamamos ciclos propiamente coloreados) fueron Grossman y Haggkvist, [4], ellos dieron una condición suficiente bajo la cual una gráfica coloreada por aristas, con 2 colores, tiene un ciclo alternante. Después, Yeo en [5] generalizó el resultado dado por Grossman y Haggkvist para una gráfica coloreada por aristas con c colores con $c \geq 2$.

En esta tesis vamos a desarrollar los artículos Shinya Fujita, Colton Magnant, **Properly colored paths and cycles**, Discrete Applied Mathematics, Volume 159, Issue 14, 2011, Pages 1391-1397, ISSN 0166-218X. Guanghui Wang, Hao Li, **Color degree and alternating cycles in edge-colored graphs**, Discrete Mathematics, Volume 309, Issue 13, 2009, Pages 4349-4354, ISSN 0012-365X. En [1] se exhibe la existencia de ciclos propiamente coloreados de longitud 3, 4 y de longitud al menos 5. Por otro lado, en [2], bajo cierta hipótesis se exhibe la existencia de una trayectoria propiamente coloreada o de un ciclo propiamente coloreado de una longitud determinada, donde la longitud está asociada con el orden de la gráfica.

Primeramente, en el capítulo 1 presentamos las definiciones básicas de la Teoría de Gráficas y algunos resultados básicos que serán de ayuda en los capítulos siguientes.

Seguidamente, en el capítulo 2 desarrollamos el contenido del artículo [2]. Previo al desarrollo del artículo antes citado, presentamos algunas definiciones sobre gráficas coloreadas por aristas, las cuales vamos a necesitar para el desarrollo del trabajo.

Posteriormente, en el capítulo 3 estudiamos parcialmente el contenido del artículo [1]. En este capítulo vamos a trabajar con gráficas completas y veremos una condición necesaria para garantizar que todo vértice de la gráfica K_n (con $n \geq 4$) está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 3 y 4.

Finalmente, en el capítulo 4 terminamos de trabajar con el contenido del artículo [1]. Veremos una condición necesaria para garantizar que todo vértice de la gráfica K_n (con $n \geq 13$) está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunas definiciones básicas de la Teoría de Gráficas y también algunos resultados básicos con los que trabajamos durante los siguientes capítulos. Para un estudio con más profundidad de las definiciones básicas, puede consultarse [3]. Por otro lado, en este capítulo trabajamos una sección especial para digráficas, donde exhibimos algunos conceptos que nos servirán en el capítulo 2.

1.1. Definiciones Básicas

Definición 1.1.1 Una **gráfica** G consiste de un conjunto finito, no vacío, a los elementos de este conjunto los llamamos *vértices*, denotado por $V(G)$, y un conjunto de pares no ordenados de diferentes elementos de $V(G)$ llamados *aristas*, denotado por $E(G)$.

Para referirnos a una gráfica escribiremos simplemente G .

Sean G una gráfica, u y v vértices de G , para denotar a la arista $\{u, v\}$, de ahora en adelante, escribiremos indistintamente uv o vu .

Definición 1.1.2 Sea una gráfica G . Si u y v son vértices de G tales que $uv \in E(G)$, decimos que u y v son **adyacentes**. También, se dice que la arista uv **incide** en el vértice v y en el vértice u .

Definición 1.1.3 Dada G una gráfica, decimos que G tiene **orden** n si $|V(G)| = n$ y G tiene **tamaño** m si $|E(G)| = m$. Se dice que una gráfica es **finita** si las cardinalidades de $V(G)$ y $E(G)$ son finitas.

De aquí en adelante, consideramos que G tiene orden n y tamaño m , a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.1.4 Sean G una gráfica y v un vértice en $V(G)$, el **grado** de v es la cantidad de aristas que inciden en v , denotado como $d(v)$. Al mínimo $\min\{d(v) : v \in V(G)\}$ se le llama el grado mínimo de G y se representa por $\delta(G)$. Al máximo $\max\{d(v) : v \in V(G)\}$ se le llama el grado máximo de G y lo denotamos por $\Delta(G)$.

Definición 1.1.5 Sean G una gráfica y v un vértice de $V(G)$, la **vecindad** de v , denotada por $N(v)$, se define como $\{u \in V(G) : vu \in E(G)\}$.

Notemos que se cumple $|N(v)| = d(v)$.

En la figura (1.1), tenemos una gráfica con orden 5, tamaño 4, grado mínimo igual a 1, grado máximo igual a 2. Notemos también que $N(w) = \{u, y\}$.

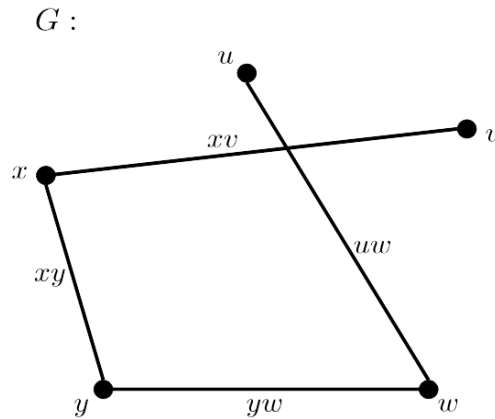


Figura 1.1: Gráfica G

Definición 1.1.6 Sea G una gráfica. El **complemento** de G , denotado por G^c , es la gráfica que cumple con:

- 1) $V(G^c) = V(G)$.
- 2) $uv \in E(G^c)$ si y solo si $uv \notin E(G)$.

Definición 1.1.7 Sea G una gráfica, si para cada v en $V(G)$, $d(v) = n-1$, entonces decimos que G es **completa** y la denotamos por K_n .

En la figura 1.2 (izquierda) se muestra el complemento de la gráfica G , mostrada en la figura 1.1. Por otro lado en la figura 1.2 (derecha) tenemos la gráfica completa de orden 5.

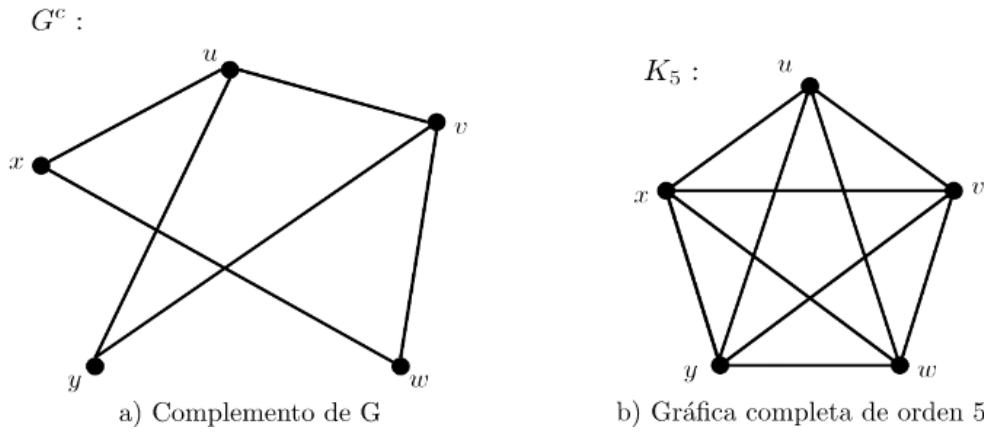


Figura 1.2: Ejemplo del complemento de una gráfica y una gráfica completa.

Definición 1.1.8 Sean G una gráfica. Un **camino** en G es una sucesión de vértices $W = (v_0, \dots, v_p)$ tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $0 \leq i \leq p-1$.

Sean G una gráfica y $W = (v_0, \dots, v_p)$ un camino en G . El conjunto $\{v_i : 0 \leq i \leq p\}$ es denotado por $V(W)$; el conjunto $\{v_i v_{i+1} : 0 \leq i \leq p-1\}$ es denotado por $E(W)$.

Definición 1.1.9 Sean G una gráfica y $W = (v_0, \dots, v_p)$ un camino en G . Se define un **subcamino** H de W como un camino tal que $V(H) \subseteq V(W)$ y $E(H) \subseteq E(W)$.

Sea $W = (v_0, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p)$, el subcamino $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j)$ se denota por (v_i, W, v_j) . El camino $(v_p, \dots, v_0)$ se denota por W^{-1} .

Definición 1.1.10 Sean G una gráfica y $W = (v_0, \dots, v_p)$ un camino en G .

1. La **longitud** de W se define como p .
2. Si W no repite vértices, entonces W se llama **trayectoria**.
3. Si $v_0 = v_p$, entonces decimos que W es un **camino cerrado**.
4. Si W es un camino cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último, con longitud mayor o igual que 3, entonces W se llama **ciclo**.

Si W es un ciclo de longitud s , entonces lo denotamos por C_s .

Definición 1.1.11 Sea G una gráfica y C_n un ciclo de longitud n en G , se dice que G es **hamiltoniana** si $V(C_n) = V(G)$.

Definición 1.1.12 Sea G una gráfica, una **subgráfica** H de G es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Se considera una subgráfica propia si $V(H) \subsetneq V(G)$ o $E(H) \subsetneq E(G)$.

Definición 1.1.13 Sea G una gráfica. Una **subgráfica inducida** H es una gráfica que cumple con lo siguiente:

- 1) $V(H) \subseteq V(G)$ con $V(H) \neq \emptyset$.
- 2) $E(H) = \{uv \in E(G) : \{u, v\} \subseteq V(H)\}$.

Definición 1.1.14 Sean G una gráfica y $S \subseteq V(G)$. La **subgráfica de G inducida por S** , denotada por $\langle S \rangle$, es la gráfica que cumple con lo siguiente:

- 1) $V(\langle S \rangle) = S$.
- 2) $E(\langle S \rangle) = \{uv \in E(G) : \{u, v\} \subseteq S\}$.

Dado un vértice x en G , para denotar a la subgráfica inducida por $V(G) \setminus \{x\}$, escribiremos simplemente $G - x$.

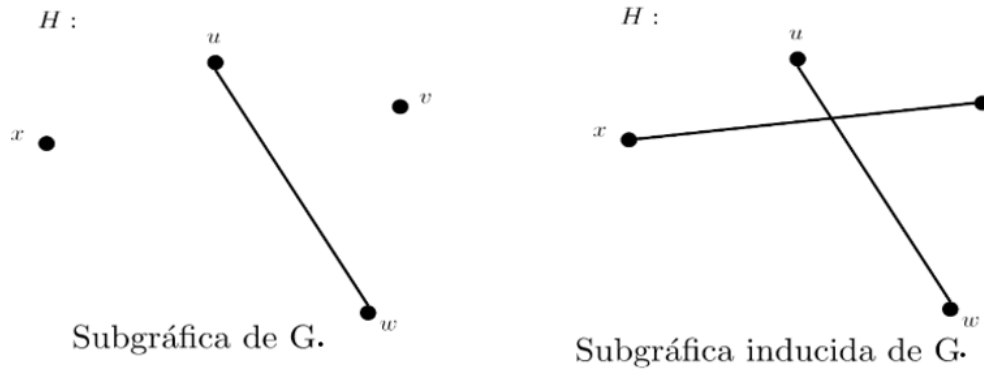


Figura 1.3:

1.2. Digráficas

Definición 1.2.1 Una **digráfica** D consiste de un conjunto finito, no vacío, a los elementos de este conjunto los llamamos **vértices**, denotado por $V(D)$, y un conjunto de pares ordenados de diferentes elementos de $V(D)$, a los elementos de este conjunto los llamamos **flechas**, denotado por $F(D)$.

Definición 1.2.2 Sean D una digráfica y $f = (u, v)$ una flecha de D . Decimos que u es la **cola** de f y que v es la **cabeza** de f . También decimos que u **es adyacente hacia** v y que v **es adyacente desde** u .

Definición 1.2.3 Sean D una digráfica y (u, v) una flecha de D . Decimos que (u, v) es una flecha **asimétrica** si $(v, u) \notin F(D)$.

Definición 1.2.4 Sean D una digráfica y v en $V(D)$. La **invecindad** de v , denotada por $N_D^-(v)$, es el conjunto de todos los vértices en D que son adyacentes hacia v . El **ingrado** de v en D , denotado por $d_D^-(v)$, es la cardinalidad de $N_D^-(v)$.

Definición 1.2.5 Sean D una digráfica y v en $V(D)$. La **exvecindad** de v , denotada por $N_D^+(v)$, es el conjunto de todos los vértices en D que son adyacentes desde v . El **exgrado** de v en D , denotado por $d_D^+(v)$, es la cardinalidad de $N_D^+(v)$.

Cuando sea claro a que digráfica nos referimos omiteremos el subíndice D .

En la figura 1.4, podemos observar una gráfica orientada.

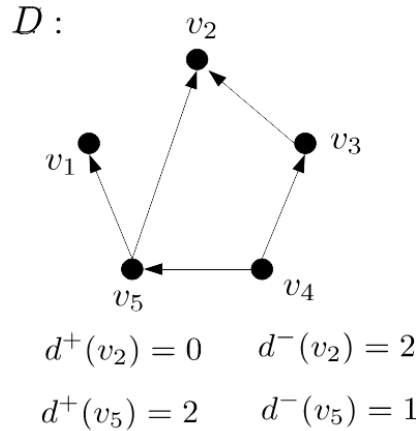


Figura 1.4: Digráfica

Definición 1.2.6 Sea G una gráfica, decimos que G es una **gráfica orientada**, si cada arista es sustituida por una flecha asimétrica.

Definición 1.2.7 Sea K_n una gráfica completa. Un **torneo** T es una orientación de K_n .

Como la gráfica completa K_n tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas, entonces por la definición de torneo, tenemos que el tamaño de T es $\frac{n(n-1)}{2}$.

En la figura 1.5 vemos un torneo de orden 5.

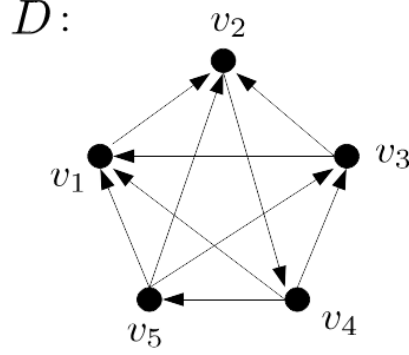


Figura 1.5: Torneo de orden 5

1.3. Resultados Básicos

Proposición 1.3.1 *Sea D una digráfica de orden n y tamaño m . Tenemos que*

$$\sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m = \sum_{i=1}^n d^+(v_i).$$

Demostración. Sea $f = (u, v)$, una flecha de D , donde $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Como f tiene exactamente una cola, la flecha se cuenta exactamente una vez en $\sum_{i=1}^n d^+(v_i)$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^n d^+(v_i) = m$. De la misma manera, como la flecha tiene exactamente una cabeza, entonces f se cuenta exactamente una vez en $\sum_{i=1}^n d^-(v_i)$, lo que implica que $\sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m$.

La siguiente proposición, nos será de gran ayuda en el siguiente capítulo.

Proposición 1.3.2 *Si T es un torneo de orden n , para $n \geq 2$, entonces existe un vértice v tal que $d^+(v) \geq \frac{n-1}{2}$.*

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que para todo v en $V(T)$, $d^+(v) < \frac{n-1}{2}$. Esto implica que $m = \sum_{i=1}^n d^+(v_i) < n(\frac{n-1}{2})$, pero debido a que el tamaño de un torneo es $\frac{n(n-1)}{2}$, entonces tenemos que $m = \frac{n(n-1)}{2} < (\frac{n(n-1)}{2})$, una contradicción. Por lo tanto, existe un vértice v , con $d^+(v) \geq \frac{n-1}{2}$.

Capítulo 2

Condición de longitud para caminos propiamente coloreados

Iniciamos este capítulo presentando definiciones con las que trabajamos en el presente capítulo: una gráfica coloreada por aristas, vecindad de color de un vértice v , grado de color de v , trayectorias y ciclos propiamente coloreados.

Dada una gráfica coloreada por aristas, donde su grado mínimo de color sea mayor o igual a d , con d en $\mathbb{N}$ y $d \geq 2$, probaremos que existe una “trayectoria propiamente coloreada” de longitud $2d$ o un “ciclo propiamente coloreado” de longitud $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Como corolario de lo anterior, probaremos que si el grado de color mínimo de G es mayor o igual a $\frac{n}{2}$, entonces existe un ciclo propiamente coloreado de longitud $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. Este último resultado será utilizado en el capítulo 4.

2.1. Gráficas coloreadas por aristas

Definición 2.1.1 Sea G una gráfica. Una **coloración de las aristas** de G , es una función $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, donde $\{1, \dots, k\}$ se llama conjunto de colores.

Para las siguientes definiciones vamos a suponer que G es una gráfica con una coloración en sus aristas $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

Definición 2.1.2 Sean G una gráfica y v un vértice en $V(G)$. Se define la **vecindad de color de v** , denotada por $N^c(v)$, como el máximo subconjunto de $N(v)$ tal que para cualquier subconjunto $\{u, w\}$ de $N^c(v)$ sucede que $c(vw) \neq c(vu)$.

Definición 2.1.3 Sean G una gráfica y v un vértice de $V(G)$. El **grado de color** de v , denotado por $d_G^c(v)$, se define como $|N^c(v)|$.

Cuando no haya confusión, en lugar de escribir $d_G^c(v)$, solo escribiremos $d^c(v)$.

Definición 2.1.4 El **grado de color mínimo** de G , se define como $\min\{d^c(v) : v \in V(G)\}$, denotado por $\delta^c(G)$.

En la figura 2.1, tenemos un ejemplo de una gráfica coloreada, donde $N^c(w) = \{u\}$, $N^c(x) = \{v, y\}$, también observemos que $d^c(x) = 2$ y $d^c(w) = 1$, por último tenemos que $\delta^c(G) = 1$ y $\Delta^c(G) = 2$.

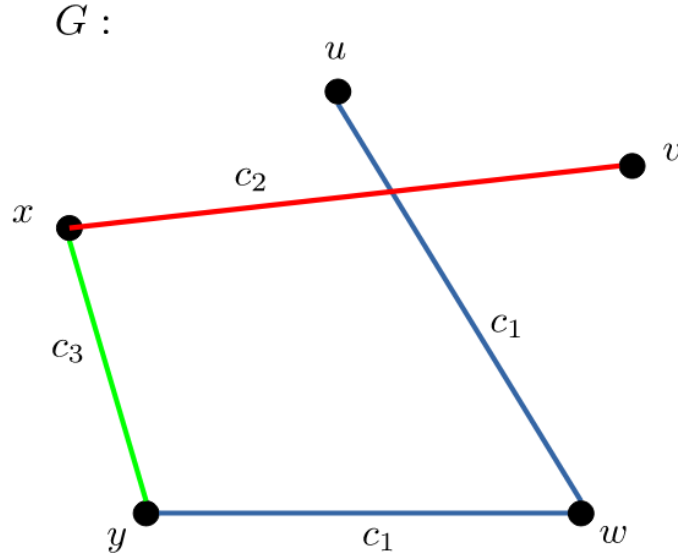


Figura 2.1: Gráfica con una coloración en sus aristas

Definición 2.1.5 Sea G una gráfica y W un camino. Llamamos a $W = (v_0, \dots, v_p)$ un **camino propiamente coloreado**, si el color de la arista $v_i v_{i+1}$ es distinto al color de la arista $v_{i+1} v_{i+2}$ para $0 \leq i \leq p-2$.

Definición 2.1.6 Sean G una gráfica y $W = (v_0, \dots, v_p)$ un camino propiamente coloreado en G .

1. Si W no repite vértices, entonces W se llama **trayectoria propiamente coloreada**.
2. Si $v_0 = v_p$, entonces decimos que W es un **camino cerrado propiamente coloreado**.
3. Si W es un camino cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último, con longitud mayor o igual a 3, entonces W se llama **ciclo propiamente coloreado**.

Como ejemplo en la figura 2.2, tenemos que:

$W_1 = (u, w, y, w)$ es un camino coloreado de longitud 3.

$W_2 = (u, x, v, y)$ es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 3.

$W_3 = (u, x, v, y, x)$ es un camino propiamente coloreado de longitud 4.

$C = (v, x, y, v)$ es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3.

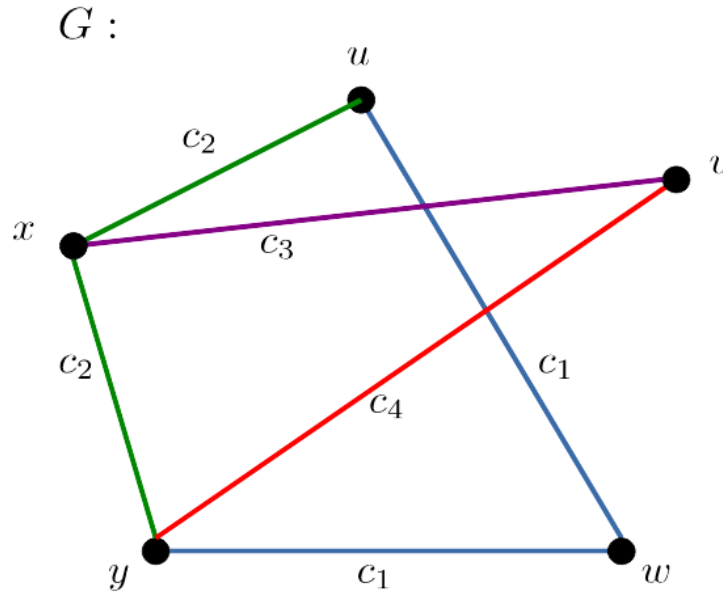


Figura 2.2: Caminos, trayectorias y ciclos coloreados en G

Antes de comenzar es necesario recordar las definiciones de la función piso y la función techo.

Definición 2.1.7 Sea $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ la **función techo** definida como:

$\lceil x \rceil = z$, con x en $\mathbb{R}$ y z cumple con lo siguiente:

- 1) $z \in \mathbb{Z}$.
- 2) $z - 1 < x \leq z$.

En palabras simples podemos decir que la función techo asigna a cada número real x el entero más próximo, pero que sea mayor o igual que x .

Definición 2.1.8 Sea $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ la **función piso** definida como:

$\lfloor x \rfloor = z$, con x en $\mathbb{R}$ y z cumple con lo siguiente:

- 1) $z \in \mathbb{Z}$.
- 2) $z \leq x < z + 1$.

De forma intuitiva, podemos decir que la función piso o suelo asigna a cada número real x el entero más próximo, pero que sea menor o igual que x .

Sea x en $\mathbb{R}$. Algunas propiedades de las funciones techo y piso.

- 1) $x \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$.
- 2) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \geq 0$.

2.2. Longitud de una trayectoria o un ciclo propiamente coloreado

Teorema 2.2.1 Sean G una gráfica de orden n , para $n \geq 3$, y $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una coloración de las aristas de G . Si para cada vértice v de G , $d^c(v) \geq d \geq 2$ (con d en $\mathbb{N}$), entonces G tiene una trayectoria propiamente coloreada de longitud al menos $2d$ o G tiene un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Demostración:

Vamos a probar primero el caso $d = 2$; es decir, probaremos que si $d^c(v) \geq 2$, entonces G tiene una trayectoria propiamente coloreada de longitud al menos 4 o G tiene un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos $\lceil \frac{2(2)}{3} \rceil + 1 = 2 + 1 = 3$.

Sea v_0 un vértice en $V(G)$. Como $d^c(v_0) \geq 2$, entonces al menos existen dos vértices v_1 y v_2 en $N(v_0)$, con $c(v_0v_1) = c_1$, $c(v_0v_2) = c_2$ y $c_1 \neq c_2$. Fijémonos en v_1 , como $d^c(v_1) \geq 2$, entonces debe existir v_3 adyacente a v_1 , con $c(v_1v_3) = c_3$ y $c_3 \neq c_1$. Ahora fijémonos en v_2 , como $d^c(v_2) \geq 2$, debe existir v_4 adyacente a v_2 , con $c(v_2v_4) = c_4$ y $c_2 \neq c_4$. Derivado de esto tenemos los siguientes casos.

Caso 1. $v_3 = v_2$ y $c_3 \neq c_2$.

Caso 2. $v_3 = v_2$ y $c_3 = c_2$.

Caso 3. $v_4 = v_1$ y $v_3 \neq v_2$.

Caso 4. $v_4 \neq v_1$ y $v_3 \neq v_2$.

Caso 1. $v_3 = v_2$ y $c_3 \neq c_2$ (véase Figura 2.3).

Fijémonos en el ciclo $C = (v_0, v_2, v_1, v_0)$, probaremos que es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3.

Recordemos que $c(v_0v_2) = c_2$ y $c(v_2v_1) = c(v_3v_1) = c_3$. Por la suposición del caso 1 tenemos que $c_3 \neq c_2$, por lo que $c(v_0v_2) \neq c(v_2v_1)$. Por otro lado, como $c(v_1v_0) = c_1$ y por la elección de las arista v_2v_1 respecto a la arista v_1v_0 , tenemos que $c_1 \neq c_3$, entonces $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_0)$. Por último, como $c(v_0v_2) = c_2$ y por la elección de las aristas v_1v_0 y v_0v_2 , tenemos que $c_1 \neq c_2$; es decir, $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_2)$. Por lo tanto, concluimos que $C = (v_0, v_2, v_1, v_0)$ es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3.

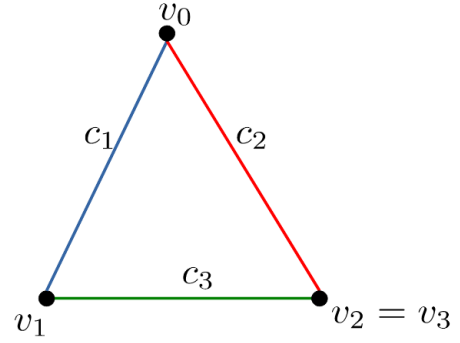


Figura 2.3: Caso 1.

Caso 2. $v_3 = v_2$ y $c_3 = c_2$.

Observe que en este caso $v_4 \neq v_1$. Como $d^c(v_4) \geq 2$, entonces debe existir v_5 adyacente a v_4 con $c(v_4v_5) = c_5$ y $c_4 \neq c_5$. Tenemos los siguientes sub-casos:

Caso 2.1 $v_5 = v_0$.

Caso 2.1.1 $c_5 = c_2$ (véase figura 2.4).

Fijémonos en el ciclo $C = (v_4, v_2, v_1, v_0, v_4)$. Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4; es decir, vamos a ver que:

1. $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_1)$.
2. $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_0)$.
3. $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_4)$.
4. $c(v_0v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Prueba 1. Recuerde que $c(v_4v_2) = c_4$ y $c(v_2v_1) = c_2$; por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$; es decir, $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_1)$.

Prueba 2. Por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 tenemos que $c_1 \neq c_2$, lo que implica que $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_0)$.

Prueba 3. Recuerde que $c(v_1v_0) = c_1$ y $c(v_0v_4) = c_5$. Por otro lado, la hipótesis del caso 2.1.1 sabemos que $c_2 = c_5$ y por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 , tenemos que $c_1 \neq c_2$, por lo que, $c_1 \neq c_5$. Así, $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_4)$.

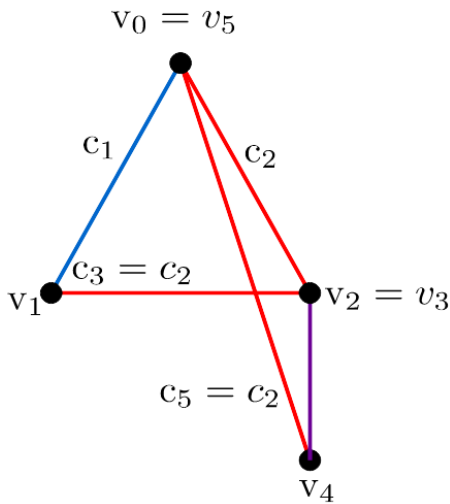


Figura 2.4: Caso 2.1.1

Prueba 4. Por la elección de la arista v_4v_5 , respecto a la arista v_2v_4 , tenemos que $c_4 \neq c_5$, lo que implica que $c(v_0v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Por (1), (2), (3) y (4) tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Caso 2.1.2 $c_5 \neq c_2$ (véase figura 2.5).

Fijémonos en el ciclo $C = (v_4, v_2, v_0, v_4)$. Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3. Vamos a ver que:

1. $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_0)$.
2. $c(v_2v_0) \neq c(v_0v_4)$.
3. $c(v_0v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Prueba 1. Por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$, lo que implica que $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_0)$.

Prueba 2. Por suposición del caso 2.1.2 tenemos que $c_2 \neq c_5$. Así, $c(v_2v_0) \neq c(v_0v_4)$.

Prueba 3. Por la elección de la arista v_4v_5 , respecto a la arista v_2v_4 , tenemos que $c_4 \neq c_5$. Por lo tanto, $c(v_0v_4) \neq c(v_4v_2)$.

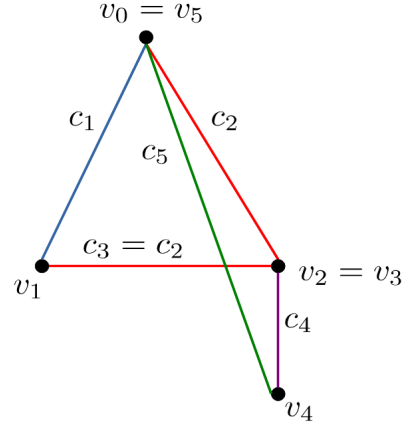


Figura 2.5: Caso 2.1.2

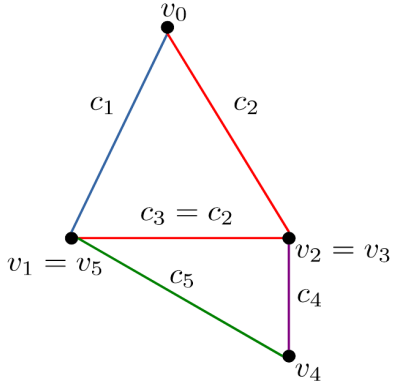


Figura 2.6: Caso 2.2.1

Por (1), (2) y (3) tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3.

Caso 2.2 $v_5 = v_1$.

Caso 2.2.1 $c_5 \neq c_1$ (véase figura 2.6).

Fijémonos en el ciclo $C = (v_4, v_2, v_0, v_1, v_4)$. Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Veremos que:

1. $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_0)$.
2. $c(v_2v_0) \neq c(v_0v_1)$.
3. $c(v_0v_1) \neq c(v_1v_4)$.
4. $c(v_1v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Prueba 1. Por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$. Por lo tanto, $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_0)$.

Prueba 2. Por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 tenemos que $c_1 \neq c_2$. Así, $c(v_2v_0) \neq c(v_0v_1)$.

Prueba 3. Por la suposición del caso 2.2.1 tenemos que $c_1 \neq c_5$, lo que implica que $c(v_0v_1) \neq c(v_1v_4)$.

Prueba 4. Por la elección de la arista v_4v_5 , respecto a la arista v_2v_4 , tenemos que $c_4 \neq c_5$, por lo que se deduce que $c(v_1v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Por (1), (2), (3) y (4) tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Caso 2.2.2 $c_5 = c_1$ (véase figura 2.7).

Fijémonos en el siguiente ciclo $C = (v_4, v_2, v_1, v_4)$. Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3. Vamos a ver que:

1. $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_1)$.
2. $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_4)$.
3. $c(v_1v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Prueba 1. Por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$; es decir, $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_1)$.

Prueba 2. Por la suposición del caso 2.2.2 tenemos que $c_5 = c_1$ y por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 tenemos que $c_1 \neq c_2$, por lo que $c_5 \neq c_2$. Así, $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_4)$.

Prueba 3. Por la elección de la arista v_4v_5 , respecto a la arista v_2v_4 , tenemos que $c_4 \neq c_5$. Por lo tanto, $c(v_1v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Por (1), (2) y (3) tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3.

Caso 2.3 $v_5 \notin \{v_1, v_0\}$ (véase figura 2.8).

Fijémonos en la trayectoria $W = (v_1, v_0, v_2, v_4, v_5)$. Probaremos que W es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 4. Veremos que:

1. $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_2)$.
2. $c(v_0v_2) \neq c(v_2v_4)$.
3. $c(v_2v_4) \neq c(v_4v_5)$.

Prueba 1. Por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 tenemos que $c_1 \neq c_2$; es decir, $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_2)$.

Prueba 2. Por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$, lo que implica que $c(v_0v_2) \neq c(v_2v_4)$.

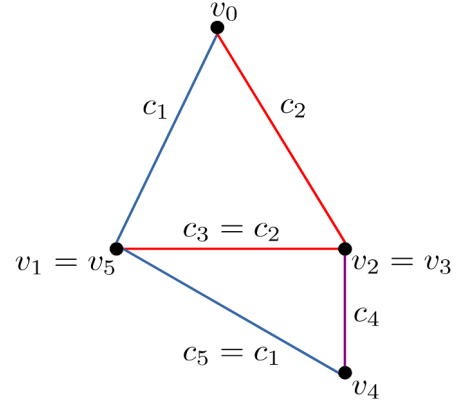


Figura 2.7: Caso 2.2.2

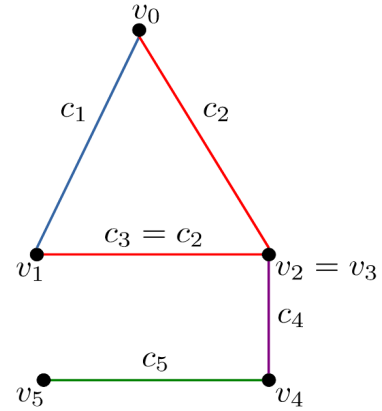


Figura 2.8: Caso 2.3

Prueba 3. Por la elección de la arista v_4v_5 , respecto a la arista v_2v_4 , tenemos que $c_4 \neq c_5$. Así, $c(v_2v_4) \neq c(v_4v_5)$.

Por (1), (2) y (3) tenemos que W es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 4.

Caso 3. $v_4 = v_1$ y $v_3 \neq v_2$.

De este caso se derivan subcasos similares a los casos 1 y 2, por lo que, se omite su demostración.

Caso 4. $v_4 \neq v_1$ y $v_3 \neq v_2$.

Caso 4.1 $v_4 = v_3$.

Caso 4.1.1 $c_3 \neq c_4$ (véase figura 2.9).

Fijémonos en el ciclo $C = (v_4, v_2, v_0, v_1, v_4)$. Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Veamos que:

1. $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_0)$.
2. $c(v_2v_0) \neq c(v_0v_1)$.
3. $c(v_0v_1) \neq c(v_1v_4)$.
4. $c(v_1v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Prueba 1. Por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$; es decir, $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_0)$.

Prueba 2. Por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 tenemos que $c_1 \neq c_2$. Por lo tanto, $c(v_2v_0) \neq c(v_0v_1)$.

Prueba 3. Por la elección de la arista v_1v_3 respecto a v_0v_1 tenemos que $c_1 \neq c_3$. Así, $c(v_0v_1) \neq c(v_1v_4)$.

Prueba 4. Por la suposición del caso 4.1.1 tenemos que $c_4 \neq c_3$, lo que implica que $c(v_1v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Por (1), (2), (3) y (4) tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Caso 4.1.2 $c_3 = c_4$.

Como $d^c(v_4) \geq 2$, entonces debe existir v_5 adyacente a v_4 con $c(v_4v_5) = c_5$ y $c_4 \neq c_5$. Tenemos los siguientes subcasos:

Caso 4.1.2.1 $v_5 = v_0$.

Caso 4.1.2.1.1 $c_5 = c_1$ (véase figura 2.10).

Fijémonos en el ciclo $C = (v_4, v_2, v_0, v_4)$. Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3. Veremos que:

1. $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_0)$.

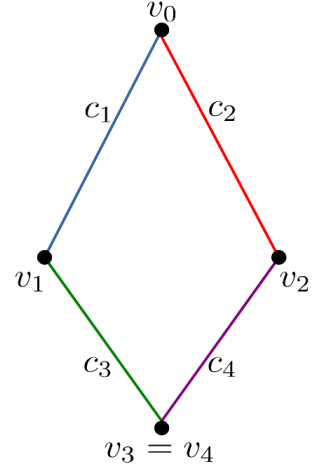


Figura 2.9: Caso 4.1.1

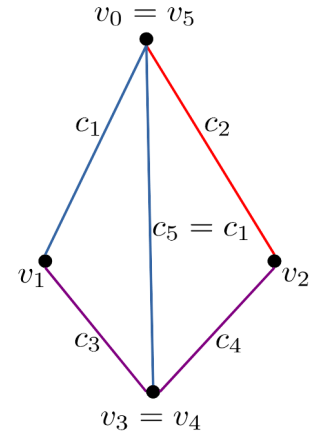


Figura 2.10: Caso 4.1.2.1.1

2. $c(v_2v_0) \neq c(v_0v_4)$.
3. $c(v_0v_4) \neq c(v_4v_2)$.

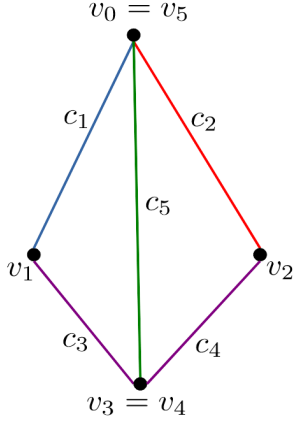


Figura 2.11: Caso 4.1.2.1.2

Prueba 1. Por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$; es decir, $c(v_4v_2) \neq c(v_2v_0)$.

Prueba 2. Por la suposición del caso 4.1.2.1.1 tenemos que $c_5 = c_1$ y por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 tenemos que $c_1 \neq c_2$, lo que implica que $c_2 \neq c_5$. Por lo tanto, $c(v_2v_0) \neq c(v_0v_4)$.

Prueba 3. Por la elección de la arista v_4v_5 , respecto a la arista v_2v_4 , tenemos que $c_4 \neq c_5$. Así, $c(v_0v_4) \neq c(v_4v_2)$.

Por (1), (2) y (3) tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3.

Caso 4.1.2.1.2 $c_5 \neq c_1$ (véase figura 2.11).

Fijémonos en el ciclo $C = (v_4, v_1, v_0, v_4)$. Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3. Veamos que:

1. $c(v_4v_1) \neq c(v_1v_0)$.
2. $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_4)$.
3. $c(v_0v_4) \neq c(v_4v_1)$.

Prueba 1. Por la elección de la arista v_1v_3 , respecto a la arista v_0v_1 , tenemos que $c_1 \neq c_3$. Así, $c(v_4v_1) \neq c(v_1v_0)$.

Prueba 2. Por la suposición del caso 4.1.2.1.2 tenemos que $c_5 \neq c_1$. Por lo tanto, $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_4)$.

Prueba 3. Por la suposición del caso 4.1.2 tenemos que $c_3 = c_4$ y por la elección de la arista v_4v_5 , respecto a la arista v_2v_4 , tenemos que $c_4 \neq c_5$. Por lo tanto, $c_3 \neq c_5$, lo que implica que $c(v_0v_4) \neq c(v_4v_1)$.

Por (1), (2) y (3) tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3.

Caso 4.1.2.2 $v_5 \neq v_0$ (véase figura 2.12).

Fijémonos en la trayectoria $W = (v_1, v_0, v_2, v_4, v_5)$. Probaremos que W es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 4. Veamos que:

1. $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_2)$.
2. $c(v_0v_2) \neq c(v_2v_4)$.
3. $c(v_2v_4) \neq c(v_4v_5)$.

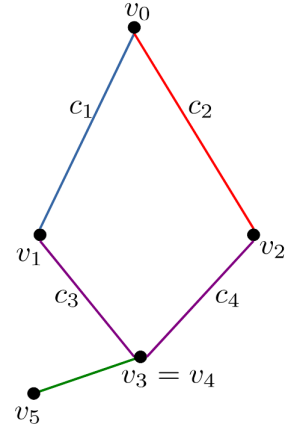


Figura 2.12: Caso 4.1.2.2

Prueba 1. Por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 tenemos que $c_1 \neq c_2$; es decir, $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_2)$.

Prueba 2. Por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$. Por lo tanto, $c(v_0v_2) \neq c(v_2v_4)$.

Prueba 3. Por la elección de la arista v_4v_5 , respecto a la arista v_2v_4 , tenemos que $c_4 \neq c_5$. Así, $c(v_2v_4) \neq c(v_4v_5)$.

Por (1), (2) y (3) tenemos que W es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 4.

Caso 4.2 $v_3 \neq v_4$ (véase figura 2.13).

Fijémonos en la trayectoria $W = (v_3, v_1, v_0, v_2, v_4)$. Probaremos que W es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 4. Veremos que:

1. $c(v_3v_1) \neq c(v_1v_0)$.
2. $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_2)$.
3. $c(v_0v_2) \neq c(v_2v_4)$.

Prueba 1. Por la elección de la arista v_1v_3 , respecto a la arista v_0v_1 , tenemos que $c_1 \neq c_3$; es decir, $c(v_3v_1) \neq c(v_1v_0)$.

Prueba 2. Por la elección de las aristas v_0v_1 y v_0v_2 tenemos que $c_1 \neq c_2$. Así, $c(v_1v_0) \neq c(v_0v_2)$.

Prueba 3. Por la elección de la arista v_2v_4 , respecto a la arista v_0v_2 , tenemos que $c_4 \neq c_2$. Por lo tanto, $c(v_0v_2) \neq c(v_2v_4)$.

Por (1), (2) y (3) tenemos que W es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 4.

Con esto concluimos el caso $d = 2$.

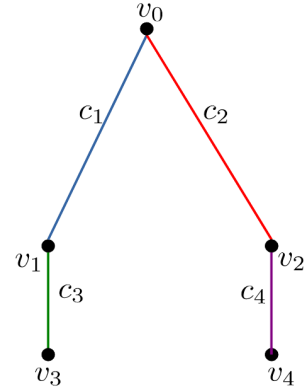


Figura 2.13: Caso 4.2

Ahora veamos el caso $d \geq 3$. Supongamos que el teorema es falso; es decir, existe una gráfica G , tal que $d^c(v) \geq d \geq 3$ para todo v en $V(G)$, pero todo ciclo propiamente coloreado en G es de longitud h , con $h < \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ y toda trayectoria propiamente coloreada es de longitud h_1 , con $h_1 < 2d$.

Sea $W_l = (v_1, \dots, v_l)$ una trayectoria propiamente coloreada de longitud máxima en G , entonces $l - 1 < 2d$, por lo que, $l \leq 2d$. Sea $N^c(v_1)$ una vecindad de color máxima de v_1 tal que $v_2 \in N^c(v_1)$ (notemos que la elección de v_2 es posible ya que $v_2 \in N(v_1)$ y si $c(v_1 v_2) = c_j$, entonces v_2 será el representante del color j). Análogamente, sea $N^c(v_l)$ una vecindad de color máxima de v_l tal que $v_{l-1} \in N^c(v_l)$.

Durante la demostración necesitaremos continuamente de los siguientes hechos, por lo que, procedemos a demostrarlos, para después solo mencionarlos y que las pruebas sean más fluidas.

- a) $N^c(v_1) \subseteq V(W_l)$.
- b) $d + 1 \leq l$.
- c) $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 \geq 3$.
- d) $\lceil \frac{2d}{3} \rceil < d$.
- e) $l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \leq l - 2$.
- f) $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$.
- g) $\lfloor \frac{d}{3} \rfloor \geq 1$.
- h) $N^c(v_l) \subseteq V(W_l)$.
- i) $l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil > 1$.
- j) $v_1 \notin N^c(v_l)$ o $v_l \notin N^c(v_1)$.
- k) $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 3 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Prueba a. Supongamos que existe $x \in N^c(v_1)$ tal que $x \notin V(W_l)$. Por la definición 2.1.2 tenemos que $c(xv_1) \neq c(v_1 v_2)$, ya que $v_2 \in N^c(v_1)$. Como $c(xv_1) \neq c(v_1 v_2)$ y W_l es una trayectoria propiamente coloreada, entonces $T = (x, v_1, v_2, \dots, v_l)$ es una trayectoria propiamente coloreada de longitud l , pero W_l era una trayectoria de longitud máxima, esto implica una contradicción, por lo que, $N^c(v_1) \subseteq V(W_l)$.

Prueba b. Por (a) tenemos que $N^c(v_1) \subseteq V(W_l)$. Por otro lado sabemos que $v_1 \notin N^c(v_l)$, pero $v_1 \in V(W_l)$, lo que implica que $\{v_1\} \cup N^c(v_1) \subseteq V(W_l)$, por lo que $|N^c(v_1) \cup \{v_1\}| \leq |V(W_l)|$. Como $|N^c(v_1) \cup \{v_1\}| = |N^c(v_1)| + |\{v_1\}| = d^c(v_1) + 1 \geq d + 1$, entonces tenemos la siguiente desigualdad

$$d + 1 \leq d^c(v_1) + 1 \leq |N^c(v_1) \cup v_1| \leq |V(W_l)| = l.$$

Por lo tanto, $d + 1 \leq l$.

Prueba c. Como $d \geq 3$, entonces $2d \geq 6$, por lo que, $\frac{2d}{3} \geq 2$ y por la definición 2.1.7 tenemos que $2 \leq \frac{2d}{3} \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Finalmente tenemos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil \geq 2$, lo que implica que: $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 \geq 3$.

Prueba d. Como $d \geq 3$, entonces $2d + d \geq 3 + 2d$, por lo que, $\frac{3d}{3} \geq \frac{3}{3} + \frac{2d}{3}$; es decir, $d \geq \frac{2d}{3} + 1$. Ahora por la definición 2.1.7 $\lceil \frac{2d}{3} \rceil < \frac{2d}{3} + 1$. Juntando las desigualdades tenemos que $d \geq \frac{2d}{3} + 1 > \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, concluyendo que $d > \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

Prueba e. Por (c) tenemos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 \geq 3$, lo que implica que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil \geq 2$, por lo tanto $-\lceil \frac{2d}{3} \rceil \leq -2$. Sumando l a la desigualdad anterior, tenemos que

$$l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \leq l - 2.$$

Prueba f. Tenemos lo siguiente por las definiciones 2.1.7 y 2.1.8:

$$\lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1 < \frac{2d}{3} \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$$

$$\lfloor \frac{d}{3} \rfloor \leq \frac{d}{3} < \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$$

sumando las desigualdades

$$\lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1 < \frac{2d}{3}$$

$$\lfloor \frac{d}{3} \rfloor \leq \frac{d}{3}$$

tenemos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1 + \lfloor \frac{d}{3} \rfloor < \frac{2d}{3} + \frac{d}{3} = d$; es decir, $\lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1 + \lfloor \frac{d}{3} \rfloor < d$, que es lo mismo que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + \lfloor \frac{d}{3} \rfloor \leq d$. Por lo tanto, $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \geq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$.

Ahora sumando las desigualdades

$$\frac{2d}{3} \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$$

$$\frac{d}{3} < \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$$

tenemos que $\frac{2d}{3} + \frac{d}{3} < \lceil \frac{2d}{3} \rceil + \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$. Así $d < \lceil \frac{2d}{3} \rceil + \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$, que es lo mismo que $d \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$. Por lo tanto, $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \leq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$.

Por ambas desigualdades tenemos que $\lfloor \frac{d}{3} \rfloor \leq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \leq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$; es decir, $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$.

Prueba g. Como $d \geq 3$, entonces $\frac{d}{3} \geq 1$, por lo que $\lfloor \frac{d}{3} \rfloor \geq 1$.

Prueba h. Supongamos que existe $y \in N^c(v_l)$ tal que $y \notin V(W_l)$. Por la definición 2.1.2 tenemos que $c(yv_l) \neq c(v_lv_{l-1})$, ya que $v_{l-1} \in N^c(v_l)$. Como $c(yv_l) \neq c(v_lv_{l-1})$ y W_l^{-1} es una trayectoria propiamente coloreada, entonces $T = (y, v_l, v_{l-1}, \dots, v_1)$ es una trayectoria propiamente coloreada de longitud l , pero W_l era una trayectoria de longitud máxima, esto implica una contradicción, por lo que $N^c(v_l) \subseteq V(W_l)$.

Prueba i. Por (b) y (d) tenemos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 < d + 1 \leq l$, entonces $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 < l$. Así, $1 < l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

Prueba j. Procediendo por contradicción, supongamos que $v_1 \in N^c(v_l)$ y $v_l \in N^c(v_1)$. Probaremos que $C = W_l \cup (v_l, v_1)$ (véase figura 2.14) es un ciclo propiamente coloreado. Recordemos que W_l es una trayectoria propiamente coloreada. Por otro lado, $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv_1)$, ya que $\{v_1, v_{l-1}\} \subseteq N^c(v_l)$. Debido a que $\{v_l, v_2\} \subseteq N^c(v_1)$, tenemos que $c(v_lv_1) \neq c(v_1v_2)$. Por lo tanto, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud l . Por (b) y

(d), sabemos que $l \geq d + 1 > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$; es decir, $l > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, esto implica una contradicción ya que G no contiene ciclos propiamente coloreados de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Por lo tanto, $v_1 \notin N^c(v_l)$ o $v_l \notin N^c(v_1)$.

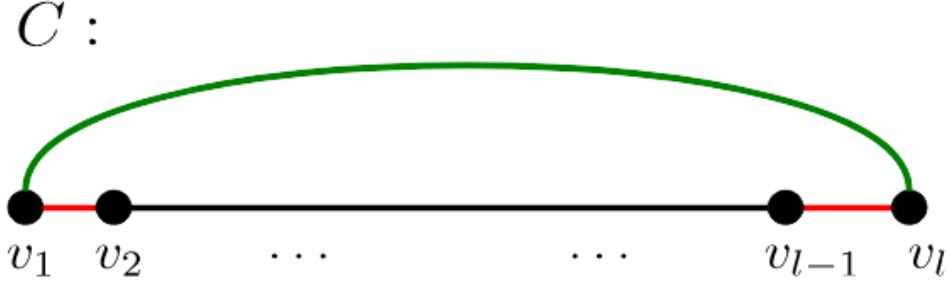


Figura 2.14: Ciclo C

Prueba k. Por la definición 2.1.7, sabemos que, $\lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1 < \frac{2d}{3}$, sumando 1, obtenemos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil < \frac{2d}{3} + 1$. Por otro lado, por la definición 2.1.8, sabemos que, $\frac{d}{3} < \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$, multiplicando por 2, tenemos que $\frac{2d}{3} < 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2$, ahora sumamos 1 y obtenemos $\frac{2d}{3} + 1 < 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 3$. Por ambas desigualdades, deducimos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil \leq \frac{2d}{3} + 1 < 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 3$; es decir, $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 3 > \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por lo tanto, $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 3 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Con esto terminamos de probar los incisos. Ahora buscaremos vértices que cumplan ciertas propiedades (los llamaremos v_s y v_l) con el fin de encontrar un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Afirmación 1. Existe un entero s en $\{1, \dots, l\}$, que cumple lo siguiente:

(I) $v_s \in N^c(v_1)$.

(II) $s \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

(III) Sujeto a (I) y (II), s es mínimo.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que no existe el entero s con las tres propiedades, esto implica que $N^c(v_1) \subseteq \{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\}$. Por lo tanto, $|N^c(v_1)| \leq |\{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\}| = \lceil \frac{2d}{3} \rceil$; es decir $|N^c(v_1)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por otro lado, por (d) sabemos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil < d$ y como $d \leq |N^c(v_1)|$, entonces tenemos la siguiente desigualdad $|N^c(v_1)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil < d \leq |N^c(v_1)|$. Concluyendo que $|N^c(v_1)| < |N^c(v_1)|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe existir dicho entero s .

Una vez aclarada la existencia de s , afirmamos lo siguiente:

Afirmación 2. $s < l$ (véase figura 2.15).

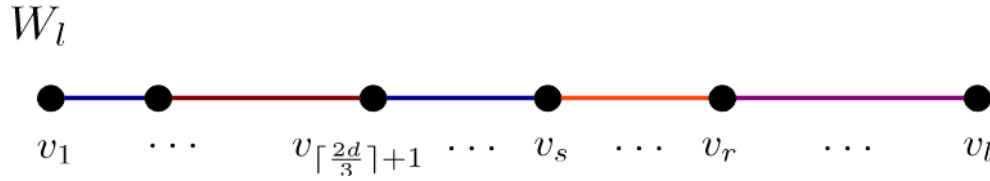


Figura 2.15: Afirmación 2

Demostración. Para la demostración consideraremos dos casos sobre s ; a saber, $s = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ y $s > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Si $s = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, entonces por (d) tenemos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 < d + 1$. Además, por (b), $d + 1 \leq l$, lo que implica que $s = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 < d + 1 \leq l$; es decir, $s < l$.

Si $s > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, entonces afirmamos los siguientes hechos:

1. $|N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1$.
2. $|N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_s\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

Prueba 1. Recordemos que $|\{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\}| = \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por otro lado, sabemos que $v_1 \notin N^c(v_1)$, pero $v_1 \in \{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\}$, entonces $|N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1$.

Prueba 2. Afirmamos que $\{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1}, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1) = \{v_s\}$. Procediendo por contradicción supongamos que existe un vértice v_r , tal que $v_r \in N^c(v_1) \cap \{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1}, \dots, v_s\}$ y $r \neq s$. Como $v_r \in \{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1}, \dots, v_s\}$, entonces $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 \leq r \leq s$, pero debido a que $r \neq s$, tenemos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 \leq r < s$, lo que implica que el entero r contradice la elección del entero s . Por lo tanto, $\{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1}, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1) = \{v_s\}$. Así $|\{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1}, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| = 1$. Por otro lado, veamos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
|N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_s\}| &= |(\{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cup \{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_s\}) \cap N^c(v_1)| \\
&= |(\{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_1)) \cup (\{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1))| \\
&= |\{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)|.
\end{aligned}$$

Por el punto (1) sabemos que $|\{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_1)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1$ y por lo expuesto al inicio de la prueba tenemos que $|\{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| = 1$, sumando las cardinalidades obtenemos

$$\lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1 + 1 = \lceil \frac{2d}{3} \rceil \geq |\{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)|$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_s\}| &= |\{v_1, \dots, v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_{\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| \\
&\leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil
\end{aligned}$$

es decir,

$$|N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_s\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil.$$

Para concluir con la prueba primero notemos que $s \leq l$, ya que $v_s \in V(W_l)$. Supongamos que $s = l$, lo que implica que $|N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_l\}| = |N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_s\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por otro lado, sabemos que, $d \leq |N^c(v_1)| = |N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_l\}|$ (ya que $N^c(v_1) \subseteq \{v_1, \dots, v_l\}$ y por (d) se cumple que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil < d$). En resumen tenemos que:

$$\begin{aligned}
d &\leq |N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_l\}| \\
&= |N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_s\}| \\
&\leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil < d
\end{aligned}$$

es decir, $d < d$, lo que implica una contradicción. Por lo tanto, $s \neq l$. Así, $s < l$.

Afirmación 3. Si $v_i \in N^c(v_1)$ y $s \leq i \leq l - 1$, entonces $c(v_i v_{i+1}) \neq c(v_1 v_i)$ (véase figura 2.16).

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe v_i en $N^c(v_1)$ con $s \leq i \leq l - 1$ y $c(v_i v_{i+1}) = c(v_1 v_i)$. Probaremos que $C = (v_1, \dots, v_i, v_1)$ (véase figura 2.17) es un ciclo propiamente coloreado. Recordemos que (v_1, W_l, v_i) es una trayectoria propiamente coloreada, ya que es una subtrayectoria de W_l . Por otro lado, como

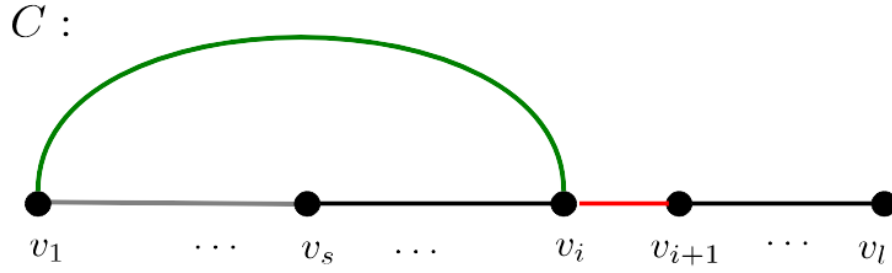
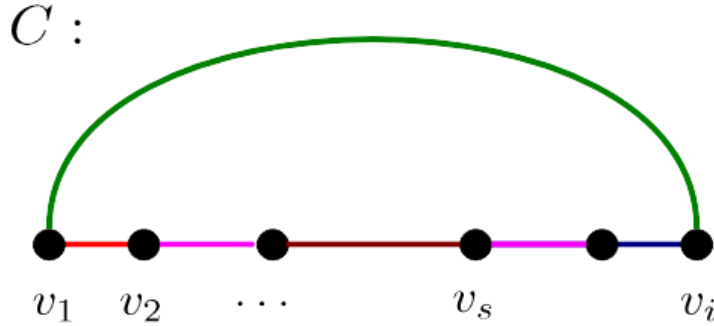


Figura 2.16: Afirmación 3

$\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq V(W_l)$, entonces $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iv_{i+1})$ y por la negación de la afirmación 3 sabemos que $c(v_iv_{i+1}) = c(v_1v_i)$, lo que implica que $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iv_1)$. Por último $c(v_1v_i) \neq c(v_1v_2)$ ya que $\{v_i, v_2\} \subseteq N^c(v_1)$. Por lo anterior tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud i , con $i \geq s$. Dado que $s \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, entonces $i \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$; es decir, la longitud de C es mayor o igual a $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, esto implica una contradicción ya que estamos suponiendo que G es una gráfica que no contiene ciclos propiamente coloreados de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Así, la afirmación 3 es verdadera.



Afirmación 4. Existe un entero t en $\{1, \dots, l\}$, que cumple lo siguiente:

(IV) $v_t \in N^c(v_l)$.

(V) $t \leq l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

(VI) Sujeto a (IV) y (V), t es máximo.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que no existe el entero t con las tres propiedades; es decir, para todo $v_t \in N^c(v_l)$ se tiene que $t > l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, por lo que

$$N^c(v_l) \subseteq \{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |N^c(v_l)| &\leq |\{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\}| \\ &= l - (l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1) + 1 \\ &= l - l + 1 - 1 + \lceil \frac{2d}{3} \rceil \\ &= \lceil \frac{2d}{3} \rceil \end{aligned}$$

esto implica que $|N^c(v_l)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por otro lado, por **(d)** sabemos que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil < d$ y como $d \leq |N^c(v_l)|$, entonces tenemos la siguiente desigualdad $|N^c(v_l)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil < d \leq |N^c(v_l)|$. Concluyendo que $|N^c(v_l)| < |N^c(v_l)|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe existir dicho entero t .

Una vez aclarada la existencia de t , afirmamos lo siguiente:

Afirmación 5. $1 < t$ (véase figura 2.18).

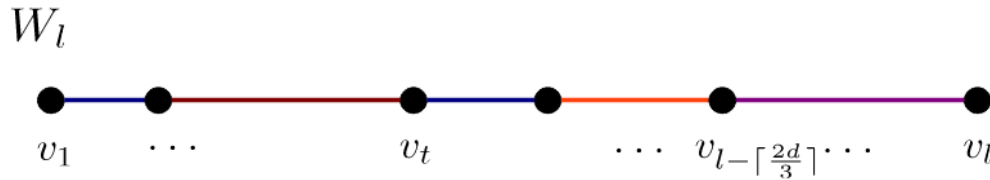


Figura 2.18: Afirmación 5

Demostración. Para la demostración consideraremos dos casos sobre t ; a saber, $t = l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$ y $t < l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Si $t = l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, entonces por (i), sabemos que $1 < l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil = t$, lo que implica que $1 < t$. Si $t < l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, entonces afirmamos los siguientes hechos:

1. $|N^c(v_l) \cap \{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1$.
2. $|N^c(v_l) \cap \{v_t, \dots, v_l\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

Prueba 1. Recordemos que $|\{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\}| = l - (l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1) + 1 = l - l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1 + 1 = \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por otro lado, sabemos que $v_l \notin N^c(v_l)$, pero $v_l \in \{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\}$, entonces $|N^c(v_l) \cap \{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1$.

Prueba 2. Afirmamos que $\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_l) = \{v_t\}$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice v_r , tal que $v_r \in N^c(v_l) \cap \{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\}$ y $r \neq t$. Como $v_r \in \{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\}$, entonces $t \leq r \leq l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, pero debido a que $r \neq t$, tenemos que $t < r \leq l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, lo que implica que el entero r contradice la elección del entero t . Por lo tanto, $\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_l) = \{v_t\}$. Así, $|\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_l)| = 1$. Por otro lado, veamos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} |N^c(v_l) \cap \{v_t, \dots, v_l\}| &= |(\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cup \{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\}) \cap N^c(v_l)| \\ &= |(\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_l)) \cup (\{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l))| \\ &= |\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_l)| + |\{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \end{aligned}$$

Por el punto (1) sabemos que $|\{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1$ y por lo expuesto al inicio de la prueba tenemos que $|\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_l)| = 1$, sumando las cardinalidades obtenemos

$$|\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_l)| + |\{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil - 1 + 1 = \lceil \frac{2d}{3} \rceil$$

.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |N^c(v_l) \cap \{v_t, \dots, v_l\}| &= |\{v_t, \dots, v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil}\} \cap N^c(v_l)| + |\{v_{l-\lceil \frac{2d}{3} \rceil+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \\ &\leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil \end{aligned}$$

es decir, $|N^c(v_l) \cap \{v_t, \dots, v_l\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

Para concluir con la prueba primero recordemos que $1 \leq t$, ya que $v_t \in V(W_l)$. Supongamos que $t = 1$, lo que implica que $|N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_l\}| = |N^c(v_l) \cap \{v_t, \dots, v_l\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por otro lado, sabemos que, $d \leq |N^c(v_l)| = |N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_l\}|$ (ya que $N^c(v_l) \subseteq \{v_1, \dots, v_l\}$) y por (d) se cumple que $\lceil \frac{2d}{3} \rceil < d$. En resumen tenemos que:

$d \leq |N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_l\}| = |N^c(v_l) \cap \{v_t, \dots, v_l\}| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil < d$; es decir, $d < d$, lo que implica una contradicción. Por lo tanto, $t \neq 1$. Así, $1 < t$.

Afirmación 6. Si $v_i \in N^c(v_l)$ y $2 \leq i \leq t$, entonces $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_i v_l)$ (véase figura 2.19).

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe v_i en $N^c(v_l)$ con $2 \leq i \leq t$ y $c(v_{i-1}v_i) = c(v_i v_l)$. Probaremos que $C = (v_i, \dots, v_l, v_i)$ (véase figura 2.20) es un

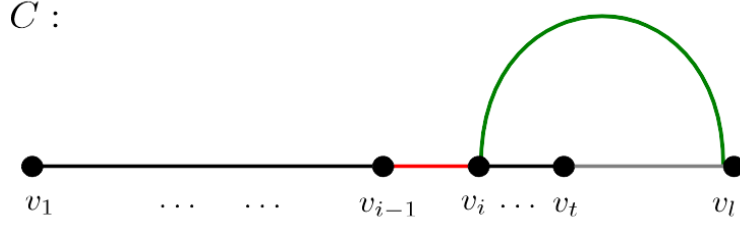


Figura 2.19: Afirmación 6

ciclo propiamente coloreado. Recordemos que (v_i, W_l, v_l) es una trayectoria propiamente coloreada, ya que es una subtrayectoria de W_l . Por otro lado, como $\{v_{i-1}, v_i\} \subseteq V(W_l)$, entonces $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iv_{i+1})$ y por la negación de la afirmación 6, sabemos que $c(v_{i-1}v_i) = c(v_iv_l)$, lo que implica que $c(v_iv_{i+1}) \neq c(v_iv_l)$. Por último $c(v_iv_l) \neq c(v_lv_{l-1})$ ya que $\{v_i, v_{l-1}\} \subseteq N^c(v_l)$. Por lo anterior tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - i + 1$. Dado que $-i \geq -t$ y $-t \geq -l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, por lo tanto, $l - i + 1 \geq l - l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Así, $l - i + 1 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$; es decir, la longitud de C es mayor o igual a $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, esto implica una contradicción ya que estamos suponiendo que G es una gráfica que no contiene ciclos propiamente coloreados de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Por lo tanto, la afirmación 6 es verdadera.

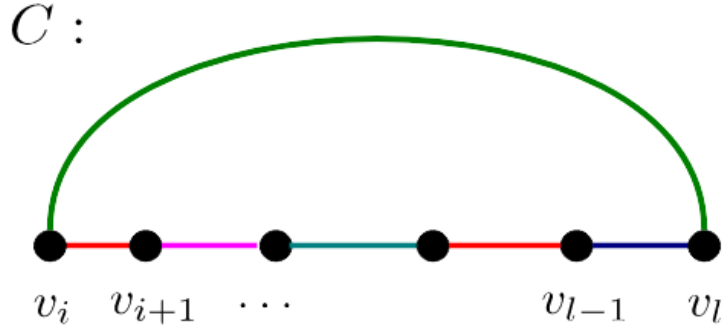


Figura 2.20: Ciclo C

Afirmación 7.1 $|\{v_s, \dots, v_l\}| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Primero probaremos que $|\{v_1, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Tenemos dos casos; a saber, $s = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ y $s > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Si $s = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, entonces $|\{v_1, \dots, v_s\}| = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ y debido a que $v_1 \notin N^c(v_1)$, tenemos que $|\{v_1, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. En caso de que $s > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, en el inciso (2) de la afirmación 2 se probó que $|\{v_1, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por lo tanto, $|\{v_1, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
|N^c(v_1)| &= |N^c(v_1) \cap \{v_1, \dots, v_l\}| \\
&= |N^c(v_1) \cap (\{v_1, \dots, v_s\} \cup \{v_{s+1}, \dots, v_l\})| \\
&= |(\{v_1, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)) \cup (\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1))| \\
&= |\{v_1, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)|
\end{aligned}$$

Por hipótesis sabemos que $d \leq |N^c(v_1)|$. En resumen tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
d &\leq |N^c(v_1)| \\
&= |\{v_1, \dots, v_s\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \\
&\leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + |\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)|
\end{aligned}$$

lo que implica que $|\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Para finalizar, veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| &= |(\{v_s\} \cup \{v_{s+1}, \dots, v_l\}) \cap N^c(v_1)| \\
&= |(\{v_s\} \cap N^c(v_1)) \cup (\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1))| \\
&= |\{v_s\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)|
\end{aligned}$$

Como $v_s \in N^c(v_1)$, entonces podemos deducir que $|\{v_s\} \cap N^c(v_1)| = 1$ y debido a que $\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1) \subseteq \{v_s, \dots, v_l\}$ tenemos que $|\{v_s, \dots, v_l\}| \geq |\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|\{v_s, \dots, v_l\}| &\geq |\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \\
&= |\{v_s\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \\
&\geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1
\end{aligned}$$

Así, $|\{v_s, \dots, v_l\}| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

También notemos que, $|\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ y como por (f) tenemos que $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$, entonces $|\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \geq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$. En la afirmación 11 usaremos este resultado.

Afirmación 7.2 $|\{v_1, \dots, v_t\}| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Veamos que $|\{v_t, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Tenemos dos casos; a saber, $t = l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$ y $t < l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Si $t = l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, entonces $|\{v_t, \dots, v_l\}| = l - (l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil) + 1 = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ y debido a que $v_l \notin N^c(v_l)$, tenemos que $|\{v_t, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. En caso de que $t < l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$,

en el inciso (2) de la afirmación 5 se probó que $|\{v_t, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por lo tanto, $|\{v_t, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} |N^c(v_l)| &= |N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_l\}| \\ &= |N^c(v_l) \cap (\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cup \{v_t, \dots, v_l\})| \\ &= |(\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)) \cup (\{v_t, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l))| \\ &= |\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)| + |\{v_t, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \end{aligned}$$

Por hipótesis sabemos que $d \leq |N^c(v_l)|$. En resumen tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} d &\leq |N^c(v_l)| \\ &= |\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)| + |\{v_t, \dots, v_l\} \cap N^c(v_l)| \\ &\leq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + |\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)| \end{aligned}$$

lo que implica que $|\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Para finalizar, veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| &= |(\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cup \{v_t\}) \cap N^c(v_l)| \\ &= |(\{v_t\} \cap N^c(v_l)) \cup (\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l))| \\ &= |\{v_t\} \cap N^c(v_l)| + |\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)| \end{aligned}$$

Como $v_t \in N^c(v_l)$, entonces podemos deducir que $|\{v_t\} \cap N^c(v_l)| = 1$ y debido a que $\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l) \subseteq \{v_1, \dots, v_t\}$, tenemos que $|\{v_1, \dots, v_t\}| \geq |\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\{v_1, \dots, v_t\}| &\geq |\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \\ &= |\{v_t\} \cap N^c(v_l)| + |\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)| \\ &\geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 \end{aligned}$$

Así, $|\{v_1, \dots, v_t\}| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

También notemos que $|\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ y por (f), tenemos que $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$, entonces $|\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \geq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$. Este resultado será necesario en la afirmación 11.

Afirmación 8. $s < t$.

Demostración. Procediendo por contradicción supongamos que $s \geq t$. Tenemos dos casos; a saber, $s = t$ y $s > t$.

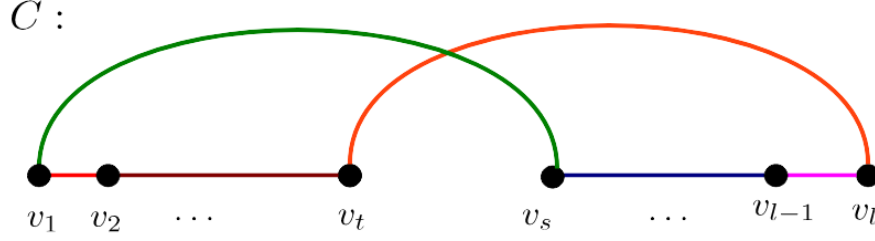


Figura 2.21: Ciclo C

Si $s > t$, entonces consideremos el ciclo $C = (v_1, v_s) \cup (v_s, W_l, v_l) \cup (v_l, v_t) \cup (v_t, W_l^{-1}, v_1)$ (véase figura 2.21).

Demostraremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Recordando que $v_s \in N^c(v_1)$ y como $s \leq l-1$, entonces por la afirmación 3, deducimos que $c(v_1 v_s) \neq c(v_s v_{s+1})$. Por otro lado, sabemos que (v_s, W_l, v_l) y (v_t, W_l^{-1}, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas, ya que son subtrayectorias de W_l . Debido a que $\{v_{l-1}, v_t\} \subseteq N^c(v_l)$, tenemos que $c(v_{l-1} v_l) \neq c(v_l v_t)$. Como $v_t \in N^c(v_l)$ y $2 \leq t$ (por afirmación 5), entonces por la afirmación 6, concluimos que $c(v_{t-1} v_t) \neq c(v_t v_l)$. Por último $c(v_2 v_1) \neq c(v_1 v_s)$, ya que $\{v_2, v_s\} \subseteq N^c(v_1)$. Por lo anterior tenemos que C es un ciclo propiamente coloroleado de longitud $1 + (l - s) + t$. Recordemos que $|\{v_1, \dots, v_t\}| = t$ y $|\{v_s, \dots, v_l\}| = l - s + 1$. Así, la longitud de C es $l - s + 1 + t = |\{v_1, \dots, v_t\}| + |\{v_s, \dots, v_l\}|$. Por otro lado, veamos que $|\{v_1, \dots, v_t\}| \geq 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$ o $|\{v_s, \dots, v_l\}| \geq 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por (j), sabemos que $v_1 \notin N^c(v_l)$ o $v_l \notin N^c(v_1)$.

En caso de que $v_1 \notin N^c(v_l)$, tenemos que $\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l) = \{v_2, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)$, lo que implica que $|\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| = |\{v_2, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)|$, por la prueba de la afirmación 7.2, sabemos que $|\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Por otro lado, tenemos que $|\{v_1, \dots, v_t\}| = |\{v_1\}| + |\{v_2, \dots, v_t\}|$ y $|\{v_2, \dots, v_t\}| \geq |\{v_2, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)|$. En resumen tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
 |\{v_1, \dots, v_t\}| &= |\{v_1\}| + |\{v_2, \dots, v_t\}| \geq |\{v_1\}| + |\{v_2, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \\
 &= |\{v_1\}| + |\{v_1, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \geq 1 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 \\
 &= 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil
 \end{aligned}$$

En caso de que $v_l \notin N^c(v_1)$, entonces $\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1) = \{v_s, \dots, v_{l-1}\} \cap N^c(v_1)$. Por lo tanto, $|\{v_s, \dots, v_{l-1}\} \cap N^c(v_1)| = |\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)|$, por la prueba de la afirmación 7.1, sabemos que $|\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Por otro lado, tenemos que $|\{v_s, \dots, v_l\}| = |\{v_s, \dots, v_{l-1}\}| + |\{v_l\}|$ y $|\{v_s, \dots, v_l\}| \geq |\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)|$. Por lo anterior, se cumple que:

$$\begin{aligned}
|\{v_s, \dots, v_l\}| &= |\{v_l\}| + |\{v_s, \dots, v_{l-1}\}| \geq |\{v_l\}| + |\{v_s, \dots, v_{l-1}\} \cap N^c(v_1)| \\
&= |\{v_l\}| + |\{v_s, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \\
&\geq 1 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 \\
&= 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil
\end{aligned}$$

Así, $|\{v_s, \dots, v_l\}| \geq 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

Por lo tanto, $|\{v_1, \dots, v_t\}| \geq 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$ o $|\{v_s, \dots, v_l\}| \geq 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

Para finalizar la prueba del caso $s > t$, supongamos sin pérdida de generalidad que sucede lo siguiente $|\{v_1, \dots, v_t\}| \geq 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$.

Por la afirmación 7.1, sabemos que $|\{v_s, \dots, v_l\}| \geq 1 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, entonces

$$\begin{aligned}
t + l - s + 1 &= |\{v_1, \dots, v_t\}| + |\{v_s, \dots, v_l\}| \\
&\geq 1 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 2 + d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \\
&= 3 + 2(d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil).
\end{aligned}$$

Por (f), sabemos que $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$ y por (k), tenemos que $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 3 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Así, lo longitud de C es: $t + l - s + 1 = 3 + 2(d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil) = 3 + 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, lo que implica una contradicción, ya que G no contiene ciclos propiamente coloreados de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Por lo tanto, $s \not> t$.

Ahora revisemos el caso $s = t$.

Observemos que $\{v_{s+1}, \dots, v_{l-1}\}$ es distinto del vacío, ya que por (e), sabemos que $l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \leq l - 2$ y por elección de t , también sabemos que $t \leq l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Por lo tanto, como $s = t$, entonces $s \leq l - 2$. Así, $s + 1 \leq l - 1$, por lo que $|\{v_{s+1}, \dots, v_{l-1}\}| \geq 1$.

Para mostrar que esta suposición nos conduce a una contradicción vamos a mostrar los siguientes hechos:

1. $v_l \in N^c(v_1)$.
2. $v_1 \in N^c(v_l)$.

Primero demostraremos que $v_l \in N^c(v_1)$. Afirmamos que $\{v_{s+1}, \dots, v_{l-1}\} \cap N^c(v_1) = \emptyset$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice v_j en $N^c(v_1) \cap \{v_{s+1}, \dots, v_{l-1}\}$. Consideremos el ciclo $C = (v_1, v_j) \cup (v_j, W_l, v_l) \cup (v_l, v_s) \cup (v_s, W_l^{-1}, v_1)$ (véase figura 2.22).

Como $v_j \in N^c(v_1)$ y $s + 1 \leq j \leq l - 1$, entonces, por la afirmación 3, sucede lo siguiente $c(v_j v_{j+1}) \neq c(v_1 v_j)$. Recordemos que (v_j, W_l, v_l) y (v_s, W_l^{-1}, v_1) son trayectorias propiamente

$C :$

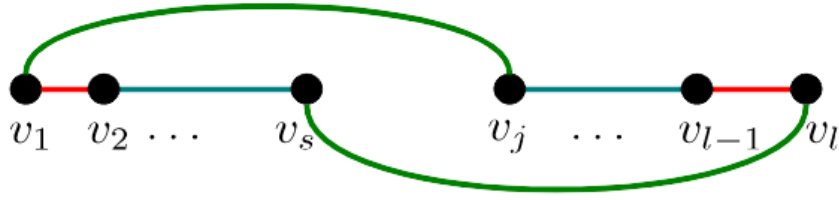


Figura 2.22: Ciclo C .

coloreadas. Por otro lado, debido a que $s = t$, tenemos que $v_t = v_s$, lo que implica por la elección de v_t que $v_s \in N^c(v_l)$. Dado que $2 \leq s = t$, entonces por la afirmación 6 deducimos que $c(v_{s-1}v_s) \neq c(v_s v_l)$. Luego, tenemos que $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_l v_s)$, ya que $\{v_s, v_{l-1}\} \subseteq N^c(v_l)$. Por último $c(v_1 v_2) \neq c(v_1 v_j)$ ya que $\{v_2, v_j\} \subseteq N^c(v_1)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud $1 + (l - j) + 1 + (s - 1) = 1 + l - j + s$. Dado que $s + 1 \leq j \leq l - 1$, entonces $-j \geq -l + 1$, sumando $1 + l + s$ tenemos que $l + 1 + s - j \geq -l + 1 + 1 + l + s$; es decir, $l + 1 + s - j \geq s + 2$, pero sabemos que $s \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, concluyendo que la longitud de C es $1 + l + s - j \geq s + 2 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 3$, esto implica una contradicción, ya que en G no existen ciclos propiamente coloreados de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Por lo tanto, $N^c(v_1) \cap \{v_{s+1}, \dots, v_{l-1}\} = \emptyset$.

En la prueba de la afirmación 7.1, mostramos que $|\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, y por (g), tenemos que $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \geq 1$. Por lo tanto, como $N^c(v_1) \cap \{v_{s+1}, \dots, v_{l-1}\} = \emptyset$ y $|\{v_{s+1}, \dots, v_l\} \cap N^c(v_1)| \geq 1$, concluimos que $v_l \in N^c(v_1)$.

Ahora veamos que $v_1 \in N^c(v_l)$. Afirmamos que $\{v_2, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l) = \emptyset$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice v_j en $N^c(v_l) \cap \{v_2, \dots, v_{t-1}\}$. Consideremos el ciclo $C = (v_1, v_s) \cup (v_s, W_l, v_l) \cup (v_l, v_j) \cup (v_j, W_l^{-1}, v_1)$ (véase figura 2.23).

$C :$

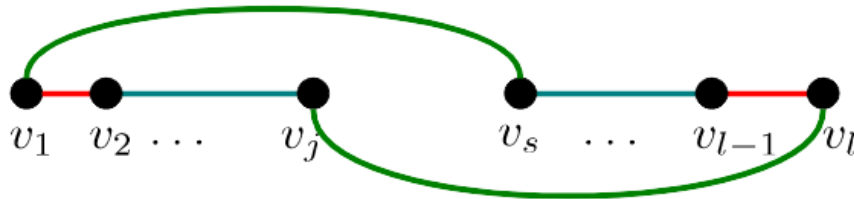


Figura 2.23: Ciclo C .

Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Como $v_s \in N^c(v_1)$ y $s \leq l - 1$, entonces, por la afirmación 3, tenemos que $c(v_1 v_s) \neq c(v_s v_{s+1})$. Recordemos que (v_s, W_l, v_l) y (v_j, W_l^{-1}, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas. Dado que $\{v_{l-1}, v_j\} \subseteq N^c(v_l)$, entonces

$c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv_j)$. Por otro lado, debido a que $v_j \in N^c(v_l)$ y $2 \leq j \leq t-1$, por la afirmación 6, tenemos que $c(v_lv_j) \neq c(v_jv_{j-1})$. Por último $c(v_1v_2) \neq c(v_1v_s)$ ya que $\{v_2, v_s\} \subseteq N^c(v_1)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud $1 + (l-s) + (j)$. Recordemos que $2 \leq j$, sumando $1+l-s$ tenemos que $1+l-s+2 \leq l+1-s+j$; es decir, $l+1-s+j \geq 1+l-s+2$, pero sabemos que $-s = -t$ y $-t \geq -l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$. Así,

$$1 + l - s + j \geq 1 + l - s + 2 = 1 + l - t + 2 > 1 + l - l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 2$$

es decir, $1+l-s+j > 3 + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, una contradicción, ya que en G no existen ciclos propiamente coloreados de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Por lo tanto, $N^c(v_l) \cap \{v_2, \dots, v_{t-1}\} = \emptyset$.

En la prueba de la afirmación 7.2, mostramos que $|\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, y por (g), tenemos que $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \geq 1$. Por lo tanto, como $N^c(v_l) \cap \{v_2, \dots, v_{t-1}\} = \emptyset$ y $|\{v_1, \dots, v_{t-1}\} \cap N^c(v_l)| \geq 1$. Concluimos que $v_1 \in N^c(v_l)$.

Notemos que los incisos (1) y (2), implican una contradicción respecto al inciso (j), entonces $s \neq t$. Por lo tanto, $s < t$.

Afirmación 9. Si $2 \leq j \leq s-1$, entonces $v_j \notin N^c(v_l)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $v_j \in N^c(v_l)$ con $2 \leq j \leq s-1$. Consideremos el ciclo $C = (v_1, v_s) \cup (v_s, W_l, v_l) \cup (v_l, v_j) \cup (v_j, W_l^{-1}, v_1)$ (véase figura 2.24).

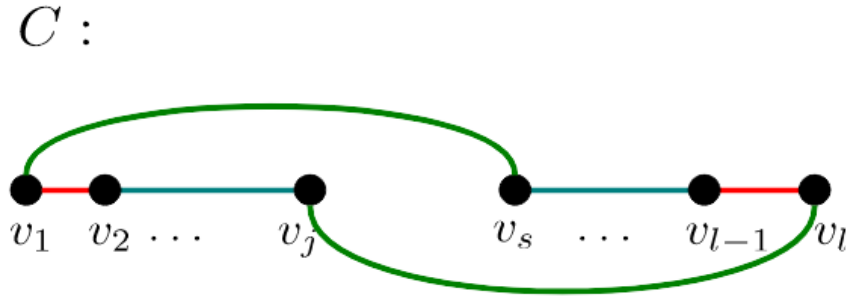


Figura 2.24: Ciclo C

Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Debido a que $s \leq l-1$, por la afirmación 3, tenemos que $c(v_s v_{s+1}) \neq c(v_1 v_s)$. Recordemos que (v_s, W_l, v_l) y (v_j, W_l^{-1}, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas. Como $\{v_j, v_{l-1}\} \subseteq N^c(v_l)$, entonces obtenemos $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv_j)$. Sabemos que $2 \leq j \leq s-1 < s < t$; es decir, $2 \leq j < t$ y como $v_j \in N^c(v_l)$, entonces, por la afirmación 6, tenemos que $c(v_{j-1}v_j) \neq c(v_jv_l)$. Finalmente $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_s)$ ya que $\{v_s, v_2\} \subseteq N^c(v_1)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud $1 + (l-s) + j$. Dado que $2 \leq j$, sumando $1+l-s$, obtenemos $1 + (l-s) + j \geq 1 + l - s + 2$. Por otro lado, por la afirmación 8, sabemos que $-s > -t$ y debido a que $-t \geq -l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, deducimos que $1 + l - s + j \geq 2 + 1 + l - s > 3 + l - t \geq 3 + l - l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil = 3 + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$; es decir, $1 + l - s + j > 3 + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, lo que implica una contradicción, ya que en G no existen

ciclos propiamente coloreados de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Concluyendo que $v_j \notin N^c(v_l)$ con $2 \leq j \leq s-1$.

Afirmación 10. Si $t+1 \leq j \leq l-1$, entonces $v_j \notin N^c(v_1)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $v_j \in N^c(v_1)$ con $t+1 \leq j \leq l-1$. Consideremos el ciclo $C = (v_1, v_j) \cup (v_j, W_l, v_l) \cup (v_l, v_t) \cup (v_t, W_l^{-1}, v_1)$ (véase figura 2.25).

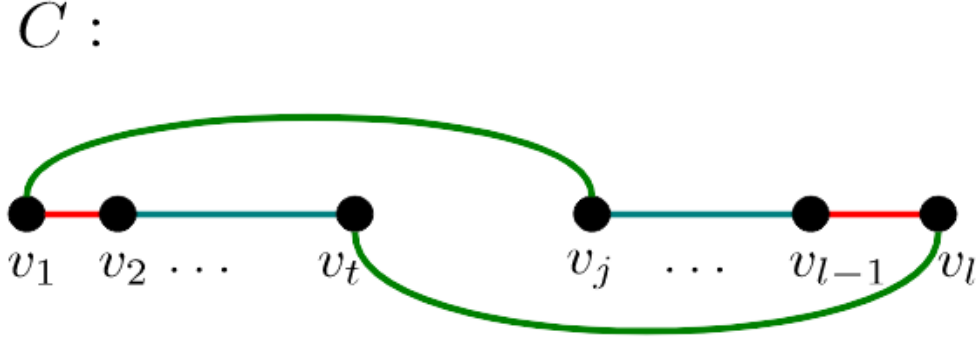


Figura 2.25: Ciclo C .

Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Debido a que $s < t < t+1 \leq j \leq l-1$ y $v_j \in N^c(v_1)$, por la afirmación 3, tenemos que $c(v_1 v_j) \neq c(v_j v_{j+1})$. Recordemos que (v_j, W_l, v_l) y (v_t, W_l^{-1}, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas. Como $\{v_t, v_{l-1}\} \subseteq N^c(v_l)$, entonces $c(v_{l-1} v_l) \neq c(v_l v_t)$. Sabemos que $2 \leq t$ y $v_t \in N^c(v_l)$, por lo tanto, por la afirmación 6, tenemos que $c(v_{t-1} v_t) \neq c(v_t v_l)$. Finalmente $c(v_2 v_1) \neq c(v_1 v_j)$ ya que $\{v_j, v_2\} \subseteq N^c(v_1)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud $1 + (l-j) + t$. Dado que $j \leq l-1$, entonces $-j \geq -l+1$, sumando $1+l+t$, tenemos que $1 + (l-j) + t \geq -l+1 + 1 + l + t = t+2$ y debido a que $t+2 > s+2 \geq 3 + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, concluimos que $l+1+t-j > 3 + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, lo que implica una contradicción, ya que en G no existen ciclos propiamente coloreados de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$. Por lo tanto, $v_j \notin N^c(v_1)$ con $t+1 \leq j \leq l-1$.

Sean $M = N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_t\}$ y $Z = N^c(v_l) \cap \{v_s, \dots, v_t\}$.

Afirmación 11. $|M| + |Z| \geq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2$.

Demostración. Por la afirmación 10, sabemos que $\{v_{t+1}, \dots, v_{l-1}\} \cap N^c(v_1) = \emptyset$. Por otro lado como

$$\begin{aligned}
 N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_l\} &= N^c(v_1) \cap (\{v_s, \dots, v_t\} \cup \{v_{t+1}, \dots, v_{l-1}\} \cup \{v_l\}) \\
 &= (N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_t\}) \cup (N^c(v_1) \cap \{v_{t+1}, \dots, v_{l-1}\}) \cup (N^c(v_1) \cap \{v_l\}) \\
 &= (N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_t\}) \cup \emptyset \cup (N^c(v_1) \cap \{v_l\}) \\
 &= M \cup (N^c(v_1) \cap \{v_l\})
 \end{aligned}$$

Lo que implica que $|M| + |(N^c(v_1) \cap \{v_l\})| = |N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_l\}|$, por lo tanto, $|M| = |N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_l\}| - |(N^c(v_1) \cap \{v_l\})|$. Por otro lado, en la afirmación 7.1 probamos que $|N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_l\}| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$, en resumen tenemos que:

$$\begin{aligned} |M| &= |N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_l\}| - |(N^c(v_1) \cap \{v_l\})| \\ &\geq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1 - |(N^c(v_1) \cap \{v_l\})| \end{aligned}$$

Analogamente por la afirmación 9, sabemos que $\{v_2, \dots, v_{s-1}\} \cap N^c(v_l) = \emptyset$. Por otro lado como

$$\begin{aligned} N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_t\} &= N^c(v_l) \cap (\{v_1\} \cup \{v_2, \dots, v_{s-1}\} \cup \{v_s, \dots, v_t\}) \\ &= (N^c(v_l) \cap \{v_s, \dots, v_t\}) \cup (N^c(v_l) \cap \{v_2, \dots, v_{s-1}\}) \cup (N^c(v_l) \cap \{v_1\}) \\ &= (N^c(v_l) \cap \{v_s, \dots, v_t\}) \cup \emptyset \cup (N^c(v_l) \cap \{v_1\}) \\ &= Z \cup (N^c(v_l) \cap \{v_1\}) \end{aligned}$$

lo que implica que $N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_t\} = Z \cup (N^c(v_l) \cap \{v_1\})$. Por lo que se deduce lo siguiente $|Z| + |(N^c(v_l) \cap \{v_1\})| = |N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_t\}|$, obteniendo la siguiente igualdad $|Z| = |N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_t\}| - |(N^c(v_l) \cap \{v_1\})|$. En la afirmación 7.2 se probó que $|N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_t\}| \geq d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1$, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} |Z| &= |N^c(v_l) \cap \{v_1, \dots, v_t\}| - |(N^c(v_l) \cap \{v_1\})| \\ &\geq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1 - |(N^c(v_l) \cap \{v_1\})| \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |M| + |Z| &\geq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1 - |(N^c(v_1) \cap \{v_l\})| + \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1 - |(N^c(v_l) \cap \{v_1\})| \\ &= 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 - (|(N^c(v_1) \cap \{v_l\})| + |(N^c(v_l) \cap \{v_1\})|) \end{aligned}$$

Afirmamos que $|N^c(v_1) \cap \{v_l\}| + |N^c(v_l) \cap \{v_1\}| = 0$. Procediendo por contradicción, supongamos que $|N^c(v_1) \cap \{v_l\}| + |N^c(v_l) \cap \{v_1\}| \geq 1$. Tenemos dos casos; a saber, $|N^c(v_1) \cap \{v_l\}| = 1$ o $|N^c(v_l) \cap \{v_1\}| = 1$. Si $|N^c(v_1) \cap \{v_l\}| = 1$, entonces $v_l \in N^c(v_1)$. Recordemos que W_l es una trayectoria propiamente coloreada y como $\{v_2, v_l\} \subseteq N^c(v_1)$, entonces $c(v_l v_1) \neq c(v_1 v_2)$. Si suponemos que $c(v_{l-1} v_l) \neq c(v_l v_1)$, tendríamos que $C = (v_1, \dots, v_l, v_1)$ sería un ciclo propiamente coloreado de longitud l , con $l \geq d + 1 > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $c(v_{l-1} v_l) = c(v_l v_1)$. Sea $C = (v_1, v_l, v_l) \cup (v_l, W_l^{-1}, v_1)$ un ciclo (véase figura 2.26).

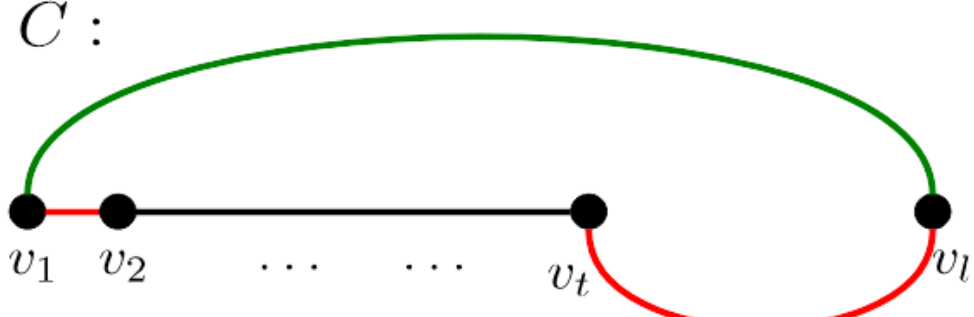


Figura 2.26: Ciclo C .

Mostraremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Como $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv_t)$ (pues $\{v_{l-1}, v_t\} \subseteq N^c(v_l)$) y $c(v_{l-1}v_l) = c(v_1v_l)$, entonces, $c(v_1v_l) \neq c(v_lv_t)$. Por la afirmación 6, sabemos que $c(v_lv_t) \neq c(v_tv_{t-1})$. Recordemos que (v_t, W_l^{-1}, v_1) es una trayectoria propiamente coloreada. Por último, $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_l)$ ya que $\{v_2, v_l\} \subseteq N^c(v_1)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud $t + 1$. Dado que $t + 1 > s + 1 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 2$, tenemos una contradicción. Por lo tanto, el caso $|N^c(v_1) \cap \{v_l\}| = 1$ no es posible.

Ahora supongamos que $|N^c(v_l) \cap \{v_1\}| = 1$; es decir $v_1 \in N^c(v_l)$. Sabemos que W_l es una trayectoria propiamente coloreada y $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv_1)$ ya que $\{v_1, v_{l-1}\} \subseteq N^c(v_l)$. Si suponemos que $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_l)$, entonces $C = (v_1, \dots, v_l, v_1)$ es un ciclo propiamente coloreado de longitud l , y sabemos que $l \geq d + 1 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, por lo que tendríamos una contradicción; por lo tanto $c(v_1v_2) = c(v_1v_l)$. Sea $C = (v_l, v_1, v_s) \cup (v_s, W_l, v_l)$ un ciclo (véase figura 2.27).

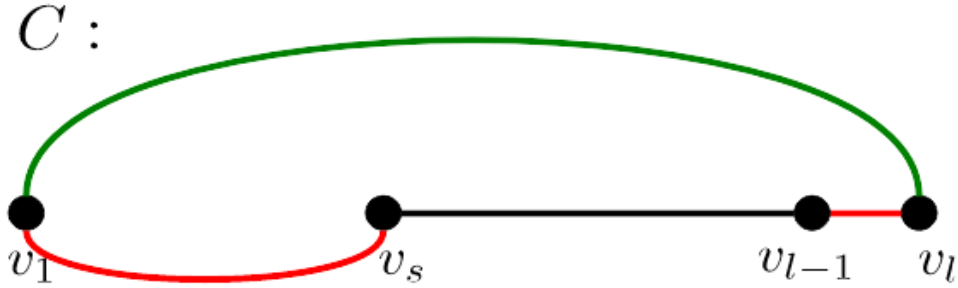


Figura 2.27: Ciclo C .

Mostraremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Por la afirmación 3, sabemos que $c(v_1v_s) \neq c(v_sv_{s+1})$. Recordemos que (v_s, W_l, v_l) es una trayectoria propiamente coloreada. Debido a que $\{v_1, v_{l-1}\} \subseteq N^c(v_l)$, tenemos que $c(v_1v_l) \neq c(v_lv_{l-1})$. Por último, como $c(v_2v_1) = c(v_lv_1)$ y $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_s)$ (pues $\{v_2, v_s\} \subseteq N^c(v_1)$), entonces $c(v_lv_1) \neq c(v_1v_s)$. Por lo anterior tenemos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - s + 2$. Dado que $-s > -t \geq -l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, entonces $l - s + 2 > l - t + 2 \geq l - l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 2 = \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 2$; es decir,

$l - s + 2 > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 2$, lo que implica una contradicción. Por lo tanto, el caso $|N^c(v_l) \cap \{v_1\}| = 1$ no es posible.

Concluimos que $|N^c(v_l) \cap \{v_1\}| + |N^c(v_1) \cap \{v_l\}| = 0$, lo que implica que

$$|M| + |Z| \geq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 - (|(N^c(v_1) \cap \{v_l\})| + |(N^c(v_l) \cap \{v_1\})|) = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 + 0; \text{ es decir,}$$

$$|M| + |Z| \geq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2.$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} |\{v_1, \dots, v_l\}| &= |\{v_1, \dots, v_{s-1}\} \cup \{v_s, \dots, v_t\} \cup \{v_{t+1}, \dots, v_l\}| \\ &= |\{v_1, \dots, v_{s-1}\}| + |\{v_s, \dots, v_t\}| + |\{v_{t+1}, \dots, v_l\}| \end{aligned}$$

por lo que deducimos que

$$|\{v_s, \dots, v_t\}| = |\{v_1, \dots, v_l\}| - |\{v_1, \dots, v_{s-1}\}| - |\{v_{t+1}, \dots, v_l\}|$$

Como pasa que $|\{v_1, \dots, v_{s-1}\}| = s - 1 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil$ y también sabemos que la cardinalidad de $|\{v_{t+1}, \dots, v_l\}| = l - t \geq l - l + \lceil \frac{2d}{3} \rceil = \lceil \frac{2d}{3} \rceil$ y $l \leq 2d$, entonces

$$\begin{aligned} |\{v_s, \dots, v_t\}| &= |\{v_1, \dots, v_l\}| - |\{v_1, \dots, v_{s-1}\}| - |\{v_{t+1}, \dots, v_l\}| \\ &\leq 2d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil - \lceil \frac{2d}{3} \rceil \\ &= 2(\lfloor \frac{d}{3} \rfloor) \end{aligned}$$

es decir, $|\{v_s, \dots, v_t\}| \leq 2(\lfloor \frac{d}{3} \rfloor)$.

Afirmación 12. Existen v_j en $N^c(v_1)$ y v_i en $N^c(v_l)$ tales que $s \leq i < j \leq t$.

Demostración. Por la afirmación 11, sabemos que $|M| + |Z| \geq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2$ y como $\lfloor \frac{d}{3} \rfloor \geq 1$, entonces $|M| + |Z| \geq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 \geq 4$; es decir, en $\{v_s, \dots, v_t\}$ existen al menos cuatro elementos de $N^c(v_1) \cup N^c(v_l)$. Recordemos que $v_s \in N^c(v_1)$ y que $v_t \in N^c(v_l)$. Procediendo por contradicción, supongamos que para todo v_i y v_j en $\{v_s, \dots, v_t\}$ tales que $v_j \in N^c(v_1)$ y $v_i \in N^c(v_l)$, se tiene que $s \leq j \leq i \leq t$. Sea $x = \max\{i \in \{s, \dots, t\} : v_i \in N^c(v_1)\}$, entonces $(N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_t\}) = (N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_x\})$; por lo tanto, $|(N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_t\})| = |(N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_x\})|$.

De forma análoga, sea $y = \min\{i \in \{s, \dots, t\} : v_i \in N^c(v_l)\}$, lo que implica lo siguiente $(N^c(v_l) \cap \{v_s, \dots, v_t\}) = (N^c(v_l) \cap \{v_y, \dots, v_t\})$, así tenemos la siguiente igualdad de cardinalidades $|(N^c(v_l) \cap \{v_s, \dots, v_t\})| = |(N^c(v_l) \cap \{v_y, \dots, v_t\})|$. Por otro lado, recordemos que $|\{v_s, \dots, v_x\}| \geq |(N^c(v_1) \cap \{v_s, \dots, v_x\})|$ y $|\{v_y, \dots, v_t\}| \geq |(N^c(v_l) \cap \{v_y, \dots, v_t\})|$. En resumen tenemos que

$$|\{v_s, \dots, v_t\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_s, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| = |\{v_s, \dots, v_x\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_y, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \\ \leq |\{v_s, \dots, v_x\}| + |\{v_y, \dots, v_t\}|$$

Por la afirmación 11, sabemos que $|\{v_s, \dots, v_t\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_s, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \geq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2$, lo que implica que $|\{v_s, \dots, v_x\}| + |\{v_y, \dots, v_t\}| \geq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2$.

Por otro lado, como $v_x \in N^c(v_1)$ y $v_y \in N^c(v_l)$, entonces $x \leq y$. Tenemos dos casos; a saber, $x = y$ y $x < y$.

Si $x = y$, entonces $|\{v_s, \dots, v_x\}| + |\{v_y, \dots, v_t\}| = |\{v_s, \dots, v_t\}| - |\{v_x\}| = |\{v_s, \dots, v_t\}| - 1$ y debido a que $|\{v_s, \dots, v_t\}| \leq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor$, deducimos que $|\{v_s, \dots, v_t\}| - 1 \leq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor - 1$.

Así, $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 \leq |\{v_s, \dots, v_x\}| + |\{v_y, \dots, v_t\}| \leq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor - 1$; es decir, $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 \leq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor - 1$, obteniendo $2 \leq -1$, lo que implica una contradicción.

Si $x < y$, entonces $\{v_s, \dots, v_x\} \cup \{v_y, \dots, v_t\} \subset \{v_s, \dots, v_t\}$, con lo cual tenemos la siguiente desigualdad $|\{v_s, \dots, v_x\}| + |\{v_y, \dots, v_t\}| < |\{v_s, \dots, v_t\}|$. Así,

$$2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 \leq |\{v_s, \dots, v_t\} \cap N^c(v_1)| + |\{v_s, \dots, v_t\} \cap N^c(v_l)| \\ \leq |\{v_s, \dots, v_x\}| + |\{v_y, \dots, v_t\}| \\ \leq |\{v_s, \dots, v_t\}| \\ \leq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor$$

es decir, $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 \leq 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor$, obteniendo $2 \leq 0$, lo que implica una contradicción. En cualquier caso obtenemos una contradicción.

Por lo tanto, existe $v_j \in N^c(v_1)$ y $v_i \in N^c(v_l)$ tal que $s \leq i < j \leq t$.

Sean v_i y v_j los vértices de la afirmación 12. Para terminar la prueba del teorema 1, consideremos el ciclo $C = (v_1, v_j) \cup (v_j, W_l, v_l) \cup (v_l, v_i) \cup (v_i, W_1^{-1}, v_1)$ (véase figura 2.28).

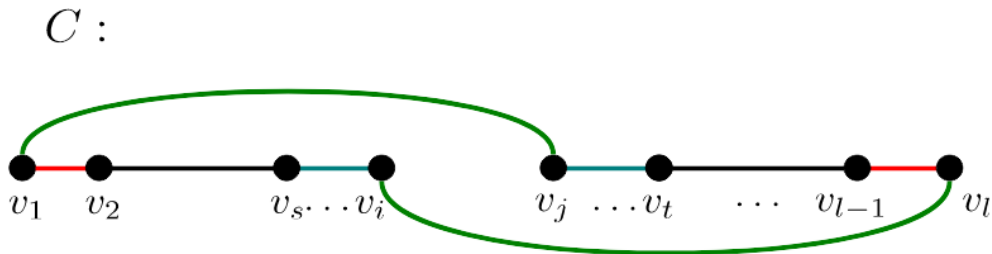


Figura 2.28: Ciclo C .

Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado.

Como $v_j \in N^c(v_1)$ y $s \leq j \leq l-1$, entonces, por la afirmación 3, tenemos lo siguiente $c(v_1v_j) \neq c(v_jv_{j+1})$. Recordemos que (v_j, W_l, v_l) y (v_i, W_l^{-1}, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas, ya que son subtrayectorias de W_l . Tenemos que $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv_i)$ ya que $\{v_i, v_{l-1}\} \subseteq N^c(v_l)$. Debido a que $v_i \in N^c(v_l)$ y $2 \leq i < t$, por la afirmación 6, tenemos que $c(v_lv_i) \neq c(v_iv_{i-1})$. Por último, $c(v_2v_1) \neq c(v_1v_j)$ ya que $\{v_2, v_j\} \subseteq N^c(v_1)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud $i + (l-j) + 1$. Dado que $j < l$, obtenemos que $l-j > 0$ y como $i \geq s$, entonces $i + (l-j) + 1 \geq s + 1 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 2$, lo cual es una contradicción ya que en G no existe ciclos de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Por lo tanto, concluimos que en G existe una trayectoria propiamente coloreada de longitud al menos $2d$ o un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ ■.

En [2, pag. 4353] para la prueba de la afirmación 3 ($s < t$), el autor escribe lo siguiente “ $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ ”, pero si $d = 5$, tenemos que $2\lfloor \frac{5}{3} \rfloor + 2 = 2(1) + 2 = 4$ y $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1 = \lceil \frac{2(5)}{3} \rceil + 1 = \lceil \frac{10}{3} \rceil + 1 = 4 + 1 = 5$, donde $2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 < \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$.

Como vimos, la afirmación del autor no es necesariamente cierta. Sin embargo en su demostración, el autor concluye la prueba de la afirmación 3 con base en la desigualdad anterior. Por lo anterior la prueba de $s < t$ no es concluida satisfactoriamente.

Lo que hicimos para dar una demostración alternativa de la afirmación 3 (afirmación 8 en la prueba que aquí presentamos), es probar que $v_1 \notin N^c(v_l)$ o $v_l \notin N^c(v_1)$ (inciso (j)).

2.3. Longitud mínima de un ciclo propiamente coloreado

Corolario 2.3.1 *Sea G una gráfica coloreada por aristas de orden n , para $n \geq 4$. Si $\delta^c(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces G contiene un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$.*

Demostración. Como $\delta^c(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces para cada vértice v_i en G tenemos que $d^c(v_i) \geq \frac{n}{2}$. Por el teorema 2.2.1, sabemos que existe una trayectoria propiamente coloreada de longitud al menos $2(\frac{n}{2}) = n$ o existe un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos $\lceil \frac{2\frac{n}{2}}{3} \rceil + 1 = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. Debido a que el orden de G es n , entonces en G existen trayectorias de longitud a lo más $n - 1$; es decir, en G no existen trayectorias de longitud n . Por lo tanto, debe existir un ciclo de longitud al menos $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$.

Capítulo 3

Ciclos propiamente coloreados de longitud 3 y 4

En el presente capítulo, deseamos acotar nuestro problema para encontrar gráficas que siempre tengan ciclos propiamente coloreados, debido a la complejidad del problema nos centraremos en las gráficas completas. Comenzamos definiendo la propiedad de la dependencia para un conjunto de vértices, respecto a un vértice dado. Con esta definición vamos a exhibir un resultado que nos ayudará a probar que todo vértice de K_n está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 3, respectivamente longitud 4 y en un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5. Explícitamente, vamos a trabajar con gráficas completas y probaremos que si $\delta^c(K_n) \geq \frac{n}{2}$, entonces todo vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 3 (para $n \geq 3$) y longitud 4 respectivamente (para $n \geq 4$).

3.1. Resultados previos

Definición 3.1.1 Sean G una coloración de K_n , A un subconjunto de $V(G)$ y v un vértice que no pertenece a A . Decimos que A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v , denotada como DP_v , si $c(aa') \in \{c(av), c(a'v)\}$ para todo $\{a, a'\} \subseteq A$.

En la figura 3.1 tenemos una subgráfica A de una gráfica K_n . Donde $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, con v en K_n pero v no pertenece a A . Observemos que $c(a_1a_2) = c(a_1v)$, $c(a_2a_3) = c(a_2v)$ y $c(a_1a_3) = c(a_3v)$; es decir, A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

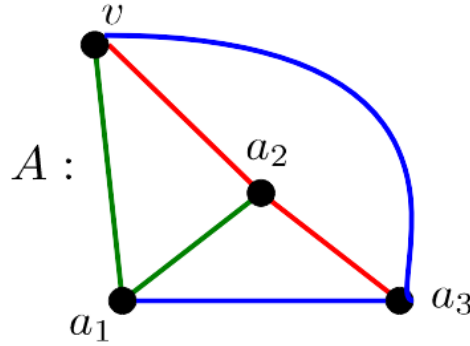


Figura 3.1: Propiedad de la dependencia

Proposición 3.1.1 Sean G una gráfica completa, $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una coloración de las aristas de G , A un subconjunto de $V(G)$ y v en $V(G \setminus A)$. Si A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v , entonces existe un vértice a en A , tal que:

1. $d_{\langle A \rangle}^c(a) \leq \frac{|A|+1}{2}$.
2. Si $|A| \geq 2$, entonces existe un vértice w en A , tal que $c(wa) = c(va)$.

Demostración 1. Para el punto 1 supongamos que $|A| = s$ y orientamos las aristas en $\langle A \rangle$ en función de sus colores, para todo x y para todo y en A si el $c(xy) = c(xv)$, orientamos la arista de x hacia y y si $c(xv) = c(yv)$, entonces orientamos arbitrariamente la arista xy , dicha orientación esta bien definida pues A tiene la propiedad de dependencia respecto a v . Así, todas las aristas de $\langle A \rangle$ están orientadas; supongamos que la digráfica que se obtiene es T . Como A es un subconjunto de una gráfica completa, entonces T es un torneo. Luego, por la proposición 1.3.2, sabemos que existe un vértice u en $V(t)$, tal que $d_T^+(u) \geq \frac{s-1}{2}$.

Veamos que $c(ua) = c(uv)$ para todo a en $N_T^+(u)$.

Tenemos dos casos; a saber, la arista ua fue orientada arbitrariamente o la arista ua no fue orientada arbitrariamente. En caso de que la arista ua no haya sido orientada arbitrariamente, por la definición de la orientación tenemos que $c(ua) = c(uv)$. En caso de que la arista ua haya sido orientada arbitrariamente, entonces $c(uv) = c(av)$ y por la propiedad de la dependencia tenemos que $c(ua) = c(uv)$.

Por la afirmación anterior tenemos que u tiene al menos $\frac{s-1}{2}$ aristas con el color $c(uv)$. Por lo tanto, u tiene como máximo $(s-1) - (\frac{s-1}{2}) + 1 = \frac{2s-s+1}{2} + 1 - 1 = \frac{s+1}{2}$ colores diferentes en sus aristas en A . Esto implica que $d_{\langle A \rangle}^c(u) \leq \frac{|A|+1}{2}$.

Demostración 2. Recordemos el enunciado: Si A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v y $|A| \geq 2$, entonces existen vértices w y a' en A , tales que $c(wa') = c(va')$ y $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$.

Procedemos por inducción matemática sobre la cardinalidad de A .

Base de inducción. Si $|A| = 2$, entonces existen dos vértices z y y en A , tales que $c(zy) = c(vz)$ o $c(zy) = c(vy)$ (debido a que A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v). En caso de que $c(zy) = c(vz)$, hagamos $y = w$ y $z = a'$, ya que $d_{\langle A \rangle}^c(z) = 1 \leq \frac{|A|+1}{2} = \frac{3}{2}$. En caso de que $c(zy) = c(vy)$, hagamos $z = w$ y $y = a'$, ya que $d_{\langle A \rangle}^c(y) = 1 \leq \frac{|A|+1}{2}$. En cualquier caso existen los vértices w y a' con las propiedades requeridas.

Hipótesis de inducción. Supongamos que si A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v y $|A| = s-1$, entonces existen vértices w y a' en A tal que $c(wa') = c(a'v)$ y $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$.

Paso inductivo. Si $|A| = s$, entonces por el punto 1, sabemos que existe un vértice a con $d_{\langle A \rangle}^c(a) \leq \frac{s+1}{2}$. Procediendo por contradicción, supongamos que para todo vértice x en A , se cumple que $c(xa) \neq c(av)$. Consideremos el conjunto $A \setminus \{a\}$, por la hipótesis de inducción y dado que $A \setminus \{a\}$ tiene la propiedad de la dependencia respecto a v existen vértices w y a' en $A \setminus \{a\}$ tal que $c(wa') = c(va')$ y $d_{\langle A \setminus \{a\} \rangle}^c(a') \leq \frac{s-1+1}{2}$. Por otro lado, debido a la suposición de a , sabemos que $c(a'a) \neq c(av)$, lo que implica que $c(a'a) = c(a'v)$ (ya que A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v).

Observemos que en A el vértice a' solo obtiene una arista más; a saber, $a'a$, pero como $c(a'a) = c(va') = c(wa')$, entonces $c(a'a)$ ya era utilizado en $\langle A \setminus \{a\} \rangle$; es decir, el grado de color de a' no aumenta en $\langle A \rangle$, lo que implica que $d_{\langle A \rangle}^c(a') = d_{\langle A \setminus \{a\} \rangle}^c(a')$ obteniendo que $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{s}{2}$. Como $\frac{s}{2} \leq \frac{s+1}{2}$, entonces $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{s+1}{2}$. Por lo tanto, existen vértices w y a' en A tal que $c(wa') = c(a'v)$ y $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$.

Por el principio de inducción matemática, si A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v y $|A| = s$, entonces existen vértices w y a' en A tal que $c(wa') = c(a'v)$ y $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$, para todo $s \geq 2$. ■

En la demostración del punto 1, el autor de [1] afirma que “en todo torneo existe un vértice v tal que $d^+(v) \geq \frac{n+1}{2}$ ”, donde n es el orden del torneo.

Veamos un contraejemplo.

Sea T un torneo, con $V(T) = \{u, v, w\}$ y $F(T) = \{(u, v), (v, w), (w, u)\}$.

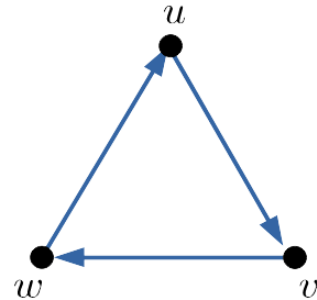


Figura 3.2: Torneo de orden 3.

En el torneo anterior vemos que $d^+(v) = 1$, $d^+(w) = 1$ y $d^+(u) = 1$, lo que implica que $d^+(v) < 2 = \frac{n+1}{2}$, $d^+(w) < 2 = \frac{n+1}{2}$ y $d^+(u) < 2 = \frac{n+1}{2}$.

Por lo tanto, la afirmación del autor es falsa.

Probamos que en todo torneo T de orden $n \geq 2$, existe un vértice v tal que $d^+(v) \geq \frac{n-1}{2}$, con la cual pudimos concluir la demostración del punto 1.

3.2. Ciclos propiamente coloreados de longitud 3

Teorema 3.2.1 Sean G una gráfica completa de orden n , para $n \geq 3$ y $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una coloración de las aristas de G . Si $\delta^c(G) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces todo vértice pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 3.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice u de G que no pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 3 y sea $t = d^c(u)$. Sea $A_i = \{v \in V(G) : c(vu) = c_i\}$, para todo i , con $1 \leq i \leq t$.

Afirmación 1. Para w en A_i y z en A_j se cumple que $c(wz) = c_j$ o $c(wz) = c_i$ para todo subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, \dots, t\}$, con $i \neq j$.

Procediendo por contradicción supongamos que $c(wz) = c_k$, tal que $c_k \neq c_j$ y $c_k \neq c_i$. Consideremos el ciclo $C = (u, w, z, u)$ (véase figura 3.3). Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3. Recordemos que $c(uz) = c_j$ y $c(uw) = c_i$. Por otro lado, como $w \in A_i$ y $z \in A_j$, entonces por la construcción de los conjuntos A_i sabemos que $c_i \neq c_j$, lo que implica que $c(uw) \neq c(uz)$. Por la suposición $c_k \neq c_j$, tenemos que $c(uz) \neq c(zw)$, del mismo modo debido a que $c_k \neq c_i$, entonces $c(uw) \neq c(wz)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 3 que contiene al vértice u , lo cual implica una contradicción respecto a la elección de u . Por lo tanto, $c(wz) = c_j$ o $c(wz) = c_i$.

Ahora sin pérdida de generalidad ordenemos los conjuntos de la siguiente manera, $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_r| = 1$ y $2 \leq |A_{r+1}| \leq \dots \leq |A_t|$.

Sea $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ y $H = A_{r+1} \cup \dots \cup A_t$.

Por la afirmación 1, tenemos que A tiene la propiedad de la dependencia respecto a u .

Afirmación 2. $|A| \geq 2$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $|A| \leq 1$, lo que implica que $|H| \leq n - 2$ (ya que $n - 1 = |H| + |A|$). Supongamos que $A = A_1 = \{x\}$. Recordemos que la cantidad de colores que están representados en las aristas que inciden en u son a lo más $n - 1$ colores distintos, si quitamos a $c(ux)$, entonces la cantidad de colores que están representados en las aristas que inciden en u son a lo más $n - 2$ colores distintos y por la definición de H , tenemos que H aporta a lo más $\frac{n-2}{2}$, colores distintos; es decir, $d_G^c(u) \leq \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$, una contradicción respecto a la hipótesis del teorema 3.2.1. Si suponemos que $A = \emptyset$, con un argumento similar al del inicio de la prueba tenemos que H aporta a lo más $\frac{n-1}{2}$ colores distintos, lo que implica que $d_G^c(u) \leq \frac{n-1}{2}$, lo cual es una contradicción, respecto a la hipótesis del teorema 3.2.1.

Por lo tanto, $|A| \geq 2$.

Por la proposición 3.1.1 y por la afirmación 2, tenemos que existen vértices a' y w en A tal que $d_{(A)}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$ y $c(a'w) = c(au)$. En otras palabras el color $c(au)$ ya es utilizado en A .

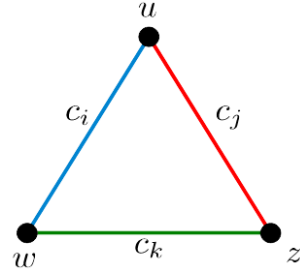


Figura 3.3: Ciclo C

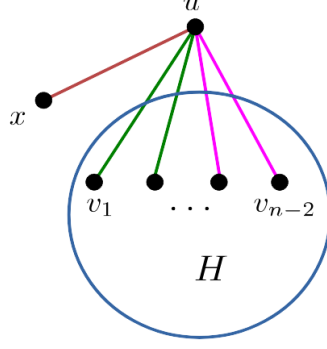


Figura 3.4: $|A| \leq 1$.

Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que a' pertenece a A_k para algún $k \in \{1, \dots, r\}$. Sea x en A_i con $i \in \{r+1, \dots, t\}$, por la afirmación 1, se tiene que $c(a'x) = c_k$ o $c(a'x) = c_i$. En caso de que $c(a'x) = c_k$, por la elección de a' , tenemos que el $c_k = c(a'w) = c(a'x)$, es decir el color c_k ya había sido utilizado en A , por lo cual el grado de color de a' no incrementa en $\langle A \cup A_i \rangle$. En caso de que $c(a'x) = c_i$, entonces el grado de color de a' , solo incrementa en 1, es decir $d_{\langle A \cup A_i \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2} + 1$. Observemos que esto pasa para todo x en A_i , por lo tanto por cada $i \in \{r+1, \dots, t\}$, el color de a' se incrementa a lo más en 1.

Debido a que para cada $j \in \{r+1, \dots, t\}$, tenemos que $|A_j| \geq 2$, entonces el grado de color de a' se incrementa a lo más en $\frac{|H|}{2}$ (recuerde que $H = A_{r+1} \cup \dots \cup A_t$); es decir, $d_{\langle A \cup H \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2} + \frac{|H|}{2}$.

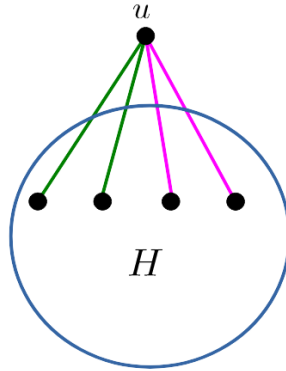


Figura 3.5: Conjunto H

Notemos que $n = |V(G)| = |H| + |A| + |\{u\}| = |H| + |A| + 1$. Por lo que, $d_{\langle A \cup H \rangle}^c(a') \leq \frac{n}{2}$.

Por la afirmación 2 y por la proposición 3.1.1, tenemos que $c(ua')$ ya es utilizado en las aristas incidentes en a' en A , por lo que $d_{\langle H \cup A \cup \{u\} \rangle}^c(a') = d_G^c(a') \leq \frac{n}{2}$, una contradicción.

Concluimos que todo vértice de G está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 3. ■

3.3. Ciclos propiamente coloreados de longitud 4

Teorema 3.3.1 Sean G una gráfica completa de orden n , para $n \geq 4$, y $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una coloración de las aristas de G . Si $\delta^c(G) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces todo vértice pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Demostración. Dividiremos la demostración en 4 casos; a saber, $n = 4$, $5 \leq n \leq 6$, $7 \leq n \leq 8$ y $n \geq 9$.

Caso 1. $n = 4$.

En este caso $\delta^c(G) \geq \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$, lo que implica que $\delta^c(G) \geq 3$; es decir, $d^c(v) \geq 3$, para cada v en $V(G)$. Como $n = 4$, entonces $d(v) = 3$, lo que implica que $d^c(v) \leq 3$, por lo que deducimos que $d^c(v) = 3$ para todo v en $V(G)$. Así, como $d^c(v) = 3 = d(v)$, entonces deducimos que todas las aristas incidentes en v tienen color distinto. Supongamos que v_1, v_2, v_3, v_4 son los vértices de G . Por la anterior tenemos que $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ (véase figura 3.6) es un ciclo propiamente coloreado. Por lo tanto, cada vértice de G esta contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

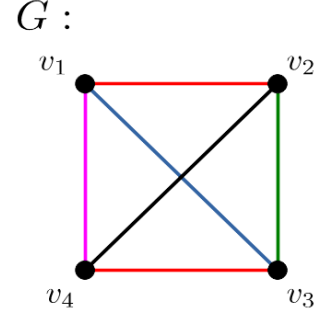


Figura 3.6: Caso $n = 4$.

Caso 2. $5 \leq n \leq 6$.

Para este caso primero consideraremos el subcaso $n = 5$ y después veremos que a partir de este subcaso se puede probar el subcaso $n = 6$.

Subcaso. $n = 5$.

Para este caso se tiene que $\delta^c(G) \geq \frac{5+1}{2} = 3$; es decir, $d^c(z) \geq 3$, para cada vértice z en G .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice v en G , tal que v no pertenece a ningún ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Por el teorema 3.2.1, sabemos que v pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 3, digamos $C_3 = (v, x, y, v)$, donde x y y son vértices en G . Supongamos que $c_1 = c(vx)$, $c_2 = c(vy)$ y $c_3 = c(xy)$. Como v, x, y pertenecen a C_3 (véase figura 3.7), entonces $c_1 \neq c_3$, $c_1 \neq c_2$ y $c_3 \neq c_2$. Por otro lado, notemos que cada vértice en C_3 tiene grado de color 2, pero debido a que $d^c(z) \geq 3$ para todo z en $V(G)$, entonces cada vértice en C_3 debe tener una adyacencia de color distinto a las que ya tiene. Sean v_1, v_2 y v_3 vértices adyacentes a y, x, y y v respectivamente, tal que $c(v_1x) \notin \{c_1, c_3\}$, $c(v_2y) \notin \{c_3, c_2\}$ y $c(v_3v) \notin \{c_1, c_2\}$. Debido a que $n = 5$, tenemos que $v_1 = v_2$ o $v_2 = v_3$ o $v_1 = v_3$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_1 = v_2$ y llamemos w a este vértice. Supongamos que $c(xw) = c_4$ y $c(yw) = c_5$.

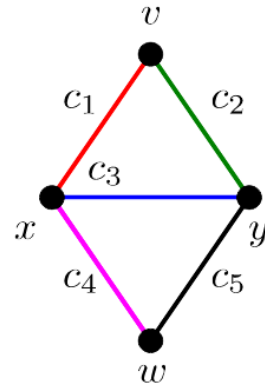


Figura 3.7: Caso $c_4 \neq c_5$.

Supongamos que $c_4 \neq c_5$. Consideremos el ciclo $C = (v, x, w, y, v)$ (véase figura 3.7). Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Sabemos que $c(xv) \neq c(vy)$ ya que $\{x, v, y\} \subseteq V(C_3)$. Por la elección de w tenemos que $c_2 \neq c_5$; es decir, $c(vy) \neq c(yw)$.

Por la suposición $c_5 \neq c_4$, deducimos que $c(yw) \neq c(wx)$. Por último, $c(wx) \neq c(xv)$ ya que $c_4 \neq c_1$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo que implica una contradicción respecto a la elección de v . Por lo tanto, $c_4 = c_5$.

Sea $c_6 = c(vw)$.

Afirmación. $c_6 = c_4$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c_6 \neq c_4$. Consideremos dos casos sobre c_6 ; a saber, $c_6 = c_2$ o $c_6 \neq c_2$.

Caso 1. $c_6 = c_2$.

Consideremos el ciclo $C = (v, x, y, w, v)$ (véase figura 3.8). Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Tenemos que $c(vx) \neq c(xy)$ ya que $\{v, x, y\} \subseteq V(C_3)$. Por la elección de w , tenemos que $c_5 \neq c_3$; es decir, $c(xy) \neq c(yw)$. Por la suposición $c_6 \neq c_4$ y debido a que $c_4 = c_5$, tenemos que $c_5 \neq c_6$; es decir, $c(yw) \neq c(wv)$. Por último, debido a la suposición $c_2 = c_6$ y como $c_2 \neq c_1$, entonces $c_6 \neq c_1$; es decir, $c(wv) \neq c(vx)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo que implica una contradicción respecto a la elección de v .

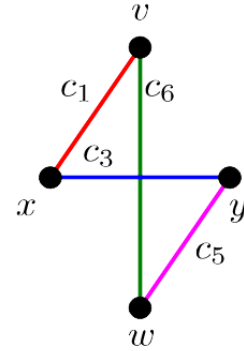


Figura 3.8: Caso $c_6 = c_2$.

Caso 2. $c_6 \neq c_2$.

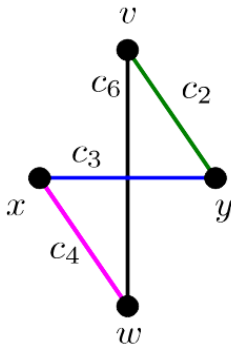


Figura 3.9: Caso $c_6 \neq c_2$.

Consideremos el ciclo $C = (v, y, x, w, v)$ (véase figura 3.9). Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Tenemos que $c(vy) \neq c(yx)$ ya que vy y yx son aristas de C_3 . Por la elección de w , tenemos que $c_4 \neq c_3$; es decir, $c(yx) \neq c(xw)$. La suposición $c_4 \neq c_6$ implica que $c(xw) \neq c(wv)$. Por último, debido a que $c_6 \neq c_2$, entonces $c(wv) \neq c(vy)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo cual implica una contradicción respecto a la elección de v .

En cualquier caso se llega a una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $c_6 = c_4$.

Debido a que $c(wx) = c(wv) = c(wy) = c_4$, tenemos que el vértice w tiene 3 aristas del mismo color, lo que implica

que $d^c(w) \leq 2$, lo cual es una contradicción con la hipótesis del teorema 3.3.1 (véase figura 3.10).

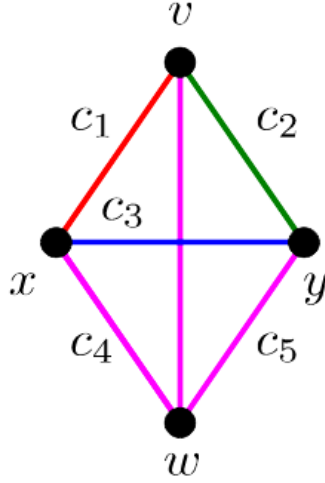


Figura 3.10: $c_6 = c_4 = c_5$.

Por lo tanto, concluimos que si $n = 5$, entonces todo vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Subcaso. $n = 6$.

Sea x un vértice arbitrario de G , consideremos $G - x$. Observemos que el orden de $G - x$ es 5 y como por hipótesis $\delta^c(G) \geq \frac{6+1}{2}$, tenemos que $\delta^c(G) \geq 4$, lo que implica que $\delta^c(G - x) \geq 3$. Entonces por el caso anterior tenemos que todo vértice de $G - x$ está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 en $G - x$. Por lo tanto, solo resta demostrar que x pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Sea y un vértice en G , distinto de x . Consideremos $G - y$, con el mismo argumento para $G - x$, concluimos que todo vértice de $G - y$ está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Lo que implica que en particular x , está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 en $G - y$.

Así, si $n = 6$, entonces cada vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Caso 3. $7 \leq n \leq 8$.

Para este caso primero consideraremos el subcaso $n = 7$ y después veremos que a partir de ese subcaso se puede probar el subcaso $n = 8$.

Subcaso. $n = 7$.

Para este caso se tiene que $\delta^c(G) \geq \frac{7+1}{2} = 4$; es decir, que $d^c(z) \geq 4$, para cada vértice z en G . Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice v en G , tal que v no pertenece a ningún ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Por el teorema 3.2.1, sabemos que v pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 3, digamos $C_3 = (v, x, y, v)$, donde x y y son vértices en G . Supongamos que $c_1 = c(vx)$, $c_2 = c(vy)$ y $c_3 = c(xy)$. Dado que C_3 es propiamente coloreado, tenemos que $c_1 \neq c_3$, $c_1 \neq c_2$ y $c_3 \neq c_2$. Por otro lado,

notemos que cada vértice de C_3 tiene grado de color 2 en C_3 , pero debido a que $d^c(z) \geq 4$ para todo z en $V(G)$, entonces cada vértice de C_3 debe tener dos adyacencias de color distinto a las que ya tiene en C_3 .

Por lo anterior, se requieren a lo más 6 vértices fuera de $V(C_3)$ que cumplan con las condiciones planteadas, pero como $n = 7$, entonces al menos existe un vértice w adyacente a un par de vértices de C_3 , sin pérdida de generalidad, supongamos que w es un vértice adyacente a x e y , con $c(wx) \notin \{c_1, c_3\}$ y $c(yw) \notin \{c_2, c_3\}$. Supongamos que $c_4 = c(wx)$ y $c_5 = c(yw)$.

Afirmación 0. $c_4 = c_5$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $c_4 \neq c_5$. Consideremos el ciclo $C = (v, x, w, y, v)$ (véase figura 3.11). Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Sabemos que $c(xv) \neq c(vy)$ ya que C_3 es propiamente coloreado. Por la elección de w , tenemos que $c_2 \neq c_5$ y $c_1 \neq c_4$; es decir, $c(vy) \neq c(yw)$ y $c(wx) \neq c(xv)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo cual es una contradicción, respecto a la elección de v . Por lo tanto, $c_4 = c_5$.

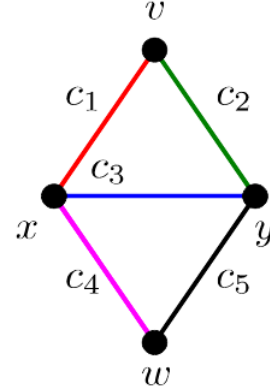


Figura 3.11: Caso $c_4 \neq c_5$.

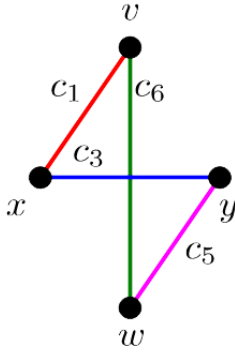


Figura 3.12: Caso $c_6 = c_2$.

Llamemosle c_6 a $c(vw)$.

Afirmación 1. $c_6 = c_4$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c_6 \neq c_4$. Consideremos dos casos sobre c_6 ; a saber, $c_6 = c_2$ o $c_6 \neq c_2$.

Caso 1. $c_6 = c_2$.

Consideremos el ciclo $C = (v, x, y, w, v)$ (véase figura 3.12). Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Tenemos que $c(vx) \neq c(xy)$ ya que C_3 es propiamente coloreado. Por la elección de w , tenemos que $c_5 \neq c_3$ y $c_5 \neq c_2$; es decir, $c(xy) \neq c(yw)$ y $c(yw) \neq c(wv)$. Por último, debido a la suposición $c_2 = c_6$ y como $c_2 \neq c_1$, entonces $c_6 \neq c_1$; es decir, $c(wv) \neq c(vx)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo que implica una contradicción, respecto a la elección de v .

Caso 2. $c_6 \neq c_2$.

Consideremos el ciclo $C = (v, y, x, w, v)$ (véase figura 3.13). Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Tenemos que $c(vy) \neq c(yx)$ ya que vy y yx son aristas de C_3 y este es propiamente coloreado. Por la elección de w , tenemos que $c_4 \neq c_3$; es decir, $c(yx) \neq c(xw)$. La suposición $c_4 \neq c_6$ implica que $c(xw) \neq c(wv)$. Por último, debido a que $c_6 \neq c_2$, entonces $c(wv) \neq c(vy)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo cual implica una contradicción, respecto a la elección de v .

Como los casos 1 y 2 nos llevan a una contradicción, concluimos que $c_6 = c_4$.

Se sigue de las afirmaciones 0 y 1 que $c(wv) = c(wy) = c(wx)$ (véase figura 3.14).

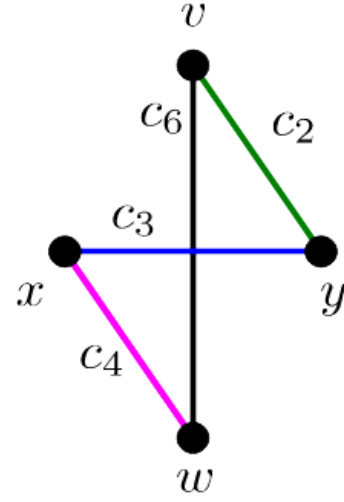


Figura 3.13: Caso $c_6 \neq c_2$.

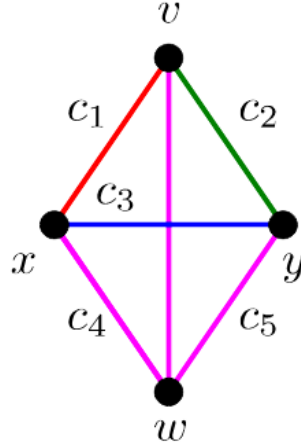


Figura 3.14: Caso $c_6 = c_4 = c_5$.

Como $d^c(w) \geq 4$, entonces debe existir un v3rtice u adyacente a w con $c(wu) = c_7$ tal que $c_7 \notin \{c_4, c_1, c_2\}$. Supongamos que $c_8 = c(uv)$.

Afirmaci3n 2. $c_8 = c_7$.

Demostraci3n. Procediendo por contradicci3n, supongamos que $c_8 \neq c_7$. Sobre c_8 , consideremos dos casos; a saber, $c_8 = c_1$ o $c_8 \neq c_1$.

Caso 1. $c_8 \neq c_1$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (v, x, w, u, v)$ (v3ase figura 3.15). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Recordemos que $c(vx) \neq c(xw)$ ya que $c_1 \neq c_4$. Por la elecci3n de u , sabemos que $c_4 \neq c_7$; es decir, $c(xw) \neq c(wu)$. Debido a la suposici3n $c_7 \neq c_8$, tenemos que $c(wu) \neq c(uv)$. Por 3ltimo, como $c_8 \neq c_1$, entonces $c(uv) \neq c(vx)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elecci3n del v3rtice v .

Caso 2. $c_8 = c_1$.

Consideremos el ciclo $C_2 = (v, y, w, u, v)$ (v3ase figura 3.16). Probaremos que C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Recordemos que $c(vy) \neq c(yw)$ ya que $c_2 \neq c_5$. Por la elecci3n de u , sabemos que $c_5 \neq c_7$; es decir, $c(yw) \neq c(wu)$. Por la suposici3n $c_8 \neq c_7$, tenemos que $c(wu) \neq c(uv)$. Por 3ltimo, como $c_8 = c_1$ y $c_1 \neq c_2$, entonces $c_8 \neq c_2$, lo que implica que $c(uv) \neq c(vy)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , esto implica una contradicci3n respecto a la elecci3n de v .

Observemos que en cualquier caso llegamos a una contradicci3n. Por lo tanto, $c_8 = c_7$.

Llam3mosle c_9 a $c(ux)$.

Afirmaci3n 3. $c_9 = c_7$

Demostraci3n. Procediendo por contradicci3n, supongamos que $c_9 \neq c_7$. Sobre c_9 , consideremos dos casos; a saber, $c_9 = c_1$ o $c_9 \neq c_1$.

Caso 1. $c_1 \neq c_9$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (v, x, u, w, v)$ (v3ase figura 3.17). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Recordemos que $c_1 \neq c_4$ y como $c_4 = c_5$, entonces $c_1 \neq c_5$; es decir, $c(xv) \neq c(vw)$. Por la elecci3n de u , tenemos que $c_5 \neq c_7$, lo que implica que $c(vw) \neq c(wu)$. Debido a la suposici3n de $c_7 \neq c_9$, deducimos que $c(wu) \neq c(ux)$. Por 3ltimo, $c(ux) \neq c(xv)$, ya que

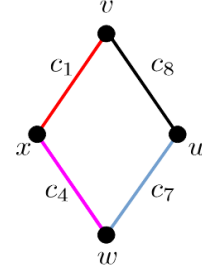


Figura 3.15: Caso $c_8 \neq c_1$.

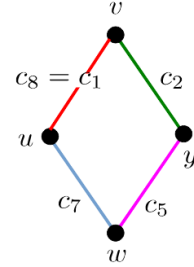


Figura 3.16: Caso $c_8 = c_1$.

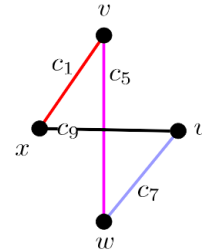


Figura 3.17: Caso $c_9 \neq c_1$.

estamos suponiendo que $c_9 \neq c_1$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción con la elección de v .

Caso 2. $c_9 = c_1$.

Consideremos el ciclo $C_2 = (v, y, x, u, v)$ (véase figura 3.18). Probaremos que C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Recordemos que $c(vy) \neq c(yx)$ ya que C_3 es propiamente coloreado. Debido a la suposición $c_1 = c_9$ y como $c_1 \neq c_3$, entonces $c_9 \neq c_3$; es decir, $c(yx) \neq c(xu)$. Sabemos que $c_8 = c_7$ y por la suposición $c_7 \neq c_9$, tenemos que $c_9 \neq c_8$, lo que implica que $c(xu) \neq c(uv)$. Por último, como $c_7 \neq c_2$ y $c_8 = c_7$, entonces $c_8 \neq c_2$; es decir, $c(uv) \neq c(vy)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo cual es una contradicción respecto a la elección de v .

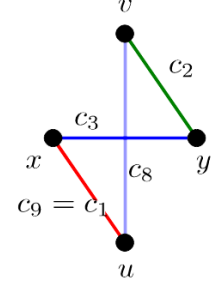


Figura 3.18: Caso $c_9 = c_1$.

En cualquier caso llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $c_9 = c_7$.

Por último, supongamos que $c_{10} = c(uy)$.

Afirmación 4. $c_{10} = c_7$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c_{10} \neq c_7$. Consideremos dos casos sobre c_{10} ; a saber, $c_{10} = c_2$ o $c_{10} \neq c_2$.

Caso 1. $c_2 \neq c_{10}$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (v, y, u, w, v)$ (véase figura 3.19). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Recordemos que $c_5 \neq c_2$, lo que implica que $c(wv) \neq c(vy)$. Por la suposición $c_2 \neq c_{10}$, tenemos que $c(vy) \neq c(yu)$. Debido a que $c_7 \neq c_{10}$, deducimos que $c(yu) \neq c(uw)$. Por último, recordemos que por la elección de u , $c_7 \neq c_5$, lo que implica que $c(uw) \neq c(wv)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción con la elección de v .

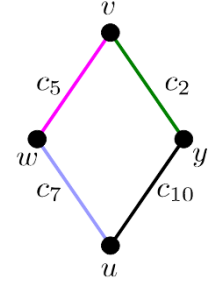


Figura 3.19: Caso $c_{10} \neq c_2$.

Caso 2. $c_2 = c_{10}$.

Consideremos el ciclo $C_2 = (u, v, x, y, u)$ (véase figura 3.20). Probaremos que C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Por la afirmación 2, tenemos que $c_7 = c_8$ y por la elección de u , sabemos que $c_7 \neq c_1$, lo que implica que $c_8 \neq c_1$; es decir, $c(uv) \neq c(vx)$. Por otro lado, $c(vx) \neq c(xy)$ ya que vx y xy son aristas de C_3 y este es propiamente coloreado. Por la suposición $c_{10} = c_2$ y como $c_3 \neq c_2$, entonces $c_{10} \neq c_3$, lo que implica que $c(xy) \neq c(yu)$. Por último, debido a que $c_8 = c_7$ y por la suposición $c_7 \neq c_{10}$, tenemos que $c_{10} \neq c_8$, así $c(yu) \neq c(uv)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente

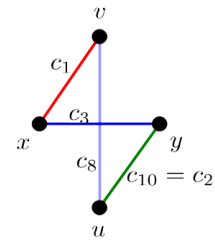


Figura 3.20: Caso $c_{10} = c_2$.

coloreado que contiene a v , lo cual es una contradicción. Observemos que en cualquier caso se llega a una contradicción. Por lo tanto, $c_{10} = c_7$.

Por la Afirmaciones 2, 3 y 4 deducimos que $c(wu) = c(uy) = c(uv) = c(ux) = c_7$, lo que implica que el vértice u tiene 4 aristas del mismo color, por lo que $d^c(u) \leq 3$, lo cual es una contradicción con la hipótesis del teorema 3.3.1 (véase figura 3.21).

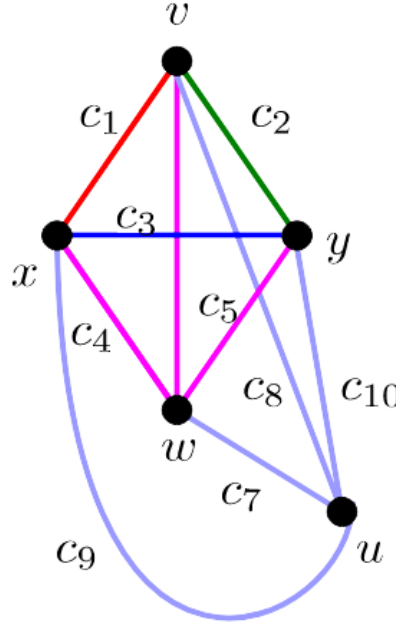


Figura 3.21: $c_7 = c_8 = c_9 = c_{10}$.

Por lo tanto, concluimos que para $n = 7$, todo vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Subcaso. $n = 8$.

Sea x un vértice arbitrario de G , consideremos $G - x$. Observemos que el orden de $G - x$ es 7 y como por hipótesis $\delta^c(G) \geq \frac{8+1}{2}$, tenemos que $\delta^c(G) \geq 5$, lo que implica que $\delta^c(G - x) \geq 4$. Entonces por el caso anterior tenemos que todo vértice de $G - x$ está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 en $G - x$. Por lo tanto, solo resta demostrar que x pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Sea y un vértice en G , distinto de x . Consideremos $G - y$, con el mismo argumento para $G - x$, concluimos que todo vértice de $G - y$ está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Lo que implica que en particular x está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 en $G - y$.

Así, si $n = 8$ entonces cada vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Caso 4. $n \geq 9$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice v que no pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Por el teorema 3.2.1, sabemos que v pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud 3, digamos $C_3 = (v, u, w, v)$, donde u y w pertenecen a $V(G)$. Supongamos que $c_1 = c(vu)$, $c_2 = c(vw)$ y $c_3 = c(uw)$. Como C_3 es propiamente coloreado, entonces $c_1 \neq c_3$, $c_1 \neq c_2$ y $c_3 \neq c_2$. Consideraremos dos subcasos:

Subcaso 4.1 Existe un vértice x en $V(G) \setminus V(C_3)$, con $c(vx) = c_4$ tal que $c_4 \notin \{c_1, c_2, c_3\}$ y $c(ux) = c(wx) = c_3$ (véase figura 3.22).

Sea $Q = V(C_3) \cup \{x\}$. Como $n \geq 9$, entonces $\delta^c(G) \geq 5$; es decir, $d^c(v) \geq 5$ para todo v , en $V(G)$. Dado que $d^c(x) \geq 5$, debe existir un vértice y en $V(G) \setminus Q$ con $c(xy) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Supongamos $d^c(x) = t$.

Luego, sea $A_i = \{a \in V(G) \setminus Q : c(ax) = c_i\}$, para $5 \leq i \leq t$. Por lo anterior $A_i \neq \emptyset$ para cada i en $\{5, \dots, t\}$. Consideremos

$$A = \bigcup_{i=5}^t A_i.$$

Afirmación 1. $c(yx) = c(yu) = c(yw) = c(yv)$ para cada vértice y en A .

Sea y un vértice arbitrario en A . Llamémosle c_5 a $c(xy)$. Dividiremos la demostración en 3 subafirmaciones.

Afirmación 1.1 $c(yv) = c_5$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(yv) \neq c_5$. Supongamos que $c_6 = c(yv)$. Consideremos dos casos sobre c_6 ; a saber, $c_6 = c_1$ o $c_6 \neq c_1$.

Caso 1. $c_6 \neq c_1$.

Probaremos que $C_1 = (v, u, x, y, v)$ (véase figura 3.23) es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Recordemos que $c_1 \neq c_3$ y como $c_3 = c(ux)$, entonces $c(vu) \neq c(ux)$. Debido a que $y \in A$, entonces $y \in A_i$ para algún i en $\{5, \dots, t\}$, por la definición de los conjuntos tenemos que $c_3 \neq c(xy)$; es decir, $c(ux) \neq c(xy)$. Por la suposición $c_5 \neq c_6$, tenemos que $c(xy) \neq c(yv)$. Por último, $c(yv) \neq c(vu)$ ya que estamos suponiendo $c_6 \neq c_1$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción con la elección de v .

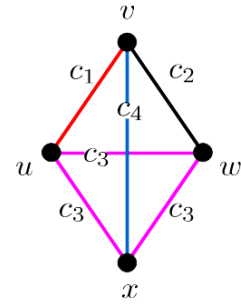


Figura 3.22: Caso 4.1.

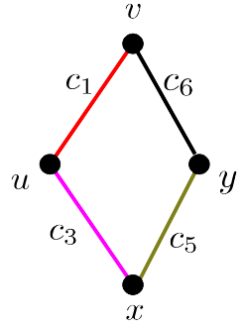


Figura 3.23: Caso $c_6 \neq c_1$.

Caso 2. $c_6 = c_1$.

Consideremos el ciclo $C_2 = (v, w, x, y, v)$ (véase figura 3.24). Probaremos que C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Recordemos que $c_3 \neq c_2$ y como $c_3 = c(wx)$, entonces $c(vw) \neq c(wx)$. Como $y \in A$, por la definición de los conjuntos A_i , sabemos que $c(xy) \neq c_3$; es decir, $c(wx) \neq c(xy)$. Por la suposición $c_5 \neq c_6$, tenemos que $c(xy) \neq c(yv)$. Por último, debido a que $c_6 = c_1$ y como $c_1 \neq c_2$, entonces $c_6 \neq c_2$, lo que implica que $c(yv) \neq c(vw)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo que implica una contradicción.

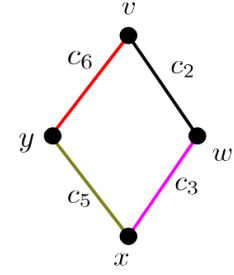


Figura 3.24: Caso $c_6 = c_1$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción. Por lo tanto, $c_5 = c(yw)$.

Afirmación 1.2. $c(yw) = c_5$

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(yw) \neq c_5$. Supongamos que $c_6 = c(yw)$ y consideremos dos casos sobre c_6 ; a saber, $c_6 = c_2$ o $c_6 \neq c_2$.

Caso 1. $c_6 = c_2$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (v, u, w, y, v)$ (véase figura 3.25). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Recordemos que $c(vu) \neq c(uw)$ ya que C_3 es propiamente coloreado. Debido a la suposición $c_6 = c_2$ y como $c_2 \neq c_3$, entonces $c_6 \neq c_3$; es decir, $c(uw) \neq c(wy)$. Por la afirmación 1.1, tenemos que $c_5 = c(yv)$ y por la suposición $c_5 \neq c_6$, tenemos que $c(wy) \neq c(yv)$. Por último, $c(yv) \neq c(vu)$ ya que $c_5 \neq c_1$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

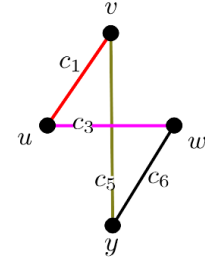


Figura 3.25: Caso $c_6 = c_2$.

Caso 2. $c_6 \neq c_2$.

Consideremos el ciclo $C_2 = (v, w, y, x, v)$ (véase figura 3.26). Probaremos que C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Por la suposición $c_2 \neq c_6$, así tenemos que $c(vw) \neq c(wy)$. Por la suposición de la afirmación 1.2, $c_6 \neq c_5$, lo que implica que $c(wy) \neq c(yx)$. Como $y \in A$, por la definición de los conjuntos A_i , tenemos que $c_5 \neq c_4$; es decir, $c(yx) \neq c(xv)$. Por último, por la hipótesis del caso 4.1, $c_4 \neq c_2$, lo que implica que $c(xv) \neq c(vw)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

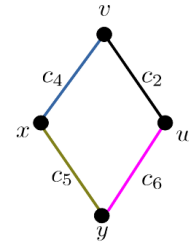


Figura 3.26: Caso $c_6 \neq c_2$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción. Por lo tanto, $c_5 = c(yw)$.

Afirmación 1.3. $c(yu) = c_5$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(yu) \neq c_5$. Supongamos

que $c_6 = c(yu)$ y consideremos dos casos sobre c_6 ; a saber, $c_6 = c_1$ o $c_6 \neq c_1$.

Caso 1. $c_6 \neq c_1$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (v, u, y, x, v)$ (véase figura 3.27). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Dado que $c_1 \neq c_4$, tenemos que $c(uv) \neq c(vx)$. Debido a que $c_5 = c(yx)$ y como $y \in A$, sabemos que $c_4 \neq c_5$, entonces $c(vx) \neq c(xy)$. Por la suposición de la afirmación 1.3, $c_5 \neq c_6$; es decir, $c(xy) \neq c(yu)$. Por último $c(yu) \neq c(uv)$ ya que estamos suponiendo $c_6 \neq c_1$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

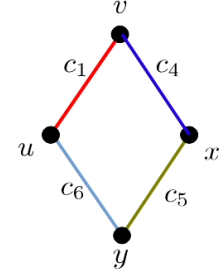


Figura 3.27: Caso $c_6 \neq c_1$.

Caso 2. $c_6 = c_1$.

Consideremos el ciclo $C_2 = (v, w, u, y, v)$ (véase figura 3.28).

Probaremos que C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Tenemos que $c(vw) \neq c(wu)$ ya que C_3 es un ciclo propiamente coloreado.

Debido a que $c_1 \neq c_3$ y por la suposición $c_1 = c_6$, tenemos que $c_6 \neq c_3$, lo que implica que $c(wu) \neq c(uy)$. Por la suposición de la afirmación 1.3, $c_5 \neq c_6$; es decir, $c(uy) \neq c(yv)$. Por último, dado que $y \in A$, sabemos que $c_5 \neq c_2$ y como $c_5 = c(yv)$, entonces $c(yv) \neq c(vw)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

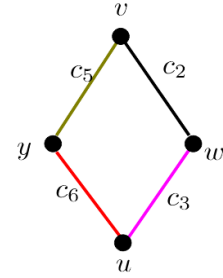


Figura 3.28: Caso $c_6 = c_1$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción. Por lo tanto, $c_5 = c(yu)$.

Por las Afirmaciones 1.1, 1.2 y 1.3 tenemos que $c(yx) = c(yu) = c(yw) = c(yv)$ para cada vértice y en A (véase figura 3.29).

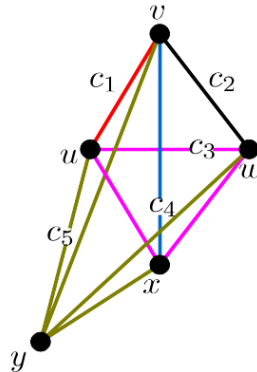


Figura 3.29: $c(xy) = c(yu) = c(yw) = c(yv)$.

Hasta ahora ya analizamos que sucede con las aristas a tal que $c(ax) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, pero aún pueden existir vértices s tal que $c(sx) \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, con $s \notin \{v, u, w\}$. Por lo anterior, definimos el siguiente conjunto, sea $S = V(G) \setminus (Q \cup A)$.

Afirmación 2. $|A| \geq 2$.

Demostración. Cuando $n \geq 10$, en particular tenemos que $d^c(x) \geq \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2}$, por lo que $d^c(x) \geq 6$. Así, por la definición de A , tenemos que $|A| \geq 2$. Por lo tanto, supongamos que $n = 9$ y que $A = \{a\}$ para algún vértice a en $V(G)$.

Afirmación 2.1 $c(ay) \neq c(ax)$, para todo y en S .

Demostración. Debido a que $d^c(a) \geq 5$ se tiene que deben existir al menos 4 vértices adyacentes a a con color distinto a $c(ax)$ y por la afirmación 1 sabemos que $c(ax) = c(av) = c(aw) = c(au)$, por lo que los vértices adyacentes con color distinto a $c(ax)$ deben pertenecer a S . Dado que $n = 9$ y $|A| = 1$, entonces $|S| = 4$. Por lo tanto, $c(ay) \neq c(ax)$ para todo y en S .

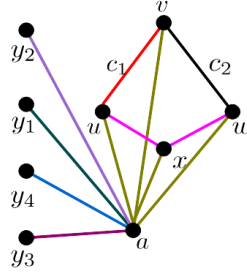


Figura 3.30: $c(ay) \neq c(ax)$.

Afirmación 2.2 $c(vy) = c(ya)$, para todo y en S .

Demostración. Sea y arbitrario en S . Luego, consideremos dos casos sobre $c(yv)$; a saber $c(yv) = c_1$ o $c(yv) \neq c_1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $c(yv) \neq c_1$. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(ya) \neq c(yv)$. Probaremos que el ciclo $C_1 = (y, v, u, a, y)$ (véase figura 3.31) es un ciclo propiamente coloreado (en caso de que $c(yv) = c_1$, se considera el ciclo $C_1 = (y, v, w, a, y)$). Recordemos que $c(vu) = c_1$ y como estamos suponiendo $c(yv) \neq c_1$, entonces $c(yv) \neq c(vu)$. Debido a que $a \in A$, se sigue de la definición de A que $c(ax) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y por la afirmación 1 tenemos que $c(ax) = c(au)$, lo que implica que $c(vu) \neq c(ua)$. Por otro lado, por la afirmación 2.1, tenemos que $c(xa) \neq c(ay)$ y dado que $c(ax) = c(au)$, se tiene que $c(ua) \neq c(ay)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

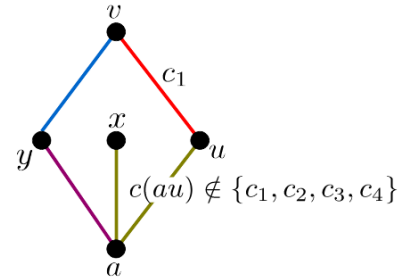


Figura 3.31: Ciclo C_1 .

Concluimos que $c(ya) = c(yv)$ para todo y en S .

Afirmación 2.3 $c(vy) = c(yu) = c(yw) = c(yx)$ para todo $y \in S$.

Demostración. Demostraremos que $c(vy) = c(yu)$, $c(vy) = c(yw)$ y $c(vy) = c(yx)$. Debido a que los casos son totalmente análogos, solo demostraremos que $c(vy) = c(yu)$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe y en S , tal que $c(yu) \neq c(yv)$.

Afirmación 2.3.1 $c(yu) = c_3$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(yu) \neq c_3$. Consideremos dos casos sobre $c(yv)$; a saber $c(yv) = c_2$ o $c(yv) \neq c_2$.

Caso 2.3.1 $c(yv) = c_2$.

Probaremos que $C_1 = (y, u, x, v, y)$ (véase figura 3.32), es un ciclo propiamente coloreado. Por la suposición de la afirmación 2.3, sabemos que $c(vy) \neq c(yu)$.

Como $c(ux) = c_3$ y por la suposición de la afirmación 2.3.1, tenemos que $c(yu) \neq c_3$, entonces $c(yu) \neq c(ux)$. Por la hipótesis del caso 4.1, sabemos que $c_3 \neq c_4$ y $c_4 \neq c_2$, lo que implica que $c(ux) \neq c(xv)$ y $c(xv) \neq c(vy)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

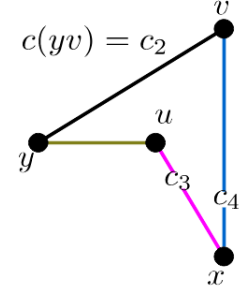


Figura 3.32: $c(yv) = c_2$.

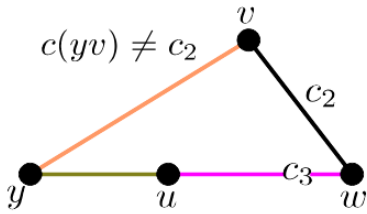


Figura 3.33: $c(yv) \neq c_2$.

Caso 2.3.2 $c(yv) \neq c_2$.

Probaremos que $C_1 = (y, u, w, v, y)$ (véase figura 3.33), es un ciclo propiamente coloreado. Por la suposición de la afirmación 2.3, sabemos que $c(vy) \neq c(yu)$. Como $c(uw) = c_3$ y por la suposición de la afirmación 2.3.1, tenemos que $c(yu) \neq c_3$, entonces $c(yu) \neq c(uw)$. Recordemos que $c(uw) \neq c(wv)$ ya que C_3 es un ciclo propiamente coloreado. Por último, debido a que $c_2 \neq c(yv)$ y recordemos que $c_2 = c(vw)$, se deduce que $c(wv) \neq c(vy)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

Como los casos 2.3.1, y 2.3.2, nos llevan a una contradicción, concluimos que $c(yu) = c_3$.

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v, u, y, a, v)$ (véase figura 3.34). Recordemos que $c_1 = c(uv)$. Por la afirmación 2.3.1, sabemos que $c(yu) = c_3$ y como $c_1 \neq c_3$ (ya que son colores de C_3), entonces $c(yu) \neq c(uv)$. Dado que $a \in A$, tenemos de la definición de A que $c(ax) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y por la afirmación 1, sabemos que $c(ax) = c(av)$, lo que implica que $c(av) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, así $c(uv) \neq c(va)$. Por la afirmación 2.1, sabemos que $c(av) \neq c(ay)$. Por último, por la suposición de la afirmación 2.3, sabemos que $c(yv) \neq c(yu)$ y por la afirmación 2.1, tenemos que $c(yv) = c(ay)$, lo que implica que $c(ay) \neq c(yu)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

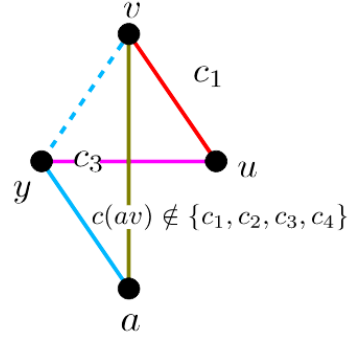


Figura 3.34: Ciclo C_1 .

Por lo tanto, $c(yv) = c(yu) = c(yw) = c(yx)$ para cada y en S .

Por las Afirmaciones 2.3 y 2.2, tenemos que a cada vértice y de S le inciden 5 aristas del mismo color. Por lo tanto, $d^c(y) \leq 4$, lo cual es una contradicción, respecto a la hipótesis del teorema 3.3.1.

Así, concluimos que $|A| \geq 2$.

Afirmación 3. A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un par de vértices a y a' en A tales que $c(av) \neq c(aa')$ y $c(aa') \neq c(a'v)$. Consideremos el ciclo $C = (a, a', w, v, a)$ (véase figura 3.35), probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. Como $\{a, a'\} \subseteq A$, supongamos sin pérdida de generalidad que $a \in A_i$ y $a' \in A_j$ para algunos i y j en $\{5, \dots, t\}$, lo que implica que $c_i = c(xa)$ y $c_j = c(xa')$. Por la afirmación 1 se tiene que $c(a'w) = c(xa') = c_j$ y recordemos que $c_2 = c(vw)$. Por definición de A_i y A_j tenemos que en particular $c(ax) \neq c_2$ y $c(a'x) \neq c_2$, por la afirmación 1 sabemos que $c(a'x) = c(wa') = c(a'v)$ y $c(av) = c(ax)$. Por lo anterior y debido a que $c(aa') \neq c(a'v)$, tenemos que $c(aa') \neq c(a'w)$. Ya que $c(a'w) = c(a'v)$ y $c(a'v) \neq c_2$, deducimos que $c(a'w) \neq c_2$, obteniendo que $c(a'w) \neq c(vw)$. Como $c(av) = c(ax)$ y $c(ax) \neq c_2$, entonces $c_2 \neq c(av)$, lo que implica que $c(wv) \neq c(va)$. Por la suposición de la prueba de la afirmación 3, tenemos que $c(va) \neq c(aa')$. Así, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elección de v .

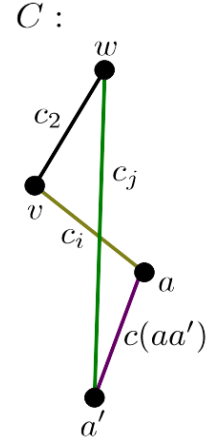


Figura 3.35: Ciclo C .

Por lo tanto, A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Así, por la proposición 3.1.1, tenemos que existe un vértice a' en A tal que $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$.

Antes de continuar, veamos que S es distinto del vacío.

Procediendo por contradicción, supongamos que $S = \emptyset$. Como $|A| = |V(G)| - |Q| - |S|$ y $S = \emptyset$, entonces $|A| = n - 4$, por lo que, $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{n-4+1}{2} = \frac{n-3}{2}$. Debido a que $c(a'x) = c(a'w) = c(a'v) = c(a'u)$, entonces $d_{A \cup Q}^c(a') = d_G^c(a') \leq \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$, lo cual es una contradicción respecto a la hipótesis del teorema 3.3.1. Por lo tanto, $S \neq \emptyset$.

Para terminar con el caso 4.1, definimos los siguientes conjuntos $S_1 = \{y \in S : c(yv) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}\}$ y por la contraparte definimos $S_2 = \{y \in S : c(vy) \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}\}$. Observemos que $S_1 \cup S_2 = S$ y $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Probaremos algunas propiedades que se cumplen para S_1 y para S_2 .

Supongamos que $c_i = c(xy)$, notemos que debido a que $y \notin A$, entonces $c_i \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$.

Afirmación 4. $c(xy) = c(xu) = c_3$ para todo $y \in S_1$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(xu) \neq c(xy)$. Consideremos el ciclo $C = (y, v, u, x, y)$ (véase figura 3.36). Denotamos a $c(vy) = c_6$. Recordemos que $c(xu) \neq c(uv)$ ya que $c_1 \neq c_3$. Como $y \in S_1$, entonces vemos $c(vy) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y como $c(uv) = c_1$, así $c(uv) \neq c(vy)$.

Debido a que $c_i \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y como $c(vy) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, entonces $c(vy) \neq c(yx)$. Por lo anterior C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elección de v . Por lo tanto, $c(xy) = c(xu) = c_3$ para todo $y \in S_1$.

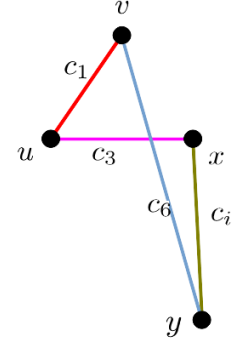


Figura 3.36: $c_i = c_3$.

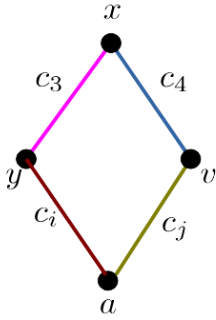


Figura 3.37: $c(ay) = c_j$ o $c(ay) = c_3$.

Afirmación 5. $c(ay) = c(va)$ o $c(ay) = c(yx) = c_3$ para todo y en S_1 y para todo a en A .

Demostración. Sean y en S_1 y a en A arbitrarios. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(ay) \neq c(va)$ y $c(ay) \neq c(yx)$. Consideremos el ciclo $C = (a, y, x, v, a)$ (véase figura 3.37). Supongamos que $c(va) = c_j$ y $c(ay) = c_i$ para algún i y j . Como $c_4 \neq c_3$ (por la suposición del subcaso 4.1) y $c(xy) = c_3$ (por la afirmación 4), entonces $c(yx) \neq c(xv)$. Debido a que $c(xa) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y dado que $c(va) = c(xa)$, deducimos que $c(va) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, entonces $c(va) \neq c_4$, por lo que $c(xv) \neq c(va)$. Por las suposiciones de la afirmación 5, tenemos que $c(va) \neq c(ay)$ y $c(ay) \neq c(yx)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $c(ay) = c(va)$ o $c(ay) = c(yx) = c_3$ para todo y en S_1 y para todo a en A .

Notemos que lo anterior implica que, dado a en A con $d_{\langle A \rangle}^c(a) = f$ y y en S_1 , se tiene que $d_{\langle A \cup S \rangle}^c(a) = f + 1$, ya que por la afirmación 5, el $c(ay) = c(va)$ o $c(ay) = c_3$, pero recordemos que $c(va)$ ya es utilizado en A , por lo tanto el grado de color de a , solo se incrementa en 1 en $\langle A \cup S_1 \rangle$.

Probaremos las siguientes afirmaciones para el conjunto S_2 .

Afirmación 6. $c(ya) = c(yv)$ o $c(ay) = c(au)$ para todo $y \in S_2$ y para todo $a \in A$.

Demostración. Sean y arbitrario en S_2 y a arbitrario en A . Luego, consideremos dos casos sobre $c(yv)$; a saber $c(yv) = c_1$ o $c(yv) \neq c_1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $c(yv) \neq c_1$. Procediendo por contradicción, supongamos lo siguiente $c(ya) \neq c(yv)$ y $c(ay) \neq c(au)$. Probaremos que el ciclo $C_1 = (y, v, u, a, y)$ (véase figura 3.38) es un ciclo propiamente coloreado (en caso de que $c(yv) = c_1$, se considera el ciclo $C_1 = (y, v, w, a, y)$). Recordemos que $c(vu) = c_1$, lo que implica que $c(yv) \neq c(vu)$. Debido a que $a \in A$, entonces $c(ax) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, y como $c(ax) = c(au)$, entonces $c(vu) \neq c(ua)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4, una contradicción.

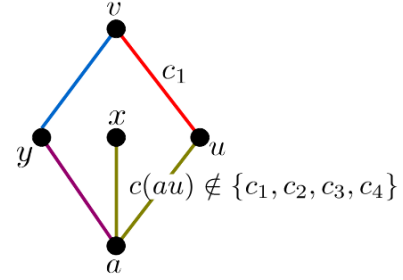


Figura 3.38: $c(ya) = c(yv)$ o $c(ay) = c(au)$.

Concluimos que $c(ya) = c(yv)$ o $c(ay) = c(au)$ para todo $y \in S_2$ y para todo $a \in A$.

Afirmación 7. $|S_2| \geq 5$.

Demostración Procediendo por contradicción, supongamos que $|S_2| \leq 4$ y sin pérdida de generalidad, supongamos que $|S_2| = 4$. Fijémonos en el vértice a' y recordemos que $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$.

Afirmación 7.1 $c(a'y) = c(yv)$ para todo $y \in S_2$.

Demostración Sea y arbitrario en S_2 . Por otro lado, debido a que $|S_2| = 4$, así podemos deducir lo siguiente $|S| = |S_1| + |S_2| = |S_1| + 4 \geq 4$, por lo que $|S| \geq 4$ y como $V(G) = A \cup Q \cup S$, así, $|A| \leq n - 4 - 4 = n - 8$, lo que implica que $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{n-8+1}{2} = \frac{n-7}{2}$.

Como $|A| \geq 2$ (por la afirmación 2), sabemos por la proposición 3.1.1 que $c(av)$ ya es utilizado en $\langle A \rangle$ y por la afirmación 1, tenemos que los colores cumplen $c(av) = c(ax) = c(av) = c(aw)$. Lo anterior implica que $d_{\langle A \cup Q \rangle}^c(a') \leq \frac{n-7}{2}$.

Afirmación 7.1.1 $c(a'y) \neq c(a'v)$, para todo $y \in S_2$ (véase figura 3.39).

Demostración. Supongamos que $c(a'y) = c(a'v)$ para algún y en S_2 , y como $c(a'v)$ ya es utilizado en $\langle A \rangle$, entonces $d_{\langle A \cup Q \cup S_1 \rangle}^c(a') \leq \frac{n-7}{2} + 3 = \frac{n-7+6}{2} = \frac{n-1}{2}$, además recordemos que por la afirmación 5, se tiene que $c(a'y) = c(a'v)$ o $c(a'y) = c_3$ para todo y en S_1 , pero $c(a'v)$ ya es utilizado y c_3 ya se tomo en

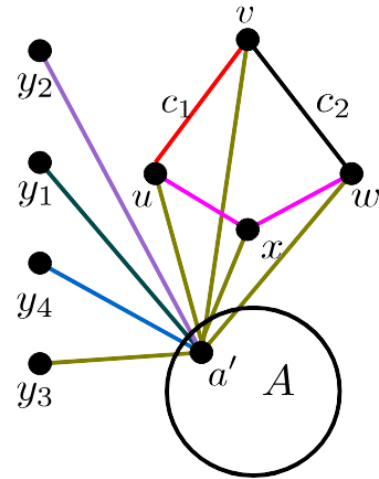


Figura 3.39: $c(a'y) \neq c(a'v)$.

cuenta, así, $d_{\langle A \cup Q \cup S_1 \cup S_2 \rangle}^c(a') \leq \frac{n-7}{2} + 3 = \frac{n-7+6}{2} = \frac{n-1}{2}$ lo cual es una contradicción, respecto a la hipótesis del teorema 3.3.1. Por lo tanto, $c(a'y) \neq c(av)$ para todo $y \in S_2$.

Luego, recordemos que $c(a'u) = c(a'v)$ por la afirmación 1, y por la afirmación 7.1.1 tenemos que $c(a'y) \neq c(a'v)$, lo que implica que $c(a'y) \neq c(a'u)$. Por la afirmación 6, sabemos que $c(a'y) = c(yv)$ o $c(a'y) = c(a'u)$ y por lo anterior deducimos que $c(a'y) = c(yv)$ para todo $y \in S_2$.

Afirmación 7.2 S_2 tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existen y y y' en S_2 tal que $c(yv) \neq c(yy')$ y $c(yy') \neq c(y'v)$. Probaremos que el ciclo $C_1 = (v, y, y', a', v)$ (véase figura 3.40) es propiamente coloreado de longitud 4. Por la afirmación 7.1, sabemos que $c(vy') = c(y'a')$ y como $c(vy') \neq c(yy')$, entonces $c(yy') \neq c(y'a')$. Por otro lado, por la afirmación 7.1.1, tenemos que $c(y'a) \neq c(a'v)$. Por último, dado que $a \in A$, $c(a'v) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y como $c(vy) \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, entonces $c(a'v) \neq c(vy)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

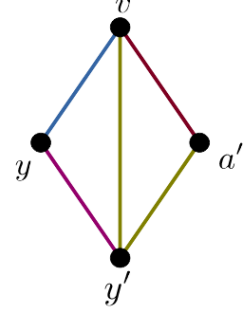


Figura 3.40: Ciclo C_1

Concluimos que S_2 tiene la propiedad de la dependencia respecto de v .

Afirmación 7.3 $c(vy) = c(yu) = c(yw) = c(yx)$ para todo $y \in S_2$.

Demostración. Demostraremos las siguientes igualdades $c(vy) = c(yu)$, $c(vy) = c(yw)$ y $c(vy) = c(yx)$. Debido a que los casos son totalmente análogos, solo demostraremos que $c(vy) = c(yu)$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe y en S_2 , tal que $c(yu) \neq c(yv)$.

Afirmación 7.3.1 $c(yu) = c_3$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(yu) \neq c_3$. Consideremos dos casos sobre $c(yv)$; a saber $c(yv) = c_2$ o $c(yv) \neq c_2$.

Caso 7.3.1 $c(yv) = c_2$.

Probaremos que $C_1 = (y, u, x, v, y)$ (véase figura 3.41), es un ciclo propiamente coloreado. Por la suposición de la afirmación 7.3, sabemos que $c(vy) \neq c(yu)$. Como $c(ux) = c_3$ y por la suposición de la afirmación 7.3.1, tenemos que $c(yu) \neq c_3$, entonces $c(yu) \neq c(ux)$. Por la hipótesis del caso 4.1, sabemos que $c_3 \neq c_4$ y $c_4 \neq c_2$, lo que implica que $c(ux) \neq c(xv)$ y $c(xv) \neq c(vy)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

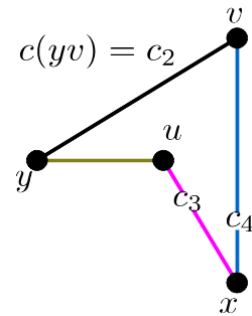


Figura 3.41: $c(yv) = c_2$.

Caso 7.3.2 $c(yv) \neq c_2$.

Probaremos que $C_1 = (y, u, w, v, y)$ (véase figura 3.42), es un ciclo propiamente coloreado. Por la suposición de la afirmación 7.3, sabemos que $c(vy) \neq c(yu)$. Como $c(uw) = c_3$ y por la suposición de la afirmación 7.3.1, tenemos que $c(yu) \neq c_3$, entonces $c(yu) \neq c(uw)$. Recordemos que $c(uw) \neq c(wv)$ ya que C_3 es un ciclo propiamente coloreado. Por último, debido a que $c_2 \neq c(yv)$ y recordemos que $c_2 = c(vw)$, entonces $c(wv) \neq c(vy)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

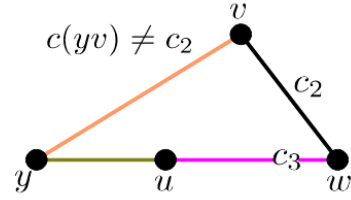


Figura 3.42: $c(yv) = c_2$.

Como los casos 7.3.2 y 7.3.1, nos llevan a una contradicción, concluimos que $c(yu) = c_3$.

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v, u, y, a', v)$ (véase figura 3.43). Recordemos que $c_1 = c(uv)$. Por la afirmación 7.3.1, sabemos que $c(yu) = c_3$ y como $c_1 \neq c_3$ (ya que son colores de C_3), entonces $c(yu) \neq c(uv)$. Dado que $a' \in A$, tenemos que $c(ax) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y por la afirmación 1, sabemos que $c(ax) = c(av)$, lo que implica que $c(av) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, así $c(uv) \neq c(va')$. Por la afirmación 7.1, sabemos que $c(yv) = c(ya')$ y dado que $c(yv) \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, tenemos que $c(ya') \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y como $c(a'v) \notin \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, entonces $c(a'v) \neq c(a'y)$. Por último, por la suposición de la afirmación 7.3, sabemos que $c(yv) \neq c(yu)$ y por la afirmación 7.1, tenemos que $c(yv) = c(a'y)$, lo que implica que $c(a'y) \neq c(yu)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , lo cual es una contradicción respecto a la elección de v .

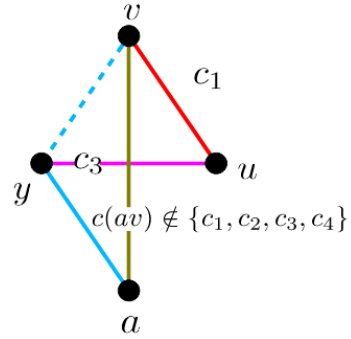


Figura 3.43: Ciclo C_1 .

Por lo tanto, $c(yv) = c(yu) = c(yw) = c(yx)$ para todo $y \in S_2$.

Afirmación. 7.4 $S_2 \cup A$, tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Demostración. Por la afirmación 3 y por la afirmación 7.2, sabemos que S_2 y A tienen la propiedad de la dependencia respecto a v . Solo resta probar que si $a \in A$ y $y \in S_2$, entonces $c(vy) = c(ya)$ o $c(va) = c(ya)$, por la afirmación 6, sabemos que $c(ya) = c(vy)$ o $c(ya) = c(au)$ y como $c(au) = c(av)$ (por la afirmación 1), entonces $c(ya) = c(vy)$ o $c(ya) = c(va)$. Por lo tanto, concluimos que $S_2 \cup A$ tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Por la proposición 3.1.1, sabemos que existe un vértice b tal que $d_{\langle S_2 \cup A \rangle}^c(b) \leq \frac{|S_2 \cup A| + 1}{2}$. Recordemos que $|S \cup A| = n - 4$ y como $S = S_1 \cup S_2$, entonces $|S_2 \cup A| \leq n - 4$, lo que implica que $d_{\langle S_2 \cup A \rangle}^c(b) \leq \frac{n-3}{2}$. Sobre b tenemos dos casos; a saber $b \in A$ o $b \in S_2$. En caso de que $b \in A$, recordemos que por la afirmación 1, sabemos que $c(bv) = c(bw) = c(bx) = c(bu)$, por lo que $d_{\langle S_2 \cup A \cup Q \rangle}^c(b) \leq \frac{n-3}{2}$ ya que $c(bv)$ ya es utilizado en $\langle A \rangle$ (ya que $|A| \geq 2$), ahora por la afirmación 5, sabemos que $c(by) = c(bv)$ o $c(by) = c_3$ para toda $y \in S_1$, pero como el $c(bv)$

ya es utilizado tenemos que $d_{\langle S_2 \cup A \cup S_1 \cup Q \rangle}^c(b) \leq \frac{n-3}{2} + 1$; es decir $d_G^c(b) \leq \frac{n-1}{2}$. En caso de que $b \in S_2$, por la afirmación 7.3, tenemos que $c(yv) = c(yx) = c(yw) = c(yu)$, lo que implica que $d_{\langle S_2 \cup A \cup Q \rangle}^c(b) \leq \frac{n-3}{2}$ ya que el color $c(yv)$ ya era utilizado en S_2 (ya que $|S_2| \geq 2$), ahora por la afirmación 5, sabemos que $c(by) = c(bv)$ o $c(by) = c_3$ para toda $y \in S_1$, pero como el $c(bv)$ ya es utilizado tenemos que $d_{\langle S_2 \cup A \cup S_1 \cup Q \rangle}^c(b) \leq \frac{n-3}{2} + 1$; es decir $d_G^c(b) \leq \frac{n-1}{2}$. En cualquier caso tenemos que $d_G^c(b) \leq \frac{n-3}{2}$, lo cual es una contradicción, respecto a la hipótesis del teorema 3.3.1.

Concluimos que $|S_2| \geq 5$.

Para concluir veamos lo siguiente:

Fijémonos en el vértice a' , que cumple $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$ y por la afirmación 1, $c(a'x) = c(a'v) = c(a'u) = c(a'w)$, además $c(a'x)$ ya es utilizado en A (ya que $|A| \geq 2$), así $d_{\langle A \cup Q \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$.

Observemos que como $|S| \geq 1$, entonces $S_1 \neq \emptyset$ o $S_2 \neq \emptyset$.

En caso de que $S_2 = \emptyset$, entonces por las Afirmaciones 4 y 5 se tiene que $d_{\langle A \cup Q \cup S_1 \rangle}^c(a') = d_{\langle A \cup Q \cup S \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2} + 1$. Dado que $A \cup Q \cup S = V(G)$, se tiene que $|A| = |V(G)| - |Q| - |S| = n - 4 - |S|$, como $|S| \geq 1$, entonces $-|S| \leq -1$. Así, $|A| \leq n - 4 - 1$, lo que implica que $d_G^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2} + 1 \leq \frac{n-5+1}{2} + 1 = \frac{n-4+2}{2} = \frac{n-2}{2}$; es decir, $d_G^c(a') \leq \frac{n}{2}$, lo cual es una contradicción con la hipótesis del teorema 3.3.1.

En caso que $S_1 = \emptyset$, entonces $|S| = |S_2|$, por la afirmación 7, tenemos que $|S| \geq 5$ y recordemos que $|A| = n - 4 - |S| = n - 4 - |S|$ y como $-|S| \leq -5$, lo que implica que, $|A| \leq n - 9$. Así, $d_{\langle A \cup Q \rangle}^c(a') \leq \frac{n-9+1}{2} = \frac{n-8}{2}$. Por la afirmación 6, sabemos que $c(a'y) = c(yv)$ o $c(a'y) = c(a'u)$, donde $c(a'u) = c(a'v)$ por afirmación 1. Dado que $c(a'v)$ ya es utilizado en $\langle A \rangle$ (ya que $|A| \geq 2$), entonces solo debemos considerar $c(a'y) = c(yv)$. Como $y \in S_2$ tenemos que $c(yv) \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, por lo que, $d_G^c(a') \leq \frac{n-8}{2} + 4 = \frac{n-8+8}{2} = \frac{n}{2}$, lo que implica una contradicción respecto a la hipótesis del teorema 3.3.1.

Ahora, veamos que sucede si $S_1 \neq \emptyset$ y $S_2 \neq \emptyset$.

En caso de que $y \in S_1$, tenemos que $d_{\langle A \cup Q \cup S_1 \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2} + 1$ (Esto se refiere al análisis que se realizó en el caso $S_2 = \emptyset$).

En caso de que $y \in S_2$, se tiene que $|S_2| \geq 5$ y recordemos que la cardinalidad del conjunto $|A| = n - 4 - |S| = n - 4 - |S_1 \cup S_2| = n - 4 - |S_1| - |S_2|$ (ya que S_1 y S_2 son ajenos). Por la afirmación 7, tenemos $-|S_2| \leq -5$, además como $S_1 \neq \emptyset$, entonces $|S_1| \geq 1$, por lo que, $|A| \leq n - 9 - 1 = n - 10$. Así, $d_{\langle A \cup Q \cup S_1 \rangle}^c(a') \leq \frac{n-10+1}{2} + 1 = \frac{n-7}{2}$. Por la afirmación 6, sabemos que $c(ay) = c(yv)$ o $c(ay) = c(av)$. Dado que $c(av)$ ya es utilizado en $\langle A \rangle$ (ya que $|A| \geq 2$), entonces solo debemos considerar $c(ay) = c(yv)$. Como $y \in S_2$, tenemos que $c(yv) \in \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, pero recordemos que el color c_3 ya es considerado en el caso de que $y \in S_1$, por lo que, $d_G^c(a') \leq \frac{n-7}{2} + 3 = \frac{n-7+6}{2} = \frac{n-1}{2}$, lo que implica una contradicción respecto a la hipótesis del teorema 3.3.1.

En cualquier caso se tiene una contradicción.

Caso 4.2. No existe ningún vértice $x \in V(G) \setminus V(C_3)$ tal que $c(vx) = c_4$ con $c_4 \notin \{c_1, c_2, c_3\}$ y $c(ux) = c(wx) = c_3$.

Debido a que $d^c(v) \geq 5$, entonces debe existir un vértice y en $V(G) - \{u, w\}$ con $c(yv) \neq \{c_1, c_2\}$. Supongamos que $d^c(v) = h$. Sea $A_i = \{a \in V(G) : c(av) = c_i\}$ para $3 \leq i \leq h$. Definimos el conjunto $A = \bigcup_{i=3}^h A_i$.

Afirmación 1. $c(yv) = c(yw) = c(yu)$ para todo vértice y en A .

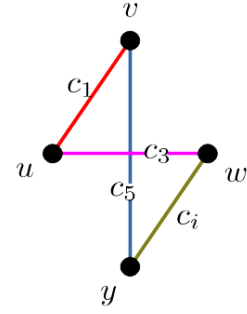


Figura 3.44: $c_3 = c_i$ o $c = c_i$.

Demostración. Sea y arbitrario en A y supongamos que $c_5 = c(yv)$ y $c_i = c(yw)$. Consideremos el ciclo $C = (y, v, u, w, y)$ (véase figura 3.44). Recordemos que $c(vu) \neq c(uw)$ ya que C_3 es un ciclo propiamente coloreado.

Debido a que $y \in A$, entonces $y \in A_i$ para algún $i \in \{3, \dots, t\}$, por la definición de los conjuntos A_i , tenemos que $c(yv) \neq c_1$; es decir, $c(yv) \neq c(vu)$. Si suponemos que $c_3 \neq c_i$ y $c_i \neq c_5$, entonces $c(uw) \neq c(wy)$ y $c(wy) \neq c(yv)$, lo que implicaría que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elección de v . Por lo tanto, $c_3 = c_i$ o $c_i = c_5$.

Caso 1. $c_3 = c_i$.

Llamémosle c_j a $c(yu)$.

Afirmación 1.1 $c_j = c_3$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c_j \neq c_3$. Consideremos dos casos sobre c_j ; a saber, $c_1 = c_j$ o $c_j \neq c_1$.

Caso 1.1. $c_1 = c_j$.

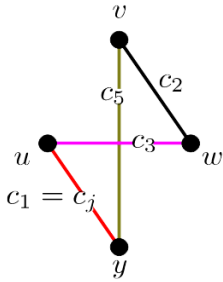


Figura 3.45: Caso $c_1 = c_j$.

Consideremos el ciclo $C_2 = (y, u, w, v, y)$ (véase figura 3.45). Recordemos que $c(vw) \neq c(wu)$ ya que vw y wu son aristas de C_3 y este es propiamente coloreado. Dado que $y \in A$, tenemos que $c(yv) \neq c_2$; es decir, $c(yv) \neq c(vw)$. Como estamos suponiendo $c_j \neq c_3$, entonces $c(wu) \neq c(uy)$. Por la suposición

$c_1 = c_j$ y debido a que $y \in A$, tenemos que $c_5 \neq c_1$, por lo que, $c_j \neq c_5$, lo que implica que $c(uy) \neq c(yv)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elección de v .

Caso 1.2. $c_1 \neq c_j$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (y, u, v, w, y)$ (véase figura 3.46). Recordemos que $c(uv) \neq c(vw)$ ya que C_3 es un ciclo propiamente coloreado.

Por la suposición del caso 1 sabemos que $c(yw) = c_3$ y debido a que $c_3 \neq c_2$, entonces $c(vw) \neq c(wy)$. Sabemos que $c_j \neq c_3$ (por la suposición de la afirmación 1); es decir, $c(yu) \neq c(yw)$. Por último, debido a que $c_1 \neq c_j$, deducimos que $c(yu) \neq c(uv)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elección de v .

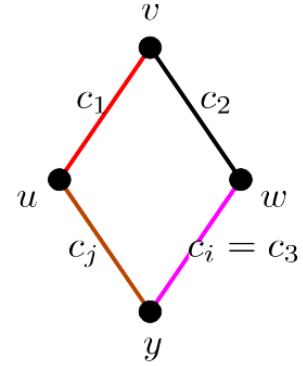


Figura 3.46: Caso $c_1 \neq c_j$.

En cualquier caso llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $c_j = c_3$; es decir, $c(yw) = c(yu)$.

Debido a que $c(yu) = c(yw) = c_3$ (por la afirmación 1.1), si suponemos que $c(vy) \notin \{c_1, c_2, c_3\}$, implicaría una contradicción con la hipótesis del caso 4.2. Por lo tanto, $c_5 = c(yv) \in \{c_1, c_2, c_3\}$, pero como $c_5 \notin \{c_1, c_2\}$, entonces $c_5 = c_3$.

Lo anterior implica que $c(yv) = c(yw) = c(yu)$.

Caso 2. $c_i = c_5$.

Supongamos que $c_j = c(yu)$.

Afirmación 2.1. $c_j = c_5$.

Procediendo por contradicción supongamos que $c_j \neq c_5$. Consideremos dos casos; a saber, $c_1 = c_j$ o $c_j \neq c_1$.

Caso 2.1 $c_1 = c_j$.

Consideremos el ciclo $C_2 = (y, u, w, v, y)$ (véase figura 3.47). Recordemos que $c(vw) \neq c(wu)$ ya que C_3 es un ciclo propiamente coloreado. Debido a que $y \in A$, tenemos que $c(yv) \neq c_2$; es decir, $c(yv) \neq c(vw)$.

Por la suposición $c_1 = c_j$ y debido a que $c_1 \neq c_3$, entonces $c_j \neq c_3$; es decir, $c(wu) \neq c(uy)$. Dado que $c_j \neq c_5$ (por la suposición de la afirmación 2.1), tenemos que $c(uy) \neq c(yv)$.

Lo anterior implica que C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

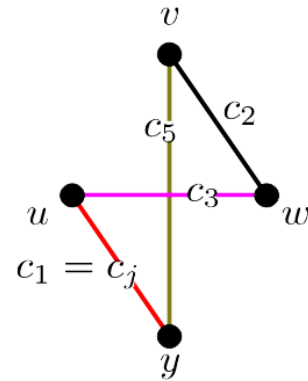


Figura 3.47: Caso $c_1 = c_j$.

Caso 2.2. $c_1 \neq c_j$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (y, u, v, w, y)$ (véase figura 3.48). Recordemos que $c(uv) \neq c(vw)$, ya que uv y vw son aristas de C_3 y este es propiamente coloreado. Por la suposición del caso 2, sabemos que $c_i = c_5$ y debido a que $c_2 \neq c_5$, entonces $c_2 \neq c_i$; es decir, $c(vw) \neq c(wy)$. Por otro lado, por la suposición de la afirmación 2.1, sabemos que $c_j \neq c_5$, lo que implica que $c(yu) \neq c(yw)$. Por último, debido a que $c_1 \neq c_j$, tenemos que $c(yu) \neq c(uv)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elección de v .

En cualquier caso llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $c_j = c_5$; es decir, $c_5 = c(yu)$.

Por la afirmación 2.1 y por el caso 2, tenemos que $c_i = c_5 = c_j$. Concluimos que $c(yv) = c(yw) = c(yu)$.

En cualquier caso se cumple que para todo vértice y en A , $c(yv) = c(yw) = c(yu)$.

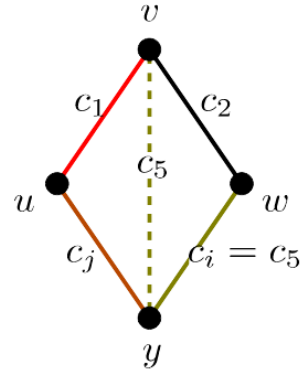


Figura 3.48: Caso $c_1 \neq c_j$.

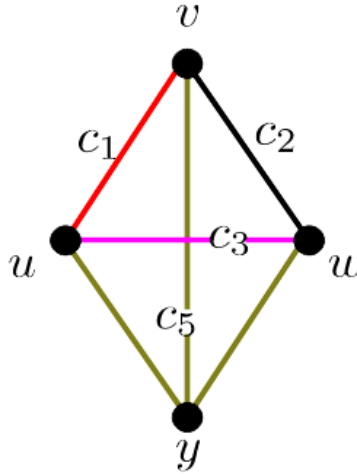


Figura 3.49: $c = c(yv) = c(yw) = c(yu)$.

Afirmación 2. A tiene la propiedad de dependencia respecto de v .

Demostración. Procediendo por contradicción supongamos que existe un par de vértices a y a' en A tal que $c(av) \neq c(aa')$ y $c(aa') \neq c(a'v)$. Consideremos el ciclo $C = (a, a', u, v, a)$ (véase figura 3.50). Probaremos que C es un ciclo propiamente coloreado. Como $\{a, a'\} \subseteq A$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \in A_j$ y $a' \in A_i$ para algunos i y j en $\{3, \dots, h\}$, lo que implica que $c(av) = c_j$ y $c(a'u) = c(a'v) = c_i$ (Por la afirmación 1). También supongamos que $c(aa') = c_6$. Por la definición de A_i y A_j tenemos en particular que, $c(av) \neq c_1$, $c(a'v) \neq c_1$ y por la afirmación 1, tenemos que $c(av) = c(aw) = c(au)$ y $c(a'v) = c(a'w) = c(a'u)$. Como $c(av) \neq c_1$, entonces $c(uv) \neq c(va)$. Debido a que $c(a'v) = c(a'u)$ y $c(a'v) \neq c(aa')$, deducimos que $c(a'u) \neq c(aa')$. Por último, ya que $c(a'u) = c(a'v)$ y como $c(a'v) \neq c_1$, entonces $c(a'u) \neq c_1$; es decir, $c(a'u) \neq c(uv)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , una contradicción.

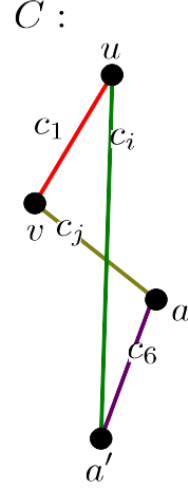


Figura 3.50: Ciclo C .

Por lo tanto, A tiene la propiedad de la dependencia respecto a v . Por la proposición 3.1.1, sabemos que existe un vértice a' en A tal que $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$.

De la misma forma que en el caso anterior, veamos que sucede con los vértices v_s tal que $c(v_s v) \in \{c_1, c_2\}$, con $v_s \notin \{u, w\}$. Sea $S = V(G) \setminus (V(C_3) \cup A)$.

Afirmación 3. $|S| \geq 2$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $|S| \leq 1$. Recordemos que $|V(G)| = |A| + |S| + |V(C_3)| = |A| + |S| + 3$. Por lo anterior, tenemos que $|A| = n - 3 - |S|$, como $|S| \leq 1$, implica que $|S| = 0$ o $|S| = 1$.

En caso de que $|S| = 0$ tenemos que $|A| = n - 3$. Luego, fijémonos en a' , como $|A| = n - 3$, entonces $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2} = \frac{n-3+1}{2} = \frac{n-2}{2}$. Debido a que $c(a'v) = c(a'w) = c(a'u)$ y por el teorema 3.1.1, sabemos que $c(a'v)$ ya era utilizado en $\langle A \rangle$ (ya que $|A| \geq 2$). Así, deducimos que $d^c(a')$ no aumenta en G ; es decir, $d_G^c(a') \leq \frac{n-2}{2}$, contradiciendo la hipótesis del teorema 3.3.1.

En caso de que $|S| = 1$ tenemos que $|A| = n - 3 - 1$. Luego fijémonos en a' , como $|A| = n - 4$, entonces $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2} = \frac{n-4+1}{2} = \frac{n-3}{2}$. Debido a que $c(a'v) = c(a'w) = c(a'u)$ y por el teorema 3.1.1, sabemos que $c(a'v)$ ya era utilizado en A . Así deducimos que $d_{\langle A \rangle \cup C_3}^c(a') \leq \frac{n-3}{2}$. En S , solo existe un vértice, entonces $d_G^c(a') \leq \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$, contradiciendo la hipótesis del teorema 3.3.1.

En cualquier caso se llega a una contradicción. Por lo tanto, $|S| \geq 2$.

Afirmación 4. $c(ay) \in \{c_1, c_2, c(au)\}$ para todo y en S y para todo a en A .

Demostración. Sean y y a arbitrarios en S y A respectivamente y supongamos que $c_j = c(yv)$, $c(au) = c_k$ y $c_i = c(ya)$.

Notemos que como $y \notin A$, entonces $c(yv) \in \{c_1, c_2\}$. Así, tenemos dos casos; a saber $c_1 = c_j$ o $c_j = c_2$.

Caso 4.1. $c_2 = c_j$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (a, y, v, u, a)$ (véase figura 3.51). Como $c_2 \neq c_1$ y debido a que $c_2 = c_j$, entonces $c_j \neq c_1$, lo que implica que $c(yv) \neq c(vu)$. Debido a que $a \in A$, tenemos que $c(au) = c(av)$ y $c(av) \neq c_1$, por lo que deducimos que $c(au) \neq c_1$; es decir, $c(vu) \neq c(ua)$. Si suponemos que $c(ua) \neq c(ay)$ y $c(ay) \neq c(yv)$, C_1 sería un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elección de v . Por lo tanto, $c(ay) = c(au)$ o $c(ay) = c(yv)$.

Por lo anterior, tenemos que $c(yv) = c(ay)$ o $c(ay) = c(au)$; es decir, $c(ay) \in \{c(yv), c(au)\}$. Como $c(yv) \in \{c_1, c_2\}$, entonces $c(ay) \in \{c_1, c_2, c(au)\}$ para todo $y \in S$ y para todo $a \in A$.

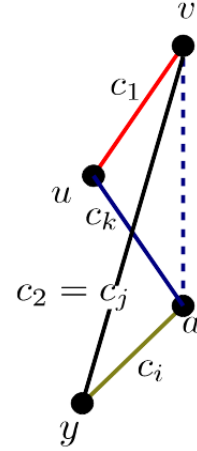


Figura 3.51: Caso $c_2 = c_j$

Caso 4.2. $c_1 = c_j$.

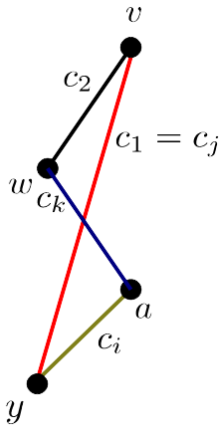


Figura 3.52: Caso $c_1 = c_j$

Consideremos el ciclo $C_2 = (a, y, v, w, a)$ (véase figura 3.52). Como $c_2 \neq c_1$ y debido a que $c_1 = c_j$, entonces $c_j \neq c_2$, lo que implica que $c(yv) \neq c(vw)$. Debido a que $a \in A$, tenemos que $c(aw) = c(av)$ y $c(av) \neq c_2$, por lo que deducimos que $c(aw) \neq c_2$; es decir, $c(vw) \neq c(wa)$. Si suponemos que $c(wa) \neq c(ay)$ y $c(ay) \neq c(yv)$, C_2 sería un ciclo propiamente coloreado de longitud 4 que contiene a v , contradiciendo la elección de v . Por lo tanto, $c(ay) = c(aw)$ o $c(ay) = c(yv)$.

Por lo anterior, tenemos que $c(yv) = c(ay)$ o $c(ay) = c(aw)$; es decir, $c(ay) \in \{c(yv), c(aw)\}$. Pero $c(aw) = c(au)$ y como $c(yv) \in \{c_1, c_2\}$, entonces $c(ay) \in \{c_1, c_2, c(au)\}$ para todo $y \in S$ y para todo $a \in A$.

En cualquier caso tenemos que $c(ay) \in \{c_1, c_2, c(au)\}$ para todo $y \in S$ y para todo $a \in A$.

Para finalizar fijémonos en a' , sabemos que $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2}$.

Recordemos que $|A| = n - 3 - |S|$, como $|S| \geq 2$, entonces $-|S| \leq -2$, lo que implica que $|A| \leq n - 3 - 2 = n - 5$. Así, $d_{\langle A \rangle}^c(a') \leq \frac{|A|+1}{2} \leq \frac{n-5+1}{2} = \frac{n-4}{2}$. Debido a que A tiene la propiedad de la dependencia respecto de v , esto implica que $c(a'v)$ ya era utilizado en $\langle A \rangle$. Por último, por la afirmación 4, sabemos que $c(a'y) \in \{c_1, c_2, c(a'u)\}$, pero como $c(a'u) = c(a'v) = c(a'w)$ ya era utilizado en $\langle A \rangle$, entonces $d_{\langle A \cup V(C_3) \cup S \rangle}^c = d_G^c(a') \leq$

$\frac{n-4}{2} + 2 = \frac{n}{2}$. Lo que contradice la hipótesis del teorema 3.3.1.

En cualquier caso se llega a una contradicción. Por lo tanto, si $n \geq 9$, entonces todo vértice de G está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

Concluimos que, si $n \geq 4$ y $\delta^c(G) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces todo vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4. ■

Capítulo 4

Ciclos propiamente coloreados de longitud al menos 5

En este capítulo, probaremos que si $\delta^c(K_n) \geq \frac{n+1}{2}$ (para $n \geq 13$), entonces todo vértice de K_n pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5.

La prueba de este teorema no se incluyó en el capítulo anterior debido a su extensión, además que necesitamos de una definición extra, misma que definiremos en el presente capítulo.

Para mejor desarrollo de la demostración, la dividiremos en 3 casos.

Definición 4.0.1 Sean G una gráfica, $C = (v_1, \dots, v_l, v_1)$ un ciclo y v en $V(G) \setminus V(C)$. Decimos que v **aumenta en C** si $c(vv_i) = c(v_i v_{i+1})$ (respectivamente v **disminuye en C** si $c(vv_i) = c(v_i v_{i-1})$), para cada i en $\{1, \dots, l\}$, donde los índices son tomados módulo l .

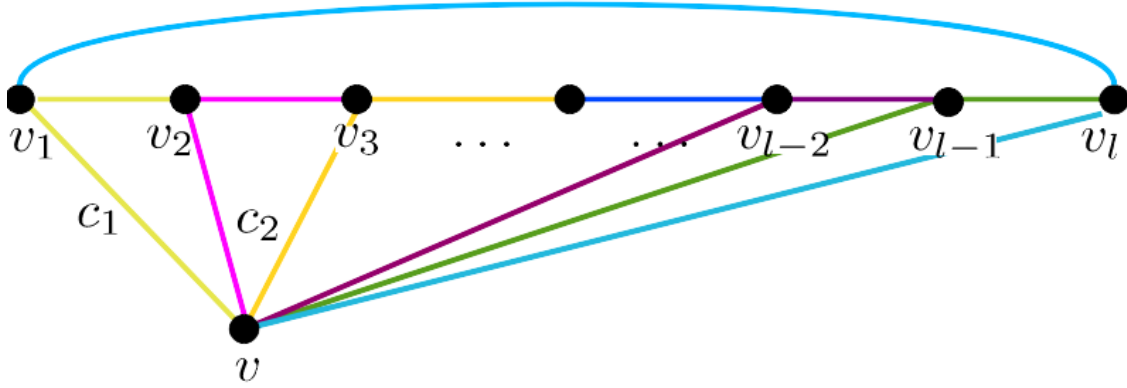


Figura 4.1: v aumenta en C .

Definición 4.0.2 Sean G una gráfica, C un ciclo y v en $V(G) \setminus V(C)$. Decimos que v **sigue los colores de C** , si v aumenta en C o v disminuye en C .

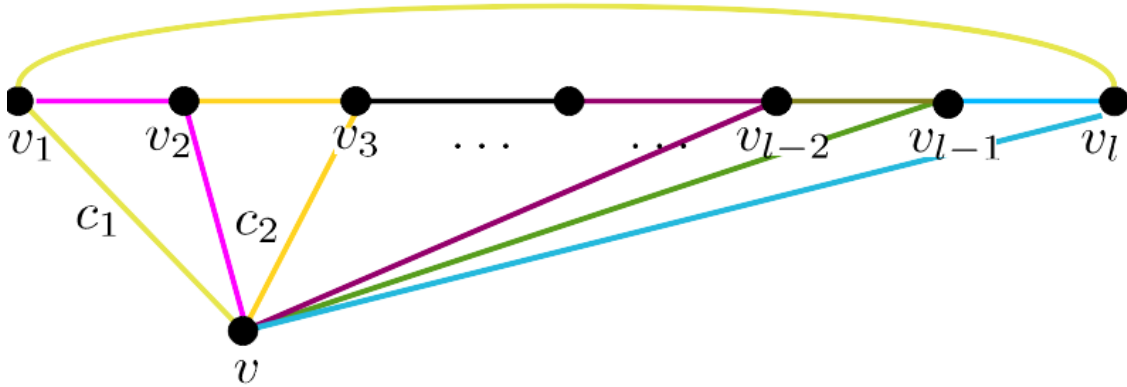


Figura 4.2: v disminuye en C .

Teorema 4.0.1 Sean G una gráfica completa de orden n , para $n \geq 13$ y $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una coloración de las aristas de G . Si $\delta^c(G) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces todo vértice pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice v en G que no pertenece a un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5. Debido a que $\delta^c(G) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces $d^c(z) \geq \frac{n+1}{2}$ para cada vértice z en G . Consideremos un ciclo propiamente coloreado de longitud máxima, digamos $C = (v_1, v_2, \dots, v_l, v_1)$ y por el corolario 2.3.1 sabemos que la longitud de C es al menos $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 1$. Por la elección de v , sabemos que $v \notin V(C)$. Debido a que $n \geq 13$, entonces $\frac{n+1}{3} + 1 \geq \frac{13+1}{3} + 1 = \frac{17}{3}$, además $\lceil \frac{13+1}{3} \rceil \geq \frac{13+1}{3}$, lo que implica que $\lceil \frac{13+1}{3} \rceil + 1 \geq \frac{17}{3}$; es decir, $l \geq 6$. Dividimos la prueba en tres casos, las cuales van a ser las subsecciones del capítulo 4.

4.1. Caso 1

Caso 1. $c(vv_i) = c_1$ para todo $v_i \in V(C)$ y para algún c_1 .

Recordemos que $d^c(v) \geq \frac{n+1}{2}$ y debido a que $c(vv_i) = c_1$ para todo v_i en C , entonces $d^c_{(V(G) \setminus V(C))}(v) \geq \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2} \geq \frac{13-1}{2} = 6$. Sea $D = \{u \in V(G) \setminus (V(C) \cup \{v\}) : c(uv) \neq c_1\}$, por lo anterior deducimos que $D \neq \emptyset$.

Afirmación 1. $c(uv) = c(uv_i)$ para todo u en D y v_i en C .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice v_i en C tal que $c(uv_i) \neq c(uv)$. Supongamos que $c_2 = c(uv)$ y $c_3 = c(uv_i)$.

Afirmación 1.1 $c(v_{i-1}v_i) = c_3$ o $c(v_{i+1}v_{i+2}) = c_1$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(v_{i-1}v_i) \neq c_3$ y $c(v_{i+1}v_{i+2}) \neq c_1$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_i) \cup (v_i, u, v, v_{i+1}) \cup (v_{i+1}, C, v_1)$ (véase figura 4.3). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. La trayectoria $(v_{i+1}, C, v_1) \cup (v_1, C, v_i)$ es una trayectoria propiamente coloreada ya que esta contenida en C y C es propiamente coloreado. Debido a que estamos suponiendo $c(v_{i-1}v_i) \neq c_3$ y $c(v_{i+1}v_{i+2}) \neq c_1$, deducimos lo siguiente $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iu)$ y $c(vv_{i+1}) \neq c(v_{i+1}v_{i+2})$. Por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(v_iu) \neq c(uv)$. Por la elección de u , sabemos que $c_2 \neq c_1$; es decir, $c(uv) \neq c(vv_{i+1})$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $3 + l - 1$ que contiene a v . Recordemos que $l \geq 6$, por lo que $l - 1 \geq 5$. Así, la longitud de C_1 es $3 + l - 1 \geq 8$, lo que implica que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , una contradicción.

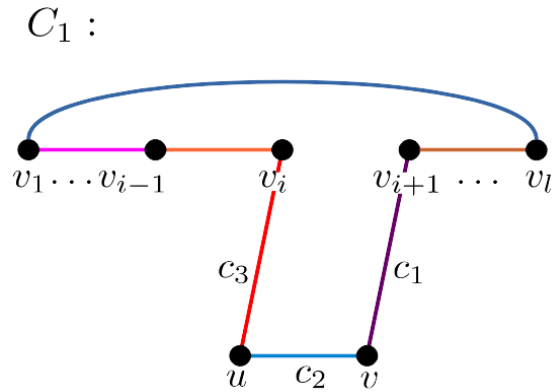


Figura 4.3: Ciclo C_1

Por lo tanto, $c(v_{i-1}v_i) = c_3$ o $c(v_{i+1}v_{i+2}) = c_1$.

A continuación veamos que en cualquiera de los anteriores casos, llegamos a una contradicción.

Caso 1.1 $c(v_{i-1}v_i) = c_3$.

Afirmación 1.1.1 . $c(v_{i-3}v_{i-2}) = c_1$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(v_{i-3}v_{i-2}) \neq c_1$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-2}) \cup (v_{i-2}, v, u, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.4). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que $(v_{i-2}, C, v_1) \cup (v_1, C, v_i)$, es una trayectoria propiamente coloreada ya que esta contenida en C y C es propiamente coloreado. Debido a que estamos suponiendo $c(v_{i-3}v_{i-2}) \neq c_1$ y como $c_1 = c(v_{i-2}v)$, entonces $c(v_{i-3}v_{i-2}) \neq c(v_{i-2}v)$. Por la elección de u , sabemos que $c_2 \neq c_1$; es decir, $c(v_{i-2}v) \neq c(vu)$. Por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(vu) \neq c(uv_i)$. Por último, como C es propiamente coloreado, entonces $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_i v_{i+1})$ y por la hipótesis del caso 1.1, sabemos que $c(v_{i-1}v_i) = c_3$, lo que implica que $c(v_{i+1}v_i) \neq c_3$; es decir, $c(uv_i) \neq c(v_i v_{i+1})$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $3 + l - 2 = l + 1$, que contiene a v . Recordemos que $l \geq 6$, por lo que $l + 1 \geq 7$, lo que implica que C es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(v_{i-3}v_{i-2}) = c_1$.

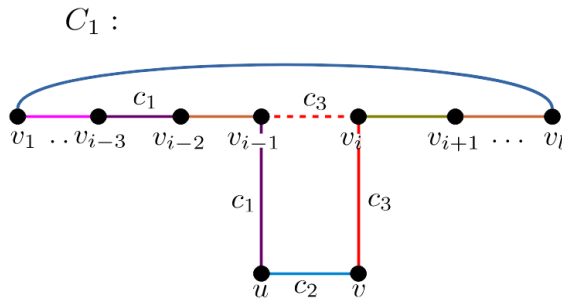


Figura 4.5: Ciclo C_1

$C_1 :$

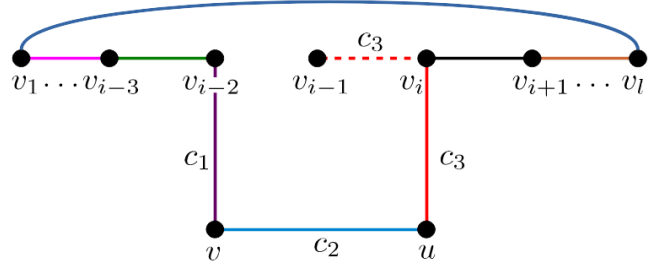


Figura 4.4: Ciclo C_1

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-1}) \cup (v_{i-1}, v, u, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.5). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que $(v_i, C, v_1) \cup (v_1, C, v_{i-1})$ es una trayectoria propiamente coloreada ya que está contenida en C y C es propiamente coloreado. Debido a la afirmación 1.1.1, sabemos que $c(v_{i-3}v_{i-2}) = c_1$ y como $c(v_{i-3}v_{i-2}) \neq c(v_{i-2}v_{i-1})$, entonces $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c_1$; es decir, $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c(v_{i-1}v)$. Por la elección de

u , sabemos que $c_2 \neq c_1$; es decir, $c(v_{i-1}v) \neq c(vu)$. Por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(vu) \neq c(uv_i)$. Por último, como C es propiamente coloreado, entonces $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_i v_{i+1})$ y por la hipótesis del caso 1.1, sabemos que $c(v_{i-1}v_i) = c_3$, entonces $c(v_{i+1}v_i) \neq c_3$; es decir, $c(uv_i) \neq c(v_i v_{i+1})$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $3 + l - 1 = l + 2$ que contiene a v . Dado que $l \geq 6$, entonces $l + 2 \geq 8$. Por lo tanto, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una

contradicción.

Caso 1.2 $c(v_{i+1}v_{i+2}) = c_1$.

Afirmación 1.2.1 $c(v_{i-1}v_i) = c_3$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(v_{i-1}v_i) \neq c_3$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_i) \cup (v_i, u, v, v_{i+2}) \cup (v_{i+2}, C, v_1)$ (véase figura 4.6). Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que $(v_{i+2}, C, v_1) \cup (v_1, C, v_i)$ es una trayectoria propiamente coloreada ya que esta contenida en C y C es propiamente coloreado. Por la suposición de la afirmación 1.2.1, tenemos que $c(v_{i-1}v_i) \neq c_3$; es decir, $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iu)$. Por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(v_iu) \neq c(uv)$. Por la elección de u , sabemos que $c_2 \neq c_1$; es decir, $c(uv) \neq c(vv_{i+2})$. Como C es propiamente coloreado, entonces $c(v_{i+1}v_{i+2}) \neq c(v_{i+2}v_{i+3})$ y por la suposición del caso 1.2, sabemos que $c(v_{i+1}v_{i+2}) = c_1$, lo que implica que $c(v_{i+2}v_{i+3}) \neq c_1$; es decir, $c(vv_{i+2}) \neq c(v_{i+2}v_{i+3})$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $3 + l - 2 = l + 1$, que contiene a v . Recordemos que $l \geq 6$, por lo que $l + 1 \geq 7$, lo que implica que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

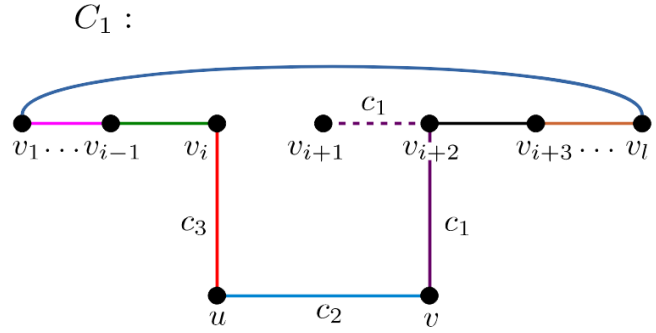


Figura 4.6: Ciclo C_1

Por lo tanto, $c(v_{i-1}v_i) = c_3$.

Afirmación 1.2.2. $c(v_{i-2}v_{i-1}) = c_1$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c_1$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-1}) \cup (v_{i-1}, v, u, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.7).

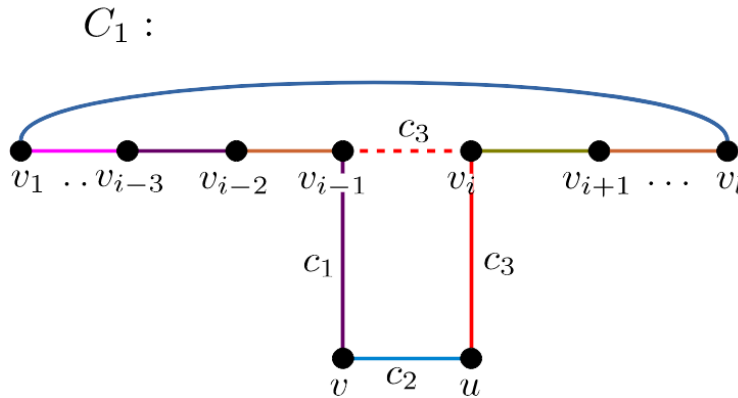


Figura 4.7: Ciclo C_1

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que $(v_i, C, v_1) \cup (v_1, C, v_{i-1})$, es una trayectoria propiamente coloreada ya que está contenida en C . Debido a la suposición de la afirmación 1.2.2, tenemos que $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c_1$; es decir, $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c(v_{i-1}v)$.

Por la elección de u , sabemos que $c_2 \neq c_1$; es decir, $c(v_{i-1}v) \neq c(vu)$. Por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(vu) \neq c(uv_i)$. Por último, como $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iv_{i+1})$ y por la afirmación 1.2.1, sabemos que $c(v_{i-1}v_i) = c_3$, entonces $c(v_{i+1}v_i) \neq c_3$; es decir, $c(uv_i) \neq c(v_iv_{i+1})$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $3 + l - 1 = l + 2$ que contiene a v . Dado que $l \geq 6$, entonces $l + 2 \geq 8$. Por lo tanto, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5, que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(v_{i-2}v_{i-1}) = c_1$.

Luego consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-2}) \cup (v_{i-2}, v, u, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.8).

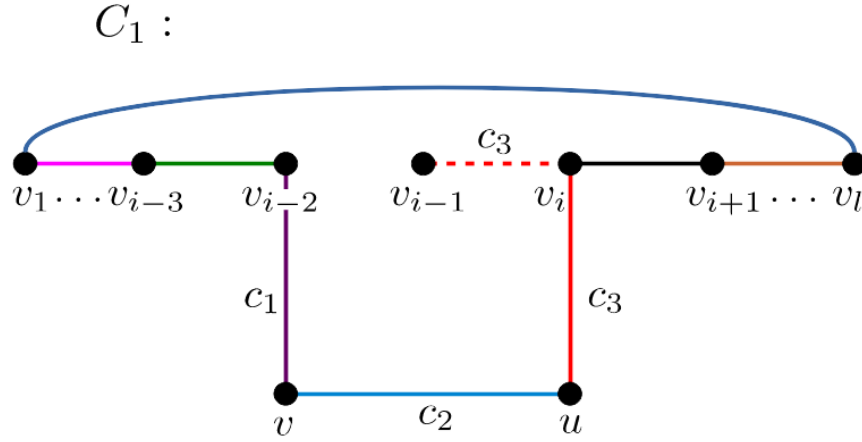


Figura 4.8: Ciclo C_1

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que (v_1, C, v_{i-2}) y (v_i, C, v_1) , son trayectorias propiamente coloreadas ya que C es propiamente coloreado. Por la elección de u , sabemos que $c_2 \neq c_1$; es decir, $c(uv) \neq c(vv_{i-2})$. Dado que C es propiamente coloreado tenemos que $c(v_{i-1}v_{i-2}) \neq c(v_{i-2}v_{i-3})$ y por la afirmación 1.2.2, sabemos que $c(v_{i-1}v_{i-2}) = c_1$, entonces $c(v_{i-2}v_{i-3}) \neq c_1$; es decir, $c(v_{i-3}v_{i-2}) \neq c(v_{i-2}v)$. Por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(vu) \neq c(uv_i)$. Por último, como $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iv_{i+1})$ y por la afirmación 1.2.1 sabemos que $c(v_{i-1}v_i) = c_3$, entonces $c(v_{i+1}v_i) \neq c_3$; es decir, $c(uv_i) \neq c(v_iv_{i+1})$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $3 + l - 2 = l + 1$, que contiene a v . Recordemos que $l \geq 6$, por lo que $l + 1 \geq 7$, lo que implica que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

En cualquier caso se llega a una contradicción.

Por lo tanto, la afirmación 1 es cierta ; es decir, $c(uv) = c(uv_i)$ para todo u en D y v_i en C .

Afirmación 2.0 $d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(u) \geq \frac{n+1}{2}$ para todo u en D .

Demostración. Sea u en D arbitrario. Por la afirmación 1, tenemos que $d_{\langle V(G) \setminus (V(C) \cup \{v\}) \rangle}^c(u) \geq \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$. Por lo tanto, $d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(u) \geq \frac{n+1}{2}$.

Afirmación 2. $d_{\langle D \cup \{v\} \rangle}^c(u) \geq 6$, para todo u en D .

Demostración. Recordemos que $d^c(v) \geq \frac{n+1}{2}$; como en D solo se excluye el color c_1 , entonces $|D| \geq \frac{n-1}{2}$.

Definamos el conjunto $M = V(G) \setminus (V(C) \cup V(D) \cup \{v\})$.

Como $|V(G)| = n$ y $|V(C)| = l \geq \frac{n+1}{3} + 1 = \frac{n+4}{3}$, entonces

$$\begin{aligned}
 |M| &= n - l - |D| - 1 \\
 &\leq n - \frac{n+4}{3} - \frac{n-1}{2} - 1 \\
 &= \frac{6n - 2n - 8 - 3n + 3 - 6}{6} \\
 &= \frac{n-11}{6}
 \end{aligned}$$

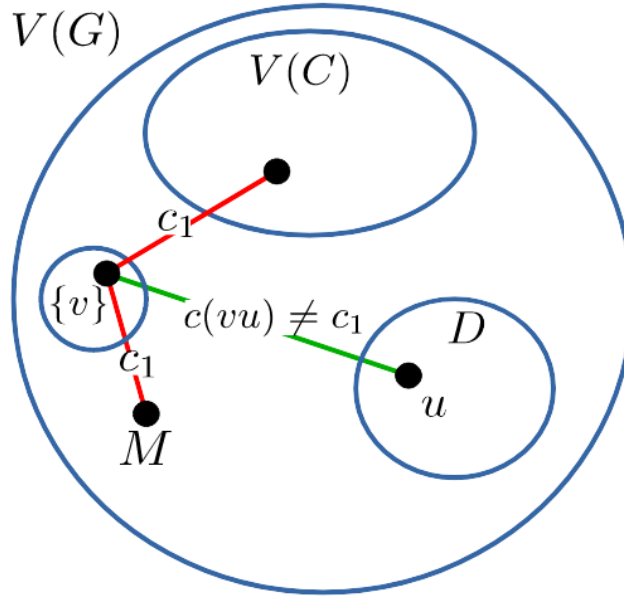


Figura 4.9: Conjuntos M , D y $V(C)$

Sea u un vértice arbitrario de D . Como $d^c_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}(u) \geq \frac{n+1}{2}$ (por la afirmación 2.0) y $|D \cup \{v\}| = |V(G)| - |V(C)| - |M|$, entonces

$$\begin{aligned}
d_{\langle D \cup \{v\} \rangle}^c(u) &\geq d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(u) - |M| \\
&\geq \frac{n+1}{2} - |M| \\
&\geq \frac{n+1}{2} - \frac{n-11}{6} \\
&= \frac{3n+3-n+11}{6} \\
&= \frac{2n+14}{6} \\
&\geq \frac{26+14}{6} \\
&= \frac{40}{6} \geq 6
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d_{\langle D \cup \{v\} \rangle}^c(u) \geq 6$, para todo u en D .

Afirmación 2.1 $|M| \neq 0$.

Sea v_i en $V(C)$.

Afirmación 2.1.1. D tiene la propiedad de la dependencia respecto a v_i .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existen $\{u, u'\}$ contenidos en D tal que $c(v_i u) \neq c(u u')$ y $c(v_i u') \neq c(u u')$.

Afirmación 2.1.1.1 $c(u u') \neq c(u' v)$.

Demostración. Por la afirmación 1, sabemos que $c(v u') = c(u' v_j)$ para todo v_j en $V(C)$, por lo que $c(v u') = c(u' v_i)$. Debido a que estamos suponiendo que $c(v_i u') \neq c(u u')$ y como $c(v u') = c(u' v_i)$, entonces $c(v u') \neq c(u u')$.

Afirmación 2.1.1.2 $c(v_{i-1} v_i) = c(v v_i)$ o $c(v_{i-1} v_i) = c(v_i u)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, vamos a suponer que sucede $c(v v_i) \neq c(v_{i-1} v_i)$ y también pasa que $c(v_{i-1} v_i) \neq c(v_i u)$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v, v_{i-1}, v_i, u, u', v)$ (véase figura 4.10). Probaremos que C_1 es propiamente coloreado. Por la hipótesis del caso 1, tenemos que $c(v v_i) = c(v v_{i-1})$ y recordemos que $c(v v_i) \neq c(v_{i-1} v_i)$, entonces $c(v v_{i-1}) \neq c(v_{i-1} v_i)$. Por la suposición de la afirmación 2.1.1, sabemos que $c(v_i u) \neq c(u u')$. La afirmación 2.1.1.1 nos dice que $c(u u') \neq c(u' v)$. Por último, como

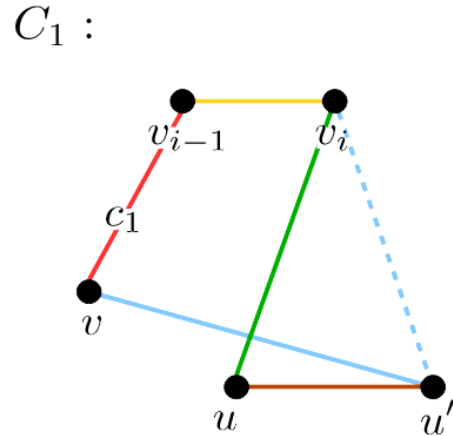


Figura 4.10: $c(v_{i-1} v_i) \neq c(v v_i)$ y $c(v_{i-1} v_i) \neq c(v_i u)$

$u' \in D$, por la definición de D , sabemos que $c(u'v) \neq c_1$; es decir, $c(u'v) \neq c(vv_{i-1})$.

Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 5 que contiene a v , una contradicción.

Por lo tanto, $c(v_{i-1}v_i) = c(vv_i)$ o $c(v_{i-1}v_i) = c(v_iu)$.

Caso 2.1.1.1 $c(v_{i-1}v_i) = c(vv_i)$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (v, v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, u, u', v)$ C_1 :

(véase figura 4.11). Probaremos que C_1 es propiamente coloreado. Por hipótesis del caso 1, sabemos que pasa lo siguiente $c(vv_{i-2}) = c(vv_{i-1})$. $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_{i-2}v_{i-1})$ ya que C es propiamente coloreado y como por la hipótesis del caso 2.1.1.1, sabemos que $c(v_{i-1}v_i) = c(vv_i) = c_1$, entonces $c(vv_{i-2}) \neq c(v_{i-2}v_{i-1})$. Dado que $u \in D$, por la definición de D tenemos que $c(vu) \neq c_1$, por la afirmación 1 sabemos que $c(vu) = c(uv_i)$ y como también $c(v_{i-1}v_i) = c(vv_{i-1}) = c_1$, entonces $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iu)$. Por la suposición de la afirmación 2.1.1, $c(v_iu) \neq c(uu')$. $c(uu') \neq c(u'v)$ por la afirmación 2.1.1.1. Por último, como $u' \in D$, por la definición de D , sabemos que $c(u'v) \neq c_1$; es decir, $c(u'v) \neq c(vv_{i-1})$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 6 que contiene a v , una contradicción.

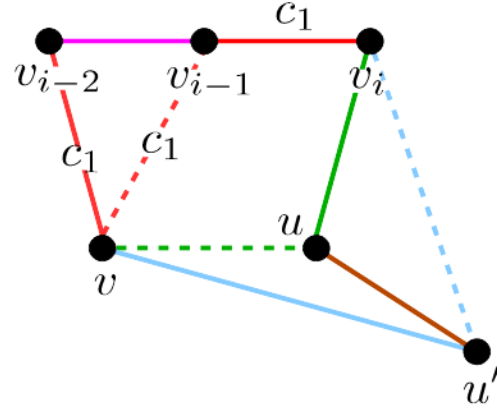


Figura 4.11: $c(v_{i-1}v_i) = c(vv_i)$.

Caso 2.1.1.2 $c(v_{i-1}v_i) = c(v_iu)$.

Consideremos el ciclo $C_1 = (v, v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, u, u', v)$ C_1 :

(véase figura 4.12). Probaremos que C_1 es propiamente coloreado. Como tenemos que $c(v_{i-1}v_i) = c(v_iu)$ y dado que $c(v_iu) \neq c_1$, entonces $c(vv_i) \neq c(v_i v_{i-1})$. $c(v_i v_{i-1}) \neq c(v_{i-1}v_{i-2})$ ya que C es propiamente coloreado. Por la afirmación 1, sabemos que $c(uv_{i-2}) = c(uv_i)$ y como $c(v_i v_{i-1}) = c(uv_i)$, entonces obtenemos que $c(v_{i-1}v_{i-2}) \neq c(v_{i-2}u)$. Por la suposición de la afirmación 2.1.1, $c(v_iu) \neq c(uu')$ y dado que $c(v_{i-2}u) = c(v_iu)$, entonces $c(v_{i-2}u) \neq c(uu')$. $c(uu') \neq c(u'v)$ por la afirmación 2.1.1.1. Por último, como $u' \in D$, por la definición de D , sabemos que $c(u'v) \neq c_1$; es decir, $c(u'v) \neq c(vv_{i-1})$. Por lo anterior C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 6 que contiene a v , una contradicción.

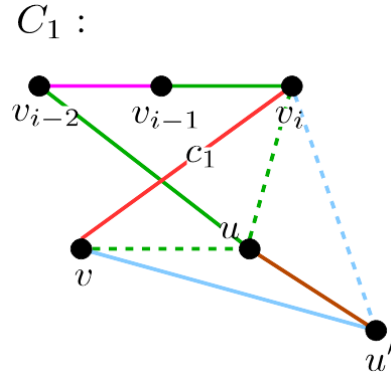


Figura 4.12: $c(v_{i-1}v_i) = c(vv_i)$.

ción.

En ambos casos, obtenemos una contradicción. Por lo tanto, D tiene la propiedad de la dependencia respecto a v_i .

Por la proposición 3.1.1, sabemos que existe u_1 en D tal que $d_{\langle D \rangle}^c(u_1) \leq \frac{|D|+1}{2}$.

Como $|M| = 0$, entonces $|D| = |V(G)| - 1 - |V(C)| - |M| \leq n - 1 - (\frac{n+4}{3}) = \frac{2n-7}{3}$.

Lo anterior implica que $d_{\langle D \rangle}^c(u_1) \leq \frac{|D|+1}{2} \leq \frac{\frac{2n-7}{3}+1}{2} = \frac{2n-4}{6}$.

Por la afirmación 1, $c(vu_1) = c(u_1v_i)$ para todo v_i en $V(C)$. Por lo que $d_{\langle D \cup \{v\} \cup V(C) \rangle}^c(u_1) = d_G^c(u_1) \leq \frac{2n-4}{6} + 1 = \frac{2n+2}{6} = \frac{n+1}{3} \leq \frac{n}{2}$; es decir, $d_G^c(u_1) \leq \frac{n}{2}$, una contradicción, respecto a la hipótesis del teorema 4.0.1.

Por lo tanto, $|M| \neq 0$.

Por otro lado, sea u en D , por la afirmación 2, sabemos que existe vértice w en D tal que $c(uw) \neq c(uv)$. Excluyendo a los vértices $\{u, v\}$, por la afirmación 2, sabemos que $d_{\langle D - \{u\} \rangle}^c(w) \geq 6 - 2$, lo que implica que existe un vértice z en D tal que $c(uw) \neq c(wz)$. De la misma forma, excluyendo a los vértices $\{v, u, w\}$, por la afirmación 2, sabemos que $d_{\langle D - \{u, w\} \rangle}^c(z) \geq 6 - 3$, lo que implica que existe un vértice x en D tal que $c(wz) \neq c(zx)$. Por lo anterior, $W = (v, u, w, z, x)$ es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 4.

$W :$

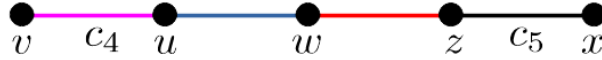


Figura 4.13: Trayectoria propiamente coloreada W .

Luego, supongamos que $c(vu) = c_4$ y $c(zx) = c_5$. Definimos los conjuntos $X = \{a \in V(G) \setminus (V(C) \cup V(W)) : c(ax) \neq c_5\}$ y $Y = \{a \in V(G) \setminus (V(C) \cup V(W)) : c(av) \neq c_4\}$. Sea $n' = |V(G) \setminus V(C)|$.

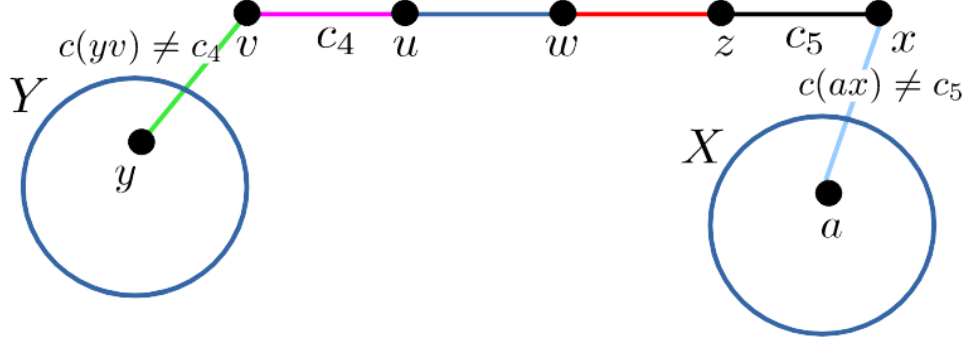


Figura 4.14: Conjuntos X e Y

Afirmación 3.0.1 $n' \leq \frac{2n-4}{3}$.

Demostración. Dado que $|V(C)| = l \geq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 1 \geq \frac{n+1}{3} + 1 = \frac{n+4}{3}$ y como $|V(G)| = n$, entonces $|V(G) \setminus V(C)| = n - |V(C)| \leq n - \frac{n+4}{3} = \frac{3n-n-4}{3} = \frac{2n-4}{3}$; es decir, $n' = |V(G) \setminus V(C)| \leq \frac{2n-4}{3}$.

Por lo tanto, $n' \leq \frac{2n-4}{3}$.

Afirmación 3.0.2. $\frac{n+1}{2} \geq \frac{3n'+6}{4}$.

Demostración. Por la afirmación 3.0.1, tenemos que $n' \leq \frac{2n-4}{3}$, por lo que, $3n' \leq 2n - 4$; $3n' + 4 \leq 2n$. Así, $n \geq \frac{3n'+4}{2}$. Lo anterior implica que $\frac{n+1}{2} \geq \frac{3n'+6}{4}$.

Afirmación 3. $|X \cap Y| > \frac{n'}{2}$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $|X \cap Y| \leq \frac{n'}{2}$. Por otro lado, por la afirmación 2.0, sabemos que $d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(u) \geq \frac{n+1}{2}$, y como $\frac{n+1}{2} \geq \frac{\frac{3n'+4}{2}+1}{2} = \frac{3n'+6}{4}$ (por la afirmación 3.0.2), entonces $d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(u) \geq \frac{3n'+6}{4}$.

Para acotar las cardinalidades de X e Y , afirmamos lo siguiente.

Afirmación 3.1. $c(xv) = c_5$ o $c(xv) = c_4$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(xv) \notin \{c_4, c_5\}$. Consideremos el ciclo $C_1 = W \cup (x, v)$ (véase figura 4.15). Recordemos que W es un trayectoria propiamente coloreada de longitud 4. Debido a que $c(vu) = c_4$ y $c(zx) = c_5$, tenemos de la suposición que $c(zx) \neq c(xv)$ y $c(xv) \neq c(vu)$. Por lo anterior, C es un ciclo propiamente coloreado de longitud 5 que contiene a v , contradiciendo la elección de v .

Por lo tanto, $c(xv) = c_5$ o $c(xv) = c_4$.

Notemos que $|V(G) \setminus (V(C) \cup V(W))| = |V(G) \setminus V(C)| - |V(W)| = n' - 5$.

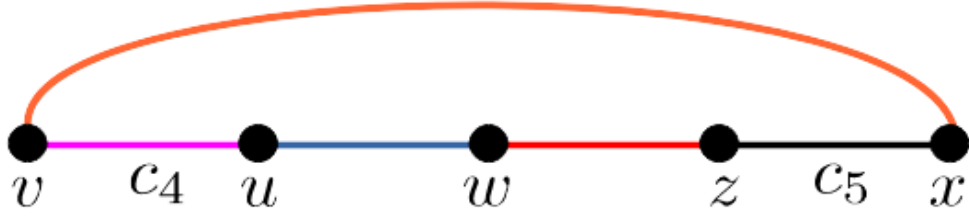


Figura 4.15: Ciclo C_1 .

Por la afirmación 3.1, sabemos que $c(xv) = c_5$ o $c(xv) = c_4$, sin pérdida de generalidad supongamos que $c(xv) = c_4$. Por la afirmación 2.0 y por la afirmación 3.0.2, tenemos que $d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(x) \geq \frac{3n'+6}{4}$, esto implica que $|X| \geq \frac{3n'+6}{4} - 4$. También, sabemos por la hipótesis del Caso 1 que $d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(v) \geq \frac{n-1}{2}$ y como $M \neq \emptyset$ entonces $d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(v) \geq \frac{n+1}{2}$, así por la Afirmación 3.0.2, tenemos que $d_{\langle V(G) \setminus V(C) \rangle}^c(v) \geq \frac{3n'+4}{4}$ y debido a que $c(xv) = c_4$, deducimos que $|Y| \geq \frac{3n'+6}{4} - 3$.

Por nuestra suposición tenemos que $|X \cap Y| \leq \frac{n'}{2}$ y dado que $n' - 5 = |V(G) \setminus (V(C) \cup V(W))|$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
 n' - 5 &= |V(G) \setminus (V(C) \cup V(W))| \\
 &\geq |X \cup Y| \\
 &= |Y| + |X| - |X \cap Y| \\
 &\geq \frac{3n' + 6}{4} - 3 + \frac{3n' + 6}{4} - 4 - \frac{n'}{2} \\
 &= \frac{6n' + 12 - 28 - 2n'}{4} \\
 &= \frac{4n' - 16}{4} \\
 &= n' - 4
 \end{aligned}$$

lo que implica que $-5 \geq -4$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $|X \cap Y| > \frac{n'}{2}$.

Afirmación 3.3 $c(vy) = c(yx)$ para todo y en $X \cap Y$.

Demostración. Sea y un vértice arbitrario de $X \cap Y$. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vy) \neq c(yx)$. Consideremos el siguiente ciclo coloreado $C_2 = W \cup (x, y, v)$ (véase figura 4.16). Recordemos que W es una trayectoria propiamente coloreada de longitud 4. Como $y \in X$, entonces por definición de X tenemos que $c(zx) \neq c(xy)$. Debido a que $y \in Y$, entonces por definición de Y tenemos que $c(yv) \neq c(vu)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 6 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(vy) = c(yx)$ para todo y en $X \cap Y$.

Afirmación 4. $X \cap Y$ tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existen $\{r, r'\}$ contenidos en $X \cap Y$, tal que $c(rr') \neq c(rv)$ y $c(rr') \neq c(r'v)$.

Luego consideremos el ciclo $C_2 = (r', v) \cup W \cup (x, r, r')$ (véase figura 4.17). Probaremos que C_2 es un ciclo propiamente coloreado. Dado que $r' \in Y$, tenemos de la definición de Y que $c(r'v) \neq c(vu)$. Recordemos que W es una trayectoria propiamente coloreada. Debido a que $r \in X$, deducimos de la definición de X que $c(zx) \neq c(xr)$. Como $c(rr') \neq c(rv)$ y por la afirmación 3.3, sabemos que $c(rv) = c(rx)$, entonces $c(xr) \neq c(rr')$. Por último, por la suposición de la afirmación 4, tenemos que $c(rr') \neq c(r'v)$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 7 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Así, concluimos que $X \cap Y$ tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Por la proposición 3.1.1, tenemos que existe un vértice r' en $X \cap Y$, tal que $d_{(X \cap Y)}^c(r') \leq \frac{|X \cap Y| + 1}{2}$.

Afirmación 5. $|X \cap Y| \geq 2$.

Demostración. Recordemos que $c(vv_i) = c_1$, para todo v_i en C . Por lo que afirmamos lo siguiente:

Afirmación 5.1 $|V(C)| \leq \frac{n-1}{2}$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $|V(C)| > \frac{n-1}{2}$, lo que implica que v tiene más de $\frac{n-1}{2}$ aristas del color c_1 por lo que su grado de color es a lo más $(n-1)$ aristas, menos las aristas hacia los vértices de C que aportan un mismo color más

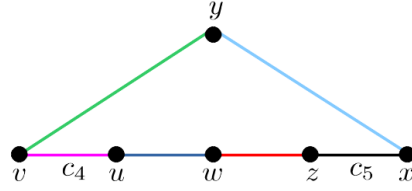


Figura 4.16: Caso $c(vy) \neq c(yx)$.

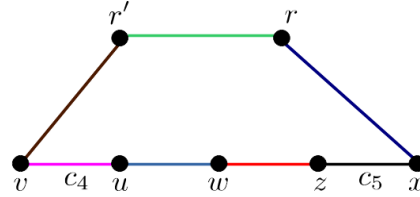


Figura 4.17: Ciclo C_2 .

uno; es decir, $d^c(v) \leq n - 1 - |V(C)| + 1 < n - \frac{n-1}{2} = \frac{2n-n+1}{2} = \frac{n+1}{2}$, lo que implica que $d^c(v) < \frac{n+1}{2}$, lo cual es una contradicción, respecto a la hipótesis del teorema 4.0.1.

Así, concluimos que $|V(C)| \leq \frac{n-1}{2}$.

Luego, como $n' = |V(G) \setminus V(C)| = n - l$, por la afirmación 5.1, deducimos que $n' = n - l \geq n - \frac{n-1}{2} = \frac{2n-n+1}{2} = \frac{n+1}{2}$; es decir, $n' \geq \frac{n+1}{2}$. Debido a la afirmación 3, sabemos que $|X \cap Y| > \frac{n'}{2}$, por lo anterior tenemos que $|X \cap Y| > \frac{n'}{2} \geq \frac{n+1}{4}$. Como $\frac{n+1}{4} \geq \frac{13+1}{4} = \frac{14}{4}$, entonces $|X \cap Y| > 3$.

Por lo tanto, $|X \cap Y| \geq 2$.

Luego, fijémonos en el vértice r' , por la afirmación 5 y por la proposición 3.1.1, tenemos que $c(vr')$ ya es utilizado en $\langle X \cap Y \rangle$. Recordemos también que $c(r'v) = c(r'x)$ (por la afirmación 3.3).

Afirmación 6. $c(r'v_i) = c(r'v)$, para todo v_i en $V(C)$.

Demostración. Sobre r' , tenemos dos casos; a saber $r' \in D$ o $r' \notin D$.

Caso 6.1. $r' \in D$.

Por la afirmación 2, tenemos que $c(r'v) = c(r'v_i)$, para todo $v_i \in V(C)$.

Caso 6.2. $r' \notin D$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $c(r'v_i) \neq c(r'v)$, para algún v_i en $V(C)$. Consideremos el ciclo $C_2 = (r', v_i, v) \cup W \cup (x, r')$ (véase figura 4.18). Como $r' \notin D$, entonces $c(r'v) = c_1$. Debido a la hipótesis del caso 1, sabemos que $c_1 = c(vv_i)$ y por la suposición de este caso, tenemos que $c(r'v_i) \neq c(r'v)$, lo que implica que $c(r'v_i) \neq c_1$; es decir, $c(r'v_i) \neq c(v_i v)$. También, por la afirmación 4.1, tenemos que $c(r'v) = c(r'x)$, lo que implica que $c(xr') \neq c(r'v_i)$. Como $u \in D$, entonces $c(v_i v) \neq c(vu)$. Recordemos que W es una trayectoria propiamente coloreada. Dado que $r' \in X$, deducimos de la definición de X que $c(zx) \neq c(xr')$. Por lo anterior, C_2 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 7 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

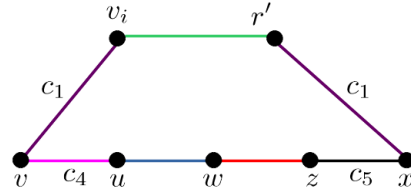


Figura 4.18: Caso $r' \notin D$.

Por lo tanto, $c(r'v_i) = c(r'v)$, para todo $v_i \in V(C)$.

En cualquier caso obtenemos que $c(r'v_i) = c(r'v)$, para todo $v_i \in V(C)$.

Recordemos que por la elección de r' tenemos que $d^c_{\langle X \cap Y \rangle}(r') \leq \frac{|X \cap Y|+1}{2}$. Como $c(r'v)$ ya es utilizado en $\langle X \cap Y \rangle$, $c(r'v) = c(xr')$ (por la afirmación 3.3) y $c(r'v) = c(r'v_i)$ (por la afirmación 6), entonces

$$\begin{aligned}
d_G^c(r') &\leq \frac{|X \cap Y| + 1}{2} + |V(G) \setminus (V(C) \cup (X \cap Y \cup \{v, x\}))| \\
&= \frac{|X \cap Y| + 1}{2} + |V(G) \setminus (V(C))| - |(X \cap Y) \cup \{v, x\}| \\
&= n' + \frac{|X \cap Y| + 1 - 2|X \cap Y|}{2} - 2 \\
&= n' + \frac{-|X \cap Y| + 1}{2} - 2
\end{aligned}$$

Por la afirmación 3 sabemos que $|X \cap Y| > \frac{n'}{2}$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
n' + \frac{-|X \cap Y| + 1}{2} - 2 &< n' + \frac{-n' + 2}{4} - 2 \\
&= \frac{4n' - n' - 6}{4} \\
&= \frac{3n' - 6}{4}
\end{aligned}$$

Dado que $n' \leq \frac{2n-4}{3}$, deducimos que $\frac{3n'-6}{4} \leq \frac{2n-10}{4} = \frac{n}{2} - \frac{5}{2}$.

Concluimos que $d_G^c(r') \leq \frac{n}{2}$, lo cual es una contradicción respecto a la hipótesis del teorema 4.0.1.

Por lo tanto, si $c(vv_i) = c_1$ para todo $v_i \in V(C)$, tenemos una contradicción. Por lo concluimos con el caso 1.

4.2. Caso 2

Caso 2. v no sigue los colores de C y existen al menos dos vértices v_i , y v_j en $V(C)$, tal que $c(vv_i) \neq c(vv_j)$.

Afirmación 1. Existen vértices v_k y v_{k+1} , tal que $c(vv_k) \neq c(vv_{k+1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_k) = c(vv_{k+1})$ para todo v_k en C . Recordemos que $C = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_l, v_1)$. Lo anterior, implica que $c(vv_k) = c(vv_{k+1}) = c(vv_{k+2}) = c(vv_{k+3}) = \dots = c(vv_1) = c(vv_l)$, lo cual es una contradicción respecto a la hipótesis del caso 2.

Por lo tanto, existen vértices v_k y v_{k+1} tal que $c(vv_k) \neq c(vv_{k+1})$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $k = 1$; es decir, $c(vv_1) \neq c(vv_2)$. Supongamos que $c_1 = c(vv_1)$ y $c(vv_2) = c_2$.

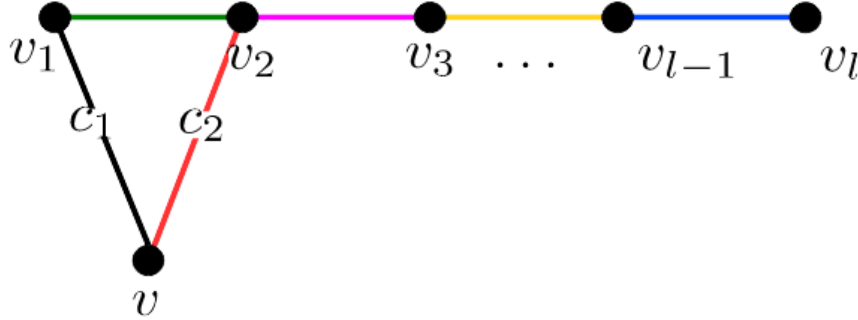


Figura 4.19: c_1 y c_2 .

Como v no sigue los colores de C , entonces existen vértices v_i y v_j en $V(C)$, tal que $c(vv_i) \neq c(vv_{i+1})$ y $c(vv_j) \neq c(vv_{j-1})$.

Sean $S = \{v_i \in V(C) : c(vv_i) \neq c(vv_{i+1})\}$ y $R = \{v_j \in V(C) : c(vv_j) \neq c(vv_{j-1})\}$, por lo anterior sabemos que $s \neq \emptyset$ y $r \neq \emptyset$. Supongamos que $s = \min\{i \in \{1, \dots, l\} : v_i \in S\}$ y $r = \max\{i \in \{1, \dots, l\} : v_i \in R\}$.

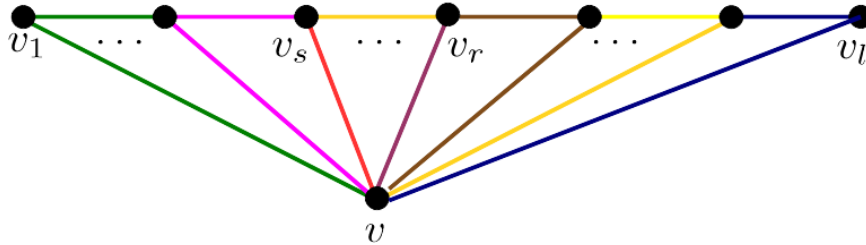


Figura 4.20: v_s y v_r .

Afirmación 2. $s \leq 2$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $s \geq 3$.

Afirmación 2.1 $c(vv_{s-1}) = c(vv_s)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_{s-1}) \neq c(vv_s)$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{s-1}) \cup (v_{s-1}, v, v_s) \cup (v_s, C, v_1)$ (véase figura 4.21).

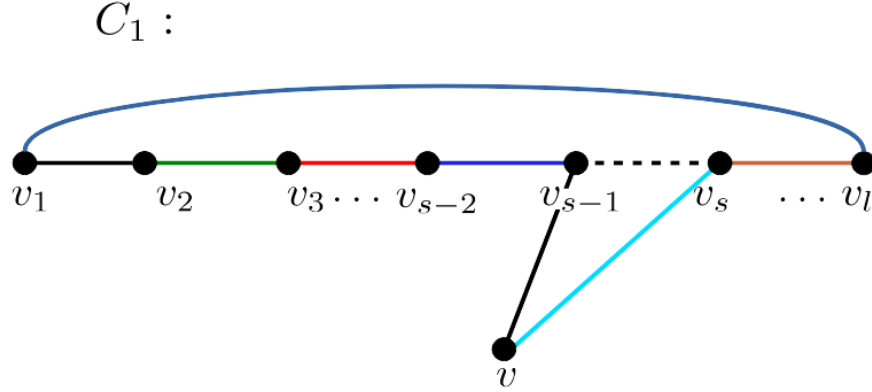


Figura 4.21: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Debido a la elección de s , tenemos que $c(vv_{s-1}) = c(v_{s-1}v_s)$ y como $c(v_{s-2}v_{s-1}) \neq c(v_{s-1}v_s)$ (porque C es propiamente coloreado), entonces $c(v_{s-2}v_{s-1}) \neq c(v_{s-1}v)$. Por la suposición de la afirmación 2.1, sabemos que $c(v_{s-1}v) \neq c(vv_s)$. Como (v_1, C, v_{s-1}) y (v_s, C, v_1) son subtrayectorias de C , entonces estos son trayectorias propiamente coloreados. Por la propiedad de s , tenemos que $c(vv_s) \neq c(v_s v_{s+1})$. Por lo anterior C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 1 + 2$. Dado que $l \geq 6$, entonces $l + 1 \geq 7$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $c(vv_{s-1}) = c(vv_s)$.

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{s-2}) \cup (v_{s-2}, v, v_s) \cup (v_s, C, v_1)$ (véase figura 4.22).

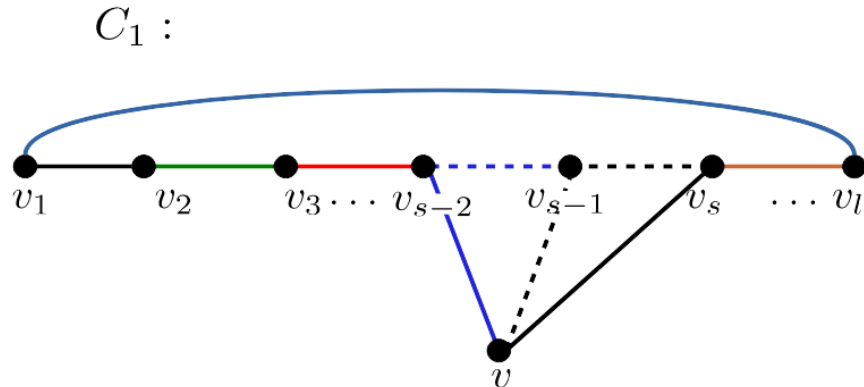


Figura 4.22: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Debido a la elección de s , tenemos que $c(vv_{s-2}) = c(v_{s-2}v_{s-1})$; dado que C es propiamente coloreado, entonces

$c(v_{s-3}v_{s-2}) \neq c(v_{s-2}v_{s-1})$, lo que implica que $c(v_{s-3}v_{s-2}) \neq c(v_{s-2}v)$. Por otro lado, como $c(vv_{s-1}) = c(vv_s)$ (por la afirmación 2.1), tenemos que $c(v_{s-1}v_s) = c(v_sv)$, lo que implica que $c(vv_{s-2}) \neq c(vv_s)$ (porque (v_{s-2}, v_{s-1}, v_s) es una trayectoria propiamente coloreada y $c(v_{s-2}v_{s-1}) = c(v_{s-2}v)$). Por la propiedad de s , tenemos que $c(vv_s) \neq c(v_sv_{s+1})$. Como (v_1, C, v_{s-2}) y (v_s, C, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas, porque son subtrayectorias de C , concluimos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 2 + 2 = l$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $s \leq 2$.

Afirmación 3. $r \geq l - 1$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $r \leq l - 2$.

Afirmación 3.1. $c(vv_r) = c(vv_{r+1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_r) \neq c(vv_{r+1})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_r) \cup (v_r, v, v_{r+1}) \cup (v_{r+1}, C, v_1)$ (véase figura 4.23).

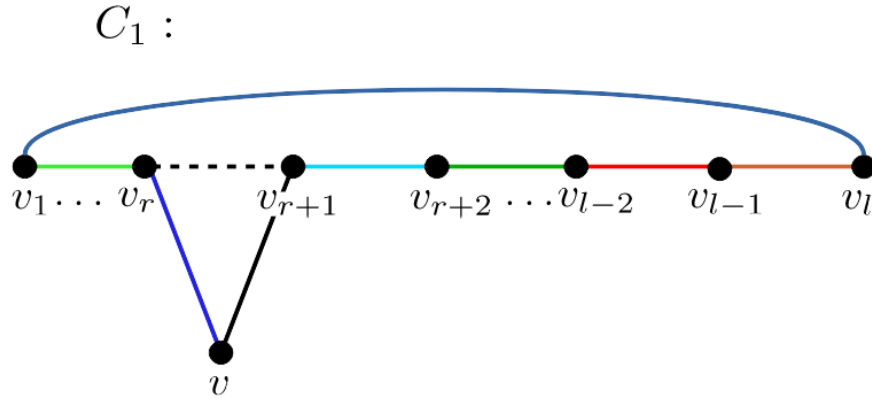


Figura 4.23: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que (v_1, C, v_r) y (v_{r+1}, C, v_1) , son trayectorias propiamente coloreadas ya que están contenidas en C . Por la elección de r , sabemos que $c(vv_r) \neq c(vrv_{r-1})$ y $c(vv_{r+1}) = c(v_{r+1}v_r)$. Por la suposición de la afirmación 3.1, tenemos que $c(vrv) \neq c(vv_{r+1})$. Como $c(vv_{r+1}) = c(v_{r+1}v_r)$ y dado que $c(vrv_{r+1}) \neq c(v_{r+1}v_{r+2})$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(vv_{r+1}) \neq c(v_{r+1}v_{r+2})$. Por lo anterior C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 1 + 2$. Dado que $l \geq 6$, entonces $l + 1 \geq 7$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $c(vv_r) = c(vv_{r+1})$.

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_r) \cup (v_r, v, v_{r+2}) \cup (v_{r+2}, C, v_1)$ (véase figura 4.24).

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que (v_1, C, v_r) y (v_{r+2}, C, v_1) , son trayectorias propiamente coloreadas ya que están contenidas en C . Por la elección de r ,

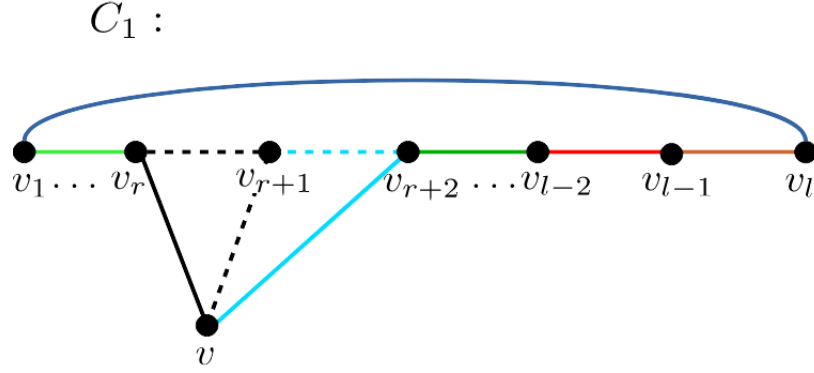


Figura 4.24: Ciclo C_1 .

sabemos que $c(vv_r) \neq c(v_r v_{r-1})$, $c(vv_{r+1}) = c(v_{r+1} v_r)$ y $c(vv_{r+2}) = c(v_{r+2} v_{r+1})$. Por la afirmación 3.1, tenemos que $c(vv_r) = c(vv_{r+1})$ y como $c(vv_{r+1}) \neq c(vv_{r+2})$ (ya que (v_r, v_{r+1}, v_{r+2}) es una trayectoria propiamente coloreada, $c(vv_{r+1}) = c(v_{r+1} v_r)$ y $c(vv_{r+2}) = c(v_{r+2} v_{r+1})$), entonces $c(v_r v) \neq c(vv_{r+2})$. Dado que $c(vv_{r+2}) = c(v_{r+2} v_{r+1})$ y como $c(v_{r+1} v_{r+2}) \neq c(v_{r+2} v_{r+3})$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(v_{r+3} v_{r+2}) \neq c(v_{r+2} v)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 2 + 2 = l$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , una contradicción.

Por lo tanto, $r \geq l - 1$.

Por la afirmación 2, tenemos dos casos sobre s ; a saber, $s = 2$ o $s = 1$.

Caso 2.1 $s = 2$.

Debido a que $s = 2$, tenemos que $c(vv_2) \neq c(v_2 v_3)$ y $c(vv_1) = c(v_1 v_2)$. Consideremos el ciclo $C = (v_1, v, v_2) \cup (v_2, C, v_1)$ (véase figura 4.25).

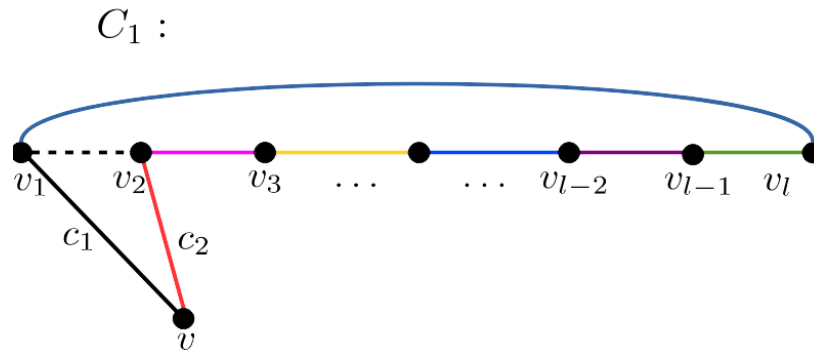


Figura 4.25: Ciclo C_1 .

Por la afirmación 1, sabemos que $c(vv_1) \neq c(vv_2)$. La trayectoria (v_2, C, v_1) es propiamente coloreada ya que esta contenida en C y C es propiamente coloreado. Como $c(vv_1) = c(v_1 v_2)$ (por la elección de s) y dado que $c(v_1 v_1) \neq c(v_1 v_2)$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(v_1 v_1) \neq c(v_1 v)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud

$l - 1 + 2 = l + 1$. Dado que $l + 1 \geq 7$, tenemos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Caso 2.2 $s = 1$.

Dado que $s = 1$, tenemos que $c(vv_1) \neq c(v_1v_2)$.

Por la afirmación 3, sabemos que $r = l - 1$ o $r = l$.

Caso 2.2.1. $r = l - 1$.

Como $r = l - 1$, entonces por la elección de r , tenemos que $c(vv_{l-1}) \neq c(v_{l-1}v_{l-2})$.

Afirmación 2.2.1 $c(vv_1) = c(vv_{l-1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_1) \neq c(vv_{l-1})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{l-1}) \cup (v_{l-1}, v, v_1)$ (véase figura 4.26).

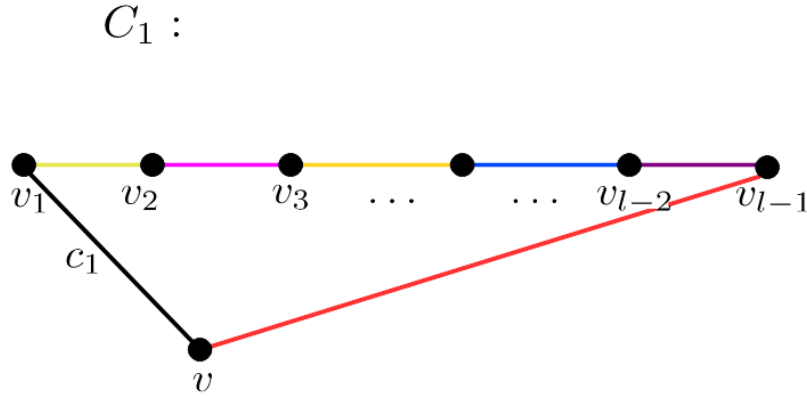


Figura 4.26: Ciclo C_1 .

La trayectoria (v_1, C, v_{l-1}) es propiamente coloreada, ya que está contenida en C . Dado que $r = l - 1$, tenemos que $c(v_{l-2}v_{l-1}) \neq c(v_{l-1}v)$. Por último, como $s = 1$, entonces $c(vv_1) \neq c(v_1v_2)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 2 + 2 = l$. Dado que $l \geq 6$, tenemos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , una contradicción.

Así, $c(vv_1) = c(vv_{l-1})$.

Afirmación 2.2.2 $c(v_2v_3) = c(vv_2)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(v_2v_3) \neq c(vv_2)$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_2, C, v_{l-1}) \cup (v_{l-1}, v, v_2)$ (véase figura 4.27).

Tenemos que la trayectoria (v_2, C, v_{l-1}) es propiamente coloreada, ya que esta contenida en C . Dado que $r = l - 1$, deducimos que $c(v_{l-2}v_{l-1}) \neq c(v_{l-1}v)$. Por la afirmación 2.2.1, $c(vv_{l-1}) = c(vv_1) = c_1$ y como $c(vv_1) \neq c(vv_2)$ (por la afirmación 1), entonces $c(v_{l-1}v) \neq c(vv_2)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud

$C_1 :$

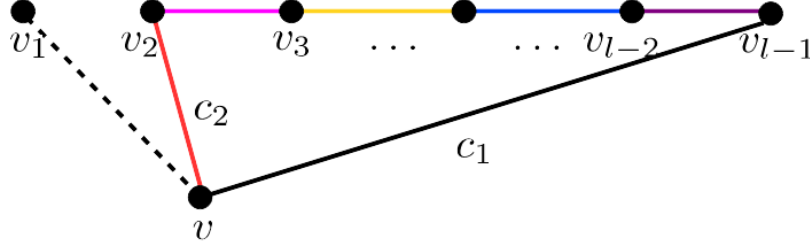


Figura 4.27: Ciclo C_1 .

$l - 3 + 2 = l - 1$. Dado, que $l \geq 6$, entonces $l - 1 \geq 5$, lo que implica que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(vv_2) = c(v_2v_3)$.

Afirmación 2.2.3 $c(vv_{l-2}) \neq c(vv_1)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_{l-2}) = c(vv_1)$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, v_2, v, v_{l-2}) \cup (v_{l-2}, C, v_1)$ (véase figura 4.28).

$C_1 :$

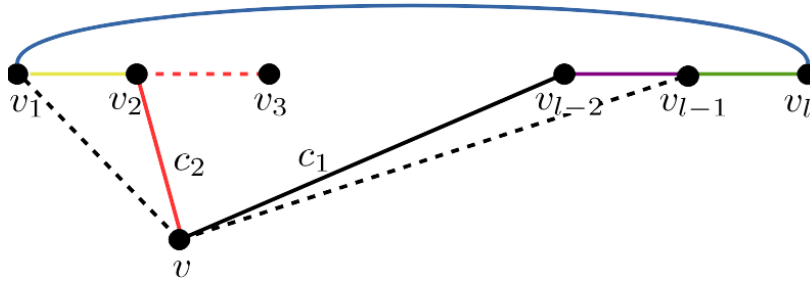


Figura 4.28: Ciclo C_1 .

Por la afirmación 2.2.2, sabemos que $c(v_2v_3) = c(vv_2)$ y como $c(v_1v_2) \neq c(v_2v_3)$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(v_1v_2) \neq c(v_2v)$. Debido a que $c(vv_1) \neq c(vv_2)$ (por afirmación 1), y como $c(vv_{l-2}) = c(vv_1)$ (por la suposición de la prueba), entonces $c(v_2v) \neq c(vv_{l-2})$. Por la hipótesis del caso 2.2.1, sabemos que $c(vv_{l-1}) \neq c(v_{l-1}v_{l-2})$ y por la afirmación 2.2.1, tenemos que $c(vv_1) = c(vv_{l-1})$, lo que implica que $c(vv_{l-2}) = c(vv_{l-1}) \neq c(v_{l-2}v_{l-1})$; es decir, $c(vv_{l-2}) \neq c(v_{l-2}v_{l-1})$. Por último, la trayectoria (v_{l-2}, C, v_1) es propiamente coloreada ya que está contenida en C . Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $2 + l - (l - 2) + 2 = 6$ que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(vv_{l-2}) \neq c(vv_1)$.

Afirmación 2.2.4 $c(v_{l-1}v_l) = c(vv_{l-1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(v_{l-1}v_l) \neq c(vv_{l-1})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, v_2, v, v_{l-1}) \cup (v_{l-1}, C, v_1)$ (véase figura 4.29).

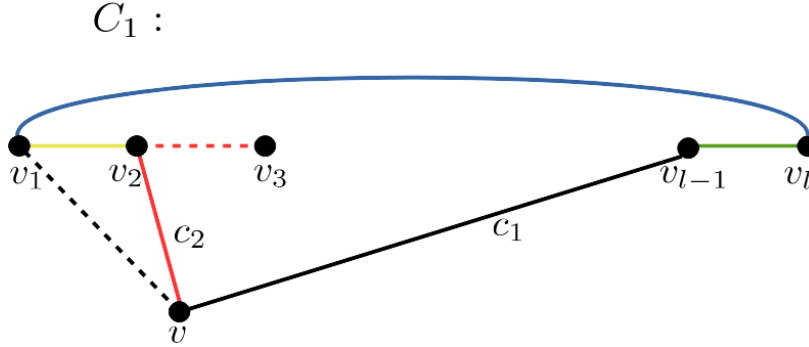


Figura 4.29: Ciclo C_1 .

Por la afirmación 2.2.2, sabemos que $c(v_2v_3) = c(vv_2)$ y como $c(v_1v_2) \neq c(v_2v_3)$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(v_1v_2) \neq c(v_2v)$. Debido a que $c(vv_1) \neq c(vv_2)$ (por afirmación 1), y por la afirmación 2.2.1, tenemos que $c(vv_{l-1}) = c(vv_1)$, entonces $c(v_2v) \neq c(vv_{l-1})$. Por la suposición de la prueba, $c(vv_{l-1}) \neq c(v_{l-1}v_l)$. Por último, la trayectoria (v_{l-1}, C, v_1) es propiamente coloreada ya que está contenida en C . Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(v_{l-1}v_l) = c(vv_{l-1})$.

Afirmación 2.2.5 $c(vv_{l-2}) = c(v_{l-2}v_{l-1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_{l-2}) \neq c(v_{l-2}v_{l-1})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, v, v_{l-2}) \cup (v_{l-2}, C, v_1)$ (véase figura 4.30).

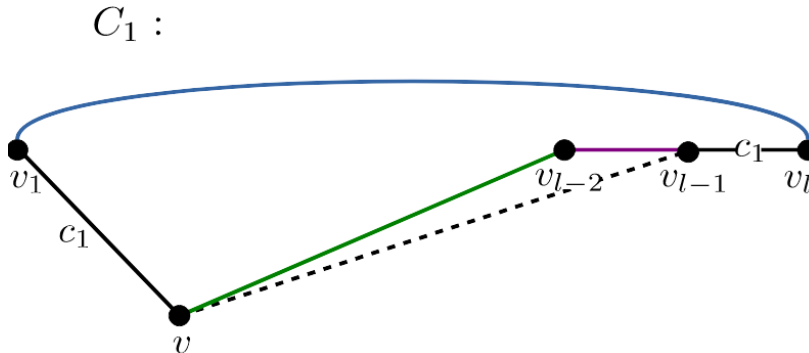


Figura 4.30: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Por la afirmación 2.2.3, tenemos que $c(v_1v) \neq c(vv_{l-2})$. Debido a la suposición de la afirmación 2.2.5, sabemos que

$c(vv_{l-2}) \neq c(v_{l-2}v_{l-1})$. Recordemos que (v_{l-2}, C, v_1) es una trayectoria propiamente coloreada ya que está contenida en C . Finalmente, como $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv_1)$ y $c(vv_1) = c(v_{l-1}v_l)$ (por las Afirmaciones 2.2.4 y 2.2.1), entonces $c(vv_1) \neq c(v_lv_1)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(vv_{l-2}) = c(v_{l-2}v_{l-1})$.

Finalmente consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{l-2}) \cup (v_{l-2}, v, v_1)$ (véase figura 4.31).

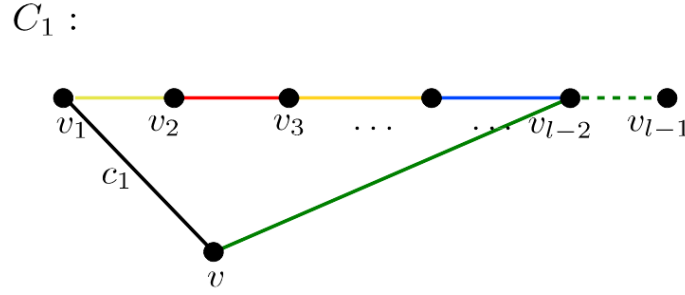


Figura 4.31: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que (v_1, C, v_{l-2}) es una trayectoria propiamente coloreada ya que está contenida en C y C es propiamente coloreado. Por la afirmación 2.2.3, tenemos que $c(v_1v) \neq c(vv_{l-2})$. Por la afirmación 2.2.5, sabemos que $c(vv_{l-2}) = c(v_{l-2}v_{l-1})$ y como $c(v_{l-3}v_{l-2}) \neq c(v_{l-2}v_{l-1})$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(v_{l-3}v_{l-2}) \neq c(v_{l-2}v)$. Por último, debido a que $s = 1$, deducimos que $c(vv_1) \neq c(v_1v_2)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 3 + 2 = l - 1 \geq 5$ que contiene a v , una contradicción.

Caso 2.2.2 $r = l$.

Dado que $r = l$, tenemos que $c(vv_l) \neq c(v_lv_{l-1})$.

Afirmación 2.2.2.1 $c(vv_1) = c(vv_l)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_1) \neq c(vv_l)$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_l) \cup (v_l, v, v_1)$ (véase figura 4.32).

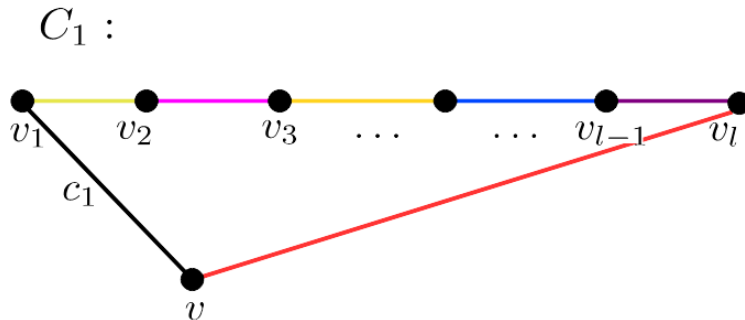


Figura 4.32: Ciclo C_1 .

La trayectoria (v_1, C, v_l) es propiamente coloreada ya que está contenida en C . Por la elección de r y de la hipótesis del caso 2.2.2, sabemos que $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv)$. Por la hipótesis del caso 2.2, tenemos que $c(vv_1) \neq c(v_1v_2)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 1 + 2 = l + 1$. Dado, que $l + 1 \geq 7$, entonces tenemos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Así, $c(vv_1) = c(vv_l)$.

Afirmación 2.2.2.2 $c(v_2v_3) = c(vv_2)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(v_2v_3) \neq c(vv_2)$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_2, C, v_l) \cup (v_l, v, v_2)$ (véase figura 4.33).

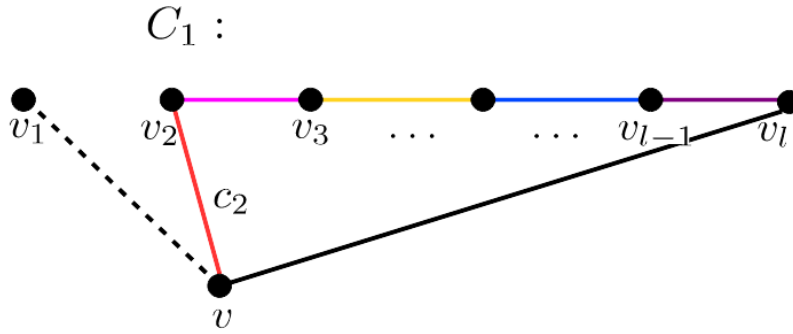


Figura 4.33: Ciclo C_1 .

Tenemos que la trayectoria (v_2, C, v_l) es propiamente coloreada, ya que está contenida en C . Dado que $r = l$, deducimos que $c(v_{l-1}v_l) \neq c(v_lv)$. Por la afirmación 2.2.2.1, $c(vv_l) = c(vv_1)$ y como $c(vv_1) \neq c(vv_2)$ (por la afirmación 1), entonces $c(v_lv) \neq c(vv_2)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 2 + 2 = l$. Dado que $l \geq 6$, entonces C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(vv_2) = c(v_2v_3)$.

Afirmación 2.2.2.3. $c(vv_1) \neq c(vv_{l-1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_{l-1}) = c(vv_1)$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, v_2, v, v_{l-1}) \cup (v_{l-1}, C, v_1)$ (véase figura 4.34).

Por la afirmación 2.2.2.2, sabemos que $c(v_2v_3) = c(vv_2)$ y como $c(v_1v_2) \neq c(v_2v_3)$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(v_1v_2) \neq c(v_2v)$. Debido a que $c(vv_1) \neq c(vv_2)$ (por afirmación 1), y como $c(vv_{l-1}) = c(vv_1)$ (por la suposición de la prueba), entonces $c(v_2v) \neq c(vv_{l-1})$. Por la hipótesis del caso 2.2.2, sabemos que $c(vv_l) \neq c(v_lv_{l-1})$ y por la afirmación 2.2.2.1, tenemos que $c(vv_1) = c(vv_l)$, lo que implica que $c(vv_{l-1}) = c(vv_l) \neq c(v_lv_{l-1})$; es decir, $c(vv_{l-1}) \neq c(v_lv_{l-1})$. Por último, la trayectoria (v_{l-1}, C, v_1) es propiamente coloreada ya que está contenida en C . Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

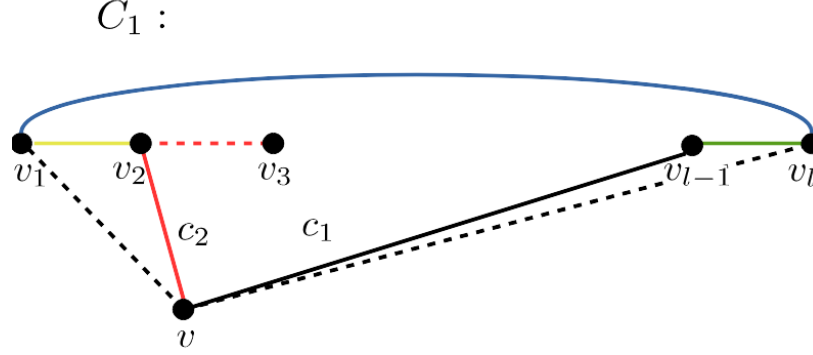


Figura 4.34: Ciclo C_1 .

Por lo tanto, $c(vv_{l-1}) \neq c(vv_1)$.

Afirmación 2.2.2.4. $c(vv_{l-1}) = c(v_{l-1}v_{l-2})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_{l-1}) \neq c(v_{l-1}v_{l-2})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{l-1}) \cup (v_{l-1}, v, v_1)$ (véase figura 4.35).

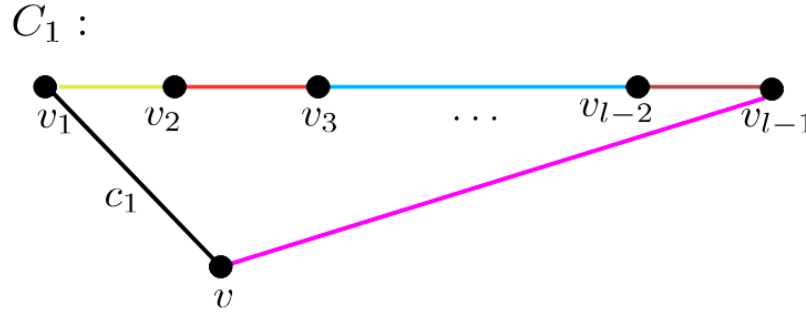


Figura 4.35: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. La trayectoria (v_1, C, v_{l-1}) es propiamente coloreada ya que está contenida en C . Por la afirmación 2.2.2.3, tenemos que $c(v_{l-1}v) \neq c(vv_1)$. Por la hipótesis del caso 2.2, $c(vv_1) \neq c(v_1v_2)$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo de longitud $l - 3 + 2 \geq 5$ que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(vv_{l-1}) = c(v_{l-1}v_{l-2})$.

Afirmación 2.2.2.5. $c(vv_{l-1}) = c(vv_2)$

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_2) \neq c(vv_{l-1})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, v_2, v, v_{l-1}) \cup (v_{l-1}, C, v_1)$ (véase figura 4.36).

Por la afirmación 2.2.2.2, sabemos que $c(v_2v_3) = c(vv_2)$ y como $c(v_1v_2) \neq c(v_2v_3)$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(v_1v_2) \neq c(v_2v)$. Por la afirmación 2.2.2.4, tenemos que $c(vv_{l-1}) = c(v_{l-1}v_{l-2})$ y como $c(v_{l-2}v_{l-1}) \neq c(v_{l-1}v_l)$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(vv_{l-1}) \neq c(v_{l-1}v_l)$. Por último, la trayectoria (v_{l-1}, C, v_1) es propiamente coloreada

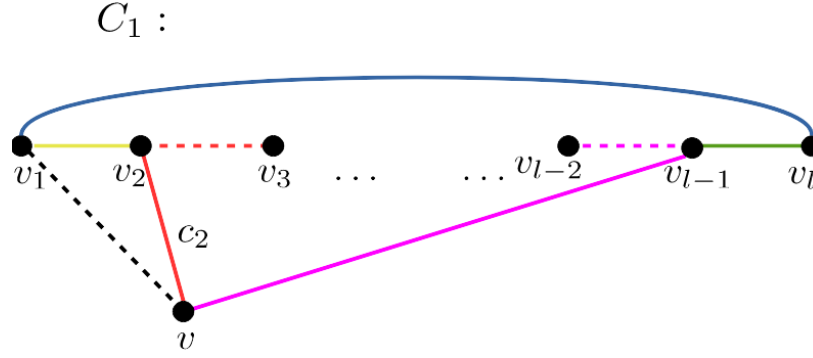


Figura 4.36: Ciclo C_1 .

ya que está contenida en C . Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 5 que contiene a v , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $c(vv_2) = c(vv_{l-1})$.

Afirmación 2.2.2.6 $c(vv_{l-2}) \neq c(vv_2)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_2) = c(vv_{l-2})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{l-2}) \cup (v_{l-2}, v, v_1)$ (véase figura 4.37).

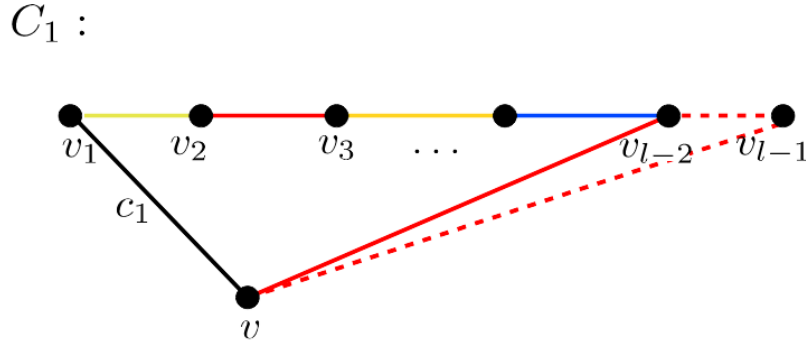


Figura 4.37: Ciclo C_1 .

La trayectoria (v_1, C, v_{l-2}) es propiamente coloreada, ya que está contenida en C . Por las Afirmaciones 2.2.2.4 y 2.2.2.5, tenemos que $c(v_{l-2}v_{l-1}) = c(vv_2)$, ya que C es propiamente coloreado, sabemos que $c(v_{l-3}v_{l-2}) \neq c(v_{l-2}v_{l-1})$, como $c(vv_2) = c(vv_{l-2})$ (por la suposición de la afirmación 2.2.2.6), entonces $c(vv_{l-2}) = c(vv_2) \neq c(v_{l-3}v_{l-2})$; es decir $c(v_{l-3}v_{l-2}) \neq c(v_{l-2}v)$. Dado que $c(vv_1) \neq c(vv_2)$ y como $c(vv_2) = c(vv_{l-2})$, entonces $c(v_{l-2}v) \neq c(vv_1)$. Por último, como $s = 1$, entonces $c(vv_1) \neq c(v_1v_2)$. Por lo anterior C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 3 + 2 = l - 1$. Dado, que $l - 1 \geq 5$, entonces tenemos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5 que contiene a v , una contradicción.

Así, $c(vv_2) \neq c(vv_{l-2})$.

Finalmente consideremos el ciclo $(v_1, v_2, v, v_{l-2}) \cup (v_{l-2}, C, v_1)$ (véase figura 4.38).

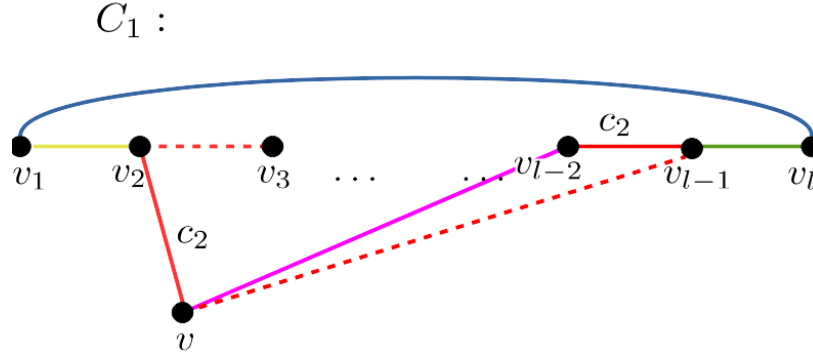


Figura 4.38: Ciclo C_1 .

Por la afirmación 2.2.2.2, sabemos que $c(v_2v_3) = c(vv_2)$ y como $c(v_1v_2) \neq c(v_2v_3)$ (ya que C es propiamente coloreado), entonces $c(v_1v_2) \neq c(v_2v)$. Por la afirmación 2.2.2.6, tenemos que $c(v_2v) \neq c(vv_{l-2})$. Por las Afirmaciones 2.2.2.4 y 2.2.2.5, tenemos que $c(v_{l-2}v_{l-1}) = c(vv_2)$ y como $c(vv_2) \neq c(vv_{l-2})$, entonces $c(vv_{l-2}) \neq c(v_{l-2}v_{l-1})$. Por último, la trayectoria (v_{l-2}, C, v_1) es propiamente coloreada ya que está contenida en C . Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 6 que contiene a v , una contradicción.

En cualquier caso (2.2.1 y 2.2.2) se llega a una contradicción. Por lo tanto, el caso 2.2 también conduce a una contradicción.

Ya que los casos 2.1 y 2.2, llevan a una contradicción, concluimos que el caso 2 implica una contradicción.

Nota. Para la demostración del caso 2, el autor de [1] dice que si $c(vv_i) = c(v_i v_{i+1})$, entonces $c(vv_{i+1}) \in \{c(vv_i), c(v_{i+1}v_{i+2})\}$, lo cual es cierto, ya que en caso contrario $C_1 = (v_1, C, v_i) \cup (v_i, v, v_{i+1}) \cup (v_{i+1}, C, v_1)$ (véase figura 4.39) es un ciclo propiamente coloreado.

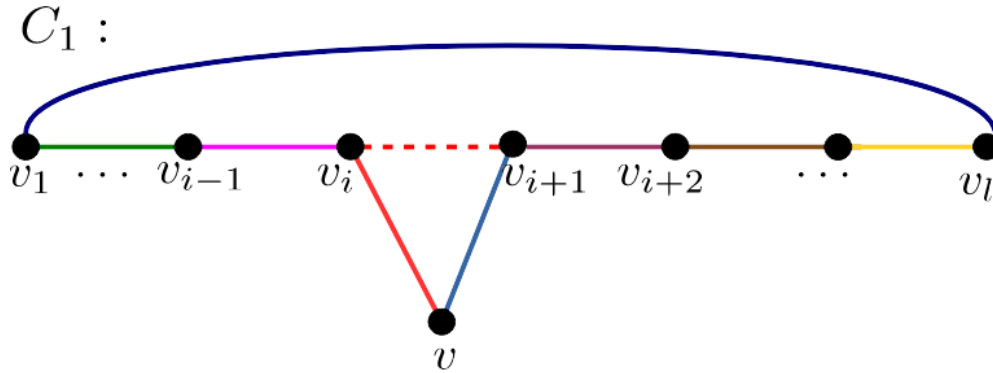


Figura 4.39: Ciclo C_1 .

Por otro lado, debido a que v no sigue los colores de C en aumento, debe existir un vértice v_j , tal que $c(vv_{j+1}) \neq c(v_{j+1}v_{j+2})$. Si suponemos que $j + 1$ es el mínimo que cumple

la propiedad entonces, $c(vv_j) = c(v_jv_{j+1})$, por lo expuesto anteriormente, sabemos que $c(vv_{j+1}) \in \{c(vv_j), c(v_{j+1}v_{j+2})\}$ y como $c(vv_{j+1}) \neq c(v_{j+1}v_{j+2})$, entonces $c(vv_{j+1}) = c(vv_j)$.

Observemos que en caso de que $j + 1 = 1$, no podemos afirmar que $c(vv_j) = c(v_jv_{j+1})$, por lo que en general no necesariamente es cierto que existe un vértice v_j tal que $c(vv_{j+1}) = c(vv_j)$.

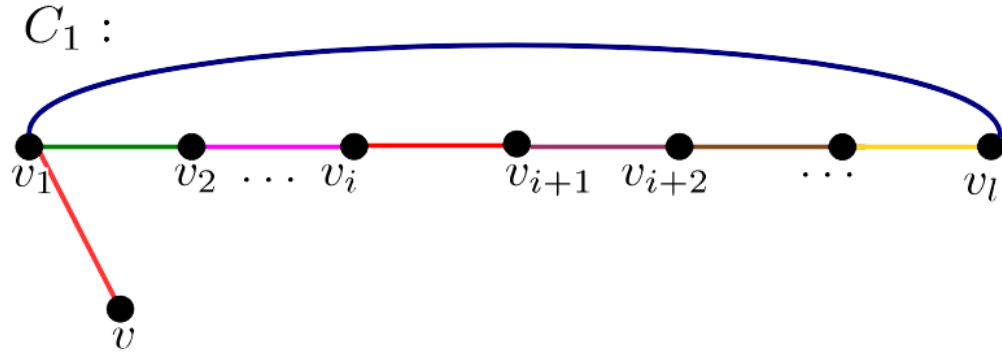


Figura 4.40: $j + 1 = 0$.

Por la observación anterior decidimos dar un prueba alternativa para el caso 2.

4.3. Caso 3

Caso 3. v sigue los colores de C .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que v sigue los colores de C en aumento; es decir, $c(vv_i) = c(v_i v_{i+1})$ para todo v_i en $V(C)$.

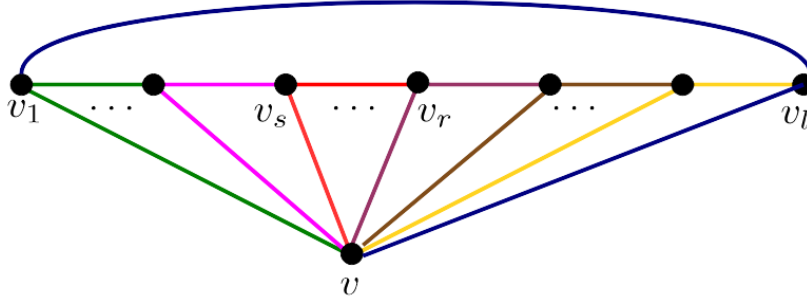


Figura 4.41: v sigue los colores de C en aumento.

Observación 1. $c(vv_i) \neq c(vv_{i+1})$ para todo v_i en $V(C)$.

Dado que v sigue los colores de C en aumento, se tiene que $c(vv_i) = c(v_i v_{i+1})$ y $c(vv_{i+1}) = c(v_{i+1} v_{i+2})$. Como C es propiamente coloreado, tenemos que $c(v_i v_{i+1}) \neq c(v_{i+1} v_{i+2})$, por lo que $c(vv_i) \neq c(vv_{i+1})$.

Observación 2. $c(vv_i) \neq c(v_i v_{i-1})$ para todo v_i en $V(C)$.

Dado que v sigue los colores de C en aumento, se tiene que $c(vv_i) = c(v_i v_{i+1})$. Como C es propiamente coloreado, tenemos que $c(v_{i-1} v_i) \neq c(v_i v_{i+1})$, por lo que $c(vv_i) \neq c(v_i v_{i-1})$.

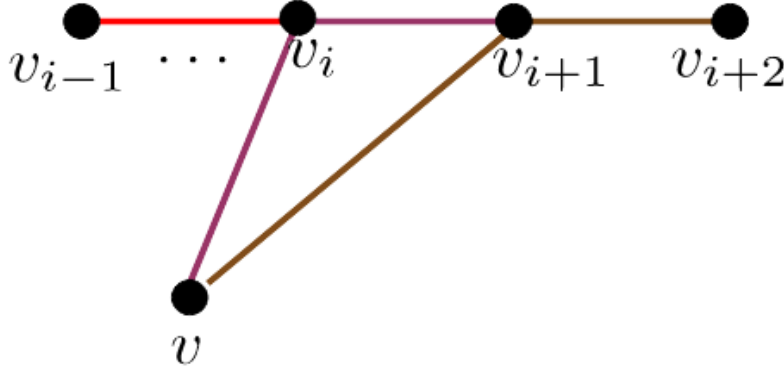


Figura 4.42: $c(vv_i) \neq c(vv_{i+1})$ y $c(vv_i) \neq c(v_i v_{i-1})$.

Afirmación 1. $V(C)$ tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existen v_i y v_j contenidos en $V(C)$, tal que $c(vv_i) \neq c(v_i v_j)$ y $c(vv_j) \neq c(v_i v_j)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j > i$.

Afirmación 1.1 $c(vv_{j+2}) = c(vv_i)$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(vv_{j+2}) \neq c(vv_i)$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v, v_i, v_j) \cup (v_j, C, v_{j+2}) \cup (v_{j+2}, v)$ (véase figura 4.43).

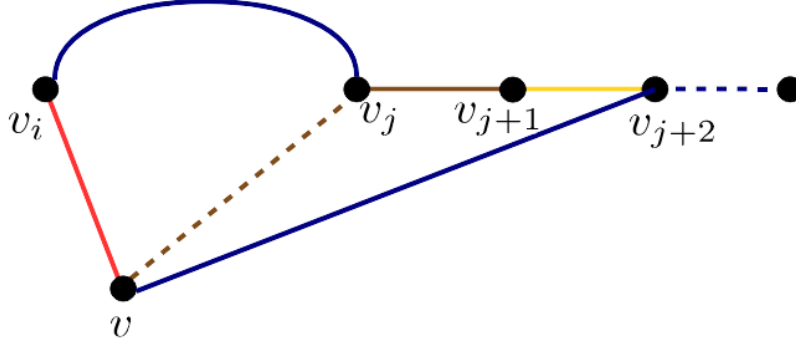


Figura 4.43: Ciclo C_1

Probaremos que C_1 es propiamente coloreado. Por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(vv_i) \neq c(viv_j)$. La trayectoria (v_j, C, v_{j+2}) es propiamente coloreada ya que está contenida en C . Como $c(vv_j) = c(v_jv_{j+1})$ (ya que v sigue los colores de C en aumento) y por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(vv_j) \neq c(viv_j)$, entonces $c(viv_j) \neq c(v_jv_{j+1})$. Por la Observación 2, deducimos que $c(v_{j+1}v_{j+2}) \neq c(v_{j+2}v)$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 5 que contiene a v , una contradicción.

Por lo tanto, $c(vv_{j+2}) = c(vv_i)$.

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v, v_i, v_j) \cup (v_j, C, v_{j+3}) \cup (v_{j+3}, v)$ (véase figura 4.44).

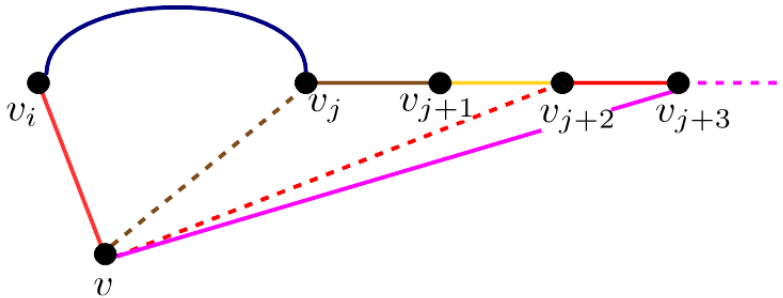


Figura 4.44: Ciclo C_1

Probaremos que C_1 es propiamente coloreado. Por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(vv_i) \neq c(viv_j)$. La trayectoria (v_j, C, v_{j+3}) es propiamente coloreada ya que está contenida en C . Como $c(vv_j) = c(v_jv_{j+1})$ (ya que v sigue los colores de C en aumento) y por la suposición de la afirmación 1, tenemos que $c(vv_j) \neq c(viv_j)$, entonces $c(viv_j) \neq c(v_jv_{j+1})$. Por la Observación 2, sabemos que $c(v_{j+2}v_{j+3}) \neq c(v_{j+3}v)$. Por la afirmación 1.1, tenemos que $c(vv_i) = c(vv_{j+2})$ y como $c(vv_{j+3}) \neq c(vv_{j+2})$ (por la Observación 1), entonces

$c(v_{j+3}v) \neq c(vv_i)$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud 6 que contiene a v , una contradicción.

Por lo tanto, $V(C)$ tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Sean $M = \{w \in V(G) \setminus (V(C) \cup \{v\}) : \text{existe } v_i \in V(C) \text{ con } c(wv_i) \neq c(v_i v_{i+1})\}$

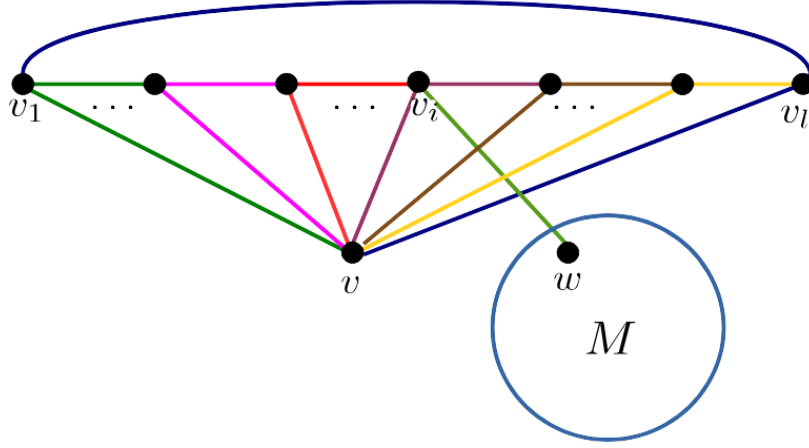


Figura 4.45: Conjunto M .

Afirmación 2. $|M| \neq 0$

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $|M| = 0$. Sea $R = V(G) \setminus (V(C) \cup M)$. Note que $v \in R$.

Por la definición de M , tenemos que todo vértice z en R sigue los colores de C en aumento.

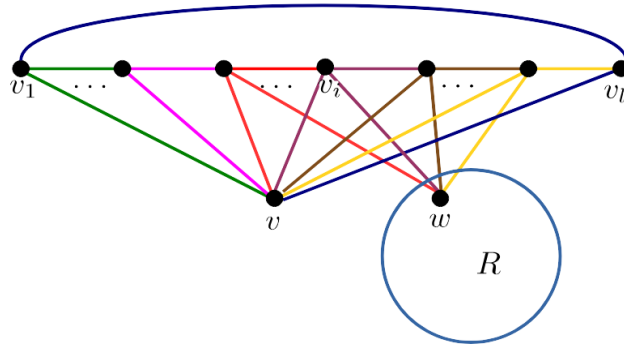


Figura 4.46: Conjunto R .

Por la afirmación 1, tenemos que existe un vértice v_j en $V(C)$, tal que $d_{\langle V(C) \rangle}^c(v_j) \leq \frac{|V(C)|+1}{2}$. Como $|V(C)| \leq n-1$, entonces $d_{\langle V(C) \rangle}^c(v_j) \leq \frac{n-1+1}{2} = \frac{n}{2}$. Dado que para cada vértice z en R , z sigue los colores de C en aumento, entonces el color $c(zv_j) = c(v_j v_{j+1})$ ya es utilizado en $V(C)$ y como $|M| = 0$, deducimos que $d_G^c(v_j) \leq \frac{n}{2}$. Lo que implica una contradicción, con la hipótesis del teorema 4.0.1. Por lo tanto $M \neq \emptyset$.

Afirmación 3. $c(v_i w) = c(wv)$ para todo w en M , con $i \in \{1, \dots, l\}$ tal que $c(wv_i) \neq c(v_i v_{i+1})$.

Demostración. Sea w arbitrario en M . Procediendo por contradicción, supongamos que $c(v_i w) \neq c(wv)$.

Afirmación. 3.1 $c(wv) = c(vv_{i-1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(wv) \neq c(vv_{i-1})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-1}) \cup (v_{i-1}, v, w, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.47).

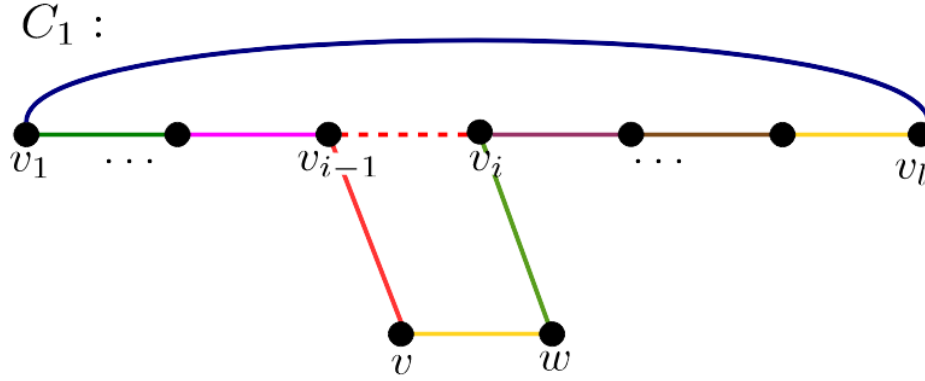


Figura 4.47: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que (v_1, C, v_{i-1}) y (v_i, C, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas ya que están contenidas en C . Por la Observación 2, sabemos que $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c(v_{i-1}v)$. Debido a la suposición de la afirmación 3.1, $c(v_{i-1}v) \neq c(vw)$. Por la suposición de la prueba de la afirmación 3, tenemos que $c(vw) \neq c(wv_i)$. Luego, por la hipótesis de la afirmación 3 sabemos que $c(wv_i) \neq c(v_i v_{i+1})$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 1 + 3 \geq 8$, que contiene a v , una contradicción.

Por lo tanto, $c(wv) = c(vv_{i-1})$.

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-2}) \cup (v_{i-2}, v, w, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$, (véase figura 4.48).

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que (v_1, C, v_{i-2}) y (v_i, C, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas ya que están contenidas en C . Por la observación 2, sabemos que $c(v_{i-3}v_{i-2}) \neq c(v_{i-2}v)$. La Observación 1 nos dice que $c(vv_{i-2}) \neq c(vv_{i-1})$ y por la afirmación 3.1 $c(vw) = c(vv_{i-1})$, lo que implica que $c(v_{i-2}v) \neq c(vw)$. Por la suposición de la prueba de la afirmación 3, tenemos que $c(vw) \neq c(wv_i)$. Luego, por la hipótesis de la afirmación 3 sabemos que $c(wv_i) \neq c(v_i v_{i+1})$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 2 + 3 \geq 7$ que contiene a v , una contradicción.

Por lo tanto, $c(wv) = c(wv_i)$.

Afirmación 4. M tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

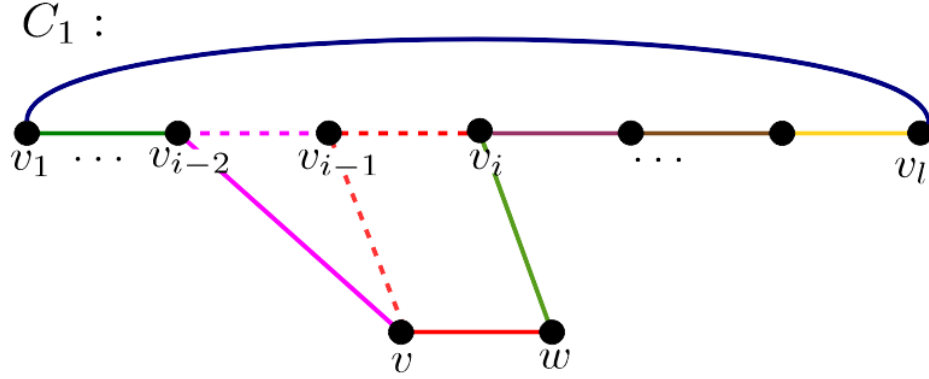


Figura 4.48: Ciclo C_1 .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existen w_1 y w_2 contenidos en M , tal que $c(vw_1) \neq c(w_1w_2)$ y $c(vw_2) \neq c(w_1w_2)$.

Sea i en $\{1, \dots, l\}$ tal que $c(w_2v_i) \neq c(v_iv_{i+1})$.

Afirmación. 4.1 $c(w_1v) = c(vv_{i-1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(w_1v) \neq c(vv_{i-1})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-1}) \cup (v_{i-1}, v, w_1, w_2, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.49).

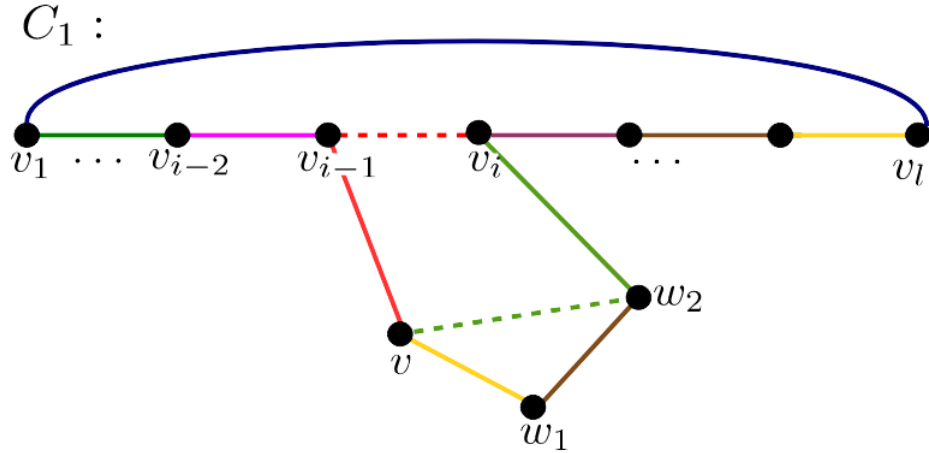


Figura 4.49: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que (v_1, C, v_{i-1}) y (v_i, C, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas ya que están contenidas en C . Por la Observación 2, sabemos que $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c(v_{i-1}v)$. Debido a la suposición de la afirmación 4.1, $c(v_{i-1}v) \neq c(vw_1)$. Por la suposición de la prueba de la afirmación 4, tenemos que $c(vw_1) \neq c(w_1w_2)$. Por otro lado, $c(vw_2) = c(w_2v_i)$ (por la afirmación 3) y por la suposición de la afirmación 4, $c(w_1w_2) \neq c(vw_2)$, lo que implica que $c(w_1w_2) \neq c(w_2v_i)$. Luego, por la elección de i sabemos que $c(w_2v_i) \neq c(v_iv_{i+1})$. Así, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 1 + 4 \geq 9$ que contiene v , una contradicción.

Por lo tanto, $c(w_1v) = c(vv_{i-1})$.

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-2}) \cup (v_{i-2}, v, w_1, w_2, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.50).

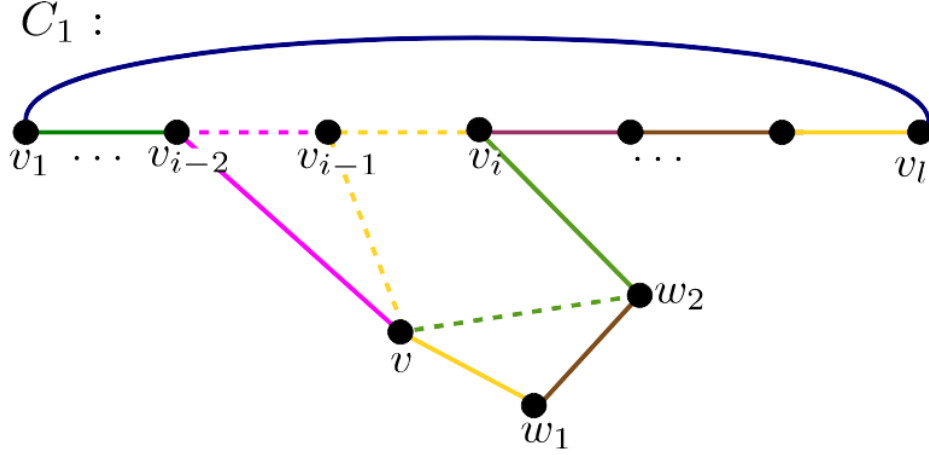


Figura 4.50: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Tenemos que (v_1, C, v_{i-2}) y (v_i, C, v_1) son trayectorias propiamente coloreadas ya que están contenidas en C . Por la Observación 2, sabemos que $c(v_{i-3}v_{i-2}) \neq c(v_{i-2}v)$. La Observación 1, nos dice que $c(vv_{i-2}) \neq c(vv_{i-1})$ y por la afirmación 4.1, $c(vw_1) = c(vv_{i-1})$, lo que implica que $c(v_{i-2}v) \neq c(vw_1)$. Por la suposición de la prueba de la afirmación 4, tenemos que $c(vw_1) \neq c(w_1w_2)$. Por otro lado, $c(vw_2) = c(w_2v_i)$ (por la afirmación 3) y por la suposición de la afirmación 4, $c(w_1w_2) \neq c(vw_2)$, entonces $c(w_1w_2) \neq c(w_2v_i)$. Luego, por la elección de i sabemos que $c(w_2v_i) \neq c(v_iv_{i+1})$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 2 + 4 \geq 8$ que contiene a v , una contradicción.

Concluimos que M tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Afirmación 5. $M \cup V(C)$ tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Demostración. Por las Afirmaciones 1 y 4, tenemos que M y $V(C)$ tienen la propiedad de la dependencia respecto a v . Solo resta ver que pasa con un vértice en M y un vértice en $V(C)$.

Por lo que, procediendo por contradicción, supongamos que existen v_j en $V(C)$ y w en M , tal que $c(vw) \neq c(wv_j)$ y $c(vv_j) \neq c(wv_j)$. Como $c(vv_j) = c(v_jv_{j+1})$, entonces $c(wv_j) \neq c(v_jv_{j+1})$. Recordemos que $w \in M$ y por lo anterior $c(wv_j) \neq c(v_jv_{j+1})$, por la afirmación 3 se tiene que $c(v_jw) = c(vv)$, lo cual es una contradicción ya que $c(vw) \neq c(wv_j)$.

Por lo tanto, $V(C) \cup M$ tiene la propiedad de la dependencia respecto a v .

Por la proposición 3.1.1, tenemos que existe u en $M \cup V(C)$, tal que $d_{\langle M \cup V(C) \rangle}^c(u) \leq \frac{|M \cup V(C)|+1}{2}$. Debido a que $|M \cup V(C)| \geq 2$, entonces por la proposición 3.1.1 $c(vu)$ ya era utilizado en $\langle M \cup V(C) \rangle$. Por lo anterior $d_{\langle M \cup V(C) \cup \{v\} \rangle}^c(u) \leq \frac{|M \cup V(C)|+1}{2}$

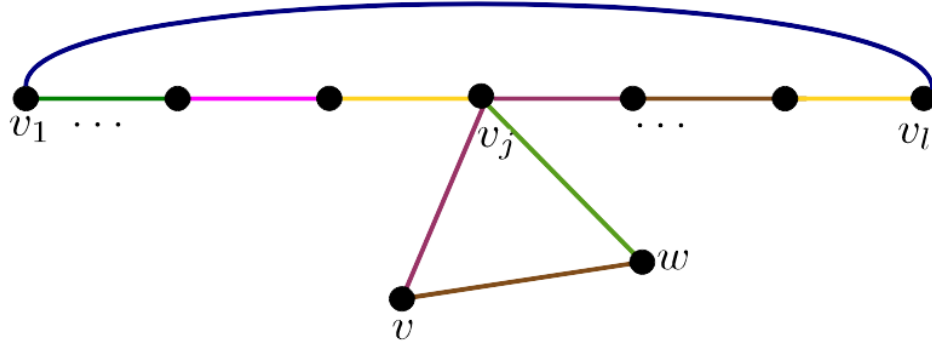


Figura 4.51: Vértices w y v_j .

Sea $H = V(G) \setminus (V(C) \cup M \cup \{v\})$, notemos que H , son los vértices de G que también siguen los colores de C , por lo que los vértices de H cumplen las propiedades de v .

Afirmación 6. $c(uv')$ ya es utilizado en $\langle M \cup V(C) \cup \{v\} \rangle$ para todo v' en H .

Demostración. Sea v' arbitrario en H . Dado que $v' \notin M$, se tiene que $c(v'v_i) = c(v_i v_{i+1})$ para todo v_i en $V(C)$; es decir v' sigue los colores de C en aumento.

Para u tenemos dos casos; a saber u en $V(C)$ o u en M .

Veamos que suponer que $u \in V(C)$ implica una contradicción. Denotemos a u como v_j , se tiene que $c(v'v_j) = c(v_j v_{j+1})$, lo que implica que $c(v'u)$ ya era utilizado en $V(C) \cup M \cup \{v\}$, una contradicción con la elección de v' .

Por lo tanto, $u \in M$. Lo anterior implica que existe v_i en $V(C)$ tal que $c(uv_i) \neq c(v_i v_{i+1})$.

Afirmación 6.1 $c(uv') = c(v'v_{i-1})$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $c(uv') \neq c(v'v_{i-1})$. Consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-1}) \cup (v_{i-1}, v', u, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.52).

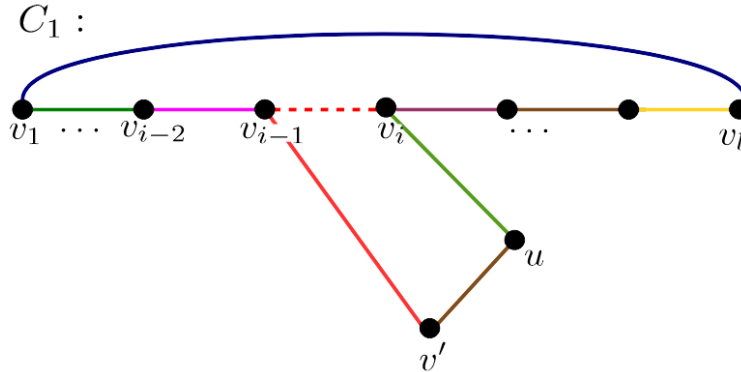


Figura 4.52: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Las trayectorias (v_1, C, v_{i-1}) y (v_i, C, v_1) son propiamente coloreadas ya que están contenidas en C . Por la Observación 2, sabemos

que $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c(v_{i-1}v')$. Por la suposición de la afirmación 6.1, $c(v_{i-1}v') \neq c(v'u)$. Debido a la elección de v' sabemos que el $c(uv')$ no es utilizado en $\langle M \cup V(C) \cup \{v\} \rangle$, por lo que $c(v'u) \neq c(uv_i)$. Recordemos que $c(uv_i) \neq c(v_i v_{i+1})$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 1 + 3 = l + 2$, lo cual es una contradicción ya que C era de longitud máxima.

Por lo tanto, $c(v_{i-1}v') = c(v'u)$.

Luego, consideremos el ciclo $C_1 = (v_1, C, v_{i-2}) \cup (v_{i-2}, v', u, v_i) \cup (v_i, C, v_1)$ (véase figura 4.53).

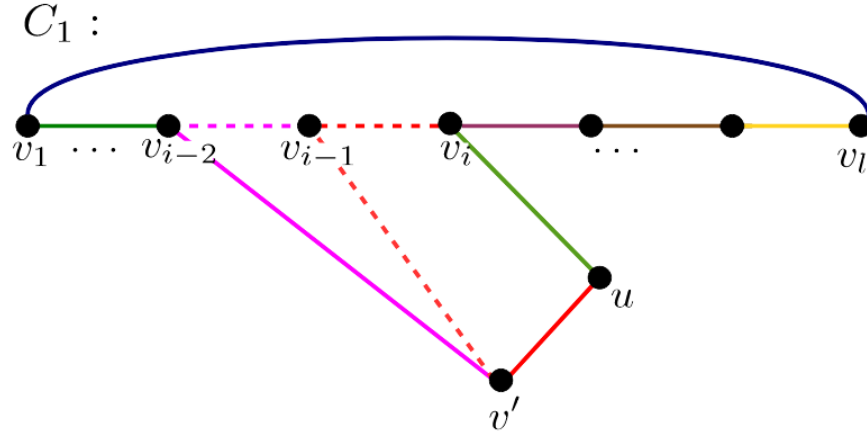


Figura 4.53: Ciclo C_1 .

Probaremos que C_1 es un ciclo propiamente coloreado. Las trayectorias (v_1, C, v_{i-2}) y (v_i, C, v_1) son propiamente coloreadas ya que están contenidas en C . Por la Observación 2, sabemos que $c(v_{i-2}v_{i-1}) \neq c(v_{i-2}v')$. Por la Observación 1 y la afirmación 6.1, deducimos que $c(v_{i-2}v') \neq c(v'u)$. Debido a la elección de v' sabemos que el $c(uv')$ no es utilizado en $\langle M \cup V(C) \cup \{v\} \rangle$, por lo que $c(v'u) \neq c(uv_i)$. Recordemos que $c(uv_i) \neq c(v_i v_{i+1})$. Por lo anterior, C_1 es un ciclo propiamente coloreado de longitud $l - 2 + 3 = l + 1$, lo cual es una contradicción ya que C era de longitud máxima.

Por lo tanto, $c(uv')$ ya es utilizado en $\langle M \cup V(C) \cup \{v\} \rangle$ para todo v' en H .

Recordemos que $|M \cup V(C)| \leq n - 1$.

Finalmente por la afirmación 6, tenemos que $d_G^c(u) \leq \frac{|M \cup V(C)| + 1}{2} = \frac{n-1+1}{2}$, lo cual es una contradicción respecto a la hipótesis del teorema 4.0.1.

Con lo anterior, concluimos el caso 3.

Como en los casos 1, 2 y 3 se llega a una contradicción, tenemos que la suposición inicial es falsa; es decir, concluimos que para $n \geq 13$, si $\delta(K_n) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces todo vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 5. ■

Conclusión

En esta tesis trabajamos con ciclos propiamente coloreados. En una gráfica donde sus aristas están coloreadas, la primera pregunta que surge es ¿en esta gráfica existe un ciclo propiamente coloreado? la respuesta es “no necesariamente” (pues la gráfica puede estar coloreada con un mismo color). Por lo tanto, lo primero que hicimos en el trabajo fue exhibir condiciones sobre el grado mínimo de color para asegurar la existencia de un ciclo propiamente coloreado o una trayectoria propiamente coloreada (teorema 2.2.1), cuya longitud depende del grado mínimo de color. Durante el desarrollo de la prueba, encontramos un error en una desigualdad con la que el autor termina la prueba de una afirmación esencial para la prueba del teorema; nosotros pudimos resolver el error al anexar una observación y con esto terminamos la prueba satisfactoriamente. Posteriormente, presentamos un resultado, donde se restringe el grado mínimo de color de G , para asegurar que existe un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ (corolario 2.3.1).

Al inicio del capítulo 3, en la proposición 3.1.1, el autor afirmó que en todo torneo existe un vértice v tal que $d^+(v) \geq \frac{n+1}{2}$, lo cual no necesariamente es cierto, por lo que se presentó un contraejemplo, y para poder demostrar la proposición 3.1.1, se probó que en todo torneo existe un vértice v tal que $d^+(v) \geq \frac{n-1}{2}$. Luego, se presentó el resultado que afirma que si $\delta^c(K_n) \geq \frac{n+1}{2}$ y $n \geq 3$, entonces todo vértice de K_n está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 3. Después, se probó que si $\delta^c(K_n) \geq \frac{n+1}{2}$ y $n \geq 4$, entonces todo vértice de K_n está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 4.

En el capítulo 4, se mostró el teorema que afirma que si $\delta^c(K_n) \geq \frac{n+1}{2}$ y $n \geq 13$, entonces todo vértice de K_n está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 3, 4 y al menos 5. En la subsección “Caso 2”, encontramos una inconsistencia en la prueba de este caso, pues el autor utiliza un vértice con cierta propiedad, el problema es que dicho vértice puede no existir. Debido a lo anterior decidimos dar una prueba alterna para el “Caso 2”.

Por último, este trabajo aún deja muchas dudas, pues los teoremas 3.2.1, 3.3.1 y 4.0.1 solo aplican para gráficas completas y nos gustaría que se cumpliera para toda gráfica coloreada por aristas. Otra cosa que nos gustaría que fuera verdad, es dar las condiciones necesarias para asegurar la existencia de un ciclo propiamente coloreado C , donde $V(G) = V(C)$; es decir, un ciclo hamiltoniano propiamente coloreado.

En general surgen las siguientes preguntas:

1. ¿Existen condiciones necesarias para asegurar la existencia de un ciclo hamiltoniano propiamente coloreado?

2. Sea G una gráfica coloreada por aristas de orden $n \geq 3$, ¿si $\delta^c(G) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces todo vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud 3?
3. Para $n \geq 15$, ¿si $\delta^c(K_n) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces todo vértice está contenido en un ciclo propiamente coloreado de longitud al menos 6?

Bibliografía

- [1] Shinya Fujita, Colton Magnant, Properly colored paths and cycles, Discrete Applied Mathematics, Volume 159, Issue 14, 2011, Pages 1391-1397, ISSN 0166-218X.
- [2] Guanghui Wang, Hao Li, Color degree and alternating cycles in edge-colored graphs, Discrete Mathematics, Volume 309, Issue 13, 2009, Pages 4349-4354, ISSN 0012-365X.
- [3] J. Bang-Jensen, G. Gutin, Digraphs: theory, algorithms and applications, Springer - Verlag, London, 2000.
- [4] J.W. Grossman, R. Haggkvist, Alternating cycles in edge-partitioned graphs. J. Combin. Theory Ser B 34 (1983) 77-81.
- [5] A. Yeo, Alternating cycles in edge-coloured graphs, J. Combin. Theory Ser B.