



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
ÓPTICA Y FOTÓNICA

**PRUEBA DE SUPERFICIES CONVEXAS RÁPIDAS
SIN SIMETRÍA DE REVOLUCIÓN CON
PANTALLAS NULAS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
FRANCISCO JAVIER BAUTISTA CLEMENTE

TUTOR PRINCIPAL
DR. MANUEL CAMPOS GARCÍA, ICAT-UNAM

COMITÉ TUTOR
DR. HÉCTOR CRUZ RAMÍREZ, ICN-UNAM
DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR, ICAT-UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX. , 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Propietario: Dr. Neil Charles Bruce Davidson.

Propietario: Dr. Maximino Avendaño Alejo.

Propietario: Dr. Fermín Salomón Granados Agustín.

Propietario: Dr. Anselmo Alejandro Cornejo Rodríguez.

Propietario: Dra. Brenda Villalobos Mendoza.

La tesis se realizó en ICAT, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Manuel Campos García, ICAT-UNAM

*A mi familia, padres y hermanos.
Es gran parte es gracias a ustedes que es posible este trabajo.
En verdad, gracias.
Francisco Javier.*

Reconocimientos

Quiero agradecer:

A mis padres quienes me dieron vida, educación y apoyo incondicional.

A mis amigos, con los que se que puedo contar siempre.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por darme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado.

Al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT) por permitirme utilizar sus instalaciones para realizar este trabajo.

Al Dr. Manuel Campos por ser mi guía en este proceso formativo.

A mi comité tutor y mis sinodales, por sus valiosos comentarios y observaciones para mejorar mi trabajo.

Al Laboratorio de Instrumentación y Metrología Óptica (LIMO) por prestar la superficie que se probara y evaluara en este trabajo.

Esta investigación fue posible gracias a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México (DGAPA-UNAM) bajo el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) No: IT 100321 y IT103623.

De igual forma quiero agradecer al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), con CVU: 1146661, por apoyarme con la beca para dedicarme de tiempo completo al proyecto de posgrado.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

FRANCISCO JAVIER BAUTISTA CLEMENTE.
Ciudad Universitaria, CDMX. , 2023

Resumen

En el presente trabajo se presenta de forma detallada el desarrollo matemático para realizar una prueba de pantallas nulas a superficies convexas rápidas sin simetría de revolución. También se presenta una prueba hecha sobre una superficie convexa basada en un polinomio de tercer grado, a la que se le denomina M1-CNC basada en polinomios de Zernike, y se presentan los resultados obtenidos en los capítulos finales.

El trabajo consta de cinco capítulos, en los que se introduce al tema, se desarrollan las herramientas teóricas correspondientes y se presenta la prueba sobre la superficie M1-CNC. En el primer capítulo se hace una breve descripción sobre la deflectometría y sus aspectos más relevantes que influyen en las diferentes técnicas, como lo son pantallas nulas [1] o trazo de rayos experimentales (experimental ray tracing)[2], deflectometría por transmisión [3] entre otros [4][5]. En el segundo capítulo se hace una pequeña introducción a la prueba de pantallas nulas y se presenta el desarrollo matemático necesario para la construcción de una pantalla nula para superficies convexas bicónicas y basadas en polinomios de Zernike, además de las herramientas necesarias para la recuperación y medición de la superficie, se propone además una superficie de ajuste para este tipo de superficies.

En el capítulo tres se presenta el desarrollo de la prueba experimental realizada sobre la superficie M1-CNC (Montaje del experimento y alineación), mientras que en el cuarto capítulo se presenta el análisis de los datos obtenidos en la prueba y finalmente en el capítulo cinco se presentan las conclusiones, donde se obtuvieron valores RMS de menos de 0.5mm sobre los puntos de reconstrucción de la superficie y valores pico valle de cerca de 1.2mm.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Deflectometría	2
1.2. Superficies	5
1.2.1. Superficies Asféricas, Cónicas de Revolución y Bicónicas	5
1.2.2. Superficies Polinomiales	7
1.2.3. Superficies de Forma Libre	8
2. Diseño de Pantallas Nulas	11
2.1. Método de Pantallas Nulas	11
2.2. Diseño de la Pantalla Nula Cónica Para una Superficie Bicónica	12
2.2.1. Cálculo de los Parámetros a y b	17
2.3. Diseño de un Cono Para la Prueba	19
2.4. Diseño de la Pantalla Nula Cónica Para una Superficie Zernike	23
2.5. Reconstrucción de la Superficie	28
2.5.1. Cálculo de las Normales	30
2.6. Superficie Bajo Prueba M1-CNC	33
2.6.1. Aproximación de las Normales en la Superficie	40
3. Prueba Experimental y Resultados	41
3.1. Patrón de Referencia de la Pantalla Nula	41
3.2. Montaje Experimental	42
3.3. Cálculo de los Centroides	45
3.4. Corrección de Distorsión	46
4. Análisis de Resultados	53
4.1. Simulaciones	58
4.1.1. Traslación en 45°	58
4.1.2. Traslación en el Eje Y	60
4.1.3. Rotación de -2° a 2°	61
4.1.4. Escalamiento o Variación Radial	63

CONTENIDO

A. Algunos Programas

67

Índice de Figuras

1.1. Reflexión difusa y especular sobre una superficie brillante.	2
1.2. Esquema general de deflectometría directa en (a) e inversa en (b). . . .	3
1.3. Problemas intrínsecos a la deflectometría, debidos a la naturaleza de los rayos especulares.	4
1.4. Configuración básica de una prueba de deflectometría..	4
1.5. Mapas de elevación de una esfera, un paraboloides de revolución y una superficie esférica, todas ellas con $r = 1$, $a_i = 1$ para la esfera.	7
1.6. Superficie asociada al polinomio de Zernike $Z_{10}^{-4} = (120\rho^{10} - 252\rho^8 + 168\rho^6 - 35\rho^4) \sin(4\phi)$ a la derecha y su respectivo mapa de elevación a la izquierda.	8
1.7. Modelado 3D en el programa <i>Blender</i> [6] y ejemplo de una superficie de Bézier.	9
2.1. Diferentes formas de pantallas nulas con diversas configuraciones convenientes para evaluar distintos tipos de superficie.	12
2.2. Variables involucradas en el diseño de una pantalla nula cónica con el origen en el vértice de la superficie, vistas desde un plano a un ángulo ϕ_1 , correspondiente a la coordenada de P_1	13
2.3. Transformación del cono a un plano	16
2.4. Formación de la imagen de un punto sobre la pantalla nula y posterior enfoque con una lente	17
2.5. Representación esquemática de los rayos de luz pasando dentro del cono truncado de radio inferior s	20
2.6. Diseño del cono para que una superficie convexa pueda ser contenida por este, en líneas punteadas verdes, se aprecia un cono que no cumple con las características.	20
2.7. Comportamiento de $x_i(z_o)$ (arriba), $a(z_o)$ (en medio) y $b(z_o)$ abajo. . .	22
2.8. Cono usado para la prueba, se muestra también el radio del cono usado para la prueba experimental.	22

ÍNDICE DE FIGURAS

2.9. Diagrama de construcción de una pantalla nula cónica para una superficie de Zernike, vista desde un plano a un ángulo ϕ_1 , perteneciente a la coordenada de P_1	24
2.10. Ejemplo de un patrón de diseño y la pantalla nula generada sobre un cono.	28
2.11. Representación de la regla del trapecio compuesta.	29
2.12. Aproximación a las normales de la superficie.	31
2.13. Diagrama del método iterativo	34
2.14. Gráfica de la superficie bajo prueba M1-CNC.	35
2.15. Comportamiento de $g(b_2)$ dependiendo del valor del coeficiente A	38
3.1. Arreglo de puntos usado para construir la pantalla nula. Como las ecuaciones para construir una pantalla nula se dedujeron para cualquier punto en el patrón, cada disco está formado por un arreglo radial de puntos de densidad uniforme.	42
3.2. Arreglo experimental para la prueba, la superficie se encuentra inmersa totalmente dentro del cono.	43
3.3. Pantalla nula usada para realizar la prueba.	44
3.4. Hoja de referencia para centrar el dispositivo en (a) y superficie de prueba en (b).	45
3.5. Imagen capturada por el CCD en (a) e imagen binarizada con los centroides de cada mancha en (b).	46
3.6. Tipos de distorsión	47
3.7. Arreglo cuadrado usado para corregir la distorsión en (a) y arreglo experimental en (b).	48
3.8. Imagen capturada con un CCD de la malla de distorsión (a), proceso de binarización de la imagen (b) y gráfica del ajuste de la ecuación (3.10).	49
3.9. Comparación de los centroides obtenidos en la prueba y su correspondiente corrección de posición hecha con el ajuste de distorsión.	50
4.1. Centroides teóricos sobre la CCD, con sus respectivos centroides experimentales.	53
4.2. Los nodos más cercanos al nodo 1 son 2, 3, 7, 8 y 9, pero la conexión de 1 con 3 y 7 no es tomada en cuenta porque 1 solo puede estar conectado con los 2 nodos de radio similar más cercanos.	54
4.3. Caminos de integración usados para reconstruir la superficie en rojo se muestra el punto inicial de todos los caminos de integración.	55
4.4. Ajuste de los puntos P_S obtenidos con la integración numérica a una superficie como en 2.72.	56
4.5. Mapas de elevación de la diferencia de sagita.	57
4.6. Centroides desplazados 45° y sus respectivas diferencias estadísticas.	59

4.7. Simulación de desplazamientos en el eje Y	60
4.8. Centroides simulados en (a), diferencia porcentual de A_1 y A_2 en (b), variaciones estadísticas de la superficie de diseño con la prueba en (c) y la superficie de mejor ajuste en (d).	62
4.9. Centroides simulados en (a), variaciones porcentuales de A_1 y A_2 en (b), variaciones estadísticas de las diferencias entre la superficie de diseño con la prueba en (c) y la superficie de mejor ajuste en (d).	64

Índice de Tablas

1.1.	Valores de las constantes cónicas de las superficies de revolución. . .	6
1.2.	Se muestran algunos tipos de bases polinomiales ortogonales más conocidas.	9
2.1.	Datos de la superficie de Zernike M1.	35
3.1.	Tabla de valores de los parámetros de construcción de la pantalla nula.	43
3.2.	Tabla con los valores de M_T y E al corregir la distorsión.	50
4.1.	Tabla que muestra los valores de la superficie recuperada con los desplazamientos en x , y , z y las inclinaciones o tilt y los valores correspondientes a las constantes que multiplican a cada polinomio.	56
4.2.	Tabla con los valores estadísticos de la superficie recuperada respecto a la teórica o de diseño.	57
4.3.	Tabla de los valores estadísticos promedios.	58
4.4.	Tabla con los valores estadísticos promedios de la superficie recuperada en la traslación sobre el eje Y	61
4.5.	Tabla con los valores estadísticos promedios de la superficie recuperada de las rotaciones de -2° a 2°	61
4.6.	Tabla con los valores estadísticos promedios de la superficie recuperada respecto a la teórica o de diseño.	63

Capítulo 1

Introducción

En la investigación y desarrollo científico dentro del campo de la óptica, se desarrollan gran variedad de dispositivos ópticos para la industria destinados a aplicaciones [7], en particular es de interés en este trabajo las superficies ópticas, pues son de gran importancia en el desarrollo de dispositivos ópticos de transmisión y reflexión de luz, pues es sabido que distintas variantes de las superficies ópticas permiten disminuir las aberraciones ópticas [8][9], así como su desviación en trayectorias necesarias para los usos requeridos en aplicaciones como concentradores, espejos telescópicos, resonadores ópticos, etcétera. [10], por consiguiente los medios para caracterizar dichas superficies son de gran importancia en su fabricación.

Existen gran variedad de pruebas ópticas, y algunas exhiben ventajas respecto de otras, por un lado, están las pruebas interferométricas [11] capaces de alcanzar un grado de precisión nanométrica, así como las pruebas geométricas, como la prueba de Ronchi, muy popular para probar y medir espejos telescópicos [12][13], que aunque su precisión es menor a las interferométricas, esta se ve compensada por abarcar grandes dimensiones, que con una prueba interferométrica no sería posible o resulta demasiado costoso y complicado, ya que posiblemente se tengan que diseñar y fabricar superficies de referencia adicionales [11][14]. Entre todas las pruebas de óptica existentes, el campo de la **deflectometría**, es de nuestro principal interés, por lo que en este capítulo se expondrán en general sus características más importantes en una primera sección, posteriormente se explicará en una segunda sección un poco acerca de las distintas superficies que existen [14].

1.1 Deflectometría

La deflectometría es una técnica que se aplica a superficies reflectantes que fue desarrollada hace al menos 40 años [4][5], a lo largo de ese tiempo han surgido diferentes variantes, que han sido usados para resolver distintos problemas documentados en múltiples artículos de investigación. [15][16] [17][18]

La deflectometría hace uso de la luz reflejada por una superficie lisa, la cual puede ser dividida en la componente difusa, la cual es reflejada en gran cantidad de ángulos y la componente especular (ver figura 1.1) que en principio es un rayo de luz perfectamente colimado que obedece la ley de la reflexión [4].

En la construcción de superficies reflectantes de gran calidad con una reflexión promedio de más de 99% [19], la predominancia del reflejo especular es el objetivo primordial de su fabricación, además de que se requiere un grado de incertidumbre muy bajo por lo que el uso de pruebas ópticas que tengan un grado muy pequeño de incertidumbre (del orden de $4-6\lambda$) es de gran importancia en la medición y fabricación de estas superficies, ya que son libres de contacto.

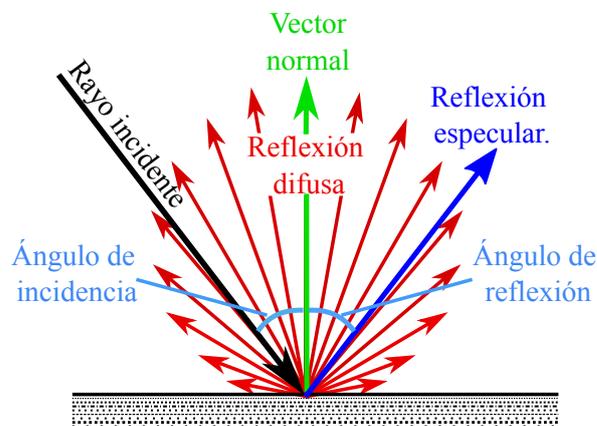


Figura 1.1: Reflexión difusa y especular sobre una superficie brillante.

Cualquier imperfección en la superficie será visible en una distorsión de la imagen reflejada o deformación de la misma, donde las variaciones más grandes son típicamente ocasionadas por un cambio rápido en la curvatura de la superficie. La deflectometría puede realizarse en general de la forma “directa” (ver figura 1.2(a)) conociendo la dirección del rayo incidente y captando la reflexión especular en un sensor CCD (*dispositivo de carga acoplada* del inglés *charge-coupled device*) o CMOS (*sensor de píxeles*

activos del inglés active pixel sensor), o de forma “inversa” desplegando líneas en una pantalla que serán reflejadas por la superficie bajo prueba, y serán captadas por el sensor de la cámara (ver figura 1.2(b)) en este caso se conocerán la dirección del rayo reflejado, pero la ley de la reflexión asegurará su equivalencia al método “directo” [4].

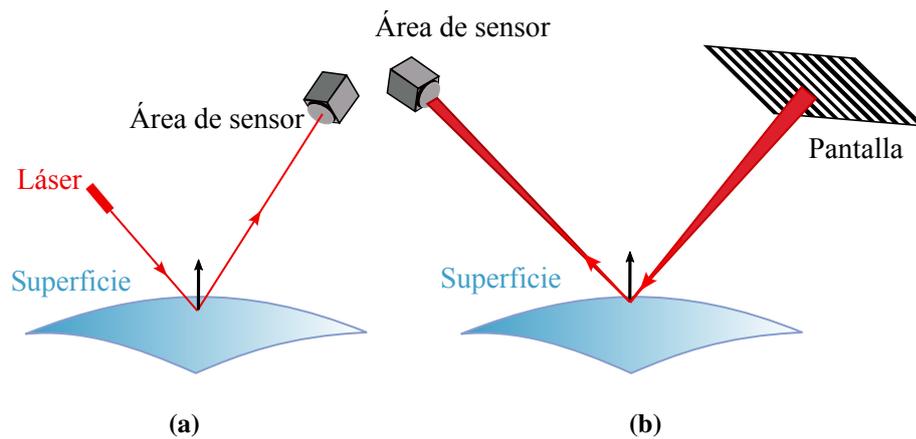


Figura 1.2: Esquema general de deflectometría directa en (a) e inversa en (b).

La misma ley de la reflexión determina la principal desventaja del método, una baja sensibilidad a la posición absoluta de una superficie, pues para un rayo capturado por una cámara existen múltiples posiciones e inclinaciones consistentes con el mismo resultado [20] como se muestra en la figura 1.3(a). Otro factor es que una variación del ángulo α en la dirección de la normal de la superficie puede desviar al rayo reflejado un ángulo 2α y ocasionar que se salga del área del sensor de la cámara o demandar sensores más grandes, como se muestra en la figura 1.3(b).

En términos simples se podría definir a la deflectometría como el conjunto de técnicas ópticas de medición de superficies reflectantes que hacen uso de la componente especular de la luz reflejada para medir las mismas superficies, entendiéndose medir como hallar la altura o sagita de la superficie.

La deflectometría hace uso de cámaras con sensores CCD y CMOS (relativamente de bajo costo) y también pantallas LCD (Liquid Crystal Display) o de cristal líquido de alta resolución en las cuales se despliegan patrones que suelen ser franjas perfectamente conocidas (verticales o cosenoidales [1][21]).

La geometría básica de la deflectometría se muestra en la figura 1.4 en donde para un rayo captado en O que proviene de M sobre la pantalla es reflejado por la superficie en

1. INTRODUCCIÓN

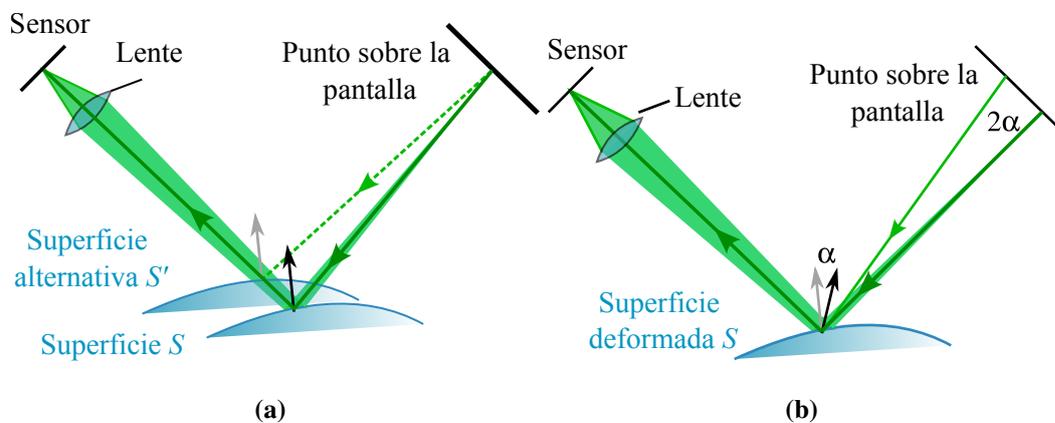


Figura 1.3: Problemas intrínsecos a la deflectometría, debidos a la naturaleza de los rayos especulares.

P siguiendo la ley de la reflexión:

$$\mathbf{n}(P) = \mathbf{r}(P) + \mathbf{i}(P). \quad (1.1)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la superficie reflectora, \mathbf{r} y \mathbf{i} son el vector director del rayo reflejado y el rayo incidente respectivamente de un rayo de luz que incide en un punto P sobre superficie.

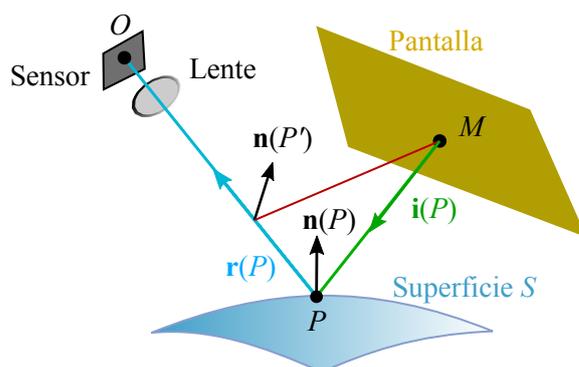


Figura 1.4: Configuración básica de una prueba de deflectometría..

La ecuación (1.1) no define únicamente una normal en el punto $\mathbf{n}(P)$ sobre la superficie, pues puede existir otro rayo en la posición P' donde el rayo captado por la cámara no sea alterado, entonces un gran conjunto de datos (imágenes) capturados por el sensor de la cámara generará un campo volumétrico dado por estas normales, entonces el

problema de reconstrucción se reduce a integrar el campo y encontrar una superficie que en todos los puntos sea ortogonal al campo, lo cual no tiene una solución sencilla o trivial.

Existen diferentes técnicas de deflectometría, puede ser estática, con todas las componentes **estáticas**, de **muestreo** moviendo el patrón de referencia en la pantalla, o de **escaneo** moviendo todas las componentes (términos acuñados y descritos en [4]). En este trabajo se hará uso de la técnica conocida como pantallas nulas, en la que las componentes permanecen estáticas, la ventaja que se tiene es que una vez que se ha alineado el dispositivo experimental no hace falta mover las componentes, y la principal desventaja es que se tiene un límite de datos que se pueden recabar que depende del área de la superficie y el tamaño del sensor. La razón por la que se escogió hacer la prueba estática es por la rapidez que exhibe la superficie a probar como se mostrara más adelante.

Una parte esencial en las distintas técnicas de deflectometría es la superficie a probar, principalmente su forma teórica que será estudiada en la siguiente sección.

1.2 Superficies

Tanto la fabricación como el diseño y prueba de superficies es importante en la investigación tecnológica así como en la industria, desde espejos telescópicos, lentes de cámaras, concentradores solares etc. [8][22] esto requiere de procesos elaborados, una amplia gama de técnicas y algoritmos para su construcción y mitigación de errores acumulados [23][24], en una máquina CNC (*control numérico computarizado*) [25] o mediante moldes o impresión 3D. La construcción de superficies abarca un gran campo de conocimiento competente a la Ingeniería y no tanto a las pruebas ópticas por lo que nos limitaremos a describir la forma matemática de las superficies más comunes, usadas en dispositivos ópticos (superficies cónicas y biconicas) [8][11], concentradores de luz y de forma libre extendidos ampliamente en el diseño óptico [6].

1.2.1 Superficies Asféricas, Cónicas de Revolución y Bicónicas

Las superficies no esféricas llamadas asféricas son superficies que están basadas en esferas o superficies cónicas de revolución. Una esfera tiene un solo parámetro que define su forma, el radio de curvatura r , las superficies cónicas tienen dos, su radio de

1. INTRODUCCIÓN

curvatura en el vértice r y la constante de conicidad k , la cual es una función de su excentricidad y esta varía según la cónica que se tenga como se muestra en la tabla 1.1. Hay superficies más generales que pueden tener un número grande de parámetros que la definan [11], que serían los mismos de las superficies cónicas más términos polinomiales usualmente asociados a desalineaciones y/o a deformaciones, en algunas veces se les suele dar nombres de términos de los polinomios de Zernike, como lo son el *pistón*, *inclinación*, *astigmatismo*, *etc.* Por otra parte, una superficie esférica (ver figura 1.5) rápida es aquella que tiene diámetro D grande en comparación a la distancia focal f , es decir, números F pequeños ($F/\# = f/D < 1$). Su representación matemática es la siguiente:

$$z(S) = \frac{cS^2}{1 + [1 - (k+1)c^2S^2]^{1/2}} \quad \text{Cónica de revolución,} \quad (1.2a)$$

$$z(S) = \frac{cS^2}{1 + [1 - (k+1)c^2S^2]^{1/2}} + \sum_{i=0}^n a_i S^{2i}. \quad \text{Cónica más polinomio,} \quad (1.2b)$$

donde c es la curvatura $c = 1/r$, $k = -e^2$ con e la excentricidad y $S = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Tipo de Cónica	Valor de la constante cónica
Esfera	$k = 0$
Esferoide Oblato (<i>Elipse que gira sobre su eje menor</i>)	$k > 0$
Esferoide Prolato (<i>Elipse que gira sobre su eje mayor</i>)	$-1 < k < 0$
Hiperboloide	$k < -1$
Paraboloide	$k = -1$.

Tabla 1.1: Valores de las constantes cónicas de las superficies de revolución.

Una superficie esférica puede reemplazar a varias superficies esféricas, y cierto tipo de aberraciones pueden ser removidas o controladas cuando se utilizan solo superficies esféricas [26].

Matemáticamente, una superficie esférica de revolución es generada rotando una curva plana con simetría axial en torno a su eje. En particular, una superficie esférica con

simetría rotacional generada por la rotación de un arco cónico en torno a su eje.

Por otro lado, las superficies bicónicas están formadas por la “combinación” de dos cónicas, no precisamente por la adición directa de estas, sino más bien por una suma en cada una de sus partes representada por la ecuación:

$$z = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (k_x + 1)c_x^2 x^2 - (k_y + 1)c_y^2 y^2}}, \quad (1.3)$$

donde c_x , c_y son los radios de curvatura de dos cónicas diferentes con k_x y k_y sus respectivas constantes cónicas.

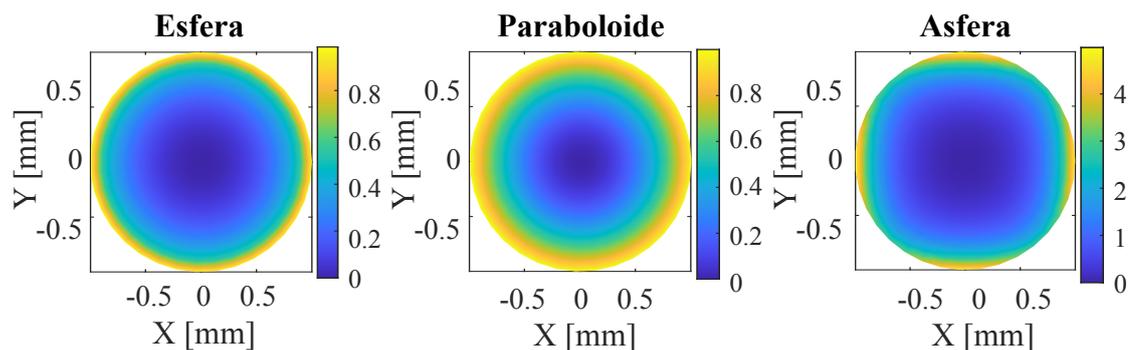


Figura 1.5: Mapas de elevación de una esfera, un paraboloides de revolución y una superficie esférica, todas ellas con $r = 1$, $a_i = 1$ para la asfera.

1.2.2 Superficies Polinomiales

Las superficies polinomiales son como su nombre lo indica superficies que están basadas en polinomios, los cuales pueden ser ortogonales en algún dominio definido o no necesariamente ortogonales como la suma de monomios (ver figura 1.6), pudiendo ser estos de cualquier tipo, incluyendo a las bases de polinomios ortonormales como son los polinomios de Legendre, Hermite, Laguerre, Zernike, etcétera, estas bases polinomiales tienen ventajas, pues se pueden generar por medio de fórmulas de recurrencia, son ortogonales y resuelven problemas físicos (ver tabla 1.2), en particular los polinomios de Zernike tienen gran uso en el campo de la Óptica [11] cuando se requiere

1. INTRODUCCIÓN

evaluar del frente de onda asociado a un sistema óptico.

Cabe mencionar que dado que las superficies polinomiales tienen una representación más compleja su construcción y posteriormente sus pruebas se complican, pues pueden presentar varios puntos de inflexión cambiando de cóncavas a convexas varias veces.

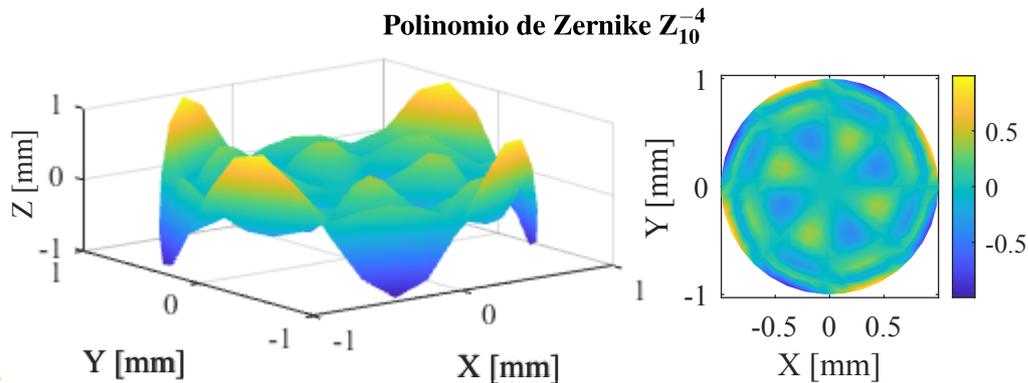


Figura 1.6: Superficie asociada al polinomio de Zernike $Z_{10}^{-4} = (120\rho^{10} - 252\rho^8 + 168\rho^6 - 35\rho^4) \sin(4\phi)$ a la derecha y su respectivo mapa de elevación a la izquierda.

1.2.3 Superficies de Forma Libre

Como se ha dicho antes, las superficies de forma libre (figura 1.7) en su definición más práctica son superficies que no están basadas en una única expresión matemática analítica que las represente de forma general. Y en muchas otras ocasiones se les denomina como superficies que no tienen simetría rotacional o traslacional continua alrededor de los ejes [27].

El origen del diseño de superficies de forma libre surge de la necesidad práctica en ciertos sectores industriales, como la aeronáutica y la automoción (Estudio de las máquinas que se desplazan por la acción de un motor y particularmente de los automóviles)[28], lo que marcó el inicio de la descripción matemática de estas superficies. En la actualidad, el estudio y la representación de estas superficies son de gran relevancia en campos como la arquitectura [29], el escaneo 3D [30] y las técnicas de metrología. A menudo, su representación no puede ser expresada mediante una única fórmula matemática, al igual que su diseño.

Tipo de polinomios	Notación	Formula de recurrencia
Zernike radial	R_n^m	$\sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! (\frac{n+m}{2}-k)! (\frac{n-m}{2}-k)!} \rho^{n-2k},$ $n, m \in \mathbb{Z}^{0+}, n \geq m \geq 0, \rho \leq 1$
Zernike par	Z_n^m	$R_n^m \cos(m\varphi)$
Zernike impar	Z_n^{-m}	$R_n^m \sin(m\varphi)$
Legendre	$P_n(x)$	$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$ $n \in \mathbb{Z}^{0+}, x \leq 1$
Hermite	$H_n(x)$	$(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$ $n \in \mathbb{Z}^{0+}, x \in \mathbb{R}$
Laguerre	$L_n(x)$	$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

Tabla 1.2: Se muestran algunos tipos de bases polinomiales ortogonales más conocidas.

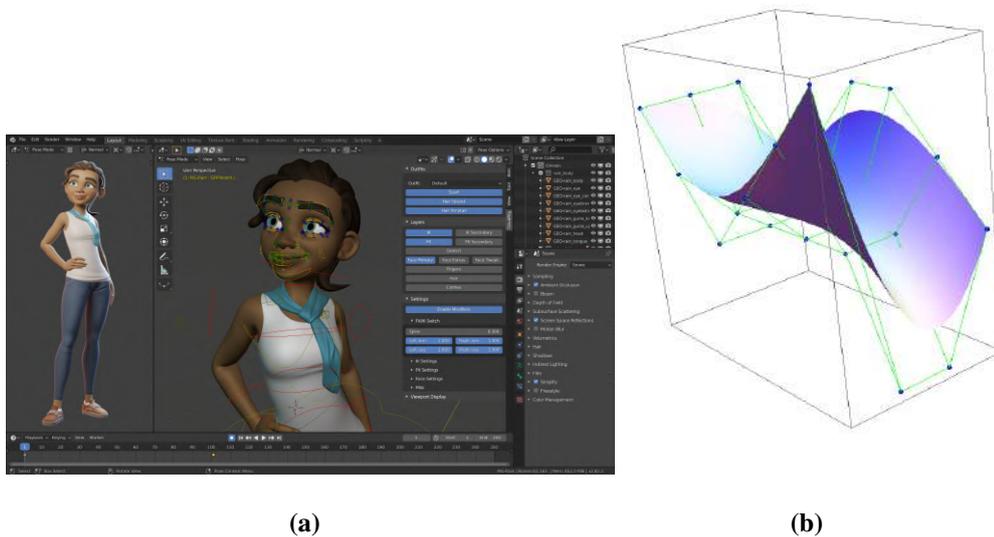


Figura 1.7: Modelado 3D en el programa *Blender* [6] y ejemplo de una superficie de Bézier.

1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de las técnicas de diseño de superficies de forma libre utilizan curvas conocidas. Algunos de estos métodos son herramientas fundamentales en la creación de superficies de forma libre, y se encuentran en los programas de modelado paramétrico tridimensional, como se muestra en la figura 1.7(a), la mayoría de estas técnicas son conocidas como CAD (del inglés *computer-aided design*) y vienen incluidas en programas de diseño de modelado 3D como lo son AutoCAD, BricsCAD, LibreCAD, SolidWorks, Blender, etcétera.

Las representaciones más comunes de las superficies de forma libre incluyen las superficies de Bézier, que son una generalización en tres dimensiones de las curvas del mismo nombre [31], así como las superficies B-Spline (basis spline) y las superficies NURBS (Non Uniform Rational B-spline) [29].

En este y trabajo se presentara una prueba a superficies sin simetría de revolución, en particular se desarrollara la teoría para llevar a cabo una prueba de óptica geométrica llamada pantallas nulas, a superficies bicónicas y polinomiales en el capítulo 2 y se probará una superficie polinomial en los capítulos 3 y 4 usando MATLAB para la representación de la superficie.

Capítulo 2

Diseño de Pantallas Nulas

El método de pantallas nulas desarrollado en el Instituto de Ciencias y Tecnologías Aplicadas de la UNAM, es una prueba de defletometría que consiste en analizar la imagen reflejada de un conjunto de manchas o líneas que se encuentran en la denominada pantalla nula por una superficie bajo prueba, conociendo previamente el resultado de la imagen reflejada generado por una superficie de referencia [1][32][33]. Si ambas imágenes son idénticas entonces las superficies lo serán de igual forma, si difieren entonces las superficies bajo prueba como la de referencia diferirán entre ellas, es decir será nula lo cual representa una ventaja respecto a la deflectometría básica [14][34][35]

2.1 Método de Pantallas Nulas

La técnica usada para el diseño de una pantalla nula es mediante un trazo inverso de rayos, haciendo uso de una **superficie de referencia**, de la cual se conoce su geometría y forma a la perfección. Esta superficie de referencia se debe aproximar a la **superficie de prueba o bajo prueba**. El trazo exacto de rayos inversos comienza con la imagen reflejada que se quiere obtener de la superficie de referencia, este es un patrón de líneas o manchas perfectamente bien conocido, usando la ley de la reflexión y un punto común por el que pasen todos los rayos (un diafragma), se puede encontrar el rayo reflejado del que procede cada punto de la imagen, y su intersección con el lugar en el espacio en el que colocaremos nuestra pantalla nula, la cual puede tener distintas geometrías dependiendo de la forma y geometría de la superficie bajo prueba [34][36].

En este trabajo se realiza una prueba a una superficie sin simetría de revolución, basada en una combinación de polinomios de Zernike, usando pantallas nulas cónicas figura 2.1(b).

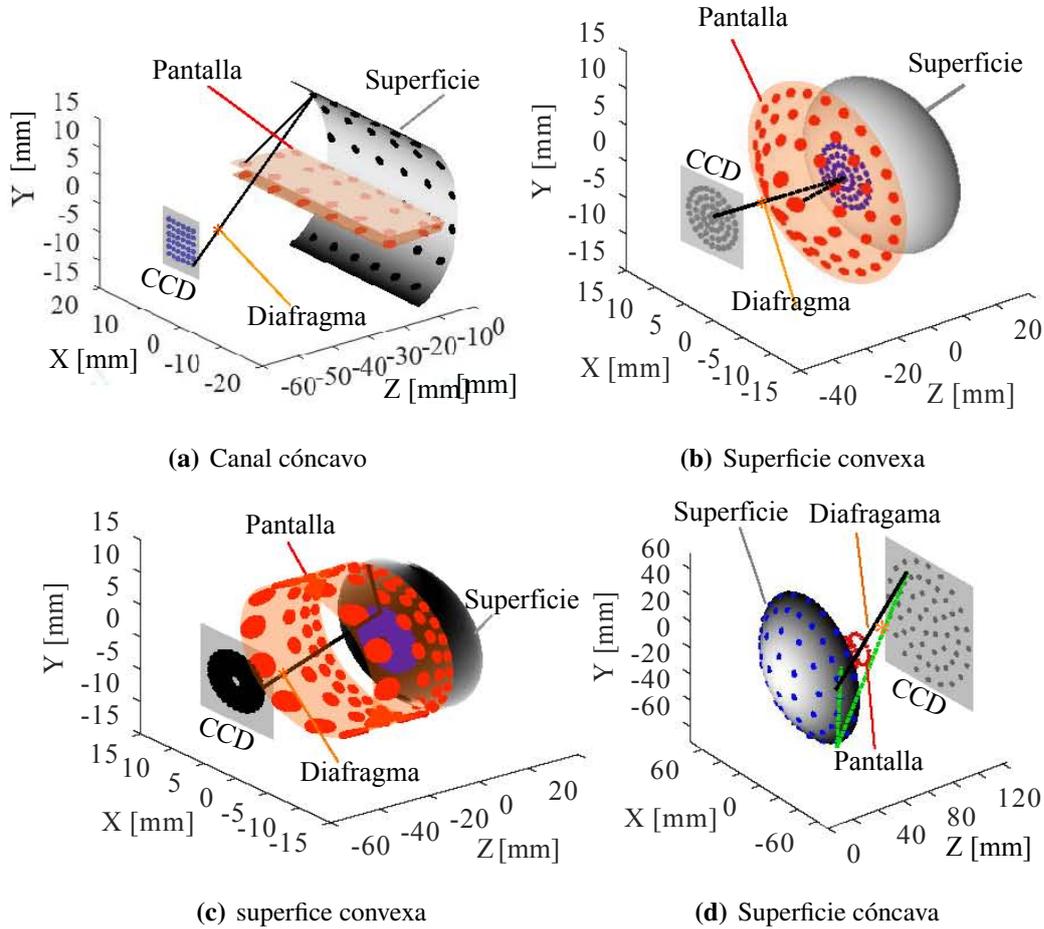


Figura 2.1: Diferentes formas de pantallas nulas con diversas configuraciones convenientes para evaluar distintos tipos de superficie.

2.2 Diseño de la Pantalla Nula Cónica Para una Superficie Bicónica

Una superficie bicónica está descrita por la ecuación [11]

$$z = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - Q_x c_x^2 x^2 - Q_y c_y^2 y^2}}, \quad (2.1)$$

con $c_x = 1/r_x$, $c_y = 1/r_y$ las curvaturas en los ejes X y Y , $Q_x = 1 + k_x$, $Q_y = 1 + k_y$ con

k_x y k_y sus respectivas constantes de conicidad en los ejes X y Y . Si $r_x = r_y$ y $k_x = k_y$ se tiene la ecuación 1.2a perteneciente a una cónica de revolución.

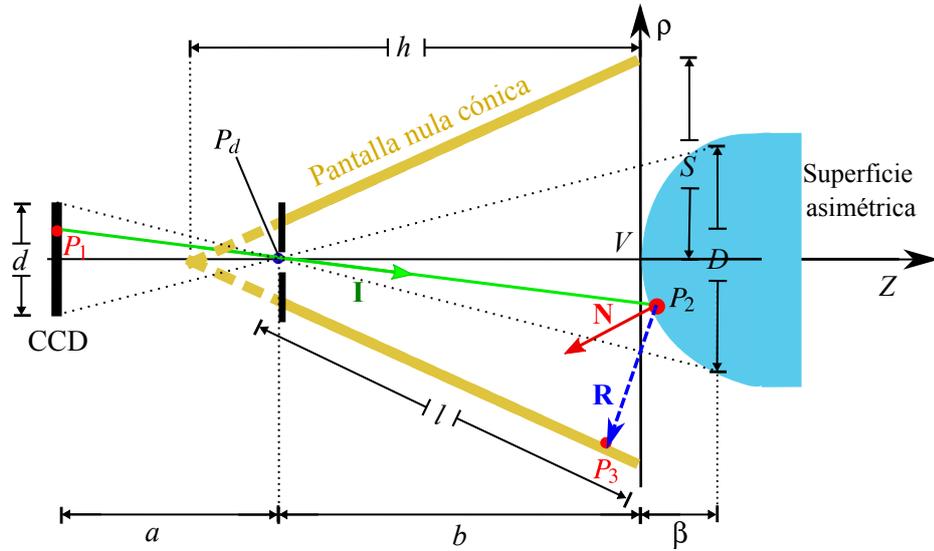


Figura 2.2: Variables involucradas en el diseño de una pantalla nula cónica con el origen en el vértice de la superficie, vistas desde un plano a un ángulo ϕ_1 , correspondiente a la coordenada de P_1 .

Para realizar el trazo de rayos inverso partimos por un rayo de luz que pasa por P_1 sobre el CCD y P_d (diafragma), se interseca con la superficie bajo prueba en P_2 ver figura 2.2, a este se le puede asociar la recta

$$L_1 = \{P|P = P_d + t\mathbf{I}\}, \quad (2.2)$$

con $\mathbf{I} = (P_d - P_1) = -(x_1, y_1, -a)$. L_1 tiene por ecuaciones paramétricas

$$t = -\frac{x}{x_1} = -\frac{y}{y_1} = \frac{z+b}{a} \quad (2.3)$$

de donde se puede encontrar a x e y como función de z :

$$x(z) = -\frac{x_1}{a}(z+b), \quad (2.4a)$$

$$y(z) = -\frac{y_1}{a}(z+b). \quad (2.4b)$$

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

Sustituyendo las ecuaciones (2.4) en (2.1) se puede obtener la coordenada z_2 de $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$z_2 = \frac{1 - \beta b \pm \sqrt{(\beta b - 1)^2 - (\beta + \frac{\gamma}{\beta})\beta b^2}}{\beta + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad (2.5)$$

donde

$$\beta = c_x \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + c_y \left(\frac{y_1}{a}\right)^2, \quad (2.6a)$$

$$\gamma = Q_x c_x^2 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + Q_y c_y^2 \left(\frac{y_1}{a}\right)^2. \quad (2.6b)$$

Si se substituye z_2 en las ecuaciones (2.4) se puede obtener x_2 e y_2 .

Para encontrar las coordenadas del punto P_3 que está situado sobre la pantalla nula es necesario tomar en cuenta la ecuación del rayo que pasa por P_2 y tiene dirección \mathbf{R} , que está dada por la recta

$$L_2 = \{P | P = P_2 + t_2 \mathbf{R}\}. \quad (2.7)$$

El vector director \mathbf{R} del rayo reflejado, puede ser hallado por la ley de la reflexión en su forma vectorial, descrita por

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{I}}{N^2} \mathbf{N}, \quad (2.8)$$

donde \mathbf{I} es el vector incidente, \mathbf{N} el vector normal a la superficie en el punto P_2 y N la norma de \mathbf{N} .

El vector \mathbf{N} puede ser calculado a partir del operador gradiente aplicado a la superficie. Al eliminar la raíz cuadrada y agrupar términos similares de la ecuación (2.1) esta puede ser llevada a la forma

$$F(x, y, z) = (Q_x c_x^2 x^2 + Q_y c_y^2 y^2 + z^2) - 2(c_x x^2 + c_y y^2)z + (c_x x^2 + c_y y^2)^2 = 0, \quad (2.9)$$

de donde la normal en un punto P_2 es el vector gradiente de F evaluado en P_2 .

$$\mathbf{N} = \nabla F(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) (x_2, y_2, z_2). \quad (2.10)$$

Si $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$, el vector normal en P_2 entonces sus coordenadas son:

$$N_x = 2[Q_x c_x^2 x_2 z_2^2 - 2c_x x_2 z_2 + 2(c_x x_2^2 + c_y y_2^2) c_x x_2], \quad (2.11a)$$

$$N_y = 2[Q_y c_y^2 y_2 z_2^2 - 2c_y y_2 z_2 + 2(c_x x_2^2 + c_y y_2^2) c_y y_2], \quad (2.11b)$$

$$N_z = 2(Q_x c_x^2 x_2^2 + Q_y c_y^2 y_2^2) + 2(c_x x_2^2 + c_y y_2^2). \quad (2.11c)$$

Ahora pueden ser calculadas las coordenadas de \mathbf{R} usando (2.8)[37][14].

Las ecuaciones paramétricas de L_2 están dadas por:

$$t = \frac{x - x_2}{R_x} = \frac{y - y_2}{R_y} = \frac{z - z_2}{R_z}, \quad (2.12)$$

entonces x e y pueden ser tomadas en función de z , obteniendo

$$x(z) = \delta(z - z_2) + x_2, \quad (2.13a)$$

$$y(z) = \eta(z - z_2) + y_2, \quad (2.13b)$$

con $\delta = R_x/R_z$ y $\eta = R_y/R_z$.

La ecuación de un cono paralelo al eje Z , como se muestra en la figura 2.2 con radio S en el origen y una distancia h del vértice al origen, es,

$$x^2 + y^2 = \frac{S^2}{h^2} (z + h)^2. \quad (2.14)$$

Las coordenadas del punto P_3 corresponden a la intersección de L_2 con el cono. Sustituyendo 2.13 en 2.14 se obtiene una ecuación correspondiente a la intersección, que tiene como única variable libre z por lo que agrupando los términos que tengan la misma potencia de z se puede llegar a

$$A_1 z_3^2 + 2B_1 z_3 + C_1 = 0, \quad (2.15)$$

donde

$$A_1 = \delta^2 + \eta^2 - \frac{S^2}{h^2}, \quad (2.16a)$$

$$B_1 = [x_2 \delta + y_2 \eta - (\delta^2 + \eta^2) z_2 - \frac{S^2}{h}], \quad (2.16b)$$

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

$$C_1 = (\delta^2 + \eta^2)z_2^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2z_2(x_2\delta + y_2\eta) - S^2. \quad (2.16c)$$

Entonces z_3 tiene por solución [37][38]

$$z_3 = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}}{A_1}, \quad (2.17)$$

donde el signo de la raíz cuadrada que tomaremos, dependerá del valor de R_z , si $R_z < 0$ entonces se toma el valor negativo de la raíz, por el contrario si $R_z > 0$ se toma el valor positivo, esto se deduce dado que el parámetro $t > 0$ y las soluciones de z_3 siempre deben estar del lado derecho del vértice del cono.

Si sustituimos z_3 por z en 2.13 podemos obtener las coordenadas de x_3 e y_3 , obteniendo completamente las coordenadas de P_3 .

Para poder convertir los puntos sobre el cono en un plano, para que de esta manera se pueda imprimir en papel y realizar la prueba experimental, tomemos en cuenta la figura 2.3. Se puede apreciar que la distancia del punto del vértice P_v es equidistante a cada punto de una circunferencia del cono, es decir, cumplen la ecuación de la circunferencia de radio r . El arco de circunferencia de radio

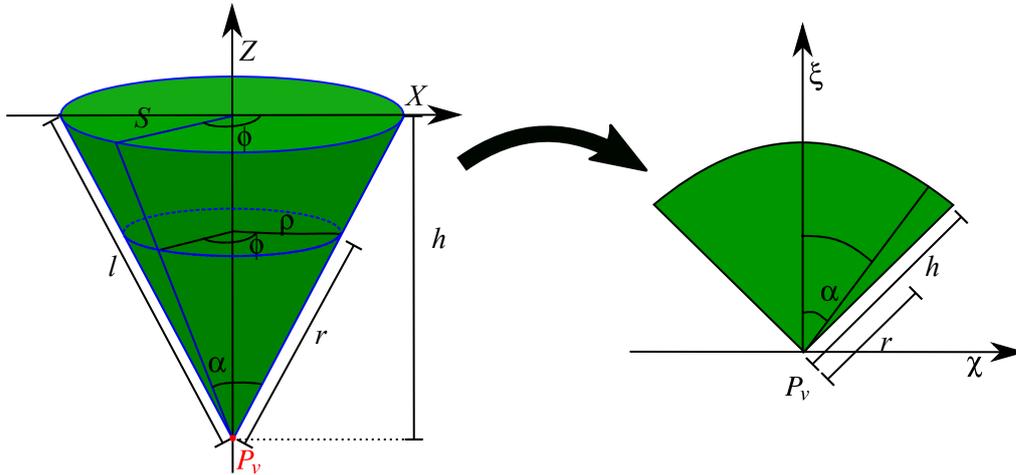


Figura 2.3: Transformación del cono a un plano

$$r = \sqrt{(h + z_3)^2 + \rho^2}$$

que proviene de una circunferencia sobre el cono de radio ρ mide

$$\rho\phi = r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\rho}{r}\phi = \frac{S}{l}\phi,$$

donde $\phi = \arctan(y_3/x_3)$ y se ha tomado en cuenta la semejanza de los conos. Las coordenadas sobre el plano serán, [37][38]

$$\chi = r \cos(\alpha), \quad (2.18a)$$

$$\xi = r \sin(\alpha). \quad (2.18b)$$

2.2.1 Cálculo de los Parámetros a y b .

Remitiéndonos a la figura 2.4, tenemos que se hará uso de una lente para enfocar la imagen capturada por el sensor. Para construir la pantalla nula necesitamos que se cumpla la proporción

$$\frac{a}{d} = \frac{b + \beta}{D}, \quad (2.19)$$

la cual se obtiene de semejanza de triángulos de las líneas punteadas en la figura 2.4.

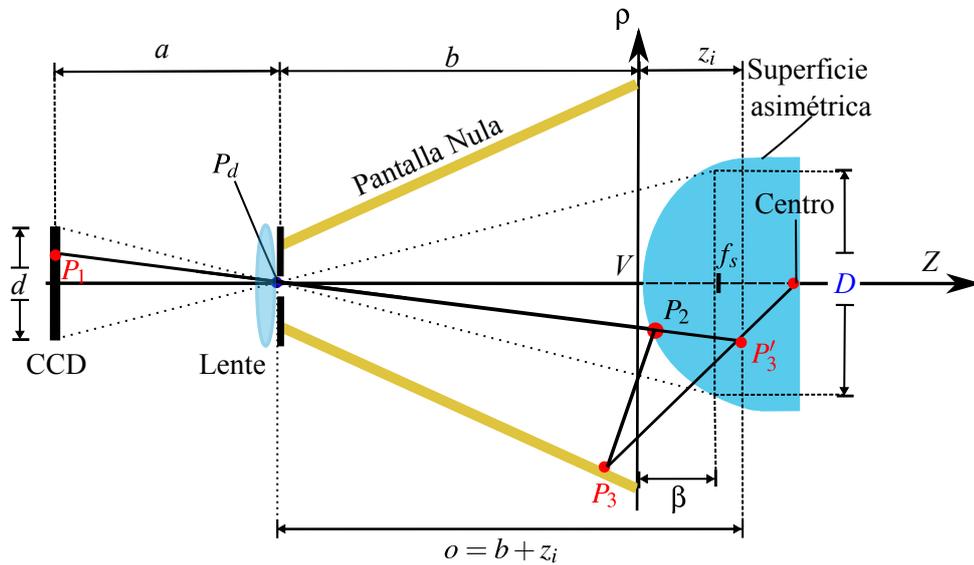


Figura 2.4: Formación de la imagen de un punto sobre la pantalla nula y posterior enfoque con una lente

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

como condición para que las ecuaciones deducidas en la sección 2.2, sean aplicables, entonces despejando a b tenemos

$$b = \frac{Da}{d} - \beta. \quad (2.20)$$

De acuerdo con la figura 2.4 la superficie formará una imagen del punto P_3 (ubicado en z_o) en P'_3 ubicado a z_i a la derecha del vértice, de acuerdo a la ecuación de Gauss.

$$\frac{1}{z_o} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{f_s}, \quad (2.21)$$

donde f_s es el foco de la superficie bicónica en uno de sus ejes y $f_s < 0$, pues es convexa, por lo que

$$z_i = \frac{z_o f_s}{z_o - f_s}. \quad (2.22)$$

Además, la lente de distancia focal f_l enfocará a la imagen del punto P_3 ubicada a una distancia z_i a la derecha del vértice de la superficie, en una distancia a hacia la izquierda de la lente. La imagen de P_3 estará a una distancia $o = b + z_i$, por lo que usando la ecuación de las lentes delgadas tenemos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f_l}. \quad (2.23)$$

Sustituyendo la ecuación(2.20) en (2.23) tenemos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{Da}{d} - \beta + z_i} = \frac{1}{f_l}. \quad (2.24)$$

Tanto f_l, D, d, f_s, z_o , son variables que dependen de la superficie y del sensor y en caso de z_o de nuestra elección, por lo que pueden ser perfectamente conocidas al igual que z_i y β , que dependen únicamente de estas, entonces podemos despejar a de la ecuación (2.24). Si $s = z_i - \beta$, entonces [35][34]

$$a = \frac{-s + f_l \left(\frac{D}{d} + 1\right) \pm \sqrt{s^2 + f_l^2 \left(\frac{D}{d} + 1\right)^2 + 2s f_l \left(\frac{D}{d} - 1\right)}}{2\frac{D}{d}}. \quad (2.25)$$

Ahora se puede usar (2.20) para encontrar b , en resumen tenemos las ecuaciones para encontrar los parámetros a y b dado un diámetro fijo de la superficie D y un tamaño de sensor d . El signo de la solución para el parámetro a debe cumplir que $a > 0$, para que la imagen que se forme sea real y se pueda proyectar en el sensor, como s puede ser

positivo o negativo dependiendo de la elección de z_o . Si $s > 0$ la solución de a que se debe de tomar será la que tenga la raíz positiva, puesto que el radicando cumplirá con:

$$\sqrt{s^2 + f_l^2 \left(\frac{D}{d} + 1\right)^2 + 2sf_l \left(\frac{D}{d} - 1\right)} \geq s \quad (2.26a)$$

y

$$\sqrt{s^2 + f_l^2 \left(\frac{D}{d} + 1\right)^2 + 2sf_l \left(\frac{D}{d} - 1\right)} \geq f_l \left(\frac{D}{d} + 1\right). \quad (2.26b)$$

Si se toma la raíz negativa a tendrá valor negativo. Si s es negativo, ambos valores de la solución podrían tener valor positivo, entonces se tendrá que escoger la solución que se acerque más al valor de f_l . En ambos casos es recomendable en la medida de lo posible escoger un valor de z_o que nos proporcione un $s > 0$ para evitar confusiones.

2.3 Diseño de un Cono Para la Prueba

En la subsección 2.2.1 se explica el método para obtener los parámetros de construcción de una pantalla nula a y b dados D y d los diámetros de la superficie y el sensor respectivamente. En dicho desarrollo no se da por hecho que la geometría del cono, permite el paso de los rayos especulares provenientes del reflejo de la superficie.

Para diseñar el cono que mejor se adapte a la prueba es necesario que se cumplan las siguientes condiciones: que la cámara esté cerca del orificio pequeño del cono de radio s , para que el propio cono no obstaculice la visión de la cámara a la superficie, que el diámetro de la superficie D sea el máximo y el diámetro d de la imagen capturada por el sensor, deberá ser menor que el diámetro del sensor d_{CCD} , para que toda la imagen de la superficie pueda ser capturada. Para esto no nos importa que la superficie quede dentro o fuera del cono.

Para esto se requiere que el tamaño de s debe ser de tamaño suficiente, para que pasen todos los rayos reflejados por la superficie, esto se puede conseguir fácilmente acercando la cámara cerca del orificio del cono, pues para el radio máximo ρ_{max} de un patrón de diseño para una pantalla nula se cumple (ver la figura 2.5)

$$\frac{\rho_{max}}{a} = \frac{\rho_b}{b_1} \Rightarrow \rho_b = \frac{b_1 \rho_{max}}{a} \quad (2.27)$$

Por lo que $x \rightarrow 0$ conforme $b_1 \rightarrow 0$, por lo que para un radio s bastará con acercarlo a la cámara para que puedan pasar todos los rayos de luz.

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

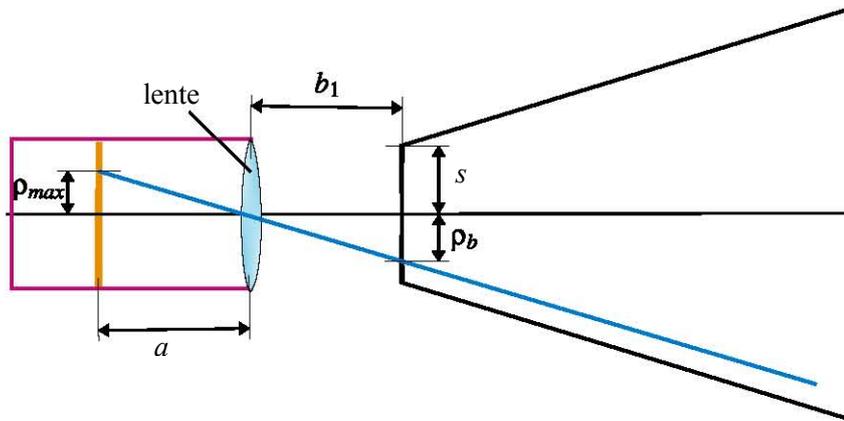


Figura 2.5: Representación esquemática de los rayos de luz pasando dentro del cono truncado de radio inferior s .

También se requiere que S_1 sea mayor que el diámetro de la superficie $D/2$, para que la superficie pueda introducirse dentro del cono de ser necesario, y que $S(\beta) < \rho_s(\beta)$ siendo β la sagita de la superficie, a fin de que la superficie pueda introducirse en todo momento dentro del cono (figura 2.6).

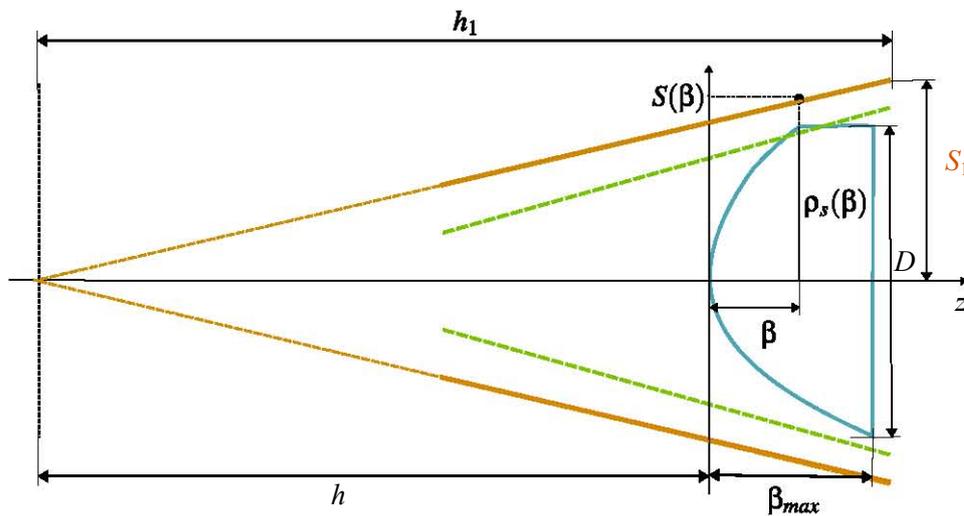


Figura 2.6: Diseño del cono para que una superficie convexa pueda ser contenida por este, en líneas punteadas verdes, se aprecia un cono que no cumple con las características.

El radio del cono usado para deducir las ecuaciones de la construcción de la pantalla nula es el radio en $z = 0$ es decir $S(0) = S_0$, el cual es fácil de deducir usando la ecuación de recta generatriz del cono, para un radio S_1 dado y una altura h_1 en Z siendo:

$$S_0 = \frac{S_1}{h_1}h \quad (2.28)$$

se debe notar que $h_1 \geq h + \beta_{max}$, donde β_{max} es la altura de la superficie.

Otro aspecto a tomar en cuenta es que la imagen de la superficie debe ser captada en su totalidad por el sensor de la cámara, por lo que esta debe estar a una distancia prudente (lo bastante alejada), lo cual dependerá de la distancia focal de la lente f_l y el tamaño del sensor. De acuerdo con la subsección 2.4 el parámetro a depende de f_l , z_o , D y d (distancia focal de la lente, distancia de un punto objeto que será reflejado por la superficie cerca del vértice, diámetro de la superficie y diámetro del sensor o del patrón de diseño), y b está en función de a y la sagita máxima de la superficie. Para encontrar las medidas que debe tener el cono que usaremos, es necesario ver como variaría a en función de z_o , con los demás parámetros constantes (tomados de la tabla 3.1), así como la posición de la imagen z_i formada por la superficie (ver figura 2.7).

En la figura 2.7 se puede ver que a tiene un comportamiento asintótico al igual que z_i y b , y su valor cambia menos de 1 mm, no más de 5 mm para x_i y b , todo esto suponiendo además que el radio de curvatura $r_c = 10.33\text{mm}$ en el vértice de la superficie. Se puede deducir entonces que para un valor de D y d dados, el valor de a y b tienen una cota mínima, por lo que la altura del cono h debe superar el valor máximo de b ($h > b(0)$).

Para diseñar el cono se propone entonces un valor de h entero en milímetros superior a $b(0)$, con un radio S_1 superior a $D = 50\text{mm}$ y $h_1 \geq h + \beta_{max}$, para lo posterior se propone usar las ecuaciones de la subsección 2.4, en conjunto con 2.28 para construir una pantalla nula para un patrón de diseño. Posteriormente, al construir la pantalla nula puede que los valores de la coordenada en Z del punto P_3 sean positivos, lo que implica que la superficie quedará dentro del cono que se usará para la prueba, por lo que se debe escoger la altura del cono que pueda contener todos los puntos P_3 (recordar que el vértice de la superficie se coloca en el origen). Recordar que para todo valor de z $S(z)$ (el radio del cono en z) debe ser mayor que el radio de la superficie en z , a fin de que el cono y la superficie no se intersequen.

Para este trabajo se usaron una lente con $f_l = 16\text{mm}$ una superficie de con $D = 50\text{mm}$ y un sensor CCD de $d_{CCD} = 4.605\text{mm}$, y el cono diseñado se puede ver en 2.8.

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

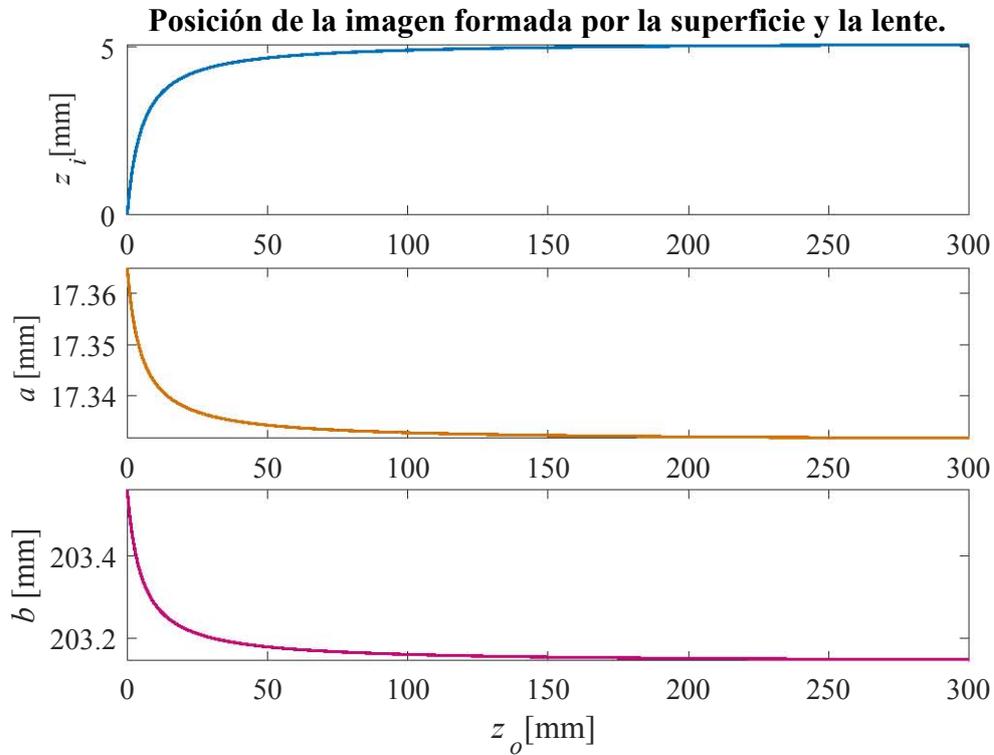


Figura 2.7: Comportamiento de $x_i(z_o)$ (arriba), $a(z_o)$ (en medio) y $b(z_o)$ abajo.

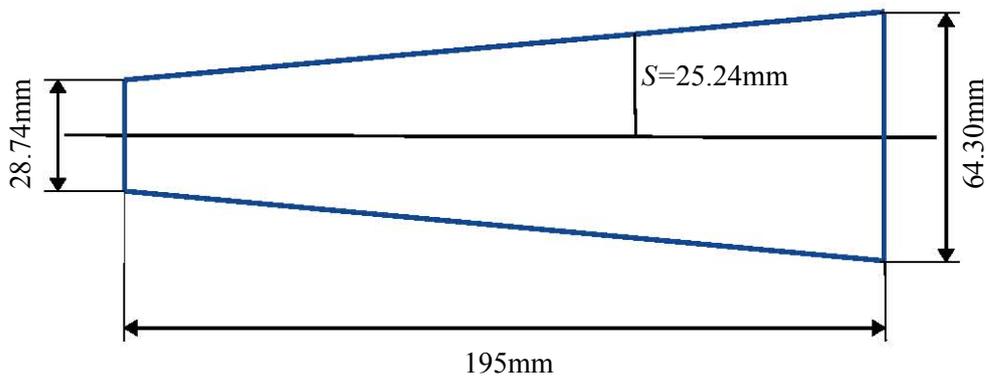


Figura 2.8: Cono usado para la prueba, se muestra también el radio del cono usado para la prueba experimental.

2.4 Diseño de la Pantalla Nula Cónica Para una Superficie Zernike

Llamaremos superficie de Zernike a una superficie que sea una combinación lineal de los polinomios de Zernike, los cuales forman una base y son ortogonales dentro de la circunferencia unitaria, nombrados así en honor al físico neerlandés Fritz Zernike ganador del Premio Nobel de física en 1953.[11][39]

Los polinomios de Zernike pueden definirse en términos de su paridad:

$$Z_n^m = R_n^m(\rho) \cos(m\phi), \quad (2.29)$$

si son pares y

$$Z_n^{-m} = R_n^m(\rho) \sin(m\phi), \quad (2.30)$$

si son impares, con $n \geq m$, ambos números enteros no negativos, ρ y ϕ son las coordenadas radial y angular respectivamente, con $0 \leq \rho \leq 1$, R_n^m es el polinomio radial definido, como [11]

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! (\frac{n+m}{2} - k)! (\frac{n-m}{2} - k)!} \rho^{n-2k}, \quad (2.31)$$

para $(n-m)$ par y 0 si $(n-m)$ es impar.

Aunque existen más representaciones de los polinomios de Zernike la anterior es la más común y conocida, esta representación nos permite calcular dado la forma de recurrencia de R_n^m , poder encontrar una forma de recurrencia para la derivada de esta misma, lo cual permitirá encontrar las derivadas para hallar el vector normal a la superficie de una forma más rápida, sobre todo si se programan. Las derivadas de los polinomios de Zernike son las siguientes.

$$\frac{d}{d\phi} Z_n^m(\rho, \phi) = -R_n^m(\rho) m \sin(m\phi), \quad (2.32)$$

$$\frac{d}{d\rho} Z_n^m(\rho, \phi) = \cos(m\phi) \frac{d}{d\rho} R_n^m(\rho), \quad (2.33)$$

si el polinomio es par y

$$\frac{d}{d\phi} Z_n^{-m}(\rho, \phi) = R_n^m(\rho) m \cos(m\phi), \quad (2.34)$$

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

$$\frac{d}{d\rho} Z_n^{-m}(\rho, \phi) = \text{sen}(m\phi) \frac{d}{d\rho} R_n^m(\rho), \quad (2.35)$$

para los impares con

$$\frac{d}{d\rho} R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-2k)(n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k-1}, \quad (2.36)$$

siempre que $n - m$ sea par y $n - k \geq 1$, de esta forma se evita que los monomios elevados a la potencia 0 sean tomados en cuenta con una potencia negativa.

El procedimiento para generar una pantalla nula para una superficie Zernike es en general análogo al descrito en la sección 2.2[25][40] generar la pantalla nula de una superficie bicónica, ver Figura 2.9.

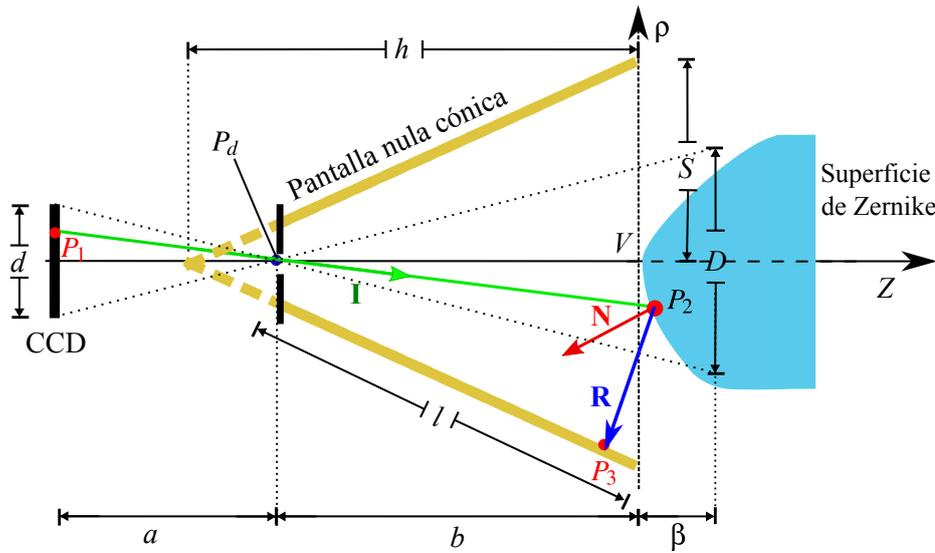


Figura 2.9: Diagrama de construcción de una pantalla nula cónica para una superficie de Zernike, vista desde un plano a un ángulo ϕ_1 , perteneciente a la coordenada de P_1 .

Si se realiza el trazo exacto de rayos inverso, y tomando como referencia la figura 2.9 se tiene que la ecuación de la recta con dirección del rayo incidente $\mathbf{I} = (\rho_1, \phi_1 + \pi, a)$ y que pasa por $P_1 = (\rho_1, \phi_1, z_1)$ en coordenadas cilíndricas para un ángulo azimutal dado ϕ_1 , es

$$z = \frac{a}{\rho_1} \rho - b. \quad (2.37)$$

El punto $P_2 = (\rho_2, \phi_2, z_2)$ será la intersección de la recta en (2.37) y la superficie de Zernike, en un ángulo $\phi_2 = \phi_1 + \pi$, por lo que las coordenadas de P_2 corresponderán a la solución de la ecuación

$$\frac{-a}{\rho_1} - b = - \sum_{n,m=0} A_{n\pm m} Z_n^{\pm m}(\rho, \phi_1 + \pi), \text{ con } m \geq 0, \quad (2.38)$$

donde el signo negativo de la suma es debido a la orientación que tendrá la superficie en el arreglo como se aprecia en la figura 2.9.

Para un ϕ_1 conocido solo tendremos que solucionar la ecuación (2.38) para la coordenada ρ , lo cual resulta difícil para polinomios de grado mayor a 2, por lo que en esta ocasión la propuesta es resolver la ecuación de forma numérica, en este caso usando el método de Brent-Deker[41], cuyo algoritmo está implementado en varias paqueterías de software de cómputo científico y se basa en usar los métodos de secante y bisección según convenga, dependiendo de que tan cerca se encuentre de la raíz.

Una vez encontrado ρ_2 (formalmente aproximado en matemáticas), y dado que $\phi_2 = \phi_1 + \pi$, tenemos que la coordenada en Z será

$$z_2 = - \sum_{n,m=0} A_{n\pm m} Z_n^{\pm m}(\rho_2, \phi_2). \quad (2.39)$$

Para hallar la dirección de \mathbf{R} es necesario conocer la dirección del vector normal \mathbf{N} en el punto P_2 .

$$\mathbf{N} = -\nabla \left[\sum_{n,m=0} A_{n\pm m} Z_n^{\pm m}(\rho, \phi) + z \right]. \quad (2.40)$$

Si nombramos a la función de la superficie por simplicidad

$$Z_1 = - \sum_{n,m=0} A_{n\pm m} Z_n^{\pm m}(\rho, \phi) - z = 0.$$

En coordenadas cilíndricas el vector gradiente de $Z_1(\rho, \phi, z)$ es[42]

$$\nabla Z_1 = \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} \hat{z}, \quad (2.41)$$

simplificando

$$\nabla Z_1 = - \sum_{n,m=0} A_{n\pm m} \frac{\partial Z_n^{\pm m}}{\partial \rho} \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} \sum_{n,m=0} A_{n\pm m} \frac{\partial Z_n^{\pm m}}{\partial \phi} \hat{\phi} - \hat{z}. \quad (2.42)$$

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

Aunque esta expresión final es en general complicada dado que se trata de derivar una combinación lineal de polinomios de Zernike que pueden ser pares o impares podemos utilizar las ecuaciones de (2.32) a (2.36), para encontrar dichas derivadas de una forma sistematizada en un programa computacional, aprovechando la linealidad de las derivadas y la relaciones de recurrencia.

De esta forma es obtenido el vector gradiente y, por tanto, el vector normal a la superficie $\mathbf{N} = (N_\rho, N_\phi, N_z)$, de forma más específica

$$N_\rho = - \sum_{n,m=0} A_{n\pm m} \frac{\partial Z_n^{\pm m}}{\partial \rho}, \quad (2.43a)$$

$$N_\phi = -\frac{1}{\rho} \sum_{n,m=0} A_{n\pm m} \frac{\partial Z_n^{\pm m}}{\partial \phi}, \quad (2.43b)$$

$$N_z = -1. \quad (2.43c)$$

Encontrar la dirección de \mathbf{R} en coordenadas cilíndricas puede ser poco práctico, por lo que es conveniente una vez que se han calculado las derivadas pasar los vectores \mathbf{N} y \mathbf{I} a coordenadas cartesianas, con las siguientes transformaciones[42]

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}, \quad (2.44a)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}, \quad (2.44b)$$

$$\hat{z} = \hat{z} \quad (2.44c)$$

donde ϕ es el ángulo la coordenada sobre la superficie. De esta forma

$$\mathbf{I} = -(x_1, y_1, -a) \quad (2.45)$$

y

$$N_x = N_\rho \cos \phi - N_\phi \sin \phi, \quad (2.46a)$$

$$N_y = N_\rho \sin \phi + N_\phi \cos \phi, \quad (2.46b)$$

$$N_z = N_z. \quad (2.46c)$$

Con los vectores \mathbf{I} y \mathbf{N} en coordenadas cartesianas, podemos encontrar \mathbf{R} con la ecuación (2.8), las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P_2 y tiene

dirección \mathbf{R} son esencialmente las ecuaciones en (2.13), por lo que las coordenadas del punto $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ sobre el cono están dadas por las ecuaciones (2.17) para z_3 y (2.8) para el par ordenado (x_3, y_3) .

Para calcular los parámetros de construcción a y b , se supone que la parte más cercana al vértice de la superficie de Zernike se aproxima a una esfera, entonces calculando el radio de curvatura en el vértice de la superficie se podrán usar las ecuaciones obtenidas en la subsección 2.2.1.

Para calcular el radio de curvatura en el vértice de la superficie, empezamos escogiendo una curva plana, de preferencia en $\phi = 0$ o $\phi = \pi/2$ con el fin de trabajar solo con los polinomios pares o impares, dado esto se puede encontrar el radio de curvatura con la siguiente ecuación [43]

$$Rc = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2z}{d\rho^2} \right|} \quad (2.47)$$

donde z se ha despejado como función de ρ de la ecuación de la superficie:

$$z(\rho) = - \sum_{n,m=0} A_{n\pm m} Z_n^{\pm m}(\rho, \phi), \quad (2.48)$$

para $\phi = 0$ y $\frac{\pi}{2}$.

Para este trabajo sé probó una superficie de Zernike que está basada en combinación lineal de los polinomios Z_2^0 y Z_3^{-3} , quedando como

$$A_{20}Z_2^0 + A_{3,-3}Z_3^{-3} - z = 0. \quad (2.49)$$

Finalmente, la pantalla nula puede ser construida partiendo del patrón de diseño y teniendo todos los parámetros del cono y la superficie, en la figura 2.10(b) se muestra un ejemplo de la pantalla nula correspondiente al patrón de diseño en 2.10(a), se puede ver que las manchas en la pantalla nula tiene distintas dimensiones y forma, esto es debido en un principio al cambio de curvatura en la superficie y la geometría propia de la pantalla nula, que en este caso es un cono.

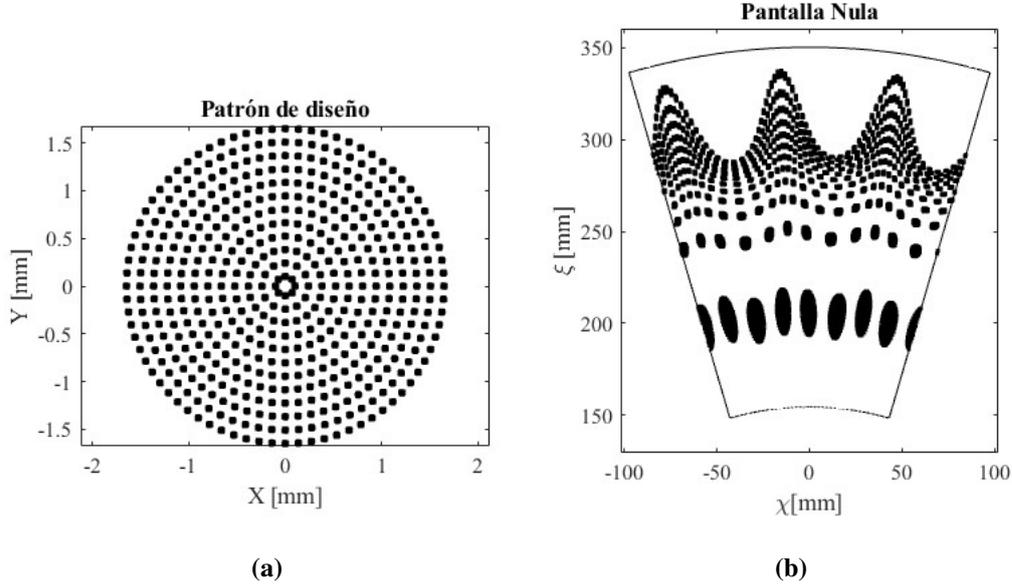


Figura 2.10: Ejemplo de un patrón de diseño y la pantalla nula generada sobre un cono.

2.5 Reconstrucción de la Superficie

Para la topografía de la superficie con la imagen capturada en el sensor, es necesario calcular los centroides de todas las manchas, lo cual se describe en el capítulo 3, por ahora supondremos para el desarrollo siguiente que se cuentan con los centroides de cada mancha.[37][38]

Para empezar recordemos que una superficie puede ser representada como $f(x, y, z) = 0$ y su vector normal en un punto está dado por el vector gradiente de la superficie en dicho punto. Para una curva parametrizada

$$\mathbf{r}(x(t), y(t), z(t)) \quad (2.50)$$

con t el parámetro, derivando

$$\frac{df(\mathbf{r}(t))}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 0. \quad (2.51)$$

Sustituyendo $\mathbf{N} = \nabla f$ y $\mathbf{r}(t)$, tenemos de acuerdo con la ecuación de la deflectometría que

$$\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}(t) = N_x dx + N_y dy + N_z dz = 0 \quad (2.52)$$

y despejando a dz tenemos la “Ecuación de la forma de la superficie”[44]

$$dz = - \left(\frac{N_x}{N_z} dx + \frac{N_y}{N_z} dy \right), \quad (2.53)$$

al integrar a lo largo de una trayectoria C , obtenemos

$$z - z_0 = - \int_C \left(\frac{N_x}{N_z} dx + \frac{N_y}{N_z} dy \right). \quad (2.54)$$

Con la ecuación (2.54) es posible encontrar la sagita de la superficie conociendo las normales y los cambios en x y y .

Como es imposible en la práctica conocer todas las normales, además que con el conjunto de centroides solo se pueden formar trayectorias discretas, es necesario deducir una ecuación equivalente a la ecuación (2.54) para trayectorias discretas, una forma es aplicar la ”regla del trapecio compuesta”[45] a cada una de las variables de integración.

La regla del trapecio compuesta se basa en aproximar una integral definida por medio de n trapecios, como se muestra en la figura 2.11, de tal forma que al calcular las áreas de los trapecios se obtiene que una integral definida queda aproximada por

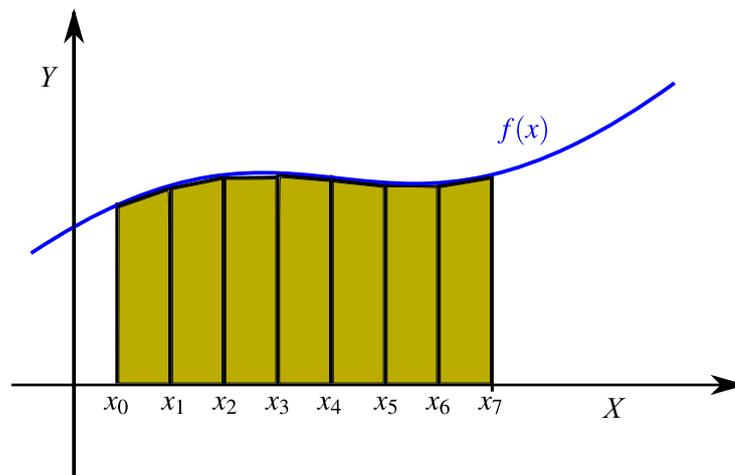


Figura 2.11: Representación de la regla del trapecio compuesta.

$$\int f dx \approx \sum_{k=0}^n [f(x_{k+1}) + f(x_k)] \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2}. \quad (2.55)$$

Aplicando la regla a cada una de las variables tenemos que la ecuación (2.54) en su forma discreta es

$$z_n - z_0 \approx \sum_j^{n-1} \left(\frac{N_{x_j}}{N_{z_j}} + \frac{N_{x_{j+1}}}{N_{z_{j+1}}} \right) \frac{\Delta x_j}{2} + \left(\frac{N_{y_j}}{N_{z_j}} + \frac{N_{y_{j+1}}}{N_{z_{j+1}}} \right) \frac{\Delta y_j}{2}, \quad (2.56)$$

donde n es el número de puntos sobre la trayectoria de integración, N_{x_j} , N_{y_j} y N_{z_j} son las componentes del vector normal, $\Delta x_j = (x_{j+1} - x_j)$, $\Delta y_j = (y_{j+1} - y_j)$ los respectivos tamaños de paso para realizar la integral en x y y , donde el subíndice j hace referencia a la posición j -ésima del punto en la trayectoria sobre la superficie.

2.5.1 Cálculo de las Normales

Para calcular las normales de la ecuación (2.8), se puede notar que el vector normal es proporcional a la diferencia de los vectores \mathbf{I} y \mathbf{R} , por lo que se puede afirmar que un vector normal unitario \mathbf{N} es [34]

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{R}}{|\mathbf{I} - \mathbf{R}|}. \quad (2.57)$$

Recordemos que la ecuación (2.8) está deducida para un trazo de rayos inverso, pero una vez que se ha capturado la imagen del reflejo de la pantalla nula sobre la superficie con un sensor y son calculados los centroides de las manchas, es necesario referirse a los rayos de tal modo que se entienda que se refiere al trazo de rayos como se producirían en la realidad.

Definamos el vector \mathbf{r}_r como el vector del rayo incidente que va de un punto sobre la pantalla nula a la superficie y \mathbf{r}_i como el vector del rayo reflejado que va de la superficie e interseca al sensor, entonces la ecuación anterior toma la forma:[34][35]

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_i|}. \quad (2.58)$$

Es preciso mencionar que al llevar a cabo la prueba solo se conoce, la posición del diafragma P_d , la posición de cualquier punto P_p sobre la pantalla nula, los puntos de los centroides P_c capturados en el sensor, con estos se puede calcular la dirección de \mathbf{r}_r , pero no se conocen la dirección de \mathbf{r}_i y la posición de un punto sobre la superficie P_s donde se intersecan los rayos incidente y reflejado.

En particular nos interesa calcular las coordenadas de todos los puntos sobre la superficie que generan un punto P_c sobre el sensor usando la ecuación (2.56), para esto se tiene que realizar una aproximación de las normales, se calcula entonces el vector \mathbf{r}_r y

se encuentra la ecuación de la recta que representa al rayo reflejado, conociendo esta recta se puede aproximar la coordenada sobre la superficie simplemente intersecándola con una superficie de referencia y encontrar una aproximación de \mathbf{r}_i y el vector normal \mathbf{N}_r , donde el subíndice r hace referencia a que se ha usado la ecuación de una superficie de referencia ver figura 2.12. El vector unitario $\mathbf{r}_r \propto P_d - P_c$ donde $P_c = (x_c, y_c, -a - b)$ y $P_d = (0, 0, -b)$, puede ser representado como:

$$\mathbf{r}_r = \frac{(x_c, y_c, a)}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + a^2}}. \quad (2.59)$$

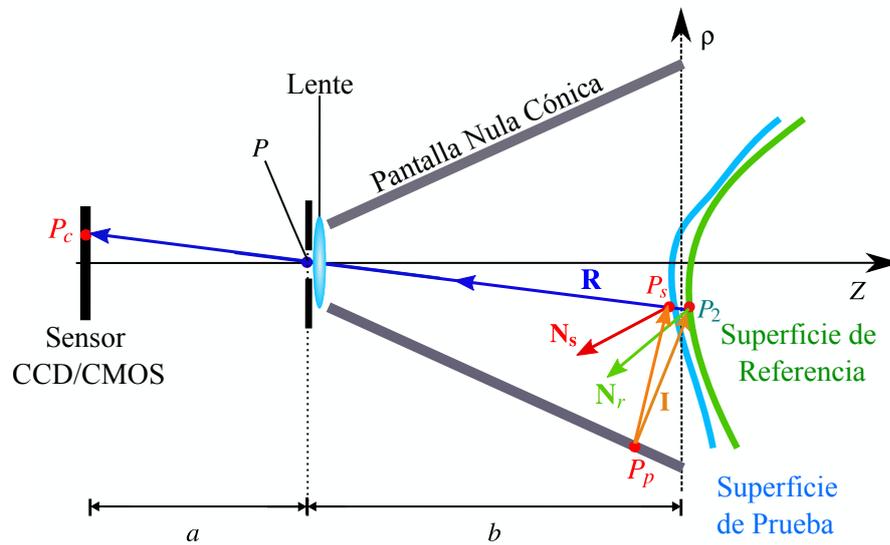


Figura 2.12: Aproximación a las normales de la superficie.

El vector \mathbf{r}_r se puede conocer perfectamente, y la ecuación de un rayo reflejado sería análogo a la ecuación (2.4) como sigue:

$$x(z) = -\frac{x_c}{a}(z + b), \quad (2.60a)$$

$$y(z) = -\frac{y_c}{a}(z + b). \quad (2.60b)$$

La ecuación de referencia puede ser conocida perfectamente y es recomendable que sea la ecuación de diseño de la pantalla nula y/o la ecuación de diseño de la superficie. Si la superficie de referencia es $f(x, y, z)$, la ecuación que se debe de resolver para encontrar los puntos sobre la superficie, $P_s = (x_s, y_s, z_s)$ corresponderían a las soluciones de

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

sustituir las ecuaciones (2.60) en f obteniendo

$$f(x(z), y(z), z) = 0. \quad (2.61)$$

Con lo que se obtendría la coordenada z_s y usando las ecuaciones (2.60), se obtendrían los valores de x_s y y_s .

Con esta aproximación a cualquier punto P_s sobre la superficie se puede aproximar el vector $\mathbf{r}_i \propto P_p - P_s$ con $P_p = (x_p, y_p, z_p)$ las coordenadas del centroide en la pantalla nula, como

$$\mathbf{r}_r = \frac{(x_s - x_p, y_s - y_p, a)}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}}. \quad (2.62)$$

Usando la ecuación (2.58) se obtiene una aproximación al vector normal [34][35] \mathbf{N}_r , la cual puede ser usada para aproximar la sagita de la superficie usando la ecuación (2.56) y usando nuevamente las ecuaciones (2.60) se puede hallar todas las coordenadas del reflejo del centroide en la superficie, a las que se designan como P_{s1} .

A la nube de puntos P_{s1} se les ajustará una función, esta función debe corresponder a la superficie de referencia pero con ligeros cambios, por lo que se propone que en esta nueva función $f_a(x, yz)$ sea la función f rotada azimutalmente o alrededor del eje Z y trasladada en sus tres coordenadas, esto lo conseguimos fácilmente aplicando las matrices de rotación y traslación.

Para esto supongamos que existe un sistema O' el cual está trasladado y rotado en el eje Z respecto a un sistema O entonces la transformación que nos permitiría pasar las coordenadas del sistema O al sistema O' es [46]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \text{sen } \theta - x_0 \\ y \cos \theta - x \text{sen } \theta - y_0 \\ z - z_0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

En las deducciones anteriores se han usado matrices de 4×4 con el fin de que la matriz de traslación sea una transformación lineal y la composición de la rotación y traslación se reduzca a multiplicar las matrices asociadas a cada transformación. Además de la rotación y traslación se propone usar un plano o dos términos lineales en X y Y sobre

la coordenada z a fin de modelar las desviaciones en los ejes X y Y . Dicho plano se le sería de la forma $T_x x + T_y y$ donde a cada término T se le denomina *tilt* que viene del inglés que significa ‘inclinación’. Por lo que la transformación completa queda como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta - x_0 \\ y \cos \theta - x \sin \theta - y_0 \\ z - z_0 + T_x x + T_y y \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Si suponemos que en el sistema O' la superficie f no está rotada y trasladada, entonces en general en el sistema O la superficie está rotada y trasladada. La superficie en O corresponderá a sustituir a las coordenadas primadas en la función f ,

$$f(x', y', z') = 0. \quad (2.66)$$

Sustituyendo cada término para encontrar la función de la superficie en O se obtiene

$$f(x \cos \theta + y \sin \theta - x_0, y \cos \theta - x \sin \theta - y_0, z - z_0 + T_x x + T_y y) = 0 \quad (2.67)$$

a esta nueva función en el sistema O le llamaremos f_a y será nuestra función de ajuste para la nube de puntos encontrada a partir de las normales N_r .

La función $f_a(x, y, z)$ será entonces una representación matemática de la superficie bajo prueba en el sistema O , esta superficie f_a es una mejor aproximación a la superficie real, que f en el sistema O por lo que si se quiere tener una mejor topografía de la superficie se puede volver a repetir el proceso anterior, calcular una normal de referencia N_r usando como superficie de referencia a f_a , y realizar todo el proceso, descrito anteriormente. Se puede realizar el proceso de forma iterada [35][38] hasta encontrar una superficie f_a que sus parámetros diverjan en menor medida de la anterior f_a . Para una mejor explicación de como funciona el método iterativo se explica en el diagrama de la figura 2.13.

2.6 Superficie Bajo Prueba M1-CNC

En este trabajo se pretende mejorar el método de pantallas nulas para evaluar superficies convexas sin simetría de revolución, por lo que se presenta la evaluación de una superficie de Zernike denominada M1-CNC, la cual fue fabricada en una CNC (*Control Numérico Computarizado*) y facilitada por el Laboratorio de Instrumentación y

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

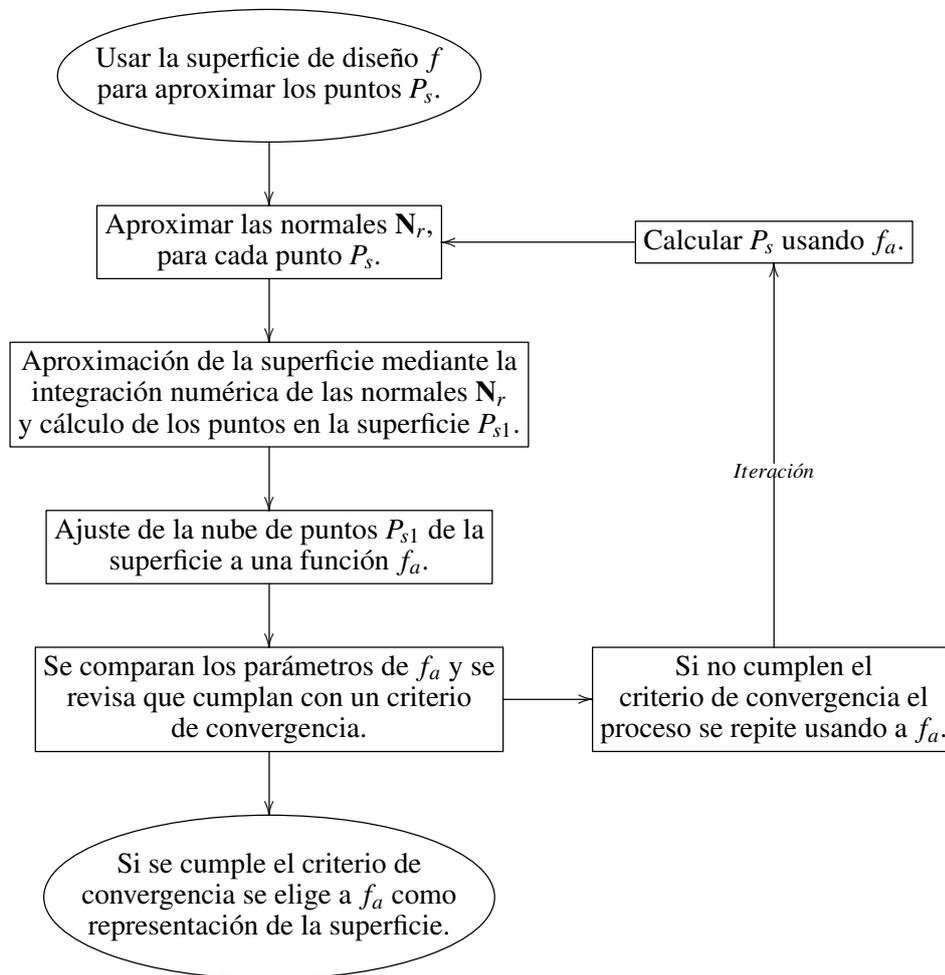


Figura 2.13: Diagrama del método iterativo

Metrología Óptica (LIMO). La superficie es una combinación lineal de los polinomios $\{Z_2^0, Z_3^{-3}\}$ que tiene por ecuación [25][47]

$$z(\rho, \phi) = -A_{20}Z_2^0 + A_{3-3}Z_3^{-3}. \quad (2.68)$$

La representación explícita como función de ρ y ϕ es

$$z(\rho, \phi) = -A_{20}(2\rho^2 - 1) + A_{3-3}\rho^3 \sin(3\phi). \quad (2.69)$$

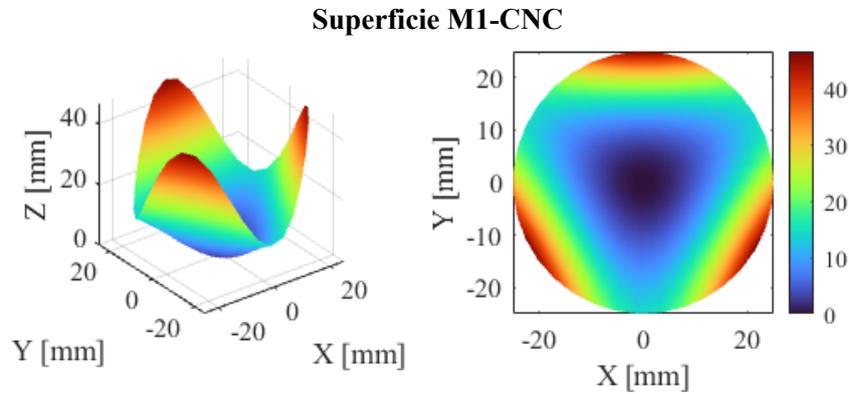


Figura 2.14: Gráfica de la superficie bajo prueba M1-CNC.

Esta superficie cumple con los requerimientos deseados para realizar la prueba; ser una superficie convexa, no poseer simetría de revolución y ser una superficie rápida (cambia su curvatura muy rápido respecto a su diámetro o $f/\# < 1$ con $\#$ el diámetro de la superficie).

Usando las ecuaciones (2.43) se pueden encontrar sus derivadas y con las ecuaciones en (2.46) se pueden encontrar sus valores correspondientes en coordenadas cartesianas. Los valores de los coeficientes están dados en la tabla 2.1.

Parámetro	Valor
Diámetro	50mm
A_{20}	2.420×10^{-2}
A_{3-3}	-1.0476×10^{-3}

Tabla 2.1: Datos de la superficie de Zernike M1.

La pantalla nula para la superficie M1 se reduce a seguir los pasos descritos en la sección 2.4, pero un problema más complicado surge cuando se quiere aplicar el método iterativo, pues una traslación de un vector en coordenadas cilíndricas es más complicado que en un sistema rectangular, por lo que para este paso se propone transformar la ecuación (2.69) a coordenadas cartesianas, tomando que

$$\rho^3 = x^2 + y^2, \quad (2.70a)$$

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

$$\begin{aligned}\rho^3 \sin(3\phi) &= \rho^3 [\sin \phi \cos(2\phi) + \sin(2\phi) \cos \phi] \\ &= \rho^3 [2 \cos^2 \phi \sin \phi + \sin \phi \cos^2 \phi - \sin^3 \phi],\end{aligned}\quad (2.70b)$$

$$x = \rho \cos \phi \quad (2.70c)$$

y

$$y = \rho \sin \phi \quad (2.70d)$$

se obtiene [25]:

$$z(x, y) = -A_2 y^3 + A_2 x^2 + A_1 y^2 + 3A_2 x^2 y - A_1, \quad (2.71)$$

donde $A_1 = A_{20}$ y $A_2 = A_{3-3}$.

Si aplicamos la transformación de la ecuación (2.65) para encontrar la superficie de ajuste f_a descrita en la sección anterior se obtiene un polinomio de la forma

$$z(x, y) = Ax^3 + By^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + Hx + Iy + J. \quad (2.72)$$

Donde cada uno de estos coeficientes dependen del ángulo de rotación θ , del vector de traslación (x_0, y_0, z_0) y de los términos de tilt T_x, T_y . Si designamos a $a_1 = \cos \theta$ y $a_2 = \sin \theta$, entonces se simplificaría la dependencia de cada uno de los coeficientes del polinomio respecto al ángulo y la rotación, como se muestra a continuación:

$$A = A_2(a_2^3 - 3a_1^2a_2), \quad (2.73a)$$

$$B = A_2(-a_1^3 + 3a_2^2a_1), \quad (2.73b)$$

$$C = 3A_2(-a_2^2a_1 + a_1^3 - 2a_2^2a_1), \quad (2.73c)$$

$$D = 3A_2(+a_1^2a_2 - a_2^3 + 2a_1^2a_2), \quad (2.73d)$$

$$E = 3A_2(y_0a_2^2 + 2x_0a_1a_2 - y_0a_1^2) + 2A_1, \quad (2.73e)$$

$$F = 3A_2(y_0a_1^2 - 2x_0a_1a_2 - y_0a_2^2) + 2A_1, \quad (2.73f)$$

$$G = 6A_2x_0(a_2^2 - a_1^2) - 2y_0a_1a_2 \quad (2.73g)$$

$$H = 3A_2[y_0^2a_2 + x_0(2y_0a_1 - x_0a_2)] + 4A_1(y_0a_2 - x_0a_1) + T_x, \quad (2.73h)$$

$$I = 3A_2[x_0(2y_0a_2 + x_0a_1) - y_0^2a_1] - 4A_1(y_0a_1 + x_0a_1) + T_y, \quad (2.73i)$$

$$J = A_2y_0^3 + A_1(x_0^2 + y_0^2) - 3A_2x_0^2y_0 - A_1 + z_0 \quad (2.73j)$$

Una vez hecho el ajuste y obtenido los valores de los coeficientes del polinomio (2.72) mediante las ecuaciones (2.73) es posible obtener los valores de a_1 , a_2 , x_0 , y_0 , z_0 , A_1 , A_2 , T_x y T_y , lo cual no es trivial y requiere de la aplicación de distintos métodos para encontrar cada una de las incógnitas. Empecemos por las ecuaciones (2.73a) y (2.73b) definiendo las nuevas incógnitas

$$b_1 = \sqrt[3]{A_2 a_1},$$

$$b_2 = \sqrt[3]{A_2 a_2},$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A = b_2^3 - 3b_1^2 b_2, \quad (2.74a)$$

$$B = -b_1^3 + 3b_2^2 b_1, \quad (2.74b)$$

despejando b_1 de (2.74a)

$$b_1 = \pm \sqrt{\frac{b_2^2}{3} - \frac{A}{3b_2}} \quad (2.75)$$

y sustituyendo en (2.74b) se tiene

$$3b_2^2 \sqrt{\frac{b_2^2}{3} - \frac{A}{3b_2}} - \left(\frac{b_2^2}{3} - \frac{A}{3b_2} \right)^{\frac{3}{2}} = B. \quad (2.76)$$

Esta última ecuación no es posible resolverla por un método analítico, por lo que se requiere usar un método numérico, para lo que proponemos usar nuevamente el método de Brent-Deker[41]. Para encontrar el valor correcto de b_2 es preciso hacer las siguientes observaciones: b_1 será negativo, pues $a_1 = \cos \theta$ y se espera que las rotaciones azimutales sean pequeñas, entonces $\theta < 1$ y $a_1 > 0$, por otro lado, la constante A_2 deberá tener el mismo signo que la constante A_2 del diseño, para que a un polinomio par se le reste uno impar, entonces $A_2^{1/3}$ será negativo y $b_1 < 0$.

Para aplicar el algoritmo de Brent-Deker es necesario que el dominio y la imagen de la función sean reales en el intervalo en el que se buscan sus raíces. En el caso de la ecuación (2.76) la reescribimos como

$$g(b_2) = B \quad (2.77)$$

entonces la función $g(b_2)$ tendrá una imagen imaginaria cuando el radicando de la raíz sea negativo, por lo tanto,

$$0 < \frac{b_2^2}{3} < \frac{A}{3b_2}.$$

2. DISEÑO DE PANTALLAS NULAS

Como $b_2^2 > 0$ si $A > 0$, entonces $b_2 > 0$, y

$$0 < b_2^3 < A$$

entonces b_2 debe estar en el intervalo $(0, \sqrt[3]{A})$, para que la imagen de g sea imaginaria. Como b_2 debe poder tomar valores alrededor de cero, que sean pequeños pues depende de $\sin \theta$ y < 1 , el intervalo en que se debe buscar la raíz de (2.76) es en un intervalo negativo como se muestra en la figura 2.15, análogamente, si $A < 0$ entonces b_2 proporcionará una imagen imaginaria de $g(b_2)$ en $(-\sqrt[3]{|A|}, 0)$ y la solución de la ecuación (2.76) se debe buscar en el lado positivo de las abscisas ver figura 2.15.

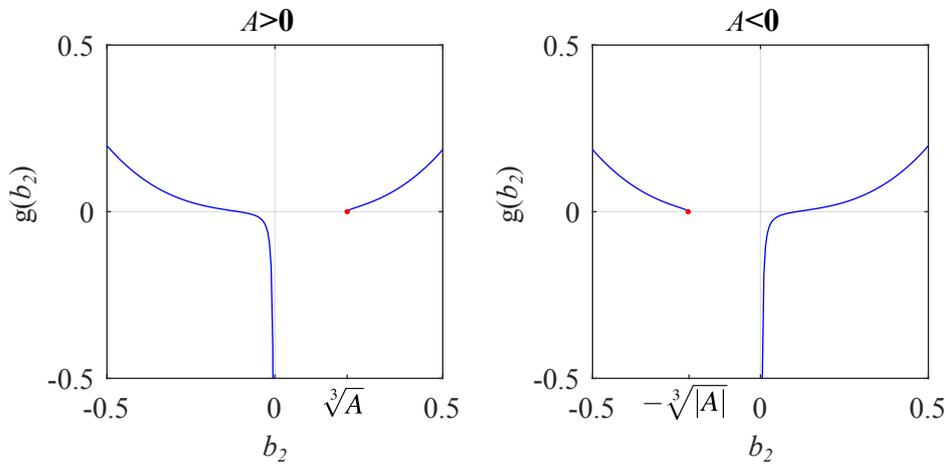


Figura 2.15: Comportamiento de $g(b_2)$ dependiendo del valor del coeficiente A .

Ahora con lo anterior es posible encontrar b_2 y posteriormente b_1 , con ambos es posible encontrar $a_1 a_2$ y A_2 , para ello notemos que

$$\sqrt[3]{A_2} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}. \quad (2.78)$$

Dado que $a_1 = \cos \theta$ y $a_2 = \sin \theta$ se cumple la ecuación

$$a_1^2 + a_2^2 = 1. \quad (2.79)$$

Despejando a a_2 de (2.78) y sustituyendo en (2.79), se llega a

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2}}, \quad (2.80)$$

entonces

$$A_2 = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^3 \quad (2.81)$$

y

$$a_2 = \frac{b_2}{\sqrt[3]{A_2}}. \quad (2.82)$$

Para encontrar A_1 basta sumar (2.73e) y (2.73e) para llegar a

$$A_1 = \frac{E + F}{4}. \quad (2.83)$$

Conociendo A_1 se puede tomar la ecuación (2.73g) y ya sea (2.73e) o (2.73e) para encontrar x_0 y y_0 , en este caso se presenta la solución usando (2.73e) y (2.73g), con la cual se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2a_1a_2 & (a_2^2 - a_1^2) \\ (a_2^2 - a_1^2) & -2a_1a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E-2A_1}{3A_2} \\ \frac{G}{6A_2} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

que tiene por solución

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6A_2[4a_1a_2(a_2^2 - a_1^2)^2]} \begin{pmatrix} -4a_1a_2(E - 2A_1) - (a_2^2 - a_1^2)G \\ 2a_1a_2G - 2(a_2^2 - a_1^2)(E - 2A_1) \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Ahora es demasiado simple encontrar los valores de T_x , T_y y z_0 , despejando de las ecuaciones (2.73h), (2.73i) y (2.73j) respectivamente, y sustituyendo los valores de a_1 , a_2 , A_1 , A_2 , x_0 y y_0 en cada una de las ecuaciones respectivas, obteniendo las representaciones explícitas como:

$$T_x = H - 3A_2[y_0^2a_2 + x_0(2y_0a_1 - x_0a_2)] - 4A_1(y_0a_2 - x_0a_1), \quad (2.86a)$$

$$T_y = I - 3A_2[x_0(2y_0a_2 + x_0a_1) - y_0^2a_1] + 4A_1(y_0a_1 + x_0a_1), \quad (2.86b)$$

$$z_0 = J - A_2y_0^3 - A_1(x_0^2 + y_0^2) + 3A_2x_0^2y_0 + A_1 \quad (2.86c)$$

Ahora sería posible encontrar los valores de tilt y los descentramientos (x_0, y_0, z_0) , los valores de la rotación y las constantes que multiplican a los polinomios A_1 y A_2 .

2.6.1 Aproximación de las Normales en la Superficie

Como ya se dijo en la sección 2.5.1 para aproximar las normales, es necesario aproximar los puntos sobre la superficie intersecando las ecuaciones (2.60) con la ecuación de la superficie de referencia f y en cada iteración con la superficie ajustada a la nube de puntos f_a , esto se puede lograr por métodos numéricos o por mediante una solución analítica si el problema lo permite, en el caso de la superficie M1-CNC es posible deducir una solución analítica de la intersección de las ecuaciones de la recta del rayo reflejado (2.60) con la superficie de ajuste (2.72), obteniendo:

$$\delta z^3 + (3b\delta + \varepsilon)z^2 + (3b^2\delta + 2b\varepsilon + \zeta - 1)z + (b^3\delta + b^2\varepsilon + b\zeta + J) = 0, \quad (2.87)$$

donde solo se ha sustituido las ecuaciones de la recta en la ecuación de la superficie de ajuste y agrupado los términos respecto a las potencia de z con

$$\delta = A\beta^3 + B\gamma^3 + C\beta^2\gamma + D\beta\gamma^2, \quad (2.88a)$$

$$\varepsilon = E\beta^2 + F\gamma^2 + G\beta\gamma, \quad (2.88b)$$

$$\zeta = H\beta + I\gamma, \quad (2.88c)$$

y

$$\beta = -\frac{x_c}{a}, \quad (2.89a)$$

$$\gamma = \frac{-y_c}{a}. \quad (2.89b)$$

Se pueden encontrar las raíces del polinomio en la ecuación (2.87) de forma analítica simplemente aplicando el método de Cardano [48] y eligiendo la raíz que este más próxima al rango de sagitas de la superficie que esperamos encontrar.

Esta sección se tienen todos los elementos teóricos necesarios para construir una pantalla nula para una superficie convexa sin simetría de revolución y su posterior reconstrucción y recuperación de la forma de la superficie bajo prueba. En el siguiente capítulo se describirá el desarrollo experimental de la prueba usando la superficie M1-CNC como superficie bajo prueba.

Capítulo 3

Prueba Experimental y Resultados

En este capítulo se describirá el montaje del dispositivo experimental, así como los resultados obtenidos y algunos aspectos importantes del tratamiento de la imagen capturada con el sensor, como lo son la corrección de distorsión y la binarización de la imagen.

3.1 Patrón de Referencia de la Pantalla Nula

El patrón de diseño de la pantalla nula es un arreglo, que consta de 492 discos acomodados de forma radial en doce circunferencias de radios diferentes, de forma que la densidad de discos sea uniforme, cada disco tiene un diámetro de 0.04mm, como se muestra en la figura 3.1. El patrón de diseño tiene dos ejes de simetría ortogonales, que permiten una alineación más rápida del arreglo experimental, y el radio de la circunferencia más pequeña es $r_1 = 0.1\text{mm}$ y el de la circunferencia más grande es de $r_2 = 1.65\text{mm}$. La forma en que se diseñó el patrón es la siguiente:

1. Se toma cada arco de circunferencia de 0 a $\pi/2$ y se divide entre la distancia que existe entre los radios de dos circunferencias contiguas, en este caso un doceavo de $(r_2 - r_1)$.
2. Este número x dado por la división se redondea al entero más cercano n . Cada circunferencia es entonces dividida entre $4n$, para conocer la separación angular de cada centro del disco, que será de $\pi/2n$.

De esta forma se podrá asegurar que la distancia que existe entre 2 puntos en una circunferencia del patrón de discos está próxima a la distancia que existe entre 2 radios

3. PRUEBA EXPERIMENTAL Y RESULTADOS

de dos circunferencias contiguas, y que los puntos estarán esparcidos con una densidad próxima a una densidad uniforme.

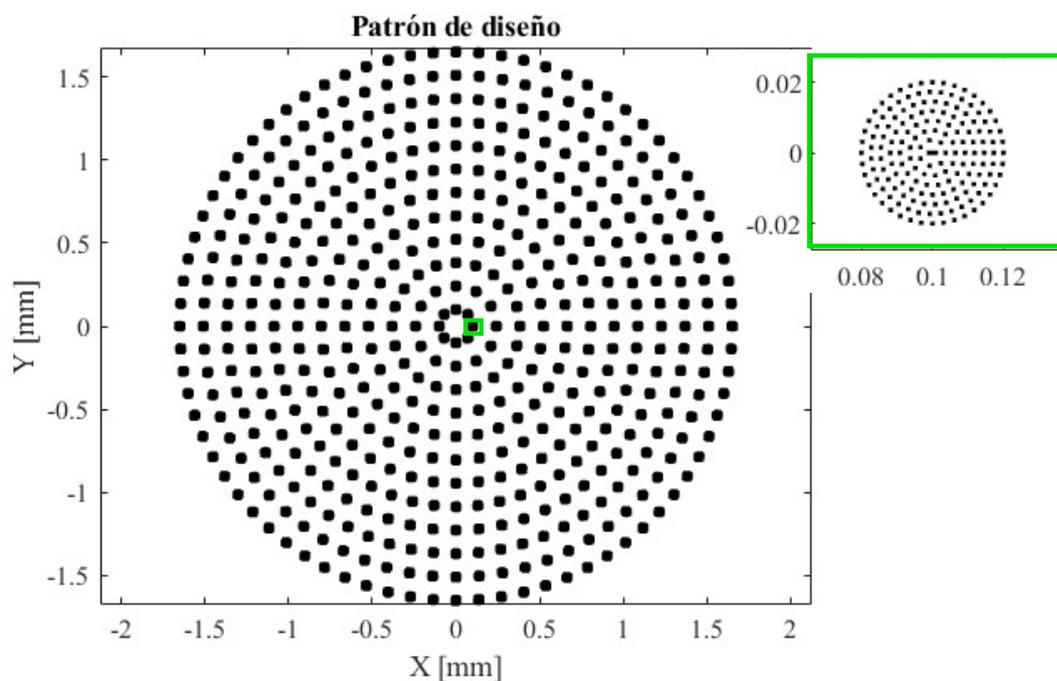


Figura 3.1: Arreglo de puntos usado para construir la pantalla nula. Como las ecuaciones para construir una pantalla nula se dedujeron para cualquier punto en el patrón, cada disco está formado por un arreglo radial de puntos de densidad uniforme.

3.2 Montaje Experimental

Se usó una cámara EO-18112 de Edmund Optics con 18.1 MP(Mega Píxeles) de resolución y un tamaño de píxel de $1.25 \times 1.25 \mu\text{m}$ con un sensor de dispositivo de carga acoplada (en inglés charge-coupled device) conocido también como CCD. Dadas las dimensiones del píxel, cada disco captado durante la prueba en teoría contiene cerca de 800 píxeles.

Tomando en cuenta la tabla 3.1 se puede construir el dispositivo experimental para llevar a cabo la prueba de la superficie, como se muestra en la figura 3.2 y la pantalla

nula que se muestra en la figura 3.3 usando el procedimiento descrito en la sección 2.4 . En adición se usaron para realizar la prueba una mesa de elevación, una base

Parámetro	Símbolo	Valor
Radio del cono	S	25.24mm
Altura del cono	h	280.11mm
Foco de la lente	f_l	16mm
Radio de curvatura de la superficie	r	10.33mm
Diámetro de la superficie	D	50mm
Diámetro del patrón de diseño	d	3.34mm
Distancia lente-imagen	a	17.332mm
Distancia lente-superficie	b	203.15mm

Tabla 3.1: Tabla de valores de los parámetros de construcción de la pantalla nula.

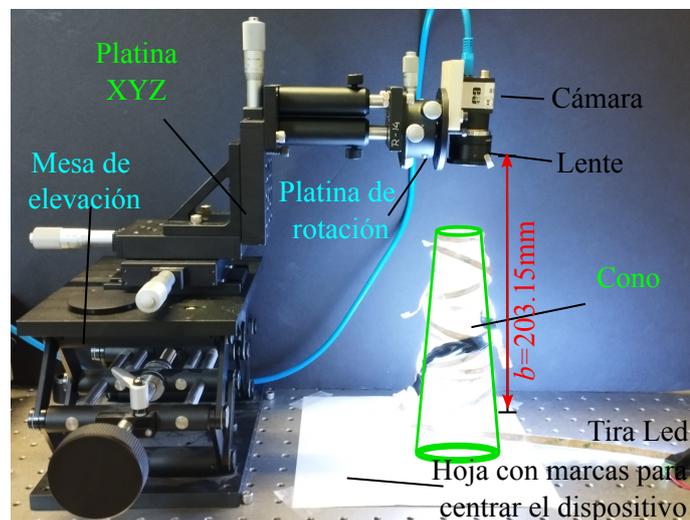


Figura 3.2: Arreglo experimental para la prueba, la superficie se encuentra inmersa totalmente dentro del cono.

o platina XYZ y otra de rotación en 3 ángulos diferentes para alinear la cámara y un cono de ABS (*acrilonitrilo butadieno estireno*) impreso en una impresora 3D previamente diseñado con las dimensiones idóneas de acuerdo con el Apéndice 2.3 para

3. PRUEBA EXPERIMENTAL Y RESULTADOS

llevar a cabo la prueba, que servirá para sostener la pantalla nula cónica impresa en papel, el cono fue cubierto con tiras led para proporcionar una mayor iluminación a la imagen reflejada.

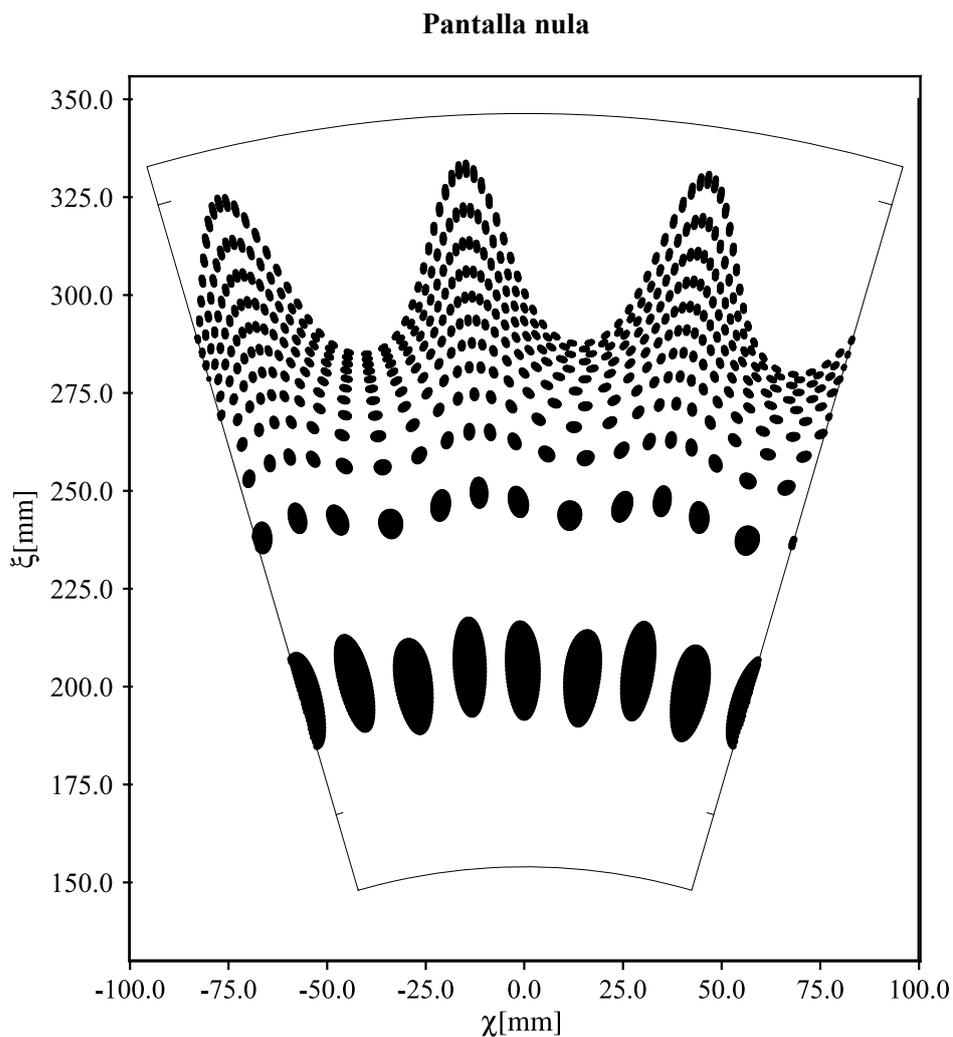


Figura 3.3: Pantalla nula usada para realizar la prueba.

La superficie de prueba, como ya se explicó, es una combinación lineal de dos polinomios de Zernike y además se diseñó un arreglo de círculos concéntricos y ejes de referencia para una alineación más fácil y rápida de los dispositivos respecto al eje óptico de la lente, como se ve en la figura 3.4(a).

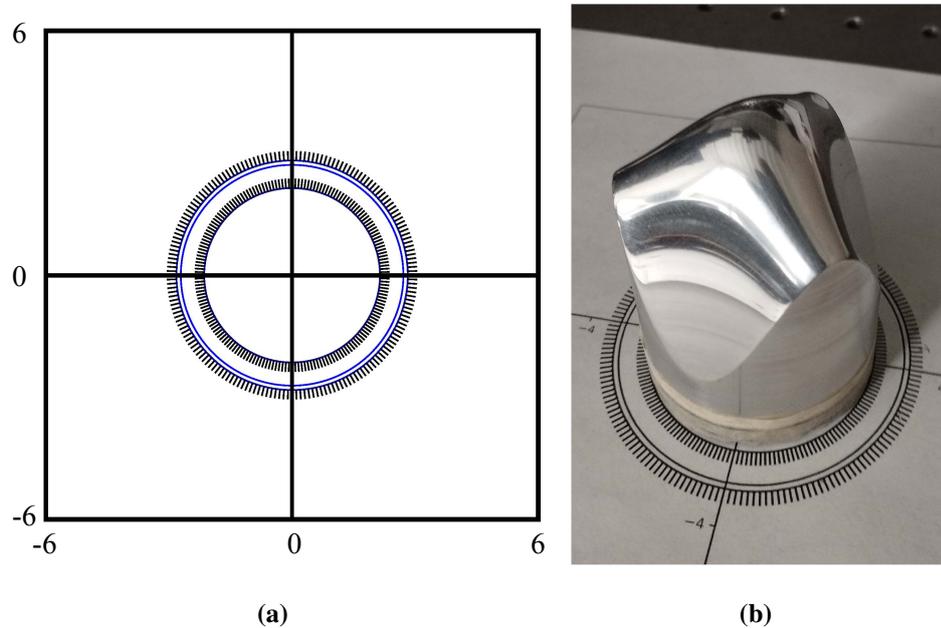


Figura 3.4: Hoja de referencia para centrar el dispositivo en (a) y superficie de prueba en (b).

3.3 Cálculo de los Centroides

Una vez construido el dispositivo experimental, la imagen del reflejada por la superficie de los puntos que conforman las manchas negras en la pantalla nula fue capturada en el CCD, la imagen fue tomada en escala de grises para agilizar el tratamiento futuro, ver figura 3.5(a). Posteriormente se realizó sobre esta un proceso de binarización, para contrastar los píxeles que forman parte del reflejo de las manchas de los que no, como se muestra en la figura 3.5(b).

El proceso de binarización se realizó por secciones, las cuales son declaradas manualmente, usando la herramienta umbral del programa GIMP (programa de edición de imágenes digitales), posteriormente se usa un programa realizado en Matlab para discriminar las manchas de píxeles que no provengan de la pantalla nula (ver Apéndice A), usando como parámetro discriminador el tamaño de la mancha. Finalmente el mismo programa de Matlab calcula el centroide de cada mancha de píxeles usando la

3. PRUEBA EXPERIMENTAL Y RESULTADOS

expresión para el centro geométrico de un objeto 2D que es

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{L} \sum_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}, \quad (3.1)$$

donde L corresponde al número total de píxeles en cada mancha y $\mathbf{r}_{i,j}$ a la posición de cada píxel, e i, j hace referencia precisamente a la posición que tiene cada píxel en la columna i y la fila j .

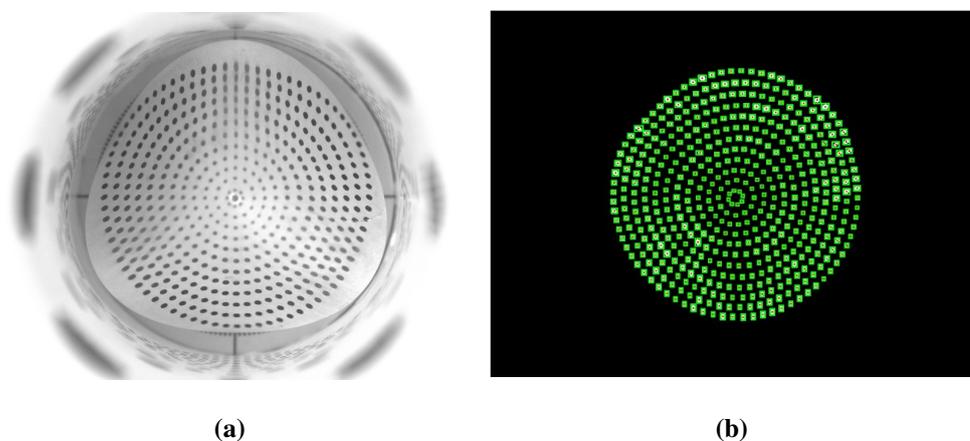


Figura 3.5: Imagen capturada por el CCD en (a) e imagen binarizada con los centroides de cada mancha en (b).

3.4 Corrección de Distorsión

De todas las aberraciones ópticas de la lente, la distorsión es la que más influirá en nuestros resultados, ya que la distorsión moverá la posición del centroide de una mancha alejándola del eje óptico o acercándola, dependiendo del tipo de distorsión que genere la lente 3.6.

Existen varios modelos para describir la distorsión en lentes, en este trabajo se limitará a usar un modelo polinomial de tercer grado para describir la distorsión [44].

El modelo que usaremos establece que para una lente que presenta distorsión la distancia de un punto imagen al eje óptico ρ_d , queda descrita por:

$$\rho_d = \rho_i + E\rho_o^3, \quad (3.2)$$

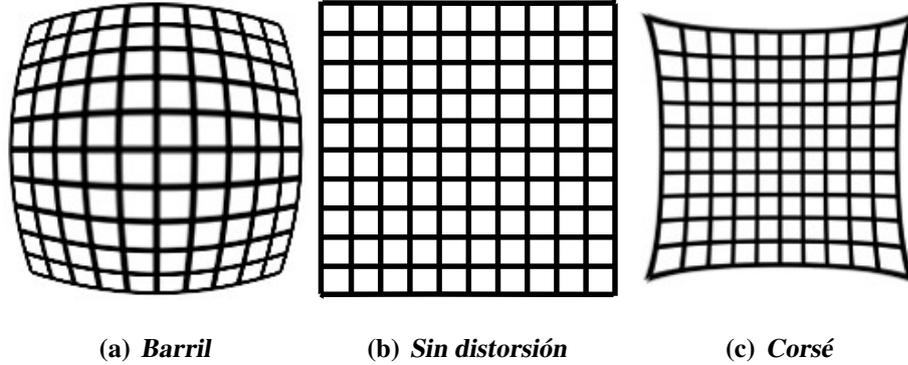


Figura 3.6: Tipos de distorsión

donde ρ_i es la distancia ideal para una lente sin distorsión del punto imagen, E es el coeficiente de distorsión y ρ_o es la distancia del punto objeto al eje óptico.

La relación de la amplificación transversal con las distancias del eje óptico hacia el punto imagen y el punto objeto es

$$M_T = \frac{\rho_i}{\rho_o}. \quad (3.3)$$

Despejando ρ_i y sustituyéndola en (3.2), tenemos

$$\rho_d(\rho_o) = M_T \rho_o + E \rho_o^3. \quad (3.4)$$

Se puede obtener una expresión similar para ρ_o como función de ρ_d , proponiendo que la regla de correspondencia sea:

$$\rho_o(\rho_d) = A \rho_d^2 + B \rho_d + C \rho_d^3. \quad (3.5)$$

Si se sustituye (3.5) en (3.4) y se agrupan términos semejantes,

$$\rho_d = AM_T \rho_d + BM_T \rho_d^2 + (CM_T + A^3 E) \rho_d^3. \quad (3.6)$$

de donde se obtiene que

$$A = \frac{1}{M_T}, \quad (3.7)$$

$$B = 0 \quad (3.8)$$

y

$$C = -\frac{E}{M_T^4}. \quad (3.9)$$

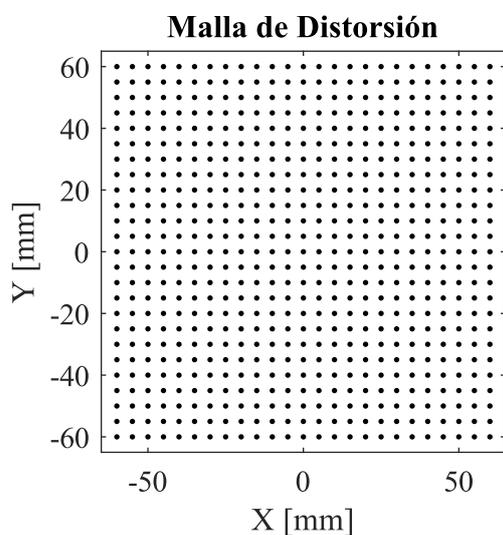
3. PRUEBA EXPERIMENTAL Y RESULTADOS

Si se sustituye A , B y C en (3.5) se tiene

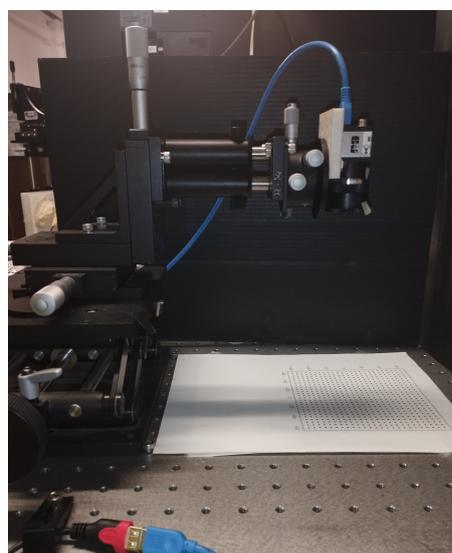
$$\rho_o = \frac{\rho_d}{M_T} - \frac{E}{M_T^4} \rho_d^3. \quad (3.10)$$

Con esta última ecuación es posible corregir la distorsión de una lente ajustando los valores que provengan de una imagen con distorsión ρ_d a los valores de la imagen de la cual provienen ρ_o , de esta forma es posible encontrar la amplificación transversal M_T y el coeficiente de Distorsión E .

Para corregir la distorsión de la lente usada en el dispositivo experimental, previamente antes de realizar la prueba se enfocó la lente con el diafragma abierto totalmente a una distancia de 208mm a la cual se estimó que se formarían la imagen de los centroides de las discos más próximos al eje óptico, por la superficie de prueba, posteriormente se capturó una imagen de un arreglo de discos acomodados sobre los vértices de una malla cuadrada como se muestra en la figura 3.7, donde cada vértice tiene una separación de 5mm y cada disco un radio de 0.4mm.



(a)



(b)

Figura 3.7: Arreglo cuadrado usado para corregir la distorsión en (a) y arreglo experimental en (b).

Una imagen de la malla cuadrada es capturada con la cámara, posteriormente es binarizada y se calcula el centroide de cada mancha. Con la ecuación (3.10) y los datos

de los centroides tanto de los discos en la malla cuadrada como de la imagen de esta, se realiza un ajuste por mínimos cuadrados usando la función *nlinfit* de Matlab y son encontrados los valores de M_T y E , el proceso es representado en la figura 3.8.

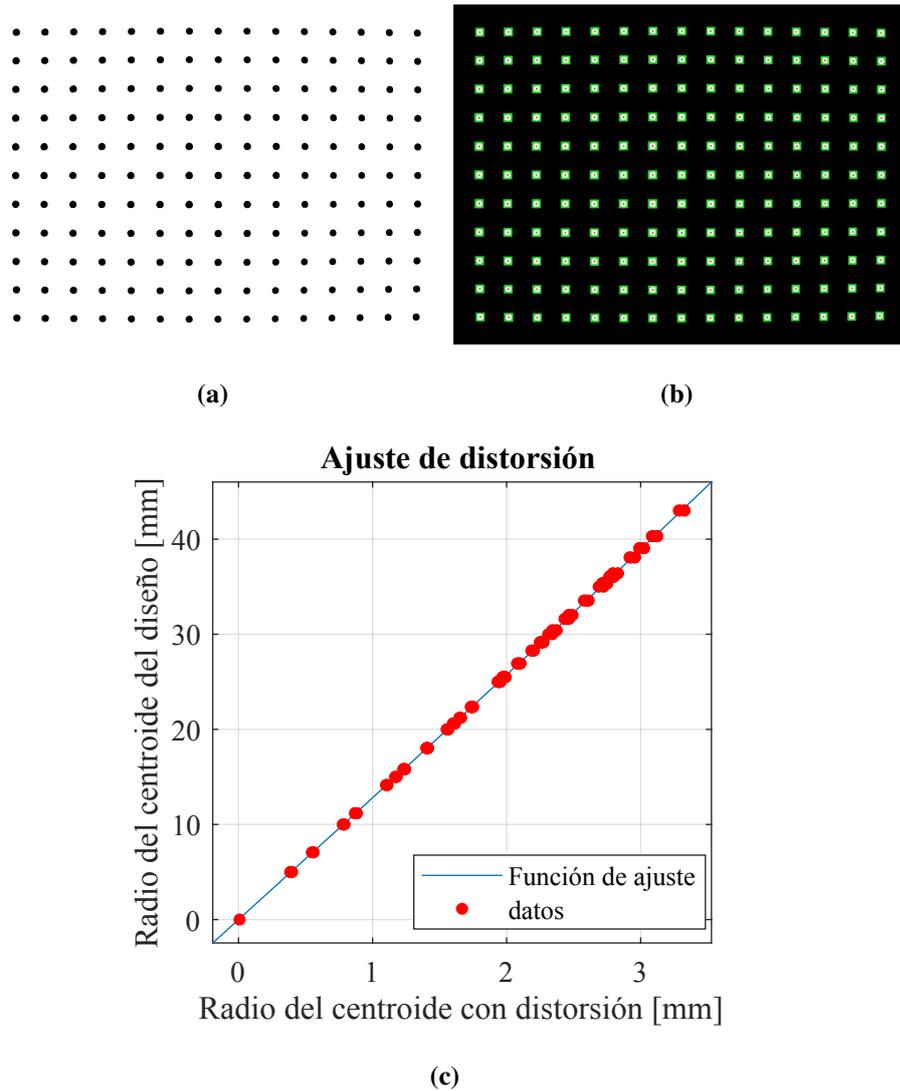


Figura 3.8: Imagen capturada con un CCD de la malla de distorsión (a), proceso de binarización de la imagen (b) y gráfica del ajuste de la ecuación (3.10).

Los valores de la amplitud transversal y el coeficiente de distorsión son presentados en la tabla 3.2, y la corrección de la posición de los centroides de la figura 3.5(a) capturada en la prueba se presentan en la figura 3.9.

3. PRUEBA EXPERIMENTAL Y RESULTADOS

Parámetro	Símbolo	Valor
Amplitud transversal	M_T	0.078205
Coefficiente de distorsión	E	-7.6356×10^{-7} [mm ⁻²]

Tabla 3.2: Tabla con los valores de M_T y E al corregir la distorsión.

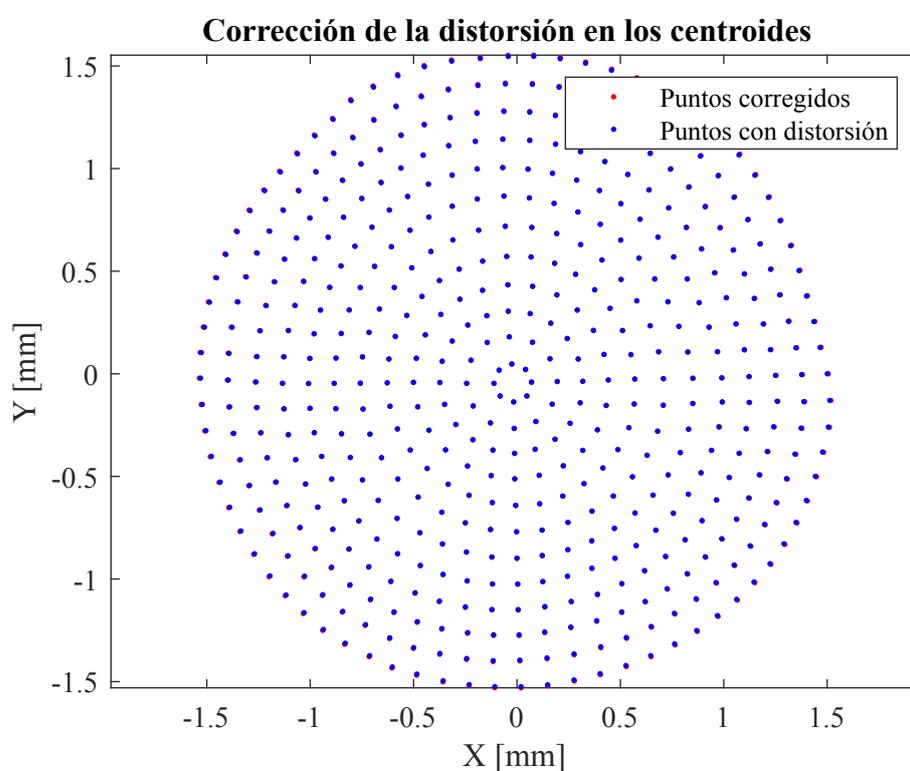


Figura 3.9: Comparación de los centroides obtenidos en la prueba y su correspondiente corrección de posición hecha con el ajuste de distorsión.

En la figura 3.9 se aprecia que el ajuste por distorsión, para la lente usada durante la prueba, tiene un grado de distorsión muy pequeño, esto mismo se puede ver en el valor de E en la tabla 3.2, el cual es relativamente pequeño.

Con la corrección a la distorsión de la imagen capturada por el CCD durante la prueba se concluye este Capítulo, el cual estuvo centrado en el montaje experimental y la

obtención de los datos arrojados por la prueba, en el Capítulo 4 se presenta el análisis y tratamiento de los datos y resultados obtenidos en este Capítulo.

Capítulo 4

Análisis de Resultados

Una vez que se obtuvieron las posiciones de los centroides en la CCD, corregidas, se realizó la integración numérica, por lo que se definieron los caminos de integración. Primero se ordenan los centroides capturados por la CCD en una lista, de tal forma que correspondan con los centroides de diseño, para que pueda existir una relación de correspondencia con los centroides de las “manchas” de la pantalla nula de los que provienen (figura 4.1).

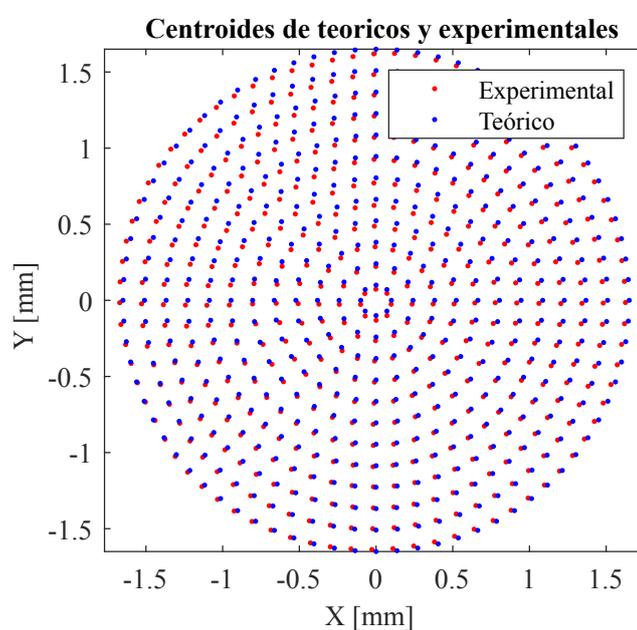


Figura 4.1: Centroides teóricos sobre la CCD, con sus respectivos centroides experimentales.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para definir los caminos de integración se estudia la gráfica de centroides como un “grafo” o “gráfica”, relativo a la rama de la teoría de gráficas, designando cada par ordenado $P_c = (x_c, y_c)$ del centroide como un nodo o arista y la distancia (medida en la métrica euclidiana) que existe entre este con los 5 nodos (centroides) más cercanos como sus aristas, que lo unen a estos 5 nodos o vértices. De esta forma cada nodo está conectado con los cinco nodos más cercanos, siempre que solo los 2 nodos más cercanos con un radio similar se encuentren contenidos dentro de estos 5 nodos más cercanos, así cada nodo solo tendrá dos conexiones con nodos de radio similar, los cuales serán los 2 nodos o centroides que estén adyacentes a este ver figura 4.2.

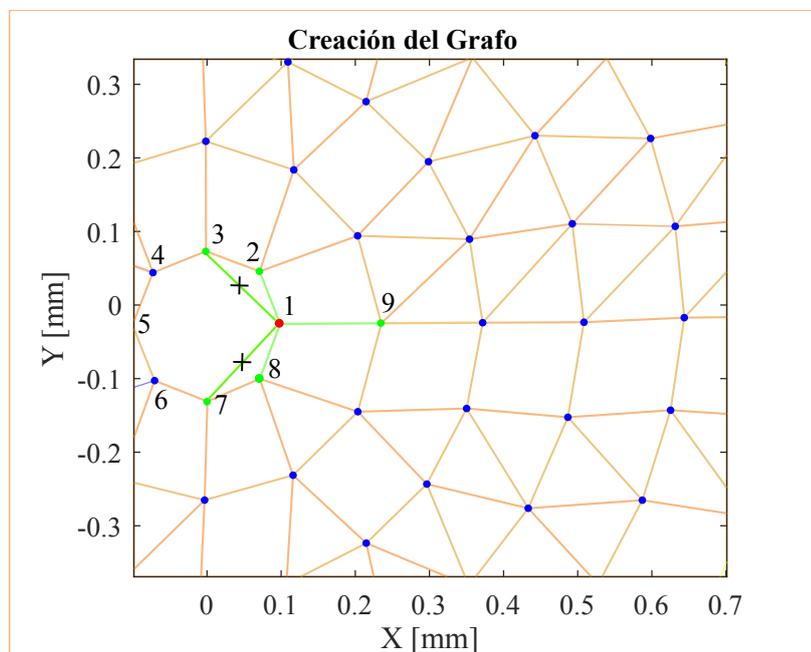


Figura 4.2: Los nodos más cercanos al nodo 1 son 2, 3, 7, 8 y 9, pero la conexión de 1 con 3 y 7 no es tomada en cuenta porque 1 solo puede estar conectado con los 2 nodos de radio similar más cercanos. .

Finalmente, una vez que se ha construido el grafo (para esto hace uso de la función *graph* de Matlab) se calcula el camino más corto C_i de cada uno de los centroides o nodos al primero, el cual es tomado como el más cercano al origen y al eje X, dicho cálculo se hace empleando la función *shortestpathtree* de Matlab el cual usa los algoritmos de *Dijkstra* y *Bellman–Ford* [49]. Cada camino C_i es un conjunto ordenado de los nodos, el cual representa un camino para realizar la integral numérica. Los caminos C_i se muestran gráficamente en la figura 4.3 aunque ciertamente estos caminos se definie-

ron para los puntos sobre la CCD es fácil trasladarlos a los puntos P_s calculados sobre la superficie, siempre que exista una relación de correspondencia entre ellos.

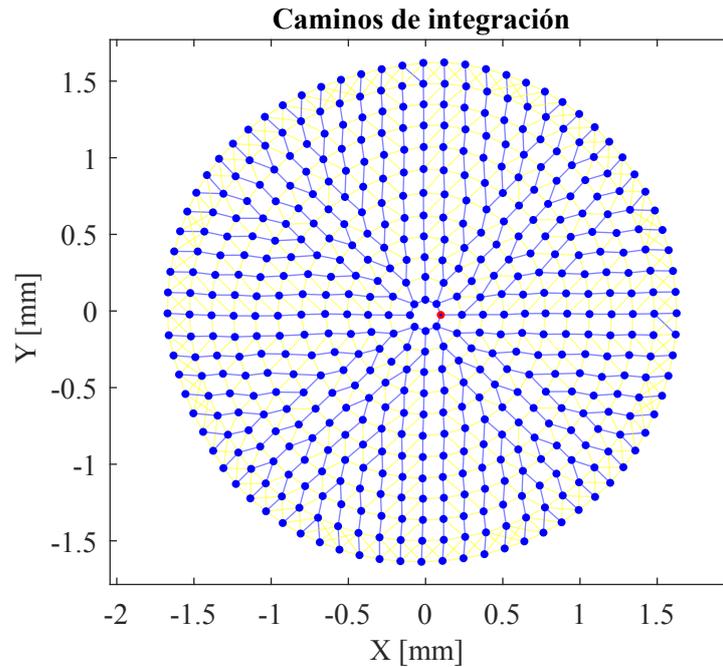


Figura 4.3: Caminos de integración usados para reconstruir la superficie en rojo se muestra el punto inicial de todos los caminos de integración.

El método iterativo que emplea a la integración numérica de la ecuación (2.56), el ajuste de la superficie a la ecuación (2.72), fue realizado y se obtuvieron los valores que describen a la superficie bajo prueba como se muestran en la tabla 4.1, los valores recuperados de las constantes A_1 y A_2 difieren de los teóricos o de diseño 0.48% y 6.14% respectivamente. Una representación gráfica del ajuste de la superficie a la nube de puntos se muestra en la figura 4.4. El criterio de convergencia usado fue que los valores obtenidos de A_1 y A_2 no sobrepasarán el 1% y 2% respectivamente de la iteración anterior, se escogió el resultado de la iteración 3 que es el que más próximo a los valores teóricos y el primero en aparecer.

Los valores estadísticos de las diferencias entre la superficie recuperada de los puntos P_s , respecto a la superficie de diseño, se pueden observar en la tabla 4.2, en donde se hace distinción entre la superficie de mejor ajuste y la forma recuperada con la integral numérica, la misma comparación puede verse gráficamente en los mapas de nivel de la figura 4.5, donde como es de esperarse la mayoría de los puntos se encuentra cerca

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

x_0 [mm]	y_0 [mm]	z_0 [mm]	T_x	T_y	A_1	A_2
0.0559	0.0902	0.1324	0.0000	-0.0227	2.4315^{-2}	-1.1119×10^{-3}

Tabla 4.1: Tabla que muestra los valores de la superficie recuperada con los desplazamientos en x , y , z y las inclinaciones o tilt y los valores correspondientes a las constantes que multiplican a cada polinomio.

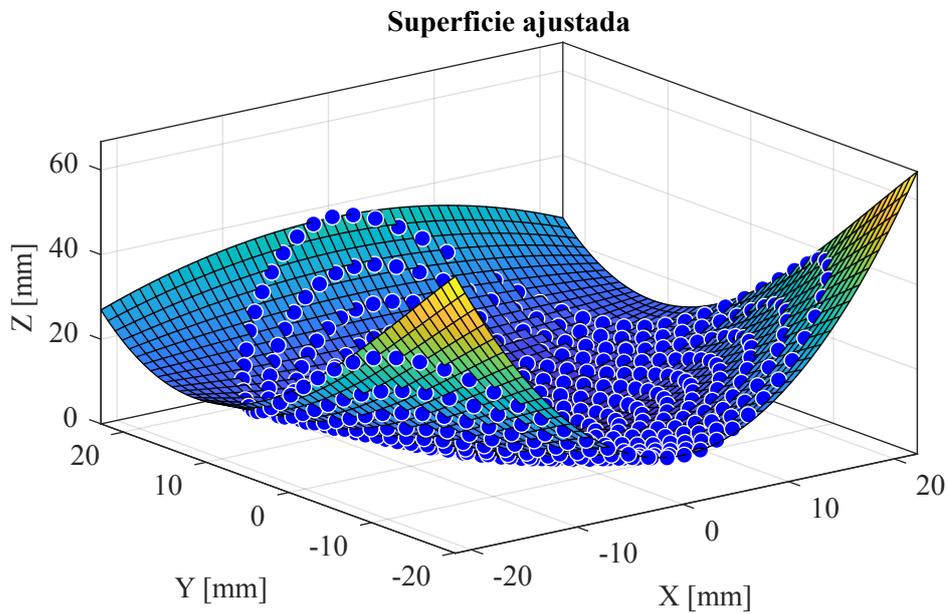


Figura 4.4: Ajuste de los puntos P_S obtenidos con la integración numérica a una superficie como en 2.72.

del valor $\pm RMS$. El valor de la desviación estándar (STD) se calculó respecto al valor RMS , de acuerdo con

$$\sigma_{STD} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (|x_i| - x_{RMS})^2}, \quad (4.1)$$

donde

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}. \quad (4.2)$$

En esta versión de la desviación estándar se busca ver cuanto se alejan los valores de muestra respecto al valor RMS o media cuadrática, es por eso que se usa el valor abso-

luto de cada muestra y el valor de RMS en lugar del promedio.

	RMS [mm]	%	STD [mm]	%	PV [mm]	%
Superficie Ajustada	0.1967	0.53	0.1800	0.52	1.3685	3.71
Integral Numérica	0.2738	0.74	0.2155	0.70	1.5832	4.30

Tabla 4.2: Tabla con los valores estadísticos de la superficie recuperada respecto a la teórica o de diseño.

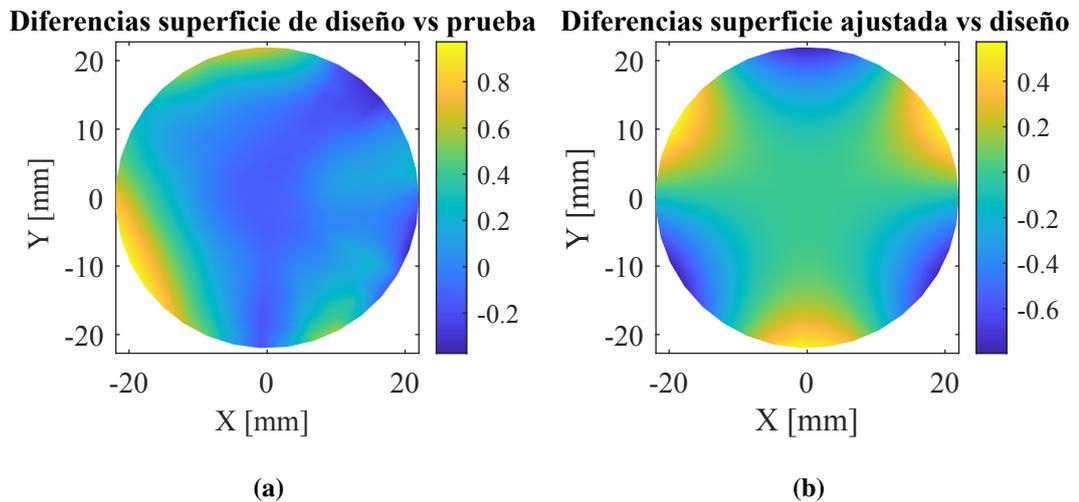


Figura 4.5: Mapas de elevación de la diferencia de sagita.

Como se puede ver las diferencias que existen en ambos casos, en la integral y la superficie ajustada respecto a la superficie de diseño no difieren en más de un 1% en el valor RMS y un 5% para el valor pico valle, pero en los valores de las constantes A_1 y A_2 obtenidos, se puede apreciar una diferencia notable en el caso de A_2 donde el valor recuperado sobrepasa al valor teórico por más de un 6%, estos valores difieren al menos en un 4% de los valores reportados en una prueba similar hecha a la misma superficie en [25].

Las diferencias en RMS , PV halladas en este trabajo y las reportadas en [25] podrían deberse a la superficie ajustada, pues en dicho trabajo se ajustaron los primeros 15 polinomios de Zernike a la nube de puntos obtenida, mientras que en este trabajo solo se

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

ajustaron 9 parámetros incluidos los valores de A_1 y A_2 , también de forma intuitiva se puede pensar que debido a que la superficie es muy rápida (cambia su curvatura muy rápido respecto a su diámetro o $f/\# < 1$ con $\#$ el diámetro de la superficie) un pequeño desvío de los centroides en el CCD, puede ocasionar una variación alta relativa al valor real en la sagita de la superficie recuperada, tanto en la superficie mejor ajustada y la nube de puntos recuperada con la integral numérica. Por las observaciones anteriores se propuso realizar algunas simulaciones, descentrando los centroides teóricos sobre el CCD para verificar y observar como varían su valor RMS , $STD PV$, respecto al tipo de descentramiento realizado.

4.1 Simulaciones

Se realizaron cuatro simulaciones diferentes, dos donde se trasladan los centroides respecto del eje óptico en el eje Y y a 45° , una tercera donde los centroides son rotados respecto al eje óptico en $\pm 2^\circ$ y una última donde son escalados, es decir son desplazados en dirección radial. A todas estas transformaciones se les sumó un pequeño desplazamiento aleatorio en los ejes X e Y , de un 5% de la diferencia pico-valle ($PV_c = 0.0799\text{mm}$) que existe entre los centroides sobre la CCD obtenidos experimentalmente y su par teórico.

4.1.1 Traslación en 45°

La traslación en 45° se llevó a cabo en un bucle de 50 simulaciones desplazando cada centroide pasos iguales en un rango de $\pm 2^{-1/2}PV_c$ en la dirección radial. Los resultados se muestran en la figura 4.6 y en la tabla 4.3.

	$RMS[\text{mm}]$	%	$PV[\text{mm}]$	%
Superficie ajustada	0.0855	0.23	0.6105	1.66
Integral numérica	0.1789	0.49	1.4879	4.04

Tabla 4.3: Tabla de los valores estadísticos promedios.

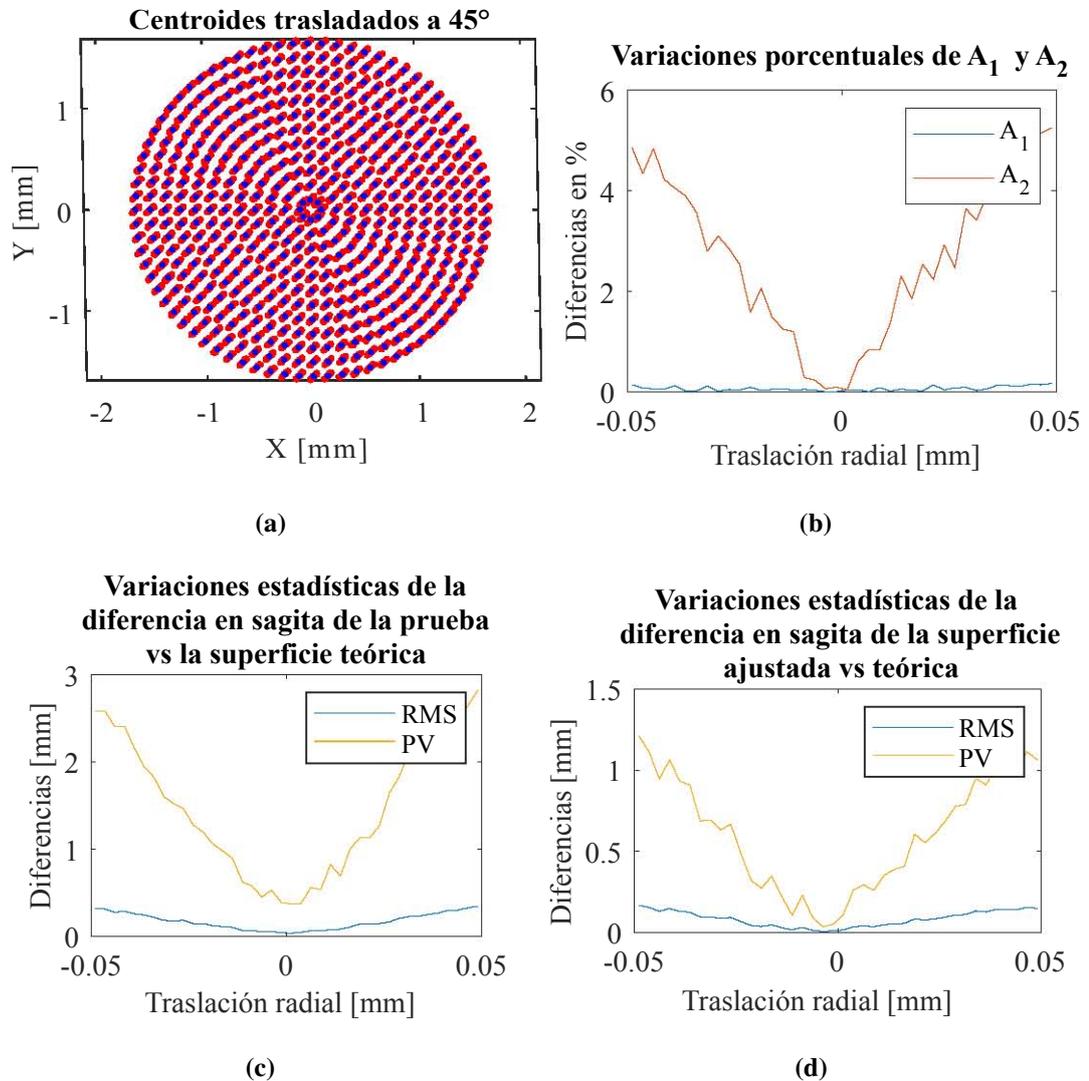


Figura 4.6: Centroides desplazados 45° y sus respectivas diferencias estadísticas.

Se puede apreciar que los valores estadísticos (*RMS* y *PV*) de las simulaciones respecto a las variaciones exhiben un comportamiento de valle alcanzando un valor mínimo cuando están cerca de 0, por otro lado, se observa que tanto los valores estadísticos como de A_1 y A_2 alcanzan valores del orden de los obtenidos experimentalmente, en particular A_2 que sobrepasan el 5% de diferencia respecto del valor teórico (figura 4.6(b)). Se puede concluir entonces que un desplazamiento de los centroides en esta dirección puede afectar severamente los cálculos de A_1 y A_2 .

Se puede apreciar en la tabla 4.3 y las figuras 4.6(c) y 4.6(d) que el valor *RMS* y *PV*

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

de la integral casi duplica a los de la superficie ajustada.

4.1.2 Traslación en el Eje Y

Las simulaciones de la traslación en el eje Y de los centroides se realizaron en el rango de $\pm 2^{-1/2} PV_c$ para 50 puntos igualmente espaciados, para un total de 50 simulaciones, los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.7 y la tabla 4.4.

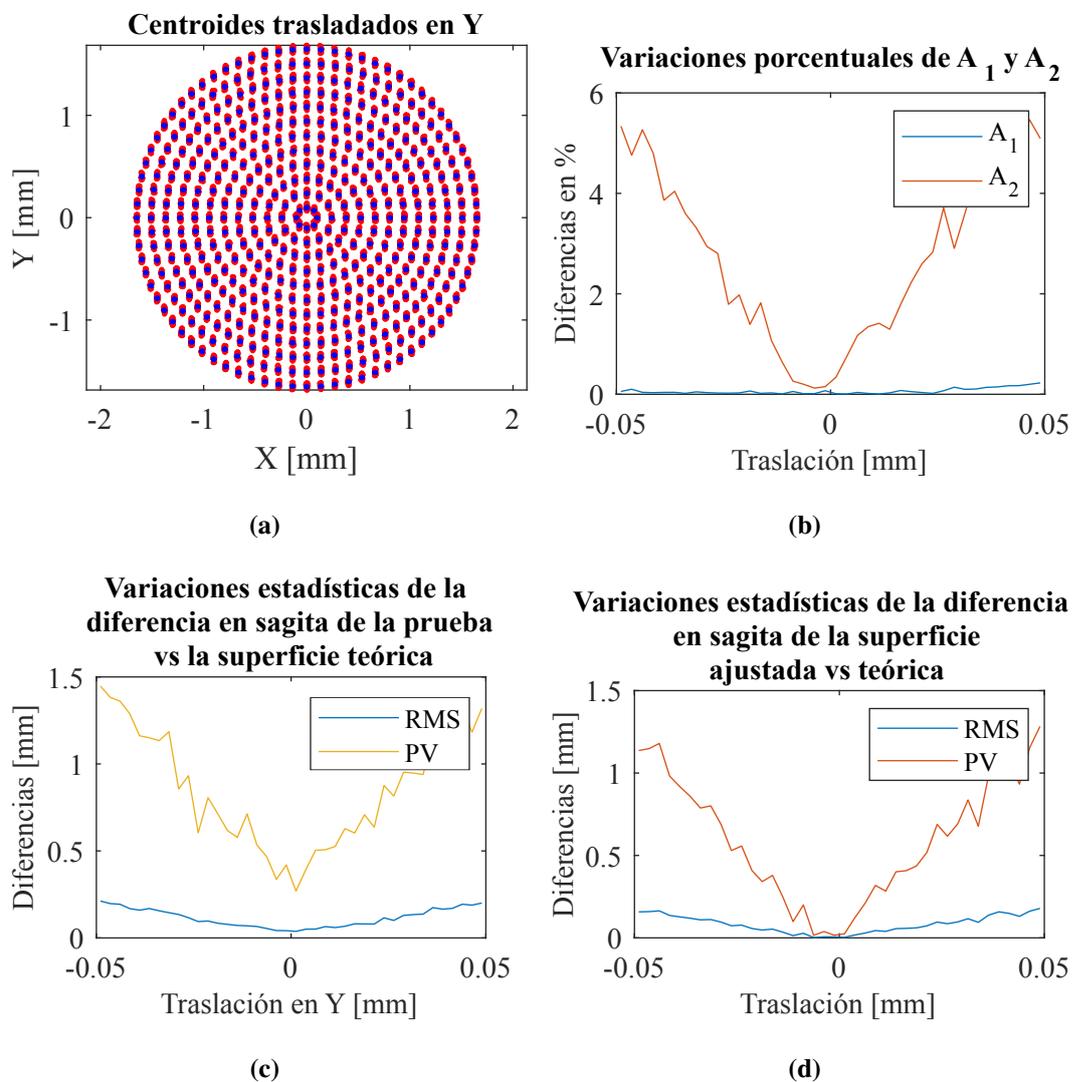


Figura 4.7: Simulación de desplazamientos en el eje Y.

	<i>RMS</i> [mm]	%	<i>PV</i> [mm]	%
Superficie ajustada	0.0875	0.24	0.6267	1.70
Integral numérica	0.1158	0.31	0.8619	2.34

Tabla 4.4: Tabla con los valores estadísticos promedios de la superficie recuperada en la traslación sobre el eje Y .

Se puede apreciar que las diferencias del valor de A_2 respecto a su valor teórico son mayores a un 4 % para las traslaciones máximas y que los valores estadísticos son similares para la superficie ajustada y la sagita de los puntos recuperada con la integración numérica en las gráficas 4.7(c), 4.7(d) y los promedios mostrados en la tabla 4.4.

La traslación en el eje Y fue escogida especialmente sobre la del eje X dado que en la figura 4.1 se aprecia un ligero desplazamiento de los centroides experimentales en el eje Y , podemos observar que los resultados obtenidos en la prueba experimental en las tablas 4.1 y 4.2 que sus valores tanto de los parámetros A_1 y A_2 , así como las diferencias en sagita RMS y PV se aproximan a los simulados con desplazamiento en el eje Y . Para ambos casos (experimental y simulación) la desviación de A_2 ronda alrededor del 6 % y los valores PV sobrepasan 1mm para los casos con mayor desplazamiento.

4.1.3 Rotación de -2° a 2°

Se simuló una ligera rotación de los centroides teóricos en un rango de $\pm 2^\circ$, igual que en los casos anteriores se tomaron 50 ángulos igualmente espaciados dentro del rango escogido, los resultados de las variaciones de las constantes A_1 y A_2 así como los promedios del RMS y PV son mostrados en la tabla 4.5 y la figura 4.8.

	<i>RMS</i> [mm]	%	<i>PV</i> [mm]	%
Superficie ajustada	0.0204	0.05	0.0839	0.22
Integral numérica	0.0994	0.27	0.7948	2.15

Tabla 4.5: Tabla con los valores estadísticos promedios de la superficie recuperada de las rotaciones de -2° a 2° .

Se puede apreciar que las variaciones porcentuales de A_1 y A_2 (figura 4.8(b)) respecto

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

a sus valores teóricos son menores que en los casos anteriores para el caso de A_2 mientras que para el caso de A_1 estos aumentan respecto a los casos anteriores, también en la tabla 4.5 se muestran los valores porcentuales más pequeños que en los dos casos simulados con anterioridad, en los valores de la desviación de RMS como en el PV , tanto para la integral numérica como para la superficie ajustada estos no superan más del 0.5% para el RMS y no más del 1.5% para el PV .

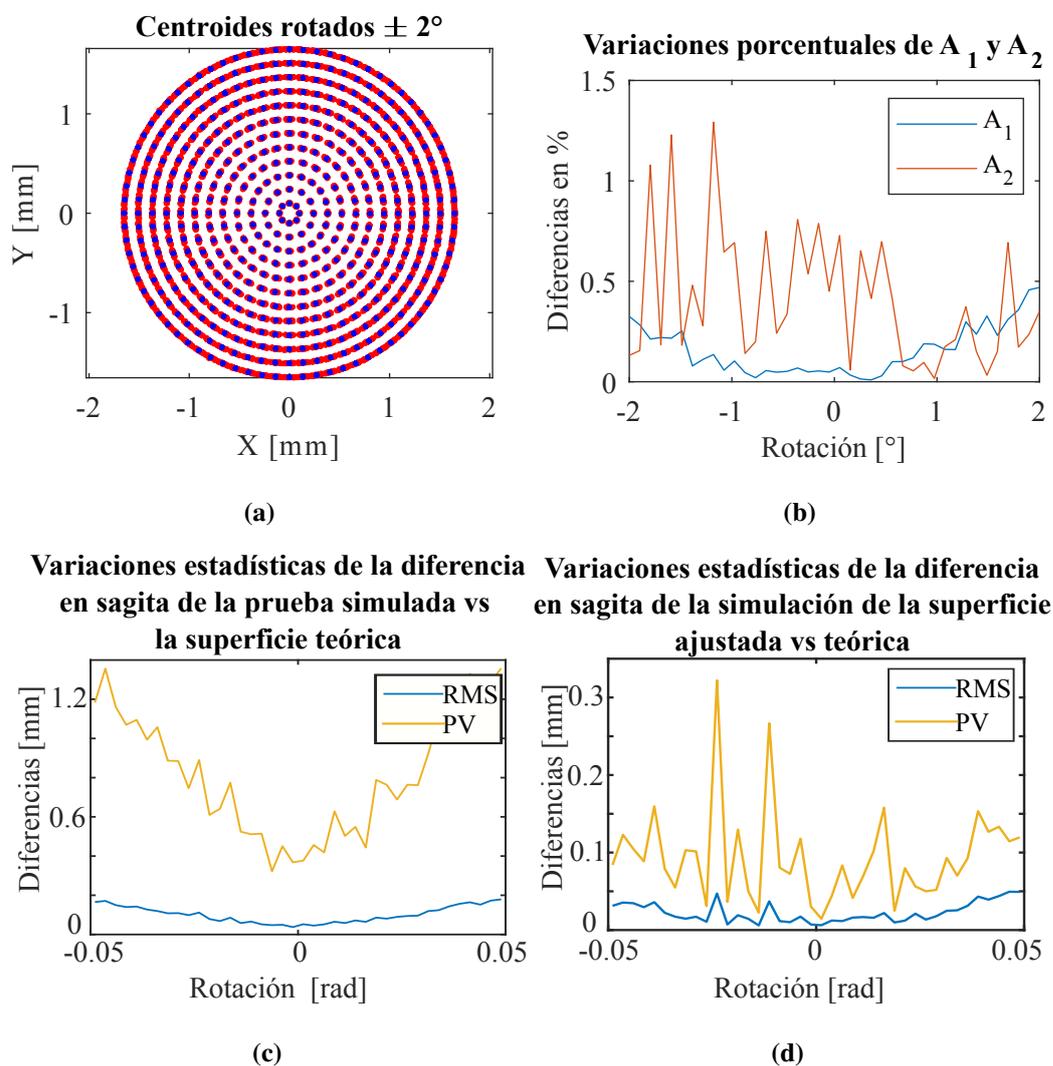


Figura 4.8: Centroides simulados en (a), diferencia porcentual de A_1 y A_2 en (b), variaciones estadísticas de la superficie de diseño con la prueba en (c) y la superficie de mejor ajuste en (d).

Se puede apreciar tanto en la gráfica 4.8(b) y 4.8(d) que a diferencia de los casos anteriormente simulados, el comportamiento de A_2 y PV de la superficie ajustada, no muestra un comportamiento descendente claro conforme se aproximan las rotaciones a 0° , tampoco cuando se ha superado, como en los casos anteriores. Además se puede apreciar que para el caso cuando el ángulo es 0° la diferencia de A_2 respecto a su valor teórico no es el mínimo, esto puede deberse a las pequeñas variaciones hechas aleatoriamente en cada centroide, además de su variación angular. Se concluye entonces que una rotación será el caso que influiría menos en los resultados obtenidos, a pesar de exhibir un comportamiento más aleatorio que el de los casos anteriores.

4.1.4 Escalamiento o Variación Radial

Finalmente, se realizó una simulación desplazando cada centroide radialmente en un rango de $\pm PV$, obteniendo desplazamientos totalmente simétricos, como en los casos anteriores se tomaron un total de 50 puntos igualmente espaciados dentro del rango de desplazamiento, los resultados se muestran en la figura 4.9 y la tabla 4.6.

	$RMS[mm]$	%	$PV[mm]$	%
Superficie ajustada	0.4756	1.29	1.5075	4.09
Integral numérica	0.6194	1.68	1.7838	4.84

Tabla 4.6: Tabla con los valores estadísticos promedios de la superficie recuperada respecto a la teórica o de diseño.

Se puede apreciar que este caso exhibe una mayor desviación porcentual para A_1 y A_2 superando en ambos casos el 5% en los extremos. También se puede apreciar este mismo comportamiento para los valores RMS y PV [figuras 4.9(c), 4.9(d)], superando 1mm y 3mm respectivamente en ambos casos en los valores extremos.

Se puede concluir que este es el caso en que se tendría un mayor error al recuperar la superficie, en caso de que se presentara en una prueba experimental.

Con los resultados obtenidos en los cuatro casos simulados, se puede apreciar que la prueba experimental está dentro de los resultados obtenidos con las simulaciones, pues si bien no presenta un caso en concreto, se puede observar en la figura 4.1 que presenta más de uno de estos.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

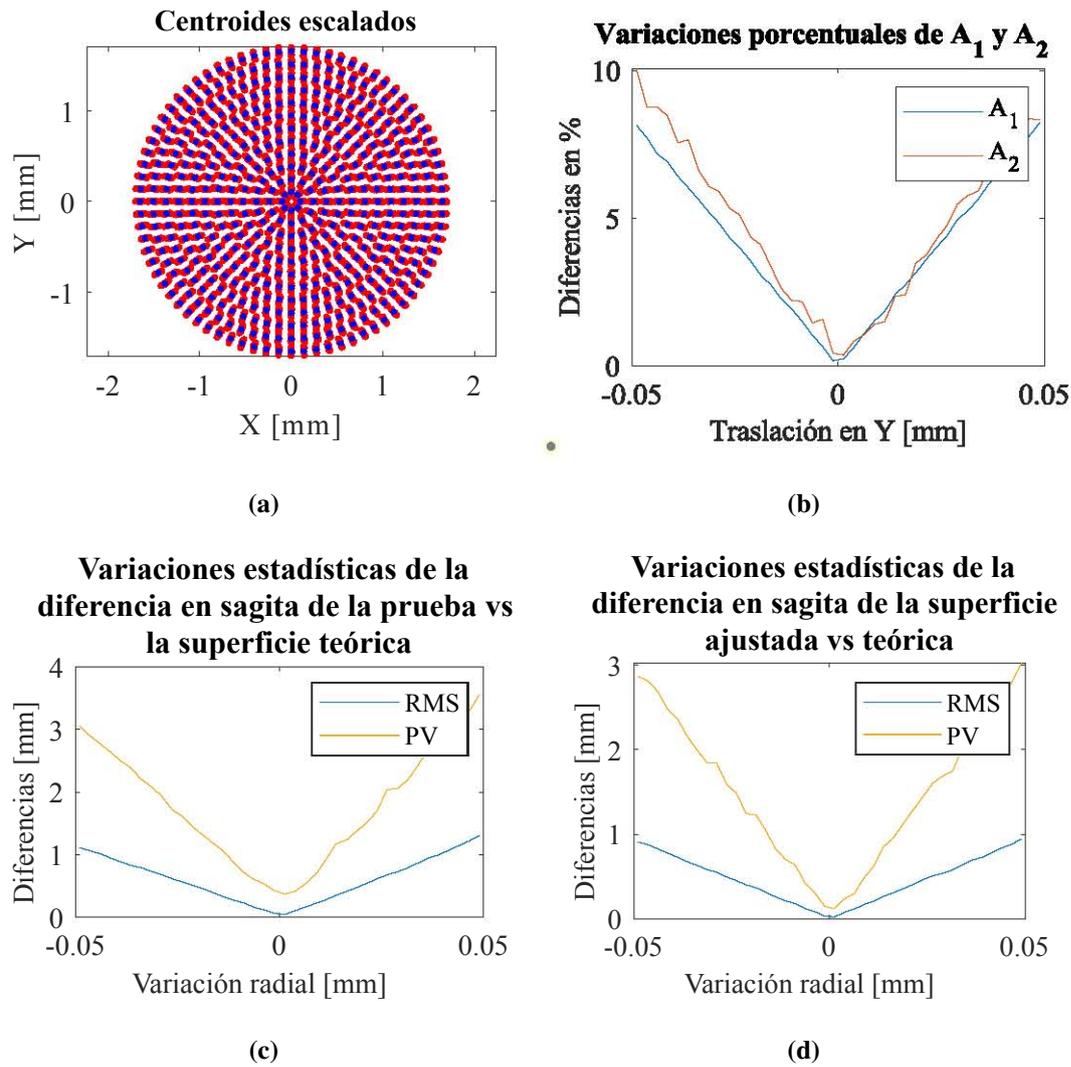


Figura 4.9: Centroides simulados en (a), variaciones porcentuales de A_1 y A_2 en (b), variaciones estadísticas de las diferencias entre la superficie de diseño con la prueba en (c) y la superficie de mejor ajuste en (d).

Conclusiones

Se desarrolló y se explicó de forma general la teoría de las pantallas nulas cónicas para superficies bicónicas, las cuales no presentan simetría de revolución y para superficies que son combinación lineal de polinomios de Zernike, se realizó la prueba de una superficie de Zernike (M1-CNC) por el método de pantallas nulas.

Se propuso un procedimiento para evaluar superficies convexas una vez que es capturada la imagen en un CCD o el plano detector, donde se expone una transformación para ajustar los desalineamientos debidos al mal posicionamiento de la superficie, en caso de que esté desplazada o presente rotación.

Para la prueba realizada sobre la superficie M1, además de obtener una representación teórica de la superficie, también se obtuvo una representación discreta de los puntos sobre la superficie, los cuales no necesariamente deben de estar contenidos en una superficie recuperada experimentalmente.

En el caso de la superficie teórica encontrada en la prueba, los parámetros de esta difieren en 0.48 % y 6.14 % (A_1 y A_2 respectivamente) de los parámetros con los que fue diseñada la superficie, mismos que se usaron para construir la pantalla nula, en tanto que las diferencias de sagita de la superficie ajusta y la teórica difieren en 0.53 % en el valor RMS y un 3.71 % en el valor PV, aunque estos resultados difieren de los reportados en [25] de un 0.36 % para el RMS y 0.66 % de PV, se explica por la cantidad de parámetros ajustados en ambas pruebas, que fueron 9 en este trabajo y 15 en el caso del texto citado. Para los valores obtenidos con la integral numérica se obtuvieron valores RMS de 0.74 % y PV de 4.3 % en la diferencia de sagita respecto la superficie de diseño M1.

Se puede apreciar que en las simulaciones una variación en la rotación o el desplazamiento radial de los centroides en el CCD, que se pueden asociar a errores de alineación y colocación de la superficie afectan severamente los resultados obtenidos durante la prueba, se aprecia como el parámetro A_2 es más susceptible a estos desplazamientos.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los desplazamientos de los centroides pueden ser originados, por desalineaciones en la superficie, en la cámara y/o en la pantalla nula, además de deformaciones propias de la superficie.

Como trabajo futuro se propone desarrollar un procedimiento que permita cuantificar y reducir los errores asociados con los desalineamientos de la pantalla, además de contar con una superficie cónica construida con mayor precisión para llevar a cabo la prueba, dado que en el cono donde fue colocada la pantalla nula eran visibles algunas imperfecciones intrínsecas a la manufactura del cono, lo cual produce errores al probar una superficie rápida.

También se propone desarrollar y revisar el proceso de convergencia en el método iterativo, pues se observó la aparición de múltiples valores convergentes en un conjunto de 100 iteraciones, los cuales se alejaban demasiado de los valores teóricos presentado una sagita de la superficie de no más de 15mm.

Apéndice A

Algunos Programas

PROGRAMA QUE GENERA EL PATRÓN DE DISEÑO

```
1 function [X,Y,Nump] = Uniforme_redondeo_sim(ri ,rs ,n ,c)
2 %Funcion que genera el patron circular uniforme round simetrico
3 %Funcion que genera el patron circular uniforme por secciones
4 %ri %ri radio inferior
5 %rs %rs radio superior
6 %n % numero de radios
7 %c si queremos al 0 como centro puede tener valor 0
   o 1
8 ro=linspace(ri ,rs ,n);
9 %theta=zeros(1,n);
10 L=ceil((pi/2)*ro./(ro(1,2)-ro(1,1)));
11 %theta(1,1)=pi/(2*L);
12 theta=(pi/2) ./L;
13
14 % L=ceil((pi/2)*ro(1,1)/(ro(1,2)-ro(1,1)));
15 % theta(1,1)=pi/(2*L);
16 % theta=(pi/2) ./round(L*ro ./ri);
17 m=ceil(2*pi/theta(1,n));
18 t=zeros(n,m);
19 for j=1:1:m
20 for i=1:1:n
```

A. ALGUNOS PROGRAMAS

```

21     if (j-1)*theta(1,i)<2*pi
22         t(i,j)=(j-1)*theta(1,i);
23     elseif (j-1)*theta(1,i)>=2*pi
24         t(i,j)=NaN;
25     end
26 end
27 end
28 %
29 [Th,R]=meshgrid(t(n,:),ro);           % generamos una matriz con
        los radios
30 x=R.*cos(t);                          % generamos las coordenadas
31 y=R.*sin(t);
32 X=reshape(x',n*m,1);
33 Y=reshape(y',n*m,1);
34 X = X(~isnan(X));
35 Y = Y(~isnan(Y));
36 if c==0
37     X=[0;X];
38     Y=[0;Y];
39 end
40 Nump=size(X);
41 end

```

PROGRAMA QUE GENERA LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y SUS DERIVADAS

```

1  %Funcion que evalua un polinomio de zernike , dado +/-n,m y regresa
        un vector
2  %con sus coeficientes y evalua el valor que le meten
3  function [C,E,CD,ED,Znm,DZnmro,DZnmp,R,DR]=polzernike(n,m,pariedad)
4  %[ matriz de coeficiente , matriz de exponentes , coef de derivada , exp
        de derivada , zernike , funcion R ]
5  %polzerknik(indice n , subindice m, pariedad )
6  %C=zeros(1,n+1);

```

```

7%Generamos los coeficientes y exponentes con la formula de recursion
8if round((n-m)/2)-(n-m)/2==0
9     nmn=(n-m)/2;
10    nm=(n+m)/2;
11for k=0:1:((n-m)/2)
12    C(k+1)=((-1)^k*factorial(n-k))/(factorial(k)*factorial(nm-k)*
        factorial(nmn-k));
13    E(k+1)=n-2*k;
14end
15end
16%generamos los coeficeintos y exponentes de la derivada de R
17CD=E.*C; CD=CD(~(CD==0));
18ED=(E-1);ED=ED(~(ED<0));
19
20%Generamos una funcion de los polinomios radiales
21R=@(ro) 0;
22for i=0:1:nmn
23    R=@(ro ) R(ro)+C(i+1)*ro.^(E(i+1));
24end
25%Generamos una funcion derivada de los polinomios radiales
26[m1,n1]=size(CD);
27DR=@(ro) 0;
28for i=1:1:n1
29    DR=@(ro) DR(ro)+CD(i)*ro.^(ED(i));
30end
31%Generamos la funcion del polinomio de Zernike
32%Generamos una funcion derivada de Z respecto a ro
33%Generamos una funcion derivada de Z respecto a phi 'p'
34if pariedad == 0
35    Znm=@(ro ,p) R(ro).*cos(m*p);
36    DZnmro=@(ro ,p) DR(ro).*cos(m*p);
37    DZnmp=@(ro ,p) -m*R(ro).*sin(m*p);
38elseif pariedad == 1

```

A. ALGUNOS PROGRAMAS

```
39     Znm=@(ro , p) R(ro) .* sin(m*p) ;
40     DZnmro=@(ro , p) DR(ro) .* sin(m*p) ;
41     DZnmp=@(ro , p) m*R(ro) .* cos(m*p) ;
42 end
```

PROGRAMA QUE REALIZA UNA INTEGRAL NUMÉRICA DE LÍNEA SOBRE UN CONJUNTO DE PUNTOS DISCRETOS

```
1  %funcion que realiza la integracion numerica , recibiendo los
   %caminos de integracion
2  %y las normales , y los puntos sobre la superficie
3  function [ xsi , ysi , zsi ]=integral_num_camino (Xs , Ys , Zs , Nx , Ny , Nz , TR , a , b ,
   Xo , Yo)
4  % (Xs , Ys , Zs) = puntos sobre la superficie , (Nx , Ny , Nz) = vector normal , Tr
   % , tupla
5  % que contiene los vectores de los caminos de integracion y Xo y Yo
   % son los
6  % valores de X e Y en la CCD
7  [ ~ , ms ] = size (Xs) ;
8  if ms == 1
9     Xs=Xs' ; Ys=Ys' ; Zs=Zs' ;
10 end
11 [ ~ , mn ] = size (Nx) ;
12 if mn == 1
13     Nx=Nx' ; Ny=Ny' ; Nz=Nz' ;
14 end
15 [ ~ , mo ] = size (Xo) ;
16 if mo == 1
17     Xo=Xo' ; Yo=Yo' ;
18 end
19
20 [ ~ , m ] = size (Xs) ;
21 nx=TR ; ny=TR ; dx=TR ; dy=TR ;
22 for i = 2 : 1 : m
```

```

23  [~, N]=size(TR{i});
24  for j = 1:1:N-1
25      nx{i}(j)=(Nx(TR{i}(j))/Nz(TR{i}(j))+Nx(TR{i}(j+1))/Nz(TR{i}(
          j+1)));
26      dx{i}(j)=(Xs(TR{i}(j+1))-Xs(TR{i}(j)))/2;
27      ny{i}(j)=(Ny(TR{i}(j))/Nz(TR{i}(j))+Ny(TR{i}(j+1))/Nz(TR{i}(
          j+1)));
28      dy{i}(j)=(Ys(TR{i}(j+1))-Ys(TR{i}(j)))/2;
29  end
30 end
31 %metemos la suma.de la integracion numerica.
32 zs=Zs(1)*ones(1,m);
33 %alpha=zeros(1,m);
34 for i=2:1:m
35     [~, N]=size(TR{i});
36     for j=1:1:N-1
37         zs(i)=zs(i)-((nx{i}(j))*dx{i}(j)+(ny{i}(j))*dy{i}(j));
38     end
39 end
40 %Recalculamos los valores de las coordenadas del punto sobre la
          superficie
41 %con el valor de la sagita Zs calculado
42
43 xi=(-(Xo./a).*(zs+b));
44 yi=(-(Yo./a).*(zs+b));
45 Zi=zs;

```

Bibliografía

- [1] R. Diaz-Uribe and M. Campos-Garcia, “Null screen testing of fast convex aspheric surfaces,” *Appl. Opt.*, vol. 39, pp. 2670–2677, 2000. [VII, 3, 11](#)
- [2] G. Häusler and G. Schneider, “Testing optics by experimental ray tracing with a lateral effect photodiode,” *Appl. Opt.*, vol. 27, p. 5160–5164, 1998. [VII](#)
- [3] H. Canabal and J. Alonso, “Automatic wavefront measurement technique using a computer display and a charge-coupled device camera,” *Opt. Eng.*, vol. 41, p. 822–826, 2002. [VII](#)
- [4] J. Burke, A. Pak, S. Höfer, M. Ziebarth, M. Roschani, and J. Beyerer, “Deflectometry for specular surfaces: an overview,” *Advanced Optical Technologies*, vol. 12, 07 2023. [VII, 2, 3, 5](#)
- [5] Q. Hao, “Measurement techniques for aspheric surface parameters,” *Light: Advanced Manufacturing*, vol. 4, no. LAM2022090030, p. 292, 2023. [VII, 2](#)
- [6] *Characters*. blender.org, 2023. [XI, 5, 9](#)
- [7] H. Schwenke, U. Neuschaefer-Rube, T. Pfeifer, and H. Kunzmann, “Optical methods for dimensional metrology in production engineering,” *CIRP Annals*, vol. 51, no. 2, pp. 685–699, 2002. [1](#)
- [8] B. Braunecker, R. Hentschel, and H. Tiziani, *Advanced Optics Using Aspherical Elements*. Bellingham, Washington: SPIE Press, 1ra ed., 2008. [1, 5](#)
- [9] G. Derra, H. Moench, E. Fischer, H. Giese, U. Hechtfisher, G. Heusler, A. Koerber, U. Niemann, F. Noertemann, J. Pollmann-Retsch, and A. Ritz, “Uhp lamp systems for projection applications,” *Journal of Physics D-applied Physics - J PHYS-D-APPL PHYS*, vol. 38, pp. 2995–3010, 2005. [1](#)
- [10] C. Pruss, E. Garbusi, and W. Osten, “Testing aspheres,” *Opt. Photon. News*, vol. 19, pp. 24–29, Apr 2008. [1](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [11] D. Malacara, *Optical shop testing*. New York: Wiley-Interscience, 3ra. ed., Cap. 9, 10, 12, 13, 18. 2006. [1](#), [5](#), [6](#), [7](#), [12](#), [23](#)
- [12] J. Barrera, N. Bolognini, M. Tebaldi, R. Torroba, and R. Henao vol. 38, 01 2006. [1](#)
- [13] D. Malacara and M. Josse, “Testing of aspherical lenses using side band ronchi test,” *Appl. Opt.*, vol. 17, pp. 17–18, Jan 1978. [1](#)
- [14] M. Campos-García., *Prueba de Superficies Asféricas Rápidas con Pantallas Nulas*. Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México. Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, México, D.F., 2005. [1](#), [11](#), [15](#)
- [15] N. Bernal-Reyes, A. Arias-Díaz, L. Ortega-Díaz, and J. Cuevas-Ruiz, “Topografía corneal mediante discos de Plácido en la detección del queratocono en edades pediátricas,” *Revista Mexicana de Oftalmología*, vol. 86, pp. 204–212, 2012. [2](#)
- [16] S. Lv, Y. Zhang, L. Jing, J. Wang, Y. Liu, and Q. Sun, “Geometric dimension assisted absolute phase recovery in 3d shape measurement with digital fringe projection,” *Measurement Science and Technology*, vol. 32, p. 065001, mar 2021. [2](#)
- [17] R. J. Ambrósio, B. F. Valbon, F. Faria-Correia, I. Ramos, and A. Luz, “Scheimpflug imaging for laser refractive surgery,” *Current Opinion in Ophthalmology*, vol. 24, pp. 310–320, 2013. [2](#)
- [18] H. W. Lippincott and H. Stark, “Optical–digital detection of dents and scratches on specular metal surfaces,” *Appl. Opt.*, vol. 21, pp. 2875–2881, Aug 1982. [2](#)
- [19] *Broadband Dielectric Mirrors*. thorlabs, 2024. [2](#)
- [20] S. B. Werling, *Deflektometrie zur automatischen Sichtprüfung und Rekonstruktion spiegelnder Oberflächen*. Tesis doctoral, Karlsruhe: KIT, Alemania, 2011. [3](#)
- [21] T. N. Manh, L. Jaehyun, k. G. Young-Si, and R. Hyug-Gyo, “Real-time 3d measurement of freeform surfaces by dynamic deflectometry based on diagonal spatial carrier-frequency pattern projection,” *Measurement*, vol. 200, p. 111684, 2022. [3](#)
- [22] W. Fuqiang, C. Ziming, T. Jianyu, Y. Yuan, S. Yong, and L. Linhua, “Progress in concentrated solar power technology with parabolic trough collector system: A comprehensive review,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 79, pp. 1314–1328, 2017. [5](#)

- [23] H. Shuai, W. Jinzhou, and X. Jianping, “Freeform surface topography model for ultraprecision turning under the influence of various errors,” *Journal of Manufacturing Processes*, vol. 71, pp. 429–449, 2021. [5](#)
- [24] M. Herraz, J.-M. Redonnet, M. Sbihi, and M. Mongeau, “Blackbox optimization and surrogate models for machining free-form surfaces,” *Computers Industrial Engineering*, vol. 177, p. 109029, 2023. [5](#)
- [25] D. Aguirre-Aguirre, B. Villalobos-Mendoza, R. Díaz-Uribe, and M. Campos-García, “Null-screen design for highly freeform surface testing,” *Optics Express*, vol. 28, pp. 36706–36722, 2020. [5](#), [24](#), [34](#), [36](#), [57](#), [65](#)
- [26] H. Stahl, “Testing of aspheric components,” *Short Courses Notes , SPIE ’s 42nd Annual Meeting on Optica Science, Engineering, and Instrumentation*, 1997. [6](#)
- [27] X. Jiang, *Freeform*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018. [8](#)
- [28] M. Metzger and S. Eismann, *Freeform Surface Modeling*. 2017. [8](#)
- [29] B. Álvaro Barreiro, *Panelización de superficies de forma libre en arquitectura: de la idea a su construcción*. Trabajo de Fin de Grado, Universidad Politécnica de Madrid, España, 2018. [8](#), [10](#)
- [30] C. Teutsch, *Model-based Analysis and Evaluation of Point Sets from Optical 3D Laser Scanners*. Tesis doctora, Otto-von-Guericke-Universität at Magdeburg von, 12 2007. [8](#)
- [31] O. Bravo, “Modelización con curvas y superficies de bézier,” *Modelling in Science Education and Learning*, vol. 4, pp. 118 – 193, 06 2011. [10](#)
- [32] R. Uribe, M. Campos-García, and F. Granados-Agustín, “Testing the optics of large millimeter telescope (lmt),” vol. 4818, pp. 63–70, 12 2002. [11](#)
- [33] M. A. no Alejo and R. Díaz-Uribe, “Testing a fast off-axis parabolic mirror by using tilted null screens,” *Appl. Opt.*, vol. 45, pp. 2607–2614, Apr 2006. [11](#)
- [34] M. Campos-García, R. Bolado-Gómez, and R. Díaz-Uribe, “Testing fast aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen,” *Appl. Opt.*, vol. 47, pp. 5411–5519, 2008. [11](#), [18](#), [30](#), [32](#)
- [35] M. Campos-García, C. Cossio-Guerrero, V. I. Moreno-Oliva, and O. Huerta-Carranza, “Surface shape evaluation with a corneal topographer based on a conical null-screen with a novel radial point distribution,” *Appl. Opt.*, vol. 54, pp. 5411–5519, 2015. [11](#), [18](#), [30](#), [32](#), [33](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [36] F. J. Bautista-Celmente, *Optimización de algoritmos para la evaluación y representación de las superficies cóncavas de forma libre*. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, México, D.F., 2021. [11](#)
- [37] V. D. E. Armengol-Cruz, *Evaluación de Superficies Asféricas con Simetría de Revolución y Córneas Humanas con un Topógrafo Corneal Basado en el Método de Pantallas Nulas*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico., México, Ciudad de México, 2018. [15](#), [16](#), [17](#), [28](#)
- [38] A. Osorio-Infante, *Desarrollo y caracterización de un topógrafo corneal cónico basado en el método de pantallas nulas*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico., México, Ciudad de México, 2017, Cap.3. [16](#), [17](#), [28](#), [33](#)
- [39] B. Schutz, *Polinomios de Zernike*. wikipedia.org, 2023. [23](#)
- [40] D. Aguirre-Aguirre, B. Villalobos-Mendoza, R. Díaz-Uribe, and M. Campos-García, “Null-screen design for freeform surface testing,” in *Optical Design and Fabrication 2019 (Freeform, OFT)*, p. JW2A.5, Optica Publishing Group, 2019. [24](#)
- [41] R. Brent, *Algorithms for Minimization Without Derivatives*. México D.F.: Prentice-Hall, 1973. [25](#), [37](#)
- [42] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall, 3ra ed., 1989. [25](#), [26](#)
- [43] N. B. Haaser, J. P. LaSalle, and J. A. Sullivan, *Análisis matemático 2: Curso intermedio*. México D.F.: Trillas, 2a ed., 2003. [27](#)
- [44] O. Huerta-Carranza, *La ecuación de la forma de la superficie y generalización de las ecuaciones de Rayces*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias, México, D.F., 2014. [29](#), [46](#)
- [45] S. Chapra and C. R., *Numerical Methods For Engineers*. Boston: McGraw-Hill, 5a ed., 2005. [29](#)
- [46] S. A. Sánchez-Jaimes, *Superficies Cuádricas Rotadas y Vectores Característicos*. Monografía para optar título de Licenciado en Matemáticas, Colombia, Bucaramanga, 2004. [32](#)

- [47] O. Huerta-Carranza, M. Campos-García, D. Aguirre-Aguirre, B. Villalobos-Mendoza, and V. I. Moreno Oliva, “Measurement of a highly freeform surface using a cylindrical null-screen,” p. 12, 09 2021. [34](#)
- [48] *Método de Cardano*. Wikipedia.org, 2024. [40](#)
- [49] *shortestpathtree*. mathworks.com, 2024. [54](#)