Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teoría de cuerdas no relativistas y la geometría de Newton-Cartan

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

Rafael Fernando Olmedo Aguilar

TUTOR

Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2024

Dedicado a mis padres

Agradecimientos

Primero, me gustaría agradecer a mis padres, Gabriela Aguilar Kú y Rafael Olmedo Pérez, por todo el apoyo y cariño que me brindaron a lo largo de mi formación académica y como persona. Me considero una persona muy afortunada de tenerlos en mi vida. Segundo, me gustaría agradecer al Dr. Alberto Güijosa Hidalgo por haberme asesorado a lo largo de esta tesis de licenciatura. Estoy muy agradecido de que haya compartido parte de su conocimiento en una de las áreas de la física que tanto me intriga como lo es la física teórica de altas energías. Tercero, me gustaría agradecer al Dr. Daniel Ávila Hernández por la ayuda que me brindó en la etapa final de este proyecto. Finalmente, me gustaría agradecer a todos mis amigos y compañeros de la CDMX y Cancún por todos los buenos y malos momentos que pasé con ellos a lo largo de la carrera.

Resumen

En este trabajo revisamos la formulación original de la teoría de cuerdas no relativistas en espaciotiempo plano al considerar un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas estándar en espaciotiempo plano con un campo de norma antisimétrico. En particular, revisamos la acción de la hoja de mundo y el espectro de masas de la teoría. Posteriormente, derivamos la geometría de Newton-Cartan de cuerdas al considerar un límite particular de la geometría Riemanniana de relatividad general en el formalismo vielbein con un campo de norma auxiliar. Finalmente, derivamos la acción del modelo sigma no lineal y las ecuaciones de movimiento del espaciotiempo de la teoría de cuerdas no relativistas en una geometría de Newton-Cartan de cuerdas acoplada a un campo antisimétrico y un campo dilatónico. Obtenemos estos resultados al aplicar una generalización del límite de bajas energías del caso plano sobre las propiedades análogas de la teoría de cuerdas estándar en espaciotiempo curvo. Con este método logramos en particular obtener al final de la tesis un fondo que es más general que los considerados hasta ahora en la literatura de cuerdas no relativistas. Se trata de un fondo curvo con la interesante propiedad de tener un comportamiento relativista usual y un comportamiento no relativista al alejarnos hacía el infinito.

Índice general

Agradecimientos II

Resumen III

1. Introducción 1

2. Fundamentos de Gravedad 3

2.1. Gravedad de Newton 3
2.2. Gravedad de Einstein 5
2.3. Solución de Schwarzschild 10
2.4. Solución de Reissner-Nordström 11
2.5. Formalismo Vielbein de GR 12
2.6. Límite Newtoniano de GR 14
2.7. Gravedad de Newton-Cartan 17

3. Teoría de Cuerdas 22

3.1. Partícula Puntual (Relativista) 22
3.2. Acción de Nambu-Goto 24
3.3. Acción de Polyakov 25
3.4. Espectro de la Cuerda 27
3.5. Modelo Sigma No Lineal 33
3.6. Ecuaciones de Movimiento 34
3.7. Acción Efectiva de Bajas Energías 35
3.8. Solución de Dabholkar-Harvey 36

4. Teoría de Cuerdas No Relativistas 40

4.1. Límite de Bajas Energías de NRST 41
4.2. Partícula Puntual (No Relativista) 42
4.3. Acción Tipo Nambu-Goto 45
4.4. Acción Tipo Polyakov o $\beta - \gamma$ 47
4.5. Espectro de Masas de NRST 49
4.6. Geometría de Newton-Cartan de Cuerdas 51

4.7. Modelo Sigma No Lineal de NRST 54
4.8. Ecuaciones de Movimiento de NRST 59
4.9. Solución Tipo Dabholkar-Harvey 60

5. Conclusiones **65**

Bibliografía **70**

Capítulo 1

Introducción

En la naturaleza existen cuatro tipos de fuerzas fundamentales: la gravitacional, la electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil. El objetivo más ambicioso de la física teórica es formular una teoría unificada que describa estas cuatro fuerzas y su interacción con la materia. Esta teoría tiene que ser compatible con los dos grandes pilares de la física moderna: la relatividad general y la mecánica cuántica. Hasta la fecha, la teoría que más se acerca a esta especie de teoría del todo es el Modelo Estándar de partículas elementales. Este modelo utiliza el lenguaje de la teoría cuántica de campos para describir la interacción electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil, sin considerar la interacción gravitacional. La descripción cuántica de la gravedad aún es un problema abierto y solo se tiene como referencia su versión clásica que es precisamente la relatividad general. Sin embargo, existen algunas teorías que presumen describir la gravedad en el mismo marco cuántico unificado que las otras interacciones. Uno de los candidatos más prometedores es la teoría de cuerdas. Esta teoría sugiere la idea de que todo en el universo está hecho de pequeños filamentos unidimensionales llamadas cuerdas, en vez de partículas puntuales de dimensión cero.

La teoría de cuerdas resulta interesante no solo porque es una teoría cuántica de la gravedad, sino también porque en el límite de bajas energías esta teoría reproduce la relatividad general y en una descripción cuántica el espectro de masas de la cuerda puede dar lugar a las partículas del Modelo Estándar. La teoría de cuerdas y la relatividad general proporcionan una descripción de la gravedad en términos de la geometría del espaciotiempo. Otro ejemplo concreto de una teoría que bajo ciertas condiciones logra reproducir su teoría predecesora es justo la relatividad general, que en el límite newtoniano reproduce la gravedad newtoniana basada en la ley de la gravitación universal. La formulación geométrica de la gravedad newtoniana es conocida como gravedad de Newton-Cartan. Con todo esto en mente, una pregunta interesante surge: ¿existe una teoría cuántica de una versión cuerdera de la gravedad de Newton-Cartan? La respuesta inmediata es sí y es precisamente la teoría de cuerdas no relativistas, también conocida como teoría de cuerdas enrolladas.

El objetivo de este trabajo es dar una descripción de las propiedades generales de la teoría de cuerdas no relativistas al considerar el límite de bajas energías de las propiedades análogas de la teoría de cuerdas estándar. Para esto, dividimos el trabajo de la siguiente forma. En el capítulo 2 revisamos algunos conceptos fundamentales importantes de la teoría de gravedad de Newton, de Einstein y de Newton-Cartan. En particular, revisamos el principio de relatividad de Galileo, la ley de la gravitación universal, la relatividad especial y general así como algunas soluciones simples de las ecuaciones de Einstein. También revisamos la formulación vielbein y el límite newtoniano de la relatividad general y utilizamos estos conceptos para formular la gravedad de Newton-Cartan. Posteriormente, en el capítulo 3 abordamos los conceptos generales de la teoría de cuerdas. En particular, revisamos la acción de la hoja de mundo, el espectro de masas, la acción del modelo sigma no lineal, las ecuaciones de movimiento del espaciotiempo, la acción efectiva de bajas energías y la solución de Dabholkar-Harvey. Finalmente, en el capítulo 4 estudiamos la formulación de la teoría de cuerdas no relativistas. En particular, revisamos el límite de bajas energías, la acción de la hoja de mundo y el espectro de masas de la teoría. Después generalizamos este límite de bajas energías y derivamos la acción del modelo sigma no lineal y las ecuaciones de movimiento del espaciotiempo de la teoría. Nuestro resultado más novedoso se encuentra en la sección 4.9, donde mostramos que al tomar el límite de bajas energías (no relativista) del fondo de cuerda negra (Dabholkar-Harvey) de la teoría de cuerdas estándar, obtenemos un fondo con la interesante propiedad de ser solución de las ecuaciones de Einstein usuales (relativistas) que asintóticamente además se vuelve solución de la gravedad de Newton-Cartan de cuerdas.

Capítulo 2

Fundamentos de Gravedad

En este capítulo revisamos algunos conceptos importantes de la teoría de gravedad de Newton, de Einstein y de Newton-Cartan. En particular, empezamos con una breve descripción del principio de relatividad de Galileo y la ley de la gravitación universal. Posteriormente, revisamos la relatividad especial y general así como algunas soluciones simples de las ecuaciones de Einstein. También revisamos el formalismo vielbein y el límite newtoniano de la relatividad general. Finalmente, estudiamos la formulación geométrica de la gravedad de Newton, conocida como gravedad de Newton-Cartan [1, 2]. Todo esto en el contexto de partículas puntuales que se mueven en un espaciotiempo de 4 dimensiones. Revisamos la bibliografía general para abordar este tipo de temas, [3, 4, 5, 6].

2.1. Gravedad de Newton

En la mecánica newtoniana el espacio y el tiempo no están relacionados. El espacio (plano) se representa por un espacio euclídeo en $\mathbb{R}^3$ y el tiempo $x^0 = t$ es absoluto. Este tiempo absoluto significa que el tiempo medido por diferentes observadores es independiente de su movimiento relativo en el espacio. El principio de relatividad de Galileo establece que las leyes de la física son las mismas para la clase de observadores sobre los que no actúan fuerzas, llamados observadores inerciales. La coordenada temporal x^0 y las coordenada espaciales x^i están relacionadas a través del grupo de Galileo [3],

$$x'^0 = x^0 + \zeta^0, \tag{2.1a}$$

$$x'^i = A^i{}_j x^j + v^i x^0 + \zeta^i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.1b}$$

Los parámetros ζ^0 y ζ^i son respectivamente translaciones temporales y espaciales constantes, v^i es un impulso constante y $A^i{}_j \in SO(3)$ es una rotación espacial con inversa $A_j{}^i$ tal que

$$A^i{}_j A_i{}^k = \delta^k_j. \tag{2.2}$$

El grupo $SO(3)$ representa el grupo de las matrices de rotación ortogonales en $\mathbb{R}^3$ con determinante 1. Las transformaciones (2.1) constituyen las simetrías del espacio-tiempo newtoniano.

En un marco de referencia inercial, utilizando coordenadas cartesianas, el movimiento de una partícula libre con trayectoria $x^i(t)$ está dado por

$$\ddot{x}^i = 0, \tag{2.3}$$

donde un punto denota derivación con respecto al tiempo. La solución es una trayectoria recta en el espacio-tiempo newtoniano. Las fuerzas inerciales o ficticias aparecen cuando se consideran las leyes de Newton para observadores acelerados. Se denominan inerciales porque estas fuerzas se pueden igualar a cero al cambiar a un marco de referencia inercial. La fuerza centrífuga y de Coriolis son ejemplos de este tipo de fuerzas que aparecen cuando se consideran rotaciones.

La gravedad newtoniana es una fuerza instantánea entre masas gravitantes. La masa gravitatoria se define como la medida de la fuerza de atracción gravitacional que experimenta una porción de materia dentro de un campo gravitacional. La ley de la gravitación universal de Newton establece que la fuerza gravitacional $F(r)$ que experimentan dos partículas separadas una distancia r con masas gravitacionales M y m está dada por [3]

$$F(r) = \frac{G_{\mathrm{N}} M m}{r^2}, \tag{2.4}$$

donde G_{N} es la constante gravitacional de Newton. La ausencia de cualquier factor dependiente del tiempo en (2.4) indica que la gravedad newtoniana es instantánea.

La masa inercial es una medida de la resistencia de una masa a ser acelerada. Experimentalmente, la masa gravitacional y la masa inercial son la misma. Si se considera la trayectoria de una partícula con masa inercial m en coordenadas esféricas con coordenada radial $r(t)$, la aceleración radial $\ddot{r}(t)$ debida a un campo gravitacional causado por una masa gravitacional M está dada por

$$\ddot{r}(t) = -\frac{G_{\mathrm{N}} M}{r^2} \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \tag{2.5}$$

donde $\Phi(r)$ es el potencial newtoniano. Este potencial newtoniano satisface la ecuación de Poisson:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = S_2 G_{\mathrm{N}}\rho(r), \quad S_2 = 4\pi, \tag{2.6}$$

donde S_2 es el volumen de la esfera unitaria ($r = 1$) en 2 dimensiones y $\rho(r)$ es la densidad de masa. Utilizando coordenadas cartesianas, las ecuaciones (2.5) y (2.6) se ven respectivamente como

$$\ddot{x}^i + \partial^i\Phi(x) = 0, \quad \Delta\Phi(x) = S_2 G_{\mathrm{N}}\rho(x), \tag{2.7}$$

donde $\Delta = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ es el laplaciano espacial. Estas expresiones son invariantes bajo las transformaciones de Galileo (2.1) y también bajo las transformaciones

$$x'^i = x^i + \xi^i(t), \quad \Phi'(x') = \Phi(x) + \delta_{ij}\ddot{\xi}^i(t)x^j. \tag{2.8}$$

Estas transformaciones indican que, localmente en el espacio-tiempo newtoniano, siempre se puede usar una aceleración $\ddot{\xi}^i(t)$ para hacer $\Phi'(x') = 0$ y borrar toda apariencia de gravedad. Esto es posible ya que la masa inercial y gravitacional de una partícula son la misma y siempre son cantidades positivas. Las transformaciones (2.8) sugieren la idea de que la gravedad se puede tratar como una fuerza inercial. Esta idea recibe el nombre de "el principio de equivalencia" y constituye la base conceptual de la relatividad general [6].

2.2. Gravedad de Einstein

La gravedad de Einstein es una formulación geométrica de la gravedad donde el espacio y el tiempo están relacionados. La relatividad especial se basa en tres postulados [6]:

- El principio de relatividad de Galileo.
- La velocidad de la luz c debe ser la misma para todos los observadores inerciales.
- El universo debe ser isotrópico y homogéneo.

Las coordenadas del espaciotiempo x^A están relacionadas a través del grupo de Poincaré,

$$x'^A = \Lambda^A{}_B x^B + \zeta^A, \quad A = 0, 1, 2, 3; \tag{2.9}$$

donde $\Lambda^A{}_B$ son las transformaciones de Lorentz y ζ^A son translaciones constantes del espaciotiempo. Las transformaciones (2.9) se denominan transformaciones globales porque los parámetros no dependen de las coordenadas x^A y forman el grupo de simetría de la teoría. De (2.9) se sigue que el tiempo no es absoluto, ya que la coordenada temporal $x^{'0}$ depende de las coordenadas del espaciotiempo x^B.

Las transformaciones globales de Poincaré (2.9) se derivan al exigir que mantengan invariante el intervalo de espaciotiempo, i.e.

$$ds^2 = \eta_{AB} dx^A dx^B = -c^2 dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j, \tag{2.10}$$

donde $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(-c^2, 1, 1, 1)$ es la métrica de Minkowski, que satisface

$$\Lambda^C{}_A \Lambda^D{}_B \eta_{CD} = \eta_{AB}. \tag{2.11}$$

La métrica de Minkowski es el objeto geométrico que permite definir la distancia entre dos puntos del espaciotiempo. La relatividad especial explica la dinámica de objetos que no están acelerando, es decir, no incorpora la gravedad. Eso es parte de la teoría de la relatividad general.

La base conceptual de la relatividad general es el principio de equivalencia [6]:

Cualquier experimento físico local que no implique gravedad tendrá el mismo resultado si se realiza en un marco inercial de caída libre que si se realiza en el espaciotiempo plano de la relatividad especial.

En este caso, *local* significa que en el experimento no existen fuerzas que puedan extenderse por grandes regiones (por ejemplo, una fuerza eléctrica) y, por lo tanto, fuera del dominio de validez del marco inercial local. Este principio implica que, localmente en el espaciotiempo, un observador se puede acelerar de tal manera que no experimente la gravedad, y por lo tanto, la dinámica puede ser descrita utilizando la relatividad especial. Este principio es clave para describir a la gravedad en el lenguaje de la geometría diferencial, donde el concepto de variedad es clave. Una variedad es esencialmente un espacio continuo, diferenciable, y que localmente parece euclidiano pero que globalmente puede deformarse, doblarse y hacer casi cualquier cosa (siempre que siga siendo continuo), por ejemplo, la superficie de una esfera es una variedad. Entonces, si el espaciotiempo está representado por una variedad, su curvatura se manifiesta solo globalmente, como la gravedad. Esto sugiere la identificación de la gravedad como una curvatura del espaciotiempo.

En relatividad general el grupo de transformaciones de Poincaré se extienden al grupo de transformaciones generales de coordenadas. La métrica de Minkowski $\eta_{AB}(x)$ se reemplaza por una métrica general $g_{\mu\nu}(x)$ con inversa $g^{\mu\nu}(x)$ tal que

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{2.12}$$

Bajo una transformación general de coordenadas $x^\rho \to x^{'\rho}(x^\mu)$, la métrica general del espaciotiempo $g_{\mu\nu}(x)$ transforma de acuerdo a

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\rho\lambda}(x), \tag{2.13}$$

tal que el intervalo de espaciotiempo $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ es un escalar. Esto se puede ver como una simple redefinición de la métrica en las nuevas coordenadas y en este sentido se dice que la métrica transforma covariantemente.

Otro concepto importante en geometría diferencial es el de derivada covariante. Para entender este concepto, basta con recordar que cualquier vector $\vec{V}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores base $\vec{e}$, es decir,

$$\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu. \tag{2.14}$$

Al calcular la derivada parcial de este vector se encuentra que:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}\vec{e}_\nu + V^\nu \frac{\partial \vec{e}_\nu}{\partial x^\mu}, \tag{2.15}$$

donde x^μ son las coordenadas del vector, por ejemplo, en coordenadas polares $x^0 = r$ y $x^1 = \theta$. Esto muestra que la derivada de $\vec{V}$ es más que solo la derivada de sus componentes V^μ. El segundo término del lado derecho de (2.15), como es un vector, se puede expresar de nuevo como una combinación lineal de los vectores base, es decir,

$$\frac{\partial \vec{e}_\nu}{\partial x^\mu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\vec{e}_\rho, \tag{2.16}$$

donde $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ son los coeficientes de esta combinación y son conocidos como los símbolos de Christoffel o conexión de Levi-Civita. Con esto en mente la ecuación (2.15) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + V^\rho \Gamma^\nu{}_{\rho\mu}\right)\vec{e}_\nu. \tag{2.17}$$

De aquí se sigue que la derivada covariante ∇_μ de las componentes de un vector V^ν está dada por:

$$\nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + V^\rho \Gamma^\nu{}_{\rho\mu}. \tag{2.18}$$

En general la derivada covariante puede ser aplicada sobre objetos algebraicos de mayor dimensión, llamados tensores. Un escalar ϕ es un tensor de rango $(0,0)$, un vector V^μ es un tensor de rango $(1,0)$, una matriz $A_{\mu\nu}$ es un tensor de rango $(0,2)$, etc. Por ejemplo, para un tensor de rango $(2,0)$ se tiene que:

$$\nabla_\rho T^{\mu\nu} = \partial_\rho T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\rho} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu{}_{\sigma\rho} T^{\mu\sigma}. \tag{2.19}$$

Los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ también se pueden escribir en términos de la métrica del espaciotiempo de la siguiente forma:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right). \tag{2.20}$$

En el caso de la relatividad especial, donde la métrica del espaciotiempo es plana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, todos los símbolos de Christoffel son cero y en este caso la derivada covariante y parcial son la misma. En un sentido matemático, la derivada covariante es una forma de especificar una derivada a lo largo de los vectores tangentes de una variedad. En un sentido físico, los símbolos de Christoffel describen cómo la métrica varía a través del espaciotiempo provocando que los objetos se aceleren. En relatividad general, los símbolos de Christoffel están determinados únicamente por la compatibilidad métrica, $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, y la constricción de torsión cero, $\Gamma^\rho{}_{[\mu\nu]} = 0$. Estas dos constricciones permiten escribir precisamente la conexión (2.20) en términos de la métrica y de sus derivadas.

La derivada covariante y la conexión de Levi-Civita también permiten definir el concepto de transporte paralelo. El transporte paralelo es una forma de transportar vectores paralelos (que viven en el espacio tangente de la variedad) a lo largo de curvas suaves en una variedad. La forma más sencilla de entender este concepto es considerar los paralelos y meridianos de una esfera. Si se transportan vectores paralelos desde el ecuador hacía el polo norte en algún momento estos vectores coincidirán ya que la variedad (esfera) es curva y los vectores no se podrán mantener paralelos a medida que se trasladan sobre la variedad. Otra propiedad que satisface la derivada covariante es la siguiente [6]:

$$\left[\nabla_\rho, \nabla_\sigma \right] V^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} V^\nu, \tag{2.21}$$

donde $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Riemann,

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}. \tag{2.22}$$

La expresión (2.21) indica que el tensor de Riemann mide la diferencia del transporte paralelo de un vector si va en una dirección o en otra. En otras palabras, el tensor de Riemann mide la curvatura de la variedad, en este caso, del espaciotiempo. El tensor de Riemann también se puede contraer para dar lugar al tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.23}$$

El tensor de Ricci describe cuanto cambia el volumen espaciotemporal de un objeto debido a la fuerza gravitatoria (curvatura). El escalar de Ricci es un número único que representa la curvatura general del espaciotiempo en un punto dado. Un escalar de Ricci positivo indica que el espacio tiene curvatura positiva, mientras que un escalar de Ricci negativo indica un espacio con curvatura negativa. Estas propiedades describen la curvatura de la geometría riemanniana de relatividad general con torsión cero y compatibilidad métrica. La definición de estos objetos geométricos será útil más adelante para estudiar una métrica especifica.

Los objetos geométricos definidos anteriormente también permiten definir las ecuaciones de Einstein [5]. Las ecuaciones que relacionan localmente la geometría del espaciotiempo con la distribución de materia son las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.24}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \tag{2.25}$$

El parámetro Λ es la constante cosmológica, κ es la constante gravitacional de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento. Por conservación de energía y momento se tiene que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Einstein introdujo la constante Λ para contrarrestar el efecto de la gravedad y lograr un universo estático, una noción que era la opinión más aceptada en ese momento. La constante cosmológica de Einstein fue abandonada después de que Edwin Hubble confirmara que el universo se estaba expandiendo.

Las ecuaciones de Einstein (2.24) se pueden obtener al variar, con respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$, la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica Λ y un lagrangiano de materia $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$,

$$S_{\mathrm{EH}} = \int d^D x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \Lambda + \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right), \tag{2.26}$$

donde $g = \det g_{\mu\nu}$ y el tensor de energía-momento está definido como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\mathrm{M}}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad S_{\mathrm{M}} = \int d^D x \sqrt{-g} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right). \tag{2.27}$$

Las ecuaciones de Einstein determinan la dinámica del espaciotiempo. La trayectoria de una partícula en el espaciotiempo está determinada por el postulado de que las partículas se mueven a lo largo de curvas geodésicas. La ecuación de la geodésica está dada por

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \tag{2.28}$$

donde τ es un parámetro afín. En la norma estática $\tau = x^0$ y con métrica $\eta_{\mu\nu}(x)$, la ecuación (2.28) se reduce a la ecuación de una partícula libre (2.3). En este caso, la norma estática significa tomar una parametrización donde la coordenada afín τ, que representa la trayectoria de una partícula puntual en el espaciotiempo, coincida con la coordenada temporal $x^0 = t$.

Parte importante de este trabajo se centra en analizar soluciones a las ecuaciones de Einstein. Por lo que resulta conveniente mencionar algunas soluciones sencillas como la solución de Schwarzschild y de Reissner-Nordström.

2.3. Solución de Schwarzschild

La solución más simple con simetría esférica a las ecuaciones de Einstein (2.24) en el vacío ($T_{\mu\nu} = \Lambda = 0$) está dada por la métrica de Schwarzschild [6],

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\Omega_2^2, \tag{2.29}$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2\mu}{r}, \quad d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.30}$$

Históricamente, esta fue la primera solución no trivial a las ecuaciones de Einstein, descubierta en 1916. El parámetro μ está relacionado con la masa M del objeto que distorsiona el espaciotiempo,

$$\mu = \frac{4\pi G_{\rm N}M}{c^2S_2}. \tag{2.31}$$

Existen dos valores especiales para la coordenada radial, $r = 0$ y $r = r_h$. El origen $r = 0$ describe la singularidad de un objeto masivo conocido como agujero negro. Toda la masa M está concentrada en esta singularidad y la curvatura es infinita. De hecho, ningún objeto moviéndose a la velocidad de la luz puede escapar del campo gravitacional de este objeto. Esta es una singularidad de curvatura y no solo una singularidad de las coordenadas, ya que esta divergencia ocurre en cualquier sistema de coordenadas. El valor $r = r_h$ está determinado por $f(r_h) = 0$, es decir, en $r_h = 2\mu$, que se conoce como el radio de Schwarzschild. La curvatura en r_h es finita y en este radio se encuentra localizado el horizonte de eventos del agujero negro. El horizonte de eventos se puede pensar como una superficie del agujero negro. Dentro de este límite, la velocidad necesaria para escapar del agujero negro supera la velocidad de la luz, lo cual imposible de acuerdo a los postulados de Einstein.

2.4. Solución de Reissner-Nordström

También es posible considerar el caso en el que la acción de Einstein-Hilbert (2.26) contiene un campo de norma abeliano A_μ que proporciona el lagrangiano de materia,

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.32}$$

Debido a la definición (2.27), se tiene $T_{\mu\nu} \neq 0$. En este caso, la solución a las ecuaciones de Einstein (2.24) con $\Lambda = 0$ está dada por la métrica de Reissner–Nordström [6],

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \tag{2.33}$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\theta^2}{r^2}, \quad d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.34}$$

El parámetro μ está relacionado con la masa M del objeto que curva el espaciotiempo,

$$M = \frac{c^2 S_2}{4\pi G_{\mathrm{N}} M}\mu, \tag{2.35}$$

mientras que el parámetro θ está relacionado con la carga Q del mismo objeto,

$$Q^2 = \frac{c^4 S_2}{4\pi G_{\mathrm{N}}}\theta^2. \tag{2.36}$$

Para $\mu^2 > \theta^2$ existen dos ceros diferentes para $f(r)$, el horizonte externo $r_{h,+}$ y el horizonte interno $r_{h,-}$, que están dados por

$$r_{h,\pm} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \theta^2}. \tag{2.37}$$

Para $\mu^2 = \theta^2$ se tiene $r_{h,+} = r_{h,-}$, que implica

$$f(r) = \left(1 + \frac{r_{h,+}}{r}\right)^2. \tag{2.38}$$

Este es el agujero negro extremal de Reissner–Nordström, donde la fuerza eléctrica y gravitacional sobre una partícula de prueba con $M = Q$ se cancelan. Al definir

$$\tilde{r} = r - r_{h,+}, \tag{2.39}$$

tal que el horizonte está en $\tilde{r} = 0$, la métrica extremal se puede rescribir como

$$ds^2 = -H^{-2}c^2dt^2 + H^2 d\vec{x}^2, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^{D-1}, \tag{2.40}$$

con $d\vec{x}^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega_2^2$, $|\vec{x}| \equiv \tilde{r}$ y H una función armónica,

$$H = 1 + \frac{r_{h,+}}{|\vec{x}|}. \tag{2.41}$$

Para $\mu^2 < \theta^2$ no existe horizonte. Además de los agujeros negros cargados, también existen agujeros negros rotantes, conocidos como agujeros negros de Kerr. Los agujeros negros que además de masa y carga tienen momento angular J son conocidos como agujeros negros de Kerr-Newman.

2.5. Formalismo Vielbein de GR

Hasta ahora, se han considerado tensores en la base de coordenadas $e_\mu = \partial_\mu$. Sin embargo, también es posible introducir un nuevo conjunto de vectores base e_A que es ortonormal. La relación entre ambas bases está dada por el llamado vielbein ${e_\mu}^A$ [2],

$$e_\mu = {e_\mu}^A e_A. \tag{2.42}$$

Dado que el conjunto e_A es ortonormal, se tiene la relación

$$g^{\mu\nu} {e_\mu}^A {e_\nu}^B = \eta^{AB}. \tag{2.43}$$

Así mismo, se puede definir la inversa de ${e_\mu}^A$, denotada por ${e^\mu}_A$, tal que

$${e_\mu}^A {e^\mu}_B = \delta^A_B, \quad {e_\mu}^A {e^\nu}_A = \delta^\mu_\nu. \tag{2.44}$$

Del vielbein y su inversa también se sigue que

$$g_{\mu\nu} = {e_\mu}^A {e_\nu}^B \eta_{AB}, \quad {e^\mu}_A {e^\nu}_B g_{\mu\nu} = \eta_{AB}. \tag{2.45}$$

Esta es la razón por la que el vielbein puede considerarse una especie de raíz cuadrada de la métrica. El vielbein permite definir un sistema coordenado en el que la métrica del espaciotiempo se ve localmente plana. Es decir, el vielbein da un mapeo a cada punto del espaciotiempo desde el espaciotiempo al espacio tangente.

En general, los índices curvos en tensores se pueden convertir en índices planos y viceversa al contraer con el vielbein. Por ejemplo, para un vector V^μ se tiene que

$$e_\mu{}^A V^\mu = V^A, \quad e^\mu{}_A V^A = V^\mu. \tag{2.46}$$

Bajo una transformación local de Lorentz $\Lambda^A{}_B(x)$, el vielbein transforma como

$$e'^A_\mu = \Lambda^A{}_B(x) e_\mu{}^B. \tag{2.47}$$

Para poder definir la derivada covariante de un tensor con índices planos se introduce la conexión de espín $\omega_\mu{}^A{}_B$. Por ejemplo, para un tensor T^{AB} se tiene que

$$\nabla_\mu T^{AB} = \partial_\mu T^{AB} - \omega_\mu{}^A{}_C T^{CB} - \omega_\mu{}^B{}_C T^{AC}. \tag{2.48}$$

También se puede definir la derivada covariante de un tensor con índices planos y curvos. La regla es que por cada índice curvo se tiene una conexión de Levi-Civita $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ mientras que por cada índice plano se tiene una conexión de espín $\omega_\mu{}^A{}_B$. Pero un tensor no debe depender de una elección de base en particular. Entonces, si se considera la derivada covariante de un vector en una base ortonormal y una base coordenada y se exige que sean iguales, se obtiene el postulado vielbein [2]:

$$\nabla_\mu e_\nu{}^A = \partial_\mu e_\nu{}^A - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} e_\rho{}^A - \omega_\mu{}^A{}_B e_\nu{}^B = 0. \tag{2.49}$$

La compatibilidad métrica y el postulado vielbein implican que la conexión de espín es antisimétrica en los índices planos AB. Además, la posición de los índices planos es irrelevante. Del postulado vielbein (2.49) también se sigue que

$$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] e_\nu{}^A = 0 \tag{2.50}$$

De acuerdo a (2.21), esto implica que

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma) e_\mu{}^A + R_{\rho\sigma}{}^A{}_B(\omega) e_\nu{}^B = 0, \tag{2.51}$$

donde $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma)$ está dado por (2.22) y $R_{\rho\sigma}{}^A{}_B(\omega)$ es el tensor de curvatura de $\omega_\mu{}^A{}_B$,

$$R_{\rho\sigma}{}^A{}_B(\omega) = \partial_{[\rho}\omega_{\sigma]}{}^A{}_B + \omega_{[\rho}{}^A{}_C \omega_{\sigma]}{}^C{}_B. \tag{2.52}$$

Al despejar el tensor de Riemann de (2.51) se obtiene

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma) = -e^\mu{}_A e^B{}_\nu R_{\rho\sigma}{}^A{}_B(\omega). \tag{2.53}$$

Del postulado vielbein (2.49) también se sigue que la conexión de Levi-Civita $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ se puede expresar en términos del vielbein y la conexión de espín como

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = e^{\rho}{}_{A}\left(\partial_{\mu} e_{\nu}{}^{A} - \omega_{\mu}{}^{AB} e_{\nu B}\right). \tag{2.54}$$

La constricción de torsión cero $\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]} = 0$ establece la siguiente constricción adicional

$$\partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^{A} - \omega_{[\mu}{}^{AB} e_{\nu]B} \equiv R_{\mu\nu}{}^{A} = 0, \tag{2.55}$$

donde se ha definido $R_{\mu\nu}{}^{A} \equiv e_{\rho}{}^{A}\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]}$ por conveniencia. La conexión de espín tiene tantas componentes independientes como $R_{\mu\nu}{}^{A}$ y solo aparece en $R_{\mu\nu}{}^{A}$ multiplicada por vielbiens. Esto significa que la constricción adicional (2.55) se puede resolver únicamente para la conexión de espín. Al escribir

$$R_{\mu\nu}{}^{A} e_{\rho}{}^{A} + R_{\rho\mu}{}^{A} e_{\nu}{}^{A} - R_{\nu\rho}{}^{A} e_{\mu}{}^{A} = 0, \tag{2.56}$$

se encuentra la siguiente solución

$$\omega_{\mu}{}^{AB}(e, \partial e) = 2e^{\lambda[A}\partial_{[\lambda} e_{\mu]}{}^{B]} + e_{\mu}{}^{C} e^{\lambda A} e^{\rho B}\partial_{[\lambda} e_{\rho]C}. \tag{2.57}$$

Bajo una transformación infinitesimal local de Lorentz $\Lambda^{A}{}_{B} = \delta^{A}{}_{B} + \lambda^{A}{}_{B}$, la conexión de espín (2.57) transforma de acuerdo a

$$\delta\omega_{\mu}{}^{AB} = \partial_{\mu}\lambda^{AB} + 2\lambda^{C[A}\omega_{\mu}{}^{B]}{}_{C}. \tag{2.58}$$

La definición de estos objetos del formalismo vielbein de relatividad general nos permitirán más adelante entender la formulación de la geometría de Newton-Cartan. Pero antes, es importante revisar el límite newtoniano de relatividad general.

2.6. Límite Newtoniano de GR

El límite newtoniano de GR consiste en una serie de condiciones bajo las cuales la relatividad general se reduce a la gravedad newtoniana [2, 6]. Para una partícula con coordenadas $x^{\mu}(\tau) = (x^{0}(\tau) = ct, x^{i}(\tau))$ estas condiciones son:

$$\dot{x}^{i} \ll \dot{x}^{0}, \tag{2.59a}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon f_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad \epsilon \ll 1, \tag{2.59b}$$

$$g_{0j} = 0 \quad \text{con} \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^{i}). \tag{2.59c}$$

La condición (2.59a) captura el límite no relativista: la velocidad espacial $|v|$ de la partícula es mucho menor que la velocidad de la luz c. La condición (2.59b) establece que el campo gravitacional es débil, de modo que se puede expandir la métrica general alrededor del vacío de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ y trabajar a orden lineal en la perturbación $f_{\mu\nu}$, o a orden $\mathcal{O}(\epsilon) = \mathcal{O}(v^2/c^2)$. La condición (2.59c) establece que el campo gravitacional es estático, es decir, solo depende de las coordenadas del espacio.

Para revisar que en efecto el límite newtoniano (2.59) aplicado sobre las ecuaciones de Einstein (2.24) reproduce las ecuaciones newtonianas (2.7), resulta conveniente considerar únicamente los términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon)$ y, por simplicidad en la notación, omitir el parámetro de expansión ϵ. Entonces, de la expansión (2.59b) se sigue que la conexión de Levi-Civita (2.20) y el tensor de Ricci (2.23) se reducen a

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu f_{\nu\sigma} + \partial_\nu f_{\mu\sigma} - \partial_\sigma f_{\mu\nu}\right), \quad R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\nu}. \tag{2.60}$$

Esto implica que el tensor de Einstein (2.25) se ve como

$$G_{\mu\nu} = \partial^\sigma \partial_{(\mu} f_{\nu)\sigma} - \frac{1}{2}\partial^2 f_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu f - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\partial^\sigma \partial^\rho f_{\sigma\rho} - \partial^2 f\right), \tag{2.61}$$

donde $f = \eta^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ es la traza de $f_{\mu\nu}$ y $\partial^2 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ es el laplaciano del espaciotiempo. Esta expresión se puede simplificar al definir

$$\bar{f}_{\mu\nu} \equiv f_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f \eta_{\mu\nu}. \tag{2.62}$$

Con esta definición las ecuaciones de Einstein (2.24) con $\Lambda = 0$ se ven como

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2 \bar{f}_{\mu\nu} + \partial^\sigma \partial_{(\mu} \bar{f}_{\nu)\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma \partial^\rho \bar{f}_{\sigma\rho} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{2.63}$$

Esto se puede simplificar aún más al considerar la siguiente transformación de $f_{\mu\nu}$,

$$f_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}(x). \tag{2.64}$$

Al resolver la ecuación $\partial^\mu \bar{f}_{\mu\nu} = -\partial^2 \xi_\nu$ para ξ^ν, se puede hacer una transformación (2.64) para tener $\partial^\mu \bar{f}_{\mu\nu} = 0$. Entonces, las ecuaciones de Einstein se simplifican a

$$\partial^2 \bar{f}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}. \tag{2.65}$$

Estas son las ecuaciones de Einstein en la aproximación lineal.

Por otro lado, el tensor de energía-momento para una densidad de materia $\rho(x^\mu)$ con velocidad $\dot{x}(\tau)$ se puede expresar como

$$T^{\mu\nu} = \rho(x^\mu)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \tag{2.66}$$

En el límite no relativista (2.59a) se encuentra que $T_{00} = \rho(x^\mu)c^2$ y $T_{i0} = T_{ij} = 0$. La condición estática (2.59c) implica que la densidad de materia $\rho = \rho(x^i)$ solo depende de las coordenadas del espacio y que la perturbación $f_{\mu\nu}$ no depende del tiempo, es decir, $\partial_0 f_{\mu\nu} = \partial_0 \bar{f}_{\mu\nu} = 0$. Al sustituir estas expresiones en (2.65) se obtiene

$$\Delta \bar{f}_{00} = -2\kappa c^2 \rho, \quad \Delta \bar{f}_{kl} = 0. \tag{2.67a}$$

Al comparar estas expresiones con la ecuación de Poisson para $\phi(x)$ en (2.7), se obtiene

$$\bar{f}_{00} = \frac{-2\kappa c^2 \phi}{G_{\mathrm{N}} S_2}, \quad \bar{f}_{kl} = 0, \tag{2.68}$$

que en la perturbación original $f_{\mu\nu}$ se traduce a

$$f_{00} = -\frac{\kappa c^2 \phi}{G_{\mathrm{N}} S_2}, \quad f_{ij} = -\frac{\kappa c^2 \phi}{G_{\mathrm{N}} S_2} \delta_{ij}. \tag{2.69}$$

Esta solución para la perturbación $f_{\mu\nu}$ reproduce precisamente la ecuación de Poisson (2.7) para el potencial newtoniano ϕ.

Finalmente, en el límite no relativista (2.59a), la ecuación de la geodésica (2.28) solo contribuye en el símbolo de Christoffel $\Gamma^{\mu}{}_{00}$, es decir,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0, \quad \Gamma^{\mu}{}_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} \partial_\rho f_{00}. \tag{2.70}$$

Además, por la condición estática (2.59c) se tiene que $\Gamma^{0}{}_{00} = 0$, es decir, la ecuación de movimiento para $x^0(t)$ está dada por $\ddot{x}^0 = 0$. Esto permite elegir la norma estática $x^0 = \tau$. Entonces, al sustituir la componente f_{00} en (2.70) se obtiene

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\kappa c^4}{2 G_{\mathrm{N}} S_2} \delta^{ij} \partial_j \phi = 0, \tag{2.71}$$

donde

$$\kappa = \frac{8\pi G_{\mathrm{N}}}{c^4}. \tag{2.72}$$

Esta es precisamente la ecuación de movimiento de una partícula en el potencial newtoniano ϕ (2.7).

El análisis realizado en esta sección resulta interesante ya que nos permite entender cómo a partir de cierto límite es posible reproducir una teoría predecesora, en este caso reproducir la gravedad newtoniana a partir de la relatividad general de Einstein. En la siguiente sección revisaremos la versión geometría de la gravedad newtoniana conocida como gravedad de Newton-Cartan.

2.7. Gravedad de Newton-Cartan

La gravedad de Newton-Cartan es una reformulación geométrica de la gravedad de Newton [2]. La motivación principal de esta reformulación consiste en interpretar las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve en el potencial newtoniano ϕ (2.7) como la ecuación de la geodésica (2.28). Esta interpretación se consigue al fijar la norma estática $x^0 = \tau$ y expresar las únicas componentes diferentes de cero de la conexión de Levi-Civita y el tensor de Riemann asociado como

$$\Gamma^i{}_{00} = \delta^{ij}\partial_j\phi, \quad R^i{}_{0j0} = \delta^{ik}\partial_k\partial_j\phi. \tag{2.73}$$

Al imponer la ecuación de movimiento $R_{00} = 4\pi G_{\mathrm{N}}\rho$ se obtiene la ecuación de Poisson (2.7). En este punto $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ es una conexión simétrica independiente de la métrica. El espaciotiempo correspondiente es llamado el espaciotiempo de Newton-Cartan.

Para poder escribir la ecuación de Poisson de una forma covariante primero se debe introducir una métrica del espaciotiempo. Para dotar de una estructura métrica al espaciotiempo newtoniano, el intervalo de espaciotiempo asociado debe ser invariante bajo las transformaciones de Galileo (2.1). Para esto se construye una matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$, análoga a las matrices de Lorentz, en términos de las transformaciones de Galileo,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix}. \tag{2.74}$$

Una métrica contravariante $g^{\mu\nu}$ invariante de Galileo debe satisfacer

$$\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\lambda g^{\rho\lambda} = g^{\mu\nu}, \tag{2.75}$$

es decir

$$g^{ij} = v^i v^j g^{00} + 2v^{(i}A^{j)}{}_k g^{0k} + A^i{}_k A^i{}_l g^{kl}, \tag{2.76a}$$

$$g^{0j} = v^j g^{00} + A^j{}_k g^{0k}. \tag{2.76b}$$

Para impulsos y rotaciones generales en $D = 4$, estas restricciones se cumplen si

$$g^{\mu 0} = 0, \quad g^{ij} = \delta^{ij}. \tag{2.77}$$

Para construir una métrica covariante $\tilde{g}_{\mu\nu}$ invariante de Galileo, se construye una matriz inversa $\Lambda_\nu{}^\mu$ en términos de las transformaciones inversas de Galileo,

$$\Lambda_\nu{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1}v & A^{-1} \end{pmatrix}, \tag{2.78}$$

y se exige que esta métrica debe satisfacer

$$\Lambda_\rho{}^\mu \Lambda_\lambda{}^\nu \tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\rho\lambda}, \tag{2.79}$$

es decir

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00} &= \tilde{g}_{00} - A_k{}^i v^k A_l{}^j v^l \tilde{g}_{ij} - A_k{}^i v^k \tilde{g}_{i0}, && (2.80a) \\ \tilde{g}_{i0} &= A_i{}^k \tilde{g}_{k0} - A_i{}^k A_m{}^l v^m \tilde{g}_{kl}, && (2.80b) \\ \tilde{g}_{ij} &= A_i{}^k A_j{}^l \tilde{g}_{kl}. && (2.80c) \end{aligned}$$

Para impulsos y rotaciones generales en $D = 4$, estas restricciones se cumplen si

$$\tilde{g}_{i0} = \tilde{g}_{ij} = 0, \tag{2.81}$$

con $\tilde{g}_{00} = cte$, por convención se considera $\tilde{g}_{00} = 1$. Es importante notar que $\tilde{g}_{\mu\nu}$ es una métrica independiente que no corresponde con la inversa de $g^{\mu\nu}$. Al renombrar $\tilde{g}_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}$, estas métricas se ven explicitamente como [2],

$$\tau_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.82}$$

Las transformaciones de Galileo (2.1) mantienen invariante dos métricas independientes $\tau_{\mu\nu}$ y $h^{\mu\nu}$ que son degeneradas, es decir, $h^{\mu\nu}\tau_{\nu\rho} = 0$. Estas son las métricas degeneradas que definen el espaciotiempo de Newton-Cartan.

Un camino alternativo para obtener estas métricas degeneradas invariantes de Galileo es considerar la métrica de Minkowski y su inversa,

$$\eta_{\mu\nu}/c^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_3/c^2 \end{pmatrix}, \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/c^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}. \tag{2.83}$$

Al tomar el límite no relativista $c \to \infty$ se obtiene una métrica covariante temporal degenerada $\tau_{\mu\nu}$ con tres ceros como valores propios y una métrica contravariante espacial degenerada $h^{\mu\nu}$ con un cero como valor propio.

La versión vielbein de las métricas $\tau_{\mu\nu}$, $h^{\mu\nu}$ y sus inversas se define en términos de campos independientes τ^μ, $e^\mu{}_i$ y sus inversas, respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu} &= \tau_\mu \tau_\nu, \qquad \tau^{\mu\nu} = \tau^\mu \tau^\nu, && (2.84a) \\ h_{\mu\nu} &= e_\mu{}^i e_\nu{}^j \delta_{ij}, \qquad h^{\mu\nu} = e^\mu{}_i e^\nu{}_j \delta^{ij}. && (2.84b) \end{aligned}$$

Estos vielbeins independientes satisfacen las siguientes condiciones de invertibilidad,

$$\tau_\mu \tau^\mu = 1, \quad e_\mu{}^i e^\nu{}_i + \tau_\mu \tau^\nu = \delta^\nu_\mu, \tag{2.85a}$$

$$e_\mu{}^i e^\mu{}_j = \delta^i_j, \quad \tau^\mu e_\mu{}^i = \tau_\mu e^\mu{}_i = 0, \tag{2.85b}$$

que en términos de las métricas se traducen a

$$\tau_{\mu\nu}\tau^{\mu\nu} = 1, \quad h^{\mu\nu}h_{\nu\rho} + \tau^{\mu\nu}\tau_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho, \quad h^{\mu\nu}\tau_{\nu\rho} = h_{\mu\nu}\tau^{\nu\rho} = 0. \tag{2.86}$$

La degeneración en las métricas implica que $h^{\mu\nu}\tau_\nu = h_{\mu\nu}\tau^\nu = 0$. Al imponer la compatibilidad métrica sobre la métrica espacial $h^{\mu\nu}$ y el vielbein temporal τ_μ,

$$\nabla_\rho h^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\rho \tau_\mu = 0, \tag{2.87}$$

es posible escribir la conexión más general compatible con (2.87) como

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \tau^\sigma \partial_\mu \tau_\nu + \frac{1}{2} h^{\sigma\rho}\left(\partial_\nu h_{\rho\mu} + \partial_\mu h_{\rho\nu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}\right) + h^{\sigma\lambda}K_{\lambda\mu}\tau_\nu\,, \tag{2.88}$$

donde $K_{\mu\nu}$ es un tensor arbitrario. En este análisis, la conexión $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ no se determina únicamente por las condiciones de compatibilidad métrica (2.87). Esta es la razón por la que se añade un tensor arbitrario $K_{\mu\nu}$ en (2.88), para considerar el hecho de que las condiciones (2.87) se preservan bajo el cambio

$$\Gamma'^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + h^{\rho\lambda}K_{\lambda\mu}\tau_\nu\,. \tag{2.89}$$

La compatibilidad métrica sobre τ_μ implica que $\tau_\mu = \partial_\mu f(x)$, donde $f(x)$ es una función escalar. Para las coordenadas adaptadas $f(x) = x^0$, las componentes de la conexión (2.88) están dadas por

$$\Gamma^i{}_{00} = h^{ij}\left(\partial_0 h_{j0} - \tfrac{1}{2}\partial_j h_{00} + K_{j0}\right) \equiv h^{ij}\Phi_j, \tag{2.90a}$$

$$\Gamma^i{}_{0j} = h^{ik}\left(\tfrac{1}{2}\partial_0 h_{jk} + \partial_{[j}h_{k]0} - \tfrac{1}{2}K_{jk}\right) \equiv h^{ik}\left(\tfrac{1}{2}\partial_0 h_{jk} + \Omega_{jk}\right), \tag{2.90b}$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \tfrac{1}{2}h^{i\mu}\left(\partial_j h_{k\mu} + \partial_k h_{j\mu} - \partial_\mu h_{jk}\right), \quad \Gamma^0{}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.90c}$$

La elección de estas coordenadas adaptadas se preserva bajo las transformaciones

$$x'^0 = x^0 + \zeta^0, \tag{2.91a}$$

$$x'^i = x^i + \xi^i(x). \tag{2.91b}$$

Al reemplazar la ecuación de movimiento $R_{00} = 4\pi G\rho$ por la expresión covariante

$$R_{\mu\nu} = 4\pi G_{\mathrm{N}}\rho\tau_\mu\tau_\nu, \tag{2.92}$$

las coordenadas adaptadas $f(x) = x^0$ implican que $R_{ij} = R_{i0} = 0$. La condición $R_{ij} = 0$ en $D = 4$ indica que se puede usar una métrica espacial plana $h_{ij} = \delta_{ij}$ y $h^{ij} = \delta^{ij}$. La elección de esta métrica plana permite despejar Φ_j y Ω_{jk} en (2.90),

$$\Gamma^i{}_{0j} = h^{ik}\Omega_{ik} \quad \leftrightarrow \quad \Omega_{ij} = h_{k[j}\Gamma^k{}_{i]0} \tag{2.93a}$$

$$\Gamma^i{}_{00} = h^{ij}\Phi_j \quad \leftrightarrow \quad \Phi_i = h_{ij}\Gamma^j{}_{00}. \tag{2.93b}$$

La elección de una métrica plana también reduce las posibles transformaciones de coordenadas (2.91) a las transformaciones de Galileo (2.1).

Para obtener la ecuación de Poisson desde la expresión covariante (2.92), se deben imponer dos condiciones adicionales. La primera es la condición de Trautman:

$$h^{\sigma[\lambda}R^{\mu]}{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma) = 0, \tag{2.94}$$

que en coordenadas adaptadas implica que

$$\partial_0\Omega_{mi} - \partial_{[m}\Phi_{i]} = 0, \quad \partial_{[k}\Omega_{mi]} = 0, \tag{2.95}$$

o equivalentemente

$$\partial_\rho K_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad K_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}m_{\nu]}, \tag{2.96}$$

donde m_μ es un campo vectorial. La segunda es una de las tres condiciones de Ehlers:

$$h^{\rho\lambda}R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma)R^\nu{}_{\mu\lambda\varsigma}(\Gamma) = 0, \tag{2.97}$$

$$\tau_{[\lambda}R^\mu{}_{\nu]\rho\sigma}(\Gamma) = 0, \tag{2.98}$$

$$h^{\sigma[\lambda}R^{\mu]}{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma) = 0. \tag{2.99}$$

Cada una de estas condiciones por separado da lugar a la condición $\partial_k\Omega_{ij} = 0$ en coordenadas adaptadas y entonces $\Omega_{ij} = \Omega_{ij}(t)$. De hecho, se puede hacer $\Omega'_{ij} = 0$, o equivalentemente $\Gamma'^i{}_{0j} = 0$, a través de una rotación dependiente del tiempo $x'^i = A^i{}_j(t)x^j$. En este nuevo sistema de coordenadas, la condición (2.95) implica que $\partial'_{[i}\Phi'_{j]} = 0$, es decir, $\Phi'_i = \partial'_i\Phi$ para algún escalar Φ. Esto implica que $\Gamma'^i{}_{00} = \delta^{ij}\partial'_j\Phi$ y entonces la expresión covariante (2.92) da lugar a la ecuación de Poisson,

$$R_{00} = \partial_i\Gamma^i{}_{00} = \delta^{ij}\partial_i\partial_j\phi = 4\pi G_{\mathrm{N}}\rho. \tag{2.100}$$

En este nuevo sistema de coordenadas también se obtiene la ecuación de la geodésica

$$\ddot{x}'^0(\tau) = 0, \quad \ddot{x}'^i(\tau) + \partial'^i\Phi = 0. \tag{2.101}$$

Esta breve descripción de la gravedad de Newton-Cartan nos permitirá más adelante entender algunos conceptos importantes de la geometría de Newton-Cartan en el contexto de la teoría de cuerdas. En el siguiente capitulo revisaremos los fundamentos de la teoría de cuerdas relativistas.

Capítulo 3

Teoría de Cuerdas

En este capítulo revisamos algunos conceptos importantes de la teoría de cuerdas. En particular, empezamos con una breve descripción de la dinámica de una partícula puntual. Posteriormente, revisamos la acción de la hoja de mundo y el espectro de masas de una cuerda que se propaga en un fondo plano. Finalmente, revisamos la acción del modelo sigma no lineal, las ecuaciones de movimiento del espaciotiempo, la acción efectiva de bajas energías y la solución de Dabholkar-Harvey para una cuerda que curva el espaciotiempo a su alrededor. Todo esto en el contexto de cuerdas que se mueven en un espaciotiempo de D dimensiones. Revisamos la bibliografía general para abordar este tipo de temas, [7, 8, 9, 10].

3.1. Partícula Puntual (Relativista)

La idea básica detrás de la teoría de cuerdas es considerar un objeto extendido a lo largo de una dimensión espacial, una cuerda infinitamente delgada, como el constituyentes más fundamentales de la naturaleza, en vez de una partícula puntual de dimensión cero. Antes de revisar la dinámica de una cuerda, resulta útil revisar la dinámica de una partícula libre. Una partícula que se propaga en el espaciotiempo barre una línea de mundo que se parametriza por un parámetro τ, el tiempo propio de la partícula. Este parámetro τ toma valores en todos los números reales $\mathbb{R}$. La incrustación de la línea de mundo en el espaciotiempo, en este caso un espaciotiempo plano con métrica $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$, se describe por funciones $X^\mu(\tau)$. La física solo depende de las funciones X^μ y no del parámetro τ. La acción de la línea de mundo invariante bajo reparametrizaciones de τ más general para una partícula libre está dada por

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}}, \tag{3.1}$$

donde m es la masa de la partícula y un punto denota derivación con respecto a τ.

La acción (3.1) es invariante bajo reparametrizaciones de la línea de mundo $\tau \to \tilde{\tau}(\tau)$ y bajo transformaciones globales de Poincaré del espaciotiempo (2.9). Esta invariancia bajo reparametrizaciones es la que permite elegir la norma estática $\tau = X^0(\tau)$. De hecho, la invariancia bajo reparametrizaciones es una simetría de norma. En términos simples, una simetría de norma es un cambio en uno o todos los parámetros de un sistema que no implica ningún cambio en las leyes de la física. La simetría de norma también indica que la descripción de la teoría es redundante, es decir, hay más grados de libertad que los grados de libertad físicos del sistema. Para remover estos grados de libertad adicionales se imponen las constricciones del sistema. La acción (3.1) resulta tener una constricción, conocida como constricción de capa de masa, que se obtiene al calcular el momento canónico de la partícula de masa m,

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{mX_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \quad \to \quad V_0 \equiv p_\mu p^\mu + m^2 = 0, \tag{3.2}$$

donde L es el lagrangiano de la acción (3.1), $S = \int d\tau L$. Desde la perspectiva de la línea de mundo, la constricción de capa de masa establece que la partícula, al menos, siempre se está moviendo en la dirección temporal $p_0^2 \geq m^2$. Esta es una constricción primaria porque se satisface debido a la definición de p_μ, sin considerar las ecuaciones de movimiento. Al variar la acción (3.1) se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial X^\mu} = \dot{p}_\mu = 0 \quad \to \quad \ddot{X}^\mu = \frac{\dot{L}}{L}\dot{X}^\mu, \tag{3.3}$$

que son ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales y no homogéneas.

Este mismo análisis se puede desarrollar desde el formalismo hamiltoniano, donde el hamiltoniano canónico de la acción (3.1) está dado por

$$H_{\text{can}} = p_\mu \dot{X}^\mu - L = 0. \tag{3.4}$$

El hamiltoniano total se define como

$$H = H_{\text{can}} + \lambda_0(\tau) V_0, \tag{3.5}$$

donde $\lambda_0(\tau)$ es un multiplicador de Lagrange. En el formalismo de primer orden las coordenadas X^μ y momentos p_μ son independientes y las velocidades $\dot{X}^\mu$ se pueden expresar en términos de p^μ a través de un multiplicador de Lagrange $\lambda_0(\tau) = 1/2m$. En este contexto, las ecuaciones de Hamilton son

$$\ddot{X} = 0, \quad p_\mu p^\mu + m^2 = 0, \tag{3.6}$$

que son respectivamente la ecuación de una partícula libre (2.3) y la relación (3.2).

La acción (3.1) tiene algunos inconvenientes: no brinda información para partículas con $m = 0$ y la cuantización de la teoría a través del formalismo de integral de trayectoria se dificulta debido a la raíz cuadrada de la acción. Estos inconvenientes se resuelven cuando se introduce la métrica de la línea de mundo. En este caso, la acción de la línea de mundo para una partícula libre de masa m está dada por

$$I = -\frac{1}{2}\int d\tau\sqrt{-h_{\tau\tau}}\left(h^{\tau\tau}\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu} + m^2\right), \tag{3.7}$$

donde $h_{\tau\tau}$ es la métrica intrínseca de la línea de mundo. La equivalencia entre la acción (3.1) y la acción (3.7) se establece a través de la ecuación de movimiento de $h_{\tau\tau}$,

$$\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu} - h_{\tau\tau}m^2 = 0. \tag{3.8}$$

La acción (3.1) también se puede reescribir como

$$I = \frac{1}{2}\int d\tau\left(e^{-1}\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu} - em^2\right), \tag{3.9}$$

donde $e(\tau) = \sqrt{-h_{\tau\tau}} =$ es un einbein, un campo escalar tal que $e(\tau) = m^{-1}\sqrt{-\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu}}$.

Para la cuantización canónica, las variables dinámicas X^{μ} y p_{μ} se promueven a operadores hermitianos, que cumplen relaciones de conmutación, y se introduce la función de onda $\Psi(X)$. Esta función de onda satisface la ecuación de Schrödinger,

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = H_{\text{can}}\Psi. \tag{3.10}$$

De esta expresión se sigue que la función de onda no depende del parámetro τ, ya que para la acción (3.1) se tiene $H_{\text{can}} = 0$. La constricción de capa de masa (3.2) se impone como una ecuación de operadores sobre la función de onda,

$$(p_{\mu}p^{\mu} + m^2)\Psi = 0. \tag{3.11}$$

En la representación usual del momento, $p_{\mu} = -i\partial/\partial X^{\mu}$, esta constricción da lugar a la ecuación de Klein-Gordon de la mecánica cuántica relativista.

3.2. Acción de Nambu-Goto

Análogamente, una cuerda que se propaga en el espaciotiempo barre una hoja de mundo que se parametriza por dos coordenadas adimensionales σ^{α}, $\alpha = 0, 1$, el tiempo

$\sigma^0 \equiv \tau$ y la ubicación espacial $\sigma^1 \equiv \sigma$ de la cuerda. El parámetro τ toma valores en $\mathbb{R}$ y el parámetro σ toma valores entre cero y la longitud de la cuerda l_s. Por convención $l_s = 2\pi$ para cuerdas cerradas y $l_s = \pi$ para cuerdas abiertas. La incrustación de la hoja de mundo en el espaciotiempo plano con métrica $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ se describe por funciones $X^\mu(\tau, \sigma)$. Las funciones X^μ tienen ciertas condiciones de frontera dependiendo de si se trata de una cuerda cerrada o abierta. La física solo depende de las funciones X^μ y no de los parámetros τ y σ. La acción de la hoja de mundo invariante bajo reparametrizaciones más general de una cuerda libre está dada por la acción de Nambu-Goto [11],

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det\left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}\right)}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \quad \mu, \nu = 0, 1, ..., D-1; \tag{3.12}$$

donde $d^2\sigma = d\sigma^0 d\sigma^1$ y $T = 1/2\pi\alpha'$ es la tensión de la cuerda, que está en términos de la pendiente de Regge $\alpha' = l_s^2$. Para cuerdas fundamentales, cuerdas infinitamente delgadas, la tensión toma valores un orden de magnitud debajo de la escala de Planck, $T \leq M_{\mathrm{Pl}}^2 = (10^{18}\mathrm{GeV})^2$, donde M_{Pl} es la masa de Planck. Estas cuerdas tienen relevancia para gravedad cuántica y la acción (3.12) da una descripción completa de la dinámica de este sistema. Sin embargo, la acción (3.12) también describe con buena aproximación tubos de flujo magnético en superconductores y tubos de flujo cromoelectromagnético en QCD, donde se encuentra que $T \sim (1\mathrm{GeV})^2$.

La acción (3.12) es invariante bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo $\sigma^\alpha \to \tilde{\sigma}^\alpha(\tau, \sigma)$ y bajo transformaciones globales de Poincaré del espaciotiempo (2.9). La acción (3.12) tiene algunos inconvenientes: las ecuaciones de movimiento resultan en ecuaciones no lineales y la cuantización de la teoría a través del formalismo de integral de trayectoria se dificulta debido a la raíz cuadrada de la acción. Estos inconvenientes se resuelven cuando se introduce la métrica intrínseca en la hoja de mundo.

3.3. Acción de Polyakov

La acción de una cuerda libre con tensión T también se puede describir a partir de la acción de Polyakov [12],

$$I = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{3.13}$$

donde $h_{\alpha\beta}$ es la métrica intrínseca en la hoja de mundo, $h^{\alpha\beta}$ es la inversa de $h_{\alpha\beta}$ y $h \equiv \det h_{\alpha\beta}$. La equivalencia entre la acción de Polyakov (3.13) y la acción de Nambu-Goto (3.12) se establece a través de las ecuaciones de movimiento de $h_{\alpha\beta}$,

$$h_{\alpha\beta} = 2f(\tau, \sigma) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \quad f^{-1}(\tau, \sigma) = h^{\sigma\rho} \partial_\sigma X^\mu \partial_\rho X_\mu, \tag{3.14}$$

donde $f(\tau,\sigma)$ es un factor conforme. Este factor permite incluir una simetría extra a la teoría, llamada invariancia conforme. Esta simetría mantiene ángulos fijos en la hoja de mundo pero cambia la longitud, es decir, realiza un reescalamiento. Los términos $\sqrt{-h}$ y $h^{\alpha\beta}$ en la acción (3.13) escalan respectivamente como f y f^{-1}. Esto implica que el producto se cancela y por lo tanto el factor conforme no aparece en la acción de Polyakov. Al variar la acción (3.13) con respecto a las coordenadas X^μ se obtiene

$$\delta S = -T \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{2\pi \text{ o } \pi} d\sigma \sqrt{-h} \left[\partial_\alpha \left(\delta X^\mu \partial^\alpha X_\mu\right) - \delta X^\mu \left(\nabla^2 X_\mu\right)\right], \tag{3.15}$$

donde $\nabla^2 = \nabla_\alpha \nabla^\alpha$, con ∇_α la derivada covariante definida con respecto a la métrica de la hoja de mundo $h_{\alpha\beta}$. El primer término de (3.15) corresponde a un término de frontera. Este término de frontera se anula si

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau,0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau,\pi) = 0. \tag{3.16}$$

Estas son las condiciones de frontera de Neumann para la cuerda abierta. Establece que los extremos de la cuerda abierta se mueven libremente en el espacio. El término de frontera de (3.15) también se anula si

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau,0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau,2\pi), \tag{3.17a}$$

$$X^\mu(\tau,0) = X^\mu(\tau,2\pi), \tag{3.17b}$$

$$h_{\alpha\beta}(\tau,0) = h_{\alpha\beta}(\tau,2\pi). \tag{3.17c}$$

Estas son las condiciones de periodicidad para la cuerda cerrada. Establece que los extremos de la cuerda se unen para formar una cuerda cerrada. Las condiciones (3.16) y (3.17) son las únicas posibilidades consistentes con la invariancia de Poincaré. En cualquiera de los dos casos se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$\nabla^2 X^\mu = 0. \tag{3.18}$$

La acción (3.13) es invariante bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo $\sigma^\alpha \to \tilde{\sigma}^\alpha(\tau,\sigma)$, bajo transformaciones globales de Poincaré del espaciotiempo (2.9) y también bajo transformaciones de Weyl de la hoja de mundo,

$$h_{\alpha\beta}(\tau,\sigma) \to \tilde{h}_{\alpha\beta}(\tau,\sigma) = e^{2\omega(\tau,\sigma)} h_{\alpha\beta}(\tau,\sigma) \tag{3.19}$$

donde $\omega(\tau,\sigma)$ es una fase arbitraria. La invariancia de Weyl es una simetría de norma de la cuerda. Esto significa que si dos métricas de la hoja de mundo están relacionadas a través de una transformación de Weyl (3.19), entonces describen el mismo sistema físico. La invariancia bajo reparametrizaciones permite hacer conformalmente plana la métrica de la hoja de mundo, $h_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta}$, y la invariancia de Weyl permite elegir $\phi = 0$. Este procedimiento se conoce como fijar la norma y permite obtener

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1), \tag{3.20}$$

que es la métrica plana. En esta métrica, la acción de Polyakov (3.13) se reduce a la acción que describe D campos escalares libres y la ecuación de movimiento (3.18) se reduce a la ecuación de onda libre de una cuerda relativista,

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = 0. \tag{3.21}$$

Por otro lado, la invariancia de Weyl, al ser una simetría de norma, indica que la teoría es redundante. Las constricciones que eliminan los grados de libertad adicionales se obtienen al calcular el tensor de energía-momento de la hoja de mundo,

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{4\pi\alpha'}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}. \tag{3.22}$$

La invariancia de Weyl implica que la traza de este tensor es cero, $T_\alpha{}^\alpha = 0$. Al considerar las ecuaciones de movimiento de $h_{\alpha\beta}$ (3.14) se obtiene que $T_{\alpha\beta} = 0$. En la métrica conforme $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ estas constricciones se ven como

$$T_{01} = \dot{X}^\mu X'_\mu = 0, \tag{3.23a}$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}\left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + X'^\mu X'_\mu\right) = 0, \tag{3.23b}$$

donde un punto y una variable primada denotan derivación con respecto a τ y σ, respectivamente. Estas son las constricciones de la ecuación de onda libre (3.21).

3.4. Espectro de la Cuerda

En las coordenadas del cono de luz de la hoja de mundo, $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$, la ecuación de movimiento (3.21) y las constricciones (3.23) se ven respectivamente como

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0, \quad (\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0. \tag{3.24}$$

Si se considera la condición de periodicidad para cuerdas cerradas (3.17) con $X^\mu = (\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau)$, la solución más general posible de (3.24) se puede ver como

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu_L(\sigma, \tau) + X^\mu_R(\sigma, \tau), \tag{3.25}$$

donde

$$X_L^\mu(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \tag{3.26}$$

$$X_R^\mu(\sigma^-) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}. \tag{3.27}$$

Las funciones X_L^μ y X_R^μ describen ondas que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente. Las variables x^μ y p^μ son la posición y momento del centro de masa de la cuerda. Los coeficientes α_n^μ y $\tilde{\alpha}_n^\mu$ son los modos de Fourier de las soluciones. Al calcular $\partial_- X^\mu$ y $\partial_+ X^\mu$, es posible identificar los modos con $n = 0$ de la siguiente forma,

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^\mu. \tag{3.28}$$

Esta identificación permiten expresar las constricciones (3.24) como

$$(\partial_- X)^2 = \alpha' \sum_n L_n e^{-in\sigma^-}, \quad (\partial_+ X)^2 = \alpha' \sum_n \tilde{L}_n e^{-in\sigma^+}, \tag{3.29}$$

donde

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m}\cdot\alpha_m, \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2}\sum_m \tilde{\alpha}_{n-m}\cdot\tilde{\alpha}_m. \tag{3.30}$$

Las funciones L_n y $\tilde{L}_n$ son los modos de Fourier de las constricciones. Cualquier solución clásica de la cuerda de la forma (3.26) debe satisfacer

$$L_n = \tilde{L}_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.31}$$

En particular, las constricciones L_0 y $\tilde{L}_0$ incluyen el cuadrado del momento p^μ, que en el espacio de Minkowski, está relacionado con el cuadrado de la masa en reposo de la partícula, $p_\mu p^\mu = -M^2$. Esto significa que las constricciones con $n = 0$ están relacionadas con la masa efectiva de la cuerda cerrada en términos de los modos, es decir,

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\sum_{n>0}\alpha_n\cdot\alpha_{-n} = \frac{4}{\alpha'}\sum_{n>0}\tilde{\alpha}_n\cdot\tilde{\alpha}_{-n}. \tag{3.32}$$

Dado que los modos α_0^μ y $\tilde{\alpha}_0^\mu$ son iguales a $\sqrt{\alpha'/2}p^\mu$, se tienen dos expresiones para la masa invariante: una en términos de los osciladores derechos α_n^μ y otra en términos de los osciladores izquierdos $\tilde{\alpha}_n^\mu$. Por consistencia en la teoría, se exige que α_n^μ y $\tilde{\alpha}_n^\mu$ deben de ser iguales para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto se conoce como coincidencia de nivel.

Para la cuantización canónica de la teoría, resulta útil primero parametrizar todas las soluciones clásicas de la cuerda y después promover a operadores las variables dinámicas. Para esto, se introducen las coordenadas del cono de luz del espaciotiempo,

$$X^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(X^0 \pm X^{D-1}\right). \tag{3.33}$$

En estas coordenadas, el intervalo del espaciotiempo asociado se ve como

$$ds^2 = -2dX^+dX^- + \sum_{i=1}^{D-2} dX^i dX^i. \tag{3.34}$$

La solución más general para X^+ y X^- también se puede descomponer en una parte izquierda y una parte derecha, es decir,

$$X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-), \quad X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-). \tag{3.35}$$

Las transformaciones de Weyl y la invariancia bajo reparametrizaciones permiten elegir

$$X_L^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+\sigma^+, \quad X_R^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+\sigma^- \tag{3.36}$$

tal que

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau. \tag{3.37}$$

Esta es la norma del cono de luz. La ventaja de trabajar en esta norma es que las constricciones (3.24) se pueden escribir como

$$2\partial_+X^-\partial_+X^+ = \sum_{i=1}^{D-2}\partial_+X^i\partial_+X^i \quad \rightarrow \quad \partial_+X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\partial_+X^i\partial_+X^i, \tag{3.38a}$$

$$2\partial_-X^-\partial_-X^+ = \sum_{i=1}^{D-2}\partial_-X^i\partial_-X^i \quad \rightarrow \quad \partial_-X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\partial_-X^i\partial_-X^i. \tag{3.38b}$$

Esto significa que X^- está completamente determinada por las coordenadas X^i. Al integrar el lado derecho de (3.38) se encuentra la expansión usual en modos,

$$X_L^-(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+}, \tag{3.39a}$$

$$X_R^-(\sigma^-) = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^- e^{-in\sigma^-}, \tag{3.39b}$$

donde x^- es la constante de integración y p^-, α_n^-, $\tilde{\alpha}_n^-$ se fijan por las constricciones (3.38). Explícitamente, los modos $\tilde{\alpha}_n^-$ y α_n^- se ven como

$$\tilde{\alpha}_n^- = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}}\frac{1}{p^+}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{D-2}\tilde{\alpha}_{n-m}^i\tilde{\alpha}_m^i, \quad \alpha_n^- = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}}\frac{1}{p^+}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{D-2}\alpha_{n-m}^i\alpha_m^i. \tag{3.40}$$

Los casos especiales $\tilde{\alpha}_0^- = \alpha_0^- = \sqrt{\alpha'/2}p^-$ dan lugar a la siguiente expresión

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\left(\frac{1}{2}\alpha' p^i p^i + \sum_{n\neq 0}\alpha_n^i\alpha_{-n}^i\right) = \frac{1}{2p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\left(\frac{1}{2}\alpha' p^i p^i + \sum_{n\neq 0}\tilde{\alpha}_n^i\tilde{\alpha}_{-n}^i\right). \tag{3.41}$$

De esta expresión se sigue que la masa M está dada por

$$M^2 = 2p^+p^- - \sum_{i=1}^{D-2}p^ip^i = \frac{4}{\alpha'}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i = \frac{4}{\alpha'}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\tilde{\alpha}_{-n}^i\tilde{\alpha}_n^i. \tag{3.42}$$

Esto significa que las excitaciones físicas de la cuerda están determinadas únicamente por los modos de oscilador transversos α^i y $\tilde{\alpha}^i$.

Una vez identificados los grados de libertad físicos de la cuerda para la cuantización canónica, ahora se promueven las variables dinámicas a operadores hermitianos, x^i, x^-, p^k, p^-, α_n^i y $\tilde{\alpha}_n^i$, y se establecen las siguientes relaciones de conmutación,

$$[x^i, p^k] = i\delta^{ij}, \quad [x^-, p^+] = -i, \quad [\alpha_n^i, \alpha_m^j] = [\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}. \tag{3.43}$$

El estado vacío en el espacio de momentos $|0;p\rangle$ se define tal que

$$\hat{p}^\mu |0;p\rangle = p^\mu |0;p\rangle, \quad \alpha_n^i |0;p\rangle = \tilde{\alpha}_n^i |0;p\rangle = 0 \quad \text{para} \quad n > 0. \tag{3.44}$$

El espacio de Fock se construye al actuar sobre el estado vacío con los operadores de creación α_{-n}^i y $\tilde{\alpha}_{-n}^i$ con $n > 0$. Los operadores de aniquilación serían α_n^i y $\tilde{\alpha}_n^i$ con $n > 0$. En este procedimiento el espacio de Hilbert no contiene estados con norma menor o igual a cero. Por otro lado, existe una ambigüedad en el orden del producto de los operadores α^i y $\tilde{\alpha}^i$ en el lado derecho de (3.42). El modo normal es cuando todos los operadores de creación están en el lado izquierdo de todos los operadores de aniquilación en un producto, por ejemplo, $\alpha^i_{-n}\alpha^i_n$ y $\tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n$ son productos que están en modo normal. Si se elige el orden normal de operadores, esta ambigüedad se revela en una constante global a. En términos de esta constante a, la masa (3.42) se ve como

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n - a\right) = \frac{4}{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\tilde{\alpha}^i_{-n}.\tilde{\alpha}^i_n - a\right) \tag{3.45}$$

Al introducir

$$N = \sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n, \quad \tilde{N} = \sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\tilde{\alpha}_{-n}\tilde{\alpha}^i_n, \tag{3.46}$$

la expresión (3.45) se puede reescribir como

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-a) = \frac{4}{\alpha'}\left(\tilde{N}-a\right). \tag{3.47}$$

La constante a se puede determinar a través de un procedimiento heurístico. Para esto, se ignora por un momento el orden normal y se descompone la siguiente suma

$$\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n = \frac{1}{2}\sum_{n<0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n + \frac{1}{2}\sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n. \tag{3.48}$$

Al imponer el orden normal de operadores, los operadores de aniquilación α^i_n con $n>0$ en el lado derecho, el primer término del lado derecho de (3.48) se modifica a

$$\frac{1}{2}\sum_{n<0}\left[\alpha^i_n\alpha^i_{-n} - n(D-2)\right] + \frac{1}{2}\sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n = \sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n + \frac{D-2}{2}\sum_{n>0}n, \tag{3.49}$$

donde, después de un proceso de renormalización, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}. \tag{3.50}$$

Esto significa que la constante a de la formula de masa (3.47) está dada por

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(N - \frac{D-2}{24}\right) = \frac{4}{\alpha'}\left(\tilde{N} - \frac{D-2}{24}\right). \tag{3.51}$$

Esta es la formula de masa que determina el espectro de una cuerda cerrada libre.

Para el estado vacío $|0;p\rangle$ definido en (3.44) y sin modos de oscilador excitados, la formula de masa (3.51) se reduce a

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'}\frac{D-2}{6}. \tag{3.52}$$

Esta masa cuadrada negativa corresponde a las partículas llamadas taquiones. Por otro lado, al actuar sobre el vacío con los operadores de creación α^i_{-1} y $\tilde{\alpha}^i_{-1}$ se obtienen $(D-2)^2$ estados de partículas $\tilde{\alpha}^i_{-1}\alpha^i_{-1}\left|0;p\right\rangle$, cada uno con formula de masa

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(1 - \frac{D-2}{24}\right). \tag{3.53}$$

Estos primeros estados excitados transforman en la representación de $SO(D-2)$. Si se exige que la teoría cuántica preserve la simetría de Lorentz $SO(1, D-1)$, estos estados tienen que ser no masivos. Esto solo se consigue si se fija la dimensión del espaciotiempo en $D = 26$, que es la dimensión crítica de la cuerda bosónica. Las partículas no masivas son interesantes porque dan lugar a fuerzas de largo alcance. Entonces, los primeros estados excitados transforman en la representación $\mathbf{24} \otimes \mathbf{24}$ de $SO(24)$. Estos se descomponen en tres representaciones irreducibles: simétrico sin traza, antisimétrico y singulete. A cada uno de estos modos se le asocia un campo sin masa en el espaciotiempo tal que las oscilaciones de la cuerda se pueden identificar con cuantos de estos campos. Estos campos son: un campo métrico $G_{\mu\nu}$, un campo antisimétrico o campo de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ y un campo dilatónico Φ.

Es importante recordar que todo el análisis previo es para la cuerda cerrada con condición de periodicidad $X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) = X^\mu(\sigma, \tau)$. Sin embargo, un análisis similar se puede realizar a partir de las condiciones de frontera para cuerdas abiertas (3.16). Más en general, si se divide la dimensión $D = 0, 1, ..., p, p+1, ..., D-1$, imponiendo condiciones de Neumann para $(0, 1, ..., p)$ y Dirichlet para $(p+1, ..., D-1)$, estas condiciones fijan los extremos de la cuerda en una hipersuperficie de $p+1$ dimensiones en el espaciotiempo llamada D-brana o Dp-brana si se quiere especificar la dimensión p de la brana. En este lenguaje, D0-brana es una partícula, D1-brana es una cuerda, D2-brana es una membrana, etc. El espectro de masas para la cuerda abierta también incluye taquiones y estados no masivos asociados a campos de norma y escalares sobre la D-brana.

También es importante mencionar que existe una generalización de la cuerda bosónica con modos fermiónicos sobre la hoja de mundo llamada supercuerda. Esta teoría de la hoja de mundo es supersimétrica. En esta generalización, la dimensión crítica de la supercuerda es $D = 10$. El espectro de masas de la supercuerda permite los mismo estados no masivos de la cuerda bosónica y los estados taquiónicos con masa cuadrada negativa no se encuentran en la teoría. Además, mientras la teoría de cuerdas bosónicas es única, existen diferentes teorías de supercuerdas que dependen de la manera en la que se agregan campos fermiónicos a la teoría.

Finalmente, para reconciliar la brecha entre el concepto de un universo basado en cuatro dimensiones observables con las diez o veintiséis dimensiones que requiere la teoría de cuerdas, se acude a lo que se conoce como compactificación. Para la compactificación de la cuerda bosónica, un espaciotiempo de la forma $\mathbf{R}^{1,24} \times \mathbf{S}^1$, se considera un círculo de radio R tal que la coordenada $\mathbf{S}^1$ tiene periodicidad

$$X^{25}(\sigma + 2\pi) = X^{25}(\sigma) + 2\pi w R, \quad w \in \mathbb{Z}, \tag{3.54}$$

donde w es el número de enrollamiento de la cuerda. El momento espacial p^{25} está cuantizado en unidades enteras, $p^{25} = n/R$ con $n \in \mathbb{R}$. Lo interesante de mencionar la compactificación de la teoría es que la fórmula de masa se modifica a

$$M^2 = -\sum_{\mu=0}^{24} p_\mu p^\mu = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}\left(N + \tilde{N} - 2\right), \tag{3.55}$$

donde

$$N - \tilde{N} = nw. \tag{3.56}$$

La interpretación de esta nueva formula de masa es la siguiente. El primer término establece que una cuerda con $n > 0$ unidades de impulso alrededor del círculo con radio R gana una contribución a su masa de n/R. El segundo término establece que una cuerda enrollada $w > 0$ veces al rededor del círculo toma una contribución $2\pi w R T$ a su masa, donde $T = 1/2\pi\alpha'$ es la tensión de la cuerda.

3.5. Modelo Sigma No Lineal

Hasta ahora, se ha considerado una cuerda que se propaga en un espaciotiempo plano. Para describir la dinámica de una cuerda que se propaga en un fondo de espaciotiempo curvo, se acoplan campos a la hoja de mundo de la cuerda. La generalización natural es considerar a estos campos como los estados no masivos de la cuerda. En particular, para la cuerda bosónica se tienen los siguientes estados no masivos: un campo métrico $G_{\mu\nu}(X)$, un campo antisimétrico $B_{\mu\nu}(X)$ y un campo dilatónico $\Phi(X)$. La acción de la hoja de mundo de una cuerda que se propaga en un fondo de espaciotiempo que involucra a estos campos está dada por el modelo sigma no lineal [13, 14]

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \left[\left(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}G_{\mu\nu} - \epsilon^{\alpha\beta}B_{\mu\nu}\right)\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + \alpha'\sqrt{-h}R^{(2)}\Phi\right], \tag{3.57}$$

donde $\epsilon^{10} = 1$ y $R^{(2)}$ es el escalar de Ricci definido con respecto a $h_{\alpha\beta}$. Físicamente, el acoplamiento con $G_{\mu\nu}$ describe cómo la cuerda se propaga sobre un estado coherente de gravitones asociado al espaciotiempo curvo, el acoplamiento con $B_{\mu\nu}$ dota de carga eléctrica/magnética a la cuerda y la exponencial del valor esperado del campo Φ en el vacío, $\langle\Phi\rangle$, está relacionado con la constante de acoplamiento de la cuerda,

$$g_s = e^{\langle\Phi\rangle}. \tag{3.58}$$

3.6. Ecuaciones de Movimiento

Un fondo consistente en teoría de cuerdas debe preservar la invariancia de Weyl a nivel clásico y cuántico. Esto es equivalente a exigir que la traza del tensor de energía-momento (sobre la hoja de mundo $h^{\alpha\beta}$) $T_{\alpha\beta}$, definido en (2.27), se anule en todos los niveles. La acción (3.57) resulta ser la acción más general que presenta la anomalía de Weyl: la traza del valor esperado de $T_{\alpha\beta}$ es cero a nivel clásico pero diferente de cero y proporcional a las funcionales beta cuando los efectos cuánticos aparecen. La estructura general de la traza de $T_{\alpha\beta}$ de la acción (3.57) está dada por

$$\langle {T_\alpha}^\alpha \rangle = -\frac{1}{2\alpha'} h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \beta_{\mu\nu}(G) - \frac{i}{2\alpha'}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \beta_{\mu\nu}(B) - \frac{1}{2}R^{(2)}\beta(\Phi), \tag{3.59}$$

donde las funcionales beta de un lazo de cuerdas bosónicas están dadas por [15, 16],

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' R_{\mu\nu} + 2\alpha'\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - \frac{\alpha'}{4}H_{\mu\sigma\rho}{H_\nu}^{\sigma\rho}, \tag{3.60a}$$

$$\beta_{\mu\nu}(B) = -\frac{\alpha'}{2}\nabla^\sigma H_{\sigma\mu\nu} + \alpha'\nabla^\sigma\Phi H_{\sigma\mu\nu}, \tag{3.60b}$$

$$\beta(\Phi) = -\alpha'\nabla_\mu\nabla^\mu\Phi - \frac{\alpha'}{4}R + \alpha'\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi + \frac{\alpha'}{48}H_{\mu\nu\sigma}H^{\mu\nu\sigma}, \tag{3.60c}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci definido con respecto a $G_{\mu\nu}$, R es el correspondiente escalar de Ricci, $H_{\mu\nu\sigma} = \nabla_{[\mu}B_{\nu\sigma]}$ es la intensidad del campo antisimétrico $B_{\mu\nu}$ y ∇_μ es la derivada covariante definida con respecto a $G_{\mu\nu}$. Las funcionales beta son los objetos que describen cómo los acoplamientos con los campos dependen de una escala μ. Por ejemplo, para un campo $G_{\mu\nu}(X)$, se tiene

$$\beta_{\mu\nu}(G) \sim \mu\frac{\partial G_{\mu\nu}(X;\mu)}{\partial\mu}. \tag{3.61}$$

La consistencia de la teoría se asegura si el tensor de energía-momento (3.59) se anula. Esto se garantiza si cada una de las funcionales beta (3.60) se iguala a cero, es decir,

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0. \tag{3.62}$$

Estas funcionales beta igualadas a cero se pueden considerar como las ecuaciones de movimiento del espaciotiempo donde las cuerdas se pueden propagar consistentemente a nivel cuántico. Básicamente, las ecuaciones (3.62) se pueden interpretar como una generalización de las ecuaciones de Einstein, de Maxwell y de Klein-Gordon, que se obtienen al imponer la invariancia de Weyl sobre la teoría. En el caso de la supercuerda, estas son las ecuaciones de movimiento de una teoría de supergravedad.

3.7. Acción Efectiva de Bajas Energías

Las funcionales beta igualadas a cero (3.62) también se pueden obtener a partir de un principio variacional de una acción efectiva de bajas energías. El régimen de bajas energías corresponde a energías $E \ll 1/\sqrt{\alpha'}$, que es equivalente a fijar E y hacer $\alpha' \to 0$. En términos de la longitud de la cuerda, $l_s = \sqrt{\alpha'}$, esta región índica que los objetos son mucho mayor que la longitud de cuerda l_s. En este régimen los estados masivos de la cuerda se desacoplan y solo los estados no masivos son de importancia. En el marco de cuerdas, la acción efectiva de bajas energías para cuerdas bosónicas está dada por [14, 17]

$$S = \frac{1}{2\kappa_0^2}\int d^{26}X\sqrt{-G}e^{-2\Phi}\left(R + 4\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\sigma}H^{\mu\nu\sigma}\right), \tag{3.63}$$

donde $G = \det G_{\mu\nu}$ y κ_0 es una constante. Al variar la acción (3.63) con respecto a los campos no masivos se recuperan las funcionales beta (3.60),

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2\kappa_0^2}\int d^{26}X\sqrt{-G}e^{-2\Phi}\left\{\delta G^{\mu\nu}\beta_{\mu\nu}(G) + \delta B^{\mu\nu}\beta_{\mu\nu}(B)\right. \\ &\qquad \left. + \left(2\delta\Phi - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}\delta G^{\mu\nu}\right)\left[\beta_\sigma{}^\sigma(G) - 4\beta(\Phi)\right]\right\}. \end{aligned}\tag{3.64}$$

Al minimizar la acción, $\delta S = 0$, se recuperan las ecuaciones de movimiento (3.62).

También es posible escribir la acción (3.63) en el marco de Einstein. Esto se consigue al aplicar una transformación de Weyl sobre la métrica del espaciotiempo,

$$G'_{\mu\nu} \equiv e^{\Phi'/6}G_{\mu\nu}, \tag{3.65}$$

donde $\Phi' = \Phi - \Phi_0$, con Φ_0 el valor asintótico del campo dilatónico. Entonces, en el marco de Einstein, la acción efectiva (3.63) se ve como [14]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{26}X\sqrt{-G'}\left(R' - \frac{1}{6}\nabla_\mu\Phi'\nabla^\mu\Phi' - \frac{1}{12}e^{-\Phi'/3}H_{\mu\nu\sigma}H^{\mu\nu\sigma}\right), \tag{3.66}$$

donde $G' = \det G'_{\mu\nu}$ y $\kappa^2 = 8\pi G_N = \kappa_0^2 e^{2\Phi_0} \sim l_s^{24}g_s^2$, con G_N la constante gravitacional de Newton en $D = 26$ dimensiones.

Además de los estados no masivos de la cuerda bosónica, también se pueden acoplar los estados no masivos de la supercuerda. En particular, para la supercuerda tipo IIB [18, 19] se tienen los siguientes estados no masivos correspondientes al sector Ramond-Ramond: un escalar $C_{(0)}$, un tensor de rango dos $C_{(2)}$ y un tensor de rango cuatro $C_{(4)}$. Las intensidades asociadas a estos campos son $F_{(1)} = dC_0$, $F_{(3)} = dC_{(2)}$ y $F_{(5)} = dC_{(4)}$, respectivamente. En el marco de cuerdas, la parte bosónica de la acción efectiva de bajas energías para supercuerdas tipo IIB está dada por

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa_0^2}\int d^{10}X\sqrt{G}e^{-2\Phi}\left[R + 4\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi - \frac{1}{2}\left|H_{(3)}\right|^2\right] \\ &- \frac{1}{4\kappa_0^2}\int d^{10}X\left[\sqrt{G}\left(\left|F_{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{F}_{(3)}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\tilde{F}_{(5)}\right|^2\right)\right] \\ &- \frac{1}{4\kappa_0^2}\int d^{10}X\left(C_{(4)} \wedge H_{(3)} \wedge F_{(3)}\right), \end{aligned} \tag{3.67}$$

donde

$$\tilde{F}_{(3)} = F_{(3)} - C_{(0)} \wedge H_{(3)}, \tag{3.68a}$$

$$\tilde{F}_{(5)} = F_{(5)} - \frac{1}{2}C_{(2)} \wedge H_{(3)} + \frac{1}{2}B_{(2)} \wedge F_{(3)}. \tag{3.68b}$$

Además, se impone la constricción de autodualidad en $\tilde{F}_{(5)}$, es decir, $\tilde{F}_{(5)} = *\tilde{F}_{(5)}$. Esta constricción de autodualidad se debe imponer en la soluciones y no sobre la acción. Por simplicidad en la notación, se define $H_{\mu\nu\sigma} \equiv H_{(3)}$ y $B_{\mu\nu} \equiv B_{(2)}$.

El primer renglón de la acción (3.67) involucra la parte usual de la cuerda bosónica, que corresponde a los campos del sector de Neveau-Schwarz en la supercuerda. El segundo renglón corresponde a los campos del sector Ramond-Ramond. El último renglón corresponde a un término de Chern-Simons que relaciona ambos sectores. Resulta interesante notar que si se ignoran los campos Ramond-Ramond, la acciones efectivas (3.63) y (3.67) difieren únicamente en la dimensión del espaciotiempo. Esto significa que las ecuaciones de movimiento para la cuerda bosónica y la supercuerda son exactamente las mismas ecuaciones de supergravedad (3.62).

3.8. Solución de Dabholkar-Harvey

Las p-branas negras son soluciones clásicas de las ecuaciones de supergravedad (3.62) que se interpretan como agujeros negros extendidos en p dimensiones espaciales. La solución más sencilla en coordenadas esféricas que describe N supercuerdas, cargadas, estáticas y estiradas en la dirección X_1, encontrada por A. Dabholkar y J. A. Harvey en 1989, está dada por [20, 21],

$$\begin{aligned} ds^2 &= h^{-1}\left(-dX_0^2 + dX_1^2\right) + dr^2 + r^2 d\Omega_7^2, && (3.69a) \\ e^{2\Phi} &= g_s^2 h^{-1}, && (3.69b) \\ B_{01} &= -h^{-1}, && (3.69c) \end{aligned}$$

donde

$$h = 1 + \frac{R_{\mathrm{DH}}^6}{r^6}, \quad R_{\mathrm{DH}}^6 = 32\pi^2 N g_s^2 l_s^6, \quad d\Omega_7^2 = d\theta_1^2 + \sum_{a=2}^{7}\left(\prod_{m=1}^{a-1}\sin^2\theta_m\right) d\theta_a^2. \quad (3.70)$$

Al calcular cada uno de los términos diferentes de cero de la solución (3.69) que contribuyen a las ecuaciones de supergravedad (3.62), con el paquete de Mathematica *Riemann Geometry and Tensor Calculus*, se obtienen los siguientes resultados. Para la funcional beta $\beta(\Phi)$ se encuentra que:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi &= \frac{36 R_{\mathrm{DH}}^{12}}{r^2(r^6 + R_{\mathrm{DH}}^6)^2}, && (3.71a) \\ R &= -\frac{126 R_{\mathrm{DH}}^{12}}{r^2(r^6 + R_{\mathrm{DH}}^6)^2}, && (3.71b) \\ \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi &= \frac{9 R_{\mathrm{DH}}^{12}}{r^2(r^6 + R_{\mathrm{DH}}^6)^2}, && (3.71c) \\ H_{\mu\nu\sigma} H^{\mu\nu\sigma} &= -\frac{216 R_{\mathrm{DH}}^{12}}{r^2(r^6 + R_{\mathrm{DH}}^6)^2}. && (3.71d) \end{aligned}$$

Para la funcional beta $\beta_{\mu\nu}(B)$ se encuentra que:

$$\begin{aligned} \nabla^\sigma H_{\sigma 01} &= \frac{36 r^4 R_{\mathrm{DH}}^{12}}{\left(r^6 + R_{\mathrm{DH}}^6\right)^3} = -\nabla^\sigma H_{\sigma 10}, && (3.72a) \\ \nabla^\sigma \Phi H_{\sigma 01} &= \frac{18 r^4 R_{\mathrm{DH}}^{12}}{\left(r^6 + R_{\mathrm{DH}}^6\right)^3} = -\nabla^\sigma \Phi H_{\sigma 10}. && (3.72b) \end{aligned}$$

Para la funcional beta $\beta_{\mu\nu}(G)$ se encuentra que:

$$H_{0\sigma\rho}H_0{}^{\sigma\rho} = \frac{72r^4R_{\mathrm{DH}}^{12}}{\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^3}, \tag{3.73a}$$

$$H_{1\sigma\rho}H_1{}^{\sigma\rho} = -\frac{72r^4R_{\mathrm{DH}}^{12}}{\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^3}, \tag{3.73b}$$

$$H_{2\sigma\rho}H_2{}^{\sigma\rho} = -\frac{72R_{\mathrm{DH}}^{12}}{r^2\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^2}. \tag{3.73c}$$

$$R_{00} = \frac{36r^4R_{\mathrm{DH}}^{12}}{\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^3}, \tag{3.74a}$$

$$R_{11} = -\frac{36r^4R_{\mathrm{DH}}^{12}}{\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^3}, \tag{3.74b}$$

$$R_{22} = -\frac{6R_{\mathrm{DH}}^6(7r^6-2R_{\mathrm{DH}}^6)}{r^2\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^2}, \tag{3.74c}$$

$$R_{33} = -\frac{6R_{\mathrm{DH}}^6}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, \tag{3.74d}$$

$$R_{44} = -\frac{6R_{\mathrm{DH}}^6\sin^2\theta_1}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, \tag{3.74e}$$

$$R_{55} = -\frac{6R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{2}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, \tag{3.74f}$$

$$R_{66} = -\frac{6R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{3}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, \tag{3.74g}$$

$$R_{77} = -\frac{16R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{4}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, \tag{3.74h}$$

$$R_{88} = -\frac{6R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{5}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, \tag{3.74i}$$

$$R_{99} = -\frac{6R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{6}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}. \tag{3.74j}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_0\nabla_0\Phi &= -\frac{9r^4 R_{\mathrm{DH}}^{12}}{\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^3}, && (3.75a)\\
\nabla_1\nabla_1\Phi &= \frac{9r^4 R_{\mathrm{DH}}^{12}}{\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^3}, && (3.75b)\\
\nabla_2\nabla_2\Phi &= -\frac{3R_{\mathrm{DH}}^6\left(7r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)}{r^2\left(r^6+R_{\mathrm{DH}}^6\right)^2}, && (3.75c)\\
\nabla_3\nabla_3\Phi &= \frac{3R_{\mathrm{DH}}^6}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, && (3.75d)\\
\nabla_4\nabla_4\Phi &= \frac{3R_{\mathrm{DH}}^6\sin^2\theta_1}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, && (3.75e)\\
\nabla_5\nabla_5\Phi &= \frac{3R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{2}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, && (3.75f)\\
\nabla_6\nabla_6\Phi &= \frac{3R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{3}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, && (3.75g)\\
\nabla_7\nabla_7\Phi &= \frac{3R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{4}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, && (3.75h)\\
\nabla_8\nabla_8\Phi &= \frac{3R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{5}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}, && (3.75i)\\
\nabla_9\nabla_9\Phi &= \frac{3R_{\mathrm{DH}}^6\prod_{a=1}^{6}\sin^2\theta_a}{r^6+R_{\mathrm{DH}}^6}. && (3.75j)
\end{aligned}
$$

Al sumar cada uno de estos términos, de acuerdo a las funcionales beta (3.60), se encuentra que la solución de Dabholkar-Harvey (3.69) satisface las ecuación (3.62). Este calculo nos permite entender cómo verificar si un fondo es solución de las ecuaciones de movimiento (3.62), ya que más adelante estudiaremos este mismo fondo bajo cierto límite.

Capítulo 4

Teoría de Cuerdas No Relativistas

La teoría de cuerdas no relativistas (NRST, por sus siglas en inglés) se define a partir de un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas estándar [22, 23]. Este límite está estrechamente relacionado con el límite de bajas energías $\alpha' \to 0$ que define a la teoría de cuerdas abiertas no conmutativas (NCOS, por sus siglas en inglés) [24, 25, 26]. Esencialmente se trata del mismo límite, pero sin considerar D-branas en la teoría. La no conmutatividad de estas teorías se encuentra en el hecho de que la coordenada temporal X^0 y una coordenada espacial, generalmente X^1, conocidas como coordenadas longitudinales, no conmutan, es decir, $[X^0, X^1] \sim i\theta$, donde θ es un parámetro real que mide la no conmutatividad de la teoría. Las coordenadas restantes, $X^2, \cdots, X^{D-1}$ son conocidas como coordenadas transversales, donde D es la dimensión del espaciotiempo, $D = 26$ para la cuerda bosónica y $D = 10$ para la supercuerda. La formulación original de estas teorías se realizó a partir de una teoría de cuerdas estándar en espaciotiempo plano con métrica $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$.

La teoría NCOS en $p+1$ dimensiones ($p \leq 5$) se obtiene al considerar un arreglo de Dp-branas con un campo de norma antisimétrico B_{01} en un límite de bajas energías $\alpha' \to 0$ donde B_{01} se aproxima a su valor crítico. Inicialmente se pensó que esta teoría solo contenía cuerdas abiertas, en particular esto significa que no había gravitones. Sin embargo, Klebanov y Maldacena, en el contexto de $1+1$ NCOS [27], descubrieron que, cuando la dirección del campo de norma se compactifica sobre un círculo de radio R, cuerdas cerradas con número de enrollamiento estrictamente positivo $w > 0$ aparecen en la teoría. El gravitón ($w = 0$) seguía ausente, pero el espectro de masas de NCOS ya contenía estados de cuerdas cerradas similares con $w > 0$. Este resultado motivó a preguntar si tenía sentido formular una teoría completa de solo cuerdas cerradas con $w > 0$, es decir, sin considerar Dp-branas. Esta pregunta se contestó afirmativamente con el descubrimiento de NRST [23], también conocida como teoría de cuerdas enrolladas (WST, por sus siglas en inglés) [22].

Interesantemente, en [22] se señaló que el espectro de masas de NRST permite estados con $w = 0$ solo si tienen momento transverso $p_\perp = 0$ y niveles de oscilador

$N_L = N_R = 0$. Esto significa que NRST contiene gravitones, dilatones y antisimetricones. De hecho, estas partículas son las únicas partículas no masivas de la teoría responsables de mediar la interacción de largo alcance tipo newtoniana entre cuerdas no relativistas [22, 28]. Estos campos no masivos de NRST son importantes ya que se pueden utilizar para describir cuerdas no relativistas que se propagan en un espaciotiempo curvo.

Recientemente, en [29, 30, 31], con trabajo previo de [32, 33, 34, 35], se mostró que los campos no masivos de NRST corresponden a los campos independientes que definen la geometría de Newton-Cartan de cuerdas, $({\tau_\mu}^A,\ {E_\mu}^{A'},\ {m_\mu}^A)$, un campo antisimétrico $B_{\mu\nu}$ y un campo dilatónico Φ. El acoplamiento de estos campos con la hoja de mundo describe una teoría de cuerdas no relativistas que se propagan sobre una geometría de Newton-Cartan de cuerdas acoplada a un campo antisimétrico y un campo dilatónico. Esta teoría tiene bien definida una acción del modelo sigma no lineal y unas ecuaciones de movimiento del espaciotiempo [31, 36, 37]. Interesantemente, en [31, 38] se mostró que la geometría de Newton-Cartan de cuerdas se puede obtener a partir de un límite no relativista $c \to \infty$ de la geometría riemanniana de relatividad en el formalismo vielbein. De hecho, también se mostró que el modelo sigma no lineal y las ecuaciones de movimiento de NRST se pueden obtener al aplicar este mismo límite sobre las propiedades análogas de la teoría de cuerdas estándar.

En este capítulo derivamos la acción de la hoja de mundo y el espectro de masas de NRST en espaciotiempo plano a partir de un límite $\epsilon \to 0$ de las propiedades análogas de la teoría de cuerdas estándar. Desarrollamos estas ideas con base al análisis del límite no relativista $\epsilon \to 0$ para partículas puntuales. Después derivamos la geometría de Newton-Cartan de cuerdas a partir de un límite $\epsilon = c^{-2} \to 0$ de la geometría riemanniana de relatividad general en el formalismo vielbein. Finalmente, derivamos el modelo sigma no lineal, las ecuaciones de movimiento y una solución tipo Dabholkar-Harvey de NRST en espaciotiempo curvo al aplicar este mismo límite sobre las propiedades análogas de la teoría de cuerdas estándar.

4.1. Límite de Bajas Energías de NRST

En el límite de bajas energías de NRST ($\epsilon \to 0$) la constante de acoplamiento g_s, la longitud de la cuerda l_s, la métrica del espaciotiempo plano $\eta_{\mu\nu}$ y el campo de norma antisimétrico B_{01} de la teoría de cuerdas estándar compactificada sobre un círculo de radio R a lo largo de la dirección X^1, escalan como

$$g_s = \frac{G_s}{\sqrt{\epsilon}}, \quad l_s = L_s\sqrt{\epsilon}, \quad g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \epsilon, \epsilon, ...), \quad B_{01} = 1 - \lambda\epsilon, \tag{4.1}$$

donde G_s, L_s, R y λ son constantes fijas. G_s es la constante de acoplamiento efectiva, L_s es la longitud efectiva de la cuerda y λ es un parámetro libre de la teoría que se relaciona con el término finito que se deja después de remover una divergencia. La elección más simple es considerar $\lambda = 0$, que corresponde a no dejar una contribución remanente del campo de norma en la teoría resultante, en este caso, en NRST.

Las propiedades de NRST se pueden obtener al aplicar el límite (4.1) sobre las propiedades análogas de la teoría de cuerdas estándar. Este es el enfoque adoptado en [22, 24, 25, 27]. Un enfoque complementario, desarrollado por Gomis y Ooguri [23], consiste en aplicar el límite (4.1) sobre la acción de la hoja de mundo de la teoría de cuerdas estándar para obtener una acción propia de NRST y derivar las propiedades de la manera usual, a partir de la acción. Gomis y Ooguri denominaron a la teoría resultante como teoría de cuerdas cerradas no relativistas (NRCS, por sus siglas en inglés) por el hecho de que el espectro de masas de la teoría tiene una forma no relativista. La naturaleza no relativista de NRST también se puede observar en el rescalamiento de la métrica en (4.1), que hace que la velocidad de la luz tienda a infinito. Curiosamente, los artículos [22, 23] se publicaron el mismo día por dos grupos de investigadores que no estaban asociados, y ambos hacen referencia a la misma teoría. Algunas propiedades obtenidas con estos dos enfoques se compararon en [28] y algunas propiedades se generalizaron a objetos de mayor dimensión en [39, 40].

4.2. Partícula Puntual (No Relativista)

El límite (4.1) también es conocido como límite enrollado [22] ya que define una teoría de cuerdas donde todos los objetos tienen número de enrollamiento $w > 0$. Sin embargo, este límite es una simple generalización del límite no relativista $\epsilon \to 0$ para partículas puntuales, donde los parámetros para una partícula relativista de masa m acoplada a un campo de norma A_μ escalan como

$$m = \frac{M}{\epsilon}, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \epsilon, \epsilon, ...), \quad A_0 = 1 - \lambda\epsilon, \tag{4.2}$$

con M y λ constantes fijas. Evidentemente, al tratase de objetos de dimensión cero, la noción de enrollamiento se pierde y la naturaleza no relativista es la única propiedad que se hace evidente. En este sentido y de manera general, el límite (4.1) también es conocido como límite no relativista para cuerdas.

Las propiedades de una partícula no relativista se obtienen al aplicar el límite (4.2) sobre las propiedades análogas de una partícula relativista. Una propiedad importante que se puede analizar con este tipo de límites es la acción de la teoría. En este caso, la acción de la línea de mundo para una partícula puntual relativista de masa m acoplada a un campo de norma A_μ está dada por [22]

$$S = -m \int d\tau \left[\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu}} - A_\mu \dot{X}^\mu \right], \tag{4.3}$$

o equivalentemente por [22]

$$I = -\frac{m}{2}\int d\tau\left[\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{-1}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu g_{\mu\nu}+1\right)-2A_\mu\dot{X}^\mu\right], \tag{4.4}$$

donde $\gamma = \dot{X}^\mu\dot{X}^\nu g_{\mu\nu}$ es la métrica intrínseca de la línea de mundo y un punto denota derivación con respecto a τ. En el límite (4.2), la raíz cuadrada de la acción (4.3) se puede expandir en potencias de ϵ. El término dominante, $\dot{X}^0$, es finito, por lo que multiplicado por $m \propto \epsilon^{-1}$ implicaría una contribución divergente a la acción. Sin embargo, este término se cancela precisamente con la contribución dominante del campo de norma. Los términos subdominantes dan lugar a la siguiente acción finita

$$S_{\mathrm{NR}} = -\int d\tau\left[-\frac{M}{2}\frac{\dot{X}_\perp^2}{\dot{X}^0}+\lambda M\dot{X}^0\right], \tag{4.5}$$

que se puede identificar como la acción de una partícula no relativista de masa M acoplada a un término remanente del campo de norma. La elección $\lambda = 0$ determina la acción de una partícula libre no relativista de masa M. Las coordenadas espaciales se denotan por $X_\perp = X_i$ y se contraen con la métrica euclideana δ_{ij}.

La acción (4.5) es invariante bajo reparametrizaciones de la línea de mundo $\tau \to \tilde{\tau}(\tau)$ y bajo las transformaciones de Galileo (2.1), que infinitesimalmente se ven como

$$\delta_H X^0 = \zeta^0, \quad \delta_J X^i = \Lambda^i{}_j X^j, \quad \delta_G X^i = \Lambda^i X^0, \quad \delta_P X^i = \zeta^i, \tag{4.6}$$

donde ζ^0, ζ^i, $\Lambda^i{}_j$ y Λ^i parametrizan translaciones temporales, translaciones espaciales, rotaciones espaciales e impulsos, respectivamente. Los subíndices H, J, G y P denotan los generadores asociados a estas transformaciones. Una observación importante es que el lagrangiano de (4.5) transforma como una derivada total bajo impulsos (4.6). Esto conduce a una carga de Noether modificada que da lugar a un álgebra de Galileo centralmente extendida que contiene un generador de carga central Z. Esta álgebra de Galileo centralmente extendida es el álgebra de Bargmann [41]. Esto significa que la acción (4.5) es cuasi-invariante bajo el álgebra de Galileo. Las ecuaciones de movimiento correspondientes a la acción no relativista (4.5) están dadas por

$$\ddot{X}^i = \frac{\ddot{X}^0}{\dot{X}^0}\dot{X}^i, \tag{4.7}$$

que son las ecuaciones de movimiento de una partícula libre no relativista.

Interesantemente, la acción (4.5) se puede escribir de una forma covariante al introducir los campos independientes que definen la gravedad de Newton-Cartan de partículas, $\tau_{\mu\nu} = \tau_\mu\tau_\nu$, $h_{\mu\nu} = e_\mu{}^i e_\nu{}^j\delta_{ij}$ y m_μ. La relación que existe entre estos campos y la acción (4.5) se encuentra codificada en un procedimiento que asocia una variación de un campo de norma a cada uno de los generadores del álgebra de Bargmann. Por ejemplo, una variación $\delta\tau_\mu = \partial_\mu \tau$ está asociada al generador H. Al imponer constricciones de curvatura se puede formular la gravedad de Newton-Cartan a partir de este procedimiento [42]. En términos de estos campos, la acción (4.5) se ve como

$$S = \frac{m}{2} \int d\tau \left[\frac{h_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}{\tau_\rho \dot{X}^\rho} - 2m_\mu \dot{X}^\mu + \lambda M \tau_\rho \dot{X}^\rho \right], \tag{4.8}$$

donde el término $m_\mu \dot{X}^\mu$ es necesario para hacer a la acción invariante bajo impulsos. Esta acción sí es invariante bajo las transformaciones de Galileo infinitesimales (4.6) y es cuasi-invariante del álgebra de Bargmann: bajo transformaciones Z, $\delta m_\mu = \partial_\mu \sigma$, el lagrangiano de (4.8) transforma como una derivada total, mientras que bajo las otras transformaciones el lagrangiano se mantiene invariante.

También es posible considerar el límite (4.2) sobre la acción (4.4). En este límite y en la norma $\eta = -1$, la acción (4.4) se reduce a

$$I = -\frac{M}{2\epsilon} \int d\tau \left[(\dot{X}^0)^2 + 1 - 2A_0 \dot{X}^0 \right] + \frac{M}{2} \int d\tau \dot{X}_\perp^2. \tag{4.9}$$

Es claro que el rescalamiento relativo en (4.2) entre m y las componentes espaciales de la métrica se elige de modo que la acción para las coordenadas espaciales $X_\perp$ sea finita. Para tratar con la divergencia en la coordenada temporal, se reescribe la acción (4.9) en términos de un multiplicador de Lagrange l, es decir,

$$I = -\int d\tau \left[l(\dot{X}^0 - A_0) - \frac{\epsilon}{2M} l^2 + 1 - (A_0)^2 - \frac{M}{2} \dot{X}_\perp^2 \right]. \tag{4.10}$$

Entonces, en el límite $\epsilon \to 0$ se obtiene la siguiente acción finita

$$I_{\text{NR}} = -\int d\tau \left[l(\dot{X}^0 - 1) - \frac{M}{2} \dot{X}_\perp^2 + \lambda M \right], \tag{4.11}$$

que se puede identificar como la acción de una partícula no relativista de masa M acoplada a una término remanente del campo de norma. La ecuación de movimiento para l implica la condición de norma estática $\dot{X}^0 = 1$, que es justo la condición de norma original $\gamma = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu} = -1$, en el límite (4.2).

Otra propiedad importante que se puede analizar con este límite es el espectro de masas de la teoría. Dicho espectro se puede obtener al calcular el momento canónico de cualquiera de las dos acciones (4.5) o (4.11) y revisar las constricciones que satisfacen. Sin embargo, resulta más sencillo aplicar el límite no relativista (4.2) directamente sobre el espectro de masas para el caso relativista. En este caso, el espectro de energía de una partícula relativista de masa m acoplada a un campo de norma A_μ está dada por

$$p_0 = \sqrt{m^2 + g^{ij}\left(p_i - A_i\right)\left(p_j - A_j\right)} - mA_0. \tag{4.12}$$

En el límite (4.2), el momento espacial escala como $p_\perp = p_i \propto \epsilon^{-1}$ y entonces la raíz cuadrada de (4.12) se puede expandir en potencias de ϵ. El término divergente, M/ϵ, se cancela precisamente con el término divergente de la contribución mA_0. Los términos restantes dan lugar al siguiente espectro finito [22]

$$p_0 = \frac{p_\perp^2}{2M} + \lambda M, \tag{4.13}$$

que se puede identificar como el espectro de una partícula no relativista de masa M acoplada a una contribución remanente del campo de norma. La elección $\lambda = 0$ determina el espectro de una partícula libre no relativista de masa M.

Con estas dos propiedades analizadas, es claro que el papel principal que juega el campo de norma es el de remover las divergencias tanto en la acción como en el espectro de la teoría. Este hecho permite definir estas propiedades de manera finita en el límite (4.2) y asociarlas a una teoría de partículas no relativistas. Además, la elección $\lambda = 0$ elimina la contribución remanente del campo de norma y determina las propiedades de una partícula libre no relativista.

4.3. Acción Tipo Nambu-Goto

Un análisis similar se puede realizar considerando el límite (4.1) para derivar las propiedades de NRST en espaciotiempo plano. En este caso, en vez de tener una coordenada temporal X^0 y $D-1$ coordenadas espaciales $X_\perp$, se tienen dos coordenadas longitudinales X^A, $A = 0, 1$ y $D-2$ coordenadas transversales $X^{A'}$, $A' = 2, \cdots, D-1$. Además, en vez de tener la masa de la partícula $m \propto \epsilon^{-1}$, se tiene la tensión de la cuerda $T = 1/2\pi l_s^2 \propto \epsilon^{-1}$. Evidentemente, al tratarse de objetos extendidos a lo largo de una dimensión espacial, en vez de acoplar un campo de norma A_μ, se acopla un campo de norma antisimétrico $B_{\mu\nu}$. La acción de la hoja de mundo de una cuerda (relativista) de tensión T acoplada a un campo de norma antisimétrico $B_{\mu\nu}$ está dada por la acción de Nambu-Goto,

$$S = -T \int d^2\sigma \left[\sqrt{-\det\left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}\right)} - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}\right], \tag{4.14}$$

donde $\alpha, \beta = 0, 1$ son índices de la hoja de mundo, asociadas a las coordenadas $\sigma^0 = \tau$ y $\sigma^1 = \sigma$, y $\epsilon^{\alpha\beta}$ es el tensor antisimétrico de Levi-Civita que satisface $\epsilon^{01} = +1$. Como resultado de la invariancia bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo, el tensor de energía-momento de la hoja de mundo de (4.14) es cero.

Para revisar los efectos del límite (4.1) sobre la acción (4.14), resulta conveniente desarrollar explícitamente el determinante de la acción (4.14) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\det(...) &= \left(\dot{X}^A\dot{X}_A + \epsilon\dot{X}^{A'}\dot{X}_{A'}\right)\left(X'^B X'_B + \epsilon X'^{B'} X'_{B'}\right) \\ &- \left(\dot{X}^A X'_A + \epsilon\dot{X}^{A'} X'_{A'}\right)\left(X'^B\dot{X}_B + \epsilon X'^{B'}\dot{X}_{B'}\right),\end{aligned} \tag{4.15}$$

y despreciar los términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, es decir,

$$\begin{aligned}\det(...) &= \dot{X}^A\dot{X}_A X'^B X'_B - \dot{X}^A X'_A X'^B\dot{X}_B \\ &+ \epsilon\left(\dot{X}^A\dot{X}_A X'^{B'} X'_{B'} + \dot{X}^{A'}\dot{X}_{A'} X'^B X'_B - 2\dot{X}^A X'_A X'^{B'}\dot{X}_{B'}\right),\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde un punto denota derivación con respecto a τ y una variable primada indica derivación con respecto a σ. Los índices A y A' se contraen con $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(-1,1)$ y $\delta_{A'B'}$, respectivamente. Los primeros dos términos de este determinante se pueden ver como un cuadrado perfecto si se considera la identidad

$$\dot{X}^A\dot{X}_A X'^B X'_B - \dot{X}^A X'_A X'^B\dot{X}_B = \det\big(\partial_\alpha X^A\partial_\beta X^B\eta_{AB}\big) = -\left(\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^0\partial_\beta X^1\right)^2, \tag{4.17}$$

que es válida solo si $\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^0\partial_\beta X^1 > 0$, es decir, si la cuerda está orientada a lo largo de la dirección $+X^1$. Si esto sucede, entonces, en el límite (4.1), la raíz cuadrada de la acción (4.14) se puede expandir en potencias de ϵ. El término dominante (longitudinal) es finito, por lo que multiplicado por $T \propto \epsilon^{-1}$ implicaría una contribución divergente. Sin embargo, se cancela precisamente con la contribución dominante del campo de norma. Los términos subdominantes dan lugar a la siguiente acción finita [22]

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{NR}} &= -T_{\mathrm{NR}}\int d^2\sigma\left[-\lambda\left(\dot{X}^0 X'^1 - \dot{X}^1 X'^0\right)\right. \\ &+ \left.\frac{2\dot{X}^A X'_A X'^{B'}\dot{X}_{B'} - \dot{X}^A\dot{X}_A X'^{B'} X'_{B'} - \dot{X}^{B'}\dot{X}_{B'} X'^A X'_A}{2\left(\dot{X}^0 X'^1 - \dot{X}^1 X'^0\right)}\right],\end{aligned} \tag{4.18}$$

que se puede identificar como la acción tipo Nambu-Goto de una cuerda no relativista con tensión efectiva $T_{\mathrm{NR}} = 1/2\pi L_s^2$ acoplada a una contribución remanente del campo de norma. La elección $\lambda = 0$ determina la acción de una cuerda libre no relativista.

Al definir la métrica de la hoja de mundo longitudinal $h'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^A\partial_\beta X^B\eta_{AB}$, que es precisamente el argumento del determinante en la identidad (4.17), la acción (4.18) se puede reescribir de una forma familiar:

$$S_{\mathrm{NR}} = -\frac{T_{\mathrm{NR}}}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h'}\left(h'^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^{A'}\partial_\beta X^{B'}\delta_{A'B'} - 2\lambda\right), \tag{4.19}$$

donde $h' = \det h'_{\alpha\beta}$. Las ecuaciones de movimiento de la acción (4.19) tienen la forma

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-h'} h'^{\alpha\beta} \partial_\beta X^{A'} \right) = 0, \tag{4.20}$$

que son las ecuaciones de movimiento de una cuerda libre no relativista [22].

La acción (4.19) es invariante bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo $\sigma \to \tilde{\sigma}(\sigma)$ y bajo las transformaciones galileanas de cuerdas

$$\delta X^A = \Lambda^A{}_B X^B + \zeta^A, \quad \delta X^{A'} = \Lambda^{A'}{}_{B'} X^{B'} + \Lambda^{A'}{}_A X^A + \zeta^{A'}, \tag{4.21}$$

donde los parámetros ζ^A, $\zeta^{A'}$, $\Lambda^{A'}{}_{B'}$, $\Lambda^{A'}{}_A$ y $\Lambda^A{}_B$ son translaciones longitudinales constantes, translaciones transversales constantes, rotaciones transversales, impulsos cuerderos y rotaciones longitudinales, respectivamente. Una observación importante es que el lagrangiano de (4.19) transforma como una derivada total bajo impulsos cuerderos. Esto conduce a una carga de Noether modificada que da lugar a una extensión del álgebra galileana de cuerdas que contiene dos generadores: Z_A y Z_{AB}. Los generadores de esta álgebra galileana de cuerdas extendida se pueden asociar a variaciones de campos de norma [35]. Al imponer constricciones de curvatura se puede formular lo que se conoce como la gravedad de Newton-Cartan de cuerdas, donde los campos independientes son $\tau_{\mu\nu} = \tau_\mu{}^A \tau_\mu{}^B \eta_{AB}$, $h_{\mu\nu} = E_\mu{}^{A'} E_\nu{}^{B'} \delta_{A'B'}$ y $m_\mu{}^A$. La acción (4.19) se puede reescribir de una forma covariante a través de estos campos,

$$S_{\mathrm{NR}} = -\frac{T_{\mathrm{NR}}}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-\tau'} \tau'^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \left(h_{\mu\nu} - 2 m_\mu{}^A \tau_\nu{}^A - 2\lambda \right), \tag{4.22}$$

donde $\tau'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \tau_{\mu\nu}$ y $\tau' = \det \tau'_{\alpha\beta}$. El término $m_\mu{}^A \tau_\nu{}^A$ es necesario para hacer a la acción invariante bajo impulsos cuerderos. Esta acción es cuasi-invariante del algebra de Galileo de cuerdas extendida: bajo transformaciones Z_A, $\delta m_\mu{}^A = \partial_\mu \sigma^A$ el lagrangiano (4.22) transforma como una derivada total, mientras que bajo las otras transformaciones el lagrangiano se queda invariante. De hecho, bajo transformaciones Z_{AB} el lagrangiano también se queda invariante.

4.4. Acción Tipo Polyakov o $\beta - \gamma$

La acción tipo Polyakov o $\beta - \gamma$ de NRST se puede obtener al considerar el límite (4.1) sobre la acción de Polyakov para una cuerda. En este caso, la acción de la hoja de mundo para una cuerda (relativista) con tensión $T = 1/2\pi l_s^2$ acoplada a un campo de norma antisimétrico $B_{\mu\nu}$ está dada por la acción de Polyakov

$$I = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \left[\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu} - \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu} \right], \tag{4.23}$$

donde $h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}$ es la métrica intrínseca y $h = \det h_{\alpha\beta}$. En el límite (4.1) y en la norma conforme $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1)$, la acción (4.23) se simplifica a

$$\begin{aligned} I &= -\frac{T_{\mathrm{NR}}}{2\epsilon} \int d^2\sigma \left[\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B \eta_{AB} - 2\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^0 \partial_\beta X^1 B_{01}\right] \\ &\quad - \frac{T_{\mathrm{NR}}}{2} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^{A'} \partial_\beta X^{B'} \delta_{A'B'}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Una vez más, es claro que el rescalamiento relativo en (4.1) entre la tensión de la cuerda $T = 1/2\pi l_s^2$ y las componentes transversales de la métrica $g_{\mu\nu}$ se elige de tal modo que la acción para las coordenadas transversales sea finita.

Para tratar con las divergencias en las coordenadas longitudinales en (4.24), resulta conveniente introducir las siguientes coordenadas del cono de luz

$$\partial = \partial_\tau + \partial_\sigma, \quad \overline{\partial} = -\partial_\tau + \partial_\sigma \quad ; \quad \gamma = X^0 + X^1, \quad \overline{\gamma} = -X^0 + X^1, \tag{4.25}$$

donde

$$\begin{aligned} \partial\gamma &= +\dot{X}^0 + \dot{X}^1 + X'^0 + X'^1, && (4.26a) \\ \partial\overline{\gamma} &= -\dot{X}^0 + \dot{X}^1 - X'^0 + X'^1, && (4.26b) \\ \overline{\partial}\gamma &= -\dot{X}^0 - \dot{X}^1 + X'^0 + X'^1, && (4.26c) \\ \overline{\partial}\overline{\gamma} &= +\dot{X}^0 - \dot{X}^1 - X'^0 + X'^1, && (4.26d) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \partial\gamma\overline{\partial}\overline{\gamma} &= +(\dot{X}^0)^2 + 2\dot{X}^0 X'^1 - (\dot{X}^1)^2 - 2\dot{X}^1 X'^0 - (X'^0)^2 + (X'^1)^2, && (4.27a) \\ \partial\overline{\gamma}\overline{\partial}\gamma &= +(\dot{X}^0)^2 - 2\dot{X}^0 X'^1 - (\dot{X}^1)^2 + 2\dot{X}^1 X'^0 - (X'^0)^2 + (X'^1)^2. && (4.27b) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los términos longitudinales de la acción (4.24) se simplifican a

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B \eta_{AB} &= \frac{1}{2} \left(\partial\overline{\gamma}\overline{\partial}\gamma + \partial\gamma\overline{\partial}\overline{\gamma}\right), && (4.28a) \\ \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B B_{AB} &= \frac{1}{2} \left(\partial\gamma\overline{\partial}\overline{\gamma} - \partial\overline{\gamma}\overline{\partial}\gamma\right)(1 - \lambda\epsilon), && (4.28b) \end{aligned}$$

y el término transversal se simplifica a

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^{A'} \partial_\beta X^{B'} \delta_{A'B'} = \partial X^{A'} \overline{\partial} X^{B'} \delta_{A'B'}. \tag{4.29}$$

Con esto en mente, la acción (4.24) se puede reescribir de la siguiente forma

$$I = -\frac{T_{\mathrm{NR}}}{2\epsilon} \int d^2\sigma \left[\partial\overline{\gamma}\overline{\partial}\gamma + \frac{\lambda\epsilon}{2} \left(\partial\gamma\overline{\partial}\overline{\gamma} - \partial\overline{\gamma}\overline{\partial}\gamma\right)\right] - \frac{T_{\mathrm{NR}}}{2} \int d^2\sigma \partial X^{A'} \overline{\partial} X^{B'} \delta_{A'B'}. \tag{4.30}$$

Además, en la norma conforme se tiene que $\dot{X} \cdot X' = 0$ y $\dot{X}^2 = -X'^2$, que junto con el límite (4.1) implica que $X'^0 = \dot{X}^1$ y $X'^1 = \dot{X}^0$, de modo que $\partial\overline{\gamma} = \overline{\partial}\gamma = 0$ pero $\partial\gamma\overline{\partial}\overline{\gamma} \neq 0$. Este hecho permite reescribir la acción (4.30) en términos de dos multiplicadores de Lagrange β y $\tilde{\beta}$ con las constricciones $\partial\overline{\gamma} = \epsilon\beta$ y $\overline{\partial}\gamma = \epsilon\tilde{\beta}$, es decir,

$$I = -\frac{T_{\rm NR}}{2}\int d^2\sigma \left[\beta\overline{\partial}\gamma + \tilde{\beta}\partial\overline{\gamma} + \epsilon\left(1 - \frac{\lambda\epsilon}{2}\right)\beta\tilde{\beta} + \frac{\lambda}{2}\partial\gamma\overline{\partial}\overline{\gamma} + \partial X^{A'}\overline{\partial}X^{B'}\delta_{A'B'}\right]. \tag{4.31}$$

Entonces, en el límite $\epsilon \to 0$ se obtiene la acción finita [28]:

$$I_{\rm NR} = -\frac{T_{\rm NR}}{2}\int d^2\sigma \left[\beta\overline{\partial}\gamma + \tilde{\beta}\partial\overline{\gamma} + \frac{\lambda}{2}\partial\gamma\overline{\partial}\overline{\gamma} + \partial X^{A'}\overline{\partial}X^{B'}\delta_{A'B'}\right], \tag{4.32}$$

que se puede identificar como la acción tipo Polyakov o $\beta - \gamma$ para una cuerda no relativista con tensión $T_{\rm NR}$ acoplada a una contribución remanente del campo de norma. La elección $\lambda = 0$ determina la acción de una cuerda libre no relativista con tensión $T_{\rm NR}$. Las ecuaciones de movimiento de la acción (4.32) están dadas por [28]

$$\partial\overline{\gamma} = \overline{\partial}\gamma = 0, \quad \partial\tilde{\beta} + \frac{\lambda}{2}\partial\overline{\partial}\gamma = 0, \quad \overline{\partial}\beta + \frac{\lambda}{2}\partial\overline{\partial}\overline{\gamma} = 0. \tag{4.33}$$

Al tomar $\lambda = 0$, las ecuaciones de movimiento se reducen a $\partial\overline{\gamma} = \overline{\partial}\gamma = \partial\tilde{\beta} = \overline{\partial}\beta = 0$. También es posible considerar el caso $\lambda = 1/2$ para cumplir con la convención habitual de la teoría NCOS. Sin embargo, en [28] se mostró que el espectro dinámico de NCOS no depende de λ, por lo que consistentemente se puede tomar $\lambda = 0$.

El espectro de masas de NRST se podría obtener al calcular el momento canónico de la cuerda no relativista a partir de cualquiera de las dos acciones (4.18) o (4.32), imponer las condiciones de periodicidad para cuerdas cerradas y usar la expansión en modos usual. Sin embargo, también se puede obtener al considerar el límite de NRST (4.1) sobre el espectro de masas para cuerdas cerradas usual.

4.5. Espectro de Masas de NRST

El espectro de masas de NRST se puede obtener al aplicar el límite (4.1) sobre el espectro de masas para cuerdas cerradas de la teoría de cuerdas estándar [27]. En presencia de un campo de norma antisimétrico B_{01}, el espectro de masas para cuerdas cerradas, con la dirección del campo de norma compactificada sobre un círculo de radio R, con n unidades de momento y w unidades de enrollamiento está dada por

$$p_0^2 + 2p_0B_{01}\frac{wR}{l_s^2} - \left(\frac{wR}{l_s^2}\right)^2\left(1 - B_{01}^2\right) - \left(\frac{n}{R}\right)^2 - p_\perp^2 - \frac{2}{l_s^2}\left(N_L + N_R\right) = 0, \tag{4.34}$$

donde $p_\perp$ es el momento transverso y N_L y N_R son respectivamente los niveles de oscilador izquierdo y derecho, que satisfacen la condición de coincidencia de nivel,

$$N_L - N_R = nw. \tag{4.35}$$

El espectro de masas (4.34) se puede ver como una ecuación cuadrática para la energía p_0, donde las dos soluciones están dadas por [27],

$$p_0 = -\frac{B_{01}wR}{l_s^2} \pm \sqrt{\left(\frac{wR}{l_s^2}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 + p_\perp^2 + \frac{2}{l_s^2}\,(N_L + N_R)}. \tag{4.36}$$

El término cuadrático en B_{01} se ha cancelado dentro de la raíz cuadrada. Si se restringe la atención al intervalo físico $|B_{01}| \leq 1$, se elige la solución con signo positivo en (4.36) para tener energías positivas $p_0 > 0$. En el intervalo $|B_{01}| > 1$, la elección de cualquiera de las dos soluciones da lugar a estados con energía negativa $p_0 < 0$. Por ahora no se considera este intervalo.

En el límite (4.1), el momento transverso escala como $p_\perp = k_\perp/\epsilon$, donde $k_\perp$ es una constante fija. Para estados con $w = 0$, el espectro de masas (4.36) se reduce a

$$p_0 = \sqrt{\left(\frac{n}{R}\right)^2 + p_\perp^2 + \frac{2}{l_s^2}\,(N_L + N_R)}, \tag{4.37}$$

que es una energía divergente, $p_0 \propto \epsilon^{-1/2} \to \infty$, al menos que $k_\perp = N_L = N_R = 0$. En este caso, se tiene $p_0 = |n|/R$. Por otro lado, para estados con $w \neq 0$, la raíz cuadrada del espectro de masas (4.36) se puede expandir en potencias de ϵ, es decir,

$$p_0 = -\frac{wR}{\epsilon L_s^2} + \frac{\lambda wR}{L_s^2} + \frac{|w|R}{\epsilon L_s^2} + \frac{L_s^2}{2|w|R}k_\perp^2 + \frac{N_L + N_R}{|w|R} + \epsilon\frac{n^2 L_s^2}{2|w|R^3}. \tag{4.38}$$

En el límite $\epsilon \to 0$ este espectro diverge, al menos que $w > 0$. En este caso se obtiene

$$p_0 = \frac{\lambda wR}{L_s^2} + \frac{L_s^2}{2wR}k_\perp^2 + \frac{N_L + N_R}{wR}, \tag{4.39}$$

que se puede identificar como el espectro de masas de NRST. Los estados no masivos con $w = 0$, $p_\perp = N_L = N_R = 0$, son los responsables de mediar la fuerza newtoniana entre cuerdas no relativistas [28]. Esto significa que NRST contiene gravitones, antisimetricones y dilatones. Por argumentos de conservación del número de enrollamiento, el espectro dinámico de NRST se define sin considerar el primer término de (4.39), es decir, es independiente del parámetro λ [22].

4.6. Geometría de Newton-Cartan de Cuerdas

La geometría de Newton-Cartan de cuerdas es a la gravedad de Newton-Cartan de cuerdas lo que la geometría riemanniana es a la relatividad general. La gravedad de Newton-Cartan de cuerdas es una generalización de la gravedad de Newton-Cartan de partículas. Esta generalización se puede obtener al asociar variaciones de campos de norma con los generadores de la extensión del álgebra galileana de cuerdas y establecer constricciones de curvatura [35]. De hecho, la gravedad de Newton-Cartan de partículas y la relatividad general en el formalismo vielbein también se pueden obtener bajo un procedimiento análogo aplicado sobre los generadores del álgebra de Bargmann [42] y el álgebra de Poincaré [43, 44], respectivamente. Alternativamente, las propiedades generales de la geometría de Newton-Cartan de cuerdas se pueden obtener a partir de un límite no relativista $c \to \infty$ de la geometría riemanniana de relatividad general en el formalismo vielbein con un campo de norma auxiliar $\hat{M}_{\mu\nu}$ que no describe grados de libertad de propagación, $\partial_{[\mu}\hat{M}_{\nu\rho]} = 0$, [31].

Para revisar el resultado de [31] en términos de un límite $\epsilon \to 0$, que sea consistente con un rescalamiento transversal en vez de uno longitudinal, resulta útil adoptar la notación del artículo e introducir la siguiente expansión explicita de las componentes del vielbein del espaciotiempo $\hat{E}_\mu{}^{\hat{A}}$ y el campo de norma auxiliar $\hat{M}_{\mu\nu}$,

$$\hat{E}_\mu{}^A \;=\; X_\mu{}^A + \epsilon m_\mu{}^A, \quad \hat{E}_\mu{}^{A'} = \sqrt{\epsilon} E_\mu{}^{A'}, \quad \hat{M}_{\mu\nu} = -X_\mu{}^A X_\mu{}^B \epsilon_{AB}, \tag{4.40}$$

donde

$$X_\mu{}^A = \tau_\mu{}^A - \epsilon C_\mu{}^A. \tag{4.41}$$

El índice interno $\hat{A}$ se ha dividido en un índice longitudinal A y uno transversal A'. En esta notación, los términos con gorro representan propiedades de la geometría riemanniana y los términos sin gorro representan propiedades de la geometría de Newton-Cartan de cuerdas. Los campos $\tau_\mu{}^A$, $E_\mu{}^{A'}$ y $m_\mu{}^A$ corresponden a los campos independientes que definen la geometría de Newton-Cartan de cuerdas; en particular $\tau_\mu{}^A$ y $E_\mu{}^{A'}$ juegan el papel del vielbein longitudinal y transversal, respectivamente. El campo $m_\mu{}^A$ está relacionado con el generador Z_A de la extensión del álgebra galileana de cuerdas. Básicamente, $m_\mu{}^A$ es necesario para que NRST sea invariante bajo las transformaciones galileanas de cuerdas (4.21). Los campos $C_\mu{}^A$ son arbitrarios y no forman parte de los campos independientes que definen esta geometría.

La expansión del vielbein inverso $\hat{E}^\mu{}_{\hat{A}}$ se elige de tal forma que al sustituirla, junto con la expansión (4.40), en (2.44) y tomar el límite $\epsilon \to 0$, se obtenga lo siguiente:

$$\tau^\mu{}_A \tau_\mu{}^B = \delta^B{}_A, \qquad \tau_\mu{}^A \tau^\nu{}_A + E_\mu{}^{A'} E^\nu{}_{A'} = \delta^\nu{}_\mu, \tag{4.42a}$$

$$E_\mu{}^{A'} E^\mu{}_{B'} = \delta^{A'}{}_{B'}, \qquad \tau^\mu{}_A E_\mu{}^{A'} = E^\mu{}_{A'} \tau_\mu{}^A = 0. \tag{4.42b}$$

La expansión de las componentes de $\hat{E}^{\mu}{}_{\hat{A}}$ que dan lugar a estas condiciones son:

$$\hat{E}^{\mu}{}_{A} = \tau^{\mu}{}_{A} - \epsilon\tau^{\mu}{}_{B}\left(m_{\nu}{}^{B} - C_{\nu}{}^{B}\right)\tau^{\nu}{}_{A}\,, \tag{4.43a}$$

$$\hat{E}^{\mu}{}_{A'} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}E^{\mu}{}_{A'} - \sqrt{\epsilon}\tau^{\mu}{}_{A}\left(m_{\nu}{}^{A} - C_{\nu}{}^{A}\right)E^{\nu}{}_{A'}\,. \tag{4.43b}$$

Las condiciones de invertibilidad (4.42) son precisamente las condiciones que dan lugar a las relaciones usuales que satisfacen las métrica de Newton-Cartan (2.86). La única diferencia es que para este caso cuerdero la relación $\tau_{\mu\nu}\tau^{\mu\nu} = 1$ se reemplaza por $\tau_{\mu\nu}\tau^{\mu\nu} = 2$. Esto resulta claro si se considera que, en vez de tener una métrica temporal y una espacial, se tiene una métrica longitudinal $\tau_{\mu\nu} = \tau_{\mu}{}^{A}\tau_{\nu}{}^{B}\eta_{AB}$ y una transversal $h_{\mu\nu} = E_{\mu}{}^{A'}E_{\nu}{}^{B'}\delta_{A'B'}$. La métrica longitudinal/transversal inversa se construye en términos del vielbein longitudinal/transversal inverso.

Otro ingrediente importante de la formulación vielbein de relatividad general es la conexión de espín $\hat{\Omega}_{\mu}{}^{\hat{A}\hat{B}}$, que tiene asociada un tensor de curvatura $\hat{R}_{\mu\nu}{}^{\hat{A}\hat{B}}$ con dependencia explicita de la conexión de espín dada por (2.52). Se introduce la siguiente expansión no explícita de las componentes de la conexión de espín:

$$\hat{\Omega}_{\mu}{}^{AB} = \left(\Omega_{\mu} + \epsilon n_{\nu}\right)\epsilon^{AB}, \quad \hat{\Omega}_{\mu}{}^{AA'} = \sqrt{\epsilon}\Omega_{\mu}{}^{AA'}, \quad \hat{\Omega}_{\mu}{}^{A'B'} = \Omega_{\mu}{}^{A'B'}, \tag{4.44}$$

así como una expansión similar de las componentes de su tensor de curvatura,

$$\hat{R}_{\mu\nu}{}^{AB} = R_{\mu\nu}(M)\epsilon^{AB}, \quad \hat{R}_{\mu\nu}{}^{AA'} = \sqrt{\epsilon}R_{\mu\nu}{}^{AA'}(G), \quad \hat{R}_{\mu\nu}{}^{A'B'} = R_{\mu\nu}{}^{A'B'}(J), \tag{4.45}$$

donde se ha introducido un campo de norma n_{μ} para parametrizar los términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon)$ en la expansión de $\hat{\Omega}_{\mu}{}^{AB}$. Este término se vuelve irrelevante en el límite $\epsilon \to 0$. Los tensores de curvatura $R_{\mu\nu}(M)$, $R_{\mu\nu}{}^{AA'}(G)$ y $R_{\mu\nu}{}^{A'B'}(J)$ están asociados con los generadores de rotación longitudinal M, de impulso $G_{AA'}$ y de rotación transversal $J_{A'B'}$, del álgebra galileana de cuerdas (4.21), respectivamente.

La conexión de espín no es un campo de norma independiente, de hecho, depende del vielbein de una manera tal que se cumpla la constricción de torsión cero (2.55). La expresión explicita de la conexión de espín en términos del vielbein y sus derivadas está dada por (2.57). Al aplicar la expansión del vielbein (4.40) y la expansión de la conexión de espín (4.44) sobre la constricción de torsión cero (2.55) se obtiene

$$R_{\mu\nu}{}^{A}(H) + \epsilon\left(R_{\mu\nu}{}^{A}(Z) - 2C_{\mu\nu}{}^{A}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{2}) = 0, \tag{4.46a}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{A'}(P) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \tag{4.46b}$$

donde

$$C_{\mu\nu}{}^{A} \equiv \partial_{[\mu}C_{\nu]}{}^{A} + \epsilon^{A}{}_{B}C_{[\mu}{}^{B}\Omega_{\nu]}. \tag{4.47}$$

Los tensores $R_{\mu\nu}{}^{A}(H)$, $R_{\mu\nu}{}^{A'}(P)$ y $R_{\mu\nu}{}^{A}(Z)$ en (4.46) están asociados a los generadores de translación longitudinal H_A, translación transversal $P_{A'}$ y al generador Z_A de la extensión del álgebra galileana de cuerdas (4.21), respectivamente. La expresión semi-explícita de estos tensores está dada por

$$R_{\mu\nu}{}^{A}(H) = 2\big(\partial_{[\mu}\tau_{\nu]}{}^{A} + \epsilon^{A}{}_{B}\tau_{[\mu}{}^{B}\Omega_{\nu]}\big), \tag{4.48a}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{A'}(P) = 2\big(\partial_{[\mu}E_{\nu]}{}^{A'} + E_{[\mu}{}^{B'}\Omega_{\nu]}{}^{A'}{}_{B'} - \tau_{[\mu}{}^{A}\Omega_{\nu]A}{}^{A'}\big), \tag{4.48b}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{A}(Z) = 2\big(\partial_{[\mu}m_{\nu]}{}^{A} + \epsilon^{A}{}_{B}m_{[\mu}{}^{B}\Omega_{\nu]} + \tau_{[\mu}{}^{B}n_{n]}\epsilon^{A}{}_{B} + E_{[\mu}{}^{A'}\Omega_{\nu]}{}^{A}{}_{A'}\big). \tag{4.48c}$$

Por otro lado, al aplicar la expansión del campo de norma auxiliar $\hat{M}_{\mu\nu}$ (4.40) sobre la constricción de curvatura cero, $\partial_{[\mu}\hat{M}_{\nu\rho]} = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= X_{[\mu}{}^{A}\partial_{\nu}X_{\rho]}{}^{B}\epsilon_{AB} \\
&= \epsilon_{AB}\left[\tau_{[\mu}{}^{A}\partial_{\nu}\tau_{\rho]}{}^{B} - \epsilon\left(\tau_{[\mu}{}^{A}\partial_{\nu}C_{\rho]}{}^{B} + C_{[\mu}{}^{A}\partial_{\nu}\tau_{\rho]}{}^{B}\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \tfrac{1}{2}\epsilon_{AB}\left\{\tau_{[\mu}{}^{A}R_{\nu\rho]}{}^{B}(H) - \epsilon\left[C_{[\mu}{}^{A}R_{\nu\rho]}{}^{B}(H) + 2\tau_{[\mu}{}^{A}C_{\nu\rho]}{}^{B}\right]\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Al despejar $R_{\mu\nu}{}^{A}(H)$ de (4.46), sustituirlo en (4.49) y tomar $\epsilon \to 0$, se obtiene

$$\epsilon_{AB}\tau_{[\mu}{}^{A}R_{\nu\rho]}{}^{B}(Z) = 0. \tag{4.50}$$

Al utilizar las propiedades del vielbein, de intercambiar índices planos y curvos a través del vielbein inverso, la constricción (4.50) se puede expresar como

$$R_{AA'}{}^{A}(Z) = R_{A'B'}{}^{A}(Z) = 0. \tag{4.51}$$

Al aplicar el límite $\epsilon \to 0$ en (4.46), también se obtiene

$$R_{\mu\nu}{}^{A}(H) = R_{\mu\nu}{}^{A'}(P) = 0. \tag{4.52}$$

Las constricciones (4.51) y (4.52) son las constricciones de torsión cero de la geometría de Newton-Cartan de cuerdas, independientes del campo de norma n_μ y las funciones arbitrarias $C_\mu{}^{A}$. Estas constricciones permiten resolver todas las componentes en la conexión de espín, Ω_μ, $\Omega_\mu{}^{A'B'}$ así como $\tilde{\Omega}_\mu{}^{AA'}$, con

$$\tilde{\Omega}_\mu{}^{AA'} \equiv \Omega_\mu{}^{AA'} - \tau_\mu{}^{B}W_{B}{}^{AA'}, \tag{4.53}$$

donde el término $W_{AB}{}^{A'}$ corresponde a las componentes de $\Omega_\mu{}^{AA'}$ que aparecen sin constricciones e independientes. Explícitamente, este término se ve como

$$W_{AB}{}^{A'} = R_{A'AB}(Z) - 2\left[m_{A'AB} - \tfrac{1}{2}\eta_{AB}m_{A'C}{}^{C}\right]. \tag{4.54}$$

En términos de los campos independientes ${\tau_\mu}^A$, ${E_\mu}^{A'}$, ${m_\mu}^A$ y ${W_{AB}}^{A'}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Omega_\mu &= \epsilon^{AB}\left(\tau_{\mu AB} - \tfrac{1}{2}{\tau_\mu}^C\tau_{ABC}\right), && (4.55a)\\
{\Omega_\mu}^{AA'} &= -2{E_\mu}^{[A'B']} + {E_\mu}^{C'}{E^{A'B'}}_{C'} + {\tau_\mu}^A {m^{A'B'}}_A, && (4.55b)\\
{\Omega_\mu}^{AA'} &= -{E_\mu}^{AA'} + E_{\mu B'}E^{AA'B'} + {m_\mu}^{A'A} + \tau_{\mu B}m^{AA'B} \\
&\quad + 2\tau_{\mu B}\left[m^{A'AB} - \tfrac{1}{2}\eta^{AB}{m^{A'C}}_C\right] + {\tau_\mu}^B {W_B}^{AA'}. && (4.55c)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, al sustituir la expansión (4.44) en la expresión explicita del tensor de curvatura de la conexión de espín (2.52), comparar con la expansión hecha en (4.45) y tomar el límite $\epsilon \to 0$, se obtiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu}(M) &= \partial_{[\mu}\Omega_{\nu]}, && (4.56a)\\
{R_{\mu\nu}}^{A'B'}(J) &= \partial_{[\mu}{\Omega_{\nu]}}^{A'B'} + {\Omega_{[\mu}}^{A'C'}{{\Omega_{\nu]}}^{B'}}_{C'}, && (4.56b)\\
{R_{\mu\nu}}^{AA'}(G) &= \partial_{[\mu}{\Omega_{\nu]}}^{AA'} + {\epsilon^A}_B{\Omega_{[\mu}}^{BA'}\Omega_{\nu]} + {\Omega_{[\mu}}^{AB'}{{\Omega_{\nu]}}^{A'}}_{B'}. && (4.56c)
\end{aligned}
$$

Al utilizar la expansión explícita (4.55), se puede reescribir la expansión (4.56) de manera explícita en términos de los campos independientes ${\tau_\mu}^A$, ${E_\mu}^{A'}$, ${m_\mu}^A$ y $W_{ABA'}$.

También es posible calcular el límite $\epsilon \to 0$ de la conexión de Levi-Civita ${\hat{\Gamma}^\rho}_{\mu\nu}$ (2.54) y el tensor de Riemann ${\hat{R}^\mu}_{\nu\rho\sigma}(\hat{\Gamma})$ (2.53). Se obtienen los siguientes resultados

$$
{\hat{\Gamma}^\rho}_{\mu\nu} = {\Gamma^\rho}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad {\hat{R}^\rho}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) = {R^\rho}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.57}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
{\Gamma^\rho}_{\mu\nu} \equiv {\tau^\rho}_A\left(\partial_\mu {\tau_\nu}^A - {\epsilon^A}_B\Omega_\mu{\tau_\nu}^B\right) &+ {E^\rho}_{A'}\left(\partial_\mu {E_\nu}^{A'} - {\Omega_\mu}^{A'B'}E_{\nu B'} + {\tilde{\Omega}_\mu}^{AA'}\tau_{\nu A}\right)\\
&+ {E^\rho}_{A'}{\tau_\mu}^A{\tau_\nu}^B{W_{AB}}^{A'},
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

y

$$
{R^\rho}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) = {E^\rho}_{A'}{\tau_\sigma}^A{R_{\mu\nu A}}^{A'}(G) - {\tau^\rho}_A{\tau_\sigma}^B{{R_{\mu\nu}}^A}_B(M) - {E^\rho}_{A'}{E_\sigma}^{B'}{{R_{\mu\nu}}^{A'}}_{B'}(J). \tag{4.59}
$$

Estos elementos describen la curvatura de la geometría de Newton-Cartan de cuerdas.

4.7. Modelo Sigma No Lineal de NRST

Hasta ahora, se ha revisado la dinámica de una cuerda no relativista que se propaga en un espaciotiempo plano. Para describir la dinámica de una cuerda no relativista que se propaga en un fondo de espaciotiempo curvo, se utilizan los estados no masivos de NRST. El espectro de masas de NRST permite estados no masivos ($w = 0$) con momento transverso $p_\perp = 0$ y niveles de oscilador $N_L = N_R = 0$. Esto significa que NRST contiene cierto tipo de gravitones, antisimetricones y dilatones. Estos campos corresponden a los campos independientes que definen la geometría de Newton-Cartan de cuerdas, $\tau_\mu{}^A$, $E_\mu{}^{A'}$, $m_\mu{}^A$, un campo antisimétrico $B_{\mu\nu}$ y un campo dilatónico Φ [29, 30, 31]. Al acoplar estos campos a la hoja de mundo se obtiene una teoría de cuerdas no relativistas que se propagan sobre una geometría de Newton-Cartan de cuerdas acoplada a un campo antisimétrico $B_{\mu\nu}$ y un campo dilatónico Φ.

Para obtener el modelo sigma no lineal de NRST a partir de un límite $\epsilon \to 0$ del modelo sigma no lineal estándar (3.57), se introduce la siguiente expansión:

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \hat{E}_\mu{}^{\hat{A}} \hat{E}_\nu{}^{\hat{B}} \eta_{\hat{A}\hat{B}}, \quad \hat{B}_{\mu\nu} = \hat{M}_{\mu\nu} + \epsilon B_{\mu\nu}, \quad \hat{\Phi} = \Phi + \ln \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, \tag{4.60}$$

donde los campos con gorro, $\hat{G}_{\mu\nu}$, $\hat{B}_{\mu\nu}$ y $\hat{\Phi}$, representan los campos de la teoría de cuerdas estándar y los campos sin gorro $B_{\mu\nu}$ y Φ representan los campos de la teoría de cuerdas no relativistas. La función $\hat{M}_{\mu\nu}$ es un campo antisimétrico auxiliar con la constricción de ser pura norma, $\partial_{[\mu} \hat{M}_{\nu\rho]} = 0$. La expansión explícita de $\hat{G}_{\mu\nu}$ y $\hat{M}_{\mu\nu}$ está en términos de los campos independientes que definen la geometría de Newton-Cartan de cuerdas, $\tau_\mu{}^A$, $E_\mu{}^{A'}$, $m_\mu{}^A$, de acuerdo a la expansión (4.40). La expansión (4.60) se puede interpretar como una generalización de la expansión para el caso plano (4.1). Por ejemplo, la expansión de $\hat{G}_{\mu\nu}$ se sigue de la definición del vielbein del espaciotiempo $\hat{E}_\mu{}^{\hat{A}}$ en (2.45). Además, en la expansión (4.40) se observa que el vielbein transversal escala como $E_\mu{}^{A'} \sim \sqrt{\epsilon}$, justo como la raíz cuadrada de las componentes transversales de la métrica en el caso plano, mientras que el vielbein longitudinal $\hat{E}_\mu{}^A$ se mantiene sin rescalamiento y solo se ajusta con el campo $m_\mu{}^A$ para asegurar la invariancia bajo impulsos de las transformaciones galileanas de cuerdas (4.21). La expansión de $\hat{B}_{\mu\nu}$ se puede considerar como una generalización covariante de la expansión del caso plano, donde $M_{01} = 1$ y $B_{01} = -\lambda$. La expansión de $\hat{\Phi}$ se ajusta con un término logarítmico divergente ya que para el caso plano la constante de acoplamiento diverge, $g_s \sim e^{\hat{\Phi}} = G_s/\sqrt{\epsilon}$, donde $G_s \equiv e^{\Phi}$, es decir, la expansión de $\hat{\Phi}$ es consecuencia de la expansión de g_s.

La expansión (4.60) se puede expresar explícitamente en términos de los campos de la geometría de Newton-Cartan cuerdas al considerar la expansión (4.40),

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + \epsilon H_{\mu\nu} - \epsilon \left(\tau_\mu{}^A C_\nu{}^B + \tau_\nu{}^A C_\mu{}^B \right) \eta_{AB} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{4.61a}$$

$$\hat{B}_{\mu\nu} = -\tau_\mu{}^A \tau_\nu{}^B \epsilon_{AB} + \epsilon B_{\mu\nu} + \epsilon \left(\tau_\mu{}^A C_\nu{}^B - \tau_\nu{}^A C_\mu{}^B \right) \epsilon_{AB} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{4.61b}$$

$$\hat{\Phi} = \Phi + \ln \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, \tag{4.61c}$$

donde

$$\tau_{\mu\nu} = \tau_\mu{}^A \tau_\nu{}^B \eta_{AB}, \quad H_{\mu\nu} = E_\mu{}^{A'} E_\nu{}^{B'} \delta_{A'B'} + \left(\tau_\mu{}^A m_\nu{}^B + \tau_\nu{}^A m_\mu{}^B\right) \eta_{AB}. \quad (4.62a)$$

Los campos $\tau_{\mu\nu}$ y $H_{\mu\nu}$ son invariantes bajo impulsos de las transformaciones galileanas de cuerdas (4.21).

Antes de sustituir la expansión explicita (4.61) en la acción del modelo sigma no lineal estándar (3.57) y tomar el límite $\epsilon \to 0$, resulta conveniente reescribir esta acción estándar S de una forma general. Para hacer esto, se considera que la integral de trayectoria correspondiente a esta acción se puede ver como

$$Z = \int \mathcal{D}X^\mu \sqrt{-\hat{G}} e^{-S} = \int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_{\mathrm{G}}}, \tag{4.63}$$

donde $\mathcal{D}$ es la medida de integración, suma sobre todas las configuraciones del campo posibles, $\hat{G} = \det \hat{G}_{\mu\nu}$, y S_G es una acción efectiva,

$$S_G = S - \frac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} R^{(2)} \ln \sqrt{-\hat{G}}, \tag{4.64}$$

con $R^{(2)}$ el tensor de Ricci de la hora de mundo $h_{\alpha\beta}$ y $h = \det h_{\alpha\beta}$. Por otro lado, por definición, el vielbein de la hoja de mundo $e_\alpha{}^a$ es tal que

$$h_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \eta_{ab}. \tag{4.65}$$

Al introducir las siguientes coordenadas del cono de luz,

$$e_\alpha = e_\alpha{}^0 + e_\alpha{}^1, \quad \overline{e}_\alpha = -e_\alpha{}^0 + e_\alpha{}^1, \tag{4.66}$$

y definir

$$\nabla = \frac{1}{\sqrt{-h}} \epsilon^{\alpha\beta} \overline{e}_\alpha \nabla_\beta, \quad \overline{\nabla} = \frac{1}{\sqrt{-h}} \epsilon^{\alpha\beta} e_\alpha \nabla_\beta, \tag{4.67}$$

donde ∇_α es la derivada covariante definida con respecto a $h_{\alpha\beta}$, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
-h \nabla X^\mu \overline{\nabla} X^\nu &= \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\delta} \overline{e}_\alpha e_\gamma \nabla_\beta X^\mu \nabla_\delta X^\nu \\
&= \left(-e_0{}^0 e_0{}^0 - e_0{}^1 e_0{}^1\right) \nabla_1 X^\mu \nabla_1 X^\nu \\
&\quad + \left(-e_1{}^0 e_1{}^0 - e_1{}^1 e_1{}^1\right) \nabla_0 X^\mu \nabla_0 X^\nu \\
&\quad - \left(-e_0{}^0 e_1{}^0 - e_0{}^0 e_1{}^1 + e_0{}^1 e_1{}^0 + e_0{}^1 e_1{}^1\right) \nabla_1 X^\mu \nabla_0 X^\nu \\
&\quad - \left(-e_1{}^0 e_0{}^0 - e_1{}^0 e_0{}^1 + e_1{}^1 e_0{}^0 + e_1{}^1 e_0{}^1\right) \nabla_0 X^\mu \nabla_1 X^\nu.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Los dos últimos términos de (4.68) se suman o restan cuando se aplican sobre tensores simétricos $\hat{G}_{\mu\nu}$ o antisimétricos $\hat{B}_{\mu\nu}$, respectivamente. También resulta útil desarrollar el determinante de la métrica de la hoja de mundo,

$$\begin{aligned} h &= \det e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \eta_{ab} \\ &= -\left(e_0{}^0 e_1{}^1 - e_0{}^1 e_1{}^0\right)^2 . \end{aligned} \tag{4.69}$$

Para matrices invertibles $h_{\alpha\beta}$ se cumple que

$$h^{-1} = \det h^{\alpha\beta} = -\left(e^0{}_0 e^1{}_1 - e^0{}_1 e^1{}_0\right)^2 . \tag{4.70}$$

De estas expresiones para h y h^{-1} y de las condiciones de invertibilidad para el vielbein en (2.44), se sigue que

$$\nabla X^\mu \overline{\nabla} X^\nu \hat{G}_{\mu\nu} = h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha X^\mu \nabla_\beta X^\nu \hat{G}_{\mu\nu}, \tag{4.71}$$

y

$$\sqrt{-h} \nabla X^\mu \overline{\nabla} X^\nu \hat{B}_{\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\beta} \nabla_\alpha X^\mu \nabla_\beta X^\nu \hat{B}_{\mu\nu}. \tag{4.72}$$

Estas definiciones permiten reescribir la acción (4.64) como

$$\begin{aligned} S_G = -\frac{1}{4\pi l_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \Bigg\{ & \nabla X^\mu \overline{\nabla} X^\nu \left(\hat{G}_{\mu\nu} - \hat{B}_{\mu\nu}\right) \\ & + l_s^2 R^{(2)} \left[\hat{\Phi} - \frac{1}{4} \ln\left(-\hat{G}\right)\right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Al introducir las coordenadas del cono de luz para $\tau_\mu{}^A$ y $C_\mu{}^A$,

$$\tau_\mu = \tau_\mu{}^0 + \tau_\mu{}^1, \quad \overline{\tau}_\mu = -\tau_\mu{}^0 + \tau_\mu{}^1 \quad C_\mu = C_\mu{}^0 + C_\mu{}^1, \quad \overline{C}_\mu = -C_\mu{}^0 + C_\mu{}^1, \tag{4.74}$$

y, en analogía al límite del caso plano (4.1), considerar un rescalamiento de la longitud de la cuerda como $l_s = L_s\sqrt{\epsilon}$, la acción (4.73) se puede expresar en términos de los campos de la geometría de Newton-Cartan de cuerdas, de acuerdo a (4.61), como

$$\begin{aligned} S_G = &-\frac{1}{4\pi L_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \Bigg\{ \nabla X^\mu \overline{\nabla} X^\nu \left(H_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}\right) \\ &\qquad + L_s^2 R^{(2)} \left[\Phi - \frac{1}{4} \ln\left(-\epsilon^2 \hat{G}\right)\right] \Bigg\} \\ &- \frac{\epsilon^{-1}}{4\pi L_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left\{ \nabla X^\mu \overline{\nabla} X^\nu \left[\overline{\tau}_\mu \tau_\nu - \epsilon\left(\overline{\tau}_\mu C_\nu + \tau_\nu \overline{C}_\mu\right)\right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \tag{4.75}$$

Para tratar con la divergencia en el término $\overline{\tau}_\mu \tau_\nu$, se introducen dos multiplicadores de Lagrange β y $\tilde{\beta}$. En términos de estos multiplicadores, la acción (4.75) se ve como

$$\begin{aligned} S_G = & -\frac{1}{4\pi L_s^2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\Big\{\nabla X^\mu \overline{\nabla} X^\nu \left(H_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}\right) \\ & \qquad + L_s^2 R^{(2)}\left[\Phi - \frac{1}{4}\ln\left(-\epsilon^2 \hat{G}\right)\right]\Big\} \\ & -\frac{1}{4\pi L_s^2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\left\{\left[\beta\overline{\nabla} X^\mu \tau_\mu + \tilde{\beta}\nabla X^\mu \overline{\tau}_\mu\right]\right\} \\ & -\frac{\epsilon}{4\pi L_s^2}\int d^2\sigma\left[\left(\beta\tilde{\beta} - \beta\overline{\nabla} X^\mu C_\mu - \tilde{\beta}\nabla X^\mu \overline{C}_\mu\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.76}$$

En el límite $\epsilon \to 0$ se obtiene la siguiente acción finita:

$$\begin{aligned} S_G = & -\frac{1}{4\pi L_s^2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\Bigg\{\nabla X^\mu \overline{\nabla} X^\nu \big(H_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}\big) \\ & + \beta\overline{\nabla} X^\mu \tau_\mu + \tilde{\beta}\nabla X^\mu \overline{\tau}_\mu - L_s^2 R^{(2)}\left(\Phi - \frac{1}{4}\ln G\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.77}$$

donde

$$G \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^2 \hat{G} = \det\left(H_{\mu\nu}\right)\det\left(\tau_\rho{}^A H^{\rho\sigma}\tau_\sigma{}^B\right). \tag{4.78}$$

$H^{\mu\nu}$ es la inversa de $H_{\mu\nu}$. La acción finita (4.77) se identifica como la acción del modelo sigma de NRST en espaciotiempo curvo con torsión cero. La expresión más general de (4.77) contiene un término adicional de deformación torsional $\beta\tilde{\beta}$, ver [45, 36],

$$S_{\beta\tilde{\beta}} = -\frac{1}{4\pi L_s^2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\beta\tilde{\beta}U(X),$$

donde $U(X)$ es una función del espaciotiempo que controla el acoplamiento de $\beta\tilde{\beta}$. Al añadir este término en la acción (4.77), revertir la expansión de la longitud de la cuerda, $L_s^2 = \epsilon^{-1} l_s^2 = U^{-1} l_s^2$, e integrar sobre β y $\tilde{\beta}$ se recupera la acción del modelo sigma no lineal estándar (4.73), donde se encuentra que

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + U H_{\mu\nu}, \quad \hat{B}_{\mu\nu} = -\tau_\mu{}^A \tau_\nu{}^B \epsilon_{AB} + U B_{\mu\nu}, \quad \hat{\Phi} = \Phi - \frac{1}{2}\ln|U|. \tag{4.79}$$

En el límite plano, la acción (4.77) se reduce a (4.32):

$$\tau_\mu{}^A \to \delta_\mu^A, \quad E_\mu{}^{A'} \to \delta_\mu^{A'}, \quad B_{\mu\nu} \to 0, \quad \Phi \to 0, \quad m_\mu{}^A \to 0, \quad G = 1. \tag{4.80}$$

4.8. Ecuaciones de Movimiento de NRST

Los objetos que describen cómo los acoplamientos dependen de una escala μ son las funcionales beta de la teoría. Esquemáticamente tienen la siguiente forma:

$$\beta_{\mu\nu}(\hat{G}) \sim \mu \frac{\partial \hat{G}_{\mu\nu}(X;\mu)}{\partial \mu}. \tag{4.81}$$

Con esto en mente, es posible expresar las funcionales beta estándar (3.60) en términos de las funcionales beta de NRST a través de la expansión (4.61), es decir,

$$\begin{aligned}
\beta_{\mu\nu}(\hat{G}) = &\left[\tau_\mu{}^A \beta_\nu{}^B(\tau) + \beta_\mu{}^A(\tau)\tau_\nu{}^B\right]\eta_{AB} \\
&+ \epsilon\beta_{\mu\nu}(H) - \epsilon\left[\beta_\mu{}^A(\tau)C_\nu{}^B + \beta_\nu{}^A(\tau)C_\mu{}^B\right]\eta_{AB} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \qquad (4.82a)\\
\beta_{\mu\nu}(\hat{B}) = &-\left[\tau_\mu{}^A \beta_\nu{}^B(\tau) + \beta_\mu{}^A(\tau)\tau_\nu{}^B\right]\epsilon_{AB} \\
&- \epsilon\beta_{\mu\nu}(B) + \epsilon\left[\beta_\mu{}^A(\tau)C_\nu{}^B + \beta_\nu{}^A(\tau)C_\mu{}^B\right]\epsilon_{AB} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \qquad (4.82b)\\
\beta(\hat{F}) = &\,\epsilon\beta(F) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \hat{F} \equiv \hat{\Phi} - \frac{1}{4}\ln\Big(-\hat{G}\Big), \quad F \equiv \Phi - \frac{1}{4}\ln G, \qquad (4.82c)
\end{aligned}$$

donde $\beta_\mu{}^A(\tau)$, $\beta_{\mu\nu}(H)$, $\beta_{\mu\nu}(B)$ y $\beta(F)$ son las funcionales beta de NRST [31].

Las funcionales beta estándar (3.60) son a un lazo, esto significa que son de orden $\mathcal{O}(\alpha' = l_s^2 \sim \epsilon)$. Es decir, al dividir ambos lados de (4.82) por ϵ, existen divergencias de orden $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ en los primeros dos términos del lado derecho de (4.82a) y (4.82b). Para remover estas divergencias se multiplican ambos lados de estas expresiones por los campos inversos $\tau^\mu{}_A$, $E^\mu{}_{A'}$ y ciertas combinaciones de los mismos y se utilizan las condiciones de ortogonalidad (4.42). Las expresiones con las que estas divergencias se remueven son las siguientes:

$$\begin{aligned}
E^\mu{}_{A'}E^\nu{}_{B'}\beta_{\mu\nu}(H) &= L_s^2 P_{A'B'} + \mathcal{O}(\epsilon), &(4.83a)\\
E^\mu{}_{A'}E^\nu{}_{B'}\beta_{\mu\nu}(B) &= L_s^2 Q_{A'B'} + \mathcal{O}(\epsilon), &(4.83b)\\
\tau^\mu{}_A\tau^\nu{}_B\left[\eta^{AB}\beta_{\mu\nu}(H) - \epsilon^{AB}\beta_{\mu\nu}(B)\right] &= L_s^2\left(\eta^{AB}P_{AB} - \epsilon^{AB}Q_{AB}\right) + \mathcal{O}(\epsilon), &(4.83c)\\
\tau^\mu{}_B E^\nu{}_{A'}\left(\delta^B_A\beta_{\mu\nu}(H) + \epsilon_A{}^B\beta_{\mu\nu}(B)\right) &= L_s^2\left(P_{AA'} + \epsilon_A{}^B Q_{BA'}\right) + \mathcal{O}(\epsilon), &(4.83d)
\end{aligned}$$

donde

$$P_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{4}H_{\mu A'B'}H_\nu{}^{A'B'}, \tag{4.84}$$

$$Q_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}\nabla^{A'}H_{A'\mu\nu} + \nabla^{A'}\Phi H_{A'\mu\nu}. \tag{4.85}$$

Las variables ∇_μ y $R_{\mu\nu}$ están definidas con respecto a los elementos de la geometría de Newton-Cartan de cuerdas, $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ en (4.58) y $R^\rho{}_{\mu\nu\sigma}$ en (4.59). De (4.58) se sigue que $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}E^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu H_{\sigma\nu} + \partial_\nu H_{\sigma\mu} - \partial_\sigma H_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}N^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu \tau_{\sigma\nu} + \partial_\nu \tau_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \tau_{\mu\nu}\right) \\ + E^{\rho A'}\tau_\mu{}^A\tau_\nu{}^B\left(W_{ABA'} + 2m_{A'(AB)} - \eta_{AB}m_{A'C}{}^C\right), \qquad (4.86)\end{aligned}$$

donde

$$E^{\rho\sigma} \equiv E^{\rho}{}_{A'}E^{\sigma A'}, \quad N^{\rho\sigma} \equiv \tau^{\rho}{}_A\tau^{\sigma A} - 2E^{(\rho}{}_{A'}\tau^{\sigma)}{}_A m_\lambda{}^A E^{\lambda A'}. \qquad (4.87)$$

$E^{\rho\sigma}$ y $N^{\rho\sigma}$ son invariantes bajo transformaciones de impulso galileanos de cuerdas. También se introduce la intensidad del campo de norma $B_{\mu\nu}$ de manera habitual, $H_{\mu\nu\sigma} = \nabla_{[\mu}B_{\nu\sigma]}$. Para el caso de $\beta(F)$ se encuentra que:

$$\beta(F) = \nabla_{A'}\nabla^{A'}\Phi + \frac{1}{4}R_{A'}{}^{A'} - \nabla^{A'}\Phi\nabla_{A'}\Phi - \frac{1}{48}H_{A'B'C'}H^{A'B'C'}. \qquad (4.88)$$

Al exigir la invariancia de Weyl sobre las funcionales beta de NRST en (4.83), se obtienen las ecuaciones de movimiento de NRST en una geometría de Newton-Cartan de cuerdas acoplada a un campo antisimétrico $B_{\mu\nu}$ y un campo dilatónico Φ,

$$\begin{aligned} P_{A'B'} = Q_{A'B'} = \eta^{AB}P_{AB} - \epsilon^{AB}Q_{AB} = P_{AA'} + \epsilon_A{}^B Q_{BA'} &= 0, \qquad (4.89a)\\ \nabla_{A'}\nabla^{A'}\Phi + \frac{1}{4}R_{A'}{}^{A'} - \nabla^{A'}\Phi\nabla_{A'}\Phi - \frac{1}{48}H_{A'B'C'}H^{A'B'C'} &= 0. \qquad (4.89b)\end{aligned}$$

4.9. Solución Tipo Dabholkar-Harvey

Al aplicar el límite de NRST (4.1) sobre la solución de Dabholkar-Harvey (3.69), donde r escala como $r = u\sqrt{\epsilon}$, se encuentra que la función armónica se reduce a

$$h = 1 + \frac{R^6_{\mathrm{DGK}}}{u^6}\frac{1}{\epsilon} \approx \frac{R^6_{\mathrm{DGK}}}{u^6}\frac{1}{\epsilon}, \quad \text{donde} \quad R^6_{\mathrm{DGK}} = 32\pi^2 N G_s^2 L_s^6. \qquad (4.90)$$

Con esto en mente, la solución de Dabholkar-Harvey (3.69) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= \epsilon\left[\frac{u^6}{R^6_{\mathrm{DGK}}}\left(-dX_0^2 + dX_1^2\right) + du^2 + u^2 d\Omega_7^2\right], \qquad (4.91a)\\ \hat{\Phi} &= \frac{1}{2}\ln\left(G_s^2\frac{u^6}{R^6_{\mathrm{DGK}}}\right), \qquad (4.91b)\\ \hat{B}_{01} &= -\epsilon\frac{u^6}{R^6_{\mathrm{DGK}}}. \qquad (4.91c)\end{aligned}$$

Este resultado indica que la estructura de los campos en (4.91) es diferente a la estructura de los mismos campos en (4.61), ya que no se tienen todos los términos del mismo orden en ϵ, y por lo tanto, no se trata de una solución a las ecuaciones de movimiento no relativistas (4.89). De hecho, si se asume que el término $\tau_{\mu\nu}$ de $\hat{G}_{\mu\nu}$ en (4.61) es cero, para anular el orden ϵ^0, se encuentra un vielbein ${\tau_\mu}^A$ degenerado.

En principio, la expresión (4.91) no pareciera ser solución de algunas ecuaciones de movimiento. Sin embargo, tomando en cuenta que el factor global de ϵ en $\hat{G}_{\mu\nu}$ y $\hat{B}_{\mu\nu}$ simplemente implementa el reemplazo $l_s^2 = L_s^2$, nuestro fondo equivale a

$$ds^2 = \frac{u^6}{R_{\rm DGK}^6}\left(-dX_0^2 + dX_1^2\right) + du^2 + u^2 d\Omega_7^2, \tag{4.92a}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\ln\left(G_s^2 \frac{u^6}{R_{\rm DGK}^6}\right), \tag{4.92b}$$

$$B_{01} = -\frac{u^6}{R_{\rm DGK}^6}. \tag{4.92c}$$

E interesantemente, al calcular los términos de las funcionales beta estándar asociados a (4.92), se encuentra que esta expresión es solución de las ecuaciones de movimiento estándar (relativistas). Los cálculos son los siguientes; Para $\beta(\Phi)$ se encuentra que:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = \frac{36}{u^2}, \tag{4.93a}$$

$$R = -\frac{126}{u^2}, \tag{4.93b}$$

$$\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi = \frac{9}{u^2}, \tag{4.93c}$$

$$H_{\mu\nu\sigma} H^{\mu\nu\sigma} = -\frac{216}{u^2}. \tag{4.93d}$$

Para $\beta_{\mu\nu}(B)$ se encuentran que:

$$\nabla^\sigma H_{\sigma 01} = -\frac{36u^4}{R_{\rm DGK}^6} = -\nabla^\sigma H_{\sigma 10}, \tag{4.94a}$$

$$\nabla^\sigma \Phi H_{\sigma 01} = -\frac{18u^4}{R_{\rm DGK}^6} = -\nabla^\sigma \Phi H_{\sigma 10}. \tag{4.94b}$$

Para $\beta_{\mu\nu}(G)$ se encuentran que:

$$H_{0\sigma\rho}H_0{}^{\sigma\rho} = \frac{72u^4}{R^6_{\mathrm{DGK}}}, \tag{4.95a}$$

$$H_{1\sigma\rho}H_1{}^{\sigma\rho} = -\frac{72u^4}{R^6_{\mathrm{DGK}}}, \tag{4.95b}$$

$$H_{2\sigma\rho}H_2{}^{\sigma\rho} = -\frac{72}{u^2}. \tag{4.95c}$$

$$R_{00} = \frac{36u^4}{R^6_{\mathrm{DGK}}} \tag{4.96a}$$

$$R_{11} = -\frac{36u^4}{R^6_{\mathrm{DGK}}} \tag{4.96b}$$

$$R_{22} = -\frac{12}{u^2} \tag{4.96c}$$

$$R_{33} = -6 \tag{4.96d}$$

$$R_{44} = -6\sin^2\theta_1 \tag{4.96e}$$

$$R_{55} = -6\prod_{a=1}^{2}\sin^2\theta_a \tag{4.96f}$$

$$R_{66} = -6\prod_{a=1}^{3}\sin^2\theta_a \tag{4.96g}$$

$$R_{77} = -6\prod_{a=1}^{4}\sin^2\theta_a \tag{4.96h}$$

$$R_{88} = -6\prod_{a=1}^{5}\sin^2\theta_a \tag{4.96i}$$

$$R_{99} = -6\prod_{a=1}^{6}\sin^2\theta_a \tag{4.96j}$$

$$\tag{4.96k}$$

$$\nabla_0\nabla_0\Phi = -\frac{9u^4}{R_{\text{DGK}}^6} \tag{4.97a}$$

$$\nabla_1\nabla_1\Phi = \frac{9u^4}{R_{\text{DGK}}^6} \tag{4.97b}$$

$$\nabla_2\nabla_2\Phi = -\frac{3}{u^2} \tag{4.97c}$$

$$\nabla_3\nabla_3\Phi = 3 \tag{4.97d}$$

$$\nabla_4\nabla_4\Phi = 3\sin^2\theta_1 \tag{4.97e}$$

$$\nabla_5\nabla_5\Phi = 3\prod_{a=1}^{2}\sin^2\theta_a \tag{4.97f}$$

$$\nabla_6\nabla_6\Phi = 3\prod_{a=1}^{3}\sin^2\theta_a \tag{4.97g}$$

$$\nabla_7\nabla_7\Phi = 3\prod_{a=1}^{4}\sin^2\theta_a \tag{4.97h}$$

$$\nabla_8\nabla_8\Phi = 3\prod_{a=1}^{5}\sin^2\theta_a \tag{4.97i}$$

$$\nabla_9\nabla_9\Phi = 3\prod_{a=1}^{6}\sin^2\theta_a \tag{4.97j}$$

Con estos cálculos, es fácil ver que la expresión (4.92) satisface la ecuación (3.62).

También resulta interesante analizar el límite asintótico $u \to \infty$ de la expresión (4.91). Para esto, se realiza el siguiente cambio de variable: $u = \epsilon^{-1/6}R_{DGK}$, y se utilizan coordenadas cartesianas para los términos transversales. Con esto en mente, la expresión (4.91) se reduce a

$$d\hat{s}^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + \epsilon\,(dX_2 + \cdots + dX_9) \tag{4.98a}$$

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2}\ln G_s + \ln\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, \tag{4.98b}$$

$$\hat{B}_{01} = 0. \tag{4.98c}$$

Al comparar este resultado con las expansiones (4.61) y (4.40), se encuentra que

$$\tau_\mu{}^A = \delta_\mu^A, \quad E_\mu{}^{A'} = \delta_\mu^{A'}, \quad B_{\mu\nu} = 0, \quad \Phi = \frac{1}{2}\ln G_s. \tag{4.99}$$

Además, se puede tomar ${m_\mu}^A = 0$ y entonces $G = 1$. Esto indica que la expresión (4.91) es asintóticamente plana no relativista y solo en este límite asintótico $u \to \infty$ se satisfacen las ecuaciones de movimiento no relativistas (4.89).

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo estudiamos la teoría de cuerdas no relativistas y la relación que existe con la geometría de Newton-Cartan de cuerdas. Verificamos que tanto la acción de la hoja de mundo como el espectro de masas de la teoría de cuerdas no relativistas en espaciotiempo plano se pueden derivar a partir de un límite de bajas energías de las propiedades análogas de la teoría de cuerdas estándar. Posteriormente, derivamos algunas propiedades de la geometría de Newton-Cartan de cuerdas al aplicar un límite no relativista sobre la geometría riemanniana de relatividad general en el formalismo vielbein. Después, presentamos una expansión de la métrica del espaciotiempo, el campo antisimétrico y el campo dilatónico en términos de los campos que definen la geometría de Newton-Cartan de cuerdas y aplicamos un límite de bajas energías para derivar la acción del modelo sigma no lineal y las ecuaciones de movimiento del espaciotiempo a partir de las propiedades análogas de la teoría estándar.

Hasta este punto, todo parecía indicar que era posible derivar cualquier propiedad de la teoría de cuerdas no relativistas a partir de un límite de bajas energías de la propiedad análoga de la teoría de cuerdas estándar. Sin embargo, cuando decidimos analizar la solución de Dabholkar-Harvey encontramos algunos detalles. Después de aplicar el límite de bajas energías sobre la solución de Dabholkar-Harvey encontramos que los campos resultantes no tienen la misma estructura que la expansión de estos mismos campos en términos de los campos de la geometría de Newton-Cartan de cuerdas, que previamente se había utilizado para derivar la acción del modelo sigma no lineal y las ecuaciones de movimiento del espaciotiempo de la teoría de cuerdas no relativistas. Es decir, el límite de bajas energías del fondo de Dabholkar-Harvey no es solución de las ecuaciones no relativistas previamente derivadas.

Después de esta conclusión, decidimos investigar más acerca de las ecuaciones de movimiento que este resultado debía satisfacer. Para esto, consultamos algunos artículos recientes donde notamos que la expresión más general de la acción del modelo sigma no lineal de la teoría de cuerdas enrolladas contiene un término de deformación torsional que desaparece en el límite de bajas energías. Sin embargo, al añadir este término a la acción e integrar sobre los multiplicadores de Lagrange se puede recuperar la acción del modelo sigma no lineal estándar. Esta observación nos dio la pauta de analizar el resultado con las ecuaciones de movimiento estándar, y el resultado fue que el límite de bajas energías de Dabholkar-Harvey sigue siendo solución de las ecuaciones de movimiento de la teoría estándar.

Finalmente, decidimos estudiar el límite asintótico de la coordenada radial del resultado que se obtuvo al aplicar el límite de bajas energías sobre la solución de Dabholkar-Harvey. Notablemente, en este límite, este resultado da lugar a un fondo de espaciotiempo plano de NRST, donde la métrica se puede descomponer en un vielbein longitudinal y uno transversal, el campo dilatónico es constante y el campo antisimétrico es cero. Evidentemente, este fondo no relativista satisface las ecuaciones de movimiento de NRST. Este resultado indica que el límite de bajas energías de Dabholkar-Harvey es asintóticamente no relativista plano y fuera de ahí se comporta como una solución relativista estándar.

Este resultado deja abierta una puerta para investigar más sobre este tipo de soluciones donde asintóticamente el espaciotiempo en la frontera se comporta como un ente no relativista, mientras que en el interior se comporta como un ente relativista. Sin duda, existen muchas otras soluciones que podrían ser analizadas de una manera similar, además de posibles aplicaciones de la correspondencia AdS/CFT con sistemas no relativistas.

Bibliografía

[1] G. Dautcourt, *On the Newtonian limit of General Relativity*, *Acta Phys. Pol. B* **21** (1990) 755.

[2] R. Andringa, *Newton-Cartan gravity revisited*, Ph.D. thesis, High-Energy Frontier, Groningen U., Groningen U., 2016.

[3] J. Taylor, *Classical Mechanics*, University Science Books (2005).

[4] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).

[5] R.M. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press, Chicago, USA (1984).

[6] B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1985).

[7] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory. Vol. 1: Introduction*, Cambridge University Press (1987).

[8] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology*, Cambridge University Press (1987).

[9] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press (1998).

[10] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring Theory and Beyond*, Cambridge University Press (1998).

[11] Y. Nambu, *Lectures on the Copenhagen Summer Symposium*, *Unpublished.* (1970) .

[12] A.M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, *Phys. Lett. B* **103** (1981) 207.

[13] E. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Effective Field Theory from Quantized Strings*, *Phys. Lett. B* **158** (1985) 316.

[14] E. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Quantum String Theory Effective Action*, *Nucl. Phys. B* **261** (1985) 1.

[15] C.G. Callan, Jr., E.J. Martinec, M.J. Perry and D. Friedan, *Strings in Background Fields*, *Nucl. Phys.* **B262** (1985) 593.

[16] J. Callan, Curtis G. and L. Thorlacius, *Sigma Models and String Theorys*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Particles, Strings and Supernovae (TASI 88)*, pp. 795–878, 3, 1989.

[17] M. Dine and N. Seiberg, *Couplings and Scales in Superstring Models*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 366.

[18] M.B. Green and J.H. Schwarz, *Supersymmetrical Dual String Theory*, *Nucl. Phys. B* **181** (1981) 502.

[19] M.B. Green and J.H. Schwarz, *Supersymmetrical String Theories*, *Phys. Lett. B* **109** (1982) 444.

[20] A. Dabholkar and J.A. Harvey, *Nonrenormalization of the Superstring Tension*, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 478.

[21] A. Dabholkar, G.W. Gibbons, J.A. Harvey and F. Ruiz Ruiz, *Superstrings and Solitons*, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 33.

[22] U.H. Danielsson, A. Guijosa and M. Kruczenski, *IIA/B, wound and wrapped*, *JHEP* **10** (2000) 020 [`hep-th/0009182`].

[23] J. Gomis and H. Ooguri, *Nonrelativistic closed string theory*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 3127 [`hep-th/0009181`].

[24] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, *Strings in background electric field, space / time noncommutativity and a new noncritical string theory*, *JHEP* **06** (2000) 021 [`hep-th/0005040`].

[25] R. Gopakumar, J.M. Maldacena, S. Minwalla and A. Strominger, *S duality and noncommutative gauge theory*, *JHEP* **06** (2000) 036 [`hep-th/0005048`].

[26] R. Gopakumar, S. Minwalla, N. Seiberg and A. Strominger, *(OM) theory in diverse dimensions*, *JHEP* **08** (2000) 008 [`hep-th/0006062`].

[27] I.R. Klebanov and J.M. Maldacena, *(1+1)-dimensional NCOS and its U(N) gauge theory dual*, *Int. J. Mod. Phys.* **A16** (2001) 922 [`hep-th/0006085`].

[28] U.H. Danielsson, A. Guijosa and M. Kruczenski, *Newtonian gravitons and d-brane collective coordinates in wound string theory*, *JHEP* **03** (2001) 041 [hep-th/0012183].

[29] E. Bergshoeff, J. Gomis and Z. Yan, *Nonrelativistic String Theory and T-Duality*, *JHEP* **11** (2018) 133 [1806.06071].

[30] J. Gomis, J. Oh and Z. Yan, *Nonrelativistic String Theory in Background Fields*, *JHEP* **10** (2019) 101 [1905.07315].

[31] E.A. Bergshoeff, J. Gomis, J. Rosseel, C. Şimşek and Z. Yan, *String Theory and String Newton-Cartan Geometry*, *J. Phys.* **A53** (2020) 014001 [1907.10668].

[32] J. Gomis, J. Gomis and K. Kamimura, *Non-relativistic superstrings: A New soluble sector of AdS(5) x S**5*, *JHEP* **12** (2005) 024 [hep-th/0507036].

[33] J. Brugues, T. Curtright, J. Gomis and L. Mezincescu, *Non-relativistic strings and branes as non-linear realizations of Galilei groups*, *Phys. Lett. B* **594** (2004) 227 [hep-th/0404175].

[34] J. Brugues, J. Gomis and K. Kamimura, *Newton-Hooke algebras, non-relativistic branes and generalized pp-wave metrics*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 085011 [hep-th/0603023].

[35] R. Andringa, E. Bergshoeff, J. Gomis and M. de Roo, *'Stringy' Newton-Cartan Gravity*, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 235020 [1206.5176].

[36] Z. Yan and M. Yu, *Background Field Method for Nonlinear Sigma Models in Nonrelativistic String Theory*, *JHEP* **03** (2020) 181 [1912.03181].

[37] E.A. Bergshoeff, J. Lahnsteiner, L. Romano and C. Simsek, *Non-relativistic String theory*, *PoS* **CORFU2019** (2020) 146.

[38] E. Bergshoeff, J. Rosseel and T. Zojer, *Newton–Cartan (super)gravity as a non-relativistic limit*, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 205003 [1505.02095].

[39] J. Garcia, A. Guijosa and J. Vergara, *A Membrane action for OM theory*, *Nucl. Phys. B* **630** (2002) 178 [hep-th/0201140].

[40] J. Garcia, A. Guijosa and J. Vergara, *M, membranes, and OM*, *AIP Conf. Proc.* **670** (2003) 256 [hep-th/0301223].

[41] V. Bargmann, *On Unitary ray representations of continuous groups*, *Annals Math.* **59** (1954) 1.

[42] R. Andringa, E. Bergshoeff, S. Panda and M. de Roo, *Newtonian Gravity and the Bargmann Algebra*, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 105011 [1011.1145].

[43] R. Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction*, *Phys. Rev.* **101** (1956) 1597.

[44] T.W.B. Kibble, *Lorentz invariance and the gravitational field*, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 212.

[45] G. Oling and Z. Yan, *Aspects of Nonrelativistic Strings*, *Front. in Phys.* **10** (2022) 832271 [2202.12698].