



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE FÍSICA

EFECTOS DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE EL PROPAGADOR DE
UN BOSÓN W

Tesis
QUE OPTA POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
MANUEL EMILIANO MONREAL CANCINO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ÁNGEL SÁNCHEZ CECILIO
(FC-UNAM)

COMITÉ TUTOR:
DR. JOSÉ ALEJANDRO AYALA MERCADO
(ICN-UNAM)
DR. LUIS ALBERTO HERNÁNDEZ ROSAS
(UAM-I)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, MARZO 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres y mi hermano.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Posgrado en Ciencias Físicas, por darme las herramientas para desarrollarme holísticamente en mi camino a la investigación científica.

A mi asesor, el Dr. Ángel Sánchez Cecilio por su constante apoyo a lo largo de la licenciatura y mis estudios de posgrado.

A los miembros del Comité Tutor, el Dr. José Alejandro Ayala Mercado y el Dr. Luis Alberto Hernández Rosas por sus recomendaciones y guía a lo largo del presente trabajo de tesis.

A los miembros de mi sínodo el Dr. Alfredo Raya Montaña, la Dra. Gabriella Piccinelli Bocchi, el Dr. Genaro Toledo Sánchez y el Dr. Sarira Sahu, por sus observaciones y recomendaciones que hicieron aportaron a la completez del presente trabajo.

Reconozco y agradezco el apoyo proporcionado por el CONAHCYT y el proyecto PAPIIT IN108123 durante mis estudios en el Programa de Maestría del Posgrado en Ciencias Física.

Resumen

En el presente trabajo se realiza un estudio sobre los efectos que tiene un campo magnético constante en el propagador de un bosón vectorial masivo y cargado. Para tal efecto, se limitó a tomar el sector Electrodébil del Modelo Estándar de Partículas Elementales. Para esto, se efectúa la construcción del propagador en el vacío y luego se implementan los efectos de campo magnético haciendo uso del método de Eigenfunciones de Ritus.

Se plantean elecciones sobre el cuadrivector clásico A^μ para obtener un campo magnético constante y clásico en la dirección $\hat{z}$.

Se desarrolló una metodología que involucró diagonalizar la ecuación de movimiento con campo magnético e implementar matrices de proyección cuyos eigenvalores corresponden a la proyección de espín en la dirección del campo magnético. La implementación de los proyectores y la diagonalización de la ecuación de movimiento son novedosos respecto a lo trabajado por otros autores que calculan esta misma cantidad [1, 2].

Dado un ansatz sobre el comportamiento del bosón $W^\pm$ se resuelve la ecuación de movimiento para encontrar su dinámica. Luego, se utiliza la condición de norma y la condición de ortonormalidad, que surge de la corriente conservada, para obtener un conjunto de vectores de polarización.

Después, se cuantiza canónicamente la teoría siguiendo el ansatz inicial y promoviendo el campo clásico a un campo cuántico. Con esto, se calcula el propagador de Feynman a través de su definición y se llega al propagador en presencia de campo magnético.

Finalmente, se dan ideas para estudios fenomenológicos a futuro donde el propagador es un objeto primordial.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Propagador de un Campo Escalar Neutro	1
1.2. Teoría de Norma Electrodébil GSW y Rompimiento de Simetría	2
1.3. Ecuación de Dirac	5
1.4. Ecuación de Dirac con Campo Magnético	9
1.5. Escenario Físico: Estrellas de Neutrones	15
1.5.1. Procesos URCA directo	15
1.5.2. Kicks en NS	19
2. Propagador del bosón $W^\pm$ en el vacío	21
2.1. Lagrangiano del SM y Ecuación de Proca	21
2.2. Solución de la EOM en el vacío	22
3. Propagador del bosón $W^\pm$ con Campo Magnético	25
3.1. Lagrangiano del SM y Ecuación de Proca con Campo Magnético	25
3.2. Solución a la EOM con Campo Magnético	27
3.3. Vectores de Polarización con Campo Magnético	31
3.4. Cuantización y Propagador del Campo $W^{\pm\mu}$	41
Conclusiones y Trabajo a Futuro	46
Apéndice	49

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
A. Cuantización del $W^\pm$ en el vacío	49
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo se realiza un análisis sobre los efectos que un campo magnético homogéneo tiene en el propagador de una partícula bosónica de norma masiva y cargada, dentro del marco de la teoría electrodébil del Modelo Estándar (SM por sus siglas en inglés). Estos propagadores pueden ser usados para representar a los bosones de norma $W^\pm$ y su fenomenología.

En el primer capítulo se expone de forma breve la motivación, el precedente histórico y el marco teórico necesarios para realizar el estudio del efecto producido por un campo magnético sobre el propagador de un bosón $W^\pm$, así como su relevancia en procesos de cambio de sabor.

En el segundo capítulo se hace un breve estudio sobre el cálculo del propagador del bosón $W^\pm$ en el vacío que será útil para contrastar el caso en presencia de campo magnético. Se parte del Lagrangiano del sector Electrodébil del SM, se obtienen sus ecuaciones de movimiento y, a través de un *ansatz*, se llega a relaciones de transversalidad y completez. Finalmente, se cuantiza al campo bosónico y se contruye el propagador mediante su definición del producto temporalmente ordenado.

En el tercer capítulo se realiza el estudio del propagador del bosón $W^\pm$ en presencia de campo magnético utilizando la misma metodología que se presentó en el segundo capítulo tomando en cuenta las diferencias que conlleva la presencia de este agente externo. Entre estas diferencias se encuentran: la diagonalización de la ecuación de movimiento, la solución propuesta para el campo bosónico clásico, la forma de la relación de transversalidad y los vectores de polarización, entre otros aspectos que se discuten con mayor detalle en dicho capítulo.

Finalmente, se escriben las conclusiones y el trabajo a futuro relacionado con el resultado principal del presente proyecto.

A continuación se da inicio al primer capítulo.

1.1. Propagador de un Campo Escalar Neutro

Para este estudio es relevante precisar ¿qué es un propagador? En el marco de la Teoría Cuántica de Campos, los propagadores son objetos matemáticos que describen la dinámica de las partículas representadas por sus campos cuánticos. Es particularmente importante definir un propagador que considere tanto la dinámica de partículas como de antipartículas,

este es conocido como el *propagador de Feynman* para el caso de un campo escalar neutro y se define mediante el operador de ordenamiento temporal [3–5]

$$D_F(x-y) = \langle 0 | \mathcal{T}(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)) | 0 \rangle \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle \hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(x) \rangle, \quad (1.1)$$

donde $\hat{\varphi}(x)$ es el operador del campo cuántico relacionado a una partícula escalar neutra y tiene la forma

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} (\hat{a}_p e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_p^\dagger e^{ip \cdot x}). \quad (1.2)$$

Al sustituir la relación de la Ec. (1.2) en la Ec. (1.1) y usando las relaciones de conmutación que se imponen en los campos cuánticos, se llega a

$$D_F(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} e^{-ip \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} e^{ip \cdot (x-y)}. \quad (1.3)$$

Para obtener una forma más conocida de la Ec. (1.1) se realiza un análisis de la forma integral de las funciones de Heaviside que la componen, la cual es

$$\theta(x_0 - y_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - i\varepsilon} e^{i(x_0 - y_0)\omega} d\omega. \quad (1.4)$$

Luego, al hacer el cambio de variable $E - \omega \rightarrow p^0$ en el primer término y $E - \omega \rightarrow -p^0$ y $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en el segundo término se obtiene

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.5)$$

El objetivo principal del presente trabajo es llegar a una ecuación análoga a la Ec. (1.5) para el caso de un bosón vectorial masivo y cargado bajo la influencia de un campo magnético, esta cantidad es fundamental para describir al bosón $W^\pm$ en el SM. Como este estudio se basa en el análisis del bosón $W^\pm$, dedicaremos la siguiente sección a un breve análisis de la Teoría Electrodébil en el SM.

1.2. Teoría de Norma Electrodébil GSW y Rompimiento de Simetría

La Teoría de Norma Electrodébil que actualmente describe el sector Electrodébil del SM proviene del trabajo de Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg. En 1961 Glashow publicó su primer artículo relacionado a la unificación de las teorías electromagnética y débil, su teoría requería de la presencia de procesos neutros débiles [6]. En 1967, Salam [7] y Weinberg [8] estudiaron el rompimiento de simetría al modelo de Glashow mediante el Mecanismo de Higgs [9, 10]. Este procedimiento resulta en la producción de los bosones de norma masivos cargados $W^\pm$ y neutros Z , así como uno no masivo γ (el fotón de la teoría electromagnética).

Previo al rompimiento espontáneo de la simetría, la Lagrangiana de la teoría Electrodébil de Weinberg y Salam se ve como [11]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + i\bar{R}\gamma^\mu D_\mu R + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) \\ & + \frac{m_h^2}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - G_e (\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^\dagger L) \\ & - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(W)} \cdot \mathbf{G}^{(W)\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(B)} F^{(B)\mu\nu},\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde L y R representan un doblete y un singulete de isoespín, respectivamente. La relación de Gell-Mann–Nishijima dicta que

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2},\tag{1.7}$$

donde Q es la carga electromagnética, I_3 es la carga de isoespín y Y la hipercarga.

En la Ec. (1.6) el campo ϕ corresponde a un doblete de isoespín de campos escalares complejos, llamado doblete de campo de Higgs. El rompimiento de simetría proviene de perturbaciones en el estado base de este campo que se puede reescribir como

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix}.\tag{1.8}$$

Asimismo, en la Ec. (1.6) se encuentran las derivadas covariantes para el doblete y el singulete del grupo $SU(2)$

$$\begin{aligned}\text{Doblete de } SU(2) : D_\mu &= \partial_\mu - \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu, \\ \text{Singulete de } SU(2) : D_\mu &= \partial_\mu + i g' B_\mu,\end{aligned}$$

donde $\vec{\tau}$ representa a las matrices de Pauli.

Los campos de norma presentes en la Ec. (1.6) son

$$\begin{aligned}\vec{G}_{\mu\nu}^{(W)} &= \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu, \\ F_{\mu\nu}^{(B)} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,\end{aligned}\tag{1.9}$$

donde $\vec{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ es el campo de norma asociado a la simetría de norma local $SU(2)$ de isoespín débil y B_μ es el campo de norma ligado a la simetría de norma local $U(1)$ de hipercarga.

Los parámetros restantes de la Ec. (1.6) son: m_h la masa del bosón de Higgs, λ la constante de autointeracción del campo de Higgs, g la constante de acoplamiento de isoespín débil, g' la constante de acoplamiento de hipercarga y G_e es la constante de acoplamiento entre el campo fermiónico y el campo de Higgs.

El término cuadrático del campo de Higgs da la forma de su potencial, definiendo el

mínimo del potencial como

$$v \equiv (\phi^\dagger \phi)_0 = \frac{m_h^2}{\lambda}. \quad (1.10)$$

Luego, al elegir el estado base de la teoría como

$$(\phi)_0 = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

se puede desarrollar la teoría alrededor de este estado, tal que

$$\phi = \begin{pmatrix} G^\pm \\ v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} + G^0 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

donde $G^\pm$ y G^0 son conocidos como bosones de Goldstone y h es el campo de Higgs.

Al sustituir esta forma del campo escalar en la Ec. (1.6) los términos de interacción del campo ϕ con los campos fermiónicos se modifican, dotándolos de masa. Otro cambio relevante en el Lagrangiano se da en los términos cinéticos del campo ϕ [11]

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= -\frac{i}{2} \left(gv(W_\mu^1 - iW_\mu^2) + \frac{gh(x)}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \right. \\ &\quad \left. + i\sqrt{2}\partial_\mu h(x) + v(-gW_\mu^3 + g'B_\mu) + \frac{h(x)}{\sqrt{2}}(-gW_\mu^3 + g'B_\mu) \right) \\ \implies (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= \left[g^2 \left(\frac{v^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}vh(x) + \frac{h^2(x)}{4} \right) W^{\mu+} W_\mu^- + \frac{(\partial^\mu h(x))(\partial_\mu h(x))}{2} \right] \\ &\quad + \left(\frac{v^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}vh(x) + \frac{h^2(x)}{8} \right) Z^\mu Z_\mu, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde se ha introducido la notación $W_\mu^\pm \equiv (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$, que describen a los bosones de norma cargados de la Teoría Electrodébil con masa $M_W^2 = g^2 v^2/2$. Análogamente, la combinación $Z_\mu \equiv (gW_\mu^3 - g'B_\mu)$ se identifica con un bosón de norma neutro que se ha vuelto masivo.

Existe una combinación ortogonal a Z_μ definida como $A_\mu \equiv (gW_\mu^3 + g'B_\mu)$, la cual no aparece en la Ec. (1.13). Esto último se interpreta como que el campo A_μ (fotón) no adquiere masa.

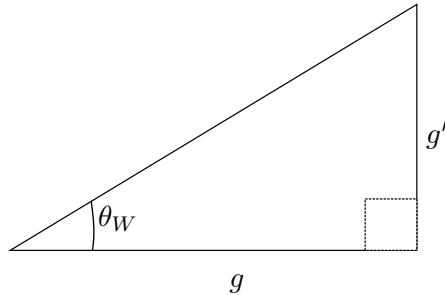


Figura 1.1: Definición del ángulo de Weinberg θ_W en términos de g' y g .

Se puede sintetizar la relación entre Z_μ y A_μ en términos de W_μ^3 y B_μ usando una matriz como

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

donde $\tan \theta_W \equiv g'/g$, con θ_W el ángulo de Weinberg el cual relaciona las constantes de acoplamiento g y g' , tal como se muestra en la figura (1.1).

En la Ec. (1.6) los dobletes y singuletes representan tipos particulares de fermiones. En éste Lagrangiano, los espinores representan a los electrones y neutrinos, sin embargo, la teoría GSW puede extenderse naturalmente a los demás leptones y quarks. Escribiendo la forma explícita de los espinores L y R y el estado (1.12) del campo de Higgs, se llega al Lagrangiano completo de la teoría electrodébil *posterior* al rompimiento de la simetría.

Este breve resumen sobre la Teoría Electrodébil en el SM de GSW sienta las bases para la descripción de los bosones vectoriales $W^\pm$ que serán el objeto de estudio principal. Ahora, con la idea de mostrar con detalle la metodología que se emplea para incorporar campo magnético al propagador de bosones de norma, en las siguientes secciones se aborda el caso de Dirac, ampliamente conocido en la literatura, tanto el caso libre como con campo magnético.

1.3. Ecuación de Dirac

Partiendo de mecánica clásica, la energía de una partícula libre con masa m y momentum $\vec{p}$, está dada por [12]

$$H = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.15)$$

Para describir cuánticamente al sistema basta con promover a operadores cuánticos las variables¹

$$\hat{p} \rightarrow \hat{p} = -i\nabla \quad \text{y} \quad H \rightarrow \hat{H} = i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Al ser promovidos a operadores, es necesario que se apliquen sobre un objeto llamado *función de onda* (ψ) que contiene información sobre la partícula cuántica y su dinámica. Por lo que la *versión cuántica* de la Ec. (1.15) es

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi, \quad (1.17)$$

que es conocida como la *Ecuación de Schrödinger* y describe a una partícula cuántica libre de masa m . Esta descripción cambia al considerar que la partícula se desplaza a velocidades relativistas, para implementar este aspecto se considera la relación de dispersión

$$E^2 = m^2 + p^2. \quad (1.18)$$

¹Usando unidades naturales, es decir, $\hbar = c = 1$.

Por lo tanto, al aplicar la Ec. (1.16) a la relación anterior se llega a la relación

$$(\hat{H}^2 - \hat{p}^2) \psi = m^2 \psi, \quad (1.19)$$

de modo que al definir el cuadvivector $\hat{p}_\mu \equiv (\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}) \implies \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv -\partial_\mu \partial^\mu$, se obtiene

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0, \quad (1.20)$$

que es conocida como la *Ecuación de Klein-Gordon*. La Ec. (1.20) admite soluciones de energía tanto positiva como negativa, sin embargo hay que recordar que partimos de la Ec. (1.15) que describe a una partícula libre la cual no admite soluciones negativas de la energía. Es este el problema que Dirac se planteó resolver dando una forma lineal de la Ecuación de Klein-Gordon

$$\hat{H}^2 \psi = (\hat{p}^2 + m^2) \psi \implies \hat{H} \psi = (\alpha_i \hat{p}_i + \beta m) \psi, \quad (1.21)$$

con $i = 1, 2, 3$, y donde α_i y β son coeficientes que deben cumplir con la Ec. (1.20) al elevar al cuadrado. Dichos coeficientes satisfacen la siguiente álgebra

$$\frac{1}{2} \{\alpha_i, \alpha_j\} = \delta_{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0. \quad (1.22)$$

Bajo el ansatz de la Ec. (1.21) se deriva que los coeficientes α_i y β deben ser matrices. Por lo tanto, al usar la propiedad cíclica de las trazas en las relaciones (1.22) se llega a que α_i y β deben de satisfacer

$$\text{Tr}(\alpha_i) = \text{Tr}(\beta) = 0, \quad \det(\alpha_i) = \det(\beta) = \pm 1, \quad (1.23)$$

lo cual reduce el conjunto de matrices posibles a aquellas que sean cuadradas de $2N \times 2N$ con $2N$ la dimensión de la matriz. Para el caso más simple de $N = 1$, no se pueden cumplir las propiedades que permiten reproducir el resultado de Klein y Gordon. Es para $N = 2$ que se propone

$$\begin{aligned} \alpha_i &\equiv i\sigma_2 \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta &\equiv \sigma_3 \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde σ_i , con $i = 1, 2, 3$, son las matrices de Pauli. Estas definiciones satisfacen las propiedades mostradas en (1.22) y (1.23). A esta definición de β se le conoce como prescripción de Dirac-Pauli. Con esto, la *Ecuación de Dirac* se puede escribir como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (1.25)$$

donde $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\alpha^i)$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, se les denomina matrices de Dirac. En la representación de la energía, estas matrices están dadas por

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Por construcción, estas matrices cumplen el *álgebra de Dirac o Clifford* dado por

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4}. \tag{1.27}$$

El procedimiento hecho hasta ahora para encontrar la Ecuación de Dirac ha sido introduciendo las herramientas de mecánica cuántica y relatividad especial en la descripción clásica de una partícula libre. Heredado de la parte cuántica se obtuvo la función de onda ψ , sin embargo, en la Ec. (1.25) $\psi(x)$ es un objeto denominado biespinor el cual tiene cuatro entradas las cuales se relacionan con los 4 grados de libertad internos de la partícula: 2 estados de energía (positiva/negativa) y 2 estados de espín (arriba/abajo). Otro aspecto a resaltar de la Ec. (1.25) es la invariancia ante transformaciones de Lorentz, esto es claro al notar la contracción del índice μ . Sin embargo, la Ecuación de Dirac sigue prediciendo la existencia de partículas con energía negativa, si esto es cierto en la naturaleza física ¿por qué las partículas descritas por esta ecuación no decaen infinitamente en su energía?

Como solución a estas cuestiones, Dirac propuso: que su teoría es válida para cierto tipo de partículas, llamadas fermiones, las cuales cumplen el principio de exclusión de Pauli. Esto es útil para la descripción de Dirac ya que se propone que en el vacío existe un *mar de fermiones* que ocupan todos los estados de energía negativa, previniendo que los fermiones decaigan indefinidamente a los niveles de energía negativa. Con esto en mente, cabe preguntarse lo que sucede si un fermión, con energía negativa, es excitado fuera del mar de partículas; ésta línea de pensamiento es seguida por la llamada *teoría de huecos* en la cual los “huecos” son caracterizados como fermiones con las mismas propiedades físicas que las partículas de energía positiva, pero con todos los números cuánticos contrarios [13]. A estos objetos se les llama *antipartículas* y son objetos físicos cuya detección ha sido probada por experimentos en el área de la física de altas energías.

Como la Ecuación de Dirac trata con biespinores, que tienen 4 grados de libertad internos, sus soluciones más simples deben de contener información respecto a estos grados de libertad internos y ser objetos con esta extensión. Para la partícula libre, el ansatz son ondas planas de la forma [14]

$$\begin{aligned}
\psi_s^{(+)}(\vec{x}, t) &= u_s(E, \vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}, \\
\psi_s^{(-)}(\vec{x}, t) &= v_s(E, \vec{p}) e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)},
\end{aligned} \tag{1.28}$$

donde E es la energía y $\vec{p}$ el tres momento. Los superíndices $+$ y $-$ denotan las soluciones de energía positiva y negativa, respectivamente, es decir, las soluciones para partículas y

antipartículas. El índice de los biespinores (u y v) indica las configuraciones de espín para cada solución. La forma explícita para cada biespinor u y v se encuentra sustituyendo estos ansatz en la Ecuación de Dirac y son

$$\begin{aligned} u_1(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, & u_2(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \\ v_1(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & v_2(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Las condiciones de ortogonalidad de las soluciones es directa, además satisfacen las identidades

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) &= \not{p} + m, \\ \sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) &= \not{p} - m, \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3$.

Se concluye con este desarrollo que la solución más general a la Ecuación de Dirac se puede escribir de la forma

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[a_p^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_p^{*s} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right] \Big|_{p^0=E_p}, \quad (1.31)$$

donde a_p^s y b_p^{*s} son números complejos arbitrarios. Esta descomposición en modos de Fourier se hace sobre el biespinor de Dirac y describe a fermiones relativistas de masa m los cuales son estables si se piensa en la formulación del mar de Dirac. Sin embargo, el problema de la degeneración se soluciona sin la necesidad de este concepto al promover al espinor a un operador

$$\psi \rightarrow \hat{\psi}, \quad (1.32)$$

que, a su vez, resulta en la promoción de los números complejos a_p^s y b_p^{*s} en operadores de “creación” y “destrucción” de partículas. Al proceso de pasar de el campo clásico $\psi(x)$ a el campo cuántico $\hat{\psi}(x)$ se le conoce como “segunda cuantización” [3]. Al realizar este proceso se puede definir una cantidad análoga a la Ec. (1.1) que es el propagador de Feynman en el caso de Dirac, el cual se define como

$$S_F \equiv \langle 0 | T \left(\hat{\psi} \hat{\bar{\psi}} \right) | 0 \rangle, \quad (1.33)$$

donde $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, T indica el ordenamiento temporal de los campos fermiónicos, $\langle 0|$ y $|0\rangle$ son estados que representan al vacío de la teoría.

El propagador de Feynman en el espacio de configuraciones es [3–5]

$$S_{xy} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (1.34)$$

y contiene la información correspondiente a la propagación de un fermión de un punto espacio-temporal x a otro y . El término en el denominador $i\varepsilon$ garantiza la causalidad de la propagación. Este resultado es el análogo al de la Ec. (1.5) en campos escalares.

El objetivo principal del presente trabajo consiste en desarrollar un propagador para el bosón $W^\pm$ en presencia de campos magnéticos. Es por esto que es de suma importancia conocer a detalle la forma canónica de construir propagadores de Feynman para distintas teorías físicas que también son descritas por el SM.

En la siguiente sección se hará la construcción del propagador de Feynman para fermiones en presencia de campo magnético y se usará como un antecedente poderoso para poder desarrollar el análogo para el bosón $W^\pm$.

1.4. Ecuación de Dirac con Campo Magnético

Se puede seguir la metodología de la sección anterior 1.3 para llegar al propagador de una partícula fermiónica en presencia de campo magnético. Partiendo del Hamiltoniano de una partícula bajo este agente dado por [15, 16]

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2, \quad (1.35)$$

donde $\vec{p}$ es el momentum de la partícula, m es la masa de la partícula, e es la carga eléctrica de la partícula y $\vec{A}$ es el potencial vectorial del campo electromagnético. Al promover esta ecuación a operadores cuánticos aplicados sobre la función de onda $\psi(\vec{x}, t)$ de una partícula

$$\hat{H}\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}} \right)^2 \psi(\vec{x}, t), \quad (1.36)$$

donde $\hat{\vec{p}}$ y $\hat{\vec{A}}$ son los operadores de momentum y de potencial vector respectivamente. Es importante resaltar que esta ecuación es válida para partículas con espín 0.

Las energías permitidas presentan un espectro discreto de la forma

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{|eB|}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.37)$$

con $n \in \mathbb{N}$. Al considerar una partícula con espín, es importante recordar que existe un acoplamiento entre este y el campo magnético externo tal que [15]

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}} \right)^2 - \hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}, \quad (1.38)$$

donde $\hat{\vec{\mu}} = g\mu_B \hat{\vec{s}}$ es el momento dipolar magnético intrínseco del electrón, g es el factor de

Landé, $\mu_B = e/2m$ es el magnetón de Bohr y $\hat{s} = \hat{\sigma}/2$ el operador de espín con $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli.

En este caso las energías permitidas son modificadas por la presencia de espín, entonces

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{|eB|}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \mu_B \sigma B, \quad (1.39)$$

donde $\sigma = \pm 1$ representa las distintas proyecciones de espín (+) y (-) de forma paralela y antiparalela al campo magnético respectivamente. Se puede definir a la combinación

$$\ell \equiv n + \frac{1}{2} - \frac{e\sigma}{|2e|}, \quad (1.40)$$

conocida como el nivel de Landau.

Estas cantidades y resultados se obtienen para una teoría mecánica cuántica no relativista. Para considerar los elementos relativistas e incorporarlos a la descripción que se desea, es necesario desarrollar la Ecuación de Dirac en presencia de campos magnéticos. Al guiarse del caso no relativista, se reescribe al momento como

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{\Pi}^\mu = \hat{p}^\mu - qA^\mu, \quad (1.41)$$

donde $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ es el cuadripotencial.

Por lo tanto, la Ec. (1.25) se reescribe como

$$\left(\hat{\mathbb{M}} - m \right) \psi(x) = 0, \quad (1.42)$$

que describe la dinámica de masa m , carga e y espín fraccionario en presencia de un campo magnético externo.

Con el fin de diagonalizar la Ec. (1.42), se multiplica por el operador $\left(\hat{\mathbb{M}} + m \right)$ obteniendo la ecuación

$$\left(\hat{\Pi}^\mu \hat{\Pi}_\mu - \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2 \right) \psi = 0. \quad (1.43)$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, es el tensor electromagnético y $\sigma^{\mu\nu} \equiv i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ son los generadores del grupo $SU(2)$ en la representación fundamental. Esta ecuación es válida para cualquier campo electromagnético interactuando con el campo fermiónico. En el caso de un campo homogéneo en la dirección z , el tensor electromagnético solo tiene dos componentes no nulas, mismas que pueden ser producidas con la elección de norma $A^\mu = (0, 0, Bx^1, 0)$. Entonces

$$B = F^{21} = -F^{12}, \quad (1.44)$$

de forma matricial esto se ve como

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

de tal forma que la Ec. (1.43) se reescribe como

$$(\Pi^2 + ie\gamma^1\gamma^2B - m^2)\psi(x) = 0. \quad (1.46)$$

La cual, con ayuda del operador de proyección de espín

$$\Delta(\sigma) \equiv \frac{1}{2}(1 + i\sigma\gamma^1\gamma^2), \quad (1.47)$$

con la propiedad $\psi_+ \equiv \Delta(+)\psi$ y $\psi_- \equiv \Delta(-)\psi$, se puede reescribir como

$$\sum_{\sigma=\pm 1} (\Pi^2 + \sigma eB - m^2)\psi_\sigma = 0 \quad (1.48)$$

Análogamente al caso sin campo (1.28) para la norma $A^\mu = (0, 0, Bx^1, 0)$ la forma de la ecuación sugiere usar un ansatz para las soluciones de energía positiva y negativa de tal forma que la solución espacial sean ondas planas en la dirección del campo mientras que en la dirección perpendicular se encontrarán los cambios por la presencia de campo magnético, esto es

$$\psi_\sigma^r = e^{-ir(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)} X_\sigma^r(x_1) \omega_\sigma^r, \quad r = \pm 1, \quad (1.49)$$

donde r indica si soluciones son de energía positiva o negativa, ω_σ^r solo codifica la información espinorial de la solución, mientras que la información espacio-temporal se encuentra en el argumento de la exponencial y en la función $X_\sigma^r(x^1)$. Al sustituir el ansatz de la Ec. (1.49) en la Ec. (1.48) se llega a

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \left(\frac{1}{4}\rho^2 - \frac{1}{2} - n \right) \right] X_\sigma^r(\rho) = 0, \quad (1.50)$$

con

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \sqrt{2|eB|} \left(rx_1 - \frac{p_2}{eB} \right), \\ n &\equiv \frac{p_\parallel^2 - m^2}{2|eB|} + \frac{\sigma s - 1}{2} \equiv \ell + \frac{\hat{\sigma} - 1}{2}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

donde $p_\parallel^2 \equiv E^2 - p_3^2$, s es el signo de eB , $\hat{\sigma} \equiv \sigma s$ y ℓ es un índice denominado *nivel de Landau*. La Ec. (1.50) es conocida como la *Ecuación diferencial de Weber* cuyas soluciones son funciones parabólicas cilíndricas [17, 18] de la forma

$$X_\sigma^r(\rho) = N_n D_n(\rho), \quad (1.52)$$

donde N_n es un factor de normalización y $D_n(\rho)$ es la solución a la ecuación de Weber dadas por

$$N_n = \left(\frac{\sqrt{4\pi|eB|}}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.53)$$

$$D_n(z) = 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} z^2 \right),$$

$W_{k,m}(z)$ es conocida como la *función de Whittaker* [17, 18]. Sustituyendo las soluciones (1.52) en (1.42) se llega a la expresión

$$\sum_{\sigma=\pm 1} X_{\ell+\frac{\sigma-1}{2}}^r \Delta(\sigma) \left[\gamma^0(rE) - \gamma^2 \left(rs\sqrt{2|eB\ell|} \right) - \gamma^3(rp^3) - m \right] \omega^r = 0, \quad (1.54)$$

el cual puede reescribirse como

$$\mathbb{E}_p^r [\gamma_\mu \bar{p}_r^\mu - m] \omega^r = 0, \quad (1.55)$$

con

$$\begin{aligned} \omega_\sigma^r &\equiv \Delta(\sigma) \omega^r, \\ \mathbb{E}_p^r &\equiv \left[\sum_{\sigma=\pm 1} X_{\ell+\frac{\sigma-1}{2}}^r \Delta(\sigma) \right] e^{-ir(Ex_0 + p^2 x_2 + p^3 x_3)}, \\ \bar{p}_r^\mu &\equiv (rE, 0, rs\sqrt{2|eB\ell|}, rp^3), \end{aligned} \quad (1.56)$$

donde $\mathbb{E}_p^r$ son conocidas como las eigenfunciones de Ritus [19, 20]. Con el resultado de la Ec. (1.55), y al ser una forma muy parecida a la Ecuación de Dirac en el vacío, se puede llevar a cabo un procedimiento análogo al realizado en la subsección anterior para encontrar el propagador fermiónico en presencia de un campo magnético.

Como la Ec. (1.55) es muy parecido al caso libre, las soluciones de la parte espinorial se obtienen de forma análoga, esto es

$$\omega^+ \equiv u = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot \bar{p}} \eta \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}} \eta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \omega^- \equiv v = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot \bar{p}} \eta \\ -\sqrt{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}} \eta \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Una vez hecho lo anterior, la solución general para el campo fermiónico en presencia de campo magnético está dada por

$$\psi^r \equiv \mathbb{E}_p^r \omega^r, \quad (1.58)$$

de donde es interesante notar que las eigenfunciones de Ritus están jugando el papel de las ondas planas para el caso del vacío.

Para construir el propagador fermiónico, siguiendo el formalismo de cuantización canónica, con las soluciones de la definición (1.55) se pueden definir reglas de anticonmutación

para los operadores de campo

$$\left\{ \hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta^\dagger(y) \right\} \Big|_{x_0=y_0} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(x-y), \quad (1.59)$$

donde los operadores de campo fermiónico tendrán las descomposiciones de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \oint \frac{d^3p}{(2\pi)^3} A(p) \sum_{\sigma=\pm 1} \left(\hat{a}_p^\sigma \mathbb{E}_p^+ u_p^\sigma + \hat{b}_p^{\sigma\dagger} \mathbb{E}_p^- v_p^\sigma \right) \\ \hat{\psi}^\dagger(x) &= \oint \frac{d^3p}{(2\pi)^3} A^*(p) \sum_{\sigma=\pm 1} \left(\hat{a}_p^{\sigma\dagger} u_p^{\sigma\dagger} \mathbb{E}_p^{+\dagger} + \hat{b}_p^\sigma v_p^{\sigma\dagger} \mathbb{E}_p^{-\dagger} \right), \end{aligned} \quad (1.60)$$

con

$$\oint \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \equiv \sum_{\ell} \int \frac{dp_2 dp_3}{(2\pi)^2}, \quad (1.61)$$

donde $A(p)$ es una constante de normalización, $\hat{a}_p^{\sigma\dagger}$ y $\hat{a}_p^\sigma$ son los operadores de creación y aniquilación de una partícula fermiónica con espín σ respectivamente, $\hat{b}_p^{\sigma\dagger}$ y $\hat{b}_p^\sigma$ son los operadores de creación y aniquilación de una antipartícula de forma análoga.

Las reglas de la Ec. (1.59) derivan en las reglas de anticonmutación de los operadores de creación y aniquilación en presencia de campo magnético

$$\{\hat{a}_p^\sigma, \hat{a}_{p'}^{\sigma'\dagger}\} = \{\hat{b}_p^\sigma, \hat{b}_{p'}^{\sigma'\dagger}\} = (2\pi)^2 \delta_{\ell,\ell'} \delta_{\sigma,\sigma'} \delta(p_2 - p_2') \delta(p_3 - p_3'), \quad (1.62)$$

las deltas de Dirac conservan el momento espacial en las direcciones y y z , las deltas de Kronecker indican que la condición de anticonmutación se da para estados con el mismo espín y que se encuentran en el mismo nivel de Landau.

Al sustituir las descomposiciones de Fourier (1.60) en la relación de anticonmutación (1.59) se obtiene la constante de normalización

$$|A(p)| = \frac{1}{\sqrt{2E}}, \quad (1.63)$$

que vuelve invariante al elemento de volumen. A partir de estos resultados, se puede construir el propagador fermiónico en presencia de campo magnético usando la definición del propagador de Feynman de la Ec. (1.33)

$$\begin{aligned} S_F^B(x-y)_{\alpha\beta} &\equiv \langle 0 | T \left(\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\hat{\psi}}_\beta(y) \right) | 0 \rangle \\ &= \langle \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\hat{\psi}}_\beta(y) \rangle \theta(x^0 - y^0) - \langle \hat{\hat{\psi}}_\beta(y) \hat{\psi}_\alpha(x) \rangle \theta(y^0 - x^0). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Al calcular cada uno de los términos, se llega al propagador en términos de eigenfunciones de Ritus [21]

$$S_F^B(x-y) = i \oint \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{E}_p(x) [\not{p} + m] \bar{\mathbb{E}}_p(y)}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (1.65)$$

donde $\tilde{p}_\mu \equiv (p_0, 0, s\sqrt{2|eB\ell|}, p_3)$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p^r &\equiv \left[\sum_{\sigma=\pm 1} X_{\ell+\frac{\sigma-1}{2}}^r \Delta(\sigma) \right] e^{-ir(Ex_0+p^2x_2+p^3x_3)}, \\ \bar{\mathbb{E}}_p^r &\equiv \left[\sum_{\sigma=\pm 1} X_{\ell+\frac{\sigma-1}{2}}^r \Delta(\sigma) \right] e^{ir(Ex_0+p^2x_2+p^3x_3)}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Una manera distinta de obtener el propagador fermiónico en presencia de un campo magnético uniforme fue trabajada por Julian Schwinger en 1951 [22], por un procedimiento completamente distinto, obteniendo

$$S_F^B = \Omega(x, y) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_F^B(k) e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (1.67)$$

donde

$$\Omega(x', x'') \equiv \exp \left(-ie \int_{x''}^{x'} dx^\mu A_\mu(x) \right) \quad (1.68)$$

es conocida como la fase de Schwinger. En el caso de un campo magnético uniforme en la dirección z se tiene [21, 23]

$$\begin{aligned} S_F^B(p) &= \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp \left[-is \left(m^2 - p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} \right) \right] \\ &\quad \times \left[(m + \not{p}_\parallel) e^{-ieBs\Sigma_3} + \frac{\not{p}_\perp}{\cos(eBs)} \right], \end{aligned} \quad (1.69)$$

donde s se conoce como el tiempo propio de Schwinger, $p_\parallel$ y $p_\perp$ son las entradas del cuadrimomento paralelas y perpendiculares al campo magnético, respectivamente, dadas por

$$p_\parallel^\mu = (p^0, 0, 0, p^3) \quad \text{y} \quad p_\perp^\mu = (0, p^1, p^2, 0). \quad (1.70)$$

Es de importancia notar que al tomar

$$\begin{aligned} \lim_{eB \rightarrow 0} S_F^B(p) &= \int_0^\infty ds \exp \{ -is (m^2 - p_\parallel^2 - p_\perp^2) \} [m + \not{p}_\parallel + \not{p}_\perp] \\ &= \int_0^\infty ds \exp \{ is (p^2 - m^2) \} (\not{p} + m), \end{aligned} \quad (1.71)$$

donde se ha utilizado que $\lim_{eB \rightarrow 0} \sin(eBs) = eBs$ y $\lim_{eB \rightarrow 0} \cos(eBs) = 1$.

Como aparecen estos cuadrimomentos contraídos con las matrices de Dirac, será útil definir las cantidades

$$\gamma_{\parallel}^{\mu} = (\gamma^0, 0, 0, \gamma^3) \quad \text{y} \quad \gamma_{\perp}^{\mu} = (0, \gamma^1, \gamma^2, 0). \quad (1.72)$$

Asimismo, se define la cantidad

$$\Sigma_3 \equiv i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.73)$$

y se identifica en la Ec. (1.46) como el término que acopla al campo magnético con el espín de la partícula. De igual manera, el proyector definido en la Ec.(1.47) se puede identificar la cantidad Σ_3 . Los propagadores calculados de ambas formas, mediante el procedimiento de Ritus y el de Schwinger, son formas análogas de escribir esta cantidad y se puede llegar de uno a otro mediante algunas manipulaciones [24].

El procedimiento mostrado en esta subsección se realiza para la física relacionada con el bosón $W^{\pm}$. En un principio, se deberá de obtener la Ecuación de Movimiento (EOM por sus siglas en inglés) correspondiente, realizar un proceso de diagonalización para resolver la ecuación de la forma más cómoda. Luego, será necesario definir los vectores de polarización asociados (estados de espín) y finalmente cuantizar el campo clásico para dictar relaciones de conmutación y llegar al propagador de la teoría.

Como última sección en este capítulo, introduciré algunas de las ventajas fenomenológicas que surgen de obtener el propagador del bosón $W^{\pm}$ en presencia de campos magnéticos.

1.5. Escenario Físico: Estrellas de Neutrones

1.5.1. Procesos URCA directo

Las estrellas de neutrones (NS por sus siglas en inglés) pueden ser tratadas como laboratorios únicos de materia super densa [25, 26] en los cuales se presentan campos magnéticos que van desde $10^{12} - 10^{16} \text{ G}$ en su superficie [27, 28], hasta 10^{18} G en su interior [29, 30]. En dichos objetos astrofísicos se presentan procesos de decaimiento β llamados “procesos URCA” en los cuales, a nivel de quarks, el intercambio de un bosón de norma $W^{\pm}$ resulta en la emisión de neutrinos [31, 32]. El estudio de los procesos URCA es de gran interés en la comunidad científica ya que permiten entender el enfriamiento y evolución de las NS [33].

En la astrofísica moderna, se considera que la principal forma en la que las NS se enfrían es mediante la rápida emisión de neutrinos que resultan de los procesos de decaimiento β [31, 32]. Particularmente, se le conoce como “procesos URCA directo” (dURCA) a las reacciones [34]

$$\begin{aligned} (A, Z) + e^{-} &\rightarrow (A, Z - 1) + \nu_e, \\ (A, Z - 1) &\rightarrow (A, Z) + e^{-} + \bar{\nu}_e, \end{aligned} \quad (1.74)$$

donde Z es el número de protones y A es el número de nucleones. El proceso dURCA más simple es [35]

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e, \\ p + e^{-} &\rightarrow n + \nu_e. \end{aligned} \quad (1.75)$$

A nivel de quarks, estos procesos corresponden al cambio de sabor en la composición de los nucleones ya sea de $d \rightarrow u$ o de $u \rightarrow d$. Es por este fenómeno de decaimiento que se puede estudiar el fenómeno de enfriamiento de NS mediante el análisis de la tasa de decaimiento en los procesos mostrados en (1.75).

La detección realizada por ROSAT [36], sobre la emisión térmica de NS, indica la necesidad de agentes de enfriamiento que deriven en un proceso de emisión de neutrinos más rápido al propuesto solamente por procesos dURCA. Análisis enfocados a estos agentes como la ecuación de estado, la composición de las NS y la superfluidez de bariones, entre otros, han sido objetos de estudio [37]. Como se mencionó anteriormente, un fenómeno físico que estos objetos astrofísicos presentan son campos magnéticos muy intensos, los cuales también modifican el enfriamiento de las NS [38]. Estudios hechos sobre la relación entre el campo magnético y la emisión de los neutrinos, muestran un aumento dramático de este fenómeno [39, 40], frente a observaciones de pulsares [41]. Con este precedente, resulta de interés entender la modificación que sufren las partículas que participan en los procesos de cambio de sabor, los cuales, en el SM, son los bosones $W^\pm$.

Para realizar este estudio se puede realizar un análisis sobre la tasa de decaimiento del proceso $W^+ \rightarrow u\bar{d}$ en el vacío y en presencia de campo magnético. En la siguiente subsección se habla de la metodología que se sigue en el vacío y las diferencias que debería de haber en presencia de campo magnético.

Como se expresó anteriormente en la sección (1.2), en el SM, los procesos de cambio de sabor son mediados por la emisión o captura de un bosón $W^\pm$. Uno de estos procesos es el decaimiento $W^+ \rightarrow u\bar{d}$, el cual es el principal canal de decaimiento observado experimentalmente [42]. La metodología a seguir para calcular esta tasa de decaimiento es

- Plantear, a primer orden de perturbación, el diagrama de Feynman correspondiente al proceso $W^+ \rightarrow u\bar{d} \rightarrow W^+$.
- Utilizar las reglas de Feynman correspondientes del SM para dicho proceso para obtener la forma analítica del diagrama.
- Usar la fórmula de reducción LSZ para bosones vectoriales masivos y cargados sobre el diagrama completo para obtener la función de autoenergía.
- Utilizar el teorema óptico para relacionar la parte imaginaria de la función de autoenergía con la tasa de decaimiento del proceso.

El Lagrangiano de interacción del SM en la sección Electrodébil y para la corriente de cambio de sabor de un quark u a un quark d es

$$\mathcal{L}_{W^+u\bar{d}} = \frac{g}{\sqrt{2}} V_{ud} \bar{\psi}_d \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_u W^\mu, \quad (1.76)$$

donde W_μ^+ representa al campo del bosón vectorial cargado masivo, $\bar{\psi}_d$ y ψ_u representan a los campos fermiónicos correspondientes a los quarks $\bar{d}$ y u respectivamente.

El diagrama de Feynman correspondiente al proceso $W^+ \rightarrow u\bar{d} \rightarrow W^+$, mostrado en la Fig. (1.2), se le denomina “Función de autoenergía”.

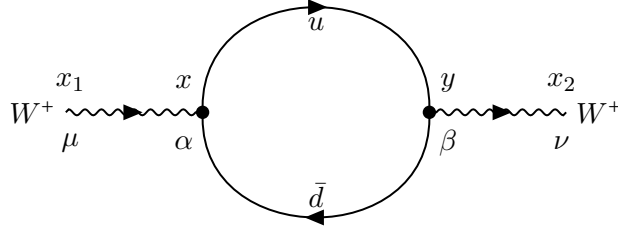


Figura 1.2: Diagrama de Feynman de la función de autoenergía a un lazo.

La forma analítica de este diagrama se puede obtener una vez que se aplican las siguientes reglas de Feynman

$$\begin{aligned}
 \text{Wavy line } W^+ \text{ with momentum } \vec{k} &= i \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2}}{k^2 - M^2} = i D^{\mu\nu}(k^2), & \text{Feynman line } \psi \text{ with momentum } \vec{k} &= i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} = i S(k), \\
 \text{Vertex } W^+ \text{ to } \psi_1 \text{ and } \bar{\psi}_2 &= -i \frac{g}{\sqrt{2}} V_{q_1 q_2} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2}
 \end{aligned}$$

Figura 1.3: Reglas de Feynman de para la teoría electrodébil de GSW en el SM.

donde los dos primeros diagramas corresponden al propagador de un bosón vectorial masivo dada la norma de Landau: $\xi = 0$ [43] y al propagador fermiónico, respectivamente. El tercer diagrama representa al vértice de interacción de la teoría GSW para las corrientes de cambio de sabor y surge del Lagrangiano mostrado en la Ec. (1.76) para el par de quarks elegidos. El vector $\vec{k}$, en los primeros dos diagramas, representa los momentos espaciales de las partículas en los propagadores, g es la constante de acoplamiento débil y $V_{q_1 q_2}$ es el elemento de matriz CKM que cambia de un quark $q_1 \rightarrow q_2$ en el diagrama del vértice de interacción.

Las reglas para leer estos diagramas de Feynman en el espacio de configuraciones, que surgen de la teoría cuántica de campos y que no se deducirán a detalle son [44]

- Se fija una dirección en la cual leer el diagrama respecto a las flechas del lazo, esto es importante ya que afecta la interpretación de los propagadores fermiónicos.
- Por cada línea externa se escribe la onda plana correspondiente al estado asintótico de la partícula incidente y saliente.
- Se escribe la forma analítica del vértice, cuidando el orden en el que se lee el diagrama.
- Luego, siguiendo el sentido fijado al inicio de la lectura del diagrama, se escribe el propagador correspondiente. En este caso, las líneas corresponden al propagador fermiónico.
- Se suma sobre los grados de libertad del sistema. En este caso se debe de realizar una suma sobre: los cuádrimomentos indeterminados, sobre el espín (fraccionario) de

las partículas en el lazo haciendo una traza sobre los índices espinoriales y sobre los estados de espín (entero) de las partículas externas.

- Al tener un lazo de fermiones, se multiplica por un factor de (-1) . Este factor surge del teorema espín-estadística.

Se deben de seguir estas reglas para calcular correctamente la forma analítica de la probabilidad de transición del proceso. Aplicando estas reglas al diagrama de la Fig. (1.2) se obtiene su forma analítica, que es

$$\Pi^{\mu\nu} = (-1) \int d^4x \int d^4y D_{1x}^{\mu\alpha} \text{Tr} \left[S_{xy} \frac{-ig}{\sqrt{2}} V_{ud} \gamma_\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} S_{yx} \frac{-ig}{\sqrt{2}} V_{ud} \gamma_\beta \frac{1-\gamma_5}{2} \right] D_{y2}^{\beta\nu}, \quad (1.77)$$

donde S_{xy} y S_{yx} son los propagadores fermiónicos y antifermiónicos, respectivamente; V_{ud} es el elemento de matriz CKM correspondiente al cambio de sabor de un quark u a un quark d ; $G_{1x}^{\mu\alpha}$ y $G_{y2}^{\beta\nu}$ son los propagadores del bosón vectorial masivo cargado; el término (-1) es debido al teorema espín-estadística; la traza se debe a la suma sobre índices espinoriales y las integrales sobre el espacio se hacen para sumar sobre las posibilidades de posición de las partículas.

Este diagrama describe el proceso físico de propagación del bosón de norma masivo W^+ siendo afectada por fluctuaciones cuánticas a primer orden mediante la emisión y reabsorción instantánea y virtual del par $u\bar{d}$. Esta fluctuación cuántica corrige la propagación, a nivel árbol, del bosón W^+ .

En presencia del campo magnético, todas las partículas que intervienen en el proceso $W^+ \rightarrow u\bar{d} \rightarrow W^+$ son afectadas en su propagación. Este efecto es ilustrado diagramáticamente en la Fig. (1.4).

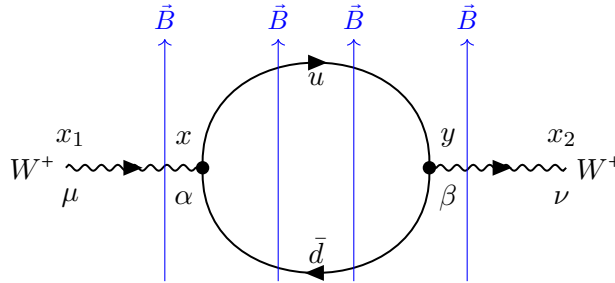


Figura 1.4: Diagrama de Feynman de la función de autoenergía a un lazo en presencia del campo magnético.

Dichas afectaciones repercuten en la forma del propagador de Feynman para las partículas fermiónicas y para el propagador bosónico cargado. La forma analítica del diagrama es

$$\Pi_{eB}^{\mu\nu} = - \int d^4x d^4y D_{eB}^{\mu\alpha} \text{Tr} \left[S_{eB} \frac{-ig}{\sqrt{2}} V_{ud} \gamma_\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} S_{eB} \frac{-ig}{\sqrt{2}} V_{ud} \gamma_\beta \frac{1-\gamma_5}{2} \right] D_{eB}^{\beta\nu}, \quad (1.78)$$

donde es relevante notar que lo único que difiere de la Ec. (1.77) es que los propagadores que se usarán son los afectados por campo magnético. El propagador fermiónico magnético es el dado en la Ec. (1.69), mientras que el propagador bosónico magnético es el objeto que se plantea calcular explícitamente en el presente trabajo de tesis.

En general para el desarrollo de la función de autoenergía, se puede realizar una expansión en serie de potencias a partir de la teoría de perturbaciones aplicada sobre la función de Green de 2 puntos. Este procedimiento se identifica como una serie de fluctuaciones cuánticas cuya amplitud de probabilidad es cada vez menos relevante conforme se toman mayores términos en la expansión perturbativa. El orden de la expansión perturbativa se relaciona directamente con el exponente de la constante de acoplamiento. La representación diagramática de la expansión perturbativa tiene la siguiente forma [4]

$$G_2 = \text{---} W^+ \text{---} + \text{---} W^+ \text{---} \text{I1P} \text{---} W^+ \text{---} + \text{---} W^+ \text{---} \text{I1P} \text{---} W^+ \text{---} \text{I1P} \text{---} W^+ \text{---} + \dots$$

donde “I1P” es un acrónimo de “irreducible a una partícula”. Los diagramas con I1P en ellos representan la suma sobre diagramas conexos irreducibles a una partícula, es decir, que no es posible obtener de un diagrama dos (o más) contribuciones al cortar una línea interna. A estos diagramas conexos, que forman parte de los I1P, se les denomina función de autoenergía Π y su representación diagramática es

$$\text{---} \text{I1P} \text{---} \equiv -i\Pi.$$

Esta función se interpreta como modificaciones a la energía de la partícula debido a las autointeracciones por fluctuaciones cuánticas [21]. Es importante notar que el diagrama de la ecuación anterior no cuenta con líneas externas, estas fueron *amputadas* mediante la fórmula de reducción LSZ que es útil para “quitar” los estados asintóticos de las partículas entrantes y salientes. El proceso de amputación en presencia de un campo magnético, con estados asintóticos cargados es un problema de gran interés, en donde la forma del propagador modificado por campo magnético será una pieza fundamental.

1.5.2. Kicks en NS

Otro fenómeno relevante que se observa en las NS es un movimiento anisotrópico que presenta una alta velocidad de alrededor de 1000 km/s , éstos son los llamados “kicks”. Se han propuesto distintos mecanismos que buscan explicar el origen de este movimiento, entre los cuales se encuentra un efecto del campo magnético sobre la emisión anisotrópica de neutrinos lo cual podría contribuir a la existencia de estos kicks [46].

Se han realizado estudios sobre la relevancia del campo magnético en las emisiones anisotrópicas de neutrinos en NS y, en particular, en estrellas de quarks extrañas. Sin embargo, estudios sobre los efectos que el campo magnético pudiera tener sobre la tasa de interacción del neutrino con su medio, es decir cambios en su camino libre medio, no han sido calculados [47, 48]. Para realizar estudios sobre afectaciones a la interacción del neutrino con el medio se podría analizar la tasa de decaimiento del proceso $\nu_{e^-} \rightarrow W^+ e^-$ a través de una metodología parecida a la descrita anteriormente. En la Fig. (1.5) se ilustra el diagrama de Feynman correspondiente al proceso que podría ser relevante calcular para cuantificar como se afecta el camino libre medio (MFP por sus siglas en inglés) del neutrino por la presencia del campo magnético

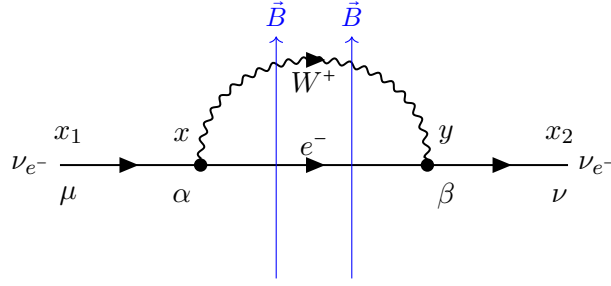


Figura 1.5: Diagrama de Feynman de la función de autoenergía a un lazo en presencia del campo magnético.

Los cambios, debidos al campo magnético, del proceso descrito en la Fig. (1.5) pueden ser pensados, de forma efectiva, como cambios en el vértice del diagrama, es decir, modificaciones a la intensidad de interacción del neutrino debidos a la presencia de campo magnético. Estos cambios en la intensidad de interacción pueden modificar el camino libre medio de la partícula y, por ende, ser de importancia en el estudio de los “kicks” en el estudio de las NS.

Como hemos visto en esta sección, los estudios relacionados a la emisión de neutrinos en el escenario físico de las NS están íntimamente relacionados al cálculo específico del propagador del bosón $W^\pm$ en presencia de campo magnético. Con esto doy por concluido el capítulo correspondiente a la introducción del proyecto y su motivación. En el siguiente capítulo trabajaré con el propagador del bosón $W^\pm$ en el vacío.

Capítulo 2

Propagador del bosón $W^\pm$ en el vacío

2.1. Lagrangiano del SM y Ecuación de Proca

Los bosones de norma masivos con carga del SM, posterior al rompimiento espontáneo de simetría, son descritos por el Lagrangiano [49, 50]

$$\mathcal{L}_{W^i} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} + M_W^2 W^{i\mu} W_\mu^i, \quad (2.1)$$

donde

$$W_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad (2.2)$$

con $i, j, k = 1, 2, 3$. Este Lagrangiano puede ser reescrito en términos de las variables

$$W_\mu^1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W^+ + W^-)_\mu, \quad W_\mu^2 \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(W^+ - W^-)_\mu \quad \text{y} \quad W_\mu^3 \equiv \sin(\theta_W)A^\mu + \cos(\theta_W)Z_\mu, \quad (2.3)$$

donde $W^\pm$ son los bosones de norma cargados, Z denota al bosón de norma masivo neutro y, finalmente, A^μ denota al campo del fotón. Como se está interesado solamente en caracterizar al campo $W^\pm$, de la Ec. anterior se apaga al campo del fotón y el correspondiente al bosón Z_μ . Con estas definiciones se puede reescribir el Lagrangiano de la Ec. (2.1), para el bosón $W^\pm$, como

$$\mathcal{L}_{W^\pm} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\nu W^{+\mu})(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) + M_W^2 W^{+\mu} W_\mu^-, \quad (2.4)$$

de donde, utilizando las Ecs. de Euler-Lagrange se obtiene la ecuación de movimiento (EOM) para el campo W^+ dada por

$$(\partial_\beta \partial^\beta + M_W^2)W^{+\alpha} = 0, \quad (2.5)$$

la cual es conocida como la *Ecuación de Proca*, obtenida bajo la condición de norma

$$\partial_\alpha W^{+\alpha} = 0. \quad (2.6)$$

2.2. Solución de la EOM en el vacío

En analogía con la solución de la Ecuación de Dirac, se espera que el ansatz del campo de norma masivo cargado serán ondas planas

$$W_\mu^+(\vec{p}, \lambda; x) = N_p e^{i(-Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} \varepsilon_\mu(\vec{p}, \lambda), \quad (2.7)$$

donde N_p es una constante de normalización y $\varepsilon_\mu(\vec{p}, \lambda)$ es el cuadvectores de polarización que cumple las relaciones de transversalidad

$$p_\mu \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) = 0, \quad (2.8)$$

y de completéz

$$\sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon_\mu(\vec{p}, \lambda) \varepsilon_\nu^*(\vec{p}, \lambda) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{M_W^2} \right), \quad (2.9)$$

donde la suma se realiza sobre los estados de polarización λ físicos.

Como se muestra en la Ec. (2.7), los vectores de polarización dependen del estado de movimiento de la partícula. Para un bosón que se mueve en la dirección positiva del eje z , es decir, para $p^\mu = (p^0, 0, 0, p^3)$ los vectores de polarización que cumplen las relaciones Ecs. (2.8) y (2.9) son [2]

$$\varepsilon_\mu(\vec{p}, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\mu(\vec{p}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\mu(\vec{p}, 3) = \frac{1}{M_W} \begin{pmatrix} p_3 \\ 0 \\ 0 \\ p_0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Así mismo, la descomposición en modos normales de Fourier para un campo de norma masivo y cargado de espín 1 está dado por [3]

$$\begin{aligned} \hat{W}^{\mu+}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}_{p,\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \hat{b}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right] \\ \hat{W}^{\mu-}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \hat{b}_{p,\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $\hat{a}_{p,\lambda}^\dagger$ y $\hat{a}_{p,\lambda}$ son los operadores de creación y aniquilación para partículas, y $\hat{b}_{p,\lambda}^\dagger$ y $\hat{b}_{p,\lambda}$ para antipartículas. Éstos operadores crean y destruyen, partículas y antipartículas con momento $\vec{p}$ y polarización λ .

De forma análoga al caso fermiónico, en el marco de la cuatización canónica

$$[\hat{W}^{+i}(x), \hat{\Pi}^j(y)] = i g^{ij} \delta^{(3)}(x - y), \quad (2.12)$$

donde $\hat{\Pi}^\mu = \partial^\mu \hat{W}^{-0} - \partial^0 \hat{W}^{-\mu}$ es el operador de momentum conjugado. Al usar la descomposición de Fourier de los operadores de campo, es posible encontrar reglas de conmutación

para los operadores de creación y aniquilación, dados por

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_{p,\lambda}, \hat{a}_{p',\lambda'}^\dagger \right] &= (2\pi)^3 \delta_{\lambda,\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = \left[\hat{b}_{p,\lambda}, \hat{b}_{p',\lambda'}^\dagger \right], \\ \left[\hat{a}_{p,\lambda}, \hat{b}_{p',\lambda'}^\dagger \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

El análisis completo que conduce a las relaciones de la Ec. (2.12) se hace en el apéndice (A).

Usando la definición del propagador de Feynman en el marco de la teoría cuántica de campos, se tiene que el propagador de bosones de norma está dado por

$$\begin{aligned} G_F^{\mu\nu}(x, y) &\equiv \langle 0 | T \left(\hat{W}^{\mu+}(x) \hat{W}^{\nu-}(y) \right) | 0 \rangle \\ &= \left\langle \hat{W}^{\mu+}(x) \hat{W}^{\nu-}(y) \right\rangle \theta(x^0 - y^0) + \left\langle \hat{W}^{\nu-}(y) \hat{W}^{\mu+}(x) \right\rangle \theta(y^0 - x^0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

El primer término de la ecuación anterior se puede calcular directamente usando las Ecs. (2.11) y (2.13), obteniendo

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{W}^{\mu+}(x) \hat{W}^{\nu-}(y) \right\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}_{p,\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{b}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \\ &\quad \times \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{\lambda'=1}^3 \left[\hat{a}_{p',\lambda'}^\dagger \varepsilon^{\nu*}(\vec{p}', \lambda') e^{i\vec{p}'\cdot\vec{y}} + \hat{b}_{p',\lambda'} \varepsilon^\nu(\vec{p}', \lambda') e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{y}} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^3 \langle 0 | \hat{a}_{p,\lambda} \hat{a}_{p',\lambda'}^\dagger | 0 \rangle \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \varepsilon^{\nu*}(\vec{p}', \lambda') e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{y})}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Usando el hecho que $\hat{a}^\dagger \hat{a} | 0 \rangle = 0$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{W}^{\mu+}(x) \hat{W}^{\nu-}(y) \right\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \\ &\quad \times \sum_{\lambda,\lambda'=1}^3 \langle 0 | \left(\hat{a}_{p,\lambda} \hat{a}_{p',\lambda'}^\dagger - \hat{a}_{p',\lambda'}^\dagger \hat{a}_{p,\lambda} \right) | 0 \rangle \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \varepsilon^{\nu*}(\vec{p}', \lambda') e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{y})}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

de modo que al usar las reglas de conmutación de la Ec.(2.13), el primer término de la Ec. (2.14) se puede reescribir como

$$\left\langle \hat{W}^{\mu+}(x) \hat{W}^{\nu-}(y) \right\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \varepsilon^{\nu*}(\vec{p}, \lambda) e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (2.17)$$

La suma sobre polarizaciones físicas se puede hacer de forma simple usando la relación

de la Ec. (2.9), obteniendo

$$\langle \hat{W}^{\mu+}(x) \hat{W}^{\nu-}(y) \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2} \right) e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}. \quad (2.18)$$

Aplicando este procedimiento al segundo término de la Ec. (2.14), se tiene

$$\langle \hat{W}^{\nu-}(y) \hat{W}^{\mu+}(x) \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(-g^{\nu\mu} + \frac{p^\nu p^\mu}{M_W^2} \right) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}. \quad (2.19)$$

Reemplazando estos dos resultados en la Ec. (2.14) el propagador de bosones de norma toma la forma

$$\begin{aligned} G_F^{\mu\nu}(x, y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2} \right) e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \theta(x_0 - y_0) \\ &\quad + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2} \right) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \theta(y_0 - x_0) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2} \right) \left[e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \theta(x_0 - y_0) + e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \theta(y_0 - x_0) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Esta forma del propagador de bosones de norma puede escribirse de forma más compacta haciendo el cambio de variable $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en el segundo término y usando la forma integral de la función de Heaviside de la Ec. (1.4) de modo que su forma compacta, es

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(x, y) &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2} \right)}{p^2 - M_W^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x - y)} \\ &= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{\hat{p}_x^\mu \hat{p}_y^\nu}{M_W^2} \right) i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x - y)}}{p^2 - M_W^2 + i\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde

$$\hat{p}_x^\mu = (i\partial_x^0, i\partial_x^1, i\partial_x^2, i\partial_x^3), \quad \hat{p}_y^\mu = (-i\partial_y^0, -i\partial_y^1, -i\partial_y^2, -i\partial_y^3). \quad (2.22)$$

Con lo anterior se ha mostrado de manera sucinta el procedimiento para obtener el propagador de bosones de norma en el vacío. En el siguiente capítulo se aplicarán estas mismas ideas para encontrar el propagador de una partícula vectorial masiva cargada en presencia de un campo magnético.

Capítulo 3

Propagador del bosón $W^\pm$ con Campo Magnético

En este capítulo se obtiene la EOM del bosón de norma cargado en presencia de campo magnético. Se obtienen las soluciones espaciales de la EOM así como los vectores de polarización. Con la solución completa, siguiendo las ideas del formalismo de la cuantización canónica, se establecen relaciones de conmutación de los operadores de campo y, finalmente, se calcula el propagador con efectos de campo magnético.

3.1. Lagrangiano del SM y Ecuación de Proca con Campo Magnético

Para encontrar la EOM del bosón de norma $W^\pm$ se toman los acoplamientos que el bosón W^+ tiene en la sección Electrodébil del SM con el campo del fotón A^μ , dado por [49, 50]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W^+} = & -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{\mu\nu+} + M_W^2 W_\mu^- W^{\mu+} - ie \left[F^{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+ - W_{\mu\nu}^- A^\mu W^{\nu+} + W^{\mu\nu+} A_\mu W_\nu^- \right] \\ & + e^2 \left[A^\mu W_\mu^- A^\nu W_\nu^+ - A^\mu A_\mu W_\nu^- W^{\nu+} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

La EOM correspondiente del bosón de norma W^+ se obtiene mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange [50]

$$\left[(D^2 + M_W^2) g^{\alpha\beta} + 2ie F^{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) D^\alpha D^\beta \right] W_\beta^+ = 0, \quad (3.2)$$

donde ξ es el parámetro de norma y $D^2 \equiv D^\mu D_\mu$ con la definición

$$D^\mu \equiv \partial^\mu + ie A^\mu, \quad (3.3)$$

y e es la carga electromagnética. Al elegir la condición de norma

$$D^\mu W_\mu^+ = 0, \quad (3.4)$$

la Ec. (3.2) se reduce a

$$\left[(D^2 + M_W^2) g^{\alpha\beta} + 2ieF^{\alpha\beta} \right] W_\beta^+ = 0. \quad (3.5)$$

La Ec. (3.5) no es diagonal debido a que el tensor electromagnético tiene dos componentes no nulas $F^{21} = -F^{12} = B$ para un campo magnético a lo largo de la dirección z , sin embargo, esta se puede diagonalizar con ayuda de las matrices de rotación dadas por

$$N_\alpha{}^\mu \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies (N^{-1})_\alpha{}^\mu \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

que cumplen la relación $(N^{-1})_\beta{}^\mu N_\mu{}^\alpha = g_\beta{}^\alpha$, esto es

$$\begin{aligned} N_\alpha{}^\sigma \left[(\hat{\Pi}^2 - M_W^2) g_\sigma{}^\rho - 2ieF_\sigma{}^\rho \right] (N^{-1})_\rho{}^\beta N_\beta{}^\nu W_\nu^+ &= 0 \\ \left[(\hat{\Pi}^2 - M_W^2) g_\alpha{}^\beta - 2e\tilde{F}_\alpha{}^\beta \right] \tilde{W}_\beta^+ &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $\tilde{F}_\alpha{}^\beta \equiv iN_\alpha{}^\sigma F_\sigma{}^\rho (N^{-1})_\rho{}^\beta$, donde se ha definido la cantidad $\hat{\Pi}^\mu \equiv iD^\mu$, con

$$\tilde{W}_\alpha^+ \equiv N_\alpha{}^\mu W_\mu^+ = \begin{pmatrix} W_0^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1^+ - iW_2^+) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1^+ + iW_2^+) \\ W_3^+ \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

En forma matricial, la ecuación anterior es

$$\left\{ (\hat{\Pi}^2 - M_W^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2eB \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} W_0^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1^+ - iW_2^+) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1^+ + iW_2^+) \\ W_3^+ \end{pmatrix} = 0, \quad (3.9)$$

misma que puede reescribirse en forma compacta como

$$(\hat{\Pi}^2 - M_W^2) g_\mu{}^\nu + 2eB [\Delta_\mu{}^\nu(s_3 = 1) - \Delta_\mu{}^\nu(s_3 = -1) + 0\Delta_\mu{}^\nu(s_3 = 0)] W_\nu^{+s_3} = 0. \quad (3.10)$$

donde

$$\Delta_\mu{}^\nu(s_3) \equiv \begin{pmatrix} 1 - s_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_3 \left(\frac{1+s_3}{2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_3 \left(\frac{1-s_3}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - s_3^2 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

puede ser identificada como una matriz de proyección de espín con eigenvalores $s_3 = \pm 1, 0$ que cumple la relación

$$\sum_{s_3=\pm 1, 0} \Delta_\mu^\nu(s_3) = \Delta_\mu^\nu(+1) + \Delta_\mu^\nu(-1) + \Delta_\mu^\nu(0) = g_\mu^\nu, \quad (3.12)$$

esto es

$$\sum_{s_3=\pm 1, 0} (\hat{\Pi}^2 - M_W^2 + 2eBs_3) \tilde{W}_\mu^{+s_3} = 0, \quad (3.13)$$

donde $\tilde{W}_\mu^{+s_3} \equiv \Delta_\mu^\nu(s_3) \tilde{W}_\nu^+$.

Es importante señalar que, a diferencia de lo trabajado en la literatura, los eigenvalores de $\Delta_\mu^\nu(s_3)$ corresponden directamente con la proyección del espín a lo largo de z y esta es una ventaja directa de diagonalizar la EOM. Este detalle no está presente en la Ref. [1], donde la EOM no es diagonal y los eigenvalores de la matriz de proyección no son evidentes.

La Ec. (3.13) es la ecuación de Proca diagonalizada en presencia de campo magnético. A diferencia de la subsección 1.4, en esta sección no se llegará al propagador para un bosón vectorial masivo en presencia de campo magnético ya que el método con el cual se calculará el propagador de esta partícula afectada por un campo magnético externo es novedosa. Se hablará a detalle de esto en la sección 3.2. A continuación, se dará paso a resolver la parte espacial de la EOM.

3.2. Solución a la EOM con Campo Magnético

En esta sección se da un ansatz de la EOM de tal forma que se pueda trabajar con funciones exactas que contienen información sobre la dinámica del campo $W^\pm$.

La EOM para un bosón de norma masivo y cargado en presencia de un campo magnético homogéneo fue calculado anteriormente. En la norma $A^\mu = (0, 0, Bx^1, 0)$, la EOM tiene muchas similitudes con la Ec. (1.48), de modo que se propone un ansatz que contenga solo un factor con dependencia espacio-temporal y otro con solo dependencia de polarización. Con esto en mente se propone

$$\tilde{W}_\mu^{+s_3} = e^{-ir(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)} X_p^r(x^1) \tilde{\omega}_\mu^{s_3}, \quad (3.14)$$

de tal forma que al sustituir este ansatz en la Ec.(3.13) y definiendo

$$\rho \equiv \sqrt{2|eB|} \left(\frac{p^2}{eB} - rx^1 \right) \implies p^2 - reBx^1 = s\sqrt{\frac{|eB|}{2}}\rho \implies \frac{\partial}{\partial x^1} = -r\sqrt{2|eB|} \frac{\partial}{\partial \rho} = \partial_1, \quad (3.15)$$

la ecuación diferencial de la Ec. (3.13) se reduce a

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(-\frac{1}{4}\rho^2 + \frac{1}{2} + n \right) \right] X_p^r(\rho) = 0, \quad (3.16)$$

conocida como la “ecuación diferencial de Weber” donde [51–53]

$$n \equiv m + s_3 s - 1 = \frac{p_\parallel^2 - M_W^2}{2|eB|} - \frac{1}{2} + \frac{2ss_3}{2}, \quad (3.17)$$

con m el nivel de Landau y $\tilde{s}_3 \equiv ss_3$ con $s = \text{sgn}(eB)$.

Las soluciones a la Ec. (3.16) están dadas por

$$X_n^r(\rho) = N_n D_n(\rho), \quad (3.18)$$

donde D_n son funciones parabólicas cilíndricas y

$$N_n = \left(\frac{\sqrt{4\pi|eB|}}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

es un factor de normalización. Estas son las soluciones espaciales que corresponden al ansatz de la Ec. (3.14), lo que resta es encontrar la forma explícita del vector de polarización $\tilde{\omega}_\mu^{s_3}$, lo cual se hará con todo detalle en la siguiente sección.

Aunque la EOM nos da una gran información relacionada al comportamiento del bosón W^+ , la condición de norma (3.5) nos dará la información relacionada a los vectores de polarización. Sin embargo, debemos de trabajar con una condición de norma rotada para poder sustituir el ansatz (3.14) directamente, esto es

$$\begin{aligned} D^\mu W_\mu^+ &= D^\mu (g_\mu^\rho) W_\rho^+ = D^\mu \left((N^{-1})_\mu^\beta N_{\beta}^\rho \right) W_\rho^+ = \left(D^\mu (N^{-1})_\mu^\beta \right) (N_{\beta}^\rho W_\rho^+) \\ &\implies D^\mu W_\mu^+ = \tilde{D}^\mu \tilde{W}_\mu^+ = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\tilde{W}_\mu^+ \equiv N_\mu^\nu W_\nu^+, \quad \text{y} \quad \tilde{D}^\mu \equiv (N^{-1})^\mu_\nu D^\nu, \quad (3.21)$$

lo cual implica que la condición de transversalidad se debe de transformar similarmente

$$p^\mu \omega_\mu = 0 \implies \tilde{p}^\mu \tilde{\omega}_\mu = 0, \quad (3.22)$$

por lo tanto

$$\tilde{\omega}_\mu \equiv N_\mu^\nu \omega_\nu, \quad \text{y} \quad \tilde{p}^\mu \equiv (N^{-1})^\mu_\nu p^\nu. \quad (3.23)$$

La condición de norma rotada también puede reescribirse en términos de proyectores definidos anteriormente, como

$$\sum_{s_3=\pm 1,0} \hat{\Pi}^\mu \tilde{W}_\mu^{+s_3} = 0, \quad (3.24)$$

donde se ha introducido la notación $\tilde{\Pi}^\mu$ definido como

$$\hat{\Pi}^\mu \equiv i\tilde{D}^\mu = iD^\mu (N^{-1})_\mu{}^\beta. \quad (3.25)$$

Explicítamente, el contenido de la Ec. (3.24) es

$$0 = \sum_{s_3=\pm 1,0} i \underbrace{\left(D^0, \frac{1}{\sqrt{2}}(D^1 + iD^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(D^1 - iD^2), D^3 \right)}_{\equiv i\hat{\Pi}^\mu} \underbrace{e^{-ir(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)} X_{\rho,n}^r(x^1) \tilde{\omega}_\mu^{s_3}}_{\equiv \tilde{W}_\mu^{+s_3}}. \quad (3.26)$$

En términos de los cambios de variable mostrados en (3.15) y una vez que los operadores diferenciales actuaron sobre las exponenciales, se llega a la ecuación

$$\sum_{s_3=\pm 1,0} e^{-ir(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)} \times \left[(rE), \frac{ir}{\sqrt{2}}\sqrt{2|eB|} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + s\frac{\rho}{2} \right), \frac{ir}{\sqrt{2}}\sqrt{2|eB|} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - s\frac{\rho}{2} \right), rp^3 \right] X_{\rho,n}^r(x^1) \tilde{\omega}_\mu^{s_3} = 0.$$

El operador diferencial que resta por actuar se puede realizar con ayuda de las siguientes propiedades sobre las funciones parabólicas cilíndricas [18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} D_n(z) &= nD_{n-1}(z) - \frac{z}{2}D_n(z), \\ nD_{n-1}(z) &= zD_n(z) - D_{n+1}(z), \end{aligned} \quad (3.27)$$

de modo que una vez que todos los operadores diferenciales han actuado sobre la solución en la Ec. (3.26), esta última se reduce a

$$\mathbb{E}_p^{r\mu}{}_\nu \tilde{\tilde{p}}_{\mu,r}^* \tilde{\omega}_{s_3}^\nu = 0, \quad (3.28)$$

donde

$$\mathbb{E}_p^{r\mu}{}_\nu \equiv \sum_{s_3=\pm 1,0} X_{n-\tilde{s}_3}^r(x^1) \Delta^\mu{}_\nu(s_3) e^{-ir(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)}, \quad (3.29)$$

es conocida como la eigenfunción de Ritus y

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{p}}_{\mu,r}^* &\equiv \left(rE, -irs\sqrt{|eB|} \left(n - \tilde{s}_3 + \frac{1+s}{2} \right), irs\sqrt{|eB|} \left(n - \tilde{s}_3 + \frac{1-s}{2} \right), rp_3 \right) \\ &= \left(rE, -irs\sqrt{|eB|} \left(m - 1 + \frac{1+s}{2} \right), irs\sqrt{|eB|} \left(m - 1 + \frac{1-s}{2} \right), rp_3 \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

es el análogo magnético del cuadrimomento, donde se debe recordar la definición [51–53]

$$n - \tilde{s}_3 = m - 1, \quad (3.31)$$

con m el nivel de Landau. Algunos autores [1, 2] definen cantidades asociadas a los niveles de Landau $n - \tilde{s}_3 = k$ que pueden ser negativos, es por esta razón que se preferirá trabajar con el nivel de Landau m directamente.

Antes de proseguir es importante tener una idea física del efecto del campo en los niveles de energía del bosón de norma. En la Fig. (3.1) se muestra como distintos acomodos de espín son posibles en presencia de campo magnético dependiendo del nivel energético. El nivel de Landau más bajo (LLL) tiene una orientación de espín única. En el caso de espín 1 conforme aumenta la energía (y por ende el nivel de Landau) más vectores de polarización son posibles [53].

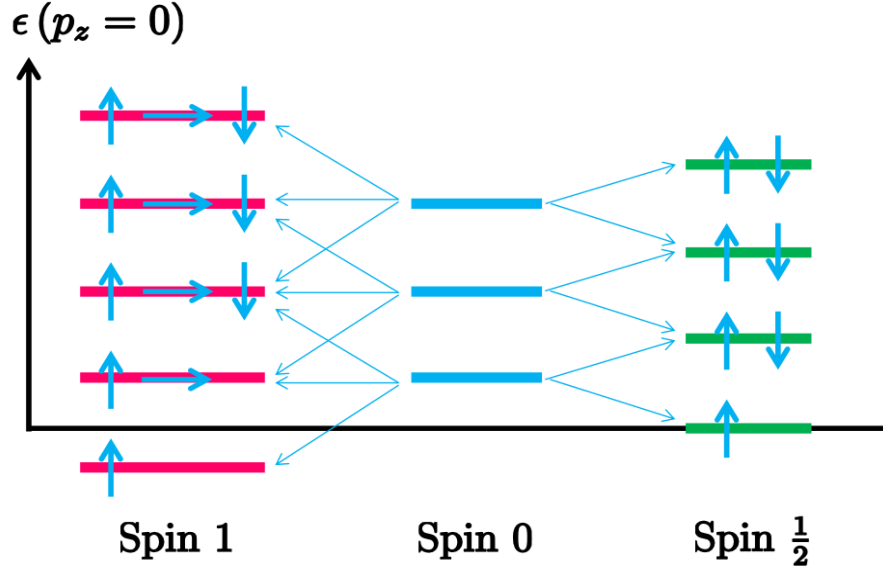


Figura 3.1: Discretización de niveles de Landau con $p^3 = 0$.

La relación de dispersión, con la definición de la Ec. (3.30), es

$$\tilde{p}_r^\mu (\tilde{p}_\mu^r)^* = E^2 - (p^3)^2 - 2|eB| \left(m - 1 + \frac{1}{2} \right) = M_W^2. \quad (3.32)$$

Es importante notar que el estado de menor energía corresponde a estados taquiónicos dado que, de la Ec. (3.32)

$$E^2 = M_W^2 - |eB|, \quad (3.33)$$

donde se ha tomado el nivel más bajo de Landau $m = 0$ y el menor estado energético al fijar $(p^3)^2 = 0$. Los estados taquiónicos surgirán para la condición

$$|eB| > M_W^2. \quad (3.34)$$

Sin embargo, la relación anterior no debería suponer ningún problema ya que $M_W^2 \gg |eB|$ hasta para los campos energéticos más intensos registrados [29, 30]. Un ejemplo bien conocido sobre estos estados es la inestabilidad de Nielsen-Olesen, las cuales se deben a autointeracciones entre los bosones de norma y un campo magnético externo en teorías no abelianas [53, 54]. Estos estados no se discutirán pero se reproducen correctamente en la relación de dispersión.

3.3. Vectores de Polarización con Campo Magnético

Con el momentum definido en la definición de la Ec. (3.30) se busca definir los vectores de polarización $\tilde{\omega}^\nu$ que cumplan con la relación de transversalidad de la Ec. (3.28) para definir completamente la condición de norma y poder llegar al propagador de la teoría.

Por lo tanto, escribiendo explícitamente el contenido de la Ec. (3.28) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p^{r\mu} \tilde{\omega}_{\mu,r}^* \tilde{\omega}^\nu &= X_{m-1}^r e^{-ir(Ex_0 + p^2 x_2 + p^3 x_3)} \times \\ &\times \left(rE, -irs\sqrt{|eB|\left(m-1+\frac{1+s}{2}\right)}, irs\sqrt{|eB|\left(m-1+\frac{1-s}{2}\right)}, rp_3 \right) \tilde{\omega}^\nu \quad (3.35) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior, al igualarse a cero nos dará una condición para determinar $\tilde{\omega}^\nu$. Como en la Ec. (3.35) hay varios factores que pueden anularse, se tienen varios casos.

En el **caso** $m \geq 1$ el factor $X_{m-1} \neq 0$, por lo que el término que debe anularse en esta ecuación es

$$E\tilde{\omega}^0 - is\sqrt{|eB|\left(m-1+\frac{1+s}{2}\right)}\tilde{\omega}^1 + is\sqrt{|eB|\left(m-1+\frac{1-s}{2}\right)}\tilde{\omega}^2 + p_3\tilde{\omega}^3 = 0. \quad (3.36)$$

Debido a que tenemos una ecuación y varias incógnitas, las entradas de $\tilde{\omega}^\nu$, necesitan más condiciones además de la relación (3.36). Es por esto que se trabajará con el ansatz que tenemos del campo rotado

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{+\mu} &= e^{-ir(Ex_0 + p^2 x_2 + p^3 x_3)} \tilde{\omega}^\nu \sum_{s_3} N_{m-1+\tilde{s}_3} D_{m-1+\tilde{s}_3}(\rho) \Delta_\nu^\mu(s_3) \\ &= e^{-ir(Ex_0 + p^2 x_2 + p^3 x_3)} \times \\ &\times \left(N_{m-1} D_{m-1}(\rho) \tilde{\omega}^0, N_{m-1+s} D_{m-1+s}(\rho) \tilde{\omega}^1, N_{m-1-s} D_{m-1-s}(\rho) \tilde{\omega}^2, N_{m-1} D_{m-1}(\rho) \tilde{\omega}^3 \right). \quad (3.37) \end{aligned}$$

La corriente conservada de la teoría que bajo estudio, definida por

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu W_\nu^+)} (-iW_\nu^+) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu W_\nu^-)} (iW_\nu^-), \quad (3.38)$$

es una ecuación adicional utilizada en la literatura para determinar al vector de polarización $\tilde{\omega}^\mu$ [2].

Calculando cada término de 3.38, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu W_\nu^+)} &= -\frac{1}{2} (g_{\mu\beta} g^\nu{}_\alpha - g_{\mu\alpha} g^\nu{}_\beta) (D^{*\beta} W^{-\alpha} - D^{*\alpha} W^{-\beta}) = D^{*\nu} W_\mu^- - D_\mu^* W^{-\nu} \\ \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu W_\nu^-)} &= D^\nu W_\mu^+ - D_\mu W^{+\nu}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Por lo que al sustituir Ec. (3.39) en Ec. (3.38), se llega a

$$J_\mu = -i \left\{ W^{-\nu} (D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+) - (D_\mu^* W_\nu^- - D_\nu^* W_\mu^-) W^{+\nu} \right\}, \quad (3.40)$$

la cual, usando la relación de transversalidad, Ec. (3.4), es posible reescribir como

$$J_\mu = i \left[W_\nu^+ D_\mu^* W^{-\nu} - W_\nu^- D_\mu W^{+\nu} - \partial^\nu (W_\nu^+ W_\mu^- - W_\nu^- W_\mu^+) \right]. \quad (3.41)$$

de donde es inmediato verificar que la entrada $\mu = 0$ está dada por

$$J_0 = i \left[W_\nu^+ \partial_0 W^{-\nu} - W_\nu^- \partial_0 W^{+\nu} \right]. \quad (3.42)$$

Esta ecuación ha sido utilizada por diversos autores como la condición de ortonormalidad [2], esto es

$$\int dx_1 J_0 (W_\pm^-(i, x), W_\pm^+(j, x)) = \pm 4\pi E \delta_{ij}, \quad (3.43)$$

donde los subíndices i, j son índices de polarización y el signo $\pm$ indica si la solución es de frecuencia positiva o negativa para los bosones $W^\pm$. Esta cantidad es fácilmente calculada a través del cambio de variable

$$\rho = \sqrt{2|eB|} \left(\frac{p^2}{eB} - r x^1 \right) \implies dx_1 = \frac{r}{\sqrt{2|eB|}} d\rho, \quad (3.44)$$

dando como resultado [18]

$$\int_{-\infty}^{\infty} [D_n(z)]^2 dz = \sqrt{2\pi n!}. \quad (3.45)$$

Las Ecs. (3.36) y (3.43) son 9 relaciones distintas que nos ayudarán a definir las entradas de $\tilde{\omega}_i^\nu$ con $i = 1, 2, 3$ índices de polarización. Sin embargo, las entradas no conocidas de los vectores de polarización son 12.

Para poder realizar un análisis detenido de los vectores de polarización, será necesario hacer un proceso sobre los casos de $eB > 0$ y $eB < 0$. A su vez, será ilustrativo separar los casos $m = 0$, $m = 1$ y $m > 1$ de tal forma que se tengan conjuntos de vectores de polarización para todo caso de eB y m .

Nivel de Landau: $m = 0$

Caso $eB > 0$

El ansatz (3.37) tendrá la siguiente forma

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{+\mu} &= e^{-ir(Ex_0+p^2x_2+p^3x_3)} (0, N_0 D_0(\rho) \tilde{\omega}^1, 0, 0), \\ \tilde{W}^{-\mu'} &= e^{ir'(Ex_0+p^2x_2+p^3x_3)} (0, N_0^* D_0^*(\rho) \tilde{\omega}^{1*}, 0, 0).\end{aligned}\quad (3.46)$$

Con esta forma explícita de $\tilde{W}^{\pm\mu}$, la primer entrada de la corriente conservada será

$$J_0(W^-, W^+) = (r + r') E \{ N_0^2 D_0^2(\rho) \tilde{\omega}^{1*} \tilde{\omega}^1 \}, \quad (3.47)$$

donde necesariamente $r = r' = 1$, el caso de soluciones positivas. Ahora, tomando en consideración la definición del factor de normalización de la Ec. (3.19), la condición de ortonormalidad Ec. (3.36) y el cambio de variable Ec. (3.44), se llega a

$$\begin{aligned}\int dx_1 J_0(W^-(i, x), W^+(j, x)) &= 2E \sqrt{\pi} \sqrt{4\pi} \tilde{\omega}_i^{1*} \tilde{\omega}_j^1 = 4\pi E \delta_{ij} \\ \implies \tilde{\omega}_i^{1*} \tilde{\omega}_j^1 &= \delta_{ij}.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Necesariamente solamente se tiene un índice de polarización, por lo que $i = j$, y llamaremos a este único índice de polarización 0. Es el único ya que no hay un segundo vector de polarización para el nivel más bajo de Landau $m = 0$. Por lo tanto

$$\tilde{\omega}_0^1 = 1 \quad (3.49)$$

Por otro lado, no hay condiciones para las demás entradas de $\tilde{\omega}_0^\nu$ por lo que se pueden tomar de forma trivial tal que

$$\tilde{\omega}_0^\nu = (0, 1, 0, 0). \quad (3.50)$$

Caso $eB < 0$

Para este caso, $eB < 0$, $\implies s = -1$, por lo tanto el ansatz (3.37) tendrá la siguiente forma

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{+\mu} &= e^{-ir(Ex_0+p^2x_2+p^3x_3)} (0, 0, N_0 D_0(\rho) \tilde{\omega}^2, 0), \\ \tilde{W}^{-\mu'} &= e^{ir'(Ex_0+p^2x_2+p^3x_3)} (0, 0, N_0^* D_0^*(\rho) \tilde{\omega}^{2*}, 0).\end{aligned}\quad (3.51)$$

Es importante notar que el procedimiento para este caso de eB es análogo y solamente se intercambian las entradas 1 y 2 en el vector de polarización resultante ya que ahora la condición de ortonormalidad dicta que

$$\begin{aligned} \int dx_1 J_0(W^-(i, x), W^+(j, x)) &= 2E\sqrt{\pi}\sqrt{4\pi}\tilde{\omega}_i^{2*}\tilde{\omega}_j^2 = 4\pi E\delta_{ij} \\ \implies \tilde{\omega}_i^{2*}\tilde{\omega}_j^2 &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Como $m = 0$ seguimos en el nivel más bajo de Landau, por lo que solamente existe la posibilidad de que $i = j$. Le asignaremos a este único índice de polarización 0. Por lo tanto

$$\tilde{\omega}_0^2 = 1. \quad (3.53)$$

Como no hay condiciones para las demás entradas de $\tilde{\omega}_0^\nu$, se pueden tomar de forma trivial tal que

$$\tilde{\omega}_0^\nu = (0, 0, 1, 0). \quad (3.54)$$

Al comparar los vectores de polarización que se han obtenido para el nivel más bajo de Landau, el caso general en eB será

$$\tilde{\omega}_0^\nu = \left(0, \frac{1+s}{2}, \frac{1-s}{2}, 0\right). \quad (3.55)$$

Nivel de Landau: $m = 1$

Caso $eB > 0$

Tomando la Ec. (3.36), en este caso, se tiene

$$E\tilde{\omega}^0 - i\sqrt{|eB|}\tilde{\omega}^1 - p^3\tilde{\omega}^3 = 0. \quad (3.56)$$

Por otro lado, la forma de los ansatz de la Ec. (3.37), derivado de tomar $\text{sgn}(eB) = 1$ y $m = 1$, es

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{+\mu} &= e^{-ir(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)} (N_0 D_0 \tilde{\omega}^0, N_1 D_1(\rho) \tilde{\omega}^1, 0, N_0 D_0(\rho) \tilde{\omega}^3) \\ \tilde{W}^{-\mu'} &= e^{ir'(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)} (N_0^* D_0^* \tilde{\omega}^{0*'}, N_1^* D_1^*(\rho) \tilde{\omega}^{1*'}, 0, N_0^* D_0^*(\rho) \tilde{\omega}^{3*'}), \end{aligned} \quad (3.57)$$

con esta forma de las soluciones, la entrada J_0 , tiene la forma

$$\begin{aligned} J_0(W^-, W^+) &= (r + r') E \left\{ N_1^2 D_1^2(\rho) \tilde{\omega}^{1'*} \tilde{\omega}^1 + N_0^2 D_0^2(\rho) (\tilde{\omega}^{3'*} \tilde{\omega}^3 - \tilde{\omega}^{0'*} \tilde{\omega}^0) \right\} \\ &= (r + r') E \sqrt{4\pi|eB|} \left[\frac{1}{1!} D_1^2(\rho) \tilde{\omega}^{1'*} \tilde{\omega}^1 + \frac{1}{0!} D_0^2(\rho) (\tilde{\omega}^{3'*} \tilde{\omega}^3 - \tilde{\omega}^{0'*} \tilde{\omega}^0) \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Al igual que en el caso anterior, utilizando la condición de ortonormalización (3.43), el cambio de variable de la Ec. (3.44) y el resultado (3.45), se llega a

$$\begin{aligned} \int dx_1 J_0(W^-(i, x), W^+(j, x)) &= 2E\sqrt{\pi}\sqrt{4\pi} [\tilde{\omega}_i^{1*}\tilde{\omega}_j^1 + \tilde{\omega}_i^{3*}\tilde{\omega}_j^3 - \tilde{\omega}_i^{0*}\tilde{\omega}_j^0] = 4\pi E\delta_{ij} \\ \implies \tilde{\omega}_i^{1*}\tilde{\omega}_j^1 + \tilde{\omega}_i^{3*}\tilde{\omega}_j^3 - \tilde{\omega}_i^{0*}\tilde{\omega}_j^0 &= \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde $i, j = 1, 2$ son índices de polarización.

Tomando el ansatz del vector de polarización más sencillo la ecuación anterior se cumple

$$\tilde{\omega}_1^\nu = \alpha(p^3, 0, 0, E), \quad (3.60)$$

y usando la condición de normalización se puede obtener la constante α

$$|\alpha|^2 m_\perp^2 = 1 \implies \alpha = \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}}, \quad (3.61)$$

donde $m_\perp^2 \equiv E^2 - (p^3)^2$. Por lo tanto, el vector de polarización para este caso, tiene la forma

$$\tilde{\omega}_1^\nu = \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}}(p^3, 0, 0, E). \quad (3.62)$$

Como el vector anterior tiene dos entradas nulas, el otro vector de polarización linealmente independiente del anterior es

$$\tilde{\omega}_2^\nu = \beta(\tilde{\omega}_2^0, \tilde{\omega}_2^1, \tilde{\omega}_2^2, \tilde{\omega}_2^3). \quad (3.63)$$

Para determinar cada una de sus entradas, se usa la condición de ortogonalidad para $i = 1$ y $j = 2$, obteniendo la ecuación

$$\sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}}\beta[E\tilde{\omega}_2^3 - p^3\tilde{\omega}_2^0] = 0 \implies \tilde{\omega}_2^0 = \frac{E}{p^3}\tilde{\omega}_2^3, \quad (3.64)$$

que junto con la condición de transversalidad, para $i = 2$, dada por

$$\frac{E^2}{p^3}\tilde{\omega}_2^3 - i\sqrt{|eB|}\tilde{\omega}_2^1 - p^3\tilde{\omega}_2^3 = 0 \implies [E^2 - (p^3)^2]\tilde{\omega}_2^3 = i\sqrt{|eB|}p^3\tilde{\omega}_2^1 \implies \tilde{\omega}_2^1 = -\frac{im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}}\frac{1}{p^3}\tilde{\omega}_2^3, \quad (3.65)$$

de modo que estas dos ecuaciones han permitido determinar dos entradas de $\tilde{\omega}_2^\nu$, esto es

$$\tilde{\omega}_2^\nu = \beta\left(\frac{E}{p^3}\tilde{\omega}_2^3, -\frac{im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}}\frac{1}{p^3}\tilde{\omega}_2^3, \tilde{\omega}_2^2, \tilde{\omega}_2^3\right), \quad (3.66)$$

como las ecuaciones de ortonormalidad o transversalidad no contienen a $\tilde{\omega}_2^2$, esta entrada no tiene condición alguna que cumplir, por lo que, por simplicidad se toma $\tilde{\omega}_2^2 = 0$.

Finalmente, de la condición de normalización, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\beta|^2 |\tilde{\omega}_2^3|^2 \left\{ \frac{1}{(p^3)^2} \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}} \frac{im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}} + 1 - \frac{E^2}{(p^3)^2} \right\} &= 1 \\
\implies \beta \tilde{\omega}_2^3 &= p^3 \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \sqrt{\frac{|eB|}{m_\perp^2 - |eB|}}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Por lo tanto, reemplazando esto último en la Ec. (3.66), la forma final del vector de polarización buscado es

$$\tilde{\omega}_2^\nu = \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \sqrt{\frac{|eB|}{m_\perp^2 - |eB|}} \left(E, \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}}, 0, p^3 \right). \tag{3.68}$$

Caso $eB < 0$

Al tomar la Ec. (3.36), en este caso, se tiene

$$E\tilde{\omega}^0 - i\sqrt{|eB|}\tilde{\omega}^2 - p^3\tilde{\omega}^3 = 0. \tag{3.69}$$

Por otro lado, la forma de los ansatz de la Ec. (3.37), derivado de tomar $\text{sgn}(eB) = -1$ y $m = 1$, es

$$\begin{aligned}
\tilde{W}^{+\mu} &= e^{-ir(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)} (N_0 D_0 \tilde{\omega}^0, 0, N_1 D_1(\rho) \tilde{\omega}^2, N_0 D_0(\rho) \tilde{\omega}^3) \\
\tilde{W}^{-\mu'} &= e^{ir'(Ex_0 + p^2x_2 + p^3x_3)} (N_0^* D_0^* \tilde{\omega}^{0*'}, 0, N_1^* D_1^*(\rho) \tilde{\omega}^{2*'}, N_0^* D_0^*(\rho) \tilde{\omega}^{3*'}),
\end{aligned} \tag{3.70}$$

para esta forma de las soluciones la entrada J_0 , tiene la forma

$$\begin{aligned}
J_0(W^{-'}, W^+) &= (r + r') E \left\{ N_1^2 D_1^2(\rho) \tilde{\omega}^{2'*} \tilde{\omega}^2 + N_0^2 D_0^2(\rho) (\tilde{\omega}^{3'*} \tilde{\omega}^3 - \tilde{\omega}^{0'*} \tilde{\omega}^0) \right\} \\
&= (r + r') E \sqrt{4\pi|eB|} \left[\frac{1}{1!} D_1^2(\rho) \tilde{\omega}^{2'*} \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{0!} D_0^2(\rho) (\tilde{\omega}^{3'*} \tilde{\omega}^3 - \tilde{\omega}^{0'*} \tilde{\omega}^0) \right].
\end{aligned} \tag{3.71}$$

De la misma forma que el caso anterior, utilizando la condición de ortonormalización (3.43), el cambio de variable de la Ec. (3.44) y el resultado 3.45, se llega a que

$$\begin{aligned}
\int dx_1 J_0(W^-(i, x), W^+(j, x)) &= 2E\sqrt{\pi}\sqrt{4\pi} [\tilde{\omega}_i^{2*} \tilde{\omega}_j^2 + \tilde{\omega}_i^{3*} \tilde{\omega}_j^3 - \tilde{\omega}_i^{0*} \tilde{\omega}_j^0] = 4\pi E \delta_{ij} \\
\implies \tilde{\omega}_i^{2*} \tilde{\omega}_j^2 + \tilde{\omega}_i^{3*} \tilde{\omega}_j^3 - \tilde{\omega}_i^{0*} \tilde{\omega}_j^0 &= \delta_{ij},
\end{aligned} \tag{3.72}$$

donde $i, j = 1, 2$ son índices de polarización.

Tomando el ansatz del vector de polarización más sencillo la ecuación anterior se cumple

$$\tilde{\omega}_1^\nu = \alpha(p^3, 0, 0, E), \tag{3.73}$$

y usando la condición de normalización se puede obtener la constante α

$$|\alpha|^2 m_\perp^2 = 1 \implies \alpha = \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}}. \quad (3.74)$$

Por lo tanto, el vector de polarización para este caso, tiene la forma

$$\tilde{\omega}_1^\nu = \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} (p^3, 0, 0, E). \quad (3.75)$$

Como el vector anterior tiene dos entradas nulas, el otro vector de polarización linealmente independiente al anterior es

$$\tilde{\omega}_2^\nu = \beta (\tilde{\omega}_2^0, \tilde{\omega}_2^1, \tilde{\omega}_2^2, \tilde{\omega}_2^3). \quad (3.76)$$

Para calcular cada una de las entradas del vector anterior, se usa la condición de ortogonalidad para $i = 1$ y $j = 2$, obteniendo la ecuación

$$\sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \beta [E \tilde{\omega}_2^3 - p^3 \tilde{\omega}_2^0] = 0 \implies \tilde{\omega}_2^0 = \frac{E}{p^3} \tilde{\omega}_2^3, \quad (3.77)$$

que junto con la condición de transversalidad, para $i = 2$, dada por

$$\frac{E^2}{p^3} \tilde{\omega}_2^3 - i\sqrt{|eB|} \tilde{\omega}_2^2 - p^3 \tilde{\omega}_2^3 = 0 \implies [E^2 - (p^3)^2] \tilde{\omega}_2^3 = i\sqrt{|eB|} p^3 \tilde{\omega}_2^2 \implies \tilde{\omega}_2^2 = -\frac{im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}} \frac{1}{p^3} \tilde{\omega}_2^3, \quad (3.78)$$

de modo que estas dos ecuaciones han permitido determinar dos entradas de $\tilde{\omega}_2^\nu$, esto es

$$\tilde{\omega}_2^\nu = \beta \left(\frac{E}{p^3} \tilde{\omega}_2^3, \tilde{\omega}_2^1, -\frac{im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}} \frac{1}{p^3} \tilde{\omega}_2^3, \tilde{\omega}_2^3 \right), \quad (3.79)$$

como las ecuaciones de ortonormalidad o transversalidad no contienen a $\tilde{\omega}_2^1$, esta entrada no tiene condición alguna que cumplir, por lo que, por simplicidad se toma $\tilde{\omega}_2^1 = 0$.

Finalmente, de la condición de normalización, se tiene que

$$\begin{aligned} |\beta|^2 |\tilde{\omega}_2^3|^2 \left\{ \frac{1}{(p^3)^2} \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}} \frac{im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}} + 1 - \frac{E^2}{(p^3)^2} \right\} &= 1 \\ \implies \beta \tilde{\omega}_2^3 &= p^3 \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \sqrt{\frac{|eB|}{m_\perp^2 - |eB|}}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Por lo tanto, al reemplazar esta última expresión en la Ec. (3.79), la forma final del vector de polarización buscado es

$$\tilde{\omega}_2^\nu = \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \sqrt{\frac{|eB|}{m_\perp^2 - |eB|}} \left(E, 0, \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}}, p^3 \right). \quad (3.81)$$

Si se consideran los resultados obtenidos en las Ecs. (3.68) y (3.81), para ambos casos de eB se llega a que los vectores de polarización para $m = 1$ son

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^\nu &= \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} (p^3, 0, 0, E), \\ \tilde{\omega}_2^\nu &= \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \sqrt{\frac{|eB|}{m_\perp^2 - |eB|}} \left(E, \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}} \left(\frac{1+s}{2} \right), \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|}} \left(\frac{1-s}{2} \right), p^3 \right). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Nivel de Landau: $m > 1$

Caso $eB > 0$

El procedimiento para obtener el vector de polarización $\tilde{\omega}_1^\nu$ es análogo para este caso, de tal forma que

$$\tilde{\omega}_1^\nu = \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} (p^3, 0, 0, E). \quad (3.83)$$

Al usar la condición de transversalidad (3.36) se obtiene

$$\tilde{\omega}_2^1 = \frac{\sqrt{|eB|(m-1)}\tilde{\omega}_2^2 - im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}}. \quad (3.84)$$

Como no se tienen condiciones suficientes para definir únicamente a las entradas de los vectores de polarización, se elige $\tilde{\omega}_2^2 = 0$ tal que

$$\tilde{\omega}_2^\nu = \beta \left(E, \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}}, 0, p^3 \right). \quad (3.85)$$

De forma análoga, usando la condición de ortonormalidad con $i = 1$ y $j = 3$ y la condición de transversalidad para $j = 3$

$$\tilde{\omega}_3^\nu = \gamma \left(E, \frac{\sqrt{|eB|(m-1)}\tilde{\omega}_3^2 - im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}}, \tilde{\omega}_3^2, p^3 \right). \quad (3.86)$$

Se determinan las restantes entradas del vector de polarización al usar la condición de ortonormalidad con $i = 2$ y $j = 3$, con lo que se obtiene

$$\tilde{\omega}_3^\nu = \gamma \left(E, -i\sqrt{|eB|m}, i\frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}}, p^3 \right). \quad (3.87)$$

Luego, al usar la condición de normalización (3.43) se definen las constantes β y γ con las cuales se determinan los vectores de polarización

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_2^\nu &= \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \sqrt{\frac{|eB|m}{m_\perp^2 - |eB|m}} \left(E, \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}}, 0, p^3 \right), \\ \tilde{\omega}_3^\nu &= \left\{ \frac{1}{|eB|m - m_\perp^2 + \left[\frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}} \right]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(E, -i\sqrt{|eB|m}, i\frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}}, p^3 \right).\end{aligned}\quad (3.88)$$

Caso $eB < 0$

Al igual que en el caso de $eB > 0$, el vector de polarización para este caso tiene la forma

$$\tilde{\omega}_1^\nu = \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} (p^3, 0, 0, E). \quad (3.89)$$

La condición de transversalidad (3.36), para $s = -1$, da lugar a la relación

$$\tilde{\omega}_2^2 = \frac{\sqrt{|eB|(m-1)}\tilde{\omega}_1^2 - im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}}. \quad (3.90)$$

Como no se tienen condiciones suficientes para definir únicamente a las entradas de los vectores de polarización, se elige $\tilde{\omega}_2^1 = 0$ tal que

$$\tilde{\omega}_2^\nu = \beta \left(E, 0, \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}}, p^3 \right). \quad (3.91)$$

De forma análoga, al usar la condición de ortonormalidad con $i = 1$ y $j = 3$ y la condición de transversalidad para $j = 3$

$$\tilde{\omega}_3^\nu = \gamma \left(E, \tilde{\omega}_3^1, \frac{\sqrt{|eB|(m-1)}\tilde{\omega}_3^1 - im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}}, p^3 \right). \quad (3.92)$$

Luego, usando la condición de ortonormalidad con $i = 2$ y $j = 3$, se pueden terminar de definir las entradas del vector de polarización y tiene la forma

$$\tilde{\omega}_3^\nu = \gamma \left(E, i\frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}}, -i\sqrt{|eB|m}, p^3 \right). \quad (3.93)$$

Se determinan las constantes β y γ usando la condición de normalización de (3.43) tal que los vectores de polarización son

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_2^\nu &= \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \sqrt{\frac{|eB|m}{m_\perp^2 - |eB|m}} \left(E, 0, \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}}, p^3 \right), \\
\tilde{\omega}_3^\nu &= \left\{ \frac{1}{|eB|m - m_\perp^2 + \left[\frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}} \right]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(E, i \frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}}, -i\sqrt{|eB|m}, p^3 \right).
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Luego, comparando el resultado de las Ecs. (3.88) y (3.94), los vectores de polarización para el caso general de eB y $m > 1$ son

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1^\nu &= \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} (p^3, 0, 0, E), \\
\tilde{\omega}_2^\nu &= \sqrt{\frac{1}{m_\perp^2}} \sqrt{\frac{|eB|m}{m_\perp^2 - |eB|m}} \left(E, \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}} \left(\frac{1+s}{2} \right), \frac{-im_\perp^2}{\sqrt{|eB|m}} \left(\frac{1-s}{2} \right), p^3 \right), \\
\tilde{\omega}_3^\nu &= \left\{ \frac{1}{|eB|m - m_\perp^2 + \left[\frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}} \right]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \times \left(E, -i\sqrt{|eB|m} \left(\frac{1+s}{2} \right) + i \frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}} \left(\frac{1-s}{2} \right), \right. \\
&\quad \left. -i\sqrt{|eB|m} \left(\frac{1-s}{2} \right) + i \frac{m_\perp^2 - |eB|m}{\sqrt{|eB|(m-1)}} \left(\frac{1+s}{2} \right), p^3 \right).
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Para el caso $m = 1$ solamente los vectores de polarización $\tilde{\omega}_1^\nu$ y $\tilde{\omega}_2^\nu$ son válidos, de forma que $\tilde{\omega}_2^\nu$ de la ecuación previa se debe de evaluar en $m = 1$, al tomar este caso.

Un resultado esencial para obtener el propagador del bosón $W^{+\mu}$ es realizar la suma sobre los distintos índices de polarización, de tal forma que

$$\sum_{\lambda=1}^3 \tilde{\omega}_\lambda^\mu \tilde{\omega}_\lambda^{\nu*} = -g^{\mu\nu} + \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^{\nu*}}{m_W^2}, \tag{3.96}$$

donde λ codifica los índices de polarización que dependen del nivel de Landau.

Un análisis completamente análogo se realiza para las soluciones de energía negativa. Los vectores de polarización resultantes difieren de $\tilde{\omega}_i^\nu$ por un signo global.

Con lo visto hasta ahora hemos podido definir completamente al campo clásico asociado a $\tilde{W}^\mu$, de tal forma que el paso siguiente consistirá en cuantizar dicho campo clásico para obtener sus reglas de conmutación y cuantizar la teoría.

3.4. Cuantización y Propagador del Campo $W^{\pm\mu}$

Aplicando el proceso de cuantización canónica de campos clásicos, y siguiendo de cerca la cuantización canónica del campo de Proca cargado mostrado en la Ref [3], se definen los campos cuánticos como

$$\begin{aligned}\hat{W}^{+\mu}(x) &= \oint \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{\lambda=1}^3 \left(\hat{a}_{\tilde{p}}^{\lambda} \mathbb{E}_{\nu,n}^{+\mu}(\rho_+) \tilde{\omega}_{\lambda}^{\nu}(\tilde{p}) + \hat{b}_{\tilde{p}}^{\lambda\dagger} \mathbb{E}_{\nu,n}^{-\mu}(\rho_-) \tilde{\omega}_{\lambda}^{\nu*}(\tilde{p}) \right), \\ \hat{W}^{-\mu}(x) &= \oint \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{\lambda=1}^3 \left(\hat{a}_{\tilde{p}}^{\lambda\dagger} \tilde{\omega}_{\lambda}^{\nu*}(\tilde{p}) \left(\mathbb{E}_{\nu,n}^{+\mu}(\rho_+) \right)^* + \hat{b}_{\tilde{p}}^{\lambda} \tilde{\omega}_{\lambda}^{\nu}(\tilde{p}) \left(\mathbb{E}_{\nu,n}^{-\mu}(\rho_-) \right)^* \right).\end{aligned}\tag{3.97}$$

Es importante notar que el efecto del campo magnético en los operadores de campos se introduce al usar tanto las eigenfunciones de Ritus como a los vectores de polarización.

Imponiendo las reglas de cuantización

$$\left[\hat{W}^{+i}(x), \hat{\Pi}^j(y) \right] \Big|_{x_0=y_0} = i g^{ij} \delta^{(3)}(x-y),\tag{3.98}$$

donde

$$\hat{\Pi}^i = \tilde{D}^{*i} \hat{W}^{-0} - \partial^0 \hat{W}^{-i},\tag{3.99}$$

es el momento canónico conjugado al campo $\hat{W}^+$. De lo anterior, emergen las reglas de conmutación entre los operadores de creación y aniquilación

$$\left[\hat{a}_{\tilde{p}}^{\lambda}, \hat{a}_{\tilde{p}'}^{\lambda'\dagger} \right] = (2\pi)^2 \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(p_2 - p_2') \delta(p_3 - p_3') = \left[\hat{b}_{\tilde{p}}^{\lambda}, \hat{b}_{\tilde{p}'}^{\lambda'\dagger} \right].\tag{3.100}$$

Para calcular el propagador de Feynman para bosones vectoriales masivos en presencia de campo magnético, se parte de su definición como el producto temporalmente ordenado de los campos, esto es

$$\begin{aligned}G_F^{\mu\nu}(x-y) &\equiv \langle 0 | \mathcal{T} \left(\hat{W}^{+\mu}(x) \hat{W}^{-\nu}(y) \right) | 0 \rangle \\ &= \left\langle \hat{W}^{+\mu}(x) \hat{W}^{-\nu}(y) \right\rangle \theta(x^0 - y^0) + \left\langle \hat{W}^{-\nu}(y) \hat{W}^{+\mu}(x) \right\rangle \theta(y^0 - x^0).\end{aligned}\tag{3.101}$$

Procediendo de igual forma a lo mostrado en el Cap. (2), se calcula el primer término de la Ec. (3.101) con todo detalle, esto es

$$\begin{aligned}
\langle \hat{W}^{+\mu}(x) \hat{W}^{-\nu}(y) \rangle &= \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \frac{1}{\sqrt{2E'}} \times \\
&\times \sum_{\lambda, \lambda'} \left\langle \left(\hat{a}_{\tilde{p}}^\lambda \mathbb{E}_{\alpha, n}^{+\mu}(x) \tilde{\omega}_\lambda^\alpha(\tilde{p}) + \hat{b}_{\tilde{p}}^{\lambda\dagger} \mathbb{E}_{\alpha, n}^{-\mu}(x) \tilde{\omega}_\lambda^{\alpha*}(\tilde{p}) \right) \times \right. \\
&\times \left. \left(\hat{a}_{\tilde{p}'}^{\lambda'\dagger} \tilde{\omega}_{\lambda'}^{\beta*}(\tilde{p}') \left(\mathbb{E}_{\beta, n}^{+\nu}(y) \right)^* + \hat{b}_{\tilde{p}'}^{\lambda'} \tilde{\omega}_{\lambda'}^\beta(\tilde{p}') \left(\mathbb{E}_{\beta, n}^{-\nu}(y) \right)^* \right) \right\rangle \quad (3.102) \\
&= \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \frac{1}{\sqrt{2E'}} \times \\
&\times \sum_{\lambda, \lambda'} \langle 0 | \hat{a}_{\tilde{p}}^\lambda \hat{a}_{\tilde{p}'}^{\lambda'\dagger} | 0 \rangle \left(\mathbb{E}_{\alpha, n}^{+\mu}(x) \tilde{\omega}_\lambda^\alpha(\tilde{p}) \right) \left(\left(\mathbb{E}_{\beta, n}^{+\nu}(y) \right)^* \tilde{\omega}_{\lambda'}^{\beta*}(\tilde{p}') \right).
\end{aligned}$$

Esta ecuación, una vez que se usa la Ec. (3.100), se reduce a

$$\begin{aligned}
\langle \hat{W}^{+\mu}(x) \hat{W}^{-\nu}(y) \rangle &= \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \mathbb{E}_{\alpha, n}^{+\mu}(x) \left(\sum_{\lambda=1}^3 \tilde{\omega}_\lambda^\alpha(\tilde{p}) \tilde{\omega}_\lambda^{\beta*}(\tilde{p}) \right) \left(\mathbb{E}_{\beta, n}^{+\nu}(y) \right)^* \\
&= \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \mathbb{E}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}^{+\mu}(x) \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{\tilde{p}^\alpha \tilde{p}^{\beta*}}{M_W^2} \right) \left(\mathbb{E}_{\beta, m-1+\tilde{s}_3}^{+\nu}(y) \right)^*, \quad (3.103)
\end{aligned}$$

en donde en la última igualdad se ha utilizado la Ec. (3.96).

Esta forma del propagador se parece mucho al propagador del caso libre, Ec. (2.21). Esta enorme similitud plantea la pregunta: ¿qué operador diferencial, actuando sobre las Eigenfunciones de Ritus, es el que resulta en los cuadvectores $\tilde{p}^\mu$ y $\tilde{p}^{\mu*}$? Para dar respuesta a esta pregunta se define

$$\tilde{\pi}^\mu \equiv \left(i\partial^0, \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial^1 - i(\partial^2 + ieBx^1)), \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial^1 + i(\partial^2 + ieBx^1)), i\partial^3 \right). \quad (3.104)$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_x^\alpha \mathbb{E}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}^{+\mu}(x) &= \left(i\partial_x^0 X_{m-1}^+(x^1), \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_x^1 - i(\partial_x^2 + ieBx^1)) X_{m-1+s}^+(x^1), \right. \\
&\left. \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_x^1 + i(\partial_x^2 + ieBx^1)) X_{m-1-s}^+(x^1), i\partial_x^3 X_{m-1}^+(x^1) \right) e^{-i(Ex_0 + p^2 x_2 + p^3 x_3)}, \\
&= \left(EX_{m-1}^+(\rho_+), i\sqrt{|eB|} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_+} - s \frac{\rho_+}{2} \right) X_{m-1+s}^+(\rho_+), \right. \\
&\left. i\sqrt{|eB|} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_+} + s \frac{\rho_+}{2} \right) X_{m-1-s}^+(\rho_+), p^3 X_{m-1}^+(\rho_+) \right) e^{-i(Ex_0 + p^2 x_2 + p^3 x_3)}, \quad (3.105)
\end{aligned}$$

donde se usó el cambio de variable de la Ec. (3.44). De tal forma que, al utilizar los resultados de la Ec. (3.27) y tomar la suma sobre los niveles de Landau, se llega a que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\pi}_x^\alpha \mathbb{E}^{+\mu}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{\alpha, m-1+2\tilde{s}_3}(\rho_+) \tilde{q}^\alpha, \quad (3.106)$$

donde

$$\tilde{q}^\alpha \equiv \left(E, -is\sqrt{|eB|} \left(m + \tilde{s}_3 - 1 + \frac{1+s}{2} \right), is\sqrt{|eB|} \left(m + \tilde{s}_3 - 1 + \frac{1-s}{2} \right), p^3 \right). \quad (3.107)$$

Esta definición es muy parecida a la dada para $\tilde{p}^\mu$, por lo que se busca expresar a la Ec. (3.106) en términos de este cuadvivector.

Al realizar el análisis por entradas es evidente que

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{0, m-1+2\tilde{s}_3}(\rho_+) \tilde{q}^0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{0, m-1+\tilde{s}_3}(\rho_+) \tilde{p}^0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{3, m-1+2\tilde{s}_3}(\rho_+) \tilde{q}^3 &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{3, m-1+\tilde{s}_3}(\rho_+) \tilde{p}^3, \end{aligned} \quad (3.108)$$

ya que para estas entradas $s_3 = 0$.

Para $\alpha = 1$ y $s = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{1, m-1+2s_3} \tilde{q}^1 &= \mathbb{E}^{+\mu}_{1,1} \left(-i\sqrt{|eB|} \right) + \mathbb{E}^{+\mu}_{1,2} \left(-i\sqrt{2|eB|} \right) + \mathbb{E}^{+\mu}_{1,3} \left(-i\sqrt{3|eB|} \right) + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{1, m-1+s_3} \tilde{p}^1. \end{aligned} \quad (3.109)$$

En el caso de $s = -1$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{1, m-1-2s_3} \tilde{q}^1 &= \mathbb{E}^{+\mu}_{1,0} \left(i\sqrt{|eB|} \right) + \mathbb{E}^{+\mu}_{1,1} \left(i\sqrt{2|eB|} \right) + \mathbb{E}^{+\mu}_{1,2} \left(i\sqrt{3|eB|} \right) + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{1, m-1-s_3} \tilde{p}^1. \end{aligned} \quad (3.110)$$

donde los términos correspondientes a $m = 0, 1, 2$ son nulos por las propiedades de las funciones parabólicas cilíndricas.

Por lo tanto,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{1, m-1+2\tilde{s}_3} \tilde{q}^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{1, m-1+\tilde{s}_3} \tilde{p}^1. \quad (3.111)$$

Para $\alpha = 2$ y $s = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{2,m-1+2s_3} \tilde{q}^2 &= \mathbb{E}^{+\mu}_{2,0} \left(i\sqrt{|eB|} \right) + \mathbb{E}^{+\mu}_{2,1} \left(i\sqrt{2|eB|} \right) + \mathbb{E}^{+\mu}_{2,2} \left(i\sqrt{3|eB|} \right) + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{2,m-1+s_3} \tilde{p}^2. \end{aligned} \quad (3.112)$$

En el caso de $s = -1$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{2,m-1-2s_3} \tilde{q}^2 &= \mathbb{E}^{+\mu}_{2,1} \left(-i\sqrt{|eB|} \right) + \mathbb{E}^{+\mu}_{2,2} \left(-i\sqrt{2|eB|} \right) + \mathbb{E}^{+\mu}_{2,3} \left(-i\sqrt{3|eB|} \right) + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{2,m-1-s_3} \tilde{p}^2. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Por lo tanto,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+}_{2,m-1+2\tilde{s}_3} \tilde{q}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{m-1+\tilde{s}_3} \tilde{p}^2. \quad (3.114)$$

Al juntar los resultados de las Ecs. (3.108), (3.111) y (3.114) se llega a la relación

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\pi}_x^\alpha \mathbb{E}^{+\mu}_{\alpha,m-1+\tilde{s}_3}(\rho_+) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^{+\mu}_{\alpha,m-1+\tilde{s}_3} \tilde{p}^\alpha. \quad (3.115)$$

De forma análoga, se llega a la siguiente relación

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{\pi}_y^\beta)^* (\mathbb{E}^{+\nu}_{\beta,m-1+\tilde{s}_3})^* = \sum_{m=0}^{\infty} (\mathbb{E}^{+\nu}_{\beta,m-1+\tilde{s}_3})^* \tilde{p}^{\beta*} \quad (3.116)$$

Con estos dos últimos resultados, la respuesta a la pregunta formulada es inmediata permitiendo reescribir al primer término del producto temporalmente ordenado como

$$\begin{aligned} \langle \hat{W}^{+\mu}(x) \hat{W}^{-\nu}(y) \rangle &= \oint \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \mathbb{E}^{+\mu}_{\alpha,m-1+\tilde{s}_3}(x) \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{\tilde{p}^\alpha \tilde{p}^{\beta*}}{M_W^2} \right) (\mathbb{E}^{+}_{\beta,m-1+\tilde{s}_3}{}^\nu(y))^* \\ &= \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{\tilde{\pi}_x^\alpha \tilde{\pi}_y^{\beta*}}{M_W^2} \right) \oint \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \mathbb{E}^{+\mu}_{\alpha,m-1+\tilde{s}_3}(x) (\mathbb{E}^{+}_{\beta,m-1+\tilde{s}_3}{}^\nu(y))^*. \end{aligned} \quad (3.117)$$

De manera análoga, y directa, se calcula el segundo término del producto temporalmente ordenado obteniéndose

$$\begin{aligned}
\langle \hat{W}^{-\nu}(y) \hat{W}^{+\mu}(x) \rangle &= \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left((\mathbb{E}_{\beta, m-1+\tilde{s}_3}^{-\nu}(y))^* \left(-g^{\beta\alpha} + \frac{\tilde{p}^\beta \tilde{p}^{\alpha*}}{M_W^2} \right) \mathbb{E}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}^{-\mu}(x) \right) \\
&= \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left((\mathbb{E}_{\beta, m-1+\tilde{s}_3}^{-\nu}(y))^* \left(-g^{\beta\alpha} + \frac{\tilde{p}^\beta \tilde{p}^{\alpha*}}{M_W^2} \right) \mathbb{E}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}^{-\mu}(x) \right) \Bigg|_{\substack{p^2 \rightarrow -p^2 \\ p^3 \rightarrow -p^3}} \\
&= \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{\tilde{\pi}_x^\alpha \tilde{\pi}_y^{\beta*}}{M_W^2} \right) \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left(\mathbb{E}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}^{-\mu}(x) (\mathbb{E}_{\beta, m-1+\tilde{s}_3}^{-\nu}(y))^* \right) \Bigg|_{\substack{p^2 \rightarrow -p^2 \\ p^3 \rightarrow -p^3}},
\end{aligned} \tag{3.118}$$

donde se ha realizado el cambio de variable $p^2 \rightarrow -p^2$ y $p^3 \rightarrow -p^3$ en la ecuación anterior.

Al reemplazar las Ecs. (3.117) y (3.118) en la Ec. (3.101), se obtiene al propagador de bosones de norma cargados en presencia de campo magnético homogéneo dado por

$$\begin{aligned}
G_F^{\mu\nu}(x-y) &= \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{\tilde{\pi}_x^\alpha \tilde{\pi}_y^{\beta*}}{M_W^2} \right) \left[\theta(x^0 - y^0) \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbb{E}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}^{+\mu}(x) (\mathbb{E}_{\beta, m-1+\tilde{s}_3}^{+\nu}(y))^*}{2E} + \right. \\
&\quad \left. + \theta(y^0 - x^0) \oint \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbb{E}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}^{-\mu}(x) (\mathbb{E}_{\beta, m-1+\tilde{s}_3}^{-\nu}(y))^*}{2E} \right] \Bigg|_{\substack{p^2 \rightarrow -p^2 \\ p^3 \rightarrow -p^3}},
\end{aligned} \tag{3.119}$$

mismo que puede compactarse al usar la representación integral de la función de Heaviside de la Ec. (1.4), de modo que la forma compacta del propagador es

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = i \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{\tilde{\pi}_x^\alpha \tilde{\pi}_y^{\beta*}}{M_W^2} \right) \oint \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{E}_{\alpha, m-1+\tilde{s}_3}^{+\mu}(x) (\mathbb{E}_{\beta, m-1+\tilde{s}_3}^{+\nu}(y))^*}{(p^0)^2 - E^2 + i\varepsilon}. \tag{3.120}$$

El procedimiento realizado con la función θ de Heaviside “sustituye” a la E por p^0 dentro de las Eigenfunciones de Ritus. Cuando $E = p^0$ hablamos de una partícula en capa de masa, sin embargo, p^0 puede tener cualquier valor por lo que representa a una partícula virtual. Al introducir el operador diferencial nuevamente, se tiene

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = i \oint \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{E}_{\alpha, n}^{+\mu}(x) \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{\tilde{\mathcal{P}}^\alpha \tilde{\mathcal{P}}^{\beta*}}{M_W^2} \right) (\mathbb{E}_{\beta, n}^{+\nu}(y))^*}{\tilde{\mathcal{P}}^2 - M_W^2 + i\varepsilon} \tag{3.121}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{P}}^\mu &= \left(p^0, -is\sqrt{|eB| \left(m-1 + \frac{1+s}{2} \right)}, is\sqrt{|eB| \left(m-1 + \frac{1-s}{2} \right)}, p^3 \right). \\
\text{con } \tilde{\mathcal{P}}^2 &\equiv \tilde{\mathcal{P}}^\mu \tilde{\mathcal{P}}_\mu^*
\end{aligned} \tag{3.122}$$

La Ec. (3.121) es el propagador de un bosón vectorial masivo y cargado en presencia de campo magnético.

El procedimiento aplicado para la obtención del bosón de norma cargado en presencia de campo magnético es novedoso y mas transparente que otros mostrados en la literatura, por lo que tanto procedimiento como el propagador mismo representan el aporte principal de este trabajo de tesis.

Conclusiones

En el presente trabajo se calculó el propagador asociado a un campo bosónico, vectorial, masivo y cargado en presencia de un campo magnético constante en la dirección z mediante la técnica de Eigenfunciones de Ritus.

Se encontró que, dado un conjunto de rotaciones sobre el campo bosónico vectorial, se puede diagonalizar la ecuación de movimiento. Trabajando con esta ecuación diagonalizada, se planteó un ansatz sobre la dinámica del campo. A su vez, se trabajó con la condición de norma del campo rotado para definir a las Eigenfunciones de Ritus las cuales, al efectuar derivadas sobre ellas, resultan en el análogo del cuadrimomentum para los casos con campo magnético. Con este resultado, se encontró una base completa de vectores de polarización que cumplieran propiedades de completez al sumar sobre las polarizaciones físicas. Con estos ingredientes, se cuantizó el campo y se calculó el propagador de Feynman mediante su definición. Se dan avances y trabajo a futuro en los cuales es necesario conocer la forma de este propagador de forma explícita, que es el resultado final de este proyecto.

Aunque el propagador de un bosón vectorial masivo y cargado eléctricamente en presencia de un campo magnético es una cantidad conocida desde hace años, la aplicación de la metodología implementada de trabajar con Eigenfunciones de Ritus para una base diagonalizada es novedosa en este contexto.

Otra relación importante a la que se llegó fue llevar la Ecuación de Proca con Campo Magnético a una forma diagonal utilizando las matrices de rotación. El hecho de utilizar las matrices de proyección también es un resultado importante del presente trabajo, ya que de aquí surgen claramente los eigenvalores s_3 que contienen información sobre la proyección de polarización en la dirección z y es análogo a la cantidad σ definida en el análisis del caso de Dirac.

Por otro lado, el resultado de completez sobre los vectores de polarización en el caso magnético, dada la definición del “cuadrimomentum magnético”, es análogo al resultado de completez para el caso del vacío la cual depende de un estado de cuadrimomentum dado. Por construcción, los vectores de polarización cumplen las relaciones de transversalidad y ortonormalidad encontradas en la parte magnética respectivamente. Es con estas relaciones y resultados que se puede cuantizar al campo afectado por el campo magnético, para posteriormente usar la definición del propagador de Feynman y llegar al resultado final de la Ec. (3.2).

Finalmente, cabe mencionar que el presente trabajo se restringe solamente a las afectaciones que el campo magnético tiene sobre el propagador el cual es un objeto central en la fenomenología del campo estudiado. Sería de gran interés utilizarlo en escenarios astrofísicos relacionados a NS como en estudios sobre los procesos URCA o modificaciones causadas por grandes campos magnéticos a la intensidad con la que los neutrinos interactúan con estos

objetos compactos y su relevancia en los movimientos anisotrópicos que presentan.

Apéndice A

Cuantización del $W^\pm$ en el vacío

En la sección 2.2 se llega al resultado de la Ec. (2.12), el cual es relevante para la consistencia de las reglas de conmutación de los operadores de creación y aniquilación mostrados en la Ec. (2.13). Dicho procedimiento es uno que se acostumbra delegar al lector en la literatura, sin embargo considero que su deducción es interesante y sirve como un preámbulo útil al estudiar afectaciones en los campos cuánticos por agentes externos.

Calculando la cantidad $\hat{\Pi}^\mu$ a través de su definición

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}^\mu &= \partial^\mu (\hat{W}^{+0})^\dagger - \partial^0 (\hat{W}^{+\mu})^\dagger \\
&= \partial^\mu \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{0\dagger}(\vec{p}, \lambda) e^{ip^\nu x_\nu} + \hat{b}_{p,\lambda} \varepsilon^0(\vec{p}, \lambda) e^{-ip^\nu x_\nu} \right] \right\} - \\
&\quad - \partial^0 \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{\mu\dagger}(\vec{p}, \lambda) e^{ip^\nu x_\nu} + \hat{b}_{p,\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-ip^\nu x_\nu} \right] \right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ \hat{a}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{0\dagger}(\vec{p}, \lambda) (\partial^\mu e^{ip^\nu x_\nu}) + \hat{b}_{p,\lambda} \varepsilon^0(\vec{p}, \lambda) (\partial^\mu e^{-ip^\nu x_\nu}) - \right. \\
&\quad \left. - \hat{a}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{\mu\dagger}(\vec{p}, \lambda) (\partial^0 e^{ip^\nu x_\nu}) - \hat{b}_{p,\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) (\partial^0 e^{-ip^\nu x_\nu}) \right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ \hat{a}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{0\dagger}(\vec{p}, \lambda) (ip^\mu e^{ip^\nu x_\nu}) + \hat{b}_{p,\lambda} \varepsilon^0(\vec{p}, \lambda) (-ip^\mu e^{-ip^\nu x_\nu}) - \right. \\
&\quad \left. - \hat{a}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{\mu\dagger}(\vec{p}, \lambda) (iE_p e^{ip^\nu x_\nu}) - \hat{b}_{p,\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) (-iE_p e^{-ip^\nu x_\nu}) \right\} \\
&= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ \hat{a}_{p,\lambda}^\dagger (\varepsilon^{0\dagger}(\vec{p}, \lambda) p^\mu - \varepsilon^{\mu\dagger}(\vec{p}, \lambda) E_p) e^{ip^\nu x_\nu} - \right. \\
&\quad \left. - \hat{b}_{p,\lambda} (\varepsilon^0(\vec{p}, \lambda) p^\mu - \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) E_p) e^{-ip^\nu x_\nu} \right\}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Luego, tomemos el conmutador basándonos en las expansiones de Fourier de la Ec. (2.11)

$$\begin{aligned}
 [\hat{W}^{+i}(x), \hat{\Pi}^j(y)] &= \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ \hat{a}_{p,\lambda} \varepsilon^i(\vec{p}, \lambda) e^{-ip^\alpha x_\alpha} + \hat{b}_{p,\lambda}^\dagger \varepsilon^{i\dagger}(\vec{p}, \lambda) e^{ip^\alpha x_\alpha} \right\}, \right. \\
 &\quad i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{\lambda'=1}^3 \left\{ \hat{a}_{q,\lambda'}^\dagger (\varepsilon^{0\dagger}(\vec{q}, \lambda') q^j - \varepsilon^{j\dagger}(\vec{q}, \lambda') E_q) e^{iq^\alpha y_\alpha} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \hat{b}_{q,\lambda'} (\varepsilon^0(\vec{q}, \lambda') q^j - \varepsilon^j(\vec{q}, \lambda') E_q) e^{-iq^\alpha y_\alpha} \right\} \right] \\
 &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{\lambda, \lambda'}^3 \left\{ [\hat{a}_{p,\lambda}, \hat{a}_{q,\lambda'}^\dagger] \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^i (\varepsilon_{\vec{q},\lambda'}^{0\dagger} q^j - \varepsilon_{\vec{q},\lambda'}^{j\dagger} E_q) e^{-i(p^\alpha x_\alpha - q^\alpha y_\alpha)} + \right. \\
 &\quad \left. + [\hat{b}_{q,\lambda'}, \hat{b}_{p,\lambda}^\dagger] \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^{i\dagger} (\varepsilon_{\vec{q},\lambda'}^0 q^j - \varepsilon_{\vec{q},\lambda'}^j E_q) e^{i(p^\alpha x_\alpha - q^\alpha y_\alpha)} \right\} \quad (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

Luego, usando las reglas de conmutación: $[\hat{a}_{p,\lambda}, \hat{a}_{q,\lambda'}^\dagger] = [\hat{b}_{q,\lambda'}, \hat{b}_{p,\lambda}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p - q)$

$$\begin{aligned}
 [\hat{W}^{+i}(x), \hat{\Pi}^j(y)] &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^i (\varepsilon_{\vec{p},\lambda}^{0\dagger} p^j - \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^{j\dagger} E_p) e^{-ip^\alpha (x_\alpha - y_\alpha)} + \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^{i\dagger} (\varepsilon_{\vec{p},\lambda}^0 p^j - \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^j E_p) e^{ip^\alpha (x_\alpha - y_\alpha)} \right\} \\
 &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ [\varepsilon_{\vec{p},\lambda}^i \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^{0\dagger} p^j - \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^i \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^{j\dagger} E_p] e^{-ip^\alpha (x_\alpha - y_\alpha)} \right. \\
 &\quad \left. + [\varepsilon_{\vec{p},\lambda}^{i\dagger} \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^0 p^j - \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^{i\dagger} \varepsilon_{\vec{p},\lambda}^j E_p] e^{ip^\alpha (x_\alpha - y_\alpha)} \right\} \\
 &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left\{ \left[\left(-\underbrace{g^{i0}}_{=0} + \frac{p^i E_p}{M^2} \right) p^j - \left(-g^{ij} + \frac{p^i p^j}{M^2} \right) E_p \right] e^{-ip^\alpha (x_\alpha - y_\alpha)} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\left(-\underbrace{g^{i0}}_{=0} + \frac{p^i E_p}{M^2} \right) p^j - \left(-g^{ij} + \frac{p^i p^j}{M^2} \right) E_p \right] e^{ip^\alpha (x_\alpha - y_\alpha)} \right\} \\
 &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \{ E_p g^{ij} \} (e^{-ip^\alpha (x_\alpha - y_\alpha)} + e^{ip^\alpha (x_\alpha - y_\alpha)}) \\
 &= \frac{ig^{ij}}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (e^{-i[E(x_0 - y_0) + p^i(x_i - y_i)]} + e^{i[E(x_0 - y_0) + p^i(x_i - y_i)]}) \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

Tomando $x_0 \rightarrow y_0$ y $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en el segundo término se llega a la regla de conmutación de la Ec. (2.12)

$$[\hat{W}^{+i}(x), \hat{\Pi}^j(y)] = ig^{ij}\delta^{(3)}(x - y). \quad (\text{A.4})$$

El procedimiento que se realiza en este apéndice puede aplicarse directamente a la descomposición de Fourier de la Ec. (3.97) para llegar a la relación mostrada en la Ec. (3.98).

Bibliografía

- [1] D. GÓMEZ, S. NOGUERA & N. SCOCCOLA, (2023), *Phys. Rev. D* **108**, 016012.
- [2] A. NIKISHOV, (2001), *JETP*, **93**, No. 2, 197–210.
- [3] W. GREINER, (1996), *Field Quantization*, Ed. Springer-Verlag.
- [4] M. PESKIN, (1995), *An Introduction to Quantum Field Theory*, Ed. Westview Press.
- [5] M. SCHWARTZ, (2014), *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Ed. Cambridge University Press.
- [6] S. L. GLASHOW, (1961), *Nucl. Phys.* **22**, 579.
- [7] A. SALAM, (1968), *Elementary Particle Theory*, N. Svartholm, Ed. Stockholm: Almqvist and Wiksell.
- [8] S. WEINBERG, (1967), *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264.
- [9] P. W. HIGGS, (1964), *Phys. Lett.* **12**, 132.
- [10] P. W. HIGGS, (1964), *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508.
- [11] T. LANCASTER, S. K. BLUNDELL, (2014) *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, Ed. Oxford University Press.
- [12] D. GRIFFITHS, (1987), *Introduction to Elementary Particles*, Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- [13] J. D. BJORKEN, S. D. DRELL, (1964), *Relativistic Quantum Mechanics*, Ed. McGraw-Hill.
- [14] M. THOMSON, (2013) *Modern Particle Physics*, Ed. Cambridge University Press.
- [15] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, (1991), *Quantum Mechanics Non-relativistic Theory*, Ed. Pergamon Press.
- [16] I. AITCHISON, A. HEY, (2004), *Gauge Theories in Particle Physics. A Practical Introduction. Volume 1 From Relativistic Quantum Mechanics to QED*, Ed. Institute of Physics Publishing.
- [17] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN. (1972), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Ed. United States Department of Commerce, National Bureau of Standards.
- [18] E. WHITTAKER; G. WATSON, (1920), *A Course of Modern Analysis: An Introduction of the General Theory of Infinite Processes and of Analytics Functions; with an account of the principal trascendental functions*, Ed. Cambridge University Press.
- [19] V. I. RITUS, (1972), *Ann. Phys.* **69**, 555-582.
- [20] V. I. RITUS, (1978), *Sov. Phys. JETP*, **48**, 788.

- [21] G. PICCINELLI, J. JABER-URQUIZA, A. SÁNCHEZ, (2023) *Astron. Nachr.* **340** 230-233.
- [22] J. SCHWINGER, (1951), *Phys. Rev.* **82**, 664.
- [23] A. KUZNETSOV & N. MIKHEEV, (2013), *Electroweak Processes in External Active Media*, Ed. Springer.
- [24] E. J. FERRER, V. DE LA INCERA, D. MANREZA PARET, A. PÉREZ MARTINEZ & A. SÁNCHEZ, (2015), *Phys. Rev. D* **91**, 085041.
- [25] G. RAFFELT, (1996), *Stars as Laboratories for Fundamental Physics: The Astrophysics of Neutrinos, Axions, and Other Weakly Interacting Particles*, Ed. University of Chicago Press.
- [26] D. G. YAKOVLEV, ET AL. (2001), *Phys. Rep.* **354**, 1-155.
- [27] C. KOUVELIOTOU, S. DIETERS, T. STROHMAYER, ET AL. (1998), *Nature*, **393**, 235.
- [28] R. TUROLLA, S. ZANE, & A. L. WATTS, (2015), *Rep. Prog. Phys.* **78**, 116901.
- [29] D. LAI, A. M. ABRAHAMS, & S. L. SHAPIRO, (1991), *ApJ*, **377**, 612.
- [30] G. CHANMUGAM, (1992), *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* , **30**, 143-184.
- [31] G. GAMOW; M. SCHROENBERG, (1940), *Phys. Rev.* **58**, 1117.
- [32] G. GAMOW; M. SCHROENBERG, (1941), *Phys. Rev.* **59**, 539.
- [33] L. B. LEINSON, (2002) *Nucl. Phys. A* **707**, 543-560.
- [34] D. K. NADYOSHIN, (1995), *Space Sci. Rev.* **74**, 455–461.
- [35] P. HAENSEL, (1995), *Space Sci. Rev.* **74**, 427–436.
- [36] H. ÖGELMAN, (1995), *Proceedings of the Nato ASI on The Lives of the Neutron Stars*, p. 101.
- [37] D. G. YAKOVLEV, ET AL., (2005), *Nucl. Phys. A* **752** 590-599.
- [38] A. Y. POTEKHIN ET AL. (2003) *ApJ* **594** 404.
- [39] L. B. LEINSON, A. PÉREZ, (1998), *JHEP* **09** 020.
- [40] D. BANDYOPADHYAY, ET AL., (1998), *Phys. Rev. D*, **58**, 121301.
- [41] W. BECKER, (1997), *Astron. Astro. Phys.* **326**, 682-691.
- [42] A. TUMASYAN, (2022), *Phys. Rev. D* **105** **7**, 072008.
- [43] P. RENTON, (1990), *Electroweak interactions: an introduction to the physics of quarks and leptons*, Ed. Cambridge University Press.
- [44] C. ITZYKSON, J. ZUBER, (1980), *Quantum Field Theory*, Ed. McGraw-Hill International Book Company.
- [45] G. BURDMAN, “Lecture 12 From Correlation Functions to Amplitudes”. *Quantum Field Theory I - 1st Semester 2021* Agosto, 2023. http://fma.if.usp.br/burdmann/QFT1/lecture_12.pdf.
- [46] D. LAI, D. F. CHERNOFF & J. M. CORDES, (2001), *ApJ* **549**, 1111.
- [47] A. AYALA, D. M. PARET, A. P. MARTÍNEZ, G. PICCINELLI, A. SÁNCHEZ & J. S. RUÍZ, (2018), *Phys. Rev. D* **97**, 103008.
- [48] A. ERDAS, M. LISSIA, (2003), *Phys. Rev. D* **67**, 033001.
- [49] P. LANGACKER, (2010), *Series in High Energy Physics, Cosmology, and Gravitation: The Standard Model and Beyond*, Ed. CRC Press Taylor & Francis Group.

- [50] S. N. IABLOKOV & A. V. KUZNETSOV, (2020), Phys. Rev. D **102**, 096015.
- [51] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, (1974), *Curso Abreviado de Física Teórica. Libro 2: Mecánica Cuántica*, Ed. Mir.
- [52] E. ELIZALDE, E.J. FERRER, V. DE LA INCERA, (2002), Ann. Physics **295** 33–49.
- [53] K. HATTORI, K. ITAKURA & S. OZAKI, (2023), Prog. Part. Nucl. Phys. **133**, 104068.
- [54] N. NIELSEN, P. OLESE, (1978), Nucl. Phys. B, **144**, 376-396.