UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Una prueba de eliminación de corte para la lógica GL

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Ricardo Jaimes Urbán

DIRECTOR
Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea
Facultad de Ciencias, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, 2024.

El presente trabajo fue realizado con el apoyo del
PAPIIT DGAPA UNAM
como parte del proyecto
“Lógicas no clásicas: aspectos deductivos de la computación a la filosofía II”
(**IN101723** febrero a mayo y agosto a noviembre de 2023)

Adicionalmente se contó con el apoyo de las becas otorgadas por el
CONAHCyT
durante el periodo de febrero de 2021 a julio de 2022
y por el
Departamento de Becas de Posgrado de la UNAM
durante el periodo de agosto de 2022 a enero de 2023

Índice general

Introducción

La lógica GL o lógica de Gödel-Löb es una lógica modal utilizada para investigar resultados de demostrabilidad en la aritmética de Peano (AP) de forma sencilla. Dicha lógica consiste en la lógica modal K, junto con el axioma

$$\Box(\Box A \to A) \to \Box A,$$

llamado axioma GL. Dentro de esta lógica, el operador modal "$\Box$" se interpreta como "ser demostrable". Es decir, "$\Box A$" se interpreta como "A es demostrable en AP".

Uno de los problemas de mayor relevancia de la lógica GL, durante los últimos años, ha sido el teorema de eliminación de corte, el cual establece que cualquier demostración que utilice la regla de corte[1] puede realizarse sin utilizar dicha regla. Como veremos más adelante, en la sección 1.2, la regla de corte formaliza la noción de lema que usamos habitualmente en la práctica matemática, por lo que su eliminación establece que toda demostración que se apoya en lemas puede ser hecha de manera directa sin utilizarlos. Este teorema tiene consecuencias importantes[2] como son la consistencia del sistema en cuestión y la propiedad de la subfórmula, la cual establece que si un secuente $X \vdash Y$ tiene una demostración (libre de corte), entonces todas las fórmulas empleadas en dicha demostración son subfórmulas de X e Y.

La primera persona en trabajar el teorema de eliminación de corte para la lógica GL fue Leivant [9] en 1981. Sin embargo, dos años más tarde Valentini [20] mostró que los argumentos de Leivant eran incorrectos y dio una nueva demostración utilizando una inducción triple que resulta bastante

[1] Véase la sección 1.2.
[2] Véase [14], pp. 40-46, 76-80.

complicada, pues uno de los parámetros de inducción se define a partir de las aplicaciones de la regla GLR[3].

Debido a que Valentini usa conjuntos en vez de multiconjuntos en su definición de secuentes, su demostración fue cuestionada en 2003 por Moen [12], quien argumentaba que, al utilizar multiconjuntos, el argumento de Valentini no funcionaba. Sin embargo, esto sería desmentido en 2012 por Goré y Ramanayake [6].

En 2001 Sasaki [17] presentó una nueva demostración que, a pesar de ser correcta, no tuvo una gran aceptación, debido a que es una prueba indirecta y muy complicada. Posteriormente a esto, Negri [13] en 2005 y Poggiolesi [15] en 2009 dieron otras demostraciones, utilizando *secuentes etiquetados* y *árboles de hipersecuentes*, respectivamente, las cuales recurren a cálculos de secuentes distintos del estándar y a algunos elementos semánticos.

En el año 2016, Brighton [3] demostró la eliminación de corte para la lógica GL, utilizando un *cálculo de regresiones.* Sin embargo, en 2021 Goré *et. al.* [7] señalaron que la demostración de Brighton es incorrecta y dieron una demostración utilizando el asistente de pruebas **Coq**[4], la cual es totalmente sintáctica y únicamente utiliza dos parámetros de inducción.

Actualmente aún se cuestiona si las demostraciones asistidas por computadora pueden ser consideradas como demostraciones auténticas o si su propósito es el mismo que el de las demostraciones tradicionales. Esto sucede debido a diversos factores, entre ellos su poca universalidad, pues el poder obtener y entender demostraciones asistidas por computadora requiere un amplio conocimiento previo del asistente utilizado; o posibles errores en las demostraciones causados por errores de software. Adicionalmente, la constante actualización de los asistentes de demostración muchas veces tiene como consecuencia problemas de retrocompatibilidad, por lo que diversas demostraciones realizadas con versiones antiguas de los asistentes no pueden ser verificadas con las versiones más actuales. Esto podría poner en duda su legitimidad.

Por lo anterior, el próposito principal de este trabajo es evidenciar que la demostración de Goré *et. al.* efectivamente es legítima. Para lograrlo, reconstruiremos totalmente los razonamientos mencionados en dicha prueba sin el uso de ninguna herramienta computacional.

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: comenzamos

[3]Véase [20] pp. 472-473.
[4]`https://coq.inria.fr/`

el capítulo 1 dando un poco de teoría previa necesaria. En el capítulo 2, introducimos los cálculos de secuentes GLS y $PSGLS$ utilizados en [7], así como algunas de sus propiedades relevantes. En el capítulo 3, hacemos una demostración del teorema de eliminación de corte para el sistema $PSGLS$, basada en la de Goré *et. al.* Sin embargo, a diferencia de lo realizado en el artículo antes mencionado, nosotros no recurrimos a ningún asistente de pruebas. En el capítulo 4, presentamos el sistema GLN de deducción natural para la lógica GL. Finalmente, en el capítulo 5 demostramos la equivalencia entre los sistemas GLS y GLN.

1

Preliminares

En este capítulo exponemos algunas cuestiones previas que serán importantes y útiles en los demás capítulos.

1.1. Deducción natural

La deducción natural fue introducida por Gentzen en el artículo *Untersuchungen über das logische Schließen* [5], con la finalidad de establecer un sistema formal que reflejara el razonamiento lógico involucrado en las demostraciones matemáticas con la mayor precisión posible.

Dentro de estos sistemas, a cada operación lógica le corresponde una regla de introducción y una de eliminación, cuyo comportamiento consiste en representar la definición de la operación lógica correspondiente, en el caso de las reglas de introducción, y representar las consecuencias lógicas de dicha definición, en el caso de las reglas de eliminación.

Las derivaciones en un sistema de deducción natural se expresan mediante árboles formados por hipótesis temporales a las que se les aplican reglas lógicas para llegar a una conclusión que no depende de las hipótesis.

Las únicas dos reglas que nos permiten "descargar" hipótesis son las reglas $(\to I)$ y $(\vee E)$ que a continuación explicamos:

$$\dfrac{\begin{matrix} \overset{i}{[A]} \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \to B}\ (\to I)_i$$

En este esquema, los paréntesis cuadrados indican un número arbitrario de ocurrencias de la fórmula A, a partir de las cuales se deduce la fórmula B. El superíndice i de la fórmula A indica que dicha fórmula es una hipótesis abierta, mientras que el subíndice i de $(\to I)$ indica que la respectiva hipótesis es cerrada por dicha regla.

El razonamiento reflejado por esta regla es aquel que utilizamos ampliamente en la práctica matemática, en el que para demostrar una implicación suponemos el antecedente y le aplicamos argumentos deductivos para obtener el consecuente. Por la definición de la implicación, sabemos que es verdadera siempre que el consecuente lo es. Por tal razón, al derivarlo podemos concluir que la implicación es verdadera sin depender de A y consecuentemente, esta regla nos permite “descargar” la hipótesis A.

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} \overset{i}{[A]} \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{i}{[B]} \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\,(\vee E)_i$$

Análogamente a lo que ocurre en el esquema de $(\to I)$, en este caso, los paréntesis cuadrados también indican un número arbitrario de ocurrencias de las fórmulas A y B, a partir de las cuales se deduce la fórmula C. De igual manera, los superíndices i de las fórmulas A y B indican que dichas fórmulas son hipótesis abiertas, mientras que el subíndice i de $(\vee E)$ indica que las respectivas hipótesis son cerradas por dicha regla.

El razonamiento reflejado por esta regla es conocido como análisis de casos. Por la definición de la disyunción, sabemos que es verdadera cuando al menos uno de los disyuntos lo es. Si a partir de ambos disyuntos podemos derivar una fórmula arbitraria de manera independiente, entonces podemos concluir que dicha fórmula es verdadera por sí misma y, consecuentemente, esta regla nos permite “descargar” las hipótesis A y B.

Como se mencionó anteriormente, las reglas $(\to I)$ y $(\vee E)$ nos permiten descargar un número arbitrario de ocurrencias de una misma fórmula o de un mismo par de fórmulas respectivamente. Dentro de estas posibilidades, nos parece importante enfatizar lo que se conoce como “descarga vacua” y “descarga múltiple”. Una *descarga vacua* sucede cuando descargamos una hipótesis que no estaba presente en la derivación hasta ese momento. Por otro lado, una *descarga múltiple* sucede cuando descargamos más de una ocurrencia de una misma fórmula. A continuación mostramos un ejemplo de cada una.

Ejemplo 1.1. Consideremos la siguiente derivación de la fórmula $B \to (A \to B)$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{B}}{A \to B}\,(\to I)}{B \to (A \to B)}\,(\to I)_1$$

En esta derivación tenemos una descarga vacua en la primera aplicación de $(\to I)$, pues la fórmula A no aparecía en la derivación con anterioridad.

Ejemplo 1.2. Consideremos la siguiente derivación de la fórmula $A \to A \wedge A$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \quad \overset{1}{A}}{A \wedge A}\,(\wedge I)}{A \to A \wedge A}\,(\to I)_1$$

En esta derivación tenemos una descarga múltiple, pues se están descargando dos ocurrencias de la fórmula A que fueron utilizadas anteriormente.

1.1.1. Reglas de eliminación generalizadas y normalización

Uno de los principales temas de interés en los sistemas de deducción natural es el teorema de *normalización*. A continuación explicamos brevemente el concepto de derivación normal y el teorema de normalización.

Definición 1.1 (Derivación normal)**.** Una derivación en un sistema de deducción natural es *normal* cuando ninguna instancia de una regla de introducción es seguida por una instancia de la regla de eliminación correspondiente al mismo conectivo lógico.

El propósito de la normalización es eliminar redundancias de las demostraciones, donde por redundancia nos referimos a cualquier fórmula cuyo conectivo principal se elimina inmediatamente después de haber sido introducido. Puesto que la definición anterior puede resultar confusa, a continuación mostramos un ejemplo para aclararla.

Ejemplo 1.3. Consideremos las siguientes derivaciones de A a partir de $A \wedge B$:

$$\dfrac{\overset{1}{A \wedge B} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{A \wedge B}}{A}\,(\wedge E)}{(A \wedge B) \to A}\,(\to I)_2}{A}\,(\to E) \qquad\qquad \dfrac{\overset{1}{A \wedge B}}{A}\,(\wedge E)$$

De acuerdo con la definición, la derivación de la izquierda no es normal y la de la derecha sí lo es.

El teorema de normalización nos dice que para cualquier derivación es posible encontrar una derivación normal con la misma conclusión y las mismas premisas. La demostración usual de este teorema consiste en permutar la aplicación de las reglas utilizadas y definir "reducciones" que permitan eliminar las redundancias de la derivación.

Una manera de facilitar considerablemente la demostración del teorema de normalización es mediante el uso de reglas de eliminación generalizadas. A continuación explicamos brevemente estas reglas.

Las reglas de eliminación usuales de conjunción e implicación son las siguientes:

$$\dfrac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{A \to B \quad A}{B}\,(\to E)$$

Su comportamiento consiste en deducir cualquiera de las conjuntivas a partir de la conjunción, en el primer caso, y, en el segundo caso, deducir el consecuente de una implicación a partir del antecedente y de la implicación misma. Al generalizarlas, se tienen las reglas

$$\dfrac{A \wedge B \qquad \begin{array}{c}[\overset{i}{A}], [\overset{i}{B}] \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,(\wedge E)_i \qquad\qquad \dfrac{A \to B \quad A \qquad \begin{array}{c}[\overset{i}{B}] \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,(\to E)_i$$

Cuyo comportamiento consiste, en el primer caso, en deducir una fórmula arbitraria a partir de las conjuntivas, tomando la conjunción como hipótesis, y, en el segundo caso, en deducir una fórmula arbitraria a partir del consecuente, tomando como hipótesis la implicación y el antecedente.

Como mencionamos anteriormente, las reglas de eliminación generalizadas facilitan la demostración del teorema de normalización. Esto sucede ya que el concepto de derivación normal se redefine de la siguiente forma.

Definición 1.2 (Derivación normal)**.** Una derivación en un sistema de deducción natural con reglas de eliminación generalizadas es *normal* cuando todas las premisas principales[1] de las reglas de eliminación son hipótesis.

Como se verá en el capítulo 5, considerar reglas generalizadas resulta conveniente para la prueba de equivalencia entre sistemas, debido a que en el caso de las reglas izquierdas de GLS la fórmula principal no necesariamente forma parte del consecuente.

1.2. Cálculos de secuentes

Un *secuente* es una expresión de la forma $X \vdash Y$, donde $X = \{A_1, \ldots, A_n\}$ e $Y = \{B_1, \ldots, B_k\}$ son multiconjuntos[2] finitos de fórmulas que no son vacíos simultáneamente. A X se le llama *antecedente* o *contexto* y a Y se le llama *consecuente*[3]. Esta expresión tiene el mismo significado que la fórmula

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_k.$$

Notemos que, de acuerdo a esto, si X es vacío, $B_1 \vee \cdots \vee B_k$ es una tautología. Análogamente, si Y es vacío, $X \vdash Y$ es equivalente al secuente $X \vdash \bot$.

El concepto de secuente fue introducido por Gentzen en [5], donde presenta los cálculos de secuentes LJ y LK. Un *cálculo de secuentes* consta de un conjunto finito de *reglas de secuentes*. Cada regla consiste en un secuente conclusión y un número finito de secuentes premisa. Si un esquema de regla no tiene premisas, entonces es llamado *secuente inicial*. Estas reglas se dividen en *reglas lógicas* y *reglas estructurales*. Las reglas lógicas introducen

[1] La premisa principal de una regla es aquella con el conectivo lógico tratado por la regla; es decir, la fórmula sobre la cual actúa la regla.

[2] Un multiconjunto es un conjunto en el que cada uno de sus elementos tiene asociada una multiplicidad que indica su número de repeticiones.

[3] A lo largo de este trabajo utilizaremos X para denotar al antecedente de un secuente e Y para denotar al consecuente. Esto en virtud de ser fieles a la notación usada por Goré *et. al.* en [7].

nuevas fórmulas, ya sea en el contexto o en el consecuente. Las reglas estructurales, por otro lado, actúan directamente sobre el contexto o el consecuente de los secuentes en vez de hacerlo sobre las fórmulas lógicas que se encuentran dentro de estos. Las reglas estructurales usuales son las que a continuación listamos y explicamos.

Reglas de "weakening" izquierda y derecha:

$$\frac{X \vdash Y}{A, X \vdash Y}\ (LWk) \qquad \frac{X \vdash Y}{X \vdash Y, A}\ (RWk)$$

Su comportamiento consiste en introducir una fórmula arbitraria en el contexto o en el consecuente. Intuitivamente, estas reglas nos dicen que la noción de derivabilidad no se afecta al agregar hipótesis o conclusiones adicionales.

$$\frac{A, A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y}\ (LCtr) \qquad \frac{X \vdash Y, A, A}{X \vdash Y, A}\ (RCtr)$$

Su comportamiento consiste en eliminar duplicaciones de fórmulas en el contexto o en el consecuente. Intuitivamente, estas reglas nos dicen que la noción de derivabilidad no se ve afectada por la multiplicidad de hipótesis ni de conclusiones.

$$\frac{X \vdash Y, A \quad A, X \vdash Y}{X \vdash Y}\ (Cut)^4$$

El comportamiento de esta regla es un poco más complicado. Lo que nos dice es que si a partir de X deducimos Y y A y a la vez, a partir de A y X deducimos Y, entonces, a partir de X deducimos Y sin necesidad de A. Es decir, la regla de corte formaliza la noción de lema que usualmente utilizamos en la práctica matemática.

En un cálculo de secuentes, una *derivación* de un secuente s es un árbol finito tal que el nodo raíz es s y cada nodo interior y sus hijos directos son la conclusión y premisa(s) de una instancia de cualquier regla. Una *prueba* es una derivación donde cada hoja es un secuente inicial.

Una de las cuestiones importantes de los cálculos de secuentes es en qué casos es posible la eliminación de corte; es decir, en qué casos es posible dar una demostración directa sin utilizar lemas. El primero en demostrar la posibilidad de esto fue Gentzen para los sistemas LJ y LK en [5] mediante

[4] Utilizamos la versión de la regla (Cut) dada por Goré *et. al.* en [7].

un procedimiento bastante complicado[5] que consiste en reemplazar a la regla de corte[6]

$$\frac{W \vdash Y, A \quad A, X \vdash Z}{W, X \vdash Y, Z}\ (Cut)$$

por la regla

$$\frac{W \vdash Y \quad X \vdash Z}{W, X \backslash \{A\} \vdash Y \backslash \{A\}, Z}\ (mix)$$

donde $A \in X \cap Y$ y $X\backslash\{A\}$ $(Y\backslash\{A\})$ es el conjunto que se obtiene al eliminar de X (Y) todas las instancias de A. Afirmando que toda instancia de corte pude substituirse por una instancia de mix mediante una sucesión finita de weakenings.

Posteriormente define el *rango izquierdo* de una derivación como el número de secuentes consecutivos que preceden a $W \vdash Y$ y tienen a A en su consecuente. Análogamente, define el *rango derecho* de una derivación como el número de secuentes consecutivos que preceden a $X \vdash Z$ y tienen a A en su contexto. A partir de lo anterior, define el *rango* de una derivación como la suma de su rangos derecho e izquierdo. Finalmente, realiza una inducción sobre el rango de una derivación y el *grado* de la fórmula A, donde el grado de una fórmula es el número de símbolos lógicos que contiene, para eliminar las instancias de mix en una derivación.

En la actualidad, el procedimiento empleado usualmente para la demostración del teorema de eliminación de corte utiliza inducción y consiste en permutar el corte con otras reglas progresivamente hasta llegar al caso en que su conclusión es un secuente inicial, por lo que el uso de la regla resulta redundante y puede quitarse trivialmente.

Sin embargo, en el caso de la lógica GL esta estrategia falla y es necesario recurrir a una técnica mucho más complicada que consiste en hacer inducción sobre tres parámetros: grado,rango y ancho; donde el ancho de una derivación es un parámetro que se define a partir de instancias de las reglas (GLR) y (Cut)[7], por lo que resulta difícil de manejar. Como ya mencionamos anteriormente, en el tercer capítulo de este trabajo presentaremos una demostración más sencilla que utiliza inducción sobre dos parámetros mucho más sencillos: tamaño de una fórmula y derivación de altura máxima de un secuente.

[5] Véase [5], pp. 88-103.

[6] Mientras que Gentzen utiliza una versión multiplicativa de la regla de corte, nosotros utilizamos una versión aditiva. Véase la sección 1.3.

[7] Véase [20], pp. 472-473

1.3. Deducción natural en estilo de secuentes

Adicionalmente a la representación habitual, es posible representar los sistemas de deducción natural en *estilo de secuentes*. Es decir, las reglas de deducción natural usuales se reescriben de tal manera que en las derivaciones no se utilizan hipótesis temporales y se cuenta con contextos.

Cuando trabajamos con deducción natural en estilo de secuentes, el consecuente tiene únicamente una fórmula y el contexto está formado por las hipótesis abiertas de la derivación. A continuación mostramos dos ejemplos para aclarar esto.

Ejemplo 1.4. Consideremos el siguiente esquema de derivación[8]:

$$\dfrac{\begin{array}{c} X \\ \vdots \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} \overset{1}{A}, X \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \overset{1}{B}, X \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ (\vee E)_1$$

donde X es el conjunto de hipótesis abiertas. Entonces, la derivación se representa en estilo de secuentes como sigue:

$$\dfrac{X \vdash A \vee B \quad A, X \vdash C \quad B, X \vdash C}{X \vdash C}\ (\vee E)$$

Ejemplo 1.5. Consideremos el siguiente esquema de derivación:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{1}{A}, X \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow I)_1$$

donde X es el conjunto de hipótesis abiertas. Entonces, la derivación se representa en estilo de secuentes como sigue:

$$\dfrac{A, X \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow I)$$

[8]Un esquema de derivación es una derivación en la que se utilizan variables para indicar fórmulas arbitrarias y se omite la escritura de las posibles subderivaciones mediante puntos suspensivos. Al substituir las variables por fórmulas concretas y los puntos suspensivos por las subderivaciones apropiadas, se tendrá una derivación concreta.

Cuando se utiliza este estilo de representación, es necesario utilizar reglas estructurales. A continuación listamos dichas reglas y mencionamos a qué corresponden en la representación usual.

Regla de "weakening":

$$\frac{X \vdash C}{A, X \vdash C}\ (Wk)$$

Como mencionamos en la sección 1.1, en los sistemas de deducción natural es posible hacer descargas vacuas. Puesto que en el estilo de secuentes no se descargan fórmulas, necesitamos una regla estructural que nos permita "simular" esta acción. La regla de weakening nos permite hacer esto.

Para aclararlo consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.6. Consideremos la derivación del ejemplo 1.1. En estilo de secuentes se escribe de la siguiente forma:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{B \vdash B}\ (Hip)}{A, B \vdash B}\ (Wk)}{B \vdash A \to B}\ (\to I)}{\vdash B \to (A \to B)}\ (\to I)$$

Notemos que la descarga vacía utilizada en el ejemplo 1.1 es reemplazada por una instancia de (Wk) seguida de la respectiva instancia de $(\to I)$.

Regla de "contracción":

$$\frac{A, A, X \vdash C}{A, X \vdash C}\ (Ctr)$$

Como mencionamos en la sección 1.1, en los sistemas de deducción natural es posible hacer descargas múltiples. Puesto que en el estilo de secuentes no se descargan fórmulas, necesitamos una forma de "simular" esta acción. A diferencia de lo que ocurre con las descargas vacuas y la regla de weakening, aquí es importante diferenciar los siguientes dos casos:

1) Reglas con contextos separados o multiplicativas. Una regla con contextos separados es aquella en la que sus premisas cuentan con contextos distintos y el contexto de la conclusión está formado por la suma de los contextos de las premisas. Donde para multiconjuntos X e Y, el

multiconjunto suma $X \uplus Y$ es el multiconjunto tal que la multiplicidad de cada $A \in X \uplus Y$ es la suma de las multiplicidades de A en X e Y. Escribimos X, Y para abreviar $X \uplus Y$. Para una fórmula A, escribimos A, X y X, A para abreviar $\{A\} \uplus X$.

En este caso, la regla de contracción nos permite "simular" una descarga múltiple.

2) Reglas con contexto único o aditivas[9]. Una regla con contexto único es aquella en la que sus premisas y conclusión tienen el mismo contexto. En este caso, la regla de contracción resulta innecesaria, pues las descargas múltiples suceden de manera *natural* debido a la forma de las reglas lógicas.

Para aclarar esto, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.7. Consideremos la derivación del ejemplo 1.2. En estilo de secuentes con contextos separados, se escribe de la siguiente forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad A \vdash A}{A, A \vdash A \wedge A}\,(\wedge I)}{A \vdash A \wedge A}\,(Ctr)}{\vdash A \to A \wedge A}\,(\to I)$$

Mientras que en estilo de secuentes con contexto único, se escribe como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad A \vdash A}{A \vdash A \wedge A}\,(\wedge I)}{\vdash A \to A \wedge A}\,(\to I)$$

Notemos que, en el primer caso, la descarga múltiple utilizada en el ejemplo 1.2 es reemplazada por una instancia de (Ctr) seguida de la respectiva instancia de $(\to I)$; mientras que en el segundo caso no es necesario usar (Ctr), ya que la fórmula no se duplica.

Regla de "substitución":

[9]En este trabajo utilizaremos únicamente reglas con contexto único, pues esto facilita la demostración de admisibilidad de las reglas estructurales.

$$\frac{X \vdash A \quad A, X \vdash C}{X \vdash C}\ (Sub)$$

Dentro de los sistemas de deducción natural usuales es posible componer derivaciones de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} X \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} X, A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} X \\ \vdots \\ A, X \\ \vdots \\ C \end{array}$$

La regla de substitución nos permite realizar estas "composiciones" cuando se está trabajando con secuentes. A simple vista, la regla de substitución es muy similar a la regla de corte. Sin embargo, su funcionamiento es muy distinto. De acuerdo con Negri y von Plato:

> La cerradura bajo substitución solamente establece que la substitución mediante unión de derivaciones produce una derivación correcta... En deducción natural en estilo de cálculo de secuentes, no hay fórmulas principales en el antecedente, y por lo tanto la fórmula de substitución en la premisa derecha también aparece en al menos alguna premisa de la regla que concluye la premisa derecha... La eliminación de substitución es muy diferente de la eliminación de corte.[6]

A continuación mostramos un ejemplo para aclarar el funcionamiento de esta regla, donde $\neg A \equiv_{def} A \rightarrow \bot$.

Ejemplo 1.8. En este ejemplo asumiremos que las reglas

$$\frac{\neg(A \vee \neg B)}{\neg A \wedge B}\ (\text{De Morgan}) \qquad \frac{X \vdash \neg(A \vee \neg B)}{X \vdash \neg A \wedge B}\ (\text{De Morgan})$$

son admisibles[10] sin demostrarlo. En la demostración del teorema 5.1 demostramos un caso particular de la versión de secuentes como parte de la demostración del caso 2) del paso inductivo de la segunda parte[11].

---

[6] [14], p. 172.

[10] Una regla es admisible si su conclusión puede inferirse a partir de sus premisas mediante las reglas primitivas del sistema.

[11] Véase la derivación Σ_1 en la p. 76.

Consideremos la siguientes derivaciones:

$$\dfrac{\neg(A \overset{1}{\vee} \neg A)}{\neg A \wedge A}\,(\text{De Morgan}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \overset{1}{\wedge} A}{\neg A}\,(\wedge E) \quad \dfrac{\neg A \overset{1}{\wedge} A}{A}\,(\wedge E)}{\bot}\,(\to E)$$

Estas derivaciones pueden componerse para obtener la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \overset{1}{\vee} \neg A)}{\neg A \wedge A}\,(\text{De Morgan})}{\neg A}\,(\wedge E) \quad \dfrac{\dfrac{\neg(A \overset{1}{\vee} \neg A)}{\neg A \wedge A}\,(\text{De Morgan})}{A}\,(\wedge E)}{\bot}\,(\to E)$$

La cual se escribe en estilo de secuentes como sigue:

$$\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}\,(\to E)$$

Donde Π_1 y Π_2 son las siguientes:

Π_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}\,(Hip)}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \wedge A}\,(\text{De Morgan}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \wedge A \vdash \neg A \wedge A}\,(Hip)}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \wedge A \vdash \neg A}\,(\wedge E)}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}\,(Sub)$$

Π_2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}\,(Hip)}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \wedge A}\,(\text{De Morgan}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \wedge A \vdash \neg A \wedge A}\,(Hip)}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \wedge A \vdash A}\,(\wedge E)}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A}\,(Sub)$$

Notemos que, cuando se trabaja con deducción natural en estilo de secuentes, la composición de derivaciones se complica, pues no puede realizarse sólo concatenando derivaciones como en el estilo usual. En este caso es necesario utilizar una regla que tiene dos premisas.

1.4. Demostraciones tradicionales y asistidas por computadora

Un asistente de demostración es un programa de computadora que consta de un lenguaje utilizado para representar objetos lógicos, así como definiciones y teoremas sobre estos; un motor y un verificador de pruebas.

El proceso de construcción de pruebas es conducido por el motor y consiste en una búsqueda interactiva orientada a metas, la cual es realizada por un humano que propone métodos de razonamiento cuya utilidad para la resolución de la meta establecida será verificada por la computadora. En caso de que el método propuesto sea de utilidad, el asistente lo aplicará y presentará una nueva submeta de menor complejidad para resolver. En caso contrario, será necesario proponer un razonamiento distinto. Este proceso continuará hasta llegar a una submeta que no puede descomponerse más y que puede ser resuelta de manera sencilla.

Las demostraciones asistidas por computadora se construyen mediante lo que se conoce como *scripts de prueba*, los cuales consisten en una sucesión de definiciones, afirmaciones,comandos y tácticas que indican los pasos que llevará acabo el asistente para completar la prueba.

Una táctica es una función que simplifica metas y afirmaciones. En el caso particular de **Coq**, su funcionamiento pretende imitar el razonamiento habitual usado en matemáticas. El programa posee una colección de tácticas básicas que pueden componerse para obtener nuevas tácticas avanzadas. Adicionalmente, es posible definir tácticas desde cero mediante un lenguaje dedicado.

El proceso de verificación de pruebas es realizado al final, y consiste en comprobar que los resultados obtenidos por el motor efectivamente constituyen una demostración que satisface las metas previamente establecidas.

Algunos problemas de gran relevancia para la filosofía de las matemáticas son los siguientes:

- El poder decidir cuándo una demostración asistida por computadora corresponde, efectivamente, a una demostración hecha por un humano.
- Si las demostraciones asistidas por computadora emplean razonamientos sofisticados o únicamente cómputos.
- Si es posible dar un mecanismo de traducción entre demostraciones humanas y asistidas por computadora.

- Si las demostraciones asistidas por computadora requieren ser verificadas por un humano, tal como sucede con las pruebas tradicionales.
- Si las demostraciones asistidas por computadora, al igual que las humanas, requieren creatividad o únicamente consisten en verificar si una conclusión es consecuencia lógica de un conjunto de premisas.
- Si las demostraciones asistidas por computadora proporcionan conocimientos nuevos.

El propósito del presente trabajo es mostrar un caso particular de una demostración asistida por computadora [12] que, efectivamente, puede ser "traducida" a una demostración matemática tradicional.

1.5. El argumento de Brighton

Como mencionamos anteriormente, en 2016 Brighton [3] presentó una demostración del teorema de eliminación de corte para la lógica GL utilizando un cálculo de regresiones, que sería refutada por Goré *et. al.* en 2021. De acuerdo con Brighton:

> Un árbol de regresión es, esencialmente, un intento de construir un árbol de prueba (legal) para un secuente dado; de este modo, cuando queremos invertir la regla de inferencia GLR, a diferencia de los árboles de búsqueda, examinamos cada una de las posibles premisas *por separado*— es decir, examinamos cada una en un árbol de regresión *separado.*
>
> Téngase en cuenta que, por varias razones, los nodos de un árbol de regresión no son secuentes sino expresiones de la forma $\Gamma \mathrel{\unicode{x22B1}} \Delta$, y son llamadas *regresores.*[13]

A continuación introducimos algunas definiciones y presentamos el cálculo de regresiones utilizado por Brighton.

Definición 1.3 (Fórmulas modales)**.** Sea $\mathbb{V} = \{p, q, r, \ldots\}$ un conjunto infinito de variables proposicionales. Las fórmulas modales están definidas por la siguiente gramática:

$$A ::= p \in \mathbb{V} | \bot | A \to A | \Box A$$

[12] Para una discusión general y detallada recomendamos [11].
[13] [3], p. 148.

Definición 1.4 (Fórmulas atómicas)**.** Decimos que una fórmula A es *atómica* cuando es una variable proposicional $p \in \mathbb{V}$, o cuando es la constante $\bot$.

Definición 1.5 (Fórmula con caja)**.** Decimos que una fórmula A es una *fórmula con caja* si tiene $\Box$ como conectivo principal. Un multiconjunto con caja contiene únicamente fórmulas con caja.

Definición 1.6 (Fórmula prima)**.** Una fórmula es llamada prima si es atómica o con caja.

Definición 1.7 (Conjunto atómico (primo))**.** Un conjunto Γ es atómico (primo) si todas las fórmulas en Γ son atómicas (primas).

Definición 1.8 (Regresor)**.** Un regresor es una expresión de la forma $\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta$, donde Γ y Δ son conjuntos de fórmulas.

Definición 1.9 (Regresor primo)**.** Decimos que un regresor $\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta$ es primo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

1. $\bot \in \Gamma$.

2. Hay una fórmula prima A tal que $A \in \Gamma \cap \Delta$.

3. Γ es primo, Δ es atómico, $\bot \notin \Gamma$ y $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$.

El cálculo de regresiones **RGL** consta de las siguientes reglas:

Primalidad: $\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta$ es un regresor primo.

$$\frac{\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta, A \quad B, \Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta}{\Gamma, A \to B \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta} \to\text{-left} \qquad \frac{\Gamma, A \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta, B}{\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta, A \to B} \to\text{-right}$$

$$\frac{\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta, A}{\Gamma, A \to \bot \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta} \bot\text{-left} \qquad \frac{\Gamma, A \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta}{\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Delta, A \to \bot} \bot\text{-right}$$

$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma, \Box A_i \mathrel{\varepsilon\!\!-} A_i}{\varPhi, \Box\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Box A_1, \ldots, \Box A_n, \varPsi} \, GLR$$

para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Con $\varPhi$ y $\varPsi$ conjuntos atómicos y $\varPhi, \Box\Gamma \mathrel{\varepsilon\!\!-} \Box A_1, \ldots, \Box A_n, \varPsi$ regresor no primo.

Definición 1.10 (Árbol de regresión)**.** Un árbol de regresión[14] T para un regresor $\Gamma \multimapinv \Delta$ es un árbol dirigido con raíz tal que:

1. $\Gamma \multimapinv \Delta$ es la raíz del árbol.
2. Si un regresor no primo R es un nodo de T, entonces tiene exactamente un hijo, R_1, tal que $\dfrac{R_1}{R}$ es una regla de regresión, o tiene exactamente dos hijos , R_1 y R_2, tales que $\dfrac{R_1 \; R_2}{R}$ es una regla de regresión.
3. T no tiene nodos ni aristas[15] distintos de los requeridos por los dos incisos anteriores.

A continuación mostramos dos ejemplos de árboles de regresión.

Ejemplo 1.9. Sea $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$, con $p, q \in \mathbb{V}$, una instancia del axioma K. Su árbol de regresión es el siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{Primo}{p, \Box(p \to q), \Box p, \Box q \multimapinv p} \quad \overset{Primo}{q, p, \Box(p \to q), \Box p, \Box q \multimapinv q}}{p \to q, p, \Box(p \to q), \Box p, \Box q \multimapinv q} \to \text{-left}}{\Box(p \to q), \Box p \multimapinv \Box q}\, GLR}{\Box(p \to q) \multimapinv \Box p \to \Box q} \to \text{-right}}{\multimapinv \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)} \to \text{-right}$$

Ejemplo 1.10. Sea $\Box p \to \Box\Box p$, con $p \in \mathbb{V}$, una instancia del axioma 4. Su árbol de regresión es el siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{Primo}{p, \Box p, \Box\Box p \multimapinv \Box p}}{\Box p \multimapinv \Box\Box p}\, GLR}{\multimapinv \Box p \to \Box\Box p} \to \text{-right}$$

El argumento para demostrar el teorema de eliminación de corte dado por Brighton para un secuente $\Gamma \vdash \Delta$ comienza por demostrar que la admisibilidad de corte es equivalente a la eliminación de tautologías, es decir,

[14] Nótese la similitud con la definición de derivación en un cálculo de secuentes (véase la sección 1.2).

[15] Análogamente a lo ocurrido en los árboles de prueba, las aristas están constituidas por las reglas de regresión aplicadas.

si $A \to A, \Gamma \vdash \Delta$ es demostrable entonces $\Gamma \vdash \Delta$ es demostrable. Posteriormente, procede a demostrar lo anterior por inducción primaria sobre la complejidad de la fórmula A e inducción secundaria sobre la altura del árbol de regresión más alto del respectivo regresor $\Gamma \multimapinv \Delta$.

Sin embargo, debido a que los regresores utilizan conjuntos, en el proceso de regresión pueden darse contracciones "implícitas", dando lugar a árboles de regresión infinitos como el siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{A \multimapinv B, A \to B}\ \to\text{-right}}{A \multimapinv B, A \to B}\ \to\text{-right}}{\multimapinv A \to B}\ \to\text{-right}$$

Por lo tanto, el argumento de Brighton es incorrecto, pues no es posible afirmar la existencia del árbol de regresión más alto de un regresor. Notemos que este error puede solucionarse utilizando multiconjuntos en vez de conjuntos, pues el tomar en cuenta la multiplicidad de las fórmulas evita que se den contracciones implícitas y, consecuentemente, evita que los árboles de regresión se vuelvan infinitos.

1.6. Definiciones

Para finalizar este capítulo, presentamos algunas definiciones que utilizaremos más adelante.

Definición 1.11 (Tamaño)**.** Definimos el *tamaño* de una fórmula como el número de símbolos que contiene, sin contar los paréntesis.

Definición 1.12. Para un multiconjunto $X = \{A_1, \ldots, A_n\}$, definimos $\boxtimes X = \{A_1, \Box A_1, \ldots, A_n, \Box A_n\} = X \cup \Box X$.

Definición 1.13. Denotamos el conjunto de subfórmulas de una fórmula A por $Sub(A)$. Abusando de la notación, denotamos por $Sub(X)$ al conjunto de subfórmulas de todas las fórmulas en el conjunto X.

Definición 1.14 (Altura)**.** La altura de una derivación δ, denotada $h(\delta)$, es el máximo de nodos en un camino de raíz a hoja.

En este capítulo explicamos algunos aspectos importantes de la deducción natural y los cálculos de secuentes que serán de utilidad más adelante, mencionamos el funcionamiento de los asistentes de prueba junto con algunos problemas filosóficos sobre su uso y señalamos los errores del argumento de Brighton. En el siguiente capítulo presentaremos los cálculos de secuentes GLS y $PSGLS$ junto con algunas de sus propiedades más importantes.

2

Los cálculos de secuentes GLS y $PSGLS$

En este capítulo presentamos los cálculos de secuentes GLS y $PSGLS$, así como algunas de sus propiedades que serán de utilidad para la prueba de eliminación de corte del capítulo 3.

2.1. El cálculo de secuentes GLS

El cálculo de secuentes GLS[1] está conformado por las siguientes reglas y secuentes iniciales:

$$\frac{}{p, X \vdash Y, p}\ (IdP) \qquad \frac{}{\bot, X \vdash Y}\ (\bot L)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \quad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y}\ (\to L) \qquad \frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B}\ (\to R)$$

$$\frac{\boxtimes X, \Box B \vdash B}{W, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z}\ (GLR) \qquad \frac{X \vdash Y, A \quad A, X \vdash Y}{X \vdash Y}\ (Cut)$$

Donde W y Z son multiconjuntos posiblemente vacíos que no contienen fórmulas con caja, X e Y son multiconjuntos posiblemente vacíos y B es llamada fórmula diagonal.

[1]El nombre GLS fue adoptado por Boolos en 1993, en honor de Gödel, Löb y Solovay. Véase [2], p. xi.

La intuición detrás de la regla GLR[2] es formalizar el teorema de Löb[3], el cual establece que si $P(x)$ es un predicado de prueba para la aritmética de Peano y $\ulcorner x \urcorner$ es el numeral del número de Gödel de x, entonces para toda fórmula A de AP se cumple que si $\vdash_{AP} P(\ulcorner A \urcorner) \to A$, entonces, $\vdash_{AP} A$.

A continuación mostramos dos ejemplos de derivaciones en el sistema GLS.

Ejemplo 2.1. Sea $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$, con $p \in \mathbb{V}$, una instancia del axioma GL. Su derivación es la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Box(\Box p \to p), \Box p \to p, \Box p, p, \Box p \vdash p}\,(IdP)}{\Box(\Box p \to p), \Box p \vdash p, \Box p}\,(GLR) \qquad \dfrac{}{p, \Box(\Box p \to p), \Box p \vdash p}\,(IdP)}{\Box p \to p, \Box(\Box p \to p), \Box p \vdash p}\,(\to L)}{\Box(\Box p \to p) \vdash \Box p}\,(GLR)}{\vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p}\,(\to R)$$

Ejemplo 2.2. Sea $\Box p \to p$, con $p \in \mathbb{V}$, una instancia del axioma T. Su derivación es la siguiente:

$$\dfrac{\Box p \vdash p}{\vdash \Box p \to p}\,(\to R)$$

Debido a que no hay fórmulas con caja en el consecuente de $\Box p \vdash p$, no es posible aplicar la regla (GLR). Además, puesto que las fórmulas del secuente anterior no tienen ningún otro conectivo, no es posible aplicar ninguna de las otras reglas del sistema. Por lo tanto, $\Box p \to p$ no es válida en GLS.

2.1.1. Propiedades de GLS

Lema 2.1. *Para todo X, Y y A, el secuente $A, X \vdash Y, A$ tiene una prueba.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre A.

<u>Casos base:</u>

[2]Para una descripción detallada sobre la construcción de la regla GLR, véase [16].

[3]Para una demostración del teorema de Löb y una explicación detallada de los conceptos que utiliza, véase [2].

1) $A = p \in \mathbb{V}$. Entonces,

$$\frac{}{p, X \vdash Y, p}\ (IdP)$$

2) $A = \bot$. Entonces,

$$\frac{}{\bot, X \vdash Y, \bot}\ (\bot L)$$

Hipótesis de Inducción: Supongamos que vale para B, C fórmulas.

Veamos que vale para $B \to C$ y para $\Box B$.

(i) $A = B \to C$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{B, X \vdash B, C, Y}\ H.I \quad \cfrac{}{B, C, X \vdash Y, C}\ H.I}{B \to C, B, X \vdash C, Y}\ (\to L)}{B \to C, X \vdash B \to C, Y}\ (\to R)$$

(ii) $A = \Box B$, $X = W, \Box X_0$ y $Y = \Box Y_0, Z$.

$$\cfrac{\cfrac{}{B, \Box B, \boxtimes X, \Box B \vdash B}\ H.I}{\Box B, W, \Box X_0 \vdash \Box Y_0, Z, \Box B}\ (GLR)$$

■

Lema 2.2 (Admisibilidad de weakening con preservación de altura). *Para todo X, Y, A y B:*

(i) Si $X \vdash Y$ tiene una prueba π en GLS, entonces, $X \vdash Y, A$ tiene una prueba π_0 en GLS tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

(ii) Si $X \vdash Y$ tiene una prueba π en GLS, entonces, $A, X \vdash Y$ tiene una prueba π_0 en GLS tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

Demostración. Procedamos por inducción estructural.

Casos base (i):

1) $X \vdash Y$ es de la forma $p, X_0 \vdash Y_0, p$. Entonces, $X \vdash Y, A$ es el secuente inicial

$$\frac{}{p, X_0 \vdash Y_0, p, A}\ (IdP)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

2) $X \vdash Y$ es de la forma $\bot, X_0 \vdash Y$. Entonces, $X \vdash Y, A$ es el secuente inicial

$$\frac{}{\bot, X_0 \vdash Y, A}\ (\bot L)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

Hipótesis de Inducción (i): Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Entonces, la prueba π de $X \vdash Y$ es de la forma

$$\frac{X_0 \vdash Y, B \quad C, X_0 \vdash Y}{B \to C, X_0 \vdash Y}\ (\to L).$$

Sean π_1 y π_2 pruebas de $X_0 \vdash Y, B$ y $C, X_0 \vdash Y$ respectivamente. Por hipótesis de inducción, existen pruebas π_3 y π_4 de $X_0 \vdash Y, B, A$ y $C, X_0 \vdash Y, A$ tales que $h(\pi_3) \leqslant h(\pi_1)$ y $h(\pi_4) \leqslant h(\pi_2)$. Aplicando nuevamente la regla $(\to L)$, obtenemos la siguiente prueba π_0 de $X \vdash Y, A$:

$$\frac{X_0 \vdash Y, B, A \quad C, X_0 \vdash Y, A}{B \to C, X_0 \vdash Y, A}\ (\to L).$$

Puesto que $h(\pi_3) \leqslant h(\pi_1)$ y $h(\pi_4) \leqslant h(\pi_2)$, se tiene que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Entonces, la prueba π de $X \vdash Y$ es de la forma

$$\frac{B, X \vdash Y_0, C}{X \vdash Y_0, B \to C}\ (\to R).$$

Sea π_1 una prueba $B, X \vdash Y_0, C$. Por hipótesis de inducción, existe una prueba π_2 de $B, X \vdash Y_0, C, A$ tal que $h(\pi_2) \leqslant h(\pi_1)$. Aplicando nuevamente la regla $(\to R)$, obtenemos la siguiente prueba π_0 de $X \vdash Y, A$:

$$\frac{B, X \vdash Y_0, C, A}{X \vdash Y_0, B \to C, A}\ (\to R).$$

Puesto que $h(\pi_2) \leqslant h(\pi_1)$, se tiene que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, la prueba de $X \vdash Y$ es de la forma

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y, Z}\ (GLR).$$

Notemos que, en este caso, basta con aplicar (GLR) agregando A para obtener la siguiente prueba π_0 de $X \vdash Y, A$:

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y, Z, A}\ (GLR).$$

Por lo que $h(\pi_0) = h(\pi)$.

Casos base (ii):

1) $X \vdash Y$ es de la forma $p, X_0 \vdash Y_0, p$. Entonces, $A, X \vdash Y$ es el secuente inicial
$$\frac{}{A, p, X_0 \vdash Y_0, p}\ (IdP)$$
y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

2) $X \vdash Y$ es de la forma $\bot, X_0 \vdash Y$. Entonces, $A, X \vdash Y$ es el secuente inicial
$$\frac{}{A, \bot, X_0 \vdash Y}\ (\bot L)$$
y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

Hipótesis de Inducción (ii): Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Entonces, la prueba π de $X \vdash Y$ es de la forma
$$\frac{X_0 \vdash Y, B \quad C, X_0 \vdash Y}{B \to C, X_0 \vdash Y}\ (\to L).$$
Sean π_1 y π_2 pruebas de $X_0 \vdash Y, B$ y $C, X_0 \vdash Y$ respectivamente. Por hipótesis de inducción, existen pruebas π_3 y π_4 de $A, X_0 \vdash Y, B$ y $A, C, X_0 \vdash Y$ tales que $h(\pi_3) \leqslant h(\pi_1)$ y $h(\pi_4) \leqslant h(\pi_2)$. Aplicando nuevamente la regla $(\to L)$, obtenemos la siguiente prueba π_0 de $A, X \vdash Y$:
$$\frac{A, X_0 \vdash Y, B \quad A, C, X_0 \vdash Y}{A, B \to C, X_0 \vdash Y}\ (\to L).$$
Puesto que $h(\pi_3) \leqslant h(\pi_1)$ y $h(\pi_4) \leqslant h(\pi_2)$, se tiene que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Entonces, la prueba π de $X \vdash Y$ es de la forma
$$\frac{B, X \vdash Y_0, C}{X \vdash Y_0, B \to C}\ (\to R).$$
Sea π_1 una prueba de $B, X \vdash Y_0, C$. Por hipótesis de inducción, existe una prueba π_2 de $A, B, X \vdash Y_0, C$ tal que $h(\pi_2) \leqslant h(\pi_1)$. Aplicando nuevamente la regla $(\to R)$, obtenemos la siguiente prueba π_0 de $A, X \vdash Y$:
$$\frac{A, B, X \vdash Y_0, C}{A, X \vdash Y_0, B \to C}\ (\to R).$$
Puesto que $h(\pi_2) \leqslant h(\pi_1)$, se tiene que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, la prueba de $X \vdash Y$ es de la forma
$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y, Z}\ (GLR).$$
Notemos que en este caso, basta con aplicar (GLR) agregando A para obtener la siguiente prueba π_0 de $A, X \vdash Y$:
$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{A, W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y, Z}\ (GLR).$$
Por lo que $h(\pi_0) = h(\pi)$.

■

Lema 2.3 (Invertibilidad de las reglas de implicación con preservación de altura)**.** *Para todo X, Y, A y B:*

(i) Si $A \to B, X \vdash Y$ tiene una prueba π en GLS, entonces, $X \vdash Y, A$ y $B, X \vdash Y$ tienen pruebas π_0 y π_1 en GLS tales que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$ y $h(\pi_1) \leqslant h(\pi)$.

(ii) Si $X \vdash Y, A \to B$ tiene una prueba π en GLS, entonces, $A, X \vdash Y, B$ tiene una prueba π_0 en GLS tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

Demostración. Procedamos por inducción estructural.

Casos base (i):

1) $A \to B, X \vdash Y$ es el secuente inicial $A \to B, p, X_0 \vdash Y_0, p$. Entonces $X \vdash Y, A$ y $B, X \vdash Y$ son los secuentes iniciales

$$\frac{}{p, X_0 \vdash Y_0, p, A}\ (IdP) \quad \text{y} \quad \frac{}{B, p, X_0 \vdash Y_0, p}\ (IdP)$$

respectivamente, por lo que $h(\pi_0) = h(\pi)$ y $h(\pi_1) = h(\pi)$.

2) $A \to B, X \vdash Y$ es el secuente inicial $A \to B, \bot, X_0 \vdash Y$. Entonces $X \vdash Y, A$ y $B, X \vdash Y$ son los secuentes iniciales

$$\frac{}{\bot, X_0 \vdash Y, A}\ (\bot L) \quad \text{y} \quad \frac{}{B, \bot, X_0 \vdash Y}\ (\bot L)$$

respectivamente, por lo que $h(\pi_0) = h(\pi)$ y $h(\pi_1) = h(\pi)$.

Hipótesis de Inducción (i): Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Aquí consideramos dos subcasos:

1.1) $A \to B$ es principal. Entonces, π es de la forma

$$\frac{X \vdash Y, A \quad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y}\ (\to L).$$

Claramente π_0 y π_1 son subpruebas de π, por lo que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$ y $h(\pi_1) \leqslant h(\pi)$.

1.2) $A \to B$ no es principal. Entonces, π es de la forma

$$\frac{A \to B, X_0 \vdash Y, C \quad A \to B, D, X_0 \vdash Y}{A \to B, C \to D, X_0 \vdash Y}\ (\to L).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a las premisas, podemos obtener pruebas de altura menor o igual de los secuentes $X_0 \vdash Y, C, A$; $B, X_0 \vdash Y, C$; $D, X_0 \vdash Y, A$ y $B, D, X_0 \vdash Y$. Aplicando nuevamente la regla $(\to L)$ a las parejas de secuentes apropiadas, obtenemos las siguientes pruebas π_0 y π_1:

$$\frac{X_0 \vdash Y, C, A \quad D, X_0 \vdash Y, A}{C \to D, X_0 \vdash Y, A}\ (\to L)$$

y

$$\frac{B, X_0 \vdash Y, C \quad B, D, X_0 \vdash Y}{B, C \rightarrow D, X_0 \vdash Y}\ (\rightarrow L)$$

tales que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$ y $h(\pi_1) \leqslant h(\pi)$.

2) La última regla aplicada es $(\rightarrow R)$. Entonces, π es de la forma

$$\frac{C, A \rightarrow B, X \vdash Y_0, D}{A \rightarrow B, X \vdash Y_0, C \rightarrow D}\ (\rightarrow R).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa, podemos obtener pruebas de altura menor o igual de los secuentes $C, X \vdash Y_0, D, A$ y $B, C, X \vdash Y_0, D$. Aplicando nuevamente la regla $(\rightarrow R)$ a ambos secuentes, obtenemos las siguientes pruebas π_0 y π_1:

$$\frac{C, X \vdash Y_0, D, A}{X \vdash Y_0, C \rightarrow D, A}\ (\rightarrow R)$$

y

$$\frac{B, C, X \vdash Y_0, D}{B, X \vdash Y_0, C \rightarrow D}\ (\rightarrow R)$$

tales que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$ y $h(\pi_1) \leqslant h(\pi)$.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, π es de la forma

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{A \rightarrow B, W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_0, Z}\ (GLR).$$

Puesto que (GLR) permite agregar fórmulas arbitrarias en ambos lados del secuente, basta con volver a aplicar dicha regla a la premisa para obtener las siguientes pruebas π_0 y π_1:

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_0, Z, A}\ (GLR)$$

y

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{B, W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_0, Z}\ (GLR)$$

tales que $h(\pi_0) = h(\pi)$ y $h(\pi_1) = h(\pi)$.

Casos base (ii):

1) $X \vdash Y, A \to B$ es el secuente inicial $p, X_0 \vdash Y_0, p, A \to B$. Entonces, $A, X \vdash Y, B$ es el secuente inicial

$$\frac{}{A, p, X_0 \vdash Y_0, p, B}\ (IdP)$$

por lo que $h(\pi_0) = h(\pi)$.

2) $X \vdash Y, A \to B$ es el secuente inicial $\bot, X_0 \vdash Y, A \to B$. Entonces, $A, X \vdash Y, B$ es el secuente inicial

$$\frac{}{A, \bot, X_0 \vdash Y, B}\ (\bot L)$$

por lo que $h(\pi_0) = h(\pi)$.

Hipótesis de Inducción (ii): Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Entonces, π es de la forma

$$\frac{X_0 \vdash Y, A \to B, C \quad D, X_0 \vdash Y, A \to B}{C \to D, X_0 \vdash Y, A \to B}\ (\to L).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a las premisas, podemos obtener pruebas de altura menor o igual de los secuentes $A, X_0 \vdash Y, C, B$ y $A, D, X_0 \vdash Y, B$. Aplicando nuevamente la regla $(\to L)$ obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{A, X_0 \vdash Y, C, B \quad A, D, X_0 \vdash Y, B}{A, C \to D, X_0 \vdash Y, B}\ (\to L)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Aquí consideramos dos subcasos:

2.1) $A \to B$ es principal. Entonces, π es de la forma

$$\frac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B}\ (\to R).$$

Claramente π_0 es subprueba de π, por lo que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

2.2) $A \to B$ no es principal. Entonces, π es de la forma

$$\frac{C, X \vdash Y_0, D, A \to B}{X \vdash Y_0, C \to D, A \to B} \ (\to R).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa, podemos obtener una prueba de altura menor o igual del secuente $A, C, X \vdash Y_0, D, B$. Aplicando nuevamente la regla $(\to R)$, obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{A, C, X \vdash Y_0, D, B}{A, X \vdash Y_0, C \to D, B} \ (\to R)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, π es de la forma

$$\frac{\boxtimes X, \Box C \vdash C}{W, \Box X \vdash \Box C, \Box Y_0, Z, A \to B} \ (GLR).$$

Puesto que (GLR) permite agregar fórmulas arbitrarias en ambos lados del secuente, basta con volver a aplicar dicha regla a la premisa para obtener la siguiente prueba π_0:

$$\frac{\boxtimes X, \Box C \vdash C}{A, W, \Box X \vdash \Box C, \Box Y_0, Z, B} \ (GLR)$$

tal que $h(\pi_0) = h(\pi)$.

■

Lema 2.4 (Admisibilidad de contracción con preservación de altura). *Para todo X, Y, A:*

(i) Si $X \vdash Y, A, A$ tiene una prueba π en GLS, entonces, $X \vdash Y, A$ tiene una prueba π_0 en GLS tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

(ii) Si $A, A, X \vdash Y$ tiene una prueba π en GLS, entonces, $A, X \vdash Y$ tiene una prueba π_0 en GLS tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

Demostración. Procedamos por inducción estructural.

Casos base (i):

1) $X \vdash Y, A, A$ es el secuente inicial (IdP). Aquí consideramos dos subcasos[4]:

1.1) A es principal. Entonces, $X \vdash Y, A, A$ es de la forma

$$\frac{}{p, X_0 \vdash Y, p, p}\ (IdP).$$

Por lo que $X \vdash Y, A$ es el secuente inicial

$$\frac{}{p, X_0 \vdash Y, p}\ (IdP)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

1.2) A no es principal. Entonces, $X \vdash Y, A, A$ es de la forma

$$\frac{}{p, X_0 \vdash Y_0, p, A, A}\ (IdP).$$

Por lo que $X \vdash Y, A$ es el secuente inicial

$$\frac{}{p, X_0 \vdash Y_0, p, A}\ (IdP)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

2) $X \vdash Y, A, A$ es el secuente incial $(\perp L)$. Entonces, es de la forma

$$\frac{}{\perp, X_0 \vdash Y, A, A}\ (\perp L).$$

Por lo que $X \vdash Y, A$ es el secuente inicial

$$\frac{}{\perp, X_0 \vdash Y, A}\ (\perp L)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

Hipótesis de Inducción (i): Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

[4]A lo largo de varias demostraciones será necesario diferenciar los casos cuando una fórmula es principal y cuando no lo es, ya que la demostración no necesariamente procede de la misma forma en ambos casos.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Entonces, π es de la forma

$$\frac{X_0 \vdash Y, B, A, A \quad C, X_0 \vdash Y, A, A}{B \to C, X_0 \vdash Y, A, A} \ (\to L).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a las premisas, podemos obtener pruebas de altura menor o igual de los secuentes $X_0 \vdash Y, B, A$ y $C, X_0 \vdash Y, A$. Aplicando nuevamente la regla $(\to L)$ obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{X_0 \vdash Y, B, A \quad C, X_0 \vdash Y, A}{B \to C, X_0 \vdash Y, A} \ (\to L)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Aquí consideramos dos subcasos:

2.1) A es principal. Entonces, π es de la forma

$$\frac{B, X \vdash Y, C, B \to C}{X \vdash Y, B \to C, B \to C} \ (\to R).$$

Aplicando el lema 2.3 parte (ii) a la premisa, podemos obtener una prueba de altura menor o igual del secuente $B, B, X \vdash Y, C, C$. Por hipótesis de inducción, podemos obtener una prueba de altura menor o igual del secuente $B, B, X \vdash Y, C$ y por el inciso (ii) de este lema podemos obtener una prueba de altura menor o igual del secuente $B, X \vdash Y, C$. Aplicando nuevamente la regla $(\to R)$, obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{B, X \vdash Y, C}{X \vdash Y, B \to C} \ (\to R)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

2.2) A no es principal. Entonces, π es de la forma

$$\frac{B, X \vdash Y_0, C, A, A}{X \vdash Y_0, B \to C, A, A} \ (\to R).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa, podemos obtener una prueba de altura menor o igual del secuente $B, X \vdash Y_0, C, A$. Aplicando nuevamente la regla $(\to R)$, obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{B, X \vdash Y_0, C, A}{X \vdash Y_0, B \to C, A} \ (\to R)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, π es de la forma

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z, A, A}\ (GLR).$$

Puesto que (GLR) permite agregar fórmulas arbitrarias en ambos lados del secuente, basta con volver a aplicar dicha regla a la premisa para obtener la siguiente prueba π_0:

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z, A}\ (GLR)$$

tal que $h(\pi_0) = h(\pi)$.

Casos base (ii):

1) $A, A, X \vdash Y$ es el secuente inicial (IdP). Aquí consideramos dos subcasos:

1.1) A es principal. Entonces, $A, A, X \vdash Y$ es de la forma

$$\frac{}{p, p, X \vdash Y_0, p}\ (IdP).$$

por lo que $A, X \vdash Y$ es el secuente inicial

$$\frac{}{p, X \vdash Y_0, p}\ (IdP)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

1.2) A no es principal. Entonces, $A, A, X \vdash Y$ es de la forma

$$\frac{}{A, A, p, X_0 \vdash Y_0, p}\ (IdP).$$

por lo que $A, X \vdash Y$ es el secuente inicial

$$\frac{}{A, p, X_0 \vdash Y_0, p}\ (IdP)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

2) $A, A, X \vdash Y$ es el secuente inicial $(\bot L)$. Aquí consideramos dos subcasos:

2.1) A es principal. Entonces, $A, A, X \vdash Y$ es de la forma

$$\frac{}{\bot, \bot, X \vdash Y} \ (\bot L).$$

por lo que $A, X \vdash Y$ es el secuente inicial

$$\frac{}{\bot, X \vdash Y} \ (\bot L)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

2.2) A no es principal. Entonces, $A, A, X \vdash Y$ es de la forma

$$\frac{}{A, A, \bot, X_0 \vdash Y} \ (\bot L).$$

por lo que $A, X \vdash Y$ es el secuente inicial

$$\frac{}{A, \bot, X_0 \vdash Y} \ (\bot L)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

Hipótesis de Inducción (ii): Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Aquí consideramos dos subcasos:

1.1) A es principal. Entonces, π es de la forma

$$\frac{B \to C, X \vdash Y, B \quad B \to C, C, X \vdash Y}{B \to C, B \to C, X \vdash Y} \ (\to L).$$

Aplicando el lema 2.3 parte (i) a las premisas, es posible obtener pruebas de altura menor o igual de los secuentes (a) $X \vdash Y, B, B$; (b) $C, X \vdash Y, B$; (c) $C, X \vdash Y, B$ y (d) $C, C, X \vdash Y$. Aplicando la parte (i) de este lema al secuente (a) y la hipótesis de inducción al secuente (d), es posible obtener pruebas de menor o igual altura de los secuentes $X \vdash Y, B$ y $C, X \vdash Y$. Aplicando nuevamente la regla $(\to L)$, obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{X \vdash Y, B \quad C, X \vdash Y}{B \to C, X \vdash Y} \ (\to L)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

1.2) A no es principal. Entonces, π es de la forma

$$\frac{A, A, X_0 \vdash Y, B \quad A, A, C, X_0 \vdash Y}{A, A, B \to C, X_0 \vdash Y} \ (\to L).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a las premisas, podemos obtener pruebas de altura menor o igual de los secuentes $A, X_0 \vdash Y, B$ y $A, C, X_0 \vdash Y$. Aplicando nuevamente la regla $(\to L)$ obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{A, X_0 \vdash Y, B \quad A, C, X_0 \vdash Y}{A, B \to C, X_0 \vdash Y} \ (\to L)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Entonces, π es de la forma

$$\frac{A, A, B, X \vdash Y_0, C}{A, A, X \vdash Y_0, B \to C} \ (\to R).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa, podemos obtener una prueba de altura menor o igual del secuente $A, B, X \vdash Y_0, C$. Aplicando nuevamente la regla $(\to R)$ obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{A, B, X \vdash Y_0, C}{A, X \vdash Y_0, B \to C} \ (\to R)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, π es de la forma

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{A, A, W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z} \ (GLR).$$

Puesto que (GLR) permite agregar fórmulas arbitrarias en ambos lados del secuente, basta con volver a aplicar dicha regla a la premisa para obtener la siguiente prueba π_0:

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{A, W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z} \ (GLR)$$

tal que $h(\pi_0) = h(\pi)$.

■

Lema 2.5. *Si $X \vdash Y, \perp$ tiene una prueba π en GLS, entonces, $X \vdash Y$ tiene una prueba π_0 en GLS tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.*

Demostración. Procedamos por inducción estructural.

Casos base:

1) $X \vdash Y, \perp$ es el secuente inicial

$$\frac{}{X_0, p \vdash Y_0, p, \perp}\ (IdP).$$

Entonces, $X \vdash Y$ es el secuente inicial

$$\frac{}{X_0, p \vdash Y_0, p}\ (IdP)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

2) $X \vdash Y, \perp$ es el secuente inicial

$$\frac{}{\perp, X_0 \vdash Y, \perp}\ (\perp L).$$

Entonces, $X \vdash Y$ es el secuente inicial

$$\frac{}{\perp, X_0 \vdash Y}\ (\perp L)$$

y $h(\pi_0) = h(\pi)$.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Entonces, π tiene la forma

$$\frac{X_0 \vdash Y, A, \perp \quad B, X_0 \vdash Y, \perp}{A \to B, X_0 \vdash Y, \perp}\ (\to L).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a las premisas, podemos obtener pruebas de altura menor o igual de los secuentes $X_0 \vdash Y, A$ y $B, X_0 \vdash Y$. Aplicando nuevamente $(\to L)$, obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{X_0 \vdash Y, A \quad B, X_0 \vdash Y}{A \to B, X_0 \vdash Y}\ (\to L)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Entonces, π tiene la forma

$$\frac{A, X \vdash Y_0, B, \bot}{X \vdash Y_0, A \to B, \bot}\ (\to R).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa, podemos obtener una prueba de altura menor o igual del secuente $A, X \vdash Y, B$. Aplicando nuevamente $(\to R)$ obtenemos la siguiente prueba π_0:

$$\frac{A, X \vdash Y_0, B}{X \vdash Y_0, A \to B}\ (\to R)$$

tal que $h(\pi_0) \leqslant h(\pi)$.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, π tiene la forma

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W_0, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z_0, \bot}\ (GLR).$$

Aplicando nuevamente (GLR) a la premisa, podemos obtener la siguiente prueba π_0:

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W_0, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z_0}\ (GLR)$$

tal que $h(\pi_0) = h(\pi)$.

■

2.2. El cálculo de secuentes $PSGLS$

De acuerdo con Goré *et. al.*:

> Dado un cálculo de secuentes **C**, uno puede definir un procedimiento de búsqueda de prueba en **C** al imponer restricciones adicionales sobre la aplicabilidad de las reglas de **C**. Este procedimiento captura un subconjunto del conjunto de todas las derivaciones de **C**, i.e. aquellas que son construidas usando la versión restringida de las reglas de **C**. Consecuentemente, un procedimiento de búsqueda de prueba puede identificarse con el cálculo **PSC** que consiste de estas reglas restringidas de **C**, bajo la condición de que **PSC** permite decidir la demostrabilidad de secuentes en **C**.[5]

El cálculo de secuentes $PSGLS$ ($Proof\ Search\ GLS$) impone las siguientes restricciones a GLS:

1. Se introduce la regla adicional
$$\frac{}{\Box A, X \vdash Y, \Box A}\ (IdB),$$
la cual es derivable (en GLS) por el lema 2.1.
2. No está permitido que la conclusión de la regla (GLR) sea una instancia de (IdP), $(\bot L)$ ni (IdB).

Estas restricciones se introducen con la finalidad de evitar que las demostraciones se ciclen infinitamente, imposibilitando considerar la altura máxima[6]. Para aclarar esto, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3. Consideremos el secuente $\Box A \to A, \Box(\Box A \to A), A, \Box A \vdash A$, donde A es una fórmula no atómica. Su demostración en GLS procedería como sigue[7]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Box A \to A, \Box(\Box A \to A), A, \Box A, \Box A \vdash A}}{\Box(\Box A \to A), A, \Box A \vdash A, \Box A}\ (GLR) \qquad \dfrac{\vdots}{A, \Box(\Box A \to A), A, \Box A \vdash A}}{\Box A \to A, \Box(\Box A \to A), A, \Box A \vdash A}\ (\to L)$$

[5][7], p. 304.

[6]Esto evita la aparición de errores similares al cometido por Brighton en [3].

[7]Los puntos suspensivos colocados encima de los secuentes indican la existencia de una derivación que ha sido omitida, pues carece de relevancia para los propósitos de este ejemplo.

Notemos que la conclusión de $(\rightarrow L)$ y la premisa de (GLR) son idénticas salvo multiplicidad de fórmulas, por lo que nuevamente podríamos aplicar $(\rightarrow L)$ en el lado izquierdo para obtener

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A, \Box A \vdash A, \Box A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ A, \Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A, \Box A \vdash A\end{matrix}}{\Box A \rightarrow A, \Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A, \Box A \vdash A}\,(\rightarrow L)}{\Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A \vdash A, \Box A}\,(GLR) \quad \begin{matrix}\vdots\\ A, \Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A \vdash A\end{matrix}}{\Box A \rightarrow A, \Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A \vdash A}\,(\rightarrow L)$$

Puesto que estos pasos podrían repetirse sin restricción alguna, la demostración podría ciclarse infinitamente y, por tanto, no podría afirmarse la existencia de una demostración de altura máxima.

En cambio, al considerar la demostración en $PSGLS$, se tendría lo siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A \vdash A, \Box A}\,(IdB) \quad \begin{matrix}\vdots\\ A, \Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A \vdash A\end{matrix}}{\Box A \rightarrow A, \Box(\Box A \rightarrow A), A, \Box A \vdash A}\,(\rightarrow L)$$

Puesto que el proceso no se cicla en este caso, podemos considerar la demostración de altura máxima.

2.2.1. Propiedades de $PSGLS$

Teorema 2.1. *Un secuente es demostrable en $PSGLS$ si y sólo si es demostrable en GLS.*

Demostración. Procedamos por inducción estructural.

$\Leftarrow$ | Sea $X \vdash Y$ un secuente demostrable en GLS.

Casos base:

1) $X \vdash Y$ es de la forma $p, X_0 \vdash Y_0, p$. Entonces, es el secuente inicial (IdP) y, por tanto, es demostrable en $PSGLS$.

2) $X \vdash Y$ es de la forma $\bot, X_0 \vdash Y$. Entonces, es el secuente inicial $(\bot L)$ y, por tanto, es demostrable en $PSGLS$.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Entonces, su demostración (en GLS) es de la forma
$$\frac{X_0 \vdash Y, A \quad B, X_0 \vdash Y}{A \to B, X_0 \vdash Y}\ (\to L).$$
Por hipótesis de inducción, $X_0 \vdash Y, A$ y $B, X_0 \vdash Y$ son demostrables en $PSGLS$. Por lo tanto, aplicándoles $(\to L)$ se tiene que $A \to B, X_0 \vdash Y$ es demostrable en $PSGLS$.

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Entonces, su demostración (en GLS) es de la forma
$$\frac{A, X \vdash Y_0, B}{X \vdash Y_0, A \to B}\ (\to R).$$
Por hipótesis de inducción, $A, X \vdash Y_0, B$ es demostrable en $PSGLS$. Por lo tanto, aplicándole $(\to R)$ se tiene que $X \vdash Y_0, A \to B$ es demostrable en $PSGLS$.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, su demostración (en GLS) es de la forma
$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z}\ (GLR).$$
Consideremos los siguientes subcasos[8]:

3.1) $W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z$ es de la forma $p, W_0, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z_0, p$. Entonces, es una instancia de (IdP) y es demostrable en $PSGLS$ por el caso base 1).

3.2) $W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z$ es de la forma $\bot, W_0, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y, Z$. Entonces, es una instancia de $(\bot L)$ y es demostrable en $PSGLS$ por el caso base 2).

[8]Consideramos estos subcasos con la finalidad de descartar aplicaciones de GLR que resultan innecesarias o que podrían ciclar la prueba, de manera similar a lo ocurrido en el ejemplo 2.3.

3.3) $W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z$ es de la forma $W, \Box X_1, \Box B \vdash \Box B, \Box Y_0, Z$. Entonces, es demostrable en $PSGLS$ por (IdB).

3.4) En cualquier otro caso, por hipótesis de inducción, $\boxtimes X_0, \Box B \vdash B$ es demostrable en $PSGLS$. Por lo tanto, aplicándole (GLR) se tiene que $W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z$ es demostrable en $PSGLS$.

$\Rightarrow$ Sea $X \vdash Y$ un secuente demostrable en $PSGLS$.

Casos base:

1) $X \vdash Y$ es de la forma $p, X_0 \vdash Y_0, p$. Entonces es el secuente inicial (IdP) y, por tanto, es demostrable en GLS.

2) $X \vdash Y$ es de la forma $\bot, X_0 \vdash Y$. Entonces, es el secuente inicial $(\bot L)$ y, por tanto, es demostrable en GLS.

3) $X \vdash Y$ es de la forma $\Box A, X_0 \vdash Y_0, \Box A$. Entonces, es demostrable en GLS por el lema 2.1.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Entonces, su demostración (en $PSGLS$) es de la forma

$$\frac{X_0 \vdash Y, A \quad B, X_0 \vdash Y}{A \to B, X_0 \vdash Y} \ (\to L).$$

Por hipótesis de inducción, $X_0 \vdash Y, A$ y $B, X_0 \vdash Y$ son demostrables en GLS. Por lo tanto, aplicándoles $(\to L)$ se tiene que $A \to B, X_0 \vdash Y$ es demostrable en GLS.

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Entonces, su demostración (en $PSGLS$) es de la forma

$$\frac{A, X \vdash Y_0, B}{X \vdash Y_0, A \to B} \ (\to R).$$

Por hipótesis de inducción, $A, X \vdash Y_0, B$ es demostrable en GLS. Por lo tanto, aplicándole $(\to R)$ se tiene que $X \vdash Y_0, A \to B$ es demostrable en GLS.

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, su demostración (en $PSGLS$) es de la forma

$$\frac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z}\ (GLR).$$

Por hipótesis de inducción, $\boxtimes X_0, \Box B \vdash B$ es demostrable en GLS. Por lo tanto, aplicándole (GLR) se tiene que $W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z$ es demostrable en GLS.

■

Definición 2.1. Para un secuente $X \vdash Y$:

1. Sea $\iota(X \vdash Y)$ el número de ocurrencias de $\to$ en $X \vdash Y$.
2. Sea $\beta(X \vdash Y)$ las cajas usables de $X \vdash Y$ donde

$$\beta(X \vdash Y) := \{\Box A | \Box A \in Sub(X \cup Y)\} \backslash \{\Box A | \Box A \in X\}$$

3. La tupla $(Card(\beta(X \vdash Y)), \iota(X \vdash Y))$, donde $Card(U)$ es la cardinalidad del conjunto U, es denotada $\Theta(X \vdash Y)$.

Las cajas usables de un secuente $X \vdash Y$ son todas las subfórmulas con caja del consecuente que no forman parte del contexto. Es decir, son todas las subfórmulas de Y a las que se les puede aplicar la regla GLR respetando las restricciones de $PSGLS$. Para aclarar esto, véase el ejemplo 2.4 más adelante.

Lema 2.6. *Sean s_0 y $s_1, \ldots, s_n$ secuentes. Si hay una instancia de una regla r de $PSGLS$ de la siguiente forma, entonces $\Theta(s_i) < \Theta(s_0)$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.*

$$\frac{s_1 \ldots s_n}{s_0}\ r$$

Demostración. Razonamos por análisis de casos en r:

1) Si r es (IdP), (IdB) ó $(\bot L)$,

$$\frac{}{p, X \vdash Y, p}\ (IdP) \qquad \frac{}{\Box A, X \vdash Y, \Box A}\ (IdB) \qquad \frac{}{\bot, X \vdash Y}\ (\bot L)$$

se cumple ya que no hay premisas.

2) Si r es $(\rightarrow R)$, entonces tiene la siguiente forma:

$$\frac{X, A \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \rightarrow B}\ (\rightarrow R)$$

2.1) Si A tiene caja, entonces $\{\Box B | \Box B \in X\} \subseteq \{\Box B | \Box B \in X \cup \{A\}\}$. Por lo que $\beta(X, A \vdash Y, B) \subseteq \beta(X \vdash Y, A \rightarrow B)$ y, por lo tanto, $Card(\beta(X, A \vdash Y, B)) \leqslant Card(\beta(X \vdash Y, A \rightarrow B))$. Si la desigualdad es estricta, ya se tiene la desigualdad deseada en Θ. Si es igualdad, entonces podemos ver que $\iota(X, A \vdash Y, B) = \iota(X \vdash Y, A \rightarrow B) - 1$ y, por tanto, $\Theta(X, A \vdash Y, B) < \Theta(X \vdash Y, A \rightarrow B)$.

2.2) Si A no tiene caja, entonces obviamente la cardinalidad de los β es igual, pero también $\iota(X, A \vdash Y, B) = \iota(X \vdash Y, A \rightarrow B) - 1$ y, por tanto, $\Theta(X, A \vdash Y, B) < \Theta(X \vdash Y, A \rightarrow B)$.

3) Si r es $(\rightarrow L)$, entonces tiene la siguiente forma:

$$\frac{X \vdash Y, A \quad B, X \vdash Y}{A \rightarrow B, X \vdash Y}\ (\rightarrow L)$$

Como un símbolo de implicación se borra y la cardinalidad de cajas utilizables se mantiene, fácilmente podemos ver que $\Theta(X \vdash Y, A) < \Theta(A \rightarrow B, X \vdash Y)$. Para demostrar que $\Theta(B, X \vdash Y) < \Theta(A \rightarrow B, X \vdash Y)$ razonamos igual que en 2).

4) Si r es (GLR), entonces tiene la siguiente forma:

$$\frac{\boxtimes X, \Box B \vdash B}{W, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z}\ (GLR)$$

Claramente tenemos que $\{\Box A | \Box A \in Sub(\boxtimes X \cup \{\Box B\} \cup \{B\})\} \subseteq \{\Box A | \Box A \in Sub(W \cup \Box X \cup \{\Box B\} \cup \Box Y \cup Z)\}$. También, dado que consideramos una derivación en $PSGLS$, notamos que (IdB) no es aplicable a $W, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z$ por hipótesis. Por lo tanto, $\Box B \notin \Box X$. Consecuentemente, tenemos $\{\Box A | \Box A \in W \cup \Box X\} \subset \{\Box A | \Box A \in \boxtimes X \cup \{\Box B\}\}$. Por lo que $\beta(\boxtimes X, \Box B \vdash B) \subset \beta(W, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z)$. Consecuentemente, obtenemos que $Card(\beta(\boxtimes X, \Box B \vdash B)) < Card(\beta(W, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z))$. Por lo tanto, $\Theta(\boxtimes X, \Box B \vdash B) < \Theta(W, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z)$.

■

La definición 2.1 y el lema 2.6 serán de utilidad para demostrar que todo secuente de $PSGLS$ tiene una derivación de altura máxima y, consecuentemente, el proceso de búsqueda de prueba siempre termina. Para aclarar la definición y el lema anterior, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4. Consideremos la siguiente derivación del axioma K en $PSGLS$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B \vdash A}\text{ Lema 2.1} \qquad \dfrac{}{\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B, B \vdash B}\text{ Lema 2.1}}{\Box(A \to B), A \to B, \Box A, A, \Box B \vdash B}(\to L)}{\Box(A \to B), \Box A \vdash \Box B}(GLR)}{\Box(A \to B) \vdash \Box A \to \Box B}(\to R)}{\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)}(\to R)$$

Calculemos ι para cada uno de los secuentes de la derivación.

$\iota(\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) = 3$
$\iota(\Box(A \to B) \vdash \Box A \to \Box B) = 2$
$\iota(\Box(A \to B), \Box A \vdash \Box B) = 1$
$\iota(\Box(A \to B), A \to B, \Box A, A, \Box B \vdash B) = 2$
$\iota(\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B \vdash A) = 1$
$\iota(\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B, B \vdash B) = 1$

Ahora calculemos β y $Card(\beta)$ para cada uno de los secuentes.

$\beta(\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) = \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} \backslash \varnothing = \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\}$
$Card(\beta(\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))) = 3$

$\beta(\Box(A \to B) \vdash \Box A \to \Box B) = \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} \backslash \{\Box(A \to B)\} = \{\Box A, \Box B\}$
$Card(\beta(\Box(A \to B) \vdash \Box A \to \Box B)) = 2$

$\beta(\Box(A \to B), \Box A \vdash \Box B) = \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} \backslash \{\Box(A \to B), \Box A\} = \{\Box B\}$
$Card(\beta(\Box(A \to B), \Box A \vdash \Box B)) = 1$

$\beta(\Box(A \to B), A \to B, \Box A, A, \Box B \vdash B) = \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} \backslash \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} = \varnothing$
$Card(\beta(\Box(A \to B), A \to B, \Box A, A, \Box B \vdash B)) = 0$

$\beta(\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B \vdash A) = \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} \backslash \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} = \varnothing$
$Card(\beta(\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B \vdash A)) = 0$

$\beta(\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B, B \vdash B) = \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} \backslash \{\Box(A \to B), \Box A, \Box B\} = \varnothing$
$Card(\beta(\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B, B \vdash B)) = 0$

Finalmente, calculemos Θ para cada uno de los secuentes.

$\Theta(\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) = (3, 3)$
$\Theta(\Box(A \to B) \vdash \Box A \to \Box B) = (2, 2)$
$\Theta(\Box(A \to B), \Box A \vdash \Box B) = (1, 1)$
$\Theta(\Box(A \to B), A \to B, \Box A, A, \Box B \vdash B) = (0, 2)$
$\Theta(\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B \vdash A) = (0, 1)$
$\Theta(\Box(A \to B), \Box A, A, \Box B, B \vdash B) = (0, 1)$

Notemos que $(3, 3) > (2, 2) > (1, 1) > (0, 2) > (0, 1)$, lo que concuerda con lo establecido por el lema 2.6.

Teorema 2.2. *Todo secuente s tiene una derivación en $PSGLS$ de altura máxima.*

Demostración. Sea s el secuente $X \vdash Y$ y procedamos por inducción fuerte en el par ordenado $\Theta(s)$.

Caso base: Si $\Theta(s) = (0, 0)$, entonces $\iota(s) = 0$ y $\beta(s) = \varnothing$. Por definición de ι y β, s únicamente tiene fórmulas atómicas y fórmulas atómicas con caja. Además, $\{\Box A | \Box A \in Y\} \subseteq \{\Box A | \Box A \in X\}$ (*i.e.*, no hay cajas usables), por lo que tenemos los siguientes dos casos:

1) s es un secuente inicial. Entonces, la derivación de altura máxima de s es la derivación de altura 1 constituida por la aplicación del secuente inicial correspondiente a s .

2) Ninguna regla es aplicable a s. Entonces, la derivación de altura máxima es simplemente s.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que vale para todo $\Theta(s) \leqslant (n, m)$.

Veamos que vale para $\Theta(s) > (n, m)$

Como la aplicabilidad de reglas de $PSGLS$ es decidible, distinguimos tres casos:

1) Ninguna regla de $PSGLS$ es aplicable a s. Entonces, la derivación de máxima altura buscada es simplemente s.

2) Únicamente reglas iniciales son aplicables. Entonces, la derivación de máxima altura buscada es simplemente la derivación de altura 1 constituida por la aplicación de la regla inicial aplicable a s.

3) Alguna regla no inicial es aplicable. Entonces, consideramos la lista finita $Prem(s)$ de todos los secuentes s_0 tales que hay una regla r con s como conclusión y s_0 como premisa.

   Por el lema 2.6 sabemos que para todo $s_0 \in Prem(s)$, $\Theta(s_0) < \Theta(s)$ y, por lo tanto, tienen una derivación de altura máxima por hipótesis de inducción. Como $Prem(s)$ es finito, hay un elemento $s_{max} \in Prem(s)$ tal que su derivación de altura máxima es igual o más alta que la derivación de altura máxima de los demás secuentes en $Prem(s)$.

   Entonces, la derivación de máxima altura de s es

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots\, \delta_{max} \\ s_{max} \end{matrix} \qquad \cdots}{s}\; r$$

   donde δ_{max} es la derivación de altura máxima de s_{max}.

■

Definición 2.2. Sean s un secuente y δ su derivación de máxima altura en $PSGLS$. Denotamos por $mhd(s)$ a la altura de δ.

Lema 2.7. *Si r es una instancia de una regla de $PSGLS$ con conclusión s_0 y s_1 como una de sus premisas, entonces $mhd(s_1) < mhd(s_0)$.*

Demostración. (Por contradicción).

Supongamos que $mhd(s_1) \geqslant mhd(s_0)$. Sean δ_0 y δ_1 las derivaciones de altura máxima de s_0 y s_1 dadas por el teorema 2.2 y sea δ_2 la siguiente derivación de s_0:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \delta_1 \\ s_1\end{array} \qquad \ldots}{s_0}\ r$$

Notemos que δ_2 tiene altura $mhd(s_1)+1$. Debido a la maximalidad de δ_0, tenemos que $h(\delta_0) \geqslant h(\delta_2)$, *i.e.* $mhd(s_1) + 1 \leqslant mhd(s_0)$, lo cual contradice que $mhd(s_1) \geqslant mhd(s_0)$. ■

En este capítulo presentamos los cálculos de secuentes GLS y $PSGLS$ junto con varias de sus propiedades que nos serán de utilidad más adelante. En el siguiente capítulo demostraremos el teorema de eliminación de corte para el sistema $PSGLS$ y como corolario concluiremos que también es válido en el sistema GLS.

3

Una prueba de eliminación de corte para GLS

En este capítulo presentamos pruebas de eliminación de corte para los sistemas $PSGLS$ y GLS basadas en la demostración dada por Goré *et. al.* en [7].

Teorema 3.1. *La regla aditiva*[1] *de corte es admisible en $PSGLS$.*

Demostración. Sean d_1 (con última regla r_1) y d_2 (con última regla r_2) pruebas en $PSGLS$ de $X \vdash Y, A$ y $A, X \vdash Y$, respectivamente, como se muestra a continuación:

$$\dfrac{\dfrac{d_1}{X \vdash Y, A}\, r_1 \quad \dfrac{d_2}{A, X \vdash Y}\, r_2}{X \vdash Y}\,(Cut)$$

Basta probar que hay una demostración sin corte en $PSGLS$ de $X \vdash Y$. Razonamos por inducción primaria fuerte (IP) sobre el tamaño de la fórmula de corte A, dando la hipótesis inductiva primaria (HIP), e inducción secundaria fuerte (IS) sobre la $mhd(s)$ de la conclusión del corte, dando la hipótesis inductiva secundaria (HIS). Hay seis casos por considerar para r_1 y seis para r_2. Uno para cada regla de $PSGLS$.

1) $r_1 = (IdP)$. Distinguimos dos casos.

1.1) Si A no es principal en r_1, entonces es de la forma

$$\dfrac{}{X_0, p \vdash Y_0, p, A}\,(IdP)$$

[1] Véase la sección 1.3.

y el corte es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{}{X_0, p \vdash Y_0, p, A}\,(IdP) \quad \dfrac{}{A, X_0, p \vdash Y_0, p}\,(IdP)}{X_0, p \vdash Y_0, p}\,(Cut)$$

Donde $X_0, p \vdash Y_0, p$ es instancia de (IdP).

1.2) Si $A = p$ es principal en r_1, entonces es de la forma

$$\dfrac{}{X_0, p \vdash Y, p}\,(IdP)$$

y el corte es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{}{X_0, p \vdash Y, p}\,(IdP) \quad \dfrac{d_2}{X_0, p, p \vdash Y}\,r_2}{X_0, p \vdash Y}\,(Cut)$$

Por lo que podemos aplicar el lema 2.4 (ii) a la conclusión de r_2 para obtener una prueba de $X_0, p \vdash Y$.

2) $r_1 = (\bot L)$. Entonces r_1 es de la forma

$$\dfrac{}{\bot, X_0 \vdash Y, A}\,(\bot L)$$

y el corte es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{}{\bot, X_0 \vdash Y, A}\,(\bot L) \quad \dfrac{}{A, \bot, X_0 \vdash Y}\,(\bot L)}{\bot, X_0 \vdash Y}\,(Cut)$$

Donde $\bot, X_0 \vdash Y$ es instancia de $(\bot L)$.

3) $r_1 = (IdB)$. Distinguimos dos casos.

3.1) Si A no es principal en r_1, entonces es de la forma

$$\dfrac{}{\Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B, A}\,(IdB)$$

y el corte es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{}{\Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B, A}\,(IdB) \quad \dfrac{}{A, \Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B}\,(IdB)}{\Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B}\,(Cut)$$

Donde $\Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B$ es instancia de (IdB).

3.2) Si $A = \Box B$ es principal en r_1, entonces es de la forma

$$\frac{}{\Box B, X_0 \vdash Y, \Box B}\ (IdB)$$

y el corte es de la forma

$$\frac{\dfrac{}{\Box B, X_0 \vdash Y, \Box B}\ (IdB) \quad \dfrac{d_2}{\Box B, X_0, \Box B \vdash Y}\ r_2}{X_0, \Box B \vdash Y}\ (Cut)$$

Por lo que podemos aplicar el lema 2.4 (ii) a la conclusión de r_2 para obtener una prueba de $X_0, \Box B \vdash Y$.

4) $r_1 = (\to R)$. Distinguimos 2 casos:

4.1) Si A no es principal en r_1, entonces tiene la forma

$$\frac{X, B \vdash Y_0, C, A}{X \vdash Y_0, B \to C, A}\ (\to R)$$

y el corte tiene la forma

$$\frac{\dfrac{X, B \vdash Y_0, C, A}{X \vdash Y_0, B \to C, A}\ (\to R) \quad \dfrac{d_2}{A, X \vdash Y_0, B \to C}\ r_2}{X \vdash Y_0, B \to C}\ (Cut)$$

donde $Y_0, B \to C = Y$. Por lo tanto, tenemos que el secuente $X \vdash Y$ y $A, X \vdash Y$ son, respectivamente, de la forma $X \vdash Y_0, B \to C$ y $A, X \vdash Y_0, B \to C$. Podemos aplicar el lema 2.3 (ii) en la prueba del último para obtener una prueba de $A, X, B \vdash Y_0, C$. Esto procede así:

$$\dfrac{\dfrac{X, B \vdash Y_0, C, A \quad A, X, B \vdash Y_0, C}{X, B \vdash Y_0, C}\ HIS}{X \vdash Y_0, B \to C}\ (\to R)$$

Notemos que el uso de HIS está justificado aquí porque $mhd(X, B \vdash Y_0, C) < mhd(X \vdash Y_0, B \to C)$ por el lema 2.7.

4.2) Si A es principal en r_1, *i.e.* $A = B \to C$, entonces, r_1 debe tener la siguiente forma:

$$\frac{B, X \vdash Y, C}{X \vdash Y, B \to C}\ (\to R)$$

y el corte tiene la forma

$$\cfrac{\cfrac{B, X \vdash Y, C}{X \vdash Y, B \to C}\,(\to R) \qquad \cfrac{d_2}{B \to C, X \vdash Y}\, r_2}{X \vdash Y}\,(Cut)$$

La conclusión de r_2 debe ser de la forma $B \to C, X \vdash Y$. Distinguimos dos casos más. En el primer caso $B \to C$ es principal en r_2. Consecuentemente, tiene la siguiente forma:

$$\frac{X \vdash Y, B \quad C, X \vdash Y}{B \to C, X \vdash Y}\,(\to L)$$

Procedemos como sigue:

$$\cfrac{X \vdash Y, B \qquad \cfrac{B, X \vdash Y, C \quad \cfrac{C, X \vdash Y}{C, B, X \vdash Y}\,\text{Lema 2.2(ii)}}{B, X \vdash Y}\,HIP}{X \vdash Y}\,HIP$$

En el segundo caso, $B \to C$ no es principal en r_2.

4.2.1) Si r_2 es $(\to R)$, entonces, debe tener la siguiente forma:

$$\frac{B \to C, D, X \vdash Y_0, E}{B \to C, X \vdash Y_0, D \to E}\,(\to R)$$

donde $Y_0, D \to E = Y$. En este caso, notemos que el secuente $X \vdash Y, B \to C$ es de la forma $X \vdash Y_0, D \to E, B \to C$. Podemos usar el lema 2.3 (ii) en la prueba de lo último para obtener una prueba de $D, X \vdash Y_0, E, B \to C$. Procedemos como sigue:

$$\cfrac{\cfrac{D, X \vdash Y_0, E, B \to C \quad B \to C, D, X \vdash Y_0, E}{D, X \vdash Y_0, E}\,HIS}{X \vdash Y_0, D \to E}\,(\to R)$$

Notemos que el uso de HIS está justificado porque $mhd(X, D \vdash Y_0, E) < mhd(X \vdash Y_0, D \to E)$ por el lema 2.7.

4.2.2) Si r_2 es $(\to L)$, entonces, debe tener la siguiente forma:

$$\frac{B \to C, X_0 \vdash Y, D \quad B \to C, E, X_0 \vdash Y}{B \to C, D \to E, X_0 \vdash Y}\,(\to L)$$

donde $X_0, D \to E = X$. En este caso, notemos que el secuente $X \vdash Y, B \to C$ es de la forma $X_0, D \to E \vdash Y, B \to C$. Podemos usar el lema 2.3 (i) en la prueba de lo último para obtener pruebas de $X_0 \vdash Y, D, B \to C$ y $X_0, E \vdash Y, B \to C$. Procedemos como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{X_0 \vdash Y, D, B \to C \quad B \to C, X_0 \vdash Y, D}{X_0 \vdash Y, D}\,HIS \qquad \dfrac{X_0, E \vdash Y, B \to C \quad B \to C, E, X_0 \vdash Y}{X_0, E \vdash Y}\,HIS}{X_0, D \to E \vdash Y}\,(\to L)$$

Notemos que ambos usos de HIS están justificados pues $mhd(X_0 \vdash Y, D) < mhd(X_0, D \to E \vdash Y)$ y $mhd(X_0, E \vdash Y) < mhd(X_0, D \to E \vdash Y)$ por el lema 2.7.

4.2.3) Si r_2 es (GLR), entonces, debe tener la siguiente forma:

$$\dfrac{\boxtimes X_0, \Box D \vdash D}{W, B \to C, \Box X_0 \vdash \Box D, \Box Y_0, Z}\,(GLR)$$

donde $W, \Box X_0 = X$ y $\Box D, \Box Y_0, Z = Y$. En ese caso, notemos que el secuente $X \vdash Y$ es de la forma $W, \Box X_0 \vdash \Box D, \Box Y_0, Z$. Para obtener una prueba de lo último, aplicamos la regla (GLR) en la premisa de r_2 sin agregar $B \to C$:

$$\dfrac{\boxtimes X, \Box D \vdash D}{W, \Box X_0 \vdash \Box D, \Box Y_0, Z}\,(GLR)$$

5) $r_1 = (\to L)$. Entonces, r_1 debe tener la siguiente forma:

$$\dfrac{X_0 \vdash Y, B, A \quad C, X_0 \vdash Y, A}{B \to C, X_0 \vdash Y, A}\,(\to L)$$

y el corte debe tener la forma

$$\dfrac{\dfrac{X_0 \vdash Y, B, A \quad C, X_0 \vdash Y, A}{B \to C, X_0 \vdash Y, A}\,(\to L) \qquad \dfrac{d_2}{A, B \to C, X_0 \vdash Y}\,r_2}{B \to C, X_0 \vdash Y}\,(Cut)$$

donde $B \to C, X_0 = X$. Por lo tanto, tenemos que los secuentes $X \vdash Y$ y $A, X \vdash Y$ son, respectivamente, de la forma $B \to C, X_0 \vdash Y$ y $A, B \to C, X_0 \vdash Y$. Basta aplicar el lema 2.3 (i) en la prueba de lo último para obtener pruebas de $A, X_0 \vdash Y, B$ y de $A, C, X_0 \vdash Y$, después procedemos como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{X_0 \vdash Y, B, A \quad A, X_0 \vdash Y, B}{X_0 \vdash Y, B}\, HIS \qquad \dfrac{C, X_0 \vdash Y, A \quad A, C, X_0 \vdash Y}{C, X_0 \vdash Y}\, HIS}{B \to C, X_0 \vdash Y}\,(\to L)$$

Notemos que ambos usos de HIS están justificados aquí, pues $mhd(X_0 \vdash Y, B) < mhd(B \to C, X_0 \vdash Y)$ y $mhd(C, X_0 \vdash Y) < mhd(B \to C, X_0 \vdash Y)$ por el lema 2.7.

6) $r_1 = (GLR)$. Distinguimos dos casos:

6.1) A es la fórmula diagonal en r_1:

$$\dfrac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z}\,(GLR)$$

y el corte es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{W, \Box X_0 \vdash \Box B, \Box Y_0, Z}\,(GLR) \qquad \dfrac{d_2}{\Box B, W, \Box X_0 \vdash \Box Y_0, Z}\,r_2}{W, \Box X_0 \vdash \Box Y_0, Z}\,(Cut)$$

donde $A = \Box B$, $W, \Box X_0 = X$ y $\Box Y_0, Z = Y$. Entonces, tenemos que los secuentes $X \vdash Y$ y $A, X \vdash Y$ son, respectivamente, de la forma $W, \Box X_0 \vdash \Box Y_0, Z$ y $\Box B, W, \Box X_0 \vdash \Box Y_0, Z$. Ahora consideramos r_2.

6.1.1) Si r_2 es (IdP), entonces, procedemos como en 1.1).

6.1.2) Si r_2 es $(\bot L)$, entonces, procedemos como en 2).

6.1.3) Si r_2 es (IdB), entonces, procedemos como en 3.1)

6.1.4) Si r_2 es $(\to R)$, entonces, procedemos como en 4.1).

6.1.5) Si r_2 es $(\to L)$, entonces, procedemos como en 5).

6.1.6) Si r_2 es de la forma

$$\dfrac{B, \Box B, \boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{W, \Box B, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_1, Z}\,(GLR)$$

donde $\Box C, \Box Y_1 = \Box Y_0$, entonces, distinguimos dos subcasos.

6.1.6.1) Una de la reglas (IdP), $(\bot L)$ ó (IdB) es aplicable a $W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_1, Z$. Entonces, basta aplicar la regla correspondiente para obtener una prueba de la conclusión del corte.

6.1.6.2) Ninguna de esas reglas es aplicable a $W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_1, Z$ (No inicial). Entonces, procedemos como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{\Box X_0 \vdash \Box B}\,(GLR)}{\boxtimes X_0, \Box C \vdash C, \Box B}\text{ Lema 2.2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxtimes X_0, \Box B \vdash B}{\boxtimes X_0, \Box B, \Box C \vdash C, B}\text{ Lema 2.2} \qquad B, \Box B, \boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{\boxtimes X_0, \Box B, \Box C \vdash C}\,HIP}{}}{\dfrac{\boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_1, Z}\,(GLR)}\,HIS$$

Notemos que el uso de HIS está justificado aquí, pues la hipótesis "No inicial" asegura que $mhd(\boxtimes X_0, \Box C \vdash C) < mhd(W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_1, Z)$ por el lema 2.7.

6.2) A no es la fórmula diagonal en r_1:

$$\dfrac{\boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{W, \Box X_0 \vdash \Box C, A, \Box Y_0, Z}\,(GLR)$$

y el corte es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{\boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{W, \Box X_0 \vdash \Box C, A, \Box Y_0, Z}\,(GLR) \qquad \dfrac{d_2}{A, W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_0, Z}\,r_2}{W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_0, Z}\,(Cut)$$

donde $W, \Box X_0 = X$ y $\Box C, \Box Y_0, Z = Y$. En ese caso, notemos que el secuente $X \vdash Y$ es de la forma $W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_0, Z$. Para obtener una prueba de lo último, aplicamos la regla (GLR) en la premisa de r_1 sin agregar $\Box B$:

$$\dfrac{\boxtimes X_0, \Box C \vdash C}{W, \Box X_0 \vdash \Box C, \Box Y_0, Z}\,(GLR).$$

7) $r_2 = (IdP)$. Distinguimos dos casos:

7.1) A no es principal en r_2 entonces tiene la forma

$$\dfrac{}{A, X_0, p \vdash Y_0, p}\,(IdP)$$

y el corte tiene la forma

$$\frac{X_0, p \vdash Y_0, p, A \quad A, X_0, p \vdash Y_0, p}{X_0, p \vdash Y_0, p}\ (Cut).$$

Donde $X \vdash Y$ es instancia de (IdP).

7.2) $A = p$ es principal en r_2. Entonces, tiene la forma

$$\frac{}{p, X \vdash Y_0, p}\ (IdP)$$

y el corte tiene la forma

$$\frac{\dfrac{d_1}{X \vdash Y_0, p, p}\ r_1 \quad \dfrac{}{p, X \vdash Y_0, p}\ (IdP)}{X \vdash Y_0, p}\ (Cut).$$

Entonces, aplicando el lema 2.4 (i) a la conclusión de r_1, obtenemos una prueba de $X \vdash Y$.

8) $r_2 = (\bot L)$. Distinguimos dos casos:

8.1) A no es principal en r_2, entonces tiene la forma

$$\frac{}{A, \bot, X_0 \vdash Y}\ (\bot L)$$

y el corte tiene la forma

$$\frac{\dfrac{}{\bot, X_0 \vdash Y, A}\ (\bot L) \quad \dfrac{}{A, \bot, X_0 \vdash Y}\ (\bot L)}{\bot, X_0 \vdash Y}\ (Cut).$$

Por lo que $X \vdash Y$ es instancia de $(\bot L)$.

8.2) A es principal en r_2. Entonces tiene la forma

$$\frac{}{\bot, X \vdash Y}\ (\bot L)$$

y el corte tiene la forma

$$\frac{\dfrac{d_1}{X \vdash Y, \bot}\ r_1 \quad \dfrac{}{\bot, X \vdash Y}\ (\bot L)}{X \vdash Y}\ (Cut).$$

Entonces, aplicando el lema 2.5 a la conclusión de r_1, obtenemos una prueba de $X \vdash Y$.

9) $r_2 = (IdB)$. Distinguimos dos casos:

9.1) A no es principal en r_2. Entonces, tiene la forma

$$\frac{}{A, \Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B}\ (IdB)$$

y el corte tiene la forma

$$\dfrac{\dfrac{}{\Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B, A}\ (IdB) \qquad \dfrac{}{A, \Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B}\ (IdB)}{\Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B}\ (Cut)$$

Donde $\Box B, X_0 \vdash Y_0, \Box B$ es instancia de (IdB).

9.2) $A = \Box B$ es principal en r_2. Entonces, tiene la forma

$$\frac{}{\Box B, X \vdash Y_0, \Box B}\ (IdB)$$

y el corte tiene la forma

$$\dfrac{\dfrac{d_1}{X \vdash Y_0, \Box B, \Box B}\ r_1 \qquad \dfrac{}{\Box B, X \vdash Y_0, \Box B}\ (IdB)}{X \vdash Y_0, \Box B}\ (Cut).$$

Entonces, aplicando el lema 2.4 (i) a la conclusión de r_1, obtenemos una prueba de $X \vdash Y$.

10) $r_2 = (\to R)$. Entonces, tiene la forma

$$\dfrac{A, B, X \vdash Y_0, C}{A, X \vdash Y_0, B \to C}\ (\to R)$$

y el corte tiene la forma

$$\dfrac{\dfrac{d_1}{X \vdash Y_0, B \to C, A}\ r_1 \qquad \dfrac{A, B, X \vdash Y_0, C}{A, X \vdash Y_0, B \to C}\ (\to R)}{X \vdash Y_0, B \to C}\ (Cut)$$

Aplicando el lema 2.3 (ii) a r_1, podemos obtener una prueba del secuente $B, X \vdash Y_0, C, A$ y proceder de la misma manera que en el caso 4.1).

11) $r_2 = (\to L)$. Distinguimos dos casos:

11.1) A no es principal en r_2. Entonces, tiene la forma

$$\frac{A, X_0 \vdash Y, B \quad A, C, X_0 \vdash Y}{A, B \to C, X_0 \vdash Y}\,(\to L)$$

y el corte tiene la forma

$$\dfrac{\dfrac{d_1}{B \to C, X_0 \vdash Y, A}\,r_1 \quad \dfrac{A, X_0 \vdash Y, B \quad A, C, X_0 \vdash Y}{A, B \to C, X_0 \vdash Y}\,(\to L)}{B \to C, X_0 \vdash Y}\,(Cut)$$

Aplicando el lema 2.3 (i) a r_1, podemos obtener pruebas de los secuentes $X_0 \vdash Y, B, A$ y $C, X_0 \vdash Y, A$ y proceder de la misma manera que en el caso 5).

11.2) A es principal en r_2. Entonces, tiene la forma

$$\frac{X \vdash Y, B \quad C, X \vdash Y}{B \to C, X \vdash Y}\,(\to L)$$

y el corte tiene la forma

$$\dfrac{\dfrac{d_1}{X \vdash Y, B \to C}\,r_1 \quad \dfrac{X \vdash Y, B \quad C, X \vdash Y}{B \to C, X \vdash Y}\,(\to L)}{X \vdash Y}\,(Cut)$$

Aplicando el lema 2.3 (ii) a r_1, podemos obtener una prueba del secuente $B, X \vdash Y, C$ y proceder de la misma manera que en el caso 4.2).

12) $r_2 = (GLR)$. Entonces, tiene la forma

$$\frac{\boxtimes X, \Box B \vdash B}{A, W_0, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z}\,(GLR)$$

y el corte tiene la forma

$$\dfrac{\dfrac{d_1}{W_0, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z, A}\,r_1 \quad \dfrac{\boxtimes X, \Box B \vdash B}{A, W_0, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z}\,(GLR)}{W_0, \Box X \vdash \Box B, \Box Y, Z}\,(Cut)$$

Entonces basta con aplicar (GLR) a la premisa de r_2 sin agregar A.

■

El teorema anterior muestra que es posible eliminar el corte dentro del sistema $PSGLS$. A partir de este hecho, podemos concluir que esto también es posible en el sistema GLS, tal como lo muestra el siguiente corolario:

Corolario 3.1. *La regla aditiva de corte es admisible en GLS.*

Demostración. Sea $X \vdash Y$ un secuente demostrable en GLS. Por el teorema 2.1, $X \vdash Y$ es demostrable en $PSGLS$. Por el teorema 3.1, $X \vdash Y$ tiene una prueba π libre de corte en $PSGLS$. Aplicando el teorema 2.1 a π es posible obtener una prueba libre de corte de $X \vdash Y$ en GLS. Nótese que el procedimiento utilizado para obtener esta nueva prueba no introduce cortes[2]. ■

En este capítulo dimos una demostración del teorema de eliminación de corte para el sistema $PSGLS$ y como corolario concluimos que también es válido en el sistema GLS. Puesto que la demostración que presentamos está basada en la dada por Goré *et. al.* en [7], nos parece importante recalcar que nuestra demostración fue hecha sin recurrir a ningún asistente de demostración. Para lograr esto:

- Demostramos todos los lemas que se incluyen en [7] sin demostrarse (lemas 2.1 a 2.3).
- Enunciamos y demostramos el lema 2.5, el cual es utilizado implícitamente por Goré *et. al.* sin demostrarse ni mencionarse.
- Demostramos la equivalencia entre los sistemas GLS y $PSGLS$ (teorema 2.1.), que solamente es mencionada por los autores sin demostrarla.
- Detallamos las demostraciones del lema 2.6 y el teorema 2.2.
- Detallamos la demostración del teorema de eliminación de corte, incluyendo todos los casos omitidos en [7] y explicando más ampliamente aquellos que sí se incluyeron.

En el siguiente capítulo presentaremos un sistema de deducción natural para la lógica GL y algunas de sus propiedades.

[2] Véase la demostración del teorema 2.1.

4

Un sistema de deducción natural para la lógica GL

En este capítulo presentamos el sistema de deducción natural GLN basado[1] en el dado por Bellin en [1]. El cual consta de las siguientes reglas:

$$\frac{}{X, A \vdash A}\,(Hip) \qquad \frac{X \vdash \bot}{X \vdash C}\,(\bot E) \qquad \frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A}\,(Raa)^2$$

$$\frac{X \vdash A \quad X \vdash B}{X \vdash A \wedge B}\,(\wedge I) \qquad \frac{X \vdash A \wedge B \quad X, A, B \vdash C}{X \vdash C}\,(\wedge E)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B}\,(\vee I) \qquad \frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B}\,(\vee I) \qquad \frac{X \vdash A \vee B \quad X, A \vdash C \quad X, B \vdash C}{X \vdash C}\,(\vee E)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \to B}\,(\to I) \qquad \frac{X \vdash A \to B \quad X \vdash A \quad X, B \vdash C}{X \vdash C}\,(\to E)$$

[1] A diferencia de Bellin, utilizamos un sistema de secuentes y reglas de eliminación generalizadas, pues esto facilitará el trabajo realizado en el capítulo 5 y la prueba de admisibilidad de la regla (Sub).

[2] $\neg A \equiv_{def} A \to \bot$.

$$\dfrac{X \vdash \Box B_1 \quad \ldots \quad X \vdash \Box B_{n+p} \quad B_1, \ldots, B_n, \Box A, \Box B_{n+1}, \ldots, \Box B_{n+p} \vdash A}{X \vdash \Box A}\ (GLR)$$

A continuación mostramos dos ejemplos de derivaciones en el sistema GLN.

Ejemplo 4.1. La fórmula $\Box A \to \Box\neg A$ no es demostrable en GLN.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Box A \vdash \Box A}\ (Hip) \qquad \dfrac{\Box A, A, \Box\neg A, A \vdash \bot}{\Box A, A, \Box\neg A \vdash \neg A}\ (Raa)}{\Box A \vdash \Box\neg A}\ (GLR)}{\vdash \Box A \to \Box\neg A}\ (\to I)$$

Notemos que, de manera similar a lo ocurrido en el ejemplo 2.2, no es posible aplicar ninguna regla al secuente $\Box A, A, \Box\neg A, A \vdash \bot$, por lo que $\Box A \to \Box\neg A$ no es demostrable en GLN.

Ejemplo 4.2. Como mencionamos en la introducción, en la lógica GL, el operador modal "$\Box$" se interpreta como "ser demosrtrable en la aritmética". De acuerdo con esta interpretación, la fórmula "$\neg\Box\bot$" representa al enunciado de consistencia de la aritmética, pues su interpretación es: "Una contradicción no es demostrable". De acuerdo con esto, la interpretación de la fórmula "$\Box\neg\Box\bot$" es: "El enunciado de consistencia de la aritmética es demostrable" y, por lo tanto, la interpretación de la fórmula "$\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$" es: "Si la aritmética es consistente, el enunciado que afirma su consistencia no es demostrable". Es decir, la fórmula anterior representa el segundo teorema de Gödel. A continuación presentamos una demostración de dicha fórmula en GLN.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\Box\bot, \Box\neg\Box\bot \vdash \Box\bot \to \bot}\ (Hip) \qquad \Pi \qquad \dfrac{}{\neg\Box\bot, \Box\neg\Box\bot, \bot \vdash \bot}\ (Hip)}{\neg\Box\bot, \Box\neg\Box\bot \vdash \bot}\ (\to E)}{\neg\Box\bot \vdash \neg\Box\neg\Box\bot}\ (Raa)}{\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot}\ (\to I)$$

Donde Π es la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\Box\bot, \Box\neg\Box\bot \vdash \Box\neg\Box\bot}\ (Hip) \qquad \Gamma}{\neg\Box\bot, \Box\neg\Box\bot \vdash \Box\bot}\ (GLR)$$

Donde Γ es la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Box\bot, \neg\Box\bot \vdash \Box\bot \to \bot}\,(Hip) \quad \dfrac{}{\Box\bot, \neg\Box\bot \vdash \Box\bot}\,(Hip) \quad \dfrac{}{\Box\bot, \neg\Box\bot, \bot \vdash \bot}\,(Hip)}{\Box\bot, \neg\Box\bot \vdash \bot}\,(\to E)$$

4.1. Propiedades de GLN

A continuación presentamos algunas propiedades del sistema GLN que nos serán de utilidad más adelante.

Lema 4.1. *La regla*

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B}\,(Wk)$$

es admisible en GLN*.*

Demostración. Procedamos por inducción estructural.

Caso base:

$X \vdash B$ es

$$\frac{}{X_0, B \vdash B}\,(Hip)$$

Entonces,

$$\frac{}{X_0, A, B \vdash B}\,(Hip)$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\bot E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash \bot}{X \vdash B}\,(\bot E)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash \bot}\,H.I.}{X, A \vdash B}\,(\bot E)$$

2) La última regla aplicada es (Raa), por lo que la demostración es de la forma

$$\frac{X, \neg B \vdash \bot}{X \vdash B}\ (Raa)$$

por lo que

$$\frac{\overline{X, A, \neg B \vdash \bot}\ H.I.}{X, A \vdash B}\ (Raa)$$

3) La última regla aplicada es $(\wedge I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash B \quad X \vdash C}{X \vdash B \wedge C}\ (\wedge I)$$

por lo que

$$\frac{\overline{X, A \vdash B}\ H.I. \quad \overline{X, A \vdash C}\ H.I.}{X, A \vdash B \wedge C}\ (\wedge I)$$

4) La última regla aplicada es $(\wedge E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash B \wedge C \quad X, B, C \vdash D}{X \vdash D}\ (\wedge E)$$

por lo que

$$\frac{\overline{X, A \vdash B \wedge C}\ H.I \quad \overline{X, A, B, C \vdash D}\ H.I.}{X, A \vdash D}\ (\wedge E)$$

5) La última regla aplicada es $(\vee I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash B \vee C}\ (\vee I)$$

por lo que

$$\frac{\overline{X, A \vdash B}\ H.I.}{X, A \vdash B \vee C}\ (\vee I)$$

6) La última regla aplicada es $(\vee E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash B \vee C \quad X, B \vdash D \quad X, C \vdash D}{X \vdash D}\ (\vee E)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash B \vee C}\, H.I. \quad \dfrac{}{X, A, B \vdash D}\, H.I \quad \dfrac{}{X, A, C \vdash D}\, H.I}{X, A \vdash D}\,(\vee E)$$

7) La última regla aplicada es $(\rightarrow I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, B \vdash C}{X \vdash B \rightarrow C}\,(\rightarrow I)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A, B \vdash C}\, H.I.}{X, A \vdash B \rightarrow C}\,(\rightarrow C)$$

8) La última regla aplicada es $(\rightarrow E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X \vdash B \rightarrow C \quad X \vdash B \quad X, C \vdash D}{X \vdash D}\,(\rightarrow E)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash B \rightarrow C}\, H.I \quad \dfrac{}{X, A \vdash B}\, H.I \quad \dfrac{}{X, A, C \vdash D}\, H.I.}{X, A \vdash D}\,(\rightarrow E)$$

9) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X \vdash \Box C_1 \quad \ldots \quad X \vdash \Box C_{n+p} \quad C_1, \ldots, C_n, \Box B, \Box C_{n+1}, \ldots, \Box C_{n+p} \vdash B}{X \vdash \Box B}\,(GLR)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash \Box C_1}\, H.I. \quad \ldots \quad \dfrac{}{X, A \vdash \Box C_{n+p}}\, H.I. \quad C_1, \ldots, C_n, \Box B, \Box C_{n+1}, \ldots, \Box C_{n+p} \vdash B}{X, A \vdash \Box B}\,(GLR)$$

■

Lema 4.2. *La regla*

$$\dfrac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B}\,(Ctr)$$

es admisible en GLN.

Demostración. Procedamos por inducción estructural.

Casos base:

1) $X \vdash B$ es

$$\frac{}{X_0, B, A, A \vdash B}\ (Hip)$$

Entonces,

$$\frac{}{X_0, B, A \vdash B}\ (Hip)$$

2) $X \vdash B$ es

$$\frac{}{X_0, A, A \vdash A}\ (Hip)$$

Entonces,

$$\frac{}{X_0, A \vdash A}\ (Hip)$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\bot E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X, A, A \vdash \bot}{X, A, A \vdash B}\ (\bot E)$$

por lo que

$$\cfrac{\cfrac{}{X, A \vdash \bot}\ H.I.}{X, A \vdash B}\ (\bot E)$$

2) La última regla aplicada es (Raa), por lo que la demostración es de la forma

$$\frac{X, A, A, \neg B \vdash \bot}{X, A, A \vdash B}\ (Raa)$$

por lo que

$$\cfrac{\cfrac{}{X, A, \neg B \vdash \bot}\ H.I.}{X, A \vdash B}\ (Raa)$$

3) La última regla aplicada es $(\wedge I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, A, A \vdash B \quad X, A, A \vdash C}{X, A, A \vdash B \wedge C}\ (\wedge I)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash B}\ H.I. \quad \dfrac{}{X, A \vdash C}\ H.I.}{X, A \vdash B \wedge C}\ (\wedge I)$$

4) La última regla aplicada es $(\wedge E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, A, A \vdash B \wedge C \quad X, A, A, B, C \vdash D}{X, A, A \vdash D}\ (\wedge E)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash B \wedge C}\ H.I \quad \dfrac{}{X, A, B, C \vdash D}\ H.I.}{X, A \vdash D}\ (\wedge E)$$

5) La última regla aplicada es $(\vee I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, A, A \vdash B}{X, A, A \vdash B \vee C}\ (\vee I)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash B}\ H.I.}{X, A \vdash B \vee C}\ (\vee I)$$

6) La última regla aplicada es $(\vee E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, A, A \vdash B \vee C \quad X, A, A, B \vdash D \quad X, A, A, C \vdash D}{X, A, A \vdash D}\ (\vee E)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash B \vee C}\ H.I. \quad \dfrac{}{X, A, B \vdash D}\ H.I \quad \dfrac{}{X, A, C \vdash D}\ H.I}{X, A \vdash D}\ (\vee E)$$

7) La última regla aplicada es $(\to I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, A, A, B \vdash C}{X, A, A \vdash B \to C}\ (\to I)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A, B \vdash C}\ H.I.}{X, A \vdash B \to C}\ (\to C)$$

8) La última regla aplicada es $(\to E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, A, A \vdash B \to C \quad X, A, A \vdash B \quad X, A, A, C \vdash D}{X, A, A \vdash D}\ (\to E)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash B \to C}\ H.I \quad \dfrac{}{X, A \vdash B}\ H.I \quad \dfrac{}{X, A, C \vdash D}\ H.I.}{X, A \vdash D}\ (\to E)$$

9) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, A, A \vdash \Box C_1 \quad \ldots \quad X, A, A \vdash \Box C_{n+p} \quad C_1, \ldots, C_n, \Box B, \Box C_{n+1}, \ldots, \Box C_{n+p} \vdash B}{X, A, A \vdash \Box B}\ (GLR)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \vdash \Box C_1}\ H.I. \quad \ldots \quad \dfrac{}{X, A \vdash \Box C_{n+p}}\ H.I. \quad C_1, \ldots, C_n, \Box B, \Box C_{n+1}, \ldots, \Box C_{n+p} \vdash B}{X, A \vdash \Box B}\ (GLR)$$

■

Lema 4.3. *La regla*

$$\dfrac{X \vdash A \quad X, A \vdash B}{X \vdash B}\ (Sub)$$

es admisible en GLN.

Demostración. Notemos que

$$\dfrac{\dfrac{X, A \vdash B}{X \vdash A \to B}\ (\to I) \quad X \vdash A \quad \dfrac{}{X, B \vdash B}\ (Hip)}{X \vdash B}\ (\to E)$$

■

4.2. La regla GLR

La regla GLR, a diferencia del resto de las reglas del sistema GLN, no puede considerarse propiamente como una regla de eliminación ni de introducción, debido a que introduce y elimina fórmulas a la vez. Por esta razón, uno podría preguntarse si es útil generalizarla, tal como se hace con las reglas de eliminación de la implicación y la conjunción[2]. Para los propósitos de este trabajo, esto no es necesario debido a que, a diferencia de lo que ocurre con las reglas $(\rightarrow R)$ y $(\wedge R)$ del sistema GLS[3], en las que el consecuente y las conjuntivas no necesariamente forman parte del multiconjunto izquierdo de la conclusión de la respectiva regla, la fórmula diagonal de la regla (GLR) del sistema GLS siempre forma parte del respectivo multiconjunto. Por este motivo, no es necesario buscar una generalización de la regla (GLR) del sistema GLN, pues en caso de que $\Box Y$ y Z sean no vacíos[2], las fórmulas que los conforman pueden agregarse a la conclusión, en GLN, mediante aplicaciones sucesivas de la regla $(\vee I)$.

Aunque el teorema de normalización del sistema GLN no es parte de los propósitos de este trabajo, nos parece importante destacar que su demostración es casi tan complicada como la demostración usual del teorema de eliminación de corte de GLS[4].

En este capítulo presentamos el sistema de deducción natural GLN para la lógica GL y algunas de sus propiedades. En el siguiente capítulo demostraremos la equivalencia entre los sistemas GLS y GLN.

[2] Véase la sección 1.1.
[3] Véanse la sección 2.1 y el capítulo 5.
[4] Véase [1] pp. 93-109

5 Equivalencia

En este capítulo mostramos la equivalencia entre los sistemas GLS y GLN presentados en los capítulos dos y cuatro. Para esto es necesario demostrar el siguiente lema:

Lema 5.1. *Las siguientes reglas son admisibles en GLS:*

$$\frac{X \vdash Y, A}{\neg A, X \vdash Y}\ (\neg L) \qquad \frac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A}\ (\neg R)$$

$$\frac{X \vdash Y, A \quad X, \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \wedge B}\ (\wedge R) \qquad \frac{A, B, X \vdash Y}{A \wedge B, X \vdash Y}\ (\wedge L)$$

$$\frac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A \vee B}\ (\vee R) \qquad \frac{X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \vee B}\ (\vee R) \qquad \frac{A, X \vdash Y \quad B, X \vdash Y}{A \vee B, X \vdash Y}\ (\vee L)$$

Donde $\neg A \equiv_{def} A \to \bot$, $A \wedge B \equiv_{def} \neg(A \to \neg B)$ y $A \vee B \equiv_{def} \neg A \to B$[1]*.*

Demostración. Veamos que suponiendo las premisas es posible demostrar la conclusión.

[1] Puesto que la gramática del sistema GLS no incluye negación, conjunción ni disyunción, es necesario recurrir a estas equivalencias para poder manejar fórmulas con estos conectivos.

1) $(\neg L)$

$$\dfrac{X \vdash Y, A \qquad \dfrac{}{\bot, X \vdash Y}\,(\bot L)}{A \to \bot, X \vdash Y}\,(\to L)$$

2) $(\neg R)$

$$\dfrac{\dfrac{A, X \vdash Y}{A, X \vdash Y, \bot}\,\text{Lema 2.2}}{X \vdash Y, A \to \bot}\,(\to R)$$

3) $(\wedge R)$

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash Y, A \qquad \dfrac{X \vdash Y, B}{\neg B, X \vdash Y}\,(\neg L)}{A \to \neg B, X \vdash Y}\,(\to L)}{X \vdash Y, \neg(A \to \neg B)}\,(\neg R)$$

4) $(\wedge L)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B, X \vdash Y}{A, X \vdash Y, \neg B}\,(\neg R)}{X \vdash Y, A \to \neg B}\,(\to R)}{\neg(A \to \neg B), X \vdash Y}\,(\neg L)$$

5) $(\vee R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \vdash Y, A}{X \vdash Y, A, B}\,\text{Lema 2.2}}{\neg A, X \vdash Y, B}\,(\neg L)}{X \vdash Y, \neg A \to B}\,(\to R)$$

6) $(\vee L)$

$$\dfrac{\dfrac{A, X \vdash Y}{X \vdash Y, \neg A}\,(\neg R) \qquad B, X \vdash Y}{\neg A \to B, X \vdash Y}\,(\to L)$$

■

Teorema 5.1. *Sea* $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$. *Entonces,* $X \vdash_{GLS} Y$ *si y sólo si* $X \vdash_{GLN} \bigvee_{i=1}^{k} y_i$.

Demostración. Procedamos por inducción en ambas implicaciones.

$\Leftarrow$ | Supongamos que $X \vdash_{GLN} A$ y veamos que $X \vdash_{GLS} A$.

Caso base:

A es una hipótesis

$$\frac{}{X, A \vdash A}\ (Hip).$$

Entonces,

$$\frac{}{X, A \vdash A}\ (\text{Lema 2.1}).$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla.

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla.

1) La última regla aplicada es $(\perp E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash \perp}{X \vdash A}\ (\perp E)$$

por lo que

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{X \vdash \perp}\ H.I.}{X \vdash \perp, A}\ (\text{Lema 2.2}) \qquad \cfrac{}{X, \perp \vdash A}\ (\perp L)}{X \vdash A}\ (Cut).$$

2) La última regla aplicada es (Raa). Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X, \neg A \vdash \perp}{X \vdash A}\ (Raa)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{\overline{X, \neg A \vdash \bot}\; H.I.}{X \vdash \neg\neg A}\,(\to R) \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{X, A \vdash A}\;(\text{Lema } 2.1)}{X \vdash A, \neg A}\,(\neg R)}{X, \neg\neg A \vdash A}\,(\neg L)}{X \vdash A}\,(Cut)$$

3) La última regla aplicada es $(\wedge I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X \vdash A \quad X \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B}\,(\wedge I)$$

por lo que

$$\dfrac{\overline{X \vdash A}\; H.I. \qquad \overline{X \vdash B}\; H.I.}{X \vdash A \wedge B}\,(\wedge R).$$

4) La última regla aplicada es $(\vee I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B}\,(\vee I)$$

por lo que

$$\dfrac{\overline{X \vdash A}\; H.I.}{X \vdash A \vee B}\,(\vee R).$$

5) La última regla aplicada es $(\to I)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X, A \vdash B}{X \vdash A \to B}\,(\to I)$$

por lo que

$$\dfrac{\overline{X, A \vdash B}\; H.I.}{X \vdash A \to B}\,(\to R).$$

6) La última regla aplicada es $(\wedge E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{X \vdash A \wedge B \quad X, A, B \vdash C}{X \vdash C}\,(\wedge E)$$

por lo que

$$\dfrac{\overline{X \vdash A \wedge B}\; H.I. \qquad \dfrac{\overline{A, B, X \vdash C}\; H.I.}{A \wedge B, X \vdash C}\,(\wedge L)}{X \vdash C}\,(Cut).$$

7) La última regla aplicada es $(\vee E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash A \vee B \quad X, A \vdash C \quad X, B \vdash C}{X \vdash C}\,(\vee E)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X \vdash A \vee B}\,H.I. \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, X \vdash C}\,H.I. \quad \dfrac{}{B, X \vdash C}\,H.I.}{X, A \vee B \vdash C}\,(\vee L)}{X \vdash C}\,(Cut).$$

8) La última regla aplicada es $(\to E)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash A \to B \quad X \vdash A \quad X, B \vdash C}{X \vdash C}\,(\to E)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X \vdash A \to B}\,H.I. \qquad \dfrac{\dfrac{}{X \vdash A}\,H.I. \quad \dfrac{}{B, X \vdash C}\,H.I.}{X, A \to B \vdash C}\,(\to L)}{X \vdash C}\,(Cut).$$

9) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash \Box B_1 \quad \dots \quad X \vdash \Box B_{n+p} \quad B_1, \dots, B_n, \Box A, \Box B_{n+1}, \dots, \Box B_{n+p} \vdash A}{X \vdash \Box A}\,(GLR)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{}{X \vdash \Box B_1}\,H.I. \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{}{X \vdash \Box B_{n+p}}\,H.I. \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B_1, \dots, B_n, \Box B_{n+1}, \dots, \Box B_{n+p}, \Box A \vdash A}\,H.I.}{B_1, \dots, B_{n+p}, \Box B_1, \dots \Box B_{n+p}, \Box A \vdash A}\,\text{(Lema 2.2)}}{X, \Box B_1, \dots, \Box B_{n+p} \vdash \Box A}\,(GLR)}{}\,(Cut) \\ \vdots\end{array}}{X, \Box B_1 \vdash \Box A}\,(Cut)}{X \vdash \Box A}\,(Cut)$$

$\Rightarrow$ Supongamos que $X \vdash_{GLS} Y$ y veamos que $X \vdash_{GLN} \bigvee_{i=1}^{k} y_i$.

Casos base:

1) $X \vdash Y$ es el secuente inicial

$$\frac{}{X, p \vdash Y, p}\ (IdP).$$

Entonces,

$$\dfrac{\dfrac{}{X, p \vdash p}\ (Hip)}{X, p \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee p}\ (\vee I).$$

2) $X \vdash Y$ es el secuente inicial

$$\frac{}{\perp, X \vdash Y}\ (\perp L)$$

Entonces,

$$\dfrac{\dfrac{}{\perp, X \vdash \perp}\ (Hip)}{\perp, X \vdash \bigvee_{i=1}^{k} y_i}\ (\perp E).$$

<u>Hipótesis de inducción:</u> Supongamos que vale para las premisas de cualquier regla (primitiva).

Veamos que vale para la conclusión de cualquier regla (primitiva).

1) La última regla aplicada es $(\to L)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\frac{X \vdash Y, A \quad B, X \vdash Y}{A \to B, X \vdash Y}\ (\to L).$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee A}\ H.I.}{X, A \to B \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee A}\ (Wk) \qquad \dfrac{}{X, A \to B, \bigvee_{i=1}^{k} y_i \vdash \bigvee_{i=1}^{k} y_i}\ (Hip) \qquad \Lambda}{X, A \to B \vdash \bigvee_{i=1}^{k} y_i}\ (\vee E)$$

Donde Λ es la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\Lambda_1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{X, B \vdash \bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i}\ H.I.}{X, A \to B, B \vdash \bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i}\ (Wk)}{X, A \to B \vdash \bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i}\ (Sub)}{X, A \to B, A \vdash \bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i}\ (Wk)$$

Donde Λ_1 es la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{}{X, A \to B \vdash A \to B}\ (Hip) \qquad \dfrac{}{X, A \to B, A \vdash A}\ (Hip) \qquad \dfrac{}{X, A \to B, B \vdash B}\ (Hip)}{X, A \to B \vdash B}\ (\to E)$$

2) La última regla aplicada es $(\to R)$. Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{A, X \vdash Y, B}{X \vdash Y, A \to B}\ (\to R)$$

por lo que

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, X \vdash \left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B}\ H.I.}{X \vdash A \to \left[\left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right]}\ (\to I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma}{A \to \left[\left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right] \vdash A \vee \neg A}\ (Wk) \qquad \Pi}{A \to \left[\left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right] \vdash \left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}\ (Sub)}{X, A \to \left[\left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right] \vdash \left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}\ (Wk)}{X \vdash \left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}\ (Sub)$$

Donde Σ y Π son las siguientes:

Σ:

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \wedge A \vdash \neg A \wedge A}\,(Hip) \qquad \Sigma_2}{\neg A \wedge A \vdash \bot}\,(\wedge E)}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \wedge A \vdash \bot}\,(Wk)}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}\,(Sub)}{\vdash A \vee \neg A}\,(Raa)$$

Donde Σ_1 y Σ_2 son las siguientes:

Σ_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Theta_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(Hip)}{A \vdash A \vee \neg A}\,(\vee I)}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A}\,(Wk) \qquad \dfrac{}{\neg(A \vee \neg A), A, \bot \vdash \bot}\,(Hip)}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \bot}\,(\to E)}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}\,(\to I) \qquad \Theta_2}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \wedge A}\,(\wedge I)$$

Donde Θ_1 y Θ_2 son las siguientes:

Θ_1:

$$\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash (A \vee \neg A) \to \bot}\,(Hip)$$

Θ_2:

$$\dfrac{\dfrac{\Xi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \vdash \neg A}\,(Hip)}{\neg A \vdash A \vee \neg A}\,(\vee I)}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash A \vee \neg A}\,(Wk) \qquad \dfrac{}{\neg(A \vee \neg A), \neg A, \bot \vdash \bot}\,(Hip)}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \bot}\,(\to E)}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A}\,(Raa)$$

Donde Ξ es la siguiente:

$$\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash (A \vee \neg A) \to \bot}\,(Hip)$$

Σ_2:

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg A, A \vdash A \to \bot}\,(Hip) \quad \dfrac{}{\neg A, A \vdash A}\,(Hip) \quad \dfrac{}{\neg A, A, \bot \vdash \bot}\,(Hip)}{\dfrac{\neg A, A \vdash \bot}{\neg A \wedge A, \neg A, A \vdash \bot}\,(Wk)}\,(\to E)$$

Π:

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A, A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right] \vdash A \vee \neg A}\,(Hip) \qquad \Gamma_1 \quad \Gamma_2}{A \vee \neg A, A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right] \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}\,(\vee E)$$

Donde Γ_1 y Γ_2 son las siguientes:

Γ_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A, A \vdash A \to \bot}\,(Hip) \quad \dfrac{}{\neg A, A \vdash A}\,(Hip) \quad \dfrac{}{\neg A, A, \bot \vdash \bot}\,(Hip)}{\neg A, A \vdash \bot}\,(\to E)}{\neg A, A \vdash B}\,(\bot E)}{\neg A \vdash A \to B}\,(\to I)}{\neg A \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}\,(\vee I)}{A \vee \neg A, A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], \neg A \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}\,(Wk)$$

Γ_2:

$$
\dfrac{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(Hip)}{A, B \vdash B}\,(Wk)}{B \vdash A \to B}\,(\to I)}{A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A, B \vdash A \to B}\,(Wk)}{A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A, B \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}\,(\vee I)}{\dfrac{A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}{A \vee \neg A, A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A}\,(Wk)}\,(\vee E)
$$

Donde Δ_1 y Δ_2 son las siguientes:

Δ_1:

$$
\dfrac{\Psi_1 \quad \dfrac{}{A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A \vdash A}\,(Hip) \quad \Psi_2}{A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B}\,(\to E)
$$

Donde Ψ_1 y Ψ_2 son las siguientes:

Ψ_1:

$$
\dfrac{}{A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A \vdash A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right]}\,(Hip)
$$

Ψ_2:

$$
\dfrac{}{A \to \left[\left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A, \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B \vdash \left(\bigvee_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B}\,(Hip)
$$

Δ_2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i \vdash \bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i}\,(Hip)}{A \to \left[\left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A, \bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i \vdash \bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i}\,(Wk)}{A \to \left[\left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee B\right], A, \bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i \vdash \left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} y_i\right) \vee (A \to B)}\,(\vee I)$$

3) La última regla aplicada es (GLR). Entonces, la demostración es de la forma

$$\dfrac{\boxtimes X, \Box A \vdash A}{W, \Box X \vdash \Box A, \Box Y, Z}\,(GLR).$$

Con $X = \{x_1, \ldots, x_{n+p}\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_k\}$. Por lo que

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Box X \vdash \Box x_1}\,(Hip) \quad \ldots \quad \dfrac{}{\Box X \vdash \Box x_{n+p}}\,(Hip) \quad \dfrac{}{\boxtimes X, \Box A \vdash A}\,H.I.}{\Box X \vdash \Box A}\,(GLR)}{\Box X \vdash \Box A \vee \left(\bigvee\limits_{i=1}^{m} \Box y_1\right)}\,(\vee I)}{\Box X \vdash \Box A \vee \left(\bigvee\limits_{i=1}^{m} \Box y_1\right) \vee \left(\bigvee\limits_{j=1}^{k} z_j\right)}\,(\vee I)}{W, \Box X \vdash \Box A \vee \left(\bigvee\limits_{i=1}^{m} \Box y_1\right) \vee \left(\bigvee\limits_{j=1}^{k} z_j\right)}\,(Wk)$$

■

En este capítulo demostramos la equivalencia entre los sistemas GLS y GLN. Para finalizar este trabajo, en el siguiente capítulo presentamos las conclusiones y mencionamos algunas cuestiones de interés que permanecen abiertas.

6 Conclusiones y trabajo futuro

Para concluir el presente trabajo hacemos una breve recapitulación del mismo y mencionamos el posible trabajo a futuro.

6.1. Conclusiones

En este trabajo presentamos los cálculos de secuentes GLS y $PSGLS$, así como algunas de sus propiedades. Se introdujeron los conceptos de altura (h) de una derivación y derivación de máxima altura de un secuente (mhd). Demostramos la equivalencia entre los sitemas GLS y $PSGLS$ y vimos que el sistema $PSGLS$ tiene un procedimiento de búsqueda de pruebas concluyente, por lo que todo secuente en este sistema tiene una derivación de altura máxima.

Utilizando lo anterior, demostramos el teorema de eliminación de corte para el sistema $PSGLS$ mediante inducción primaria fuerte sobre el tamaño de la fórmula de corte e inducción secundaria fuerte sobre la derivación de máxima altura de la conclusión del corte. Si bien esta demostración se basa en la dada por Goré *et. al.* en [7], nosotros no recurrimos a asistentes de demostración ni a ninguna otra herramienta computacional. Además, detallamos por completo la demostración al hacer explícitos varios casos que se omiten en [7]. Dichos casos fueron omitidos por los autores, argumentando que el lector podía consultar y revisar el código de la demostración asistida por computadora. Sin embargo, debido a los cambios que se han hecho en **Coq** desde la versión con la que fue realizada la demostración de Goré *et.*

al. (versión 8.11) hasta la versión actual, al momento de realizar esta tesis, (versión 8.16), revisar dicho código fue imposible debido a diversos problemas de retrocompatibilidad. Por este motivo, todas las demostraciones omitidas por los autores en [7], fueron reconstruidas desde cero por nosotros.

Con base en la demostración del teorema de eliminación de corte para el sistema $PSGLS$ y en que el procedimiento para demostrar la equivalencia entre los sistemas GLS y $PSGLS$ no introduce cortes, pudimos concluir que el teorema de eliminación de corte también es válido en el sistema GLS. Es importante mencionar que, en la demostración original de Goré *et. al.*, se trabaja directamente sobre el sistema GLS, utilizando instancias de las reglas en $PSGLS$ y argumentando la equivalencia cuando es necesario. Si bien esto no es incorrecto, la forma en la que procedimos en el presente trabajo es más apropiada, pues no "saltamos" entre ambos sistemas.

Posteriormente presentamos el sistema de deducción natural GLN, el cual está basado en el sistema dado por Bellin en [1]. Mostramos algunas de sus propiedades, enfatizamos algunas particularidades de la regla (GLR) y probamos la equivalencia del sistema GLN con el sistema GLS.

Para concluir, a continuación mencionamos algunas cuestiones importantes que permanecen abiertas.

6.2. Trabajo futuro

Como trabajo a futuro se podrían analizar las siguientes cuestiones:

- Si el método de demostración utilizado también es compatible con sistemas intuicionistas para la lógica GL, como los sistemas $\mathsf{GL3i}$ y $\mathsf{GL4i}$ dados por van der Giessen e Iemhoff en [21].

- Si es posible dar un cálculo de secuentes con contextos duales para la lógica GL y si esto facilitaría la demostración de la eliminación de corte. Cuando hablamos de un sistema de contextos duales nos referimos a un cálculo de secuentes modal en el que las fórmulas con caja y las fórmula sin caja del contexto se encuentran separadas en multiconjuntos ajenos. Uno de los propósitos originales de este trabajo era dar un sistema de este tipo, demostrar la eliminación de corte en dicho sistema y comparar esta demostración con la que presentamos en el capítulo 3. El sistema que se había propuesto era una versión sin tipos del planteado por Kavvos en [8]. Sin embargo, dicho sistema resultaba trivial. A continuación describimos el sistema de Kavvos, y mostramos que también es erróneo.

Sistema DGL:

Tipos

$$A, B ::= p_i | A \times B | A \to B | \Box A$$

Contextos

$$\Gamma, \Delta ::= \cdot | \Gamma, x : A$$

Términos

$$M, N ::= x | \lambda x : A.M | MN | \langle M, N \rangle | \pi_i(M) | \mathsf{box}\, M | \mathsf{let\ box}\, M \,\mathsf{in}\, N$$

$$\frac{}{\Delta; \Gamma, x : A, \Gamma' \vdash x : A}\ (\mathsf{var}) \qquad \frac{}{\Delta, u : A, \Delta'; \Gamma \vdash u : A}\ (\Box\mathsf{var})$$

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash M : A \quad \Delta; \Gamma \vdash N : B}{\Delta; \Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \times B}\ (\times\mathcal{I}) \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Delta; \Gamma \vdash \pi_i(M) : A_i}\ (\times\mathcal{E}_i)$$

$$\frac{\Delta; \Gamma, x : A \vdash M : B}{\Delta; \Gamma \vdash \lambda x : A.M : A \to B}\ (\to\mathcal{I}) \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash M : A \to B \quad \Delta; \Gamma \vdash N : A}{\Delta; \Gamma \vdash MN : B}\ (\to\mathcal{E})$$

$$\frac{\Delta; \Delta^{\perp}, z^{\perp} : \Box A \vdash M^{\perp} : A}{\Delta; \Gamma \vdash \mathsf{fix}\, z \,\mathsf{in\ box}\, M : \Box A}\ (\Box\mathcal{I}_{\mathsf{GL}})$$

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash M : \Box A \quad \Delta, u : A; \Gamma \vdash N : C}{\Delta; \Gamma \vdash \mathsf{let\ box}\, u \Leftarrow M \,\mathsf{in}\, N : C}\ (\Box\mathcal{E})$$

Donde $(\cdot)^{\perp}$ es una biyección sobre el conjunto de variables del sistema que satisface ser su propia inversa. Es decir, para toda variable x se tiene que $(x^{\perp})^{\perp} = x$. Adicionalmente, se extiende esta función a contextos y términos de la siguiente manera:

$$(x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)^\perp = x_1^\perp : A_1, \ldots, x_n^\perp : A_n$$
$$(\lambda x : A.M)^\perp = \lambda x^\perp : A.M^\perp \qquad (MN)^\perp = M^\perp N^\perp$$
$$\langle M, N\rangle^\perp = \langle M^\perp, N^\perp\rangle \qquad (\pi_i(M))^\perp = \pi_i(M^\perp)$$
$$(\mathsf{box}\, M)^\perp = \mathsf{box}\, M \qquad (\mathsf{let\,box}\, u \Leftarrow M \,\mathsf{in}\, N)^\perp = \mathsf{let\,box}\, u \Leftarrow M^\perp \,\mathsf{in}\, N^\perp$$

La intención detrás de esta función es formalizar que si u es una variable modal que representa alguna hipótesis en Δ entonces $u^\perp$ es una variable única asociada a u que representa la misma hipótesis sin caja.

Desafortunadamente, este sistema tiene errores pues es posible dar la siguiente demostración del axioma T:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\cdot; x : \Box A \vdash x : \Box A}(\mathsf{var}) \quad \dfrac{}{u : A; x : \Box A \vdash u : A}(\Box\mathsf{var})}{\cdot; x : \Box A \vdash \mathsf{let\,box}\, u \Leftarrow x \,\mathsf{in}\, u : A}(\Box\mathcal{E})}{\cdot; \cdot \vdash \lambda x : \Box A.\mathsf{let\,box}\, u \Leftarrow x \,\mathsf{in}\, u : \Box A \to A}(\to \mathcal{I})$$

Más aún, es posible demostrar cualquier fórmula con caja de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\cdot; x : \Box A \vdash x : \Box A}(\mathsf{var}) \quad \dfrac{}{u : A; x : \Box A \vdash u : A}(\Box\mathsf{var})}{\cdot; x : \Box A \vdash \mathsf{let\,box}\, u \Leftarrow x \,\mathsf{in}\, u : A}(\Box\mathcal{E})}{\cdot; \cdot \vdash \mathsf{fix}\, x^\perp \,\mathsf{in\,box}(\mathsf{let\,box}\, u^\perp \Leftarrow x^\perp \,\mathsf{in}\, u^\perp) : \Box A}(\Box\mathcal{I})_{\mathsf{GL}}$$

Notemos que debido a lo anterior y a la regla $(\to \mathcal{E})$ es posible demostrar cualquier fórmula, por lo que el sistema es trivial.

- Si es posible dar una generalización de la regla (GLR) del sistema GLN y qué ventajas o desventajas tendría el uso de dicha generalización. Como posible generalización proponemos la siguiente regla:

$$\dfrac{X \vdash \Box B_1 \quad \ldots \quad X \vdash \Box B_{n+p} \quad B_1, \ldots, B_n, \Box A, \Box B_{n+1}, \ldots, \Box B_{n+p} \vdash A \quad X, \Box A \vdash C}{X \vdash C}(GLR)$$

- Si una versión del sistema GLN con reglas multiplicativas facilita o dificulta la demostración de equivalencia con GLS. En este trabajo se optó por una versión con reglas aditivas, ya que al tratar de utilizar reglas multiplicativas los métodos de razonamiento habitualmente empleados (inducción estructural e inducción sobre la longitud de una fórmula) para demostrar la admisibilidad de las reglas estructurales fallan.

- Si la prueba del teorema de normalización dada por Bellin en [1] puede aplicarse al sistema GLN. A continuación presentamos algunas reducciones de instancias no normales de la regla (GLR) que podrían ser de utilidad para la demostración de este teorema. Una instancia no normal de (GLR) es aquella en la que cualquiera de sus premisas con caja se deriva mediante (GLR).

  Con la finalidad de facilitar la lectura de los secuentes, utilizaremos la notación $B_{i;j} := \{B_i, \ldots, B_j\}$, con $i \leqslant j$.

  Consideremos la siguiente instancia no normal de (GLR):

$$\frac{X \vdash \Box B_1 \quad \ldots \quad \Delta \quad \ldots \quad X \vdash \Box B_{n+p} \quad B_{1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash A}{X \vdash \Box A}\ (GLR)$$

Donde Δ es la siguiente:

$$\frac{X \vdash \Box C_1 \quad \ldots \quad X \vdash \Box C_{m+r} \quad C_{1;m}, \Box B_i, \Box C_{m+1;m+r} \vdash B_i}{X \vdash \Box B_i}\ (GLR)$$

Hay tres casos posibles:

1) $1 \leqslant i \leqslant n$ y $X \vdash \Box B_i$ se deriva mediante una instancia $K4R$[3] de (GLR). Entonces, se reduce como sigue:

$$\frac{\Theta_1 \quad \ldots \quad \Theta_{i-1} \quad \Pi_1 \quad \ldots \quad \Pi_{m+r} \quad \Theta_{i+1} \quad \ldots \quad \Theta_{n+p} \quad \Gamma}{X \vdash \Box A}\ (GLR)$$

Donde Θ_j es $X \vdash \Box B_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, i-u\} \cup \{i+1, \ldots, n+p\}$, Π_k es $X \vdash \Box C_k$ para todo $j \in \{1, \ldots, m+r\}$ y Γ es la siguiente:

$$\frac{\dfrac{C_{1;m}, \Box C_{m+1;m+r} \vdash B_i}{B_{1;i-1}, C_{1;m}, \Box C_{m+1;m+r}, B_{i+1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash B_i}\ (Wk) \qquad \Gamma_1}{B_{1;i-1}, C_{1;m}, \Box C_{m+1;m+r}, B_{i+1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash A}\ (Sub)$$

[3]Véase [1] p. 93.

Donde Γ_1 es la siguiente:

$$\frac{B_{1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash A}{B_{1;i-1}, C_{1;m}, \Box C_{m+1;m+r}, B_{i;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash A}\ (Wk)$$

2) $1 \leqslant i \leqslant n$ y $X \vdash \Box B_i$ se deriva mediante una instancia propia[3] de (GLR). Entonces, se reduce como sigue:

$$\frac{\dfrac{X \vdash C_1 \quad \dots \quad X \vdash \Box C_{m+r} \quad C_{1;m}, \Box B_i, \Box C_{m+1;m+r} \vdash B_i}{X \vdash \Box B_i}\ (GLR) \qquad \Delta}{X \vdash \Box A}\ (Sub)$$

Donde Δ es la siguiente:

$$\frac{\Theta_1 \quad \dots \quad \Theta_{i-1} \quad \Pi_1 \quad \dots \quad \Pi_{m+r} \quad \Theta_{i+1} \quad \dots \quad \Theta_{n+p} \quad \Sigma}{X, \Box B_i \vdash \Box A}\ (GLR)$$

Donde Θ_j y Π_k son los mismos que en 1) y Σ es la siguiente:

$$\frac{\dfrac{C_{1;m}, \Box B_i, \Box C_{m+1;m+r} \vdash B_i}{B_{1;i-1}, C_{1;m}, \Box B_i, \Box C_{m+1;m+r}, B_{i+1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash B_i}\ (Wk) \qquad \Omega}{B_{1;i-1}, C_{1;m}, \Box B_i, \Box C_{m+1;m+r}, B_{i+1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash A}\ (Sub)$$

Donde Ω es la siguiente:

$$\frac{B_{1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash A}{B_{1;i-1}, C_{1;m}, \Box B_i, \Box C_{m+1;m+r}, B_{1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash A}\ (Wk)$$

3) $n + 1 \leqslant i \leqslant n + p$. Entonces, se reduce como sigue:

$$\frac{\dfrac{X \vdash \Box B_1 \quad \dots \quad X \vdash \Box B_{i-1} \quad X \vdash \Box B_{i+1} \quad \dots \quad X \vdash \Box B_{n+p} \quad \Psi}{X, X \vdash \Box A}\ (GLR)}{X \vdash \Box A}\ (Ctr)$$

Donde Ψ es la siguiente:

$$\dfrac{\Psi_1 \quad \dfrac{B_{1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;n+p} \vdash A}{X, B_{1;n}, \Box A, \Box B_{n+1,n+p} \vdash A}\,(Wk)}{X, B_{1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;i-1}, \Box B_{i+1;n+p} \vdash A}\,(Sub)$$

Donde Ψ_1 es la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash C_1 \quad \ldots \quad X \vdash C_{m+r} \quad C_{1;m}, \Box B_i, \Box C_{m+1;m+r} \vdash B_i}{X \vdash \Box B_i}\,(GLR)}{X, B_{1;n}, \Box A, \Box B_{n+1;i-1}, \Box B_{i+1;n+p} \vdash \Box B_i}\,(Wk)$$

- Si es posible establecer una equivalencia entre la eliminación de corte y la normalización, de manera similar a lo hecho por Zucker en [23] o a lo realizado por von Plato en [22].
- Si a partir del teorema de eliminación de corte para GLS es posible concluir resultados como el teorema de interpolación, la definibilidad de Beth o la propiedad de separación; de manera similar a lo que ocurren en algunos sistemas para la lógica intuicionista (Véase [19], pp. 105-125).

Bibliografía

[1] Bellin, G. (1985). A system of natural deduction for GL. *Theoria*, 51(2), 89-114.

[2] Boolos, G. (1993). *The Logic of Provability*. Cambridge y Nueva York: Cambridge University Press.

[3] Brighton, J. (2016). Cut Elimination for GLS Using the Terminability of its Regress Process. *Journal of Philosophical Logic*, 45(2), 147-153.

[4] Das, A., Negri., S. (2021). *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*. Suiza: Springer Cham.

[5] Gentzen, G., (1935). Untersuchungen uber das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, 39, 176-210, 405-431.[tr. al inglés en [18], 68-131]

[6] Goré, R., Ramanayake, R. (2012). Valentini's Cut-Elimination for Provability Logic Resolved. *The Review of Symbolic Logic*, 5(2), 212-238.

[7] Goré, R., Ramanayake, R., Shillito, I. (2021). Cut-Elimination for Provability Logic by Terminating Proof-Search: Formalised and Deconstructed Using Coq. En [4], 299-313.

[8] Kavvos, G. A., (2020). Dual-Context Calculi for Modal Logic. *Logical Methods in Computer Science*, 16(3), 10:1-10:66.

[9] Leivant, D., (1981). On the proof theory of the modal logic for arithmetic provability. *The Journal of Symbolic Logic*, 46, 531-538.

[10] Lundgren, B., Nuñez Hernández, N. A. (2022). *Philosophy of Computing. Philosophical Studies Series.*, vol. 43, Suiza: Springer Cham.

[11] Miranda-Perea, F. E., González Huesca, L. d. C. (2022). On the Conciliation of Traditional and Computer-Assisted Proofs. En [10], 73-112.

[12] Moen, A., (2003). The proposed algorithms for eliminating cuts in the provability calculus GLS do not terminate. *Nordic Workshop on Programming Theory*, Norwegian Computing Center, 2001-12-10, 2001.

[13] Negri, S. (2005). Proof Analysis in Modal Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 34, 507-544.

[14] Negri, S., von Plato, J. (2001). *Structural Proof Theory.* Reino Unido: Cambridge.

[15] Poggiolesi, F. (2009). A Purely Sintactic and Cut-Free Sequent Calculus for the Modal Logic of Provability. *The Review of Symbolic Logic*, 2(4), 593-611.

[16] Sambin G., Valentini S. (1982). The Modal Logic of Provability. The Sequential Approach. *Journal of Philosophical Logic*, 11(3), 311-342.

[17] Sasaki, K. (2001). Löb's axiom and the cut-elimination theorem. *Academia Mathematical Sciences and Information Engineering Nanzan University*, 1, 91-98.

[18] Szabo, M. E. (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

[19] Schwichtenberg, H., Troelstra, A. S. (2000). *Basic Proof Theory.* (2ª ed.) Reino Unido: Cambridge University Press.

[20] Valentini, S. (1983). The Modal Logic of Provability: Cut-Elimination. *Journal of Philosophical Logic*, 12, 471-476.

[21] van der Giessen, I., Iemhoff, R., (2021). Sequent Calculi for Intuitionistic Gödel-Löb Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 62(2), 221-246.

[22] von Plato, J. (2011). A Sequent Calculus Isomorphic to Gentzen's Natural Deduction. *The Review of Symbolical Logic*, 4(1), 43-53.

[23] Zucker, J. (1974). The Correspondence Between Cut-Elimination and Normalization. *Annals of Mathematical Logic*, 7, 1-112.