UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Existencia de soluciones no radiales de estado mínimo para un sistema acoplado de ecuaciones de Schrödinger

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Cristian Edimar Morales Encinos

DIRECTOR
Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora
Instituto de Matemáticas, UNAM
Sede: Juriquilla

CIUDAD DE MÉXICO A 09 DE ENERO DEL 2024.

Ta stojol te mam Xun

Dedicado a
mi abuelo Juan

Agradecimientos

Quisiera agradecer infinitamente a mis padres por el infinito apoyo en mi proceso escolar de inicio a fin. A mi tutora y directora de tesis, la Dra. Mónica Clapp, por dirigirme en el proceso escolar, por brindarme su experiencia y comprensión para realizar este trabajo. A mis sinodales Alberto S. de Fuentes, Felipe A. García, Judith C. Cordero, Pierre M. Bayard y a Victor H. Santamaría, por sus sugerencias y la revisión exhaustiva de este trabajo.

Agradezco a todos mis profesores que formaron parte de mi trayecto escolar especialmente a los doctores Ramón G. Plaza, Raffaele Folino, y al Dr. Francisco J. Torres, por compartirme el amor por las matemáticas y a la investigación.

Finalmente, agradezco a la CONAHCYT por la beca que tuve a lo largo de la maestría, gracias a esta beca fue posible mis estudios de posgrado.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones acopladas de Schrödinger

$$\begin{cases} -i\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Psi}_1 = \Delta\mathbf{\Psi}_1 + \mu_1|\mathbf{\Psi}_1|^2\mathbf{\Psi}_1 + \beta|\mathbf{\Psi}_2|^2\mathbf{\Psi}_1 & \text{para } y \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ -i\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Psi}_2 = \Delta\mathbf{\Psi}_2 + \mu_2|\mathbf{\Psi}_2|^2\mathbf{\Psi}_2 + \beta|\mathbf{\Psi}_1|^2\mathbf{\Psi}_2 & \text{para } y \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ \mathbf{\Psi}_j = \mathbf{\Psi}_j(y,t) \in \mathbb{C}, j = 1,2, \\ \mathbf{\Psi}_j(y,t) \to 0 \ \text{cuando } |y| \to +\infty, \ t > 0, \quad j = 1,2, \end{cases} \tag{$\mathcal{S}$}$$

donde μ_1, μ_2 son constates positivas, β es un constante de acoplamiento no nula y la dimensión del espacio es $N = 2, 3$.

El sistema ($\mathcal{S}$), deriva de muchos problemas físicos especialmente en óptica no lineal, ver por ejemplo [1–4]. Nos interesa encontrar soluciones de onda solitaria al sistema ($\mathcal{S}$), para ello separamos la variable temporal y espacial, y suponemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}_1(x,t) &= e^{i\lambda_1 t}u(x) \quad \lambda_1 > 0, \\ \mathbf{\Psi}_2(x,t) &= e^{i\lambda_2 t}u(x)v(x) \quad \lambda_2 > 0, \end{aligned}$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones real valuadas. Luego, el sistema ($\mathcal{S}$) se transforma en un sistema elíptico acoplado dado por

$$\begin{cases} \Delta u - \lambda_1 u + \mu_1 u^3 + \beta v^2 u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v - \lambda_2 v + \mu_2 v^3 + \beta u^2 v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u(x),\ v(x) \to 0 & \text{cuando } |y| \to +\infty. \end{cases} \tag{1.0.1}$$

Una importante clase de soluciones al sistema (1.0.1) son los *estados ligados*, esto es, soluciones (u, v) que satisfacen que

$$u(x), v(x) > 0 \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.0.2}$$

El problema (1.0.1) y (1.0.2) es ampliamente estudiado, por ejemplo, cuando $\beta > 0$ y bajo varias suposiciones adicionales, en [5, 6] prueban la existencia de soluciones de estado ligados y en [7] se prueba que las soluciones de (1.0.1), (1.0.2) son radialmente simétricos. Cuando $\beta < 0$ y $N = 2$, se sabe que existe una solución de estado ligado que es radialmente simétrica, ver [9].

En este trabajos, estudiaremos la existencia de soluciones no radiales al problema (1.0.1), (1.0.2) con $\beta < 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, y $\mu_1 = \mu_2$. Notemos que si (u, v) es una solución del sistema (1.0.1), haciendo $w(x) = cu(rx)$ y $z(x) = cv(rx)$, con $c = \sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_1}}$, y $r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, tenemos que el par (w, z) resuelve el sistema

$$\begin{cases} \Delta w - w + w^3 + \beta' z^2 w = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ \Delta z - z + z^3 + \beta' w^2 z = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

donde $\beta' = \frac{\beta}{\mu}$. Por lo que sin perder generalidad, nos enfocaremos en el estudio del siguiente problema.

$$\begin{cases} \Delta u - u + u^3 + \beta v^2 u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v - v + v^3 + \beta u^2 v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u, v > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad u(y), v(y) \to 0 \quad \text{cuando } |y| \to +\infty. \end{cases} \tag{1.0.3}$$

Se sabe que, para $\beta > 0$ suficientemente pequeño, existe una solución de *energía mínima* del sistema (1.0.3), ver [14], y que, cuando $\beta < 0$, no hay soluciones de energía mínima. Sin embargo, en el articulo [8], Juncheng Wei y Tobias Weth, demostraron que, bajo ciertas acciones de subgrupos finitos de $O(N)$ actuando en $\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N)$, existen soluciónes de *energía mínima* en los subespacios invariantes asociados al problema (1.0.3), demostrando así que existen una infinidad de soluciones no radiales. El objetivo de este trabajo es dar una prueba detallada del Teorema 2.1.11 demostrado por Juncheng Wei y Tobias Weth en [8]. En el articulo original de los autores, el Lema 2.1 y la Proposición 3.1 presentan una imprecisión que nos hemos dado a la tarea de enmendar, siendo esto una de las motivaciones para este trabajo.

Para el mejor entendimiento de la demostración del Teorema 2.1.11, en el Capítulo 2, encontraremos la formulación variacional y el *funcional de energía* del problema (1.0.3) en un espacio de Hilbert. Haciendo actuar un cierto subgrupo finito $\mathcal{G}$ de $O(N)$, restringiremos nuestra busqueda de soluciones no radiales al sistema (1.0.3) en una variedad de *Nehari* de clase C^2. Enunciaremos un caso del principio variacional de Ekeland introducido en [15], para nuestros fines referimos a las notas del curso de Metodos Variacionales impartido por la Dra. Mónica Clapp, [10]. En este capítulo, también mencionaremos un lema derivado del principio de concentración y compacidad de P.-L. Lions en [11]. Finalmente, daremos una estimación de energía en terminos de una solución al problema $-\Delta\omega + \omega = \omega^3$.

Dedicaremos la demostración de la Proposición 2.5.1 en el Capítulo 3. El método que se sigue es superponer una solución radial del problema $-\Delta\omega + \omega = \omega^3$ en los puntos fijos de un subgrupo finito de $O(N)$ para dar una estimación por arriba del ínfimo del *funcional de energia* asociado. Después, mediante el principio variacional de Ekeland y el principio de concentración-compacidad de Lions, encontraremos una sucesión que converge al ínfimo del funcional de energía y veremos que tal ínfimo es alcanzado. Finalmente, como una aplicación del Teorema 2.1.11, construiremos una sucesión de subgrupos de $O(N)$ que nos darán una infinidad de soluciones no radiales al problema (1.0.3).

Capítulo 2

Preliminares

Consideremos el sistema de ecuaciones elípticas

$$\begin{cases} \Delta u - u + u^3 + \beta v^2 u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v - v + v^3 + \beta u^2 v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u, v > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad u(y), v(y) \to 0 \quad \text{cuando } |y| \to +\infty. \end{cases} \tag{2.0.1}$$

para $N = 2, 3$ y $\beta < 0$. En este capítulo encontraremos la formulación variacional de problema probaremos y mencionaremos los resultados necesarios para en entendimiento completo de nuestro resultado principal.

2.1. Formulación variacional del problema

Definición 2.1.1. *Una función* $(u, v) \in \left(C^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ *que satisface* (2) *se llama una* ***solución clásica*** *del problema* (2).

Sean $\rho, \psi \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. Multiplicando la primera ecuación por ρ y la segunda por ψ e integrando por partes obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \rho + u\rho \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^3 + \beta v^2 u\right) \rho \, dx, \tag{2.1.1}$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla \cdot .\psi + v\psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(v^3 + \beta u^2 v\right) \psi \, dx. \tag{2.1.2}$$

Para la formulación débil necesitamos que el lado izquierdo de (2.1.1) y (2.1.2) tenga derivadas débiles y el espacio predilecto para esto es $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Por otro lado (2.1.1) y (2.1.2) nos sugiere que $u, v \in L^4\left(\mathbb{R}^N\right)$. En efecto, esto es cierto, para $N = 3$, de los encajes de Sobolev tenemos que $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ para toda $q \in [2, 2^*] = [2, 6]$ con inclusión continua. Mientras que para $N = 2$ se tiene que $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ para toda $q \in [2, \infty)$ tambien con inclusión continua. Esto motiva a la siguiente definición.

Definición 2.1.2. *Una función $(u, v) \in \left(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ es una* ***solución débil del problema*** *(2) si (u, v) satisface (2.1.1) y (2.1.2) para toda $(\rho, \psi) \in \left(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$.*

Consideremos el espacio de Hilbert $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ dotado con el producto escalar

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx,$$

que induce la norma $\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 \, dx\right)^{1/2}$. Para $1 \leq p < \infty$ y para $u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ denotemos $|u|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{1/p}$. Para $(u, v) \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right) \times L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, denotemos $(u, v)_{p,q} = \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx < \infty$, que es una forma bilineal continua, pues la desigualdad de Hölder nos asegura que $|(u, v)_{p,q}| \leq |u|_p |v|_q$. Para $p = 2 = q$ simplemente denotemos por $(\cdot, \cdot)_2 = (\cdot, \cdot)_{2,2}$. Note que si $u, v \in L^4\left(\mathbb{R}^N\right)$ entonces $u^2, uv \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ y $u^3 \in L^{4/3}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Denotaremos $\mathbb{H} = \left(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ el cual es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle (u, v), (w, z)\rangle_{\mathbb{H}} = \langle u, w\rangle + \langle v, z\rangle. \tag{2.1.3}$$

Con estas notaciones vemos que (2.1.1) y (2.1.2) es equivalente a encontrar $(u,v) \in \mathbb{H}$ tal que

$$G[u,v](\rho,\psi) = 0 \qquad \text{para toda } (\rho,\phi) \in \mathbb{H}, \tag{2.1.4}$$

donde

$$G[u,v](\rho,\psi) := \langle u,\rho\rangle + \langle v,\psi\rangle - \left[\left(u^3,\rho\right)_{4/3,4} + \left(v^3,\psi\right)_{4/3,4}\right] - \beta\left[\left(v^2,u\rho\right)_2 + \left(u^2,v\psi\right)_2\right]. \tag{2.1.5}$$

Consideremos el funcional $E : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ dado por

$$E[u,v] = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) - \frac{1}{4}\left(|u|_4^4 + |v|_4^4\right) - \frac{\beta}{2}\left(u^2,v^2\right)_2. \tag{2.1.6}$$

A E se le llama el **funcional de energía** asociado al problema (2).

Proposición 2.1.3. *E es de clase C^2 y*

$$E'[u,v](\rho,\psi) = G[u,v](\rho,\psi) \qquad \textit{para toda } (u,v),(\rho,\psi) \in \mathbb{H}.$$

En consecuencia, (u,v) es solución débil al problema (2) si y sólo si (u,v) es un punto crítico de E.

Demostración. Sean $L,T,K : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ dados por

$$K(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \tag{2.1.7}$$

$$L(u,v) = \frac{1}{4}\left(|u|_4^4 + |v|_4^4\right), \tag{2.1.8}$$

$$T(u,v) = (u^2,v^2)_2, \tag{2.1.9}$$

donde $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ es la norma inducida en $\mathbb{H}$ por el producto escalar (2.1.3). Mediante un cálculo directo, tenemos que K es de clase C^∞ y

$$K'[u,v](\rho,\psi) = \langle u,\rho\rangle + \langle v,\psi\rangle. \tag{2.1.10}$$

Para L, encontremos sus derivadas parciales de orden 2 y verifiquemos que sean continuas. Notamos que $L[u,v] = L[v,u]$, es decir, L es simétrico. Tenemos que

$$\frac{L[(u+t\rho,v)] - L[u,v]}{t} = \frac{1}{4t}\int_{\mathbb{R}^N}\left[4u^3\cdot(t\rho) + 6u^2\cdot(t\rho)^2 + 4u\cdot(t\rho)^3 + (t\rho)^4\right]dx.$$

Sea

$$f_t(x) = \frac{1}{4t}\left[4u^3\cdot(t\rho) + 6u^2\cdot(t\rho)^2 + 4u\cdot(t\rho)^3 + (t\rho)^4\right](x),$$

el cual converge puntualmente a $u^3\rho$ cuando $t\to 0$. Para $t\in(-1,1)$ tenemos que

$$|f_t(x)| \le \frac{1}{4}\left[4|u|^3|\rho| + 6|u|^2|\rho|^2 + 4|u||\rho|^3 + |\rho|^4\right](x) =: g(x).$$

Como $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)\subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$, para $q\in[2,6]$, se sigue por la desigualdad de Hölder que $0\le g(x)\in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Luego, por el Teorema de convergencia dominada, tenemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{L((u+t\rho,v)) - L(u,v)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} f_t(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^3\rho\,dx. =: \phi(u,v)[\rho].$$

Claramente $\phi(u,v)[\cdot]$ es lineal y

$$|\phi(u,v)[\rho]| \le |u^3|_{4/3}|\rho|_4 \le c|u|_4^3\|\rho\|,$$

donde $c>0$ es tal que $|\rho|_4\le c\|\rho\|$ para toda $\rho\in\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Por tanto, $\phi(u,v)[\cdot]$ es la primera derivada parcial de Gâteaux de L en la primera componente. Verifiquemos la continuidad de $\phi : \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \to \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R}\right)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\phi(u,v)[\rho] - \phi(w,z)[\rho]\right| =& \left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^3 - w^3\right) \rho \, dx\right| \\
=& \left|\int_{\mathbb{R}^N} \left[(u-w)^3 + 3uw(u-w)\right] \rho \, dx\right| \\
\leq& \left|(u-w)^3\right|_{4/3} \left|\rho\right|_4 + 3\,|u|_4\,|w|_4|u-w|_4\left|\rho\right|_4 \\
\leq& c^4 \left(\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}^3 + 3\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}\|(w,z)\|_{\mathbb{H}}\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}\right) \\
& \cdot \|\rho\|_{\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)},
\end{aligned}$$

de donde vemos que ϕ es continua, por tanto L es parcialmente diferenciable con respecto a la primera variable y $\partial_1 L(u,v) = \phi(u,v)$. Como L es simétrico, se sigue que L es parcialmente diferenciable con respecto a la segunda variable y $\partial_2 L(u,v) = \partial_1 L(v,u)$. Como ϕ es continua, se sigue que $\partial_1 L$ y $\partial_2 L$ son continuas. Por tanto, L es de clase C^1 y

$$\begin{aligned}
L'(u,v)[\rho,\psi] =& \partial_1 L(u,v)[\rho] + \partial_1 L(u,v)[\psi] \\
=& \int_{\mathbb{R}^N} u^3 \rho \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} v^3 \psi \, dx.
\end{aligned}$$

Ahora vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_1 L(u+t\psi,v)[\rho] - \partial_1 L(u,v)[\rho]}{t} =& \frac{1}{t} \int \left((u+t\psi)^3 - u^3\right) \rho \, dx \\
=& \int_{\mathbb{R}^N} (3u^2\psi + 3tu\psi^2 + t^2\psi^3)\rho \, dx \\
& \xrightarrow[t\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^N} 3u^2 \psi\rho \, dx =: \tau(u,v)[\rho,\psi],
\end{aligned}$$

por convergencia dominada. Claramente $\tau(u,v)[\cdot,\cdot]$ es bilineal y

$$\left|\tau(u,v)[\rho,\psi]\right| \leq 3\,|u|_4^2\,|\rho\psi|_2 \leq 3|u|_4^2|\rho|_4|\psi|_4 \leq 3c^4\|u\|^2\|\rho\|\|\psi\|,$$

de donde se sigue que $\tau(u,v)[\cdot,\cdot]$ es continua. Ahora verifiquemos la continuidad de $\tau(\cdot,\cdot)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|(\tau(u,v)-\tau(w,z))[\rho,\psi]\right| &\leq 3\int_{\mathbb{R}^N}\left|u^2-w^2\right||\rho||\psi|\,dx\\ &\leq 3\left|u^2-w^2\right|_2 \|\rho\psi|_2\,dx\\ &\leq 3|(u+w)|_4|u-v|_4|\rho|_4|\psi|_4\\ &\leq 3c^4\|(u,v)+(w,z)\|_{\mathbb{H}}\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}\|\rho\|\|\psi\|,\end{aligned}$$

por lo que

$$\|\tau(u,v)-\tau(w,z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{R})}\leq 3c^4\|(u,v)+(w,z)\|_{\mathbb{H}}\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}},$$

de donde concluimos que $\tau(\cdot,\cdot)$ es continuo. En consecuencia $\partial_1 L(u,v)$ es parcialmente diferenciable con respecto a la primera variable y $\partial_1(\partial_1 L(u,v)) = \tau(u,v)$ es continuo. Como $\partial_2 L(u,v) = \partial_1 L(v,u)$ se sigue que $\partial_2 L$ tiene derivada parcial continua en la segunda variable y $\partial_2(\partial_2 L(u,v)) = \partial_1(\partial_1(L(v,u))$. Además, como $\partial_1 L(u,v)$ no depende de la segunda variable y $\partial_2 L(u,v)$ tampoco de la primera variable, se sigue que $\partial_2(\partial_1 L(u,v)) = \partial_1(\partial_2 L(u,v)) = 0$. En total L tiene derivadas parciales hasta orden 2 y $\partial_i\partial_j L$, $i,j=1,2$ son continuas. Por tanto, L es de clase C^2.

Ahora verifiquemos que $T(u,v) = \left(u^2,v^2\right)_2$ es de clase C^2. Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{T(u+t\rho,v)-T(u,v)}{t} &= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N}(u+t\rho)^2v^2-u^2v^2\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}2u\rho v^2+t\rho^2v^2\,dx\\ &\xrightarrow[t\to 0]{} 2\int_{\mathbb{R}^N}v^2u\rho\,dx := \phi_T(u,v)[\rho],\end{aligned}$$

por el teorema de convergencia dominada. Claramente $\phi_T(u,v)[\cdot]$ es lineal y

$$\left|\phi_T(u,v)[\rho]\right| \leq 2|v|_4^2|u|_4|\rho|_4 \leq 2\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}^3\|\rho\|, \tag{2.1.11}$$

por lo que $\phi_T(u,v) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R}\right)$ y T es Gâteaux diferenciable en la primera variable. Veamos que $\phi_T(\cdot,\cdot)$ sea continua. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|(\phi_T(u,v)-\phi_T(w,z))[\rho]\right| \leq & 2\int_{\mathbb{R}^N}\left|\left(v^2u-z^2w\right)\rho\right|\,dx\\
\leq & 2\int_{\mathbb{R}^N}\left|v^2-z^2\right||u\rho|\,dx+2\int_{\mathbb{R}^N}\left|(u-w)\rho\right||z|^2\,dx\\
\leq & 2\left|v^2-z^2\right|_2\left|u\rho\right|_2+2\left|(u-w)\rho\right|_2\left|z^2\right|_2\\
\leq & 2\left(|v+z|_4|v-z|_4|u|_4+|z|_4^2|u-w|_4\right)\left|\rho\right|_4\\
\leq & 2c^4\left(\|(u,v)+(w,z)\|_{\mathbb{H}}\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}+\|(w,z)\|_{\mathbb{H}}^2\right)\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}\|\rho\|,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\|\phi_T(u,v)-\phi_T(w,z)\|_{\mathcal{L}\left(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right),\mathbb{R}\right)} \leq & 2c^4\left(\left\{2\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}+\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}\right\}\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}+\right.\\
& \left.+\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}+\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}\right)\cdot\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}$$

Así, fijando $(u,v) \in \mathbb{H}$ y $\epsilon \in (0,1)$ podemos tomar

$$\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(4c^4+1)\left\{\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}+1\right\}^2},$$

para tener que

$$\|\phi_T(u,v)-\phi_T(w,z)\|_{\mathcal{L}\left(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right),\mathbb{R}\right)} < \epsilon,$$

si $\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}} < \delta(\epsilon)$. En consecuencia T es diferenciable con respecto a la primera variable y $\partial_T L(u,v) = \phi_T(u,v)$ es continua. Por simetría, T tiene derivada parcial continua con respecto a la segunda variable con $\partial_2 T(u,v) = \partial_1 T(v,u)$. Por ende, T es al menos de clase C^1 y

$$\begin{aligned} T'(u,v)[\rho,\psi] =& \partial_1 T(u,v)[\rho] + \partial_2 T(u,v)[\psi] \\ =& 2\left(\int_{\mathbb{R}^N} v^2 u\rho\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 v\psi\, dx\right). \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Como $\partial_1 T(u,v)$ es lineal con respecto a la primera variable, de (2.1.11) tenemos que

$$\|\partial_1 T(u,v)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})} \leq 2\left(|v|_4^2 |\rho|_4\right).$$

Por tanto, $\partial_1 T(u,v)$ tiene derivada parcial con

$$\partial_1\left(\partial_1 T(u,v)\right)[\rho,\psi] = 2\int_{\mathbb{R}^N} v^2 \psi\rho\, dx.$$

Además,

$$\begin{aligned} \left|\partial_1^2 T(u,v) - \partial_1^2 T(w,z)\right| \leq& 2\int_{\mathbb{R}^N} \left|v^2 - z^2\right| \left|\psi\rho\right| dx \\ \leq& 2\,|v+z|_4\,|v-z|_4\,\left|\psi\right|_4\left|\rho\right|_4 \\ \leq& 2c^4 \|(u,v)+(w,z)\|_{\mathbb{H}} \|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}} \|\rho\| \|\psi\|, \end{aligned}$$

por lo que

$$\|\partial_1^2 T(u,v) - \partial_1^2 T(w,z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{R})} \leq 2c^4\left\{2\|(u,v)\|_{\mathbb{H}} + \|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}\right\}\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}.$$

Así, fijando (u,v) y $\epsilon \in (0,1)$ podemos tomar

$$\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(2c^4+1)(2\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}+1)}$$

para obtener

$$\|\partial_1^2 T(u,v) - \partial_1^2 T(w,z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{R})} < \epsilon.$$

Por tanto $\partial_1^2 T(u,v)$ es continuo. Por simetría, $\partial_2 T(u,v)$ tiene derivada parcial continua en la segunda variable con $\partial_2^2 T(u,v) = \partial_1^2 T(v,u)$.

Ahora calculemos las derivadas parciales segundas cruzadas de T. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial_1 T(u,v+t\psi)[\rho] - \partial_1 T(u,v)[\rho]}{t} =& \frac{2}{t}\int_{\mathbb{R}^N}\left[(v+t\psi)^2 - v^2\right] u\rho\, dx \\ =& 4\int_{\mathbb{R}^N} vu\psi\rho\, dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} t\psi^2 u\rho\, dx.\end{aligned}$$

Como $\psi^2, u\rho \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$, por desigualdad de Hölder, $\psi^2 u\rho \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Entonces, por el Teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial_1 T(u,v+t\psi)[\rho] - \partial_1 T(u,v)[\rho]}{t} = 4\int_{\mathbb{R}^N} vu\psi\rho\, dx =: \phi_{2,T}(u,v)[\rho,\psi].$$

Claramente, $\phi_{2,T}(u,v)[\cdot,\cdot]$ es lineal y

$$\begin{aligned}\left|\phi_{2,T}(u,v)[\rho,\psi]\right| &\le 4c^4\|u\|\|v\|\|\rho\|\|\psi\| \\ &\le 4c^4\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}^2\|\rho\|\|\psi\|,\end{aligned}$$

de donde $\phi_{2,T}(u,v)[\cdot,\cdot]$ es continua. Además,

$$\begin{aligned}
\left|\phi_{2,T}(u,v)[\rho,\psi]-\phi_{2,T}(w,z)[\rho,\psi]\right| &\leq 4\int_{\mathbb{R}^N}\left|(uv-wz)\rho\psi\right|\,dx\\
&\leq 4\int_{\mathbb{R}^N}\left|(u-w)v\rho\psi\right|\,dx+4\int_{\mathbb{R}^N}\left|(v-z)w\rho\psi\right|\,dx\\
&\leq 4c^4\left(\|u-w\|\|v\|\|\rho\|\|\psi\|+\|v-z\|\|w\|\|\rho\|\|\psi\|\right)\\
&\leq 4c^2\left(\|(u,v)\|_{\mathbb{H}}+\|(w,z)\|_{\mathbb{H}}\right)\|(u,v)-(w,z)\|_{\mathbb{H}}\|\rho\|\|\psi\|,
\end{aligned}$$

de donde vemos que $\phi_{2,T}(\cdot,\cdot)$ es continua en (u,v). De esta forma $\partial_2\partial_1 T(\cdot,\cdot)$ existe y es continua. Similarmente, $\partial_1\partial_2 T(\cdot,\cdot)$ existe y es continua. Así, T tiene derivadas parciales continuas hasta orden 2 y por tanto es de clase C^2.

Finalmente, $E=K-L-\frac{\beta}{2}T$ es de clase C^2, y por cálculos anteriores se tiene que

$$E'(u,v)[\rho,\psi]=G(u,v)[\rho,\psi].$$

De (2.1.4) se sigue que $(u,v)\in\mathbb{H}$ es solución débil de (2) si y sólo si (u,v) es punto crítico del funcional de energía (2.1.6).

□

De la Proposición 2.1.3, tenemos que todas las soluciones de (2) pertenecen al conjunto de Nehari

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}=\Big\{(u,v)\in\mathbb{H}:\,u,v\geq 0,u,v\neq 0,\|u\|^2=|u|_4^4+\beta\left(u^2,v^2\right)_2,&\\
\|v\|^2=|v|_4^4+\beta\left(u^2,v^2\right)_2\Big\}.&
\end{aligned}$$

Definición 2.1.4. *Un* ***estado fundamental*** *del problema* (2) *es una función* $(\hat{u},\hat{v})\in\mathcal{N}$ *que satisface que* $E[\hat{u},\hat{v}]=c_0$*, donde*

$$c_0=\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}}E[u,v].$$

Como hemos mencionado, en [14] demostraron que, para $\beta > 0$ suficientemente pequeño, c_0 es alcanzado mientras que, para $\beta < 0$, no es alcanzado.

Para $\beta > -1$, (2) admite una solución de la forma

$$(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}(\omega,\omega),$$

donde $\omega \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ es la única solución (salvo traslaciones) del problema

$$\begin{cases} -\Delta\omega + \omega = \omega^3, & \omega > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \\ \omega(0) = \text{máx}_{y\in\mathbb{R}^N}\, \omega(y), & \omega \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right). \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Sin embargo, estas soluciones no son estados fundamentales para $-1 < \beta < 0$. Para $\beta \leq -1$, (2) no admite ninguna solución con $u = v$ ya que

$$u \neq v \quad \text{para toda } (u,v) \in \mathcal{N}. \tag{2.1.14}$$

Probaremos que para cualquier $\beta < 0$, existen soluciones de estado fundamental en espacios de funciones invariantes bajo la acción de ciertos subgrupos finitos de $O(N)$.

Para enunciar nuestro teorema principal daremos un par de definiciones y notaciones. Sea $\mathcal{G}$ un subgrupo finito de $O(N)$ y $x \in \mathbb{R}^N$. La $\mathcal{G}$–**órbita** de x es el conjunto $\mathcal{G}x := \{Ax \,:\, A \in \mathcal{G}\}$, el **conjunto fijo** de x es $\mathcal{G}^x = \{A \in \mathcal{G} \,:\, Ax = x\}$, denotamos por $|\mathcal{G}x|, |\mathcal{G}^x|$ a la cardinalidad de $\mathcal{G}x$ y $\mathcal{G}^x$, respectivamente. Denotemos por $\text{Fix}(\mathcal{G}) = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, \mathcal{G}x = \{x\}\}$, que es un subespacio de $\mathbb{R}^N$, y denotamos po $V_\mathcal{G} = \text{Fix}(\mathcal{G})^\perp$ al complemento ortogonal de $\text{Fix}(\mathcal{G})$ en $\mathbb{R}^N$. Finalmente, denotamos por $\ell(\mathcal{G}) = \text{mín}\{|\mathcal{G}y| \,:\, y \in V_\mathcal{G} \setminus \{0\}\}$.

Definición 2.1.5. *Una función* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *es* $\mathcal{G}$*-**invariante** si*

$$f(Ax) = f(x) \qquad \forall A \in \mathcal{G}, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Proposición 2.1.6. *Sea* $A \in O(N)$.

(a) *Si* $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *entonces* $u \circ A \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *y* $|u \circ A| = |u|_p$.

(b) *Si* $u \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, *entonces* $u \circ A \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\nabla(u \circ A) = A^{-1} \circ \nabla u \circ A,$$

y $\|u \circ A\| = \|u\|$.

Demostración. Ver, por ejemplo, [10, Proposición 4.14.].

□

Definición 2.1.7. *El **espacio de** $\mathcal{G}$**–puntos fijos de** $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ es*

$$H^{\mathcal{G}} := \left\{u \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \;:\; u \text{ es } \mathcal{G}-invariante\right\}.$$

Definición 2.1.8. *Sea* $B \in O(N)$, *y sea* $\mathcal{G}$ *un subgrupo finito de* $O(N)$. *Decimos que el par* $(B, \mathcal{G})$ *es **admisible** si*

(a) *B pertenece al normalizador de* $\mathcal{G}$ *y* $B^2 \in \mathcal{G}$.

(b) $Bx = x$ *para todo* $x \in Fix(\mathcal{G})$.

(c) *Existe un punto* $x_0 \in V_{\mathcal{G}} \setminus \{0\}$ *tal que*

(c1) $|\mathcal{G}x_0| = \ell(\mathcal{G})$,

(c2) $\min_{A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^{x_0}} |x_0 - Ax_0| < 2 \min_{A \in \mathcal{G}} |x_0 - BAx_0|$.

Observaciones 2.1.9. *1. La condición $(c2)$ implica en particular que $B \notin \mathcal{G}$.*

2. $\mathcal{G}_B = \mathcal{G} \cup B\mathcal{G}$ es un subgrupo de $O(N)$, gracias a la condición (a).

Consideremos la función $* : \mathcal{G}_B \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definida por partes como

$$A * (u,v) = \begin{cases} \left(u \circ A^{-1}, v \circ A^{-1}\right) & \text{si } A \in \mathcal{G}, \\ \left(v \circ (BA)^{-1}, u \circ (BC)^{-1}\right) & \text{si } A = BC,\, C \in \mathcal{G}. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Proposición 2.1.10. *La función $*$ es una acción de $\mathcal{G}_B$ sobre $\mathbb{H}$ y el conjunto de puntos $*$–invariantes está dado por*

$$H^* := \left\{(u,v) \in \mathbb{H} \ : A * (u,v) = (u,v) \ \textit{para todo} \ A \in \mathcal{G}_B\right\} = \left\{(u, u \circ B) \ : \ u \in H^{\mathcal{G}}\right\}.$$

Demostración. Demostremos que $I * (u,v) = (u,v)$ y que $AC * (u,v) = A * (C * (u,v))$ para toda $A, C \in \mathcal{G}_B$, donde I es el elemento neutro de $O(N)$.

Sean $(u,v) \in \mathbb{H}$ y $A, C \in G$. Como $I \in G$, por la definición de $*$, tenemos que $I * (u,v) = (u \circ I^{-1}, v \circ I^{-1}) = (u,v)$, ya que $I^{-1} = I$ e $I(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}^N$. Tenemos por definición que

$$\begin{aligned} AC * (u,v) &= (u \circ (AC)^{-1}, v \circ (AC)^{-1}) \\ &= (u \circ C^{-1} \circ A^{-1}, v \circ C^{-1} \circ A^{-1}) \\ &= A * (u \circ C^{-1}, v \circ C^{-1}) \\ &= A * (C * (u,v)). \end{aligned}$$

Como $B\mathcal{G}B^{-1} = \mathcal{G}$, existe $D \in \mathcal{G}$ tal que $A = BDB^{-1}$, con lo que $A(BC) = B(DC)$, de esta forma

$$\begin{aligned} (A(BC)) * (u,v) &= (BDC) * (u,v) \\ &= B * (DC * (u,v)). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
A*(BC*(u,v)) =& A*\left(v\circ C^{-1}\circ B^{-1}, u\circ C^{-1}\circ B^{-1}\right)\\
=&\left(v\circ C^{-1}\circ B^{-1}\circ A^{-1}, u\circ C^{-1}\circ B^{-1}\circ A^{-1}\right)\\
=&\left(v\circ C^{-1}\circ B^{-1}\circ \left(BD^{-1}B^{-1}\right), u\circ C^{-1}\circ B^{-1}\circ \left(BD^{-1}B^{-1}\right)\right)\\
=&\left(v\circ C^{-1}\circ D^{-1}B^{-1}, u\circ C^{-1}\circ D^{-1}B^{-1}\right)\\
=&B*(DC*(u,v)),
\end{aligned}$$

por tanto $(A(BC))*(u,v) = A*(BC*(u,v))$.

También, por definición se sigue que

$$\begin{aligned}
((BC)A)*(u,v) =&(B(CA))*(u,v)\\
=&\left(v\circ (CA)^{-1}\circ B^{-1}, u\circ (CA)^{-1}\circ B^{-1}\right)\\
=&\left(v\circ A^{-1}\circ C^{-1}\circ B^{-1}, u\circ A^{-1}\circ C^{-1}\circ B^{-1}\right)\\
=&BC*(A*(u,v)).
\end{aligned}$$

Para elementos de la forma BA, BC tenemos que $BABC = B(BDB^{-1})BC = B^2DC \in \mathcal{G}$, donde $D\in\mathcal{G}$ es tal que $A = BDB^{-1}$, con lo que

$$\begin{aligned}
((BA)(BC)*(u,v)) =& \left(u\circ (BABC)^{-1}, v\circ (BABC)^{-1}\right)\\
=&\left(\left(u\circ (BC)^{-1}\right)\circ (BA)^{-1}, \left(v\circ (BC)^{-1}\right)\circ (BA)^{-1}\right)\\
=&(BA)*\left(v\circ (BC)^{-1}, u\circ (BC)^{-1}\right)\\
=&BA*(BC*(u,v)).
\end{aligned}$$

Esto prueba que $*$ es una acción de $\mathcal{G}_B$ sobre $\mathbb{H}$.

Finalmente, caracterizaremos los elementos $*-$invariantes de $\mathbb{H}$. Sea $(u,v)\in$

$\mathbb{H}$ tal que $A*(u,v)=(u,v)$ para toda $A\in\mathcal{G}_B$, de manera particular, para $B\in\mathcal{G}_B$, tenemos que $B*(u,v)=\left(v\circ B^{-1},u\circ B^{-1}\right)=(u,v)$, así $u=v\circ B^{-1}$, de donde $v=u\circ B$. Como $A*(u,v)=\left(u\circ A^{-1},v\circ A^{-1}\right)=(u,v)$ para toda $A\in\mathcal{G}\subset\mathcal{G}_B$, se tiene que u es $\mathcal{G}$–invariante, por ende $(u,v)=(u,u\circ B)$ con $u\in H^{\mathcal{G}}$.

Sea $(u,u\circ B)$ tal que $u\in H^{\mathcal{G}}$, como B está en el grupo normal de $\mathcal{G}$, para $A^{-1}\in G$ existe $D\in\mathcal{G}$ tal que $BA^{-1}=DB$, por lo que

$$\begin{aligned}A*(u,u\circ B)&=\left(u\circ A^{-1},(u\circ B)\circ A^{-1}\right)\\&=\left(u,u\circ(BA^{-1})\right)\\&=(u,u\circ(DB))\\&=(u,u\circ B),\end{aligned}$$

y, por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}(BA)*(u,u\circ B)&=\left((u\circ B)(BA)^{-1},u\circ(BA)^{-1}\right)\\&=\left(u\circ\left(BA^{-1}B^{-1}\right),u\circ A^{-1}B^{-1}\right)\\&=\left(u\circ D,u\circ B^{-1}\right)\\&=\left(u,u\circ(B^{-2}B)\right)\\&=(u,u\circ B),\end{aligned}$$

donde hemos ocupado nuevamente que $BAB^{-1}=D$ y que $B^2\in\mathcal{G}$. Esto prueba que $(u,u\circ B)$ es $*$–invariante. □

Buscamos soluciones al problema (2) que sean $*$– invariantes, por lo anterior, el lugar adecuado para buscarlos es entre la intersección del espacio $*$–invariantes de $(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right))^2$ y el conjunto de Nehari. Definamos

$$\mathcal{N}(B,\mathcal{G}):=\left\{u\in H^{\mathcal{G}}\ :\ (u,u\circ B)\in\mathcal{N}\right\}$$

y

$$c(B,\mathcal{G}) = \inf_{u\in\mathcal{N}(B,\mathcal{G})} E(u,u\circ B). \tag{2.1.16}$$

Nuestro resultado principal establece que lo siguiente.

Teorema 2.1.11. *Sean $N = 2,3$, $(B,\mathcal{G})$ un par admisible, y sea $\beta < 0$. Entonces, $\mathcal{N}(B,\mathcal{G})$ es no vacío y $c(B,\mathcal{G})$ se alcanza. Además, cada minimizador $u \in \mathcal{N}(B,\mathcal{G})$ de (2) es una solución $\mathcal{G}$–invariante de la forma $(u,u\circ B)$ de (2.1.16) con $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Note que para $\beta \leq -1$, $u \neq v$ para toda $(u,v) \in \mathcal{N}$. Por tanto, del Teorema anterior deducimos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.1.12. *Bajo las hipótesis del Teorema (2.1.11), para $\beta \leq -1$, existe una solución $(u,u\circ B)$ $\mathcal{G}$–invariante de (2) con $u \neq u\circ B$. Entonces u no es $\mathcal{G}_B$–invariante y por ende no radial.*

Ahora fijemos un par admisible $(B,\mathcal{G})$, tenemos que $H^{\mathcal{G}} \hookrightarrow \mathbb{H}$ por medio de $i_B(u) = (u,u\circ B)$ cuya imagen es el subespacio cerrado H^*. La Proposición 2.1.6, nos asegura que $\|i_B(u)\|_{\mathbb{H}} = 2^{1/2}\|u\|$.

Observación 2.1.13. *Para $u \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ tenemos que*

$$E(u,u\circ B) = \|u\|^2 - \frac{1}{2}|u|_4^4 - \frac{\beta}{2}|u(u\circ B)|_2^2$$

y si además $(u,u\circ B) \in \mathcal{N}$, tenemos que

$$E(u,u\circ B) = \frac{\|u\|^2}{2}.$$

Consideremos el funcional $\mathcal{J} : \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$, definido por $\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}E(i_B(u))$, de la observación anterior tenemos que

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}|u|_4^4 - \beta\mathcal{Q}(u),$$

donde $\mathcal{Q}:\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)\to\mathbb{R}$ está definido por

$$\mathcal{Q}(u)=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}u^2(x)u^2(Bx)\,dx=\frac{1}{4}|u\cdot(u\circ B)|_2^2.$$

Proposición 2.1.14. *(a) $\mathcal{J}\in C^2(\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right),\mathbb{R})$ y*

$$\langle\nabla\mathcal{J}(u),v\rangle=\langle u,v\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}u^3v\,dx-\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2(u\circ B)v+(u\circ B)^2uv\,dx\quad \textit{para toda }\ v\in\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.1.17}$$

(b) Para $y\in Fix(\mathcal{G})$ fijo, consideremos el mapeo $\widehat{\cdot}: H^{\mathcal{G}}\to H^{\mathcal{G}}$ definido por $\widehat{u}(x)=u(x+y)$. Entonces $\widehat{\cdot}$ está bien definido y es una isometría. Además

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\widehat{u})=&\mathcal{J}(u),\\ (\nabla\mathcal{J})(\widehat{u})=&\widehat{\nabla\mathcal{J}(u)},\end{aligned}$$

*Es decir, $\mathcal{J}$ es **invariante** y $\nabla\mathcal{J}$ es **equivariante** bajo la acción de $\widehat{\cdot}$.*

Demostración. (a) Como i_B es un operado lineal continuo, tenemos que derivada de i_B en u en dirección v, está dado por $Di_B(u)[v]=(v,v\circ B)$. Por definición, $\mathcal{J}=\frac{1}{2}E\circ i_B$ e i_B es de clase C^∞ , se tiene que $\mathcal{J}$ es de clase C^2. De la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'(u)[v]=&\frac{1}{2}E'(i_B(u))\circ Di_B[v]\\ =&\frac{1}{2}E'((u,u\circ B))\left[(v,v\circ B)\right]\\ =&\frac{1}{2}\langle u,v\rangle+\frac{1}{2}\langle u\circ B,v\circ B\rangle-\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}u^3v\,dx-\int_{\mathbb{R}^N}(u\circ B)^3(v\circ B)\,dx\right)+\\ &-\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(u\circ B)^2uv+u^2u(\circ B)(v\circ B)\,dx\\ =&\langle u,v\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}u^3v\,dx-\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(u\circ B)^2uv+u^2u(\circ B)(v\circ B)\,dx,\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado

(b) Sean $u \in H^{\mathcal{G}}$, y $y \in \mathrm{Fix}(\mathcal{G})$, entonces $(\widehat{u} \circ A)(x) = u(Ax + y) = u(A(x + y)) = u(x + y) = \widehat{u}(x)$ para toda $A \in \mathcal{G}$, por lo que $\widehat{u} \in H^{\mathcal{G}}$, de donde el mapeo $\widehat{\cdot}$ está bien definido y claramente

$$\|\widehat{u}\| = \|u\|, \tag{2.1.18}$$

$$|\widehat{u}|_4 = |u|_4, \tag{2.1.19}$$

por lo que además $\widehat{\cdot}$ es una isometría lineal.

Ahora, por la Definición 2.1.8(b), $By = y$ y $(\widehat{u} \circ B)(x) = u(Bx + y) = u(B(x + y)) = \widehat{u \circ B}(x)$, por lo que el par $(\widehat{u}, \widehat{u} \circ B) \in (\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N))^2$ es $*$–invariante y

$$|\widehat{u} \cdot (\widehat{u} \circ B)|_2 = |\widehat{u} \cdot (\widehat{u \circ B})|_2 = |u \cdot (u \circ B)|_2. \tag{2.1.20}$$

De (2.1.18) -(2.1.20), se tiene que

$$\mathcal{J}(\widehat{u}) = \mathcal{J}(u). \tag{2.1.21}$$

Para $-y$ sea $\widetilde{v}(x) = v(x - y)$, por (2.1.21), tenemos también que

$$\mathcal{J}(\widetilde{u}) = \mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(\widehat{u}),$$

se sigue de la regla de la cadena que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J} \circ (\widehat{\cdot}))'(u)[\widetilde{v}] &= \mathcal{J}'(\widehat{u})[(D\widehat{\cdot})(u)[\widetilde{v}]] \\
&= \mathcal{J}'(\widehat{u})[\widehat{\widetilde{v}}] \\
&= \mathcal{J}'(\widehat{u})[v].
\end{aligned}$$

Nuevamente por (2.1.21), tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}\circ(\widehat{\cdot}))'(u)[\widetilde{v}] =&(\mathcal{J})'(u)[\widetilde{v}]\\ =&\mathcal{J}'(u)[\widetilde{v}].\end{aligned}$$

De la definición de $\nabla\mathcal{J}(u)$ y haciendo el cambio de variable $z = x - y$ en la definición de $\langle\cdot,\widetilde{v}\rangle$, tenemos que

$$\mathcal{J}'(u)[\widetilde{v}] = \langle\nabla\mathcal{J}(u),\widetilde{v}\rangle = \langle\widehat{\nabla\mathcal{J}(u)},v\rangle,$$

por lo que

$$\langle(\nabla\mathcal{J})(\widehat{u}),v\rangle = \mathcal{J}'(\widehat{u})[v] = \mathcal{J}'(u)[\widetilde{v}] = \langle\widehat{\nabla\mathcal{J}(u)},v\rangle \quad \text{para toda } v\in H^{\mathcal{G}},$$

por ende $(\nabla\mathcal{J})(\widehat{u}) = \widehat{\nabla\mathcal{J}(u)}$, como se quería. □

Lema 2.1.15. *Para $u\in H^{\mathcal{G}}$, $v\in\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ tenemos que*

$$\langle\nabla\mathcal{Q}(u),v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u^2(Bx)u(x)v(x)dx.$$

Demostración. Como $Q = \frac{1}{2}T(i_B(u))$, donde T está definido en (2.1.9), tenemos que Q es de clase C^2 y para $u,v\in\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ se sigue de la regla de la cadena que

$$\begin{aligned}\langle\nabla\mathcal{Q}(u),v\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x))u(Bx)v(Bx) + u^2(Bx)u(x)v(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(u^2(B^{-1}x) + u^2(Bx))u(x)v(x)dx.\end{aligned}$$

Para $u\in H^{\mathcal{G}}$ tenemos que $u\circ B = u\circ B^{-1}$ ya que $B^2\in\mathcal{G}$ y $u\circ A = u$ para toda

$A \in \mathcal{G}$, entonces concluimos que

$$\langle \nabla \mathcal{Q}(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u^2(Bx)u(x)v(x)\,dx \qquad \text{para } u \in H^{\mathcal{G}}, v \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.1.22}$$

□

Corolario 2.1.16. *Si $u \in H^{\mathcal{G}}$ es un punto crítico no trivial y no negativo de $\mathcal{J}$, entonces $(u, u\circ B)$ es una solución de (2).*

Demostración. Para $v \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ tenemos que, por el Lema 2.1.15,

$$\begin{aligned} 0 =& \langle \nabla \mathcal{J}(u), v\rangle \\ =& \langle u, v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u^3 v\,dx - \beta\langle \nabla Q(u), v\rangle \\ =& \langle u, v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u^3 v\,dx - \beta\int_{\mathbb{R}^N} (u\circ B)^2 uv\,dx. \end{aligned}$$

Entonces u es una solución débil de la ecuación

$$-\Delta u + u = f, \tag{2.1.23}$$

donde $f = \beta(u\circ B)^2 u + u^3$, por la regularidad elíptica estándar, ver [16], u es en efecto una solución clásica. Además, como $u \geq 0$, se tiene que $f \geq 0$, luego del principio del máximo fuerte nos asegura que $u > 0$ en $\mathbb{R}^N$, ver [16]. Ahora bien, como $B^2 \in G$, se sigue de (2.1.23) que $u\circ B$ resuelve

$$-\Delta(u\circ B) + (u\circ B) - (u\circ B)^3 = \beta(u\circ B^2)^2(u\circ B) = \beta u^2(u\circ B).$$

Por lo que $(u, u\circ B)$ es una solución clásica de (2). □

Por el corolario anterior y el Lema 2.1.15 los puntos críticos de $\mathcal{J}$ que están en $H^{\mathcal{G}}$ pertenecen al siguiente conjunto

$$\mathcal{N}_{\mathcal{G}} = \{u \in H^{\mathcal{G}} \;:\; u \neq 0,\ \mathcal{J}'(u)u = 0\} = \{u \in H^{\mathcal{G}} \;:\; u \neq 0,\ \|u\|^2 = |u|_4^4 + \beta |u \cdot (u \circ B)|_2^2\}.$$

Notamos que $\mathcal{N}(B, \mathcal{G}) = \{u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}} \;:\; u \geq 0\}$. Necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.1.17. *(a) $|u|_4^2 \geq \|u\| \geq \gamma$ para alguna constante $\gamma > 0$ (independiente de $\beta \leq 0$) y para todo $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$.*

(b) $\mathcal{N}_{\mathcal{G}} \subset H^G$ es una variedad cerrada de clase C^2. Además $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ es invariante bajo la acción de $\widehat{\cdot}$ para toda $y \in Fix(\mathcal{G})$.

(c) $\mathcal{J}(u) = \|u\|^2/4 > 0$ para $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ y

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}} \mathcal{J}(u) > 0, \tag{2.1.24}$$

por lo que $\mathcal{J}\big|_{\mathcal{N}_{\mathcal{G}}}$ es acotado inferiormente.

(d) Si $u \in H^{\mathcal{G}} \setminus \{0\}$ satisface que $|u|_4^4 > |\beta| |u \cdot (u \circ B)|_2^2$, entonces $\sqrt{t(u)}u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ para

$$t(u) = \frac{\|u\|^2}{|u|_4^4 + \beta |u \cdot (u \circ B)|_2^2} > 0.$$

Demostración. (a) Para $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ tenemos que $\|u\|^2 = |u|_4^4 + \beta |u \cdot (u \circ B)|_2^2 \leq |u|_4^4$, ya que $\beta < 0$, y por los encajes de Sobolev, tenemos que $\|u\|^2 \leq |u|_4^4 \leq \gamma_0 \|u\|^4$ para alguna $\gamma_0 > 0$, por lo que $|u|_4^2 \geq \|u\| \geq \gamma$ para $\gamma = \sqrt{\gamma_0^{-1}}$.

(b) Claramente $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ es cerrado en $H^{\mathcal{G}}$. Además,

$$\mathcal{N}_{\mathcal{G}} = \mathcal{F}^{-1}(0),$$

donde $\mathcal{F} : H^{\mathcal{G}} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\mathcal{F}(u) = \|u\|^2 - |u|_4^4 - 4\beta\mathcal{Q}(u) \tag{2.1.25}$$

y de la prueba de la Proposición 2.1.14, tenemos que $\mathcal{F}$ es de clase C^2. Más aún $0 \in \mathbb{R}$ es un valor regular de $\mathcal{F}$ ya que

$$\langle \nabla\mathcal{F}(u), u\rangle = 2\|u\|^2 - 4(|u|_4^4 + \beta|u\cdot(u\circ B)|_2^2) = -2\|u\|^2 \neq 0 \quad u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}. \tag{2.1.26}$$

En consecuencia, $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ es una variedad cerrada de clase C^2 de $H^{\mathcal{G}}$. El hecho que $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ es invariante bajo la acción de $\widehat{\cdot}$ para todo $y \in \mathrm{Fix}(\mathcal{G})$ se sigue de la Proposición 2.1.14.

(e) Es claro que $v := \sqrt{t(u)}u$ satisface que $\|v\|^2 = t(u)\|u\|^2$ y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
|v|_4^4 + \beta|v\cdot(v\circ B)|_2^2 =& t(u)^2(|u|_4^4 + \beta|u\cdot(u\circ B)|_2^2) \\
=& \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_4^4 + \beta|u\cdot(u\circ B)|}\right)^2 (|u|_4^4 + \beta|u\cdot(u\circ B)|_2^2) \\
=& t(u)\|u\|^2,
\end{aligned}$$

por lo que $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$. □

2.2. Principio variacional de Ekeland

Sean $\mathcal{M}$ una variedad de clase C^2 en un espacio de Hilbert H y $J : H \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sean $\Omega \subset H$ un conjunto abierto y $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $\mathcal{M} = F^{-1}(a)$ para un valor regular a de F. El **campo gradiente** de J sobre $\mathcal{M}$ se define como el campo vectorial $\nabla_{\mathcal{M}} J : \mathcal{M} \to H$ dado por

$$\nabla_{\mathcal{M}} J(u) := \nabla J(u) - \frac{\langle \nabla J(u), \nabla F(u) \rangle}{\|\nabla F(u)\|^2} \nabla F(u).$$

La demostración de los siguientes resultados se puede ver a detalle en [10, Sec.3.6]

Teorema 2.2.1. *Sean $\mathcal{M}$ una subvariedad de clase C^2 en un espacio de Hilbert H, $J : H \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 acotada inferiormente en $\mathcal{M}$, $v \in \mathcal{M}$ y $\epsilon, \delta > 0$. Si*

$$J(v) \leq \inf_{\mathcal{M}} J + \epsilon,$$

entonces existe $u \in \mathcal{M}$ tal que

$$J(u) \leq \inf_{\mathcal{M}} J + 2\epsilon, \qquad \|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\| < \frac{2\epsilon}{\delta}, \qquad \|u - v\| < 2\delta.$$

Corolario 2.2.2. *Sea $\mathcal{M}$ una variedad de clase C^2 en un espacio de Hilbert H, $J : H \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 acotada inferiormente en $\mathcal{M}$, $v_n \in \mathcal{M}$ tal que*

$$J(v_n) \to c := \inf_{\mathcal{M}} J.$$

Entonces existe $u_n \in \mathcal{M}$ tales que

$$J(u_n) \to c \qquad \nabla_{\mathcal{M}} J(u_n) \to 0, \qquad \|u_n - v_n\| \to 0.$$

2.3. Principio de concentración-compacidad

Enunciaremos el siguiente reultado, que se debe a P.-L. Lions [11, Lema I.1], sin incluir su demostración.

Lema 2.3.1 (Lema de nulidad de Lions). *Si (u_n) es una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y existe $q \in [2, 2^*)$ con $2^* = \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$ o bien $q \in [2, \infty)$ para $N = 2$, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q \, dx = 0 \quad \textit{para alguna } \; r > 0. \tag{2.3.1}$$

Entonces $u_n \to 0$ fuertemente en $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para toda $\alpha \in (2, 2^*)$ si $N \geq 3$ y $\alpha \in (2, \infty)$ cuando $N = 2$.

El siguiente resultado será útil

Lema 2.3.2. *Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, entonces para toda $r > 0$ existe $y \in \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\int_{B_r(y)} |u| \, dx = \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(z)} |u| \, dx.$$

Demostración. Sea $Q_r : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por

$$Q_r(z) = \int_{B_r(z)} |u| dx,$$

el cual está bien definido y $|Q_r(z)| \leq |u|_1$. Veamos que Q es continuo. Sea $\epsilon > 0$, como $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\lambda(B) < \delta$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$,entonces $\int_B |u| dx < \epsilon/2$. Para esta $\delta > 0$, existe $\delta_1 \in (0, r/2)$ tal que, si $|y - z| < \delta_1$, entonces $\lambda(B_r(y) \setminus B_r(z)) < \delta/2$. Por lo que, si $|y - z| < \delta_1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|Q_r(z) - Q_r(y)| &= \left| \int_{B_r(y)} |u(x)| dy - \int_{B_r(z)} |u(x)|\, dx \right| \\
&= \left| \int_{B_r(y)\setminus B_r(z)} |u(x)| dx + \int_{B_r(z)\setminus B_r(y)} -|u(x)|\, dx \right| \\
&\leq \int_{B_r(y)\setminus B_r(z)} |u(x)| dx + \int_{B_r(z)\setminus B_r(y)} |u(x)|\, dx < \epsilon.
\end{aligned}
$$

Como $u \neq 0$ existe z_0 tal que $\gamma := Q_r(z_0) > 0$. Tambien, existe $R > r$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u|\, dx < \gamma/2$. Por lo que

$$
Q_r(z) < \gamma/2 \quad \text{para toda } z \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R+r}(0). \tag{2.3.2}
$$

Por otro lado, como Q es continua y $\overline{B_{R+r}(0)}$ es compacto, existe $y \in \overline{B_{R+r}(0)}$ tal que

$$
\sup_{z \in \overline{B_{R+r}(0)}} Q_r(z) = Q_r(y). \tag{2.3.3}
$$

Combinando (2.3.2) y (2.3.3), obtenemos que

$$
\sup_{z \in \mathbb{R}^N} Q_r(z) = Q_r(y).
$$

□

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y acotado, el Teorema de Relich-Kondrashov, nos afirma que la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es compacta para cada $q \in [1, 2^*)$, donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ cuando $2 < N$ o bien $p \in [1, \infty)$ cuando $N = 2$. En nuestro caso como $N = 2, 3$ tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.3.3. *Si $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que*

$$
\begin{aligned}
u_{n_k} &\longrightarrow u \quad \text{en } L^q_{Loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para cada } q \in [1,6),\\
u_{n_k}(x) &\longrightarrow u(x) \quad \text{en casi todo punto } x \in \mathbb{R}^N.
\end{aligned}
$$

Demostración. Ver, por ejemplo, [10, Lema 2.26]. □

Una consecuencia inmediata es lo siguiente: suponga que $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ es acotada. Por los encajes de Sobolev, tenemos que $u_n^2, u_n^3 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ también son acotadas, por lo que pasando a una subsucesión podemos suponer que

$$
\begin{cases}
u_n \rightharpoonup u \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right),\\
u_n^2 \rightharpoonup w \in L^2(\mathbb{R}^N),\\
u_n^3 \rightharpoonup z \in L^2(\mathbb{R}^N),\\
u_n \longrightarrow u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N), \ q = 1,2,4,\\
u_n(x) \to u(x) \quad c.t.p.\ x \in \mathbb{R}^N
\end{cases}
\tag{2.3.4}
$$

entonces $w(x) = u^2(x)$, $z(x) = u^3(x)$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^N$. En efecto, sea $w_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que converge débilmente a 0 y que converge puntualmente a $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ en casi todo punto. Veamos que $w = 0$ en casi todo punto. Como $w^+ = \max\{w,0\}, w^- = \max\{-w,0\} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y son positivas tenemos que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} w_n w^{\pm}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} w_n^{\pm} w^{\pm}\, dx \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,
$$

por otro lado, por Lema de Fatou, tenemos que

$$
0 = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_n^{\pm} w^{\pm}\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to\infty} w_n^{\pm} w^{\pm}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (w^{\pm})^2\, dx \geq 0
$$

y, por ende, $w(x) = 0$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^N$.

2.4. Soluciones escalares para $\beta > -1$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta\omega + \omega = \omega^3, & \omega > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \\ \omega(0) = \max_{y\in\mathbb{R}^N} \omega(y), & \omega \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right). \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Se sabe bien, ver [12], que la única solución ω del problema (2.4.1) es una función radial y radialmente decreciente que minimiza el cociente de Sobolev del encaje $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^N)$, i.e.,

$$\|\omega\| = \frac{\|\omega\|^2}{|\omega|_4^2} = \min_{u\in\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2}{|u|_4^2}. \tag{2.4.2}$$

Se puede ver en [13], que existen constantes positivas b_0, b_1 tales que

$$\lim_{|y|\to\infty} |D^i\omega(x)||x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} = b_i, \quad \text{para } i = 0, 1, \tag{2.4.3}$$

donde $D^0 w = w$ y $D^1 w = \nabla w$. Tenemos las siguientes estimaciones.

Lema 2.4.1. *Cuando $|y| \to \infty$,*

$$\frac{1}{\omega(y)} \int_{\mathbb{R}^N} \omega^3(x)\omega(x-y)\,dx \longrightarrow b_N > 0, \tag{2.4.4}$$

donde $b_N = \int_{\mathbb{R}^N} \omega^3 e^{x_1}\,dx$[1], y x_1 es la primer componente de x. Además, para $0 < \delta <$

[1]En el articulo original de los autores, la constante $b_N = a_N \int_{\mathbb{R}^N} \omega^3\,dx$ el cual presenta una impresición. También, la identidad (2.15) no es valido en especial cuando $x = 0$,ver [8, Lema 2.1].

2,

$$\frac{1}{\omega(\delta y)}\int_{\mathbb{R}^N}\omega^2(x)\omega^2(x-y)\,dx \longrightarrow 0, \quad \textit{cuando } |y|\to\infty. \tag{2.4.5}$$

Demostración. Sean $I(y) := \int_{\mathbb{R}^N}\omega^3(x)\omega(x-y)\,dx$ y $G(y) := \int_{\mathbb{R}^N}\omega^2(x)\omega^2(x-y)\,dx$. Notemos que I y G son radialmente simétricos. Sea $A\in O(N)$, primero haciendo un cambio de variable y luego usando que ω es radialmente simétrico tenemos los siguientes cálculos;

$$\begin{aligned}
I(y) =& \int_{\mathbb{R}^N}\omega^3(x)\omega(x-y)dx\\
=& \int_{\mathbb{R}^N}\omega^3(A^{-1}x)\omega(A^{-1}x-A^{-1}z)|\det(A^{-1})|dx \quad z=Ay\\
=& \int_{\mathbb{R}^N}\omega^{-3}(x)\omega(x-z)dx\\
=& I(Ay).
\end{aligned}$$

Lo que prueba que I es radialmente simétrico y se puede argumentar similarmente para G. Por lo que para probar las afirmaciones (2.4.4) y (2.4.5) es suficiente considerar $y = re_1$ con $r>0$.

Para $x\in\mathbb{R}^N$ fijo tenemos que

$$\begin{aligned}
|y|-|x-y| =& \frac{|y|^2-|x|+2x\cdot y-|y|^2}{|y|+|x-y|}\\
=& \frac{2x\cdot y}{|y|\left(1+\frac{|x-y|}{|y|}\right)}+\frac{|x|}{|y|+|x-y|}\longrightarrow x\cdot\xi \qquad \text{si } |y|\to\infty \quad \text{y } y/|y|\to\xi\in\mathbb{S}^N,
\end{aligned}$$

y, para $\delta\in(0,2)$,

$$\delta|y|-2|x-y| = \frac{(\delta^2-4)|y|^2-4|x|+8x\cdot y}{\delta|y|+2|x-y|}\longrightarrow 0 \quad \text{cuando } |y|\to\infty.$$

Por (2.4.3), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \frac{\omega(x-re_1)}{\omega(re_1)} &= \lim_{r\to\infty} b_0^{-1} r^{\frac{N-1}{2}} e^r \omega(x-re_1) \\
&= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{|re_1|}{|x-re_1|}\right)^{\frac{N-1}{2}} e^{|re_1|-|x-re_1|} \\
&= e^{x\cdot e_1},
\end{aligned}
$$

y

$$
\lim_{r\to\infty} \frac{\omega^2(x-re_1)}{\omega(\delta re_1)} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\delta|re_1|}{|x-re_1|^2}\right)^{\frac{N-1}{2}} e^{\delta|re_1|-2|x-re_1|} = 0,
$$

por lo que

$$
g_r(x) := \omega^3(x)\frac{\omega(x-re_1)}{\omega(re_1)} \longrightarrow \omega^3(x)e^{-x_1}, \tag{2.4.6}
$$

$$
h_{r,\delta}(x) := \omega^2(x)\frac{\omega^2(x-re_1)}{\omega(\delta re_1)} \longrightarrow 0, \tag{2.4.7}
$$

puntualmente cuando $r \to \infty$ y $\delta \in (0,2)$. Nuevamente, por (2.4.3), existe $R > 1$ tal que

$$
\frac{b_0}{2} \leq |y|^{\frac{N-1}{2}} e^{|y|}\omega(y) \leq b_0 + 1 \quad \text{para toda } \; y \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0),
$$

y vemos que

$$
R^{-\frac{N-1}{2}} e^{-R} \leq \min\{1, |y|^{-\frac{N-1}{2}}\} e^{-|y|} \leq 1 \quad \text{para toda } y \in B_R(0).
$$

Sea $a = \text{mín}_{y\in \overline{B}_R(0)} \omega(y) > 0$. Tenemos que $\omega(0) = \text{máx}_{r\in rn} \omega(y)$, luego

$$a\,\text{mín}\{1, |y|^{-\frac{N-1}{2}}\}e^{-|y|} \leq \omega(y) \leq \omega(0)R^{-\frac{N-1}{2}}e^{R}\,\text{mín}\{1, |y|^{-\frac{N-1}{2}}\}e^{-|y|} \quad \text{si } |y| \leq R.$$

Así, tomando $c > \text{máx}\{b_0 + 1, \omega(0)R^{\frac{N-1}{2}}e^{R}\}$ tal que $c^{-1} < \text{mín}\{\frac{b_0}{2}, a\}$, tenemos que

$$c^{-1}\,\text{mín}\{1, |y|^{-\frac{N-1}{2}}\}e^{-|y|} \leq \omega(y) \leq c\,\text{mín}\{1, |y|^{-\frac{N-1}{2}}\}e^{-|y|} \quad \text{para toda } y \in \mathbb{R}^N. \quad (2.4.8)$$

Sea $|y| \geq 1$ y sea $\tilde{c} = c^5 2^{(N-1)/2}$. Si $|x| \geq |y|/2$, entonces

$$\begin{aligned}
\omega^3(x)\frac{\omega(x-y)}{\omega(y)} \leq& c\omega^3(x)\omega(x-y)|y|^{\frac{N-1}{2}}e^{|y|} \\
\leq& c^2\omega^3(x)|y|^{\frac{N-1}{2}}e^{|y|-|x-y|} \\
\leq& c^5\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{(N-1)/2} e^{-3|x|-|x-y|+|y|} \\
\leq& \tilde{c}e^{-3|x|-|x-y|+|y|} \\
\leq& \tilde{c}e^{-2|x|},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de $|y| - |x-y| \leq |x|$. Para $|x| \leq |y|/2$, tenemos que $|y| \leq |x-y| + |x| \leq |x-y| + |y|/2$, por lo que $|y|/2 \leq |x-y|$, luego

$$\begin{aligned}
\omega^3(x)\frac{\omega(x-y)}{\omega(y)} \leq& c\omega^3(x)\omega(x-y)|y|^{\frac{N-1}{2}}e^{|y|} \\
\leq& c^2\omega^3(x)\left(\frac{|y|}{|x-y|}\right)^{\frac{N-1}{2}} e^{|y|-|x-y|} \\
\leq& c^5\left(\frac{|y|}{|x-y|}\right)^{(N-1)/2} e^{-3|x|-|x-y|+|y|} \\
\leq& \tilde{c}e^{-2|x|}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\omega^3(x)\frac{\omega(x-y)}{\omega(y)} \leq \tilde{c}e^{-2|x|} \quad \text{para } |y| \geq 1 \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

En particular, tenemos que $0 < g_r(x) \leq \tilde{c}e^{-2|x|} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para toda $r \geq 1$. Por (2.4.6) y el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{r\to\infty} I(re_1)/\omega(re_1) = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_r(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} w^3(x)e^{x_1}dx.$$

Esto demuestra (2.4.4). Ahora consideremos (2.4.5), usando (2.4.8) estimamos para $|y| \geq 1/\delta$ que

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2(x)\omega^2(x-y)}{\omega(\delta y)} &\leq c^5(\delta|y|)^{(N-1)/2}e^{-2|x|-2|x-y|+\delta|y|} \\
&\leq c^5(\delta|y|)^{(N-1)/2}e^{-2|x|-(2+\delta)|x-y|/2+\delta|y|} \\
&\leq c^5(\delta|y|)^{(N-1)/2}e^{-(2-\delta)(|x|+|y|)/2} \\
&= f_\delta(y)e^{-(2-\delta)|x|/2},
\end{aligned}$$

donde $f_\delta(y) := c^5(\delta|y|)^{(N-1)/2}e^{-(2-\delta)|y|/2} \to 0$ cuando $|y| \to \infty$. De donde

$$0 \leq \frac{1}{\omega(\delta y)}\int_{\mathbb{R}^N} \omega^2(x)\omega^2(x-y)\,dx \leq f_\delta(y)\int_{\mathbb{R}^N} e^{-(2-\delta)|x|/2}dx \to 0 \quad \text{cuando } |y| \to \infty.$$

Esto concluye la prueba.

□

2.5. Existencia de minimizadores

Sea

$$\tilde{c} := \inf_{u\in\mathcal{N}_{\mathcal{G}}} \mathcal{J}(u). \tag{2.5.1}$$

Proposición 2.5.1. *(i) El numero $\tilde{c}$ se alcanza.*

(ii) $2\tilde{c} = c(B,\mathcal{G})$[2], y si $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ minimiza (2.5.1), entonces o bien $(u, u \circ B)$ o bien $(-u, -u \circ B)$ es una solución de (2). En particular, o bien $u \in \mathcal{N}(B,\mathcal{G})$ o bien $-u \in \mathcal{N}(B,\mathcal{G})$.

La prueba de la Proposición 2.5.1 la daremos en el Capitulo 3. El resto de esta sección está dedicado a dar una estimación para el valor de $\tilde{c}$ en términos de $\|\omega\|$, donde ω es la solución del problema (2.4.1).

Proposición 2.5.2. *Se tiene que $\tilde{c} < \frac{k}{4}\|\omega\|^2$, donde $k = \ell(\mathcal{G}) = |\mathcal{G}x_0|$ y x_0 está dado por la Definición 2.1.8.*

Demostración. Sea $A_1 = Id \in O(N)$, y sean $A_2, \dots, A_k \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^{x_0}$ es tal que $\mathcal{G}x_0 = \{A_1x_0, \dots, A_kx_0\}$. Para $i \neq j$ tenemos que existe $\ell \in \{2, \dots, k\}$ tal que $|A_ix_0 - A_jx_0| = |x_0 - A_1^{-1}A_jx_0| = |x_0 - A_\ell x_0|$ por lo que

$$\mu = \min_{j \neq 1} |x_0 - A_jx_0| = \min_{i \neq j} |A_ix_0 - A_jx_0| > 0. \tag{2.5.2}$$

Dado de que B está en el normalizador de $\mathcal{G}$, para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, existe $A = A(i,j) \in G$ tal que $(A_i^{-1}A_j)B = BA$, ahora para esta A existe $\ell \in \{1, \dots, k\}$ tal que $Ax_0 = A_\ell x_0$ por lo que $|A_ix_0 - A_jBx_0| = |x_0 - A_i^{-1}A_jBx_0| = |x_0 - BA_\ell x_0|$, de donde se sigue que

$$\nu = \min_{j} |x_0 - BA_jx_0| = \min_{i,j} |A_ix_0 - A_jBx_0|. \tag{2.5.3}$$

Por la Definición 2.1.8(c2) tenemos que $\mu < 2\nu$. Para $r > 0$ y $j = 1, \dots, k$ definimos $\omega_r^j = \omega(\cdot - rA_jx_0)$, como $A\mathcal{G}x_0 = \mathcal{G}x_0$ para toda $A \in \mathcal{G}$ y ω es radialmente simétrica, se sigue que $u_r = \sum_{i=1}^N \omega_r^j \in H^{\mathcal{G}}$.

[2] En el articulo original de los autores, $\tilde{c} = c(B,\mathcal{G})$, el cual presenta una impresición. Siguiendo la notación de ellos el funcional de energía restringido en $H^{\mathcal{G}}$ es $E_{\mathcal{G}}(u) = \frac{1}{2}E(u, u \circ B)$, ver Observación 2.1.13.

Para $i \neq j$, mediante el cambio de variable $z = x - rA_i x_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (\omega_r^i)^3 \omega_r^j \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\omega(x - rA_i x_0))^3 \omega(x - rA_j x_0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\omega(z))^3 \omega(z - r[A_j x_0 - A_i x_0]) \, dz.\end{aligned}$$

Cuando $r \to \infty$, (2.4.4) implica que

$$d_r := \sum_{i \neq j} \int_{\mathbb{R}^N} (\omega_r^i)^3 \omega_r^j \, dx = (b_N + o(1)) \sum_{i \neq j} \omega(r[A_i x_0 - A_j x_0]),$$

luego de (2.5.2) , tenemos que cuando $r \to \infty$

$$(b_N + o(1))(\mu r)^{-(N-1)/2} e^{-\mu r} \leq d_r \leq \frac{k(k-1)}{2} (b_N + o(1))(\mu r)^{-(N-1)/2} e^{-\mu r}.$$

Además, de (2.4.5) obtenemos que, para $1 \leq i, j \leq k$ y $\delta = \frac{\mu}{\nu} < 2$, la estimación

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (\omega_r^i(x))^2 (\omega_r^j(Bx))^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\omega(x - rA_j x_0))^2 (\omega(Bx - rA_j x_0))^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\omega(x - rA_i x_0))^2 (\omega(x - rB^{-1} A_j x_0))^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \omega^2(z) \omega^2(z - r[B^{-1} A_j x_0 - A_i x_0]) dz \\ &= o(\omega(\delta r[B^{-1} A_j x_0 - A_i x_0])) \\ &= o(\omega(\delta r[A_j x_0 - B A_i x_0])) \\ &= o(\omega(\delta r[x_0 - B A_\ell x_0])) \\ &= o((\delta \nu r)^{-(N-1)/2} e^{-\delta \nu r}) \\ &= o(d_r) \quad \text{cuando } r \to \infty, \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

y donde $\ell \in \{1,...,k\}$ es tal que $A_j^{-1}BA_ix_0 = BA_\ell x_0$. También tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_r\|^2 =& \sum_{i=1}^{k}\langle \omega_r^i, \omega_r^i\rangle + \sum_{i\neq j}\langle \omega_r^i, \omega_r^j\rangle \\
=& k\|\omega\|^2 + \sum_{i\neq j}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla\omega_r^i\cdot\nabla\omega_r^j + \omega_r^i\omega_r^j)\,dx \\
=& k\|\omega\|^2 + \sum_{i\neq j}\int_{\mathbb{R}^N}(\omega_r^i)^3\omega_r^j dx \\
=& k\|\omega\| + d_r,
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

y

$$\begin{aligned}
|u_r|_4^4 = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\sum_{i=j}^{k}\omega_r^j\right)^4 dx \geq& \sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^N}(\omega_r^j)^4\,dx + 4\sum_{i\neq j}\int_{\mathbb{R}^N}(\omega_r^i)^3\omega_r^j\,dx \\
=& k|\omega|_4^4 + 4d_r \\
=& k\|\omega\|^2 + 4d_r.
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Además, de (2.5.4),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} u_r^2(x)u_r^2(Bx)\,dx =& \int_{\mathbb{R}^N}\left(\sum_{i,j}\omega_r^i(x)\omega_r^j(x)\right)\left(\sum_{i,j}\omega_r^i(Bx)\omega_r^j(Bx)\right)dx \\
\leq& \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\sum_{i,j}[(\omega_r^i)^2(x) + (\omega_r^j)^2(x)]\right)\left(\sum_{i,j}[(\omega_r^i)^2(Bx) + (\omega_r^j)^2(Bx)]\right)dx \\
=& \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\left(2k\sum_{i}(\omega_r^i)^2(x)\right)\left(2k\sum_{j}(\omega_r^j)^2(Bx)\right)dx \\
=& k^2\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^N}(\omega_r^i)^2(x)(\omega_r^j)^2(Bx)\,dx \\
=& o(d_r).
\end{aligned}$$

Sea

$$t_r := t(u_r) = \frac{\|u_r\|^2}{|u_r|_4^4 + \beta |u_r(u_r \circ B)|_2^2},$$

de tal forma que $\sqrt{t_r}u_r \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ por el Lema 2.1.17(e). Combinando (2.5.4), (2.5.5) y (2.5.6), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\sqrt{t_r}u_r) &= \frac{1}{4}\|\sqrt{t_r}u_r\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\frac{\|u_r\|^4}{|u|_4^4 + \beta |u_r \cdot (u_r \circ B)|_2^2} \\
&\leq \frac{1}{4}\frac{(k\|\omega\|^2 + d_r)^2}{k\|\omega\|^2 + 4d_r + o(d_r)} \\
&= \frac{k}{4}\|\omega\|^2 \frac{k\|\omega\|^2 + 2d_r + o(d_r)}{k\|\omega\|^2 + 4d_r + o(d_r)},
\end{aligned}$$

por lo que $\tilde{c} \leq \mathcal{J}(\sqrt{t_r}U_r) < \frac{k}{4}\|\omega\|^2$ para r suficientemente grande. □

Lema 2.5.3. *Existe una sucesión $(u_n)_n \subset \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ tal que $\mathcal{J}(u_n) \to \tilde{c}$ y $\nabla\mathcal{J}(u_n) \to 0$ en $H^{\mathcal{G}}$.*

Demostración. Como $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ es una variedad de clase C^2, por el principio variacional de Ekeland, Corolario 2.2.2, existe una sucesión $(u_n)_n \subset \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ tal que $\mathcal{J}(u_n) \to \tilde{c}$ y

$$o(1) = (\nabla_{\mathcal{N}_{\mathcal{G}}}\mathcal{J})(u_n) = \nabla\mathcal{J}(u_n) - \lambda_n \nabla\mathcal{F}(u_n) \quad \text{en } H^{\mathcal{G}}, \tag{2.5.7}$$

para una sucesión $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$, donde $\mathcal{F}$ está definido en (2.1.25). Como $u_n \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$, (2.1.26), $\|u_n\| \geq \gamma > 0$ donde γ está dado por (a) en el Lema 2.1.17, $\langle \nabla\mathcal{J}u_n, u_n\rangle = 0$, $\langle \nabla\mathcal{F}(u_n), u_n\rangle = -2\|u_n\|^2$ y (2.5.7) implican que

$$o(1) = 2\lambda_n \|u_n\|^2, \tag{2.5.8}$$

por lo que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego, (2.5.7) nos da que $\nabla\mathcal{J}(u_n) \to 0$ cuando

$n \to \infty$, como se quería. $\square$

Capítulo 3

Una infinidad de soluciones no radiales

En este capítulo daremos una prueba rigurosa de la Proposición 2.5.1. A grandes rasgos veremos que una sucesión minimizante de (2.5.1) contiene una sucesión débilmente convergente en $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ y mediante el Lema de no nulidad de Lions, veremos que tal límite débil minimiza (2.5.1).

Es importante remarcar que la dimensión del espacio $\mathbb{R}^N$ jugará un papel fundamental ya que el funcional $\mathcal{J}$ deja de estar bien definido para $N > 3$, esto se debe primordialmente a que $2^* \leq 4$

3.1. Prueba de la Proposición 2.5.1

(i) Sea $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ una sucesión dada por el Lema 2.5.3, y por el Lema 2.3.2 para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n)} u_n^4\, dx = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} u_n^4\, dx.$$

Como $\mathbb{R}^N = \mathrm{Fix}(\mathcal{G}) \oplus \mathrm{Fix}(\mathcal{G})^{\perp}$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $y_n = x_n + y_n'$, donde $x_n \in \mathrm{Fix}(\mathcal{G})$ y $y_n' \in V_{\mathcal{G}} = \mathrm{Fix}(\mathcal{G})^{\perp}$ y consideremos $u_n' = u_n(\cdot + x_n)$. Como $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ y $\mathcal{J}$ son invariantes y $\nabla\mathcal{J}$ es equivariante bajo la acción de $\hat{\cdot}$ para todo $y \in \mathrm{Fix}(\mathcal{G})$, la sucesión $(u_n')_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ satisface que $\mathcal{J}(u_n') \to \tilde{c}$, $\nabla\mathcal{J}(u_n') \to 0$ en $H^{\mathcal{G}}$ y

$$\int_{B_1(y_n')} (u_n')^4 \, dx = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} (u_n')^4 \, dx,$$

por lo que podemos suponer que $y_n \in V_{\mathcal{G}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Recordemos que $\mathcal{J}(u_n) = \|u_n\|^2/4$ y $0 < \tilde{c} < \infty$, por lo que la sucesión $(u_n)_n \subset H^{\mathcal{G}} \subset \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ es acotada y por el Lema 2.1.17(i), $|u_n|_4^2 \geq \gamma > 0$ para toda n, luego por el Lema de nulidad de Lions 2.3.1 implica que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_1(y_n)} |u_n|^4 \, dx > 0. \tag{3.1.1}$$

Afirmamos que

$$(y_n) \text{ es acotado.} \tag{3.1.2}$$

Supongamos que esto es falso. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $|y_n| \to \infty$ y $y_n/|y_n| \to y \in \mathbb{S}^N$, y como $V_{\mathcal{G}}$ es cerrado tenemos que $y \in V_{\mathcal{G}} \setminus \{0\}$. Al ser $k = \ell(\mathcal{G}) \leq |\mathcal{G}y|$, existe $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{G}$ tales que

$$A_i y \neq A_j y \ \text{ para toda } \ i, j \in \{1, \ldots, k\} \ \text{ y } \ i \neq j. \tag{3.1.3}$$

Veamos que para n suficientemente grande y dado $R > 0$ las bolas de radio R centradas en $A_1 y_n, \ldots, A_k y_n$ son disjuntas. En efecto, de (3.1.3), tenemos que $\min_{i\neq j} |A_i y - A_j y| = 5\delta > 0$, donde δ es un número real positivo. Por continuidad, y el hecho de que $|y_n| \to \infty$ podemos eligir $m \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que

$$\left|A_i y - A_i \frac{y_n}{|y_n|}\right| = \left|y - \frac{y_n}{|y_n|}\right| < \delta, \qquad |y_n| > \frac{R}{\delta} \quad \text{para toda } \ n \geq m.$$

Para $i \neq j$ vemos que las bolas abiertas $B_\delta(A_i y), B_\delta(A_j y)$ de radio δ son disjuntas ya que la distancia de sus centros es mayor que 5δ, precisamente

$$d(B_\delta(A_i y), B_\delta(A_j y)) = |A_i y - A_j y| - 2\delta \geq 3\delta > 0.$$

Se sigue que

$$\min_{i\neq j} \left|A_i y_n - A_j y_n\right| \geq 3\delta |y_n| > 3R \quad \text{para toda } n \geq m.$$

De donde deducimos que

$$d(B_R(A_j y_n), B_R(y_n)) \geq R \qquad \text{para toda } \ n \geq m, \ \ i \neq j.$$

Así las bolas abiertas $B_R(A_j y_n)$, para $j = 1, ..., k$, son disjuntas si $n \geq m$. Consideremos $\widehat{u}_n = u_n(\cdot + y_n)$, tenemos que $\widehat{u}_n \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ y $\|\widehat{u}_n\| = \|u_n\|$, por lo que la sucesión $(\widehat{u}_n)_n \subset \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ es una sucesión acotada. Por (2.3.4), pasando a una subsucesión, podemos suponer que

$$\begin{cases} \widehat{u}_n \rightharpoonup \widehat{u} \quad \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right), \\ \widehat{u}_n^2 \rightharpoonup u^2 \in L^2(\mathbb{R}^N), \\ \widehat{u}_n^3 \rightharpoonup u^3 \in L^2(\mathbb{R}^N), \\ \widehat{u}_n \to \widehat{u} \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N), \ q = 1, 2, 4 \\ \widehat{u}_n(x) \longrightarrow \widehat{u}(x) \quad \text{en casi todo punto.} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Como $\widehat{u}_n|_{B_1(0)} \to \widehat{u}|_{B_1(0)}$ en $L^4(B_1(0))$ de (3.1.1) se tiene,

$$\int_{B_1(0)} |\widehat{u}|^4\,dx = \int_{B_1(0)} \lim_{n\to\infty} |\widehat{u}_n|^4\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B_1(0)} |\widehat{u}_n|^4\,dx > 0. \tag{3.1.5}$$

En consecuencia,

$$\widehat{u} \neq 0. \tag{3.1.6}$$

Dado que $\nabla\mathcal{J}(u_n) \to 0$ en $\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N)$, y $|\langle \nabla\mathcal{J}(u_n), \widehat{u}(\cdot - y_n)\rangle| \leq \|\nabla\mathcal{J}(u_n)\|\|\widehat{u}\| \to 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\mathcal{J}(u_n), \widehat{u}(\cdot - y_n)\rangle &= \langle u_n, \widehat{u}(\cdot - y_n)\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^3 \widehat{u}(\cdot - y_n)\,dx - \beta\langle \nabla\mathcal{Q}(u_n), \widehat{u}(\cdot - y_n)\rangle \\
&= \langle \widehat{u}_n, \widehat{u}\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}_n^3 \widehat{u}\,dx - \beta \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2(Bx) u_n(x) \widehat{u}(x - y_n)\,dx \\
&= \langle \widehat{u}_n, \widehat{u}\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}_n^3 \widehat{u}\,dx + |\beta| \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2(Bx + y_n) \widehat{u}_n(x) \widehat{u}(x)\,dx \\
&\geq \underbrace{\langle \widehat{u}_n, \widehat{u}\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}_n^3 \widehat{u}\,dx}_{A(n)} + |\beta| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2(Bx + y_n)(\widehat{u}_n(x) - \widehat{u}(x)) \widehat{u}(x)\,dx}_{B(n)},
\end{aligned}$$

donde

$$A(n) \longrightarrow \|\widehat{u}\|^2 - |\widehat{u}|_4^4 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

mientras que

$$\begin{aligned}
|B(n)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^4(Bx + y_n)\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\widehat{u}_n(x) - \widehat{u}(x))^2 \widehat{u}^2(x)\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}_n^2 \widehat{u} - 2\widehat{u}_n \widehat{u}^2 + \widehat{u}^3\,dx\right)^{1/2} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

De esta forma

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle \nabla \mathcal{J}(u_n), \widehat{u}(\cdot - y_n)\rangle \geq \lim_{n\to\infty} A(n) + |\beta| B(n)| = \|\widehat{u}\|^2 - |\widehat{u}|_4^4.$$

Concluimos entonces que $0 < \|\widehat{u}\|^2 \leq |\widehat{u}|_4^4$. Recordemos que $\omega \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ es la solución del problema (2.4.1) que minimiza el cociente de Sobolev (2.4.2) del encaje $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia

$$\|\widehat{u}\|^2 \geq \frac{\|\widehat{u}\|^4}{|\widehat{u}|_4^4} \geq \frac{\|\omega\|^4}{|\omega|_4^4} = \|\omega\|^2.$$

La Proposición 2.5.2, nos afirma que $\|\omega\|^2 > \dfrac{4\tilde{c}}{k}$ por lo que podemos eligir $R > 1$ de tal forma que

$$\int_{B_R(0)} \left(|\nabla \widehat{u}|^2 + \widehat{u}^2\right) dx > \frac{4\tilde{c}}{k}. \tag{3.1.7}$$

Ahora, para n suficientemente grande tenemos que las bolas de radio R centradas en $B_R(A_i y_n)$, $i = 1, \ldots, k$ son disjuntas, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u_n) =& \frac{1}{4}\|u_n\|^2 \\
\geq& \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k} \int_{B_R(A_j y_n)} \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2\right) dx \\
=& \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k} \int_{A_j B_R(y_n)} \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2\right) dx \\
=& \frac{k}{4}\int_{B_R(y_n)} \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2\right) dx \quad (u_n \in H^G) \\
=& \frac{k}{4}\int_{B_R(0)} \left(|\nabla \widehat{u}_n|^2 + \widehat{u}_n^2\right) dx.
\end{aligned}$$

Como $\widehat{u}_n \rightharpoonup \widehat{u}$ débilmente, y el operador lineal que mapea $u \mapsto u\big|_{B_R(0)}$ es lineal y continuo de $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ a $\mathbb{H}^1(B_R(0))$, (3.1.7) nos da que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\mathcal{J}(u_n) &\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{k}{4}\|\widehat{u}_n|_{B_R(0)}\|^2\\ &\geq \|\widehat{u}|_{B_R(0)}\|^2\\ &= \frac{k}{4}\int_{B_R(0)}\left(|\nabla\widehat{u}|^2+\widehat{u}^2\right)dx > \tilde{c},\end{aligned}$$

lo que contradice el hecho de que $(u_n)_n$ es una sucesión minimizante de (2.5.1). Esto prueba la afirmación (3.1.2).

Consecuentemente, podemos pasar a una subsucesión tal que

$$\begin{cases} y_n \longrightarrow y \in V_{\mathcal{G}},\\ \widehat{u}_n := u(x+y_n) \longrightarrow \widehat{u} \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right), \text{más las propiedades } (3.1.4)\\ u_n \longrightarrow u \in \mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{más las prodiedades } (3.1.4).\end{cases} \tag{3.1.8}$$

Al ser $H^{\mathcal{G}}$ un subespacio cerrado de $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, tenemos que $u \in H^{\mathcal{G}}$. Bajo las condiciones (3.1.8), se tiene que

$$u \neq 0. \tag{3.1.9}$$

En efecto, por (3.1.5), tenemos que

$$\int_{B_1(0)}|\widehat{u}|dx > 0.$$

Sea $R > 2$ tal que $|y-y_n| < R-2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Dado que $u_n|_B \longrightarrow u|_{B_R(0)}$ en $L^1(B_R(0))$, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que para toda $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(B_R(y))$ con $\lambda(\mathcal{A}) < \delta_1$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, se tiene que

$$\int_{\mathcal{A}}|u_n|\,dx < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para toda } \; n \in \mathbb{N}.$$

El hecho de que $y_n \to y$, nos garantiza que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda((B_1(y) \setminus B_1(y_n)) \cup (B_1(y_n) \setminus B_1(y))) < \delta_1$ para toda $n \geq m$, de donde

$$\begin{aligned}\left| \int_{B_1(y)} |u_n| dx - \int_{B_1(y_n)} |u_n| dx \right| \leq & \int_{B_1(y)\setminus B_1(y_n)} |u_n| + \int_{B_1(y_n)\setminus B_1(y)} |u_n| \, dx \\ <& \epsilon \quad \text{para toda} \quad n \geq m.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\int_{B_1(y)} |u| \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_1(y)} |u_n| \, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_1(y_n)} |u_n| \, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_1(0)} |\widehat{u}_n| \, dx \\ &= \int_{B_1(0)} |\widehat{u}| \, dx \\ &> 0,\end{aligned}$$

lo que prueba (3.1.9).

Ahora, afirmamos que, pasando a una subsucesión,

$$\nabla \mathcal{J}(u_n) \rightharpoonup \nabla \mathcal{J}(u) \quad \text{en } H^{\mathcal{G}}. \tag{3.1.10}$$

Tenemos que

$$\langle \nabla \mathcal{J}(u_n), v \rangle = \langle u_n, v \rangle - (u_n^3, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \beta (u_n^2 \circ B, u_n v)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Veamos que $(u_n^2 \circ B) u_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y que está uniformemente acotada. Sea $\alpha = 3/2$, $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1} = 3$. Tenemos que $4\alpha = 6$, $2\alpha' = 6$ y entonces $|u_n \circ B|^4 \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$ y $|u_n|^2 \in L^{\alpha'}(\mathbb{R}^N)$ con $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$, luego por la desigualdad de Hölder tenemos que

$|(u_n^2 \circ B)u_n|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |(u_n^2 \circ B)u_n|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n \circ B|^4 |u_n|^2 \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n \circ B|^6 \, dx \right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^6 \, dx \right)^{1/3} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^6 \, dx \right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^6 \, dx \right)^{1/3} \\
&= |u_n|_6^6 \\
&\leq C,
\end{aligned}
$$

lo que prueba que $(u_n^2 \circ B)u_n$ está acotada en $L^2(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia, pasando a una subsucesión, podemos añadir en (3.1.8) que

$$
(u_n^2 \circ B)u_n \rightharpoonup (u^2 \circ B)u \quad \text{en} \;\; L^2(\mathbb{R}^N). \tag{3.1.11}
$$

De (3.1.8) y (3.1.11), se sigue que

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla \mathcal{J}(u_n), v \rangle =& \langle u_n, v \rangle - (u_n^3, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \beta((u_n^2 \circ B)u_n, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \langle u, v \rangle - (u^3, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \beta((u^2 \circ B)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \langle \nabla \mathcal{J}(u), v \rangle,
\end{aligned}
$$

lo que prueba (3.1.10). Finalmente, como $\nabla \mathcal{J}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, tenemos

$$
0 \leq \|\nabla \mathcal{J}(u)\| \leq \liminf_{n\to 0} \|\nabla \mathcal{J}(u_n)\| = 0.
$$

Concluimos que u es un punto crítico de $\mathcal{J}$, luego $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$. Además

$$
\mathcal{J}(u) = \frac{1}{4}\|u\|^2 \leq \frac{1}{4} \liminf_{n\to 0} \|u_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(u_n) = \tilde{c}
$$

por lo que u es un mínimo de (2.5.1). Así que $\tilde{c}$ se alcanza y esto concluye la prueba (i).

(ii) Si $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ es un mínimo para (2.5.1), entonces del teorema de los multiplicadores de Lagrange

$$0 = \nabla_{\mathcal{N}_{\mathcal{G}}} \mathcal{J}(u) = \nabla \mathcal{J}(u) - \lambda \nabla \mathcal{F}(u), \tag{3.1.12}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, ya que $\mathcal{N}_{\mathcal{G}} = \mathcal{F}^{-1}(0)$ es una variedad de clase C^2. Por tanto, de (2.1.26) tenemos que

$$0 = \langle \nabla \mathcal{J}(u), u \rangle - \lambda \langle \nabla \mathcal{F}(u), u \rangle = -\lambda \mathcal{F}'(u)u = -2\lambda \|u\|^2,$$

lo que implica que $\lambda = 0$ y por ende $\nabla \mathcal{J}(u) = 0$. Consideremos $u^+ = \text{máx}\{u, 0\}$, $u^- = \text{mín}\{u, 0\}$, que claramente pertenecen a $H^{\mathcal{G}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{J}'(u)u^{\pm} \\
&= \|u^{\pm}\|^2 - |u^{\pm}|_4^4 - \beta \mathcal{Q}'(u)u^{\pm} \\
&= \|u^{\pm}\|^2 - |u^{\pm}|_4^4 + |\beta| \int_{\mathbb{R}^N} u^2(Bx)u(x)u^{\pm}(x)\,dx \\
&\geq \|u^{\pm}\|^2 - |u^{\pm}|_4^4 + |\beta| \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^{\pm}(Bx)\right)^2 \left(u^{\pm}(x)\right)^2 dx,
\end{aligned}$$

de donde

$$|u^{\pm}|_4^4 - |\beta| |(u^{\pm} \circ B)u^{\pm}|_2^2 \geq \|u^{\pm}\|^2.$$

Ahora, si suponemos que u cambia de signo, entonces $u^{\pm} \not\equiv 0$, $0 < \|u^{\pm}\| < \|u\|$, y del Lema 2.1.17(e) tenemos que

$$t(u^{\pm}) = \frac{\|u^{\pm}\|^2}{|u^{\pm}|_4^4 + \beta |u^{\pm} \cdot (u^{\pm} \circ B)|_2^2} \in (0, 1],$$

satisface que $\sqrt{t(u^{\pm})}u^{\pm} \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ y

$$\mathcal{J}\left(\sqrt{t(u^{\pm})}u^{+}\right) = \frac{t(u^{\pm})}{4}\|u^{\pm}\|^2 \leq \frac{1}{4}\|u^{\pm}\| < \frac{1}{4}\|u\|^2 = \mathcal{J}(u),$$

contradiciendo el supuesto de que u es un mínimo de (2.5.1). En consecuencia, concluimos que u no cambia de signo. Finalmente, del Corolario 2.1.16 o bien $(u, u \circ B)$ o bien $(-u, -u \circ B)$ es una solución de (2). Lo que completa la demostración.

3.2. Aplicación

En este último capítulo daremos una aplicación directa del Teorema 2.5.1.

3.2.1. Simetría poligonal en $\mathbb{R}^2$

Fija $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ sea $\theta_k = \frac{\pi}{k}$. En $\mathbb{R}^2$, consideremos la rotación $B_k \in O(2)$ por el angulo θ_k, cuya matriz de rotación está dada por

$$B_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}.$$

Consideremos el subgrupo finito

$$\mathcal{G}_k = \{Id, B_k^2, B_k^4, ..., B_k^{2k-2}\} \subset \langle B_k \rangle = \{Id, B_k, B_k^2, ..., B_k^{2k-1}\} \leq O(2).$$

Verifiquemos que el par $(B_k, \mathcal{G}_k)$ es un par admisible.

(a) Es claro que B está en el normalizador de $\mathcal{G}_k$ ya que $B_k B^{2j-2} B^{-1} = B^{2j-2}$ para toda $j \in 1, 2, ..., k$ y $B^2 \in \mathcal{G}_k$.

(b) Como $k \geq 2$ tenemos que $B_k^2 \neq Id$ por lo que $B_k^2 x \neq x$ para toda $x \in \mathbb{R}^2$, así $\mathrm{Fix}(\mathcal{G}_k) = \{0\}$, por lo que trivialmente B deja también fijo a los puntos fijos de $\mathcal{G}_k$.

(c) Para $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, es claro que $|\mathcal{G}_k x| = \ell(\mathcal{G}_k) = k$. Por simplicidad, tomemos $x_0 = (1,0)$. Note que

$$|x - B_k^{2j-2}x| = 2|x|\sin\left((j-1)\frac{\pi}{k}\right) > 0 \text{ para toda } j = 2, \dots, k.$$

ya que $|x - B_k^{2j-2}x|$ es la longitud del lado opuesto al ángulo $(2j-2)\theta_k$ que forma en el triangulo isósceles cuyos lados iguales miden $\|x\|$ y vértices $0, x$ y B_k^{2j-2}. Por tanto tenemos que

$$\min_{A \in \mathcal{G}_k \setminus \{Id\}} |x - Ax| = 2|x|\sin\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

Similarmente, tenemos que

$$|x - B_k B_k^{2j-2}x| = 2|x|\sin\left(\frac{2j-1}{2}\frac{\pi}{k}\right) > 0 \text{ para toda } j = 1, 2, \dots, k,$$

por lo que

$$\min_{A \in G} |x - BAx| = 2|x|\sin\left(\frac{\pi}{2k}\right) > |x|\sin\left(\frac{\pi}{k}\right),$$

ya que $f(x) = 2\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) = 2\sin(\pi x)(1 - \cos(\pi x)) > 0$ en el intervalo $(0,1)$. Luego,

$$\min_{A \in \mathcal{G}_k \setminus \{Id\}} |x - Ax| < 2 \min_{A \in \mathcal{G}_k} |x - BAx|.$$

Por ende el par $(B, \mathcal{G}_k)$ es admisible.

3.2.2. Simetría poligonal en $\mathbb{R}^3$

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Sea $\theta_k = \frac{\pi}{k}$ y $B_k \in O(3)$ la rotación por el ángulo θ_k alrededor del eje z, cuya matriz de rotación está dada por

$$B_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) & 0 \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el subgrupo $\mathcal{G}_k = \{Id, B_k^2, B_k^4, ..., B_k^{2k-2}\}$. Veamos que $(B_k, \mathcal{G})$ es un par admisible;

(a) Nuevamente, como $BB^{2j-2}B^{-1} = B^{2j-2}$ para toda $j = 2, ..., k$, se sigue que B_k está en el normalizador de $\mathcal{G}_k$ y $B_k^2 \in \mathcal{G}_k$.

(b) Notamos que la rotación B_k mueve todos los puntos que no están sobre el eje de giro z, es decir, $\text{Fix}(\mathcal{G}_k) = \{(0,0,\xi) \ : \ \xi \in \mathbb{R}\}$ y claramente

$$Bx = x \qquad \text{para toda } \ x \in \text{Fix}(\mathcal{G}_k).$$

(c) Tenemos que $V_{\mathcal{G}} = \text{Fix}(\mathcal{G}_k) = \{(x_1, x_2, 0) \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, del caso en $\mathbb{R}^2$, tenemos

$$\min_{A \in \mathcal{G}_k \setminus \{Id\}} |x - Ax| < 2 \min_{A \in \mathcal{G}} |x - BAx|.$$

Por ende el par $(B_k, \mathcal{G}_k)$ es admisible.

Concluimos este trabajo con la aplicación del Teorema 2.1.11.

Corolario 3.2.1. *Para $N = 2, 3$ y $\beta \leq 1$ el sistema (2) admite una infinidad de soluciones no radiales*

Demostración. Para cada $j \in \mathbb{N}$ sea $k_j = 2^j$ y consideremos el par admisible $(B_k, \mathcal{G}_k)$ dadas por de simetrías poligonales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, expuestas anteriormente. Del Corolario 2.1.12, existe una solución (u_j, v_j) al problema (2) tal que u es $\mathcal{G}_{k_j}$-invariante y $u_j \neq u_j \circ B_{k_j}$. Como $2\theta_{k_{j+1}} = \theta_{k_j}$ tenemos que $B_{k_j} = B_{k_{j+1}}^2 \in \mathcal{G}_{k_{j+1}}$, por lo que u_j es $\mathcal{G}_{k_j}$-invariante pero no es $\mathcal{G}_{k_{j+1}}$-invariantes y por ende $u_j \neq u_{j+1}$, con lo que tenemos una cantidad numerable de soluciones al problema (2). $\square$

Bibliografía

[1] M. Mitchell - Z. Chen - M. Shih - M. Segev, Self-trapping of partially spatially incoherent light. Phys. Rev. Lett. 77 (1996), 490–493.

[2] N. Akhmediev - A. Ankiewicz, Partially coherent solitons on a finite background. Phys. Rev. Lett. 82 (1999), 2661–2664.

[3] D. N. Christodoulides - T. H. Coskun - M. Mitchell - M. Segev, Theory of incoherent self-focusing in biased photorefractive media. Phys. Rev. Lett. 78 (1997), 646–649.

[4] B. D. Esry - C. H. Greene - J. P. Burke JR. - J. L. Bohn, Hartree–Fock theory for double condensates. Phys. Rev. Lett. 78 (1997), 3594–3597

[5] A. Ambrosetti - E. Colorado, Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342 (2006), 453–458.

[6] A. Ambrosetti - E. Colorado, Standing waves of some coupled nonlinear Schr¨odinger equations. J. London Math. Soc. 75 (2007), 67–82.

[7] W. C. Troy, Symmetry properties in systems of semilinear elliptic equations. J. Differential Equations 42 (1981), 400–413.

[8] J.C. Wei - T. Weth, Nonradial symmetric bound states for a system of two coupled Schrödinger equations. Rend. Lincei Mat. Appl. 18 (2007), 279–294

[9] T. C. Lin - J. C. Wei, Solitary and self-similar solutions of two-component system of nonlinear Schrödinger equations. Phys. D 220 (2006), 99–115

[10] M. Clapp, Métodos Variacionales en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Notas del curso impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM, noviembre 2019.

[11] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984), 109–145 and 223–283.

[12] C. V. Coffman, Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions. Arch. Ration. Mech. Anal. 46 (1972), 81–95.

[13] B. Gidas, W.M. Ni - L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Mathematical analysis and applications, Part A, Adv. in Math. Suppl. Stud. 7a, Academic Press (1981), 369–402.

[14] T. C. Lin - J. C. Wei, Spikes in two coupled nonlinear Schrodinger equations. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 22 (2005), 403–439.

[15] Ekeland, I. Onthevariationalprinciple.J.Math.Anal.Appl.47(1974)324–353

[16] Lawerence C. Evans: Partial Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics No. 19. Ed. AMS