



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**ESTUDIO DE LOS MECANISMOS VISCO-ELASTO-
FLEXOELÉCTRICOS EN LA MOTILIDAD DE MEMBRANAS
BIOLÓGICAS**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERA QUÍMICA

PRESENTA:

GALICIA DÍAZ KAREN SARAHÍ

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

M. en C. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 22 de Marzo del 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE**

Comunico usted que el alumno **Karen Sarahi Galicia Diaz** con número de cuenta 314118286 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el día 14 de febrero del 2024 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente 1:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez
Suplente 2:	M. en C. e I. M Luis Antonio Ramírez Torres

El título de la tesis que se presenta es: **“Estudio de los mecanismos visco-elasto-flexoelectrico en la motilidad de membranas biológicas”**

Opción de titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M. en C. e I.M. Luis Antonio Ramírez Torres

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN102823>> Modelado matemático y simulación computacional de fluidos complejos con aplicación en bioingeniería<< >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo para Innovar y Mejorar la Educación (PAPIME) de la UNAM << PE106224>> Material didáctico para la asignatura de transferencia de masa usando COMSOL MULTIPHYSICS y WOLFRAM MATHEMATICA
- A la unidad de Investigación en Bioingeniería UI-FESZ-110323.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

DEDICATORIAS

- A mis profesores de los 9 semestres que me enseñaron sus conocimientos y enseñanzas y haber contribuido en mi formación académica.
- Al Dr. Edtson Emilio Herrera por haberme dado las herramientas para poder concluir este trabajo y por haberme apoyado e inspirado a lo largo de este proyecto. Por motivarme siempre a seguir adelante y a no dudar nunca de mis capacidades como estudiante. Por ser un excelente docente y persona y brindarnos sus conocimientos.
- A mis padres Margarita Díaz Cerda y Jorge Luis Galicia Contreras por haberme apoyado durante toda mi carrera y por haberme dado las herramientas para poder concluir la. A ustedes les debo y dedico mi trayectoria escolar por ser mis maestros de vida.
- A todos mis seres queridos, amigos y familiares que me han ayudado y apoyado siempre.
- A mis compañeros y amigos de carrera que trabajaron conmigo durante estos 4 años y medio. Por todas esas desveladas y preocupaciones en tiempos de exámenes.

ÍNDICE

Agradecimientos	3
Dedicatorias	4
Nomenclatura	8
Glosario	10
Resumen	12

CAPITULO I. INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción	14
1.3 Estado del arte	15
1.4 Hipótesis	17
1.5 Objetivos	17

CAPITULO II. SISTEMA FÍSICO Y MODELADO MATEMÁTICO

2.1 Sistema Físico	19
2.2 Modelado matemático	20
2.3 Ecuaciones teóricas	21
2.3.1 Ecuación constitutiva reológica del sistema	22
2.3.2 Series de Fourier	24
2.3.3 Perfil de velocidades	25
2.3.4 Condiciones de frontera	27
2.3.5 Flujo volumétrico	28
2.3.6 Función de transferencia compleja	31
2.3.7 Parámetro Beta	32
2.3.8 Variables y grupos adimensionales	24

2.4 Diagrama material 3D	35
---------------------------------	-------	-----------

CAPITULO III. SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

3.1 Función de transferencia compleja: parte real	37
3.2 Función de transferencia compleja: imaginaria	39
3.3 Función de transferencia compleja: norma	41
3.4 Propiedades en el diagrama material 3D	42

CAPITULO IV. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

4.1 Perspectivas de la investigación	45
4.2 Contribución al conocimiento universal	46
4.3 Trabajo futuro	46
Bibliografía	48

ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 1. Ilustra el efecto del campo eléctrico en las células ciliadas externas y su deformación por efecto del campo eléctrico. 15
- Figura 2. Ilustra el sistema de estudio en este trabajo de investigación. 20
- Figura 3. Diagrama material conformado por los números adimensionales. ... 35
- Figura 4: Ilustra la parte real de la FTC VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. 37
- Figura 5: Ilustra la parte imaginaria de la FTC VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. 39

- Figura 6: Ilustra la norma de la FTC VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. 41
- Figura 7 . Diagrama material en donde se localiza en punto de mayor resonancia. .. 43

ÍNDICE DE TABLAS

- Tabla 1. Números adimensionales y su escalamiento 34
- Tabla 2. Acotaciones de los números adimensionales 34

NOMENCLATURA

Símbolos

Z	Longitud [m]
z	Coordenada axial
P	Presión [Pa]
P₀	Presión en z=0 [Pa]
Q	Flujo volumétrico [m ³ /s]
Q_v	Flujo volumétrico visco-elástico [m ³ /s]
Q_N	Flujo volumétrico newtoniano [m ³ /s]
G	Elasticidad de la membrana
a	Longitud del radio del capilar [m]
E(t)	Campo eléctrico [N/C]
r	Coordenada radial
V	Velocidad [m/s]
V_z	Componente axial del vector velocidad [m/s]
C_f	Constante flexo-eléctrica [Coulomb]
t	Tiempo [s]
R(ω)	Función de transferencia compleja
De	Número de Deborah
i²	Numero imaginario

Letras griegas

ε	Elasticidad
η	Viscosidad [Pa s]
ρ	Densidad del fluido [m ³ /s]
λ	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
λ_i	Tiempo de relajación de la sustancia [s]

λ_v	Tiempo característico del proceso de deformación al que se ve sometido una determinada sustancia [s]
Σ_G	Viscosidad de bulto
Σ_η	Elasticidad total de bulto
Π_λ	Memoria
$\Phi_e(t)$	Potencial eléctrico [Joules]
\mathfrak{J}	Factor geométrico [m ²]
ω	Frecuencia
O_η	Operador viscosidad
O_ϕ	Operador fluidez
γ	Rapidez de deformación
β^2	Parámetro beta
σ_ω	Esfuerzo en la pared [Pa]

Vector, diática y tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscosos y visco-elásticos
σ_{rz}	Componente rz del tensor de esfuerzos [Pa]
T	Tensor de esfuerzos total
I	Matriz unitaria
D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
g	Aceleración de la gravedad [m ² /s]

Otros simbolos

∇	Operador gradiente m ⁻¹
$\nabla \cdot$	Operador divergencia m ⁻¹

GLOSARIO

Células ciliadas externas:

Ayudan a amplificar las vibraciones sonoras que entran en el oído interno desde el oído medio.

Diagrama material 3D:

Diagrama en donde son representados los números adimensionales.

Ecuación constitutiva

Ecuación que describe la relación dinámica de un sistema (Esfuerzo, deformación y rapidez de deformación)

Ecuación de continuidad

Ecuación diferencial parcial que describe la conservación de la materia.

Ecuación de movimiento

Ecuación que dicta la 2da ley de Newton con aplicación a un medio continuo.

Estado estacionario

Estado en donde las variables son independiente del tiempo.

Fluido biológico

Todo aquel fluido que segrega un ser humano.

Fluido newtoniano

Es aquel fluido que no importa la rapidez con la que sea deformado, su viscosidad permanece constante.

Fluido visco-elástico:

Fluido que contiene componentes viscosas (disipativas) y elásticas (almacenamiento).

Flujo volumétrico:

Volumen de fluido que pasa a través de un área determinada en un tiempo determinado.

Función de transferencia compleja:

Relación entre una variable de entrada y una de salida en un sistema dinámico.

Membrana flexo-eléctrica:

Membrana que tiene la capacidad de cambiar su curvatura por efecto de un agente externo, específicamente un campo eléctrico.

Modelo de Maxwell:

Modelo donde se aplica una ecuación constitutiva que describe un sistema visco-elástico a bajas rapidezces de deformación, es decir, visco-elasticidad lineal.

Motilidad:

Habilidad de moverse espontánea e independientemente.

Reología:

Ciencia que estudia la forma en que fluyen y se deforman los materiales en respuesta a fuerzas o tensiones aplicadas.

Tensor de esfuerzos:

Matriz simétrica de 3x3 con 9 elementos que describe un elemento de control.

Tiempo de relajación

Periodo de tiempo que tarda un sistema en llegar a un estado de equilibrio.

Viscosidad:

Resistencia que opone un material a fluir.

RESUMEN

En el presente trabajo se analizan las células ciliadas externas (CCE) que son las responsables de amplificar el sonido mediante un modelo electro-mecánico de una membrana flexo-eléctrica circular inmersa entre dos fases viscoelásticas sometidas por un campo eléctrico de amplitud y frecuencia particular. La flexo-electricidad que tienen las membranas timpánicas es un efecto de acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica que es fundamental para la audición. La flexo-electricidad aplicada a las membranas utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, la cual es utilizada por las CCE. Para modelar este fenómeno, se utiliza el concepto de permeabilidad dinámica y función de transferencia compleja. Dicho modelo se basa en la ecuación que describe la respuesta mecánica y oscilatoria aplicada a una membrana flexo-eléctrica, así como al flujo volumétrico producido por dicha oscilación de la membrana entre las fases viscoelásticas del sistema, donde se hace uso del modelo de Maxwell el cual puede ser interpretado como un resorte (Ley de Hooke) conectado en serie a un pistón (Ley de viscosidad de Newton).

Palabras claves: Flexo-electricidad, Modelo de Maxwell, Modelo Electro-reológico, Electromotilidad, Células Ciliadas Externas, Visco-elasticidad.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

Este proyecto, versa en el estudio de la flexo-electricidad de las células ciliadas externas (CCE), se encuentran en el oído interno y son las causantes de amplificar la información que proviene del sonido que pasa por el sistema auditivo externo e interno respectivamente (Rey 2006; 2008). La flexo-electricidad, es la capacidad que tiene un sistema de cambiar su curvatura promedio por efecto de una fuente externa, esta fuente externa es por lo regular un campo eléctrico externo (Wang et al. 2022). Las CCE utilizan un concepto llamado flexo-electricidad que es la capacidad que tiene un sistema físico de cambiar su curvatura por efecto de un agente externo, específicamente un campo eléctrico (fuerza por unidad de carga, Petrov 2001; Rey 2007). Patel y Meyer (1987) estudiaron la flexo-electricidad desde el punto de vista de la óptica y teoría electromagnética en cristales líquidos colestéricos.

En particular, la flexo-electricidad aplicada a las membranas biológicas, utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, la cual es utilizada por las células ciliadas externas (CCE) ubicadas en el oído interno (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014).

Por otra parte, la flexo-electricidad en las membranas timpánicas, es un efecto del acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica que es esencial para la fisiología de la audición (Petrov 2001). En el régimen lineal el modelo membrano-dinámico que describe la evolución de la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado, es de segundo orden en las derivadas temporales de la curvatura promedio y del campo eléctrico y bajo ciertas transformaciones algebraicas, se mapea en modelos tipo Burgers de la mecánica de sólidos (Herrera-Valencia y Rey 2023). La respuesta dinámica del sistema es típica de un oscilador armónico forzado y puede mostrar curvas resonantes en la potencia total (Abou-Dakka et al. 2012). La amplitud, la frecuencia y la anchura de las curvas resonantes en la potencia son de relevancia para el funcionamiento de las células ciliadas externas (CCE), las cuales dependen de la inercia que proviene de las fases viscoelásticas y la relación entre la elasticidad de la membrana y la de los líquidos en contacto (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014, 2023).

El modelo electro-reológico no lineal y las aportaciones de este trabajo, contribuyen a la búsqueda constante en el entendimiento de los motores biológicos conocidos como células ciliadas externas, especialmente en el papel fundamental de la deformación de la membrana en la entrega de energía

mecánica, a través de electro-motilidad y su conversión en energía dependiente de la frecuencia (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014, 2023).

El objetivo de este proyecto es deducir una función de transferencia que está muy relacionada a la permeabilidad dinámica de un sistema que consiste en una fase solida flexo-eléctrica dos fases líquidas visco-elásticas (Abou-Dakka et al. 2012). La permeabilidad dinámica es un objeto matemático que depende de la frecuencia, y que relaciona una variable de salida con una de entrada en el espacio matemático de Fourier (Colleparado-Guevara y Corvera Poiré 2007; Flores et al. 2016). Para activar la membrana flexo eléctrica se aplica un campo eléctrico y las membranas oscilan en torno a una posición de equilibrio (Herrera-Valencia et al. 2014, 2018, 2013)

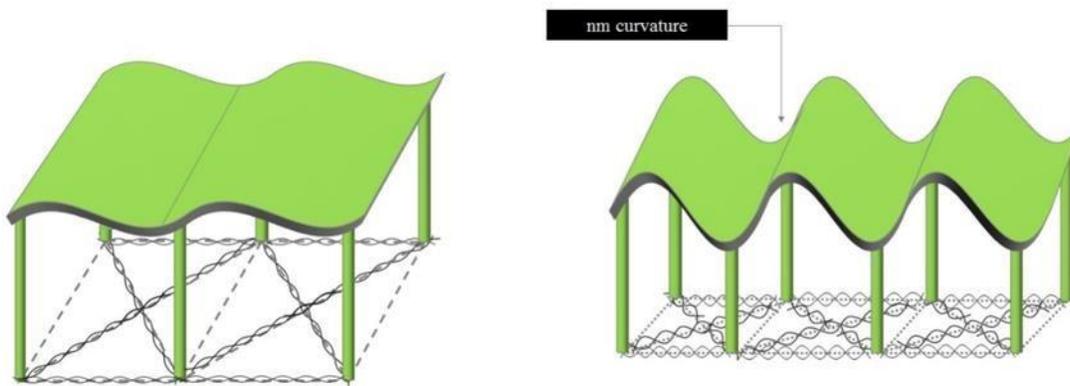


Figura 1. Ilustra el efecto del campo eléctrico en las células ciliadas externas y su deformación por efecto del campo eléctrico.

1.2 Estado del arte

1.2.1 Membranas flexo-eléctricas con enfoque a células ciliadas externas

El funcionamiento de las células ciliadas externas (CCE) en el oído interno implica oscilaciones de curvatura periódicas impulsadas por campos eléctricos en membranas elásticas el cual provoca un flujo a los fluidos visco-elásticos en respuesta al campo eléctrico aplicado en la membrana, a este fenómeno se le conoce como flexo-electricidad (Petrov 2001, 2006). La función clave en las CCE es la amplificación del sonido en presencia de un medio visco-elástico, por lo tanto, se obtiene una respuesta de frecuencia de las membranas flexo-eléctricas incrustadas en medios visco-elásticos debido a un campo $E(t)$ oscilante (Abou-Dakka et al 2012; Herrera-Valencia

y Rey 2014, 2018, 2023). Al imponer un campo eléctrico fluctuante $E(t)$, la membrana oscila y desplaza los fluidos visco-elásticos incompresibles superiores e inferiores (Herrera-Valencia y Rey 2014).

Fikus y Pawlowski (1989) centraron sus investigaciones en modelos electro-reológicos basados en análisis de flujo lento y los verificaron experimentalmente. Hawkins y Lovett (2004) analizaron problemas auditivos con modelos matemáticos y el énfasis de sus trabajos se centraron en la genética del sistema auditivo y la sensibilidad de estos modelos a las propiedades materiales. Raphael et al. (2000) estudiaron la electro-motilidad que esta asociada a sistemas biológicos que cambian su estado de reposo, por efecto de un campo eléctrico. Para esta investigación, ellos propusieron un modelo que describe el cambio de curvatura para las células ciliadas externas. Brownell (1985) estudio el efecto de corriente en la polarización y la despolarización de las células ciliadas externas en mamíferos. Sachs et al. (2009) estudiaron el sistema auditivo en diversos sistemas biológicos con modelos mecánicos, eléctricos y una combinación de estos (electro-mecánicos). Oghalai et al. (2000) estudiaron el efecto de la diferencia de potencial eléctrico en el plasma y la movilidad en las células ciliadas externas.

Finalmente, y a pesar de todos los intentos teóricos y experimentales para describir el comportamiento del sistema auditivo, no existen modelos o son escasos que describan las propiedades viscoelásticas de los fluidos intracelulares y extracelulares de las células ciliadas externas. Precisamente, este proyecto propone un modelo electro-reológico que describe las células ciliadas externas oscilando en fluidos complejos viscoelásticos lineales.

Este proyecto versa en los siguientes puntos importantes:

- A) Proponer un modelo electro-reológico que describa el movimiento resonante de las membranas flexo-eléctricas en medios viscoelásticos.
- B) Mediante la transformada de Fourier, obtener una función de transferencia que describa la relación entre el campo eléctrico (variable de entrada) y el flujo volumétrico (variable de salida).
- C) Analizar la sensibilidad que presenta el sistema a las propiedades materiales

1.3 Hipótesis

Si el efecto del introducir un campo eléctrico en el sistema se modifica el flujo volumétrico, entonces esta será cuantificada a través de la función de transferencia compleja y los mecanismos inerciales, solvente y viscoelásticos.

1.4 Objetivos

General

Estudiar la respuesta dinámica oscilatoria lineal de una membrana flexo-eléctrica inmersa entre dos fases viscoelásticas en una geometría cilíndrica de radio $r = a$ y longitud $z = 2L$.

Particular

P.1 Obtener un modelo lineal que describa la curvatura o el flujo volumétrico sobre la membrana flexo-eléctrica, inmersa en fases viscoelásticas en función de las propiedades materiales y geométricas.

P.2 Aplicar el formalismo de Fourier con el fin de obtener una expresión analítica para la función de transferencia compleja, en donde la variable de entrada es el campo eléctrico y la de salida es el flujo volumétrico.

P.3. Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.

P.4. Calcular la parte real e imaginaria y norma de la función de transferencia en función de los números adimensionales.

P.5 Deducir las condiciones materiales y de operabilidad para que el dispositivo muestre las curvas resonantes típicas y pueda aplicarse a entender el complejo comportamiento de oído.

CAPÍTULO II

SISTEMA FÍSICO Y MODELADO

MATEMÁTICO

2.1 Sistema físico

El sistema físico puede describirse como el modelo propuesto por Rey (2008), que versa del estudio del comportamiento de las células ciliadas externas que son expuestas a un campo eléctrico y que tienen como objetivo modelar la dinámica de estos sistemas biológicos Abou-Dakka et al. (2012). Para ello, se utiliza un capilar de longitud $z = 2L$, y radio $r = a$. Donde la parte superior del capilar $[L, 2L]$ está llena con una fase líquida viscoelástica $\{\rho_1, \eta_1\}$, al igual que la parte inferior del capilar $[0, L]$ está llena con otra fase líquida viscoelástica $\{\rho_2, \eta_2\}$ Herrera-Valencia y Rey (2014). Los subíndices (1 y 2) están referidos a la parte superior (1) e inferior (2) respectivamente. En medio del capilar, i.e., ($z = L$), se adhiere una membrana flexo-eléctrica circular, es decir una membrana que por efecto de un campo eléctrico se deforma en forma de domo esférico y oscila en torno a una posición de equilibrio (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014, 2018, 2023).

Para la descripción de este sistema se toman las siguientes suposiciones:

- a) Líquido no newtoniano viscoelástico lineal, i.e. el modelo es válido para rapidezces de deformación pequeñas.
- b) Líquido incompresible: La densidad no depende de la posición ni del tiempo
- c) Proceso en estado no estacionario: La velocidad, la presión y campo eléctrico dependen del tiempo.
- d) No existe gradiente de presión en la dirección axial, por lo tanto, no existe una fuerza que deforme continua e irreversiblemente el sistema.
- e) El campo eléctrico, activa la membrana flexo-eléctrica y la membrana cambia su curvatura formando un casquete esférico a la derecha y regresa formando un casquete esférico a la izquierda. Este movimiento genera un flujo volumétrico Q_S en la parte superior y un flujo volumétrico Q_I de tal manera, que el cambio en el flujo volumétrico en el sistema es cero, i.e. $\Delta Q = Q_S - Q_I = 0$.
- f) Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto a los eléctricos y a los viscoelásticos.

- g) El flujo y la reología del sistema pueden ser descritos mediante el modelo viscoelástico de Maxwell, i.e., las deformaciones en el fluido son bajas (viscoelasticidad lineal).
- h) Simetría cilíndrica, i.e. no existe dependencia de ningún atributo o variable dinámica con el ángulo.

2.2 Modelado matemático

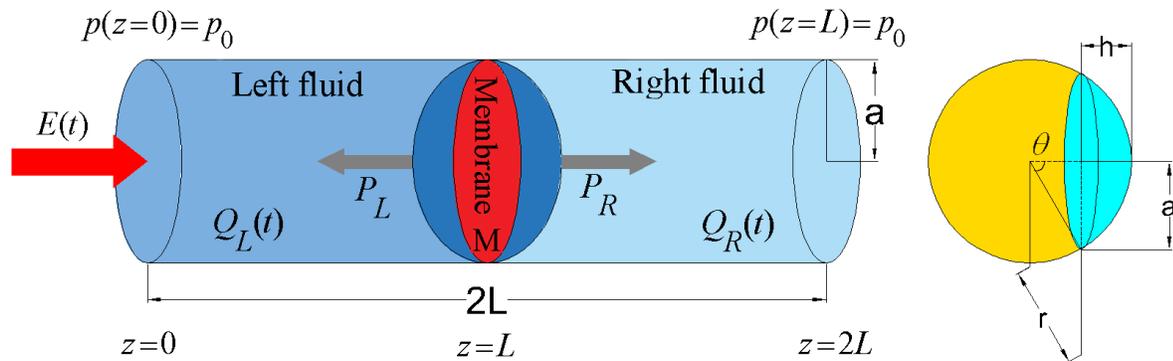


Figura 2. Ilustra el sistema geométrico del sistema. El campo eléctrico, activa la membrana flexo-eléctrica y esta produce un flujo volumétrico en la parte de la derecha y en la parte izquierda de tal manera, que la contribución total es cero.

En la Fig. 2 el campo eléctrico producido por los fenómenos electrofisiológicos del cuerpo humano, induce que la membrana se deforme hacia arriba y hacia abajo y forme un domo esférico, como el que se observa en el sistema. Los flujos volumétricos de las dos fases viscosas con viscosidades $\{\eta_1, \eta_2\}$ son generados por el movimiento de las fases líquidas viscoelásticas en el medio y también por una diferencia de presiones en la parte superior e inferior. La rapidez de evolución de la curvatura de la membrana induce un flujo volumétrico. Suponemos que el campo eléctrico aplicado deforma la membrana en forma de domo esférico de altura h y radio $r = a$ y crea una oscilación entre las fases visco-elásticas (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014).

2.3 Ecuaciones teóricas

En esta sección, se presentan las ecuaciones más importantes en el sistema. La dinámica no-lineal de la membrana está determinada por ecuaciones de continuidad, transporte y de un balance de fuerzas en la membrana (Bird et al. 2002). La primera de ellas es la ecuación de continuidad la cual, es un balance de masa sin reacción química para la primera fase 1:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_1 \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

De la misma manera para la otra fase viscoelástica 2 (Bird et al. 2002):

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_2 \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

La ecuación de movimiento para el sistema, que es básicamente la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo (Bird et al. 2002):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (3)$$

En la Ec. (3) \mathbf{V} es el vector velocidad y \mathbf{T} es el tensor de esfuerzos total. El tensor de esfuerzos totales, toma la forma (Bird et al. 2002):

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \quad (4)$$

En donde \mathbf{I} es la matriz unitaria, p es un escalar asociado a la presión en el sistema y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscosos y viscoelástico. La ecuación de movimiento puede ser descrita para cada fase (t y b) en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{g} \quad (5)$$

Deduciendo:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot (-p\mathbf{I}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (6)$$

De tal manera que:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla p \cdot \mathbf{I} - p \nabla \cdot \mathbf{I} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (7)$$

De la Ec. (7) se tiene que $p \nabla \cdot \mathbf{I} = 0$. Entonces para cada fase (1 y 2):

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} = \nabla p \cdot I + \nabla \cdot \sigma + \rho g \quad (8)$$

2.3.1 Ecuación constitutiva reológica del sistema

La reología y el flujo, son descritos a través de la ecuación constitutiva reológica de Maxwell para las dos fases líquidas (Bird et al. 1987):

$$\sigma_{rz} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} = \eta_1 \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (9)$$

$$\sigma_{rz} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} = \eta_2 \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (10)$$

Y para la membrana:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = 2G \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (11)$$

Donde G es la elasticidad de la membrana y $\partial V_z / \partial r$ es la rapidez de deformación. La Ec. (9) puede ser escrita en terminos de un operador viscosidad, el cual es una extension del modelo Newtoniano:

$$\sigma_{rz} = \frac{\eta_1}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial V_z}{\partial r} = O_{\eta_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (12)$$

$$O_{\eta_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\eta_1}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} = \frac{G_1 \lambda_1}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (13)$$

Para el segundo fluido, se tiene una expresion analoga para el operador de Maxwell, por lo que:

$$\sigma_{rz} = \frac{\eta_2}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial V_z}{\partial r} = O_{\eta_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (14)$$

$$O_{\eta_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\eta_2}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} = \frac{G_2 \lambda_2}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (15)$$

Para la membrana, se tiene una expresión similar:

$$\sigma_{rz} = G \frac{1}{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial V_z}{\partial r} = O_{\eta_3} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (16)$$

Donde:

$$O_{\eta 3} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{G}{\frac{\partial}{\partial t}} \quad (17)$$

Sumando las contribuciones de las ecuaciones reológicas en un sistema mecánico en paralelo, se tiene la siguiente expresión matemática:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{(rz)1} + \sigma_{(rz)2} + \sigma_{(rz)3} \quad (18)$$

Al combinar la Ecs. (12-17) y sustituirla en la Ec. (18), se tiene la expresión general para el modelo reológico que describe el modelo reológico

$$\sigma_{rz} = O_{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (19)$$

En donde el operador fluidez $O_{\eta}(\partial/\partial t)$ tiene la siguiente estructura matemática

$$O_{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{G + (\Sigma_{\eta} + G\Sigma_{\eta}) \frac{d}{dt} + \Pi_{\lambda} (G + \Sigma_G) \frac{d^2}{dt^2}}{\frac{d}{dt} + \Sigma_{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} + \Pi_{\lambda} \frac{d^3}{dt^3}} \quad (20)$$

O en términos del inverso del operador viscosidad, la Ec. (20) puede ser expresada como:

$$O_{\phi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\frac{d}{dt} + \Sigma_{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} + \Pi_{\lambda} \frac{d^3}{dt^3}}{G + (\Sigma_{\eta} + G\Sigma_{\eta}) \frac{d}{dt} + \Pi_{\lambda} (G + \Sigma_G) \frac{d^2}{dt^2}} \quad (21)$$

En donde se han definido las siguientes variables dimensionales:

$$\Sigma_{\eta} = \eta_1 + \eta_2 \quad (22)$$

$$\Pi = \lambda_1 \lambda_2 \quad (23)$$

$$\Sigma_G = G_1 + G_2 \quad (24)$$

La primera de estas, es la viscosidad total de bulto de las fases líquidas, la segunda es la interacción entre los tiempos de relajación del sistema y finalmente la elasticidad total de bulto. El siguiente punto es proponer la ecuación de momento para los dos fluidos y la membrana flexo-eléctrica, i.e., se tiene la siguiente expresión generalizada, para una membrana flexo-eléctrica inmersa

$$(\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial V}{\partial t} = -(\nabla p_1 + \nabla p_2) + O_{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 V + (\rho_1 + \rho_2) g \quad (25)$$

La Ec. (25) puede ser escrita como:

$$\Sigma\rho\frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla p + O_{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2 V + \Sigma\rho g \quad (26)$$

En donde $\Sigma\rho$ es la densidad total de los dos fluidos. Tomando la componente z de la Ec. (26), se tiene la siguiente ecuación diferencial analítica que describe la aceleración instantánea del fluido debido al gradiente de presión y los mecanismos viscoelásticos en el sistema. Es importante, destacar, que los mecanismos de presión se hacen idénticos a los eléctricos de tal manera que, se tiene la siguiente expresión:

$$p(t) = p_0 + c_f \mathfrak{I}\Phi e(t) \quad (27)$$

En la Ec. (27) p_0 (Pascales Pa) es la presión en $z = 0$, c_f es una constante flexo-eléctrica (Coulomb), $\mathfrak{I} = 8/a^2$ (m^{-2}) y el $\Phi e(t)$ es el potencial eléctrico (Energía = Joules). En coordenadas cilíndricas se reescribe la componente z de la ecuación de movimiento Ec. (25) y se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\Sigma\rho\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\nabla p + O_{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2 V = -c_f \mathfrak{I}\nabla\Phi e(t) + O_{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2 V \quad (28)$$

En la Ec. (28) el término $\rho\partial_t V_z$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema.

2.3.2 Series de Fourier

Para resolver la Ec. (28), se supone que las funciones son continuas y de clase C^1 en un dominio abierto de R^2 , por lo que la transformada de Fourier, toma la forma:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (29)$$

Al aplicar la transformada integral (Ec. 29) sobre la Ec. (28) se deduce una expresión analítica para la velocidad en terminos de la variable radial r y la frecuencia ω . En donde la derivada parcial, se puede sustituir por el producto entre el número i por la frecuencia: $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$.

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}(r, t) = i\omega V_z(r, \omega) \quad (30)$$

De la misma manera:

$$cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(t)}{\partial z} = cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \quad (31)$$

Por lo que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right) - \frac{\rho(i\omega)V_z}{O_\eta(i\omega)}(r, \omega) = cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (32)$$

Quitamos el signo negativo con el numero imaginario $i^2 = -1$, quedando:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right) + \rho i^3 \omega O_\Phi(i\omega) V_z(r, \omega) = cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (33)$$

Para resolver la Ec. (33) se propone agrupar las siguientes variables características en un función que denominamos Beta. Esta, es una relación entre la inercia de las fases líquidas, la densidad total de los fluidos y el operador fluidez para el modelo reologico propuesto por Herrera-Valencia y Rey (2023), y deducido en la presente investigación a nivel de licenciatura:

$$\beta^2 = \rho i^3 \omega O_\Phi(i\omega) \quad (34)$$

Reescribiendo la Ec. (33), se tiene la siguiente expresión analítica que describe la velocidad con la que la membrana flexoelectrónica transfiere el momento a las fases líquidas y queda definida mediante una ecuación diferencial de Bessel no homogénea:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right) + \beta^2 V_z(r, \omega) = cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (35)$$

La Ec. (34), puede ser rescrita de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r} \left[r \frac{\partial^2 V_z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right] + \beta^2 V_z(r, \omega) = cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (36)$$

Finalmente:

$$\frac{\partial^2 V_z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) + \beta^2 V_z(r, \omega) = cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (37)$$

2.3.3 Perfil de velocidades

Para resolver la Ec. (37) se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea y particular.

$$V_z(r,\omega) = V_{zH}(r,\omega) + V_{zP}(r,\omega) \quad (38)$$

A) Ecuación diferencial homogénea

La solución de la ecuación diferencial homogénea de la velocidad en el espacio de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 V_z(r,\omega)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_z(r,\omega) + \beta^2 V_z(r,\omega) = 0 \quad (39)$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial del modelo de Bessel:

$$r^2 \frac{\partial^2 V_z(r,\omega)}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r,\omega) + r^2 \beta^2 V_z(r,\omega) = 0 \quad (40)$$

La Ec. (40) es paramétrica de Bessel y para resolverla se propone el siguiente cambio de variable $x = \beta r$. Reacomodando a la forma de Bessel:

$$(\beta r)^2 \frac{\partial^2 V_z(r,\omega)}{\partial (\beta r)^2} + \beta r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r,\omega) + [(\beta r)^2 - 0^2] V_z(r,\omega) = 0 \quad (41)$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial Ec. (41) está dada por la expresión:

$$V_z(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \quad (42)$$

Por lo tanto, la solución homogénea es:

$$V_{z(H)} = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r) \quad (43)$$

En las Ecs. (42) y (43) $\{J_0, Y_0\}$ son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero respectivamente.

B) Solución particular

La solución particular para el problema de la Ec. (37) se puede expresar como:

$$V_{z_p}(r,\omega) = A; A \in \mathbb{R} \quad (44)$$

Al sustituir la Ec. (44) en la Ec. (37) obtenemos:

$$\beta^2 A = cf \mathfrak{I} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (45)$$

por lo tanto, A esta determinada por:

$$A = cf \mathfrak{I} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (46)$$

La solución general de la Ec. (37) en términos de la coordenada radial r, se puede expresar como:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r) + cf \mathfrak{I} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (47)$$

El cual representa el perfil de velocidades en el sistema. Para calcular las constantes C1 y C2, aplicamos las condiciones de frontera que seran explicadas en la siguiente sección.

2.3.4 Condiciones de frontera

La primer condicion de frontera es de no deslizamiento en las paredes, i.e., se tiene la velocidad en la interfase entre el sólido y el fluido es cero, por lo que:

$$\text{C.F. 1: } V_z(r = a, \omega) = 0 \quad (48)$$

Aplicando la primera condición de frontera en la Ec. (47) se tiene la siguiente expresión algebraica

$$0 = C_1 J_0(\beta a) + C_2 Y_0(\beta a) + cf \mathfrak{I} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (49)$$

Y la velocidad axial debe ser finita en $r = 0$, por lo que:

$$\text{C.F.2: } V_z(r = 0, \omega) = \text{finita} \quad (50)$$

Aplicamos C.F.2:

$$\text{finita} = C_1 J_0(\beta 0) + C_2 Y_0(\beta 0) + cf \mathfrak{I} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (51)$$

La Ec. (51) presenta una inconsistencia física debido a que en $r = 0$, la función de Bessel de segunda especie diverge en cero, i.e., $C_2 Y_0(\beta 0) = -\infty$, por lo que se obtiene que: *finita* = $-\infty$!! *ERROR*. Matemáticamente es correcto, pero físicamente no existen velocidades infinitas, para evitar esto, se debe de hacer $C_2 = 0$. Con esta elección, el termino que contiene la función de Bessel de segunda especie desaparece del perfil de velocidades. Despejamos C_1 y sustituimos C_2 en C.F.1

$$0 = C_1 J_0(\beta a) + cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (52)$$

Así que,

$$C_1 = \frac{cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega)}{J_0(\beta a)} \quad (53)$$

Sustituimos C_1 en la Ec. (47):

$$V_z(r, \omega) = -\frac{cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega)}{J_0(\beta a)} J_0(\beta r) + cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (54)$$

Arreglando la Ec. (54):

$$V_z(r, \omega) = -cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega) \left(\frac{1}{J_0(\beta r)} \right) J_0(\beta a) + cf \mathfrak{F} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\beta^2 \partial z} O_\Phi(i\omega) \quad (55)$$

Y obtenemos el perfil de velocidades particular:

$$V_z(r, \omega) = cf \mathfrak{F} O_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \quad (56)$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del líquido, la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir efectos resonantes en el sistema.

2.3.5 Flujo volumétrico

El flujo volumétrico en el sistema, se puede calcular mediante la integral de superficie en el espacio de Fourier.

$$Q(\omega) = \int_S V \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r, \omega) r dr d\theta \quad (57)$$

Sustituimos $V_z(r, \omega)$ Ec (56) en Q ec. (57) obtenemos:

$$Q = cf \mathfrak{I}O_\Phi(i\omega) \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \right] r dr d\theta \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \quad (58)$$

Resolviendo la primera integral:

$$\int_0^{2\pi} \left[cf \mathfrak{I}O_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \right] d\theta \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \quad (59)$$

Deducimos:

$$= \left[cf \mathfrak{I}O_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \quad (60)$$

Finalmente:

$$= \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

Realizamos la segunda integral:

$$\int_0^a V_z(r, \omega) r dr \quad (61)$$

Cambiamos los limites de integraci3n:

$$a^2 \int_0^1 V_z(r, \omega) r dr \quad (62)$$

Quedando:

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^1 V_z(r, \omega) r dr \quad (63)$$

Resolviendo:

$$Q = 2\pi a^2 cf \mathfrak{I}O_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \right] \quad (64)$$

Obtenemos:

$$Q = 2\pi a^2 c f \Im \mathcal{O}_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \right] r dr \quad (65)$$

Donde:

$$Q = 2\pi a^2 c f \Im \mathcal{O}_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \int_0^1 \left[\left(r dr - \frac{1}{J_0(\beta a)} \right) \right] \int_0^1 J_0(\beta r) \quad (66)$$

Resolviendo la integral:

$$Q = 2\pi a^2 c f \Im \mathcal{O}_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \left[\frac{r^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{J_0(\beta a)} \int_0^1 J_0(\beta r) r dr \right] \quad (67)$$

Resolviendo:

$$Q = 2\pi a^2 c f \Im \mathcal{O}_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{J_0(\beta a)} \int_0^1 J_0(\beta r) r dr \right] \quad (68)$$

Nos queda:

$$Q = 2\pi a^2 c f \Im \mathcal{O}_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^2 J_0(\beta a)} \int_0^\beta J_0(\beta r) r dr \right] \quad (69)$$

Del cambio de variable $X = \beta r$ tenemos:

$$Q = 2\pi a^2 c f \Im \mathcal{O}_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^2 J_0(\beta a)} \int_0^\beta J_0(x) x dx \right] \quad (70)$$

De la propiedad de Bessel:

$$\int x J_0(x) x dx = x J_1(x) \quad (71)$$

Por lo tanto nos queda:

$$Q(\omega) = 2\pi a^2 c f \Im \mathcal{O}_\Phi(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi_e(\omega)}{\partial z} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^2 J_0(\beta a)} [J_1(x)x] \Big|_0^\beta \right] \quad (72)$$

Aplicando limites de integración:

$$[J_1(x)x] \Big|_0^\beta = [J_1(\beta)\beta] - [J_1(0)0] = [J_1(\beta)\beta] \quad (73)$$

Resolviendo:

$$Q(\omega) = 2\pi a^2 cf \mathfrak{I}O_{\Phi}(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi e(\omega)}{\partial z} \left[\frac{1}{2} - \frac{J_1(\beta)\beta}{\beta^2 J_0(\beta a)} \right] \quad (74)$$

Simplificando:

$$Q(\omega) = 2\pi a^2 cf \mathfrak{I}O_{\Phi}(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi e(\omega)}{\partial z} \left[\frac{1}{2} - \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta a)} \right] \quad (75)$$

Simplificando:

$$Q(\omega) = 2\pi a^2 cf \mathfrak{I}O_{\Phi}(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi e(\omega)}{\partial z} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta a)} \right] \quad (76)$$

Simplificando

$$Q(\omega) = cf \mathfrak{I}O_{\Phi}(i\omega) \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \Phi e(\omega)}{\partial z} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta a)} \right] \quad (77)$$

Simplificando:

$$Q(\omega) = cf \mathfrak{I}O_{\Phi}(i\omega) \frac{a^2}{(\beta a)^2} \frac{\partial \Phi e(\omega)}{\partial z} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta a)} \right] \quad (78)$$

Simplificando:

$$Q(\omega) = \left(-cf \mathfrak{I}O_{\Phi}(i\omega) \frac{\pi a^4 (-1)^8}{(a\beta)^2} O_{\Phi}(i\omega) \right) \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta a)} \right] \frac{\partial \Phi e(\omega)}{\partial z} \quad (79)$$

Simplificando:

$$Q(\omega) = \left(-cf \mathfrak{I}O_{\Phi} \frac{\partial \Phi e(\omega)}{\partial z} \frac{\pi a^4 (-1)^8}{8(a\beta)^2} O_{\Phi}(i\omega) \right) \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta a)} \right] \quad (80)$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = \left(\frac{\pi a^3}{4} \right) R(i\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi e(\omega)}{\partial z} a \right) \quad (81)$$

La función de transferencia $R(\omega)$ tiene la siguiente forma:

$$R(i\omega) = O_{\Phi}(i\omega) \frac{8i^2}{(a\beta)^2} \left[1 - 2 \frac{\frac{J_1(\beta)}{(\beta a)}}{J_0(\beta a)} \right] \quad (82)$$

2.3.6 Función de transferencia compleja

A partir de las Ecs. (81) y (82), se construye la función de transferencia compleja en el sistema de estudio:

$$R(i\omega) = \text{Re}[R(i\omega)] + i\text{Im}[R(i\omega)] = O_{\phi}(i\omega)f(i\omega) \quad (83)$$

En donde $R(\omega)$ es la función de transferencia compleja, la cual puede ser descrita como una respuesta entre la variable de entrada y de salida del sistema de estudio. Es importante resaltar que la función de transferencia $R(\omega)$ es el producto entre el operador fluidez y la función de dispersión.

$$f(i\omega) = \frac{8i^2}{(a\beta)^2} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta a)} \right] \quad (84)$$

En la Ec. (84) β es el inverso de una longitud característica en donde viven las funciones de Bessel. El flujo volumétrico viscoelástico es un múltiplo del flujo volumétrico Newtoniano. Ese múltiplo es la función de transferencia compleja que depende de las propiedades viscoelásticas en el sistema.

2.3.7 Parámetro Beta

Este parámetro contiene la información reológica asociada a los procesos viscoelásticos en el sistema. Para un fluido no-newtoniano viscoelástico lineal, la fluidez característica $\phi_c = 1/\eta_0$ y el tiempo característico del sistema t_c es el tiempo unimodal de Maxwell, i.e. $t_c = \lambda_0$. Por lo que el parámetro β tiene la forma:

$$\beta(\omega) = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{De O_{\phi}(i\omega) \omega} \quad (85)$$

En la Eq. (85) De es el número de Deborah, (nombre que procede del antiguo testamento, según la cual **“Las montañas fluirían delante del Señor”**). Es un parámetro utilizado para caracterizar o clasificar las sustancias de acuerdo a su comportamiento elástico/viscoso/viscoelástico.

Este número se define como el cociente de dos tiempos característicos:

$$De = \frac{t_i}{t_v} \quad (86)$$

Donde t_v es un tiempo característico del proceso de deformación al que se ve sometido una determinada sustancia y t_i es un tiempo de relajación de dicha sustancia; el tiempo de relajación es infinito para un

sólido de Hooke y cero para un fluido de Newton. De acuerdo al valor del número de Débora todas las sustancias pueden ser clasificadas:

$De < 1$ Comportamiento viscoso

$De > 1$ Comportamiento elástico.

$De \approx 1$ Comportamiento visco-elástico.

2.3.8 Variables y grupos adimensionales

En esta sección se presentarán las variables adimensionales y escalaremos las ecuaciones para encontrar las variables que describen la física del sistema. Esto tiene por objeto, que aparezcan grupos adimensionales que describan la física del sistema. Las variables escaladas serán las coordenadas radiales y axial; el operador fluidez y el parámetro beta.

A) Operador fluidez Adimensional:

Partimos del operador viscosidad que generaliza a cualquier fluido Newtoniano o Viscoelástico lineal:

$$O_{\eta} = \frac{\sigma}{\gamma} = \frac{G + (\Sigma_{\eta} + G\Sigma_{\eta})\frac{d}{dt} + \Pi_{\lambda}(G + \Sigma_G)\frac{d^2}{dt^2}}{\frac{d}{dt} + \Sigma_{\lambda}\frac{d^2}{dt^2} + \Pi_{\lambda}\frac{d^3}{dt^3}} \quad (87)$$

En el espacio de Fourier:

$$O_{\eta}(\omega) = \frac{G + (\Sigma_{\eta} + G\Sigma_{\eta})(i\omega) + \Pi_{\lambda}(G + \Sigma_G)(i\omega)^2}{(i\omega) + \Sigma_{\lambda}(i\omega)^2 + \Pi_{\lambda}(i\omega)^3} \quad (88)$$

Escalando la Ec. (88) con variables características, se tiene la siguiente expresión analítica

$$O_{\eta}(\omega) = \frac{G + (\Sigma_{\eta} + G\Sigma_{\eta})\frac{(i\Sigma_{\lambda}\omega)}{\Sigma_{\lambda}} + \frac{\Pi_{\lambda}}{\Sigma_{\lambda}^2}(G + \Sigma_G)(i\Sigma_{\lambda}\omega)^2}{\frac{(i\Sigma_{\lambda}\omega)}{\Sigma_{\lambda}} + \frac{\Sigma_{\lambda}(i\Sigma_{\lambda}\omega)^2}{\Sigma_{\lambda}} + \frac{\Pi_{\lambda}(i\Sigma_{\lambda}\omega)^3}{\Sigma_{\lambda}^2}} \quad (89)$$

La Ec. (89) puede ser escrita como:

$$\frac{O_{\eta}}{\Sigma_G \Sigma_{\lambda}} = \frac{\frac{G}{\Sigma_G} + \frac{(\Sigma_{\eta} + G\Sigma_{\eta})}{\Sigma_{\lambda} \Sigma_G}(i\omega^*) + \Pi_{\lambda}^* \frac{(G + \Sigma_G)}{\Sigma_G}(i\omega^*)^2}{i\omega^* + (i\omega^*)^2 + \Pi_{\lambda}^*(i\omega^*)^3} \quad (90)$$

Finalmente, la Ec. (90) puede expresarse en la siguiente forma analítica:

$$O_{\eta}(i\omega) = \frac{G+(\Sigma_{\eta}+G)(i\omega)+\Pi_{\lambda}(G+1)(i\omega)^2}{i\omega+(i\omega)^2+\Pi_{\lambda}(i\omega)^3} \quad (91)$$

El operador viscosidad adimensional describe la reología del sistema, es decir, la interacción de las fases líquidas viscoelásticas y la membrana flexo-eléctrica. Este operador contiene tres números adimensionales asociados:

1. La memoria del fluido (Π_{λ}^*)
2. La viscosidad total de las fases (Σ_{η}^*)
3. La elasticidad de la Membrana (G^*)

B) Parámetro Beta

Multiplicamos el parámetro Beta (85) por la longitud característica radial “a” y se tiene lo siguiente:

$$\beta^* = \beta a \quad (92)$$

Finalmente, el parámetro Beta se puede expresar como la raíz cuadrada del Deborah, la frecuencia y el operador fluidez, el cual es el inverso del operador viscosidad. La Ec. (93) es completamente general, y puede expresarse en términos de cualquier operador lineal o fraccional, es decir en el regimen de viscoelasticidad lineal:

$$\beta^* = \sqrt{i^3 De^2 \omega^* O_{\phi}^*(i\omega^*)} \quad (93)$$

Tabla 1. Números adimensionales y su escalamiento

Número adimensional	Escalamiento
Π_{λ}	$\Pi_{\lambda} = \Pi_{\lambda} / \Sigma_{\lambda}^2$
ω	$\Sigma_{\lambda} \omega$
G	$\frac{G}{\Sigma_G}$
β	βa
Σ_{η}	$\frac{\Sigma_{\eta}}{\Sigma_{\lambda} \Sigma_G}$
O_{η}	$\frac{O_{\eta}}{\Sigma_{\lambda} \Sigma_G}$

λ_1	$\frac{\lambda_1}{\lambda}$
λ_2	$\frac{\lambda_2}{\lambda}$
r	$\frac{r}{a}$
z	$\frac{z}{L}$

Tabla 2. Acotaciones de los números adimensionales

Los números adimensionales quedan acotados de la siguiente manera:

Número adimensional	Acotación
Π_λ	$\lambda_1^* + \lambda_2^* = 1$
G	$\frac{1}{G^*} = \frac{1-m}{m}$
Σ_η	$0 < \Sigma_\eta^* < 1$
De	$\frac{\lambda_i}{\lambda_v}$

*Nota: Donde m es un cambio de variable para acotar el valor de la elasticidad de la membrana de 0 a 1.

2.4 Diagrama material 3D

Los números adimensionales pueden ser representados mediante diagramas 3D como el que se muestra a continuación:

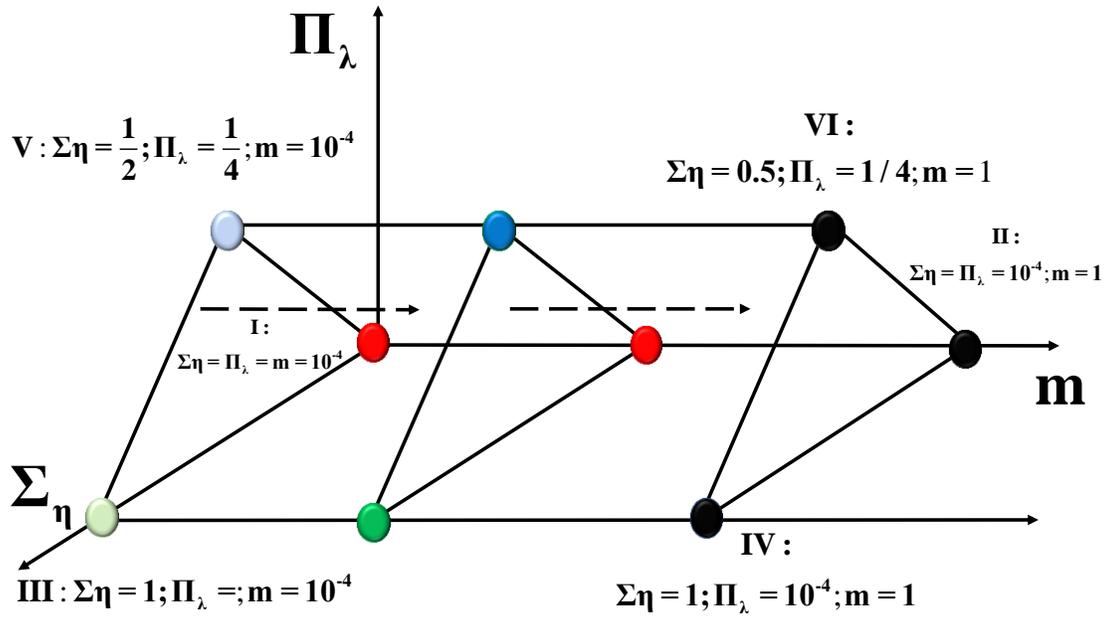


Figura 3. Diagrama material conformado por los números adimensionales.

CAPÍTULO III

SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE

RESULTADOS.

En esta sección se presentarán las simulaciones y resultados numéricos con los números adimensionales.

3.1 Función de transferencia compleja: parte real

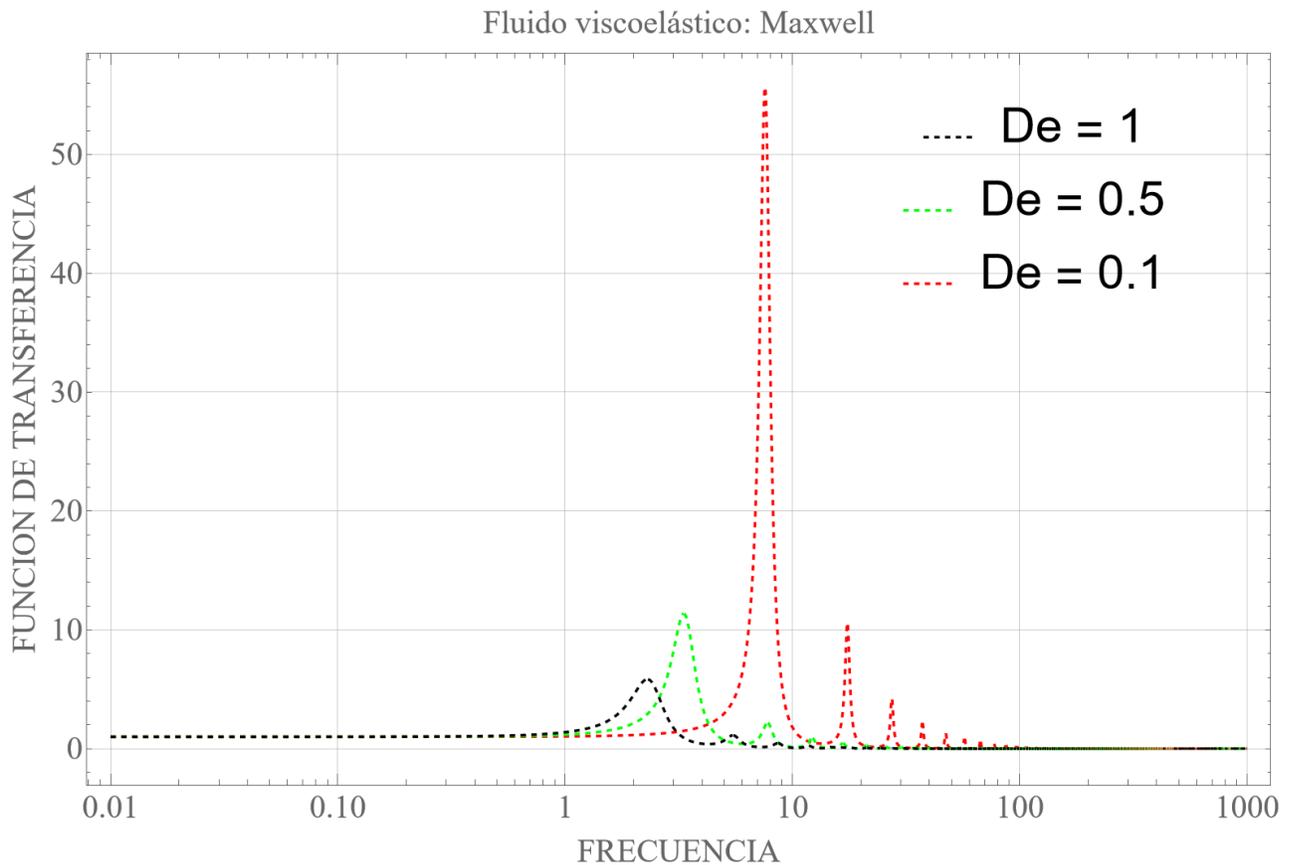


Figura 4: Ilustra la parte real de la FTC VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah.

En la Fig. 4 se muestra la simulación de FCT VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. Los valores numéricos que se emplearon en la simulación corresponden a una membrana deformable, asimetría en las fases líquidas visco-elásticas es decir, que un líquido es muy viscoelástico y otro débilmente visco-elástico. La viscosidad total es el valor máximo correspondiente a una disipación máxima.

Matemáticamente, es claro, que a bajas frecuencias el sistema no presenta respuesta o es independiente de la frecuencia del proceso. Sin embargo, para una frecuencia crítica resonante, el sistema presenta un pico dominante, seguido de un tren de picos menores secundarios. A frecuencias altas, la respuesta es independiente de la frecuencia del proceso.

Físicamente, el pico resonante dominante es una combinación de los mecanismos viscosos, elásticos, inerciales, flexo-eléctricos y dispersivos de la membrana embebida en las fases viscoelásticas. Este dispositivo es claramente un detector de resonancias naturales y despliega su respuesta en función de las propiedades materiales. Nótese, que el efecto del número de Deborah es modificar la respuesta resonante. Si el fluido es viscoelástico, se presenta una respuesta mayor que en el caso de un fluido inelástico (newtoniano).

Biológicamente, la membrana inmersa en las fases viscoelásticas es una muestra del ensayo que nos permitirá cuantificar si el sistema auditivo de una persona se encuentra dañado por algún agente externo. Una persona sana, presentaría una curva resonante dominante como la que se despliega en la simulación roja, mientras que, una persona con daños auditivos presentaría simulaciones como las que se muestran en color negro y azul es decir, que las membranas no detectan los campos eléctricos. Es claro que, se necesitan mayor investigación y datos experimentales que cuantifiquen esto.

3.2 Función de transferencia compleja: parte imaginaria

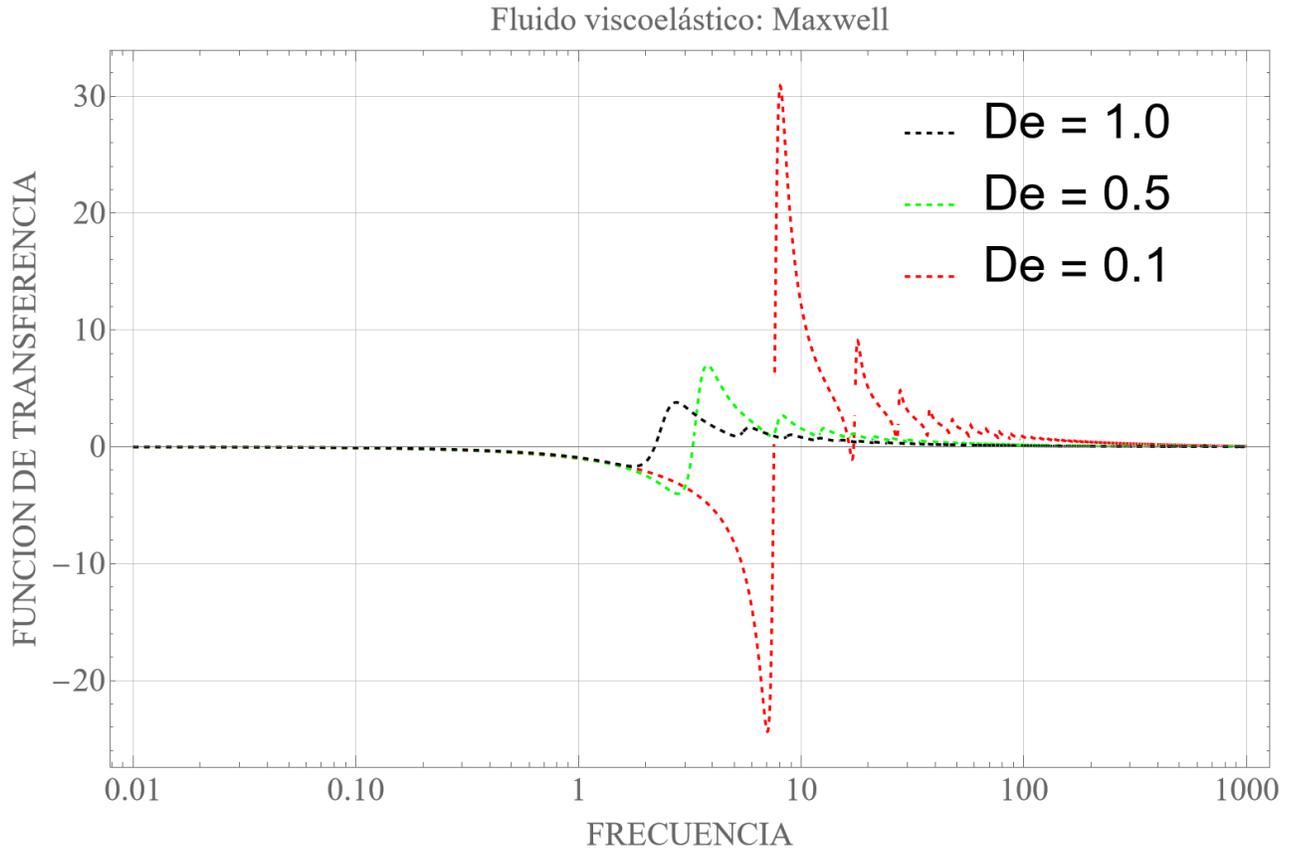


Figura 5: Ilustra la parte imaginaria de la FTC VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah.

En la Fig. 5 se muestra la simulación computacional en el programa Mathematica (Licencia UNAM) de la parte imaginaria de la FCT VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. Los valores numéricos que se emplearon para la simulación corresponden a los de la Fig.4 La parte imaginaria contribuye a los procesos de disipación del sistema, es decir, que durante el proceso la energía se disipa y se desperdicia, por lo tanto, las resonancias no llegan a su punto máximo.

Matemáticamente, a bajas frecuencias el sistema no presenta respuesta o es independiente de la frecuencia del proceso. Sin embargo, para frecuencias determinadas, el sistema decrece hasta un valor mínimo anti resonante. Para un valor mayor a la frecuencia anti resonante, se observa una discontinuidad de salto en la función matemática seguida de un valor máximo resonante. Nótese que, para valores mayores en la frecuencia adimensional resonante, se observa un tren de picos resonantes y anti-resonantes los cuales son de menor magnitud y se desvanecen cuando la frecuencia aumenta. Es importante resaltar, que este tipo de comportamientos se conocen como diagramas tipo “dientes de sierra” y son característicos en las series de Fourier complejas en ingeniería eléctrica. Por último, este tipo de discontinuidades han sido observadas en la parte imaginaria de sistemas eléctricos, biológicos y médicos por lo que, su comportamiento está asociado a los mecanismos o fuerzas macroscópicas viscoelásticas.

Físicamente la contribución anti-resonante puede interpretarse como un perfil de velocidades que se invierte debido a los mecanismos acoplados, viscoelásticos-inerciales, memoria, flexo-eléctricos del sistema de estudio. Se observa, que el efecto del número de Deborah es modificar la respuesta resonante.

Biológicamente, este caso se representa la respuesta resonante y anti-resonante de la membrana viscoelástica inmersa entre las dos fases. Es claro que, se necesita mayor investigación y datos experimentales que cuantifiquen esto.

3.3 Función de transferencia compleja: norma

Fluido viscoelástico: Maxwell

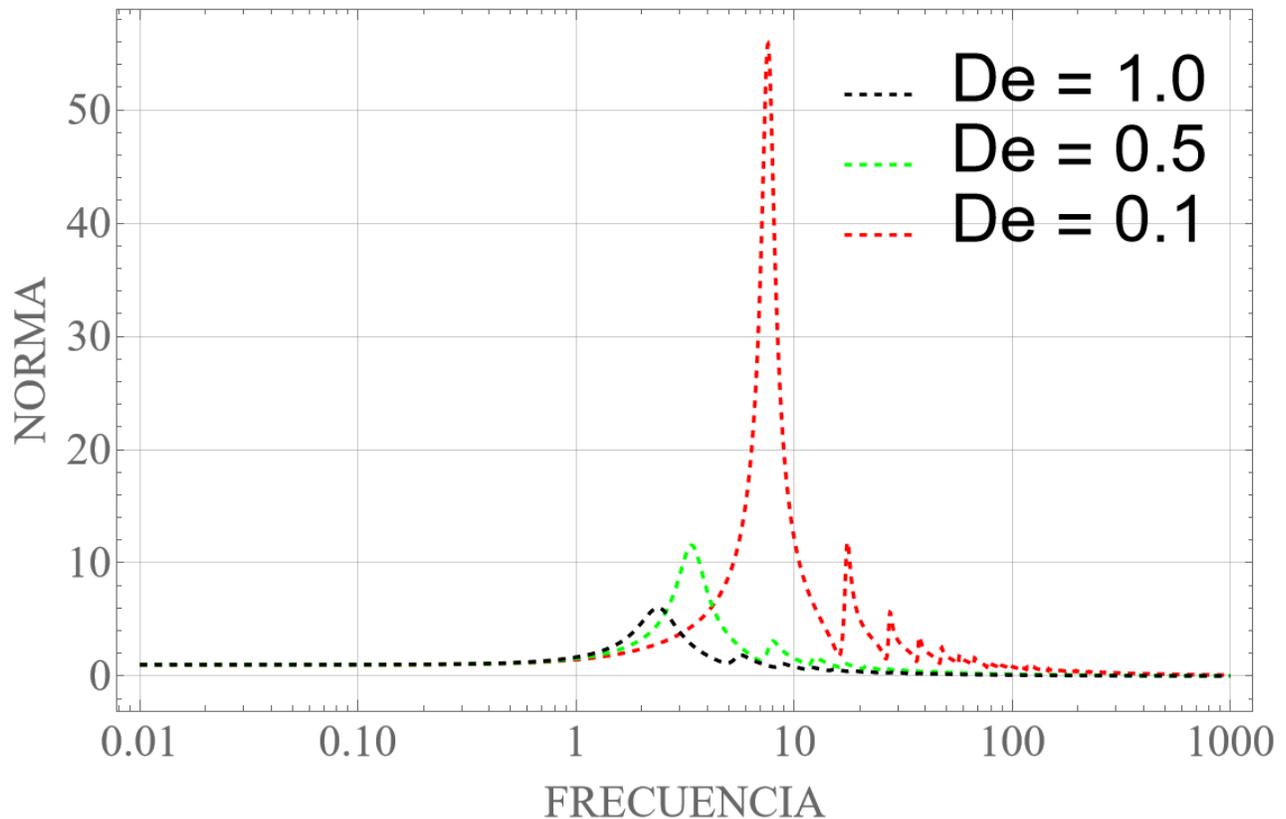


Figura 6: Ilustra la norma de la FTC VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah.

En la Fig. 5 se muestra la simulación de la norma de la FCT VS Frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. La norma se refiere a la contribución de la parte real e imaginaria de nuestro sistema de estudio. Los valores numéricos que se emplearon en la simulación corresponden a una membrana deformable, asimétrica en las fases líquidas viscoelásticas, es decir, que un líquido es muy viscoelástico y otro débilmente viscoelástico.

Matemáticamente, se observa que a bajas frecuencias el sistema no presenta respuesta alguna o es independiente de la frecuencia del proceso. Sin embargo, para una frecuencia crítica resonante, el sistema presenta un pico dominante, seguido de un tren de picos menores secundarios. A frecuencias altas, la respuesta es independiente de la frecuencia del proceso.

Físicamente, el pico resonante dominante es una combinación de los mecanismos viscosos, elásticos, inerciales, flexo-eléctricos y dispersivos de la membrana inmersa las fases viscoelásticas. Nótese que se observa un dominio de la parte real, ya que prevalece el pico de resonancia máxima seguida de la secuencia de picos menores como se observa en la Fig. 4.

Es importante decir que la función del número de Deborah es modificar la respuesta resonante. Si el fluido es viscoelástico, se presenta una respuesta mayor que en el caso de un fluido inelástico (newtoniano).

Biológicamente, prevalece la parte real de igual manera.

3.4 Propiedades en el diagrama material 3D

Finalmente, se estima una aproximación de las condiciones materiales del sistema de estudio con valores aproximados de los números adimensionales.

Cabe recalcar que para que la membrana inmersa pueda captar el campo eléctrico se deben tener condiciones materiales específicas aproximadas para que se presenten estas resonancias con las cuales una persona sana puede captar el sonido. (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014)

Estas propiedades materiales son:

- a) Memoria del fluido Π_λ : simetría baja (visco-elasticidad alta y baja)
- b) Elasticidad de la membrana m : Baja elasticidad en la membrana, es decir, la membrana inmersa entre las fases debe ser fácilmente deformable y poco rígida para poder lograr la flexión.
- c) Viscosidad $\Sigma\eta$: Alta viscosidad en ambas fases (la suma de las dos es casi 1)

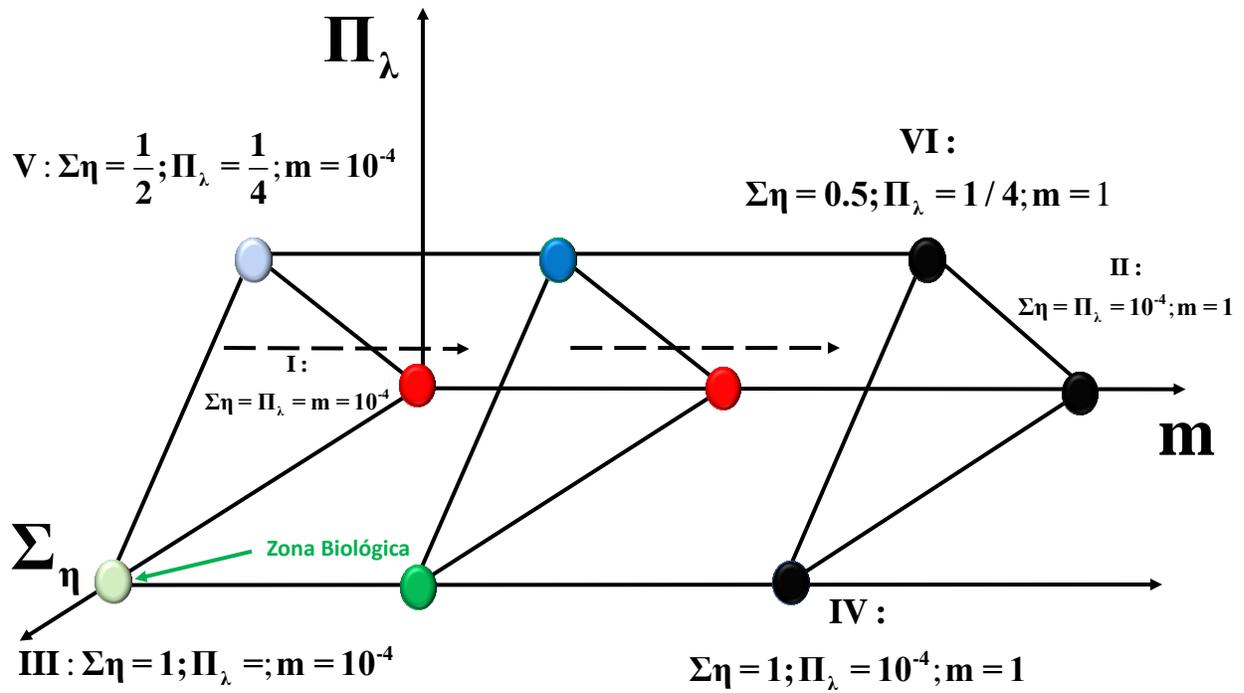


Figura 7. Diagrama material en donde se localiza en punto de mayor resonancia.

En la Fig. 7, el punto rojo indica el lugar donde se encuentra nuestras propiedades deseadas en nuestro sistema de estudio en el diagrama material 3D.

CAPÍTULO IV
CONCLUSIONES Y TRABAJO
FUTURO.

4.1 Perspectivas de la investigación

En este trabajo se utilizó el concepto de flexo-electricidad en cristales líquidos con aplicación a las células ciliadas externas. Para modelar este fenómeno se utilizó un capilar con dos fases viscoelásticas y una membrana flexo-eléctrica adherida en el centro del capilar a la cual se le aplicó un campo eléctrico de baja amplitud, lo que provoca que se forme un domo inferior y superior lo cual, induce un flujo volumétrico debido a la diferencia de presiones entre la parte superior e inferior de la membrana demostrado (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia Rey 2014). A partir de un balance mecánico y la ecuación de forma de la membrana y suponiendo que las fases son viscoelásticas se deduce una ecuación que describe el cambio de la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado y las propiedades materiales (viscoelásticas, elásticas y flexo-eléctricas del sistema; Herrera-Valencia y Rey 2014).

Matemáticamente el modelo describe una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en la curvatura promedio la cual se puede interpretar como una clase de oscilador armónico forzado, este modelo contiene una contribución inercial asociado a la segunda derivada de la curvatura con respecto al tiempo, una primera derivada asociada con la disipación y el termino constante relacionado con la elasticidad de la membrana Herrera-Valencia y Rey 2018, 2023).

Se obtuvieron dos contribuciones de la función de transferencia compleja, la parte real que corresponde a los mecanismos de relajación y la parte imaginaria que se refiere a los procesos de disipación. Y la tercera que es la norma, la cual es una contribución de la parte real e imaginaria e donde predominan los mecanismos de la parte real (Wang et al. 2023).

Se obtuvieron tres números adimensionales ($\Sigma\eta$, $\Pi\lambda$, k), relacionados a la simetría de las fases viscoelásticas, la viscosidad total de bulto y el radio elástico, en donde los limites matemáticos de estos números adimensionales, generan un espacio material de seis posibles modos (Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014, 2018, 2023). Geométricamente, este espacio puede ser representado por un espacio prismático 3D. Las coordenadas de este espacio son la viscosidad de Bulto, la elasticidad de la membrana y la memoria asociada al producto de los tiempos de relajación respectivamente. Estos modos representan cualquier punto material en nuestro sistema.

4.2 Contribución al conocimiento universal

- Se deduce un modelo electro-reológico que describa los cambios en la curvatura en función del campo eléctrico aplicado y las propiedades viscoelásticas del medio y elásticas de la membrana flexo-eléctricas. (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014)
- Se presenta una metodología general en el régimen de viscoelasticidad lineal, con el fin de incorporar diferentes mecanismos a través de las ecuaciones constitutivas.
- Se obtiene soluciones analíticas, para el flujo volumétrico como función del tiempo y las propiedades del medio (fases viscoelásticas y membrana elástica). (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014)
- Con base en el análisis adimensional, se obtiene las condiciones para las cuales, se obtienen las curvas resonantes en donde el sistema trabaja como un amplificador de tipo biológico. Estas condiciones son:
 - A) La primera de estas condiciones es el contraste en las fases viscoelásticas (asimetría de las fases), una de las fases es muy viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica. (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014, 2018, 2023)
 - B) La segunda es que la viscosidad de bulto debe ser muy grande es decir cercana a uno. Esto significa que la fase superior e inferior tiene la máxima viscosidad posible. (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014, 2018, 2023)
 - C) La tercera es que la elasticidad de la membrana es muy pequeña con respecto a la elasticidad de bulto de las fases viscoelásticas. (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014, 2018, 2023)
- Todos los resultados obtenidos en la presente investigación, son analíticos y pueden ser punto de partida para resultados numéricos en el régimen de viscoelasticidad no lineal.

4.3 Trabajo futuro

Finalmente, este trabajo se puede continuar de una manera natural implementando los siguientes puntos importantes:

- A) Considerar modelos sofisticados de fluidos complejos con propiedades materiales y mecanismos diferentes.
- B) Diseños experimentales.
- C) Simulaciones computacionales en COMSOL MULTIPHYSICS, Dinámica molecular, OPENFOAM, etc.

BIBLIOGRAFÍA

A.D. Rey (2008) Nonlinear actuator model for flexoelectric membranes. *Int. J. of Design Nature Ecodynam.* **3** 28-38.

A.D. Rey (2006) Liquid crystals model of membrane flexoelectricity. *Phys. Rev. E* **74** 011710/1-011710/11.

A.D. Rey (2007) Capillary models for liquid crystal fibers, membranes, films, and drops. *Soft Matter* **2** 1349-1368.

A.G. Petrov (2001) Flexoelectricity of model and living membranes. *BBA-Biomembranes* **1561**, 1-25.

A. G. Petrov (2006) Electricity and mechanics of bio-membrane systems: flexoelectricity in living membranes. *Anal. Chim. Acta* **568**, 70-83.

D. Ehrenstein, H.H. Iwasa (1996) Viscoelastic relaxation in the membrane of the auditory outer hair cell. *J. Biophys.* **71** 1087-1094.

E.E. Herrera-Valencia and A.D. Rey (2014). Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* **372**: 20130369/1-28.

E.E. Herrera-Valencia and A. D. Rey (2023). Fluctuating flexoelectric membranes in asymmetric viscoelastic media: Power spectrum through mechanical network and transfer function models, *Symmetry* **15** 1004-1/36.

F. Sachs, W.E. Brownell and A.G. Petrov (2009) Membrane electromechanics in biology, with a focus on hearing. *MRS Bull* **34** 665-670.

J. Flores, J. Alastruey, E. Corvera-Poiré (2016) A novel analytical approach to pulsatile blood flow in the arterial network. *Ann. Biom. Eng.* **44**, 3047-3068.

J.S. Oghalai, H.B. Zhao, J.W. Kutz, W. Brownell (2000) Voltage-and tension dependent lipid mobility in the outer hair cell plasma membranes. *Science* **287** 658-661.

J.S. Patel, R. B. Meyer (1987) Flexoelectric electro-optics of a cholesteric liquid crystals *Phys. Rev. Lett.* **58** 1538-1540.

M. Abou-Dakka, E.E. Herrera-Valencia, A.D. Rey (2012) Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 185-186 1-17.

M. Fikus, P. Pawlowski (1989) Bioelectrorheological model of the cell. 2. Analysis of creep N. and its experimental verification. *J. Theor. Biol.* 137 365-373

R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager (1987), *Dynamics of polymeric liquids*, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.

R. Collepardo-Guevara, E. Corvera Poiré (2007) Controlling viscoelastic flow tuning frequency during occlusions. *Phys. Rev. E* 76 02630.

R.D. Hawkins, M. Lovett (2004) The developmental genetics of auditory hair cells. *Hum. Mol. Genet.* **13** R289-R296.

R.M. Raphael, A.S. Popel, W.E. Brownell (2000) A membrane bending model of outer hair cell electromotility. *Biophys. J.* **78** 2844-2862.

W.E. Brownell (1985) Evoked mechanical responses of isolated cochlear outer hair cells. *Science* 227 194-196.

Z. Wang, P. Servio, E.E. Herrera-Valencia and A.D. Rey (**2022**), Thermal fluctuation spectrum of semiflexible filaments and polymers: A line liquid crystal model. *Can. J. Chem. Eng.* 1-12