UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE GRANDES RETÍCULAS DE CLASES DE RETÍCULAS DEFINIDAS MEDIANTE PROPIEDADES DE CERRADURA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA
FRANCISCO GONZÁLEZ BAYONA

DIRECTOR DE LA TESIS
HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA (Facultad de Ciencias, UNAM)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ (Instituto de Matemáticas, UNAM)
JUAN MORALES RODRÍGUEZ (Facultad de Ciencias, UNAM)

CIUDAD DE MÉXICO, junio de 2024.

A mis padres, mis ejemplos de solidaridad, por su infinito cariño,
a Moni, mi compañera, por el gran amor que le tengo,
a Juan Morales, por encaminarme al principio de esta investigación,
y a mi maestro y director de este trabajo, Hugo Rincón por su amistad y guía.

Introducción

Dada una familia de propiedades de cerradura F para R-módulos, las propiedades de la retícula de clases de módulos con dichas propiedades de cerradura, denotada como $\mathcal{L}_F$ (ordenada con la contención), están en relación con propiedades del anillo. Por ejemplo si $\mathcal{L}_{\leq}$ es la gran retícula de clases de R-módulos cerradas bajo submódulos e isomorfismos, y $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ es la gran retícula de clases de R-módulos cerradas bajo cocientes e isomorfismos, entonces $\mathcal{L}_{\leq} = \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ implica que R es artiniano de ideales principales. Esta relación ha motivado el estudio de las grandes retículas de clases de módulos definidas mediante propiedades de cerradura.

Por otro lado, a todo R-módulo M se le puede asociar su retícula de submódulos $\mathcal{L}(M)$, que es modular y acotada, y todo homomorfismo $M \longrightarrow N$ induce un morfismo lineal (Definición 1.1) $\mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(N)$ entre las retículas de submódulos. Los morfismos lineales forman, junto con la clase de retículas modulares y acotadas a la categoría $\mathcal{LM}$ de retículas modulares lineales, que se estudia a lo largo de todo este trabajo.

En el primer capítulo se definen conceptos como morfismo lineal, sucesión exacta y prerradical de retículas, y se prueban resultados sobre $\mathcal{LM}$ que serán de utilidad en todo el resto del trabajo, por ejemplo propiedades que permiten perseguir elementos en diagramas, y una caracterización de los prerradicales de retículas.

En el segundo capítulo se estudia a la categoría $\mathcal{LM}$ a través de grandes retículas de clases de retículas definidas mediante propiedades de cerradura. Sin embargo en $\mathcal{LM}$ no hay un análogo al anillo de R-Mod, por lo que se ve la relación de estas grandes retículas entre ellas, y con la gran retícula de prerradicales de retículas.

A diferencia de R-Mod, en $\mathcal{LM}$ no toda retícula tiene una cápsula inyectiva, y pudiera parecer que las retículas inyectivas son poco comunes. Sin embargo en el capítulo tres, al estudiar la inyectividad y proyectividad relativas a subclases de $\mathcal{LM}$, se encuentra que ninguna retícula es inyectiva (o proyectiva) sólo en la subclase más pequeña posible, que es la formada por las retículas complementadas.

En el capítulo cuatro se estudia cómo en las subclases de $\mathcal{LM}$ formadas por retículas semiproyectivas y seminyectivas, las propiedades de una retícula se encuentran en relación con las propiedades de su monoide de endomorfismos.

Hasta este punto se ha observado cómo muchos resultados obtenidos en R-Mod tienen un análogo reticular en $\mathcal{LM}$, sin embargo ambas categorías tienen también diferencias importantes. En el capítulo cinco se estudia el funtor canónico que existe entre ambas categorías, y se encuentra el ejemplo de un anillo para el cual R-Mod es una categoría equivalente a su imagen bajo dicho funtor.

Índice

1 Preliminares

A lo largo de este trabajo se denotará con $\mathcal{L}$ la clase de todas las retículas acotadas (es decir, con elementos menor y mayor) y con $\mathcal{M}$ la subclase de $\mathcal{L}$ formada por las retículas modulares. Para cada $L \in \mathcal{L}$ se denotarán 0_L y 1_L al menor y mayor elemento de L, respectivamente. En una retícula $L \in \mathcal{L}$, dados $a \leqslant b$ en L, se denotará $b/a = \{x \in L | a \leqslant x \leqslant b\}$. Un intervalo inicial de b/a es un intervalo de la forma c/a con $a \leqslant c \leqslant b$. Un intervalo final o intervalo cociente de b/a es un intervalo de la forma b/c, donde $c \in b/a$.

Definición 1.1. [17, Definition 1.1]. Si $L, L' \in \mathcal{L}$, una función $f : L \longrightarrow L'$ es un morfismo lineal si existen $k \in L$, llamado un núcleo de f, y $a' \in L'$ que satisfacen las siguientes condiciones:
1) $f(x) = f(x \bigvee k)$ para todo $x \in L$.
2) f induce un isomorfismo de retículas $\overline{f} : 1_L/k \longrightarrow a'/0_{L'}$ tal que $\overline{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in 1/k$.

Observación 1.2. Notemos que así como todo morfismo lineal $L \xrightarrow{f} L'$ induce un isomorfismo entre el intervalo final $1_L/k$ y el intervalo inicial $a'/0_{L'}$, siempre que para dos retículas L y L' en $\mathcal{L}$, exista un isomorfismo de retículas $1_L/k \xrightarrow{\overline{f}} a'/0_{L'}$ con $1_L/k$ intervalo final de de L y $a'/0_{L'}$ intervalo inicial de L', dicho isomorfismo induce un morfismo lineal de L a L' dado por

$$L \xrightarrow{\ \_\bigvee k\ } 1_L/k \xrightarrow{\overline{f}} a'/0_{L'} \xrightarrow{i} L'.$$

Lema 1.3. *Si $f : L \longrightarrow L'$ es un morfismo lineal con núcleo k, entonces:*

(i) Para cualesquiera elementos $x, y \in L$ se tiene que $f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x \bigvee k = y \bigvee k$.

(ii) $f(k) = 0$ y k es el elemento más grande de L que tiene esta propiedad, por lo que el núcleo de un morfismo lineal es único.

Demostración. [17, Proposición 1.3]. □

En [17, Proposition 2.2], Toma Albu y Mihai Iosif probaron que la clase $\mathcal{M}$ es la clase de objetos de una categoría donde los morfismos de L a L' para cualquier par de retículas $L, L' \in \mathcal{M}$ es el conjunto de morfismos lineales de L a L', y la denotaron como $\mathcal{LM}$.
Denotaremos $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{LM}$ la categoría de las retículas modulares lineales, cuyos objetos son retículas modulares completas y cuyos morfismos son los morfismos lineales.
Por otro lado tenemos que la clase de todas las retículas junto con los morfismos de retículas[1] es una categoría a la que denotaremos como $\mathcal{LAT}$.
Algunos de los resultados que se exponen en esta sección, y algunos de los resultados del resto de este trabajo, son bien conocidos en categorías abelianas como R-Mod, sin embargo

[1]Una función $L \xrightarrow{f} M$ es un morfismo de retículas si para cualquier par de elementos $a, b \in L$, $f(a \bigvee b) = f(a) \bigvee f(b)$ y $f(a \bigwedge b) = f(a) \bigwedge f(b)$.

en esta investigación no se encontraron pruebas para el caso de la categoría $\mathcal{LM}$. Por esta razón aunque las pruebas en ambos casos puedan ser similares, se exhiben las pruebas en $\mathcal{LM}$ con el propósito de no cometer ningún error.

Teorema 1.4. *Si $L \in \mathcal{LM}$ es distributiva y $L \xrightarrow{f} M$ es un morfismo lineal, entonces f es un morfismo de retículas.*

Demostración. Por [17, Proposition 1.3-(4)] f abre supremos, sólo falta ver que abre ínfimos. Sean $a, b \in L$ y k_f el núcleo de f, entonces

$$f(a \bigwedge b) = f(k_f \bigvee (a \bigwedge b)) = f((k_f \bigvee a) \bigwedge (k_f \bigvee b)) = \overline{f}((k_f \bigvee a) \bigwedge (k_f \bigvee b)) =$$
$$\overline{f}(k_f \bigvee a) \bigwedge \overline{f}(k_f \bigvee b) = f(a) \bigwedge f(b).$$

□

Teorema 1.5. *Si $L \in \mathcal{LM}$ no es distributiva, existe un elemento $a \in L$ tal que el morfismo lineal $L \xrightarrow{-\bigvee a} 1/a$ no es un morfismo de retículas.*

Demostración. Si L no es distributiva, entonces por [5, Theorem 1.7], L tiene una subretícula isomorfa a la siguiente:

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
a \arrow[dr, dash] & c \arrow[d, dash] & b \arrow[dl, dash] \\
& 0, &
\end{tikzcd}$$

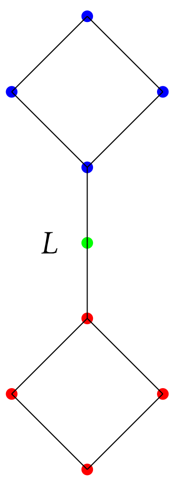
y si consideramos el morfismo lineal $L \xrightarrow{-\bigvee a} 1/a$, entonces

$$(b \bigwedge c) \bigvee a = a \neq 1 = (b \bigvee a) \bigwedge (c \bigvee a).$$

□

La clase de las retículas distributivas contenidas en $\mathcal{LM}$, con los morfismos lineales, es una subcategoría de $\mathcal{LAT}$ a la que denotaremos como $\mathcal{LD}$, y además es la clase cohereditaria más grande contenida en $\mathcal{LM}$. Sin embargo, $\mathcal{LD}$ no es una subcategoría plena de $\mathcal{LAT}$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6. Llamemos L a la siguiente retícula en $\mathcal{LD}$:



la función $L \xrightarrow{f} \{0,1,2\}$ (donde $\{0,1,2\}$ tiene el orden inducido por los naturales) que manda todos los puntos rojos al cero, el punto verde al uno, y todos los puntos azules al dos, es un morfismo de retículas pero no un morfismo lineal.

Observación 1.7. La categoría $\mathcal{LM}$ tiene objeto cero y éste es la retícula con un solo elemento. Pues para cualquier retícula modular y acotada L, los únicos morfismos lineales $\{0\} \longrightarrow L$ y $L \longrightarrow \{0\}$ son, en ambos casos, las funciones constantes cero. Además, el morfismo $L \xrightarrow{0_{L,M}} M$ entre dos retículas es el único morfismo que se factoriza a través del objeto cero $0_{L,M} : L \longrightarrow \{0\} \longrightarrow M$. Así que tiene que ser la constante cero.

Teorema 1.8. *En la categoría $\mathcal{LM}$, todo morfismo lineal $L \xrightarrow{f} L'$ tiene núcleo en el sentido categórico, y éste está dado por la inclusión $k_f/0 \xrightarrow{i} L$, donde k_f es el núcleo de f como morfismo lineal.*

Demostración. Por [17, Corolario 1.4] f es creciente, por lo que para todo elemento $x \in k_f/0$ se tiene que $f(x) \leq f(k_f) = 0$, entonces $f(x) = 0$ y por lo tanto la composición $f \circ i$ es el morfismo lineal cero.
Por otro lado si suponemos que $M \in \mathcal{LM}$ y $M \xrightarrow{g} L$ es un morfismo lineal tal que $f \circ g = 0$, entonces por [17, Proposición 1.3-(2)] se tiene que $g(1_M) \leq k_f$ y por lo tanto la correstricción de $M \xrightarrow{g\restriction} k_f/0$ es el único morfismo lineal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
k_f/0 \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& L \arrow[r, "f"] & L' \\
M. \arrow[uu, dashed, "g\restriction"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

Lema 1.9. *Si $L, L' \in \mathcal{L}$ y $f, g : L \longrightarrow L'$ son morfismos lineales con núcleos respectivos k_f, k_g, que cumplen que $k_f = k_g$ y los isomorfismos de retículas inducidos $\overline{f}$ y $\overline{g}$ coinciden, entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $x \in L$ entonces $f(x) = f(x \bigvee k_f) = \overline{f}(x \bigvee k_f) = \overline{g}(x \bigvee k_g) = g(x \bigvee k_g) = g(x)$. □

Teorema 1.10. *En la categoría $\mathcal{LM}$, todo morfismo lineal $L \xrightarrow{f} L'$ tiene conúcleo en el sentido categórico, y éste está dado por el morfismo lineal $L' \xrightarrow{\_ \bigvee f(1_L)} 1_{L'}/f(1_L)$.*

Demostración. Para todo elemento $x \in L$ se tiene que $f(x) \bigvee f(1_L) = f(1_L)$, por lo que la composición

$$L \xrightarrow{f} L' \xrightarrow{\_ \bigvee f(1_L)} 1_{L'}/f(1_L)$$

es el morfismo lineal cero.
Por otro lado, si suponemos que $L' \xrightarrow{g} M$ es un morfismo lineal tal que la composición $L \xrightarrow{f} L' \xrightarrow{g} M$ es el morfismo lineal cero, entonces $g \circ f(x) = 0_M$ para todo elemento $x \in L$, y

por [17, Proposición 1.3-(2)] $f(1_L) \leq k_g$, entonces la restricción de g dada por $1_{L'}/f(1_L) \xrightarrow{g|} M$ es un morfismo lineal hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 1_{L'}/f(1_L) \arrow[d, dashed, "g|"] \\
L \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & L' \arrow[ur, "_\bigvee f(1_L)"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & & M.
\end{tikzcd}$$

Además si existiera otro morfismo lineal $1_{L'}/f(1_L) \xrightarrow{h} M$ tal que $h \circ (\_ \bigvee f(1_L)) = g$, entonces para todo elemento $x \in 1_{L'}/f(1_L)$

$$h(x) = h(x \vee f(1_L)) = g(x) = g|(x).$$

$\square$

Teorema 1.11. *En la categoría $\mathcal{LM}$, todo morfismo lineal $L \xrightarrow{f} L'$ tiene imagen en el sentido categórico, y ésta está dada por la inclusión $f(1)/0 \xrightarrow{i} L'$.*

Demostración. Sea $f| : L \longrightarrow f(1)/0$ la correstricción de f, entonces $f = i \circ f|$,
Por otro lado si suponemos que $I = a/0_{L'}$ es un intervalo inicial de L', y que existe un morfismo lineal $g : L \longrightarrow I$ tal que $f = i \circ g$ donde $I \xrightarrow{i} L'$ es la inclusión, entonces $g(1) = f(1) \leq a$, por lo tanto la inclusión $f(1)/0 \xrightarrow{i} I$ es el único morfismo lineal que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f|"] \arrow[ddr, "g"'] & & L' \\
 & f(1)/0 \arrow[ur, "i"] \arrow[d, dashed, "i"] & \\
 & I. \arrow[uur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Observación 1.12. Notemos que por los Teoremas 1.8, 1.10 y 1.11, si $L \xrightarrow{f} L'$ es un morfismo lineal, entonces la imagen de f dada por la inclusión $f(1)/0 \xrightarrow{i} L'$ coincide con el núcleo del conúcleo de f, que es el núcleo del morfismo lineal $L' \xrightarrow{\_\bigvee f(1_L)} 1_{L'}/f(1_L)$.

Definición 1.13. Para dos retículas $L, L' \in \mathcal{LM}$, diremos que un morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$ es un monomorfismo lineal si es cancelable por la izquierda, es decir, si siempre que existan dos morfismos lineales $g : T \longrightarrow L$ y $g' : T \longrightarrow L$ tales que $f \circ g = f \circ g'$ se tiene que $g = g'$.

Proposición 1.14. *Un morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$ es un monomorfismo lineal si y sólo si su núcleo k_f es cero.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Si $f : L \longrightarrow L'$ es un monomorfismo lineal y suponemos que tiene núcleo $k_f \neq 0_L$, podemos considerar los morfismos lineales $k/0_L \xrightarrow{i} L$ dado por la inclusión y $k/0_L \xrightarrow{0} L$ el morfismo cero. Se tiene que $i \neq 0$, sin embargo $f \circ i = f \circ 0 = 0$ lo cual es una contradicción.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $f : L \longrightarrow L'$ tiene núcleo $k_f = 0_L$, que $g : T \longrightarrow L$ y $g' : T \longrightarrow L$ son morfismos lineales tales que $f \circ g = f \circ g'$. Si existe $t \in T$ tal que $g(t) \neq g'(t)$, dado que $\overline{f} = f \restriction: L \longrightarrow a'/0'$ es un isomorfismo de retículas, tendríamos que $(f \circ g)(t) \neq (f \circ g')(t)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $g = g'$ y f es cancelable por la izquierda. $\square$

En algunas categorías los monomorfismos son los morfismos que tienen inverso izquierdo. Si $f : L \longrightarrow L'$ es un morfismo lineal y existe $g : L' \longrightarrow L$ tal que $g \circ f = I_L$ entonces f es cancelable por la izquierda y por lo tanto es un monomorfismo lineal. Pero no todo monomorfismo lineal tiene inverso izquierdo, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.15. Consideremos las retículas $L = \{0,1,2\}$; $L' = \{0,1,2,3\}$ con el orden usual inducido por los naturales, y consideremos la inclusión $i : L \longrightarrow L'$. Tanto L como L' son retículas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, pues la retícula más pequeña no modular tiene cinco elementos. Además, i es un monomorfismo lineal, pero si suponemos que existe un morfismo lineal $g : L' \longrightarrow L$ tal que $g \circ f = I_L$, tendríamos que $g(x) = x$ para todo $x \in \{0,1,2\}$. Luego, como los morfismos lineales son funciones no decrecientes por [17, Corolario 1.4.], tenemos que $g(3) = 2$. Además, como el único elemento en L' que va a dar a 0 es 0, por [17, Proposición 1.3.], el núcleo de g es 0. Como la imagen de g es todo L y g es un morfismo lineal, existe un isomorfismo de retículas $\overline{g} : L' \longrightarrow L$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, la inclusión i no tiene ningún morfismo lineal como inverso izquierdo.

Definición 1.16. Un morfismo lineal $f : L \longrightarrow M$ es un epimorfismo lineal si es cancelable por la derecha, es decir, si siempre que existan morfismos lineales $g, g' : M \longrightarrow T$ tales que $g \circ f = g' \circ f$, se tiene que $g = g'$.

Definición 1.17. Una categoría $\mathcal{C}$ es balanceada si todo morfismo que sea tanto epimorfismo como monomorfismo es un isomorfismo.

Por [17, Proposition 2.2. (4) y (3)] los epimorfismos en la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ coinciden con los morfismos lineales suprayectivos, y los monomorfismos con los morfismos lineales inyectivos. Así por la Proposición 1.14, un morfismo lineal $L \xrightarrow{f} M$ que es mono y epi, es un isomorfismo de retículas entre L y M, y su inverso como isomorfismo de retículas f^{-1} es también un morfismo lineal, por lo que f es un isomorfismo en la categoría $\mathcal{LM}$, que es entonces una categoría balanceada.

Definición 1.18. Si $L \xrightarrow{f} M$ y $M \xrightarrow{g} L$ son morfismos lineales tales que $g \circ f = Id_L$, entonces f es un monomorfismo y diremos que se escinde, mientras que g es un epimorfismo que diremos que se retrae.

Lema 1.19. *Si $L \xrightarrow{f} M$ y $M \xrightarrow{g} L$ son morfismos lineales tales que $g \circ f = Id_L$, entonces $f(1)$ y k_g son complementos en L.*

Demostración. $1 = g(f(1)) = g(f(1) \bigvee k_g)$; como g es inyectiva en $1/k_g$, $(f(1) \bigvee k_g) = 1$.
Por otro lado como $f(1) \bigwedge k_g \in f(1)/0$, existe $a \in L$ tal que $f(a) = f(1) \bigwedge k_g$, pero

$$a = g(f(a)) = g(f(1) \bigwedge k_g) = 0$$

por lo que $(f(1) \bigwedge k_g) = 0$ □

Observación 1.20. Si $L \xrightarrow{f} L'$ es un morfismo lineal, lo podemos descomponer como $f = m_f \circ e_f$ donde m_f es un monomorfismo lineal y e_f es un epimorfismo lineal, para esto sólo hace falta considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f\restriction"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & f(1_L)/0 \arrow[r, "i"] & L'. \end{tikzcd}$$

Notemos que la inclusión $f(1_L)/0 \xrightarrow{i} L'$ es el núcleo del conúcleo de f, mientras que la restricción $L \xrightarrow{f\restriction} f(1_L)/0 \cong 1_L/k_f$ es el conúcleo del núcleo de f. Además, si $M \xrightarrow{f'} M'$ es otro morfismo lineal y tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & L' \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f'"] & M' \end{tikzcd}$$

entonces $(g \circ f)(1_L) = (f' \circ h)(1_L) \leq f'(1_M)$, por lo que al restringir y correstringir g obtenemos un morfismo lineal $f(1_L)/0 \xrightarrow{g|} f'(1_M)/0$ bien definido. Así al descomponer f y f' en la composición de epimorfismo con monomorfismo que se vió anteriormente obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f\restriction"] \arrow[d, "h"] & f(1_L)/0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "g|"] & L' \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f'\restriction"] & f'(1_M)/0 \arrow[r, "i"] & M' \end{tikzcd}$$

donde $g|$ es el único morfismo lineal que lo hace conmutativo.

Definición 1.21. Diremos que una sucesión de morfismos lineales

$$\ldots \xrightarrow{f_{i-2}} L_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} L_i \xrightarrow{f_i} L_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots$$

es exacta si para cualquier par de morfismos lineales consecutivos f_{i-1} y f_i, la imagen de f_{i-1} coincide con el núcleo de f_i. Por los teoremas 1.8 y 1.11, esto ocurre si y sólo si $f_{i-1}(1_{L_{i-1}}) = k_{f_i}$.

Observación 1.22. Una sucesión de morfismos lineales $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ es exacta si y sólo si

(a) $g \circ f = 0$ (pues esto implica que $f(1_L) \leq k_g$).

(b) Para cualquier $m \in M$ con $g(m) = 0$ existe $a \in L$ tal que $f(a) = m$ (pues esto implica que $k_g \leq f(1_L)$).

A pesar de que la categoría $\mathcal{LM}$ no es abeliana, debido a las Observaciones 1.7 y 1.22; la Proposición 1.14 y [17, Proposition 2.2. (4) and (3)], ésta satisface, excepto por la propiedad de substracción, todas las otras propiedades llamadas "reglas elementales para perseguir elementos en diagramas" descritas por Mac Lane en [10, VIII-4 Theorem 3]. A continuación se utilizan para demostrar las versiones reticulares de algunos resultados conocidos para módulos.

Lema 1.23. *(El Lema corto de los cinco). Para el siguiente diagrama en la categoría $\mathcal{LM}$ con renglones exactos*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & N \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

se tiene que si a y c son monomorfismos lineales (epimorfismos lineales) entonces b es un monomorfismo lineal (epimorfismo lineal).

Demostración. Supongamos que a y c son monomorfismos lineales y sea $x \in M$ tal que $b(x) = 0$, entonces $0 = (g' \circ b)(x) = (c \circ g)(x)$, pero al ser c un monomorfismo, por la Proposición 1.14 se tiene que $g(x) = 0$, dado que los renglones del diagrama son exactos, $x \leq k_g = f(1_L)$, por lo que existe $y \in L$ tal que $x = f(y)$. Así $0 = (b \circ f)(y) = (f' \circ a)(y)$, y como el segundo renglón del diagrama es exacto, f' es un monomorfismo lineal y $a(y) = 0$, luego como a también es un monomorfismo lineal $y = 0$ y por lo tanto $x = f(y) = 0$. Por lo anterior el núcleo de b es 0_M y nuevamente por la Proposición 1.14, b es un monomorfismo lineal.

Por otro lado si suponemos que a y c son epimorfismos lineales, la exactitud en el primer renglón del diagrama nos dice que g es un epimorfismo lineal, por lo que $1_{N'} = (c \circ g)(1_M) = (g' \circ b)(1_M)$, entonces $1_{N'} = g'(b(1_M)) = g'(b(1_M) \bigvee k_{g'})$. Como la restricción $1_{M'}/k_{g'} \xrightarrow{g'|} N'$ es un isomorfismo de retículas se tiene que $b(1_M) \bigvee f'(1_{L'}) = b(1_M) \bigvee k_{g'} = 1_{M'}$. Como a es un epimorfismo $a(1_L) = 1_{L'}$, entonces $b(f(1_L)) = k_{g'}$ y como los morfismos lineales abren supremos arbitrarios por [15, Lema 0.6], se tiene que $b(1_M) = b(1_M \bigvee f(1_L)) = b(1_M) \bigvee b(f(1_L)) = b(1_M) \bigvee k_{g'} = 1_{M'}$. Por lo tanto b es un epimorfismo lineal. □

Lema 1.24. *(El lema de los cinco) Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos*

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & L_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & L_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & L_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & L_5 \arrow[d, "h_5"] \\ M_1 \arrow[r, "g_1"] & M_2 \arrow[r, "g_2"] & M_3 \arrow[r, "g_3"] & M_4 \arrow[r, "g_4"] & M_5 \end{tikzcd}$$

con h_2 y h_4 isomorfismos lineales, h_1 epimorfismo lineal y h_5 monomorfismo lineal, entonces h_3 es un isomorfismo lineal.

Demostración. Probaremos primero que h_3 es un monomorfismo lineal, para esto supongamos que k es su núcleo, entonces $0 = (g_3 \circ h_3)(k) = (h_4 \circ f_3)(k)$, por lo que $f_3(k)$ es menor o igual que el núcleo de h_4, pero h_4 es un monomorfismo lineal y por la Proposición 1.14 el núcleo de h_4 es cero, por lo que $f_3(k) = 0$; como el primer renglón del diagrama es exacto existe $y \in L_2$ tal que $f_2(y) = k$. Luego

$$0 = h_3(k) = (h_3 \circ f_2)(y) = (g_2 \circ h_2)(y),$$

por lo que $h_2(y)$ está por debajo del núcleo de g_2 y como el renglón inferior del diagrama es exacto, existe $z \in M_1$ tal que $g_1(z) = h_2(y)$. Como h_1 es un epimorfismo, existe $w \in L_1$ tal que $h_1(w) = z$, entonces $(g_1 \circ h_1)(w) = h_2(y) = h_2(f_1(w))$, como h_2 es un monomorfismo $f_1(w) = y$, además $k = f_2(y) = (f_2 \circ f_1)(w) = 0$ pues el primer renglón del diagrama es exacto. Por lo tanto, $k = 0$ y por la Proposición 1.14, h_3 es un monomorfismo lineal.

Probemos que h_3 es un epimorfismo lineal. Consideremos al elemento 1_{M_3}, al ser h_4 un epimorfismo, existe $x \in L_4$ tal que $h_4(x) = g_3(1_{M_3})$. Como los renglones del diagrama son exactos se tiene que

$$0 = (g_4 \circ g_3)(1_{M_3}) = (g_4 \circ h_4)(x) = (h_5 \circ f_4)(x),$$

al ser h_5 un monomorfismo lineal se tiene que $f_4(x) = 0$, entonces existe $y \in L_3$ tal que $f_3(y) = x$, así $(g_3 \circ h_3)(y) = (h_4 \circ f_3)(y) = g_3(1_{M_3})$; por [17, Proposición 1.3-(1)] se tiene que $1_{M_3} = k_{g_3} \bigvee 1_{M_3} = h_3(y) \bigvee k_{g_3}$.
Por otro lado si consideramos el elemento 1_{L_2}, al ser h_2 un epimorfismo se tiene que $h_2(1_{L_2}) = 1_{M_2}$, por lo que $k_{g_3} = (g_2 \circ h_2)(1_{L_2}) = (h_3 \circ f_2)(1_{L_2})$, entonces, utilizando el hecho de que los morfismos lineales abren supremos arbitrarios

$$h_3(1_{L_3}) = h_3(f_2(1_{L_2}) \bigvee 1_{L_3}) = h_3(f_2(1_{L_2})) \bigvee h_3(1_{L_3}) = k_{g_3} \bigvee h_3(1_{L_3})$$

para concluir notemos que

$$1_{M_3} = k_{g_3} \bigvee 1_{M_3} = h_3(y) \bigvee k_{g_3} \leq h_3(1_{L_3}) \bigvee k_{g_3} = h_3(1_{L_3}) \leq 1_{M_3}$$

y por lo tanto h_3 es un epimorfismo lineal. $\square$

Lema 1.25. *(Lema de la serpiente) En un diagrama como el siguiente*

$$\begin{tikzcd}
 & k_\alpha/0 \arrow[r, dashed, "f|"] \arrow[d, "i"] & k_\beta/0 \arrow[r, dashed, "g|"] \arrow[d, "i"] & k_\gamma/0 \arrow[d, "i"] \arrow[dddll, dashed, bend right, "\delta"] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "_\bigvee \alpha(1_A)"] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "_\bigvee \beta(1_B)"] & C' \arrow[d, "_\bigvee \gamma(1_C)"] & \\
 & 1/\alpha(1_A) \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & 1/\beta(1_B) \arrow[r, dashed, "\psi"'] & 1/\gamma(1_C). &
\end{tikzcd}$$

Si las flechas negras forman un diagrama conmutativo con renglones exactos, entonces todo el diagrama es conmutativo con renglones exactos y existe un morfismo lineal δ que hace a la sucesión de flechas punteadas exacta.

Demostración. Notemos que si $a \in k_\alpha/0$, entonces $0 = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a))$, por lo que $f(a) \leq k_\beta$ y así la restricción $k_\alpha/0 \xrightarrow{f|} k_\beta/0$ es un morfismo lineal bien definido. Análogamente el morfismo $k_\beta/0 \xrightarrow{g|} k_\gamma/0$ es un morfismo lineal bien definido.
Veamos que la sucesión definida por $f|$ y $g|$ es exacta.
Como $f|(k_\alpha) \leq f(1_{\mathrm{A}}) = k_g$, entonces

$$g|(f|(k_\alpha)) = g(f(k_\alpha)) \leq g(f(1_{\mathrm{A}})) = g(k_g) = 0$$

y por lo tanto $f|(k_\alpha) \leq k_{g|}$.
Por otro lado, como $g(k_{g|}) = 0$, entonces $k_{g|} \leq k_g$, por lo que existe $a \in A$ tal que $f(a) = k_{g|}$. Como $k_{g|} \leq k_\beta$, se tiene que $0 = \beta(f(a)) = f'(\alpha(a))$, por lo que $\alpha(a) \leq k_{f'} = 0$ y así $a \leq k_\alpha$. Notemos que

$$f|(k_\alpha) \leq k_{g|} = f|(a) \leq f|(k_\alpha)$$

y por lo tanto el primer renglón del diagrama es exacto.
Por otro lado, $f(1_{\mathrm{A}}) \leq 1_B$, y como los morfismos lineales preservan el orden $\beta(f(1_{\mathrm{A}})) \leq \beta(1_B)$, de donde

$$(\_ \vee \beta(1_B)) \circ f' \circ \alpha(1_{\mathrm{A}}) = (\_ \vee \beta(1_B)) \circ \beta \circ f(1_{\mathrm{A}}) = \beta(1_B),$$

como $1/\alpha(1_{\mathrm{A}})$ es el conúcleo de α existe un único morfismo φ que hace conmutar el cuadrado inferior izquierdo del diagrama. Por el Teorema 1.10, $\varphi = ((\_ \bigvee \beta(1_B)) \circ f')|$ y análogamente existe ψ tal que $\psi = ((\_ \bigvee \gamma(1_C)) \circ g')|$.
Como $\beta(1_B) \leq k_{(\_ \bigvee \gamma(1_C)) \circ g'}$ y utilizando la descripción del núcleo de una composición de morfismos lineales dada en [17, Lemma 2.1] tenemos lo siguiente:

$$k_\psi = k_{((\_ \bigvee \gamma(1_C)) \circ g')|} = k_{(\_ \bigvee \gamma(1_C)) \circ g'} = \overline{g'}^{-1}(g'(1_{B'}) \bigwedge \gamma(1_C)).$$

Como g es un epimorfismo lineal se tiene que $\gamma(1_C) = (\gamma \circ g)(1_B) = (g' \circ \beta)(1_B)$, y entonces $g'(k_{g'} \bigvee \beta(1_B)) = g'(\beta(1_B)) = \gamma(1_C)$. Como $\beta(1_B) \leq 1_{B'}$ y los morfismos lineales respetan el orden, $\gamma(1_C) \leq g'(1_{B'})$ y así

$$k_\psi = \overline{g'}^{-1}(\gamma(1_C)) = k_{g'} \bigvee \beta(1_B) = f'(1_{A'}) \bigvee \beta(1_B) = \varphi(1_{A'})$$

y, por lo tanto, el renglón inferior del diagrama es exacto.
Para la construcción del morfismo lineal δ consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & x \in k_\gamma/0 \arrow[d, red, "i"] \arrow[ddd, dashed, red, bend right=60, "\delta"', start anchor=north, end anchor=north west, to path={.. controls +(-4,2) and +(-1,1) .. (\tikztotarget)}, shift left=0] \\
 & k_g \leq b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "\gamma"] \\
a' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, red, "\_\bigvee \alpha(1_{\mathrm{A}})"] & b' \arrow[r, "g'"] & 0 \\
a' \bigvee \alpha(1_{\mathrm{A}}). & &
\end{tikzcd}
$$

Dado que g es un epimorfismo lineal, para todo elemento $x \in k_\gamma/0$, existe un único elemento $k_g \leq b \in B$ tal que $g(b) = x$. Como $0 = \gamma(x) = (\gamma \circ g)(b) = (g' \circ \beta)(b)$, entonces $\beta(b) \leq k_{g'}$ y como f' es un monomorfismo lineal, existe un único elemento $a' \in A'$ tal que $f'(a') = \beta(b)$. Definiremos $\delta(x) = a' \bigvee \alpha(1_{\mathrm{A}})$.

Para terminar probaremos que δ es un morfismo lineal cuyo núcleo es $g(k_\beta)$. Lo primero es recordar que $g(k_\beta) \leq k_\gamma$. Tomemos a $x \in k_\gamma/0$, si $k_g \leq b \in B$ es una preimagen de x bajo g, entonces $b \bigvee k_\beta$ es una preimagen bajo g de $x \bigvee g(k_\beta)$. Sin embargo, $\beta(b \bigvee k_\beta) = \beta(b)$, y por lo tanto $\delta(x \bigvee g(k_\beta)) = \delta(x)$.

Ahora supongamos que tenemos dos elementos $x \leq y \in k_\gamma/0$, con preimágenes respectivas bajo g, $k_g \leq b_x \leq b_y \in B$, y como los morfismos lineales respetan orden $\beta(b_x) \leq \beta(b_y)$. Al ser f' un monomorfismo lineal las preimágenes respectivas a'_x y a'_y de b_x y b_y bajo f' cumplen que $a'_x \leq a'_y$ por lo que $\delta(x) = a'_x \bigvee \alpha(1_{\mathrm{A}}) \leq a'_y \bigvee \alpha(1_{\mathrm{A}}) = \delta(y)$ y por lo tanto δ respeta el orden.

Para concluir la prueba supongamos que tenemos dos elementos $x \neq y$ en $k_\gamma/g(k_\beta)$, si b_x y b_y son sus preimágenes bajo g en $1_B/k_g$ se tiene que $b_x \neq b_y$. Notemos que si $\beta(b_x) = \beta(b_y)$, entonces por [17, Proposition 1.3-(1)] $b_x \bigvee k_\beta = b_y \bigvee k_\beta$, y aplicando g obtenemos que $x = x \bigvee g(k_\beta) = y \bigvee g(k_\beta) = y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\beta(b_x) \neq \beta(b_y)$ y así sus preimágenes respectivas a'_x y a'_y bajo f' también son diferentes.

Notemos que $f(1_{\mathrm{A}}) = k_g \leq b_x, b_y$, por lo que $f'(\alpha(1_{\mathrm{A}})) = \beta(f(1_{\mathrm{A}})) \leq \beta(b_x), \beta(b_y)$, así $\alpha(1_{\mathrm{A}}) \leq a'_x, a'_y$ y por lo tanto

$$\delta(x) = a'_x \bigvee \alpha(1_{\mathrm{A}}) = a'_x \neq a'_y = a'_y \bigvee \alpha(1_{\mathrm{A}}) = \delta(y).$$

Se concluye que $\overline{\delta} = \delta| : k_\gamma/g(k_\beta) \longrightarrow \delta(k_\gamma)/\alpha(1_{\mathrm{A}})$ es un isomorfismo de retículas y δ es un morfismo lineal que hace a la sucesión de flechas rojas punteadas exacta. □

Los conjuntos con un elemento destacado son los objetos de una categoría a la que denotaremos como $Con_\circ$ cuyos morfismos entre dos elementos (X, x) y (Z, z) están dados por $Hom_{Con_\circ}((X, x), (Z, z)) = \{f : X \longrightarrow Z | f \text{ es función y } f(x) = z\}$. Esta categoría tiene objeto nulo y éste es el conjunto con un único elemento.

Teorema 1.26. *En la categoría de los conjuntos con un elemento destacado los monomorfismos son los morfismos inyectivos.*

Demostración. Si $f : (X,x) \longrightarrow (Z,z)$ no es inyectivo entonces existen dos elementos distintos $y, y' \in X$ tales que $f(y) = f(y') = w \in Z$. Si $y = x$ $(w = z)$, consideremos tanto a la inclusión como al morfismo cero $i, 0 : \{x, y'\} \longrightarrow X$, ambos son distintos. Sin embargo $f \circ i = f \circ 0$, por lo tanto f no sería un monomorfismo. Si $y \neq x \neq y'$ podemos considerar tanto a la inclusión como al morfismo $i, g : \{y, x, y'\} \longrightarrow X$ tal que $g(x) = x$, $g(y) = y'$ y $g(y') = y$. Se tiene que g es diferente de la inclusión pero las composiciones $f \circ g$ y $f \circ i$ coinciden.
Por último si f es un morfismo entre conjuntos con elemento destacado que es inyectivo, por ser una función inyectiva entre conjuntos tiene inversa izquierda, que también es morfismo en la categoría de conjuntos con elemento destacado, y por lo tanto es cancelable por la izquierda. □

Teorema 1.27. *Si (X,x) y (Z,z) son conjuntos con un elemento destacado y $f \in Hom_{Con_\circ}((X,x),(Z,z))$ el núcleo de f es la inclusión $(K_{(f)}, x) \xrightarrow{i} (X,x)$ donde $K_{(f)} = \{a \in X | f(a) = z\}$ y la imagen de f es la correstricción a su imagen como función.*

Demostración. Notemos que la inclusión $i : (K_{(f)}, x) \longrightarrow (X,x)$ cumple que $f \circ i$ es la constante z que es el morfismo cero, y si $g : (S,s) \longrightarrow (X,x)$ es un morfismo que cumple que $f \circ g$ es la constante z entonces $g(S) \subseteq K_{(f)}$ y por lo tanto la correstricción de g es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(K_{(f)}, x) \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& (X,x) \arrow[r, "f"] & (Z,z) \\
(S,s). \arrow[uu, dashed, "g\restriction"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado si nombramos $Im(f)$ a la imagen de f como función y consideramos la inclusión $i : (Im(f), z) \longrightarrow (Z,z)$ y la correstricción de f a su imagen se tiene que $f = i \circ f\restriction$, además si (I,a) es otro conjunto con un elemento destacado, $g : (I,a) \longrightarrow (Z,z)$ un monomorfismo y $h : (X,x) \longrightarrow (I,a)$ un morfismo tal que $g \circ h = f$ entonces si $y \in Im(f)$ existe un único $y' \in I$ tal que $g(y') = y$. Consideremos el morfismo $e : (Im(f), z) \longrightarrow (I,a)$ tal que $e(z) = a$, y además para cualquier otra $y \in Im(f)$ se tiene que $e(y) = y'$. Entonces e hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X,x) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f\restriction"] \arrow[ddr, "h"'] & & (Z,z) \\
& (Im(f), z) \arrow[ur, "i"] \arrow[d, dashed, "e"] & \\
& (I,a). \arrow[uur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Notemos que para dos retículas $L, M \in \mathcal{LM}$ los morfismos lineales entre ambas $Hom_{\mathcal{LM}}(L, M)$ constituyen un objeto dentro de la categoría de los conjuntos con un elemento destacado, y en este caso el elemento destacado es el morfismo lineal cero.

Teorema 1.28. *El funtor contravariante $Hom_{\mathcal{LM}}(\_, M)$ que va de la categoría $\mathcal{LM}$ a la categoría de los conjuntos con un elemento destacado es exacto izquierdo.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow a/0 \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\_\bigvee a} 1/a \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de morfismos lineales, probaremos que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/a, M) \xrightarrow{\_\circ(\_\bigvee a)} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, M) \xrightarrow{\_\circ i} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(a/0, M)$$

es exacta.
Primero veamos que el núcleo de $\_ \circ (\_ \bigvee a)$ es el morfismo lineal cero. Si $f : 1/a \longrightarrow M$ cumple que $f \circ (\_ \bigvee a) = 0$ entonces el núcleo de dicha composición es 1_L por lo que $f(1_L \bigvee a) = f(1_L) = 0$ y así $f = 0$.
Ahora veamos que el núcleo de $\_ \circ i$ es la imagen de $\_ \circ (\_ \bigvee a)$. Si $g \in Im(\_ \circ (\_ \bigvee a))$, $g = f \circ \_ \bigvee a$ para algún $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/a, M)$, dado que $(\_ \bigvee a) \circ i = 0$ se tiene que $(f \circ (\_ \bigvee a)) \circ i = g \circ i = 0$.
Por último si $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, M)$ cumple que $f \circ i = 0$, se tiene que $f(a) = 0_M$, dado que por [17, Proposición 1.3.-(2)] el núcleo k_f de f es el elemento mayor de L cuya imagen bajo f es 0_M, se tiene que $a \leqslant k_f$. Por lo tanto $f|_{1/a}$ es un morfismo lineal bien definido en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/a, M)$ cuya imagen bajo $\_ \circ (\_ \bigvee a)$ coincide con f por el Lema 1.9. □

Teorema 1.29. *El funtor $Hom_{\mathcal{LM}}(L, \_)$ que va de la categoría $\mathcal{LM}$ a la categoría de los conjuntos con un elemento destacado es exacto izquierdo.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow m/0 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\_\bigvee m} 1/m \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de morfismos lineales, probaremos que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{LM}}(L, m/0) \xrightarrow{i\circ\_} Hom_{\mathcal{LM}}(L, M) \xrightarrow{(\_\bigvee m)\circ\_} Hom_{\mathcal{LM}}(L, 1/m)$$

es exacta.
Si $f \in Hom_{\mathcal{LM}}(L, m/0)$ está en el núcleo de $i \circ \_$, entonces $i \circ f \in Hom_{\mathcal{LM}}(L, M)$ es el morfismo cero, por lo que $f(1_L) = (i \circ f)(1_L) = 0_M$ y por lo tanto $f = 0$.
Para todo morfismo lineal $f \in Hom_{\mathcal{LM}}(L, m/0)$, se tiene que $f(1) \leq m$, por lo que $(\_ \bigvee m) \circ f$ es el morfismo cero en $Hom_{\mathcal{LM}}(L, 1/m)$.
Por otro lado si $f \in Hom_{\mathcal{LM}}(L, M)$ cumple que $(\_ \bigvee m) \circ f$ es el morfismo cero en $Hom_{\mathcal{LM}}(L, 1/m)$, entonces $f(1_L) \bigvee m = m$, por lo que $f(1_L) \leq m$ y así la correstricción $f|^{m/0}$ es un morfismo lineal bien definido y una preimagen de f bajo $i \circ \_$. □

Definición 1.30. Diremos que dos monomorfismos lineales $f : L \longrightarrow T$ y $f' : L' \longrightarrow T$ son equivalentes si existe un isomorfismo de retículas $g : L \longrightarrow L'$ tal que $f' \circ g = f$.

Notemos que "ser equivalentes" es una relación de equivalencia entre morfismos lineales, la cual da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.31. Dada una retícula $L \in \mathcal{LM}$ se define un subobjeto de L como la clase de equivalencia de un monomorfismo lineal $i : T \longrightarrow L$

Definición 1.32. Un prerradical de retículas es un funtor $r : \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) $r(L)$ es un intervalo inicial de L.

(2) Para cualquier morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$ se tiene que $f(r(L)) \subseteq r(L')$ y $r(f) : r(L) \longrightarrow r(L')$ definida como la restricción y correstricción de f es un morfismo lineal.

Denotaremos como $\mathcal{L}_{pr}$ a la clase de todos los prerradicales en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

Teorema 1.33. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) r es un prerradical en $\mathcal{L}_{pr}$

(2) r es una asignación de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ que cumple:

(i) $r(L)$ es un intervalo inicial de L para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

(ii) Para todo morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$ se tiene que $f(r(L)) \subseteq r(L')$.

Demostración. La prueba se encuentra en [11, Lema 3.2.]. □

Si r es un prerradical en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ para cada retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ denotamos X_L^r al elemento de L que cumple que $r(L) = X_L^r/0$.

Definición 1.34. Diremos que un prerradical $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es idempotente si $r(r(L)) = r(L)$ para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, y que es un radical si para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que $r(1_L/X_L^r) = X_L^r/X_L^r$.

En [11] se prueba que $\mathcal{L}_{pr}$ es una gran retícula completa en la cual si $\mathcal{C}$ es una clase contenida en $\mathcal{L}_{pr}$ entonces el supremo e ínfimo de los prerradicales en dicha clase están dados como sigue:

$$(\bigvee_{r \in \mathcal{C}} r)(L) = (\bigvee_{r \in \mathcal{C}} X_L^r)/0_L \qquad (\bigwedge_{r \in \mathcal{C}} r)(L) = (\bigwedge_{r \in \mathcal{C}} X_L^r)/0_L.$$

Lema 1.35. *Para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ si r es un radical y $a \in L$ cumple que $a \leqslant X_L^r$ entonces $r(1_L/a) = X_L^r/a$.*

Demostración. Consideremos el morfismo lineal $f : L \longrightarrow 1_L/a$ dado por $f(x) = x \bigvee a$, si le aplicamos r obtenemos $f| : X_L^r/0 \longrightarrow r(1_L/a)$, de donde $X_L^r/a \subseteq X_{1_L/a}^r/a$ y por lo tanto $X_L^r \leqslant X_{1_L/a}^r$.
Por otro lado consideremos el morfismo lineal $g : 1_L/a \longrightarrow 1_L/X_L^r$ dado por $g(x) = x \bigvee X_L^r$, aplicándole r obtenemos $g| : X_{1_L/a}^r/a \longrightarrow X_L^r/X_L^r$ por lo que $X_{1_L/a}^r \bigvee X_L^r = X_L^r$. Por lo tanto $X_{1_L/a}^r = X_L^r$. □

Definición 1.36. Si L es una retícula en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ diremos que un elemento $e \in L$ es esencial en L si para todo elemento $x \in L$ se tiene que $e \bigwedge x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Definición 1.37. Si L es una retícula en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ diremos que un elemento $s \in L$ es superfluo en L si para todo elemento $x \in L$ se tiene que $s \bigvee x = 1 \Longleftrightarrow x = 1$.

Definición 1.38. Si L es una retícula en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ diremos que $C \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una extensión esencial de L, si L es un intervalo inicial de C, y 1_L es un elemento esencial de C.

Definición 1.39. Si L y C son retículas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ diremos que C es una cobertura superflua de L si, C contiene a L como intervalo final y 0_L es un elemento superfluo de C.

Definición 1.40. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ diremos que un subconjunto $\{a_i\}_{i\in I}$ es independiente si para toda $i \in I$ se tiene que $a_i \bigwedge (\bigvee\limits_{i\neq j, j\in I} a_j) = 0$.

Definición 1.41. Dada una familia de retículas $\{L_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ definiremos la suma directa de dicha familia como la retícula en el conjunto

$$\bigoplus_{i\in I} L_i = \{(x_i) \in \bigtimes_{i\in I} L_i \mid x_i = 0_{L_i} \text{ para casi toda } i \in I\} \cup \{(1_{L_i})\}$$

cuyo orden está dado por $(x_i) \leq (y_i)$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in I$.

Observación 1.42. Si $\{L_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $(x_i), (y_i) \in \bigoplus\limits_{i\in I} L_i$ entonces $(x_i) \bigvee (y_i) = (x_i \bigvee y_i)$ y $(x_i) \bigwedge (y_i) = (x_i \bigwedge y_i)$.

Teorema 1.43. *La suma directa de una familia de retículas modulares es modular.*

Demostración. Supongamos $\{L_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, si $\bigoplus\limits_{i\in I} L_i$ no fuera modular contendría una subretícula isomorfa al pentágono [5, Teorema 1.4], es decir tres elementos diferentes $(x_i), (y_i), (z_i)$ con $(y_i) < (z_i)$, donde (x_i) no es comparable con (y_i) ni con (z_i), y se cumplen las igualdades

$$(x_i) \bigvee (y_i) = (x_i) \bigvee (z_i) \qquad\qquad (x_i) \bigwedge (y_i) = (x_i) \bigwedge (z_i).$$

Sea $j \in I$ tal que $y_j < z_j$. Se tienen los siguientes tres casos:

Caso 1 (x_j no es comparable con z_j).
Si suponemos que $x_j > y_j$ entonces $x_j = x_j \bigvee y_j = x_j \bigvee z_j$ lo cual implicaría que $x_j > z_j$ pero los supusimos no comparables, y por la misma razón tampoco ocurre que $x_j \leq y_j$. Así x_j no es comparable con y_j, y como $x_j \bigvee y_j = x_j \bigvee z_j$ y $x_j \bigwedge y_j = x_j \bigwedge z_j$, tendríamos un pentágono en L_j que supusimos modular, lo cual sería una contradicción, entonces x_j debe ser comparable con z_j.

Caso 2 ($x_j < z_j$).
En este caso $x_j = x_j \bigwedge z_j = x_j \bigwedge y_j$, lo que implica que $x_j \leq y_j$, y así $y_j = x_j \bigvee y_j = x_j \bigvee z_j = z_j$ y por lo tanto $y_j = z_j$, que vuelve a ser una contradicción.

Caso 3 ($z_j \leq x_j$).
Tenemos que $y_j < z_j \leq x_j$, por lo que $y_j = x_j \bigwedge y_j = x_j \bigwedge z_j = z_j$ y por lo tanto $y_j = z_j$, que es

una contradicción.
Sin importar el caso llegamos a una contradicción que viene de suponer que $\bigoplus\limits_{i\in I} L_i$ no es modular. $\square$

Definición 1.44. En una categoría el producto directo de una familia de objetos $\{L_i\}_{i\in I}$, es otro objeto al que denotaremos como $\prod\limits_{i\in I} L_i$ junto con una familia de morfismos

$$\{\prod_{i\in I} L_i \xrightarrow{p_i} L_i\}_{i\in I}$$

a los que llamaremos proyecciones tales que, para cualquier otro objeto M y familia de morfismos $\{M \xrightarrow{f_i} L_i\}_{i\in I}$, existe un único morfismo $M \xrightarrow{f} \prod\limits_{i\in I} L_i$ que hace los siguientes diagramas conmutativos para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod\limits_{i\in I} L_i \arrow[d, "p_i"] \\
& L_i.
\end{tikzcd}$$

Diremos que una categoría tiene productos directos si cualquier familia de objetos tiene producto directo.

El siguiente ejemplo muestra que la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ no tiene productos directos.

Ejemplo 1.45. Consideremos a la familia $\{S_1, S_2\}$ con S_1 y S_2 dos copias isomorfas de la retícula simple con dos elementos, y nombremos L a la siguiente retícula:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
& 1 & \\
a \arrow[ur] & c \arrow[u] & b \arrow[ul] \\
& 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Sea f el morfismo lineal inducido por el isomorfismo $\overline{f} : 1/a \longrightarrow S_1$ y g el morfismo lineal inducido por el isomorfismo $\overline{g} : 1/b \longrightarrow S_2$. Supongamos que existe el producto directo P en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ de S_1 con S_2. Entonces existe un morfismo lineal $L \xrightarrow{h} P$ tal que $f = p_1 \circ h$ y $g = p_2 \circ h$ donde p_1 y p_2 son las proyecciones de P a S_1 y S_2 respectivamente.
Veremos que h es un monomorfismo lineal.
Notemos que $k_h \neq 1$ pues $1 = f(1) = (p_1 \circ h)(1)$, además si $k_h = a$, entonces $h(b) = h(b \bigvee a) = h(1)$ y

$$0 = g(b) = (p_2 \circ h)(b) = (p_2 \circ h)(1) = g(1) = 1,$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto $k_h \neq a$; análogamente $k_h \neq b$. Por último si $k_h = c$, entonces $h(b) = h(b \bigvee c) = h(1)$ y

$$0 = g(b) = (p_2 \circ h)(b) = (p_2 \circ h)(1) = g(1) = 1,$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto $k_h \neq c$. Así $k_h = 0$ y h es un monomorfismo lineal, por lo que P tiene un intervalo inicial isomorfo a L.
Para terminar notemos que si sustituimos el elemento c de L por el conjunto que queramos cuyos elementos son átomos y coátomos de L, no comparables entre sí, ni con a y b, la prueba de que h es un monomorfismo lineal es análoga. Por lo tanto no existe el producto directo de S_1 con S_2 en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

Definición 1.46. En una categoría, el coproducto de una familia de objetos $\{L_i\}_{i\in I}$, es otro objeto al que denotaremos como $\bigoplus\limits_{i\in I} L_i$ junto con una familia de morfismos

$$\{L_i \xrightarrow{\iota_i} \bigoplus_{i\in I} L_i\}_{i\in I}$$

a los que llamaremos inclusiones tales que para cualquier otro objeto M y familia de morfismos $\{L_i \xrightarrow{f_i} M\}_{i\in I}$, existe un único morfismo $\bigoplus\limits_{i\in I} L_i \xrightarrow{f} M$ que hace los siguientes diagramas conmutativos para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{i\in I} L_i \arrow[r, "f"] & M \\
L_i. \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[ur, "f_i"] &
\end{tikzcd}$$

Diremos que una categoría tiene coproductos si cualquier familia de objetos tiene coproducto.

El siguiente ejemplo muestra que la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ no tiene coproductos.

Ejemplo 1.47. Consideremos a la familia $\{S_1, S_2\}$ con S_1 y S_2 dos copias isomorfas de la retícula simple con dos elementos, y nombremos L a la siguiente retícula:

$$\begin{tikzcd}
& 1 & \\
a \arrow[ur, dash] & c \arrow[u, dash] & b \arrow[ul, dash] \\
& 0 \arrow[ul, dash] \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Sean $S_1 \xrightarrow{f_1} L$ y $S_2 \xrightarrow{f_2} L$ los monomorfismos lineales dados por

$$f_1(0) = 0 = f_2(0), \qquad f_1(1) = a, \qquad f_2(1) = b.$$

Supongamos que existe el coproducto $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ de S_1 con S_2, entonces existe un único morfismo lineal $\mathcal{C} \xrightarrow{f} L$ tal que $f \circ \iota_1 = f_1$ y $f \circ \iota_2 = f_2$.
Veremos que f es un epimorfismo lineal.
$f(1) > 0$ pues $f(1) \geq f \circ \iota_1(1) = f_1(1) = a$, además si $f(1) = a$, entonces $b = f_2(1) = f \circ \iota_2(1) \leq f(1) = a$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $f(1) \neq a$. Por la misma razón $f(1) \neq c$ y análogamente se puede probar que $f(1) \neq b$, así que f es un epimorfismo lineal, lo cual

implica que $\mathcal{C}$ tiene un intervalo final isomorfo a L.
Por último notemos que en la retícula L pudimos sustituir al elemento c por un conjunto arbitrariamente grande de átomos que también son coátomos, no comparables entre sí, ni con a y b en L, entonces el coproducto $\mathcal{C}$ de S_1 con S_2 no existe.

Definición 1.48. Sea una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, diremos que un subconjunto $C \subseteq L$ es dirigido superiormente (dirigido inferiormente) si para cualquier par de elementos $x, y \in C$ existe $z \in C$ tal que $x, y \leq z$ ($z \leq x, y$).

Definición 1.49. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es continua superiormente (continua inferiormente) si para todo subconjunto $C \subseteq L$ dirigido superiormente (dirigido inferiormente) y todo elemento $x \in L$ se tiene que

$$x \bigwedge \big(\bigvee_{c \in C} c \big) = \bigvee_{c \in C} x \bigwedge c \qquad\qquad \big(x \bigvee \big(\bigwedge_{c \in C} c \big) = \bigwedge_{c \in C} x \bigvee c\big).$$

Diremos que L es continua si es continua superiormente y continua inferiormente.

2 Prerradicales y teorías de torsión en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$

2.1 Sobre clases abiertas, y biyecciones entre clases de prerradicales y clases de pretorsión.

Definición 2.1. Diremos que una clase $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es de pretorsión si cumple las siguientes condiciones:

(0) $\mathbb{T}$ es cerrada bajo isomorfismos.

(1) Para toda retícula $L \in \mathbb{T}$ se tiene que $1_L/a \in \mathbb{T}$ para todo $a \in L$, i.e. $\mathbb{T}$ es cerrada bajo intervalos finales.

(2) Para toda retícula L, dado un conjunto de elementos $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq L$ tal que $\{x_i/0\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{T}$, se tiene que $\bigvee_{i \in I} x_i/0 \in \mathbb{T}$.

Observación 2.2. Las clases de pretorsión en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se pueden ordenar por inclusión y forman una gran retícula completa en la cual si $\{\mathbb{T}_i\}_{i \in I}$ es una familia de clases de pretorsión contenidas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ el ínfimo está dado por:

$$\bigwedge_{i \in I} \mathbb{T}_i = \bigcap_{i \in I} \mathbb{T}_i$$

y el supremo de la familia es el ínfimo de todas las clases de pretorsión que contienen a toda la familia.

Proposición 2.3. *Para cualquier prerradical $r \in \mathcal{L}_{pr}$ la clase*

$$\mathbb{T}_{(r)} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | r(L) = L\}$$

es una clase de pretorsión.

Demostración. Veamos que $\mathbb{T}_{(r)}$ es cerrada bajo isomorfismos.

Sea $L \in \mathbb{T}_{(r)}$ y $L \xrightarrow{f} L'$ un isomorfismo de retículas. Como r es un prerradical $f(L) = L' \subseteq r(L') \subseteq L'$, por lo que $L' \in \mathbb{T}_{(r)}$.

Veamos que $\mathbb{T}_{(r)}$ es cerrada bajo intervalos finales.

Supongamos que una retícula $L \in \mathbb{T}_{(r)}$ y que $a \in L$. Consideremos el morfismo lineal $L \xrightarrow{f} 1_L/a$ dado por $f(x) = x \bigvee a$. Como r es un prerradical de retículas $f(L) = 1_L/a \subseteq r(1_L/a)$ y por lo tanto $1_L/a \in \mathbb{T}_{(r)}$ que es cerrado bajo intervalos finales.

Veamos que $\mathbb{T}_{(r)}$ es cerrada bajo supremos de intervalos iniciales.

Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq L$ tal que $\{x_i/0\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{T}_{(r)}$. Para ver que $\bigvee_{i\in I} x_i/0 \in \mathbb{T}_{(r)}$ consideremos para cada $i \in I$ el morfismo lineal dado por la inclusión $x_i/0 \longrightarrow \bigvee_{i\in I} x_i/0$, aplicándole r obtenemos $x_i/0 \longrightarrow r(\bigvee_{i\in I} x_i/0)$. De donde $x_i \leqslant X^r_{\bigvee_{i\in I} x_i/0}$ para toda $i \in I$ y por lo tanto $\bigvee_{i\in I} x_i \leqslant X^r_{\bigvee_{i\in I} x_i/0} \leqslant \bigvee_{i\in I} x_i$, así $\bigvee_{i\in I} x_i/0 \in \mathbb{T}_{(r)}$. □

Lema 2.4. *Si $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión y $f : L \longrightarrow L'$ un morfismo lineal, entonces para todo $x \in L$ tal que $x/0_L \in \mathbb{T}$, se tiene que $f(x)/0_{L'} \in \mathbb{T}$.*

Demostración. Consideremos la composición de morfismos lineales $x/0_L \xrightarrow{i} L \xrightarrow{f} L'$, si su núcleo es k, entonces

$$x/k \cong (f \circ i)(x)/0_{L'} = f(x)/0_{L'}.$$

Como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo intervalos finales e isomorfismos se tiene el resultado. □

Proposición 2.5. *Si $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión, y para cada retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ definimos $\mathbb{T}_L = \{x \in L | x/0 \in \mathbb{T}\}$ y $r_{(\mathbb{T})} : \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ como $r_{(\mathbb{T})}(L) = \bigvee_{x\in\mathbb{T}_L} x/0$, entonces $r_{(\mathbb{T})}$ es un prerradical de retículas idempotente.*

Demostración. Para cada retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ $r_{(\mathbb{T})}(L)$ es un intervalo inicial de L. Luego por el Lema 2.4 , para todo morfismo lineal $L \xrightarrow{f} L'$ con $L' \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $\bigvee_{x\in\mathbb{T}_L} f(x) \leqslant \bigvee_{x\in\mathbb{T}_{L'}} x$.

Dicho esto y utilizando el hecho de que los morfismos lineales conmutan con supremos arbitrarios [15, Lema 0.6.] tenemos que:

$$f(r_{(\mathbb{T})}(L)) = f(\bigvee_{x\in\mathbb{T}_L} x/0) = f(\bigvee_{x\in\mathbb{T}_L} x)/0 = \bigvee_{x\in\mathbb{T}_L} f(x)/0 \subseteq \bigvee_{x\in\mathbb{T}_{L'}} x/0 = r_{(\mathbb{T})}(L').$$

Por el Teorema 1.33 $r_{(\mathbb{T})}$ es un prerradical de retículas.

Recordando que $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión y que para toda $x \in \mathbb{T}_L$ se tiene que $x/0 \in \mathbb{T}$ entonces $\bigvee_{x\in\mathbb{T}_L} x/0 \in \mathbb{T}$, así para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $r_{(\mathbb{T})}(L) \in \mathbb{T}$ y por lo tanto $r_{(\mathbb{T})}$ es idempotente.

□

Teorema 2.6. *La gran retícula de clases de pretorsión en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es isomorfa a la retícula de prerradicales idempotentes en $\mathcal{L}_{pr}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.3 podemos asignar a cada prerradical r una clase de pretorsión $\mathbb{T}_{(r)}$, nombremos $\mathbb{T}_{(\_)}$ a dicha asignación restringiendo su dominio a los prerradicales idempotentes, y su codominio las clases de pretorsión.
Nombremos $r_{(\_)}$ a la asignación que tiene como dominio a las clases de pretorsión, y como codominio a los prerradicales de retículas idempotentes descrita en la Proposición 2.5.
Veamos que $\mathbb{T}_{(\_)}$ y $r_{(\_)}$ son inversas una de la otra.
Sea $s \in \mathcal{L}_{pr}$ idempotente.

$$(r_{(\_)} \circ \mathbb{T}_{(\_)}(s))(L) = r_{(\mathbb{T}_{(s)})}(L) = \bigvee_{x \in \mathbb{T}_{(s)L}} x/0;$$

como s es idempotente $X_L^s \in \mathbb{T}_{(s)L}$, de donde

$$s(L) = X_L^s/0 \leqslant \Big(\bigvee_{x \in \mathbb{T}_{(s)L}} x\Big)/0 = r_{(\mathbb{T}_{(s)})}(L).$$

Por otro lado, por la Definición 2.1 $\bigvee\limits_{x \in \mathbb{T}_{(s)L}} x \in \mathbb{T}_{(s)L}$, entonces $s(r_{(\mathbb{T}_{(s)})}(L)) = r_{(\mathbb{T}_{(s)})}(L) \in \mathbb{T}_{(s)}$. Así si consideramos la inclusión $r_{(\mathbb{T}_{(s)})}(L) \longrightarrow L$ y le aplicamos s obtenemos que $r_{(\mathbb{T}_{(s)})}(L) \leqslant s(L)$, y por lo tanto $r_{(\_)} \circ \mathbb{T}_{(\_)}(s) = s$.
Ahora supongamos que $\mathbb{F}$ es una clase de pretorsión. Tenemos que

$$L \in \mathbb{F} \Longleftrightarrow r_{(\mathbb{F})}(L) = L \Longleftrightarrow L \in \mathbb{T}_{(r_{(\mathbb{F})})} = \mathbb{T}_{(\_)} \circ r_{(\_)}(\mathbb{F}).$$

Por último veamos que $\mathbb{T}_{(\_)}$ preserva el orden pues si r y r' son prerradicales de retículas idempotentes tales que $r \leqslant r'$ y $L \in \mathbb{T}_{(r)}$ entonces $L = r(L) \leqslant r'(L) \leqslant L$, de donde $L \in \mathbb{T}_{(r')}$ y por lo tanto $\mathbb{T}_{(\_)}(r) \leqslant \mathbb{T}_{(\_)}(r')$.
Como $\mathbb{T}_{(\_)}$ es un isomorfismo de orden por [14, III Prop 1.1.] $\mathbb{T}_{(\_)}$ es un isomorfismo de retículas. $\square$

La clase de prerradicales idempotentes contenida en $\mathcal{L}_{pr}$ no es una subretícula de $\mathcal{L}_{pr}$ como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. Consideremos las siguientes dos clases de retículas contenidas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$:

$$\mathbb{A} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | \text{ todo intervalo final no nulo de } L \text{ tiene un átomo }\}$$
$$\mathbb{B} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | L \text{ no tiene coátomos }\}.$$

$\mathbb{A}$ es una clase de pretorsión pues es cerrada bajo isomorfismos y si $L \in \mathbb{A}$ y $1/x$ es un intervalo final de L, todo intervalo final de $1/x$ es también un intervalo final de L y por lo tanto tiene un átomo. Así $\mathbb{A}$ cumple las condiciones (0) y (1) de la Definición 2.1.
Probemos que $\mathbb{A}$ cumple la condición (2).
Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $\{x_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de L tal que $x_i/0 \in \mathbb{A}$ para toda $i \in I$ y $x \in L$ cumple que $x < \bigvee\limits_{i \in I} x_i$. Veamos que $(\bigvee\limits_{i \in I} x_i)/x$ tiene un átomo.
Notemos que existe $j \in I$ tal que $x_j \nleq x$, si $x < x_j$ entonces el intervalo x_j/x tendría un átomo, y por lo tanto también el intervalo $(\bigvee\limits_{i \in I} x_i)/x$. Si $x \nleq x_j$, entonces debido a que L es modular $x_j/(x \bigwedge x_j) \cong (x \bigvee x_j)/x$, luego como $x_j/(x \bigwedge x_j)$ tiene un átomo, $(x \bigvee x_j)/x$ tiene un átomo y por lo tanto también $(\bigvee\limits_{i \in I} x_i)/x$.

$\mathbb{B}$ es una clase de pretorsión pues es cerrada bajo isomorfismos y si $L \in \mathbb{B}$ y $1/x$ es un intervalo final de L, $1/x$ no tiene coátomos pues serían también coátomos de L. Así $\mathbb{B}$ cumple las condiciones (0) y (1) de la Definición 2.1.
Probemos que $\mathbb{B}$ cumple la condición (2).
Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $\{x_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de L tal que $x_i/0 \in \mathbb{B}$ para toda $i \in I$ y supongamos que $x \in L$ es un coátomo de $(\bigvee\limits_{i\in I} x_i)/0$. Entonces existe $j \in I$ tal que $x_j \not\leq x$, además si $x < x_j$ entonces x es un coátomo de $x_j/0$, lo cual es una contradicción, entonces x y x_j no son comparables. Por modularidad $x_j/(x \bigwedge x_j) \cong (x \bigvee x_j)/x \cong (\bigvee\limits_{i\in I} x_i)/x$, lo cual es una contradicción pues $x_j/0$ no tiene coátomos.
Veremos que el ínfimo de los prerradicales idempotentes $r_{\mathbb{A}} \bigwedge r_{\mathbb{B}}$ no es un prerradical idempotente. Para esto consideremos a la retícula $L = \{0,3\} \cup [1,2] \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ con el orden inducido por los reales, se tiene lo siguiente:

$$(r_{(\mathbb{A})} \bigwedge r_{(\mathbb{B})})(L) = (X_L^{r(\mathbb{A})} \bigwedge X_L^{r(\mathbb{B})})/0 = (1 \bigwedge 2)/0 = 1/0 = \{0,1\}.$$

Volviendo a aplicar $r_{(\mathbb{A})} \bigwedge r_{(\mathbb{B})}$ se obtiene:

$$(r_{(\mathbb{A})} \bigwedge r_{(\mathbb{B})})((r_{(\mathbb{A})} \bigwedge r_{(\mathbb{B})})(L)) = (r_{(\mathbb{A})} \bigwedge r_{(\mathbb{B})})(\{0,1\}) = (X_{\{0,1\}}^{r(\mathbb{A})} \bigwedge X_{\{0,1\}}^{r(\mathbb{B})})/0 = (1 \bigwedge 0)/0 = 0/0 = \{0\}.$$

Sin embargo la clase de prerradicales idempotentes contenida en $\mathcal{L}_{pr}$ si forma una gran retícula completa como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Si $\{I_j\}_{j\in J}$ es una familia de prerradicales idempotentes contenida en $\mathcal{L}_{pr}$ entonces $\bigvee\limits_{j\in J} I_j$ es idempotente.*

Demostración. Para cada retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ e $i \in J$, aplicando el prerradical I_i a la inclusión $X_L^{I_i}/0 \longrightarrow (\bigvee\limits_{j\in J} X_L^{I_j})/0$, dado que I_i es idempotente obtenemos la inclusión:

$$X_L^{I_i}/0 \longrightarrow I_i((\bigvee_{j\in J})X_L^{I_j})/0)$$

por lo que $X_L^{I_i} \leq X^{I_i}_{(\bigvee\limits_{j\in J})X_L^{I_j})/0}$ para toda $i \in I$ y así

$$\bigvee_{j\in J} X_L^{I_j} \leq \bigvee_{j\in J} X^{I_j}_{(\bigvee\limits_{j\in J} X_L^{I_j})/0} = X_L^{(\bigvee\limits_{j\in J} I_j)\circ(\bigvee\limits_{j\in J} I_j)} \leq X_L^{\bigvee\limits_{j\in J} I_j} = \bigvee_{j\in J} X_L^{I_j}.$$

Por lo tanto $\bigvee\limits_{j\in J} I_j$ es idempotente. El hecho de que la clase de prerradicales idempotentes contenida en $\mathcal{L}_{pr}$ forma una gran retícula completa se debe a [14, III Prop 1.2.]. $\square$

Teorema 2.9. *Para todo prerradical de retículas $r \in \mathcal{L}_{pr}$, existe un prerradical $\widehat{r} \in \mathcal{L}_{pr}$ que cumple ser el mayor prerradical idempotente menor o igual que r.*

Demostración. Definimos $\widehat{r}$ como el prerradical idempotente correspondiente a $\mathbb{T}_{(r)}$ bajo el Teorema 2.6, es decir, si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $\widehat{r}(L) = \Big(\bigvee\limits_{\{x\in L | x/0 \in \mathbb{T}_{(r)}\}} x\Big)/0$. Como $\mathbb{T}_{(r)}$ es una clase de pretorsión

se tiene que $\widehat{r}(L) \in \mathbb{T}_{(r)}$. Así si consideramos la inclusión $\widehat{r}(L) \longrightarrow L$ y le aplicamos r obtenemos $\widehat{r}(L) \longrightarrow r(L)$, lo cual implica que $X_L^{\widehat{r}} \leqslant X_L^r$ y $\widehat{r} \leqslant r$.
Por otro lado si suponemos que $t \in \mathcal{L}_{pr}$ es idempotente y $t \leqslant r$ entonces para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $\{x \in L | t(x/0) = x/0\} \subseteq \{x \in L | x/0 \in \mathbb{T}_{(r)}\}$ por lo tanto

$$t(L) = \Big(\bigvee_{\{x \in L | t(x/0) = x/0\}} x\Big)/0 \subseteq \Big(\bigvee_{\{x \in L | x/0 \in \mathbb{T}_{(r)}\}} x\Big)/0 = \widehat{r}(L).$$

□

Observación 2.10. Dado un prerradical $r \in \mathcal{L}_{pr}$ el prerradical $\widehat{r}$ coincide con el supremo en $\mathcal{L}_{pr}$ de los prerradicales idempotentes menores o iguales que r, que es idempotente por el Teorema 2.8.

Definición 2.11. Diremos que una clase $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es libre de pretorsión si cumple las siguientes condiciones:

(0) $\mathbb{F}$ es cerrada bajo isomorfismos.

(1) Para toda retícula $L \in \mathbb{F}$ y elemento $x \in L$ se tiene que $x/0_L \in \mathbb{F}$.

(2) Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, dado un conjunto $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq L$ tal que $\{1/x_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{F}$, se tiene que $1_L/\bigwedge_{i \in I} x_i \in \mathbb{F}$.

Observación 2.12. $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una clase libre de pretorsión si y sólo si $\mathbb{F}^{op} = \{L^{op} | L \in \mathbb{F}\}$ es una clase de pretorsión.

Observación 2.13. El conglomerado de todas las clases libres de pretorsión en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ define una gran retícula donde el ínfimo está dado por la intersección de clases. Del mismo modo, la clase de todos los radicales en $\mathcal{L}_{pr}$ define una gran retícula; donde el ínfimo de una familia de radicales es su ínfimo como prerradicales en $\mathcal{L}_{pr}$.

Proposición 2.14. *Si r es un prerradical en $\mathcal{L}_{pr}$ entonces $\mathbb{F}_{(r)} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | r(L) = 0\}$ es una clase libre de pretorsión.*

Demostración. Si $L \in \mathbb{F}_{(r)}$ y $L' \longrightarrow L$ es un isomorfismo lineal, al aplicarle r obtenemos el morfismo lineal $r(L') \longrightarrow 0$, por lo que $r(L') = 0$, y $L' \in \mathbb{F}_{(r)}$ que cumple la condición (0).
Si $r(L) = 0$ y $x/0$ es un intervalo inicial de L, consideremos a la inclusión $i : x/0 \longrightarrow L$, si le aplicamos r obtenemos $i| : r(x/0) \longrightarrow 0$, por lo que $r(x/0) = 0$ y $\mathbb{F}_{(r)}$ cumple la condición (1).
Supongamos que $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y tiene una familia de intervalos finales $\{1/x_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{F}_{(r)}$ y consideremos para cada $j \in I$ el epimorfismo lineal $f_j : 1/\bigwedge_{i \in I} x_i \longrightarrow 1/x_j$ dado por $f_j(y) = y \bigvee x_j$, aplicándole r obtenemos $f_j| : r(1/\bigwedge_{i \in I} x_i) \longrightarrow x_j/x_j$, de donde $X^r_{1/\bigwedge_{i \in I} x_i} \leqslant x_j$ para toda $j \in I$ y por lo tanto $r(1/\bigwedge_{i \in I} x_i) = \big(\bigwedge_{i \in I} x_i\big)/\big(\bigwedge_{i \in I} x_i\big)$ y $1/\bigwedge_{i \in I} x_i \in \mathbb{F}_{(r)}$ que cumple la condición (3).

□

Proposición 2.15. *Si $\mathbb{F}$ es una clase libre de pretorsión y para cada retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ definimos $\mathbb{F}_L = \{x \in L | 1/x \in \mathbb{F}\}$, entonces la función $r_{(\mathbb{F})} : \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ dada por*

$$r_{(\mathbb{F})}(L) = (\bigwedge_{x \in \mathbb{F}_L} x)/0$$

es un radical.

Demostración. Para ver que $r_{(\mathbb{F})}$ es un prerradical notemos que le asigna a cada retícula un intervalo inicial, además si $f : L \longrightarrow L'$ es un morfismo lineal y $x' \in \mathbb{F}_{L'}$ podemos considerar la composición de morfismos lineales $L \xrightarrow{f} L' \xrightarrow{\_\bigvee x'} 1/x'$ de la cual obtenemos lo siguiente:

$$(f(1_L) \bigvee x')/x' \cong 1/k_{(\_\bigvee x')\circ f}.$$

Luego como $\mathbb{F}$ es cerrado bajo intervalos iniciales $(f(1_L)\bigvee x')/x' \in \mathbb{F}$ y al ser cerrado bajo isomorfismos $1/k_{(\_\bigvee x')\circ f} \in \mathbb{F}$. Así se tiene que $X_L^{r(\mathbb{F})} \leq k_{(\_\bigvee x')\circ f}$, de donde

$$f(X_L^{r(\mathbb{F})}) \leq f(k_{(\_\bigvee x')\circ f}) \leq x'.$$

Como x' era un elemento cualquiera en $\mathbb{F}_{L'}$, entonces $f(X_L^{r(\mathbb{F})}) \leq \bigwedge_{x \in \mathbb{F}_{L'}} x = X_{L'}^{r(\mathbb{F})}$ y por el Teorema 1.33 $r_{(\mathbb{F})}$ es un prerradical.
Veamos que $r_{(\mathbb{F})}$ es un radical.
Para cualquier retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $X_L^{r(\mathbb{F})} = \bigwedge_{x \in \mathbb{F}_L} x$, y como $\mathbb{F}$ es una clase libre de pretorsión $1/X_L^{r(\mathbb{F})} = 1/\Big(\bigwedge_{x \in \mathbb{F}_L} x\Big) \in \mathbb{F}$, por lo que $r_{(\mathbb{F})}(1/X_L^{r(\mathbb{F})}) = X_L^{r(\mathbb{F})}/X_L^{r(\mathbb{F})}$ □

Teorema 2.16. *La gran retícula de las clases libres de pretorsión es antiisomorfa a la gran retícula de radicales en $\mathcal{L}_{pr}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.14, hay una asignación $\mathbb{F}_{(\_)}$ que va de la gran retícula de los radicales en $\mathcal{L}_{pr}$ a la de las clases libres de pretorsión dada por

$$\mathbb{F}_{(\_)}(r) = \mathbb{F}_{(r)} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | r(L) = 0\}.$$

Por la Proposición 2.15, hay una asignación $r_{(\_)}$ que va de la gran retícula de las clases libres de pretorsión a la de los radicales en $\mathcal{L}_{pr}$ dada por $r_{(\_)}(\mathbb{F}) = r_{(\mathbb{F})}$ con

$$r_{(\mathbb{F})}(L) = \bigwedge_{x \in \mathbb{F}_L} x/0.$$

Veamos ahora que $\mathbb{F}_{(\_)}$ y $r_{(\_)}$ son inversas una de la otra.
Sea s un radical en $\mathcal{L}_{pr}$, entonces $(r_{(\_)} \circ \mathbb{F}_{(\_)})(s) = r_{(\mathbb{F}_{(s)})}$.
Sea L una retícula en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, si $y \in r_{(\mathbb{F}_{(s)})}(L)$, entonces $y \leqslant \bigwedge_{\{x \in L | s(1/x)=0\}} x$, por lo que $y \leqslant X_L^s$ y por lo tanto $y \in s(L)$.
Por otro lado si $y \in s(L)$ y x es un elemento de L que cumple que $s(1/x) = 0$ al considerar el morfismo lineal $f : L \longrightarrow 1/x$ dado por $f(z) = z \bigvee x$ y aplicarle s obtenemos $f| : s(L) \longrightarrow x/x$, de donde $y \leqslant X_L^s \leq x$, por lo tanto $y \in r_{(\mathbb{F}_{(s)})}(L)$ y $(r_{(\_)} \circ \mathbb{F}_{(\_)})(s) = s$.
Si $\mathbb{T}$ es una clase libre de pretorsión tenemos que

$$(\mathbb{F}_{(\_)} \circ r_{(\_)})(\mathbb{T}) = \mathbb{F}_{(r_{(\mathbb{T})})} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | r_{(\mathbb{T})}(L) = 0\} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | \bigwedge_{x \in \mathbb{T}_L} x = 0\} = \mathbb{T}.$$

Por lo tanto $(\mathbb{F}_{(\_)} \circ r_{(\_)})(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.
Tenemos que $r_{(\_)}$ es una biyección, veamos que invierte el orden.
Si $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ entonces para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $\mathbb{F}_L \subseteq \mathbb{F}'_L$ por lo que $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{F}_L} x \geqslant \bigwedge\limits_{x\in\mathbb{F}'_L} x$ y por lo tanto $r_{(\mathbb{F}')} \leqslant r_{(\mathbb{F})}$ □

Ejemplo 2.17. Consideremos las clases

$$\mathbb{A} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | \text{ Todo intervalo inicial no nulo de } L \text{ tiene un coátomo } \}$$
$$\mathbb{B} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | L \text{ no tiene átomos } \}.$$

Por el Ejemplo 2.7 $\mathbb{A}^{op}$ y $\mathbb{B}^{op}$ son clases de pretorsión, y por la Observación 2.12 $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son clases libres de pretorsión. Sean $r_{\mathbb{A}}$ y $r_{\mathbb{B}}$ los radicales correspondientes a dichas clases. Consideremos a la retícula $L = \{0,3\} \cup [1,2] \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ con el orden inducido por los reales, se tiene lo siguiente:

$$(r_{\mathbb{A}} \bigvee r_{\mathbb{B}})(L) = (X_L^{r_{\mathbb{A}}} \bigvee X_L^{r_{\mathbb{B}}})/0 = (2 \bigvee 1)/0 = 2/0.$$

Sin embargo $(r_{\mathbb{A}} \bigvee r_{\mathbb{B}})(3/2) = 3/2$, por lo que $r_{\mathbb{A}} \bigvee r_{\mathbb{B}}$ no es un radical, y la clase de los radicales en $\mathcal{L}_{pr}$ no es una subretícula de $\mathcal{L}_{pr}$.

Observación 2.18. La clase de radicales en $\mathcal{L}_{pr}$ es una gran retícula completa pues probaremos que ínfimos arbitrarios de radicales también son radicales.

Demostración. Sean $\{r_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}_{pr}$ una familia de radicales y $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Para cada $j \in I$ consideremos el morfismo lineal

$$1/\bigwedge_{i\in I} X_L^{r_i} \xrightarrow{\ \_\bigvee X_L^{r_j}\ } 1/X_L^{r_j}$$

Aplicándole r_j obtenemos

$$r_j\Big(1/\bigwedge_{i\in I} X_L^{r_i}\Big) \xrightarrow{\ \_\bigvee X_L^{r_j}\ } X_L^{r_j}/X_L^{r_j}$$

por lo que $X^{r_j}_{1/\bigwedge_{i\in I} X_L^{r_i}} \leq X_L^{r_j}$ para toda $j \in I$, entonces

$$\bigwedge_{i\in I} X_L^{r_i} \leq X^{\bigwedge_{i\in I} r_i}_{1/\bigwedge_{i\in I} X_L^{r_i}} = \bigwedge_{i\in I} X^{r_i}_{1/\bigwedge_{i\in I} X_L^{r_i}} \leq \bigwedge_{i\in I} X_L^{r_i}$$

y por lo tanto $\bigwedge\limits_{i\in I} r_i$ es un radical. □

Teorema 2.19. *Para todo prerradical $r \in \mathcal{L}_{pr}$ existe un radical $\overline{r} \in \mathcal{L}_{pr}$ que cumple ser el menor radical mayor o igual que r.*

Demostración. Definimos $\overline{r}$ como el radical correspondiente a $\mathbb{F}_{(r)}$ bajo el Teorema 2.16, es decir, si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $\overline{r}(L) = \Big(\bigwedge\limits_{\{x\in L|r(1/x)=0\}} x\Big)/0$, como $\mathbb{F}_{(r)}$ es una clase libre de pretorsión se tiene que $r(1/X_L^{\overline{r}}) = 0$. Consideremos el morfismo lineal $f : L \longrightarrow 1/X_L^{\overline{r}}$ dado por $f(y) = y \bigvee X_L^{\overline{r}}$, aplicándole r obtenemos $f| : r(L) \longrightarrow X_L^{\overline{r}}/X_L^{\overline{r}}$ por lo que $X_L^{\overline{r}} \bigvee X_L^{r} = X_L^{\overline{r}}$ y así $r(L) \leqslant \overline{r}(L)$.
Por otro lado si t es un radical tal que $r \leqslant t$ entonces para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $\{x \in L | t(1/x) = 0\} \subseteq \{x \in L | r(1/x) = 0\}$ y por lo tanto

$$\overline{r}(L) = \Big(\bigwedge_{\{x\in L|r(1/x)=0\}} x\Big)/0 \subseteq \Big(\bigwedge_{\{x\in L|t(1/x)=0\}} x\Big)/0 = t(L).$$

□

Observación 2.20. Dado un prerradical $r \in \mathcal{L}_{pr}$, el radical $\overline{r}$ coincide con el ínfimo en $\mathcal{L}_{pr}$ de todos los radicales mayores o iguales que r, que vuelve a ser un radical por la Observación 2.18.

Teorema 2.21. *Sea $r \in \mathcal{L}_{pr}$:*

(i) Si r es un radical entonces $\widehat{r}$ también lo es.

(ii) Si r es idempotente entonces $\overline{r}$ también lo es.

Demostración. (i) Queremos ver que para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $\widehat{r}(1_L/X_L^{\widehat{r}}) = 0$, pero como $\widehat{r}$ es el prerradical idempotente correspondiente a $\mathbb{T}_{(r)}$, basta probar que $1_L/X_L^{\widehat{r}}$ no tiene intervalos iniciales no nulos en $\mathbb{T}_{(r)}$.
Si $y/X_L^{\widehat{r}}$ es un intervalo inicial de $1_L/X_L^{\widehat{r}}$ en $\mathbb{T}_{(r)}$ y consideramos la inclusión $X_L^{\widehat{r}}/0 \longrightarrow y/0$, al aplicar r obtenemos la restricción de la inclusión $X_L^{\widehat{r}}/0 \longrightarrow r(y/0)$ de donde $X_L^{\widehat{r}} \leqslant X_{y/0}^r$.
Utilizando la desigualdad anterior, el hecho de que r es un radical y el Lema 1.35, tenemos que $r(y/X_L^{\widehat{r}}) = X_{y/0}^r/X_L^{\widehat{r}}$ por lo que $y = X_{y/0}^r$, de donde $y/0 \in \mathbb{T}_{(r)}$ y así $y \leqslant X_L^{\widehat{r}}$. Por lo tanto $y/X_L^{\widehat{r}} = 0$.
(ii) Queremos ver que $\overline{r}(X_L^{\overline{r}}/0) = X_L^{\overline{r}}/0$, pero como $\overline{r}$ es el radical correspondiente a $\mathbb{F}_{(r)}$, basta probar que $X_L^{\overline{r}}/0$ no tiene intervalos finales no nulos en $\mathbb{F}_{(r)}$.
Si $X_L^{\overline{r}}/y$ es un intervalo final de $X_L^{\overline{r}}/0$ en $\mathbb{F}_{(r)}$ considerando $f: 1/y \longrightarrow 1/X_L^{\overline{r}}$ dado por $f(z) = z \bigvee X_L^{\overline{r}}$ y aplicándole r obtenemos $f|: X_{1/y}^r/y \longrightarrow X_L^{\overline{r}}/X_L^{\overline{r}}$ por lo que $X_{1/y}^r \leqslant X_L^{\overline{r}}$.
Como $r(X_L^{\overline{r}}/y) = 0$ entonces $X_{1/y}^r/y = r(X_{1/y}^r/y) = 0$ por lo que $y = X_{1/y}^r$, así $1/y \in \mathbb{F}_{(r)}$ y $X_L^{\overline{r}} \leqslant y$. Por lo tanto $X_L^{\overline{r}}/y = 0$. □

Definición 2.22. Un prerradical $r \in \mathcal{L}_{pr}$ es exacto izquierdo si para toda sucesión exacta de morfismos lineales $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ se tiene que $0 \longrightarrow r(L) \xrightarrow{f|} r(M) \xrightarrow{g|} r(N)$ es exacta.

Definición 2.23. Una clase abstracta (cerrada bajo isomorfismos) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es hereditaria si para toda retícula $L \in \mathcal{C}$ y todo elemento $a \in L$ se tiene que $a/0_L \in \mathcal{C}$.

Teorema 2.24. *Para $r \in \mathcal{L}_{pr}$ son equivalentes:*

(1) r es exacto izquierdo.

(2) Para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, si $a \leqslant b \in L$ entonces $X_{a/0}^r = a \bigwedge X_{b/0}^r$.

(3) r es idempotente y su clase de pretorsión $\mathbb{T}_{(r)}$ es hereditaria.

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow a/0 \xrightarrow{i} b/0 \xrightarrow{f} b/a \longrightarrow 0$ donde i es la inclusión y $f(x) = x \bigvee a$. Como r es exacto izquierdo la sucesión

$$0 \longrightarrow X^r_{a/0}/0 \xrightarrow{i|} X^r_{b/0}/0 \xrightarrow{f|} X^r_{b/a}/a$$

es exacta, y $X^r_{a/0}$ es el núcleo de $f|$.
Por otro lado $a \bigwedge X^r_{b/0} \leqslant a$ y como los morfismos lineales son no decrecientes

$$f|(a \bigwedge X^r_{b/0}) = f(a \bigwedge X^r_{b/0}) \leqslant f(a) = a \bigvee a = a = f|(X^r_{a/0}),$$

por lo que $f|(a \bigwedge X^r_{b/0}) = f|(X^r_{a/0})$.
Utilizando la modularidad de L, con el hecho de que $X^r_{a/0} \leqslant X^r_{b/0}$, y el primer inciso del Lema 1.3 sobre la igualdad anterior obtenemos que:

$$X^r_{a/0} = X^r_{a/0} \bigvee X^r_{a/0} = (a \bigwedge X^r_{b/0}) \bigvee X^r_{a/0} = (a \bigvee X^r_{a/0}) \bigwedge X^r_{b/0} = a \bigwedge X^r_{b/0}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, probaremos que $0 \longrightarrow X^r_L/0 \xrightarrow{f|} X^r_M/0 \xrightarrow{g|} X^r_N/0$ es exacta.
$X^r_L \leqslant 1_L$ y $(g \circ f)(1_L) = 0_N$, como los morfismos lineales son no decrecientes

$$(g| \circ f|)(X^r_L) = (g \circ f)(X^r_L) \leqslant (g \circ f)(1_L) = 0_N.$$

Además si $y \in X^r_M/0$ cumple que $g|(y) = 0_N$, por el segundo inciso del Lema de 1.3 se tiene que $y \leqslant f(1_L)$ y por lo tanto $y \leqslant f(1_L) \bigwedge X^r_M$.
Si consideramos $a = f(1_L); b = 1_M$, por hipótesis tenemos que $X^r_{f(1_L)/0} = f(1_L) \bigwedge X^r_M$, pero como f es un monomorfismo lineal $X^r_{f(1_L)/0} = f(X^r_L)$, de donde $y \leqslant f|(X^r_L)$ y por lo tanto $f|(X^r_L)$ es el núcleo de $g|$.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, sabemos que $X^r_L \leqslant 1$, aplicando la hipótesis a esa pareja obtenemos que $X^r_{X^r_L/0} = X^r_L \bigwedge X^r_L = X^r_L$ por lo que $r(r(L)) = r(L)$.
Por otro lado si $L \in \mathbb{T}_{(r)}$, y $b \in L$, usando la hipótesis en los elementos $b \leqslant 1$ obtenemos:

$$X^r_{b/0} = b \bigwedge X^r_L = b \bigwedge 1 = b.$$

Así $b/0 \in \mathbb{T}_{(r)}$ y $\mathbb{T}_{(r)}$ es hereditaria.
(3) $\Longrightarrow$ (2) Sabemos que $X^r_{a/0} \leqslant a \bigwedge X^r_{b/0} \leqslant a$. Por otro lado como $\mathbb{T}_{(r)}$ es hereditaria y $r(b/0) = X^r_{b/0}/0 \in \mathbb{T}_{(r)}$ se tiene que $(a \bigwedge X^r_{b/0})/0 \in \mathbb{T}_{(r)}$, si consideramos la inclusión $(a \bigwedge X^r_{b/0})/0 \longrightarrow a/0$ y le aplicamos r obtenemos $(a \bigwedge X^r_{b/0})/0 \longrightarrow X^r_{a/0}/0$. Por lo tanto $a \bigwedge X^r_{b/0} = X^r_{a/0}$. □

Corolario 2.25. *La gran retícula de los prerradicales exactos izquierdos y la gran retícula de las clases de pretorsión hereditarias son isomorfas.*

Definición 2.26. Si σ y τ son dos prerradicales en $\mathcal{L}_{pr}$, para cada retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se define el elemento $X^{(\sigma:\tau)}_L$ como el elemento de L que cumple que $X^{(\sigma:\tau)}_L / X^\sigma_L = \tau(1_L/X^\sigma_L)$.
Se define $(\sigma : \tau) \in \mathcal{L}_{pr}$ como $(\sigma : \tau)(L) = X^{(\sigma:\tau)}_L/0_L$, que es un prerradical en $\mathcal{L}_{pr}$ por [11, Proposición 4.2.].

Notemos que un prerradical $\sigma \in \mathcal{L}_{pr}$ es un radical si y sólo si $(\sigma : \sigma) = \sigma$.

Teorema 2.27. *Para un prerradical $r \in \mathcal{L}_{pr}$ son equivalentes:*

(1) r preserva epimorfismos.

(2) r es un radical y $\mathbb{F}_{(r)}$ es cerrada bajo intervalos finales.

(3) Para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y cualquier par de elementos $a, b \in L$ con $a \leq b$ se tiene que $X^r_{1/b} = b \bigvee X^r_{1/a}$.

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Consideremos el epimorfismo $L \xrightarrow{\varphi} 1_L/X^r_L$ dado por $\varphi(z) = z \bigvee X^r_L$, aplicando r obtenemos que $X^r_L/0 \xrightarrow{\varphi|} r(1_L/X^r_L)$ es un epimorfismo, por lo que

$$X^r_L = X^r_L \bigvee X^r_L = X^r_{1_L/X^r_L},$$

entonces $r(1_L/X^r_L) = X^r_L/X^r_L$ y r es un radical.
Ahora supongamos que $r(L) = 0$ y consideremos el epimorfismo $L \xrightarrow{f} 1_L/y$ para algún $y \in L$, dado por $f(x) = x \bigvee y$, aplicándole r obtenemos $0 = r(L) \xrightarrow{f|} r(1_L/y)$ y como $f|$ es un epimorfismo $r(1_L/y) = y/y$, y $\mathbb{F}_{(r)}$ es cerrada bajo intervalos finales.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Si $L \xrightarrow{\varphi} M$ es un epimorfismo podemos suponer que M es un intervalo final de L de la forma $1_L/y$. Por otro lado como r es un radical $1_L/X^r_L \in \mathbb{F}_{(r)}$, y como $\mathbb{F}_{(r)}$ es cerrado bajo intervalos finales $1_L/X^r_L \bigvee y \in \mathbb{F}_{(r)}$.
Consideremos el epimorfismo $1_L/y \xrightarrow{g} 1_L/y \bigvee X^r_L$, donde $g(z) = z \bigvee X^r_L$. Aplicándole r obtenemos $r(1_L/y) \xrightarrow{g|} y \bigvee X^r_L/y \bigvee X^r_L$, por lo tanto $X^r_{1_L/y} \bigvee X^r_L = y \bigvee X^r_L$ de donde $X^r_{1_L/y} \leqslant y \bigvee X^r_L$.
Por último si le aplicamos r al epimorfismo $L \xrightarrow{\varphi} 1_L/y$ dado por $\varphi(z) = z \bigvee y$ obtenemos $X^r_L/0 \xrightarrow{\varphi|} r(1_L/y)$, sin embargo para todo $z \in (X^r_L \bigvee y)/y$ se tiene que $z \bigwedge X^r_L \in X^r_L/0$ y por modularidad se cumple que $\varphi|(z \bigwedge X^r_L) = (z \bigwedge X^r_L) \bigvee y = (X^r_L \bigvee y) \bigwedge z = z$ y como $X^r_{1_L/y} \leqslant y \bigvee X^r_L$, entonces $\varphi|$ es un epimorfismo.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Si al morfismo lineal $1/a \xrightarrow{\_\bigvee b} 1/b$ le aplicamos r obtenemos $X^r_{1/a}/a \xrightarrow{\_\bigvee b} X^r_{1/b}/b$, de donde $b \leq X^r_{1/a} \bigvee b \leq X^r_{1/b}$. Por otro lado como $\mathbb{F}_{(r)}$ es cohereditaria y $1/X^r_{1/a} \in \mathbb{F}_{(r)}$, entonces $1/(X^r_{1/a} \bigvee b) \in \mathbb{F}_{(r)}$, considerando el morfismo lineal

$$1/b \xrightarrow{\_\bigvee(X^r_{1/a} \bigvee b)} 1/(X^r_{1/a} \bigvee b)$$

y aplicándole r obtenemos que $X^r_{1/b} \bigvee (X^r_{1/a} \bigvee b) = X^r_{1/a} \bigvee b$, por lo que $X^r_{1/b} \leq X^r_{1/a} \bigvee b$ y se tiene la igualdad buscada.
(3) $\Longrightarrow$ (2) Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, aplicando la hipótesis a la pareja $0 \leq X^r_L$ obtenemos que $x^r_{1/X^r_L} = X^r_L \bigvee X^r_L = X^r_L$ y por lo tanto r es un radical.
Por otro lado si $L \in \mathbb{F}_{(r)}$ y $b \in L$, utilizando la hipótesis en los elementos $0 \leq b$ obtenemos:

$$X^r_{1/b} = b \bigvee X^r_L = b \bigvee 0 = b.$$

Así $1/b \in \mathbb{F}_{(r)}$ y $\mathbb{F}_{(r)}$ es cerrada bajo intervalos finales. □

Definición 2.28. Diremos que una clase de retículas $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es cerrada bajo extensiones si siempre que tengamos retículas $L, M, N \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y una sucesión exacta
$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ de morfismos lineales con L y N en $\mathcal{C}$ se tiene que $M \in \mathcal{C}$

Sabemos que existe una biyección entre las clases de pretorsión y los prerradicales idempotentes en $\mathcal{L}_{pr}$, el siguiente resultado muestra que también existe una biyección entre las clases de pretorsión cerradas bajo extensiones y los radicales idempotentes.

Teorema 2.29. *Sea $\mathbb{T}$ una clase de pretorsión y r su prerradical idempotente correspondiente, entonces $\mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones si y sólo si r es un radical.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $r(1_L/X_L^r) \neq 0$, entonces $X_L^r < X^r_{1_L/X_L^r}$. Consideremos entonces la sucesión exacta $0 \longrightarrow X_L^r/0 \longrightarrow X^r_{1_L/X_L^r}/0 \longrightarrow r(1_L/X_L^r) \longrightarrow 0$, como r es idempotente tanto $X_L^r/0$ como $r(1_L/X_L^r)$ pertenecen a $\mathbb{T}$, y como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones $X^r_{1_L/X_L^r}/0 \in \mathbb{T}$ lo cual es una contradicción pues por Teorema 2.6 X_L^r es el máximo elemento de L con la propiedad de que el intervalo inicial $X_L^r/0 \in \mathbb{T}$.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $0 \longrightarrow a/0 \longrightarrow L \longrightarrow 1_L/a \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de retículas tal que $a/0$ y $1_L/a$ están en $\mathbb{T}$, si aplicamos r a la sucesión obtenemos $0 \longrightarrow a/0 \longrightarrow X_L^r/0 \longrightarrow 1_L/a$ lo cual nos dice que $a \leqslant X_L^r$ y por el Lema 1.35 $1_L/a = r(1_L/a) = X_L^r/a$ y por lo tanto $X_L^r = 1_L$ y $L \in \mathbb{T}$. □

Por dualidad obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.30. *Sea $\mathbb{F}$ una clase libre de pretorsión y r su radical asociado, entonces $\mathbb{F}$ es cerrada bajo extensiones si y sólo si r es idempotente.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que r no es idempotente, entonces existe una retícula L en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ tal que $X^r_{x_L^r/0} < X_L^r$. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_L^r/X^r_{x_L^r/0} \longrightarrow 1/X^r_{x_L^r/0} \longrightarrow 1/X_L^r \longrightarrow 0$$

Tenemos que por definición de radical $r(X_L^r/X^r_{x_L^r/0}) = 0 = r(1/x_L^r)$, de donde tanto $X_L^r/X^r_{x_L^r/0}$ como $1/x_L^r$ están en $\mathbb{F}$ y como $\mathbb{F}$ es cerrado bajo extensiones $1/X^r_{x_L^r/0} \in \mathbb{F}$ lo cual es una contradicción pues por el Teorema 2.16, x_L^r es el elemento más pequeño de L con la propiedad de que $1/x_L^r \in \mathbb{F}$.
$\Longleftarrow$) Sea $0 \longrightarrow a/0 \longrightarrow L \longrightarrow 1/a \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $a/0, 1/a \in \mathbb{F}$. Aplicando r obtenemos la sucesión $0/0 \longrightarrow X_L^r/0 \longrightarrow a/a$, de donde $X_L^r \bigvee a = a$ y $X_L^r \leq a$, luego $r(X_L^r/0) = X_L^r/0 \subseteq r(a/0) = 0/0$, por lo que $X_L^r = 0$ y $L \in \mathbb{F}$. □

Tenemos que a cada radical idempotente le podemos asociar las clases de pretorsión $\mathbb{T}_{(r)} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | r(L) = L\}$ y libre de pretorsión $\mathbb{F}_{(r)} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | r(L) = 0\}$, ambas cerradas bajo extensiones.
A una clase de pretorsión cerrada bajo extensiones le llamaremos clase de torsión y a una clase libre de pretorsión cerrada bajo extensiones le llamaremos clase libre de torsión.

Definición 2.31. En una categoría $\mathcal{C}$ con objeto cero, para cualquier par de objetos $L, M \in \mathcal{C}$ existe un morfismo destacado $0 \in Hom_{\mathcal{C}}(L, M)$ que es el único que hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \\ L. \arrow[u] \arrow[ur, "0"] & \end{tikzcd}$$

Una teoría de torsión es una pareja de clases de objetos $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ que cumple las siguientes condiciones:

(1) Para todo $L \in \mathbb{T}$ y para todo $F \in \mathbb{F}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{C}}(T, F) = 0$.

(2) Si $C \in \mathcal{C}$ cumple que $Hom_{\mathcal{C}}(C, F) = 0$ para todo $F \in \mathbb{F}$ entonces $C \in \mathbb{T}$.

(3) Si $C \in \mathcal{C}$ cumple que $Hom_{\mathcal{C}}(L, C) = 0$ para todo $L \in \mathbb{T}$ entonces $C \in \mathbb{F}$.

A $\mathbb{T}$ se le llama la clase de torsión y a $\mathbb{F}$ la clase libre de torsión de la teoría de torsión.

Observación 2.32. Si $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}'$ son clases en una categoría $\mathcal{C}$ tales que $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ y $(\mathbb{T}, \mathbb{F}')$ son teorías de torsión entonces $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$ ya que $F \in \mathbb{F}$ si y sólo si para todo $T \in \mathbb{T}$ se tiene que $Hom(T, F) = 0$ si y sólo si $F \in \mathbb{F}'$.
De igual manera si $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión, $\mathbb{T}$ es la única clase contenida en $\mathcal{C}$ que en pareja con $\mathbb{F}$ forman una teoría de torsión.

Definición 2.33. Dada una clase $\mathbb{C}$ contenida en una categoría $\mathcal{C}$ se definen la clase izquierda $L(\mathbb{C})$ y la clase derecha $R(\mathbb{C})$ generadas por $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$R(\mathbb{C}) = \{F \in \mathcal{C} \mid Hom_{\mathcal{C}}(C, F) = 0, \ \forall C \in \mathbb{C}\}$$
$$L(\mathbb{C}) = \{T \in \mathcal{C} \mid Hom_{\mathcal{C}}(T, C) = 0, \ \forall C \in \mathbb{C}\}$$

Retomando estos conceptos en el caso particular de la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que

Lema 2.34. *Una pareja de clases de objetos $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una teoría de torsión si y sólo si $\mathbb{T} = L(\mathbb{F})$ y $\mathbb{F} = R(\mathbb{T})$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sabemos que por la Definición 2.31 una clase T es elemento de $\mathbb{T}$ si y sólo si para toda clase $F \in \mathbb{F}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(T, F) = 0$ lo cual ocurre si y solamente si $T \in L(\mathbb{F})$. Análogamente $\mathbb{F} = R(\mathbb{T})$.
$\Longleftarrow$) 1) Sean $T \in \mathbb{T}$ y $F \in \mathbb{F}$, como $T \in L(\mathbb{F})$ entonces $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(T, F) = 0$.
2) Si $C \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cumple que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(C, F) = 0$ para todo $F \in \mathbb{F}$ entonces $C \in L(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.
3) Si $C \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cumple que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(T, C) = 0$ para todo $T \in \mathbb{T}$ entonces $C \in R(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$. □

Lema 2.35. *Los operadores L y R de la retícula de clases de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ en sí misma descritos en la Definición 2.33 forman una conexión de Galois.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son clases contenidas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ con $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, entonces $R(\mathcal{D}) = \{F \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(D, F) = 0 \forall D \in \mathcal{D}\} \subseteq \{F \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(C, F) = 0 \forall C \in \mathcal{C}\} = R(\mathcal{C})$. Análogamente $L(\mathcal{D}) \subseteq L(\mathcal{C})$.
Por otro lado, si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ entonces para toda retícula $L \in R(\mathcal{C})$ se tiene que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(C, L) = 0$, por lo que $C \in L(R(\mathcal{C}))$ y por lo tanto $\mathcal{C} \subseteq L(R(\mathcal{C}))$. Análogamente $\mathcal{C} \subseteq R(L(\mathcal{C}))$. □

Corolario 2.36. *Para toda clase $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $LRL(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C})$ y $RLR(\mathcal{C}) = R(\mathcal{C})$*

Corolario 2.37. *Los operadores RL y LR son operadores cerradura en la gran retícula de clases contenidas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y sus cerrados son respectivamente las clases de torsión y libres de torsión.*

Notemos que $(L(R(\mathcal{C})), R(\mathcal{C}))$ es la teoría de torsión cuya clase de torsión $L(R(\mathcal{C}))$ es la clase de torsión más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$, y se le llama la teoría de torsión generada por $\mathcal{C}$, mientras que $(L(\mathcal{C}), R(L(\mathcal{C})))$ es la teoría de torsión cuya clase libre de torsión $R(L(\mathcal{C}))$ es la clase libre de torsión más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$ y se le llama la teoría de torsión cogenerada por $\mathcal{C}$.

Lema 2.38. *Para una clase $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ abstracta y cerrada bajo intervalos finales, se tiene que $R(\mathcal{C}) = \{F \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | F$ no tiene intervalos iniciales no nulos en $\mathcal{C}\}$.*

Demostración. Sabemos que $F \in R(\mathcal{C})$ si y sólo si $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(C, F) = 0$ para toda $C \in \mathcal{C}$. Veremos que esto último ocurre si y sólo si F no tiene intervalos iniciales no nulos en $\mathcal{C}$.
$\Longrightarrow$) Si F tuviera un intervalo inicial no nulo $a/0$ en $\mathcal{C}$ la inclusión $a/0 \xrightarrow{i} F$ sería un morfismo lineal no cero de dicho intervalo hacia F.
$\Longleftarrow$) Si existiera un morfismo lineal no cero $f : C \longrightarrow F$ se tendría que $\overline{f} : 1/k \longrightarrow a/0$ es un isomorfismo de retículas, como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo intervalos finales $1/k \in \mathcal{C}$, y al ser $\mathcal{C}$ cerrada bajo isomorfismos $a/0$ sería un intervalo inicial no nulo de F en $\mathcal{C}$. □

Teorema 2.39. *Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una clase cerrada bajo intervalos finales e isomorfismos entonces $L(R(\mathcal{C})) = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \mid \forall x \in L, x < 1, \exists y > x$ con $y/x \in \mathcal{C}\} =$*
$= \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} |$ Todo intervalo final no nulo de L tiene un intervalo inicial no nulo en $\mathcal{C}\}$.

Demostración. Veremos que $T \in L(R(\mathcal{C}))$ si y sólo si T no tiene intervalos finales diferentes de cero en $R(\mathcal{C})$.
$\Longrightarrow$) Si $T \in L(R(\mathcal{C}))$ tuviera un intervalo final no nulo $1/x$ en $R(\mathcal{C})$ entonces el morfismo lineal $T \xrightarrow{-\bigvee x} 1/x$ sería diferente de cero, lo cual es una contradicción.
$\Longleftarrow$) Si existiera un morfismo lineal no cero $f : T \longrightarrow F$ con $F \in R(\mathcal{C})$ tendríamos que f induce un isomorfismo de retículas $\overline{f} : 1/k \longrightarrow a/0$, sin embargo $a/0 \in R(\mathcal{C})$ pues es cerrado bajo intervalos iniciales, por lo que T tendría un intervalo final en $R(\mathcal{C})$.
Por lo anterior $T \in L(R(\mathcal{C}))$ si y sólo si todo intervalo final no nulo de T no está en $R(\mathcal{C})$, lo cual por el Lema 2.38 ocurre si y sólo si todo intervalo final no nulo de T tiene un intervalo inicial no nulo en $\mathcal{C}$. □

Teorema 2.40. *En $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ existe una biyección entre las teorías de torsión y los radicales idempotentes.*

Demostración. Si r es un radical idempotente en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ consideremos la pareja $(\mathbb{T}_{(r)}, \mathbb{F}_{(r)})$ y veamos que es una teoría de torsión. Si $L \in \mathbb{T}_{(r)}$, $F \in \mathbb{F}_{(r)}$ y $f : L \longrightarrow F$ es un morfismo lineal, cuando le apliquemos r obtenemos $f^{\upharpoonright} : L \longrightarrow 0$ por lo que f tenía que ser el morfismo lineal 0.

Supongamos que existe $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ tal que para todo $F \in \mathbb{F}_{(r)}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,F) = 0$, como r es un radical $1_L/X_L^r \in \mathbb{F}_{(r)}$ por lo que el morfismo lineal dado por $f : L \longrightarrow 1_L/X_L^r$ dado por $f(y) = y \bigvee X_L^r$ es cero, y $1_L \bigvee X_L^r = X_L^r$, de donde $X_L^r = 1_L$ y $L \in \mathbb{T}_{(r)}$.

Si existe $F \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ tal que para todo $L \in \mathbb{T}_{(r)}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,F) = 0$, como r es idempotente se tiene que $r(F) \in \mathbb{T}_{(r)}$, y como la inclusión $i : r(F) \longrightarrow F$ es un morfismo lineal, este tiene que ser cero y por lo tanto $r(F) = 0$ y $F \in \mathbb{F}_{(r)}$.

Hemos visto que a cada radical idempotente en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ podemos asignarle una teoría de torsión con las biyecciones dadas por el Teorema 2.6 y el Teorema 2.16.

Ahora veremos que si $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, entonces $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión cerrada bajo extensiones y $\mathbb{F}$ es una clase libre de pretorsión cerrada bajo extensiones.
Empecemos con $\mathbb{T}$. Sea $L \in \mathbb{T}$, $L \xrightarrow{g} L'$ un isomorfismo lineal $f : L' \longrightarrow F$ un morfismo lineal para algún $F \in \mathbb{F}$. Consideremos la composición de morfismos lineales
$L \xrightarrow{g} L' \xrightarrow{f} F$, $f \circ g = 0$ pues $L \in \mathbb{T}$, por lo que $f \circ g(1_L) = f(1_{L'}) = 0$ y $f = 0$, por lo tanto $L' \in \mathbb{T}$ y $\mathbb{T}$ es una clase abstracta.
Si $L \in \mathbb{T}$, $1_L/x$ es un intervalo final de L y tenemos un morfismo lineal $f : 1_L/x \longrightarrow F$ para algún $F \in \mathbb{F}$, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1_L/x \arrow[r, "f"] & F \\ L. \arrow[u, "\_\bigvee x"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que $f(1_L) = 0$, de donde $f = 0$ y así $\mathbb{T}$ es cerrada bajo intervalos finales.
Supongamos que una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ tiene un subconjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ tal que la familia de intervalos iniciales $\{x_i/0\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{T}$, que F es un elemento cualquiera de $\mathbb{F}$ y que $f : \bigvee\limits_{i \in I} x_i/0 \longrightarrow F$ un morfismo lineal. Consideremos para cada $j \in I$ el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigvee\limits_{i \in I} x_i/0 \arrow[r, "f"] & F \\ x_j/0 \arrow[u, "i_j"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

donde i_j es la inclusión. Tenemos entonces que $f(x_j) = 0$ para todo $j \in I$, por [15, Lema 0.6.] f conmuta con supremos arbitrarios, por lo que $f(\bigvee\limits_{i \in I} x_i) = \bigvee\limits_{i \in I} f(x_i) = 0$, entonces $f = 0$ y por lo tanto $\bigvee\limits_{i \in I} x_i/0 \in \mathbb{T}$.

Para ver que $\mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones supongamos que $0 \longrightarrow x/0 \longrightarrow L \longrightarrow 1/x \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta con $x/0$ y $1/x$ en $\mathbb{T}$ y que tenemos un morfismo lineal $f : L \longrightarrow F$ con $F \in \mathbb{F}$, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & F \\ x/0 \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "0"] \end{tikzcd}$$

tenemos que el nucleo k de f cumple que $x \leqslant k$, por lo que si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1/k \arrow[r, "\overline{f}"] & f(1)/0 \\ 1/x \arrow[u, "\_\bigvee k"] \arrow[ur, "0"] \end{tikzcd}$$

tenemos que $f(1) = 0$, por lo que $L \in \mathbb{T}$.

Veamos que $\mathbb{F}$ es una clase libre de torsión. Supongamos que $F \in \mathbb{F}$, que existe un isomorfismo lineal $F' \xrightarrow{g} F$ y que $f : L \longrightarrow F'$ es un morfismo lineal para alguna retícula $L \in \mathbb{T}$. Consideremos la composición $L \xrightarrow{f} F' \xrightarrow{g} F$, $g \circ f = 0$ pues $F \in \mathbb{F}$, por lo que $k_f = k_{g\circ f} = 1_L$, entonces $f = 0$, $F' \in \mathbb{F}$ y por lo tanto $\mathbb{F}$ es una clase abstracta.
Sea $x/0$ un intervalo inicial de F, $L \in \mathbb{T}$ y $f : L \longrightarrow x/0$ un morfismo lineal. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} x/0 \arrow[r, "i"] & F \\ L \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "0"] \end{tikzcd}$$

por lo tanto $f = 0$ y $\mathbb{F}$ es cerrada bajo intervalos iniciales.
Sea F una retícula en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ con un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que la familia de intervalos finales $\{1/x_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{F}$ y sea $L \in \mathbb{T}$ junto con un morfismo lineal $f : L \longrightarrow 1/\bigwedge_{i\in I} x_i$. Para cada $j \in I$ consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1/\bigwedge_{i\in I} x_i \arrow[r, "\_\bigvee x_j"] & 1/x_j \\ L \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "0"] \end{tikzcd}$$

entonces $f(1) \bigvee x_j = x_j$ para toda $j \in I$ por lo que $f(1) \leqslant \bigwedge_{i\in I} x_i$, $f = 0$ y por lo tanto $1/\bigwedge_{i\in I} x_i \in \mathbb{F}$.

Por último, para ver que $\mathbb{F}$ es cerrado bajo extensiones supongamos que tenemos una sucesión exacta $0 \longrightarrow x/0 \longrightarrow F \longrightarrow 1/x \longrightarrow 0$ con $x/0, 1/x \in \mathbb{F}$, y que $f : L \longrightarrow F$ es un morfismo lineal con $L \in \mathbb{T}$ si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\_\bigvee x"] & 1/x \\ L, \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "0"] \end{tikzcd}$$

tenemos que $f(1) \leqslant x$ y como $x/0 \in \mathbb{F}$, entonces

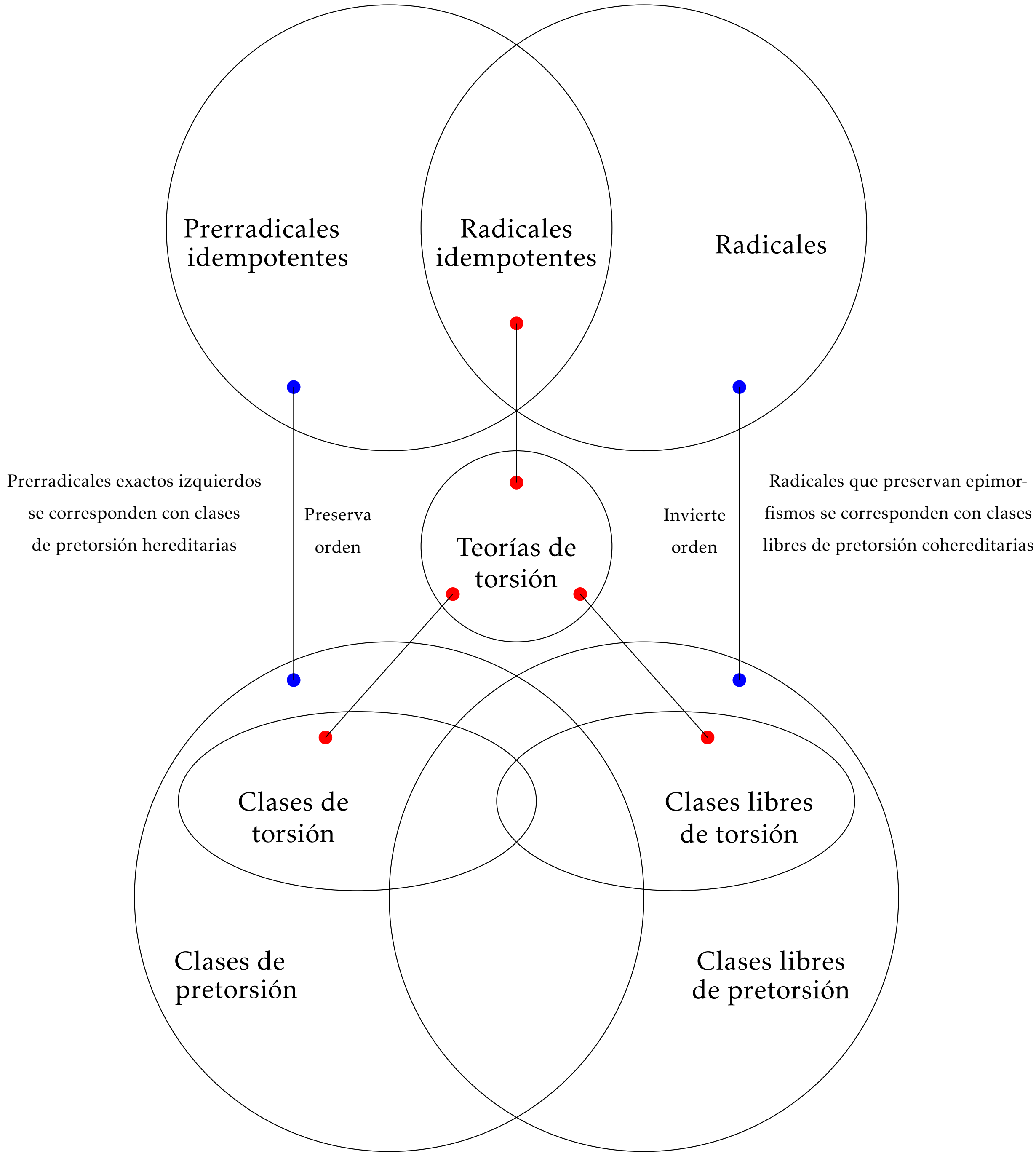
$$\begin{tikzcd} f(1)/0 \arrow[r, "i"] & x/0 \\ L \arrow[u, "f\restriction"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

y así $f = 0$, por lo tanto $F \in \mathbb{F}$ y $\mathbb{F}$ es cerrada bajo extensiones.
Por lo tanto a la teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ le corresponde el radical idempotente asociado a $\mathbb{T}$, que como veremos en el Teorema 2.44, coincide con el radical idempotente asociado a $\mathbb{F}$.
Hemos asignado a cada radical idempotente r una teoría de torsión $(\mathbb{T}_{(r)}, \mathbb{F}_{(r)})$, y a cada teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ un radical idempotente $r_{(\mathbb{T})} = r_{(\mathbb{F})}$, y el hecho de que esta asignación sea una biyección se debe a los Teoremas 2.6, 2.29 y 2.30. $\square$

Observación 2.41. Por el Teorema 2.40 una clase $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es de torsión en el sentido de la Definición 2.31 si y solamente si es una clase de pretorsión según la Definición 2.1 y es cerrada bajo extensiones. De igual manera $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una clase libre de torsión en el sentido de la Definición 2.31 si y sólo si es libre de pretorsión según la Definición 2.11 y es cerrada bajo extensiones.

A continuación se presenta un diagrama con algunas de las biyecciones entre clases que se han encontrado hasta ahora.

El diagrama se complementa recordando que por el Teorema 2.6 la biyección entre prerradicales idempotentes y clases de pretorsión preserva el orden, mientras que por el Teorema 2.16 la biyección entre radicales y clases libres de pretorsión invierte el orden. Además gracias a los Teoremas 2.24 y 2.27 si un prerradical idempotente es exacto izquierdo, entonces su correspondiente clase de pretorsión es hereditaria, y si un radical preserva epimorfismos, entonces su correspondiente clase libre de pretorsión es cohereditaria.



Veremos que si $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es una teoría de torsión entonces el radical idempotente $r_{(\mathbb{T})}$ asociado a $\mathbb{T}$ coincide con el radical idempotente $r_{(\mathbb{F})}$ asociado a $\mathbb{F}$, pero para ello es necesario probar los siguientes lemas.

Lema 2.42. *Si $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es una teoría de torsión y $r_{(\mathbb{T})}$ el radical idempotente asociado a $\mathbb{T}$, entonces para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $L \in \mathbb{F}$ si y sólo si $r_{(\mathbb{T})}(L) = 0$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Si $L \in \mathbb{F}$, como $\mathbb{F}$ es cerrada bajo intervalos iniciales $r_{(\mathbb{T})}(L) \in \mathbb{T} \cap \mathbb{F} = 0$.
$\Longleftarrow$) Si $M \in \mathbb{T}$ y $g : M \longrightarrow L$ es un morfismo lineal, al aplicarle $r_{(\mathbb{T})}$ obtenemos $g| : M \longrightarrow 0$ por lo que $g = 0$ y así $L \in \mathbb{F}$. □

Lema 2.43. *Si $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es una teoría de torsión y $r_{(\mathbb{F})}$ el radical idempotente asociado a $\mathbb{F}$, entonces para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $L \in \mathbb{T}$ si y sólo si $r_{(\mathbb{F})}(L) = L$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Si $L \in \mathbb{T}$ y $x \in \mathbb{F}_L$, considerando el morfismo lineal $L \xrightarrow{-\bigvee x} 1/x$, por el Lema 2.42 al aplicar $r_{(\mathbb{T})}$ obtenemos $L \xrightarrow{-\bigvee x} x/x$ por lo que $x = 1_L$ y así $r_{(\mathbb{F})}(L) = L$.
$\Longleftarrow$) Sea $M \in \mathbb{F}$ y $g : L \longrightarrow M$ un morfismo lineal, aplicando $r_{(\mathbb{F})}$ obtenemos $g| : L \longrightarrow 0$ por lo que $g = 0$ y así $L \in \mathbb{T}$. □

Teorema 2.44. *Si $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión el radical idempotente $r_{(\mathbb{T})}$ asociado a $\mathbb{T}$ coincide con el radical idempotente $r_{(\mathbb{F})}$ asociado a $\mathbb{F}$.*

Demostración. Por el Lema 2.43, para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $r_{(\mathbb{F})}(L) = L$ si y sólo si $L \in \mathbb{T}$ lo cual ocurre si y sólo si $r_{(\mathbb{T})}(L) = L$. Así $r_{(\mathbb{F})}$ y $r_{(\mathbb{T})}$ son prerradicales idempotentes que tienen asociada a la misma clase de pretorsión $\mathbb{T}$. Por el Teorema 2.6 ambos coinciden. □

Corolario 2.45. *Si r es un prerradical idempotente, $\overline{r}$ es el radical idempotente correspondiente a la teoría de torsión generada por $\mathbb{T}_{(r)}$.*

Demostración. Si $\overline{r}$ es el menor radical idempotente mayor que r su clase de torsión correspondiente es la menor que contiene a $\mathbb{T}_{(r)}$, que es justamente la clase de torsión generada por $\mathbb{T}_{(r)}$. □

Teorema 2.46. *Si $\mathcal{C}$ es una clase contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ entonces:*

(1) Si $\mathcal{C}$ es hereditaria, $R(\mathcal{C})$ es cerrada bajo extensiones esenciales.

(2) Si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo intervalos finales, $L(\mathcal{C})$ es cerrada bajo coberturas superfluas.

Demostración. (1) Supongamos que $L \in R(\mathcal{C})$ y sea $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ una extensión esencial de L. Si $f : C \longrightarrow M$ es un morfismo lineal para algún $C \in \mathcal{C}$, entonces f induce un isomorfismo de retículas $\overline{f} : 1_C/k \longrightarrow f(1_C)/0$, por lo que existe $x \in C$ tal que $f(x) = f(1_C) \bigwedge 1_L$. Consideremos la inclusión compuesta con la correstricción $x/0 \xrightarrow{i} C \xrightarrow{f\restriction} L$, dicha correstricción es posible pues los morfismos lineales respetan orden, luego como $\mathcal{C}$ es hereditaria $x/0 \in \mathcal{C}$, de donde la composición es cero, así $f(x) = f(1_C) \bigwedge 1_L = 0$ pero como M es extensión esencial de L, se tiene que $f(1_C) = 0$, entonces $f = 0$ y por lo tanto $M \in R(\mathcal{C})$.

(2) Sea $T \in L(\mathcal{C})$ y $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ una cobertura superflua de T. Si $f : M \longrightarrow C$ es un morfismo lineal para algún $C \in \mathcal{C}$, entonces f induce un isomorfismo de retículas $\overline{f} : 1_T/k \longrightarrow f(1_T)/0$. Consideremos la restricción y correstricción de dicho isomorfismo de retículas compuesta con la inclusión

$$T \xrightarrow{-\bigvee k} 1_T/(k \bigvee 0_T) \xrightarrow{\overline{f}|} f(1_T)/f(k \bigvee 0_T) \xrightarrow{i} 1_C/f(k \bigvee 0_T).$$

Tenemos que $1_C/f(k \bigvee 0_T) \in \mathcal{C}$ pues $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intervalos finales, y así la composición es cero.
Tenemos entonces que $\overline{f}|(1_T) = \overline{f}|(k \bigvee 0_T)$, lo cual implica que $1_T = k \bigvee 0_T$ y como M es una cobertura superflua de T se tiene que $k = 1_T$ por lo que $f = 0$ y por lo tanto $M \in L(\mathcal{C})$.

□

Definición 2.47. Una clase de retículas $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una clase TLT si es tanto una clase de torsión como una clase libre de torsión, es decir si existen $\mathbb{C}, \mathbb{F} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ tales que $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ y $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ son teorías de torsión.

Notemos que si $\mathbb{T}$ es una clase TLT, al ser una clase libre de torsión es cerrada bajo intervalos iniciales, por lo que la teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es hereditaria. Además una clase de torsión hereditaria $\mathbb{T}$ es una clase TLT si y sólo si para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ para la cual existe un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq L$ tal que $\{1/x_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{T}$ entonces $1_L/\bigwedge_{i\in I} x_i \in \mathbb{T}$.

El siguiente ejemplo muestra una clase de torsión hereditaria que no es una clase TLT.

Ejemplo 2.48. Nombremos $\mathbb{T}$ a la clase contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ formada por todas las retículas continuas superiormente y para las cuales todo intervalo final no nulo tiene un átomo, es decir

$$\mathbb{T} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | L \text{ es continua superiormente y si } 1_L \neq a \in L \text{ el intervalo } 1_L/a \text{ tiene un átomo }\}.$$

Mas adelante en el Teorema 2.96 se probará que $\mathbb{T}$ es una clase de torsión hereditaria, sin embargo si consideramos a la retícula $L = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \cup \{0\}$, con el orden inducido por los reales, y a la familia de elementos $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \subseteq L$, se tiene que para todo $0 \neq n \in \mathbb{N}$ el intervalo final $1/(1/n)$ es una retícula finita y totalmente ordenada, por lo que es continua superiormente. Además todo intervalo final no nulo de $1/(1/n)$ tiene un átomo, por lo que $1/(1/n) \in \mathbb{T}$, sin embargo $1/(\bigwedge_{1\leq n\in\mathbb{N}} 1/n) = L$ no está en $\mathbb{T}$, pues L no tiene átomos. Por lo tanto $\mathbb{T}$ no es una clase libre de torsión.

Lema 2.49. *Si $\mathbb{T}$ es una clase TLT y $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ es hereditaria entonces $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}$.*

Demostración. Si t es el radical idempotente correspontiente a $\mathbb{T}$ y $L \in \mathbb{C}$, como $\mathbb{T}$ es también una clase de torsión se tiene que $t(L) \in \mathbb{C} \bigcap \mathbb{T} = 0$, por el Lema 2.42 $L \in \mathbb{F}$. □

Definición 2.50. Diremos que una teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ con radical idempotente asociado t se escinde si para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ existe $x \in L$ tal que $X_L^t \bigvee x = 1$ y $X_L^t \bigwedge x = 0$, es decir, si X_L^t tiene un complemento.

Lema 2.51. *Si $\mathbb{T}$ es una clase TLT cuyas clases de torsión y libre de torsión correspondientes son $\mathbb{C}$ y $\mathbb{F}$ respectivamente, entonces son equivalentes:*

(1) $\mathbb{C} = \mathbb{F}$.

(2) Para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que $1_L = X_L^c \bigvee X_L^t$ y $0_L = X_L^c \bigwedge X_L^t$, donde c y t son los radicales idempotentes asociados a $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ y $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ respectivamente.

(3) $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ *y* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *se escinden.*

(4) $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ *es hereditaria y se escinde.*

(5) $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ *es hereditaria y* $\mathbb{F}$ *es TLT.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Si c es el radical idempotente asociado a $\mathbb{C}$, la clase libre de torsión asociada a c es $\mathbb{T}$ que es cerrada bajo intervalos finales por ser también una clase de torsión, entonces por el Teorema 2.27 c preserva epimorfismos.
Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y consideramos el morfismo lineal $h : L \longrightarrow 1_L/(X_L^c \bigvee X_L^t)$ dado por $h(y) = y \bigvee (X_L^c \bigvee X_L^t)$, como t es un radical se tiene que $t(1_L/X_L^t) = 0$, por lo que $1_L/X_L^t \in \mathbb{F} = \mathbb{C}$, luego como $\mathbb{C}$ es cerrado bajo intervalos finales $1_L/X_L^c \bigvee X_L^t \in \mathbb{C}$. Así, al aplicarle c a h obtenemos a la restricción $h| : X_L^c/0 \longrightarrow 1_L/(X_L^c \bigvee X_L^t)$ que es un epimorfismo, por lo tanto $1_L = h|(X_L^c) = X_L^c \bigvee (X_L^c \bigvee X_L^t) = X_L^c \bigvee X_L^t$.
Por otro lado como $\mathbb{C}$ coincide con $\mathbb{F}$, es hereditaria al igual que $\mathbb{T}$, y $X_L^c \bigwedge X_L^t/0_L \in \mathbb{C} \bigcap \mathbb{T} = 0$ por lo que $X_L^c \bigwedge X_L^t = 0_L$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea $L \in \mathbb{C}$, entonces $X_L^c = 1$, por lo que $X_L^t = X_L^c \bigwedge X_L^t = 0$. Así $t(L) = 0$ y $L \in \mathbb{F}$.
Por otro lado si $L \in \mathbb{F}$ se tiene que $X_L^t = 0$, por lo que $X_L^c = X_L^c \bigvee X_L^t = 1$ y $L \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $\mathbb{C} = \mathbb{F}$.

(1) $\Longrightarrow$ (5) Como $\mathbb{C} = \mathbb{F}$ se tiene que $\mathbb{C}$ es cerrada bajo intervalos iniciales, por lo tanto $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ es hereditaria. Además $\mathbb{F}$ es TLT pues $(\mathbb{C}, \mathbb{T}) = (\mathbb{F}, \mathbb{T})$ es una teoría de torsión.

(5) $\Longrightarrow$ (1) Como $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ es hereditaria por el Lema 2.49 se tiene que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}$.
Por otro lado si $F \in \mathbb{F}$ y suponemos que para alguna retícula $T \in \mathbb{T}$ existe un morfismo lineal $g : F \longrightarrow T$, entonces g induce un isomorfismo de retículas $\overline{g} : 1/k \longrightarrow g(1)/0$, pero como $\mathbb{F}$ es TLT es cerrada bajo intervalos finales, y como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo intervalos iniciales, se tiene que $1/k \in \mathbb{T} \bigcap \mathbb{F} = 0$, por lo cual $k = 1$ y $g = 0$, de donde $F \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$.

(1)*y*(2) $\Longrightarrow$ (4) Como $\mathbb{C} = \mathbb{F}$ se tiene que $\mathbb{C}$ es cerrada bajo intervalos iniciales y por lo tanto $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ es hereditaria. De (2) se sigue que $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ se escinde.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Como $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ es hereditaria, por el Lema 2.49 se tiene que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}$.
Por otro lado si $F \in \mathbb{F}$, dado que $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ se escinde, existe $y \in F$ tal que $X_F^c \bigvee y = 1_F$ y $X_F^c \bigwedge y = 0_F$. Supongamos que existe un morfismo lineal $g : F \longrightarrow T$ para algún $T \in \mathbb{T}$.
Si $X_F^c = 0$ entonces $F \in \mathbb{T} \bigcap \mathbb{F} = 0$ por lo que el morfismo lineal g es cero.
Si $X_F^c \neq 0$ pero $y = 0$ entonces $X_F^c = X_F^c \bigvee y = 1_F$, por lo que $F \in \mathbb{C}$ y el morfismo g sería cero.
Por último suponemos que tanto X_F^c como y son diferentes de cero, usando el hecho de que $X_F^c \bigvee y = 1_F$, que c es idempotente y [15, Proposición 1.3.] se tiene que $X_F^c = X_F^c \bigvee X_{y/0}^c$ de donde $X_{y/0}^c \leqslant X_F^c \bigwedge y = 0$ y así $y/0 \in \mathbb{T} \bigcap \mathbb{F}$, pues $\mathbb{F}$ es cerrada bajo intervalos iniciales por lo que $y = 0$ lo cual es una contradicción.
Como los únicos dos casos posibles son $X_F^c = 0$ y $X_F^c \neq 0$ pero $y = 0$, y en ambos el morfismo lineal g es cero, se concluye que $F \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Es inmediato.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Sean $C \in \mathbb{C}$, $T \in \mathbb{T}$ y $f : T \longrightarrow C$ un morfismo lineal. Como $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ se escinde, existe

$y \in C$ tal que $X_C^t \bigvee y = 1_C$ y $X_C^t \bigwedge y = 0_C$.
Si $X_C^t = 0$ entonces $C \in \mathbb{F}$ y f es el morfismo cero.
Si $y = 0$ entonces $X_C^t = X_C^t \bigvee y = 1$ por lo que $C \in \mathbb{C} \bigcap \mathbb{T} = 0$ y f es el morfismo cero.
Por último si suponemos que tanto X_C^t como y son diferentes de cero, usando el hecho de que $X_C^t \bigvee y = 1_C$, que $X_C^t/0 \in \mathbb{T}$ y [15, Proposición 1.3.] se tiene que

$$1_C = X_C^c = X_{X_C^t/0}^c \bigvee X_{y/0}^c = 0 \bigvee X_{y/0}^c$$

por lo que que $X_{y/0}^c = 1_C$ y así $y = 1_C$ y $X_C^t = 0$ lo cual es una contradicción.
Como los únicos dos casos posibles son $X_C^t = 0$ y $X_C^t \neq 0$ pero $y = 0$, y en ambos el morfismo lineal f es cero, se concluye que $C \in \mathbb{F}$ y por lo tanto $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}$.
El hecho de que $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ se escinda implique que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$ se prueba de manera idéntica a como se hace en $(4) \Longrightarrow (1)$. □

Definición 2.52. Para una retícula L y un elemento $a \in L$, un seudocomplemento de a es un elemento $b \in L$ tal que $a \bigwedge b = 0$ y si cualquier otro elemento $c \in L$ cumple que $a \bigwedge c = 0$ y $b \leq c$, entonces $c = b$.
Diremos que b es un seudocomplemento fuerte de a si $a \bigwedge b = 0$ y siempre que $a \bigwedge c = 0$ se tiene que $c \leqslant b$.

Definición 2.53. Una retícula L es (fuertemente) seudocomplementada si todo elemento $a \in L$, tiene un seudocomplemento (fuerte) en L.

Denotaremos como $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{I}}$ y $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{C}}$ a las subcategorías de $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ formadas por las retículas modulares completas que además son respectivamente, continuas superiormente, continuas inferiormente ó continuas.
Si r es un prerradical definido en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$ y denotamos como $\mathcal{C}_r$ a la clase de todos los prerradicales $t \in \mathcal{L}_{pr}$ tales que $t \bigwedge r = 0$ entonces, si consideramos una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_r$ y una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$ tenemos que $((\bigvee_{t \in \mathcal{C}} t) \bigwedge r)(L) = (X_L^r \bigwedge (\bigvee_{t \in \mathcal{C}} X_L^t))/0 = (\bigvee_{t \in \mathcal{C}} (X_L^t \bigwedge X_L^r))/0 = 0$.
Si suponemos el axioma de elección global, entonces la retícula de prerradicales en la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$ es seudocomplementada.

Definición 2.54. Diremos que una clase $C \subseteq \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es abierta si es cerrada bajo isomorfismos, intervalos iniciales e intervalos finales.

Teorema 2.55. *La gran retícula de clases abiertas en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ es fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Sea $C \subseteq \mathcal{L}_\mathcal{M}$ una clase abierta, veamos que

$$C^{\perp_{\leqslant/}} = \{L \in \mathcal{L}_\mathcal{M} | \text{ L no contiene ningún subintervalo no nulo en } C\}$$

es una clase abierta y es un seudocomplemento fuerte de C.
$C^{\perp_{\leqslant/}}$ es cerrada bajo intervalos iniciales y finales pues si $L \in C^{\perp_{\leqslant/}}$ y $a \in L$, cualquier subintervalo no nulo de $a/0$ y $1/a$ es también un subintervalo de L, por lo que no puede estar en C. Además si $L \in C \bigcap C^{\perp_{\leqslant/}}$, como $1_L/0_L$ es un intervalo de L se tiene que $L = 0$. Supongamos ahora que $D \subseteq \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es una clase abierta que cumple $C \bigcap D = 0$, sea $L \in D$, como D es cerrado bajo intervalos iniciales y finales, cualquier subintervalo de L está en D, por lo que L no puede contener intervalos no nulos en C, y por lo tanto $L \in C^{\perp_{\leqslant/}}$. □

Lema 2.56. *Si C es una clase abierta en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_S}$ y una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_S}$ tiene un subconjunto dirigido superiormente $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que los intervalos $x_i/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ para toda $i \in I$, entonces $\bigvee\limits_{i\in I} x_i/0$ es un elemento de $C^{\perp_{\leqslant,/}}$.*

Demostración. Si suponemos lo contrario existiría $0 \neq b/a \in C$ contenido en $\bigvee\limits_{i\in I} x_i/0$. Se tiene que $b = (\bigvee\limits_{i\in I} x_i) \bigwedge b = \bigvee\limits_{i\in I} (x_i \bigwedge b)$, además como $C^{\perp_{\leqslant,/}}$ es cerrado bajo intervalos iniciales se tiene que $(x_i \bigwedge b)/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ para toda $i \in I$.
Notemos que si $a \geqslant x_i \bigwedge b$ para toda $i \in I$ se tendría $a = b$ lo cual no es posible pues estamos suponiendo $b/a \neq 0$, por lo que debe existir $i_0 \in I$ tal que $x_{i_0} \bigwedge b \nleq a$, además tampoco puede ocurrir que $a < x_{i_0} \bigwedge b$ pues $(x_{i_0} \bigwedge b)/a \in C$ sería un subintervalo no nulo de $(x_{i_0} \bigwedge b)/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$. Por lo tanto $x_{i_0} \bigwedge b$ y a no son comparables, y considerando la modularidad de L se tiene que:

$$0 \neq (x_{i_0} \bigwedge b)/(x_{i_0} \bigwedge b) \bigwedge a \cong ((x_{i_0} \bigwedge b) \bigvee a)/a = ((x_{i_0} \bigvee a) \bigwedge b)/a \in C$$

Lo cual sería una contradicción pues $0 \neq (x_{i_0} \bigwedge b)/((x_{i_0} \bigwedge b) \bigwedge a) = (x_{i_0} \bigwedge b)/(x_{i_0} \bigwedge a)$ sería un subintervalo no nulo en C de $(x_{i_0} \bigwedge b)/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$. Por lo tanto $\bigvee\limits_{i\in I} x_i/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$. □

Observación 2.57. Con una prueba muy similar, el resultado dual al Lema 2.56 diría que si C es una clase abierta en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{I}}$ y una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{I}}$ tiene un subconjunto dirigido inferiormente $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que los intervalos $1/x_i \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ para toda $i \in I$ entonces $1/\bigwedge\limits_{i\in I} x_i \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$

Teorema 2.58. *Los seudocomplementos fuertes de clases abiertas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_S}$ son clases de torsión hereditarias.*

Demostración. Si $C^{\perp_{\leqslant,/}}$ es el seudocomplemento de una clase abierta, éste es cerrado bajo intervalos iniciales, finales, e isomorfismos, veamos entonces que es cerrado bajo extensiones y supremos de intervalos iniciales.

(Extensiones) Sea $0 \longrightarrow a/0 \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\bigvee a} 1/a \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $a/0, 1/a \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$. Si suponemos que L no es un elemento de $C^{\perp_{\leqslant,/}}$, existe un subintervalo no nulo $d/c \subseteq L$ elemento de C.
Dado que L es modular, $(a \bigvee c)/c \cong a/(a \bigwedge c)$. Entonces $((a \bigvee c) \bigwedge d)/c = ((a \bigwedge d) \bigvee c)/c$ es un elemento de C pues es un subintervalo de d/c, pero también es un subintervalo de $(a \bigvee c)/c$. Así, si fuera diferente de cero $a/(a \bigwedge c) \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ contendría un intervalo diferente de cero en C, lo cual no es posible. Por lo tanto $(a \bigvee c) \bigwedge d = c$.
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a/0 \arrow[r, "i_1"] & L \arrow[r, "_\bigvee a"] \arrow[d, "_\bigvee c"] & 1/a \arrow[r] \arrow[ddl, "_\bigvee c"] & 0 \\
 & d/c \arrow[r, "i_2"] & 1/c \arrow[d, "_\bigvee a"'] & & \\
 & & 1/(a \bigvee c) & &
\end{tikzcd}$$

Como $(a \bigvee c) \bigwedge d = c < d$ entonces $a \bigvee c \neq 1$ lo que implica $0 \neq 1/(a \bigvee c) \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ pues es un intervalo final de $1/a$. Veamos que $(\_ \bigvee a) \circ i_2$ es un monomorfismo lineal. Si $x \in d/c$ cumple que $x \bigvee a = c \bigvee a$ entonces $c = (a \bigvee c) \bigwedge d = (a \bigvee x) \bigwedge d$. Por otro lado, $x \leq a \bigvee x$ y $x \leq d$, por lo que $x \leq (a \bigvee x) \bigwedge d = c$. Como $x \in d/c$ se tiene que $x = c$.
Por último como, $1/(a \bigvee c) \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ y contiene a d/c como intervalo inicial, entonces d/c es un elemento de $C \bigcap C^{\perp_{\leqslant,/}}$, lo cual es una contradicción que viene de suponer que L no es un elemento de $C^{\perp_{\leqslant,/}}$.

(Supremos de intervalos iniciales) Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_S}$ y sea $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq L$ tal que los intervalos $x_i/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ para toda $i \in I$. Veamos que $\bigvee_{i \in I} x_i/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$.
Podemos suponer que I está bien ordenado. Nombremos $y_j = \bigvee_{i \leqslant j} x_i$. Probaremos por inducción que $y_j/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ para toda $j \in I$, para ello supongamos que $y_i/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ para toda $i < k$ y que $y_k/0$ no está en $C^{\perp_{\leqslant,/}}$, entonces existe un intervalo $0 \neq b/a \in C$ contenido en $y_k/0$.
Notemos que $y_k = \bigvee_{i \leqslant k} x_i = (\bigvee_{i<k} x_i) \bigvee x_k = (\bigvee_{i<k} y_i) \bigvee x_k$, y como $\{y_i\}_{i<k}$ es un subconjunto dirigido superiormente de L cuyos intervalos respectivos $\{y_i/0\}_{i<k} \subseteq C^{\perp_{\leqslant,/}}$, por el Lema 2.56 tenemos que $\bigvee_{i<k} y_i \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$.
Nombremos $z_k = \bigvee_{i<k} y_i$, entonces b no puede ser menor que z_k pues de ser así $z_k/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ contendría un intervalo no nulo en C.
Debido a la modularidad de L tenemos lo siguiente:

$$C^{\perp_{\leqslant,/}} \ni z_k/0 \supseteq (z_k \bigwedge b)/((z_k \bigwedge b) \bigwedge a) \cong ((z_k \bigwedge b) \bigvee a)/a = ((z_k \bigvee a) \bigwedge b)/a \in C.$$

Así, al ser $C^{\perp_{\leqslant,/}}$ una clase abierta se tiene que $(z_k \bigwedge b)/((z_k \bigwedge b) \bigwedge a) = (z_k \bigwedge b)/(z_k \bigwedge a) \in C^{\perp_{\leqslant,/}} \cap C = 0$, por lo que $z_k \bigwedge b = z_k \bigwedge a$.
Por otro lado podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_k \leq b$ pues de no ser así consideremos lo siguiente:

$$b/a = b/((z_k \bigwedge a) \bigvee a) = b/((z_k \bigwedge b) \bigvee a) = b/((z_k \bigvee a) \bigwedge b) \cong ((z_k \bigvee a) \bigvee b)/(z_k \bigvee a) = (z_k \bigvee b)/(z_k \bigvee a).$$

Si nombramos $b' = (z_k \bigvee b)$; $a' = (z_k \bigvee a)$ hemos encontrado un intervalo $b/a \cong b'/a' \in y_k/0$ que cumple que $b' \geqslant z_k$ y $b' \geqslant b$.
De manera análoga podemos encontrar un intervalo $b'/a' \cong b''/a'' = (b' \bigvee x_k)/(a' \bigvee x_k) \in y_k/0$ que cumple que $b'' \geqslant x_k$ y $b'' \geqslant b'$. Como $y_k = z_k \bigvee x_k \leqslant b'' \leqslant y_k$ se tiene que $b'' = y_k$.
Notemos que no pueden ocurrir $a'' < z_k$ ni $a'' < x_k$ pues de ser así los intervalos $z_k/0$ ó $x_k/0$ contendrían un intervalo no nulo en C. Además $a'' < b'' = (z_k \bigvee x_k)$ por lo que a'' no puede ser mayor o igual que $z_k \bigvee x_k$. Sin pérdida de generalidad supongamos que a'' no es comparable con x_k, entonces $x_k \bigwedge a'' < x_k$ por lo que $0 \neq x_k/x_k \bigwedge a'' \cong x_k \bigvee a''/a'' \in C$ lo cual es una contradicción pues $x_k/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$. Como la contradicción viene de suponer la existencia de b/a, se concluye que $y_k/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$.
Por último como $y_i/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$ para toda $i \in I$, y $\{y_i\}_{i \in I}$ es dirigido superiormente, nuevamente por el Lema 2.56 se tiene que $\bigvee_{i \in I} y_i/0 = \bigvee_{i \in I} x_i/0 \in C^{\perp_{\leqslant,/}}$. □

Observación 2.59. Por dualidad del Teorema 2.58 se tiene que los seudocomplementos fuertes de clases abiertas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{I}}}$ son clases libres de torsión cohereditarias, más aún, los seudocomplementos fuertes de clases abiertas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}}$ son clases TLT.

Corolario 2.60. *La gran retícula de prerradicales exactos izquierdos en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{S}}}$ es fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Sabemos que la gran retícula de prerradicales exactos izquierdos en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{S}}}$ es isomorfa a la gran retícula de clases de pretorsión hereditarias en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{S}}}$. Una clase de pretorsión hereditaria es una clase abierta, y gracias al Teorema 2.58 el seudocomplemento fuerte como clase abierta de una clase de pretorsión hereditaria resulta ser una clase de torsión hereditaria, a la cual le corresponde un radical exacto izquierdo. □

Teorema 2.61. *La gran retícula $\mathcal{L}_{\leq,ext}$ formada por las clases de retículas contenidas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cerradas bajo isomorfismos, intervalos iniciales y extensiones, es fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Sea C una clase en $\mathcal{L}_{\leq,ext}$, probaremos que

$$C^{\perp_{\leq,ext}} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | L \text{ no tiene ningún intervalo inicial no nulo en } C\}$$

es un seudocomplemento fuerte para C en $\mathcal{L}_{\leq,ext}$.
Notemos que si $L \in C \cap C^{\perp_{\leq,ext}}$, al ser $L = 1_L/0_L$ un intervalo inicial de L en C, éste tiene que ser nulo, pues $L \in C^{\perp_{\leq,ext}}$, y por lo tanto $C \cap C^{\perp_{\leq,ext}} = \{0\}$.
Veamos que $C^{\perp_{\leq,ext}}$ es cerrada bajo isomorfismos, intervalos iniciales y extensiones.
Si $L \in C^{\perp_{\leq,ext}}$ y $L' \cong L$ entonces ningún intervalo inicial no nulo de L' puede estar en C pues al ser C cerrada bajo isomorfismos L tendría un intervalo inicial no nulo en C, por lo que $C^{\perp_{\leq,ext}}$ es cerrada bajo isomorfismos.
Si $L \in C^{\perp_{\leq,ext}}$ y $a/0$ es un intervalo inicial de L, entonces $a/0$ no puede tener ningún intervalo inicial no nulo en C, pues todo intervalo inicial de $a/0$ es también un intervalo inicial de L. Por lo tanto $C^{\perp_{\leq,ext}}$ es cerrada bajo intervalos iniciales.
Si tenemos una sucesión exacta $0 \longrightarrow a/0 \longrightarrow L \xrightarrow{\_\bigvee a} 1/a \longrightarrow 0$ con $a/0$ y $1/a$ elementos de $C^{\perp_{\leq,ext}}$, y suponemos que L no es un elemento de $C^{\perp_{\leq,ext}}$, entonces existe $0 \neq b/0 \subseteq L$ tal que $b/0 \in C$. Como C y $C^{\perp_{\leq,ext}}$ son hereditarias $(a \bigwedge b)/0 \in C \cap C^{\perp_{\leq,ext}} = 0$, por lo que $a \bigwedge b = 0$. Consideremos la composición de morfismos lineales $b/0 \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\_\bigvee a} 1/a$; si $x \in b/0$ cumple que $x \leq a$ entonces $x = 0$ pues $a \bigwedge b = 0$, así el núcleo de $(\_ \bigvee a) \circ i$ es cero y esta composición es un monomorfismo; como $1/a \in C^{\perp_{\leq,ext}}$, entonces $b/0 \in C \cap C^{\perp_{\leq,ext}} = \{0\}$ lo cual es una contradicción que viene de suponer que L no es un elemento de $C^{\perp_{\leq,ext}}$. Por lo tanto $C^{\perp_{\leq,ext}}$ es cerrada bajo extensiones.
Por último, si D es una clase contenida en $\mathcal{L}_{\leq,ext}$ tal que $C \cap D = \{0\}$ y suponemos que D no está contenida en $C^{\perp_{\leq,ext}}$, entonces existiría una retícula $L \in D$ que tiene un intervalo inicial no nulo $a/0$ en C, lo cual sería una contradicción pues al ser D hereditaria $0 \neq a/0 \in C \cap D = \{0\}$. Por lo tanto $D \subseteq C^{\perp_{\leq,ext}}$. □

Definición 2.62. Si $\mathcal{L}$ es una gran retícula fuertemente seudocomplementada, definimos el esqueleto de $\mathcal{L}$ como la clase formada por los seudocomplementos fuertes en $\mathcal{L}$, y lo denotamos como $Esq(\mathcal{L})$.

Teorema 2.63. *Si P y Q son conjuntos de propiedades de cerradura aplicables a clases de retículas contenidas en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$, tales que las grandes retículas $\mathcal{L}_P$ y $\mathcal{L}_Q$ formadas por las clases de retículas en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ que tienen las propiedades de cerradura en los conjuntos P y Q respectivamente, son fuertemente seudocomplementadas y cumplen que $Esq(\mathcal{L}_P) \subseteq \mathcal{L}_Q \subseteq \mathcal{L}_P$, entonces $Esq(\mathcal{L}_Q) = Esq(\mathcal{L}_P)$.*

Demostración. Esta demostración coincide con la realizada en [4, Teorema 1.4] para grandes retículas de clases de R-módulos definidas mediante propiedades de cerradura. □

Corolario 2.64. *En la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}S}$ se tiene que $Esq(\mathcal{L}_{\leq,ext}) = Esq(\mathcal{L}_{\leq})$ y éstos coinciden con las clases cerradas bajo isomorfismos, intervalos iniciales, extensiones esenciales y supremos independientes.*

Demostración. Por [12, Teorema 4.14], $Esq(\mathcal{L}_{\leq})$ coincide con las clases cerradas bajo isomorfismos, intervalos iniciales, extensiones esenciales y supremos independientes.
Por otro lado, por [12, Lema 4.2] $Esq(\mathcal{L}_{\leq}) \subseteq \mathcal{L}_{\leq,ext} \subseteq \mathcal{L}_{\leq}$ y por el Teorema 2.63 se tiene el resultado. □

2.2 Sobre $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr

En [7] se investiga el reflejo de las propiedades de un anillo R en su correspondiente gran retícula R-pr de prerradicales en R-Mod, sin embargo en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ no contamos con una retícula que juegue un papel análogo al que juega el anillo en R-Mod, por lo que en esta sección se intentará investigar si el hecho de poner condiciones sobre el anillo puede suplirse por tomar subcategorías de $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ con ciertas propiedades con el fin de verificar algunos resultados análogos a los expresados en [7], pero en la categoría $\mathcal{L}_\mathcal{M}$.
Siguiendo este procedimiento, queremos tomar subcategorías de $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ en las que tenga sentido definir prerradicales y sea posible estudiar sus correspondientes grandes retículas de prerradicales, y en las que las condiciones que se les piden tengan cierta analogía con estar pidiendo condiciones sobre el anillo en R-Mod.
A lo largo de esta sección consideraremos subcategorías $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_\mathcal{M}$ que sean plenas, es decir, que aunque contengan sólo algunas de las retículas de $\mathcal{L}_\mathcal{M}$, para cualquier par de retículas $L, L' \in \mathcal{C}$, todos los morfismos lineales de L a L' estén contenidos en $\mathcal{C}$. Además para que tenga sentido definir prerradicales idempotentes y radicales, pediremos que estas subcategorías sean clases abiertas, es decir que para toda retícula $L \in \mathcal{C}$, cualquier subintervalo de L está en $\mathcal{C}$.

Definición 2.65. Para una subcategoría $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_\mathcal{M}$ cuyos objetos forman una clase abierta, decimos que un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{r} \mathcal{C}$ es un prerradical si:

(1) $r(L)$ es un intervalo inicial de L.

(2) Para cualquier morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$, con $L, L' \in \mathcal{C}$ se tiene que $f(r(L)) \subseteq r(L')$ y $r(f) : r(L) \longrightarrow r(L')$ definida como la restricción y correstricción de f es un morfismo lineal.

Dada una subcategoría $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_\mathcal{M}$ con estas características se denotará con $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr a la gran retícula de prerradicales definidos en $\mathcal{C}$.

Teorema 2.66. *Para una clase abierta $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr si y sólo si r es una asignación de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ que cumple:*

(i) $r(L)$ es un intervalo inicial de L para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

(ii) Para todo morfismo lineal $f : L \longrightarrow L'$ se tiene que $f(r(L)) \subseteq r(L')$.

Demostración. Es análoga a la prueba de [11, Lema 3.2]. □

Definición 2.67. Dada una familia $\{r_i\}_{i\in I}$ de prerradicales en $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr, definimos el supremo e ínfimo de dicha familia como

$$(\bigvee_{i\in I} r_i)(L) = (\bigvee_{i\in I} X_L^{r_i})/0_L \qquad\qquad (\bigwedge_{i\in I} r_i)(L) = (\bigwedge_{i\in I} X_L^{r_i})/0_L.$$

Como se vió en el Ejemplo 2.7 la gran retícula de prerradicales idempotentes en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ no es una subretícula de la gran retícula de prerradicales, por lo que surge la pregunta de qué condiciones sería necesario pedirle a una clase hereditaria $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ para que esto ocurra. El Teorema 2.72 nos revela una de estas condiciones.

Observación 2.68. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una clase abierta y r es un prerradical en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, entonces la restricción $r|_{\mathcal{C}}$ pertenece a $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr.

Definición 2.69. Diremos que dos retículas N y M comparten una subrretícula L si N y M tienen sub-retículas isomorfas a L. Diremos que comparten un intervalo inicial si hay una retícula que es isomorfa a un intervalo inicial de cada una de las dos retículas.

Definición 2.70. Dada una familia finita de retículas $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ definimos la concatenación $(L_1, L_2, ..., L_n)_c$ como la retícula cuyos elementos son $(\bigcup_{i\in\{1,...,n\}} L_i)/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $\bigcup_{i\in\{1,...,n\}} L_i$ en la cual $1_{L_i} \sim 0_{L_{i+1}}$ para toda $i \in \{1, ..., n-1\}$, y el resto de los elementos de la unión sólo están relacionados consigo mismos y cuyo orden para dos elementos $x, y \in (L_1, L_2, ..., L_n)_c$ está dado por $x \leq y$ si y sólo si existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que $x \in L_i$; $y \in L_j$ ó $x, y \in L_i$ y con el orden de L_i se tiene que $x \leq y$.

Observación 2.71. Notemos que la concatenación de retículas modulares y completas sigue siendo modular y completa.

Teorema 2.72. *Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una clase abierta y cerrada bajo concatenaciones en la cual la gran retícula de prerradicales idempotentes es cerrada bajo ínfimos, entonces cualquier par de retículas no nulas en $\mathcal{C}$, comparten algún subintervalo no nulo isomorfo.*

Demostración. Supongamos que L y M son dos retículas no nulas en $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ que no comparten ningún subintervalo no nulo isomorfo. Luego consideremos las siguientes dos clases:

$$\mathbb{T}_G = \left\{ T \in \mathcal{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{todo intervalo final no nulo de } T \text{ tiene un} \\ \text{intervalo inicial no nulo isomorfo a un cociente} \\ \text{de } L \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{T}_C = \left\{ T \in \mathcal{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{ningún intervalo final no nulo de } T \text{ es isomorfo} \\ \text{a uno inicial de } L \end{array} \right\}.$$

Son cerradas bajo isomorfismos e intervalos finales, veamos que son cerradas bajo supremos de intervalos iniciales. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que $x_i/0 \in \mathbb{T}_G$ para todo $i \in I$ y supongamos que $\bigvee_{i\in I} x_i/y$ es un intervalo final no nulo de $\bigvee_{i\in I} x_i/0_L$, entonces existe $j \in I$ tal que $x_j \not\leq y$, por lo que $x_j \bigwedge y < x_j$. Como $x_j/0 \in \mathbb{T}_G$, $x_j/(x_j \bigwedge y)$ tiene un intervalo inicial no nulo isomorfo a un cociente de L; por modularidad $x_j/(x_j \bigwedge y) \cong (x_j \bigvee y)/y$, por lo que $\bigvee_{i\in I} x_i/y$ tiene un intervalo inicial no nulo isomorfo a un cociente de L.
Por otro lado si suponemos que $x_i/0 \in \mathbb{T}_C$ para todo $i \in I$ y que $\bigvee_{i\in I} x_i/y$ es un intervalo final no nulo de $\bigvee_{i\in I} x_i/0_L$ isomorfo a un intervalo inicial de L, como existe $j \in I$ tal que $x_j \not\leq y$, entonces $x_j \bigwedge y < x_j$ y, por modularidad $x_j/(x_j \bigwedge y) \cong (x_j \bigvee y)/y$, entonces $x_j/0_L$ tiene un intervalo final no nulo isomorfo a un intervalo inicial de L, lo cual es una contradicción y por lo tanto $\bigvee_{i\in I} x_i/0_L \in \mathbb{T}_C$.
Si r_G y r_C son sus respectivos prerradicales idempotentes asociados, veremos que el ínfimo de ambos no es idempotente.
Consideremos a la concatenación $(L,M,L)_c = K$. Tenemos que $(r_G \bigwedge r_C)(K) = L$, pero $(r_G \bigwedge r_C)(L) = 0$. □

Definición 2.73. Diremos que un elemento a de una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es fuertemente invariante en L, y lo denotaremos como $a \in_{f.i.} L$ si para todo endomorfismo lineal $L \xrightarrow{f} L$ se tiene que $f(a) \leq a$.

Observación 2.74. Si $L \xrightarrow{f} M$ es un morfismo lineal, $a \in M$, y $X = \{x \in L | f(x) \leq a\}$, debido a que los morfismos lineales abren supremos arbitrarios por [11, Proposición 2.4.-(i)], entonces $f(\bigvee_{x\in X} x) = \bigvee_{x\in X} f(x) \leq a$ y $\bigvee_{x\in X} x \in X$. Como los morfismos lineales respetan orden por [17, Corolario 1.4.] tenemos que X es un intervalo inicial de L. Denotaremos $f^{-1}(a) = \bigvee_{x\in X} x$.

Definición 2.75. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $a \in_{f.i.} L$ definimos a las asignaciones $\alpha^L_{a/0}, \omega^L_{a/0} : \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ como:

$$\alpha^L_{a/0}(M) = (\bigvee\{f(a) | f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,M)\})/0$$

$$\omega^L_{a/0}(M) = (\bigwedge\{f^{-1}(a) | f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(M,L)\})/0.$$

$\alpha^L_{a/0}$ y $\omega^L_{a/0}$ son prerradicales por [11, Proposiciones 5.2. y 5.8.], y para cualquier clase abierta $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ las restricciones $\alpha^L_{a/0}|_{\mathcal{C}}$ y $\omega^L_{a/0}|_{\mathcal{C}}$ son prerradicales en $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr por la Observación 2.68.

Proposición 2.76. *[11, Proposición 5.10.] Sean $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $a \in_{f.i.} L$ y $r \in \mathcal{L}$-pr, entonces $r(L) = a/0$ si y sólo si $\alpha^L_{a/0} \leq r \leq \omega^L_{a/0}$.*

Lema 2.77. *Dada una clase abierta $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, y $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr, r es idempotente si y sólo si $r = \bigvee_{r(L)=L\in\mathcal{C}} \alpha^L_L|_{\mathcal{C}}$.*

Demostración. La demostración es análoga a la de [11, Proposición 6.7.-(i)]. □

Definición 2.78. Para una clase abierta $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y un prerradical $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr diremos que r es primo si $r \neq Id_{\mathcal{C}}$ y siempre que existan prerradicales $s, t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr tales que $s \circ t \leq r$ se tiene que $s \leq r$ ó $t \leq r$. Diremos que r es semiprimo si $r \neq Id_{\mathcal{C}}$ y siempre que exista un prerradical $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr tal que $t^2 \leq r$ se tiene que $t \leq r$.

El caso más sencillo en el que la gran retícula de prerradicales idempotentes es una subretícula de la gran retícula de prerradicales se da cuando $\mathcal{C}$ es una clase contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ para la cual todos los prerradicales definidos en $\mathcal{C}$ son idempotentes. Para comenzar a estudiar este tipo de clases resulta útil el siguiente lema.

Lema 2.79. *Las siguientes afirmaciones para una clase abierta $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ son equivalentes:*

(a) $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$*-pr=*$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$*-idem.*

(b) Para cualquier par de prerradicales $r, t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr se tiene que $r \bigwedge t = r \circ t$.

(c) Para toda retícula $M \in \mathcal{C}$ y $k \in_{f.i.} M$ se tiene que $\alpha^{M}_{k/0}|_{\mathcal{C}} = \alpha^{k/0}_{k/0}|_{\mathcal{C}}$.

(d) Todo prerradical $Id_{\mathcal{C}} \neq r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr es semiprimo.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$ Por la definición de prerradical se tiene que $r \circ t \leq r \bigwedge t$, además como todos los prerradicales son idempotentes se tiene que $r \bigwedge t = (r \bigwedge t)^2 \leq r \circ t$.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Si r es un prerradical entonces $r^2 = r \bigwedge r = r$ y por lo tanto r es idempotente.
$(a) \Longrightarrow (c)$ Si $k \in_{f.i.} L$, por un lado $\alpha^{M}_{k/0}(k/0) = \alpha^{M}_{k/0} \circ \alpha^{M}_{k/0}(M) = \alpha^{M}_{k/0}(M) = k/0$, además por el Lema 2.77 sabemos que un prerradical $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr es idempotente si y sólo si $r = \bigvee_{r(L)=L\in\mathcal{C}} \alpha^{L}_{L}$, por lo que $\alpha^{M}_{k/0}|_{\mathcal{C}} = \bigvee_{\alpha^{M}_{k/0}(L)=L\in\mathcal{C}} \alpha^{L}_{L}|_{\mathcal{C}}$ y así $\alpha^{k/0}_{k/0}|_{\mathcal{C}} \leq \alpha^{M}_{k/0}|_{\mathcal{C}}$.
Por otro lado $k/0 \leq \alpha^{k/0}_{k/0}(M) \leq \alpha^{M}_{k/0}(M) = k/0$, por lo que $\alpha^{k/0}_{k/0}(M) = k/0$ y por la Proposición 2.76 $\alpha^{M}_{k/0} \leq \alpha^{k/0}_{k/0}$, por lo que $\alpha^{M}_{k/0}|_{\mathcal{C}} \leq \alpha^{k/0}_{k/0}|_{\mathcal{C}}$ y se tiene la igualdad.
$(c) \Longrightarrow (a)$ Probaremos primero que para todo prerradical $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr se tiene que $r = \bigvee_{L\in\mathcal{C}} \alpha^{L}_{r(L)}|_{\mathcal{C}}$ pues, por un lado, para toda $M \in \mathcal{C}$ se tiene que $r(M) = \alpha^{M}_{r(M)}(M) \subseteq (\bigvee_{L\in\mathcal{C}} \alpha^{L}_{r(L)})(M)$.

Por otro lado para cualquier par de retículas $L, M \in \mathcal{C}$, aplicando r al morfismo lineal $M \xrightarrow{f} L$ obtenemos $r(M) \xrightarrow{f} r(L)$, por lo que $f(r(M)) \subseteq r(L)$ y así $\alpha^{M}_{r(M)}(L) \subseteq r(L)$, entonces $\bigvee_{L\in\mathcal{C}} \alpha^{L}_{r(L)}|_{\mathcal{C}} \leq r$ y se tiene la igualdad.
Tenemos entonces que si $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr

$$r = \bigvee_{L\in\mathcal{C}} \alpha^{L}_{r(L)}|_{\mathcal{C}} = \bigvee_{L\in\mathcal{C}} \alpha^{r(L)}_{r(L)}|_{\mathcal{C}}$$

y por [11, Proposición 6.7.-(i)] $\alpha^{r(L)}_{r(L)}$ es idempotente para toda $L \in \mathcal{C}$, además por el Teorema 2.8 supremos arbitrarios de prerradicales idempotentes son idempotentes, por lo tanto r es idempotente.
$(a) \Longrightarrow (d)$ Supongamos que $r, t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr y $t^2 \leq r$, por hipótesis $t = t^2 \leq r$.
$(d) \Longrightarrow (a)$ Para todo prerradical $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr se tiene que $r^2 \leq r^2$ y al ser r^2 semiprimo se concluye que $r \leq r^2 \leq r$, por lo que r es idempotente. □

Lema 2.80. *Ínfimos arbitrarios de prerradicales semiprimos son semiprimos.*

Demostración. Sea $\{r_i\}_{i\in I}$ una familia de prerradicales semiprimos, y sea $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr tal que $t^2 \leq \bigwedge_{i\in I} r_i$, entonces para toda $i \in I$ se tiene que $t^2 \leq r_i$, por lo que $t \leq r_i$ y así $t \leq \bigwedge_{i\in I} r_i$ □

Observación 2.81. Dada una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos fuertemente invariantes en L se tiene que $\bigvee_{i\in I} x_i \in_{f.i.} L$.

Demostración. Sea $L \xrightarrow{f} L$ un morfismo lineal. Por [11, Proposición 2.4.], los morfismos lineales conmutan con supremos arbitrarios, por lo que $f(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} f(x_i) \leq \bigvee_{i\in I} x_i$. □

Definición 2.82. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, y $1_L \neq k \in_{f.i.} L$, diremos que k es primo en L si para cualquier par de elementos $x, y \in_{f.i.} L$ tales que $\alpha^L_{x/0}(y/0) \subseteq k/0$ se tiene que $x \leq k$ o $y \leq k$.

Lema 2.83. *Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, y $k \in_{f.i.} L$, si $r \in \mathcal{L}$-pr cumple que $r(L) \subseteq k/0$, entonces $r \leq \omega^L_{k/0}$.*

Demostración. Consideremos un morfismo lineal $M \xrightarrow{f} L$, aplicando r, $r(M) \xrightarrow{f} r(L) \subseteq k/0$, por lo que $r(M) \subseteq f^{-1}(k/0)$ y así $r \leq \omega^L_{k/0}$. □

Lema 2.84. *Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, entonces $k \in L$ es primo si y sólo si $\omega^L_{k/0}$ es primo.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Como k es primo, $k \neq 1_L$, por lo que $\omega^L_{k/0} \neq Id$. Sean r, t prerradicales tales que $t \circ r \leq \omega^L_{k/0}$. Antes de continuar observemos que $\alpha^L_{t(L)}(r(L)) \leq (t \circ r)(L)$ pues si $L \longrightarrow r(L)$ es un morfismo lineal cualquiera, aplicándole t obtenemos $t(L) \longrightarrow t(r(L))$.
Entonces

$$\alpha^L_{t(L)}(r(L)) \leq (t \circ r)(L) \leq \omega^L_{k/0}(L) = k/0,$$

como k es primo en L se tiene que $X^L_t \leq k$ ó $X^L_r \leq k$ pero por el Lema 2.83 se concluye que $t \leq \omega^L_{k/0}$ ó $r \leq \omega^L_{k/0}$ y por lo tanto $\omega^L_{k/0}$ es primo.
$\Longleftarrow$) Si $\omega^L_{k/0}$ es primo, $\omega^L_{k/0} \neq Id$, por lo que $k \neq 1_L$. Sean $x, y \in_{f.i.} L$ tales que $\alpha^L_{x/0}(y/0) \subseteq k/0$. Tenemos que $\alpha^L_{x/0}(y/0) = \alpha^L_{x/0} \circ \alpha^L_{y/0}(L)$. Antes de continuar notemos que $X^{y/0}_{\alpha^L_{x/0}}$ es un elemento fuertemente invariante de L pues si $L \xrightarrow{f} L$ es un morfismo lineal, dado que y es un elemento fuertemente invariante de L, la restricción de f dada por $y/0 \longrightarrow y/0$ está bien definida, por lo que aplicando $\alpha^L_{x/0}$ a la restricción se obtiene que $f(X^{y/0}_{\alpha^L_{x/0}}) \leq X^{y/0}_{\alpha^L_{x/0}}$.
Utilizando el hecho de que $\alpha^L_{x/0}(y/0) = \alpha^L_{x/0} \circ \alpha^L_{y/0}(L)$ y [11, Proposición 5.10.] obtenemos que

$$\alpha^L_{x/0} \circ \alpha^L_{y/0} \leq \omega^L_{\alpha^L_{x/0}(y/0)} \leq \omega^L_{k/0}.$$

Como $\omega^L_{k/0}$ es primo, entonces $\alpha^L_{x/0} \leq \omega^L_{k/0}$ ó $\alpha^L_{y/0} \leq \omega^L_{k/0}$, aplicando estos prerradicales a L obtenemos que $x \leq k$ ó $y \leq k$ y por lo tanto k es primo. □

Lema 2.85. *Ínfimo de conjuntos totalmente ordenados de prerradicales primos es primo.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ un conjunto totalmente ordenado formado por prerradicales primos, sea $s = \bigwedge_{p\in\mathcal{P}} p$, y sean r,t prerradicales tales que $r \circ t \leq s$. Si $r \leq p$ para todo $p \in \mathcal{P}$, entonces $r \leq s$; y en caso de que exista $p_0 \in \mathcal{P}$ tal que r no es menor o igual que p_0, entonces para cualquier otro elemento $p_1 \in \mathcal{P}$ con $p_1 \leq p_0$ se tiene que r no puede ser menor o igual a p_1, sin embargo $r \circ t$ si es menor o igual que todos los prerradicales $p_1 \in \mathcal{P}$ con $p_1 \leq p_0$, y como estos son primos entonces para todo prerradical $p_1 \in \mathcal{P}$ con $p_1 \leq p_0$ se tiene que $t \leq p_1$, de donde $t \leq p$ para todo $p \in \mathcal{P}$ y por lo tanto $t \leq s$. Por lo tanto s es primo. □

Lema 2.86. *Para todo prerradical $r \in \mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr se tiene que $r = \bigwedge_{L\in\mathcal{C}} \omega^L_{r(L)}|_\mathcal{C}$.*

Demostración. Para toda $M \in \mathcal{C}$ se tiene que $(\bigwedge_{L\in\mathcal{C}} \omega^L_{r(L)})(M) \leq \omega^M_{r(M)}(M) = r(M)$.

Por otro lado, para todo par de retículas $L,M \in \mathcal{C}$ y todo morfismo lineal $L \xrightarrow{f} M$, se tiene que $f(r(L)) \subseteq r(M)$, por lo que $r(L) \subseteq \omega^M_{r(M)}(L)$ y así $r(L) \subseteq (\bigwedge_{M\in\mathcal{C}} \omega^M_{r(M)})(L)$, con lo cual se tiene la igualdad buscada. □

Teorema 2.87. *Las siguientes afirmaciones para una clase abierta $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ son equivalentes:*

(a) $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr=$\mathcal{L}_\mathcal{C}$-idem y además $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr está totalmente ordenado.

(b) Todo prerradical $Id_\mathcal{C} \neq r \in \mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr es primo.

(c) $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr está totalmente ordenado y para toda retícula $L \in \mathcal{C}$ y $k \in_{f.i.} L$ se tiene que k es primo en L.

(d) Para todo prerradical $r \in \mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr, la clase $\{\omega^L_{r(L)}|_\mathcal{C} \mid L \in \mathcal{C}, r(L) < L\}$ está totalmente ordenada y para toda retícula $L \in \mathcal{C}$ y $k \in_{f.i.} L$ se tiene que k es primo en L.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$ Sean $r,s,t \in \mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr con $r \neq Id_\mathcal{C}$ y tales que $s \circ t \leq r$, como $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr está totalmente ordenado podemos suponer que $s \leq t$, luego $s = s^2 \leq s \circ t \leq r$, por lo que r es primo.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Si todo prerradical diferente de la identidad es primo, entonces es semiprimo, y por el Lema 2.79 se tiene que $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr=$\mathcal{L}_\mathcal{C}$-idem. Además si $r,t \in \mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr y $r = Id_\mathcal{C}$, entonces $t \leq r$ y si $r \neq Id_\mathcal{C}$, como $r \circ t \leq r \circ t$ y $Id_\mathcal{C} \neq r \circ t$ es primo, entonces $r \leq r \circ t \leq t$ ó $t \leq r \circ t \leq r$, por lo tanto $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr está totalmente ordenado.
$(b) \Longrightarrow (c)$ Como (a) es equivalente a (b) sabemos que $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr está totalmente ordenado, luego si $L \in \mathcal{C}$ y $k \in_{f.i.} L$ entonces $\omega^L_{k/0}$ es primo y por el Lema 2.84 se tiene que k es primo en L.
$(c) \Longrightarrow (d)$ Se debe a que todo subconjunto de un conjunto totalmente ordenado está totalmente ordenado.
$(d) \Longrightarrow (b)$ Sea $1 \neq r \in \mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr. En el Lema 2.86 se probó que para todo prerradical $t \in \mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr se tiene que $t = \bigwedge_{L\in\mathcal{C}} \omega^L_{t(L)}|_\mathcal{C}$, y como $r \neq 1$ se tiene que

$$r = \bigwedge_{L\in\mathcal{C}} \omega^L_{r(L)}|_\mathcal{C} = \bigwedge_{\{L\in\mathcal{C} \mid r(L)<L\}} \omega^L_{r(L)}|_\mathcal{C}.$$

Sin embargo si $r(L) < L$, entonces $X_r^L < 1_L$ es un elemento fuertemente invariante en L y es primo en L por hipótesis, por lo que $\omega_{r(L)}^L|_{\mathcal{C}}$ es primo por el Lema 2.84 , por lo tanto por el Lema 2.85 r es primo. $\square$

Definición 2.88. Para una clase abierta $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ denotaremos a las grandes retículas de prerradicales idempotentes, radicales, prerradicales exactos izquierdos y radicales que preservan epimorfismos respectivamente como $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-idem, $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-rad, $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pei, $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-trad.

Definición 2.89. Para cualquier par de prerradicales $r, t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr se define el prerradical $(r : t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr, como aquel que cumple que, en toda retícula $L \in \mathcal{C}$, $X_L^{(r:t)} = X_{1_L/X_L^r}^t$

Definición 2.90. Diremos que un prerradical $0 \neq r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr es coprimo si siempre que existan prerradicales $s, t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr tales que $r \leq (s : t)$, se tiene que $r \leq s$ o $r \leq t$. Diremos que es semicoprimo si siempre que exista un prerradical $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr tal que $r \leq (t : t)$, entonces $r \leq t$.

Lema 2.91. *Dada una clase abierta $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, y $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr, r es un radical si y sólo si $r = \bigwedge_{r(L)=L\in\mathcal{C}} \omega_0^L|_{\mathcal{C}}$.*

Demostración. La demostración es análoga a la de [11, Proposición 6.7.-(ii)]. $\square$

Teorema 2.92. *Las siguientes afirmaciones para una clase $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ son equivalentes.*

(a) $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$*-pr=*$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$*-Rad.*

(b) Para cualquier par de prerradicales $r, t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$*-pr,* $(r : t) = r \bigvee t$.

(c) Para toda retícula $M \in \mathcal{C}$ *y* $k \in_{f.i.} M$ *se tiene que* $\omega_{k/0}^M|_{\mathcal{C}} = \omega_0^{1_M/k}|_{\mathcal{C}}$.

(d) Todo prerradical $0 \neq r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$*-pr es semicoprimo.*

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$ Para ver que $r \bigvee t \leq (r : t)$ apliquemos t a $L \xrightarrow{-\bigvee X_L^r} 1_L/X_L^r$ para obtener

$$X_L^t/0_L \xrightarrow{-\bigvee X_L^r} X_{1_L/X_L^r}^t/X_L^r = X^{(r:t)}/X^r.$$

La desigualdad buscada se obtiene del hecho de que t es un prerradical.
Por otro lado como $r \bigvee t$ es un radical entonces $(r : t) \leq (r \bigvee t : r \bigvee t) = r \bigvee t$ con lo que se tiene la igualdad.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Para toda $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr se tiene que $(r : r) = r \bigvee r = r$ y por lo tanto r es un radical.
$(a) \Longrightarrow (c)$ Primero notemos que $\omega_{k/0}^M(M) = (\bigwedge\{f^{-1}(k) | f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(M, M)\})/0$, como k es un elemento fuertemente invariante en M, entonces $k \leq f^{-1}(k)$ para todo $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(M, M)$, por lo que $k/0 \subseteq \omega_{k/0}^M(M)$, y por otro lado si consideramos $M \xrightarrow{Id} M$, se tiene que $(Id)^{-1}(k) = k$ y por lo tanto $k/0 = \omega_{k/0}^M(M)$. Tenemos entonces lo siguiente:

$$\omega_{k/0}^M(1_M/k) = \omega_{k/0}^M(1_M/X_M^{\omega_{k/0}^M}) = k/k$$

pues $\omega^M_{k/0}$ es un radical, luego por el Lema 2.91 se tiene que $\omega^M_{k/0}|_{\mathcal{C}} = \bigwedge_{\omega^M_{k/0}(L)=L} \omega^L_0|_{\mathcal{C}}$ y por lo tanto $\omega^M_{k/0}|_{\mathcal{C}} \leq \omega_0^{1_M/k}|_{\mathcal{C}}$.

Por otro lado si consideramos el morfismo lineal $M \xrightarrow{\_\bigvee k} 1_M/k$ tenemos que $(\_\bigvee k)^{-1}(k) = k$, y por lo tanto

$$k = X_M^{\omega^M_{k/0}} \leq X_M^{\omega_0^{1_M/k}} \leq k,$$

entonces $\omega_0^{1_M/k}(M) = k/0$ y por la Proposición 2.76 $\omega_0^{1_M/k} \leq \omega^M_{k/0}$, de donde $\omega_0^{1_M/k}|_{\mathcal{C}} \leq \omega^M_{k/0}|_{\mathcal{C}}$ con lo que se tiene la igualdad.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Por el Lema 2.86 tenemos lo siguiente:

$$r = \bigwedge_{L\in\mathcal{C}} \omega^L_{r(L)}|_{\mathcal{C}} = \bigwedge_{L\in\mathcal{C}} \omega_0^{1_L/X^r_L}|_{\mathcal{C}},$$

sin embargo por [11, Proposición 6.7.-(ii)] se tiene que $\omega_0^{1_L/X^r_L}|_{\mathcal{C}}$ es un radical para toda $L \in \mathcal{C}$, y por la Observación 2.18 ínfimos arbitrarios de radicales son radicales, por lo que r es un radical.

$(a) \Longrightarrow (d)$ Sean $r, t \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr y supongamos que $r \leq (t : t)$, como t es un radical se tiene que $r \leq (t : t) = t$ y por lo tanto r es semicoprimo.

$(d) \Longrightarrow (a)$ Sea $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr, $(r : r) \leq (r : r)$, si $(r : r) = 0$ entonces r es un radical, y si $(r : r) \neq 0$, por hipótesis $(r : r)$ es semiprimo, y $r \leq (r : r) \leq r$. Por lo tanto r es un radical. □

Teorema 2.93. *Si $\mathcal{C}$ es una clase contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ formada por retículas complementadas, entonces $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr=$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pei=$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-trad.*

Demostración. Sea $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr, $L \in \mathcal{C}$ y b un complemento en L de X^r_L entonces por la modularidad de L existe un isomorfismo de retículas $1/b \cong X^r_L/0$. Consideremos el morfismo lineal

$$L \xrightarrow{\_\bigvee b} 1/b$$

aplicándole r obtenemos

$$X^r_L/0 \xrightarrow{\_\bigvee b} r(1/b).$$

pero como $X^r_L \bigvee b = 1$ se tiene que $r(1/b) = 1/b$ y como $1/b \cong X^r_L/0$, entonces $r(X^r_L/0) = X^r_L/0$ y por lo tanto r es idempotente.

Por otro lado también gracias a la modularidad de L se tiene que $b/0 \cong 1/X^r_L$. Consideremos el morfismo lineal dado por la inclusión

$$b/0 \longrightarrow L$$

aplicándole r obtenemos

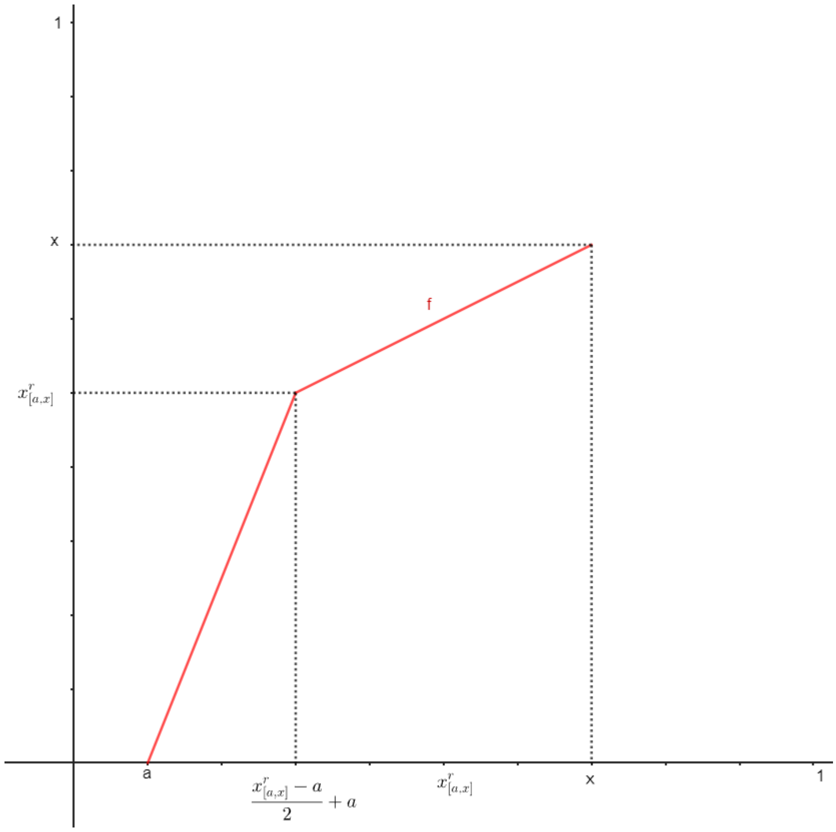
$$r(b/0) \longrightarrow X^r_L/0$$

por lo que $X^r_{b/0} \leq b \bigwedge X^r_L = 0$, y $r(b/0) = 0$. Como $b/0 \cong 1/X^r_L$ se tiene que $r(1/X^r_L) = 0$ y por lo tanto r es un radical.
Por último, notemos que todo intervalo final $1/a$ de una retícula complementada $L \in \mathcal{C}$ es isomorfo al intervalo inicial $b/0$ donde b es un complemento de a en L y viceversa. Así si $M \in \mathcal{C}$ está en la clase de pretorsión $\mathbb{T}_r$ y $a \in M$, entonces el intervalo inicial $a/0$ es isomorfo a un intervalo final de M, y al ser $\mathbb{T}_r$ cerrada bajo intervalos finales e isomorfismos se tiene que $a/0 \in \mathbb{T}_r$ y $\mathbb{T}_r$ es hereditaria. Por el Teorema 2.24 r es exacto izquierdo.
Por otro lado, si $M \in \mathcal{C}$ está en la clase libre de pretorsión $\mathbb{F}_r$, y $a \in M$ entonces el intervalo final $1/a$ es isomorfo a un intervalo inicial de M, y al ser $\mathbb{F}_r$ cerrada bajo intervalos iniciales e isomorfismos se tiene que $1/a \in \mathbb{F}_r$ y $\mathbb{F}_r$ es cohereditaria. Por el Teorema 2.27 r preserva epimorfismos. □

El recíproco del Teorema 2.93 no es cierto como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.94. Nombremos $\mathcal{C} = \{[a,x] \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \leq a \leq x \leq 1\}$ donde los intervalos $[a,x]$ tienen el orden inducido por los reales. Notemos que los únicos prerradicales en $\mathcal{C}$ son el cero y la identidad, pues si existiera algún prerradical $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-pr diferente de cero y la identidad, existirían reales $0 \leq a < x \leq 1$ tales que $a < X^r_{[a,x]} < x$, sin embargo si nombramos $y = X^r_{[a,x]}$ y consideramos el isomorfismo de retículas dado por $f : [a,x] \longrightarrow [0,x]$, cuya regla de correspondencia es

$$f(z) = \left\{ \begin{array}{c} 2(z-a) \text{ si } a \leq z \leq (((X^r_{[a,x]} - a/2) + a). \\ (\frac{x-y}{x-((y+a)/2)})(z-((y+a)/2)) + y \text{ si } (((X^r_{[a,x]} - a)/2) + a) \leq z \leq x. \end{array} \right\}$$



entonces f es una función estrictamente creciente y $f(((X^r_{[a,x]} - a)/2) + a) = X^r_{[a,x]}$, por lo que $f(X^r_{[a,x]}) > X^r_{[a,x]}$ y así, al aplicar r al morfismo lineal f, este no queda bien definido en todo su dominio, lo cual es una contradicción que viene de suponer la existencia de r. Por lo tanto los únicos prerradicales en $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ son el cero y la identidad, de ahí que $\mathcal{L}_\mathcal{C}$-pr=$\mathcal{L}_\mathcal{C}$-ei=$\mathcal{L}_\mathcal{C}$-trad. Sin embargo ninguna retícula no trivial en $\mathcal{C}$ es complementada.

2.3 Sobre retículas semiartinianas

Definición 2.95. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es semiartiniana si para todo elemento $a \in L$, $a \neq 1$ se tiene que la retícula $1_L/a$ tiene un átomo.

Nombraremos $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CS}}}$ a la categoría de las retículas modulares completas continuas superiormente y semiartinianas cuyos morfismos son los morfismos lineales.

Teorema 2.96. *$\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CS}}}$ es una clase de torsión hereditaria.*

Demostración. Por [5, Proposición 5.3], $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CS}}}$ es cerrada bajo intervalos iniciales, finales y extensiones, y por [5, Proposición 5.4], $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CS}}}$ es cerrada bajo supremos arbitrarios de intervalos iniciales. □

Al ser $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CS}}}$ una clase de torsión hereditaria le corresponde un radical exacto izquierdo que según el isomorfismo de retículas dado en el Teorema 2.6 se construye de la siguiente manera:
Para toda $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$ diremos que un elemento $a \in L$ es semiartiniano si la retícula $a/0_L$ es semiartiniana. Nombremos $\mathcal{S}_L$ al conjunto de todos los elementos semiartinianos de L, y definimos el prerradical $T : \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$ como $T(L) = \bigvee_{a \in \mathcal{S}_L} a/0$. T es el radical exacto izquierdo buscado. Notemos que $T(L)$ contiene a todos los átomos de L.

A $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CS}}}$ le corresponde una clase libre de torsión en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$ a la que llamaremos $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CF}}}$ de manera que la pareja $(\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CS}}}, \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CF}}})$ es una teoría de torsión.

Teorema 2.97. $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CF}}} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}} |$ *todo intervalo inicial no nulo de L es infinito* $\}$

Demostración. Recordemos que $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CF}}} = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}} | T(L) = 0\}$. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CF}}}$, si L tuviera un intervalo inicial no nulo $a/0$ finito entonces cualquier intervalo final no nulo de $a/0$ sería finito y por lo tanto tendría un átomo, de donde $0 \neq a < T(L) = 0$, lo cual es una contradicción y por lo tanto todo intervalo inicial no nulo de L es infinito.
Por otro lado, si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$ cumple que todos sus intervalos iniciales no nulos son infinitos, L no puede tener átomos, así cualquier intervalo inicial no nulo $a/0$ no tiene átomos, entonces no es semiartiniano y por lo tanto $T(L) = 0$. □

Teorema 2.98. *En $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}}$ se tiene que $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\mathcal{CS}}}$ es la clase de torsión generada por la clase $\mathcal{C}_s$ formada por todas las retículas de dos elementos.*

Demostración. Recordemos que la clase de torsión generada por $\mathcal{C}_s$ es

$$L(R(\mathcal{C}_s)) = \{T \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}} | Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(T, F) = 0 \text{ para toda } F \in L(\mathcal{C}_s)\}$$

mientras que

$$R(\mathcal{C}_s) = \{F \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_S} | Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(C,F) = 0 \text{ para toda } C \in \mathcal{C}_s\} = \{F \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_S} | F \text{ no tiene átomos }\}.$$

Si $T \in L(R(\mathcal{C}_s))$ y $1/a$ es un intervalo final de T, entonces si $1/a$ no tuviera átomos, dado que $L(R(\mathcal{C}_s))$ es una clase de torsión y es cerrada bajo intervalos finales, $1/a$ sería un elemento de $L(R(\mathcal{C}_s)) \bigcap R(\mathcal{C}_s) = 0$ y por lo tanto todo intervalo final no nulo de T tiene átomos y T es semiartiniano.
Por otro lado si L es una retícula semiartiniana, $F \in R(\mathcal{C}_s)$ y suponemos que $\varphi : L \longrightarrow F$ es un morfismo lineal no nulo, $0 \neq 1_L/k_\varphi \cong \varphi(1)/0_F$ es una retícula no nula que tiene un átomo y no tiene ningún átomo, lo cual es una contradicción y por lo tanto $L \in L(R(\mathcal{C}_s))$. □

Teorema 2.99. *Si L es una retícula fuertemente seudocomplementada y $a \in L$, entonces el intervalo $a/0$ es fuertemente seudocomplementado.*

Demostración. Sea $x \in a/0$ y $x^\perp$ su seudocomplemento fuerte en L. Veamos que $x^\perp \bigwedge a$ es un seudocomplemento fuerte para x en $a/0$ pues $x \bigwedge (x^\perp \bigwedge a) = 0$ y si y es un elemento de $a/0$ tal que $x \bigwedge y = 0$ entonces $y \leq x^\perp$ y por lo tanto $y \leq x^\perp \bigwedge a$. □

Corolario 2.100. *La clase de las retículas fuertemente seudocomplementadas es hereditaria.*

Teorema 2.101. *Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}_S}$ es una clase de torsión hereditaria, entonces la gran retícula de clases abiertas contenidas en $\mathcal{C}$ es fuertemente seudocomplementada y su esqueleto está contenido en las clases de torsión hereditarias contenidas en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ es una clase abierta, por el Teorema 2.55 $\mathcal{A}$ tiene un seudocomplemento fuerte $\mathcal{A}^{\perp_{\preccurlyeq,/}}$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_S}$, y por el Teorema 2.58, $\mathcal{A}^{\perp_{\preccurlyeq,/}}$ es una clase de torsión hereditaria, así $\mathcal{A}^{\perp_{\preccurlyeq,/}} \cap \mathcal{C}$ también lo es. Luego por el Teorema 2.99 $\mathcal{A}^{\perp_{\preccurlyeq,/}} \cap \mathcal{C}$, es un seudocomplemento fuerte de $\mathcal{A}$ contenido en $\mathcal{C}$. □

Teorema 2.102. *La gran retícula de clases de torsión hereditarias en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$ es la retícula con dos elementos.*

Demostración. Por el Teorema 2.96, $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$ es una clase de torsión hereditaria, así si $\mathbb{T}$ una clase de torsión hereditaria contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$, se tiene que $\mathbb{T}$ es una clase abierta, así por el Teorema 2.101 tiene un seudocomplemento fuerte como clase abierta $\mathbb{T}^{\perp_{\preccurlyeq,/}}$ contenido en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$ que es también una clase de torsión hereditaria, luego notemos que si la clase de retículas $\mathcal{C}_s$ formada por todas las retículas de dos elementos no está contenida en $\mathbb{T}$, entonces está contenida en $\mathbb{T}^{\perp_{\preccurlyeq,/}}$ pues es una clase formada por retículas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$ que no tienen subintervalos no nulos en $\mathbb{T}$. De esta forma se tiene que necesariamente $\mathcal{C}_s \subseteq \mathbb{T} \cup \mathbb{T}^{\perp_{\preccurlyeq,/}}$ y por el Teorema 2.98 la teoría de torsión hereditaria generada por $\mathbb{T} \cup \mathbb{T}^{\perp_{\preccurlyeq,/}}$ es $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$ y $\mathbb{T}^{\perp_{\preccurlyeq,/}}$ resulta ser un complemento de $\mathbb{T}$.
Por último si $\mathcal{C}_s \subseteq \mathbb{T}$ se tiene que por el Teorema 2.98 $\mathbb{T} = \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$, y en caso contrario $\mathbb{T}^{\perp_{\preccurlyeq,/}} = \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$ y $\mathbb{T} = 0$. □

El recíproco del Teorema 2.102 no necesariamente es cierto, es decir que si $\mathcal{D}$ es una clase contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_S}$ para la cual la gran retícula de clases de torsión hereditarias contenidas en $\mathcal{D}$ es la retícula de dos elementos, no necesariamente $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{CS}}$ como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.103. Consideremos $\mathcal{D} = \{[a,b] | 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\}$ la clase de los intervalos cerrados contenidos en el intervalo $[0,1]$, todos vistos como retículas con el orden inducido por el orden de los reales. Se tiene que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}_S}$, sin embargo si $\mathbb{T}$ es una clase de torsión hereditaria no nula contenida en $\mathcal{D}$, $\mathbb{T}$ contiene un intervalo no nulo $[a,b]$ y como existe un isomorfismo lineal de $[a,b]$ al $[0,1]$ y $\mathbb{T}$ es una clase abstracta, $[0,1] \in \mathbb{T}$. Por lo tanto $\mathcal{D} = \mathbb{T}$, de donde la gran retícula de clases de torsión hereditarias contenidas en $\mathcal{D}$ es la retícula de dos elementos. Sin embargo cualquier retícula no nula en $\mathcal{D}$ no es semiartiniana.

Definición 2.104. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es paraproyectiva en una clase $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ si siempre que haya un epimorfismo lineal $f : M \longrightarrow L$ con $M \in \mathcal{C}$, existe un monomorfismo lineal $g : L \longrightarrow M$.
De manera dual diremos que L es parainyectiva en una clase $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ si siempre que exista un monomorfismo lineal $g : L \longrightarrow M$ con $M \in \mathcal{C}$, existe un epimorfismo lineal $f : M \longrightarrow L$.

Si una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es proyectiva (inyectiva) en una clase $\mathcal{C}$ entonces es paraproyectiva (parainyectiva) sin embargo la implicación recíproca no es cierta, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.105. Si $\mathcal{C}$ es la clase contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ formada por todas las retículas atómicas y coatómicas, se tiene que la retícula simple $S = \{0,1\}$ es paraproyectiva y parainyectiva en $\mathcal{C}$. Sin embargo no es ni inyectiva ni proyectiva en $\mathcal{C}$ pues si consideramos a la retícula $M = \{0,1,2,3\}$, entonces $S \xrightarrow{Id_S} S$ no puede levantarse ni extenderse a M para hacer conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "Id_S"] & M \\ & S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \arrow[d, "Id_S"] & \\ M \arrow[r, "\cong\circ(\_\vee 2)"] & S \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Definición 2.106. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es reducida si para todo $a \neq 0$ elemento de L, el intervalo $a/0$ tiene un coátomo.

En [3, Lema 4.4.] se prueba que si R es un anillo para el cual todos los módulos simples son paraproyectivos y parainyectivos, entonces el anillo es semiartiniano y reducido, sin embargo en el caso reticular podemos encontrar clases contenidas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ donde la retícula simple es paraproyectiva y parainyectiva pero contienen retículas que no son semiartinianas ni reducidas, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.107. Si $\mathcal{C}$ es la clase contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ formada por todas las retículas que son isomorfas a su retícula opuesta, la retícula simple es paraproyectiva y parainyectiva en $\mathcal{C}$, sin embargo el intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ con el orden inducido por los reales está en $\mathcal{C}$, pero no es semiartiniana ni reducida.

Proposición 2.108. *Si $\mathcal{C}$ es una clase contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ donde la retícula simple es paraproyectiva y parainyectiva, y $\mathcal{C}_s$ es la clase formada por las retículas de dos elementos, entonces la clase de torsión $L(\mathcal{C}_s)$ cogenerada por $\mathcal{C}_s$ en $\mathcal{C}$ es una clase TLT que que coincide con $R(\mathcal{C}_s)$, la clase libre de torsión generada por $\mathcal{C}_s$ en $\mathcal{C}$. Además dicha clase TLT tiene como clase de torsión asociada a las retículas semiartinianas contenidas en $\mathcal{C}$, y como clase libre de torsión a las retículas reducidas en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Si S es la retícula simple, la clase de torsión cogenerada por $\mathcal{C}_s$ es

$$L(\mathcal{C}_s) = \{T \in \mathcal{C} | Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(T,S) = 0\} = \{F \in \mathcal{C} | Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(S,F) = 0\} = R(\mathcal{C}_s)$$

y como $R(\mathcal{C}_s)$ es la clase libre de torsión generada por $\mathcal{C}_s$, esta es una clase TLT. Por otro lado $R(\mathcal{C}_s) = \{F \in \mathcal{C} | F \text{ no tiene átomos }\}$, entonces su clase de torsión correspondiente es

$$\begin{aligned} L(R(\mathcal{C}_s)) &= \{T \in \mathcal{C} | Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(T,F) = 0 \text{ para toda } F \in L(\mathcal{C}_s)\} = \\ &= \{T \in \mathcal{C} | \text{ todo intervalo final de } T \text{ tiene un átomo }\} \end{aligned}$$

que es precisamente la clase de las retículas semiartinianas contenidas en $\mathcal{C}$. De manera dual la clase libre de torsión correspondiente a $L(\mathcal{C}_s)$ es la clase libre de torsión cogenerada por $\mathcal{C}_s$ dada por $R(L(\mathcal{C}_s))$ y conformada por todas las retículas reducidas en $\mathcal{C}$. □

3 Sobre retículas L-inyectivas y L-proyectivas

3.1 Clases de inyectividad

Definición 3.1. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, diremos que una retícula $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es L-inyectiva si para todo intervalo inicial $a/0$ de L y todo morfismo lineal $f : a/0 \longrightarrow M$ existe un morfismo lineal $\overline{f} : L \longrightarrow M$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & a/0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & L \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Teorema 3.2. *Una retícula M es L-inyectiva si y sólo si para toda sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow a/0 \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\_\vee a} 1/a \longrightarrow 0$$

se tiene que

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/a, M) \xrightarrow{\_\circ(\_\vee a)} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,M) \xrightarrow{\_\circ i} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(a/0, M) \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

es exacta.

Demostración. Por el Teorema 1.28 el funtor $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(\_, M)$ es exacto izquierdo, así la sucesión $(\star)$ es exacta si y sólo si $\_ \circ i$ es suprayectiva, lo cual ocurre si y sólo si para toda $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(a/0, M)$ existe $\overline{f} \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, M)$ tal que $\overline{f} \circ i = f$, y esto último ocurre si y sólo si M es L-inyectiva. □

Definición 3.3. Si $\mathcal{C}$ es una clase no vacía en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ diremos que una retícula $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es $\mathcal{C}$-inyectiva si es L-inyectiva para toda retícula $L \in \mathcal{C}$.
Denotaremos como $\mathscr{I}(\mathcal{C}) = \{M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | M \text{ es } \mathcal{C}\text{-inyectiva } \}$.

Definición 3.4. La clase de inyectividad de una retícula $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se define como $\mathscr{I}^{-1}(M) = \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} | M \text{ es } L\text{-inyectiva } \}$

Definición 3.5. Dada una clase $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se define $\mathscr{I}^{-1}(\mathcal{C}) = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{C}} \mathscr{I}^{-1}(Q)$.

Teorema 3.6. *Dada una clase $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que $\mathscr{I}^{-1}(\mathcal{C})$ es una clase abierta.*

Demostración. Sólo hace falta ver que para toda retícula $Q \in \mathcal{C}$ se tiene que $\mathscr{I}^{-1}(Q)$ es una clase abierta. Es claro que $\mathscr{I}^{-1}(Q)$ es una clase abstracta, veamos que es cerrada bajo intervalos iniciales e intervalos finales.
Si $L \in \mathscr{I}^{-1}(Q)$ y tenemos dos elementos $a, b \in L$ tales que $0_L \leqslant a \leqslant b \leqslant 1_L$ y suponemos que $f : a/0 \longrightarrow Q$ es un morfismo lineal, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a/0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & b/0 \arrow[r, "i'"] & L \arrow[dll, "\overline{f}"] \\
& Q & &
\end{tikzcd}$$

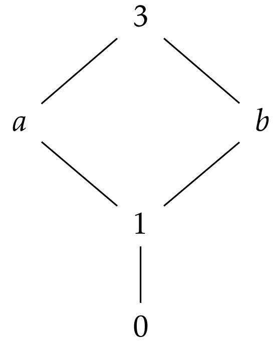
Dado que Q es L-inyevtiva existe $\overline{f}$ que extiende a f de manera que $f = \overline{f} \circ i' \circ i$, por lo tanto $\overline{f} \circ i'$ es una función que extiende a f de manera que $f = (\overline{f} \circ i') \circ i$ y por lo tanto $b/0 \in \mathscr{I}^{-1}(Q)$.
Por otro lado, considerando a los mismos elementos a y b, si suponemos que $f : b/a \longrightarrow Q$ es un morfismo lineal, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & b/0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "_ \bigvee a"] & L \arrow[ddl, "\overline{f}"] \\
0 \arrow[r] & b/a \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & 1/a \arrow[dl, "\overline{f}|"] \\
& Q. &
\end{tikzcd}$$

Como Q es L-inyectiva el morfismo $f \circ \_ \bigvee a$ se puede extender a todo L, con el morfismo $\overline{f}$, y como el diagrama conmuta, se tiene que $\overline{f}(a) = 0$, como por [17, Proposición 1.3.-(2)] el núcleo $k_{\overline{f}}$ de $\overline{f}$ es el elemento mayor de L cuya imagen bajo $\overline{f}$ es 0_Q se tiene que $a \leqslant k_{\overline{f}}$, por lo que al restringir el dominio del morfismo $\overline{f}$ a $1/a$ obtenemos un morfismo lineal bien definido.
Por último el hecho de que $\overline{f}|$ extiende a f viene de que $\overline{f}$ extiende a $f \circ \_ \bigvee a$. □

El siguiente ejemplo muestra que la clase de inyectividad $\mathscr{I}^{-1}(Q)$ de una retícula $Q \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ no siempre es cerrada bajo supremos de intervalos iniciales, es decir que si $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ contiene un subconjunto $A \subseteq M$ tal que $a/0 \in \mathscr{I}^{-1}(Q)$ para toda $a \in A$ no siempre ocurre que $(\bigvee\limits_{a \in A} a)/0 \in \mathscr{I}^{-1}(Q)$.

Ejemplo 3.7. Consideremos a la retícula M como sigue:



y a la retícula $Q = \{0,1,2\}$ con el orden inducido por los naturales. Como Q está en su propia clase de inyectividad y las retículas $a/0$ y $b/0$ son isomorfas a Q, están en su clase de inyectividad, sin embargo $M = (a \bigvee b)/0$ no está en la clase de inyectividad de Q, ya que el isomorfismo de $a/0$ a Q no se puede extender a todo M pues de ser así existiría un epimorfismo lineal de M a Q cuyo núcleo es cero y se tendría $M \cong Q$ lo cual es una contradicción.

La clase de inyectividad $\mathscr{I}^{-1}(Q)$ de una retícula $Q \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ tampoco es cerrada bajo sumas directas ni supremos independientes de intervalos iniciales como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.8. Sabemos que la retícula simple $S = \{0,1\}$ está en su propia clase de inyectividad, sin embargo $\bigoplus_{\mathbb{N}} S$, no está en la clase de inyectividad de S, pues el isomorfismo de $f : (1,0,0,...)/0 \longrightarrow S$ no se puede extender a $\bigoplus_{\mathbb{N}} S$ ya que ésta no tiene coátomos y el único morfismo lineal $\bigoplus_{\mathbb{N}} S \longrightarrow S$ es el cero.

El siguiente ejemplo muestra que la clase de inyectividad $\mathscr{I}^{-1}(Q)$ de una retícula $Q \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ no siempre es cerrada bajo extensiones.

Ejemplo 3.9. Sabemos que la retícula simple está en su propia clase de inyectividad, y si consideramos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \{0,1\} \xrightarrow{i} \{0,1,2\} \xrightarrow{-\bigvee 1} \{1,2\} \longrightarrow 0$$

Se tiene que tanto $\{0,1\}$ como $\{1,2\}$ están en la clase de inyectividad de la retícula simple, sin embargo $\{0,1,2\}$ no está.

Teorema 3.10. *Si $L, M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y L es complementada entonces M es L-inyectiva.*

Demostración. Sea $a/0$ un intervalo inicial de L y $f : a/0 \longrightarrow M$ un morfismo lineal. Sea b un complemento de a en L y consideremos el morfismo lineal $g : L \longrightarrow 1_L/b$ dado por $g(x) = x \bigvee b$. También notemos que por [14, Capítulo 3; Proposición 2.1.] $a/0 \cong 1/b$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a/0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & L \arrow[r, "g"] & 1/b \arrow[dl, "(g\circ i)^{-1}"] \\
& M & a/0. \arrow[l, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que si $x \in a/0$ entonces $g(x) = x \bigvee b = b$ si y sólo si $x \leqslant b$ por lo que $x \leqslant b \bigwedge a = 0$ de donde $x = 0$. Así el nucleo del morfismo lineal $g \circ i$ es 0 y $g \circ i$ es un isomorfismo de retículas, por lo que el diagrama conmuta y la función buscada es $\overline{f} = f \circ (g \circ i)^{-1} \circ g$. □

Por el Teorema 3.10 la clase de las retículas complementadas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ está contenida en la clase de inyectividad de cualquier otra retícula $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, el siguiente resultado muestra que las retículas complementadas son la clase más grande que cumple esta propiedad.

Teorema 3.11. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ está en la clase de inyectividad de todas las otras retículas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, entonces L es complementada.*

Demostración. Sea $a \in L$ con $0 < a < 1$, como la retícula $a/0$ es L-inyectiva, entonces existe $f : L \longrightarrow a/0$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a/0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "Id"] & L \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& a/0. &
\end{tikzcd}$$

Nombremos b al núcleo de f, sabemos que f induce un isomorfismo entre $a/0$ y $1/b$. Veamos que b es un complemento de a en L.
Por un lado como $a \bigwedge b \leqslant a$ y el diagrama es conmutativo se tiene que $f(a \bigwedge b) = a \bigwedge b$, sin embargo como $a \bigwedge b \leqslant b$ y b es el núcleo de f se tiene que $f(a \bigwedge b) = 0$, por lo que $a \bigwedge b = 0$.
Por otro lado como los morfismos lineales respetan orden $f(a \bigvee b) = a$ sin embargo $a \bigvee b$ está en el dominio del isomorfismo inducido por f, por lo que $a \bigvee b = 1$. □

Definición 3.12. Diremos que una retícula $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es pobre inyectiva si siempre que M sea L-inyectiva para alguna $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ se tiene que L es complementada, es decir, si su clase de inyectividad es lo más pequeña posible, formada únicamente por retículas complementadas.

Ejemplo 3.13. Consideremos a la retícula modular completa $L = \{0, 1, 2\}$ con el orden inducido por los naturales. L no es complementada, pero veremos que es inyectiva sobre sí misma. Para el intervalo inicial $\{0\}$ el único morfismo lineal que sale hacia L es el morfismo cero, el cual se puede extender fácilmente al morfismo cero de L en sí mismo.
También es claro que si tomamos como intervalo inicial a toda L, cualquier morfismo lineal de L en sí mismo se extiende trivialmente.
Por último si consideramos el intervalo inicial $\{0, 1\}$, el único morfismo lineal no cero que existe de $\{0, 1\}$ a L es la inclusión, la cual es extendida por la función identidad en L. Así L resulta ser L-inyectiva y por lo tanto no es pobre inyectiva.

Ejemplo 3.14. Si nombramos $\mathcal{L}_{\mathcal{M}4}$ a la clase de las retículas que tienen a lo más cuatro elementos, se tiene que la retícula simple es pobre inyectiva en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}4}$, pues en esta clase las únicas retículas no complementadas son $\{0,1,2\}$ y $\{0,1,2,3\}$ con el orden inducido por los naturales, y en ninguna de las dos se puede extender el morfismo lineal $Id : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$. Por lo tanto las únicas retículas de a lo más cuatro elementos en la clase de inyectividad de la retícula simple son las complementadas.

Definición 3.15. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es atómica si para todo elemento $x \in L$ existe un átomo $a \in L$ con $a \leq x$.

Teorema 3.16. *Ninguna retícula atómica es pobre inyectiva en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.*

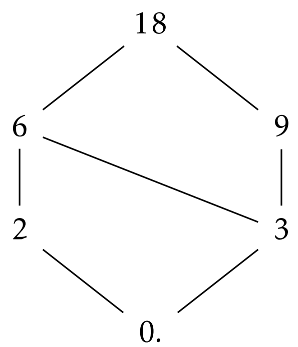
Demostración. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ una retícula atómica, y consideremos la retícula $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, tenemos que I es una retícula modular completa no complementada. Sin embargo si $J = [0,x] \subseteq I$ es un intervalo inicial no nulo, entonces todo morfismo lineal $f : J \longrightarrow L$ tiene que ser el morfismo cero, pues si el núcleo k_f de f es diferente de x tendríamos un isomorfismo de retículas entre un intervalo cerrado infinito de los reales y un intervalo inicial de una retícula atómica dado por $\overline{f} : [k_f, x] \longrightarrow a/0_L$ el cual no puede existir pues $a/0_L$ contiene al menos un átomo y $[k_f, x]$ no tiene átomos. Dado que el único morfismo lineal $f : J \longrightarrow L$ que existe es el morfismo cero y éste se puede extender a todo I, se tiene que L es I-inyectiva y por lo tanto no es pobre. $\square$

Corolario 3.17. *Ninguna retícula artiniana o noetheriana es pobre inyectiva en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.*

Demostración. Sea L una retícula artiniana o noetheriana. Dado que ser artiniana o noetheriana es una propiedad hereditaria, podemos considerar al intervalo $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, y la prueba de que L es I-inyectiva es muy similar a la del Teorema 3.16. $\square$

Teorema 3.18. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ no tiene átomos, entonces no es pobre inyectiva en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.*

Demostración. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ una retícula sin átomos. Consideremos la retícula $(D_{18}, |)$ de divisores del dieciocho ordenada con la divisibilidad, como se muestra en la siguiente figura:



$(D_{18}, |)$ es una retícula modular completa, y el nueve no tiene un complemento. Además si $x/0$ es un intervalo inicial de $(D_{18}, |)$ cualquier intervalo final no nulo x/y de $x/0$ es finito y por lo tanto tiene átomos. Dado que cualquier intervalo inicial de L no tiene átomos, el único morfismo lineal que existe de $x/0$ a L es el cero que se puede extender a toda la retícula $(D_{18}, |)$, así L es $(D_{18}, |)$-inyectiva y por lo tanto no es pobre inyectiva. $\square$

Definición 3.19. Diremos que una categoría de retículas contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una utopía inyectiva si no contiene retículas pobres inyectivas.

El Ejemplo 3.14 nos muestra que $\mathcal{L}_{\mathcal{M}4}$ no es una utopía inyectiva, sin embargo más adelante probaremos que $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ sí lo es, pero antes es necesario dar algunas definiciones y resultados.

Definición 3.20. Si S es un conjunto totalmente ordenado con $A, B \subseteq S$ no vacíos, diremos que son vecinos si todos los elementos de uno son menores a todos los del otro ($A < B$ ó $B < A$) y además no existe ningún elemento $x \in S$ que esté estrictamente enmedio de ambos ($A < x < B$ ó $B < x < A$).

Definición 3.21. Si P es un conjunto parcialmente ordenado diremos que $T \subseteq P$ es cofinal si para todo $x \in P$, existe $y \in T$ con $x \leq y$, de manera dual T es coinicial en P si para todo $x \in P$, existe $y \in T$ con $y \leq x$.

Definición 3.22. [6, Capítulo 3, Definición 3.1] Si S es un conjunto totalmente ordenado diremos que es un η_α-conjunto si no tiene subconjuntos vecinos ambos con cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$ y si los subconjuntos coiniciales y cofinales de S tienen cardinalidad mayor o igual que $\aleph_\alpha$.

Teorema 3.23. *Si S es un η_α-conjunto y $a, b \in S$ con $a < b$, entonces el intervalo b/a tiene cardinalidad mayor o igual que $\aleph_\alpha$.*

Demostración. Notemos que los conjuntos $\{a\}$ y $(a, b]$ son vecinos en S, por lo que la cardinalidad de $(a, b]$ y por lo tanto la de b/a tienen que ser mayores o iguales a $\aleph_\alpha$. $\square$

Teorema 3.24. *Para todo ordinal regular ω_α, por el axioma de elección global, podemos elegir un η_α-conjunto completo en el sentido reticular $T(\omega_\alpha)$ que contiene a ω_α.*

Demostración. [6, Capítulo 4, Teorema 5.8] $\square$

Observación 3.25. Por [6, Capítulo 4, Teorema 5.10] para todo ordinal α, $T(\omega_\alpha)$ tiene cardinalidad $\aleph_\alpha$, además es totalmente ordenado. Por el Teorema 3.23 cualquier subintervalo con extremos distintos de $T(\omega_\alpha)$ es un conjunto totalmente ordenado de cardinalidad $\aleph_\alpha$.

Teorema 3.26. *$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una utopía inyectiva.*

Demostración. Supongamos que $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una retícula pobre inyectiva, y para cualquier ordinal regular ω_α consideremos la retícula completa y totalmente ordenada $T(\omega_\alpha)$. Como $T(\omega_\alpha)$ no es complementada, entonces no está en la clase de inyectividad de L, así existe un intervalo inicial no nulo $b/0$ de $T(\omega_\alpha)$ y un morfismo lineal $f : b/0 \longrightarrow L$ que no puede ser extendido a todo $T(\omega_\alpha)$. Entonces el morfismo f no puede ser nulo, y así L contiene un intervalo inicial isomorfo a un intervalo final b/a no nulo de $b/0$. Por el Teorema 3.23 la cardinalidad de b/a es mayor o igual que $\aleph_\alpha$. Hemos probado que L tiene un intervalo inicial de cardinalidad mayor o igual a $\aleph_\alpha$ tan grande como queramos, lo cual contradice que L sea un conjunto, y por lo tanto no existen retículas pobres inyectivas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. $\square$

3.2 Clases de proyectividad

Definición 3.27. Sean L y M retículas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, diremos que L es M-proyectiva si para todo intervalo final $1/m$ de M y todo morfismo lineal $f : M \longrightarrow 1/m$ existe un morfismo lineal $\overline{f} : L \longrightarrow M$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & & L \arrow[dll, dashed, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[rr, "\_\bigvee m"'] & & 1/m \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Teorema 3.28. *Una retícula L es M-proyectiva si y sólo si para toda sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow m/0 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\_\bigvee m} 1/m \longrightarrow 0$$

se tiene que

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, m/0) \xrightarrow{i\circ\_} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, M) \xrightarrow{(\_\bigvee m)\circ\_} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, 1/m) \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

es exacta.

Demostración. Por el Teorema 1.29 el funtor $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, \_)$ es exacto izquierdo, por lo que la sucesión $(\star)$ es exacta si y sólo si para todo $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, 1/m)$ existe $\overline{f} \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, M)$ tal que $(\_\bigvee m) \circ \overline{f} = f$, pero esto ocurre si y sólo si L es M-proyectiva. □

Teorema 3.29. *Sea una retícula $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es M-proyectiva si y sólo si M es complementada.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $0 \neq m \neq 1$ con $m \in M$, como $1/m$ es M-proyectiva, existe $f : 1/m \longrightarrow M$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & 1/m \arrow[dll, dashed, "f"'] \arrow[d, "Id_{1/m}"] & \\ M \arrow[rr, "\_\bigvee m"'] & & 1/m \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Nombremos $n = f(1)$, como el diagrama conmuta $n \bigvee m = Id_{1/m}(1) = 1$. Por otro lado como $n \bigwedge m \leq n$, existe $p \in 1/m$ tal que $f(p) = n \bigwedge m$, luego $m = (n \bigwedge m) \bigvee m = f(p) \bigvee m = Id_{1/m}(p) = p$ y así $n \bigwedge m = f(p) = f(m) = 0$ y n es un complemento de m en M.

$\Longleftarrow$) Supongamos que M es complementada, sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\varphi : L \longrightarrow 1/m$ un morfismo lineal con $m \in M$ un elemento cualquiera. Si n es un complemento de m en M, debido a la modularidad de M y [14, Capítulo 3, proposición 2.1.] $1/m = (m \bigvee n)/m \cong n/(n \bigwedge m) = n/0$, además notemos que la función $\_\bigwedge_M n : 1/m \longrightarrow n/0$ tomar el ínfimo con n dentro de la retícula M es un isomorfismo lineal que, nuevamente por la modularidad de M, tiene como inverso al isomorfismo lineal $i\_\bigvee m \circ i : n/0 \longrightarrow 1/m$. Por último, el morfismo lineal $f : L \longrightarrow M$ dado por $f = i \circ \_\bigwedge_M n \circ \varphi$ es la función que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} n/0 & 1/m \arrow[l, "\_\wedge n"'] \arrow[dl, phantom] & L \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ & M \arrow[ul, leftarrow, "i"] \arrow[r, "\_\vee m"'] & 1/m \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

y por lo tanto M es L-proyectiva. □

Definición 3.30. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es pobre proyectiva si las únicas retículas $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ para las cuales L es M-proyectiva son las retículas complementadas.

Definición 3.31. Una categoría de retículas contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una utopía proyectiva si no contiene retículas pobres proyectivas.

Definición 3.32. Una categoría de retículas contenida en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una utopía si es una utopía inyectiva y una utopía proyectiva.

Teorema 3.33. *$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una utopía.*

Demostración. Por el Teorema 3.26 sólo hace falta ver que $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una utopía proyectiva, pero si suponemos que $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es una retícula pobre proyectiva, para cualquier cardinal regular ω_α, la retícula completa y totalmente ordenada $T(\omega_\alpha)$ no es complementada por lo que L no es $T(\omega_\alpha)$-proyectiva. Entonces existe un morfismo lineal no nulo $f : L \longrightarrow 1_{T(\omega_\alpha)}/x$ para el cual no existen morfismos lineales $g : L \longrightarrow T(\omega_\alpha)$ tales que $f = (\_ \bigvee x) \circ g$. Así L tiene un intervalo final $1_L/y$ isomorfo a un intervalo inicial no nulo de $1_{T(\omega_\alpha)}/x$ y por el Teorema 3.23 la cardinalidad de $1_L/y$ es mayor o igual que $\aleph_\alpha$. Hemos probado que L tiene un intervalo final de cardinalidad mayor o igual a $\aleph_\alpha$ tan grande como queramos, lo cual contradice que L sea un conjunto, y por lo tanto no existen retículas pobres proyectivas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. □

4 Retículas Semiproyectivas y seminyectivas

En [2] A. Haghany y M.R. Vedadi hacen un estudio de los módulos retráctiles semiproyectivos. Este capítulo comienza con los conceptos de ese estudio que se pueden extender a la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

4.1 Retículas semiproyectivas

Definición 4.1. Un intervalo inicial $a/0$ de una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es L-cíclico si es isomorfo a un intervalo final de L.

Definición 4.2. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es retráctil si para todo intervalo inicial $a/0$ no nulo de L se tiene que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, a/0) \neq 0$, i.e. si todo intervalo inicial $a/0$ no nulo de L tiene un intervalo inicial L-cíclico no nulo.

Los siguientes son ejemplos de retículas retráctiles y no retráctiles.

Ejemplo 4.3. Toda retícula complementada $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es retráctil.
Si $a/0$ es un intervalo inicial no nulo de L, y b es un complemento de a, notemos que $L \xrightarrow{\_\bigvee b} 1/b$ es un morfismo lineal con núcleo b. Por otro lado $1/b = (a \bigvee b)/b \xrightarrow{\_\bigwedge a} a/0$ es un isomorfismo, por modularidad. Así $(\_\bigwedge a) \circ (\_\bigvee b)$ es un morfismo lineal no nulo en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, a/0)$.

Ejemplo 4.4. Si consideramos la retícula $L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con el orden usual, dado que todo cociente no nulo es infinito, y todo intervalo inicial propio es finito, ningún intervalo inicial propio es L-cíclico. Entonces $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ no es retráctil.

Definición 4.5. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es semiproyectiva si para todo intervalo inicial no nulo $a/0$ de L y todo diagrama como el siguiente, cuyo renglón inferior es exacto,

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"] & a/0 \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

se tiene que existe un morfismo lineal $h : L \longrightarrow L$ tal que $f \circ h = g$.

Proposición 4.6. *$L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es semiproyectiva si y sólo si para cualquier par de endomorfismos lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $g(1) \leq f(1)$ se tiene que $g \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \subseteq f \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, en donde $f \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) = \{f \circ h \mid h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)\}$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Si correstringimos a f y g a $f(1)/0$ obtenemos el siguiente diagrama cuyo renglón inferior es exacto

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "g\upharpoonright"] & \\ L \arrow[r, "f\upharpoonright"] & f(1)/0 \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

como L es semiproyectiva, existe un morfismo lineal $h : L \longrightarrow L$ tal que $f \circ h = g$, por lo que $g \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) = (f \circ h) \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \subseteq f \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$.
$\Longleftarrow$) Si $a/0$ es un intervalo inicial no nulo y tenemos el siguiente diagrama con renglón inferior exacto

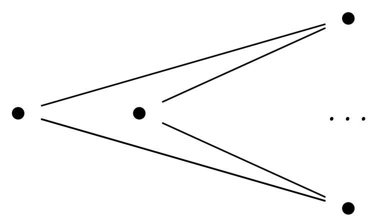
$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"] & a/0 \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

ampliando el codominio de f y g a todo L, tenemos a $f', g' \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ y además $g'(1) \leq f'(1)$, por lo que $g' \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \subseteq f' \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, entonces existe $h : L \longrightarrow L$ tal que $f' \circ h = g'$ y por lo tanto $f \circ h = g$. $\square$

Los siguientes son ejemplos de retículas retráctiles y semiproyectivas.

Ejemplo 4.7. La retícula simple $\{0,1\}$ es un ejemplo de una retícula retráctil y semiproyectiva pues es complementada y sus únicos intervalos iniciales con el cero y el total.

Ejemplo 4.8. Cualquier retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ de longitud tres y con cuatro elementos o mas es retráctil y semiproyectiva, pues al tener la siguiente forma:



Es complementada y de ahí que sea retráctil. Además si L es una retícula de esta forma, $a/0$ un intervalo inicial de L y tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"] & a/0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En caso de que $g = 0$ entonces el morfismo lineal $0 : L \longrightarrow L$ cumple que $f \circ 0 = g$ y hace conmutar el diagrama, por lo que en adelante podemos suponer $g \neq 0$. Consideraremos entonces los siguientes dos casos:
Si $a = 1$ entonces f sería un isomorfismo de retículas, y el morfismo lineal $f^{-1} \circ g$ es el buscado para hacer conmutar el diagrama.
Si a es un átomo de L se tiene que $a/0$ es la retícula simple, de ahí que los núcleos tanto de g como de f, nombrados k_g y k_f también sean átomos de L. Por la definición de morfismo lineal se tiene que si $b \neq k_g$ es un átomo de L, $g(b) = g(k_g \bigvee b) = g(1) = a$ y por lo tanto todo morfismo lineal no nulo $L \longrightarrow a/0$ está determinado de manera única por su núcleo. Consideremos el isomorfismo de retículas $h : L \longrightarrow L$ tal que $h(k_g) = k_f$; $h(k_f) = k_g$ y $h(x) = x$ siempre que $k_g \neq x \neq k_f$, al ser un isomorfismo de retículas h es un morfismo lineal, además $f \circ h(1) = f(1) = a$ por lo que la composición $f \circ h$ es un morfismo lineal no nulo tal que $f \circ h(k_g) = f(k_f) = 0$, así $k_{f\circ h} = k_g$, por lo que $f \circ h = g$ y h hace conmutar el diagrama.

Proposición 4.9. *Si L es semiproyectiva y $a \in L$ es fuertemente invariante, entonces $1/a$ es semiproyectiva.*

Demostración. Sea $s \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/a)$ y $f : 1/a \longrightarrow s(1/a)$ un morfismo lineal; consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & L \arrow[d, "\_\bigvee a"] \arrow[ddll, dashed, "g"'] \\ & & 1/a \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "(\_\bigvee a)\circ g|"'] \\ L \arrow[r, "\_\bigvee a"'] & 1/a \arrow[r, "s"'] & s(1/a). \end{tikzcd}$$

el morfismo lineal g que hace al triángulo exterior conmutativo, existe porque L es semiproyectiva y $g| : 1/a \longrightarrow 1/g(a)$ es la restricción de g; $g|$ es un morfismo lineal con núcleo $k_g \bigvee a$, pues para $x \in 1/a$

$$g|((k_g \bigvee a) \bigvee x) = g|(a \bigvee x) = g|(x).$$

Además $\overline{g|} : 1/(k_g \bigvee a) \longrightarrow g(1)/g(a)$ es un isomorfismo de retículas pues es la restricción y correstricción de $\overline{g}$.
Por otro lado, recordando que a es fuertemente invariante, $g(a) \leq a$, y $(\_ \bigvee a) : 1/g(a) \longrightarrow 1/a$ es un morfismo lineal con núcleo a, por lo que la composición $(\_ \bigvee a) \circ g|$ es un morfismo lineal. Verifiquemos que el triángulo interior es conmutativo. Para todo elemento $x \in 1/a$ se tiene que

$$f(x) = f(x \bigvee a) = (f \circ (\_ \bigvee a))(x) = s \circ (\_ \bigvee a) \circ g(x) = s \circ (\_ \bigvee a) \circ g|(x).$$

□

Teorema 4.10. *Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ denotamos $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$. L es semiproyectiva si y sólo si para todo endomorfismo $f \in S$, se cumple que $f \circ S = Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, f(L))$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Si $g \in S$ se tiene que $f \circ g(L) \subseteq f(L)$ y por lo tanto $f \circ g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, f(L))$. Por otro lado si $g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, f(L))$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"] & f(L) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

y como L es semiproyectiva existe $h \in S$ tal que $f \circ h = g$ por lo que $g \in f \circ S$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $a/0$ es un intervalo inicial no nulo de L y que tenemos el siguiente diagrama cuyo renglón inferior es exacto:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"] & a/0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Como $g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, f(L)) = f \circ S$, existe $h \in S$ tal que $f \circ h = g$ y por lo tanto L es semiproyectiva. □

Observación 4.11. Para cada retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ el conjunto $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es un monoide con la operación composición cuyo elemento idéntico es el morfismo identidad en L.

Definición 4.12. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ diremos que $H \subseteq S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es un ideal derecho de $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ si H es no vacío y es cerrado bajo la composición por la derecha con endomorfismos de L, es decir, si para todo par de endomorfismos $h \in H$ y $f \in S$ se tiene que $h \circ f \in H$.

Teorema 4.13. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es semiproyectiva entonces hay una biyección entre sus intervalos iniciales L-cíclicos y los ideales principales derechos de S.*

Demostración. Si $a/0$ es un intervalo inicial L-cíclico, entonces existe un epimorfismo lineal $f : L \longrightarrow a/0$, consideremos la función $a/0 \longmapsto f \circ S$. Veamos primero que está bien definida, pues si tenemos dos epimorfismos como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[d, "g"] & \\
L \arrow[r, "f"] & a/0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

dado que L es semiproyectiva existen morfismos lineales $h, h' : L \longrightarrow L$ tales que $f \circ h = g$ y $g \circ h' = f$, de lo cual se sigue respectivamente que $g \circ S \subseteq f \circ S$ y que $f \circ S \subseteq g \circ S$.
La función es suprayectiva pues todo conjunto de la forma $f \circ S$ de S tiene como preimagen a $f(L)$, y es inyectiva, pues si $a/0$ y $b/0$ son dos intervalos iniciales L-cíclicos que van a dar a $f \circ S = g \circ S$ respectivamente, entonces existen $h, t \in S$ tales que $f \circ h = g$ y $g \circ t = f$. Notemos que $a = f(1) = g \circ t(1) = g(t(1)) \in g(1)/0 = b/0$, por lo que $a \leq b$, y análogamente $b \leq a$. $\square$

En adelante para dos ideales derechos $I, J \subseteq S$ con $I \subseteq J$ diremos que I es esencial en J si como elementos dentro de la retícula de ideales derechos de S ordenados por la contención, se tiene que I es esencial en $J/0$. De manera similar diremos que un ideal I de S es simple si $I/0$ es la retícula simple.

Definición 4.14. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ un elemento $a \in L$ es uniforme si todo elemento de $a/0$ es esencial en $a/0$. Diremos que L es uniforme si 1_L es un elemento uniforme de L.

Definición 4.15. Un ideal derecho I de $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es uniforme si todo ideal derecho J contenido en I es esencial en I.

Definición 4.16. Sean $L, M \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, con M un intervalo inicial de L, diremos que L genera a M si existe una familia de morfismos lineales $\{f_t\}_{t \in T} \subseteq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, M)$ tales que $1_M = \bigvee_{t \in T} f_t(1_L)$.

Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, siempre que dos elementos m y n de L cumplan que $m \leq n$ se tiene que la inclusión $m/0 \xrightarrow{i} n/0$ induce un monomorfismo $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, m/0) \xrightarrow{i \circ \_} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, n/0)$, por lo que en adelante consideraremos a $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, m/0)$ como un ideal derecho en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, n/0)$.

Teorema 4.17. *Supongamos que $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es retráctil, $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, que $m/0$ y $n/0$ son intervalos iniciales de L y que I, J son ideales derechos de S, entonces se tiene lo siguiente:*

(a) Si $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, m/0)$ es un ideal derecho esencial en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, n/0)$ entonces m es esencial en $n/0$.

(b) Si L es semiproyectiva y m es esencial en $n/0$ entonces $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, m/0)$ es un ideal derecho esencial en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, n/0)$.

(c) Si I es esencial en J y $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0) = J$, entonces $\bigvee_{i\in I} i(1_L)$ es esencial en $(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0$.

(d) Si L es semiproyectiva, $\bigvee_{i\in I} i(1_L)$ es esencial en $(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0$ y $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{i\in I} i(1_L))/0) = I$ entonces $I\cap J$ es esencial en J.

(e) Si $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,m/0)$ es un ideal derecho uniforme de S, entonces $m/0$ es un intervalo inicial uniforme de L, la implicación recíproca es cierta si L es semiproyectiva.

(f) Si L es semiproyectiva y $(\bigvee_{i\in I} i(1_L))/0$ es un intervalo inicial uniforme de L, entonces I es un ideal derecho uniforme en S.

(g) Si L genera a $m/0$ y $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,m/0)$ es simple entonces $m/0$ es la retícula simple y la implicación recíproca es cierta si L es semiproyectiva.

(h) Si I es simple e $I = Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{i\in I} i(1_L))/0)$ entonces $(\bigvee_{i\in I} i(1_L))/0$ es la retícula simple y la implicación recíproca es cierta si L es semiproyectiva.

Demostración. (a) Sea $k\in n/0$ tal que $m\bigwedge k = 0$. Si $f\in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,m/0)\cap Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,k/0)$, $f(1_L)\leq m\bigwedge k = 0$, de donde $f = 0$, pero como $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,m/0)$ es un ideal derecho esencial en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,n/0)$, entonces $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,k/0) = 0$, y como L es retráctil $k = 0$.

(b) Supongamos que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,m/0)\cap I = 0$ para algún ideal derecho de S contenido en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,n/0)$, sea $f\in I$, entonces $f\circ S\subseteq I$, por lo que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,m/0)\cap f\circ S = 0$. Como L es semiproyectiva $f\circ S = Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,f(L))$, por lo que

$$Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,m/0)\cap Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,f(L)) = Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(m\bigwedge f(1_L))/0) = 0.$$

Como L es retráctil $m\bigwedge f(1_L) = 0$ y como m es esencial en $n/0$ se tiene que $f(1_L) = 0$ y $f = 0$. Por lo tanto $I = 0$.

(c) Sabemos que $I\subseteq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{i\in I} i(1_L))/0)\subseteq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0) = J$, por lo que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{i\in I} i(1_L))/0)$ es esencial en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0)$, luego como $I\subseteq J$, $\bigvee_{i\in I} i(1_L)\leq \bigvee_{j\in J} j(1_L)$ y por el inciso (a) se tiene que $\bigvee_{i\in I} i(1_L)$ es esencial en $(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0$.

(d) Por (b) sabemos que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{i\in I} i(1_L))/0) = I$ es esencial en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0)$, como $J\subseteq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0)$, si K es un ideal derecho contenido en J tal que $(I\cap J)\cap K = 0$ se tiene que $I\cap K = 0$, y como K también está contenido en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(\bigvee_{j\in J} j(1_L))/0)$, $K = 0$, por lo que $I\cap J$ es esencial en J.

(e) Supongamos $x,y\in m/0$ con $0 < x,y$, como L es retráctil, $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,x/0)\neq 0\neq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,y/0)$ y como $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,m/0)$ es un ideal derecho uniforme de S, entonces

$$Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,x/0)\cap Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,y/0) = Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L,(x\bigwedge y)/0)\neq 0$$

y, por lo tanto $x \bigwedge y \neq 0$.
Si suponemos que L es semiproyectiva, que $m/0$ es un intervalo inicial uniforme y que I' y J' son ideales derechos no nulos contenidos en $Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, m/0)$, entonces existen $i, j : L \longrightarrow m/0$ no nulos en I' y J' respectivamente. Como $i(1_L) \neq 0 \neq j(1_L)$, entonces $i(1_L) \bigwedge j(1_L) \neq 0$, y por la semiproyectividad de L y el Teorema 4.10 tenemos que

$$(i \circ S) \cap (j \circ S) = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, i(1_L)/0) \cap Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, j(1_L)/0) = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, (i(1_L) \bigwedge j(1_L))/0).$$

Como L es retráctil $Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, (i(1_L) \bigwedge j(1_L))/0) \neq 0$. Por último como $i \circ S \subseteq I'$ y $j \circ S \subseteq J'$ se tiene que $I' \cap J' \neq 0$.

(f) Por (e) $Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, (\bigvee_{i \in I} i(1_L))/0)$ es un ideal derecho uniforme en S, y como $I \subseteq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, (\bigvee_{i \in I} i(1_L))/0)$, I también es un ideal derecho uniforme en S.

(g) Sea $0 < k \leq m$, como L es retráctil existe $0 \neq f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, k/0)$. Luego $0 \neq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, k/0) \subseteq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, m/0)$, y por lo tanto $Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, k/0) = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, m/0)$. Como $m/0$ es generada por L existe una familia de morfismos lineales $\{f_t\}_{t \in T} \subseteq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, m/0)$ tales que $m = \bigvee_{t \in T} f_t(1_L)$, y como $f_t(1_L) \leq k$ para toda $t \in T$ se tiene que $k = m$.
Si suponemos que L es semiproyectiva, que $m/0$ es la retícula simple, y que $0 \neq f \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, m/0)$, se tiene que $f(L) = m/0$ y por el Teorema 4.10 $f \circ S = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, f(L)) = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, m/0)$.

(h) Como $(\bigvee_{i \in I} i(1_L))/0$ es generado por L podemos aplicar el inciso (g) y se tiene el resultado.
Notemos que para el recíproco, si sabemos que $Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, (\bigvee_{i \in I} i(1_L))/0)$ es simple, como $0 \neq I \subseteq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, (\bigvee_{i \in I} i(1_L))/0)$ se tiene que $I = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, (\bigvee_{i \in I} i(1_L))/0)$. □

Definición 4.18. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es cohopfiana si todo monomorfismo lineal $f : L \longrightarrow L$ es suprayectivo.

Definición 4.19. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es hopfiana si todo epimorfismo lineal $f : L \longrightarrow L$ es inyectivo.

Ejemplo 4.20. Consideremos la retícula de submódulos de $\mathbb{Z}$ visto como módulo sobre si mismo $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$. Como $2\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, se tiene que $\mathcal{L}(2\mathbb{Z}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{Z})$, sin embargo $2\mathbb{Z}$ es un submódulo propio de $\mathbb{Z}$, por lo que el intervalo $2\mathbb{Z}/0$ es un intervalo inicial propio de $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ isomorfo a $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$, de donde la retícula de submódulos de $\mathbb{Z}$ no es cohopfiana.

Ejemplo 4.21. Por otro lado si $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es finita y $f : L \longrightarrow L$ es un monomorfismo lineal, entonces su núcleo $k_f = 0$, por lo que hay un isomorfismo de retículas $\overline{f} : L \longrightarrow f(1_L)/0$, y dado que L es finita, $f(1_L)/0$ no puede ser un intervalo inicial propio de L, de donde $f(1_L) = 1_L$ y f es suprayectiva. Por lo tanto toda retícula finita es cohopfiana.

Definición 4.22. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ y $S = End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$ diremos que $\varphi : S \longrightarrow S$ es un endomorfismo derecho si para cualquier par de morfismos lineales $f, g \in S$ se tiene que $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \circ g$.

Notemos que en el contexto de la Definición 4.22 se tiene que $\varphi(S)$ es un ideal derecho de S. Diremos que φ es un monomorfismo derecho si para cualquier otro par de morfismos $\psi, \psi' : S \longrightarrow S$ ocurre que $\varphi \circ \psi = \varphi \circ \psi'$ implica $\psi = \psi'$.

Proposición 4.23. *Si $\varphi : S \longrightarrow S$ es un monomorfismo derecho entonces $\{f \in S | \varphi(f) = 0\} = Ker(\varphi) = 0$.*

Demostración. Si $Ker(\varphi) \neq 0$ entonces existe $0 \neq g \in Ker(\varphi)$. Consideremos el morfismo derecho $\psi_g : S \longrightarrow S$ dado por $\psi_g(h) = g \circ h$, se tiene que $\varphi \circ \psi_g(h) = \varphi(g \circ h) = \varphi(g) \circ h = 0 \circ h = 0$, de donde $\varphi \circ \psi_g = \varphi \circ 0$. Sin embargo $\psi_g \neq 0$ pues $\psi_g(Id_L) = g \circ Id_L = g \neq 0 = 0(Id_L)$, lo cual es una contradicción pues supusimos que φ es un monomorfismo. □

Definición 4.24. Diremos que S es cohopfiano si todo monomorfismo derecho $\varphi : S \longrightarrow S$ es suprayectivo.

Definición 4.25. Diremos que un elemento $f \in S$ es regular derecho si $f \circ g = 0$ implica que $g = 0$ para todo $g \in S$.

Lema 4.26. *Si todo elemento regular derecho en S es una unidad entonces S es cohopfiano.*

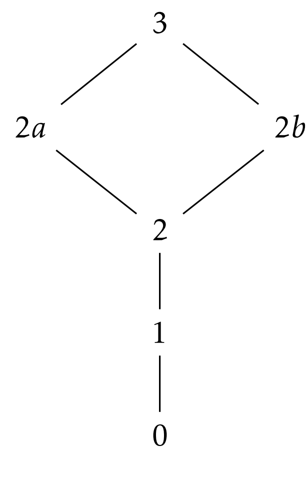
Demostración. Supongamos que $\varphi : S \longrightarrow S$ es un monomorfismo derecho, si $\varphi(Id_L)$ no fuera regular derecho existiría $0 \neq g \in S$ tal que $0 = \varphi(Id_L) \circ g = \varphi(g)$, lo cual es una contradicción pues por la Proposición 4.23 el núcleo de φ es cero.
Como $\varphi(Id_L)$ es regular derecho, es un isomorfismo y por lo tanto existe $g \in S$ tal que $\varphi(g) = \varphi(Id_L) \circ g = Id_L$ y como $\varphi(g) \in \varphi(S)$ se tiene que $\varphi(S) = S$ y φ es suprayectiva. □

Definición 4.27. Diremos que una retícula es casi inyectiva si está en su propia clase de inyectividad según la Definición 3.4, es decir si para todo monomorfismo lineal $i : N \longrightarrow L$ y todo morfismo lineal $f : N \longrightarrow L$ existe un morfismo lineal $\overline{f} \in S$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & L \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\ & L. & \end{tikzcd}$$

La retícula simple es un ejemplo de retícula casi inyectiva, y el siguiente ejemplo muestra una retícula que no lo es.

Ejemplo 4.28. Nombremos P a la siguiente retícula en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$:



Luego consideremos el morfismo lineal $f : 2/0 \longrightarrow P$ dado por $f(0) = 0 = f(1)$; $f(2) = 1$. Si existiera un morfismo lineal $\overline{f} : P \longrightarrow P$ tal que para la inclusión $i : 2/0 \longrightarrow P$ se tiene que $\overline{f} \circ i = f$ entonces $\overline{f}(0) = f(0) = 0 = f(1) = \overline{f}(1)$; además $\overline{f}(2) = f(2) = 1$ por lo que el núcleo de $\overline{f}$ es $K_{\overline{f}} = 1$ y existiría un isomorfismo de retículas entre $3/1$ y un intervalo inicial de P, lo cual es una contradicción. Por lo tanto P no es casi inyectiva.

Definición 4.29. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $f \in S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ definimos el anulador derecho de f como

$$Ann_d(f) = \{g \in S | f \circ g = 0\}.$$

Definición 4.30. Definimos el ideal singular derecho de S como

$$Z_d(S) = \{f \in S | Ann_d(f) \text{ es un ideal derecho esencial en } S\}.$$

Definición 4.31. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{A}_L$ el conjunto de átomos de L, definimos el zoclo de L como

$$Zoc(L) = \Big(\bigvee_{x \in \mathcal{A}_L} x\Big)/0.$$

Dada una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, un ideal derecho J de $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, y $a/0 \subseteq L$ denotaremos

$$(J)(a/0) = \Big(\bigvee_{g \in J} g(a)\Big)/0.$$

Lema 4.32. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es retráctil, y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, entonces $f \in S$ es un monomorfismo si y sólo si $S \xrightarrow{f \circ \_} S$ es un monomorfismo derecho.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Para un par de morfismos derechos $\psi, \psi' : S \longrightarrow S$ tales que $(f \circ \_) \circ \psi = (f \circ \_) \circ \psi'$ se tiene que para toda $g \in S$, $f \circ \psi(g) = f \circ \psi'(g)$ y como f es un monomorfismo $\psi(g) = \psi'(g)$, de donde $\psi = \psi'$ y $f \circ \_$ es un monomorfismo derecho.
$\Longleftarrow$) Si $0 < k_f$, al ser L retráctil existe un morfismo lineal no nulo $g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, k_f/0)$, por lo que $f \circ g = 0$, lo cual es una contradicción pues supusimos que $f \circ \_$ era un monomorfismo derecho. $\square$

Proposición 4.33. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es retráctil y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ entonces:*

(a) $f \in S$ es un monomorfismo si y sólo si f es regular derecho en S.

(b) L es cohopfiana si y sólo si S es cohopfiano.

(c) Si L es casi inyectiva, entonces los elementos regulares izquierdos en S tienen inverso izquierdo en S.

(d) $Z_d(S) \subseteq \{f \in S | k_f$ es esencial en $L\}$, y además $(Z_d(S))(Zoc(L)) = 0$.

Demostración. (a) Si k_f es el núcleo de f, entonces $Ann_d(f) = \{g \in S | f \circ g = 0\} = Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, k_f/0)$. Luego por la Proposición 1.14 se tiene que f es un monomorfismo si y sólo si $k_f = 0$ y, como L es retráctil esto ocurre si y sólo si $Ann_d(f) = 0$ que es equivalente a que f sea regular derecho.

(b) $\Longleftarrow$) Supongamos que $f : L \longrightarrow L$ es un monomorfismo. Por el Lema 4.32 $f \circ \_$ es un monomorfismo derecho, y como S es cohopfiano $f \circ \_$ es suprayectivo, por lo que existe $g \in S$ tal que $f \circ g = Id_L$, de donde $1_L = f(g(1_L)) \leq f(1_L) \leq 1_L$ y por lo tanto f es suprayectiva.
$\Longrightarrow$) Si $f \in S$ es regular derecho, por (a) es un monomorfismo y dado que L es cohopfiana, f es un isomorfismo, por lo que todo elemento regular derecho de S es una unidad y por el Lema 4.26 S es cohopfiano.

(c) Si $f \in S$ es regular derecho entonces por (a) es un monomorfismo, e induce un isomorfismo de retículas $\overline{f} : L \longrightarrow f(1_L)/0$, y como L es casi inyectiva existe $f' \in S$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f(1)/0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "(\overline{f})^{-1}"'] & L \arrow[dl, dashed, "f'"] \\
 & L. &
\end{tikzcd}$$

Así si $x \in L$, entonces $f(x) \in f(1)/0$ y $f'(f(x)) = (\overline{f})^{-1}(f(x)) = x$. Por lo tanto f' es un inverso izquierdo de f en S.

(d) Para todo $f \in S$ se tiene que $Ann_d(f) = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, k_f/0)$. Utilizando el Teorema 4.17-(a), sabemos que si $Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, K_f/0)$ es esencial en S, entonces k_f es esencial en L, con lo cual tenemos la contención deseada. Luego si $x \in L$ es un átomo y $f \in Z_d(S)$, dado que k_f es esencial en L se tiene que $k_f \bigwedge x = x$, por lo que $x \leq k_f$. Como x era un átomo cualquiera, $\bigvee\limits_{x \in \mathcal{A}_L} x \leq k_f$ y $f(\bigvee\limits_{x \in \mathcal{A}_L} x) = 0$. Por lo tanto $(Z_d(S))(Zoc(L)) = 0$. □

Definición 4.34. Sea $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$, $S = End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$ y $\mathcal{D}_S$ el conjunto de todos los ideales derechos simples en S. Se define el zoclo derecho de S como $Zoc_d(S) = \bigcup\limits_{I \in \mathcal{D}_S} I$.

Lema 4.35. *$L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es semiproyectiva si y sólo si para todo I ideal cíclico de S se tiene que $I = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, IL)$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) $\subseteq$) Esta contención es clara.
$\supseteq$) Sea g un generador de I, entonces $I = g \circ S = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, g(L))$. Además para todo $f \in S$ se tiene que $g \circ f(1) \leq g(1)$ por lo que $\bigvee\limits_{f \in I} f(1) \leq g(1)$, así si $h \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, IL)$ entonces $h(1) \leq g(1)$ por lo que $h \in Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, g(L)) = I$.
$\Longleftarrow$) Si $f \in S$ entonces $f \circ S = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, (\bigvee\limits_{g \in S} (f \circ g)(1))/0)$, pero $\bigvee\limits_{g \in S} f \circ g(1) \leq f(1)$ por lo que $f \circ S = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, f(L))$ y por el Teorema 4.10 L es semiproyectiva. □

Proposición 4.36. *Si L es una retícula retráctil, semiproyectiva y $S = End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$ se tiene que:*

(a) $Z_d(S) = \{f \in S | k_f$ *es esencial en* $L\}$.

(b) $(Zoc_d(S))(L) = Zoc(L)$.

(c) $Zoc_d(S) \subseteq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, Zoc(L))$.

Demostración. (a) ($\subseteq$) Se debe a la Proposición 4.33 -(d).
($\supseteq$) Sea $f \in S$ tal que su núcleo k_f es esencial en L. Sabemos que $Ann_d(f) = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, k_f/0)$ y por el Teorema 4.17 -(b) $Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, k_f/0)$ es esencial en S, por lo tanto $f \in Z_d(S)$.

(b) ($\supseteq$) Como L es retráctil si a es un átomo de L, $0 \neq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, a/0) = I$ y por el Teorema 4.17 -(g) I es simple en S, luego como $IL = a/0$ se tiene que $Zoc(L) \subseteq (Zoc_d(S))(L)$.
($\subseteq$) Debido a la semiproyectividad de L si I es un ideal simple de S, es cíclico y se tiene que $I = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, IL)$, luego por el Teorema 4.17 -(h), $IL = a_I/0$ con a_I un átomo de L y por lo tanto $(Zoc_d(S))(L) \subseteq Zoc(L)$.

(c) Debido a la semiproyectividad de L si I es un ideal derecho simple de S, es cíclico y se tiene que $I = Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, IL)$, además por como está definido IL, este es generado por L y por el Teorema 4.17 -(g) se tiene que IL es la retícula simple, de ahí que $I \subseteq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, Zoc(L))$ y por lo tanto $Zoc_d(S) \subseteq Hom_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L, Zoc(L))$. □

Definición 4.37. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es débilmente cohopfiana si para todo $f \in S$ monomorfismo lineal se tiene que $f(1_L)$ es esencial en L.
De manera similar diremos que su monoide de endomorfismos S es débilmente cohopfiano si para todo monomorfismo derecho $\varphi : S \longrightarrow S$ se tiene que $\varphi(S)$ es un ideal derecho esencial de S.

Ejemplo 4.38. Consideramos la retícula de subconjuntos de los números naturales $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ordenada con la contención. Sabemos que existe un monomorfismo lineal $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow 2\mathbb{N}/\emptyset$, sin embargo $2\mathbb{N}$ no es esencial en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pues su intersección con $\{3\}$ es vacía y por lo tanto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es débilmente cohopfiana.

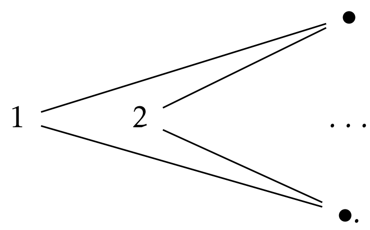
Ejemplo 4.39. Consideramos el intervalo $[0,1]$ contenido en los números reales con el orden total inducido por estos. Existe un monomorfismo lineal $f : [0,1] \longrightarrow [0,1/2]$, por lo que $[0,1]$ no es una retícula cohopfiana, sin embargo para todo monomorfismo lineal $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ se tiene que $g(1) > 0$, así $g(1)$ es esencial en $[0,1]$ y por lo tanto $[0,1]$ si es una retícula débilmente cohopfiana.

Definición 4.40. Diremos que una retícula modular completa, continua superiormente tiene dimensión uniforme finita si tiene un subconjunto máximo independiente de elementos uniformes que es finito. En este caso definiremos la dimensión uniforme de dicha retícula como la cardinalidad de cualquier subconjunto con estas propiedades, notemos que la dimensión uniforme está bien definida por [5, Teorema 8.1].

Definición 4.41. De manera similar si $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ y $S = End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$, diremos que S tiene dimensión uniforme finita si tiene un subconjunto máximo independiente de ideales derechos uniformes que es finito.

En [2, Teorema 2.6.-(a)] se prueba que si M es un módulo retráctil y semiproyectivo con anillo de endomorfismos S, entonces M tiene dimensión uniforme finita si y sólo si S tiene dimensión uniforme finita y además ambas dimensiones coinciden. El siguiente ejemplo muestra que la afirmación correspondiente al caso reticular es falsa.

Ejemplo 4.42. Consideremos la siguiente retícula L con una infinidad numerable de átomos:



Es retráctil, semiproyectiva, continua superiormente y tiene dimensión uniforme finita igual a dos. Sin embargo su monoide de endomorfismos S tiene un conjunto infinito de ideales derechos uniformes independientes de la forma $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, k/0)$ con k un átomo de L.

Definición 4.43. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es débilmente compresible si para todo $0 \neq a \in L$ existe un morfismo lineal no nulo $f : L \longrightarrow a/0$ tal que $f^2 \neq 0$.

La retícula simple es débilmente compresible sin embargo la retícula $L = \{0, 1, 2\}$ con el orden inducido por los naturales no lo es, pues existe un único morfismo lineal no nulo $\{0, 1, 2\} \xrightarrow{f} \{0, 1\}$ y $f^2 = 0$.

Definición 4.44. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es cocíclica si contiene un átomo esencial, y diremos que $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es cocíclico si existe un endomorfismo no nulo $f \in S$ tal que f está en todo ideal derecho no nulo de S.

Definición 4.45. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es finitamente cogenerada si para todo subconjunto arbitrario $\{x_a\}_a \in A$ que cumpla que $\bigwedge\limits_{a \in \mathrm{A}} x_a = 0$ existe un subconjunto finito F de A tal que $\bigwedge\limits_{a \in F} x_a = 0$.
Diremos que $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es finitamente cogenerado si para toda familia de ideales derechos de S que cumplan que $\bigcap\limits_{a \in \mathrm{A}} I_a = 0$ existe un subconjunto finito F de A tal que $\bigcap\limits_{a \in F} I_a = 0$.

Teorema 4.46. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es retráctil, semiproyectiva y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ se tiene que:*

(a) L es débilmente cohopfiana si y sólo si S es débilmente cohopfiano.

(b) $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1_L/a, L) = 0$ para todo elemento a esencial en L si y sólo si $Z_d(S) = 0$.

(c) Si L es débilmente compresible entonces S es semiprimo.

(d) L es cocíclica si y sólo si S es cocíclico.

(e) Si S es finitamente cogenerado entonces L es finitamente cogenerada.

Demostración. (a) $\Longleftarrow$) Sea $f : L \longrightarrow L$ un monomorfismo, por la Proposición 4.33 -(a) f es regular derecho. Por el Lema 4.32 $f \circ \_$ es un monomorfismo y por lo tanto $f \circ S$ es un ideal derecho esencial de S, así por el Teorema 4.17 -(c) $f(L) = (f \circ S)(L)$ tiene extremo derecho esencial en L y por lo tanto L es débilmente cohopfiana.
$\Longrightarrow$) Sea $\varphi : S \longrightarrow S$ un monomorfismo derecho, y sea $f = \varphi(Id_L)$. Para cualquier elemento $g \in S$ se tiene que $\varphi(g) = \varphi(Id_L \circ g) = \varphi(Id_L) \circ g = f \circ g$ por lo que $\varphi = f \circ \_$. Por el Lema

4.32 f es un monomorfismo y como L es débilmente cohopfiana $f(1_L)$ es esencial en L. Por último si aplicamos el Teorema 4.17 -(d) con $I = f \circ S$ y $J = S$, se tiene que $f \circ S = \varphi(S)$ es esencial en S y por lo tanto S es débilmente cohopfiano.

(b) Antes de comenzar la prueba recordemos que por la Proposición 4.36 -(a) $Z_d(S) = \{f \in S | k_f \text{ es esencial en } L\}$.
$\Longrightarrow$) Sea $f \in S$ tal que k_f es esencial en L, f induce un isomorfismo de retículas $\overline{f} : 1/k_f \longrightarrow f(1_L)/0$. Luego por hipótesis $i \circ \overline{f} : 1/k_f \longrightarrow L$ es el morfismo lineal cero, por lo que $k_f = 0$ y $f = 0$.
$\Longleftarrow$) Sea a un elemento esencial de L y $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1_L/a, L)$. Consideremos el morfismo $f \circ (a \bigvee \_) \in S$, su núcleo es mayor o igual que a y por lo tanto un elemento esencial de L, de donde $f \circ a \bigvee \_ \in S$ es el morfismo lineal cero y por lo tanto $f = 0$.

(c) Supongamos que S no es semiprimo, entonces tiene un ideal derecho $I \neq 0$ tal que $I^k = 0$ para algún entero positivo k. Supongamos que k es el menor entero positivo tal que $I^k = 0$, entonces $I^{k-1} \neq 0$. Consideremos I' un ideal derecho cíclico no nulo contenido en I^{k-1}. Al ser L débilmente compresible y semiproyectiva existe $0 \neq f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, I'L) = I$ tal que $f^2 \neq 0$ lo cual es una contradicción pues $f^2 \in I^{2k-2}$, y $2k-2 \geq k$ pues $k \geq 2$, de donde $I^{2k-2} = 0$. Por lo tanto S es semiprimo.

(d) $\Longrightarrow$) Si a es un átomo esencial de L, $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, a/0) \neq 0$ pues L es retráctil, además por el Teorema 4.17 incisos (g) y (b), $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, a/0)$ es simple y esencial en S. Así cualquier endomorfismo no nulo $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, a/0)$ está en todos los ideales derechos de S.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $0 \neq g \in I$ para todo I ideal derecho no nulo de S. Si $0 \neq x \in L$, al ser L retráctil $0 \neq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, x/0)$ por lo que $0 \neq g(1_L) \leq x$. Como x era un elemento cualquiera diferente de cero de L, $g(1_L)$ es un átomo esencial de L.

(e) Supongamos que existe un subconjunto arbitrario $\{x_a\}_{a \in A}$ que cumple que $\bigwedge\limits_{a \in A} x_a = 0$, entonces $\bigcap\limits_{a \in A} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, x_a/0) = 0$ y por lo tanto existe un subconjunto finito F de A tal que $\bigcap\limits_{a \in F} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, x_a/0) = 0$ sin embargo $\bigcap\limits_{a \in F} Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, x_a/0) = Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, (\bigwedge\limits_{a \in F} x_a)/0)$ y dado que L es retráctil se tiene que $\bigwedge\limits_{a \in F} x_a = 0$. $\square$

Definición 4.47. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es directamente finita si no es isomorfa a ningún intervalo inicial $a/0$ con $a < 1_L$ y a un complemento en L.

Lema 4.48. *$L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es directamente finita si y sólo si para cualquier par de morfismos lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, $f \circ g = Id_L$ implica que $g \circ f = Id_L$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) $1 = f(g(1))$, por lo que f es un epimorfismo lineal. $k_g = f(g(k_g)) = f(0) = 0$, por lo que g es un monomorfismo lineal. Por el Lema 1.19 $g(1)$ y k_f son complementos uno del otro en L.
Como L es directamente finita $g(1) = 1$ y por lo tanto g es un isomorfismo de retículas. Además $k_f = 1 \bigwedge k_f = g(1) \bigwedge k_f = 0$, entonces f también es un isomorfismo de retículas. Así

para todo elemento $x \in L$, $f \circ g \circ f(x) = f(x)$, y al ser f biyectiva $g \circ f(x) = x$ y por lo tanto $g \circ f = Id_L$.
$\Longleftarrow$) Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ no es directamente finita existe un elemento $a \in L$ tal que $a < 1$; $L \cong a/0$ y c es un complemento de a en L.
Sea $g : L \longrightarrow L$ el morfismo lineal inducido por el isomorfismo $\overline{g} : L \longrightarrow a/0$. Por modularidad $a/0 \cong 1/c$. Sea $h : L \longrightarrow a/0$ el morfismo lineal inducido por el isomorfismo $\overline{h} : 1/c \longrightarrow a/0$ dado por $\overline{h}(x) = x \bigwedge a$, y $f : L \longrightarrow L$ dada por $f = (\overline{g})^{-1} \circ h$, entonces para todo elemento $x \in L$ se tiene que

$$f \circ g(x) = (\overline{g})^{-1} \circ h \circ g(x) = (\overline{g})^{-1} \circ h(g(x) \bigvee c) = (\overline{g})^{-1}((g(x) \bigvee c) \bigwedge a) = (\overline{g})^{-1}((c \bigwedge a) \bigvee g(x)) = (\overline{g})^{-1}(g(x)) = x.$$

Sin embargo $g \circ f(1) = g(1) = a \neq 1$. □

Proposición 4.49. *Si L es una retícula semiproyectiva y cohopfiana, entonces es hopfiana.*

Demostración. Supongamos que $f : L \longrightarrow L$ es un epimorfismo lineal y consideremos el siguiente diagrama cuyo renglón inferior es exacto:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "Id_L"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & L \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Como L es semiproyectiva existe $g : L \longrightarrow L$ tal que $f \circ g = Id_L$, luego $k_g = f \circ g(k_g) = 0$, por lo que g es un monomorfismo lineal, y como L es cohopfiana, g es un isomorfismo de retículas. Si $y \in L$ es tal que $g(y) = k_f$ entonces

$$y = f(g(y)) = f(k_f) = 0$$

por lo que $k_f = 0$ y f es inyectiva. □

Proposición 4.50. *Si L es hopfiana, entonces es directamente finita.*

Demostración. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ no es directamente finita existe un elemento $a \in L$ con $a < 1$; $L \cong a/0$ y c complemento de a en L.
Sea $g : L \longrightarrow L$ el morfismo lineal inducido por el isomorfismo $\overline{g} : L \longrightarrow a/0$. Por modularidad $a/0 \cong 1/c$; sea $h : L \longrightarrow a/0$ el morfismo lineal inducido por el isomorfismo $\overline{h} : 1/c \longrightarrow a/0$ dado por $\overline{h}(x) = x \bigwedge a$, y $f : L \longrightarrow L$ dada por $f = (\overline{g})^{-1} \circ h$, f es suprayectivo pero no inyectivo pues $f(c) = 0 = f(0)$, pero $c \neq 0$, lo cual es una contradicción pues supusimos que L era hopfiana. □

En la categoría de R-Mod, para un R-módulo semiproyectivo es equivalente ser cohopfiano, hopfiano o directamente finito, como se muestra en [9, Proposition 3.5], sin embargo esto no ocurre en el caso reticular, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.51. La retícula $L = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$ con el orden inducido por los reales es semiproyectiva, pues si $(1_L/n)/0$ es un intervalo inicial no trivial de L, y $L \xrightarrow{f} (1_L/n)/0$ es un epimorfismo lineal, como $(1_L/n)/0$ es infinito y L es el único cociente infinito de L, entonces

$k_f = 0$. Además, $f(1/x) = 1/(x + (n-1))$ para todo $1/x \in L$. Si $g : L \longrightarrow (1/n)/0$ es un morfismo lineal no nulo, por el mismo argumento aplicado a g, $k_g = 0$. Si $g(1) = 1/m$ (con $m \geq n$), entonces $g(1/x) = 1/(x + (m-1))$ para todo $1/x \in L$. Por lo tanto, el morfismo lineal $L \xrightarrow{h} L$, dado por $h(0) = 0$ y $h(1/x) = 1/(x + (m-n))$, cumple que $f \circ h = g$.
Al ser L totalmente ordenada, cualquier elemento $a \in L$ con $0 < a < 1$ no es complemento, por lo que L es directamente finita, sin embargo no es cohopfiana pues el morfismo lineal $f : L \longrightarrow L$ dado por $f(0) = 0$; $f(1/n) = 1/n + 1$ es inyectivo pero no suprayectivo.

Lema 4.52. *Si $L \xrightarrow{f} L$ es un epimorfismo lineal, entonces para cualquier elemento $a \in L$, la restricción $1/a \xrightarrow{f|} 1/f(a)$ es un morfismo lineal con núcleo $k_f \bigvee a$.*

Demostración. Para todo elemento $x \in 1/a$, $f|((k_f \bigvee a) \bigvee x) = f|(a \bigvee x) = f|(x)$.
Además $\overline{f|} : 1/k_f \bigvee a \longrightarrow 1/f(a)$ es un isomorfismo de retículas pues es la restricción y corestricción de un isomorfismo de retículas. □

Proposición 4.53. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es semiproyectiva y $a \in L$ es un elemento superfluo y fuertemente invariante, entonces L es hopfiana si y sólo si $1/a$ es hopfiana.*

Demostración. $\Longleftarrow$) Supongamos que $L \xrightarrow{f} L$ es un epimorfismo, al ser L semiproyectiva existe $g : L \longrightarrow L$ tal que $f \circ g = Id_L$. Luego $1 = f(g(1))$, por lo que f es un epimorfismo lineal, $k_g = f(g(k_g)) = f(0) = 0$, por lo que g es un monomorfismo lineal, y por el Lema 1.19 $g(1)$ y k_f son complementos uno del otro en L.
Por el Lema 4.52, $1/a \xrightarrow{f|} 1/f(a)$ es un morfismo lineal. Consideremos al morfismo lineal $f' = (\_ \bigvee a) \circ f| : 1/a \longrightarrow 1/a$ que es un epimorfismo lineal. Como $1/a$ es hopfiana, f' es un isomorfismo de retículas. Notemos que, al ser a fuertemente invariante

$$f'(k_f \bigvee a) = (\_ \bigvee a) \circ f|(k_f \bigvee a) = f(a) \bigvee a = a$$

por lo que $k_f \bigvee a = a$, $k_f \leq a$ y k_f es superfluo en L. Pero $g(1) \bigvee k_f = 1$, por lo que $g(1) = 1$ y como $g(1) \bigwedge k_f = 0$, entonces $k_f = 0$ y f es inyectivo. Por lo tanto L es hopfiana.
$\Longrightarrow$) Sea $1/a \xrightarrow{f} 1/a$ un epimorfismo lineal. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[d, "_\bigvee a"] \arrow[ddl, dashed, "g"'] & \\
 & 1/a \arrow[d, "f"] & \\
L \arrow[r, "_\bigvee a"] & 1/a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

g existe pues L es semiproyectiva, además $(\_ \bigvee a) \circ g$ es un epimorfismo, por lo que $g(1) \bigvee a = 1$ y $g(1) = 1$. Como L es hopfiana, g es un isomorfismo de retículas.
Por otro lado $g(k_f) \bigvee a = a$ por lo que $g(k_f) \leq a$ y así

$$k_f \leq g^{-1}(a) \leq a \leq k_f.$$

Por lo tanto f es un monomorfismo y $1/a$ es hopfiana. □

Diremos que una retícula es coatómica si para todo $a \neq 1_L$, el intervalo final $1_L/a$ tiene elementos máximos.

Definición 4.54. Para una retícula L denotamos como $\mathcal{C}_L$ al conjunto de todos los coátomos de L y como

$$Jac(L) = \bigwedge_{c \in \mathcal{C}_L} c.$$

Definición 4.55. Para una retícula L denotamos por $\mathcal{S}_L$ es el conjunto de todos los elementos superfluos en L y por

$$Rad(L) = \bigvee_{c \in \mathcal{S}_L} c$$

Corolario 4.56. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es semiproyectiva y coatómica, entonces L es hopfiana si y sólo si $1_L/Jac(L)$ es hopfiana.*

Demostración. Gracias a la Proposición 4.53 solo hace falta ver que para toda retícula semiproyectiva y coatómica $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $Jac(L)$ es un elemento superfluo y fuertemente invariante en L. Que $Jac(L)$ sea superfluo se debe a [5, Pág 120]. Por otro lado por [15, Proposition 4.4-(3)], al ser L coatómica ocurre que $Jac(L) = Rad(L)$. Por [16] $Rad : \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es un prerradical, por lo que $Jac(L) = Rad(L)$ es un elemento fuertemente invariante de L. □

Consideremos las siguientes propiedades para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

- D1 Para todo elemento $a \in L$ existe $c \in L$ con $c \leq a$; c un complemento en L y a superfluo en $1/c$.
- D2 Si $a \in L$ cumple que $1/a \cong c/0$ con c un complemento en L, entonces a es un complemento en L.
- D3 Si k y c son complementos en L y $k \bigvee c = 1$, entonces $k \bigwedge c$ es un complemento en L.

Lema 4.57. *Si L satisface D2, $k, c \in L$ son complementos y $k/0 \xrightarrow{f} c/0$ es un epimorfismo lineal, entonces su núcleo k_f es un complemento en L.*

Demostración. $c/0 \cong k/k_f$, y si k^* es un complemento de k en L, entonces el morfismo lineal $k/0 \xrightarrow{-\bigvee k^*} 1/k^*$ es un isomorfismo de retículas cuya restricción induce $k/k_f \cong 1/(k_f \bigvee k^*)$, y por D2, $k_f \bigvee k^*$ es complemento en L. Sea Q complemento de $k_f \bigvee k^*$ en L, entonces $k^* \bigvee Q$ es complemento de k_f en L pues $k_f \bigvee (k^* \bigvee Q) = (k_f \bigvee k^*) \bigvee Q = 1$ y

$$(k_f \bigwedge (k^* \bigvee Q)) \bigvee k^* = (k_f \bigvee k^*) \bigwedge (k^* \bigvee Q) = (Q \bigwedge (k_f \bigvee k^*)) \bigvee k^* = k^*$$

por lo que $k_f \bigwedge (k^* \bigvee Q) \leq k^*$, y además $k_f \bigwedge (k^* \bigvee Q) \leq k$, por lo que $k_f \bigwedge (k^* \bigvee Q) = 0$. □

Proposición 4.58. *Si una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ satisface D2, entonces satisface D3.*

Demostración. Sean k y c complementos en L con $k \bigvee c = 1$, si k^* es un complemento de k en L, entonces $k^*/0 \cong 1/k = (c \bigvee k)/k \cong c/(k \bigwedge c)$. Consideremos el epimorfismo lineal $c/0 \xrightarrow{f} k^*/0$ inducido por el isomorfismo $c/(k \bigwedge c) \cong k^*/0$. Por el Lema 4.57 $k \bigwedge c$ es un complemento en L. □

Lema 4.59. *Si una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es semiproyectiva, entonces satisface D2.*

Demostración. Supongamos que $a \in L$ cumple que $1/a \cong c/0$ para c un complemento en L y que c' es un complemento de c en L. Nombremos $f : L \longrightarrow c/0$ el epimorfismo lineal inducido por el isomorfismo $1/a \cong c/0$ y $g : L \longrightarrow c/0$ el epimorfismo lineal inducido por el isomorfismo $1/c' \cong c/0$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & c/0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Probaremos que $h(c)$ es un complemento de a en L.
$f(h(c) \bigvee a) = f(h(c)) = g(c) = g(c \bigvee c') = g(1) = c$, y como $\overline{f} : 1/a \longrightarrow c/0$ es un isomorfismo de retículas, $h(c) \bigvee a = 1$.
Por otro lado $g| : c/0 \longrightarrow c/0$ es un isomorfismo de retículas, por lo que $(f \circ h)| : c/0 \longrightarrow c/0$ también lo es y así h restringida a $c/0$ es inyectiva. Si $y \in c/0$ cumple que $h(y) = h(c) \bigwedge a$, entonces $0 = f(h(c) \bigwedge a) = f(h(y)) = g(y)$, por lo que $y = 0$ y $h(c) \bigwedge a = 0$. Por lo tanto a es un complemento en L. $\square$

Definición 4.60. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es levantada si satisface D1; es discreta si es levantada y satisface D2, y es casi discreta si es levantada y satisface D3.

Teorema 4.61. *Si una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es semiproyectiva entonces son equivalentes:*

1. *L es discreta.*
2. *L es casi discreta.*
3. *L es levantada.*

Demostración. (1. $\Longrightarrow$ 2.) Se debe a la Proposición 4.58.
(2. $\Longrightarrow$ 3.) Por definición.
(3. $\Longrightarrow$ 1.) Se debe al Lema 4.59.

$\square$

Definición 4.62. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es hueca si todo elemento de L distinto de 1_L es superfluo en L.

Definición 4.63. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es inescindible si no tiene complementos distintos de 0_L y 1_L.

Proposición 4.64. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es inescindible y semiproyectiva, entonces es discreta si y sólo si es hueca.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Como L es levantada, para todo elemento $x \in L$ con $x < 1$, existe $c \leq x$ con c un complemento en L y x superfluo en $1/c$; como L es inescindible $c = 0$, por lo que x es superfluo en L y L es hueca.
($\Longleftarrow$) Sea $a \in L$, entonces 0_L es un complemento en L con $0_L \leq a$ y a superfluo en $1_L/0_L = L$, por lo que L es levantada. $\square$

Definición 4.65. Una retícula $L \in \mathcal{L}_\mathcal{M}$ es seudosemiproyectiva si para cualquier par de morfismos lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$ con $f(1) = g(1)$ existe $h \in End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$ tal que $g \circ h = f$.

Observación 4.66. Toda retícula semiproyectiva es seudosemiproyectiva.

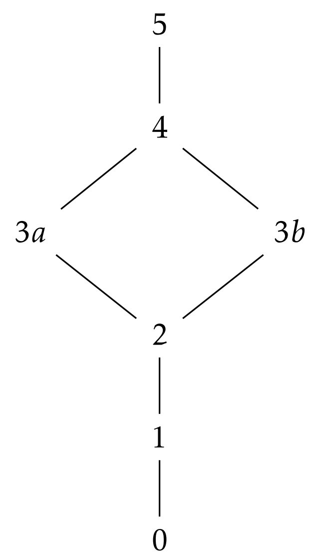
Los siguientes dos ejemplos son de una retícula que no es seudosemiproyectiva y una que sí lo es pero no es semiproyectiva.

Ejemplo 4.67. Consideremos a la retícula $L = \{1\} \cup \{1 - 1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con el orden inducido por los reales. Si $f \in End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$, $\overline{f} : 1/k_f \longrightarrow f(1)/0$ es un isomorfismo de retículas; si $f \neq 0$ entonces $1/k_f$ es infinita, y como todo intervalo inicial propio de L es finito, f es un epimorfismo. Nombremos $g : L \longrightarrow L$ al morfismo lineal $g(0) = 0 = g(1/2)$ y $g(1 - 1/n) = 1 - 1/(n-1)$ para toda $n \geq 3$, y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "Id_L"] & \\ L \arrow[r, "g"'] & L \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

No existe $h \in End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$ tal que $h \circ g = Id_L$, pues si existiera, al ser h es un epimorfismo lineal existirían $x, y \in L$ tales que $h(x) = 0$ y $h(y) = 1/2$, entonces $g \circ h(x) = 0 = g \circ h(y)$ que es una contradicción. Por lo tanto L no es seudosemiproyectiva.

Ejemplo 4.68. Nombremos L a la siguiente retícula:



No es semiproyectiva pues si nombramos $f : L \longrightarrow 2/0$ al morfismo lineal inducido por el isomorfismo de retículas $\overline{f} : 5/3a \longrightarrow 2/0$, y $g : L \longrightarrow 2/0$ al morfismo lineal inducido por el isomorfismo de retículas $\overline{g} : 5/4 \longrightarrow 1/0$, entonces no existe $h \in End_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}(L)$ tal que $f \circ h = g$, pues si existiera, entonces $(f \circ h)(5) = g(5) = 1$, por lo que $h(5) = 4$ ó $h(5) = 3b$, lo cual no puede ocurrir pues L no tiene ningún intervalo final isomorfo a $4/0$ ni a $3b/0$.
Sin embargo los únicos intervalos iniciales isomorfos a un intervalo final de L son $0/0$, $1/0$, $2/0$, y L; se puede verificar caso por caso que para cualquier par de epimorfismos lineales f y g de L hacia uno de estos intervalos iniciales, existe un endomorfismo h de L tal que $f \circ h = g$. Por lo tanto L es seudosemiproyectiva pero no semiproyectiva.

Lema 4.69. *$L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seudosemiproyectiva si y sólo si para cualquier par de endomorfismos lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $f(1) = g(1)$ se tiene que $f \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) = g \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Para cualquier par de endomorfismos lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $f(1) = g(1)$ se tiene que existe $h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ tal que $g \circ h = f$, pero también existe $k \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ tal que $f \circ k = g$, por lo tanto $f \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) = g \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$.
($\Longleftarrow$) Para cualquier par de endomorfismos lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $f(1) = g(1)$ se tiene que $f \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) = g \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, por lo que existe $h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ tal que $g \circ h = f$. □

Observación 4.70. Dado que en la prueba del Lema 4.59 las funciones f y g son epimorfismos lineales, la hipótesis puede sustituirse porque L sea seudosemiproyectiva, es decir que toda retícula seudosemiproyectiva cumple D2.

Observación 4.71. Si L es seudosemiproyectiva, y $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $f(1) = g(1)$ y k_f superfluo en L, entonces el morfismo lineal $h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & f(1)/0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es un epimorfismo pues $f(1) = g(1) = f(h(1)) = f(h(1) \bigvee k_f)$, por lo que $h(1) \bigvee k_f = 1$ y por lo tanto $h(1) = 1$.

Proposición 4.72. *Si L es seudosemiproyectiva y hueca, entonces es hopfiana.*

Demostración. Si L tiene solo un elemento, entonces es hopfiana. Supongamos que L tiene mas de un elemento, que $f \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es un epimorfismo, y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "Id_L"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & L \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por la Observación 4.71 h es un epimorfismo; sea $y \in L$ tal que $h(y) = k_f$, entonces $y = f(h(y)) = 0$, por lo que $k_f = 0$ y f es un monomorfismo lineal. □

Corolario 4.73. *Si L es seudosemiproyectiva y hueca, entonces es directamente finita.*

4.2 Retículas seminyectivas

Definición 4.74. Diremos que un intervalo final $1/b$ de una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es L-cocíclico si es isomorfo a un intervalo inicial de L.

Definición 4.75. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es corretráctil si para todo intervalo final $1/b$ no nulo de L se tiene que $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/b, L) \neq 0$ i.e. si todo intervalo final no nulo de L contiene un intervalo final L-cocíclico no nulo.

Ejemplo 4.76. Toda retícula complementada $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es corretráctil.
Si $1/b$ es un intervalo final no nulo de L, y a es un complemento de b, notemos que

$$1/b = (a \bigvee b)/b \xrightarrow{\_\bigwedge a} a/0 = a/(a \bigwedge b)$$

es un isomorfismo por modularidad. Así $i \circ (\_ \bigwedge a)$ es un morfismo lineal no nulo en $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/b, L)$.

Ejemplo 4.77. La retícula $L = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}-\{0\}} \cup \{0\}$ no es corretráctil pues el intervalo final $\{1/2, 1\}$ no es isomorfo a ningún intervalo inicial, porque L no tiene intervalos iniciales finitos con más de un elemento.

Definición 4.78. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva si para todo intervalo final no nulo $1/b$ de L y cualquier diagrama con renglón superior exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1/b \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"] & L \\ & L & \end{tikzcd}$$

existe $h : L \longrightarrow L$ tal que $h \circ k = g$.

Los ejemplos 4.7 y 4.8 también son retículas corretráctiles pues son complementadas y probar que son seminyectivas se hace de manera dual a como se probó que son semiproyectivas.

Lema 4.79. *Si $L \xrightarrow{h} M$ y $M \xrightarrow{f} N$ son morfismos lineales y $x \in f \circ h(L)$ entonces $(\overline{f \circ h})^{-1}(x) = (\overline{h})^{-1}(h(1) \bigwedge (\overline{f})^{-1}(x))$.*

Demostración. Por [17, Lema 2.1]

$$k_{f \circ h} = (\overline{h})^{-1}(h(1) \bigwedge k_f) \leq (\overline{h})^{-1}(h(1) \bigwedge (\overline{f})^{-1}(x)).$$

Por otro lado como $x \in (f \circ h(1))/0$, $(\overline{f})^{-1}(x) \leq (\overline{f})^{-1}(f \circ h(1)) = h(1) \bigvee k_f$, y entonces

$$f \circ h((\overline{h})^{-1}(h(1) \bigwedge (\overline{f})^{-1}(x))) = f(h(1) \bigwedge (\overline{f})^{-1}(x)) = f((h(1) \bigwedge (\overline{f})^{-1}(x)) \bigvee k_f) =$$
$$f((h(1) \bigvee k_f) \bigwedge (\overline{f})^{-1}(x)) = f((\overline{f})^{-1}(x)) = x.$$

Como $f \circ h$ es inyectivo si lo restringimos a $1/k_{f \circ h}$, se tiene el resultado. □

Observación 4.80. Si $L \xrightarrow{f} M$ es un morfismo lineal, el isomorfismo de retículas $\overline{f} : 1/k_f \longrightarrow f(1)/0$ induce un isomorfismo entre las retículas opuestas $\overline{f^{op}} : 0/f(1) \longrightarrow k_f/1$ que a su vez induce un morfismo lineal $M^{op} \xrightarrow{f^{op}} L^{op}$; diremos que f^{op} es el morfismo opuesto de f. A lo largo de este trabajo f^{op} denotará al morfismo lineal recién descrito, no se confunda con el morfismo opuesto a f en la categoría $(\mathcal{L}_{\mathcal{M}})^{op}$

Lema 4.81. *Si $f, h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, entonces $(h \circ f)^{op} = f^{op} \circ h^{op}$.*

Demostración. Para evitar confusiones a lo largo de esta prueba se utilizarán $\bigvee$ y $\bigwedge$ para denotar al supremo e ínfimo en L respectivamente, y $\bigvee_{op}$ y $\bigwedge_{op}$ para denotar al supremo e ínfimo en L^{op} respectivamente.
Nombremos $g = h \circ f$ y veamos primero que $k_{g^{op}} = k_{f^{op} \circ h^{op}}$, pues por [17, Lema 2.1] se tiene que

$$k_{f^{op}\circ h^{op}} = (\overline{h^{op}})^{-1}(h^{op}(0) \bigwedge\nolimits_{op} k_{f_{op}}) = (\overline{h^{op}})^{-1}(k_h \bigwedge\nolimits_{op} f(1)) = \overline{h}(f(1) \bigvee k_h) = h(f(1)) = g(1) = k_{g^{op}}.$$

Por otro lado si $x \in 0/g(1)$ entonces por el Lema 4.79

$$g^{op}(x) = (\overline{g})^{-1}(x) = \overline{h \circ f}^{-1}(x) = (\overline{f})^{-1}((\overline{h})^{-1}(x) \bigwedge f(1)) = \overline{f^{op}}((\overline{h})^{-1}(x) \bigvee\nolimits_{op} f(1)) =$$
$$f^{op}((\overline{h})^{-1}(x)) \bigvee\nolimits_{op} f^{op}(f(1)) = f^{op}((\overline{h})^{-1}(x)) \bigvee\nolimits_{op} 1 = f^{op}((\overline{h})^{-1}(x)) = f^{op}(h^{op}(x)) = f^{op} \circ h^{op}(x).$$

Por el Lema 1.9 $g^{op} = f^{op} \circ h^{op}$, lo cual concluye la prueba. □

Teorema 4.82. *$L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es semiproyectiva si y sólo si L^{op} es seminyectiva.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $0/b$ un intervalo final de L^{op}, $f : 0/b \longrightarrow L^{op}$ un monomorfismo lineal y $g : 0/b \longrightarrow L^{op}$ un morfismo lineal como muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0/b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & L^{op} \\ & L^{op}. & \end{tikzcd}$$

Consideremos a los morfismos lineales opuestos f^{op} y g^{op} descritos en la Observación 4.80 como se muestran en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "h^{op}"'] \arrow[d, "g^{op}"] & \\ L \arrow[r, "f^{op}"'] & b/0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

donde el morfismo lineal h^{op} que hace conmutar el diagrama existe porque estamos suponiendo que L es semiproyectiva; llamaremos h al morfismo opuesto de h^{op}. Por el Lema 4.81

$$h \circ f = (f^{op} \circ h^{op})^{op} = (g^{op})^{op} = g,$$

por lo tanto L^{op} es seminyectiva.

$\Longleftarrow$) Sea $a/0$ un intervalo inicial de L, $f : L \longrightarrow a/0$ un epimorfismo y $g : L \longrightarrow a/0$ un morfismo lineal como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & a/0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Consideremos los morfismos lineales opuestos f^{op} y g^{op} descritos en la Observación 4.80 como siguen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0/a \arrow[r, "f^{op}"] \arrow[d, "g^{op}"] & L^{op} \arrow[dl, dashed, "h^{op}"] \\ & L^{op}. & \end{tikzcd}$$

Existe un morfismo lineal h^{op} tal que $h^{op} \circ f^{op} = g^{op}$ pues estamos suponiendo que L^{op} es seminyectiva; llamaremos h al morfismo opuesto de h^{op}, notemos que por el Lema 4.81

$$f \circ h = (h^{op} \circ f^{op})^{op} = (g^{op})^{op} = g,$$

por lo tanto L es semiproyectiva. □

Definición 4.83. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, un ideal izquierdo I de S es un subconjunto no vacío cerrado bajo la composición por la izquierda con elementos de S.

Lema 4.84. *$I \subseteq End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es un ideal izquierdo si y sólo si $I^{op} = \{f^{op} | f \in I\}$ es un ideal derecho de $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $f^{op} \in I^{op}$ y $g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$, como $(f^{op} \circ g)^{op} = g^{op} \circ f \in I$, entonces

$$(g^{op} \circ f)^{op} = ((f^{op} \circ g)^{op})^{op} = f^{op} \circ g \in I^{op}.$$

$\Longleftarrow$) Sea $f \in I$ y $g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, como $(g \circ f)^{op} = f^{op} \circ g^{op} \in I^{op}$, entonces

$$(f^{op} \circ g^{op})^{op} = ((g \circ f)^{op})^{op} = g \circ f \in I.$$

□

Corolario 4.85. *Para $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, la retícula de ideales izquierdos de $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es isomorfa a la retícula de ideales derechos de $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$.*

Teorema 4.86. *Para $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, si $a \in L$ es fuertemente invariante, entonces a es fuertemente invariante en L^{op}.*

Demostración. Supongamos que $L^{op} \xrightarrow{f^{op}} L^{op}$ es un morfismo lineal, y sea $L \xrightarrow{f} L$ su morfismo lineal opuesto descrito en la Observación 4.80. Como a es fuertemente invariante en L, $f(a) \leq a$, por lo que en L^{op} ocurre que $a \leq^{op} f(a)$ y $f(1) \leq^{op} f(a)$. Así $(a \bigvee^{op} f(1)) \leq^{op} f(a)$, de donde se tiene lo siguiente:

$$f^{op}(a) = f^{op}(a \bigvee{}^{op} f(1)) \leq^{op} f^{op}(f(a)) = a \bigvee k_f \leq^{op} a$$

lo cual concluye la prueba. □

Proposición 4.87. *$L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva si y sólo si para cualquier par de endomorfismos $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $k_g \geq k_f$, se tiene que $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ g \leq End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ f$.*

Demostración. Por el Teorema 4.82, la Proposición 4.6, y el Lema 4.81 se tiene lo siguiente: L es seminyectiva si y sólo si L^{op} es semiproyectiva si y sólo si para cualquier par de morfismos lineales $f^{op}, g^{op} \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$ con $g^{op}(0) \leq^{op} f^{op}(0)$ se tiene que $g^{op} \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op}) \leq f^{op} \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$ si y sólo si para cualquier par de endomorfismos $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $k_g \geq k_f$, se tiene que $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ g \leq End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ f$. □

En adelante para dos ideales izquierdos $I, J \subseteq S$ con $I \subseteq J$ diremos que I es esencial en J si como elementos dentro de la retícula de ideales izquierdos de S, se tiene que I es esencial en $J/0$.

Definición 4.88. Para toda retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y todo elemento $b \in L$ definimos el conjunto $S_b^{k\geq} = \{f \in S | k_f \geqslant b\}$.

Notemos que $S_b^{k\geq}$ es un ideal izquierdo de S pues si $f \in S_b^{k\geq}$ y $g \in S$ entonces $g \circ f(k_f) = g(0) = 0$ y por [17, Proposición 1.3. (2)] $k_{g\circ f} \geqslant k_f \geqslant b$ y por lo tanto $g \circ f \in S_b^{k\geq}$.

Lema 4.89. *Dada $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $b \in L$ existe una biyección entre $S_b^{k\geq}$ y $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/b, L)$.*

Demostración. Consideremos la función $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/b, L) \longrightarrow S_b^{k\geq}$ definida por $f \longmapsto (\overline{f} \circ (\_ \bigvee k_f)) \in S$. Es inyectiva pues si $f, g \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1/b, L)$ cumplen que $\overline{f} \circ (\_ \bigvee k_f) = \overline{g} \circ (\_ \bigvee k_g)$ entonces $k_f = k_g$ y $\overline{f} = \overline{g}$, así por el Lema 1.9 $f = g$. Por último la función es suprayectiva pues si $f \in S_b^{k\geq}$ entonces $f|_{1/b}$ es una preimagen. □

Teorema 4.90. *$L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva si y sólo si para todo $f \in S$ se tiene que $S \circ f = S_{k_f}^{k\geq}$.*

Demostración. Por el Teorema 4.82 y el Teorema 4.10 se tiene que L es seminyectiva si y sólo si L^{op} es semiproyectiva si y sólo si para todo endomorfismo $f^{op} \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$ ocurre que $f^{op} \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op}) = Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op}, f^{op}(L^{op}))$.
Notemos que las contenciones $f^{op} \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op}) \subseteq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op}, f^{op}(L^{op}))$ y $S \circ f \subseteq S_{k_f}^{k\geq}$ siempre ocurren, además para todo endomorfismo $f^{op} \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$ ocurre que $f^{op} \circ End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op}) \supseteq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op}, f^{op}(L^{op}))$ si y sólo si para todo morfismo lineal $g^{op} \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op}, f^{op}(L^{op}))$ existe un morfismo lineal $h^{op} \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$ tal que $f^{op} \circ h^{op} = g^{op}$ si y sólo si para todo morfismo lineal $g \in S_{k_f}^{k\geq}$, existe $h \in S$ tal que $h \circ f = g$ si y sólo si para todo $f \in S$ se tiene que $S \circ f \supseteq S_{k_f}^{k\geq}$. □

Teorema 4.91. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva existe una biyección entre sus intervalos finales L-cocíclicos y los ideales principales izquierdos de S.*

Demostración. Si L es seminyectiva, por el Teorema 4.82 L^{op} es semiproyectiva, y por el Teorema 4.13 existe una biyección entre los intervalos iniciales L^{op}-cíclicos y los ideales principales derechos de $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$. Pero los intervalos L^{op}-cíclicos son los intervalos L-cocíclicos y por la Observación 4.80 y el Lema 4.81, a todo ideal principal derecho de $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L^{op})$ le corresponde un único ideal principal izquierdo de S, con lo cual se tiene el resultado. □

Definición 4.92. Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $1_L/b$ un intervalo final de L, diremos que L cogenera a $1_L/b$ si existe una familia de morfismos lineales $\{f_t\}_{t\in T} \subseteq Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(1_L/b, L)$ tales que $b = \bigwedge_{t\in T} k_{f_t}$.

Definición 4.93. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, diremos que un elemento $a \in L$ es couniforme en L si todo elemento diferente de uno de $1/a$ es superfluo en $1/a$. Diremos que L es couniforme o hueca si 0_L es couniforme en L.

Teorema 4.94. *Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ corretráctil, $1/m$ y $1/n$ intervalos finales de L e I y J ideales izquierdos de S, entonces se tiene lo siguiente:*

(a) Si $m \geq n$ y $S_m^{k\geq}$ es esencial en $S_n^{k\geq}$ entonces m es superfluo en $1/n$.

(b) Si L es seminyectiva, $m \geq n$ y m es superfluo en $1/n$ entonces $S_m^{k\geq}$ es esencial en $S_n^{k\geq}$.

(c) Si I es esencial en J y $J = S_{\bigwedge_{g\in J} k_g}^{k\geq}$ entonces $\bigwedge_{f\in I} k_f$ es superfluo en $1/\bigwedge_{g\in J} k_g$

(d) Si L es seminyectiva, $\bigwedge_{f\in I} k_f$ es superfluo en $1/\bigwedge_{g\in J} k_g$ e $I = S_{\bigwedge_{f\in I} k_f}^{k\geq}$, entonces $I \cap J$ es esencial en J.

(e) Si $S_m^{k\geq}$ es uniforme en S, entonces m es couniforme en L, y la implicación recíproca es cierta si L es seminyectiva.

(f) Si L es seminyectiva y $1/\bigwedge_{f\in I} k_f$ es un intervalo final couniforme de L, entonces I es un ideal izquierdo uniforme de S.

(g) Si L cogenera a $1/m$ y $S_m^{k\geq}$ es simple entonces $1/m$ es la retícula simple y la implicación reciproca es verdadera si L es seminyectiva.

(h) Si $I = S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in I} K_f}$ y es simple entonces $1/(\bigwedge_{f\in I} K_f)$ es simple y la implicación reciproca es cierta si L es seminyectiva.

Demostración. (a) Sea $k \in 1/n$ tal que $m \bigvee k = 1$, si $f \in S_m^{k\geq} \cap S_k^{k\geq}$ entonces $k_f \geq m \bigvee k = 1$, lo cual implica que $f = 0$. Como $S_m^{k\geq}$ es esencial en $S_n^{k\geq}$ se tiene que $S_k^{k\geq} = 0$ y como L es corretráctil $k = 1$.

(b) Sea $f \in S_n^{k\geq}$ y supongamos que $S_m^{k\geq} \cap S \circ f = 0$, como L es seminyectiva, por el Teorema 4.90 $S \circ f = S_{k_f}^{k\geq}$, por lo que $S_m^{k\geq} \cap S_{k_f}^{k\geq} = 0$. Pero $S_m^{k\geq} \cap S_{k_f}^{k\geq} = S^{k\geq}_{m \bigvee k_f}$ y como L es corretráctil $m \bigvee k_f = 1$, por lo tanto $k_f = 1$ y $f = 0$.

(c) Como $I \subseteq S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in I} k_f}$ entonces $S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in I} k_f}$ es esencial en J y por (a) se tiene el resultado.

(d) Por (b) sabemos que $I = S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in I} k_f}$ es esencial en $S^{k\geq}_{\bigwedge_{g\in J} k_g}$, además $J \subseteq S^{k\geq}_{\bigwedge_{g\in J} k_g}$. Supongamos que K es un ideal izquierdo de S contenido en J tal que $(I \cap J) \cap K = 0$, entonces $I \cap K = 0$ y como K también está contenido en $S^{k\geq}_{\bigwedge_{g\in J} k_g}$ se tiene que $K = 0$. Por lo tanto $I \cap J$ es esencial en J.

(e) $\Longrightarrow$) Sean $x, y \in 1/m$ con $1 > x, y$. Como L es corretráctil $S_x^{k\geq} \neq 0 \neq S_y^{k\geq}$ y como $S_m^{k\geq}$ es uniforme en S entonces $S_x^{k\geq} \cap S_y^{k\geq} = S^{k\geq}_{x \bigwedge y} \neq 0$, así $x \bigwedge y \neq 1$ y por lo tanto m es couniforme en L.
$\Longleftarrow$) Si L es seminyectiva, y m es couniforme en L, por el Teorema 4.82 L^{op} es semiproyectiva y m es uniforme en L^{op}, entonces por el Teorema 4.17-(e) $Hom_{\mathcal{L_M}}(L^{op}, m/1)$ es un ideal derecho uniforme de $End_{\mathcal{L_M}}(L^{op})$. Como $(Hom_{\mathcal{L_M}}(L^{op}, m/1))^{op} = S_m^{k\geq}$, por el Corolario 4.85 se tiene el resultado.

(f) Por (e), $S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in I} k_f}$ es uniforme en S y como $I \subseteq S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in I} k_f}$, entonces I es uniforme en S.

(g) $\Longrightarrow$) Supongamos que $m \leq k < 1$, como L es corretráctil existe $0 \neq f \in S_k^{k\geq} \subseteq S_m^{k\geq}$, por lo que $S_k^{k\geq} = S_m^{k\geq}$. Por otro lado como $1/m$ es cogenerada por L existe una familia de morfismos lineales $\{f_t\}_{t\in T} \subseteq S_m^{k\geq}$ tal que $m = \bigwedge_{t\in T} k_t$, pero $m \leq k \leq \bigwedge_{t\in T} k_t = m$. Por lo tanto $k = m$ y $1/m$ es simple.
$\Longleftarrow$) Supongamos que L es seminyectiva y que $1/m$ es simple, si $0 \neq f \in S_m^{k\geq}$, entonces $k_f = m$ y $S \circ f = S_{k_f}^{k\geq} = S_m^{k\geq}$, por lo que $S_m^{k\geq}$ es simple y L cogenera a $1/m$.

(h) $\Longrightarrow$) Como $1/(\bigwedge\limits_{f\in I} K_f)$ es cogenerado por L, al aplicar el inciso (g) se tiene esta implicación.
$\Longleftarrow$) Aplicando el inciso (g) obtenemos que $S^{k\geq}_{\bigwedge\limits_{f\in I} K_f}$ es simple, y como $0 \neq I \subseteq S^{k\geq}_{\bigwedge\limits_{f\in I} K_f}$ se tiene que $I = S^{k\geq}_{\bigwedge\limits_{f\in I} K_f}$. □

Definición 4.95. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, e I un ideal izquierdo de S, diremos que $\psi : I \longrightarrow S$ es un endomorfismo izquierdo si para cualquier par de morfismos lineales $f, g \in I$ se tiene que $\psi(f \circ g) = f \circ \psi(g)$.

Observación 4.96. Si $S \xrightarrow{\psi} S$ es un endomorfismo izquierdo, para cualquier $f \in S$, $\psi(f) = \psi(f \circ Id_L) = f \circ \psi(Id_L)$. Por lo tanto ψ está completamente determinado por su asignación en Id_L.

Lema 4.97. *Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ ocurre que $L \xrightarrow{f} L$ es un epimorfismo lineal si y sólo si $S \xrightarrow{\_\circ f} S$ es un monomorfismo izquierdo.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sean φ y ψ endomorfismos izquierdos de S tales que

$$(\_ \circ f) \circ \varphi = (\_ \circ f) \circ \psi,$$

entonces $\varphi(Id_L) \circ f = \psi(Id_L) \circ f$, como f es un epimorfismo $\varphi(Id_L) = \psi(Id_L)$ y por la Observación 4.96 $\varphi = \psi$.
$\Longleftarrow$) Sean $h, g \in S$ tales que $h \circ f = g \circ f$, entonces los endomorfismos izquierdos $(\_ \circ h), (\_ \circ g) : S \longrightarrow S$ cumplen que

$$(\_ \circ f) \circ (\_ \circ h) = (\_ \circ f) \circ (\_ \circ g),$$

y como $\_ \circ f$ es un monomorfismo izquierdo $\_ \circ h = \_ \circ g$, por lo que

$$h = Id_L \circ h = Id_L \circ g = g.$$

□

Observación 4.98. Un endomorfismo izquierdo $\psi : S \longrightarrow S$ es suprayectivo si existe $f \in S$ tal que $\psi(f) = Id_L$, pues de ser así para todo $g \in S$, $g = g \circ Id_L = g \circ \psi(f) = \psi(g \circ f)$.

Definición 4.99. Diremos que S es hopfiano si no existe un morfismo izquierdo biyectivo entre S y un ideal izquierdo propio.

Definición 4.100. Un elemento $f \in S$ es regular izquierdo si $g \circ f = 0$ implica que $g = 0$.

Lema 4.101. *Si todo elemento regular izquierdo de S es una unidad, entonces S es hopfiano.*

Demostración. Supongamos que $\psi : I \longrightarrow S$ es un morfismo izquierdo biyectivo, sea $g \in I$ tal que $\psi(g) = Id_L$, se tiene que g es regular izquierdo pues si $h \in S$ cumple que $h \circ g = 0$ entonces $0 = \psi(h \circ g) = h \circ \psi(g) = h \circ Id_L = h$, así g es una unidad y existe $f \in S$ tal que $Id_L = f \circ g \in I$ y por lo tanto $I = S$. □

Definición 4.102. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es casi proyectiva si es L-proyectiva según la Definición 3.27, es decir, si para todo epimorfismo lineal $L \longrightarrow N$ y todo morfismo lineal $f : L \longrightarrow N$, existe $\overline{f} \in S$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ L \arrow[r] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Definición 4.103. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ y $f \in S$ se define el anulador izquierdo de f como sigue:

$$Ann_I(f) = \{g \in S | g \circ f = 0\}.$$

Definición 4.104. Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ se define el ideal singular izquierdo de S como $Z_I(S) = \{f \in S | Ann_I(f)$ es un ideal izquierdo esencial en $S\}$.

Teorema 4.105. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es corretráctil y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ se tiene lo siguiente:*

(a) $f \in S$ es un epimorfismo si y sólo si f es regular izquierdo en S.

(b) L es hopfiana si y sólo si S es hopfiano.

(c) Si L es casi proyectiva entonces los elementos regulares derechos en S tienen inverso derecho en S.

(d) $Z_I(S) \subseteq \{f \in S | f(1)$ es superfluo en $L\}$ y además $(Z_I(S))(L) \leq Jac(L)$.

Demostración. (a) Notemos primero que $Ann_I(f) = \{g \in S | g \circ f = 0\} = S^{k\geq}_{f(1_L)}$, así f es un epimorfismo si y sólo si $f(1_L) = 1_L$ si y sólo si $S^{k\geq}_{f(1_L)} = S^{k\geq}_{1_L} = 0 = Ann_I(f)$ si y sólo si f es regular izquierdo.

(b) $\Longleftarrow$) Supongamos que $f : L \longrightarrow L$ es un epimorfismo y que no es inyectivo, entonces $L \cong 1_L/k_f$. Como $k_f \neq 0$ se tiene que Id_L no es un elemento de $S^{k\geq}_{k_f}$ y así $S^{k\geq}_{k_f}$ es un ideal izquierdo propio de S.
Consideremos el morfismo izquierdo $\_ \circ (\overline{f})^{-1} : S^{k\geq}_{k_f} \longrightarrow S$; es suprayectivo pues si $g \in S$ entonces $g \circ f \in S^{k\geq}_{k_f}$ cumple que $g \circ f \circ (\overline{f})^{-1} = g$, además es inyectivo pues si $g \circ (\overline{f})^{-1} = g' \circ (\overline{f})^{-1}$ notemos lo siguiente:
$g \circ (\overline{f})^{-1}(\overline{f}(k_g)) = g(k_g) = 0$, de donde $\overline{f}(k_g) \leq k_{g\circ(\overline{f})^{-1}}$, además si $g \circ (\overline{f})^{-1}(x) = 0$ entonces $(\overline{f})^{-1}(x) \leq k_g$ lo que implica que $x \leq \overline{f}(k_g)$, en particular $k_{g\circ(\overline{f})^{-1}} \leq \overline{f}(k_g)$. Por lo tanto tenemos que

$$\overline{f}(k_g) = k_{g\circ(\overline{f})^{-1}} = k_{g'\circ(\overline{f})^{-1}} = \overline{f}(k_{g'})$$

y siendo $\overline{f}$ un isomorfismo de retículas se tiene que $k_g = k_{g'}$; luego para toda $x \in 1_L/k_g$ se tiene que

$$\overline{g}(x) = \overline{g} \circ ((\overline{f})^{-1} \circ \overline{f})(x) = (g \circ (\overline{f})^{-1}) \circ \overline{f}(x) = (g' \circ (\overline{f})^{-1}) \circ \overline{f}(x) = \overline{g'} \circ ((\overline{f})^{-1} \circ \overline{f})(x) = \overline{g'}(x)$$

por lo que $\overline{g} = \overline{g'}$, y así $g = g'$. Entonces $\_ \circ (\overline{f})^{-1}$ es biyectivo y S no es hopfiano.
$\Longrightarrow$) Supongamos que $f \in S$ es regular izquierdo, por (a) es un epimorfismo y como L es hopfiana f es un isomorfismo y por lo tanto una unidad. Así por el Lema 4.101 S es hopfiano.

(c) Si f es un elemento regular izquierdo en S, por (a) es un epimorfismo, y como L es semiproyectiva existe $f' \in S$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "(\overline{f})^{-1}"] & \\ L \arrow[r, "\_ \bigvee k_f"'] & 1/k_f \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Así para toda $x \in L$ se tiene que $f'(x) \bigvee k_f = (\overline{f})^{-1}(x)$, y luego por la definición de morfismo lineal $f(f'(x)) = f(f'(x) \bigvee k_f) = f((\overline{f})^{-1}(x)) = x$ y por lo tanto f' es un inverso derecho para f en S.

(d) Notemos que para todo $f \in S$ se tiene que $Ann_I(f) = S^{k\geq}_{f(1)}$, además por el Teorema 4.94 (a) se tiene que si $S^{k\geq}_{f(1)}$ es esencial en S entonces $f(1)$ es superfluo en L, con lo cual se tiene la primer parte del resultado.
Por otro lado si x es un coátomo de L y $f \in Z_I(S)$, al ser $f(1)$ superfluo en L se tiene que $f(1) \bigvee x = x$ y $f(1) \leq x$. Al ser x un coátomo cualquiera $f(1) \leq Jac(L)$ y por lo tanto $(Z_I(S))(L) \leq Jac(L)$. □

Definición 4.106. Dada una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $S = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, denotamos como $\mathcal{I}_S$ al conjunto de todos los ideales izquierdos simples de S y se define el zoclo izquierdo de S como $Zoc_I(S) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}_S} I$.

Lema 4.107. *$L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva si y sólo si para cualquier ideal izquierdo cíclico I de S se tiene que $I = S^{k\geq}_{\bigwedge_{f \in I} k_f}$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) $\subseteq$) Esta contención es clara.
$\supseteq$) Supongamos que $g \in S$ es un generador de I, entonces por el Teorema 4.90 $I = S \circ g = S^{k\geq}_{k_g}$, además para todo $f \in S$ se tiene que $f \circ g(k_g) = 0$ por lo que $k_g \leq k_{f\circ g}$ y así $\bigwedge_{f \in I} k_f = k_g$, entonces si $h \in S^{k\geq}_{\bigwedge_{f \in I} K_f}$ se tiene que $h \in S^{k\geq}_{k_g} = I$.
$\Longleftarrow$) Sea $f \in S$, entonces $S \circ f = S^{k\geq}_{\bigwedge_{g \in S} k_{g\circ f}}$, pero $k_f \leq k_{g\circ f}$, por lo que $S \circ f = S^{k\geq}_{k_f}$ y el resultado se tiene gracias al Teorema 4.90. □

Proposición 4.108. *Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ corretráctil y seminyectiva, entonces:*

(a) $Z_I(S) = \{f \in S | f(1)$ *es superfluo en* $L\}$.

(b) $\bigwedge_{f \in Zoc_I(S)} k_f = Jac(L)$.

(c) $Zoc_I(S) \subseteq S^{k\geq}_{Jac(L)}$.

Demostración. (a) $\subseteq$) Se probó en el Teorema 4.105.
$\supseteq$) Sea $f \in S$ tal que $f(1)$ es superfluo en L, como $Ann_I(f) = S^{k\geq}_{f(1)}$ y por el Teorema 4.94-(b) $S^{k\geq}_{f(1)}$ es esencial en S, de donde se tiene el resultado.

(b) $\leq$) Si a es un coátomo de L, como L es corretráctil $S^{k\geq}_a \neq 0$, luego como $1/a$ es simple y L seminyectiva, por el Teorema 4.94-(g) $S^{k\geq}_a$ es simple y por el Lema 4.107, $S^{k\geq}_a = S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in S^{k\geq}_a} k_f}$.
Como el morfismo lineal $(\_ \bigvee a) \in S^{k\geq}_a$ se tiene que $\bigwedge_{f\in S^{k\geq}_a} k_f \leq a$ y por lo tanto $\bigwedge_{f\in Zoc_I(S)} k_f \leq a$.
Como a era un coátomo cualquiera de L, se tiene la desigualdad buscada.
$\geq$) Sea I un ideal izquierdo simple de S. Por el Lema 4.107, $I = S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in I} k_f}$, por el Teorema 4.94-(h) $1/\bigwedge_{f\in I} k_f$ es simple, por lo que $\bigwedge_{f\in I} k_f$ es un coátomo de L y así $\bigwedge_{f\in Zoc_I(S)} k_f \geq Jac(L)$.

(c) Supongamos que I es un ideal izquierdo simple en S, por el Lema 4.107 $I = S^{k\geq}_{\bigwedge_{f\in I} k_f}$, por lo que $1/\bigwedge_{f\in I} k_f$ es cogenerado por L. Por el Teorema 4.94-(g) $1/\bigwedge_{f\in I} k_f$ es simple y $\bigwedge_{f\in I} k_f$ es un coátomo, luego si $f \in I$ entonces $Jac(L) \leq \bigwedge_{f\in I} k_f \leq k_f$ y por lo tanto $f \in S^{k\geq}_{Jac(L)}$. □

Definición 4.109. $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es débilmente hopfiana si para todo $f \in S$ epimorfismo lineal se tiene que k_f es superfluo en L.

Definición 4.110. Diremos que S es débilmente cohopfiano izquierdo si para todo monomorfismo izquierdo $\varphi : S \longrightarrow S$ se tiene que $\varphi(S)$ es un ideal izquierdo esencial de S.

El siguiente ejemplo muestra una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ cuyo monoide de endomorfismos no es débilmente cohopfiano izquierdo.

Ejemplo 4.111. Consideremos $P(\mathbb{N})$ al conjunto potencia de los naturales ordenado por la contención, además nombremos $2\mathbb{N}$ al conjunto de los pares y $(2\mathbb{N}+1)$ al de los impares. Sabemos que existen los siguientes isomorfismos de retículas:

$$\mathbb{N}/(2\mathbb{N}+1) \xrightarrow{\cong_1} P(2\mathbb{N}) \xrightarrow{\cong_2} P(\mathbb{N})$$

donde $\cong_1 (A) = A - (2\mathbb{N}+1)$ y $\cong_2 (A) = A/2$ con $A/2 = \{a/2 \mid a \in A\}$.
Si $f' = (\cong_2 \circ \cong_1)$ y $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{f} P(\mathbb{N})$ es el morfismo lineal dado por $f(x) = f'(x \cup (2\mathbb{N}+1))$, entonces al ser f un epimorfismo por el Lema 4.97 $\_ \circ f : S \longrightarrow S$ es un monomorfismo, sin embargo $S \circ f \subseteq S^{k\geq}_{(2\mathbb{N}+1)}$, que no es un ideal esencial izquierdo de S pues $S^{k\geq}_{(2\mathbb{N}+1)} \cap S^{k\geq}_{(2\mathbb{N})} = 0$ y $S^{k\geq}_{(2\mathbb{N})} \neq 0$.

Definición 4.112. $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es débilmente cocompresible si para todo $a \neq 1$ en L existe $0 \neq f \in S^{k\geq}_a$ tal que $f^2 \neq 0$.

Definición 4.113. $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es cíclica si tiene un coátomo superfluo.

Definición 4.114. $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es finitamente generada si siempre que exista una familia de elementos $\{x_a\}_{a\in A}$ tal que $\bigvee_{a\in A} x_a = 1$ existe un subconjunto finito $F \subseteq A$ tal que $\bigvee_{a\in F} x_a = 1$.

Lema 4.115. *Para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\varphi : S \longrightarrow S$ un morfismo izquierdo, si el núcleo de φ es cero entonces es un monomorfismo.*

Demostración. Sea $f \in S$ tal que $\varphi = \_ \circ f$ i.e. $f = \varphi(Id_L)$. Para toda $g \in S$ se tiene que $g \circ f = 0$ implica $g = 0$ y por lo tanto f es regular izquierdo. Por el Teorema 4.105 f es un epimorfismo, y por el Lema 4.97 φ es un monomorfismo.

□

Teorema 4.116. *Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ corretráctil y seminyectiva, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) L es dêbilmente hopfiana si y sólo si S es dêbilmente cohopfiano.

(b) $Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, a/0) = 0$ para todo elemento a superfluo en L si y sólo si $Z_I(S) = 0$.

(c) Si L es dêbilmente cocompresible entonces S es semiprimo.

(d) L es cíclica si y sólo si S es cocíclico.

(e) Si S es finitamente cogenerado entonces L es finitamente generada.

Demostración. (a) $\Longleftarrow$) Si $f \in S$ es un epimorfismo por el Teorema 4.105 f es regular izquierdo. Consideremos $\_ \circ f : S \longrightarrow S$, por el Lema 4.97 es un monomorfismo, por lo que $S \circ f = S^{k\geq}_{k_f}$ es esencial en S. Por lo tanto, por el Teorema 4.94-(a) k_f es superfluo en L y L es débilmente hopfiana.
$\Longrightarrow$) Supongamos que $\varphi : S \longrightarrow S$ es un monomorfismo y que $f \in S$ cumple que $\varphi = \_ \circ f$. Por el Lema 4.97 f es un epimorfismo; como L es débilmente hopfiana k_f es superfluo en L. Por último aplicando el Teorema 4.94-(d) con $I = S \circ f$ y $J = S$, y observando que $\bigwedge_{g\in S} k_{g\circ f} = k_f$ se tiene que $\varphi(S) = S \circ f = S^{k\geq}_{k_f}$ es esencial en S.

(b) Recordemos que por la Proposición 4.108 $Z_I(S) = \{f \in S | f(1) \text{ es superfluo en } L\}$.
$\Longrightarrow$) Sea $f \in S$ tal que $f(1)$ es superfluo en L. La correstricción $f| : L \longrightarrow f(1)/0$, es cero por hipótesis. Por lo tanto $f = 0$.
$\Longleftarrow$) Sea a superfluo en L y $f \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L, a/0)$. Consideremos $i \circ f \in S$, se tiene que $i \circ f(1) \leq a$, por lo que $i \circ f(1)$ es superfluo en L, y por hipótesis $i \circ f = 0$. Por lo tanto $f = 0$.

(c) Si S no es semiprimo entonces tiene un ideal izquierdo I tal que $I \neq 0$ y existe un entero k tal que $I^k = 0$. Podemos suponer a k mínimo con esta propiedad. Sea $0 \neq f \in I^{k-1}$, entonces $S \circ f = S^{k\geq}_{k_f}$ y como $k_f \neq 1$ y L es débilmente cocompresible, existe $h \in S^{k\geq}_{k_f} \subseteq I^{k-1}$ tal que $h^2 \neq 0$, lo cual es una contradicción pues $h^2 \in I^{2k-2}$ y $k \leq 2k-2$ pues $k \geq 2$. Por lo tanto S es semiprimo.

(d) $\Longrightarrow$) Sea a un coátomo superfluo de L, como L es corretráctil $0 \neq S^{k\geq}_a$ y por el Teorema 4.94-(g) y (b) $S^{k\geq}_a$ es simple y esencial en S.

$\Longleftarrow$) Sea $g \in S$ contenido en todos los ideales izquierdos de S. Si $1 \neq x \in L$ entonces $S_x^{k\geq} \neq 0$ por lo que $x \leq k_g$ y como $g \neq 0$ entonces $k_g \neq 1$ y así k_g es un coátomo superfluo.

(e) Sea $\bigvee\limits_{a\in A} x_a = 1$ entonces $0 = S^{k\geq}_{\bigvee\limits_{a\in A} x_a} = \bigcap\limits_{a\in A} S^{k\geq}_{x_a}$, por lo que existe un subconjunto finito $F \subseteq A$ tal que $\bigcap\limits_{a\in A} S^{k\geq}_{x_a} = S^{k\geq}_{\bigvee\limits_{a\in F} x_a} = 0$ pero como L es corretráctil $\bigvee\limits_{a\in F} x_a = 1$ y por lo tanto L es finitamente generada. □

Proposición 4.117. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva y hopfiana, entonces es cohopfiana.*

Demostración. Si L es seminyectiva y hopfiana, por el Teorema 4.82 L^{op} es semiproyectiva y cohopfiana, luego por la Proposición 4.49 L^{op} es hopfiana, por lo que L es cohopfiana. □

Proposición 4.118. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es cohopfiana, es directamente finita.*

Demostración. Si L no es directamente finita, existe $a \in L$ complemento, con $a < 1$ y $L \cong a/0$. Entonces $L \xrightarrow{\cong} a/0 \xrightarrow{i} L$ es un monomorfismo lineal de L, pero no es epimorfismo, lo que es una contradicción pues supusimos que L era cohopfiana. □

Proposición 4.119. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva, $a \in L$ es esencial y fuertemente invariante, entonces L es cohopfiana si y sólo si $a/0$ es cohopfiana.*

Demostración. Por el Teorema 4.82 L^{op} es semiproyectiva, a es superfluo en L^{op} y por el Teorema 4.86 a es fuertemente invariante en L^{op}, así L es cohopfiana si y sólo si L^{op} es hopfiana lo cual, por el Teorema 4.53 ocurre si y sólo si $0/a$ es hopfiana si y sólo si $a/0$ es cohopfiana. □

Corolario 4.120. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva y atómica entonces L es cohopfiana si y sólo si $Zoc(L)/0$ es cohopfiana.*

Demostración. Por [16] $Zoc : \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es un prerradical de retículas, por lo que $Zoc(L)$ es un elemento fuertemente invariante de L, además por [5, Pág 120] al ser L atómica y completa $Zoc(L)$ es un elemento esencial de L, y así el resultado se tiene gracias a la Proposición 4.119. □

Consideremos las siguientes propiedades para una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

- C1 Para todo elemento $a \in L$, existe $c \in L$ con $c \geq a$; c un complemento en L y a esencial en $c/0$.
- C2 Si $a \in L$ cumple que $a/0 \cong c/0$ con c un complemento en L, entonces a es un complemento en L.
- C3 Si k y c son complementos en L y $k \bigwedge c = 0$, entonces $k \bigvee c$ es un complemento en L.

Definición 4.121. Diremos que una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ está extendida si satisface C1, que es continua si está extendida y satisface C2, y que es casi continua si está extendida y satisface C3.

Proposición 4.122. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ satisface C2, entonces satisface C3.*

Demostración. Ver [18, Proposition 1.10-(5)] □

Lema 4.123. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva, entonces satisface C2.*

Demostración. Si L es seminyectiva, por el Teorema 4.82 L^{op} es semiproyectiva, luego por el Lema 4.59 L^{op} satisface D2, por lo que L satisface C2. □

Teorema 4.124. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seminyectiva, entonces son equivalentes:*

1. *L está extendida.*
2. *L es continua.*
3. *L es casi continua.*

Demostración. (1. $\Longrightarrow$ 2.) Se debe al Lema 4.123.
(2. $\Longrightarrow$ 3.) Se debe a la Proposición 4.122.
(3. $\Longrightarrow$ 1.) Por definición. □

Proposición 4.125. *Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es inescindible y seminyectiva, entonces es continua si y sólo si es uniforme.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Como L está extendida, para todo elemento $x \in L$ con $0 < x$, existe $c \geq x$ tal que c es un complemento en L y x es esencial en $c/0$. Como L es inescindible $c = 1$, x es esencial en L y L es uniforme.
$\Longleftarrow$) Sea $x \in L$, entonces 1 es un complemento en L con $x \leq 1$ y x esencial en $1/0 = L$, por lo que L está extendida. □

Definición 4.126. Una retícula $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seudoseminyectiva si para cualquier par de morfismo lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $k_f = k_g$ existe $h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ tal que $h \circ f = g$.

Observación 4.127. Toda retícula seminyectiva es seudoseminyectiva.

Los siguientes dos ejemplos son de una retícula que no es seudoseminyectiva y otra que sí lo es pero no es seminyectiva.

Ejemplo 4.128. Consideremos la retícula $L = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$ con el orden inducido por los reales. Si $f \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$, entonces $\overline{f} : 1/k_f \longrightarrow f(1)/0$ es un isomorfismo de retículas; si $f \neq 0$, entonces $f(1)/0$ es infinita, y como todo intervalo final propio de L es finito, $k_f = 0$ y f es un monomorfismo lineal.
Nombremos $g : L \longrightarrow L$ al morfismo lineal $g(0) = 0$, $g(1) = 1/2$, $g(1/2) = 1/3$ y $g(1/n) = 1/(n+1)$ para todo n natural mayor que cero, y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "Id_L"] & L \\ & L. & \end{tikzcd}$$

No existe $h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ tal que $h \circ g = Id_L$ pues h sería un monomorfismo lineal, por lo que $1 = h(g(1)) = h(1/2) < h(1) \leq 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto L no es seudoseminyectiva.

Ejemplo 4.129. Nombremos L a la siguiente retícula:

$$\begin{tikzcd}
 & 5 & \\
 & 4 \arrow[u, dash] & \\
 & 3 \arrow[u, dash] & \\
2a \arrow[ur, dash] & & 2b \arrow[ul, dash] \\
 & 1 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \\
 & 0. \arrow[u, dash] &
\end{tikzcd}$$

No es seminyectiva, pues de serlo, por el Teorema 4.82 la retícula L^{op} sería semiproyectiva, pero en el Ejemplo 4.68 se probó que no es así.
Los únicos intervalos finales isomorfos a uno inicial son 5/5, 5/4, 5/3 y todo L; se puede verificar caso por caso que para cualquier par de endomorfismos lineales f y g con núcleos iguales a 4 o 3, existe un endomorfismo h de L tal que $h \circ f = g$, por lo tanto L es seudoseminyectiva.

Lema 4.130. *$L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seudoseminyectiva si y sólo si para cualquier par de endomorfismos lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $k_f = k_g$ se tiene que $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ f = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ g$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Si $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $k_f = k_g$ se tiene que existe $h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ tal que $h \circ f = g$, pero también existe $k \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ tal que $k \circ g = f$, por lo tanto $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ f = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ g$.
$\Longleftarrow$) Para cualquier par de endomorfismos lineales $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $k_f = k_g$ se tiene que $End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ f = End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L) \circ g$, por lo que existe $h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ tal que $h \circ f = g$. □

Observación 4.131. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es seudoseminyectiva y $f, g \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ con $0 = k_f = k_g$ y $f(1)$ esencial en L, entonces el morfismo lineal $h \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & L \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & L &
\end{tikzcd}$$

es un monomorfismo pues por [17, Lema 2.1], $0 = k_f = k_g = k_{h \circ f} = (\overline{f})^{-1}(f(1) \bigwedge k_h)$, por lo que $f(1) \bigwedge k_h = 0$ y como $f(1)$ es esencial en L, $k_h = 0$.

Proposición 4.132. *Si L es seudoseminyectiva y uniforme, entonces es cohopfiana.*

Demostración. Si L tiene sólo un elemento es cohopfiana. Supongamos que L tiene al menos dos elementos, que $f \in End_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(L)$ es un monomorfismo y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_L"] & L \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & L. & \end{tikzcd}$$

Como L es uniforme $f(1)$ es esencial en L y por la Observación 4.131 h es un monomorfismo. Como $1 = Id_L(1) = h(f(1)) = h(1)$, entonces $f(1) = 1$ y f es un epimorfismo lineal. Por lo tanto L es cohopfiana. $\square$

Corolario 4.133. *Si L es seudoseminyectiva y uniforme, entonces es directamente finita.*

5 Un funtor de R-Mod a $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$

Consideremos la asignación $F : R - Mod \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ dada por

$$M \overset{F}{\longmapsto} \mathcal{L}(M); \qquad \begin{array}{c} M \\ \Big\downarrow g \\ N \end{array} \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad \begin{array}{c} \mathcal{L}(M) \\ \Big\downarrow F(g) \\ \mathcal{L}(N) \end{array}$$

donde $\mathcal{L}(M)$ es la retícula de submódulos de M, y si $g : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo, $F(g) : \mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(N)$, es la función que a cada submódulo H de M le asigna $F(g)(H) = g(H)$. Si K es el núcleo de g, entonces $g(H + K) = g(H)$ para todo H submódulo de M, y como $M/K \cong g(M)$ se tiene que $1_{\mathcal{L}(M)}/K \cong \mathcal{L}(M/K) \cong \mathcal{L}(g(M))$ y el isomorfismo está inducido por g, de donde $F(g)$ es un morfismo lineal con núcleo K.
Por otro lado $F(Id_M) = Id_{\mathcal{L}(M)}$ y si $h : L \longrightarrow M$ es un homomorfismo

$$F(g \circ h)(H) = g \circ h(H) = g(h(H)) = F(g)(F(h)(H)) = F(g) \circ F(h)(H)$$

y por lo tanto F es un funtor entre ambas categorías.

Definición 5.1. Todo funtor $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ define, para cualquier pareja de objetos $c, c' \in \mathcal{C}$, una función $S|_{c,c'} : Hom_{\mathcal{C}}(c, c') \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(S(c), S(c'))$. Diremos que el funtor S es fiel si para cualquier pareja de objetos $c, c' \in \mathcal{C}$, la función $S|_{c,c'}$ es inyectiva. Diremos que S es pleno si las funciones $S|_{c,c'}$ resultan siempre suprayectivas.

Definición 5.2. Un funtor $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un isomorfismo entre ambas categorías si existe otro funtor $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $S \circ T = Id_{\mathcal{D}}$ y $T \circ S = Id_{\mathcal{C}}$.

Que dos categorías sean isomorfas implica que hay una biyección entre sus objetos, y esta condición se puede relajar a una equivalencia entre categorías pidiendo que haya una biyección entre las clases de isomorfismo de sus objetos.

Definición 5.3. Un funtor $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una equivalencia entre ambas categorías si existe otro funtor $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismos naturales $S \circ T \longrightarrow Id_{\mathcal{D}}$; $T \circ S \longrightarrow Id_{\mathcal{C}}$.

Proposición 5.4. *Un funtor $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una equivalencia si y sólo si es pleno, fiel y todo objeto de $\mathcal{D}$ es isomorfo a un objeto en $S(\mathcal{C})$*

Demostración. [14, Capítulo IV, Proposición 1.1.] □

Para un anillo R denotaremos como $\mathcal{L}_{\mathcal{M}R}$ a la categoría cuyos objetos son las retículas en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ que son isomorfas a la retícula de submódulos de algún módulo en R-Mod y cuyos morfismos son los morfismos lineales.
Dado el funtor F, surge la duda de si existirán anillos R para los cuales éste sea una equivalencia entre R-Mod y $\mathcal{L}_{\mathcal{M}R}$, para comenzar a resolver esta pregunta consideremos lo siguiente.
Existen anillos para los cuales F no es fiel, por ejemplo si consideramos los homomorfismos $Id_{\mathbb{Z}_5}, g : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ donde g está dado por $g(\overline{x}) = \overline{2x}$ considerando a $\mathbb{Z}_5$ como módulo sobre $\mathbb{Z}$, se tiene que $F(Id_{\mathbb{Z}_5}) = F(g) = Id_{\{0,1\}}$, sin embargo $Id_{\mathbb{Z}_5} \neq g$.
Siendo el dominio de F es $\mathbb{Z}$-Mod tampoco resulta un funtor pleno, pues tenemos que $Id_{\{0,1\}} \in Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}(\mathcal{L}(\mathbb{Z}_3), \mathcal{L}(\mathbb{Z}_5))$, sin embargo $Hom_R(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5) = 0$. La existencia de más de una clase de isomorfismo de módulos simples implica que F no es pleno, por lo que si buscamos una equivalencia entre R-Mod y $\mathcal{L}_{\mathcal{M}R}$, la condición de que en R-Mod exista sólo una clase de isomorfismo de módulos simples se vuelve necesaria. Por [14, Proposición 7.8.] si R es un anillo con división, sólo existe una clase de isomorfismo de módulos simples y todo R-módulo es semisimple, sin embargo incluso bajo estas condiciones los ejemplos de los homomorfismos $f, g : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ nos muestran que $F : \mathbb{Z}_5 - Mod \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}\mathbb{Z}_5}$ no es fiel, y el siguiente ejemplo nos muestra que la condición de que R sea un anillo con división no es suficiente para que el funtor F sea pleno.

Ejemplo 5.5. Consideremos a $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{T} \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la función definida de manera que si γ es una recta que pasa por el origen y por el punto (x, y) con $x, y > 0$, entonces $T(\gamma)$ es la reflexión de γ con respecto a la recta $I = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$ y si γ' es una recta que pasa por el origen y por un punto (z, w) con $z \leq 0$ ó $w \leq 0$, $T(\gamma') = \gamma'$, además $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ y $T(\{0\}) = \{0\}$.
T es un isomorfismo de retículas por lo que es un morfismo lineal, sin embargo no existe ninguna transformación lineal $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ que actúe de la misma manera que T con los subespacios del plano, pues de ser así se tendría lo siguiente:

- $f(1,0) = (a,0), f(0,1) = (0,b)$ y $f(1,1) = (c,c)$.
- $(c,c) = f(1,1) = f(1,0) + f(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$, de donde $a = b = c$.
- $f(1,2) = f(1,1) + f(0,1) = (a,a) + (0,a) = (a,2a)$.

Esto último es una contradicción pues $T(\mathbb{R}(1,2)) = \mathbb{R}(2,1)$ y $f(1,2)$ tendría que ser de la forma $(2d, d)$.

En la búsqueda de anillos para los cuales las categorías R-Mod y $\mathcal{L}_{\mathcal{M}R}$ sean equivalentes bajo el funtor F, además de que encontramos que una condición necesaria para que F sea pleno es que en R-Mod sólo exista una clase de isomorfismo de módulos simples, consideremos que si M es un módulo simple en R-Mod, entonces su anillo de endomorfismos tiene que ser trivial, pues si tuviera un automorfismo distinto de la identidad, el funtor F no sería fiel, de ahí que se considere al campo $\mathbb{Z}_2$ en el siguiente teorema.

Teorema 5.6. *$\mathbb{Z}_2$-Mod es una categoría equivalente a $\mathcal{L}_{\mathcal{M}\mathbb{Z}_2}$ y el funtor F es una equivalencia entre ambas.*

Demostración. Primero veamos como actúa F en los objetos. Si V y W son dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{Z}_2$ cuyas retículas de subespacios son isomorfas, con β base de V, entonces para cada elemento $x \in \beta$, su subespacio generado $\langle x \rangle$ es un átomo de $\mathcal{L}(V)$, y la familia $\{\langle x \rangle\}_{x\in\beta}$ es una familia de átomos independiente en $\mathcal{L}(V)$ de cardinalidad $|\beta|$, mínima con la propiedad de generar a V, es decir $\bigvee\limits_{x\in\beta} \langle x \rangle = V$; como $\mathcal{L}(V) \cong \mathcal{L}(W)$, $\mathcal{L}(W)$ tiene una familia de átomos independiente $\{a_i\}_{i\in I}$ de cardinalidad $|\beta|$, mínima con la propiedad de generar a W. Cada a_i es un subespacio de dimensión uno de W, y si x_i es una base de a_i, entonces $\{x_i\}_{i\in I}$ es una base de cardinalidad β de W, luego como dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{Z}_2$ con bases de la misma cardinalidad son isomorfos, se tiene que $V \cong W$.
Ahora veamos que $F : Hom_{\mathbb{Z}_2}(V,W) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}\mathbb{Z}_2}}(\mathcal{L}(V),\mathcal{L}(W))$ es inyectivo. Para algún conjunto I, $V \cong \bigoplus\limits_{i\in I} \mathbb{Z}_2$, consideremos la base canónica de V:

$$\beta = \{f_i : I \longrightarrow \mathbb{Z}_2\}_{i\in I} \qquad \text{con} \qquad f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq i \\ 1 & \text{si } x = i. \end{cases}$$

Supongamos que $\varphi, \psi : V \longrightarrow W$ son dos transformaciones lineales tales que $F(\varphi) = F(\psi)$. Para cada $i \in I$, como el campo es $\mathbb{Z}_2$, entonces $\langle f_i \rangle = \{\overline{0}, f_i\}$, además $\{\overline{0}, \varphi(f_i)\} = F(\varphi)(\{\overline{0}, f_i\}) = F(\psi)(\{\overline{0}, f_i\}) = \{\overline{0}, \psi(f_i)\}$, de donde $\varphi(f_i) = \psi(f_i)$ para toda $i \in I$ y como φ y ψ coinciden en una base, son la misma transformación lineal.
Veamos que $F : Hom_{\mathbb{Z}_2}(V,W) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}\mathbb{Z}_2}}(\mathcal{L}(V),\mathcal{L}(W))$ es suprayectivo. Supongamos que $\eta : \mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathcal{L}(W)$ es un morfismo lineal, si $L \leq V$ es un subespacio de dimensión dos, entonces $dim(\eta(L)) \leq 2$, para ver esto supongamos que K es el núcleo de η, β una base de K y que $L = \{\overline{0}, a, b, a+b\}$, notemos que si a y b son elementos de K, $L \leq K$ y por la definición de morfismo lineal $\eta(L) = \eta(L \bigvee K) = \eta(K) = 0$ de donde $dim(\eta(L)) \leq 2$. Por otro lado si a no es un elemento de K, nombramos $L' = \langle \beta \cup \{a\} \rangle$, se tiene que $K < L'$, y si suponemos que M es un espacio vectorial tal que $K < M \leq L'$ entonces existe $x \in M$ tal que $x \notin K$, luego como $x \in L'$ se tiene que $x = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j + a$, de donde $a = x + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ y $L' = M$, así L' es un átomo en la retícula $\mathcal{L}(V/K)$ y con un razonamiento análogo puede verse que $L \bigvee K = \langle K \cup \{a,b\} \rangle$ está a lo más a "distancia dos"de K. Por último como η induce un isomorfismo $\overline{\eta}$ entre $\mathcal{L}(V/K)$ y $\eta(V)/0_{\mathcal{L}(W)}$ que cumple $\overline{\eta}(L \bigvee K) = \eta(L \bigvee K) = \eta(L)$ y se tiene que $\eta(L)$ está a lo más a "distancia dos"de $0_{\mathcal{L}(W)}$ y por lo tanto $dim(\eta(L)) \leq 2$.
Por razones análogas para todo $v \in V$, $dim(\eta(\{\overline{0}, v\})) \leq 1$, de donde η define una función $T : V \longrightarrow W$ con la regla de correspondencia dada por

$$T(v) = \begin{cases} \overline{0} & \text{si } \eta(\{\overline{0}, v\}) = \{\overline{0}\} \\ v' & \text{si } \eta(\{\overline{0}, v\}) = \{\overline{0}, v'\}. \end{cases}$$

Veamos que T es una transformación lineal, para esto solo falta ver que abre sumas. Supongamos que $x, y \in V$ si $x = 0$, $y = 0$ ó $x = y$, dado que todos los elementos en espacios vectoriales sobre $\mathbb{Z}_2$ son sus propios inversos aditivos sería inmediato que $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Supongamos que $x \neq 0 \neq y$; $x \neq y$. Nombremos $L = \{\overline{0}, x, y, x+y\}$ el plano generado por $\{x, y\}$. Dado que los morfismos lineales respetan orden por [17, Corolario 1.4.], se tiene que $\{T(x), T(y), T(x+y)\} \subseteq \eta(L)$ y además dado que por [17, Proposición 1.3.-(4)] los morfismos lineales abren supremos se tiene que:

$$\eta(L) = \eta(\{\overline{0}, x\} \bigvee \{\overline{0}, y\}) = \eta(\{\overline{0}, x\}) \bigvee \eta(\{\overline{0}, y\}) = \{\overline{0}, T(x), T(y), T(x) + T(y)\}.$$

Consideremos los siguientes casos:

- Si $T(x) = 0 = T(y)$ entonces $\eta(L) = 0$, de donde $T(x+y) = 0 = T(x) + T(y)$.
- Si $T(x) \neq 0 \neq T(y)$ y $T(x) = T(y)$ entonces $T(x) + T(y) = 0$, además $\eta(L) = \{\overline{0}, T(x)\}$. Por otro lado, si $T(x+y) = T(x)$ tendríamos una contradicción pues la restricción de η a L sería un morfismo lineal con núcleo cero, pero L no es isomorfa a $\{\overline{0}, T(x)\}$, de donde $T(x+y) = 0 = T(x) + T(y)$.
- Si $T(x) \neq 0$ pero $T(y) = 0$ entonces $\eta(L) = \{\overline{0}, T(x)\}$. Notemos que si $T(x+y) = 0$, entonces $\eta(L) = \eta(\{\overline{0}, y\} \bigvee \{\overline{0}, x+y\}) = \{\overline{0}\}$ lo cual es una contradicción, de donde $T(x+y) = T(x) = T(x) + T(y)$.
- Si $T(x) \neq 0 \neq T(y)$ y $T(x) \neq T(y)$ y $T(x+y) = 0$ entonces $\{\overline{0}, x+y\}$ es el nucleo de $\eta|_L$, y eso implica que $\eta(\{\overline{0}, x\}) = \eta(\{\overline{0}, x\} \bigvee \{\overline{0}, x+y\}) = \eta(\{\overline{0}, y\} \bigvee \{\overline{0}, x+y\}) = \eta(\{\overline{0}, y\})$, y $T(x)$ es igual a $T(y)$ contradiciendo la hipótesis. Así $T(x+y) \neq 0$, el núcleo de $\eta|_L$ es cero y $\eta|_L$ correstringida a su imagen es un isomorfismo, por lo que podemos suponer que $T(x) \neq T(x+y) \neq T(y)$. Así $\{\overline{0}, T(x), T(y), T(x+y)\} = \eta(L) = \{\overline{0}, T(x), T(y), T(x) + T(y)\}$ de donde $T(x+y) = T(x) + T(y)$.

Dado que en cualquier caso se concluye que $T(x+y) = T(x) + T(y)$, T es una transformación lineal. Por último todo elemento de $\mathcal{L}(V)$ es supremo de átomos, entonces si $U \leq V$ y β es una base de U se tiene que $U = \bigvee_{b \in \beta} \{\overline{0}, b\}$ y como por [11, Proposición 2.4.] los morfismos lineales abren supremos arbitrarios se tiene que:

$$\eta(U) = \eta(\bigvee_{b \in \beta} \{\overline{0}, b\}) = \bigvee_{b \in \beta} \eta(\{\overline{0}, b\}) = \bigvee_{b \in \beta} F(T)(\{\overline{0}, b\}) = F(T)(\bigvee_{b \in \beta} \{\overline{0}, b\}) = F(T)(U) = T(U).$$

Por lo tanto T manda a cada subespacio de V al mismo subespacio de W que η y por la Proposición 5.4 se tiene el resultado. $\square$

Para que un anillo R, al igual que $\mathbb{Z}_2$, cumpla que R-Mod es equivalente a su imagen bajo el funtor F en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se necesita que no existan dos R-módulos no isomorfos cuyas retículas de submódulos son isomorfas.

Teorema 5.7. *Para R un anillo simple artiniano, si M y N son dos R-módulos cuyas retículas de submódulos $\mathcal{L}(M)$ y $\mathcal{L}(N)$ son isomorfas, entonces M es isomorfo a N.*

Demostración. Como $M = \bigoplus_{i\in I} S$, si suponemos que x es un elemento no nulo de S, podemos considerar para cada $i \in I$ al elemento $m_i \in M$ dado por:

$$m_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ x & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Se tiene que $\{\langle m_i\rangle\}_{i\in I}$ es una familia independiente de átomos de $\mathcal{L}(M)$ para la cual $M = \bigvee_{i\in I} \langle m_i\rangle$. Como $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(N)$, existe $\{n_i\}_{i\in I}$ una familia independiente de átomos de $\mathcal{L}(N)$ tal que $N = \bigvee_{i\in I} n_i$. Todos los elementos n_i de $\mathcal{L}(N)$ son átomos, por lo que son submódulos simples de N y son isomorfos a S, y al ser N su supremo, se tiene que $N = \bigoplus_{i\in I} n_i \cong \bigoplus_{i\in I} S = M$. □

Sin embargo que R sea simple artiniano no es una condición suficiente para que el funtor sea pleno, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.8. Consideremos $R = \mathbb{Z}_5$ y el espacio vectorial $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, su retícula de subespacios es la siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5 \arrow[dlll, dash] \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] \arrow[drrr, dash] & & & \\
\mathbb{Z}_5\times\{0\} \arrow[drrr, dash] & \langle(1,1)\rangle \arrow[drr, dash] & \langle(1,2)\rangle \arrow[dr, dash] & & \langle(1,3)\rangle \arrow[dl, dash] & \langle(1,4)\rangle \arrow[dll, dash] & \{0\}\times\mathbb{Z}_5 \arrow[dlll, dash] \\
 & & & \{(0,0)\}. & & &
\end{tikzcd}$$

La función $(\mathbb{Z}_5 \times \{0\} \quad \{0\} \times \mathbb{Z}_5) : \mathcal{L}(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$ dada por la transposición de estos dos subespacios, y dejando a los demás subespacios fijos es un isomorfismo lineal, sin embargo no puede existir una transformación lineal $f : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ tal que $F(f) = (\mathbb{Z}_5 \times \{0\} \quad \{0\} \times \mathbb{Z}_5)$ pues de ser así, como f fija al subespacio $\langle(1,1)\rangle$, se tendría que $(x,x) = f(1,1) = f(1,0) + f(0,1)$ por lo que $f(1,0) = (0,x)$ y $f(0,1) = (x,0)$ para algún $x \in \mathbb{Z}_5$. Por otro lado, como f fija al subespacio $\langle(1,2)\rangle$, entonces

$$(y,2y) = f(1,2) = f(1,0) + 2f(0,1) = (0,x) + (2x,0) = (2x,x)$$

y así $x = y = 0$ lo cual es una contradicción.

Si el anillo R es conmutativo, que sea simple tampoco es una condición suficiente para que el funtor F sea fiel, pues si existe una unidad $r \in R$ con $0 \neq r$, entonces el homomorfismo $r\_ : R \longrightarrow R$ dado por multiplicar por R es un isomorfismo diferente de la identidad que deja invariantes a todos los ideales de R, es decir $F(r\_) = Id_{\mathcal{L}(R)}$, así por ejemplo $\mathbb{Z}_3$-Mod no es equivalente a su imagen bajo el funtor F. Por otro lado si R es un anillo conmutativo con grupo de unidades trivial, entonces el único automorfismo de R es la identidad, por lo que si F fuera pleno, el único automorfismo de $\mathcal{L}(R)$ podría ser la identidad.

Definición 5.9. Diremos que un módulo $M \in R$-Mod es retráctil si para todo submódulo no nulo $N \leq M$ se tiene que $Hom_R(M,N) \neq 0$.

Teorema 5.10. *Si $M \in R$-Mod es retráctil entonces la retícula $\mathcal{L}(M)$ es retráctil según la Definición 4.2.*

Demostración. Sea $N/0$ un intervalo inicial no nulo de $\mathcal{L}(M)$, N es un submódulo no nulo de M, y al ser retráctil existe $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$. Consideremos $F(f) \in Hom_{\mathcal{L}_M}(\mathcal{L}(M), N/0)$, es un morfismo lineal con núcleo $k =$Ker$(f) \neq M$, por lo tanto $F(f)$ es no nulo y $\mathcal{L}(M)$ es retráctil. □

La implicación recíproca del Teorema 5.10 no es cierta, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.11. Consideremos el grupo abeliano $\mathbb{Z}(p^\infty) = \{z \in \mathbb{C} | z^{p^n} = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$ con p un primo mayor que dos como $\mathbb{Z}$-módulo, y hagamos el producto $\mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}_2$. Dicho producto no es retráctil pues si existiera un homomorfismo no nulo

$$f : \mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \langle CiS(2\pi/p), 0)\rangle,$$

donde $CiS(2\pi/p) = Cos(2\pi/p) + iSen(2\pi/p)$, ocurriría lo siguiente:
Si $f(1,1) = (CiS(2k\pi/p), 0)$ entonces

$$(1,0) = f(1,0) = f((1,1)(*,+)(1,1)) = (CiS(2k\pi/p),0)(*,+)(CiS(2k\pi/p),0),$$

por lo que $p|2k$ y así $p|k$, de donde $f(1,1) = (1,0)$, luego $f(x,0) = f((x,1)(*,+)(1,1)) = f(x,1)$. Por lo tanto para todo elemento $(x,1) \in \mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}_2$ se tiene que $f(x,1) = f(x,0)$.
Como f es no nulo y $\langle(CiS(2\pi/p),0)\rangle$ es simple, se tiene que f es un epimorfismo. Sea $(x,y) \in \mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}_2$ tal que $f(x,y) = (CiS(2\pi/p),0) = f(x,0)$, y sea $\theta = Arg(x)$, nombremos $x' = CiS(\theta/p) \in \mathbb{Z}(p^\infty)$, tenemos que

$$(1,0) = p(f(x',0)) = f(p(x',0)) = f((x')^p,0) = f(x,0) = (CiS(2\pi/p),0)$$

lo cual es una contradicción que viene de suponer que existía el homomorfismo no nulo f. Por lo tanto $\mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}_2$ no es retráctil.
Ahora veamos a la retícula de de submódulos de $\mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}_2$:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbb{Z}(p^\infty)\times\mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathbb{Z}(p^\infty)\times\{0\} \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[dl] \arrow[d] \\
\langle (CiS(2\pi/p^3),0)\rangle \arrow[d] & \langle CiS(2\pi/p^2)\rangle\times\mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \arrow[d] \\
\langle (CiS(2\pi/p^2),0)\rangle \arrow[d] & \langle CiS(2\pi/p)\rangle\times\mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \arrow[d] \\
\langle (CiS(2\pi/p),0)\rangle \arrow[d] & \{1\}\times\mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \\
\{(1,0)\}. &
\end{tikzcd}
$$

Todo intervalo inicial no nulo de dicha retícula contiene un átomo, y la retícula $\mathcal{L}(\mathbb{Z}(p^\infty)\times\mathbb{Z}_2)$ tiene un coátomo, por lo tanto es retráctil.

Teorema 5.12. *Si M es un R-módulo retráctil, S su anillo de endomorfismos, $\mathcal{L}(M)$ es una retícula semiproyectiva, y $N \leq L \leq M$ son tales que $S_N = \{f \in S \mid Im(f) \leq N\}$ es un ideal derecho de S esencial en la retícula de ideales derechos de S contenidos en $S_L = \{f \in S \mid Im(f) \leq L\}$, entonces*

$$S'_{\mathcal{L}(N)} = \{\mathcal{L}(M) \xrightarrow{f} \mathcal{L}(M) \mid f \text{ es un morfismo lineal, } f(M) \leq N\}$$

es un ideal derecho del monoide de endomorfismos de $\mathcal{L}(M)$ esencial en la retícula de ideales derechos contenidos en

$$S'_{\mathcal{L}(L)} = \{\mathcal{L}(M) \xrightarrow{f} \mathcal{L}(M) \mid f \text{ es un morfismo lineal, } f(M) \leq L\}.$$

Demostración. Sea S' el monoide de endomorfismos de $\mathcal{L}(M)$, si I es un ideal derecho no nulo de S' contenido en $S_{\mathcal{L}(L)}$ y $0 \neq f \in I$, como $f(M)$ es un submódulo no nulo de L, y M es retráctil, existe $0 \neq g \in S_{f(M)} \cap S_N$, por lo que $0 \neq F(g) \in S'_{\mathcal{L}(f(M))} \cap S'_{\mathcal{L}(N)}$, por último al ser $\mathcal{L}(M)$ semiproyectiva se tiene que $S'_{\mathcal{L}(f(M))} = f \circ S' \subseteq I$ con lo cual se tiene el resultado. □

Referencias

[1] Adel N. Alahmadi, Mustafa Alkan y Sergio López-Permouth. *Poor modules: The Opposite of injectivity*. Springer-Verlag, New-York, 1974.

[2] A. Haghany y M.R. Vedadi. *Study of Semi-projective Retractable Modules*. Algebra Colloquium 14:3 (2007) 489-496.

[3] Alejandro Alvarado-García, César Cejudo-Castilla, Hugo Alberto Rincón-Mejía e Iván Fernando Vilchis-Montalvo. *Pseudocomplements and strong pseudocomplements in lattices of module classes*. Journal of Algebra and its Applications, World Scientific Publishing Company, 2018.

[4] Alejandro Alvarado-García, Hugo Alberto Rincón-Mejía y José Ríos-Montes. *On Big Lattices of Classes of R-modules Defined by Closure Properties*. Advances in Ring Theory, Trends in Mathematics, 19–36 Brikhauser, 2010.

[5] Călugăreanu G. *Lattice concepts of module theory*. Kluwer texts in the Mathematical Sciences, vol. 22, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[6] Egbert Harzheim. *Ordered sets*. Advances in Mathematics, Volume 7, J. Szep, Budapest University of Economics, Hungary Springer, 2005.

[7] Francisco Federico Raggi-Cárdenas, Hugo Alberto Rincón-Mejía, José Ríos-Montes, Rogelio Fernández-Alonso y Silvia Claudia Gavito Ticozzi. *Main modules and some characterizations of rings with global conditions on preradicals*. Journal of Algebra and its Applications, World Scientific Publishing Company, 2014.

[8] F.W. Anderson y K.R. Fuller. *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag, New-York, 1974.

[9] Manoj Kumar Patel. *Properties of Semi-Projective Modules and their Endomorphism Rings*. Algebra and its Applications, 2016.

[10] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1971.

[11] Sebastián Pardo-Guerra, Hugo Alberto Rincón-Mejía, y Manuel Gerardo Zorrilla-Noriega. *Some isomorphic big lattices and some properties of lattice preradicals*. World Scientific, Journal of Algebra and Its Applications, 24 de julio 2019.

[12] Sebastián Pardo-Guerra, Hugo Alberto Rincón-Mejía, y Manuel Gerardo Zorrilla-Noriega. *Big lattices of hereditary and natural classes of linear modular lattices*. Algebra Univers. 82:52, 2021.

[13] Sebastián Pardo-Guerra, Hugo Alberto Rincón-Mejía, Manuel Gerardo Zorrilla-Noriega y Francisco González-Bayona. *On the lattice of conatural classes of linear modular lattices*. Algebra Universalis, Birkäuser, 2023.

[14] Stenström, Bo. *Rings of quotients, An introduction to methods of ring theory*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 217. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[15] Toma Albu y Mihai Iosif. *Lattice preradicals with applications to Grothendieck categories and torsion theories*. ELSEVIER, Journal of Algebra, 28 de agosto 2015.

[16] Toma Albu y Mihai Iosif. *On socle and radical of modular lattices*. Annals of the University of Bucharest (mathematical series), 187-194, 2014.

[17] Toma Albu y Mihai Iosif. *The category of linear modular lattices*. Societatea de Stiinte Matematice din Romania, Bulletin mathématique, 23 de diciembre 2012.

[18] Toma Albu, Mihai Iosif y Adnan Tercan. *The conditions (Ci) in modular lattices, and applications*. Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, 2014.