



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Evaluación de las aberraciones del sistema óptico de un
modelo de ojo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICA

PRESENTA:

Ana Elizabeth Hernández Guerrero

TUTOR

Dr. Manuel Campos García

Cd. Mx. 2024





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedico esta tesis mi padre,
por ser mi mayor apoyo en todo sentido y
por darme un gran ejemplo de determinación y perseverancia.*

Agradecimientos

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, Universidad Nacional, Autónoma de México (DGAPA-UNAM) bajo los proyectos Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) No: TA100521 y IT103623, y el Laboratorio Nacional de Óptica de la Visión (Lanov CONACyT) No. 293411.

Al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT) por el apoyo *Beca de titulación 2022*.

Agradezco a mi tutor, Manuel Campos García, por su apoyo y las oportunidades brindadas a lo largo de este proceso.

Agradecimientos	3
	4
Introducción	1
1. El ojo humano	1
2. Modelos de ojo	5
Capítulo 1. Medición de aberraciones	8
1. Frente de onda	8
2. Aberraciones ópticas	9
3. Métodos oftálmicos	11
Capítulo 2. Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI)	20
1. Obtención e interpretación	21
2. Solución analítica	22
3. Soluciones numéricas	26
Capítulo 3. Simulaciones	31
1. Frente de onda aberrado	32
2. Frente de onda esférico	37
3. Frente de onda plano	42
4. Resumen de métodos.	47
5. Consideraciones adicionales	47
Conclusiones	51
Apéndice A. Recuperación de coeficientes de Zernike	53
Referencias	61

Introducción

El ojo es uno de los órganos más sensibles y complejos del cuerpo humano, su importancia radica en ser la ventana a través de la cual podemos conocer nuestro entorno en primera instancia. A lo largo de los años, diversas personalidades de la ciencia han dedicado su tiempo al estudio de este sistema óptico natural para saber cómo mejorar su eficiencia y funcionalidad con el propósito de mejorar la calidad de las imágenes captadas sobre la retina.

La oftalmología ha ido desarrollándose continuamente, desde la invención de los primeros anteojos hasta la introducción de cirugías láser en el último siglo. Detrás de estos desarrollos tecnológicos se encuentra también un estudio científico centrado en la detección de los errores de visión que padece la mayoría de las personas. Normalmente se refiere a estos “errores” como *aberraciones* o *errores refractivos*, y se trata de los cambios que sufre una imagen modificada por un ojo imperfecto respecto de uno ideal. En la naturaleza no existe tal ojo ideal, por lo que se puede decir que todos los sistemas ópticos oculares están aberrados; sin embargo, se puede elegir una referencia para poder caracterizar estos errores.

En la actualidad existen varios métodos para detectar aberraciones [1], [2]. Desde los relativamente sencillos donde sólo interviene la óptica geométrica, hasta métodos donde se introducen los conceptos del electromagnetismo y la óptica física. La técnica general consiste en recuperar la imagen que se obtendría por el ojo aberrado y compararla con la ideal, esto en general se hace mediante mediciones correspondientes a cada rayo emanante de la fuente de luz de referencia, hasta tener una muestra de todo el espectro.

El objetivo de este trabajo es plantear una alternativa a la herramienta de detección de errores oculares más usada actualmente, que es el sensor de frente de onda de Shack- Hartmann. Con este fin, se introduce un método de recuperación de fase basado en la *Ecuación de Transporte de Intensidad*. Para ello se estudiará esta ecuación a detalle de forma teórica; posteriormente se analizan y comparan algoritmos de las soluciones numéricas convencionales y las utilizadas en el análisis de frentes de onda.

1. El ojo humano

En esta sección se introducirá la anatomía y óptica del ojo humano de una forma general y panorámica que sirva a los fines de este trabajo de tesis, sin profundizar en los detalles de composición.

1.1. Anatomía. El ojo se distingue de sus partes *anterior* y *posterior*. En la primera se encuentran principalmente la *córnea*, el iris y el cristalino, mientras que en la parte posterior se encuentra la retina, la fovea y el nervio óptico (Figura 0.1).

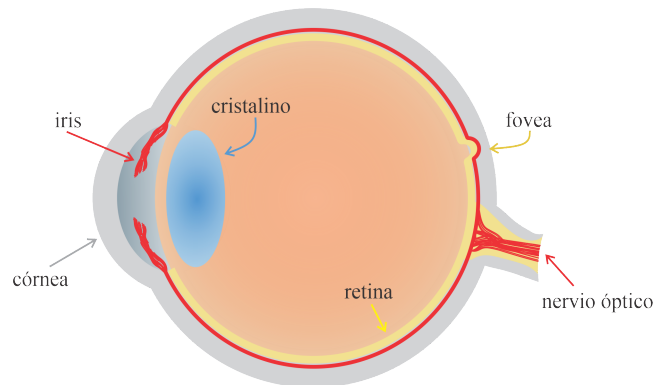


Figura 0.1. Diagrama de la anatomía básica del ojo humano.

La *córnea* es la capa más externa del ojo, a su vez compuesta de otras 6 subcapas, en orden desde el exterior: epitelio, membrana de Bowman, estroma, membrana de Descemet, endotelio y cámara anterior (Figura 0.2). A su vez, la *córnea* está sostenida por la *esclerótica*, que es la ligera capa blanquecina más externa compuesta de fibras de colágeno, que al esparcir la luz reflejada le da su color característico al globo ocular. Finalmente, la parte más exterior es cubierta por la película lagrimal. Todo el conjunto corneal mantiene al ojo protegido de agentes externos, además de evitar el esparcimiento de la luz incidente.

La *córnea* dentro del sistema óptico ocular también funciona como una lente, ya que permite la refracción de la luz y es quien aporta la mayor porción de la potencia óptica total (en promedio 60 D en total para un ojo adulto), esto es, cerca del 70%. También contribuye a la mayor parte de las aberraciones oculares debido a las diferencias de curvatura que presenta a lo largo de sus meridianos principales, produciendo así astigmatismo corneal. En general, la *córnea* alcanza un grosor de hasta 1 mm. Debido a su consistencia deformable, ésta puede sufrir de diversas afectaciones que influyen considerablemente en su estado refractivo, ya sea por efecto de edad o de factores externos; entre las más importantes resaltan el queratocono, la degeneración marginal pelúcida, y procedimientos de cirugía refractiva. Es por ello que se suele poner especial énfasis en el estudio óptico de la *córnea* por separado, el desarrollo y el uso de topógrafos corneales es un ejemplo de ello, aunque actualmente los métodos de diagnóstico incluyen también otros procedimientos complementarios. Luego se encuentra el *iris*, una estructura fibrosa funcionando como diafragma óptico, que se puede dilatar (el orificio se cierra) y contraer (el orificio se expande) para regular la entrada de luz hacia el cristalino. Este orificio formado por el iris es a lo que llamamos *pupila*. Al no haber suficiente luz en el ambiente, decimos que la pupila se dilata. Detrás del iris y sujeto por los músculos ciliares, se encuentra el *cristalino*, un órgano celular con alta concentración de proteínas, que funciona como una lente refractora y contribuye con, aproximadamente, la tercera parte de la potencia óptica ocular. Esta estructura es capaz de cambiar su tamaño y forma para enfocar objetos cercanos y lejanos; a este proceso se le llama *acomodación*. En la versión más simple, el cristalino se considera como una lente biconvexa, sin embargo su forma real se asemeja más al de un esferoide oblató; su

diámetro es aproximadamente de 9 mm y su grosor puede variar desde 4 mm hasta 5 mm dependiendo si se encuentra acomodado o relajado. Además, su índice de refracción no es homogéneo, sino que sufre un gradiente en dirección axial (eje óptico en la Figura 0.5), y en sentido del exterior hacia el centro, de modo que el mayor valor de índice refractivo se alcanza en el núcleo. Este elemento también tiene la peculiaridad de que se mantiene en constante crecimiento a lo largo de su vida, mientras que su transmisibilidad y elasticidad, por el contrario, va disminuyendo; estos cambios continuos afectan gradualmente al desempeño visual, provocando lo que se conoce como *presbicia*: la incapacidad de enfocar objetos a corta distancia, debido a que al cristalino ya no le es posible acomodarse. Entre la córnea y el cristalino, se encuentra la sustancia encargada de proporcionar nutrientes: el *humor acuoso*.

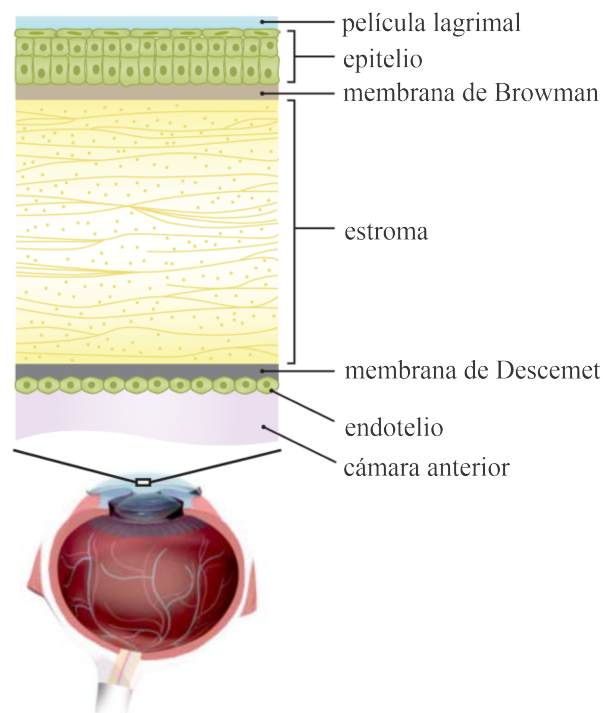


Figura 0.2. Composición de la córnea en sus capas funcionales. El estroma constituye 90 % del grosor de la córnea. Tomado de [2]

En la parte anterior del ojo, se encuentra la **retina**, formada de varias subcapas de distintas células, entre las cuales están las *células fotorreceptoras* (Figura 0.3) [3], cuyo funcionamiento es el de un detector. Hay dos tipos de células fotorreceptoras: conos y bastones, llamados así por su respectiva forma. Las primeras sólo son utilizadas cuando hay luz suficiente en el ambiente, mientras que los bastones son principalmente necesarios en la visión nocturna. Existen tres tipos de conos que se distinguen por su absorción espectral en los rangos de verde, azul o rojo, función gracias a la que somos capaces de percibir los colores.

Las células fotosensibles de la retina reciben la luz enfocada por los agentes posteriores del ojo, las células ganglionares son las encargadas de enviar esta información como señales eléctricas al cerebro a través del nervio óptico.

Finalmente, se tiene la **fóvea** una pequeña depresión sobre la retina, y cerca del eje óptico (o centro de la parte

posterior); esta sección llega a medir, en promedio, 1 mm y es aquí donde se concentra la mayor parte de los conos receptores, por lo que puede decirse que es el punto de mayor agudeza visual.

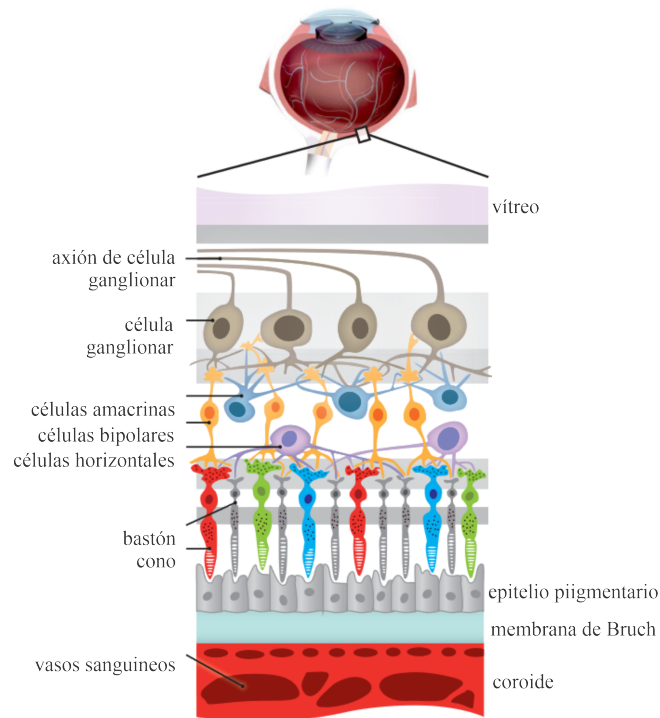


Figura 0.3. Composición de la retina en sus capas funcionales. Tomado y adaptado de [2].

1.2. Ejes y puntos cardinales. Con el fin de estudiar cuantitativamente el comportamiento la calidad óptica del ojo, y tomando principalmente a la córnea como referencia, se empieza por definir ejes imaginarios sobre el medio ocular, de forma que también sirvan como referencia para el trazo de rayos. Asimismo, la definición de estos ejes servirán a la alineación de los instrumentos ópticos.

Como el sistema óptico del ojo humano es una estructura anatómica con altas irregularidades, es difícil definir los ejes sobre la córnea de manera objetiva, sin embargo se ha buscado la forma más factible de definir ciertos elementos.

En un sistema óptico con simetría rotacional, donde todos los elementos se encuentran alineados, el *eje óptico* se define como la línea que pasa por los centros de curvatura de todos los elementos. El ojo humano, sin embargo, no tiene simetría perfectamente rotacional ni tampoco sus componentes están perfectamente alineados, así que sólo se puede definir la línea que esté más aproximada a intersectar los centros de curvatura de las superficies esféricas que mejor se ajustan a cada componente.

Otra definición del sistema de ejes, es la recta que une al punto fijo de mira y el centro de la pupila de entrada, esta es la *línea de visión* (Figura 0.4). Para el sistema ocular completo, la línea de visión tiene que llegar a la fovea, que es donde se enfoca la imagen. Por otra parte, el *eje visual* se define similarmente en tanto que une al punto de fijación con la fovea, pero lo hace mediante los puntos nodales. Estos últimos son tales que, al incidir un rayo sobre el eje óptico en el punto N, su imagen refractada se desplaza ligeramente sobre el mismo eje, de

forma que ahora el rayo parece provenir del punto N' . Tanto la parte incidente como la refractada de este rayo, tienen el mismo ángulo respecto al eje óptico.

Los sistemas ópticos se intentan describir a través de sus *puntos cardinales*, los cuáles son útiles para encontrar las imágenes formadas sin necesidad de conocer a detalle la composición del sistema. En este sentido, todo modelo físico de ojo cuenta con 2 puntos principales, 2 puntos nodales y 2 puntos focales (Figura 0.5).

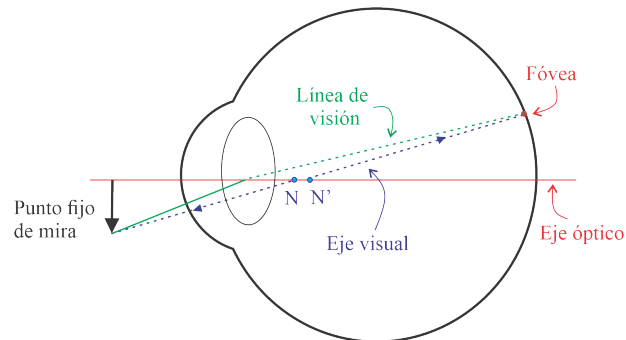


Figura 0.4. Los principales ejes que se definen con respecto a la córnea y a la fóvea son: la línea de visión, el eje visual y el eje óptico.

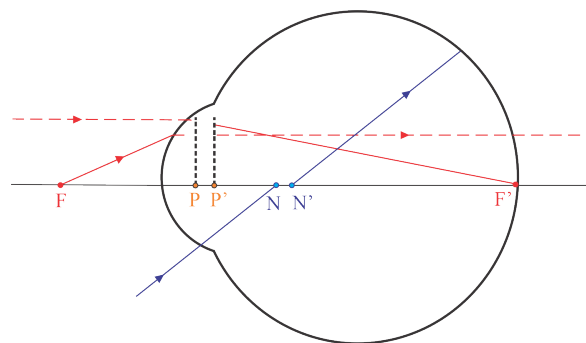


Figura 0.5. Puntos cardinales en un modelo sencillo del ojo humano: Puntos principales: P, P' , puntos nodales: N, N' y puntos focales: F, F'

Al incidir un rayo a un medio no homogéneo, este se refracta de manera distinta a como lo haría en un medio homogéneo, es decir, no obedece la ley de Snell; sin embargo pueden encontrarse dos planos perpendiculares al eje óptico para los cuáles sí se puede aplicar esta regla, y sobre ellos decimos que ocurre la "refracción efectiva". A éstos se les conoce como *planos principales*, y su intersección con el eje óptico son los *puntos principales* (P, P'). Por su parte, los *puntos focales*, como usualmente, indican el lugar de donde vienen los rayos que se enfocan en el infinito (F), y a dónde convergen los rayos que vienen desde el infinito (F'). En la Figura 0.5 se esquematizan estos puntos con un sencillo trazo de rayos.

2. Modelos de ojo

Para estudiar y corregir afecciones de los ojos humanos, debemos comprender bien cómo funciona físicamente este sistema. Sin embargo, difícilmente podemos tener un ojo aislado para estudiar el comportamiento refractivo de cada uno de sus componentes; por esta razón, se utilizan los *modelos de ojo*[4],[5], que consisten en un arreglo

de componentes ópticos cuyos parámetros, al funcionar conjuntamente, reproducen las propiedades refractivas de un ojo humano. Naturalmente, estas propiedades no se pueden reproducir de forma total, por lo que se ha tenido que desarrollar una gran variedad de estos modelos. En líneas generales, se pueden clasificar en dos tipos: los modelos *paraxiales* y los de *ángulo finito*, aunque también existen otras clasificaciones de acuerdo a las características que estas variantes toman en cuenta, por ejemplo: modelos monocromáticos o policromáticos, reducidos o anatómicos, homogéneos o con índice de gradiente, entre otros [6].

Los modelos paraxiales implementan desde 1 hasta 6 superficies esféricas refractivas de medios transparentes, distinto índice de refracción y un eje óptico común. Mientras tanto, los modelos de ángulo finito pueden tomar en cuenta el descentramiento de los componentes, además de introducir otros parámetros de curvatura en superficies esféricas para aproximarse más a la estructura anatómica del ojo [7].

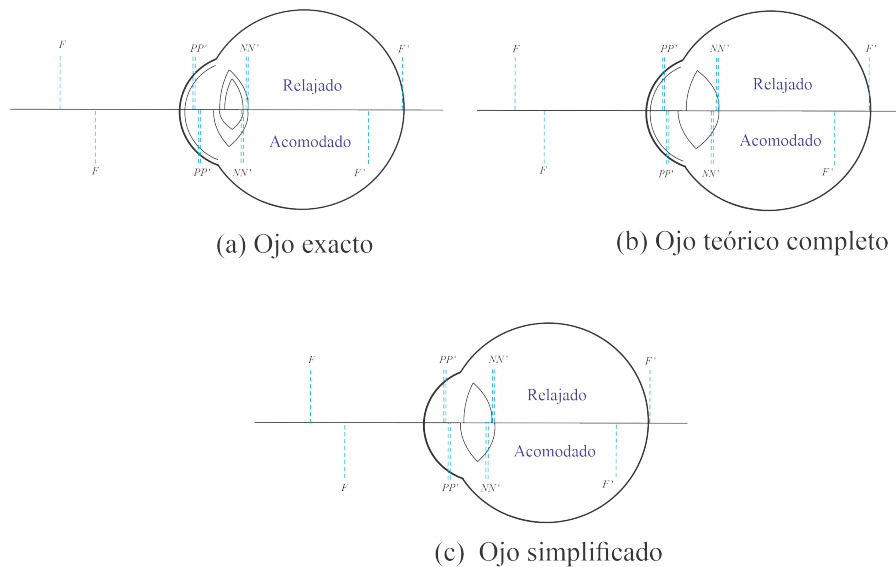


Figura 0.6. Ojos esquemáticos paraxiales.

El *ojo reducido* es el más simple de todos, ya que consta de sólo una superficie refractiva, índice de refracción constante y permite trabajar con las aberraciones más comunes, como lo es el desenfoque. Por otro lado, está el *Modelo exacto de Gullstrand* u *ojo exacto* (Figura 0.6.a) que, de los modelos paraxiales es el más aproximado al comportamiento óptico real y consta de 6 superficies refractivas y toma en cuenta tanto al ojo relajado como el acomodado. Por otra parte está el *ojo teórico completo* de Le Grand (Figura 0.6.b) que simplifica el modelo anterior considerando sólo dos superficies para el cristalino, y finalmente el *ojo simplificado* de Gullstrand-Emsley (Figura 0.6.c). En la Figura 0.6 se representan estos modelos de ojo junto con sus respectivos puntos cardinales y cómo estos se modifican en la acomodación. En la Tabla 0.1 también se incluyen los radios de cada superficie refractiva y las distancias entre cada una de éstas.

Los modelos como el de de Le Grand y Gullstrand son representaciones detalladas de la anatomía y la óptica del ojo humano que nos permiten simular con cierta precisión cómo la luz se propaga a través de las diferentes estructuras del ojo, incluyendo la córnea y el cristalino; esto los convierte en herramientas valiosas para evaluar los efectos de ciertas intervenciones médicas (como una cirugía láser) y mejorar su precisión y seguridad. Asimismo, al brindarnos una mejor comprensión del comportamiento de los rayos de luz dentro de

nuestro aparato visual, los modelos de ojo proporcionan una base para el diseño y la evaluación de instrumentos ópticos.

Tabla 0.1. Radios de las superficies ópticas (r) y distancias (d) entre superficies consecutivas para cada uno de los modelos mencionados, en unidades de centímetros. Observamos que hay espacios en blanco en los modelos completo y simplificado, ya que tienen menos superficies. Los datos son tomados de [4].

Gullstrand				Completo				Simplificado			
relajado		acomodado		relajado		acomodado		relajado		acomodado	
r (cm)	d (cm)	r (cm)	d (cm)	r (cm)	d (cm)	r (cm)	d (cm)	r (cm)	d (cm)	r (cm)	d (cm)
7.70		7.70		7.80		7.80		7.80		7.80	
	0.50		0.50		0.55		0.55		3.60		3.20
6.80		6.80		6.50		6.50		10.00			
	3.10		2.70		3.05		2.65		3.60	5.00	
10.00		5.33		10.20		6.00					4.00
	0.55		0.67		4.00		4.50				
7.91		2.66									
	2.42		2.66								
-5.76		-2.66									
	0.64		0.67								
-6.00		-5.33		-6.00		-5.50		-6.00		-5.00	
	17.19		17.19		16.60		16.50		16.70		16.70

Medición de aberraciones

1. Frente de onda

Como se sabe, la luz es una composición de ondas electromagnéticas. Una onda electromagnética plana puede expresarse matemáticamente como:

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi_0)} \quad (1.1)$$

donde \vec{k} es el vector de onda que indica la dirección de propagación y cuya magnitud es $k = 2\pi/\lambda$, mientras que $\omega = 2\pi c/\lambda$ es la frecuencia angular. Al argumento de la función exponencial se le llama fase $\phi(\vec{r}, t)$ y nos indica en qué estado de vibración se encuentra la onda en un espacio dado, al tiempo t ; ϕ_0 es la fase de la onda en el origen y al tiempo $t = 0$. Un *frente de onda* se define como el lugar geométrico en el que la onda propagada se encuentra en el mismo estado de vibración, a un tiempo t ; suponiendo que la onda se propaga en dirección z , entonces $\Phi_0 = \vec{k} \cdot \vec{z} - \omega t$ define una superficie de fase constante.

En particular, desde el enfoque de la Óptica Geométrica es posible definir los campos eléctrico y magnético en regiones lejanas a la fuente. Para este fin, se expresan las ondas electromagnéticas (1.1) como soluciones de las ecuaciones de Maxwell que son armónicas en la variable temporal:

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{H}(\vec{r}, t) = \hat{H}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (1.3)$$

esto facilita la aplicación de una expansión de tipo Taylor (método WKB [8]), de donde se obtiene la expresión de la parte espacial:

$$\hat{E}(\vec{r}) = \hat{E}_0 e^{ik_0 \varphi(\vec{r})} \quad (1.4)$$

$$\hat{H}(\vec{r}) = \hat{H}_0 e^{ik_0 \varphi(\vec{r})} \quad (1.5)$$

donde φ describe el *camino óptico* recorrido. Al considerar las ecuaciones de Maxwell para un medio lineal y homogéneo, y bajo el límite $k_0 \gg 0$, se obtiene lo que se conoce como la *ecuación eikonal* [9]:

$$|\nabla \varphi|^2 = n^2 \quad (1.6)$$

con $n = \sqrt{\epsilon\nu}$ el índice de refracción del medio donde se propaga la onda electromagnética (en unidades CGS). Se le llama entonces *frente de onda geométrico* a las superficies definidas por:

$$\varphi(\vec{r}) = \gamma, \quad (1.7)$$

donde γ es cualquier constante, y a φ se le suele llamar *la función eikonal*.

Un *rayo geométrico* de luz que emana desde una fuente de luz dada, es una curva cuya trayectoria siempre es ortogonal a los frentes de onda geométricos. Considerando el vector de posición $\vec{r}(s)$ parametrizado por la longitud de arco del rayo, el comportamiento de éste describe la *ecuación de rayo* (1.8):

$$n \frac{dr}{ds} = \nabla \varphi. \quad (1.8)$$

De esta forma se puede decir que el frente de onda geométrico es el conjunto de puntos en el espacio, cuyos rayos emanados desde la fuente hasta éstos, han recorrido la misma longitud de camino óptico.

La ecuación (1.6) conecta la teoría óptica descrita partir de ondas electromagnéticas con la descripción geométrica a partir de rayos; además, corresponde precisamente con la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada al problema variacional para la longitud de camino óptico (1.9), que extremiza el tiempo que la energía viaja a lo largo del rayo:

$$\delta \int n ds = 0. \quad (1.9)$$

2. Aberraciones ópticas

Como se mencionó antes, las aberraciones son los defectos de imagen producidos por un sistema óptico; formalmente, una aberración de frente de onda es la desviación de éste respecto de un frente de onda de referencia. Se habla de *aberraciones monocromáticas* cuando los efectos de dispersión no son apreciables y, por tanto, no se toma en cuenta la longitud de onda de la luz incidente. Este tipo de aberraciones pueden estudiarse mediante la *aberración de rayos*, *aberración de frente de onda* o *diferencia de camino óptico*.

Dentro de la aberración de rayos, se definen las aberraciones transversal y longitudinal. La *aberración transversal* se mide con la distancia entre el rayo incidente y el eje óptico, sobre los ejes x_p, y_p del plano pupila; también se puede describir mediante los ángulos de desviación respecto al eje óptico, (φ_x, φ_y) . Por otro lado, la *aberración longitudinal* de un rayo se representa con el inverso de la distancia entre su intersección con el eje óptico y la pupila de salida, dz , a donde se supone que el rayo converge (ver Figura 1.1). Las desviaciones de rayo se relacionan de la siguiente forma [2]:

$$\frac{1}{dz} = \frac{\varphi(x_p, y_p)}{dy}, \quad (1.10)$$

donde dy es la desviación del rayo desde el eje óptico, sobre el eje y . Como se ha visto previamente, obtener la diferencia de camino óptico entre un rayo desviado y el rayo ideal es está relacionado con recuperar el estado de fase del frente de onda aberrado.

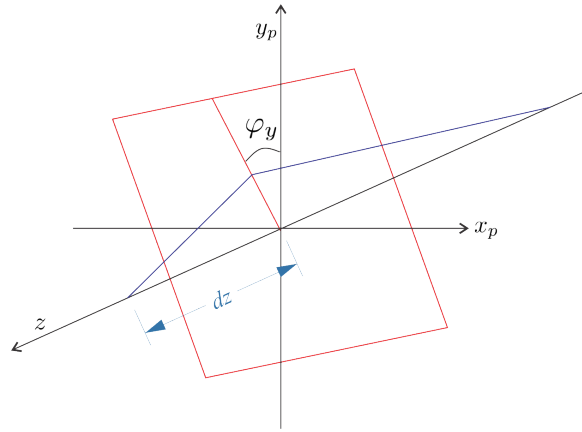


Figura 1.1. Aberraciones transversal y longitudinal medidas desde el plano pupila. En este esquema se considera que el frente de onda aberrado es un frente plano con una inclinación φ_y respecto al plano pupila. La aberración longitudinal se mide como el inverso de dz , que es la distancia desde la pupila de entrada hasta la intersección del rayo con el eje óptico.

Finalmente, para describir las desviaciones en términos totalmente del frente de onda geométrico, se introduce la **función de aberración**, que se define sobre el plano de la pupila de salida, siendo tal que su promedio es cero para el frente de onda de referencia:

$$\langle W(x_p, y_p) \rangle = \frac{1}{A_{ps}} \int \int W(x_p, y_p) dx_p dy_p. \quad (1.11)$$

donde A_{ps} es el área de la pupila de salida. Para describir explícitamente la función de aberración, se hace una expansión en términos de los polinomios de Zernike. Estos polinomios cumplen con la condición de ser ortonormales sobre un área circular, por lo que son adecuados para describir las aberraciones de un sistema óptico con pupila circular [2]; en este caso, el sistema ocular. Se representan con la letra Z acompañada de un subíndice n , que indica el orden radial, y un superíndice m que indica la frecuencia angular. Si n es grande, entonces el término de aberración es de mayor potencia, mientras que una m mayor, indica que la aberración es más periférica.

$$W(h, r, \alpha) = \sum_n \sum_{m=-n}^n c_n^m(h) Z_n^m(r, \alpha). \quad (1.12)$$

Cada término de la expansión representa un tipo de aberración, como describiremos a continuación. Se suelen distinguir a las aberraciones por las de **bajo orden** y las de **alto orden**. Las primeras corresponden concretamente a los polinomios de Zernike de orden $n = 2$, ya que $n = 1$ representa un término de pistón que puede corregirse directamente recalibrando las mediciones del sistema.

Las aberraciones de segundo orden se denominan de desenfoque y astigmatismo. Cuando $Z_2^0 > 0$ se trata de **miopía**, que consiste en el enfoque de la imagen antes de la retina; si $Z_2^0 < 0$, se trata de **hipermetropía**, donde la imagen se estaría enfocando después de la retina. Finalmente, se encuentra el **astigmatismo** ($Z_2^{\pm 2}$), que consiste en el enfoque de las imágenes en más de un punto.

Las aberraciones de alto orden se toman a partir de $n = 3$. Se considera que sólo es de interés analizar aberraciones hasta el sexto orden, sin embargo, varios expertos en la oftalmología sólo toman en cuenta las aberraciones hasta

el cuarto orden para su corrección. Dentro de estas, se encuentra el *trefoil*, representado por los polinomios $Z_3^{\pm 3}$, y es también llamado *astigmatismo triangular*. El *coma* es representado por $Z_3^{\pm 1}$, y es común en pacientes con queratocono o ectasias corneales. Finalmente, la *aberración esférica*, o *miopía nocturna*, es representada por el polinomio Z_4^0 , y es comúnmente encontrada en pacientes con cirugía refractiva corneal.

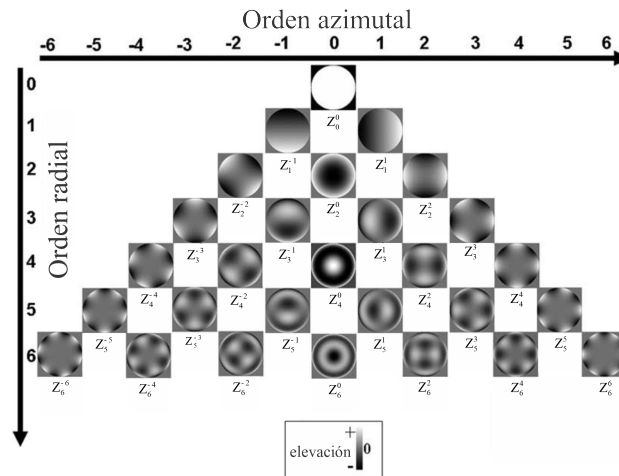


Figura 1.2. Representación en escala de grises de los polinomios de Zernike, hasta el sexto orden.

Los coeficientes que acompañan la expansión en (1.12) son importantes ya que determinan la cantidad presente del tipo de aberración correspondiente. Los polinomios de Zernike se suelen mostrar en su representación geométrica y en una disposición piramidal, como se muestra en la Figura 1.2, con la definición de los polinomios usada por Kaschke [2], en la que éstos son ortonormales sobre un disco de radio unitario.

3. Métodos oftálmicos

En la optometría se cuenta con múltiples formas de determinar la calidad óptica del ojo, o *estado refractivo*. Además de las pruebas subjetivas, a las que regularmente somos sometidos al visitar a un oftalmólogo, como la de campo visual, el uso de la tabla de Snellen o el foróptero (ver Figura 1.3) [10], se requieren de pruebas que brinden mayor precisión y que sean independientes de la interpretación subjetiva del paciente o del profesional; por ello existen otros métodos que requieren aparatos más complejos, tales como los *retinoscopios*, *refractómetros* o los *aberrómetros*.

Los instrumentos diseñados para la evaluación de calidad óptica del ojo pueden clasificarse según la sección de éste que analizan. Por ejemplo, para la examinación del segmento anterior, son comunes el *queratómetro*, el *topógrafo corneal*, y actualmente también la técnica de *Tomografía de Coherencia Óptica* (OCT por sus siglas en inglés).

En la queratometría, el objetivo principal es medir la curvatura de la región central de la superficie corneal anterior que, en promedio, se encuentra entre 3 y 4 mm de radio y 0.5 mm de grosor. El principio se basa en obtener una relación entre el tamaño de un objeto de prueba proyectado sobre la córnea, y el tamaño de su imagen

virtual reflejada desde la córnea. Para ello, se considera la superficie corneal como un espejo esférico convexo (ver Figura 1.4), cuyo radio equivalente puede aproximarse como:

$$r = 2d \frac{y}{h} \quad (1.13)$$

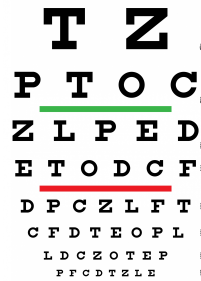
con h la altura objeto, y la altura imagen y d la distancia aproximada entre el objeto y su imagen. Así, la potencia dióptrica de un ojo con astigmatismo, se aproxima con la fórmula

$$P = \frac{(n - 1)}{r}, \quad (1.14)$$

donde el índice de refracción n es un parámetro de calibración. La versión automatizada de los queratómetros, o el queratómetro optoelectrónico, utiliza LEDs como objetivo de prueba, y en lugar de un ocular se coloca una cámara CCD que registre el tamaño de las imágenes proyectadas, de modo que se pueda calcular el radio computacionalmente.



(a) Foróptero



(b) Tabla de Snellen

Figura 1.3. (a) Foróptero: contiene una variedad de lentes esféricas y planocilíndricas de distintas distancias focales, que se pueden intercambiar para determinar la agudeza visual del paciente; normalmente utilizado junto con la tabla de Snellen (b) que determina el grado de agudeza según hasta qué renglón se alcanzan a distinguir completamente los caracteres desde una distancia dada (usualmente 6 metros). Imágenes tomadas de [10]

Con el mismo fin de un queratómetro, se encuentra el *topógrafo corneal*, con la ventaja de que éste tiene la capacidad de analizar casi el área completa de la córnea. El funcionamiento es básicamente igual al del queratómetro; regularmente se usan discos de plácido como objeto de mira.

La caracterización óptica que ofrecen estos dispositivos, de la superficie corneal y su poder refractivo, son altamente aplicados en fines como: el diagnóstico antes y después de una cirugía refractiva, la evaluación y ajuste de lentes de contacto, la detección de astigmatismo corneal y queratocono.

Del segmento anterior, se puede pasar a analizar ahora el segmento posterior, que comprende a toda la retina. Con el fin de evaluar la calidad de la retina misma y su imagen proyectada, se encuentra el *oftalmoscopio*, cuyo principio básico consiste en usar el medio ocular como una lente amplificadora. En el esquema de este instrumento (Figura 1.5) se muestra el sistema de iluminación simple para un oftalmoscopio directo: una fuente

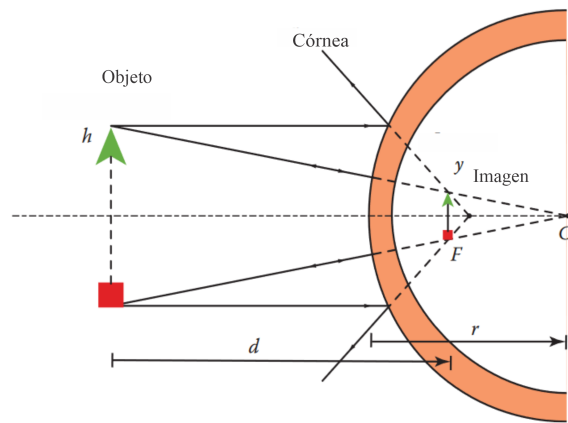


Figura 1.4. Trazo de rayos en queratometría. Tomado y adaptado de [4]

de luz extendida (una lámpara de Xenon-Halógeno o LED) y un par de lentes como condensador y objetivo. Una consideración importante en esta técnica es que el camino del haz incidente y el de detección deben superponerse sobre el punto de mira en la retina, pues si no hay iluminación externa, el fondo de ojo no puede visualizarse; sin embargo, también es necesario que los ejes de observación y el de luz incidente se encuentren ligeramente desviados para evitar que la reflexión corneal perturbe la observación [2]. La magnificación de un oftalmoscopio directo depende de la distancia del médico al paciente, así como del poder refractivo y la distancia dióptrica del ojo; como resultado, la imagen de un segmento de retina puede amplificarse hasta 15 veces, por lo que es ideal para examinar el segmento posterior al poder identificar rinopatías, vasos sanguíneos, desprendimiento retinal, entre otras afecciones.

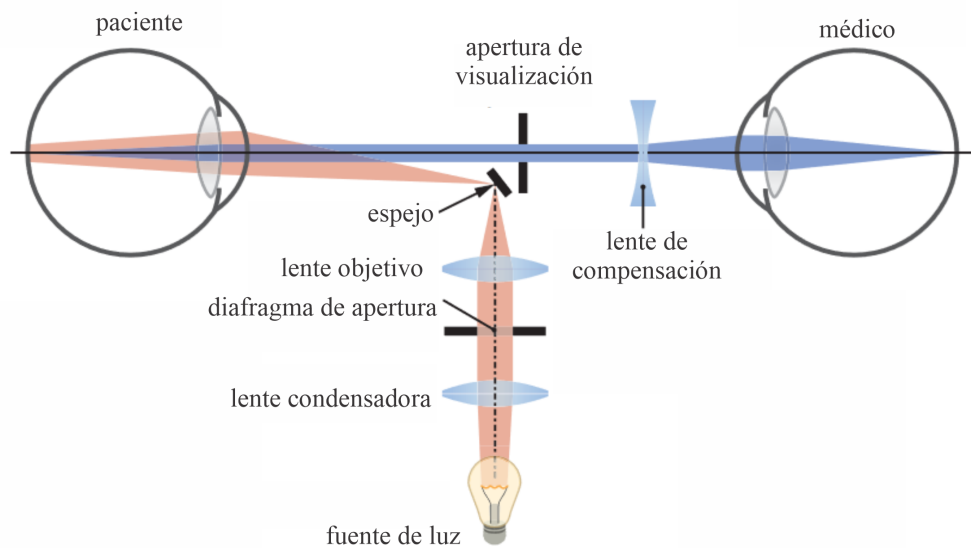


Figura 1.5. Sistema de iluminación y observación en un oftalmoscopio directo. Tomado y adaptado de [2]

Por otro lado, en la retinoscopía se pretende determinar el punto lejano del ojo por medio del reflejo de fondo (reflejo de luz desde la retina). Se utiliza una fuente de luz blanca extendida que es proyectada sobre la retina a través de un espejo móvil y una lente, generando una banda de luz de forma rectangular, casi lineal, sobre el ojo. La vergencia de esta banda emitida puede controlarse al variar la distancia entre el filamento de luz y la lente, lo que se hace al subir o bajar el brazo del aparato y con ello la fuente de luz (Figura 1.6).



Figura 1.6. Retinoscopio BETA 200 LED.

En el primer caso, el haz proyectado hacia el fondo de ojo es divergente, proviniendo de una imagen virtual de la fuente, que se encuentra detrás del espejo. En el segundo caso, se produce el efecto de un espejo cóncavo en el que la franja proyectada sobre el ojo proviene de una imagen real que se encuentra entre el espejo y la pupila. Se puede determinar de qué lado se encuentra el punto lejano del ojo (antes o después del retinoscopio) observando cómo se mueve la franja de luz respecto al movimiento del espejo móvil. Si, por ejemplo, el retinoscopio se encuentra en el sistema de iluminación de espejo plano sobre un ojo emétrope, entonces la franja de luz se moverá en el mismo sentido que movamos el espejo (hacia arriba o hacia abajo), y sabemos que en este caso el punto lejano se encuentra en el infinito. Por otro lado, si es un ojo con miopía el que se analiza, el punto lejano se encuentra entre el retinoscopio y el ojo, y el observador mira que la franja reflejada se mueve en dirección opuesta a la que mueve el espejo. En resumen, se puede determinar el estado refractivo del ojo según cómo se comporte el reflejo de fondo respecto a la configuración del retinoscopio, como sigue: Para el defecto refractivo dado por **miopía alta**, el movimiento del reflejo de fondo en la *configuración de espejo cóncavo* es en sentido del espejo, mientras que en la *configuración de espejo plano* es sentido contrario. Para el defecto refractivo dado por **hipermetropía y miopía baja** ocurre al revés [4].

Cuando el punto lejano se encuentra sobre el plano de la rendija del observador, no se ve ningún movimiento del reflejo y por tanto la pupila se observa o totalmente oscura o iluminada. Se dice entonces que se alcanzó el *punto neutral*. Para llegar a este punto, regularmente es necesario colocar lentes de prueba frente al ojo (ver Figura 1.7). La potencia de esta lente de neutralización se calcula como la suma del inverso de la distancia de trabajo, D (correspondiente a la potencia de una lente que conjuga al infinito con la pupila del retinoscopio) y la de la lente que conjuga a la retina del paciente con el infinito, C ; de esta forma: $C = N - D$ se pueden detectar alteraciones en la retina, pero también proporciona información del segmento anterior.

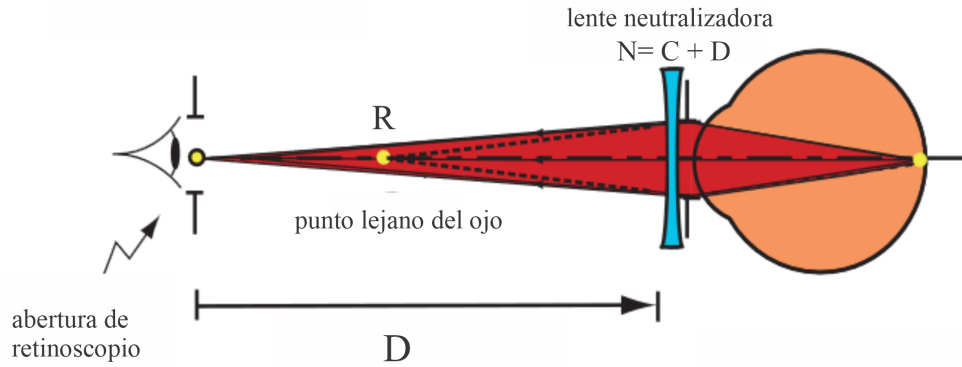


Figura 1.7. Sistema de iluminación y observación en un retinoscopio. Tomado y adaptado de [4]

La precisión de la retinoscopia está determinada por la profundidad de campo limitada por difracción y se calcula con:

$$\Delta D = \frac{\lambda}{d_p^2}, \quad (1.15)$$

con d_p el tamaño de la pupila de entrada del ojo y λ la longitud de onda de la fuente de iluminación. Por otro lado, los *refractómetros* funcionan con un sistema de iluminación más uno de detección (Figura 1.8), así como un mecanismo para el acomodo del paciente; la idea general es evaluar y maximizar la calidad de la imagen detectada y reflejada por el ojo para calcular la refracción de punto lejano; existen varios métodos de medición que se pueden implementar en los refractómetros, tales como: el de Scheiner, el de mejor enfoque, desviación de rayo o tamaño de la imagen [2].

Con los dos últimos sólo es posible medir aberraciones de bajo orden, como desenfoque y astigmatismo. Por otro lado, los retinoscopios presentan diversas dificultades al tratar de acomodarlo correctamente con el paciente.



Figura 1.8. Autorefractómetro/ Queratómetro RM 9000 OptiClear.

3.1. Sensores de frente de onda. Con la implementación de nuevas tecnologías médicas, tales como la cirugía refractiva, se hizo necesaria una mayor precisión a la hora de describir los defectos oculares, por lo que

surgió el *aberrómetro*. El fin de este aparato es básicamente medir la deformación directa del frente de onda. Los términos «aberrómetro» o «sensor de frente de onda» con frecuencia se usan dentro de la oftalmología para referirse al mismo principio.

3.1.1. Sensor de onda de Hartmann-Shack. Es parte de la metrología óptica como un método no interferométrico que fue inicialmente diseñado para usarse en telescopios; sin embargo, su uso se ha extendido hacia diferentes campos donde las pruebas ópticas juegan un papel importante, y la medicina no es la excepción. Actualmente el *sensor de frente de onda de Hartmann-Shack* es el método de detección más utilizado en aberrómetros, los cuales de hecho son nombrados de igual forma.

El método consiste en un arreglo de microlentes plano-convexas perfectamente ordenadas y con idénticas características: diámetro y distancia focal (Figura 1.9). La idea es que la luz entrante se va a seccionar en regiones de áreas iguales a las de las lentillas, de tal forma que podemos imaginar que a cada lentilla le corresponde enfocar un único rayo de luz del frente de onda. Si el frente de onda fuera perfectamente plano (el cuál se usará como frente de referencia) y con dirección ortogonal al plano de la pupila de las lentillas, los rayos se deberían enfocar precisamente en el punto focal imagen de cada lentilla; como en el plano que contiene a todos los puntos focales se encuentra el detector, se obtendría como imagen un arreglo de puntos perfectamente distribuidos. Sin embargo, al tratar con frentes de onda aberrados, estos rayos pueden desviarse de la posición de referencia, y en ese caso habrá que medir la desviación calculando el centroide del punto iluminado.

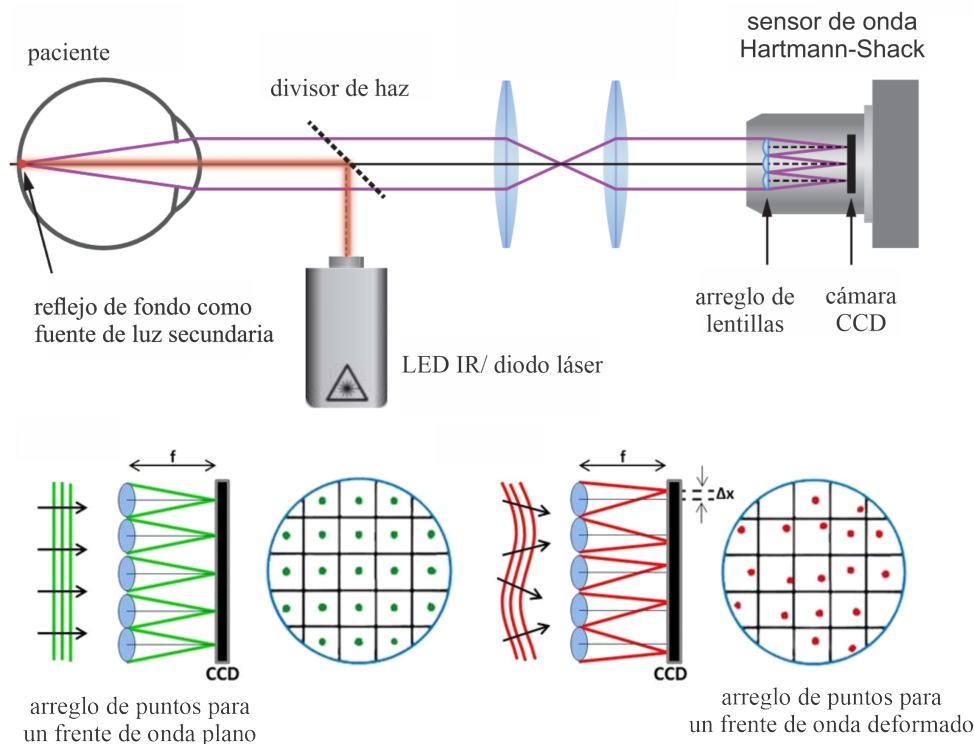


Figura 1.9. Parte superior: configuración de un aberrómetro con sensor de onda tipo H-S (adaptado de [2]). Parte inferior: patrón de puntos sobre el sensor al ser enfocadas las secciones del frente de onda correspondientes al área de cada lentilla.

Eventualmente, se calcula la inclinación angular $\varphi = (\varphi_x(x_p, y_p), \varphi_y(x_p, y_p))$, a partir de las desviaciones transversales $\Delta L = (\Delta x(x_p, y_p), \Delta y(x_p, y_p))$ del rayo incidente, respecto de la marca proveniente del frente de onda plano. En la Figura 1.9, las desviaciones Δy son medidas en dirección perpendicular a la página, y los subíndices p indican sobre qué punto en el plano pupila se mide la desviación, pues está supuesto que el plano detector es conjugado a la pupila de entrada del ojo. Estas medidas equivalen a conocer la pendiente *local* del frente de onda en esa posición del plano pupila, mientras se trate de desviaciones *pequeñas* en el sentido de:

$$\frac{\Delta L}{f} = \tan \varphi \approx \varphi, \quad (1.16)$$

donde f es la distancia focal de las lentillas [2]. Como es de esperarse, la precisión dependerá de los parámetros de las lentes así como del detector. Primeramente, la desviación ΔL mínima que se podrá medir está determinada por la mínima desviación angular y la distancia focal de las lentillas:

$$\varphi_{min} \approx \frac{\Delta L_{min}}{f}. \quad (1.17)$$

Asímismo, para que haya una consistencia en las mediciones deberá ocurrir que la inclinación angular no rebase la cantidad máxima dada por el diámetro de las lentillas d , y su distancia focal:

$$\varphi_{max} \approx \frac{\Delta L_{max}}{f} = \frac{d/2}{f} \quad (1.18)$$

Podemos concluir que una de las primeras desventajas del sensor de frente de onda H-S es su rango dinámico

$$\varphi_{max} = \frac{d}{2f} \quad (1.19)$$

relativamente pequeño.

Una consecuencia inmediata es que cuando se tenga un frente de onda deformado de tal forma que el tamaño de las lentillas es suficiente para que dos puntos de enfoque se superpongan en una sola subapertura correspondiente a una lentilla (Figura 1.10), o se crucen entre sí, entonces la recuperación de la fase no es posible con un algoritmo estándar, ya que habrá que considerar la separación de los centroides para distinguir su lentilla de origen.

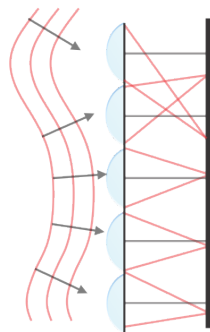


Figura 1.10. Superposición de los puntos enfocados por las lentillas de un sensor de frente de onda Hartmann-Shack. El rayo correspondiente a la sección de frente de onda de la primer lentilla se enfoca en el área de su lentilla vecina, lo que confunde los cálculos de las desviaciones.

3.1.2. Técnicas de recuperación de fase. El análisis de frente de onda se considera como una especie de medición de fase, ya que la medición de la función de aberración es equivalente a tener una distribución de las diferencias de fase (y a su vez, estas son equivalentes a la descripción de aberraciones a través de la diferencia de longitud de camino óptico). Paralelamente, se han desarrollado métodos de *recuperación de fase* como técnica de pruebas ópticas.

La recuperación de fase consiste en, como su nombre lo dice, tratar de obtener información de la fase del frente de onda aberrado para, a partir de ella, reconstruir el frente de onda. Se han propuesto diversos métodos iterativos para este fin; el primero de ellos conocido, fue el implementado por Gerchberg y Saxton en 1972 [11], considerando la propagación del frente de onda en el campo lejano, y sus valores de intensidad desde el plano imagen y un plano en el campo lejano, la información de fase se podría extraer por medio de una Transformada de Fourier. Teague (1982) [12] retomó estas ideas y desarrolló a detalle la ecuación de transporte que relaciona la intensidad del frente de onda propagado con su fase. Este fue el paso esencial para obtener una forma directa de recuperar la fase, pues convirtió el problema en el de una ecuación diferencial parcial con condiciones en la frontera. Posteriormente, Roddier aplicó por primera vez la ecuación de Poisson (1.20), obtenida a partir de la ecuación de transporte desarrollada por Teague y de consideraciones de conservación de energía. Esta describe la distribución total de la curvatura ρ , mediante el Laplaciano del frente de onda geométrico φ , cuyas condiciones en la frontera son dadas al medir las variaciones del frente alrededor de la pupila:

$$\rho(x, y) = \nabla^2 \varphi. \quad (1.20)$$

El método para este sensor consiste en enfocar el frente de onda por medio de una lente objetivo de longitud focal f , hacia su plano focal, donde se encuentra una segunda lente de longitud focal $f/2$. La distribución de intensidad se mide sobre planos de desenfoque P_1 y P_2 , que se colocan simétricamente una distancia l del plano focal (Figura 1.11), con el fin de conocer la variación axial de esta cantidad [13]. La relación entre el frente de onda y las variaciones axiales de intensidad (1.21), entra en el margen de la óptica geométrica, ya que se obtiene al suponer que el desenfoque es pequeño a comparación de variaciones medidas.

$$\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{f(f - l)}{l} = \left\{ \nabla^2 z(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial r} z(\vec{r}) \delta_c \right\} \quad (1.21)$$

El método de recuperación de fase es muy recurrido en áreas como la microscopía y la óptica adaptativa.

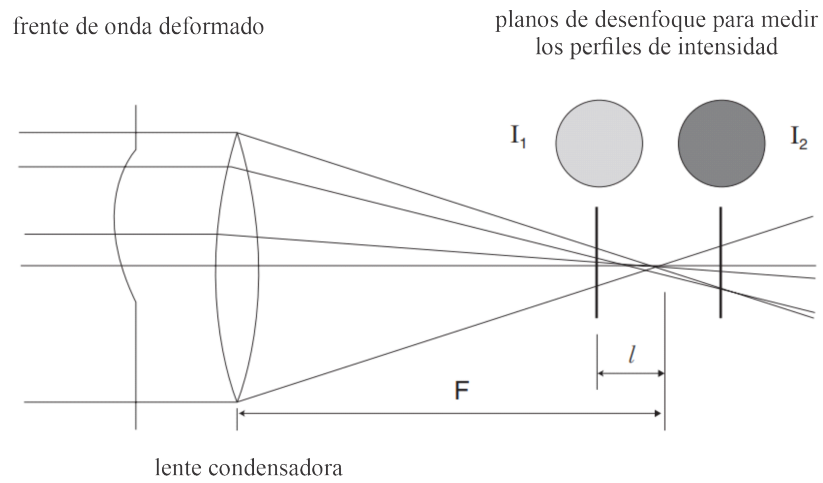


Figura 1.11. Esquema del sensor de curvatura ideado por Roddier [13]. I_1 e I_2 son los perfiles de intensidad sobre cada plano de desenfoco, F es la distancia focal de la lente y l es la distancia de desenfoco.

Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI)

La Ecuación de Transporte de Intensidad proporciona un método no interferométrico de recuperación de fase dentro de las pruebas ópticas. Ya que relaciona la intensidad de la onda con su fase, podemos obtener información del frente de onda únicamente con mediciones de intensidad.

En la Figura 2.1 se esquematiza la propagación de una onda plana que es aberrada al pasar por un medio transparente. En el frente de onda saliente hay secciones donde la fase se retrasa más que en otras, influyendo en la curvatura local de éste [14]. Al colocar un detector de intensidad frente a la onda aberrada, se notará cómo la distribución de intensidades depende de la curvatura local: si la curvatura es positiva (el frente de onda geométrico es localmente convexo) habrá menos intensidad de luz, pues los rayos se esparcen, mientras en donde la curvatura es negativa (el frente de onda geométrico es localmente cóncavo) hay una mayor intensidad ya que los rayos se concentran. Con esto se obtiene al mismo tiempo información local sobre el retraso de la fase.

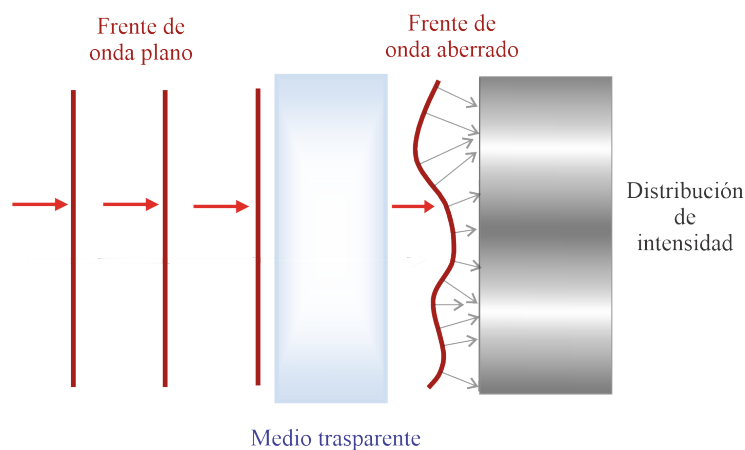


Figura 2.1. Propagación de un frente de onda plano a través de un medio refractor. La curvatura del frente de onda saliente influye directamente en la distribución de intensidad que se detecta sobre un plano inmediato.

1. Obtención e interpretación

Consideremos una onda plana monocromática de la forma:

$$\Phi(\vec{r}) = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}ct}u(\vec{r}) \quad (2.1)$$

Al introducir esta expresión en la ecuación de onda, encontramos que una onda plana monocromática cumple la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k) u(\vec{r}) = 0, \quad (2.2)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$. Si ahora consideramos sólo la parte espacial que se propaga a lo largo del eje z , es decir $u_z(\vec{r}) = e^{-ikz}u(\vec{r})$, que cumple la ecuación de Helmholtz [14], obtenemos:

$$\left[\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u(\vec{r}) = 0, \quad (2.3)$$

en donde:

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

denota el operador Laplaciano únicamente sobre el plano transversal x, y . Como se consideró en los trabajos de Teague [12] mencionados anteriormente, las variaciones de la perturbación en la dirección longitudinal serán pequeñas en comparación con las tangenciales, entonces esta segunda derivada será despreciable y se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\left[\nabla_T^2 - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u(\vec{r}) = 0. \quad (2.5)$$

Esta es conocida como la *ecuación paraxial* y su validez está sujeta a que se cumpla la desigualdad [14]:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(\vec{r}) \right| \ll \left| \nabla_T^2 u(\vec{r}) \right| + \left| 2ik \frac{\partial}{\partial z} u(\vec{r}) \right|. \quad (2.6)$$

Ahora expresaremos esta perturbación en términos de su intensidad y su fase, para lo que es necesario normalizarla, sabiendo que su amplitud e intensidad están relacionadas mediante $|u(\vec{r})|^2 = I$, y de esta forma:

$$u(\vec{r}) = I^{1/2}(\vec{r})e^{-i\phi(\vec{r})} \quad (2.7)$$

Al introducir esta expresión en la ecuación paraxial, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[\nabla_T^2 - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u(\vec{r}) &= -ie^{-i\phi(\vec{r})}I^{-1/2}(\nabla_T\phi \cdot \nabla_T I) - e^{-i\phi(\vec{r})}I^{1/2} [i\nabla_T^2\phi + |\nabla_T\phi|^2] \\ &+ ie^{-i\phi(\vec{r})}\nabla_T^2 I^{1/2} - 2ike^{-i\phi(\vec{r})} \left[-iI^{1/2}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{2}I^{-1/2}\frac{\partial I}{\partial z} \right] \\ &= 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

si ahora hacemos lo mismo con la ecuación conjugada:

$$\begin{aligned} \left[\nabla_T^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u^*(\vec{r}) &= ie^{i\phi(\vec{r})}I^{-1/2}(\nabla_T\phi \cdot \nabla_T I) + e^{i\phi(\vec{r})}I^{1/2} [i\nabla_T^2\phi - |\nabla_T\phi|^2] \\ &+ ie^{i\phi(\vec{r})}\nabla_T^2 I^{1/2} + 2ike^{i\phi(\vec{r})} \left[iI^{1/2}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{2}I^{-1/2}\frac{\partial I}{\partial z} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Cancelando los términos exponenciales de (2.8) y (2.9), y restando ambas ecuaciones, se llega a:

$$2iI^{-1/2}(\nabla_T\phi \cdot \nabla_T I) + 2iI^{1/2}\nabla_T^2\phi + 2ikI^{-1/2}\frac{\partial I}{\partial z} = 0, \quad (2.10)$$

de donde inmediatamente resulta:

$$\nabla_T I \cdot \nabla_T\phi + I\nabla_T^2\phi + k\frac{\partial I}{\partial z} = 0, \quad (2.11)$$

que es precisamente la **Ecuación de Transporte de intensidad (ETI)**.

Ahora podemos proceder a analizar cada uno de sus términos. El primero de ellos es una derivada direccional, que indica la desviación del gradiente de intensidades en dirección a la normal del frente de onda. Este término es conocido con el nombre de *efecto prisma*, ya que describe la desviación de los haces lumínicos en función de su longitud de onda, de manera similar a la dispersión que se observa en un prisma.

El siguiente término involucra a la curvatura del frente de onda y representa un *efecto de lente*, pues mide la variación de la intensidad causada por la convergencia o divergencia del haz, como si pasara por una lente con distancia focal inversamente proporcional a $\nabla_T^2\phi$. Finalmente se tiene el término longitudinal $k\partial I/\partial z$, que es la variación de la intensidad a lo largo de la dirección de propagación, causada por los efectos anteriores.

De aquí en adelante se omitirá el subíndice T en los operadores diferenciales involucrados en la ecuación (2.11), teniendo en cuenta que siempre que hablemos de la ETI, nos referimos a los componentes transversales, a excepción claro, del término longitudinal. Podemos entonces, resumir la ecuación (2.11) y su significado en la siguiente forma:

$$\underbrace{\nabla I \cdot \nabla\phi}_{\text{Efecto prisma}} + \underbrace{I\nabla^2\phi}_{\text{Efecto lente}} = -k\frac{\partial I}{\partial z}. \quad (2.12)$$

Más aún, se puede compactar esta expresión, notando que $\nabla \cdot (I\nabla\phi) = \nabla I \cdot \nabla\phi + I\nabla^2\phi$, de donde es evidente que se trata una ecuación de conservación:

$$\nabla \cdot (I\nabla\phi) = -k\frac{\partial I}{\partial z}. \quad (2.13)$$

En esencia, cualquier ecuación de transporte en la física representa una ley de conservación local. En este caso la cantidad conservada es el flujo transversal de energía $I\nabla\phi$. De hecho, la misma ecuación se puede obtener a partir del teorema de Poynting considerando los límites de la óptica geométrica [15]; sin embargo, el haber obtenido la ETI primero de esta forma nos lleva de la mano a las restricciones experimentales que se deben tener en cuenta para usarla en la práctica (la aproximación paraxial y la forma explícita de la perturbación, por ejemplo).

2. Solución analítica

Una vez que tenemos una ecuación que representa cualquier problema físico, el primer reto es hallar una forma de resolverla. El método analítico no siempre conduce a una solución físicamente válida; de hecho, la mayoría de ecuaciones diferenciales parciales no tienen un método exacto para resolverse, pero ese será el primer intento que hagamos en este trabajo debido a lo que podemos rescatar de ahí para los próximos pasos. Para ello usaremos el método de la *función de Green*.

Cuando se tiene una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) de coeficientes constantes, esta se puede escribir de la forma:

$$Lu = -f,$$

donde L es el operador diferencial y f es una función de las variables involucradas, llamada *inhomogeneidad*. Cuando f es la constante cero se dice que la ecuación es homogénea.

Por otro lado, la *solución fundamental* de una ecuación homogénea, tal como la ecuación de Laplace, es una función (o distribución) E que cumple:

$$L(E) = -\delta,$$

donde δ es la distribución de Dirac.

La función de Green, G es entonces la corrección a esta solución fundamental para obtener la solución del problema con condiciones a la frontera específico, por medio de una convolución [16].

Para encontrar esta función, habrá que resolver la ecuación:

$$L(G) = -\delta, \quad (2.14)$$

que parece idéntica a la anterior, pero con la diferencia de que G también guarda la información de las condiciones de frontera dadas. La importancia de obtener la función G , radica en que se pueden generar las soluciones de la ecuación original mediante integraciones [16, 17]. Para el caso particular (y el que nos interesa aquí), en que el operador diferencial es el Laplaciano, ∇^2 , se tendría que $\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$, para todo \vec{r} dentro del dominio, Ω . Y la solución a la ecuación no homogénea:

$$\nabla^2 \Phi = -f(r), \quad (2.15)$$

está dada por:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') dr' + \int_{\partial\Omega} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n} - \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right] dS'. \quad (2.16)$$

Ahora bien, veamos que la ecuación (2.13) es básicamente la de Laplace con un término no homogéneo ($k\partial I/\partial z$), que se conoce como *ecuación de Poisson*. Introduciendo la **función auxiliar**:

$$\Phi \equiv I\nabla\phi, \quad (2.17)$$

propuesta inicialmente por Teague [12], la nueva ecuación de Poisson, o ETI, se transforma como:

$$\nabla^2 \Phi = -k \frac{\partial I}{\partial z}. \quad (2.18)$$

Al tener (2.18) con condiciones de Dirichlet, por ejemplo, resolveremos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') &= -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), & \vec{r} \in \Omega \\ G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\partial\Omega} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

y con esto, la solución viene dada por la siguiente integral:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\Omega} Gk \frac{\partial I}{\partial z} + \int_{\partial\Omega} \left[G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS' \quad (2.20)$$

En [12, 18] se hace la simplificación suponiendo que la intensidad es constante en el plano $z = 0$, por lo que:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{k}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial z}$$

y en el interior de esta región, se tiene:

$$\Phi = I_0(\phi + c) \quad (2.21)$$

con la variación de la intensidad obtenida por diferencias finitas.

Por otro lado, si nos encontramos en un dominio de dimensión 2, que es el caso del plano de la pupila, se obtiene ya sea con métodos de análisis funcional o la integración de (2.19), que la función de Green para el Laplaciano tiene la forma:

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\Lambda} \right), \quad (2.22)$$

donde Λ es un factor que introduce las propiedades geométricas del sistema.

Notemos que, aunque ya tenemos una expresión para la solución Φ en forma integral, su evaluación requiere necesariamente conocer los valores a la frontera, tanto de Φ como de su derivada. Esto, por supuesto, es poco factible para los propósitos experimentales, pues la fase es precisamente lo que nos interesa conocer. Teague [12] propone hacer las mediciones de frontera con un sensor Hartmann-Shack, sin embargo, para el objetivo de este trabajo, la propuesta carece de sentido, pues resolviendo la ETI se busca reemplazar este aparato para las mediciones y, en general, este método no ha sido implementado en algún otro trabajo. Podríamos pensar inmediatamente en imponer las condiciones de contorno en el propio arreglo experimental, y encontraremos que cada método tiene sus propias implicaciones. En las siguientes secciones se aclarará más la solución a este conflicto.

2.1. Condiciones de frontera. Acabamos de visualizar parte de los inconvenientes al tratar con valores a la frontera. Adicionalmente, no debemos pasar por alto el primer paso al trabajar con una ecuación diferencial parcial: averiguar cuándo está bien definida (que tenga solución y sea única). A continuación se resume lo que pasa con la solución dependiendo de las condiciones de contorno que se tengan.

- Condiciones de *tipo Dirichlet*.

La solución siempre existe y es única [19].

- Condiciones de *tipo Neumann*.

La existencia y unicidad de la ecuación está condicionada a que se cumpla la *condición de compatibilidad*:

$$\oint_{\partial\Omega} I(\vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n} dS' = \iint_{\Omega} -k \frac{\partial I(\vec{r})}{\partial z} d\vec{r}'. \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) representa una ley de conservación y se obtiene utilizando el Teorema de la divergencia al integrar la ETI; notemos que el lado derecho de la ecuación representa un dato conocido por las mediciones de intensidad, mientras que el lado izquierdo necesita ser determinado con condiciones de contorno. Como se mencionó anteriormente, la medición o reproducción de señales a la frontera siempre conlleva dificultades en la práctica; por ello, se busca la forma de resolver el problema sin necesidad de dichas mediciones. Para que esto ocurra, es necesario que el término izquierdo de la ecuación de compatibilidad se anule. Físicamente esta

condición equivale al caso particular en que no hay transferencia de energía neta a través de la frontera del dominio.

Es importante enfatizar que el no necesitar hacer mediciones a la frontera no significa que no debemos imponer *condiciones de frontera*, pues las últimas son siempre necesarias para resolver una EDP.

Una de las formas más prácticas de hacerlo es introduciendo una **Abertura de Borde Duro** (ABD) [20] en el plano pupila $z = 0$, es decir, una función:

$$A_{\Omega}(\vec{r}) := \begin{cases} 1, & \vec{r} \in \bar{\Omega} \\ 0, & \vec{r} \notin \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Al introducir la ABD en (2.13), se obtiene

$$A_{\Omega} \nabla \cdot (I \nabla \phi) - I \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta_{\partial \Omega} = -k \frac{\partial I}{\partial z}. \quad (2.25)$$

El significado de (2.25) es simple pero radical. El primer término del lado izquierdo no es más que la variación de intensidad dentro del dominio de la pupila, como si la abertura no estuviera. El segundo término resulta de considerar el contorno del dominio (incluido en $\bar{\Omega}$), y representa una función de tipo delta de Dirac con su pico en la frontera que, además, proporciona las condiciones de contorno precisas que se necesitan imponer: condiciones tipo Neumann [21].

Con esto, regresamos al problema de hallar la función de Green G para la ecuación (2.25), pero con condiciones de tipo Neumann:

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') &= -\delta(\vec{r} - \vec{r}') + |\Omega|^{-1}, \quad \vec{r} \in \Omega \\ \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} &\equiv 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

lo que nos regresaría la función Φ en términos de G :

$$\Phi(\vec{r}) = \iint_{\bar{\Omega}} -k \frac{\partial I(\vec{r}')}{\partial z} G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}'. \quad (2.27)$$

Ahora que hemos evitado el hacer mediciones de contorno parece más sencillo el proceso: simplemente encontramos G y aplicamos (2.27). Sin embargo, aún falta encontrar la fase original $\phi(\vec{r})$, para lo que habrá que recordar la definición de la función auxiliar (2.17). La recuperación de la fase parece involucrar la solución de otra ecuación diferencial (recordemos que en este caso se considera que Φ ya es conocida), que además es una ecuación vectorial. El método para encontrar la solución es hallar la función escalar ϕ cuyo gradiente se aproxime más al campo vectorial $I^{-1} \nabla \Phi$ (usualmente encontrada con métodos iterativos) [22], y este problema es equivalente a resolver la ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \nabla \cdot (I^{-1} \nabla \Phi), \quad \vec{r} \in \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

La solución a (2.28) se calcula inmediato con el método que ya conocemos, pues que se trata del mismo problema de Dirichlet. Por lo tanto, se obtiene que:

$$\phi(\vec{r}) = \iint_{\bar{\Omega}} \nabla \cdot (I^{-1} \nabla \Phi(\vec{r}')) G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}', \quad (2.29)$$

con la misma función de Green obtenida en (2.26).

En resumen, para recuperar la fase hay que resolver (2.26), calcular (2.27) y por último (2.29). O dicho de otra forma, el problema se convierte en las dos ecuaciones de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = -k \frac{\partial I}{\partial z} \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (I^{-1} \nabla \Phi). \quad (2.31)$$

Notemos que la fase será recuperada salvo una constante aditiva, que resulta de considerar los gradientes en (2.17).

Hay otros estudios de soluciones analíticas en casos específicos, donde se resuelve para $I(\vec{r})$ la ETI homogénea (2.32):

$$\nabla \cdot (I \nabla \Phi) = 0 \quad (2.32)$$

Con esta solución se calcula una derivada discreta de la intensidad calculando su valor en planos desenfocados y posteriormente se recupera la fase Φ de forma numérica con el método de sobre-relajación (SOR). La referencia para obtener más detalles sobre este método es [14]. Algo interesante de éste método es que al analizar las soluciones específicas de un frente de onda plano o un frente de onda esférico, se concluye la interpretación de las condiciones de validez (2.6); en resumen se requiere de la aplicación en el régimen paraxial y que el perfil de intensidad sea casi lineal en un pequeño lapso en dirección de la propagación.

En la siguiente sección también emplearemos la solución analítica recién estudiada, pero nos enfocaremos en casos específicos determinados por la geometría de las regiones de integración. En este caso, resolveremos (2.13) directamente para Φ , asumiendo que se puede conocer la derivada de la intensidad mediante mediciones en planos desenfocados.

3. Soluciones numéricas

Ahora que hemos dado una representación analítica de la solución a la ETI, además de resolver en gran parte el problema de mediciones de frontera, las expresiones en términos de la función de Green nos permite implementar métodos numéricos para recuperar la fase, que van más allá del clásico cálculo de diferencias finitas.

Comencemos por notar que G se puede expandir en términos de las funciones propias del operador Laplaciano, dependiendo éstas de la región de dominio:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}(\vec{r}) \Psi_{nm}(\vec{r}')}{\lambda_{nm}}. \quad (2.33)$$

Particularmente, para una región rectangular, de lados a y b , las funciones se encuentran de manera sencilla [17] y así G se expresa como una combinación de armónicos de Fourier cosenoidales, donde

$$\lambda_{nm} = -\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad (2.34)$$

$$\Psi_{nm}(\vec{r}) = a_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

De esta manera, sólo quedaría sustituir en (2.27) y (2.29) para obtener:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{nm}^{-1} \left[a_{nm}^2 \iint_{\Omega} -k \frac{\partial I(\vec{r}')}{\partial z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) dr' \right] \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (2.35)$$

yanálogamente para ϕ , como se desea. Sin embargo, recordemos que al tratar con datos discretos, precisamos de discretizar las expresiones, y esto se hará usando la *Transformada de Coseno Discreta* (**DCT** por sus siglas en inglés), ya que se encuentra involucrada una expansión cosenoidal.

La DCT, de una señal unidimensional f , dado un muestreo uniforme $\{f(n); n = 0, 1, \dots, N-1\}$, se define por:

$$F(k) = A_k \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos\left[\frac{k\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (2.36)$$

Asímismo, la DCT inversa de la señal F es:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k F(k) \cos\left[\frac{k\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (2.37)$$

Para una señal bidimensional y un muestreo de $N \times M$, se tendría una doble expansión (dos DCT unidimensionales seguidas), en la que las variables son separables. Así, la forma discretizada de la integral en (2.35) es:

$$S_{m,n} = A_m A_n \sum_{x'=0}^{M-1} \sum_{y'=0}^{N-1} -k \frac{\partial I(\vec{r}')}{\partial z} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x' + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y' + \frac{1}{2}\right) dr' \quad (2.38)$$

que es una DCT 2-dimensional de la variación de intensidad, y finalmente:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_m A_n \lambda_{nm}^{-1} S_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y + \frac{1}{2}\right), \quad (2.39)$$

que termina siendo la DCT inversa de $S_{m,n}$ bajo una reponderación de los coeficientes sobre los valores propios correspondientes.

Eventualmente hemos llegado al algoritmo que nos permite calcular la solución a la ETI basado en la DCT [20], y es el siguiente:

1. Calcular la derivada de la intensidad con el método de diferencias finitas, a través de la medición de I en planos vecinos al plano focal.
2. Aplicar una transformada discreta DCT a esta derivada.
3. Multiplicar por la matriz inversa de eigenvalores correspondientes del Laplaciano.
4. Calcular las derivadas necesarias de la serie obtenida para Φ , y obtener el término de convección.

5. Aplicar los pasos 2 y 3 para obtener ϕ .

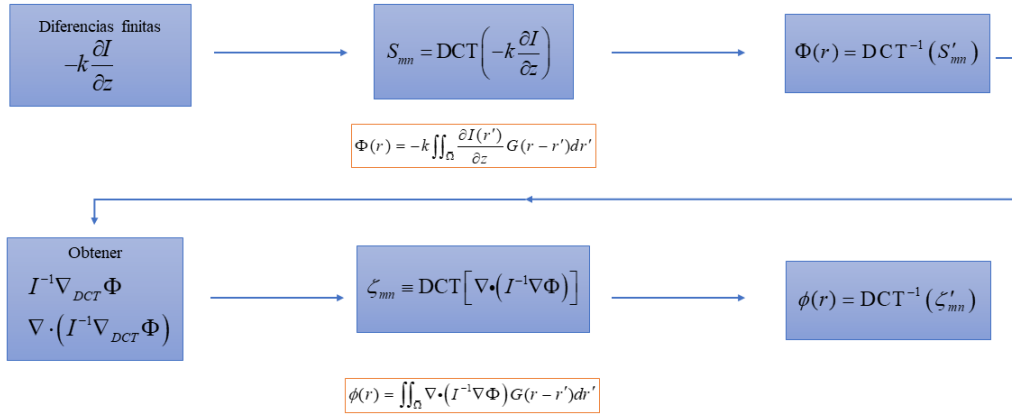


Figura 2.2. Algoritmo de solución de la ETI basado en DCT.

Como se intenta representar en la Figura 2.2, los primeros tres pasos del algoritmo pretenden resolver la primera ecuación de Poisson (2.30), mientras que los restantes están determinados a resolver la segunda de estas ecuaciones (2.31). Usualmente la solución del problema completo (2.13) suele expresarse como:

$$\phi(\vec{r}) = -k \nabla^{-2} \nabla \left\{ I(\vec{r})^{-1} \nabla \nabla^{-2} \frac{dI(\vec{r})}{dz} \frac{\partial I}{\partial z} \right\}, \quad (2.40)$$

en donde ∇^{-2} o el “laplaciano inverso”, representa simplemente la solución de la ecuación de Poisson correspondiente a la homogeneidad a la que es aplicado.

Una de las ventajas de este método es que toma en cuenta condiciones no homogéneas de Neumann. Un algoritmo que permite hacer más rápido el cálculo de la DCT, es usando la *Transformada rápida de Fourier* (FFT por sus siglas en inglés), que consiste en usar la expansión exponencial en lugar de la expansión de cosenos y realizar los mismos pasos anteriores [23] [19]. La FFT reduce el tiempo de computo original $O(NM)$ a un tiempo de orden $O(N \log(M))$, sin embargo en este método sólo son consideradas las condiciones homogéneas o periódicas de frontera. Para reparar el asunto de tener más dominios de frontera, se opta por un método iterativo basado en DCT, el cuál consiste en realizar el algoritmo DCT repetidas veces hasta que la solución sea autoconsistente, o converja [24].

3.1. Problemas con los métodos numéricos.

Regiones y valores pequeños. Una de las principales limitaciones del algoritmo DCT es la región de dominio, ya que la solución analítica solo se calculó para regiones rectangulares. El algoritmo iterativo basado en esta misma solución, promete resolver el problema de considerar regiones arbitrarias (siempre que el contorno sea dos veces diferenciable por pedazos) lo cual podremos comprobar más adelante en las simulaciones. Sin

embargo, existe otra dificultad al tratar con experimentos reales, y se trata de los valores de intensidad pequeños. La unicidad de la ETI (2.13) está asegurada sólo cuando $I \neq 0$ para todo valor de intensidad [25], en el caso que aparezcan valores muy cercanos a cero, se llega a una indeterminación y los cálculos en el algoritmo sufren consecuencias importantes.

Discrepancia de fase. La discrepancia de fase es otro problema que nace desde la introducción de (2.17). La suposición de que exista este potencial escalar que cumple la ecuación (2.18) implicaría que el flujo $I\nabla\phi$ es irrotacional, ya que

$$F = \nabla\phi \Leftrightarrow \nabla \times F = 0$$

para cualquier campo vectorial F . Por el teorema de Helmholtz, sabemos que un campo vectorial se puede descomponer en dos términos: uno que involucra un potencial escalar y, el otro un potencial vectorial. De esta forma,

$$I\nabla\phi = \nabla\Phi + \nabla \times \eta. \quad (2.41)$$

Es lógico que la conservación total del flujo no es siempre cierta en el experimento, pues siempre habrá pequeñas variaciones en la dirección o la velocidad del campo real. La pregunta entonces es: ¿cuándo sí puede ser despreciable el término rotacional (que contiene al potencial vectorial)? Zuo et al. [20] han trabajado en encontrar una condición de validez para la hipótesis de Teague, y esta resulta ser la siguiente.

$$\nabla I(r)^{-1} \times \nabla^{-2} \{ \nabla \cdot [\nabla I(r) \times \nabla\phi(r)] \} = 0. \quad (2.42)$$

Dicho en palabras, si la distribución de intensidad es casi uniforme en el foco, entonces la discrepancia de fase resultante de la función auxiliar es despreciable.

3.2. Solución universal. Por su parte, Zhang et al. [26] han desarrollado un algoritmo, que pretende reparar todos los problemas mencionados anteriormente, a los que nos enfrentamos al tratar de resolver la ETI. El llamado *Algoritmo Universal* ('US' por sus siglas en inglés) se deshace de los inconvenientes de la discrepancia de fase causada al introducir (2.17), de la indeterminación en valores nulos de intensidad, o los problemas de condiciones de frontera. La idea general es resolver las ecuaciones (2.30), (2.31) con alguno de los métodos conocidos e ir agregando correcciones a la solución hasta obtener un valor autoconsistente (ver Figura 2.3). Para ello, lo primero es considerar un valor de intensidad I_{max} como valor inicial uniforme sobre el plano de enfoque. En el experimento este valor estará dado por el máximo de intensidad medido en ese plano. Observemos que al introducir $I_{max} \equiv \tilde{I}$ en la ETI (2.13) se obtiene una ecuación de Poisson sin necesidad de la función auxiliar:

$$\nabla^2\phi = \frac{-k}{\tilde{I}} \frac{d\tilde{I}}{dz}, \quad (2.43)$$

en donde $\frac{d\tilde{I}}{dz}$ de nuevo puede ser obtenida por diferencias finitas. La ecuación (2.43) puede ser resuelta por el método DCT visto previamente, y el resultado ϕ_0 servirá como función de prueba inicial para la solución final. Observemos que si el resultado previo es introducido nuevamente en una ETI, podremos obtener una derivada de intensidad artificial:

$$J_1 = \frac{1}{k} \nabla \cdot I\nabla\phi_0 \quad (2.44)$$

ya que $\frac{d\tilde{I}}{dz}$ es un valor del que podemos tener certeza, pues lo obtenemos por medición, la diferencia entre éste y las derivadas artificiales funcionarán como una señal de error que nos diga cuándo la solución está convergiendo.

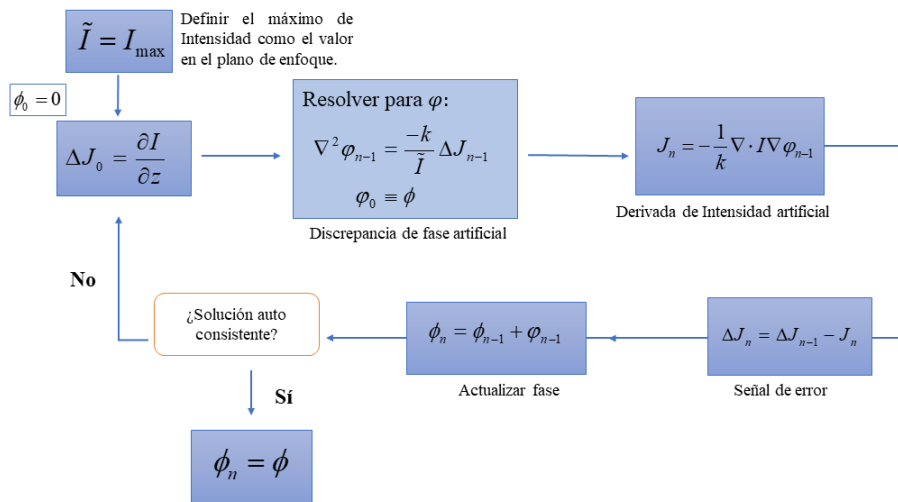


Figura 2.3. Algoritmo de solución universal (US) de la ETI basado en DCT.

Otra cosa a notar dentro del algoritmo US es que no se está tomando en cuenta la forma de la pupila, ya que gracias a la iteración se compensan las posibles discrepancias en los valores a la frontera, y en la solución del paso tres se involucra una transformada rápida de Fourier (FFT). Por último, la suposición inicial de I uniforme resuelve el problema de dividir por cero.

Simulaciones

En este capítulo, se comenzará comparando las reconstrucciones de fase de un frente de onda aberrado, simuladas por los mismos autores de los algoritmos en sus trabajos[21], [27]. Se hará la reconstrucción con perfiles de intensidad diferentes: primero un perfil gaussiano sin intensidades bajas, después un perfil gaussiano con valores de intensidad casi cero. Posteriormente se harán las mismas simulaciones introduciendo un frente de onda esférico y uno plano.

En todas las simulaciones se introduce el perfil de intensidades gaussiano:

$$I(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}, \quad (3.1)$$

cambiando el parámetro de varianza σ según sea el caso, de un *borde duro* (sin intensidades pequeñas en la frontera) o un *borde suave* (con intensidades pequeñas en la frontera) como se indica en la Tabla 3.1. Es importante destacar que, en el caso del borde suave, el valor mínimo de intensidad alcanzado en los bordes es de $I = 1.62 \times 10^{-18}$, mientras que en el caso del borde duro es de $I = 1.4 \times 10^{-3}$.

Tabla 3.1. *Parámetro de varianza para el perfil de intensidad.*

Caso	σ
Borde de duro (sin valores pequeños)	2×10^{-4}
Borde suave (con valores pequeños de intensidad)	0.8×10^{-4}

Tabla 3.2. *Parámetros para las simulaciones.*

Longitud de onda (λ)	$0.633 \times 10^{-6} m$
Resolución de pixeles	256×256
Tamaño de pixeles	$2 \times 10^{-6} m$
Distancia de desenfoque (dz)	$10^{-6} m$
No. máximo de iteraciones	500

Para obtener la distribución de intensidad en los planos de desenfoque se hace una propagación numérica con el método de *espectro angular*, que consiste en descomponer el campo de la onda compleja en una suma de

ondas planas por medio de una transformada de Fourier, aplicar una transformación de propagación y después recuperar el campo sobre el plano desconocido con la transformada inversa [28]. Asimismo, los parámetros a considerar para los cálculos numéricos de estas simulaciones están indicados en la Tabla 3.2. Además, en la Tabla 3.3 se detallan las especificaciones de la computadora utilizada para realizar todas las simulaciones, la cual es una computadora personal portátil.

Tabla 3.3. Especificaciones de cómputo para correr las simulaciones.

Procesador	Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU @ 1.60GHz 1.80 GHz
Memoria RAM	8.00 GB
Sistema operativo	64 bits, procesador x64

1. Frente de onda aberrado

En esta primer simulación se intenta recuperar la fase del frente de onda dado por la siguiente función de fase:

$$\phi(x, y) = x^2 - 0.7x - y^2 + 2y + \frac{41}{50}, \quad (3.2)$$

correspondiente a un frente onda aberrado por astigmatismo y distorsión (Figura 3.1), y es la utilizada por Zuo, Chen y Asundi en su artículo [19].

En el primer caso, se introducirá la función de fase (3.2), con el perfil de intensidad gaussiano y borde duro, como se muestra en la Figura 3.2. Por simplicidad, en las imágenes y tablas correspondientes nos referiremos a este caso con las siglas FABD (Frente de Onda Aberrado y Borde Duro). Los resultados de las fases recuperadas con cada método se muestran en la Figura 3.3.

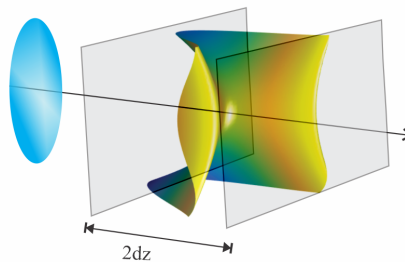


Figura 3.1. Propagación del frente de onda geométrico aberrado después de pasar por un medio refractivo transparente. Se marcan los planos de detección desenfocados, cada uno a una distancia dz del plano pupila, atrás y adelante respectivamente.

En la Figura 3.3 se puede observar a simple vista que las fases recuperadas más cercanas a la original son las de los métodos FFT, DCT iterativo y el universal (US), sin embargo, al comparar sus respectivos RMSE, es el método FFT el que arroja un mayor valor de error (3.95 en Figura 3.3(e)), mientras que el del método DCT simple se mantiene relativamente bajo (1.93 en Figura 3.3(f)), y el de US del orden de 10^{-4} (Figura 3.3(h)), es decir, un 0.000192%, que se encuentra hasta dos órdenes por debajo respecto a los otros métodos.

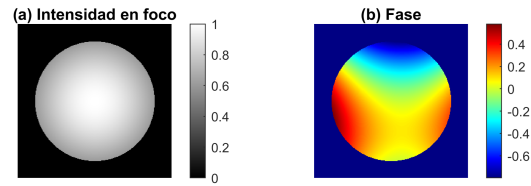


Figura 3.2. (FABD) (a) Perfil de intensidad gaussiano, sin valores pequeños, medido en el plano de enfoque. (b) Frente de onda original de la ecuación (3.2) que es introducido en la simulación.

Asímismo, en Figura 3.4 se observan gráficamente estos errores RMSE contra el número de iteración para dos de los algoritmos (US y DCT iterativo), de donde podemos observar que el método iterativo con DCT no presenta un cambio significativo después de la primer iteración, mientras que el algoritmo universal se reduce de manera exponencial, creando una ventaja significativa sobre el primero. De igual forma, se muestra la comparación gráfica entre el tiempo por iteración (Figura 3.5(a)) y el tiempo total (Figura 3.5(b)) de estos dos algoritmos, observando claramente que en el primero, US, toma ventaja sobre iterDCT, aunque ambos tienden a oscilar de manera similar, mientras que el tiempo total para el algoritmo US es hasta menos del 15 % que el de iterDCT.

Para ver estas comparaciones con mayor claridad, se presentan en la Tabla 3.4 los RMSE en porcentajes de amplitud, así como los tiempos de cómputo totales de cada algoritmo.

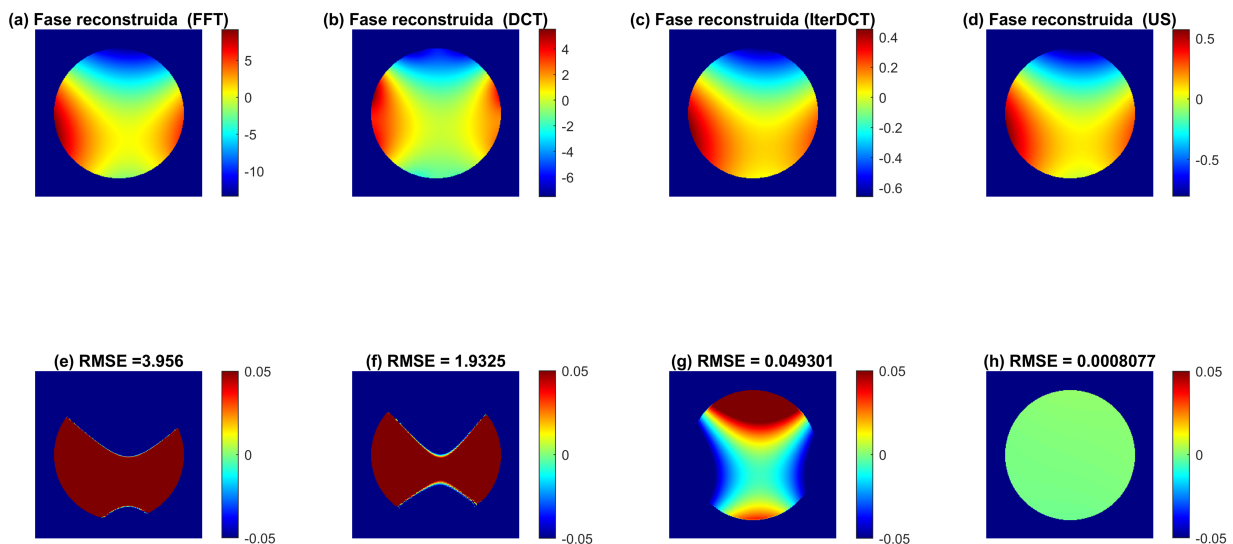


Figura 3.3. (FABD). (a), (b), (c), (d): Fases recuperadas con los distintos algoritmos, con un perfil de intensidad gaussiano sin valores pequeños. (e), (f), (g), (h): Errores RMSE de los correspondientes métodos.

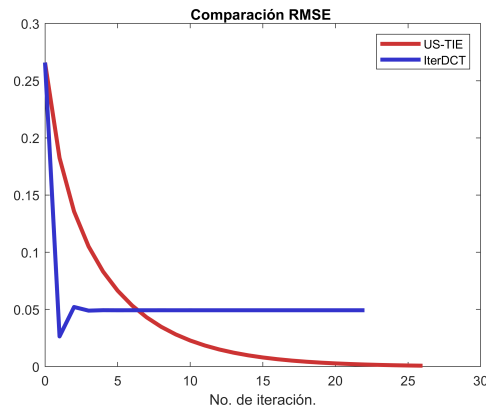


Figura 3.4. (FABD). Comparación de los errores RMSE respecto al número de iteraciones, entre el algoritmo universal y el iterativo con DCT.

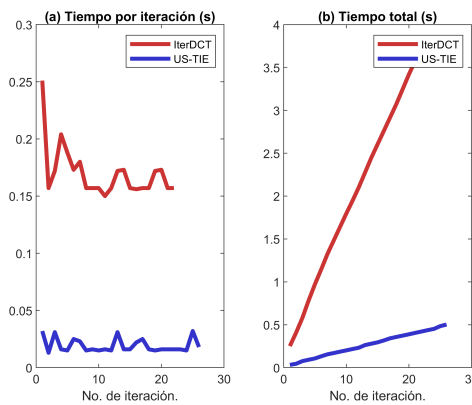


Figura 3.5. (FABD). (a) Comparación del tiempo por iteración y (b) el tiempo total de cómputo entre el algoritmo universal y el iterativo.

Tabla 3.4. (FABD) Tiempo de cómputo y RMSE.

Método	Tiempo de cómputo (s)	RMSE en porcentaje de amplitud (%)
FFT	0.047	0.0287
DCT	0.251	0.0140
iterDCT	0.157	0.0019
US	0.018	0.0002

En el siguiente caso, la misma fase es introducida y propagada con un perfil de intensidad gaussiano con valores que se aproximan a cero cerca de la frontera. Para esta Fase Aberrada con un Borde Suave (FABS), el perfil de intensidad se ve en la Figura 3.6. En este segundo proceso, ya se puede observar la repercusión de tener valores de intensidad casi cero en la frontera (Figura 3.7). Notemos, por ejemplo, la fase recuperada con el algoritmo iterDCT, que al iterar operaciones con valores cercanos a cero llega a un momento en el que la solución comienza a diverger. Lo anterior se puede ver claramente al graficar el comportamiento del error RMSE respecto al número de iteraciones. En la Figura 3.8 se muestra una comparación de este comportamiento, entre el

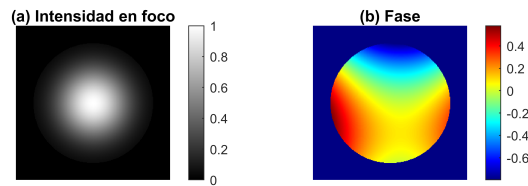


Figura 3.6. (FABS). (a) Perfil de intensidad gaussiano, con valores pequeños, medido en el plano de enfoque. (b) Fase del frente de onda original de la ecuación 3.2 que es introducido en la simulación.

algoritmo iterDCT y el algoritmo US. Como se puede apreciar, el RMSE del primero tiene un comportamiento oscilante hasta llegar a un momento de divergencia antes de las 20 iteraciones, mientras que el segundo mantiene un decaimiento exponencial hasta un momento de consistencia cerca de las 100 iteraciones, que es cuando se detiene el proceso.

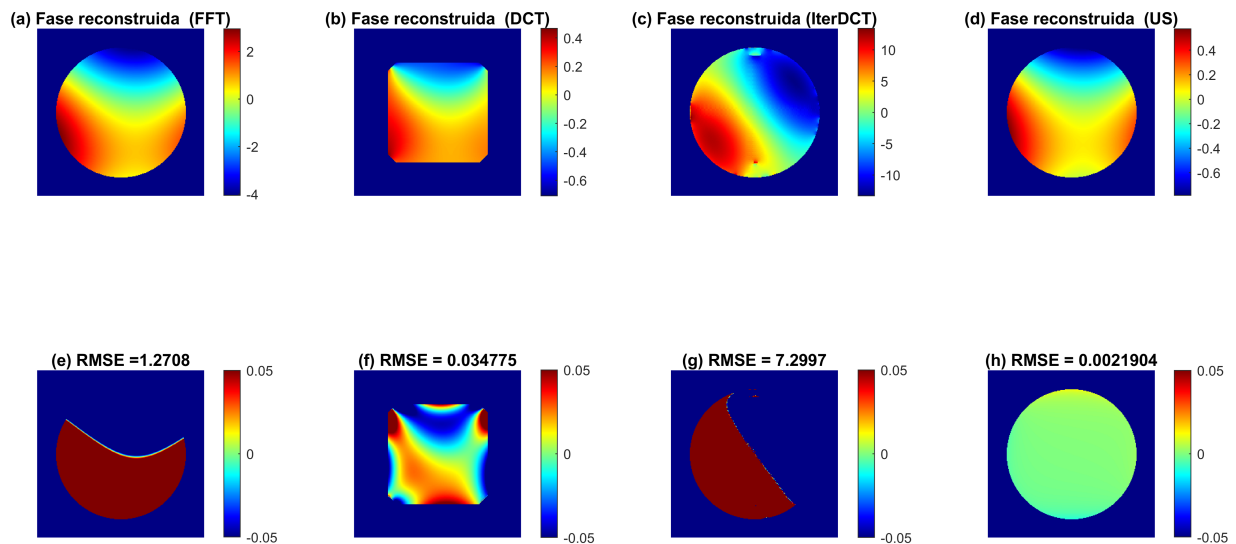


Figura 3.7. (FABS). (a), (b), (c), (d): Fases recuperadas con los distintos algoritmos. (e), (f), (g), (h): Errores RMSE de los correspondientes métodos.

En la Figura 3.9 se observa una estabilidad en el tiempo por iteración del algoritmo universal, mientras que la oscilación del gráfico para el iterativo tiene una amplitud de alrededor de 0.15 segundos. En cuanto al tiempo total, también se ve una clara diferencia, haciendo el algoritmo universal más rápido. Algo similar pasa en el caso anterior con la abertura de borde duro. Esto puede parecer una clara desventaja, sin embargo hay que tomar en cuenta que, como se vio arriba, se podría considerar que el primer método 'converge' desde antes y por ello las siguientes iteraciones ya no son necesarias, que es lo que realentiza el tiempo.

Habrá que ver, por ejemplo, que la recuperación con DCT equivale a una sola vuelta del algoritmo iterativo y este se ve más aproximado a la fase original. La comparación entre los tiempos de cómputo y el RMSE se ven en

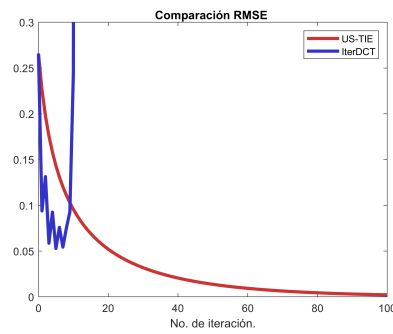


Figura 3.8. (FABS) Frente de onda aberrado y perfil gaussiano con valores pequeños de intensidad. Se observa a través de la comparación de los errores RMSE cómo la solución con DCT iterativa comienza a diverger a partir del décimo ciclo, mientras que la solución Universal converge uniformemente, después de aproximadamente la iteración 60.

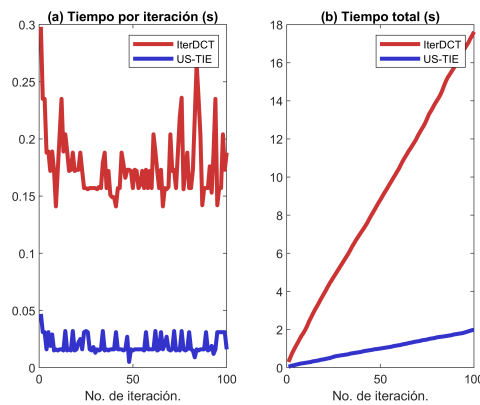


Figura 3.9. (FABS). (a) Comparación del tiempo por iteración y (b) el tiempo total de cómputo entre el algoritmo universal y el iterativ

la tabla 3.5.

Tabla 3.5. (FABS). Tiempo de cómputo y RMSE.

Método	Tiempo de cómputo (s)	RMSE en porcentaje de amplitud (%)
FFT	0.032	0.0092
DCT	0.173	0.0003
iterDCT	0.188	0.0019
US	0.016	0.0007

No obstante, usando el RMSE como parámetro principal, tanto en el caso de borde suave como en el borde duro, este presenta varios órdenes de diferencia menor en el algoritmo universal, siendo el último caso (FABS) el más notorio, incluso visiblemente en la recuperación con los otros métodos.

2. Frente de onda esférico

A continuación, se introduce un frente de onda esférico dado por la función de fase (3.3) para su recuperación de fase.

$$\phi = x^2 + y^2 + 0.81 \quad (3.3)$$

Al igual que antes, primero tomaremos el caso en el que el haz gaussiano no tiene valores de intensidad pequeños a la frontera (FEBD) como en la Figura 3.10. La Figura 3.11 muestra los resultados de la recuperación de fase al introducir un perfil de intensidad gaussiano de borde duro. Una vez más, se aprecia la mayor aproximación que tienen los métodos iterDCT y US al recuperar la fase original, notando además que el máximo valor de error para este último es menor por 3 órdenes.

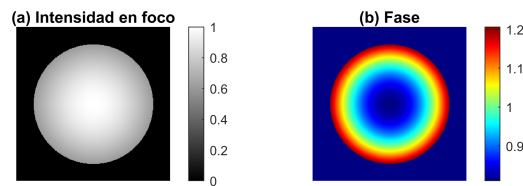


Figura 3.10. (FEBD). (a) Perfil de intensidad gaussiano con valores regulares, medido en el plano de enfoque. (b) Frente de onda original de la ecuación 3.2 que es introducido en la simulación.

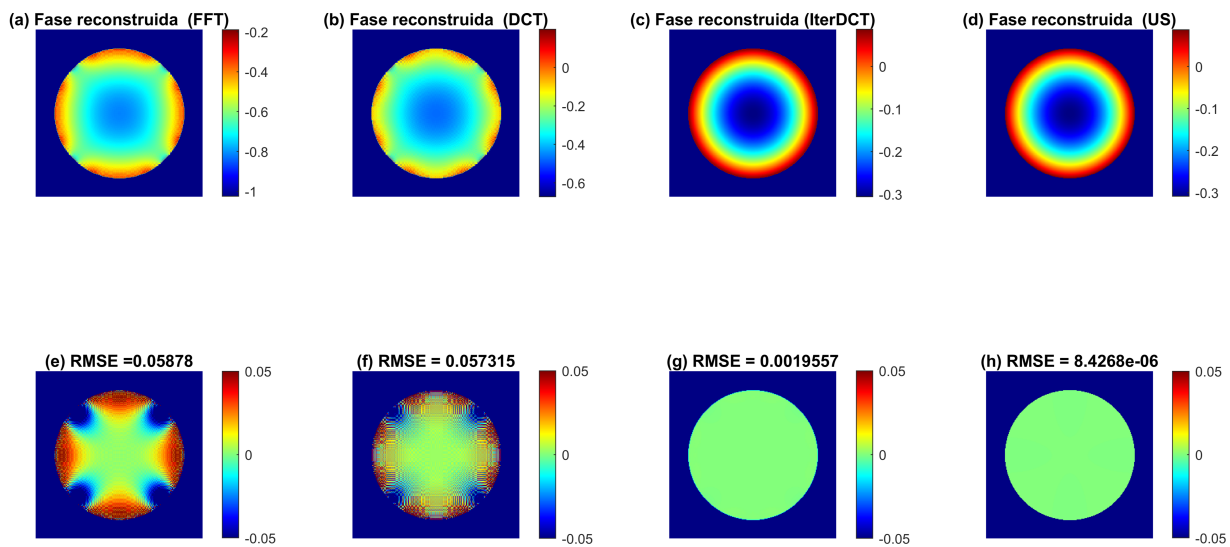


Figura 3.11. (FEBD). (a), (b), (c), (d): Fases recuperadas con los distintos algoritmos. (e), (f), (g), (h): Errores RMSE de los correspondientes métodos.

En el caso del frente esférico, el resultado visible es que la recuperación de fase con los métodos Universal e iterativo, son los mejor aproximados, siendo este último el mejor por tres órdenes de magnitud refiriéndonos al RMSE. Sin embargo, esto podría no hacer una diferencia relevante de acuerdo a la aproximación que se

requiera, pues veamos que en la comparación gráfica (Figura 3.12) los algoritmos iterativo y universal convergen, casi simultáneamente, incluso antes del número total de iteraciones. Por otro lado, el problema de cálculo para los métodos de una sólo iteración (FFT y DCT) se vuelve evidente tanto para la reconstrucción de fase (Figura 3.11(a),(b)) como para el RMSE (Figura 3.11(e),(f)), pues recordemos que estos métodos se aplican típicamente en dominios rectangulares, por lo que en este caso hay que considerar condiciones periódicas para ajustarse a las condiciones de frontera.

El tiempo de cómputo, por su parte, podría ser una variante más importante al decidir qué algoritmo escoger, pues un factor menor que un tercio en el tiempo de cómputo total respecto al algoritmo iterativo. Esto puede darle ventaja al universal en caso de requerirse, por ejemplo, en óptica adaptativa (ver Figura 3.13).

En contraste con las recuperaciones gráficas de fase, en porcentaje de amplitud el RMSE del US es mejor por

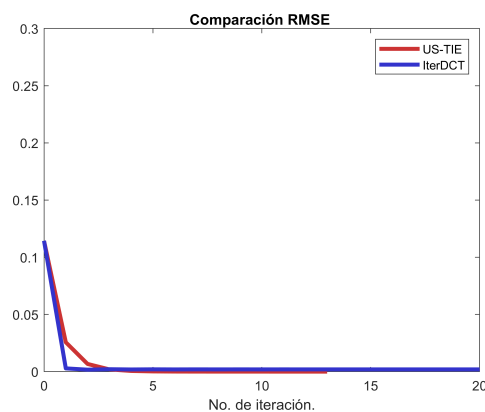


Figura 3.12. (FABD). Comparación de los errores RMSE respecto al número de iteraciones, entre el algoritmo universal y el iterativo con DCT.

tan sólo un orden de magnitud con respecto a los otros algoritmos, mientras que el tiempo de cómputo total es comparable con el del método FFT (Tabla 3.6).

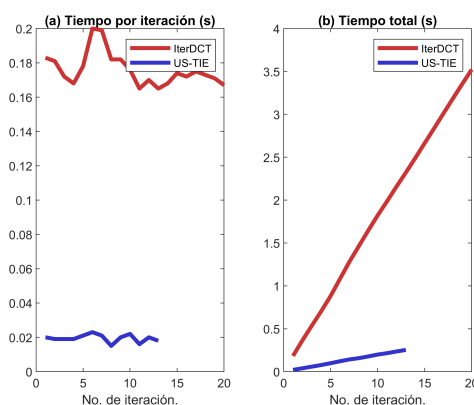


Figura 3.13. (FEBD). (a) Comparación del tiempo por iteración y (b) el tiempo total de cómputo entre el algoritmo universal y el iterativo.

De nueva cuenta se introduce el frente de onda esférico, ahora con un perfil de intensidad gaussiano pero de bordes suaves (Figura 3.14). Los resultados de recuperación de fase para este caso se muestran en la Figura

Tabla 3.6. (FEBD) Tiempo de cómputo y RMSE

Método	Tiempo de cómputo (s)	RMSE en porcentaje de amplitud (%)
FFT	0.020	0.0015
DCT	0.122	0.0014
iterDCT	0.167	0.0029
US	0.018	0.0001

3.15. Se puede apreciar una dificultad más notoria para el algoritmo iterDCT al recuperar la fase con valores de intensidad pequeños en la frontera (Figura 3.15(c)). Incluso para un frente de onda bien comportado como lo es el caso de uno esférico, este comportamiento de la recuperación con DCT es en cierta forma esperado, recordando que el algoritmo en sí no evita la división por cero, mientras que el algoritmo de solución universal (US) sí lo hace (Figura 3.15(d)).

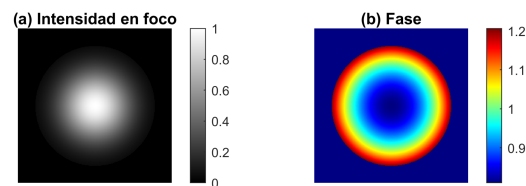


Figura 3.14. (FEBS). (a) Perfil de intensidad gaussiano, con valores pequeños de intensidad en la frontera, medido en el plano de enfoque. (b) Frente de onda original de la ecuación 3.2 que es introducido en la simulación.

Notemos que para este frente de onda, una sólo iteración con el método DCT o FFT parecieran ser suficientes para recuperar la información de fase (Figura 3.15 (a) y (b)), por lo que la siguiente instancia será de nuevo comparar el desempeño en el RMSE (Figura 3.16) y el tiempo de cómputo (Figura 3.17).

En conclusión, el algoritmo de Solución Universal vuelve a tomar ventaja sobre el DCT iterativo, en tiempo total de cómputo y en cuanto al RMSE, aunque dependerá de la aproximación requerida para los fines deseados, ya que incluso los RMSE no diferirán significativamente en este caso si se toma en su lugar una iteración de DCT, como se puede ver en la Figura 3.16 para las primeras iteraciones de iterDCT con respecto a las consecuentes del algoritmo US. También se puede notar este hecho directamente en los valores de la Tabla 3.7, donde claramente el algoritmo US es similar a los demás algoritmos, excepto el iterativo.

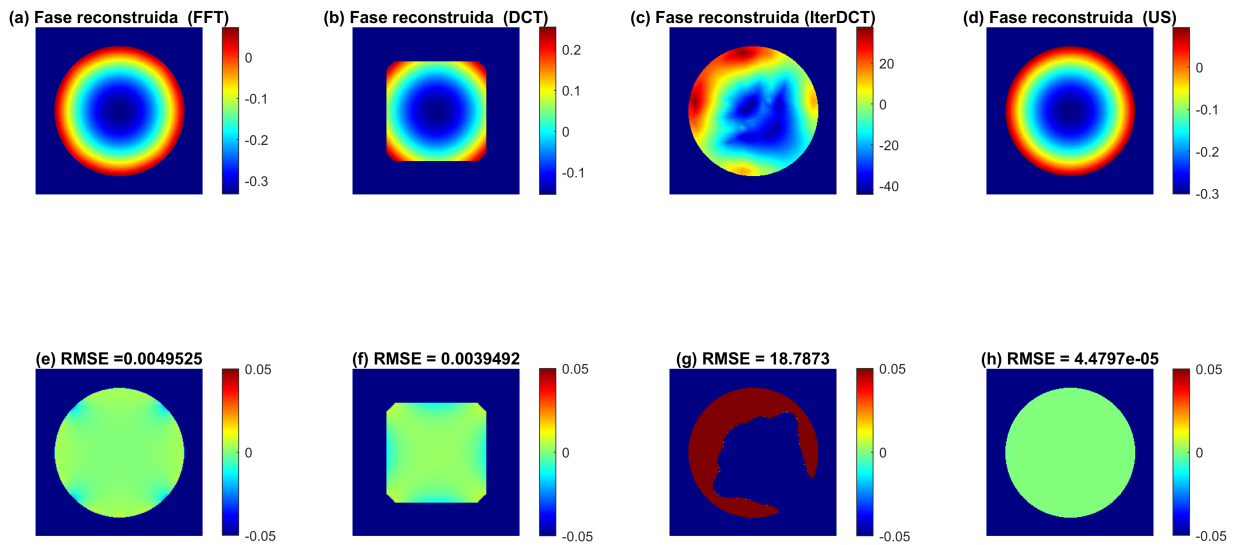


Figura 3.15. (FEBS) Frente de onda esférico con un perfil de intensidad gaussiano con valores pequeños en la frontera. (a), (b), (c), (d): fases recuperadas con los distintos algoritmos. (e), (f), (g), (h): errores RMSE de los correspondientes métodos.

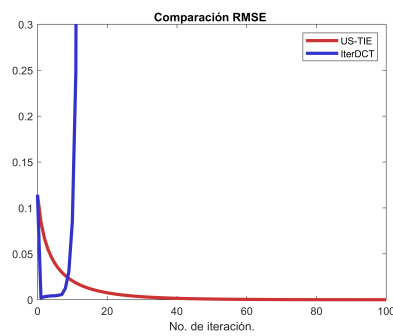


Figura 3.16. (FEBS) Comparación de los errores RMSE respecto al número de iteraciones, entre el algoritmo universal y el iterativo con DCT.

Tabla 3.7. (FEBS) Tiempo de cómputo y RMSE

Método	Tiempo de cómputo (s)	RMSE en porcentaje de amplitud (%)
FFT	0.020	0.0001
DCT	0.088	0.0001
iterDCT	0.120	0.0029
US	0.012	0.0001

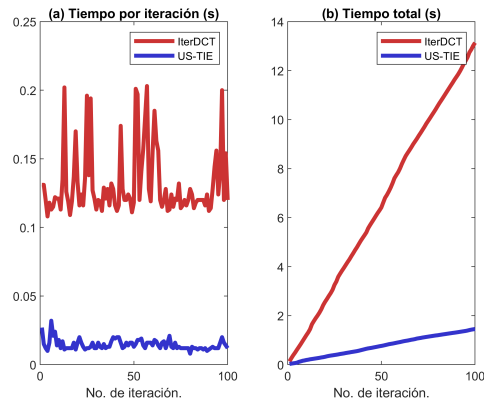


Figura 3.17. (FEBS) (a) Comparación del tiempo por iteración y (b) el tiempo total de cómputo entre el algoritmo universal y el iterativo.

3. Frente de onda plano

El siguiente caso se introduce un frente de onda plano con una ligera inclinación:

$$\phi(x, y) = x + y. \quad (3.4)$$

Se comienza nuevamente considerando un perfil de intensidad gaussiano sin valores pequeños, o de borde duro (FPBD) como en la Figura 3.18.

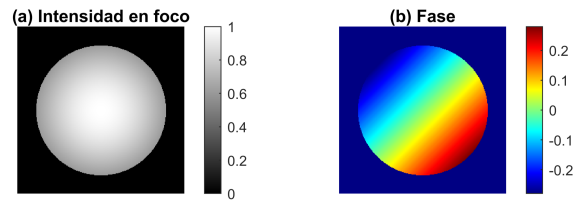


Figura 3.18. (FPBD). (a) Perfil de intensidad gaussiano, sin valores pequeños en la frontera, medido en el plano de enfoque. (b) Perfil de la fase (3.4).

En las reconstrucciones de fase (Figura 3.19) se observa de los mapeos de color que son bien aproximadas a la fase original, salvo la reconstrucción con DCT, donde se puede ver más claro el problema de valores a la frontera con aberturas arbitrarias, ya que, como se mencionó antes, este algoritmo está construido para una abertura rectangular. En cuanto a los otros métodos, se observa la ventaja del algoritmo US en el mapeo de su RMSE (Figura 3.19(h)), que es hasta 2 órdenes de magnitud menor que el algoritmo iterativo.

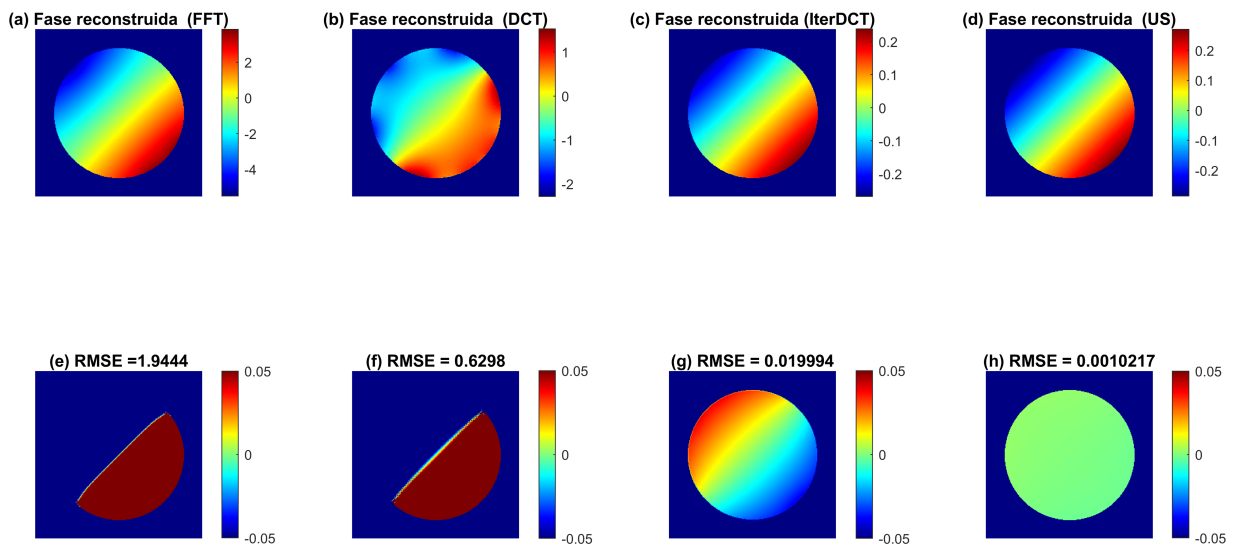


Figura 3.19. (FPBD). (a), (b), (c), (d): Fases recuperadas con los distintos algoritmos.

(e), (f), (g), (h), (i): Errores RMSE de los métodos respectivos.

Por otra parte, en la comparación de la convergencia de los errores RMSE (Figura 3.20) observamos que la solución iterativa converge más rápido: desde la primera iteración, y a partir de la segunda no habrá gran diferencia, mientras que el algoritmo US tarda hasta 10 iteraciones para empezar a converger, y a partir de entonces la recuperación de fase es más precisa.

En esta corrida podríamos decir que todos los métodos son similares en cuanto a su desempeño, a excepción del algoritmo DCT. Se puede llegar a la conclusión de que esta discrepancia se debe a las condiciones geométricas de frontera, pues esta es la única diferencia significativa en el algoritmo si se compara con FFT. De igual forma, se compara el RMSE de los algoritmos iterativo y US, notando una ventaja en el desempeño de este último después de unas 10 iteraciones (Figura 3.20).

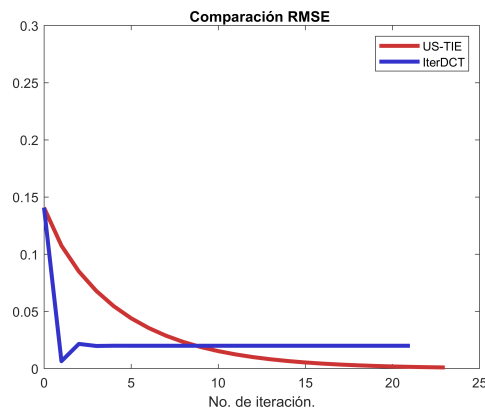


Figura 3.20. (FPBD). Comparación de los errores RMSE respecto al número de iteraciones entre el algoritmo universal y el iterativo con DCT.

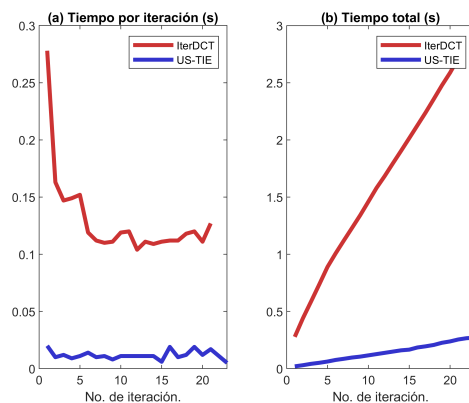


Figura 3.21. (FPBD). (a) Comparación del tiempo por iteración y (b) el tiempo total de cómputo entre el algoritmo universal y el iterativo.

En cuanto a la comparación del tiempo por iteración y el tiempo total entre iterDCT y US, se observan resultados similares a los casos anteriores, ya que el tiempo de cómputo para US sigue quedando por debajo del tiempo para iterDCT (Figura 3.21). Se considera que el pico notable en el tiempo durante las primeras iteraciones del método iterDCT puede atribuirse directamente a la región del dominio, así como a las condiciones de frontera. Las comparaciones se resumen en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8. (FPBD) Tiempo de cómputo y RMSE

Método	Tiempo de cómputo (s)	RMSE en porcentaje de amplitud (%)
FFT	0.046	0.0347
DCT	0.626	0.0112
iterDCT	0.125	0.0025
US	0.029	0.0001

En el caso de introducir un frente de onda plano con borde suave (FPBS, Figura 3.22) el problema de valores a la frontera es más notorio en la recuperación de fase con el método iterativo (Figura 3.23(c)), aunque también se llegan a apreciar las desviaciones cerca de la frontera en la recuperación de fase con los algoritmos FFT (ver Figura 3.23(a)) y DCT (Figura 3.23(b)).

El RMSE del método iterativo es comparablemente mayor a los demás métodos Figura 3.23(g), sin embargo

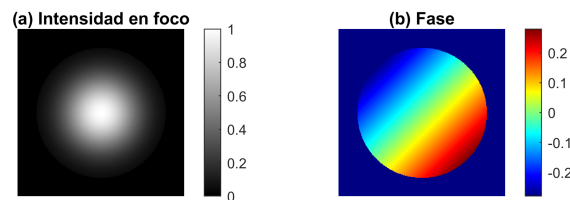


Figura 3.22. (FPBS). (a) Perfil de intensidad gaussiano, con valores pequeños en la frontera, medido en el plano de enfoque. (b) Perfil de fase (3.4) de un frente de onda plano con una pequeña inclinación respecto al eje axial.

este dispara su crecimiento cerca de las diez iteraciones, que comparado específicamente con el método US (Figura 3.24) presenta una desventaja si lo que se quiere es optimizar este RMSE sin importar el número de iteraciones. Por otra parte, si se queda únicamente con las primeras siete u ocho iteraciones se tendría incluso una ventaja de iterDCT sobre el US si lo que se quiere es llegar a un buen RMSE (cerca de 1×10^{-3} en porcentaje de amplitud) en menos iteraciones.

En el caso en que consideramos las iteraciones totales, también se observan las ventajas en el tiempo de cómputo del algoritmo US (Figura 3.25), y finalmente la comparación de los RMSE por porcentaje de amplitud entre los cuatro métodos en Tabla 3.9. En este caso al tener valores pequeños de intensidad, se observa más la ventaja del método de solución universal en el tiempo total de cómputo (tabla 3.9).

Además de las simulaciones, se calcularon los coeficientes de Zernike en el apéndice A para observar su consistencia al introducir perfiles de intensidad de borde suave o duro, y compararlos entre cada método numérico. Se concluyó que el método universal (US) presenta una consistencia más fiable en la recuperación de los coeficientes para cada frente de onda geométrico, especialmente en los correspondientes a aberraciones de

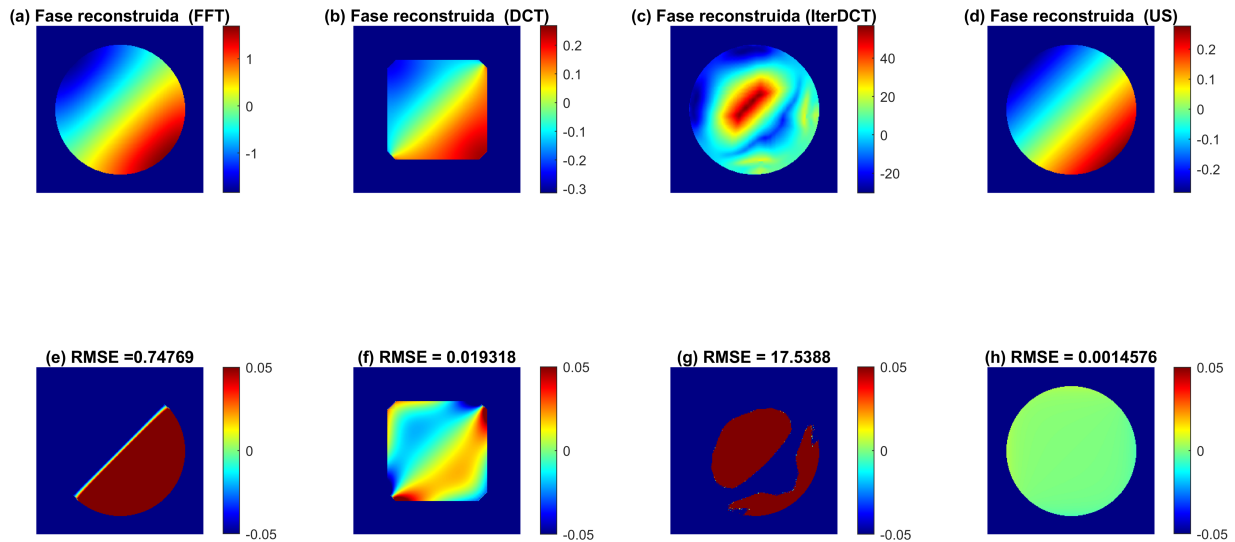


Figura 3.23. (FPBS). (a), (b), (c), (d): Fases recuperadas con los distintos algoritmos. (f), (g), (h), (i): Errores RMSE de los correspondientes métodos.

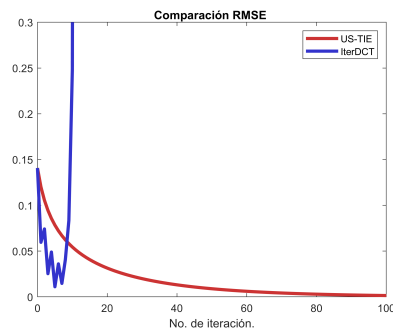


Figura 3.24. (FPBS). Comparación de los errores RMSE respecto al número de iteraciones, entre el algoritmo universal y el iterativo con DCT.

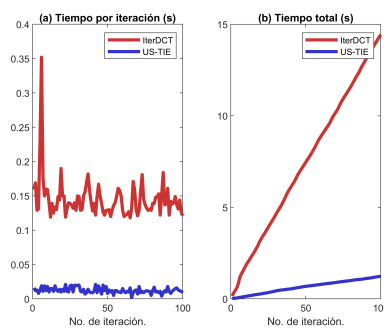


Figura 3.25. (FPBD). (a) Comparación del tiempo por iteración y (b) el tiempo total de cómputo entre el algoritmo universal y el iterativo.

tipo axial, mientras que el método iterativo (iterDCT) presenta problemas particulares en la consistencia de los coeficientes del frente de onda plano y esférico.

Tabla 3.9. (FPBS) Tiempo de cómputo y RMSE.

Método	Tiempo de cómputo (s)	RMSE en porcentaje de amplitud (%)
FFT	0.018	0.0134
DCT	0.080	0.0003
iterDCT	0.121	0.0025
US	0.009	0.0011

4. Resumen de métodos.

Recapitulando hasta el momento, lo abordado para resolver la ETI con el objetivo de recuperar la fase de un frente de onda es lo siguiente:

Se llegó a una solución analítica por medio del método de la función de Green, cuya implementación experimental no es realizable debido a los problemas de frontera; posteriormente, esta solución analítica se desarrolló espectralmente para así obtener un algoritmo numérico al que llamamos método DCT, que introduce la Transformada Discreta de Coseno. A esta solución numérica se puede llegar con un método más rápido que es utilizando la Transformada rápida de Fourier (FFT) pero que, debido a la naturaleza de la transformada, requiere de condiciones de frontera periódicas. Es importante destacar que ambos métodos solo son aplicables cuando el dominio de integración es rectangular, lo que restringe la aplicación práctica a aberturas rectangulares.

Como medio para introducir una mayor diversidad de dominios (aberturas de distintas formas) y considerar otros tipos de valores de intensidad sobre la frontera en la recuperación de fase, se introduce el método de DCT iterativo. Sin embargo, las múltiples iteraciones se enfrentan con problemas al dividir por cero si se introducen valores de intensidad muy pequeños (del orden de 1.62×10^{-18} en los casos de borde suave). Por último, se analizó el desempeño del algoritmo universal (US), que aborda los problemas anteriores obteniendo aproximaciones con un RMSE del orden de 1×10^4 en porcentaje de amplitud, tanto con valores de intensidad “normales” así como con valores cercanos a cero. En la Tabla 3.10 se muestra un resumen de todas estas características [21]

Tabla 3.10. *Tabla de comparación sobre de los métodos de solución de la ETI implementados. La segunda columna resume las ventajas de cada uno, mientras que la tercer columna incluye su principal inconveniente.*

Método	Características	
Función de Green	Teórica ✓	No realizable
FFT	Rápida ✓ Fácil y reconstrucción regular ✓	Implica condiciones de frontera periódicas
DCT	Rápida ✓, Considera condiciones de Neumann inhomogéneas ✓	Sólo dominios rectangulares
iterDCT	Considera condiciones de Neumann inhomogéneas ✓ Aberturas arbitrarias ✓	Varias iteraciones. División por cero.
Solución Universal (US)	Rápida ✓ Condiciones de Neumann Inhomogéneas ✓ Aberturas arbitrarias ✓ Intensidades pequeñas ✓ Resuelve discrepancia de fase ✓	--

5. Consideraciones adicionales

En principio, las herramientas presentadas hasta el momento proporcionan los recursos necesarios para desarrollar una técnica efectiva de detección y medición de frentes de onda que emanan del ojo, la cuál se puede implementar

en el campo de la optometría. En esencia, este sistema se fundamentará en el comportamiento de la luz al atravesar el medio ocular tras reflejarse sobre la retina. En cuanto a la implementación de esta técnica, habrá tres aspectos importantes que se deben considerar para evaluar la calidad del sistema:

1. Iluminación.
2. Sistema de detección.
3. Dispositivos.

Iluminación. La elección de una iluminación adecuada es esencial en sistemas de detección de frentes de onda, ya que puede tener un impacto significativo en la precisión de las mediciones y en la comodidad del paciente. Una iluminación deficiente puede introducir distorsiones en la imagen capturada: se pueden generar reflejos no deseados en las estructuras oculares, como la córnea o el cristalino. Además, las sombras en la retina o en otras estructuras pueden interferir con la medición precisa de las aberraciones. Al mismo tiempo, es crucial evitar causar daño a la retina, asegurándose de que el haz de luz no se enfoque en ella.

Por otra parte, es indispensable poder comparar resultados de diferentes pacientes y en diversas condiciones, para lo que la iluminación debe ser consistente, ya que un cambio en esta podría llevar a mediciones inconsistentes y dificultar el seguimiento de la evolución de las aberraciones ópticas.

En resumen, una iluminación controlada y uniforme es fundamental para garantizar resultados precisos y confiables, así como la comodidad del paciente en aplicaciones oftalmológicas y optométricas. Por esto mismo, la luz incidente deberá ser como en la mayoría de las técnicas de investigación clínicas. Se usa comúnmente un láser de espectro cercano al infrarrojo (NIR), frecuentemente He-Ne. Las razones por las que la radiación infrarroja es preferida involucran, en primera instancia, la seguridad y comodidad del paciente. El ojo no es sensible a la radiación infrarroja en el sentido que, ni la pupila ni el estado de acomodación se ven afectados al recibir esta interacción, por eso mismo, no se necesita de la dilatación pupilar para trabajar con esta iluminación. Por otra parte, la retina tiene una reflectancia mucho mayor para la luz NIR que para el espectro visible, permitiendo así el reflejo del haz incidente y la formación de la fuente puntual secundaria que será origen de la onda saliente aberrada para medirse.

Sistema de detección. En cuanto a la detección, se utiliza la técnica de *onda saliente* como se mencionó antes, que es parte del método de *doble pase*, en el que el haz de luz se enfoca cerca de la fovea, causando la reflexión de regreso (Figura 3.26).

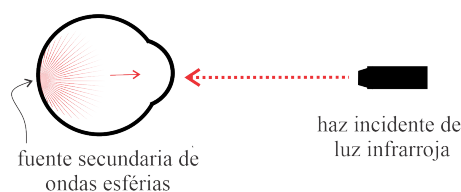


Figura 3.26. Esquema del Doble pase para iluminación de la retina. El haz de luz se enfoca cerca de la fovea y nuevas ondas salientes son aberradas por el medio ocular.

De esta forma, el panorama de la configuración experimental se ve significativamente influenciado tanto por los sensores de frente de onda convencionales como por las propuestas de Roddier [13].

En lo que respecta al sistema de iluminación, este sería prácticamente el mismo de un sensor de Shack-Hartmann, implementando el doble pase de un haz colimado, a través de un divisor de haz (B-S) hacia el fondo de ojo (Figura 3.27).

Para el sistema de detección, se necesitan al menos 2 planos de desenfoco para la obtención del perfil de intensidades; esto implica que se toman imágenes del punto focal y de puntos cercanos y lejanos al mismo. Estas imágenes se utilizan para calcular cómo se distorsiona el frente de onda a medida que pasa a través del ojo del paciente, tal como se mostraba en Figura 1.11, y así poder calcular el perfil de la derivada axial de la intensidad, que será introducido al algoritmo computacional.

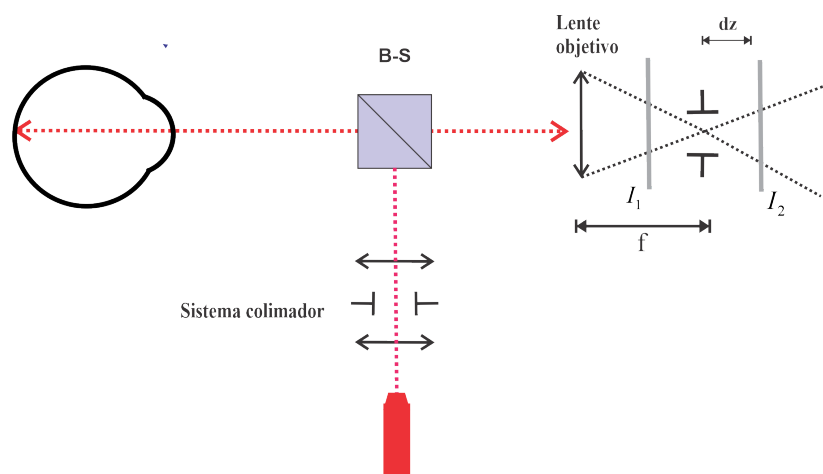


Figura 3.27. Diseño experimental con el modelo de ojo propuesto para probar el método, donde 'B-S' es un divisor de haz (*Beam Splitter* en inglés), I_1, I_2 son los planos de desenfoco, dz la distancia de desenfoco y f la distancia focal del lente objetivo, que es la misma distancia a la que se encuentra el diafragma de apertura respecto del lente objetivo.

Como se mencionó con el sensor de curvatura de Roddier, este sistema tiene la ventaja de poder calibrar, tanto el rango dinámico como la sensibilidad, en cuestión de ajustar las distancias de desenfoco. Pues bien, el rango dinámico se refiere a la gama de distorsiones de frente de onda que el sistema puede medir con precisión, mientras que la sensibilidad se relaciona con la capacidad del sistema para detectar cambios sutiles en el frente de onda. Al ajustar las distancias de desenfoco, el sistema puede adaptarse para medir frente de onda en una amplia variedad de condiciones oculares. Esto es importante, ya que diferentes pacientes pueden tener diferentes niveles de aberraciones ópticas.

Dispositivos. Además de los ajustes dinámicos, también intervienen las características del detector que se use: su sensibilidad, el tamaño de los píxeles y la resolución. Un detector más sensible puede capturar frente de onda más débiles, lo que es especialmente relevante cuando se trata de medir aberraciones sutiles. Asimismo, el

tamaño de los píxeles determina la resolución espacial del sistema. Píxeles más pequeños permiten una mayor resolución, lo que puede ser esencial para detectar detalles finos en el frente de onda y en la retina.

Por consiguiente, para elegir un sensor ideal, este debería tener una alta resolución, así como una alta sensibilidad a la luz. En este sentido, un sensor CMOS (Complementary Metal-Oxide-Semiconductor) que tenga un tamaño de píxel pequeño, sería una opción viable, ya que estos sensores tienen una alta sensibilidad a la luz, lo que permite capturar imágenes con poca luz y mejorar la calidad de la imagen.

Conclusiones

Al estudiar la propagación de una onda en pruebas ópticas, se puede obtener información sobre su naturaleza geométrica. En este contexto, se investigó un método que permite obtener detalles de un frente de onda a partir de su fase mediante la resolución de la Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI). Para esto, solo se requiere medir empíricamente su distribución de intensidad en distintos planos, incluyendo el plano de enfoque y al menos uno ligeramente desenfocado. La información de la fase obtenida, proporciona una descripción unificada del frente de onda paraxial y de las aberraciones que sufre al atravesar un medio transparente.

Este método de recuperación de fase permitirá obtener el frente de onda aberrado de un sistema ocular con gran precisión, gracias a los algoritmos numéricos que se revisaron. Dentro de estos, se encontró que el de la llamada Solución Universal, propuesto por Zhang et al. [26] fue el más destacado, pues cumple con todo lo que se desea de un algoritmo que resuelva numéricamente la ETI:

1. Permite la reconstrucción de fase tomando en cuenta:

Aberturas arbitrarias

Distribución de intensidad arbitraria (Valores pequeños de intensidad)

Discrepancias de fase.

2. Es estrictamente convergente y eficiente. Tiene tiempos de cómputo eficientes en comparación con los otros métodos más usados como el método con DCT.
3. Considera condiciones de frontera inhomogéneas: Aberturas arbitrarias y distribución de intensidad.

A pesar de las grandes ventajas de este algoritmo, es importante considerar que hay casos en los que el algoritmo más simple será más factible para obtener una solución; pues tal fue el caso del frente de onda plano, en el que sólo bastó una aplicación de la Transformada Discreta de Coseno para que la recuperación de fase fuera la más aproximada posible, mientras que a partir de 10 o más iteraciones del algoritmo universal, no se observaba mayor diferencia. Por tanto, el algoritmo usado, dependerá en parte de la precisión que se quiera obtener y también de la complejidad del frente de onda a analizar. En particular, los frentes de onda que se consideran para este propósito deben propagarse de manera axial. Tomando en cuenta que en el contexto de la oftalmología, en general, es

aceptable un RMSE del orden de $\lambda/4$, se puede considerar que el algoritmo iterativo con DCT arroja también buenos resultados en la aproximación del frente de onda (1.12). Sin embargo, aunque esta precisión es suficiente para la aplicación en la evaluación de la calidad óptica de la córnea, la lente intraocular y el ojo en general, vale la pena considerar el algoritmo de Solución Universal como una mejor alternativa para evaluar los frentes de onda que puedan estar más aberrados, lo que ocurriría en el caso de pacientes con queratocono o que han sido sometidos a una cirugía láser recientemente, por poner algunos ejemplos; sobre todo tomando en cuenta que, actualmente, en el área médica se requiere que estos métodos puedan evaluar mayores distorsiones del frente de onda con una mejor precisión. Esta ventaja también se refleja en la consistencia de la recuperación de los coeficientes de Zernike, pues el hecho de que la aberración no varía entre la introducción de un borde suave o un borde duro, sugiere que el método proporciona resultados consistentes y confiables independientemente de las variaciones en el perfil de intensidades inicial. Del análisis realizado sobre la Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI) y sus soluciones numéricas, se puede concluir que es factible proporcionar un método alternativo o complementario para la detección de aberraciones oculares mediante la recuperación de fase por medio de un sensor de frente de onda. El algoritmo Universal demostró ser la mejor aproximación numérica, ya que recuperó de manera fiable los coeficientes de Zernike del frente de onda aberrado como se muestra en A, logrando además un menor tiempo de cómputo total y un menor RMSE.

Asímismo, es importante destacar que un sensor de onda que implemente este sistema de recuperación de fase para describir el frente de onda aberrado presentaría ventajas sobre el tradicional sensor de frente de onda Hartmann-Shack (H-S), tales como: el costo de la aparatología; a diferencia del H-S, donde la sensibilidad es establecida por la distancia focal de las lentillas, en este caso, puede modificarse simplemente cambiando la distancia de desenfoco; como se apreció en las simulaciones, el tiempo de cómputo de los algoritmos es relativamente corto (1×10^{-3}) ya que no se hace una integración por centroide como sería el caso del Hartmann-Shack, y tomando en cuenta que el único dato de medición introducido es el perfil de intensidades.

Finalmente, como perspectiva de futuro se considera que el trabajo deberá centrarse en los siguientes aspectos:

1. Realizar mediciones en laboratorio utilizando un modelo de ojo para validar y calibrar el sensor de curvatura.
2. Extender las mediciones para incluir pacientes reales una vez que el sensor de curvatura haya sido calibrado.

Recuperación de coeficientes de Zernike

En esta sección se calcularon los coeficientes de Zernike, de los frentes de onda a partir de las fases recuperadas. Los coeficientes de Zernike c_n^m son tales que la (1.12) se cumple, considerando

$$Z_n^m(r, \theta) = R_n^m(r) e^{im\theta} \quad (\text{A.1})$$

$$R_n^m(r) = \sum_{k=0}^{\frac{n-|m|}{2}} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k! \left(\frac{n+|m|}{2} - k\right)! \left(\frac{n-|m|}{2} - k\right)!} r^{n-2k}. \quad (\text{A.2})$$

Para su cálculo en MATLAB, se realizó un ajuste de mínimos cuadrados para descomponer a la matriz de fase en los primeros 15 polinomios de Zernike, devolviendo un arreglo de los coeficientes c_n^m que mejor describen a dicha matriz.

A continuación se presenta una tabla de coeficientes para cada frente de onda geométrico utilizado en la sección de simulaciones, en donde se indica el orden radial (n), el orden azimutal (m), los coeficientes correspondientes a la fasa original introducida (ϕ), y los coeficientes correspondientes a las fases recuperadas con cada método (DCT, iterDCT, US), donde al mismo tiempo se compara, para cada uno de estos métodos, los casos con: perfil de intensidad gaussiano de borde duro (sufijo "BD") y de borde suave (sufijo "BS"). Se desea comparar especialmente los coeficientes obtenidos entre el caso de borde suave y borde duro con el fin de observar la consistencia de los métodos respecto a cada caso, por lo que debajo de una tabla, se encuentran tres gráficas de barras que hacen esta comparación visual.

Se comienza con los coeficientes de Zernike para el primer frente de onda aberrado (Tabla A.1). La comparación gráfica entre el caso de borde duro y borde suave para el método DCT (Figura A.1), muestra además el valor de cada coeficiente de ϕ , indicando en las etiquetas del eje horizontal el orden radial desde 1 hasta 4 en la columna inferior, y orden el azimutal de -1 a -4 en la columna superior. De igual forma, el gráfico de los coeficientes para el método iterativo (Figura A.2) y para el algoritmo universal (Figura A.3) en la recuperación de este frente de onda, se muestran debajo. Se puede observar una pronunciada discrepancia entre los casos BD y

BS para los primeros dos métodos, sin embargo para el algoritmo US se encuentra una mayor consistencia, sobre todo en los primeros cuatro órdenes, así como en el último.

En los coeficientes de Zernike para el frente de onda esférico ((Tabla A.1) se observa un comportamiento similar con el método DCT, pero con una coincidencia casi exacta en los índices (n, m) con valores $(2, -2)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$ y en casi todo el orden 4 radial salvo $m = 4$ (Figura A.4).

En el caso de iterDCT, la comparación de coeficientes ya no es tan pareja como antes entre ambos perfiles de intensidad (Figura A.5); sin embargo, con el algoritmo US sí se obtienen coincidencias muy notables en todos los órdenes (Figura A.6).

En el caso del frente de onda plano, los coeficientes registrados en la Tabla A.3 vuelven a presentar discrepancias muy notables entre el BD y el BS; con DCT para todos los órdenes excepto en $(2, 2)$, $(4, -4)$, $(4, 2)$ (Figura A.7) y algo similar ocurre con iterDCT ((Figura A.8)). Para el método US, por el contrario, el frente de onda plano es quien mayor consistencia presenta en la recuperación de los coeficientes de Zernike entre el borde suave y el borde duro, y esta consistencia es gráficamente notoria en la Figura A.9.

Tabla A.1. Coeficientes de Zernike recuperados para el frente de onda aberrado (1.12).

n	m	ϕ	DCT		iterDCT		US	
			FABD	FABS	FABD	FABS	FABD	FABS
0	0	0.000	-0.014	0.000	-0.014	-0.098	-0.002	-0.001
1	-1	-0.189	-1.448	-0.118	-1.448	-7.151	-0.394	-0.354
1	1	-0.066	-0.509	-0.041	-0.509	-10.386	-0.139	-0.125
2	-2	-0.001	-0.007	-0.001	-0.007	-0.264	-0.001	-0.001
2	0	0.001	0.384	0.002	0.384	0.629	0.007	0.003
2	2	0.144	2.208	0.040	2.208	-0.309	0.349	0.460
3	-3	-0.002	-0.104	-0.027	-0.104	-1.070	-0.014	-0.064
3	-1	0.299	1.292	0.243	1.292	4.089	0.058	0.189
3	1	0.106	0.484	0.085	0.484	5.788	0.022	0.068
3	3	0.002	0.065	0.010	0.065	0.787	0.006	0.024
4	-4	0.000	-0.003	-0.001	-0.003	0.041	0.000	0.001
4	-2	0.001	0.003	0.001	0.003	0.275	0.000	0.000
4	0	-0.001	0.043	-0.003	0.043	0.294	0.003	0.001
4	2	-0.286	-3.492	-0.121	-3.492	-0.396	-0.118	-0.155
4	4	0.000	-0.553	-0.002	-0.553	0.188	-0.001	0.000

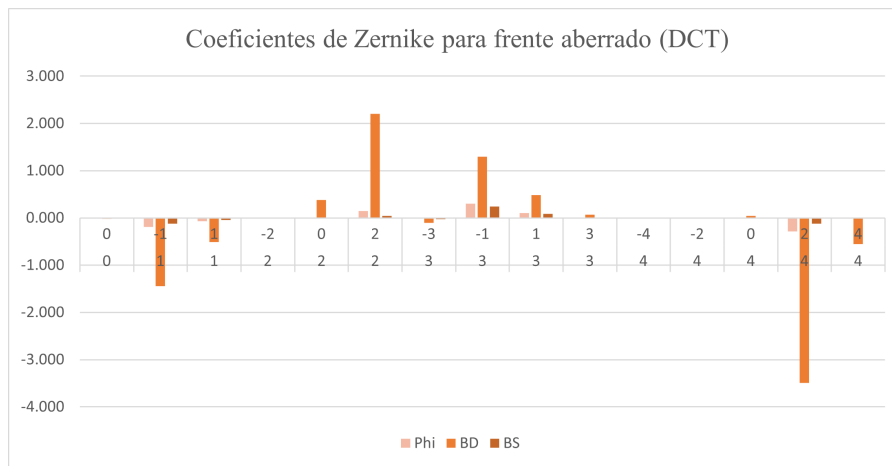


Figura A.1. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Phi) del frente de onda **aberrado**, y las fases recuperadas con el método **DCT** para el perfil de intensidad de borde duro (BD) y el perfil de intensidad de borde suave (BS).

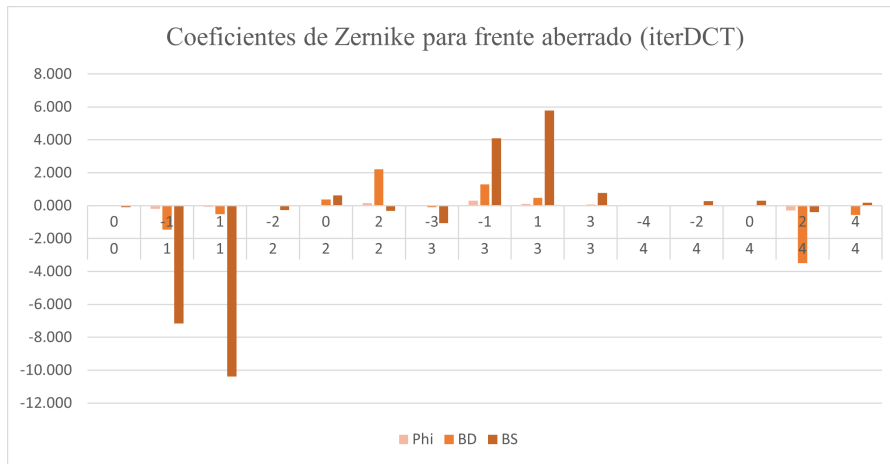


Figura A.2. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Φ) del frente de onda **aberrado**, y las fases recuperadas con el método **DCT iterativo** para el perfil de intensidad de borde duro (BD) y el perfil de intensidad de borde suave (BS).

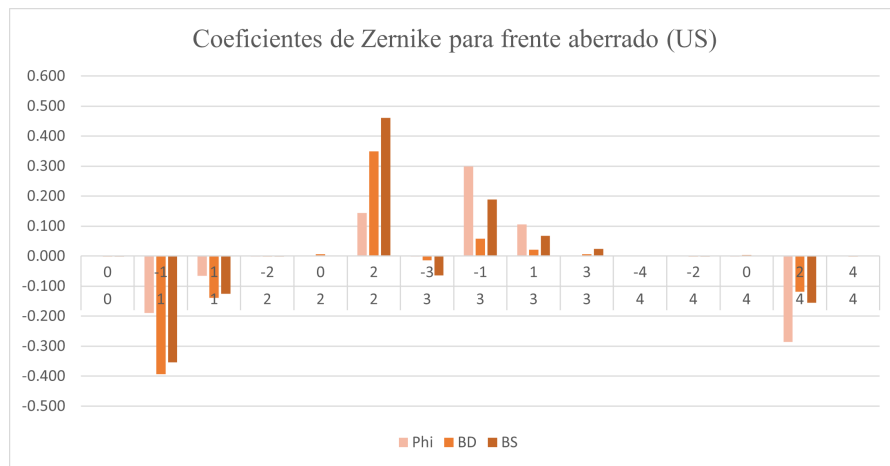


Figura A.3. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Φ) del frente de onda **aberrado**, y las fases recuperadas con el método de Solución Universal (**US**) para el perfil de intensidad de borde duro (BD) y el perfil de intensidad de borde suave (BS).

Tabla A.2. Coeficientes de Zernike recuperados para el frente de onda esférico.

n	m	ϕ	DCT		iterDCT		US	
			FEBD	FEBS	FEBD	FEBS	FEBD	FEBS
0	0	0.614	-0.016	0.000	-0.028	-1.852	-0.029	-0.027
1	-1	-0.010	0.003	0.000	0.002	15.170	0.002	0.002
1	1	0.010	-0.003	0.000	-0.002	-15.372	-0.002	-0.002
2	-2	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.167	0.000	0.000
2	0	-0.647	0.506	0.042	0.220	20.036	0.224	0.214
2	2	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.283	0.000	0.000
3	-3	0.000	0.005	0.000	0.000	2.647	0.000	0.000
3	-1	0.001	-0.011	-0.001	-0.003	-5.862	-0.003	-0.003
3	1	-0.001	0.011	0.001	0.003	6.104	0.003	0.003
3	3	0.000	0.005	0.000	0.000	2.809	0.000	0.000
4	-4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.024	0.000	0.000
4	-2	0.000	0.000	0.000	0.000	1.501	0.000	0.000
4	0	-0.408	-0.096	-0.093	-0.090	-14.503	-0.089	-0.092
4	2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.088	0.000	0.000
4	4	-0.002	-0.645	-0.031	-0.001	6.043	-0.003	0.000

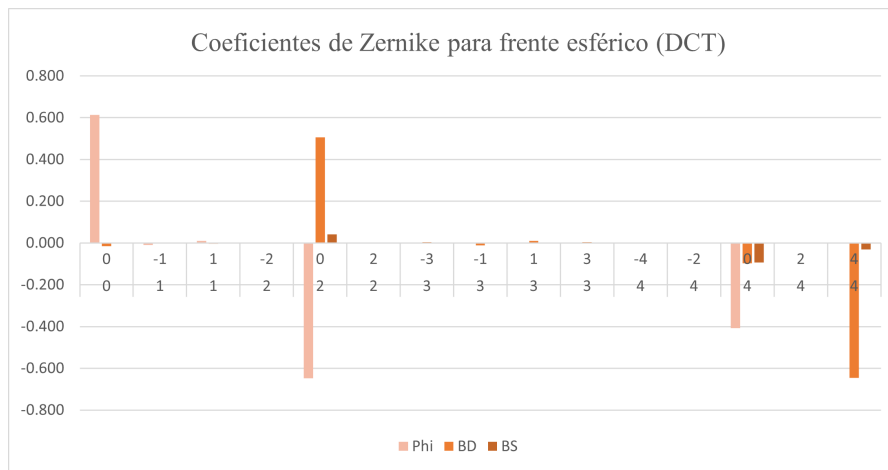


Figura A.4. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Phi) del frente de onda **esférico**, y las fases recuperadas con el método **DCT** para el perfil de intensidad de borde duro (BD) y el perfil de intensidad de borde suave (BS).

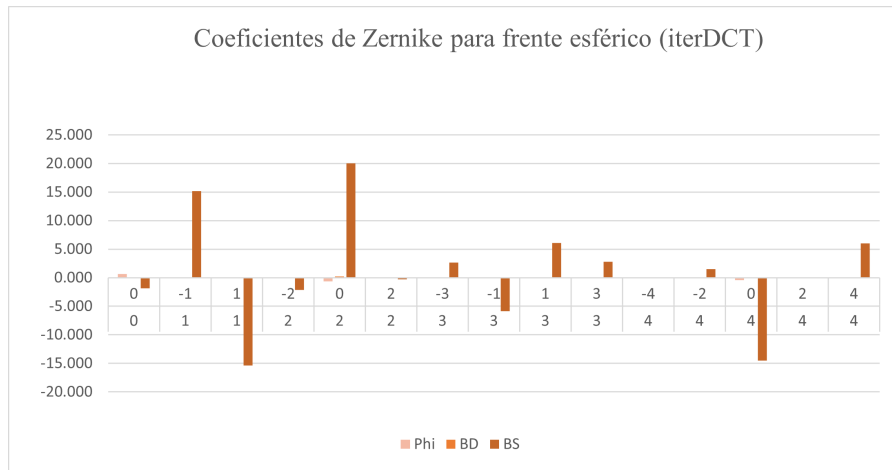


Figura A.5. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Φ) del frente de onda **esférico**, y las fases recuperadas con el método **DCT iterativo** para el perfil de intensidad de borde duro (**BD**) y el perfil de intensidad de borde suave (**BS**).

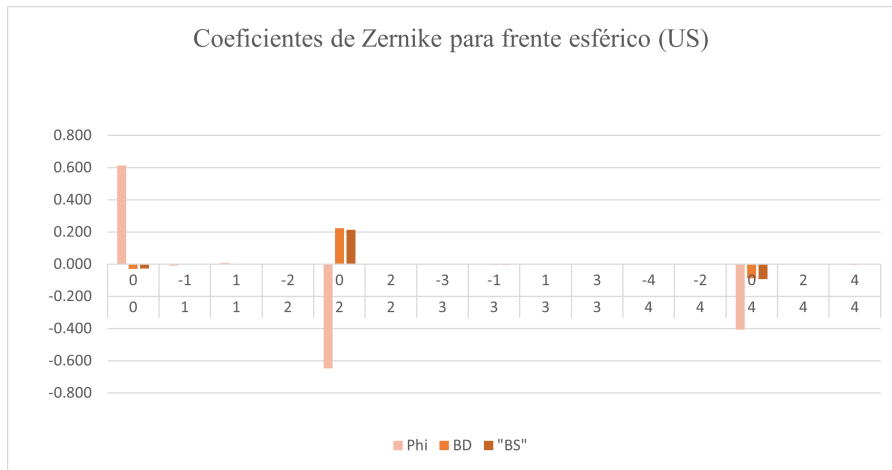


Figura A.6. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Φ) del frente de onda **esférico**, y las fases recuperadas con el método de Solución Universal (**US**) para el perfil de intensidad de borde duro (**BD**) y el perfil de intensidad de borde suave (**BS**).

Tabla A.3. Coeficientes de Zernike recuperados para el frente de onda plano.

n	m	ϕ	DCT		iterDCT		US	
			FEBD	FEBS	FEBD	FEBS	FEBD	FEBS
0	0	0.000	-0.015	0.000	-0.002	1.373	-0.003	-0.001
1	-1	-0.095	-0.722	-0.059	-0.196	-10.709	-0.177	-0.176
1	1	0.095	0.722	0.059	0.196	10.706	0.177	0.176
2	-2	-0.002	-0.012	-0.001	-0.001	2.783	-0.002	-0.002
2	0	0.002	0.389	0.003	0.007	-14.917	0.013	0.004
2	2	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000
3	-3	0.000	-0.033	-0.013	-0.006	1.399	-0.030	-0.031
3	-1	0.148	0.624	0.121	0.028	-5.861	0.093	0.093
3	1	-0.148	-0.624	-0.121	-0.028	5.862	-0.093	-0.093
3	3	0.000	-0.033	-0.013	-0.006	1.399	-0.030	-0.031
4	-4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-2	0.002	0.004	0.002	0.000	-5.539	0.000	0.000
4	0	-0.002	0.043	-0.004	0.003	13.128	0.005	0.001
4	2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
4	4	0.000	-0.551	-0.002	-0.001	-2.515	-0.002	0.001

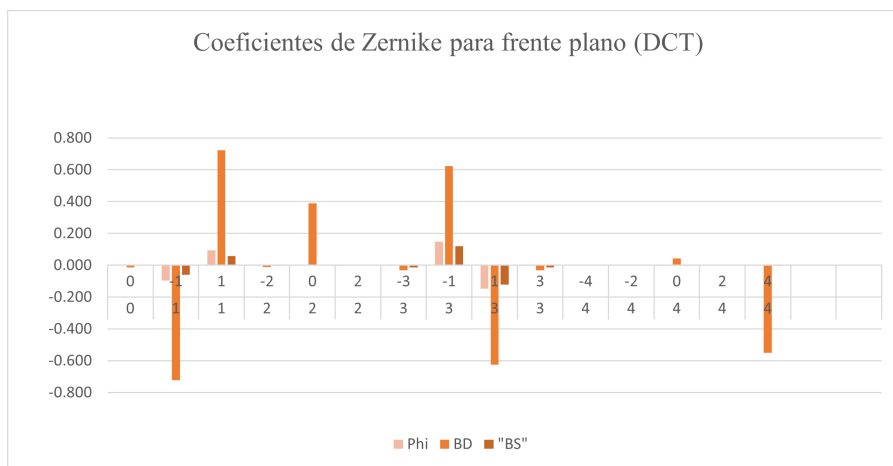


Figura A.7. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Phi) del frente de onda **plano**, y las fases recuperadas con el método **DCT** para el perfil de intensidad de borde duro (BD) y el perfil de intensidad de borde suave (BS).

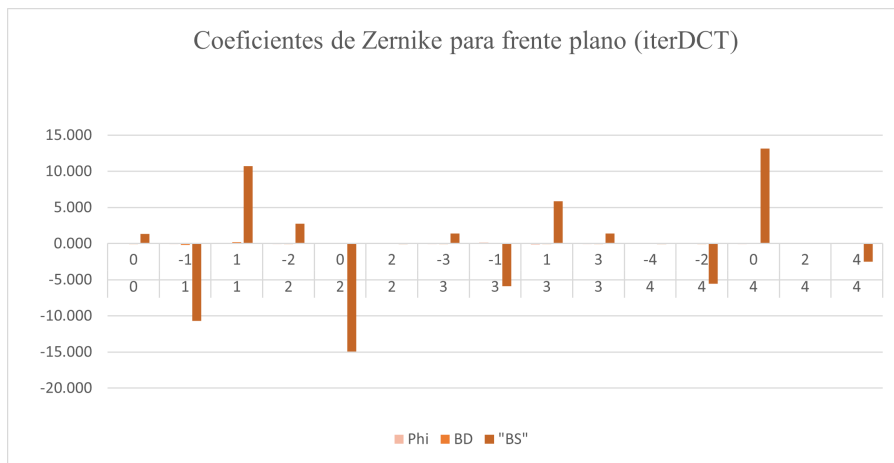


Figura A.8. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Φ) del frente de onda **plano**, y las fases recuperadas con el método **DCT iterativo** para el perfil de intensidad de borde duro (**BD**) y el perfil de intensidad de borde suave (**BS**).

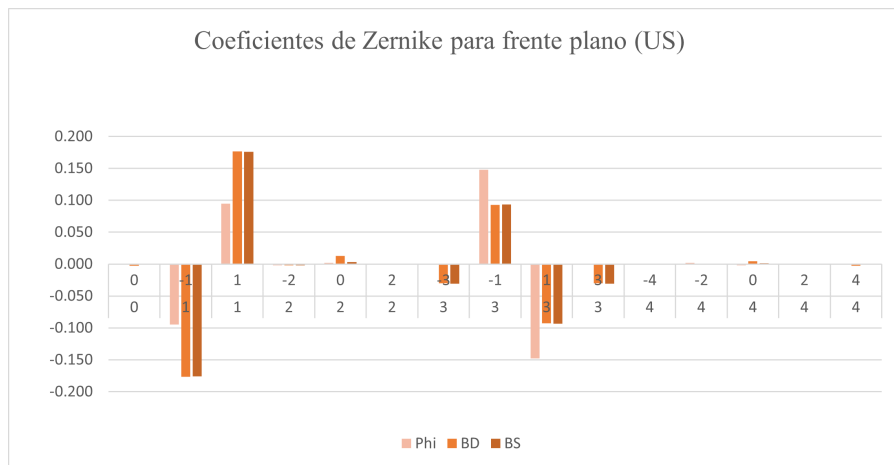


Figura A.9. Comparación de los coeficientes de Zernike para: la fase introducida (Φ) del frente de onda **plano**, y las fases recuperadas con el método de Solución Universal (**US**) para el perfil de intensidad de borde duro (**BD**) y el perfil de intensidad de borde suave (**BS**).

Resumiendo, se tienen comportamientos peculiares para los frentes de onda que podríamos llamar “más sencillos”, pues en ellos la discrepancia de los coeficientes de Zernike es más notoria en los algoritmos DCT e iterDCT, que en el US como lo es el caso del frente de onda plano o el esférico. El algoritmo de Solución Universal es quien mantiene resultados más consistentes entre el borde suave y borde duro, sobre todo en los primeros órdenes de los coeficientes (1 y 2) que están más relacionados a las perturbaciones azimutales.

En las gráficas también se ilustran los coeficientes de Zernike relacionados con el perfil de fase original introducido en cada simulación, sin embargo no se considera relevante la comparación de éstos con los calculados de las fases recuperadas, ya que en estos últimos hay una propagación de por medio y es esperado que estos coeficientes cambien, al modificarse ligeramente el frente geométrico.

Referencias

- [1] Guirao, A., Miller, D. T., Williams, D., Porter, J., & Yamauchi, Y. (2004). Ocular Aberrations and their Measurement.
- [2] Kaschke, M., Donnerhacke, K.-H., & Rill, M. S. (2014). *Optical Devices in Ophthalmology and Optometry*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA. <https://doi.org/10.1002/9783527648962>
- [3] Atchison., D., & Smith, G. (2000). *Optics of the Human Eye*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/b978-0-7506-3775-6.x5001-9>
- [4] Artal, P. (2017). *Handbook of Visual Optics, Two-Volume Set*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315119199>
- [5] Atchison, D., & Thibos, L. (2016). Optical models of the human eye. *Clinical and Experimental Optometry*, 99(2), 99-106. <https://doi.org/10.1111/exo.12352>
- [6] Navarro, R. (2009). The Optical Design of the Human Eye: a Critical Review.
- [7] Navarro, R., Santamaría, J., & Bescós, J. (1985). Accommodation-dependent model of the human eye with aspherics. *Journal of The Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 2(8), 1273-1280. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.2.001273>
- [8] Keller, J. B., & Lewis, R. M. (1995). Asymptotic Methods for Partial Differential Equations: The Reduced Wave Equation and Maxwell's Equations. En J. B. Keller, D. W. McLaughlin & G. C. Papanicolaou (Eds.), *Surveys in Applied Mathematics* (pp. 1-82). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0436-2_1
- [9] Born, M., & Wolf, E. (1964). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light; 2nd ed*. Pergamon. <https://cds.cern.ch/record/382152>
- [10] Avanzada, Á. O. (Ed.). (2020). *Foróptero*. Consultado en marzo de 2022, desde <https://areaoftalmologica.com/terminos-de-oftalmologia/forooptero/>
- [11] Gerchberg, R. W. (1972). A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 35, 237-246.
- [12] Teague, M. R. (1982). Irradiance moments: their propagation and use for unique retrieval of phase. *Journal of the Optical Society of America*, 72(9), 1199. <https://doi.org/10.1364/josa.72.001199>

- [13] Roddier, F., Roddier, C., & Roddier, N. (1988). Curvature Sensing: A New Wavefront Sensing Method. En G. M. Morris (Ed.), *Statistical Optics* (pp. 203-209). SPIE. <https://doi.org/10.1117/12.948547>
- [14] Campos García, M. (1995). *Prueba de Roddier: Una revisión*. Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad de México.
- [15] Campos García, M., & Díaz Uribe, R. (2006). Irradiance transport equation from geometrical optics considerations. *Revista Mexicana de Física*, 52(6).
- [16] Evans, L. (2010). *Partial differential equations*. American Mathematical Society.
- [17] Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-30629-7>
- [18] Ichikawa, K., Lohmann, A., & Takeda, M. (1988). Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: experiments. *Applied Optics*, 27(16), 3433. <https://doi.org/10.1364/ao.27.003433>
- [19] Zuo, C., Chen, Q., & Asundi, A. (2014). Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation: fast solution with use of discrete cosine transform. *Optics Express*, 22(8), 9220. <https://doi.org/10.1364/oe.22.009220>
- [20] Zuo, C., Chen, Q., Huang, L., & Asundi, A. (2014). Phase discrepancy analysis and compensation for fast Fourier transform based solution of the transport of intensity equation. *Opt. Express*, 22(14), 17172-17186. <https://doi.org/10.1364/OE.22.017172>
- [21] Zuo, C., Li, J., Sun, J., Fan, Y., Zhang, J., Lu, L., Zhang, R., Wang, B., Huang, L., & Chen, Q. (2020a). Transport of intensity equation: a tutorial. *Optics and Lasers in Engineering*, 135, 106187. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106187>
- [22] Agrawal, A. K., Raskar, R., & Chellappa, R. (2006). What Is the Range of Surface Reconstructions from a Gradient Field? *European Conference on Computer Vision*.
- [23] Paganin, D., & Nugent, K. A. (1998). Noninterferometric Phase Imaging with Partially Coherent Light. *Physical Review Letters*, 80(12), 2586-2589. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.80.2586>
- [24] Huang, L., Zuo, C., Idir, M., Qu, W., & Asundi, A. (2015). Phase retrieval with the transport-of-intensity equation in an arbitrarily shaped aperture by iterative discrete cosine transforms. *Optics Letters*, 40(9), 1976. <https://doi.org/10.1364/ol.40.001976>
- [25] Gureyev, T. E., Roberts, A., & Nugent, K. A. (1995). Partially coherent fields, the transport-of-intensity equation, and phase uniqueness. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(9), 1942. <https://doi.org/10.1364/josaa.12.001942>
- [26] Zhang, J., Chen, Q., Sun, J., Tian, L., & Zuo, C. (2020). On a universal solution to the transport-of-intensity equation. *Optics Letters*, 45(13), 3649-3652.
- [27] Zuo, C., Li, J., Sun, J., Fan, Y., Zhang, J., Lu, L., Zhang, R., Wang, B., Huang, L., & Chen, Q. (2020b). Transport of intensity equation: a tutorial. *Optics and Lasers in Engineering*, 135, 106187. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106187>

- [28] Konijnenberg, S., Adam, A. J. L., & Urbach, H. P. (s/f). *Óptica de Difracción Escalar* [Delft University of Technology]. Consultado en febrero de 2020, desde [https://espanol.libretexts.org/Fisica/%C3%93ptica/%C3%93ptica_\(Konijnenberg,_Adam_y_Urbach\)/06:_%C3%93ptica_de_difracci%C3%B3n_escalar/6.04:_M%C3%A9todo_de_Espectro_Angular](https://espanol.libretexts.org/Fisica/%C3%93ptica/%C3%93ptica_(Konijnenberg,_Adam_y_Urbach)/06:_%C3%93ptica_de_difracci%C3%B3n_escalar/6.04:_M%C3%A9todo_de_Espectro_Angular)