



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM
FÍSICA DE ALTAS ENERGÍAS, FÍSICA NUCLEAR, GRAVITACIÓN Y FÍSICA
MATEMÁTICA

APLICACIONES COSMOLÓGICAS DE SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES
DE EINSTEIN CON DISTRIBUCIONES INHOMOGÉNEAS Y NO-TRIVIALES DE MASA-
ENERGÍA

TESIS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:
M. en C. SEBASTIÁN NÁJERA VALENCIA

TUTOR:
Dr. ROBERTO ALLAN SUSSMAN LIVOVSKY
ICN, UNAM
EN SU CASO, MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dra. CELIA DEL CARMEN ESCAMILLA-RIVERA ICN, UNAM
Dr. JUAN CARLOS HIDALGO CUELLAR ICF, UNAM

CDMX, ABRIL 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

APLICACIONES COSMOLÓGICAS DE SOLUCIONES EXACTAS EN
GRAVITACIÓN CON DISTRIBUCIONES INHOMOGÉNEAS Y/O
NO-TRIVIALES DE MASA-ENERGÍA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

SEBASTIÁN NÁJERA VALENCIA

DIRECTOR:

DR. ROBERTO A. SUSSMAN

COMITÉ TUTOR:

DRA. CELIA ESCAMILLA RIVERA
JUAN CARLOS HIDALGO CUÉLLAR

CDMX, 2023

Instituto de
Ciencias
Nucleares
UNAM





**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Graduación con trabajo escrito)**

De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la Institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado:

**Aplicaciones cosmológicas de soluciones exactas en gravitación con distribuciones
inhomogéneas y/o no-triviales de masa-energía**

que presenté para obtener el grado de ----Doctorado----es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi programa de posgrado, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de graduación.

Atentamente

Sebastián Nájera Valencia
Cuenta 309625683

(Nombre, firma y Número de cuenta de la persona alumna)

Aplicaciones cosmológicas de soluciones exactas en gravitación con distribuciones inhomogéneas y/o no-triviales de masa-energía

Autor: Sebastián Nájera Valencia

Asesor: Dr. Roberto A. Sussman

Información importante

A lo largo de mis estudios doctorales se publicaron diversos artículos que devinieron de mi investigación, los cuales fueron

1. Nájera, S., & Sussman, R. A. (2020). Pancakes as opposed to Swiss cheese. *Classical and Quantum Gravity*, 38(1), 015016 [1].
2. Nájera, S., & Sussman, R. A. (2021). Non-comoving cold dark matter in a Λ CDM background. *The European Physical Journal C*, 81(4), 374 [2].
3. Nájera, S., Aguilar, A., Rave-Franco, G. A., Escamilla-Rivera, C., & Sussman, R. A. (2022). Inhomogeneous solutions in $f(T, B)$ gravity. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 19(Supp01), 2240003 [3].

Al momento del término de esta tesis, se encuentran dos artículos en preparación. Adicionalmente se publicaron dos artículos que surgieron a lo largo de mi doctorado pero no se incluyen en esta tesis siendo que no es el mismo tema

1. Nájera, S., Gamboa, A., Aguilar-Nieto, A., & Escamilla-Rivera, C. (2021). On negative mass cosmology in General Relativity. *Astronomy & Astrophysics*, 651, L13 [4].
2. Escamilla-Rivera, C., de Albornoz-Caratozzolo, J. M., & Nájera, S. (2023). Fab-Four Cosmography to Tackle the Hubble Tension. *Universe*, 9(7), 311. MDPI AG [5].

El contenido en esta tesis doctoral es fruto de la investigación que realicé a lo largo de mis estudios y es completamente de mi autoría.

Agradecimientos

Primero quisiera agradecer a las instituciones que me permitieron llevar a cabo mis estudios de doctorado, comenzando con el Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo que recibí durante mis estudios de doctorado por medio de la beca para estudios de posgrado. A la UNAM en particular al posgrado en Ciencias Físicas, dirigido por el Dr. Alberto Güijosa, y todos aquellos involucrados en éste.

Gracias a todos los profesores que tuve a lo largo de mis estudios por permitirme ser parte de sus clases y compartirme sus conocimientos. A partir de ellas me abrieron las puertas a nuevos temas de física, los cuales me ayudaron a realizar la investigación que tuvo como fruto esta tesis y me formaron como físico. De igual manera quiero agradecer a todas las personas que he conocí a lo largo de estos estudios y por todas las discusiones y buenos momentos que he pasado con ustedes, todos han sido parte de mi formación como físico. Gracias por todo su apoyo.

Quiero agradecer de manera especial al Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuéllar por su apoyo y retroalimentación durante todo el proyecto, a la Dra. Celia del Carmen Escamilla Rivera por todo su apoyo a

lo largo de mis estudios, las largas discusiones y por permitirme ser parte de su grupo de trabajo. Ha sido una parte fundamental en esta tesis y en mi formación académica, así como una segunda asesora durante mis estudios de doctorado. En particular quiero agradecer a mi asesor Dr. Roberto Sussman Livovsky por todo lo que he aprendido de él a lo largo de los estudios de doctorado y por el todo el trabajo que hemos realizado en conjunto, esta tesis es fruto de su apoyo y enseñanza. Adicionalmente quiero darle las gracias a mis sinodales Dr. Miguel Alcubierre, Dr. Luis Ureña y Dr. Ulises Nucamendi Gómez por las revisiones y comentarios que tuvieron de esta tesis, así como su esfuerzo y ayuda para poder terminar en tiempo mi doctorado. En particular quisiera agradecer al Dr. Olivier Charles Albert Sarbach por la gran cantidad de observaciones y tomarse el tiempo para discutir los resultados de mi tesis, el texto final mejoró en gran medida gracias a sus comentarios.

Gracias a toda mi familia y a aquellos cercanos a mí por su apoyo y comprensión.

Finalmente gracias a toda la familia Latisnere Juárez, a Rosalía, Rubén, Vivis, Juan Carlos, Josefina y Lisset, por todo el apoyo que me han dado, han sido una parte fundamental en mi formación académica, sin ustedes este trabajo no hubiera sido posible. En especial quiero agradecer a Lisset por todo tu cariño, apoyo, comprensión, ayuda y enseñanzas, gracias a ellas este trabajo fue mucho más de lo que pudo haber sido.

Gracias a todos,

Sebastián Nájera

CDMX, marzo 2024

Tabla de contenido

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes y motivación	1
1.1.1	Desarrollo Histórico	1
1.1.2	La cosmología de precisión y formación de estructura	5
1.1.3	Problemas abiertos	9
1.1.4	El Principio Cosmológico	18
2	Modelos cosmológicos	21
2.1	El modelo estándar de la cosmología	21
2.2	Modelos inhomogéneos y anisotrópicos	27
2.2.1	Fluidos imperfectos	27
2.2.2	Condiciones de emparejamiento	30
2.2.3	Modelos inhomogéneos como perturbaciones exactas	35

2.3	Modelos S^3 en V_2	40
2.3.1	Modelos Inhomogéneos esféricamente simétricos	44
2.3.2	Modelos de Szekeres	47
3	Uso de modelos cosmológicos inhomogéneos	53
3.1	Modelos “pancake”	54
3.1.1	Un modelo cosmológico Szekeres-II con límite FLRW	54
3.1.2	Soluciones particulares y ejemplos	57
3.2	Secciones Szekeres–II con flujo de energía como campo de velocidades peculiares no comóviles	66
3.2.1	Materia oscura no comóvil	67
3.2.2	Variables dinámicas	69
3.2.3	Construyendo el modelo	75
3.2.4	Valores a tiempo actual de las variables dinámicas	78
3.2.5	Modelos de pancake como indicadores de formación de estructura	85
3.2.6	Perturbaciones exactas en un fondo FLRW	87
4	Uso de modelos inhomogéneos en Gravedad modificada	93
4.1	Modelos de gravedad modificada y extendida	94
4.2	Gravedad Teleparalela	97

4.2.1	Tétradas buenas	100
4.3	De la solución de Schwarzschild a las soluciones LTB: el enfoque de RG	104
4.4	De la solución de Schwarzschild a las soluciones LTB solutions: el enfoque Teleparalelo	107
4.4.1	Una solución LTB exacta en gravedad $f(T, B)$: el procedimiento genérico	108
4.4.2	Formación de estructura	110
4.4.3	Expansión cósmica acelerada	116
4.5	Gravedad Cotton	118
4.5.1	Una solución tipo Lemaître–Tolman–Bondi en CG	122
4.5.2	El límite FLRW a través de LTB en CG	125
5	Conclusiones	129
A	Análisis de modelos cosmológicos usando redes neuronales	141
A.1	Redes Neuronales Recurrentes para cosmologías de energía oscura	142
A.2	Redes Neuronales Recurrentes para el análisis de cosmologías de energía oscura	147
A.2.1	Cosmologías de energía oscura	148
A.2.2	Cosmologías de energía oscura dinámica	149

A.2.3 Usando redes neuronales para en modelos de energía oscura	151
A.3 Comparando las predicciones de la RNN con cosmologías de energía oscura	153
Bibliografía	159

Introducción

1.1 Antecedentes y motivación

1.1.1 Desarrollo Histórico

El modelo cosmológico térmico conjeturado por Lemaître desde los 1930's y desarrollado por Gamow en los 1940's, describe a la evolución cósmica en base a la Teoría de la Relatividad General, que predice una singularidad de curvatura inicial (el “*Big Bang Caliente*”)¹. La fuente de campo de materia energía de ese Universo temprano es un plasma primordial sumamente denso y caliente compuesto por múltiples gases de especies de partículas elementales en equilibrio térmico, el cual por la expansión cósmica se enfría y se diluye,

¹Los fundamentos y el desarrollo de la cosmología se encuentran descritos extensamente en diversas libros de texto especializados, por ejemplo [6, 7, 8, 9].

pasando por varias transiciones de fase caracterizadas por interacciones y sus procesos de creación y destrucción de partículas elementales asociadas. La interacción que caracteriza a cada etapa sucede a un rango de temperaturas (o energías) específico, de modo que al disminuir la temperatura por debajo de este rango la interacción cesa (el “freeze out”) y el gas específico de la partícula elemental asociada se desacopla del plasma primordial, evolucionando de modo que el gas desacoplado correspondiente conserva su tensor de momento-energía y número de partículas.

Esta evolución térmica es consistente con fuentes de campo descritas por el modelo estándar de partículas elementales. Explica exitosamente varios procesos, como por ejemplo el desacople de los neutrinos y la nucleosíntesis. La era radiativa sucede después a más bajas energías, cuando el plasma primordial conserva el número de partículas y está formado ya solo por nucleones, electrones y fotones, interactuando mediante varios procesos radiativos, como las dispersiones de Compton y Thomson. A continuación, se forman átomos neutros de elementos ligeros (hidrógeno, helio, litio y berilio) que finalmente se desacoplan de los fotones, con lo que termina la era “dominada por radiación” e inicia la era “dominada por materia”.

En 1965 Penzias y Wilson [10] detectan el remanente que la expansión cósmica ha enfriado del plasma primordial, ya formado únicamente por un gas de fotones que hoy conocemos como la radiación cósmica de fondo (CMB por sus siglas en inglés). En el presente, el CMB se comporta casi como un cuerpo negro a 2.72 grados Kelvin y su temperatura es casi isotrópica. Penzias y Wilson nunca sospecharon que el estudio de las pequeñas anisotropías de

temperatura del orden de 10^{-5} en el CMB llegarían a ser tan importantes en el entendimiento de la dinámica cósmica.

Hasta los años setenta del siglo XX se suponía que los componentes fundamentales de materia-energía cósmica eran únicamente las partículas del modelo estándar, la materia visible, *i.e.* ya sea detectable mediante interacciones electromagnéticas y los neutrinos. Sin embargo, surge la necesidad de suponer la existencia de un componente extra en el inventario de materia-energía cósmica: la materia oscura [6], que siente la gravedad pero no interactúa (o interactúa en forma muy débil) con la materia visible. El inferir la presencia de este componente nuevo se debe inicialmente a la falta de ajuste entre el campo gravitacional asociado a la distribución de materia visible en el espectro electromagnético (estrellas y gas: hidrógeno y helio) en galaxias vecinas y sus velocidades de rotación. El suponer a los neutrinos como materia oscura es muy problemático, ya que éstos son fermiones de masa muy pequeña que evolucionan a velocidades relativistas (free streaming), por lo que tardarían demasiado tiempo (más que la edad del Universo) en formar estructuras por aglomeración gravitacional. La llamada materia oscura bariónica: objetos astrofísicos de baja luminosidad (Massive Halo Compact Objects, MACHO'S) no tiene suficiente abundancia como para explicar las curvas de rotación galácticas. Por lo tanto, actualmente la explicación más socorrida de la materia oscura son los WIMPS (Weakly Interacting Massive Particles), es decir, un gas de partículas elementales masivas que no pertenecen al modelo estándar, que se deben haber desacoplado del plasma primordial en eras muy tempranas. Se han propuesto modelos de varios tipos de partículas: fermiones y bosones, ligeras (materia oscura caliente), masivas (materia oscura fría) e intermedias

(materia oscura tibia). El consenso dominante en la comunidad de cosmólogos actualmente favorece a la materia oscura fría: CDM (Cold Dark Matter), la cual se describe como un gas no-colisional y no-relativista que se aglomera en halos alrededor de las estructuras galácticas.

La suposición de la existencia de la CDM no solo atiende al ajuste de las curvas de rotación de estrellas en galaxias, también es necesaria para ajustar mediciones de lentes gravitacionales (sobre todo en cúmulos de galaxias) y explicar el proceso de formación de estructura [11], el cual se suele estudiar mediante simulaciones numéricas de n cuerpos basadas en interacción de la gravedad newtoniana (dado que sucede a velocidades no-relativistas). Si suponemos a la Teoría de la Relatividad General como la teoría de gravedad válida y vigente (y la gravedad newtoniana como su límite de campo débil), no sería posible reproducir las estructuras observadas si solo hubiera partículas del modelo estándar (materia visible y neutrinos). Del ajuste a las observaciones mencionadas, se infiere que la materia oscura es entre 10 y 20 veces más abundante que la materia visible.

Hasta fines de los 1990's se suponía un Universo en expansión desacelerada, dominado por CDM, con materia visible y neutrinos en menor abundancia. Sin embargo, observaciones a mayor distancia utilizando supernovas de tipo Ia, que son hasta ahora las velas estándar distantes más confiables [12], sugieren que el Universo se expande en forma acelerada [13, 14]. Estos efectos de aceleración cósmica requieren una componente que compense la tasa de densidad crítica total del Universo [6, 15]. Sin embargo, la única manera en que se puede diseñar esta componente en la cosmología estándar, y a su vez

obtener el fenómeno de expansión acelerada, es a través de un fluido asociado con un parámetro de su ecuación de estado “ $w = p/\rho$ ” negativa, con p la presión isotrópica y ρ la densidad de masa-energía. En partícula w debe ser menor a $-1/3$ para obtener la expansión acelerada del Universo. Dado que este tipo de fluidos no se ha observado en la naturaleza, se han explorado dos posibilidades: la primera, que este fenómeno sea consecuencia de la constante cosmológica, Λ , con su respectivo parámetro de su ecuación de estado $w = -1$, tal como la descripción en el modelo Λ Cold Dark Matter (Λ CDM). Sin embargo, el identificar a la energía oscura con Λ es problemático. La energía cuántica de vacío se comporta como un fluido que obedece la misma ecuación de estado de Λ , pero como fuente de campo su masa-energía difiere de la de Λ por 120 órdenes de magnitud [16]. La segunda posibilidad es la siguiente: dadas las observaciones actuales se ha sugerido que la energía oscura posea una ecuación de estado dinámica, es decir, $w(z)$ donde z es el corrimiento al rojo cosmológico [15, 17]. Sin embargo, aunque se han explorado y constreñido diversos modelos cosmológicos en ambos escenarios, el problema de la degeneración de estos no se ha resuelto [15, 18]. Por lo mismo, una tercera posibilidad sería la exploración de efectos de expansión acelerada en teorías modificadas y extendidas de la gravitación [15, 19, 20].

1.1.2 La cosmología de precisión y formación de estructura

A partir de la enorme disponibilidad de resultados observacionales, la cosmología ha pasado de ser una ciencia con falta de datos a ser una ciencia impulsada por los datos, *i.e.* la “cosmología de precisión”. Contamos ahora

con una gran cantidad de observaciones cosmológicas independientes de gran precisión, logradas por ejemplo mediante satélites como el COBE y posteriormente BOOMERANG, MAX-IMA, WMAP y PLANCK. Estas últimas observaciones, basadas en las anisotropías del CMB, han sido contrastadas con otras observaciones (lentes gravitacionales, dinámica de cúmulos y supercúmulos de galaxias, oscilaciones acústicas de los bariones (BAO), espectro de potencias, etc.) [6]. Uno de los éxitos más espectaculares de la cosmología contemporánea es el hecho de que este conjunto de observaciones distintas e independientes sugieren que la dinámica cósmica se ajusta a una descripción del Universo que a gran escala (comparable al radio de Hubble) se aproxima a un modelo Friedman–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) homogéneo e isotrópico, espacialmente plano, cuya fuente de materia–energía está dominada por la CDM y energía oscura modelada por Λ . Se conoce a este como el modelo Λ CDM (Λ más CDM), en el cual la materia–energía total se reparte en energía oscura (modelada como Λ) contribuyendo aproximadamente con 2/3 partes, la CDM con un 30%, mientras que los demás componentes de materia visible (bariones, electrones, fotones) y neutrinos contribuyendo con un 5% del total. Sin embargo, aunque el modelo Λ CDM ha seguido proporcionando el mejor ajuste a la gran cantidad de datos obtenidos, éste depende de la existencia de un “sector oscuro” (materia y energía oscuras) cuyas propiedades físicas fundamentales se desconocen y cuyas supuestas partículas e interacciones asociadas teóricamente han sido (a la fecha) imposible de verificar y/o detectar en forma observacional o experimental.

La perfecta homogeneidad e isotropía de los modelos FLRW (incluyendo el modelo Λ CDM) es solo una aproximación a escalas comparables al

radio de Hubble. Para describir estructuras cósmicas a diferentes escalas se supone un modelo de formación de estructura basado en la aglomeración gravitacional de fluctuaciones de densidad y velocidad de diversas escalas en un fondo cosmológico Λ CDM. Las fluctuaciones de la CDM de todas las escalas inician como pequeñas perturbaciones sobre este fondo homogéneo en tiempos de Universo temprano, creciendo a partir de la era de dominio de la materia con el fondo cosmológico que se expande, pero en forma desacelerada a menor velocidad por la aglomeración gravitacional, para posteriormente colapsar en tiempos proporcionales a su masa y escala característica, terminando en la formación de las estructuras estables que se observan [21].

Al inicio del proceso de colapso, reseñado anteriormente, las estructuras de todas las escalas se pueden describir como perturbaciones lineales respecto al fondo cosmológico, conforme este se expande, el colapso pasa a fases no lineales dependiendo de la escala de las fluctuaciones. Las fluctuaciones cuya escala inicial era comparable al radio de Hubble se han expandido hasta ser actualmente grandes estructuras de CDM del orden de cientos de megaparsecs (Mpc): supercúmulos de galaxias, que están aún en fase lineal de colapso respecto al fondo, por lo que su dinámica se estudia por perturbaciones lineales sobre un fondo Λ CDM. Hay varios formalismos equivalentes de perturbaciones cosmológicas respecto a un fondo FLRW, destacando el formalismo de Bardeen [22] basado en perturbaciones invariantes de norma sobre la métrica y el tensor de momento-energía. Otro formalismo es el basado en cantidades covariantes definidas por un campo de 4-velocidades, desarrollado por Ellis y Bruni [23].

Siguiendo el modelo descrito en el que los tiempos de colapso son proporcionales a la escala de las fluctuaciones, aquellas que eran inicialmente menores al radio de Hubble han evolucionado hasta constituir actualmente estructuras menores, del orden de 10 Mpc o menos, correspondientes a galaxias y cúmulos de galaxias. Estas fluctuaciones también iniciaron como perturbaciones lineales de CDM en un fondo Λ CDM, pero rápidamente pasaron al régimen de colapso no-lineal cuya dinámica no puede ser descrita por perturbaciones lineales. En la presente era cósmica estas estructuras están “virializadas”, es decir, han alcanzado un estado estacionario en el que el colapso es frenado por un conjunto de fenómenos dinámicos colectivos de alta complejidad conocido como “virialización”. Tomando en cuenta que a diferentes escalas las fluctuaciones iniciales evolucionan a diferentes tiempos de colapso y virialización, típicamente a velocidades no-relativistas, la formación de estructura se estudia utilizando perturbaciones lineales relativistas para fluctuaciones a gran escala, mientras que los efectos no-lineales y la virialización se estudian con modelos basados en gravitación newtoniana, los cuales pueden ser analíticos [21], aproximados [24] o simulaciones numéricas de n cuerpos [25]. En particular, estas simulaciones han logrado reproducir en forma relativamente satisfactoria la estructura de CDM (la “cosmic web”) inferida a partir de sondeos galácticos, formada por filamentos y paredes que rodean a zonas de baja densidad (“voids”). La materia visible coalesce en torno a los pozos potenciales de CDM definidos por los filamentos, paredes y “voids”. De hecho, considerando a la materia visible como “trazadores” (“tracers”) de la CDM, es posible contrastar la distribución de CDM obtenida mediante simulaciones numéricas con los sondeos galácticos a gran escala [26, 27].

1.1.3 Problemas abiertos

Es evidente que la dinámica de fluctuaciones a escalas comparables al radio de Hubble (un horizonte cosmológico) debe ser estudiada mediante perturbaciones sobre un fondo Λ CDM basadas en la Relatividad General. Aunque muchos cosmólogos y astrofísicos suponen que toda dinámica sub-horizonte puede ser estudiada con métodos newtonianos, es importante ponderar rigurosamente si verdaderamente es posible excluir la utilización de métodos y técnicas de Relatividad General también en estas escalas. Aunque la gravitación newtoniana es una excelente aproximación en escalas estrictamente galácticas (menos de 10 Mpc [28] aunque la escala sigue siendo un tema abierto de investigación), las observaciones y simulaciones numéricas ya están explorando y sondeando escalas de súper cúmulos cada vez mayores (cientos de Mpc) que representan fracciones significativas del radio de Hubble. Esto sugiere la necesidad de explorar la existencia de efectos debidos a correcciones relativistas no despreciables, las cuales deben ser incorporadas mediante Relatividad General para llevar a cabo un estudio consistente de la dinámica [29]. También, a estas escalas no es posible suponer como despreciable el efecto dinámico de la energía oscura (ya sea modelada por Λ o por modelos dinámicos de energía oscura). Mientras que la CDM y los bariones pueden ser fácilmente incorporados a un tratamiento newtoniano, ya sea como fluidos o como simulaciones de partículas, la energía oscura necesariamente requiere una dinámica relativista [30].

Por otro lado, las estructuras cósmicas a diversas escalas no son móviles con el marco de referencia del fondo Λ CDM, que se identifica con el

marco de referencia del CMB. Esto implica la existencia de velocidades peculiares de las estructuras de CDM entre si y de ellas con respecto al CMB [31]. Estas velocidades peculiares son observables y se caracterizan por ser mucho menores a la velocidad de la luz (hasta 3000 km/s), lo cual justifica utilizar a la gravitación newtoniana como buena aproximación para estudiar su dinámica [32]. Sin embargo, puede haber efectos relativistas al tratar la superposición de velocidades peculiares no-relativistas en escalas que no son despreciables respecto al horizonte de Hubble. Las velocidades peculiares a gran escala han sido reportadas por diversas fuentes [33, 34, 35]. Estos movimientos peculiares han sido predichos como consecuencia directa del incremento en la anisotropía y la inhomogeneidad del universo a escalas menores al radio de Hubble. La dependencia en escalas y la magnitud de estas velocidades es un tema abierto aún en discusión.

El estudio de las velocidades peculiares utilizando la teoría de la Relatividad General (en vez de gravedad newtoniana) es de suma importancia, ya que implica estudiar a diferentes familias de observadores con diferentes 4-velocidades, lo cual introduce flujos no-triviales de momento y energía entre estas que redefinen densidades y presiones asociadas al tensor de momento-energía de cada familia [24]. Asimismo, las familias de observadores evolucionan a lo largo de campos de 4-velocidades diferentes, lo cual define a un flujo de Hubble distinto caracterizado por las cantidades cinemáticas asociadas a la 4-velocidad de cada familia de observadores (expansión, 4-aceleración, “shear”, vorticidad),

El ejemplo más sencillo de efectos debido a observadores no-comóviles es la velocidad peculiar de nuestro flujo de Hubble local respecto al marco de referencia del CMB, el cual se manifiesta en el enorme dipolo observado en la temperatura de la radiación del CMB. En particular, podemos definir el marco del CMB, o marco cósmico en reposo, como aquel en el que el dipolo del CMB se hace nulo [36, 37]. Junto con modelos relativistas que consideran velocidades peculiares no-relativistas debido a observadores no-comóviles [38], existen modelos no-perturbativos basados en soluciones exactas (un tanto idealizadas) de las ecuaciones de Einstein que consideran observadores no-comóviles en completa generalidad (modelos inclinados o “tilted”) [39, 40]. Comentamos más adelante como estudiar este tipo de observadores en el contexto de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein.

Uno de los problemas actuales abiertos en cosmología surgen del hecho de que mediciones precisas independientes revelan una discrepancia del 9% en el valor de la expansión cósmica actual H_0 , a lo cual se le conoce como la tensión del parámetro de Hubble. Estos valores surgen de la estimación local [41] $H_0 = 74,03 \pm 1,42 \text{ km (sec Mpc)}^{-1}$, basada en velocidades de recesión de objetos (velas estándar) relativamente cercanos (desde estrellas cefeidas hasta supernovas tipo IA) a nosotros, mientras que la estimación con los datos de Planck, y la basada en las oscilaciones acústicas de los bariones (BAO) que asume la dinámica del modelo Λ CDM, arroja el valor de [42] $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km (sec Mpc)}^{-1}$. Uno de los intentos por explicar esta tensión [43] toma en cuenta el potencial gravitatorio local en la posición del observador, así como efectos de inhomogeneidad local, en particular una baja densidad local. Los autores recalcan que únicamente se logra aliviar parcial-

mente la tensión y que posiblemente podría cuantificarse el resto de la tensión haciendo un mejor análisis del efecto de las inhomogeneidades locales sobre la tasa de expansión. Otra de las posibles explicaciones que se han dado es que existen errores sistemáticos en las mediciones.

Al ser H_0 una cantidad cinemática, la tensión sobre su valor obtenido mediante diferentes observaciones podría ser explicada, al menos parcialmente, por diferencia de los flujos de Hubble entre observadores no-comóviles. Verificar esta posibilidad es complicado, ya que debe tomar en consideración la complejidad de velocidades peculiares relativas entre diversas estructuras, por ejemplo, la velocidad de caída de nuestro grupo de galaxias en el súper cúmulo de Virgo respecto al CMB, y las velocidades de otros súper cúmulos respecto a este último [44]. Ha habido varios artículos que han abordado la tensión de H_0 utilizando las ecuaciones dinámicas de la Relatividad General. El estudio numérico de [45], que incorpora la evolución localmente inhomogénea de bariones y CDM en un fondo Λ CDM, intentó explicar la tensión de H_0 comparando el valor de esta cantidad obtenido por un observador dado con respecto al flujo de Hubble de una vecindad local y con respecto a observadores ubicados a una fracción significativa del horizonte de Hubble. El resultado fue negativo, la diferencia de valores de H_0 queda por debajo de la tensión observada.

Sin embargo, el trabajo mencionado anteriormente [45] solo examinó el efecto de la inhomogeneidad y anisotropía de densidades definidas en forma un tanto arbitraria, asumiendo (erróneamente) que los bariones y la CDM son comóviles entre si. Como intento por incorporar los efectos de velocidades

peculiares entre bariones y CDM, Delgado, Hidalgo y Sussman [46] examinaron la evolución de estas fuentes en marcos no-comoviles en un “void” con simetría esférica (lo cual es una aproximación, ya que las simulaciones muestran que los voids son esferoidales). Al evaluar H_0 para cada congruencia bajo suposiciones lo más realistas posibles, este modelo simplificado (“toy model”) obtiene diferencias del orden de magnitud correspondientes al 10% observado en la tensión de H_0 . Este resultado indica que el considerar congruencias no comóviles de observadores en el marco de la Relatividad General puede llevar a resultados interesantes, incluso si las velocidades peculiares no son relativistas.

La diferencia entre valores locales de cantidades observacionales y sus valores en el fondo Λ CDM cuando se supone un flujo de Hubble basado en una modelación más realista de las estructuras requiere calcular las geodésicas nulas y los corrimientos al rojo entre diversos observadores. Esto representa un problema técnicamente complicado, incluso en simetría esférica cuando se consideran observadores que no están ubicados en el centro de simetría. Este caso fue atendido por [47] utilizando definiciones covariantes de los parámetros cinemáticos que definen al flujo de Hubble, por lo que proporciona la metodología a seguir para generalizar estos cálculos más allá de la simetría esférica y para observadores no-comóviles.

Vale la pena mencionar los trabajos de Tsagas sobre la influencia de las velocidades peculiares en la interpretación de las observaciones cosmológicas [48, 49, 50] (ver referencias citadas en dichos artículos). Tsagas supone dos congruencias no-comóviles, a las que estudia usando el formalismo de

perturbaciones lineales relativista y covariante (formalismo de Ellis, Bruni y Dunsby), con el objeto de obtener los efectos de las velocidades peculiares sobre cantidades observables en cada congruencia, en particular el parámetro de desaceleración q , el cual debe ser negativo en un universo en expansión acelerada. Tsagas muestra que es posible, bajo ciertas condiciones, obtener un parámetro de desaceleración $\tilde{q} < 0$ en nuestro sistema de referencia (no comóvil al flujo de Hubble del CMB), aún cuando se obtenga $q > 0$ en el flujo de Hubble del CMB. También vale la pena mencionar a los trabajos de Buchert [51], que desarrolla un formalismo Lagrangiano completamente consistente con la Relatividad General que considera dos marcos de referencia, el lagrangiano y el euleriano, el primero representaría el marco comóvil, mientras que el euleriano representa como ve un observador la evolución del universo en un marco no comóvil.

La gran complejidad de las ecuaciones de Einstein sugiere favorecer el uso de métodos numéricos para resolverlas, sin embargo la aplicación a cosmología de estos métodos está aún en una etapa inicial muy preliminar [45, 52, 53, 54, 55, 56]. Las soluciones analíticas y semi-analíticas de Einstein proporcionan modelos altamente idealizados, los cuales son herramientas muy útiles para obtener descripciones aproximadas y asintóticas, de estructuras cósmicas en un fondo Λ CDM, e incluso para probar la eficacia de códigos numéricos.

Tomando en cuenta que la CDM es concebida como un gas no-colisional de partículas no-relativistas, es una buena aproximación describirla con un tensor de momento-energía de polvo para estructuras a escalas cósmicas.

micas no-virializadas (aún en caída hacia el fondo cosmológico FLRW). Las soluciones exactas más simples que proporcionan esta descripción de polvo son los modelos esféricamente simétricos Lemaître–Tolman–Bondi (LTB) (ver reseña amplia en [24, 57, 58]). Estos modelos fueron utilizados en el esfuerzo (que resultó fallido) de explicar la aceleración cósmica sin recurrir a la energía oscura (o Λ , por lo que su fondo cosmológico era un FLRW con $\Lambda = 0$), sino como un efecto de la inhomogeneidad a gran escala al calcular cantidades observables en el análisis y ajuste de los datos observacionales. Los modelos trabajados fueron conocidos como “Big Void models”, ya que suponían nuestra ubicación cerca del centro de un gigantesco void esférico de 1 Gpc. Estos modelos difícilmente podían ajustar al conjunto enorme de observaciones disponibles, en particular la cuasi isotropía del CMB.

Al ser la simetría esférica demasiado idealizada y limitante, la familia de soluciones exactas derivada por Szekeres en 1975 [57, 58] proporciona más grados de libertad para aplicaciones en cosmología, ya que no admiten, en general, isometrías. Estas soluciones se subdividen en dos clases (clases I y II) y cada clase en tres subclases (cuasi-esféricas, cuasi-planas y cuasi-hiperbólicas, dependiendo de sus límites simétricos). Los modelos de Szekeres más adecuados a aplicaciones cosmológicas son los cuasi-esféricos de clase I, los cuales han sido utilizados ampliamente para intentar remediar las limitaciones de los modelos LTB, por ejemplo los modelos “Big Void” mencionados anteriormente [59]. Mientras que los modelos esféricos LTB presentan una descripción monopolar de masa-energía, los modelos de Szekeres cuasi-esféricos de clase I presentan la superposición de un monopolo y un dipolo [57]. Mientras que los modelos esféricos LTB solo permiten estudiar la evolución de una

estructura cósmica en un fondo cosmológico FLRW, los modelos de Szekeres permiten estudiar la evolución conjunta de dos o más estructuras: un monopolo central (sobre-densidad o void) junto a una estructura elongada tipo pared (“pancake”) correspondiente al dipolo. En varios trabajos, Sussman, Delgado e Hidalgo [60, 61] estudiaron la posibilidad de describir estructuras multipolares superponiendo varios de estos dipolos locales en posiciones relativamente arbitrarias en un fondo Λ CDM. Esta superposición logra una descripción de malla gruesa adecuada a nuestra cosmografía en escalas de 100 Mpc [62] por lo que tiene un gran potencial de aplicación en la modelación de estructuras de CDM a estas escalas.

Evidentemente, hay otras soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que son potencialmente útiles en cosmología aparte de los modelos LTB y Szekeres cuasi-esféricos de clase I (cuya fuente es polvo). Destacan entre estas soluciones los modelos de Szekeres de clase II y los cuasi-planos y cuasi-hiperbólicos de clase I. Además, están las soluciones de Coley-McMannus [63, 64] y las soluciones shear-free [65] (ver reseña sobre todas estas soluciones en [58]). El potencial de aplicación cosmológica de estas soluciones no ha sido completamente explorado. En particular, las fuentes que caracterizan a estas soluciones siempre han sido descritas en un marco comóvil, por lo que es un problema abierto examinar a los modelos que resulten en términos de mezclas de fluidos no-comóviles o explorando la posibilidad de que pudieran admitir (incluso en forma perturbativa) fuentes asociadas a modos vectoriales (campos magnéticos) o tensoriales (ondas gravitacionales). Dichos modelos podrán ser idealizados, pero como tales pueden ser útiles para sondear propiedades asintóticas o probar códigos numéricos, aparte de su interés teórico

como re-interpretaciones novedosas de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y como herramientas teóricas que pudieran servir al intentar encontrar soluciones exactas en otras teorías métricas de gravedad.

Por otro lado, desde el enfoque del Universo local, existen una gran variedad de propuestas de energía oscura para explicar la expansión cósmica acelerada bajo el marco de la Relatividad General y considerando perturbaciones cosmológicas invariantes de norma en un fondo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

Este comportamiento acelerado puede obtenerse, de manera estándar, por medio de una constante cosmológica positiva Λ , un *fluido oscuro* con presión negativa, campos escalares o modificaciones de la Relatividad General, entre otras [20, 66]. Bajo esta última idea, extensiones de Gravedad Teleparalela (TG) [67, 68] han sido consideradas para explicar la aceleración cósmica, y más aún, aliviar las tensiones cosmológicas, a partir de la geometría de la misma teoría, i.e. sin necesidad de evocar un fluido oscuro o Λ [69]. Más aún, TG ofrece varias propuestas cosmológicas que han obtenido restricciones sobre los parámetros libres usando los datos actuales [70, 71, 72].

TG es una teoría geométrica de la gravedad que utiliza la torsión para la descripción de la gravedad a diferencia de RG en la que se utiliza la curvatura. Esto significa que la torsión sustituye a la conexión Levi-Civita por su conexión análoga de Weitzenböck. El nombre *teleparalelismo* o *paralelismo distante* proviene de la geometría de los vectores en el espacio-tiempo geoméricamente descrito por la conexión de Weitzenböck [73]. La torsión puede

alterar la dirección de estos vectores en el espacio-tiempo geométrico [74]. TG es también una teoría de norma del grupo de traslaciones [75]. Esto significa que el campo gravitatorio puede ser representado por un potencial traslacional que aparece en la parte no trivial del campo tétrado, i.e. mantiene la torsión distinta de cero. De acuerdo a estas ideas se ha mostrado que es posible describir una dinámica de aceleración cósmica sin introducir un fluido oscuro [67].

1.1.4 El Principio Cosmológico

El llamado “Principio Cosmológico” es uno de los ejes rectores de la cosmología hoy en día. Éste¹ asegura que el Universo es estadísticamente homogéneo e isotrópico a grandes escalas [6, 76, 77]. La escala usualmente se considera [78, 79, 80] mayor a 100Mpc, aunque esto sigue siendo un tema de debate en la comunidad [77, 78, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90]. Este principio tiene implicaciones sobre el modelo que se utiliza para estudiar el Universo, en el marco de la teoría de Relatividad General, este principio conlleva modelar el Universo con una métrica Robertson–Walker y sus perturbaciones asociadas. Esto ha llevado a desarrollar el llamado “modelo Λ CDM”, uno de los mayores éxitos en la rama, ya que sus predicciones logran ajustarse a las observaciones con una gran precisión. Sin embargo, a pesar de ser un modelo que ha sido aceptado ampliamente por la comunidad, existen diversos problemas de naturaleza teórica–observacional, como hemos comentado previamente, que podrían provenir del mismo Principio Cosmológico [86, 81].

¹Mayor detalle en Sec. 2.1.

Esto a llevado a diversos grupos de investigación a proponer que exista un debate sobre la validez del “Principio Cosmológico” [81, 82, 86, 84].

En [78] se muestra que al analizar el dipolo en la distribución angular de una muestra de cuasares, éste tiene una dirección similar a aquél dipolo del CMB, atribuido al movimiento peculiar de nuestra galaxia, pero con una amplitud mayor. Los resultados que obtienen muestran que exclusivamente interpretar este dipolo debido a efectos cinemáticos está en conflicto con el modelo estándar de la cosmología, este resultado es consistente con un par de estudios más recientes [91] en el que se estudia la alineación de un grupo grande de cuasares y [82] en el que además muestran que las anomalías de la magnitud del dipolo son independientes del método estadístico usado para su análisis. Posteriormente en [81] se hace un análisis conjunto de catálogos de radio galaxias y quasars para determinar concordancia con el principio cosmológico a partir de su distribución. Nuevamente la interpretación cinemática del dipolo de la anisotropía en la distribución de las galaxias sugiere la existencia de anisotropías intrínsecas a las posiciones de los elementos del catálogo, una sobredensidad de galaxias y cuasares a grandes escalas y una dirección de 48° de diferencia entre el dipolo del CMB y el dipolo de esta distribución, en desacuerdo con el principio cosmológico. En el apéndice de este artículo se encuentran más resultados que discrepan con el Principio Cosmológico, entre ellos el valor de los dipolos del catálogo del proyecto “TIFR GMRT Sky Survey” (TGSS) [92] y del catálogo de núcleos de galaxias activos AllWISE [93].

Los estudios de los dipolos en catálogos no son la única evidencia de una discrepancia con el Principio Cosmológico. En [83] se muestra la existencia de una estructura con forma anular ubicada a una distancia mayor a 370Mpc y con un diámetro de 1720Mpc, el tamaño de esta estructura es mayor a los 150Mpc esperados en un objeto de esta naturaleza, de igual forma en [94] se analiza la existencia de un objeto en forma de arco (GA), encontrado a partir del espectro de cuasares. En este caso la sobredensidad del GA excede el valor de sobredensidad estimado para objetos a la distancia que se encuentra ~ 340 Mpc, con un tamaño de 1Gpc. Otros ejemplos de estructuras a gran escala que muestran posibles discrepancias con el modelo cosmológico son la gran pared de Hercules-Corona Borealis [95, 96, 97], el “Large Quasar Group” que excede la escala de homogeneidad del Principio Cosmológico [98], el agujero local (“Local Hole”) [99] una subdensidad significativa en el Universo local que podría resolver la tensión de la constante de Hubble [100].

La discusión de la homogeneidad e isotropía no es nueva [84, 87, 88, 89], sin embargo los constantes descubrimientos de estructuras y catálogos que no pueden explicarse a partir del modelo estándar de la cosmología ha llevado a proponer modelos a partir de métricas inhomogéneas y anisotrópicas [58, 59, 85, 86] como alternativas al modelo estándar de la cosmología. La discusión, si bien sigue vigente, es un tema que no se aborda en muchos artículos.

Modelos cosmológicos

2.1 El modelo estándar de la cosmología

La teoría de la Relatividad General es hoy en día la teoría física más exitosa para describir el universo a gran escala. En dicha teoría se asume que el espacio-tiempo es una variedad Lorentziana de cuatro dimensiones con una métrica g_{ab} que es solución a las ecuaciones de Einstein¹

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.1)$$

donde T_{ab} es el tensor de energía-momento y G_{ab} es el tensor de Einstein. El tensor de Einstein se define como

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab},$$

¹A lo largo del texto consideramos unidades geométricas ($c = G = 1$).

con R_{ab} el tensor de Ricci y R el escalar de Ricci, ambos relacionados con la curvatura intrínseca de la variedad. Por otro lado, el tensor de energía momento T_{ab} es un tensor simétrico que depende de los campos de materia, sus derivadas covariantes y la métrica. Además cumple las siguientes propiedades [101]

1. T_{ab} se anula en un conjunto abierto U si y sólo si todos los campos de materia se anulan en U ,
2. T_{ab} obedece la ecuación

$$T^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (2.2)$$

siendo esta una ecuación de conservación local¹, y el lado izquierdo de las ecuaciones de campo se cumple por las identidades de Bianchi. Entonces tenemos que la materia determina la curvatura espacio-temporal, mientras que ésta determina el movimiento y distribución de la materia.

Sin embargo, esto no es suficiente para poder determinar un modelo que pueda describir el Universo a gran escala. Es necesario tener predicciones teóricas que coincidan con los datos observacionales y con la física conocida [24, 102, 103]. Es por ello que es necesario distinguir la clase de soluciones que aseguran ser físicamente plausibles. Es por ello que se requieren las siguientes definiciones.

Dada una variedad (\mathcal{M}, g_{ab}) 4-dimensional Lorentziana, se define una congruencia de curvas temporales \mathcal{C}^a , llamadas las *líneas de universo de los observadores fundamentales* (WFO's). El campo vectorial tangente a

¹Sin embargo, de las ecuaciones de campo es evidente que T_{ab} está acoplado a g_{ab} .

las WFO's es llamado el campo de cuatro velocidad. En ocasiones es conveniente adaptar las coordenadas a los WFO's asumiendo que cada WFO está parametrizado como

$$x^0 = x^0(\tau), \quad x^i = \text{const.}, \quad (2.3)$$

y que cada WFO está etiquetado por uno y sólo uno conjunto de valores constantes de x^i . A estas coordenadas se les conoce como coordenadas comóviles.

De acuerdo a [24] existen cuatro características esenciales para definir un modelo cosmológico:

1. Un *espacio-tiempo*, el cual es descrito por medio de una variedad Lorentziana con una conexión libre de torsión. La métrica de dicha variedad está completamente determinada por las ecuaciones de campo y condiciones de frontera.
2. Una descripción de la materia y la radiación, a partir de los modelos apropiados que determinen sus propiedades físicas localmente. Esto se logra a partir de un tensor de energía-momento.
3. Una familia de observadores fundamentales definidos de manera unívoca, i.e. tal que cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ pertenezca a una y solamente una WFO [104], cuyo movimiento represente el movimiento promedio de la materia en el Universo. Estos movimientos deben coincidir con las observaciones.
4. Un conjunto de observaciones relacionales que se sigan de la geometría y las interacciones entre la materia y la radiación en ella.

Por ende [24]:

Un modelo cosmológico consiste en un espacio-tiempo con un contenido de materia y radiación bien definido y físicamente realista, además de una familia unívocamente definida de observadores fundamentales cuyas líneas de mundo se expanden alejándose unas de otras en algún dominio del universo, lo que da lugar a un conjunto bien definido de predicciones observacionales para dicho dominio.¹

Al día de hoy, las observaciones indican que en el Universo la radiación cósmica de fondo es aproximadamente homogénea e isotrópica [42, 105]. Asimismo, la distribución de fuentes de radio [106], sondeos de velocidades peculiares y corrimientos al rojo [107, 108, 79, 109], el fondo de rayos X [110, 111], el bosque Lyman- α [112, 113], mediciones de los modos transversales y radiales de las oscilaciones acústicas bariónicas [114], entre otras [115, 84, 82] proveen fuerte evidencia de la validez del llamado Principio Cosmológico [87, 102]: El Universo es espacialmente homogéneo e isotrópico². Decimos que un espacio-tiempo es espacialmente homogéneo [116] si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies espaciales que folían el espacio-tiempo, Σ_t , tal que para cada t y para cada $p, q \in \Sigma_t$ existe una isometría de la métrica del espacio-tiempo, g_{ab} , que lleva p en q . Por otro lado, se entiende que un espacio-tiempo es espacialmente isotrópico [116] si en cada punto existe una congruencia de curvas temporales con vectores tangentes denotados por u^a , que llenan el espacio tiempo y satisfacen la siguiente propiedad. Dado cualquier punto p y cualesquiera dos vectores tangentes espaciales $s_1^a, s_2^a \in V_p$, i.e. vectores en p

¹Usualmente se agrega como suposición que (\mathcal{M}, g_{ab}) es solución a las ecuaciones de Einstein y asintóticamente tiende a un modelo FLRW.

²De manera precisa sería en un sentido estadístico [87].

ortogonales a u^a , existe una isometría de g_{ab} que deja p y u^a en p fijos pero rota s_1^a en s_2^a . Esto implica que en un universo isotrópico es imposible construir un vector tangente ortogonal a u^a que sea geoméricamente preferencial.

Los espacio-tiempos espacialmente homogéneos e isotrópicos son los universos FLRW, descritos por la métrica Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{\tilde{f}^2}, \quad \tilde{f} = 1 + \frac{\tilde{k}[x^2 + y^2 + z^2]}{4}, \quad (2.4)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y $\tilde{k} = 0, \pm 1$, que representa la curvatura normalizada de las superficies de tiempo constante. Para $k = 0$, las hipersuperficies son homeomorfas a \mathbb{R}^3 , para $k = 1$ son homeomorfas a S^3 y para $k = -1$, las hipersuperficies de tiempo constante son homeomorfas a H^3 [117]. Estos modelos únicamente admiten como fuente un fluido perfecto, cuyo tensor de energía-momento es $T^{ab} = (\tilde{\rho} + \Lambda)\tilde{u}^a\tilde{u}^b + (\tilde{p} - \Lambda)\tilde{h}^{ab}$ con $\tilde{u}^a = u^a$ y $\tilde{h}^{ab} = \tilde{g}^{ab} + u^a u^b$, que lleva a las siguientes ecuaciones de campo

$$\frac{\kappa}{3}(\tilde{\rho} + \Lambda) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\tilde{k}}{a^2}, \quad \kappa(\tilde{p} - \Lambda) = -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\tilde{k}}{3a^2}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{3\dot{a}}{a} \quad (2.5)$$

donde la única cantidad cinemática distinta de cero es el escalar de la expansión. (AGHREGAR QUE SE CONOCEN COMO LAS ECS DE FRIEDMANN)

De la Ec. (2.5) se tiene que el factor de escala experimenta una desaceleración salvo en el caso de que exista una presión negativa o una constante cosmológica que actúe en contra de ésta. La constante cosmológica Λ ha tenido una interpretación de “energía oscura”, a la cual se le asocia una ecuación de estado $w_\Lambda = -1$. Es conveniente expresar cada componentes de energía en términos de un parámetro de densidad relativos a la densidad crítica (la

densidad requerida para que el Universo sea plano dado un valor del escalar de Hubble $H = \dot{a}/a$). Para una componente ρ_i de masa-energía¹, se tiene que

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} = \frac{\kappa \rho_i}{3H^2}.$$

De esta forma, la primera ecuación de Friedmann se puede reescribir como

$$\sum_i \Omega_i = 1.$$

Actualmente el modelo que mejor ajusta a las observaciones a gran escala es el modelo de concordancia, o “ Λ CDM”. Éste es un modelo FLRW espacialmente plano cuyas fuentes son energía oscura (Λ), materia oscura no relativista sin presión (CDM), radiación y materia estándar (SM). Los parámetros de densidad en el presente correspondientes a estas componentes son $\Omega_\Lambda \approx 0,7$, $\Omega_{CDM} \approx 0,25$, $\Omega_r \approx 10^{-5}$, $\Omega_{SM} \approx 0,05$. Este modelo ha servido como el modelo de fondo para obtener predicciones, analizar datos observacionales y a partir de teoría de perturbaciones obtener la historia térmica del Universo [6, 24, 21]. Este modelo ha sido extremadamente exitoso en poner fuertes cotas a los parámetros libres de la teoría y dar explicación a varios fenómenos físicos como son el CMB y sus efectos asociados, la expansión acelerada del Universo, etc. Sin embargo, como se mencionó en el Cap. 1, aún existen diversos problemas abiertos, de índole teórico-observacional como son la naturaleza de la energía oscura y las tensiones en cosmología.

Las propiedades necesarias y suficientes para que un espacio-tiempo dado sea FLRW son, [58]

¹También se considera la constante cosmológica y el término de curvatura espacial.

1. La métrica obedece las ecuaciones de Einstein cuya fuente es el tensor de energía momento de un fluido perfecto.
2. El campo de velocidades del fluido perfecto tiene “shear” nulo, aceleración y vorticidad.

Estas propiedades resultan importantes al considerar “límites FLRW” en algún espacio-tiempo de interés cosmológico, que puede ser un límite geométrico o un límite en el espacio de parámetros del modelo.

2.2 Modelos inhomogéneos y anisotrópicos

Como se mencionó en el Cap. 1, a pesar del gran éxito que ha tenido el modelo Λ CDM, existe evidencia de que el Principio Cosmológico podría no ser correcto [77] y por ende esto llevará a la necesidad de formular nuevos modelos que pueden ser consistentes con un nuevo Principio Cosmológico. Siendo que la Relatividad General es la teoría de Gravitación más exitosa al momento, lo natural sería explorar las soluciones existentes que pudieran servir de modelos cosmológicos dejando a un lado la homogeneidad y/o la isotropía.

2.2.1 Fluidos imperfectos

Dado un campo de 4-velocidades, la forma más general del tensor de energía momento está dada por

$$T^{ab} = (\rho + \Lambda)u^a u^b + (p - \Lambda)h^{ab} + \pi^{ab} + 2q^{(a} u^{b)}, \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho + \Lambda &= u_a u_b T^{ab}, & p - \Lambda &= \frac{1}{3} h_{ab} T^{ab}, \\ \pi^{ab} = T^{(ab)} &= \left[h_c^{(a} h_d^{b)} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] T^{cd}, & q_a &= -u^b T_{ab} \end{aligned}$$

con $h^{ab} = u^a u^b + g^{ab}$ el operador de proyección, ρ , p , π^{ab} , q^a son la densidad de masa energía, la presión isotrópica, el tensor espacial sin traza de presión anisotrópica, el vector espacial de flujo de energía y Λ es la constante cosmológica.

Se refiere al tensor de energía–momento Ec. (2.6) como aquel que describe un “fluido imperfecto” siendo que los términos π^{ab} , q^a usualmente se identifican con estrés disipativo, viscosidad y conducción de calor, en sistemas térmicos e hidrodinámicos (ejemplos en [58]). Sin embargo, esta interpretación no es adecuada para fuentes cósmicas con interacción de largo alcance dominadas por la gravedad: la CDM se describe mejor a grandes escalas como polvo, una descripción también aplicable a los bariones cuya energía interna y efectos térmicos disipativos son también despreciables en estas escalas [118].

Una interpretación más adecuada para los términos de “fluido imperfecto” π^{ab} , q^a en un contexto cosmológico se sigue de interpretar los flujos de 4–momento con velocidades peculiares asociadas con una 4–velocidad no comóvil con respecto a un marco comóvil. En particular, podemos asumir una 4–velocidad comóvil a un fondo Λ CDM background para el marco del CMB, con la CDM y los bariones evolucionando a lo largo de un campo de 4–velocidades que no es comóvil con respecto a este marco.

Para analizar esta conexión entre los tensores de energía momento con distintos marcos, consideramos dos congruencias generales de observadores espacio-temporales con distintas 4-velocidades u^a y \hat{u}^a . Escogemos u^a como una 4-velocidad comóvil, la 4-velocidad no comóvil \hat{u}^a se obtiene como una generalización del boost de Relatividad Especial

$$\hat{u}^a = \gamma(u^a + v^a), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_a v^a}} \quad (2.7)$$

donde v^a es el vector de velocidad peculiar tipo espacial medido por el observador u^a y $v^a u_a = 0$. Siguiendo [119] y asumiendo que el tensor de energía-momento para el marco no-comóvil tiene la forma general Ec. (2.6), las relaciones entre las cantidades dinámicas entre los tensores de energía-momento comóvil y no-comóvil están dadas por

$$\rho = \hat{\rho} + \Lambda + 2\gamma\hat{q}^a v_a + \left\{ \gamma^2 v^a v_a (\hat{\rho} + \hat{p}) + \hat{\Pi}^{ab} v_a v_b \right\}, \quad (2.8)$$

$$p = \hat{p} - \Lambda + \frac{2}{3} \gamma\hat{q}^a v_a + \frac{1}{3} \left\{ \gamma^2 v^a v_a (\hat{\rho} + \hat{p}) + \hat{\Pi}^{ab} v_a v_b \right\} \quad (2.9)$$

$$q^a = \hat{q}^a + (\hat{\rho} + \hat{p})v^a + \left\{ (\gamma - 1)\hat{q}^a - \gamma\hat{q}^b v_b \hat{u}^a + \gamma^2 v^b v_b (\hat{\rho} + \hat{p})v^a \right. \quad (2.10)$$

$$\left. + \hat{\Pi}^{ab} v_b - \hat{\Pi}^{ab} v_b v_c \hat{u}^a \right\} \quad (2.11)$$

$$\Pi^{ab} = \hat{\Pi}^{ab} + \left\{ \gamma^2 (\hat{\rho} + \hat{p})v^{(a} v^{b)} - 2u^{(a} \hat{\Pi}^{b)c} v_c + \hat{\Pi}^{cd} v_c v_d \hat{u}^a \hat{u}^b \right. \quad (2.12)$$

$$\left. - \frac{1}{3} \hat{\Pi}^{cd} v_c v_d \hat{h}^{ab} - 2\gamma\hat{q}^c v_c u^{(a} v^{b)} + 2\gamma v^{(a} \hat{q}^{b)} \right\}, \quad (2.13)$$

así como en [119], escribimos los términos no-lineales en v^a en “brackets”. Nótese que las presiones isotrópicas y anisotrópicas están asociadas con términos que son no-lineales (al menos de orden cuadrático) en v^a .

2.2.2 Condiciones de emparejamiento

Dados cualesquiera dos espacio-tiempos, siempre es posible construir un espacio-tiempo a partir de ellos. Presentamos ahora las condiciones de emparejamiento¹ entre dos espacio-tiempos genéricos, posteriormente utilizaremos las condiciones para elaborar un modelo cosmológico [1, 2].

Sean \mathcal{M}^+ y \mathcal{M}^- dos variedades con fronteras Σ^+ y Σ^- , respectivamente. Sea $\psi : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^-$ un difeomorfismo, identificamos los puntos de ambas fronteras y denotamos ambas fronteras por Σ .

Primera condición de emparejamiento

Consideramos el espacio-tiempo como la unión disjunta de dos variedades lorentzianas con frontera \mathcal{M}^+ y \mathcal{M}^- , cada una de las cuales tiene definida una métrica que es una solución a las ecuaciones de Einstein g^+ y g^- , respectivamente. Supondremos que existe un difeomorfismo C^3 entre ambas fronteras, por lo que en adelante denotaremos ambas fronteras por Σ a menos que se indique lo contrario. Clarke y Dray, [120], demostraron que,

“if a spacetime is constructed by identifying the boundaries of two spacetimes in such a way that the intrinsic metrics on the boundaries agree (and have a constant signature) then there exists a unique choice of a C^1 atlas in which the (four-dimensional) metric of the spacetime is continuous.”

¹En inglés conocidas como “matching conditions” o “junction conditions”

Como señalan Mars y Senovilla [121], la suposición de una signatura constante es superflua. Por lo tanto, suponemos que \mathbf{g} es un tensor continuo en una hipersuperficie, esto se llama la *primera "junction condition"*. Si se supone que \mathbf{g} es discontinuo a través de la hipersuperficie, entonces los símbolos de Christoffel contienen términos proporcionales a un producto de distribuciones que está mal definido, por lo que la suposición de continuidad de la métrica a través de Σ también puede deducirse de este argumento. La primera condición de emparejamiento también se conoce como las "preliminary junction conditions" en la literatura.

Podemos descomponer el tensor métrico como

$$\mathbf{g} = \theta \cdot \mathbf{g}^+ + (1 - \theta) \cdot \mathbf{g}^-,$$

donde θ es la función de Heaviside, y a partir de nuestra hipótesis tiene una distribución asociada que sería

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\theta} \cdot \mathbf{g}^+ + (\underline{1} - \underline{\theta}) \cdot \mathbf{g}^-,$$

donde \underline{f} denota la distribución asociada a la función f .

Definimos ahora los coeficientes de conexión asociados a la métrica en la variedad. Denotamos por $\Gamma^+{}_{\beta\gamma}{}^\alpha$ los símbolos de Christoffel asociados a \mathbf{g}^+ y definidos en $\mathcal{M}^+ \cup \Sigma$, y $\Gamma^-{}_{\beta\gamma}{}^\alpha$ los símbolos de Christoffel asociados a la métrica definida en $\mathcal{M}^- \cup \Sigma$, \mathbf{g}^- . Denotamos por $\underline{\Gamma}{}_{\beta\gamma}{}^\alpha$ los símbolos de Christoffel asociados a la métrica distributiva $\underline{\mathbf{g}}$. Por comodidad en la notación

denotamos $(\underline{1} - \underline{\theta}) = \underline{\tilde{\theta}}$. Así obtenemos

$$\begin{aligned}\underline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \underline{g}^{\alpha\lambda} \left(\underline{g}_{\lambda\beta,\gamma} + \underline{g}_{\lambda\gamma,\beta} - \underline{g}_{\beta\gamma,\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(g^{\alpha\lambda+\underline{\theta}} + g^{\alpha\lambda-\underline{\tilde{\theta}}} \right) \\ &\quad \left(g_{\lambda\beta,\gamma}\underline{\theta} + g_{\lambda\gamma,\beta}\underline{\theta} - g_{\beta\gamma,\lambda}\underline{\theta} \right. \\ &\quad \left. + g_{\lambda\beta,\gamma}\underline{\tilde{\theta}} + g_{\lambda\gamma,\beta}\underline{\tilde{\theta}} - g_{\beta\gamma,\lambda}\underline{\tilde{\theta}} \right) \\ &= \Gamma^{+\alpha}_{\beta\gamma} \underline{\theta} + \Gamma^{-\alpha}_{\beta\gamma} (\underline{1} - \underline{\theta}).\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\underline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{+\alpha}_{\beta\gamma} \underline{\theta} + \Gamma^{-\alpha}_{\beta\gamma} (\underline{1} - \underline{\theta}). \quad (2.14)$$

De este modo, ahora conocemos los símbolos de Christoffel como distribuciones, por lo que definimos los coeficientes de la conexión como funciones definidas en la variedad de forma natural,

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{+\alpha}_{\beta\gamma} \theta + \Gamma^{-\alpha}_{\beta\gamma} (1 - \theta).$$

Nótese que esta definición produce las distribuciones de Christoffel necesarias.

Dada la relación entre el tensor de Riemann y los símbolos de Christoffel, calculamos el tensor de Riemann,

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\rho} \Gamma^{\rho}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma}$$

y trataremos esta relación en un sentido distributivo. Es directo calcular que

$$\underline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\mu,\gamma} = \Gamma^{+\alpha}_{\beta\mu,\gamma} \cdot \underline{\theta} + \Gamma^{-\alpha}_{\beta\mu,\gamma} \cdot \underline{\tilde{\theta}} + \delta \cdot n_{\gamma} [\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}],$$

con n_{γ} la forma normal a la hipersuperficie.

Como hemos definido las funciones $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$, tenemos que las distribuciones $\underline{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha$ están asociadas a estas funciones y por tanto el producto $\underline{\Gamma}_{\gamma\rho}^\alpha \underline{\Gamma}_{\beta\mu}^\rho$ está bien definido ya que es la distribución asociada $\Gamma_{\gamma\rho}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho$. A partir de estos hechos, obtenemos el tensor de Riemann distribucional que tiene la siguiente expresión

$$\underline{R}^\alpha_{\beta\gamma\mu} = R^{+\alpha}_{\beta\gamma\mu} \cdot \underline{\theta} + R^\alpha_{\beta\gamma\mu} \cdot \tilde{\underline{\theta}} + \delta \cdot n_\gamma [\Gamma^\alpha_{\beta\mu}] - \delta \cdot n_\mu [\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}]. \quad (2.15)$$

El término del lado derecho de la ecuación proporcional a δ se llama la parte singular del tensor de Riemann.

Segunda condición de emparejamiento

Ahora busquemos las condiciones para evitar la parte singular del tensor de Riemann. Como se supusimos que la métrica es continua a través de Σ , cualquier discontinuidad de la derivada debe estar en la dirección normal a la hipersuperficie, es decir

$$[g_{\alpha\beta,\gamma}] = c_{\alpha\beta} n_\gamma, \quad (2.16)$$

donde $c_{\alpha\beta}$ es un campo tensorial. Con el salto de la primera derivada ordinaria de la métrica en un sistema coordenado podemos calcular el salto de los símbolos de Christoffel. De la Ec. (2.16) se obtiene $[n_{\alpha;\beta}] = -[\Gamma^\rho_{\alpha\beta}] n_\rho$ y un cálculo directo arroja que el término singular de la distribución de Riemann es en realidad un campo tensorial $\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu}$ que tiene la siguiente expresión

$$\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (-n^\alpha [K_{\beta\nu}] n_\mu + n^\alpha [K_{\beta\mu}] n_\nu - n_\beta [K^\alpha_\mu] n_\nu + n_\beta [K^\alpha_\nu] n_\mu).$$

Contrayendo $\mathcal{R}^\rho_{\mu\rho\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu}$ obtenemos la llamada parte singular de la distribución de Ricci, i.e.

$$\underline{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^+ \underline{\theta} + R_{\mu\nu}^- (\underline{1} - \underline{\theta}) + \delta \mathcal{R}_{\mu\nu},$$

donde la fórmula explícita para la parte singular es

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = -[K_{\mu\nu}] - [K^\rho_\rho] n_\mu n_\nu.$$

La parte singular del tensor de Ricci se anula si y sólo si el salto de la segunda forma fundamental se anula, y por tanto si y sólo si la parte singular de la distribución de Riemann lo hace. Contrayendo una vez más

$$\underline{R} = R^+ \underline{\theta} + R^- (\underline{1} - \underline{\theta}) + \delta \mathcal{R},$$

donde $\mathcal{R} = -2[K^\mu_\mu]$. Por tanto la distribución de Einstein se define a trozos como

$$\underline{G}_{\mu\nu} := \underline{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \underline{R} = G_{\mu\nu}^+ \underline{\theta} + G_{\mu\nu}^- (\underline{1} - \underline{\theta}) + \delta \mathcal{G}_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

donde la parte singular es

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu} &= \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = -[K_{\mu\nu}] - [K^\rho_\rho] n_\mu n_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-2[K^\rho_\rho]) \\ &= -[K_{\mu\nu}] + [K^\rho_\rho] (g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) = -[K_{\mu\nu}] + h_{\mu\nu} [K^\rho_\rho], \end{aligned} \quad (2.18)$$

que es tangente a Σ . Como nuestra suposición inicial era que ambas métricas son soluciones en \mathcal{M}^+ y \mathcal{M}^- , respectivamente, podemos definir un tensor de energía-momento

$$\underline{T}_{\mu\nu} := T_{\mu\nu}^+ \underline{\theta} + T_{\mu\nu}^- (\underline{1} - \underline{\theta}) + \delta \mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

que es una solución de las ecuaciones de campo en un sentido distribucional. La parte singular del tensor de energía-momento se interpreta como el tensor

de energía-momento superficial de una *capa superficial* o *capa fina*. Como el tensor de energía-momento superficial es tangente a Σ podemos hacer una descomposición

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{ab} e^{\mu}_a e^{\nu}_b,$$

para llegar a la expresión

$$\mathcal{T}_{ab} = -[K_{ab}] + [K]h_{ab}. \quad (2.20)$$

De esta expresión es inmediato que, para eliminar el término singular de las distribuciones de curvatura es suficiente que $[K_{ab}] = 0$. Esto se conoce como la *segunda condición de emparejamiento* u ocasionalmente como las “*junction conditions*”, siendo que se asume la primera para obtener la segunda. Las condiciones de emparejamiento también se conocen como las condiciones de Darmois en la literatura (CITAS DARMOIS).

2.2.3 Modelos inhomogéneos como perturbaciones exactas

Como se mencionó previamente, las inhomogeneidades y anisotropías del Universo, así como los efectos físicos que estas generan, se estudian por medio de teoría de perturbaciones. En estas teoría uno escoge un espacio-tiempo real \mathcal{M} y un espacio-tiempo fiduciario o idealizado $\bar{\mathcal{M}}$, y uno entiende una correspondencia uno a uno entre los puntos de \mathcal{M} con los puntos de $\bar{\mathcal{M}}$, a lo que uno llama una norma. Sin embargo, uno tiene libertad de escoger esta norma haciendo cambios mediante difeomorfismos que permite la teoría de la Relatividad General, esto trae consigo como hacer la teoría invariante de norma, ya que sólo así tendrá sentido físico. Hoy en día existen diversas teorías

de perturbaciones que son invariantes de norma, siendo la teoría estándar la formulada por Bardeen [22]. Esta teoría conlleva emplear perturbaciones sobre el tensor métrico y el tensor de energía-momento, y que las perturbaciones sean invariantes de norma ya que son las únicas que tienen un significado físico.

En [23] Ellis y Bruni desarrollan un formalismo de perturbaciones covariante, basado en las ecuaciones 1+3 equivalentes a las ecuaciones de Einstein Ecs. (2.21)-(2.34). Este formalismo no parte de suponer una forma perturbativa de la métrica, sino de las cantidades covariantes asociadas al campo de 4-velocidades: los parámetros cinemáticos, tensores eléctrico y magnético de Weyl y los parámetros del tensor de momento-energía. La invariancia de norma de las perturbaciones y la equivalencia con el formalismo basado en la métrica de Bardeen se sigue del hecho de que todas las perturbaciones se anulan en el espacio-tiempo FLRW de fondo [122]. El formalismo de Ellis y Bruni hace que sea notoria la relación entre modelos cosmológicos y sobre todo cómo modelos cosmológicos de los que hablaremos más adelante son perturbaciones exactas de un fondo FLRW. A continuación, describiremos brevemente el formalismo de Ellis y Bruni [23]. Tomaremos una foliación covariante 1 + 3 con respecto a u^a , esto fija una elección de tiempo y espacio, y utilizaremos las ecuaciones 1+3 dadas en términos de cantidades covariantes y que son equivalentes a las ecuaciones de Einstein [24]. Estas son las ecuaciones

de evolución (derivadas paralelas a u^a):

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + \bar{\nabla}^a q_a = -2\dot{u}^a q_a - \sigma^{ab}\pi_{ab}, \quad (2.21)$$

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 4\pi G(\rho + 3p) - \bar{\nabla}^a \dot{u}_a = -\sigma_{ab}\sigma^{ab} + 2\omega_a\omega^a + \dot{u}_a\dot{u}^a, \quad (2.22)$$

$$\dot{q}_{\langle a \rangle} + \frac{4}{3}\Theta q_a + (\rho + p)\dot{u}_a + \bar{\nabla}_a p + \bar{\nabla}^b \pi_{ab} = -\sigma_{ab}q^b + \eta_{abc}\omega^b q^c - \dot{u}^b \pi_{ab}, \quad (2.23)$$

$$\dot{\omega}_{\langle a \rangle} + \frac{2}{3}\Theta \omega_a + \frac{1}{2}\text{curl } \dot{u}_a = \sigma_{ab}\omega^b, \quad (2.24)$$

$$\dot{\sigma}_{\langle ab \rangle} + \frac{2}{3}\Theta \sigma_{ab} + E_{ab} - 4\pi G\pi_{ab} - \bar{\nabla}_{\langle a} \dot{u}_{b \rangle} = -\sigma_{c\langle a} \sigma_{b \rangle}{}^c - \omega_{\langle a} \omega_{b \rangle} + \dot{u}_{\langle a} \dot{u}_{b \rangle}, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\langle ab \rangle} + \Theta E_{ab} - \text{curl } H_{ab} + 4\pi G \left[(\rho + p)\sigma_{ab} + \dot{\pi}_{\langle ab \rangle} + \frac{1}{4}\Theta \pi_{ab} + \bar{\nabla}_{\langle a} q_{b \rangle} \right] \\ = -8\pi G \dot{u}_{\langle a} q_{b \rangle} + 2\dot{u}^c \eta_{cd(a} H_{b)}{}^d + 3\sigma_{c\langle a} E_{b \rangle}{}^c - \omega^c \eta_{cd(a} E_{b)}{}^d \\ - 4\pi G \left(\sigma^c{}_{\langle a} \pi_{b \rangle}{}^c - \omega^c \eta_{cd(a} \pi_{b)}{}^d \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\langle ab \rangle} + \Theta H_{ab} + \text{curl } E_{ab} - 4\pi G \text{curl } \pi_{ab} = 3\sigma_{c\langle a} H_{b \rangle}{}^c - \omega^c \eta_{cd(a} H_{b)}{}^d \\ - 2\dot{u}^c \eta_{cd(a} E_{b)}{}^d + 4\pi G \left(\sigma^c{}_{(a} \eta_{b)cd} q^d - 3\omega_{\langle a} q_{b \rangle} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Estas ecuaciones contienen la evolución temporal de los fluidos, así como de las hipersuperficies ortogonales al vector u^a . Las Ecs. (2.21), (2.22), (2.23) son las ecuaciones de balance de energía, la ecuación de Raychaudhuri y la ecuación de balance de momento, respectivamente. Mientras que las Ecs. (2.24), (2.25) representan la propagación de la vorticidad y el “shear” las Ecs. (2.26), (2.27) representan la propagación de los campos gravitacionales. Nótese que en todo caso, la propagación de los campos, así como la evolución de las cantidades dinámicas, dependen unos de otros, tal y como en forma original de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, estas ecuaciones no son del todo equivalentes a las ecuaciones de Einstein, resta agregar los vínculos

transversales que involucran derivadas “espaciales” (ortogonales a u^a),

$$\bar{\nabla}^a \omega_a = \dot{u}^a \omega_a, \quad (2.28)$$

$$\bar{\nabla}^b \sigma_{ab} - \text{curl } \omega_a - \frac{2}{3} \bar{\nabla}_a \Theta + 8\pi G q_a = -2\eta_{abc} \omega^b \dot{u}^c, \quad (2.29)$$

$$\text{curl } \sigma_{ab} + \bar{\nabla}_{\langle a} \omega_{b \rangle} - H_{ab} = -2\dot{u}_{\langle a} \omega_{b \rangle}, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^b E_{ab} + \frac{4\pi G}{3} (\bar{\nabla}^b \pi_{ab} - 2\bar{\nabla}_a \rho + \theta q_a) \\ = \eta_{abc} \sigma^b{}_d H^{cd} - 3H_{ab} \omega^b + 4\pi G (\sigma_{ab} + 3\eta_{abc} \omega^c) q^b, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^b H_{ab} + 4\pi G [\text{curl } q_a - 2(\rho + p)\omega_a] \\ = 3E_{ab} \omega^b - \eta_{abc} \sigma^b{}_d E^{cd} - 4\pi G (\eta_{abc} \sigma^b{}_d \pi^{cd} + \pi_{ab} \omega^b), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$${}^3R_{\langle ab \rangle} = E_{ab} + 4\pi G \pi_{ab} - \frac{1}{3} \Theta (\sigma_{ab} + \omega_{ab}) + \sigma_{c\langle a} \sigma_{b \rangle}{}^c + \omega_{c\langle a} \omega_{b \rangle}{}^c - 2\sigma_{c[a} \sigma_{b]}{}^c \quad (2.33)$$

$${}^3R = 16\pi G \rho - \frac{2}{3} \Theta^2 + \sigma_{ab} \sigma^{ab} - \omega_a \omega^a. \quad (2.34)$$

En estas ecuaciones, E_{ab} y H_{ab} son las partes eléctrica y magnética del tensor de Weyl, 3R es el escalar de Ricci asociado a las hipersuperficies ortogonales a u^{a1} , y los operadores diferenciales son $\dot{} = u^a \nabla_a$, $\bar{\nabla}_a = h_c{}^f \nabla_f$, $\text{curl } S_{ab} = \eta_{cd(a} \bar{\nabla}^c S_{b)}{}^d$, $\eta_{abc} = \eta_{abcd} u^d$. Dichas ecuaciones provienen de las identidades de bianchi, la ecuación de Gauss, así como las ecuaciones de evolución. De Ec. (2.34) tenemos una generalización de las ecuaciones de Friedmann, aplicable a cualquier espacio-tiempo.

Notemos que el sistema de ecuaciones anterior es equivalente a las ecuaciones de Einstein y es aplicable para cualquier espacio-tiempo, incluso

¹Esto tiene sentido cuando la vorticidad es idénticamente cero.

aquellos en los que se considere un campo de 4-velocidades u^a que carezca de significado físico.

En el caso de un modelo FLRW, éstos son soluciones del subconjunto de las ecuaciones 1+3 dados por las ecuaciones de evolución

$$\dot{\rho}_{\text{cm}} + (\rho_{\text{cm}} + p_{\text{cm}})\Theta_{\text{cm}} = 0, \quad (2.35)$$

$$\dot{\Theta}_{\text{cm}} + \frac{1}{3}\Theta_{\text{cm}}^2 + 4\pi G(\rho_{\text{cm}} + 3p_{\text{cm}}) = 0, \quad (2.36)$$

$$(2.37)$$

y los vínculos transversales

$$-\frac{2}{3}\bar{\nabla}_a\Theta_{\text{cm}} = 0, \quad (2.38)$$

$$\bar{\nabla}_a\rho_{\text{cm}} = 0 \quad (2.39)$$

$${}^3R_{\langle ab \rangle} = 0 \quad (2.40)$$

$${}^3R = 16\pi G\rho_{\text{cm}} - \frac{2}{3}\Theta_{\text{cm}}^2. \quad (2.41)$$

Comparando las Ecs. (2.35)-(2.41) con Ecs. (2.21)-(2.34), nos permite ver que aquellos términos adicionales en un modelo cosmológico distinto a FLRW se pueden tratar como términos perturbativos en un fondo FLRW. Siendo que no existen consideraciones para desprestigiar términos, a esto nos referiremos en lo subsecuente como que un cierto modelo es una perturbación exacta de una solución FLRW. De manera más concreta, Podemos definir perturbaciones sobre las variables a trabajar en un fondo tipo FLRW¹, i.e. $\rho = \rho_{\text{cm}} + \delta\rho$, $\Theta = \Theta_{\text{cm}} + \delta\Theta$, etc. Como los modelos FLRW son soluciones exactas a las Ecs. (2.21)-(2.34), al sustituir en el sistema, este se torna una sistema de

¹O cualquier otra solución exacta.

ecuaciones sobre las perturbaciones $\delta\rho$, $\delta\Theta$, etc, que contiene coeficientes que dependen de la solución de fondo (en este caso soluciones FLRW). De esta manera tenemos una perturbación exacta sobre un fondo FLRW. La cuestión de la invarianza de norma se trata a partir del formalismo de Ellis-Bruni [24]. Posteriormente se puede reducir el sistema resultante a un sistema lineal sobre las perturbaciones suponiendo que $\delta\rho/\rho_{\text{cm}} \ll 1$, $\delta\Theta/\Theta_{\text{cm}} \ll 1$ se cumple para todas las variables. Asimismo, todas las variables que se anulan para las modelos FLRW: \dot{u}_a , σ_{ab} , ω_{ab} , H_{ab} son tratadas también en forma perturbativa, ignorando términos cuadráticos.

2.3 Modelos S^3 en V_2

En general los modelos cosmológicos carecen de vectores de Killing, y por tanto carecen de simetrías. Es importante ver casos de modelos con simetrías más generales de los cuales se obtener casos particulares, como lo es el modelo FLRW. Un caso interesante¹ son los modelos de S_3 en V_2 [123, 104], estos son espacio-tiempos que admiten un grupo 3-dimensional de isometrías con órbitas 2-dimensionales (simetrías esférica, plana e hiperbólica). Es posible mostrar [123] que una variedad Riemanniana V_q que admite un grupo G_r , con $r = q(q + 1)/2$ será un espacio de curvatura constante, como es en nuestro caso. Los siguientes teoremas [123] son importantes para este tipo de espacios:

Teorema 1. *Un espacio Riemanniano es de curvatura constante si y sólo si admite (localmente) un grupo G_r de movimientos con $r = \frac{1}{2}n(n + 1)$.*

¹En esta sección seguimos de cerca la exposición de [123, 24, 58].

Teorema 2. *Si un grupo G_r de movimientos de $r = \frac{1}{2}d(d+1)$, ($d > 1$), parámetros tiene órbitas de dimensión d , las órbitas admiten superficies ortogonales.*

Teorema 3. *Un espacio Riemanniano V_n ($n \geq 3$) es de curvatura constante si y sólo si admite (localmente) un grupo de sólo si admite (localmente) un grupo G_r de movimientos con $r = \frac{1}{2}n(n+1)$.*

La constante de curvatura K , de estos espacios está relacionada al tensor de Riemann por medio de la siguiente ecuación

$$K = \frac{R_{abcd}v^a w^b v^c w^d}{(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})v^a w^b v^c w^d}, \quad (2.42)$$

para cualesquiera vectores v, w . Es posible mostrar que estas variedades, V_n , son conformalmente planas, C^a_{bcd} . Por lo mismo, siempre se puede encontrar una transformación que lleve a la métrica de este espacio a la forma

$$d\sigma^2 = \frac{dx^a dx_a}{\left(1 + \frac{1}{4}K x_b x^b\right)^2}. \quad (2.43)$$

Por el Teo. 2 las órbitas V_2 admiten superficies ortogonales en V_4 y una transformación de coordenadas sobre los espacios ortogonales a las órbitas permite llevar la métrica espacio-temporal a la forma

$$ds^2 = -\exp(2\alpha)dt^2 + \exp(2\beta)dz^2 + Y^2 f(dx^2 + dy^2), \quad (2.44)$$

donde α, β son funciones de r, t y $f = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}K(x^2 + y^2)}$. Mediante un cambio de coordenadas es posible llevar esta métrica la forma

$$ds^2 = -\exp(2\alpha)dt^2 + \exp(2\beta)dz^2 + \tilde{Y}(t, r)(d\theta^2 + \Sigma(\theta, K)d\phi^2), \quad (2.45)$$

donde $\Sigma = \theta, \sin \theta, \sinh \theta$. La deducción es análoga al caso de las soluciones FLRW [117]. La existencia de grupos de mayor dimensión S_r , $r > 3$, o incluso un grupo general G_p , impone restricciones sobre las funciones libres α, β . Las componentes no nulas del tensor de Einstein son

$$G^t_z = \left(\frac{Y_{z,t} - \alpha_z Y_t - \beta_t Y_z}{Y} - \frac{1}{2} \frac{Y_z Y_t}{Y^2} \right) e^{-2\alpha}, \quad (2.46)$$

$$G^z_t = \left(-\frac{Y_{z,t} - \alpha_z Y_t - \beta_t Y_z}{Y} + \frac{1}{2} \frac{Y_z Y_t}{Y^2} \right) e^{-2\beta}, \quad (2.47)$$

$$G^z_z = \left(\frac{\alpha_t Y_t - Y_{t,t}}{Y} + \frac{1}{4} \frac{Y_t^2}{Y^2} \right) e^{-2\alpha} + \left(\frac{\alpha_z Y_z}{Y} + \frac{1}{4} \frac{Y_z^2}{Y^2} \right) e^{-2\beta} - \frac{K}{Y}, \quad (2.48)$$

$$G^x_x = \left(-\beta_t^2 + \beta_t \alpha_t - \beta_{t,t} + \frac{Y_t \alpha_t + 2Y_t^2 Y - Y_{t,t} - \beta_t Y_t}{2Y} \right) e^{-2\alpha} \\ + \left(\alpha_z^2 - \beta_z \alpha_z + \alpha_{z,z} + \frac{Y_z \alpha_z - 2Y_z^2 Y + Y_{z,z} - \beta_z Y_z}{2Y} \right) e^{-2\beta} \quad (2.49)$$

$$G^y_y = \left(-\beta_t^2 + \beta_t \alpha_t - \beta_{t,t} + \frac{Y_t \alpha_t + 2Y_t^2 Y - Y_{t,t} - \beta_t Y_t}{2Y} \right) e^{-2\alpha} \\ + \left(\alpha_z^2 - \beta_z \alpha_z + \alpha_{z,z} + \frac{Y_z \alpha_z - 2Y_z^2 Y + Y_{z,z} - \beta_z Y_z}{2Y} \right) e^{-2\beta} \quad (2.50)$$

$$G^t_t = - \left(\frac{Y_t + 4\beta_t Y_t}{4Y^2} \right) e^{-2\alpha} - \left(\frac{Y_z + 4\beta_z Y_z - 4Y_{z,z}}{4Y^2} \right) e^{-2\beta} - \frac{K}{Y}, \quad (2.51)$$

donde consideramos $\alpha_i = \partial_i \alpha$.

A partir de un análisis del tensor de Riemann se propone una "función de masa",

$$m(t, z) = \frac{1}{2} \exp(\beta) (K - Y_{,a} Y^{,a}), \quad (2.52)$$

que a partir de las identidades de Bianchi [124] se muestra que cumple las propiedades

$$m_z = \frac{1}{2}Y^2 (Y_t G^t_z - Y_z G^t_t), \quad (2.53)$$

$$m_t = \frac{1}{2}Y^2 (\beta_z G^z_t - Y_t G^z_z). \quad (2.54)$$

A partir de las Ecs. (2.53)-(2.54) es posible concluir que la función de masa es una integral de dos combinaciones de las ecuaciones de Einstein [124] y por tanto Ecs. (2.53)-(2.54) son equivalentes a dos de las ecuaciones de Einstein.

Es importante notar que en este tipo de espacios tendremos una variedad cuya topología local estará determinada en parte por el la topología del grupo y/o simetrías que se consideren. Dos subcasos de interés en la cosmología han sido la simetría esférica y plana. La simetría esférica ha sido una de las suposiciones esenciales en la cosmología de fondo, siendo que el modelo base es una solución FLRW [6]. Asimismo, los primeros modelos teóricos de formación de estructura y colapso gravitacional [125, 126, 127] están basados en modelos esféricamente simétricos. Por otro lado, los modelos con simetría planar han sido útiles para modelar las paredes de dominio [128, 129, 130].

Existen dos maneras de establecer la simetría esférica y planar, por medio de vectores de Killing [116] o mediante el uso de grupos [123], procedemos al último.

Definición 1. *Se dice que un espacio-tiempo V_4 es esféricamente (planarmente) simétrico si admite un grupo G_3IX (G_3VII_0) de movimientos que actúen sobre 2-superficies S_2 y si los campos no-métricos heredan la misma simetría.*

Resulta que [123] la presencia de un grupo G_3 en V_2 implica la existencia de un grupo de isotropía I_1 . En este caso las órbitas S_2 tendrán curvatura positiva ($K > 0$)¹ para el caso de simetría esférica y constante de curvatura nula ($K = 0$) para simetría planar. Para simetría esférica los espacios S_2 son homeomorfos a la 2-esfera unitaria S^2 , mientras que en simetría planar son homeomorfos a \mathbb{R}^2 . Las formas más comunes de la métrica para estas simetrías son:

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dz^2 + Y^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.55)$$

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dz^2 + Y^2(dx^2 + dy^2), \quad (2.56)$$

donde Ec. (2.55) corresponde a simetría esférica y Ec. (2.56).

2.3.1 Modelos Inhomogéneos esféricamente simétricos

Uno de los casos más directos en buscar una solución a las ecuaciones de campo es dejar a un lado la suposición de homogeneidad y mantenerse en un espacio-tiempo esféricamente simétrico. A partir de ello podemos obtener la métrica Lemaître-Tolman-Bondi (LTB). Esta métrica puede obtenerse de diversas maneras [57], seguimos una de las más directas.

Considerando coordenadas comóviles, el elemento de línea de un espacio-tiempo esféricamente simétrico [101] toma la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + B^2 dr^2 + Y^2 d\Omega^2, \quad (2.57)$$

¹Es posible hacer un reescalamiento de tal forma que K sea unitario.

con $N = N(t, r)$, $B = B(t, r)$, e $Y = Y(t, r)$. Considerando polvo y una constante cosmológica

$$T_{ab} = (\rho + \Lambda)u_a u_b, \quad (2.58)$$

con u^a es el vector de 4-velocidad, se tiene de las ecuaciones de campo

$$\kappa(\rho + \Lambda) = \frac{2BN^2Y_{r,r} - 2N^2Y_rB_r - 2B^2Y_tB_t}{B^3N^2Y} + \frac{N^2Y_r^2 - B^2Y_t^2 - N^2B^2}{B^2N^2Y^2} \quad (2.59)$$

$$0 = 2NBY_{r,t} - 2NB_tY_r - 2BN_rY_t, \quad (2.60)$$

$$-\kappa\Lambda = \frac{2N^2N_rY_r - 2B^2NY_{t,t} + 2B^2N_tY_t}{B^2N^3Y} + \frac{N^2Y_r^2 - B^2Y_t^2 - N^2B^2}{B^2N^2Y^2} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} -\kappa\Lambda &= \frac{BN_{r,r} - N_rB_r}{B^3N} - \frac{N_tB_t - NB_{t,t}}{BN^3} \\ &+ \frac{BN^3Y_{r,r} - N^3Y_rB_r + BN^2N_rY_r - B^3N\left(Y_{t,t} - \frac{Y_tB_t}{B}\right) + B^3N_tY_t}{B^3N^3Y}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Siendo que el fluido se mueve de manera geodésica, su aceleración es nula y por tanto se puede reescalar la coordenada temporal,

$$u^b \nabla_b u^a = \frac{N'}{NB^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad N' = 0. \quad (2.63)$$

En lo sucesivo consideramos $N = 1$. Por tanto, Ec. (2.60) se puede reescribir como

$$\left(\frac{Y_r}{B}\right)_{,t} = 0. \quad (2.64)$$

Existen dos casos para esta ecuación, aquellos con $Y_r = 0$, los son modelos tipo Kantowski-Sachs [58]. En el caso $Y_r \neq 0$ obtenemos

$$B = \frac{Y_r}{1 + F}, \quad (2.65)$$

con $F = F(r)$. Nótese la similitud con la métrica Ec. (2.44). Los modelos LTB están descritos por la métrica, en coordenadas comóviles:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{Y_r}{1 + F} dr^2 + Y^2 d\Omega^2. \quad (2.66)$$

Es común que se escriba $F = -K(r)$. En los modelos LTB existe un fondo FLRW natural, definido en el espacio de parámetros por la elección de las funciones libres [58]

$$Y = ra(\tau), \quad \kappa = kr^2, \quad M = \frac{H_0^2 \Omega_{M0} r^3}{2}, \quad (2.67)$$

donde $a(\tau)$ es el factor de escala en tiempo conforme para espacio-tiempos FLRW, $\Omega_{m0} = \Omega_m(\tau)_{\tau=\tau_0}$ es el parámetro de densidad evaluado al día de hoy y τ_0 es el tiempo actual definido por $a(\tau_0) = 1$. $H_0 = H_{\tau=\tau_0} = \dot{a}(\tau)/a(\tau)_{\tau=\tau_0}$ es el parámetro de Hubble y k es la constante de curvatura de las hipersuperficies espaciales ortogonales a u^a . De esta forma, Ec. (4.21) en el límite FLRW Ec. (2.67) se lee

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2 a^2} = \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{M0}}{a^3} + \frac{\Omega_{k,0}}{a^2}, \quad (2.68)$$

con $\Omega_{k,0}$ la densidad de curvatura espacial.

Estas soluciones LTB son las soluciones exactas más sencillas que proporcionan una descripción tipo polvo [58, 57] cuya métrica también admite soluciones no triviales con presión isotrópica e anisotrópica distinta de cero [131]. Los modelos LTB han tenido diversos usos, como los modelos *Big Void*, que consistían en suponer nuestra ubicación cerca del centro de un gigantesco vacío esférico de 1 Gpc. Por ello, estos modelos sirvieron para intentar explicar la aceleración cósmica a través del efecto de la inhomogeneidad a gran escala [132]. Siendo que estas soluciones pueden concebirse como perturbaciones no lineales exactas de un fondo FLRW¹ [131, 133], las soluciones LTB han sido muy útiles como *modelos de juguete* para estudiar la formación de estructuras

¹Reduciéndose en el régimen lineal a perturbaciones cosmológicas estándar en la norma comóvil isócrona.

[127, 125, 134, 126]. Además, se ha mostrado [135] que es posible tener modelos cerrados en expansión perpetua en soluciones LTB con constante cosmológica.

2.3.2 Modelos de Szekeres

Las soluciones de Szekeres¹ [58] se obtienen a partir de una métrica que en algunas coordenadas, las cuales se asumen comóviles ($u^a = \delta_t^a$), es de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha}dw^2 + e^{2\beta}(dx^2 + dy^2), \quad (2.69)$$

con α y β funciones de las cuatro coordenadas t, x^i . Dicha forma se establece para buscar una métrica no idealizada que generalice a las soluciones LTB y Eardley-Liang-Sachs, conocidas al momento de encontrar esta familia de soluciones [136, 137].

Este tipo de métricas se separan en dos clases: Modelos de clase I $\beta_{,w} \neq 0$, denotados como Szekeres-I, y modelos de clase II, en lo sucesivo Szekeres-II, $\beta_{,w} = 0$. Ambas clases de soluciones no admiten (en general) grupos de isometría, cada clase se subdivide en tres subclases: cuasi-esférica, cuasi-plana y cuasi-hiperbólica, en función de la solución simétrica límite que tengan la cual admite un grupo de tres vectores de Killing actuando sobre órbitas bidimensionales (simetría esférica, plana y pseudo-esférica). En ambas clases las 2-superficies dadas por t y w constante tienen curvatura constante que puede ser cero ($k = 0$, $f = 1$), positiva ($k = 1$) o negativa ($k = -1$) respectivamente.

¹También conocidas como la familia de soluciones Szekeres-Szafron.

Los modelos cuasi-esféricos de Szekeres de clase I (Szekeres-I) con una fuente de polvo (con Λ nulo y no nulo) han sido considerados como los más adecuados para aplicaciones cosmológicas y, por lo tanto, han sido ampliamente utilizados como modelos de estructuras cósmicas que generalizan los populares modelos de Lemaître–Tolman–Bondi (LTB) (un sub-caso particular esféricamente simétrico). Los modelos de Szekeres con una fuente de polvo (clase I y II) introducen en todos los escalares covariantes un grado de libertad extra en forma de dipolo (véase la discusión detallada en [57, 58]). En el caso de los modelos cuasi-esféricos de clase I este dipolo se superpone al monopolo de simetría esférica [57], permitiendo así la construcción de modelos de más de una estructura en un fondo FLRW, típicamente una sobredensidad o “void” central, rodeado por estructuras alargadas parecidas a paredes o “pancakes” esferoidales (ya sean sobredensidades o vacíos) marcados por la orientación del dipolo, todo lo cual proporciona una aproximación mucho mejor a las estructuras cósmicas [59]. En particular, es posible elaborar redes de estructuras colocadas en lugares elegidos como parte del establecimiento de condiciones iniciales [133] que pueden proporcionar una buena descripción de grano grueso de nuestra cosmografía a escalas de 100 Mpc.

Mientras que un fondo FLRW surge de manera natural en Szekeres-I, el límite FLRW de los modelos Szekeres-II es mucho más complejo, siendo un límite homogéneo más natural los modelos Kantowski–Sachs. Así, en contraste con el uso generalizado de los modelos Szekeres-I, los modelos Szekeres-II no han recibido mucha atención en los estudios teóricos de los efectos de la inhomogeneidad o en las aplicaciones cosmológicas. Los artículos conocidos implican su tratamiento como perturbaciones exactas del polvo para calcular el

factor de crecimiento [138, 139, 140], la autoconsistencia de la termodinámica de los fluidos perfectos [141, 142] y, más recientemente, Delgado y Buchert han utilizado los modelos de polvo de Szekeres-II como casos especiales de prueba para probar un formalismo que permita obtener una generalización relativista de la aproximación de Zeldovich en términos de promediación del espacio-tiempo [143].

Modelos Szekeres-II

La métrica que caracteriza a las soluciones Szekeres-II es

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \left[X^2 dw^2 + \frac{dx^2 + dy^2}{f^2} \right], \quad f = 1 + \frac{k[x^2 + y^2]}{4}, \quad (2.70)$$

donde $X = X(t, x^i)$ con $x^i = w, x, y$. Esta métrica identifica una tétrada ortogonal canónica $e^a_{(\alpha)}$ tal que $g_{ab}e^a_{(\alpha)}e^b_{(\beta)} = \eta_{(\alpha)(\beta)}$:

$$e^a_{(0)} = \delta_0^a, \quad e^a_{(w)} = \frac{1}{SX}\delta_w^a, \quad e^a_{(x)} = \frac{f}{S}\delta_x^a, \quad e^a_{(y)} = \frac{f}{S}\delta_y^a, \quad (2.71)$$

y éstas soluciones son compatibles con un tensor de energía momento general en un marco comóvil ($u^a = e^a_{(0)} = \delta_0^a$):

$$T^{ab} = (\rho + \Lambda)u^a u^b + (p - \Lambda)h^{ab} + \pi^{ab} + 2q^{(a}u^{b)}. \quad (2.72)$$

donde la densidad de energía, las presiones isotrópicas y anisotrópicas, y los flujos de energía, ρ , p , $\pi^{ab} = [h_c^{(a}h_d^{b)} - \frac{1}{3}h^{ab}h_{cd}]T^{cd}$ y $q^a = u^b T_b^a$ (con $h^{ab} = u^a u^b + g^{ab}$), dependen en general de las cuatro coordenadas t, x^i . Las ecuaciones

de campo no nulas $G^{ab} = \kappa T^{ab}$ con $\kappa = 8\pi G/c^4$ son

$$\kappa\rho = \kappa\bar{\rho} - \frac{f^2(X_{,yy} + X_{,xx})}{S^2X} + \frac{2\dot{S}\dot{X}}{SX}, \quad \kappa\bar{\rho} = \frac{3\dot{S}^2}{S^2} + \frac{3k}{S^2} - 3\kappa\Lambda, \quad (2.73)$$

$$\kappa p = \kappa\bar{p} + \frac{1}{3} \frac{f^2(X_{,yy} + X_{,xx})}{S^2X} - \frac{2}{3} \frac{S\ddot{X} + 3\dot{S}\dot{X}}{SX}, \quad \kappa\bar{p} = -\frac{2\ddot{S}}{S} - \frac{\dot{S}^2}{S^2} - \frac{k}{3S^2} + \Lambda, \quad (2.74)$$

$$\kappa\pi^{xx} = \frac{1}{3} \frac{f^4(2X_{,yy} - X_{,xx})}{S^4X} - \frac{1}{2} \frac{f^3k(xX_{,x} - yX_{,y})}{S^4X} - \frac{1}{3} \frac{f^2(S^2\ddot{X} + 3S\dot{S}\dot{X} - kX)}{S^4X}, \quad (2.75)$$

$$\kappa\pi^{yy} = -\frac{1}{3} \frac{f^4(X_{,yy} - 2X_{,xx})}{S^4X} + \frac{1}{2} \frac{f^3k(xX_{,x} - yX_{,y})}{S^4X} - \frac{1}{3} \frac{f^2(S^2\ddot{X} + 3S\dot{S}\dot{X} - kX)}{S^4X}, \quad (2.76)$$

$$\kappa\pi^{ww} = -\frac{1}{3} \frac{f^2(X_{,yy} + X_{,xx})}{S^4X^3} - \frac{2}{3} \frac{k}{S^4X^2} + \frac{2}{3} \frac{S\ddot{X} + 3\dot{S}\dot{X}}{S^3X^3}, \quad (2.77)$$

$$\kappa\pi^{xy} = -\frac{f^3(fX)_{,xy}}{S^4X}, \quad (2.78)$$

$$\kappa q^x = \frac{f^2\dot{X}_{,x}}{S^2X}, \quad (2.79)$$

$$\kappa q^y = \frac{f^2\dot{X}_{,y}}{S^2X}. \quad (2.80)$$

donde $\dot{A} = u^a A_{,a}$ para toda función A . En un marco comóvil los parámetros cinemáticos no nulos son el escalar de expansión $\Theta = \bar{\nabla}_a u^a$ y el tensor de shear $\sigma_{ab} = \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} - (\Theta/3)h_{ab}$ dados por

$$\Theta = \frac{\dot{X}}{X} + \frac{3\dot{S}}{S}, \quad \sigma_b^a = \sigma \xi_b^a, \quad \sigma = -\frac{\dot{X}}{3X}, \quad (2.81)$$

donde $\xi_b^a = h_b^a - 3\delta_w^a \delta_b^w = \text{diag}[0, -2, 1, 1]$ y los operadores de derivada espaciales son $\tilde{\nabla}_a u^a = h_a^b u^a_{,b}$ y $\tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} = h_{(a}^c h_{b)}^d u_{c,d}$.

Para poder cuantificar la evolución anisotrópica de observadores comóviles calculamos la expresión del tensor de expansión $\Theta_{ab} = \bar{\nabla}_a u_b$ y sus tres eigenvalores $\Theta_b^a = \lambda_{(i)} \delta_b^a$:

$$\lambda_{(1)} = \Theta_z^z = \frac{\dot{S}}{S} + \frac{\dot{X}}{X}, \quad \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)} = \Theta_x^x = \Theta_y^y = \frac{\dot{S}}{S}, \quad (2.82)$$

de tal forma que la anisotropía cinemática se puede identificar del hecho que la expansión local para observadores fundamentales a lo largo de las direcciones principales $\lambda_{(2)} = \lambda_{(3)}$, sobre $e_{(x)}^a$ y $e_{(y)}^a$ son distintas de $\lambda_{(1)}$ a lo largo de $e_{(w)}^a$. Otro indicador de la anisotropía proviene de la tasa de cambio local del corrimiento al rojo z sobre un segmento geodésico nulo [24]

$$\frac{dz}{z} = \left[\frac{1}{3}\Theta + \sigma_{ab}k^ak^b \right] d\vartheta, \quad (2.83)$$

donde k^a es un vector nulo parametrizado por el parámetro afín ϑ . Los corrimientos al rojo de observaciones locales estarán distribuidos isotrópicamente solamente si $\sigma_{ab} = 0$ (o $\dot{X} = 0$). Sin embargo, dado que hay grados de libertad adicionales, el reto es restringir la anisotropía inherente de los modelos a las cotas establecidas por las observaciones.

En un marco comóvil las soluciones Szekeres–I son tipo Petrov D con tensor magnético de Weyl idénticamente cero, mientras que las soluciones Szekeres tipo-II con $q_a \neq 0$ son tipo Petrov I, mientras que aquellas solutions con $q_a = 0$ son tipo Petrov D. Por tanto, los modelos de clase II en toda generalidad se convierten en buenos candidatos para describir una mayor variedad de fuentes. Creemos que estos modelos tienen un buen potencial de aplicación inexplorado en cosmología.

La ecuación de balance de momento $\nabla_b T^{ab} = 0$ está dada por

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + \sigma_{ab}\pi^{ab} + \tilde{\nabla}_a q^a = 0, \quad (2.84)$$

$$h_a^b \dot{q}_b + \frac{4}{3}\Theta q_a + \tilde{\nabla}_b \pi^{ab} + \sigma_{ab}q^b + \tilde{\nabla}_a p = 0, \quad (2.85)$$

mientras que la ecuación de Raychaudhuri y las restricciones que definen el flujo de energía, q_a , y los tensores eléctrico y magnético de Weyl, the electric,

magnetic Weyl tensor E_{ab}, H_{ab} son

$$\dot{\Theta} = -\frac{\Theta^2}{3} - \frac{\kappa}{2}[\rho + 3(p - \Lambda)] - \sigma_{ab}\sigma^{ab}, \quad (2.86)$$

$$\kappa q_a = \frac{2}{3}\tilde{\nabla}_a\Theta + \tilde{\nabla}_b\sigma^{ab}, \quad H_{ab} = \text{curl}\sigma_{ab}, \quad (2.87)$$

$$E_{ab} = \frac{\Theta}{3}\sigma_{ab} - \sigma_{c\langle a}\sigma_{b\rangle}^c - \frac{\kappa}{2}\pi_{ab} - {}^{(3)}\mathcal{R}_{\langle ab\rangle}, \quad (2.88)$$

donde ${}^{(3)}\mathcal{R}_{\langle ab\rangle}$ es el tensor de Ricci espacialmente simétrico y sin traza de las hipersuperficies ortogonales a u^a (t constante), $\dot{q}_b = u^c\nabla_c q_b$ y $\text{curl}\sigma = \eta_{cd\langle a}\tilde{\nabla}^c\sigma_{b\rangle}^d$ con $\eta_{abc} = \eta_{abcd}u^d$ para la forma de volumen de Levi–Civita $\eta_{abcd} = -\sqrt{-g}\epsilon_{abcd}$ con ϵ_{abcd} el tensor unitario totalmente antisimétrico.

La compatibilidad de los modelos de Szekeres–II con un tensor de energía–momento más general abre la posibilidad de describir una mayor variedad de fuentes de materia–energía, como fluidos disipativos y mezclas de fluidos con velocidades peculiares no–comóviles, así como mezclas de fluidos con campos escalares y magnéticos u ondas gravitacionales. Además de la atractiva posibilidad de estos grados de libertad adicionales, mostramos en la Sec. 3.1 que las funciones libres en su subclase cuasi–plana permiten un emparejamiento suave con cualquier modelo espacialmente plano homogéneo e isótropo que pueda ser descrito por la métrica de Robertson–Walker: Los modelos FLRW y también los espacios-tiempo de Sitter, anti-Sitter y Minkowski. Aparte de tener aplicaciones cosmológicas, estas configuraciones pueden servir para sondear y experimentar con formalismos teóricos, como el promediar y el efecto de la “backreaction” de las inhomogeneidades locales en la evolución de observaciones cósmicas [144].

Uso de modelos cosmológicos inhomogéneos

Como mencionamos en el capítulo anterior, los modelos de Szekeres-I han sido utilizados en la literatura [59, 127, 133, 138, 139, 140, 143] y han logrado reproducir estructuras cosmológicas de manera exitosa. Sin embargo, los modelos Szekeres-II han sido poco estudiados, siendo que el modelo que incluye un tensor de energía-momento general conlleva un término de flujo de energía. Típicamente, se asocia a estos flujos con viscosidades y conducción de calor en sistemas térmicos fuera de equilibrio (ver ejemplos en [58]). Sin embargo, este tipo de interpretación no es útil como aplicación potencial en modelos la dinámica de fuentes cosmológicas, ya que la CDM es descrita por un gas no-colisional cuya descripción realista es como polvo y los efectos disipativos en los bariones a escala cósmica son despreciables a tiempos cósmicos

actuales (por lo que también pueden ser descritos como polvo). Sin embargo, una reinterpretación de la solución en términos de velocidades peculiares permite una interpretación física útil para el uso de estos modelos.

3.1 Modelos “pancake”

3.1.1 Un modelo cosmológico Szekeres-II con límite FLRW

Aceptando el Principio Cosmológico cosmológico como válido, es necesario considerar un “límite FLRW” en nuestro modelo, Sec. 2.1. Los modelos Szekeres-II tienen únicamente un límite en el espacio de parámetros eligiendo adecuadamente las funciones libres. Es por ellos que utilizamos las condiciones de empalme Sec. 2.2.2 para poder realizar un espacio-tiempo a partir de soluciones FLRW y Szekeres-II. A continuación seguimos la presentación de [1]. Esta clase nueva de *modelos de juguete* está basada en modelos Szekeres-II pero considerando un tensor de energía-momento completamente general, que admite gradientes de presión no-triviales, estrés anisotrópicos y flujos de energía.

Considerando que t es el tiempo propio común a los observadores fundamentales en los modelos FLRW y Szekeres-II, es interesante considerar de Ecs. (2.4),(2.70), una identificación entre el factor de escala FLRW, la densidad y la presión $a(t)$, $\hat{\rho}$, \hat{p} en Ec. (2.5) vs. la función métrica de Szekeres-

II $S(t)$ y la parte puramente temporal de la densidad y la presión $\bar{\rho}$, \bar{p} en las ecuaciones de campo Ecs. (4.76)–(2.74).

Las condiciones de Darmois para un empalme suave entre los dos espacios–tiempos $(\mathcal{M}_{(+)}, g_{(+)})$ y $(\mathcal{M}_{(-)}, g_{(-)})$, como un Szekeres-II y FLRW descritos por Ecs. (2.70), (2.4), a lo largo de una hipersuperficie de empalme $\Sigma(x^\alpha) = 0$, son la continuidad de la primera y segunda formas fundamentales en Σ [121, 145] Sec. 2.2.2.

Dada la identificación de coordenadas (t, x^i) y tétradas ortonormales en Ecs. (2.4), (2.70), elegimos como $\Sigma = 0$ la ecuación $w - w_0 = 0$ donde w_0 es una constante arbitraria. Tenemos entonces $n_a = e_a^{(w)} = S X \delta_a^w$ y la métrica inducida γ_{ab} está parametrizada por las coordenadas $x^\alpha = [t, w_0, x, y]$ con w_0 un valor fijo arbitrario de w , eligiendo (+) y (−) como Szekeres-II y FLRW tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} = e_{(\alpha)}^a e_{(\beta)}^b g_{ab}^{(\pm)}, \quad \gamma_{tt}^{(+)} = \gamma_{tt}^{(-)} = -1, \quad \gamma_{xx}^{(+)} = \gamma_{yy}^{(+)} = \frac{S^2}{f^2}, \\ \gamma_{xx}^{(-)} = \gamma_{yy}^{(-)} = \frac{a^2}{\hat{f}^2(w_0)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Las componentes de la segunda forma fundamental (curvatura extrínseca de Σ) son

$$K_{wt}^{(+)} = (X\dot{S} + \dot{X}S)^{(+)}, \quad K_{wx}^{(+)} = (SX_{,x})^{(+)}, \quad K_{wy}^{(+)} = (SX_{,y})^{(+)}, \quad (3.2)$$

$$K_{wt}^{(-)} = \dot{a}. \quad (3.3)$$

La combinación de Ec. (3.1) y Ecs. (3.2)–(3.3) implica que todas las derivadas de X a lo largo de la dirección de los vectores tangentes a Σ deben anularse

en $w = w_0$:

$$X^{(+)} = 1, \quad (X_{,x})^{(+)} = (X_{,y})^{(+)} = (\dot{X})^{(+)} = (\ddot{X})^{(+)} = 0, \quad (3.4)$$

$$S(t) = a(t), \quad k = \hat{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \hat{f} = 1, \quad (3.5)$$

de tal forma que el empalme en Σ dado por $w = w_0$ solamente es posible entre un modelo Szekeres-II cuasi-plano y un modelo FLRW espacialmente plano. Estas condiciones de empalme también requieren [121] la continuidad de $T^a_b n^b = T^z_z n^z / (SX)$:

$$\kappa(\bar{p} - \Lambda) = -\frac{2\ddot{S}}{S} - \frac{\dot{S}^2}{S^2} = -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \kappa(\hat{p} - \Lambda) \quad (3.6)$$

de modo que $S(t)$ debe satisfacer las mismas ecuaciones de evolución que el factor de escala $a(t)$ para un modelo FLRW espacialmente plano ($\hat{k} = 0$) Ec. (2.5), que identifica plenamente la densidad y la presión FLRW $\hat{\rho}, \hat{p}$ con las partes puramente dependientes del tiempo, $\bar{\rho}, \bar{p}$, de la densidad y la presión del Szekeres-II cuasi-plano ($k = 0$) Ecs. (4.76)–(2.74). Obsérvese que Ecs. (3.1)–(3.5) se cumplen en $w = w_0$. Las condiciones Ecs. (3.1)–(3.5) también implican continuidad de ρ, p, π^{ab}, q_a en Σ (el lado derecho de Ecs. (2.75)–(2.80) se anulan en Σ).

En función de los parámetros libres que dependen de w , el empalme entre los modelos Szekeres-II cuasi-planos y los espacio-tiempos FLRW espacialmente planos que hemos descrito puede realizarse a lo largo de un número arbitrario de hipersuperficies marcadas por la constante w . Los parámetros libres de X en cada región de Szekeres-II tendrían que cumplir Ecs. (3.4) en dos valores fijos de w (o pares de éstos). La configuración “pancake” que resulta es una colección de regiones Szekeres-II que se pegan suavemente a un

espacio–tiempo FLRW dado. Obsérvese que Ecs. (3.3)–(3.5) implica que todas las regiones de Szekeres–II deben coincidir con el mismo modelo FLRW, que actúa como fondo, mientras que las regiones Szekeres–II pueden caracterizarse por cualquier fuente en la que los parámetros libres puedan establecerse para cumplir las condiciones de empalme Ecs. (3.4)–(3.5). Los empalmes de este tipo descritos anteriormente pueden realizarse en un número arbitrario de hipersuperficies, lo que conduce a configuraciones compuestas por una serie de secciones de Szekeres–II (posiblemente diferentes) separadas por regiones del mismo modelo FLRW (o Minkowski o de Sitter o anti de Sitter), proporcionando así un fondo isótropo y homogéneo que no se creía posible para estos modelos. Se trata de una especie de configuraciones de “pancakes” que pueden considerarse como análogos casi planos (no son espacialmente planos) a los modelos de “queso suizo” esféricamente simétricos [24] o a las versiones de universos “lattice” [143, 146, 147]. Este tipo de configuraciones proporcionan modelos de juguete para sondear los efectos de las inhomogeneidades cosmológicas.

3.1.2 Soluciones particulares y ejemplos

Dada una suposición sobre las fuentes, no es posible saber si la función X puede satisfacer Ecs. (3.1)–(3.5) en un $w = w_0$ arbitrario sin tener una solución, analítica o numérica, de las ecuaciones de campo. Sin embargo, se puede obtener más información para un caso particular importante: si $f = 1$ y las componentes π^{xy} de la presión anisotrópica en la ecuación Ec. (2.78) se anulan en todo punto del espacio–tiempo, tenemos $X_{,xy} = 0$ cuya solución

general es

$$X = F(t, w) + \Phi(t, w, x) + \Psi(t, w, y), \quad (3.7)$$

donde F , Φ y Ψ son completamente arbitrarias. Una manera simple de hacer Ec. (3.7) compatible con un empalme con FLRW en $w = w_0$ es asumir que Φ , Ψ son separables de varias formas, por ejemplo:

$$X = F(t, w) + \sum_{j=1}^n N_j(t, w) \phi_A(w, x) + Q_j(t, w) \psi_j(z, y), \quad (3.8)$$

de tal forma que (dada una solución para una fuente específica, satisfacer Ecs. (3.1)–(3.3) puede lograrse (por ejemplo) exigiendo las condiciones de frontera $F(t, w_0) = 1$ y $\phi_j(x, w_0) = \psi_j(y, w_0) = 0$. Insertando Ec. (3.8) en Ecs. (4.76)–(2.80) podemos identificar varios casos particulares de interés físico:

- Cero flujo de energía ($q_a = 0$) con presión anisotrópica no nula ($\pi_{ab} \neq 0$):

$\dot{N}_j(t, w) = \dot{Q}_j(t, w) = 0$ para todo j , que lleva a la forma

$$X = F(t, w) + \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j(w, x) + \bar{\psi}_j(w, y), \quad (3.9)$$

donde $\bar{\phi}_j(w, x) = \phi_j(w, x)N_j(w)$ y $\bar{\psi}_j(w, y) = \psi_j(w, y)Q_j(w)$.

- Cero presión anisotrópica ($\pi_{ab} = 0$) flujo de energía no nulo ($q_a \neq 0$).

Estas soluciones se siguen de Ec. (3.8) con:

$$\dot{N}_j = 0, \quad Q_j = Q_1 = Q(t, w), \quad X = F + A + Q B, \quad (3.10)$$

$$\bar{\phi}_j = A(w, x, y) = \alpha_0(w) + \alpha_1(w)x + \alpha_2(w)y + \alpha_3(w)(x^2 + y^2), \quad (3.11)$$

$$\bar{\psi}_j = B(w, x, y) = \beta_0(w) + \beta_1(w)x + \beta_2(w)y + \beta_3(w)(x^2 + y^2), \quad (3.12)$$

mientras que F y Q deben satisfacer las ecuaciones diferenciales lineales acopladas

$$\ddot{F} + \frac{3\dot{S}}{S}\dot{F} - \frac{2(\beta_3 Q + \alpha_3)}{S^2} = 0, \quad (3.13)$$

$$\ddot{Q} + \frac{3\dot{S}}{S}\dot{Q} = 0 \Rightarrow Q = c_1(w) + c_0(w) \int \frac{dt}{S^3} \quad (3.14)$$

A partir de Ecs. (3.10)–(3.14) se obtiene que $p = \bar{p}(t)$ con $k = 0$ en Ec. (2.74) pero $\rho = \rho(t, x^i)$. El caso particular de polvo ($p = \bar{p}(t) = 0$) es la solución encontrada por Goode [148] (aunque Goode supuso que $c_1 = 0, c_0 = \text{const.}$ y $Q = Q(t)$). Nótese que X tiene la forma de un monopolo con dos dipolos independientes superpuestos, $A(w, x, y)$ y $B(w, x, y)$, volviéndose un solo dipolo $A(w, x, y)$ en el subcaso del fluido perfecto ($q_a = 0$ y por ende $Q = 0$).

- Fluido perfecto: Ecs. (3.10)–(3.13) con $\dot{Q} = 0$, lo que lleva a que Ec. (3.14) sea redundante y $X = F + A$. En general, las soluciones de fluido perfecto están caracterizadas por $\bar{p} = \bar{p}(t) \neq 0$ con $\rho = \rho(t, x^i)$, algunas de estas soluciones tienen una interpretación termodinámica matemáticamente consistente [141, 142]. Las soluciones de polvo examinadas en [138, 139, 140] se siguen fijando $p = \bar{p}(t) = 0$ en Ec. (2.74).

Al ser una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden, es evidente que una solución de Ec. (3.13) tendrá la forma $F = \varphi_+(w)F_+(t, w) + \varphi_-(w)F_-(t, w)$ con $\varphi_{\pm}(w)$ constantes de integración. Por tanto, en todos los casos resumidos anteriormente los parámetros libres que dependen de w pueden fijarse de modo que Ecs. (3.1)–(3.5) se mantengan en un $w = w_0$ arbitrario y $S(t)$ pueda

identificarse con el factor de escala $a(t)$ de un espacio–tiempo FLRW dado.

A partir de estas soluciones se puede discutir el llamado “límite FLRW” de estos modelos. Krasinski en [58] presenta los modelos Szekeres–II con una fuente de fluido perfecto a partir del siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha}dw^2 + e^{2\beta}(dx^2 + dy^2), \quad (3.15)$$

donde $e^\beta = e^\nu S(t)$, $e^\alpha = \lambda(t, w) + S(t)\Sigma(x, y, w)$, y λ una función determinada por una ecuación diferencial. De la forma de las funciones métricas que se han obtenido y de aquellas en [58] es directo que $\lambda(t, w) = S(t)F(t, w)$, mientras que $\Sigma = Ae^\nu$. Por tanto, la condición mencionada en [58] al final de la sección 2.1.1, la forma de estas funciones contiene la subfamilia FLRW, sin embargo ésta se obtiene mediante la elección de funciones F constante. No existe un límite natural FLRW, citando [58]

the FLRW limit results unnaturally in this subfamily: the additional symmetries of the FLRW models appear from nowhere.

Vale la pena mencionar que el límite FLRW es un límite en el espacio de parámetros y no un límite en la variedad o una extensión de la variedad misma.

A partir de estas soluciones podemos examinar múltiples configuraciones entre regiones Szekeres–II y FLRW, estos ejemplos son tomados de [1].

Polvo en Szekeres-II y Λ CDM

Al considerar polvo sin flujo de energía, $p = Q = 0$, en Ecs. (3.10)-(3.12) podemos hacer un empalme con secciones de un modelo Λ CDM. La ecuación de Friedmann correspondiente Ec. (2.5) (con $\hat{k} = 0$) y su ecuación asociada Ec. (3.13) tienen como soluciones

$$S(t) = \lambda_1 \sinh^{2/3}(\lambda_2 \tau), \quad \mathcal{H} \equiv \frac{\dot{H}}{H} = \frac{\dot{S}/S}{\dot{H}_0} = \frac{2\lambda_2 \bar{H}_0}{3} \coth(\lambda_2 \tau), \quad (3.16)$$

$$F(t, w) = \varphi_1(w) + \varphi_2(w) F_1(\tau) + \frac{2\alpha_3(w)}{\lambda_1^2} F_2(\tau), \quad (3.17)$$

$$F_1(\tau) = -\tau - \frac{1}{3\lambda_2} \left[2\coth\left(\frac{3}{2}\lambda_2\tau\right) + \ln\left(\frac{\coth(\frac{3}{2}\lambda_2\tau) - 1}{\coth(\frac{3}{2}\lambda_2\tau) + 1}\right) \right], \quad (3.18)$$

$$F_2(\tau) = \int \frac{\int \sinh^{2/3}(\lambda_2 \tau) d\tau}{\sinh^2(\lambda_2 \tau)} d\tau, \quad (3.19)$$

donde $\tau = \bar{H}_0 t$, $\lambda_1 = (\Omega_0^m / \Omega_0^\Lambda)^{1/3}$ y $\lambda_2 = \sqrt{\Omega_0^\Lambda}$, con \bar{H}_0 el factor de Hubble al día de hoy y $\Omega_0^m = \kappa\rho_0 / (3\bar{H}_0^2)$, $\Omega_0^\Lambda = \kappa\Lambda / (3\bar{H}_0^2)$.

Haciendo múltiples empalmes a lo largo de una familia de hipersuperficies marcadas por n valores distintos, fijos y arbitrarios de $w = w_0^\gamma$ con $\gamma = 1 \dots n$, podemos hacer una configuración de múltiples “pancakes” compuestos por modelos Szekeres-II con polvo y modelos Λ CDM, véase Fig. 3.1. Una posible solución para cumplir las condiciones de empalme Ecs. (3.1)–(3.5) es asumir que

$$S(t) = a(t), \quad \varphi_1(w_0^\gamma) = 1, \quad \varphi_2(w_0^\gamma) = \alpha_3(w_0^\gamma) = 0, \quad (3.20)$$

se cumple para todo w_0^γ . De Ecs. (4.76), (2.81) y (3.11) la densidad normalizada adimensional y el escalar de Hubble para las regiones Szekeres–II regions

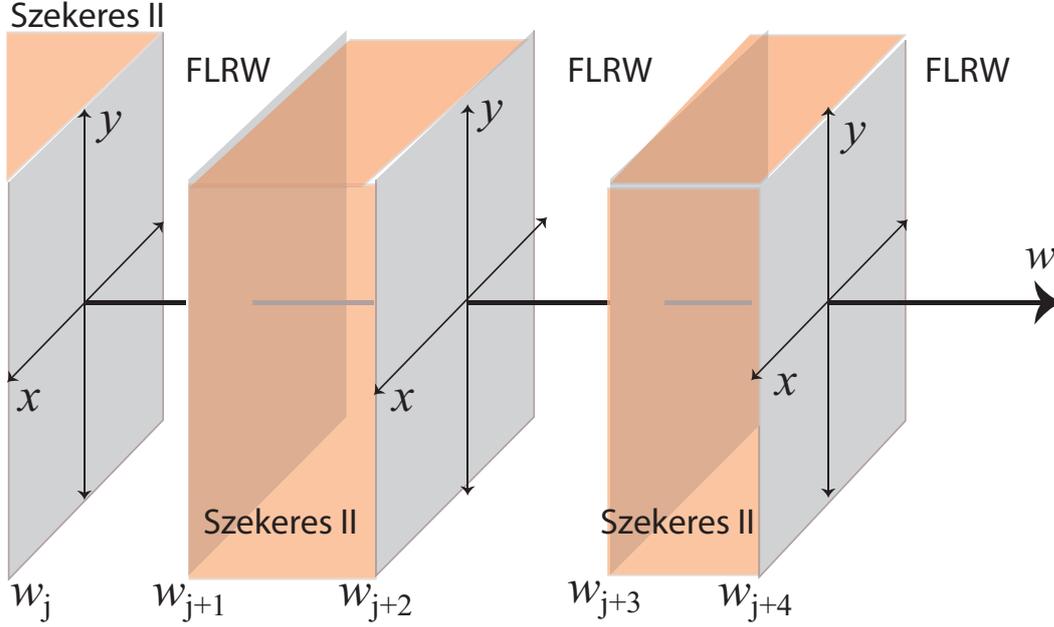


Figura 3.1: Empalmes de diferentes regiones de Szekeres-II con un espacio-tiempo FLRW. La figura muestra una hipersuperficie t constante, con dos regiones de Szekeres II situadas entre valores fijos de la coordenada w en los rangos $w_{j+1} < w < w_{j+2}$, $w_{j+3} < w < w_{j+4}$ y las regiones FLRW que ocupan el rango restante de w . La curva $x = y = 0$ para w arbitrario (el eje w) es una geodésica y un vector de Killing de la 3-métrica.

son

$$\hat{\Omega} \equiv \frac{\kappa\rho}{3\bar{H}_0^2} = \bar{\Omega} + \frac{1}{F+A} \left[\frac{2\bar{H}}{3\bar{H}_0} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{4\alpha_3}{S^2} \right], \quad (3.21)$$

$$\hat{\mathcal{H}} \equiv \frac{\Theta}{3\bar{H}_0} = \bar{\mathcal{H}} + \frac{1}{3(F+A)} \frac{\partial F}{\partial \tau}, \quad \frac{\sigma}{\bar{H}_0} = -\frac{1}{3(F+A)} \frac{\partial F}{\partial \tau}, \quad (3.22)$$

donde A , S y F están dadas por Ec. (3.11) y Ecs. (3.16)–(3.25), mientras que

$$\bar{\Omega} \equiv \frac{\kappa\bar{\rho}}{3\bar{H}_0^2} = \frac{\Omega_0^m}{S^3} + \Omega_0^\Lambda, \quad \bar{\mathcal{H}} \equiv \frac{\dot{a}/a}{\bar{H}_0} = \sqrt{\bar{\Omega}}, \quad (3.23)$$

son la densidad adimensional y el escalar de Hubble de las regiones Λ CDM.

Polvo en un fondo de Sitter

Procediendo como en la sección anterior, mediante $\hat{\rho} = k = 0$ en Ec. (4.76) y como el empalme requiere $S(t) = a(t)$ tenemos $\bar{\rho} = \bar{k} = 0$ en Ec. (2.5). Las correspondientes funciones S y F y parámetros de las regiones de Sitter son

$$S(\tau) = S_0 \exp(\lambda_2 \tau), \quad \bar{\mathcal{H}} = \lambda_2, \quad \bar{\Omega} = \lambda_2^2 = \Omega_0^\Lambda, \quad (3.24)$$

$$F = \varphi_1(w) - \frac{\varphi_2(w)}{3\lambda_2} \exp(-3\lambda_2 \tau) - \frac{2\alpha_3(w)}{\lambda_2^2} \exp(-2\lambda_2 \tau), \quad (3.25)$$

con \bar{H} , τ y λ_2 como se definieron previamente y $S_0 = S(\tau_0)$. La densidad de energía adimensional está dada por

$$\hat{\Omega} = \Omega_0^\Lambda \left[1 + \frac{2(4S_0^2 - 6)\alpha_3 \exp(-2\sqrt{\Omega_0^\Lambda} \tau) + S_0^2 \Omega_0^\Lambda \varphi_2 \exp(-3\sqrt{\Omega_0^\Lambda} \tau)}{S_0^2 [F(\tau, w) + A(w, x, y)]} \right], \quad (3.26)$$

con F y A dadas por Ec. (3.25) y Ec. (3.11), y se ha sustituido $\lambda_2^2 = \Omega_0^\Lambda$. A manera de analizar propiedades de este modelo, fijamos los parámetros libres $S_0 = \varphi_1 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \varphi_2 = 0$, de lo que se obtiene

$$\hat{\Omega} = \Omega_0^\Lambda \frac{(1 + \alpha_0 + \alpha_3 r^2) \Omega_0^\Lambda e^{2\sqrt{\Omega_0^\Lambda} \tau} - \frac{10}{3} \alpha_3}{(1 + \alpha_0 + \alpha_3 r^2) \Omega_0^\Lambda e^{2\sqrt{\Omega_0^\Lambda} \tau} - 2\alpha_3}, \quad (3.27)$$

donde Ω_0^Λ (el cual se puede elegir de forma que sea el mismo valor que en el de un modelo Λ CDM), $r^2 = x^2 + y^2$ (siendo que existe una simetría axial con $r = 0$ el eje de simetría, usamos coordenadas polares) y se eligen las funciones $\alpha_0(w)$, $\alpha_3(w)$ de forma que se cumplan las condiciones de empalme con el espacio-tiempo de de Sitter (ver más adelante). Los límites asintóticos de Ec. (3.27) son

$$\hat{\Omega} \rightarrow \Omega_0^\Lambda \quad \tau \rightarrow \infty \text{ y } r \rightarrow \infty, \quad \hat{\Omega} \rightarrow \frac{5}{3} \Omega_0^\Lambda \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (3.28)$$

esto implica que existen dos ramas con densidad de polvo positiva separadas por una singularidad y una región con densidad negativa en la región de Szekeres–II. La singularidad de curvatura está determinada por un cero en el denominador de Ec. (3.27). Sin embargo, el cero del numerador está ubicado en el futuro de la singularidad como se puede observar en la Fig. 3.2. Como resultado, el numerador es negativo para τ poco después de la singularidad, designando una región cercana a ella con densidad negativa donde se produce $\hat{\Omega} \rightarrow -\infty$. A medida que τ aumenta, $\hat{\Omega}$ se vuelve positivo y finalmente alcanza el límite asintótico representado en Ec. (3.28) (véase Fig. 3.2b). A medida que se acerca la singularidad y el límite asintótico en el pasado infinito se representa en Ec. (3.28), $\hat{\Omega}$ es positivo en el pasado de la singularidad y aumenta hasta $\hat{\Omega} \rightarrow \infty$.

A medida que w se acerca a la interfaz de empalme con de Sitter (que no tiene singularidad), se puede ver en Fig. 3.2a cómo el lugar geométrico de la singularidad se curva hacia el pasado infinito.

Así como con Szekeres–II y Λ CDM, se puede crear una configuración múltiple de “pancakes” de n empalmes suaves entre polvo de Szekeres–II y de Sitter a lo largo de $w = w_0^\gamma$ arbitrarios con $\gamma = 1\dots n$. La densidad de polvo es Ec. (3.27), el escalar de expansión es Ec. (3.22) con S, F dados por Ecs. (3.24)–(3.25), A dado por Ec. (3.11) y $\Omega_0^m = 0$ y $\Omega_0^\Lambda = \lambda_2^2$. Como la derivada \dot{F} no tiene efecto sobre las funciones libres $\alpha_3(w), \varphi_1(w), \varphi_2(w)$, es obvio que (3.20) son suficientes para cumplir Ecs. (3.1)–(3.5) en todo w_0^γ .

Es importante recalcar que la conexión entre el modelo Szekeres–II y un fondo Λ CDM que estamos considerando está basado en realizar empal-

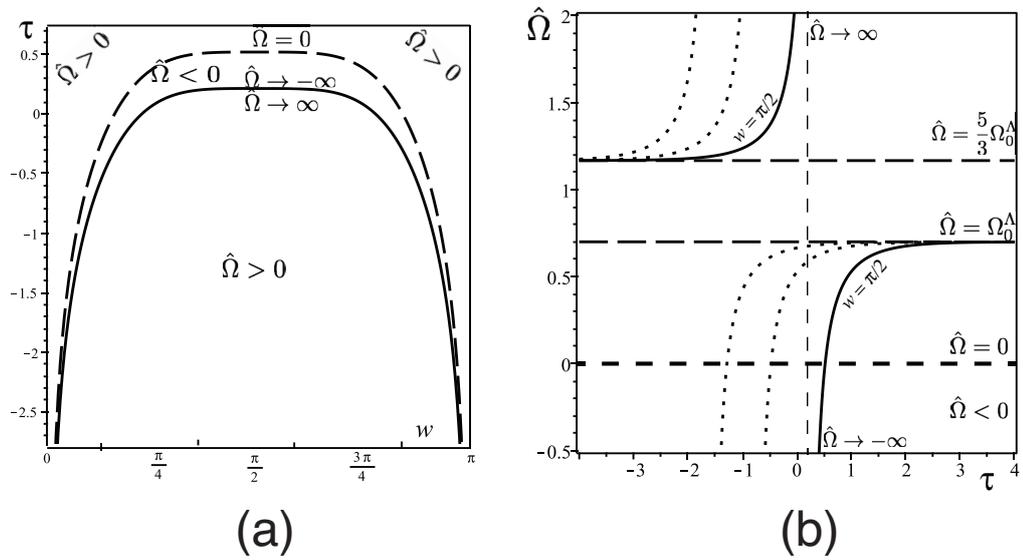


Figura 3.2: Densidad normalizada $\hat{\Omega}$ para polvo empalmado con de Sitter. El panel (a) muestra $\hat{\Omega}$ a lo largo del eje $r = 0$ para el plano $[w, \tau]$. Una singularidad de curvatura y una región con $\hat{\Omega} < 0$ separan las dos zonas con $\hat{\Omega} > 0$. El panel (b) muestra la evolución de $\hat{\Omega}$ en el tiempo para $r = 0$ y varios valores fijos de w (la curva gruesa representa $w = \pi/2$). Obsérvese cómo los observadores comóviles alcanzan $\hat{\Omega} \pm \rightarrow \infty$. Las gráficas se hicieron utilizando las funciones libres $\alpha_3 = \sin^2 w$ y $\alpha_0 = \sin^4 w$.

mes suaves entre regiones Szekeres-II regions con métrica Ec. (3.30) y regiones Λ CDM cuya métrica es Ec. (2.4) como se ha discutido en Sec. 3.1 [1] e ilustrado por Fig. 3.3, con los parámetros de las regiones Szekeres-II restringidos únicamente por las condiciones de empalme Ecs. (3.4)-(3.5). Este es un enfoque completamente distinto a tener un límite FLRW por una sucesión de modelos Szekeres-II cuyos parámetros tengan como límite un espacio-tiempo FLRW para la extensión completa de la variedad Sec. 3.1.

3.2 Secciones Szekeres-II con flujo de energía como campo de velocidades peculiares no comóviles

Usando estas configuraciones "pancakes" es posible crear regiones Szekeres-II y FLRW suavemente empalmadas con un fluido no perfecto. A continuación seguimos de cerca el trabajo que efectuamos en [2].

Consideramos como fuente de las regiones Szekeres-II Ec. (2.70), el caso particular de Ec. (2.6) con $p = \pi_{ab} = 0$ que generaliza a $\Lambda > 0$ la solución exacta encontrada por Goode [149]

$$T_{ab} = (\rho + \Lambda)u_a u_b - \Lambda h_{ab} + 2q_{(a} u_{b)}, \quad (3.29)$$

Para poder hacer el empalme, consideramos en lo sucesivo el subcaso cuasiplano $k = 0$ de Ec. (2.70)

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)[X^2 dw^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2], \quad (3.30)$$

donde efectuamos un cambio de coordenadas y r, ϕ son coordenadas cilíndricas definidas por $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$. En estas coordenadas, la densidad de

energía ρ y el vector de flujo de energía $q_a = q_r \delta_a^r + q_\phi \delta_a^\phi$ están dados por

$$\kappa(\rho + \Lambda) = \frac{3\dot{S}^2}{S^2} - \frac{X_{,rr} + rX_{,r} - r^2 X_{,\phi\phi}}{r^2 S^2 X} + \frac{2\dot{S}\dot{X}}{SX}, \quad (3.31)$$

$$\kappa q_r = \frac{\dot{X}_{,r}}{S^2 X}, \quad q_\phi = \frac{\dot{X}_{,\phi}}{r^2 S^2 X}, \quad (3.32)$$

mientras que las funciones métricas X, Q, AB satisfacen

$$X = A(r, \phi, w) + B(r, \phi, w)Q(t, w) + F(t, w), \quad (3.33)$$

$$Q = c_1(w) + c_0(w) \int \frac{dt}{S^3}, \quad (3.34)$$

$$A = \alpha_3(w)r^2 + \alpha_2(w)r \cos \phi + \alpha_1(w)r \sin \phi + \alpha_0(w), \quad (3.35)$$

$$B = \beta_3(w)r^2 + \beta_2(w)r \cos \phi + \beta_1(w)r \sin \phi + \beta_0(w), \quad (3.36)$$

y las funciones $S(t)$ y $F(t, w)$ cumplen Ecs. (3.13)-(3.14). Nótese que es la misma forma que en Ecs.(3.10)-(3.12). La principal ventaja de usar coordenadas cilíndricas es tratar con una coordenada acotada $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y que marcan a la clase de observadores privilegiados de un modo sencillo a lo largo de la curva $r = 0$ (t, w constante) parametrizada por w (o $x = y = 0$), que es una geodésica y una curva integral de un vector de Killing de los marcos en reposo. La simetría axial se sigue de fijar $\alpha_2 = \alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ en Ecs. (3.35)–(3.36), que hace a X independiente de ϕ .

3.2.1 Materia oscura no comóvil

Dado que una fuente de “polvo conductor de calor” térmicamente disipativo no es apropiada para un modelo cosmológico de tiempo tardío [118],

proponemos una interpretación totalmente diferente para Ec. (2.6) como materia oscura fría (CDM) sin movimiento en la que q^a ya no es un vector conductor de calor, sino un flujo de energía proporcional a la velocidad peculiar de una fuente de polvo con constante cosmológica $\hat{T}^{ab} = (\hat{\rho} + \Lambda) \hat{u}^a \hat{u}^b - \Lambda h_{ab}$ donde la 4-velocidad \hat{u}^a está relacionada con la 4-velocidad sin movimiento $u^a = e_{(0)}^a$ al “boost” generalizado Ec. (2.7), donde v^a será la velocidad peculiar de la CDM asociada con \hat{u}^a con respecto al marco del CMB de un fondo Λ CDM asociado con u^a . De Ecs. (2.8)–(2.13) en Sec. 2.2.1, el tensor de energía momento para este polvo no comóvil referido a u^a toma la forma Ec. (2.6) con

$$\rho = \gamma^2 \hat{\rho} + \Lambda, \quad p = -\Lambda + \frac{1}{3} v^a v_a \gamma^2 \hat{\rho}, \quad (3.37)$$

$$q^a = \gamma^2 \hat{\rho} v^a, \quad \pi^{ab} = \gamma^2 \rho v^{(a} v^{b)}, \quad (3.38)$$

donde ρ , q^a son lineales y p , π^{ab} son cuadráticos en v^a . Siendo que las velocidades peculiares inferidas de las estructuras a gran escala con respecto al marco del CMB son claramente no relativistas [150, 151, 152], podemos desprestigiar todos los términos cuadráticos y de mayor orden en v^a , de tal forma que $\gamma \sim 1 + O(v^2)$, $p \sim O(v^2)$ y $\pi_{ab} \sim O(v^2)$, lo que lleva a la aproximación de primer orden (en v^a) del tensor de energía–momento

$$T^{ab} = (\rho + \Lambda) u^a u^b - \Lambda h^{ab} + 2\rho v^{(a} u^{b)}, \quad (3.39)$$

que podemos identificar con Ec. (3.29) mediante $q^a \approx \hat{\rho} v^a$ y $\rho \approx \hat{\rho}$ (dado que $\gamma \approx 1$). Este tensor de energía–momento en un marco comóvil puede pensarse como una aproximación a un tensor realista dado por

$$\begin{aligned} T^{ab} &= (\rho_{\text{cmb}} + \rho + \Lambda) u^a u^b + (p_{\text{cmb}} - \Lambda) h^{ab} + 2\rho v^{(a} u^{b)}, \\ p_{\text{cmb}} &= \frac{\rho_{\text{cmb}}}{3}, \quad \rho = \rho_{\text{cdm}} + \rho_{\text{b}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde la radiación comóvil (CMB) y las densidades bariónicas no comóviles: ρ_{cmb} y ρ_b pueden despreciarse en comparación con la densidad de CDM no comóvil ρ y Λ (*i.e.* $\rho_{\text{cmb}} + \rho \approx \rho_{\text{CDM}}$). Esta interpretación del tensor de energía-momento proporciona un fuerte vínculo físico y empírico con los modelos cosmológicos.

Para complementar la comprensión del flujo de energía como CDM no comóvil, resulta útil el escalar de Hubble para la 4-velocidad no comóvil $\hat{\Theta} = \hat{h}_b^a \hat{u}^b{}_{;a}$ con \hat{u}^a definido por Ec. (2.7). La siguiente relación [49] se obtiene en el régimen lineal de velocidades peculiares $v_a v^a / c^2 \ll 1$.

$$\hat{\Theta} = \Theta + \vartheta, \quad \vartheta = \hat{h}_a^b v^a{}_{;b}, \quad (3.41)$$

donde $\hat{h}_{ab} = g_{ab} + \hat{u}_a \hat{u}_b \approx h_{ab}$ y $v^a = q^a / \rho$ (a orden lineal).

3.2.2 Variables dinámicas

Para tratar con variables adimensionales, normalizamos las variables dinámicas con respecto a la densidad crítica actual $8\pi G / (3H_0^2 c^4)$, donde H_0 es la constante de Hubble actual. Como antes Sec. 3.1 la densidad de energía puede expresarse como la suma de una densidad Λ CDM puramente dependiente del tiempo (una solución de Ec. (3.14)) y un término dependiente de todas las coordenadas que puede concebirse como una fluctuación exacta sobre

este fondo homogéneo (véase la discusión detallada en Sec. 3.2.6).

$$\Omega^\rho \equiv \frac{8\pi\rho}{3H_0^2} = \bar{\Omega}^\rho + \delta^\Omega, \quad (3.42)$$

$$\bar{\Omega}^\rho = \frac{\Omega_0^m}{S^3} + \Omega_0^\Lambda, \quad \Omega_0^\Lambda = \frac{8\pi\Lambda}{3H_0^2}, \quad (3.43)$$

$$\delta^\Omega = \frac{8\pi [X_{,\phi\phi} - rX_{,r} - r^2X_{,rr}]}{3H_0^2 r^2 S^2 X} - \frac{2S_{,\tau}X_{,\tau}}{3SX}, \quad (3.44)$$

donde la hat representa valores asociados al fondo homogéneo FLRW, y S es la solución analítica de 3.14

$$S(\tau) = \left(\frac{\Omega_0^m}{\Omega_0^\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_0^\Lambda} \tau \right), \quad (3.45)$$

con $\tau = H_0 t$ el tiempo adimensional y Ω_0^m el factor Omega asociado con la CDM (despreciando la contribución bariónica). Considerando primer orden en v_a/c , el campo de velocidades peculiares $q_a = \rho v_a$ se obtiene de las ecuaciones de campo, con $q_a = q_r \delta_a^r + q_\phi \delta_a^\phi$ y $q_w = 0$:

$$\Omega^{qr} \equiv \frac{8\pi q_r}{3H_0^2} = \frac{X_{r,\tau}}{3H_0^2 S^2 X} \Rightarrow v_r = \frac{\Omega^{qr}}{\Omega^\rho} \quad (3.46)$$

$$\Omega^{q\phi} \equiv \frac{8\pi q_\phi}{3H_0^2} = \frac{X_{\phi,\tau}}{3H_0^2 r^2 S^2 X} \Rightarrow v_\phi = \frac{r\Omega^{q\phi}}{\Omega^\rho}. \quad (3.47)$$

Para investigar la inhomogeneidad y anisotropía de los modelos Szekeres–II, analizamos los contrastes de la densidad normalizada Ω_ρ y el escalar de Hubble con respecto a sus valores Λ CDM,

$$\Delta^{\Omega_\rho} = \frac{\Omega^\rho(\tau, r, w, \phi) - \bar{\Omega}^\rho(\tau)}{\bar{\Omega}^\rho(\tau)} = \frac{\delta^\Omega}{\bar{\Omega}^\rho(\tau)}, \quad (3.48)$$

$$\Delta^{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}(\tau, r, w, \phi) - \bar{\mathcal{H}}(\tau)}{\bar{\mathcal{H}}(\tau)} = \frac{\delta^{\mathcal{H}}}{\bar{\mathcal{H}}(\tau)}, \quad (3.49)$$

donde (de Ec. (2.81))

$$\mathcal{H} = \frac{\Theta}{3H_0}, \quad \bar{\mathcal{H}} = \frac{S_{,\tau}}{S}, \quad \delta^{\mathcal{H}} = \frac{X_{,\tau}}{3X}, \quad (3.50)$$

Cabe señalar que las variables δ^Ω y $\delta^{\mathcal{H}}$ son fluctuaciones covariantes (véase Sec. 3.2.6) relacionadas a los tensores eléctrico de Weyl y de “shear” (E_{ab} y σ_{ab}).

$$\delta^\Omega = \bar{\Omega}^\rho \Delta_{\Omega\rho} = -\frac{\xi^{ab} E_{ab}}{3H_0^2}, \quad \delta^{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}} \Delta^{\mathcal{H}} = -\frac{\xi^{ab} \sigma_{ab}}{6H_0}, \quad (3.51)$$

donde $\xi^{ab} = e_{(w)}^a e_{(w)}^b - 3h^{ab}$. Por otro lado, las velocidades peculiares están relacionadas al tensor magnético de Weyl H^{ab}

$$\eta_{abc} v^c = \frac{2H_{ab}}{3\Omega_\rho H_0^2}, \quad (3.52)$$

donde $\eta_{abc} = -\sqrt{-g}\varepsilon_{abcd}u^d$ es la forma de volumen completamente antisimétrica de Levi-Civita. Las variables δ^Ω , $\delta^{\mathcal{H}}$ y v^a determinan la inhomogeneidad y anisotropía de las regiones Szekeres–II de forma independiente de coordenadas mediante Ecs. (3.51)–(3.52). En realidad, estos valores obedecen a ecuaciones de evolución que se simplifican a perturbaciones covariantes del polvo en norma comóvil en el límite lineal, más detalles en Sec. 3.2.6.

Aunque consideremos que las velocidades peculiares sean no relativistas, $v_a v^a \ll 1$, esto no indica que sus derivadas sean despreciables, por lo que debemos explorar condiciones sobre las derivadas. Considerando dos observadores u^a y \hat{u}^a , se relacionan a partir de Ec. (2.7),

$$\hat{u}^a = \gamma(u^a + v^a)$$

donde,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^a v_a}}, \quad (3.53)$$

$$u_a v^a = 0. \quad (3.54)$$

Considerando que,

$$v^a v_a \ll 1, \quad (3.55)$$

se tiene que $\gamma \approx 1$. Note que esto no implica que $\gamma_{,a} \approx 0$.

Además, se tienen el tensor de energía–momento relativo a los observadores se escribe de la siguiente forma:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + 2q_{(a} u_{b)} \quad (3.56)$$

$$\hat{T}_{ab} = \hat{\rho} \hat{u}_a \hat{u}_b \quad (3.57)$$

Para encontrar las condiciones a primer orden, se pueden igualar ambos tensores de energía momento y sustituir Ec. (2.7) en las 4–velocidades del tensor tildado como se muestra a continuación:

$$T_{ab} = \hat{T}_{ab}, \quad (3.58)$$

$$\rho u_a u_b + 2q_{(a} u_{b)} = \hat{\rho} \hat{u}_a \hat{u}_b. \quad (3.59)$$

Sustituyendo,

$$\rho u_a u_b + 2q_{(a} u_{b)} = \hat{\rho} \gamma^2 (u_a + v_a)(u_b + v_b) \quad (3.60)$$

$$\rho u_a u_b + 2q_{(a} u_{b)} = \hat{\rho} \gamma^2 (u_a u_b + 2v_{(a} u_{b)} + v_a v_b) \quad (3.61)$$

Ahora, busquemos un escalar que nos relacione cantidades en ambos sistemas de referencia, para ello hacemos $T_{ab} u^a u^b = \hat{T}_{ab} \hat{u}^a \hat{u}^b$, quedando así con una función escalar.

Siendo que q^a y u^a son ortogonales $q_a u^a = 0$, y debido a Ec. (3.54), la expresión se simplifica a:

$$\rho u_a u_b u^a u^b = \gamma^2 \hat{\rho} u_a u_b u^a u^b. \quad (3.62)$$

De Ec. (3.53) sabemos que $\gamma \approx 1$ y al ser u^a y \hat{u}^a cuadrivelocidades, $u_\nu u^\nu = -1$. Por lo tanto, se obtiene que la condición a primer orden es:

$$\rho = \hat{\rho}. \quad (3.63)$$

Para la segunda condición a primer orden, se puede hacer $T_{ab} u^b = \hat{T}_{ab} \hat{u}^b$ para que la contracción nos dé un vector. Utilizando Ec. (3.54) nuevamente y $u_\nu u^\nu = -1$ se obtiene que:

$$\rho u_a - q_a = \gamma^2 \hat{\rho} u_a - \hat{\rho} \gamma^2 v_a. \quad (3.64)$$

Como $\gamma \approx 1$ y de Ec. (3.63) se obtiene que la segunda condición de primer orden es:

$$q_a = \rho v_a \quad (3.65)$$

Para encontrar las condiciones de segundo orden, asumimos que cada tensor de energía-momento se conserva por separado, tal que:

$$T^{ab}{}_{;b} - \hat{T}^{ab}{}_{;b} = 0. \quad (3.66)$$

Tenemos además que

$$q^a{}_{;b} = \hat{\rho}_{;b} \gamma^2 v^a + 2\hat{\rho} \gamma \gamma_{;b} v^a + \hat{\rho} \gamma^2 v^a{}_{;b}. \quad (3.67)$$

$$\rho_{;b} = \hat{\rho}_{;b} \gamma^2 + 2\hat{\rho} \gamma \gamma_{;b}. \quad (3.68)$$

Sustituyendo Ec. (3.56) en $T^{ab}_{;b} = 0$ y Ec. (3.57) en $\hat{T}^{ab}_{;b} = 0$ se tiene

$$\rho_{;b}u^au^b + \rho u^a_{;b}u^b + \rho u^au^b_{;b} + q^a_{;b}u^b + q^au^b_{;b} + u^a_{;b}q^b + u^aq^b_{;b} = 0, \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\rho}\gamma^2(u^a_{;b}u^b + u^au^b_{;b} + v^a_{;b}u^b + v^au^b_{;b} + u^a_{;b}v^b + u^av^b_{;b} + (v^av^b)_{;b}) \\ & + (\hat{\rho}_{;b}\gamma^2 + 2\hat{\rho}\gamma\gamma_{;b})(u^au^b + v^au^b + u^av^b + v^av^b) = 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Restando Ec. (3.69) y Ec. (3.70),

$$\begin{aligned} & (\rho_{;b} - \hat{\rho}_{;b}\gamma^2 - 2\hat{\rho}\gamma\gamma_{;b})u^au^b + (\rho - \hat{\rho}\gamma^2)(u^au^b_{;b} + u^a_{;b}u^b) + (q^a - \gamma^2\hat{\rho}v^a)u^b_{;b} \\ & (q^a_{;b} - \hat{\rho}\gamma^2v^a_{;b} - \hat{\rho}_{;b}\gamma^2v^a - 2\hat{\rho}\gamma\gamma_{;b}v^a)u^b + (q^b_{;b} - \gamma^2\hat{\rho}v^b_{;b} - \hat{\rho}_{;b}\gamma^2v^b + 2\hat{\rho}\gamma\gamma_{;b}v^b)u^a \\ & + (q^b - \hat{\rho}\gamma^2v^b)u^a_{;b} + \hat{\rho}\gamma^2(v^av^b)_{;b} + (\hat{\rho}_{;b}\gamma^2 + 2\hat{\rho}\gamma\gamma_{;b})v^av^b = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Sustituyendo Ec. (3.67) y Ec. (3.68):

$$\begin{aligned} & (\rho - \hat{\rho}\gamma^2)(u^au^b_{;b} + u^a_{;b}u^b) + (q^a - \gamma^2\hat{\rho}v^a)u^b_{;b} \\ & + (q^b - \hat{\rho}\gamma^2v^b)u^a_{;b} + \hat{\rho}\gamma^2(v^av^b)_{;b} + (\hat{\rho}_{;b}\gamma^2 + 2\hat{\rho}\gamma\gamma_{;b})v^av^b = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Sustituyendo las condiciones a primer orden Ecs. (3.63), (3.65) en Ec. (3.72)

se obtiene que:

$$\hat{\rho}\gamma^2(v^av^b)_{;b} + (\hat{\rho}_{;b}\gamma^2 + 2\hat{\rho}\gamma\gamma_{;b})v^av^b = 0. \quad (3.73)$$

Despreciando términos cuadráticos en v^a y considerando $\hat{\rho} \neq 0$,

$$\hat{\rho}\gamma^2(v^av^b)_{;b} = 0 \quad (3.74)$$

Esto indica que $(v^av^b)_{;b} = 0$, lo cual se cumple para $v^av_a \ll 1$ y v^av_a constante, para que coincida con nuestra premisa original $v^av_a \ll 1$. Como resultado,

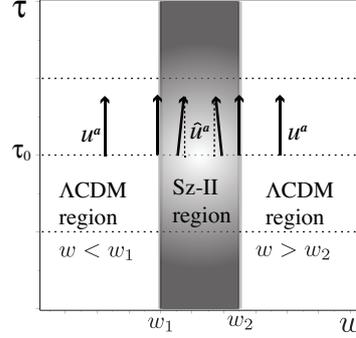


Figura 3.3: Evolución temporal de una única región Szekeres-II suavemente empalmada entre dos regiones asintóticas Λ CDM (métricas Ec. (3.30) y Ec. (2.4) con coordenadas fijas r, ϕ). La región Szekeres-II se extiende en el rango $w_1 < w < w_2$ entre las hipersuperficies de empalme $w_1 = 0$ y $w_2 = 2\pi/\nu_0$. Nótese como la 4-velocidad \hat{u}^a del CDM se inclina en el área Szekeres-II en comparación con la 4-velocidad comóvil u^a , la cual es común a ambas regiones Λ CDM y el marco CMB.

nuestros requisitos de compatibilidad son

$$\rho u_{(a} v_{b)} = u_{(a} q_{b)}, \quad (3.75)$$

$$(v^a v^b)_{;b} = 0. \quad (3.76)$$

Con estas consideraciones, la conservación de la energía $u_a T^{ab}_{;b}$ es proporcional a $(H_0/c)^3$, que justifica nuestra aproximación.

3.2.3 Construyendo el modelo

Mientras que las configuraciones descritas en la Sec. 3.1 permiten múltiples regiones Szekeres-II que pueden ser diferentes siempre y cuando se cumplan las Ecs.(3.4)–(3.5), consideraremos el caso de una única región

Szekeres-II que se extiende a lo largo de un rango continuo de w , empalmada con un fondo Λ CDM a lo largo de hipersuperficies temporales marcadas por los valores mínimo y máximo de w en este rango. Este diseño se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.3. Para cumplir con Ecs. (3.4)–(3.5), deben fijarse adecuadamente los parámetros libres de las funciones métricas Ecs. (3.33)–(3.36) que describen la región Szekeres-II. Estas restricciones se detallan a continuación:

Los parámetros α en Ec. (3.35) $\alpha_0(w) = \cos^2(\nu_0 w)$, mientras que el resto de las funciones libres, α_i , se eligen de la forma $\mathcal{C}_i \sin^2(\nu_i w)$. Esto implica que las interfaces de empalme se encuentran en $w = w_1 = 0$ y $w = w_2 = 2\pi/\nu_0$, mientras que las constantes arbitrarias \mathcal{C}_i deben cumplir $0 < \mathcal{C}_i < 1$ para satisfacer las condiciones de empalme Ecs.(3.4)–(3.5). Suponemos que $\nu_i \geq 2H_0/c$ las secciones Szekeres-II se extienden muy por debajo del radio de Hubble actual, aunque esta escala de longitud siempre puede modificarse.

Para los parámetros β en Ec. (3.36) las condiciones de compatibilidad y $v_a v^a \ll 1$ requieren $\beta_i^2 \ll 1$ y $\beta_i \beta_j \ll 1$ con $i, j = 0, 1, 2, 3$, por tanto estas funciones libres deben tener la forma $\beta_i(w) = \epsilon_i \varphi_i(w)$, con $\varphi_i(w)$ funciones acotadas y las constantes ϵ_i cumpliendo $\epsilon_i \epsilon_j \ll 1$ y satisfaciendo Ecs. (3.5)–(3.4). En particular, consideramos la elección $\phi_i = \sin^2(\nu_i w)$.

En la forma analítica Ec. (3.45) de $S(\tau)$ para las zonas Λ CDM, el tiempo cósmico actual se define por $S(\tau_0) = 1$, lo que resulta en $\tau_0 = 0,9662$. Elegimos los valores $\Omega_0^m = 0,3$ y $\Omega_0^\Lambda = 0,7$ de forma que al día de hoy $\bar{\Omega}_0 = 1$. Las velocidades peculiares al día de hoy en Ecs. (3.46)–(3.47),

así como los contrastes de densidad y escalar de Hubble en Ecs. (3.48)–(3.49) son

$$\Delta_0^{\Omega\rho} = \delta_0^\Omega, \quad \Delta_0^{\mathcal{H}} = \delta_0^{\mathcal{H}}, \quad (3.77)$$

$$v_{r0} = [v_r]_0 = \Omega_0^{gr}, \quad v_{\phi 0} = [v_\phi]_0 = r\Omega_0^{g\phi}. \quad (3.78)$$

La función F se obtiene como solución numérica de Ec. (3.13), cuyas condiciones iniciales están dadas por $F_{,\tau}(\tau_0, w) = 0$ y $F(\tau_0, w) = \epsilon_0\varphi_0(w)$, donde elegimos a ϵ_0 como una constante que satisface $0 < \epsilon_0 < 1$, mientras que $\varphi_0(w)$ es una función sinusoidal que cumple con la forma que se especifica en los parámetros de β discutidos previamente. Elegimos el tiempo cósmico actual como condiciones iniciales simplemente por comodidad, ya que pueden elegirse en cualquier τ fijo. Siendo que Ec. (3.13) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, su solución general debe ser de la forma $F = \varphi_+(w)F_+(\tau, w) + \varphi_-(w)F_-(\tau, w)$, garantizando que las condiciones iniciales $F(\tau, w_i) = F_{,\tau}(\tau, w_i) = 0$ siempre se cumplan para valores fijos de $w = w_i$ en cualquier valor de τ .

Nótese que X tiene una dependencia débil con la coordenada angular ϕ , por lo que podemos obtener una noción robusta de todas las cantidades en un ángulo representativo. Después de algunos ensayos, seleccionamos los siguientes números para los parámetros constantes: $\epsilon_1 = 0,7$, $\epsilon_2, \epsilon_3 = \mathcal{C}_{c_1} = \mathcal{C}_{c_0} = 0,001$ y $\nu_i = 2H_0/c$. El resto de las constantes de \mathcal{C}_i se eligieron como números aleatorios, por lo que $0 < \mathcal{C}_i < 1$, y los ensayos numéricos muestran una dependencia muy débil en estos números. En general, los valores numéricos para las constantes ϵ_i , \mathcal{C}_{c_i} y las formas de las funciones c_i deben probarse

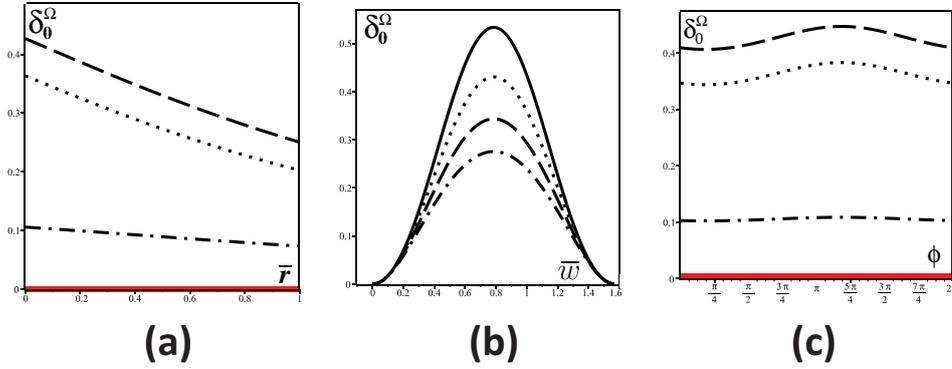


Figura 3.4: Contraste de densidad en el tiempo cósmico actual para una región Szekeres-II empalmada con un fondo Λ CDM. Los paneles muestran δ_0^Ω dada por Ec. (3.77). En panel (a) se muestra como función de $\bar{r} = cr/H_0$ y $\phi = \pi/4$ fijos, para $w = 0, \pi/3, 2\pi/3, 14\pi/15$, representados respectivamente por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas. Panel (b) muestra el contraste como función de $\bar{w} = cw/H_0$ y $\phi = \pi/4$ fijos, para $\bar{r} = 0, 1/3, 2/3, 1$, representados respectivamente por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas. Panel (c) muestra el contraste como en función de ϕ y $\bar{r} = 0, 5$ y valores fijos $w = 0, \pi/3, 2\pi/3, 14\pi/15$, respectivamente representados por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas.

para evitar “shell crossings”, y para obtener velocidades peculiares con magnitudes que coincidan con el rango de valores de velocidades peculiares para estructuras a gran escala encontradas en la literatura.

3.2.4 Valores a tiempo actual de las variables dinámicas

Todas las gráficas de las Figs. 3.4-3.7 corresponden a $\tau_0 = H_0 t_0$, fijado en el tiempo actual $S(\tau_0) = 1$. Las cantidades graficadas se muestran como funciones de w y r normalizadas por la longitud de Hubble. Como se

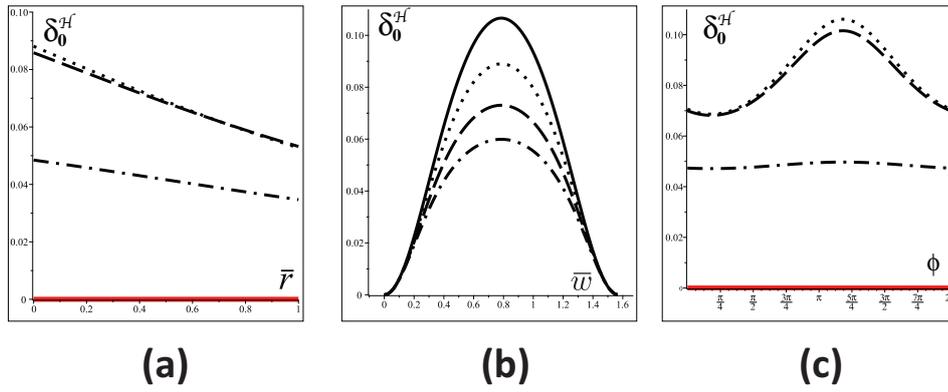


Figura 3.5: Contrastes del escalar de Hubble en el tiempo cósmico actual para una región Szekeres–II empalmada con un fondo Λ CDM. Los paneles muestran $\delta_0^{\mathcal{H}}$ dada por Ec. (3.77). En panel (a) se muestra como función de $\bar{r} = cr/H_0$ y $\phi = \pi/4$ fijos, para $w = 0, \pi/3, 2\pi/3, 14\pi/15$, representados respectivamente por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas. Panel (b) en muestra el contraste como función de $\bar{w} = cw/H_0$ y $\phi = \pi/4$ fijos, para $\bar{r} = 0, 1/3, 2/3, 1$, representados respectivamente por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas. Panel (c) muestra el contraste como en función de ϕ y $\bar{r} = 0, 5$ y valores fijos $w = 0, \pi/3, 2\pi/3, 14\pi/15$, respectivamente representados por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas.

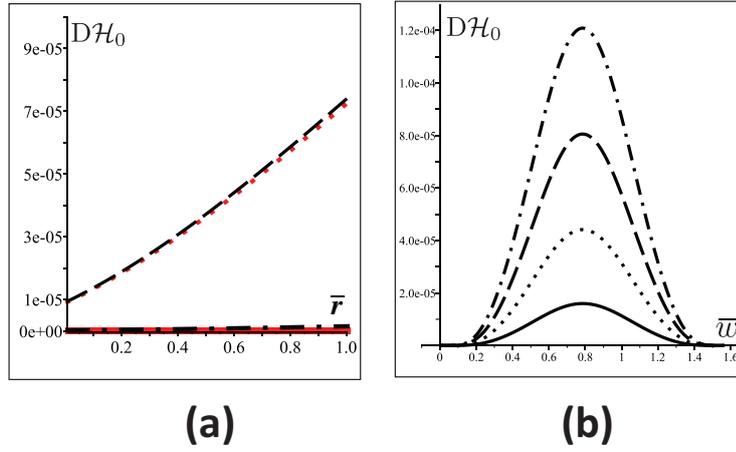


Figura 3.6: Diferencia entre el escalar de Hubble en los marcos comóvil y no-comóvil en la región de Szekeres-II. Los paneles muestran $D\mathcal{H}_0 = \hat{\mathcal{H}}_0 - \mathcal{H}_0$ dado por Ec. (3.79) (véase también Ec. (3.41)). Panel (a) se muestra como función de $\bar{r} = cr/H_0$ y $\phi = \pi/4$ fijos, para $w = 0, \pi/3, 2\pi/3, 14\pi/15$, representados respectivamente por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas. Panel (b) en muestra como función de $\bar{w} = cw/H_0$ y $\phi = \pi/4$ fijos, para $\bar{r} = 0, 1/3, 2/3, 1$, representados respectivamente por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas. Obsérvese en el panel (b) que $D\mathcal{H}_0 = 0$ ya que la región coincide con el fondo Λ CDM.

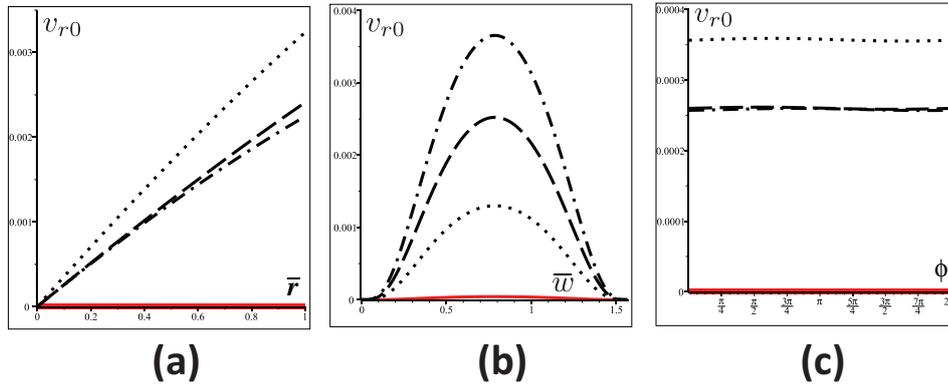


Figura 3.7: Velocidades peculiares radiales en el tiempo cósmico actual para una región Szekeres–II empalmada con un fondo Λ CDM. Los paneles muestran v_r dada por Ec. (3.46). Panel (a) se muestra como función de $\bar{r} = cr/H_0$ y $\phi = \pi/4$ fijos, para $w = 0, \pi/3, 2\pi/3, 14\pi/15$, representados respectivamente por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas. Panel (b) muestra como función de $\bar{w} = cw/H_0$ y $\phi = \pi/4$ fijos, para $\bar{r} = 0, 1/3, 2/3, 1$, representados respectivamente por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas. Panel (c) muestra como función de ϕ y $\bar{r} = 0, 5$ y valores fijos $w = 0, \pi/3, 2\pi/3, 14\pi/15$, respectivamente representados por curvas sólidas, punteadas, discontinuas y punteadas.

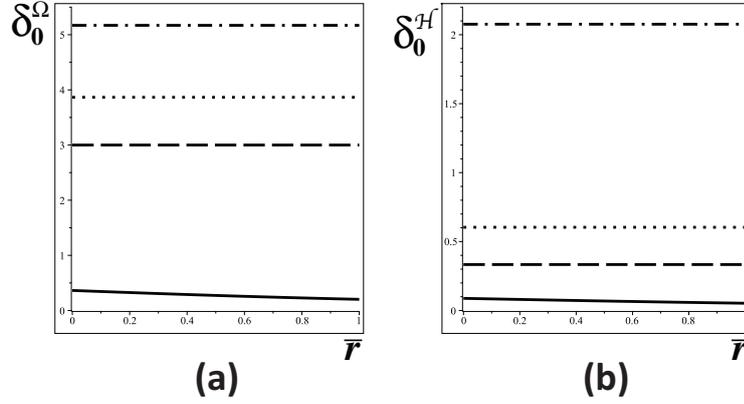


Figura 3.8: Perfiles de los contrastes de densidad y escalar de Hubble en diferentes tiempos cósmicos. Las curvas sólida, punteada, discontinua y punteada denotan respectivamente $z = 0, 0, 5, 1, 2$. Todas las cantidades trazadas se muestran como funciones de $\bar{r} = cr/H_0$ para valores fijos de $w = \pi/3$. Los paneles (a) y (b) muestran respectivamente Δ^{Ω_ρ} y $\Delta^{\mathcal{H}}$ dados por Ecs. (3.48)–(3.49).

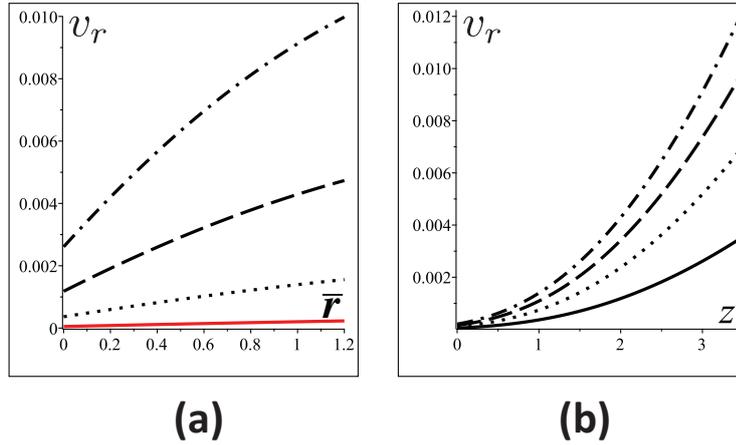


Figura 3.9: Evolución de la velocidad peculiar radial v_r . Panel (a) muestra el perfil de v_r para w constante y $z = 0, 1, 2, 3$ (curvas sólida, punteada, discontinua y punteada). Panel (b): evolución de v_r en función de z a $r = 0, 1/3, 2/3, 1$ (curvas sólida, discontinua punteada y discontinua punteada).

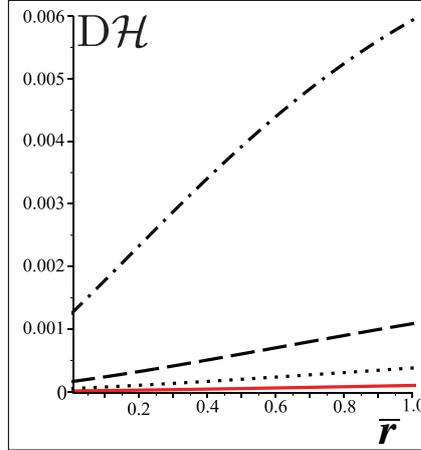


Figura 3.10: La diferencia entre los escalares de Hubble comóvil y no comóvil $D\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}} - \mathcal{H}$ (véase Ec. (3.79)) en distintos tiempos cósmicos. Las curvas sólida, punteada, discontinua y dash-dot denotan respectivamente $z = 0, 0, 5, 1, 2$. Todas las cantidades graficadas se muestran como funciones de $\bar{r} = cr/H_0$ para valores fijos de $w = \pi/3$.

ha mencionado anteriormente, $w = 0$ y $w = \pi$ denotan las hipersuperficies de empalme entre la región de Szekeres II y la región del fondo Λ CDM. La región de Szekeres II cubre el rango $0 \leq w \leq \pi$, con bordes separados por una distancia comóvil igual a 1.5 veces el radio de Hubble de la región en $S(\tau_0)$.

Las hipersuperficies de empalme representadas en Fig. 3.3 como líneas verticales corresponden a $w = w_1 = 0$ y $w = w_2 = \pi$ en los paneles (b) de las Figs. 3.4-3.7 con el fondo Λ CDM que se extiende para $w = w_1 < 0$ y $w = w_2 > \pi$. La línea roja horizontal representa el nivel de contraste cero correspondiente al fondo Λ CDM.

Fig.3.4 ilustra el perfil del contraste de densidad del día de hoy actual δ_0^Ω dado por Ec. (3.77) como función r (panel (a)) y w (panel (b)) normalizado

por la longitud de Hubble y ϕ (panel (c)). Los paneles revelan un contraste de densidad de valores similares $\delta_0^\Omega \sim 0,4$ en relación con el fondo de Λ CDM en las direcciones r y w con una muy ligera dependencia en ϕ . A pesar de que las regiones de Szekere-II parecen ser homogéneas e isotrópicas para todos los observadores, estos gráficos demuestran una variación local relativamente pequeña del contraste de densidad local de δ_0^Ω . Los parámetros libres pueden ajustarse para proporcionar la variación de escala deseada para el contraste de densidad.

Fig. 3.5 describe los perfiles del contraste de corriente para el escalar de Hubble $\delta_0^{\mathcal{H}}$, como función de r (para w, ϕ constantes) y w (para r, ϕ constantes) y ϕ (con r, w constantes). De forma similar al contraste de densidad, el contraste escalar de Hubble muestra pequeñas variaciones locales en diferentes direcciones y una débil dependencia angular, lo que permite una descripción más precisa de un grado deseado de homogeneidad y anisotropía. La Fig. 3.6 ilustra la diferencia entre los valores actuales del escalar de Hubble en un marco comóvil (\mathcal{H}_t) y el no comóvil (\hat{H}_0):

$$D\mathcal{H}_0 \equiv \hat{\mathcal{H}}_0 - \mathcal{H}_0 = \frac{\vartheta_0}{3H_0} = \frac{[\hat{h}_b^a v^b]_{;a}]}{3H_0}, \quad (3.79)$$

esta aproximación es aplicable a $v^a \sim O(v/c)$ de modo que $\hat{h}_b^a \approx h_b^a$ a orden $\mathcal{O}(v/c)$. Los paneles a y b muestran Ec. (3.79) como función de r (w, ϕ constantes) y w (r, ϕ constantes) (La dependencia del ángulo ϕ es similar a la que se muestra en los paneles (c) de las Figs. 3.4-3.5, por lo que se omite). Ambos paneles indican que $D\mathcal{H}_0 \sim 10^{-4}$, un valor consistente con $v^a \sim O(v/c)$, lo cual es compatible con las condiciones de consistencia y por debajo del 10% asociado con la tensión de H_0 [100].

La Fig. 3.7 muestra la velocidad radial al día de hoy $v_{r0} = [v_r]_0$ dada por Ec. (3.78) como función de actual de la densidad y del escalar de Hubble. La velocidad viene dada como función de las variables \bar{r} (con w, ϕ constantes), w (con r, ϕ constantes) y ϕ (con r, w constantes). Los valores numéricos están en fracciones de c , y se espera que la magnitud de la velocidad esté en el rango de $|v_r| < 800$ km/s. Las velocidades radiales son similares en ambas direcciones y tienen muy poca dependencia angular. En la Fig. 3.8 observamos como cambian con el tiempo los perfiles radial de los contrastes de densidad y del escalar de Hubble, Ecs. (3.48)–(3.49). Los dos contrastes adoptan formas casi constantes que van disminuyendo desde $z = 2$ hasta alcanzar sus valores actuales.

3.2.5 Modelos de pancake como indicadores de formación de estructura

Tras una cuidadosa selección de parámetros, podemos obtener configuraciones libres de “shell crossings” al menos dentro de los límites del horizonte de Hubble. Sin embargo, algunas combinaciones de parámetros dan lugar a velocidades peculiares que divergen aún sin “shell crossings”. Estas divergencias indican el límite de la capacidad del modelo CDM para describir el polvo. Por tanto, limitamos los parámetros del modelo a $|v_r| < 0,01c$. Este es un rango razonable para la validez de la formación de estructuras que implican condiciones no-relativistas, de tal forma que los puntos del espacio-tiempo donde esta cota se viole, pueda asociarse como el inicio de la virialización, cuya descripción está más allá de las capacidades de estos modelos.

Tras realizar pruebas numéricas, pudimos determinar cómo configurar la libertad para controlar el posicionamiento del lugar que indica el inicio de los “shell crossings” (así como las distintas velocidades peculiares), en ubicaciones espaciales y tiempos cósmicos específicos, medidos por valores de corrimiento al rojo en la región de Λ CDM. Utilizando la misma selección de parámetros que en Sec. 3.2.3, pudimos identificar libertad de en la elección de las constantes numéricas para caracterizar escenarios de formación de estructuras en los que la virialización se produce a valores de corrimiento al rojo compatibles con las observaciones [6], por ejemplo, con $|v_r| \rightarrow 0,1c$ a $z \approx 3$. Teniendo en cuenta los valores de corrimiento al rojo de la región Λ CDM dados por $S(t) = 1/(1+z)$, en Fig. 3.9 representamos v_r en función de r y z . Es importante observar que la velocidad aumenta a medida que aumenta z .

Mostramos cómo las velocidades peculiares pueden superar el valor límite, $|v_r| < 0,01c$, para $z < 3$ trazando la evolución temporal para v_r en la Fig. 3.9. En el panel (a), mostramos el perfil de v_r en función de r (w constante). Para $z = 0, 1, 2, 3$. Vemos que la velocidad límite de $0,01c$ se alcanza en $z = 3$, lo que denota el punto en el que comienza la virialización. Del mismo modo, en el panel (b), vemos el perfil de v_r como función de z con valores constantes de w para diferentes valores de r . De nuevo, el punto donde comienza la virialización es $z = 3$.

Por último, en la Fig. 3.10, observamos la diferencia temporal entre los valores escalares de Hubble correspondientes para el marco comóvil y no comóvil, definida en Ec. (3.79) $D\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}} - \mathcal{H}$. Esta diferencia sigue siendo relativamente pequeña, lo que es coherente con las condiciones de compati-

lidad descritas anteriormente. Sin embargo, a partir de $z = 3$, esta diferencia comienza a aumentar, lo que indica que se alcanzan los límites de aplicabilidad de una aproximación no relativista de las velocidades peculiares relacionadas con los dos marcos. Sin embargo, se puede argumentar que el punto en el que estos modelos pierden validez es el punto en el que comienza la virialización.

Basándonos en el lugar donde ocurre el “shell crossing” mostrado en Fig. 3.9, podemos estimar la masa aproximadamente conservada para la estructura a virializar de la siguiente manera: Tomando la densidad de energía de Ec. (3.31) y Ecs. (3.42)–(3.44) para X y S dados por Ec. (3.33) y Ec. (3.45), con F y Q obtenidos como soluciones numéricas de las Ecs. (3.13)–(3.14), en el momento de la virialización $z = 3$, podemos calcular la masa conservada usando la integral de volumen apropiada:

$$\int \rho(z_i, r, \theta, w) \sqrt{h} d^3x \sim 10^{15} M_{\odot}, \quad (3.80)$$

evaluado a un corrimiento al rojo inicial constante ($z_i = 3$), es decir, a un tiempo constante correspondiente al desplazamiento al rojo calculado para la región Λ CDM, y verificamos que $v_r = 0,1c$ a lo largo del dominio de integración. La masa en reposo resultante corresponde aproximadamente con un cúmulo de galaxias cuya virialización inicial se produce a $z = 3$.

3.2.6 Perturbaciones exactas en un fondo FLRW

Los ejemplos de varios empalmes entre regiones Szekeres–II y FLRW que hemos proporcionado ilustran diversas inhomogeneidades localizadas en un fondo homogéneo e isótropo definido por estos empalmes (en lugar de por

una sucesión de modelos que convergen a la geometría FLRW). En consecuencia, estas configuraciones pueden considerarse perturbaciones precisas en estos fondos. Examinando las cantidades cinemáticas y de curvatura, podemos expresar este concepto en términos covariantes rigurosos. Los tensores eléctrico y magnético de Weyl para los casos discutidos en la Sec. 3.1.2 vienen dadas por

$$E_b^a = \mathcal{E} \xi_b^a, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{6} \xi_{ab} E^{ab} = -\frac{\kappa}{6} (\rho - \bar{\rho}), \quad H_{ab} = \frac{\kappa}{2} \eta_{abc} q^c, \quad (3.81)$$

donde ξ_b^a es el mismo tensor sin traza como en el tensor de “shear” Ec. (2.81), $\eta_{abc} = \eta_{abcd} u^d$, η_{abcd} es el tensor de Levi-Civita y $\kappa \bar{\rho} = 3\dot{S}^2/S^2 = 3\dot{a}^2/a^2$ es la densidad de energía FLRW. Como resultado (y utilizando la Ec. (2.81)), podemos expresar la densidad adimensional, el escalar de Hubble y las velocidades peculiares de las regiones Szekeres–II como perturbaciones exactas sobre los parámetros FLRW dados en términos de los valores propios de los tensores eléctrico y magnético de Weyl y el tensor de “shear”.

$$\hat{\Omega} = \bar{\Omega} + \delta\Omega, \quad \delta\Omega = -\frac{\xi_{ab} E^{ab}}{3\bar{H}_0^2}, \quad \hat{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}} + \delta\mathcal{H}, \quad \delta\mathcal{H} = -\frac{\xi_{ab} \sigma^{ab}}{6\bar{H}_0}, \quad (3.82)$$

$$\Rightarrow \quad E_{ab} = -\frac{1}{2} \delta\Omega \bar{H}_0^2 \xi_{ab}, \quad \sigma_{ab} = -\delta\mathcal{H} \bar{H}_0 \xi_{ab}, \quad (3.83)$$

$$H_{ab} = \frac{3}{2} \hat{\Omega} \bar{H}_0^2 \eta_{abc} v^c = \frac{3}{2} (\bar{\Omega} + \delta\Omega) \bar{H}_0^2 \eta_{abc} v^c, \quad \hat{\Omega}_q^a \equiv \frac{\kappa q^a}{3\bar{H}_0^2} = \hat{\Omega} v^a = (\bar{\Omega} + \delta\Omega) v^a, \quad (3.84)$$

donde ξ_{ab} se definió en Ec. (2.81), los parámetros FLRW $\bar{\Omega}$ y $\bar{\mathcal{H}}$ son:

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega_0^m}{a^3} + \Omega_0^\Lambda \quad (\Lambda\text{CDM}), \quad \Omega_0^\Lambda \quad (\text{de Sitter}), \quad \frac{4}{9\tau^2} \quad (\text{Einstein de Sitter}),$$

con $\bar{\mathcal{H}} = \sqrt{\bar{\Omega}}$ en todos los casos. Las ecuaciones Ecs. (3.82)–(3.83) vinculan la densidad y el escalar de Hubble de las regiones Szekeres-II con el tensor

de “shear” y el tensor eléctrico de Weyl, a pesar de que previamente se han declarado como valores FLRW de fondo y variables adicionales que dependen de todas las coordenadas en Ecs. (3.21)–(3.22), (3.27)eqhatOM.

Las hipersuperficies espaciales de w constante en Szekeres-II no son espacialmente planas, a pesar de la planitud espacial del fondo FLRW. Esto se debe a que el escalar de Ricci de las hipersuperficies ortogonales a u^a en general no es cero. Como resultado, la curvatura espacial se convierte en una perturbación exacta que se anula en la hipersuperficie correspondiente. Escrita en términos de las variables de Ec. (3.82), la perturbación de curvatura espacial es

$$\delta^K \equiv \frac{{}^{(3)}\mathcal{R}}{6\bar{H}_0^2} = \delta^\Omega - 2\bar{\mathcal{H}}\delta^{\mathcal{H}} = \frac{\alpha_3 + Q\beta_3}{3\bar{H}_0^2 S^2 X}, \quad (3.85)$$

donde la relación entre δ^K y el resto de las perturbaciones se siguen de la restricción Hamiltoniana ${}^{(3)}\mathcal{R} = 2\kappa\rho - (2/3)\Theta + \sigma_{ab}\sigma^{ab}$.

Considerando el vector de velocidades peculiares v^a , es la única perturbación lineal aproximada, véase Sec. 3.2.1, siendo que estamos asumiendo $v^a v_a \ll 1$ y se desprecian términos no lineales para identificar $q^a = \rho v^a$. Estas velocidades peculiares están ausentes en los ejemplos de la Sec. 3.1.2 que consideran polvo comóvil para los cuales la solución de Szekeres–II es de tipo Petrov D y por tanto $H_{ab} = 0$. Siendo que se cumplen las condiciones de empalme Ecs. (3.2)–(3.5), se garantiza que las perturbaciones exactas y v^a se anulan en las hipersuperficies de interfaz con las secciones FLRW.

δ_Ω , $\delta_{\mathcal{H}}$ pueden entenderse como perturbaciones covariantes exactas (y v^a como una perturbación lineal covariante) en un fondo FLRW caracterizado por $\bar{\Omega} = \bar{\mathcal{H}}^2$ (con $\mathcal{H} = 2/(3\tau)$) al expresarse rigurosamente a través

de sus ecuaciones de evolución obtenidas de Ecs. (2.84)-(2.85) y Ec. (2.86).

Siendo que δ^Ω , $\delta^{\mathcal{H}}$ y v^a están directamente relacionadas a los tensores eléctrico y magnético de Weyl, y el tensor de “shear”, tenemos (a primer orden en v^a)

$$\delta_{,\tau}^{\mathcal{H}} = -2\bar{\mathcal{H}}\delta^{\mathcal{H}} - 3[\delta^{\mathcal{H}}]^2 - \frac{1}{2}\delta^\Omega, \quad (3.86)$$

$$\delta_{,\tau}^\Omega = -3(\bar{\mathcal{H}} + \delta^{\mathcal{H}})\delta^\Omega - \bar{\Omega}\delta^{\mathcal{H}} + \bar{\Omega}\left(\frac{v^{\hat{x}}X_{,\hat{x}}}{X} + \frac{v^{\hat{y}}X_{,\hat{y}}}{X}\right) - (\bar{\Omega} + \delta^\Omega)(v_{,\hat{x}}^{\hat{x}} + v_{,\hat{y}}^{\hat{y}}), \quad (3.87)$$

$$v_{,\tau}^{\hat{x}} = v^{\hat{x}}\left[v_{,\hat{x}}^{\hat{x}} + v_{,\hat{y}}^{\hat{y}} - 2\bar{\mathcal{H}}\right], \quad v_{,\tau}^{\hat{y}} = v^{\hat{y}}\left[v_{,\hat{x}}^{\hat{x}} + v_{,\hat{y}}^{\hat{y}} - 2\bar{\mathcal{H}}\right], \quad (3.88)$$

donde $\hat{x} = \bar{H}_0 x$ y $\hat{y} = \bar{H}_0 y$ y donde usamos la restricción $\hat{\nabla}_b E_a^b - \kappa/3[h_a^b \rho_{,b} + q_a + (3/2)\sigma_{ab}q^b] = 0$ a primer orden en $q_a = \rho v_a$ llegamos a las Ecs. (3.87)–(3.88). El caso del polvo comóvil en los dos ejemplos examinados antes (Λ CDM y fondos de Sitter) en Sec. 3.1.2, se deduce de Ecs. (3.86)–(3.88) fijando $v^a = 0$. Para este caso es interesante combinar Ecs. (3.86)–(3.87) en una ecuación no lineal de segundo orden para la perturbación de densidad.

$$\begin{aligned} \delta_{,\tau\tau}^\Omega &= 3(\bar{\mathcal{H}} + \delta^{\mathcal{H}})\delta_{,\tau}^\Omega + \frac{3}{2}[\delta^\Omega]^2 + \frac{3}{2}\left[\bar{\Omega} + 4\left(\bar{\mathcal{H}} + \frac{3}{2}\delta^{\mathcal{H}}\right)\delta^{\mathcal{H}}\right]\delta^\Omega \\ &+ 6\bar{\Omega}\left(\bar{\mathcal{H}} + \frac{3}{2}\delta^{\mathcal{H}}\right)\delta^{\mathcal{H}} = 0, \end{aligned} \quad (3.89)$$

que se convierte en el límite lineal

$$\delta_{,\tau\tau}^\Omega - 3\bar{\mathcal{H}}\delta_{,\tau}^\Omega + \frac{9}{2}\bar{\Omega}\delta^\Omega - 3\bar{\Omega}\delta^{\mathcal{H}} = 0, \quad (3.90)$$

donde usamos Ec. (3.85). Esta ecuación lineal es equivalente a la perturbación lineal del polvo en la norma comóvil con la excepción del último término correspondiente a la corrección de curvatura $\delta^{\mathcal{K}}$. La razón por la que no tenemos la corrección lineal de polvo habitual es porque el fondo FLRW puede definirse mediante un empalme en lugar de una secuencia de modelos convergentes a la geometría FLRW. Para el caso comóvil $Q = 0$, tenemos la forma

funcional de $\delta^{\mathcal{X}}$ en Ec. (3.85), tenemos $\delta^{\mathcal{X}} = 0$ sólo si elegimos modelos tales que $\alpha_3(w) = 0$ (el coeficiente de los términos cuadráticos $x^2 + y^2$ en el dipolo de Szekeres–II en Ec. (3.11)). En [143] (ver Apéndice C de la referencia) se muestra que el que este coeficiente se anule, es una condición necesaria para el límite FLRW del espacio de parámetros.

Uso de modelos inhomogéneos en Gravedad modificada

El uso de modelos inhomogéneos no está limitado a RG. En la última década, la cosmología ha mejorado gracias a un gran número de nuevos sondeos observacionales, cuyos métodos para tratarlos siguen siendo un reto, no sólo debido a la naturaleza fundamental de la energía oscura, sino también a las persistentes tensiones entre los valores medidos/inferidos de H_0 , $f\sigma_8$ ¹, y las anomalías en las observaciones del Universo temprano. Hay una serie de propuestas de energía oscura en el lado del universo local que pueden utilizarse para explicar la aceleración cósmica de la expansión en el marco de la RG, al tiempo que se consideran fluctuaciones cosmológicas invariantes de norma sobre un fondo FLRW. Este comportamiento acelerado puede obtenerse como

¹La tasa de crecimiento de las estructuras cósmicas.

resultado estándar, por ejemplo, asumiendo una constante cosmológica positiva Λ , fluidos oscuros con presión negativa o campos escalares, o modificaciones y/o extensiones de la RG. Por ejemplo, véase [20, 66]. Incorporar modelos inhomogéneos en gravedad modificada y/o extendida sirven como alternativas a los modelos que existen en RG, teniendo nuevas implicaciones y descripciones físicas. En este capítulo discutimos dos casos en los que hemos trabajado recientemente [3].

4.1 Modelos de gravedad modificada y extendida

El teorema de Lovelock [153, 20, 154, 155] establece las condiciones para construir una teoría métrica de gravedad. El teorema de Lovelock se puede enunciar de la siguiente forma [20]

Teorema 4. *The only possible second-order Euler-Lagrange expression obtainable in a four dimensional space from a scalar density of the form $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda)$ is*

$$E_{\mu\nu} = \alpha\sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right] + \lambda\sqrt{-g}g_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

where α and λ are constants, and $R_{\mu\nu}$ and R are the Ricci tensor and scalar curvature, respectively.

Si buscamos una teoría cuyas ecuaciones de campo difieran de aquella de RG debemos alterar alguna suposición de este teorema:

- Grado mayor a dos en diferenciabilidad, en este rubro las teorías $f(R)$ son ejemplos de teorías ampliamente estudiadas y trabajadas en la literatura [156, 157, 158].
- Trabajar en una variedad de dimensión mayor a cuatro, en las cuales podemos destacar las teorías DGP [159, 160, 161].
- Añadir campos adicionales al tensor métrico, como por ejemplo teorías de Brans–Dicke [162, 163], las teorías de Horndeski [164, 165, 166], campos escalares mínimamente y fuertemente acoplados [167, 168, 169, 170].
- Considerar teorías no locales¹, que explican fenómenos como la energía oscura sin invocar una componente de materia–energía extra [20, 172, 173].

El alterar una de estas suposiciones dará lugar a una teoría de gravedad modificada. Hoy en día existen una gran variedad de estas teorías que han buscado resolver alguno de los diversos problemas a los que se enfrenta la cosmología Sec. 1.1.3.

Sin embargo, existe una posibilidad adicional que es considerar una descripción alternativa de la gravedad que no esté basada en una descripción de curvatura del espacio–tiempo, a este tipo de teorías se les conoce como teorías extendidas de la gravedad. Una de las razones principales para buscar extensiones de la RG es el hecho de que al día de hoy no se tiene una teoría cuántica de la gravedad, el requerir que exista una torsión no nula permite la

¹Esto viene de considerar teorías que no provengan de un principio de mínima acción [20, 171]

existencia de campos de norma (“gauge”) [172, 174] y por ende facilita una construcción de una teoría de gravedad cuántica [174, 175, 176, 177, 178]. Bajo estas perspectivas, las teorías de Gravedad Teleparalela (TG) se han propuesto como una posible explicación para la expansión acelerada del universo, así como para reducir las tensiones en las observaciones, todo ello apoyado por la estructura geométrica de la teoría, evitando así la necesidad de invocar fluidos exóticos o el concepto de Λ . Además, la TG ofrece una serie de propuestas cosmológicas viables que han demostrado tener límites ajustados basados en las observaciones existentes [70, 71, 72].

Por otro lado, en 2021 se propuso una nueva teoría de Gravedad en [179]. Esta teoría es una versión generalizada de la Relatividad General, teniendo en cuenta un tensor de rango 3 llamado en la literatura el tensor de “Cotton”. En [180] se demuestra que el efecto de la materia oscura sobre las curvas de rotación galáctica puede deberse en su lugar a la curvatura del espacio-tiempo. Una de las características clave de esta teoría, ahora denominada “Cotton Gravity” o “CG”, es que se trata de una teoría exacta de tercer orden a partir de los tensores de Einstein y de energía momento de RG, lo que significa que todas las soluciones exactas de la RG son también soluciones exactas de esta teoría. La solución análoga a la solución de Schwarzschild de la RG se obtiene con un término adicional que puede actuar como energía oscura, es una función libre adicional que surge como a partir de la integración de estas ecuaciones de tercer orden. Esta función libre ha dado lugar a una posible explicación de las aceleraciones observadas de la nave espacial Pioneer[181].

4.2 Gravedad Teleparalela

La teoría de Gravedad Teleparalela¹ (TG) es una teoría geométrica de la gravedad basada en el Teorema de Noether, es decir, TG es una teoría de norma para el grupo de traslaciones. Por lo mismo, se conserva si y sólo si la lagrangiana se conserva cuando se aplican traslaciones del espacio-tiempo al grupo de traslaciones. La TG es una teoría geométrica en la que el campo gravitacional está mediado por la torsión y no por la curvatura, por lo que requiere que las componentes de la 2-forma de curvatura se anulen² En este caso, el campo dinámico es la tétrada. La tétrada se relaciona con el potencial de norma para el grupo de traslaciones del grupo de traslaciones geométricas, [182]. La tétrada, e^A_μ y la métrica $g_{\mu\nu}$ están relacionadas por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB} e^A_\mu e^B_\nu. \quad (4.2)$$

Se deduce que la métrica permanece constante bajo transformaciones locales de Lorentz cuando la tétrada se transforma mediante

$$e^A_\mu \rightarrow e^B_\mu \Lambda(\mathbf{x})^A_B.$$

Debido al hecho de que varias tétradas relacionadas por transformaciones locales de Lorentz dan como resultado la misma métrica, la geometría de TG debe ser invariante local de Lorentz [183]. Este requisito da como consecuencia un grado de libertad extra puramente inercial llamado *conexión de*

¹En inglés Teleparallel Gravity.

²Por tanto el transporte paralelo será independiente del camino, y así los vectores permanezcan paralelos bajo esta conexión. De ahí proviene el nombre *Teleparallel Gravity*.

espín $\omega^A_{B\mu}$, que es una 1-forma que asume valores en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz [183]. En este contexto, TG consiste en una configuración geométrica que incluye una variedad M , una tétrada $\mathbf{e} = \{e^A\}_{A=0}^3$ y una conexión de espín $\boldsymbol{\omega} = \{\omega^A_B\}_{A,B=0}^3$ [68]. Una vez dada una carta de coordenadas $\{x^\mu\}$ sobre la variedad M del espaciotiempo y una segunda carta $\{x^A\}$ sobre el espacio de Minkowski como haz fibrado sobre M , podemos escribir la tétrada y la conexión de espín, respectivamente como $e^A = e^A_\mu dx^\mu$ y $\omega^A_B = \omega^A_{B\mu} dx^\mu$ [183, 68].

En TG, la conexión lineal sobre M ya no es la conexión Levi-Civita sino la conexión Weitzenböck definida por sus coeficientes $\Gamma^\sigma_{\nu\mu}$ de la forma

$$\Gamma^\sigma_{\nu\mu} := E_A^\sigma \partial_\mu e^A_\nu + E_A^\sigma \omega^A_{B\mu} e^B_\nu, \quad (4.3)$$

donde e^A_μ es el campo de la tétrada, E_A^σ el campo de la tétrada transpuesta definido por $E_A^\mu e^A_\nu = \delta^\mu_\nu$. Esta conexión es tal que la curvatura del espaciotiempo es nula. Los índices griegos se refieren a las coordenadas espaciotemporales, mientras que las letras latinas mayúsculas representan los índices del espacio tangente. La condición de que las componentes de la 2-forma de curvatura se anulen idénticamente sólo puede lograrse mediante una conexión de espín puramente inercial [184, 68].

$$\omega^A_{B\mu} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x})^A_C \partial_\mu \Lambda(\mathbf{x})^C_B. \quad (4.4)$$

La conexión de espín según Ec. (4.4) puede elegirse para satisfacer la norma de Weitzenböck si se realiza una transformación local de Lorentz, ya que es una conexión de espín cero en cualquier marco local de Lorentz, y entonces la tétrada se convierte en su único campo fundamental. Este enfoque

se denomina *formalismo de la tétrada pura* [185, 174], que rompe la invarianza local de Lorentz en la teoría, y puede llevarnos a una elección razonable del campo de la tétrada en extensiones de la teoría. Este problema se llama la *elección de buenas y malas tétradas* [186, 187, 188].

La acción en las teorías de la relatividad general tiene un caso directo que es equivalente a GR, que se denomina equivalente teleparalelo a la relatividad general, o TEGR. El Lagrangiano de la acción es $-T + B^1$, y la variación de la acción con respecto al campo de la tétrada da como resultado una equivalencia completa con las ecuaciones dinámicas de la RG [189]. Cuando la acción se eleva a su extensión $f(T, B)$, resulta en

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi} f(T, B) + \mathcal{L}_m \right] e, \quad (4.5)$$

donde e representa el determinante de la tétrada, $e = \det(e^A_\mu) = \sqrt{-g}$, \mathcal{L}_m es el Lagrangiano de la materia, y $f = (T, B)$ es una función de los escalares de torsión y frontera T y B , respectivamente, definidos por

$$T := S_\alpha^{\sigma\rho} T_{\sigma\rho}^\alpha, \quad B := \frac{2}{e} \partial_\mu \left(e T^\nu{}_\nu{}^\mu \right), \quad (4.6)$$

donde el superpotencial y el tensor de torsión están dados por

$$S_\alpha^{\sigma\rho} = \frac{1}{2} (T_\alpha^{\sigma\rho} + T^{\rho\sigma}_\alpha - T^{\sigma\rho}_\alpha - 2T^{\lambda\sigma}_\lambda \delta_\alpha^\rho + 2T^{\lambda\rho}_\lambda \delta_\alpha^\sigma), \quad (4.7)$$

$$T^\alpha_{\sigma\rho} := 2\Gamma^\alpha_{[\rho\sigma]}. \quad (4.8)$$

Esta generalización de la teoría provee una clase más extensa de modelos y además puede recuperar las teorías $f(\mathring{R})$ si la dependencia funcional

¹Siendo que la restricción de que no haya curvatura resulta en la relación $R + T - B = 0$, con R el escalar de Ricci [174].

toma la forma $f(T, B) = f(-T + B)$. Variando la Ec. (4.5) con respecto al campo tétrado resulta en las ecuaciones de campo de la teoría [174]

$$\begin{aligned}
E_A^\mu \overset{\circ}{\square} f_B - E_A^\nu \overset{\circ}{\nabla}^\mu \overset{\circ}{\nabla}_\nu f_B + \frac{1}{2} B f_B E_A^\mu - \partial_\nu (f_B + f_T) S_A^{\mu\nu} - \frac{1}{e} f_T \partial_\nu (e S_A^{\mu\nu}) \\
+ f_T T^B_{\nu A} S_B^{\nu\mu} - f_T \omega^B_{A\nu} S_B^{\nu\mu} - \frac{1}{2} f E_A^\mu = 8\pi G \Theta_A^\mu,
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

donde $\overset{\circ}{\square} = \overset{\circ}{\nabla}^\delta \overset{\circ}{\nabla}_\delta$, Θ_A^μ , es el tensor de energía-momento y, f_T y f_B se refieren a la derivada de f con respecto al escalar de torsión y el término de frontera, respectivamente.

Adicionalmente, la variación de la acción Ec. (4.5) con respecto a la conexión de espín, resulta en el requerimiento adicional de que la parte antisimétrica de las ecuaciones de campo se anulen¹. Por ende, un “buen par de tétrada-conexión de espín” satisface la parte simétrica de las ecuaciones de campo Ec. (4.9), y tiene como restricción adicional que la parte anitismétrica se anule [174, 190].

4.2.1 Tétradas buenas

Cuando trabajamos con extensiones de TEGR, debemos resolver simultáneamente la parte simétrica y antisimétrica de las ecuaciones de campo Ec. (4.9) para encontrar así un buen par de tétrada-conexión de espín. No es viable dar una receta general para encontrar una conexión de espín dada

¹La parte antisimétrica se debe considerar en ambos índices del espacio tangente o del espacio-tiempo, lo cual implica una contracción por e^A_μ o E_A^μ

una tétrada, siendo que ambos son campos independientes. Sin embargo, bajo ciertas simetrías [68] es posible encontrar un par de tétrada-conexión de espín que heredan al tensor de torsión las simetrías requeridas, aún en la norma de Weitzenböck.

Veamos ahora como estas ideas se traducen al caso esféricamente simétrico. Bajo las ideas de la geometría de Cartan, podemos pensar a una simetría como la acción de un grupo $\varphi : G \times M \rightarrow M$ de un grupo de Lie G tal que $\varphi_u^*g = g$ y $\varphi_u^*\Gamma = \Gamma$ para todo $u \in G$, con g la métrica inducida de la tétrada (4.2) y Γ es la conexión inducida de la tétrada y la conexión de espín Ec. (4.3).

Por ende, si existe un homeomorfismo local de un grupo de Lie una geometría teleparalela es invariante bajo $\varphi \mathbf{\Lambda} : G \times M \rightarrow \text{SO}(1, 3)$ que satisface ciertas condiciones, entonces una geometría teleparalela seerá invariante bajo φ . Estas condiciones se traducen en derivadas de Lie al trabajar con simetrías infinitesimales

$$(\mathcal{L}_{X_\xi} e)_\mu^A = -\lambda_{\xi B}^A e_\mu^B, \quad (\mathcal{L}_{X_\xi} \omega)_{B\mu}^A = D_\mu \lambda_{\xi B}^A, \quad (4.10)$$

con $D_\mu \lambda_{\xi B}^A = \partial_\mu \lambda_{\xi B}^A + \omega_{C\mu}^A \lambda_{\xi B}^C - \omega_{B\mu}^C \lambda_{\xi C}^A$, λ el homeomorfismo local del álgebra de Lie definido en términos de derivadas de $\mathbf{\Lambda}$. Las condiciones de simetría Ec. (4.10), bajo transformaciones locales de Lorentz a la norma de Weitzenböck, se transforman a

$$(\mathcal{L}_{X_\xi} e')_\mu^A = -\lambda'^A_{\xi B} e'^B_\mu, \quad 0 \equiv (\mathcal{L}_{X_\xi} \omega')_{B\mu}^A = \partial_\mu \lambda'^A_{\xi B}. \quad (4.11)$$

Por tanto, el homeomorfismo del grupo local de Lie $\mathbf{\Lambda}'_u$ y el homeomorfismo del álgebra local de Lie λ'_ξ no dependen del punto de la variedad, y por tanto

el homeomorfismo del grupo de Lie no es local sino global. Entonces, para poder encontrar una tétrada que sea compatible con la norma de Weitzenböck, debemos elegir un homeomorfismo global y resolver la condición de simetría Ec. (4.10) para la tétrada. Para un espacio-tiempo esféricamente simétrico, se tiene que la tétrada $SO(3)$ más general compatible con la norma de Weitzenböck es

$$(e^A{}_\mu) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ C_3 \sin \theta \cos \phi & C_4 \sin \theta \cos \phi & C_5 \cos \theta \cos \phi - C_6 \sin \phi & -\sin \theta (C_5 \sin \phi + C_6 \cos \theta \cos \phi) \\ C_3 \sin \theta \sin \phi & C_4 \sin \theta \sin \phi & C_5 \cos \theta \sin \phi + C_6 \cos \phi & \sin \theta (C_5 \cos \phi - C_6 \cos \theta \sin \phi) \\ C_3 \cos \theta & C_4 \cos \theta & -C_5 \sin \theta & C_6 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

y las componentes no-nulas de la métrica inducida serán $g_{tt} = C_3^2 - C_1^2$, $g_{rr} = C_4^2 - C_2^2$, $g_{tr} = g_{rt} = C_3 C_4 - C_1 C_2$, $g_{\theta\theta} = C_5^2 + C_6^2$ y $g_{\phi\phi} = g_{\theta\theta} \sin^2 \theta$. Para un espacio-tiempo esféricamente simétrico general, las únicas componentes no diagonales de las ecuaciones de campo que no se anulan son las componentes tr y $\theta\phi$ y por tanto deben resolverse de manera simultánea con la parte simétrica de las ecuaciones de campo [68, 174]. Escogiendo $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_6 = 0$, $C_4 = \frac{Y_r}{\sqrt{1-\kappa}}$ y $C_5 = Y$ en Ec. (4.12) recuperamos la métrica LTB Ec. (2.66) y por tanto, la tétrada LTB compatible con la norma de Weitzenböck es

$$(e^A{}_\mu)_{\text{LTB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Y_r}{\sqrt{1-\kappa}} \sin \theta \cos \phi & Y \cos \theta \cos \phi & -Y \sin \theta \sin \phi \\ 0 & \frac{Y_r}{\sqrt{1-\kappa}} \sin \theta \sin \phi & Y \cos \theta \sin \phi & Y \sin \theta \cos \phi \\ 0 & \frac{Y_r}{\sqrt{1-\kappa}} \cos \theta & -Y \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Ésta será el campo tétrado general que consideraremos en nuestro estudio.

Aunque trabajaremos en la norma de Weitzenböck, vale la pena señalar que podemos trabajar con una tétrada diagonal y una conexión de espín no nula. Para ello, podemos realizar una transformación local de la tétrada, así como de la conexión de espín, aplicando la Ec. (4.4), con $\Lambda^A_C(\mathbf{x})$, la misma transformación local aplicada a la tétrada para hacerla así diagonal.

Una de las ventajas de trabajar con una tétrada diagonal es que no necesitamos utilizar la norma de Weitzenböck, el precio a pagar será utilizar una conexión de espín no nula. Siendo que las ecuaciones de campo son invariantes bajo transformaciones locales de Lorentz, es una cuestión de elección trabajar o no con la norma de Weitzenböck.

De acuerdo con los conceptos anteriores, en [3] examinamos la compatibilidad entre TG y los modelos LTB. Aunque existe mucha literatura sobre modelos LTB en RG, sólo unos pocos se centran en soluciones no homogéneas para teorías TG, como por ejemplo para analizar la posibilidad de describir la dinámica de la energía oscura de un modo que no incluya una constante cosmológica, o para estudiar el problema de la localización de energía y momento en la teoría [191]. El objetivo principal de [3] fué estudiar cómo las conocidas propiedades de las soluciones LTB se ven afectadas por la contribución de la torsión como fuerza en TG. Nos referiremos a cantidades con o sin círculo blanco cuyos valores se calculan utilizando la conexión Levi-Civita/Weitzenböck. La signatura utilizada será $(-, +, +, +)$. A continuación discutimos los detalles de [3].

4.3 De la solución de Schwarzschild a las soluciones LTB: el enfoque de RG

Siendo que TG es invariante ante difeomorfismos y que una tétrada que esté asociada a la métrica de Schwarzschild [189], será solución a las ecuaciones de campo, procedemos a mostrar que podemos obtener una solución tipo LTB en TG.

Partimos de la métrica de Schwarzschild en coordenadas estándar (estáticas)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.14)$$

donde $M_0 = GM_s/c^2$ y $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Es solución exacta de $G^{ab} = 0$. Evaluamos las geodésicas temporales radiales ($d\Omega = 0$) a través del lagrangiano:

$$\mathcal{L}(r, \dot{t}, \dot{r}) = -1 = - \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2, \quad (4.15)$$

donde \dot{f} es $df/d\tau$ (con τ el tiempo propio). Como $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ se conserva la energía de cada geodésica:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = \frac{d}{d\tau} \left[-2 \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{t} = - \frac{E_0/2}{1 - 2M_0/r}, \quad (4.16)$$

Combinando (4.15) y (4.16) obtenemos

$$\dot{r}^2 = \frac{2M_0}{r} - \kappa, \quad \dot{t} = \frac{\sqrt{1 - \kappa}}{1 - 2M_0/r}, \quad E \equiv \frac{E_0^2}{4} - 1, \quad (4.17)$$

Podemos usar (4.17) para construir un sistema de coordenadas (τ, χ) para Schwarzschild en base a las líneas de universo de los observadores siguiendo

4.3. De la solución de Schwarzschild a las soluciones LTB: el enfoque de $\mathbb{RC5}$

geodésicas radiales, donde τ es el tiempo propio y χ distingue a una geodésica de otra (variable continua). Como cada geodésica en el plano (τ, χ) tiene una energía de amarre $-\kappa$ distinta, entonces tenemos $\kappa = \kappa(\chi)$ y $r = r(\tau, \chi)$, $t = t(\tau, \chi)$. La transformación de coordenadas $(t, r) \rightarrow (\tau, \chi)$ es

$$dt = \left[\frac{\partial t}{\partial \tau} \right]_{\chi} d\tau + \left[\frac{\partial t}{\partial \chi} \right]_{\tau} d\chi = \frac{\sqrt{1-\kappa}}{1-2M_0/r} d\tau + \left[\frac{\partial t}{\partial \chi} \right]_{\tau} d\chi, \quad (4.18)$$

$$dr = \left[\frac{\partial r}{\partial \tau} \right]_{\chi} d\tau + \left[\frac{\partial r}{\partial \chi} \right]_{\tau} d\chi = \sqrt{\frac{2M_0}{r} - \kappa} d\tau + \left[\frac{\partial r}{\partial \chi} \right]_{\tau} d\chi, \quad (4.19)$$

sustituyendo (4.18)–(4.19) en (4.14), eliminando el termino cruzado proporcional a $d\tau d\chi$ se obtiene la métrica de Schwarzschild en la forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{r'^2}{1-\kappa} d\chi^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.20)$$

donde $\kappa = \kappa(\chi)$ y $r' \equiv [\partial r / \partial \chi]_{\tau}$, mientras que $r(\tau, \chi)$ se determina resolviendo

$$\dot{r}^2 = \frac{2M_0}{r} - \kappa \quad \Rightarrow \quad \tau - \tau_B(\chi) = \int_{\bar{r}=0}^r \frac{\sqrt{\bar{r}} d\bar{r}}{\sqrt{2M_0 - \kappa(\chi) \bar{r}}}, \quad (4.21)$$

donde $\tau_B(\chi)$ es una “constante” de integración que marca el valor de τ cuando $r = 0$ (las geodésicas caen hacia o emergen de la singularidad en valores distintos de τ para cada χ). En estas coordenadas se ve que el radio de Schwarzschild $r_s = 2M_0$ es regular (observadores cruzan el horizonte de eventos a tiempos propios finitos). Las coordenadas de Lemaître son el caso particular $E = 0$ y las de Novikov son el caso $E < 0$ que describe a observadores ligados que emergen de $r = 0$ llegan a un $r = 2M_0/E$ máximo (distinto para cada χ) y caen hacia $r = 0$. Las coordenadas de Novikov cubren toda la extensión analítica máxima dada por las coordenadas de Kruskal-Szekeres.

En la métrica de Schwarzschild dada por (4.84)–(4.21) tenemos tres parámetros libres: dos funciones $E(\chi)$, $\tau_B(\chi)$ y una constante arbitraria M_0

(masa puntual de Schwarzschild). Toda masa puntual se puede representar como la integral de una distribución

$$M_0 = \int \rho d^3x, \quad \rho = M_0 \delta^3(0). \quad (4.22)$$

Sustituir la densidad distribucional por una continua es equivalente a sustituir

$$M_0 \rightarrow M = M(\chi), \quad (4.23)$$

Si hacemos la sustitución (4.23) en (4.84)–(4.21) y sustituimos en las ecuaciones de Einstein $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ obtenemos

$$8\pi T^{00} = \frac{2M'}{r^2 r'}, \quad (4.24)$$

pero la 4-velocidad de los observadores en las geodésicas en las coordenadas (τ, χ) es $u^a = [dx^a/d\tau]_\chi = \delta_\tau^a$, por lo tanto (4.24) puede escribirse como

$$T^{ab} = \rho u^a u^b = \rho \delta_\tau^a \delta_\tau^b, \quad 8\pi\rho = \frac{2M'}{r^2 r'}, \quad u^a = \delta_\tau^a, \quad (4.25)$$

Y entonces la métrica (4.84)–(4.21) con $M_0 \rightarrow M(\chi)$ es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein cuya fuente es polvo con densidad (4.25). Estas son las soluciones de Lemaître–Tolman–Bondi (modelos LTB). La masa efectiva es

$$2M = 8\pi \int \rho r^2 r' d\chi \quad (4.26)$$

por lo que el límite Schwarzschild corresponde a una densidad distribucional en el que toda la masa efectiva se concentra en un punto: $\rho \rightarrow M_0 \delta(0)$.

La métrica LTB Ec. (4.84) usualmente se escribe de forma Ec. (2.66) con R obedeciendo la ecuación de evolución

$$\dot{R}^2 = \frac{2M}{R} - K - \frac{\Lambda}{3} R^2, \quad (4.27)$$

para el caso con constante cosmológica.

4.4 De la solución de Schwarzschild a las soluciones LTB solutions: el enfoque Teleparalelo

Con la elección de la tétrada Ec. (4.13) y considerando una fuente de polvo $\Theta_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$, con ρ la densidad de materia-energía, las componentes diagonales de las ecuaciones de campo Ec. (4.9) son:

$$f - Bf_B + \left(\frac{\kappa'}{Y'^2} + \frac{2(1-\kappa)Y''}{Y'^3} - \frac{4\sqrt{1-\kappa}}{Y'Y} \right) f'_B + \left(\frac{2\dot{Y}'}{Y'} + \frac{4\dot{Y}}{Y} \right) \dot{f}_B + 4 \frac{1-\kappa-\sqrt{1-\kappa}}{Y'Y} \dot{f}'_T + 2 \left(\frac{2(1-\kappa-\sqrt{1-\kappa}-\dot{Y}^2)}{Y^2} - \frac{4\dot{Y}'\dot{Y}+\kappa'}{Y'Y} \right) f_T + \frac{2(-1+\kappa)}{Y'^2} f''_B = 16\pi\rho, \quad (4.28)$$

$$\left(\frac{\ddot{Y}Y'^2 + \dot{Y}'\dot{Y}Y'}{(1-\kappa)Y} + \frac{(\dot{Y}^2 - (1-\kappa)\sqrt{1-\kappa} + 1-\kappa)Y'^2}{(1-\kappa)\frac{3}{2}Y^2} \right) f_T + \frac{Y'}{Y} \dot{f}'_B + \frac{\dot{Y}Y'^2}{(1-\kappa)Y} \dot{f}_T + \frac{(Bf_B - f - 2\dot{f}_B)Y'^2}{4(1-\kappa)} = 0, \quad (4.29)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1-\kappa}Y}{Y'} - \left(\frac{Y''(1-\kappa)}{Y'^3} + \frac{\kappa'}{2Y'^2} \right) Y^2 \right) f'_B + \left(\frac{\dot{Y}'Y^2}{Y'} + \left(\ddot{Y} + \frac{6\dot{Y}'\dot{Y}+\kappa'}{2Y'} \right) Y + \dot{Y}^2 + 2\sqrt{1-\kappa} + \kappa - 2 \right) f_T + \frac{(\sqrt{1-\kappa} - (1-\kappa)Y)}{Y'} \dot{f}'_T + \left(\frac{\dot{Y}'Y^2}{Y'} + \dot{Y}Y \right) \dot{f}_T + \left(\frac{1-\kappa}{Y'^2} f''_B - \dot{f}_B + \frac{1}{2}(Bf_B - f) \right) Y^2 = 0. \quad (4.30)$$

La única componente no nula de la parte antisimétrica de las ecuaciones de campo está dada por

$$\frac{((\sqrt{1-\kappa} - 1)Y'(\dot{f}_B + \dot{f}_T) - \dot{Y}\sqrt{1-\kappa}(f'_B + f'_T))}{Y\sqrt{1-\kappa}} = 0. \quad (4.31)$$

Nótese que $\dot{f}_T = -\dot{f}_B$ y $f'_T = -f'_B$ son soluciones, que implican $f(T, B) = f(T - B) - T + B = f(R) + \text{TEGR}$. A manera de obtener una solución no trivial, debemos resolver Ec. (4.31) con una elección genérica de $f(T, B)$, que será nuestro punto inicial para el análisis subsecuente.

4.4.1 Una solución LTB exacta en gravedad $f(T, B)$: el procedimiento genérico

Para obtener una solución analítica cerrada consideramos el subcaso espacialmente plano $\kappa = 0$, k es proporcional al escalar de Ricci tridimensional de rebanadas de τ constante. De acuerdo con esto, la Ec. (4.31) es

$$\frac{\dot{Y}(f'_B + f'_T)}{Y} = 0, \quad (4.32)$$

y las ecuaciones de campo Ecs. (4.28)-(4.30) toman la siguiente forma

$$\left(\frac{Y''}{Y'^3} - \frac{2}{Y'Y}\right) f'_B + \left(\frac{\dot{Y}'}{Y'} + \frac{2\dot{Y}}{Y}\right) \dot{f}_T - \left(\frac{4\dot{Y}\dot{Y}'Y''}{Y'Y} + \frac{2\dot{Y}^2}{Y^2}\right) f_T - \frac{1}{2}(Bf_B - f) - \frac{f''_B}{Y'^2} = 8\pi\rho, \quad (4.33)$$

$$\frac{2Y'}{Y} f'_B + \frac{2\dot{Y}Y'^2}{Y} \dot{f}_T + 2\left(\frac{\ddot{Y}Y'^2 + \dot{Y}\dot{Y}'Y'}{Y} + \frac{\dot{Y}^2Y'^2}{Y^2}\right) f_T + \left(\frac{1}{2}(Bf_B - f) - \ddot{f}_B\right) Y'^2 = 0, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{Y''}{Y'^3} + \frac{1}{Y'Y}\right) f'_B + \left(\frac{\ddot{Y}'}{Y'} + \left(\frac{\ddot{Y}}{Y^2} + \frac{3\dot{Y}\dot{Y}'}{Y'Y^2}\right) + \frac{\dot{Y}^2}{Y^2}\right) \dot{f}_T + \left(\frac{\dot{Y}'}{Y'} + \frac{\dot{Y}}{Y}\right) \dot{f}_T \\ + \left(\frac{1}{2}(Bf_B - f) - \ddot{f}_B + \frac{f''_B}{Y'^2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Las soluciones a las Ecs. (4.32)-(4.33) se limitan a la elección de la función f y sus parámetros libres, sin restringir de manera adicional la forma funcional de la función radial Y .

La función f debe elegirse en función del problema físico a considerar y de los datos observacionales. Hay dos escenarios físicos que pueden tenerse en cuenta con esta geometría LTB: la formación de estructura local y la expansión acelerada del Universo [132, 127] en particular estaremos interesados en tratar

la tensión de H_0 , siendo que consideramos un escenario de Universo tardío que coincide con el flujo de Hubble. La métrica LTB se ha utilizado ampliamente en RG para cubrir estos fenómenos porque es una perturbación exacta de la métrica FLRW [134]. Se han construido varios modelos de juguete para estudiar la formación de estructuras locales y la aceleración local [132, 127]. La formación de estructuras locales depende de las perturbaciones de la materia y del colapso gravitatorio. En este caso, usualmente el efecto de la energía oscura se desprecia y por ende consideraremos la aceleración cósmica por separado. En lo sucesivo restringimos nuestro estudio a funcionales específicos $f(T, B)$, mostrando una receta genérica para resolver las Ecs. (4.28)-(4.31), la elección de dicho funcional se basará en suposiciones físicamente razonables.

Para empezar, esbozamos la fórmula general que debe utilizarse con cualquier funcional f para la geometría LTB. Todas las presiones son nulas cuando se tiene en cuenta una fuente de polvo, aunque esto puede ampliarse para incluir fuentes de fluido perfecto. Por lo tanto, Ecs. (4.34)-(4.35) deben ser iguales, y así, restándolas impondrá más restricciones en la forma de una ecuación diferencial parcial (EDP). Utilizando regla en cadena, podemos escribir todas las derivadas temporales y radiales del funcional f en derivadas con respecto a T o B , respectivamente, lo que dará lugar a dos EDP's para Y . Resolver cualquiera de estas EDP es difícil, sin embargo, introducimos un ansatz basado en una solución GR, y, teniendo en cuenta que, según la discusión anterior Sec. 4.84, la solución de Schwarzschild para la geometría LTB es también una solución para las ecuaciones de campo $f(T, B)$, y por tanto consideraremos ahora una geometría LTB basada en dicho ansatz.

Cualquier funcional f analítico en $(T, B) = (0, 0)$ puede expandirse en una serie de potencias

$$f(T, B) = \sum_i \left(\alpha_i T^i + \beta_i B^i + \sum_j \gamma_{ij} T^i B^j \right), \quad (4.36)$$

con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_{ij}$, constantes. Por este motivo, los funcionales de series de potencia pueden utilizarse como aproximación a cualquier ley general. Para encontrar un límite natural para TEGR, es útil considerar el valor de $\alpha_1 = -1$, ya que al fijar el resto de las constantes $\alpha_i, \beta_i, \gamma_{ij}$ da lugar al Lagrangiano de TEGR. Además, el término lineal del término de frontera puede omitirse, ya que no afecta a la dinámica. Como deseamos encontrar una solución que pueda modelar la formación de estructuras y explicar la aceleración cósmica tardía, empleamos funcionales (por ejemplo, el funcional de ley de potencia) y (el funcional mixto de ley de potencia) que han demostrado ser eficaces para obtener la aceleración cósmica tardía, sin invocar una constante cosmológica [71].

4.4.2 Formación de estructura

Las métricas LTB se han utilizado ampliamente como modelos de juguete para explicar la formación de estructuras [127, 192, 193]. Por lo tanto, estamos interesados en analizar la compatibilidad de la geometría LTB dentro de TG. En particular, estudiaremos las posibles soluciones LTB que denotan escenarios de formación de estructuras donde los efectos del flujo cósmico acelerado son despreciables.

Ley de potencias

El funcional $f(T, B)$ de ley de potencias es

$$f(T, B) = -T + \alpha T^m + \beta B^n, \quad (4.37)$$

con α, β, n, m constantes por determinar con condiciones iniciales o de frontera en las ecuaciones de campo. Es posible reducir al caso TEGR cuando los valores anteriores son $n = 1, \alpha = 0, \beta = 1$. Sin embargo, los términos lineales de frontera de los valores anteriores no afectan a las ecuaciones de campo, por lo que β puede ser un parámetro libre. Además, es común suponer que $n \neq 1$ tiene modificaciones sobre la gravedad. Para analizar este caso, hay que resolver las ecuaciones de campo Ecs. (4.9), la parte antisimétrica de la ecuación de campo Ec. (4.32) así como Ecs. (4.33)-(4.35). Utilizando regla en cadena, se pueden transformar las derivadas temporales de f_T y f_B , Ec. (4.32), en una EDP a resolver

$$\begin{aligned} m(m-1)\beta B^{m-2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\ddot{Y}'}{Y'} \right) Y^3 + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{Y}'\dot{Y}}{Y'} \right) Y^2 + \frac{\partial}{\partial r} (\ddot{Y}Y) Y - 2 \frac{\partial}{\partial r} (\dot{Y}Y) Y' \right) \\ + n(n-1)\alpha T^{m-2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{Y}'\dot{Y}}{Y'} \right) Y^2 - \dot{Y}^2 Y' \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Obsérvese que las elecciones $n = 1$ con $m = 0$ o $m = 1$ dan una solución exacta, ya que son el caso TEGR. Como se describió anteriormente queremos tener un término de frontera no lineal, por lo tanto tenemos que resolver la EDP para Y en el paréntesis. Siguiendo nuestra discusión de Sec. 4.3, puesto que el espacio-tiempo de Schwarzschild es una solución en TG, introducimos el siguiente ansatz

$$\dot{Y}^2 = \frac{2M}{Y^l}, \quad (4.39)$$

con $M = M(r)$ y l una constante a determinar. Ec. (4.39) no da lugar a una expansión acelerada a menos de que $l < 0$. Aún cuando las soluciones no admitan valores negativos para l , siempre puede introducirse un ansatz que admite expansión acelerada. Lidiaremos con este caso en Sec. 4.4.3.

Con este ansatz Ec. (4.39) el escalar de torsión y el término de frontera serán, respectivamente

$$T = -\frac{4(M(l-1)Y' - M'Y)}{Y'Y^{l+2}}, \quad (4.40)$$

$$B = -\frac{1}{2}(l-4)T. \quad (4.41)$$

Para obtener el comportamiento causado por el término de frontera, necesitamos $l = 4$. Alternativamente, podemos utilizar $l = 4$ para reducir la ecuación de gravedad $f(T)$. En este caso, la Ec. (4.39) devuelve una solución cerrada para la función radial Y ,

$$Y = \left(3\sqrt{2M}(\tau - \tau_B(r))\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.42)$$

donde la constante de integración τ_B , es como se describe en Sec. 4.3, y esta forma de Y resuelve Ec. (4.32). Para cada uno de los parámetros libres, n , m , y l , resolver la Ec. (4.32) sin tener en cuenta la Ecs. (4.34)-(4.35) no garantiza una solución exacta consistente.

Para nuestro ansatz elegido y $l = 4$, ambas Ecs. (4.34)-(4.35) son equivalentes. Este procedimiento también es aplicable para un fluido perfecto, ya que el lado derecho de las Ecs. (4.34)-(4.35) son proporcionales a la presión isotrópica. Por último, $l = 4$ satisface la Ec. (4.32) sin imponer ninguna restricción adicional en las variables Y, M . Con estas consideraciones Ec. (4.33)

es

$$8\pi\rho = \frac{1}{(M'Y - 3MY')^3} \left(\frac{1}{Y'} \left(\frac{162Y'^4M^4}{Y^6} + \frac{2M'^4}{Y^2} - \frac{4^n\alpha\left(n - \frac{1}{2}\right)(M'Y - 3MY')^{3+n}}{Y^{6n}Y'^{n-1}} \right) - \frac{216M'Y'^2M^3}{Y^5} + \frac{108M'^2Y'M^2}{Y^4} - \frac{24M'^3M}{Y^3} \right), \quad (4.43)$$

que pondrá restricciones adicionales para tener una densidad de masa-energía para cada n , por ejemplo en los casos particulares $n = 1, 2, 3$ tenemos la siguiente forma para ρ :

$$8\pi\rho = \frac{2M'}{Y'Y^5} - \frac{6M}{Y^6}, \quad (4.44)$$

$$8\pi\rho = \frac{2M'}{Y'Y^5} - \frac{6M}{Y^6} - \frac{24\alpha M'^2}{Y'^2Y^{10}} + \frac{144\alpha MM'}{Y'Y^{11}} - \frac{216\alpha M^2}{Y^{12}}, \quad (4.45)$$

$$8\pi\rho = \frac{2M'}{Y'Y^5} - \frac{6M}{Y^6} - \frac{160\alpha M'^3}{Y'^3Y^{15}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Y^{16}}\right). \quad (4.46)$$

Es importante observar que la forma cerrada de la Ec. (4.42) permite obtener una densidad masa-energía continua y regular, ya que todos los valores r en los que $Y = 0$ son continuos. Como resultado, obtenemos un único centro de simetría (expresado como $r = 0$) como punto fijo del grupo $SO(3)$. En RG existen modelos LTB sin ningún centro de simetría y con dos centros de simetría, [194]. Sin embargo, la presencia de uno o dos centros de simetría puede alterar algunos de nuestros resultados como se ha observado en las soluciones LTB en gravedad $f(R)$ [195]. Las soluciones LTB con tales características deben estudiarse más a fondo. Sin embargo, cabe señalar que el valor de $l = 4$ debe afectar necesariamente a la formación de la estructura, ya que el ansatz de la Ec. (4.39) da lugar a una ecuación de Friedmann en un límite apropiado, como se demuestra en la Sec. 2.3.1.

Es necesario considerar el caso específico en el que $l \neq 4$ y así tener un término de frontera. Para resolver la Ec. (4.38) debemos considerar selecciones específicas de los parámetros de la función libre de f . Hemos elegido el caso particular de $\alpha = 0$ porque, como indican en [71], considerar un término de frontera de naturaleza al menos cuadrática reproducirá múltiples condiciones cosmológicas, incluyendo la aceleración cósmica. Como resultado, podemos resolver

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\ddot{Y}'}{Y'} \right) Y^3 + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{Y}'\dot{Y}}{Y'} \right) Y^2 + \frac{\partial}{\partial r} (\ddot{Y}Y) Y - 2 \frac{\partial}{\partial r} (\dot{Y}Y) Y' \right) = 0. \quad (4.47)$$

Como ya se ha dicho, introducimos un ansatz, Ec. (4.39), que proporciona como única $l = 1$. Además, al restar las Ecs. (4.34)-(4.35), no restringe el valor de m . Sin embargo, fija la constante de integración, τ_B a cero, la cual es la solución FLRW [57].

Ley de potencias mixta

El funcional en este caso es

$$f(T, B) = f_0 T^m B^n. \quad (4.48)$$

Como se ha descrito en el caso anterior, utilizamos (4.32), el ansatz (4.39) y al restar las Ecs. (4.34),(4.35). Esta última combinada con la Ec. (4.39) da tres posibles restricciones para los parámetros n, m : $n + m = 1$, $(l - 4)n - 2m = 0$, $n = 2^{\frac{m}{2}}$. A partir de este análisis, sólo $n + m = 1$ proporciona una constante l sin producir restricciones adicionales sobre la función radial Y o la función de masa M . Por lo tanto, consideraremos esta restricción para nuestro estudio.

La Ec. (4.32) da $l = 1$ o $l = 4$ y no se imponen restricciones adicionales sobre f_0 , pero como observamos en el apartado anterior, el caso $l = 4$ implica que no hay término de frontera obteniéndose una solución de vacío. Con estas restricciones sobre los parámetros libres podemos deducir la siguiente ecuación para la densidad de masa-energía utilizando $l = 1$, por lo que la Ec. (4.33) puede reescribirse como

$$8\pi\rho = -\frac{3^m 2^n n f_0 M'}{Y' Y^2}. \quad (4.49)$$

Nótese que masa-energía positiva implica

$$\frac{M' f_0}{Y'} \leq 0. \quad (4.50)$$

Ec. (4.39) tiene la misma solución que en RG

$$Y = \left(\frac{9}{2} M (\tau - \tau_B(r))^2 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.51)$$

lo que a su vez implica que la densidad masa-energía Ec. (4.49) tiene un comportamiento continuo para todo r . Como se ha descrito en el caso anterior, esta solución no modifica la ley de Hubble, que es el caso $l \neq 1$.

Es posible que con la elección del funcional (4.48) no se recobre un límite TEGR, por ello hacemos el siguiente mapeo

$$f(T, B) \mapsto \tilde{f}(T, B) = -T + f(T, B), \quad (4.52)$$

y así tenemos directamente un límite TEGR natural. Nuevamente restamos las Ecs. (4.34), (4.35), para obtener las mismas restricciones sobre los parámetros $n, m, ,$ es decir: $n + m = 1$, $(l - 4)n - 2m = 0$, $n = 2^{\frac{m}{2}}$. Ninguna de estas restricciones dan lugar a un l que no impone nuevas condiciones sobre la

función radial Y . Por otro lado, las restricciones tienen como solución $l = 4$, y solamente el caso $n + m = 0$ tiene como solución adicional $l = 1$. Por ende, este es el único caso que lidia con un término de frontera no nulo. Bajo estos argumentos, Ec. (4.33) toma la forma

$$8\pi\rho = \frac{2M'}{Y^2Y'} - \frac{3^m 2^n n f_0 M'}{Y'Y^2}. \quad (4.53)$$

Nótese que tenemos el término usual de RG

$$8\pi\rho = \frac{2M'}{Y^2Y'}, \quad (4.54)$$

más un término adicional que proviene del término de potencias mixto que obtuvimos sin el mapeo para tener el límite TEGR. El término de masa es

$$M = 4\pi \int \rho \left(1 - \frac{3^{-m} 2^{n-1}}{n f_0} \right) Y^2 Y' dr, \quad (4.55)$$

que produce un defecto de masa comparado con el término de RG siempre que $f_0 > 0$, tal y como en teorías $f(R)$ [195]. El que la masa sea definida positiva debe analizarse caso por caso.

4.4.3 Expansión cósmica acelerada

Debido al hecho de que la aceleración cosmológica propuesta no es proporcionada por los ansätze antes mencionados Sec. 4.4.2, es posible utilizar uno diferente para representar la geometría LTB con una Constante Cosmológica

$$\dot{Y}^2 = \frac{2M}{Y^l} + LY^p, \quad (4.56)$$

donde l, p son constantes a determinar y L es un parámetro libre que depende del tiempo $L = L(\tau)$. Este ansatz está inspirado en la solución de RG con una

constante cosmológica, en cuyo caso la ecuación de evolución de la función radial Y es

$$\dot{Y}^2 = \frac{2M}{Y} + \frac{\Lambda}{3}Y^2. \quad (4.57)$$

En este caso, podemos reconstruir el escenario de RG utilizando nuestro ansatz sugerido bajo las condiciones de $l = 1, p = 2, yL = 1$. Dado que estos parámetros son distintos de los que se tienen en cuenta en la Sec. 4.4.2, resulta apropiado seleccionar un conjunto específico de parámetros con el fin de evaluar la consistencia de este ansatz dentro de la geometría LTB. Sin embargo, todavía es posible analizar el comportamiento del término de torsión y del término de frontera, que, en el caso específico de $l = 1$ son:

$$T = \frac{4M'}{Y'Y^2} + \frac{2(p+1)LY^{p+\frac{3}{2}}}{Y^{\frac{7}{2}}}, \quad (4.58)$$

$$B = \frac{L}{(LY^{p+1} + 2M)^2} \left((p+4)(p+1)Y^{3p}L^2 + 4(p+4)(p+1)M(MY^{p-2} + LY^{2p-1}) + \frac{6M'(4MY^{p-1} + 4M^2Y^{-2} + LY^{2p})}{Y'} \right) + \frac{\dot{L}}{(LY^{p+1} + 2M)^{\frac{5}{2}}} \left(\left(\frac{1}{2}(p+4)L^2Y^{3p} - \frac{LM'Y^{2p}}{Y'} \right) Y^{\frac{3}{2}} + \left(3(p+3)LMY^{2p} - \frac{2MM'Y^p}{Y'} \right) Y^{\frac{1}{2}} + 4 \left(p + \frac{5}{2} \right) M^2Y^{p-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.59)$$

De acuerdo a los estudios observacionales más recientes [42], se sabe que la constante cosmológica Λ tiene un valor pequeño. Sin embargo, en el caso especial en el que quisiéramos considerar que nuestra variable libre L es similar a la constante cosmológica tiempo actual, se puede demostrar que el término B sigue siendo muy dependiente de este parámetro. Sin embargo, puesto que se espera que el valor sea pequeño, y tenemos una serie de otras variables como la masa y la función radial Y , los efectos de este tipo de comportamiento de la constante cosmológica sólo se observarán a orden no lineal, lo cual es consistente con el trabajo en [71].

4.5 Gravedad Cotton

Una teoría de gravedad modificada basada en las ecuaciones de Maxwell en el vacío, que puede entenderse como una divergencia de curvatura lineal, se introdujo recientemente en [179]. Al considerar una variedad Lorentziana con una conexión Levi-Civita, es posible expresar una combinación de términos de curvatura para obtener el siguiente tensor de rango 4

$$G_{abcd} : = R_{abcd} - \frac{1}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{bc}g_{ad})R, \quad (4.60)$$

con R_{abcd} el tensor de Riemann, g_{ab} el tensor métrico y R el escalar de Ricci. Usando el mismo razonamiento, en el artículo previamente mencionado se identifica un “tensor de energía-momento” asociado con Ec. (4.60)

$$\begin{aligned} T^{abcd} : &= \frac{1}{2}(g^{ac}T^{bd} - g^{bc}T^{ad} - g^{ad}T^{bc} + g^{bd}T^{ac}) \\ &\quad - \frac{1}{6}(g^{ac}g^{bd} - g^{bc}g^{ad})T. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Tomando la traza de (4.60)-(4.61) se obtienen las siguientes relaciones

$$g^{cd}G_{acbd} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = G_{ab}, \quad (4.62)$$

$$g^{cd}T_{acbd} = T_{ab}, \quad (4.63)$$

que dan lugar a las ecuaciones de la teoría CG

$$C_{abc} = 16\pi\nabla_d T^d_{abc}, \quad (4.64)$$

donde

$$C_{abc} = \nabla_d G^d_{abc}, \quad (4.65)$$

es el llamado tensor de “Cotton” [196, 123, 197]. Nótese que en este caso se altera la condición de segundo orden en la diferenciabilidad de las ecuaciones

de campo y por tanto se tiene una teoría modificada de la gravedad. Es interesante notar que todas las soluciones exactas de RG también son soluciones a esta teoría. Sin embargo, al ser una teoría de orden mayor, permite una gama mucho más amplia de soluciones no encontradas en RG. Es directo probar que [197]

$$\nabla_e G^e{}_{abc} = C_{abc} \propto \nabla_e C^e{}_{abc}, \quad (4.66)$$

donde C_{abcd} es el tensor de Weyl. Siendo que el tensor de Weyl se anula para todos los espacio-tiempos conformalmente planos, Ec. (4.66) implica que el tensor de Cotton será idénticamente cero para estos espacio-tiempos. Por lo tanto, para esta clase de espacio-tiempos, que incluyen aquellos descritos por la métrica de Robertson-Walker Ec. (2.4), la Ec. (4.66) se reduce a un caso trivial cero sin proporcionar ecuaciones dinámicas. En consecuencia, todos los modelos FLRW son soluciones triviales a las ecuaciones de campo CG, independientemente de su fuente de materia-energía.

De las Ecs. (4.62)-(4.63) se tiene que las ecuaciones de conservación

$$\nabla_b G^{ab} = 0, \quad (4.67)$$

$$\nabla_b T^{ab} = 0, \quad (4.68)$$

están contenidas en Ec. (4.64). Dado que la ecuación de campo es de tercer orden e incluye las derivadas de G_{ab} y T_{ab} , puede considerarse como un tipo de derivada covariante de las ecuaciones de campo de Einstein. Sin embargo, esto también significa que la teoría no es igual a la RG en el sentido mencionado en [198], siendo que no puede obtenerse por medio de un difeomorfismo.

Además, recientemente se ha mostrado [199] que las ecuaciones de campo de CG pueden interpretarse como añadir un tensor adicional a las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{ab} = T_{ab} + \mathcal{C}_{ab} - g_{ab}\mathcal{C}^c_c, \quad (4.69)$$

donde \mathcal{C}_{ab} es un tensor de Codazzi, es decir un tensor simétrico que cumple la propiedad $\nabla_b\mathcal{C}_{ac} = \nabla_c\mathcal{C}_{ab}$, que es equivalente a las ecuaciones de CG. En el caso particular de CG este tensor de Codazzi está dado por

$$\mathcal{C}_{ab} = R_{ab} - 8\pi T_{ab} - g_{ab}\frac{R - 16\pi T}{6}, \quad (4.70)$$

y las ecuaciones de CG están dadas por¹

$$\nabla_b\mathcal{C}_{ac} = \nabla_c\mathcal{C}_{ab}. \quad (4.71)$$

Es evidente que el tensor de Codazzi relaciona la curvatura y la masa del espacio-tiempo. Esta forma de las ecuaciones de campo CG indica que, en general, las soluciones CG pueden diferir de sus soluciones RG, por ejemplo, al permitir fuentes de fluidos imperfectos. Nótese de (4.70) que al considerar una solución de RG $G_{ab} = \kappa T_{ab}$, se tiene que

$$\mathcal{C}_{ab} = R_{ab} - \kappa T_{ab} - \frac{1}{6}g_{ab}(R - 2\kappa T) \quad (4.72)$$

$$= G_{ab} - \kappa T_{ab}, \quad (4.73)$$

$$= 0, \quad (4.74)$$

donde se usó $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ y que en RG $R = -\kappa T$. Esto justifica la aseveración de que toda solución de RG es solución de CG.

¹En [199] existe un error tipográfico $\nabla_b\mathcal{C}_{ac} = \nabla_a\mathcal{C}_{bc}$ pero así no se recuperan las ecuaciones de campo.

El tensor Ec. (4.61) que provee la fuente en Ec. (4.64) puede ser construido del tensor de energía–momento general de GR Sec. 2.2.1 [24]

$$T^{ab} = (\rho + p) u^a u^b + pg^{ab} + 2q^{(a}u^{b)} + \pi^{ab}. \quad (4.75)$$

Esto permite considerar fluidos generales mediante la construcción de un tensor T_{abcd} de esta manera. Sin embargo, aún no se ha determinado si este tensor construido reproduce o no la descripción y propiedades físicas de T^{ab} . Por lo tanto, es necesario un análisis exhaustivo de su interpretación geométrica y física para construir modelos cosmológicos válidos directamente a partir de T_{abcd} .

Es relativamente sencillo [24] obtener expresiones para la modificación de la densidad de energía, las presiones isotropas (y anisotropas) y el flujo de energía bajo la presencia del tensor adicional en [199] considerando el lado derecho de Ec. (4.69):

$$\tilde{\rho} = \rho + \mathcal{E}_{ab}u^a u^b + \mathcal{E}^c_c, \quad (4.76)$$

$$\tilde{q}^a = q^a - h^{ac}\mathcal{E}_{cb}u^b, \quad (4.77)$$

$$\tilde{p} = p + \frac{1}{3}h^{ab}\mathcal{E}_{ab} - \mathcal{E}^c_c, \quad (4.78)$$

$$\tilde{\pi}_{ab} = \pi_{ab} + \left(h_{(a}{}^c h_{b)}{}^d - h_{ab}h^{cd}/3 \right) \mathcal{E}_{cd}. \quad (4.79)$$

Es directo de Ec. (4.70) que las Ecs. (4.76)-(4.79) resultan ser las mismas que aquellas en RG siendo que cualesquiera contribuciones adicionales que no esten presentes en RG se cancelarán. Mostraremos esto explícitamente para la métrica LTB en Sec. 4.5.1. Este argumento, en conjunto con la ecuación de campo Ec. (4.71), indica que CG puede considerarse como una derivada de las ecuaciones de campo de Einstein, como se ha mencionado anteriormente.

4.5.1 Una solución tipo Lemaître–Tolman–Bondi en CG

La primera solución exacta en CG es una solución de vacío con una métrica tipo Schwarzschild en las coordenadas usuales de Schwarzschild [179].

El elemento de línea para esta solución es

$$ds^2 = -e^{\nu(Y)} dt^2 + e^{-\nu(Y)} dY^2 + Y^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.80)$$

donde

$$-e^{\nu(Y)} = 1 - \frac{2M}{Y} - \frac{\Lambda}{3}Y^2 + \tilde{\gamma}Y, \quad (4.81)$$

y M es la masa de Schwarzschild mass, Λ es la constante cosmológica, que se da de forma natural en esta teoría, a diferencia de la RG, y γ es otra constante de integración que no tiene equivalente en la RG. La constante de integración se produce cuando imponemos al CG las mismas condiciones que dan lugar a la solución de Schwarzschild en la RG (estaticidad, simetría esférica y vacío). Si fijamos $\gamma = 0$, obtenemos la solución de Schwarzschild. El signo de γ es indeterminado, pero puede ser negativo, por lo que tendrá geodésicas distintas de su homóloga en GR, cuyos efectos se han identificado con las aceleraciones observadas [179, 181].

Demostraremos que es posible obtener una solución inhomogénea en CG. Como la teoría es invariante bajo difeomorfismos, podemos utilizar la Ec. (4.80) para expresar una métrica de Schwarzschild en CG, mediante la misma transformación de coordenadas que en Sec. 4.3,

$$dt = \frac{\sqrt{1-\kappa}}{e^{\nu(Y)}} d\tau + \left[\frac{\partial t}{\partial r} \right]_{\tau} dr, \quad (4.82)$$

$$dY = \sqrt{1 - e^{\nu(Y)} - K} d\tau + \left[\frac{\partial Y}{\partial r} \right]_{\tau} dr. \quad (4.83)$$

La cual lleva el elemento de línea Ec. (4.80) a la forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{Y'^2}{1-K} dr^2 + Y^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.84)$$

donde Y es una función que obedece

$$\dot{Y}^2 = \frac{2M_0}{Y} + \frac{\Lambda}{3} Y^2 - \tilde{\gamma} Y - K, \quad (4.85)$$

donde $K = K(r)$ denota la energía conservada para cada geodésica radial (denotada por r). Hasta ahora, seguimos en el análogo de la solución tipo Schwarzschild en un sistema de coordenadas comóvil con las geodésicas radiales.

Ahora pasaremos del análogo de Schwarzschild en CG a una nueva solución de polvo en CG que es análoga a LTB en GR. Siguiendo el mismo razonamiento que en GR al considerar una masa variable $M_0 \rightarrow M(r)$, es decir, una densidad continua, y también consideramos $\tilde{\gamma} \rightarrow \gamma(r)$, esto lleva la Ec. (4.85) a la forma

$$\dot{Y}^2 = \frac{2M}{Y} - K + \frac{\Lambda}{3} Y^2 + \gamma(r)Y, \quad (4.86)$$

que usaremos como un ansatz y veremos la consistencia con las ecuaciones de campo de CG.

Considerando una fuente de polvo

$$T^{ab} = \rho u^a u^b, \quad (4.87)$$

las ecuaciones de balance de momento energía dan

$$\dot{\rho} = -\rho \left(2 \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Y}'}{Y'} \right). \quad (4.88)$$

Introduciendo (4.88) en las ecuaciones de campo Ec. (4.64), las componentes independientes son

$$\begin{aligned} \kappa\rho' + \left(\dot{Y}^2 + K - 2Y\ddot{Y}\right) \frac{Y'}{Y^3} + \frac{2\ddot{Y}'}{Y} + \frac{2Y\ddot{Y}'' - 2\dot{Y}''\dot{Y} - 2\dot{Y}'^2 - K}{2YY'} \\ + \left(K' + 2\dot{Y}'\dot{Y} - 2\ddot{Y}\right) \frac{Y''}{2YY'^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \kappa\rho \left(\frac{Y'^2\dot{Y}}{Y} - \dot{Y}'Y'\right) + \left(Y^2\ddot{Y}' + 2Y(\ddot{Y}'\dot{Y} - \ddot{Y}\dot{Y}') - 2\dot{Y}^2\dot{Y}' - K'\dot{Y}\right) \frac{Y'}{Y^2} \\ - \dot{Y}'\ddot{Y}' + \left(\dot{Y}^3 + K\dot{Y} - Y^2\ddot{Y}\right) \frac{Y'^2}{Y^3} + \frac{F'\dot{Y}' + 2\dot{Y}'^2\dot{Y}}{2Y} = 0. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Considerando el ansatz Ec. (4.86), las Ecs. (4.89)-(4.90) toman la forma

$$\kappa\rho' + (M'Y'Y'' - M'') \frac{2Y'}{Y^2} + \frac{4M'}{Y^3} = 0, \quad (4.91)$$

$$\kappa\rho = \frac{2M'}{Y'Y^2}. \quad (4.92)$$

Ec. (4.91) se integra a Ec. (4.92), de lo que tenemos una solución consistente a las ecuaciones de campo CG.

Finalmente, como se mencionó previamente, uno puede considerar un tensor de energía momento general, lo cual no es posible en RG. Las

Ecs. (4.76)-(4.79) se reducen a

$$\tilde{\rho} = \frac{2Y_{t,r}Y_t + K_r}{Y_r Y} + \frac{Y_t^2 + K}{K^2}, \quad (4.93)$$

$$\tilde{q}^a = 0, \quad (4.94)$$

$$\tilde{p} = -\frac{2}{3} \frac{Y_{r,t,t}}{Y_r} - \frac{1}{3} \frac{4Y_{t,t}Y_r + 2Y_{r,t}Y_t + K_r}{YY_r} - \frac{1}{3} \frac{Y_t^2 + K}{Y^2}, \quad (4.95)$$

$$\tilde{\Pi}_{rr} = \frac{2}{3} \frac{Y_{r,t,t}}{Y_r} + \frac{1}{3} \frac{-2Y_{t,t}Y_r + 2Y_{r,t}Y_t + K_r}{YY_r} - \frac{2}{3} \frac{Y_t^2 + K}{Y^2}, \quad (4.96)$$

$$\tilde{\Pi}_{\theta\theta} = -\frac{1}{3} \frac{Y_{r,t,t}}{Y_r} + \frac{1}{6} \frac{2Y_{t,t}Y_r - 2Y_{r,t}Y_t - K_r}{YY_r} + \frac{1}{3} \frac{Y_t^2 + K}{Y^2}, \quad (4.97)$$

$$\tilde{\Pi}_{\phi\phi} = \tilde{\Pi}_{\theta\theta}. \quad (4.98)$$

Como se mencionó en la Sec. 4.5, obtenemos las mismas ecuaciones, Ecs. (4.93)-(4.98) que en RG, siendo que los términos de curvatura eliminan las contribuciones adicionales.

4.5.2 El límite FLRW a través de LTB en CG

Veamos ahora el límite del FLRW del modelo tipo LTB obtenido anteriormente Ecs. (4.84),(4.86). Seguiremos los mismos pasos que en RG [57]. En nuestro caso, tenemos una función adicional, $\gamma_{\text{LTB}}(r)$. Debemos introducir esta función en una forma funcional de modo que obtengamos una ecuación que sea independiente de r , y obtengamos un límite FLRW correcto: De la

Ec.(4.86), la forma funcional de las funciones libres es (módulo una constante):

$$Y = ra(t), K = kr^2, M = \frac{H_0^2 \Omega_{M0} r^3}{2}, \gamma_{\text{LTB}} = \Omega_{\gamma 0} H_0^2 r, \quad (4.99)$$

donde H_0 y Ω_{M0} son los parámetros de hubble y densidad de materia al día de hoy, respectivamente, $a(t)$ es el factor de escala FLRW, k es la constante de curvatura de los marcos en reposo ortogonales a u^a y $\Omega_{\gamma 0}$ es una constante a determinar. Con esta elección de funciones, Ec. (4.85) toma la forma tipo Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2 a^2} = \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{M0}}{a^3} + \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{\gamma 0}}{a} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (4.100)$$

Comparando con la ecuación de Friedmann en RG

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_{i,0} a^{-3(1+w_i)} = \frac{\Omega_{M0}}{a^3} + \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}, \quad (4.101)$$

podemos verificar que la función γ_{LTB} puede modelar un fluido de quintaesencia con parámetro de ecuación de estado $w = 2/3$ [200].

Esta solución tipo FLRW Ec. (4.100) se obtuvo como un caso especial de una solución inhomogénea. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, las ecuaciones dinámicas FLRW en CG no se derivan directamente de las ecuaciones de campo.

La constante de integración $\Omega_{\text{r}0}$ está presente en la Ec. (4.100), ya que las ecuaciones de campo CG son un tipo de derivadas lineales de las ecuaciones de campo de Einstein. El término $\Omega_{\text{r}0}$ tiene diversos efectos, entre ellos un cambio en la masa de Misner-Sharpe, que aumenta con un valor positivo de Ω , un cambio en la Ley de Hubble, como se ilustra en la Fig. 4.1, y una expansión perpetua independientemente del signo de la curvatura. Ya

se ha demostrado que este comportamiento físico es posible en el caso de los modelos LTB en RG [135], y también es posible en CG. Este comportamiento físico se debe a la combinación de la constante cosmológica y el término γ , ya que ambas provocan una expansión acelerada.

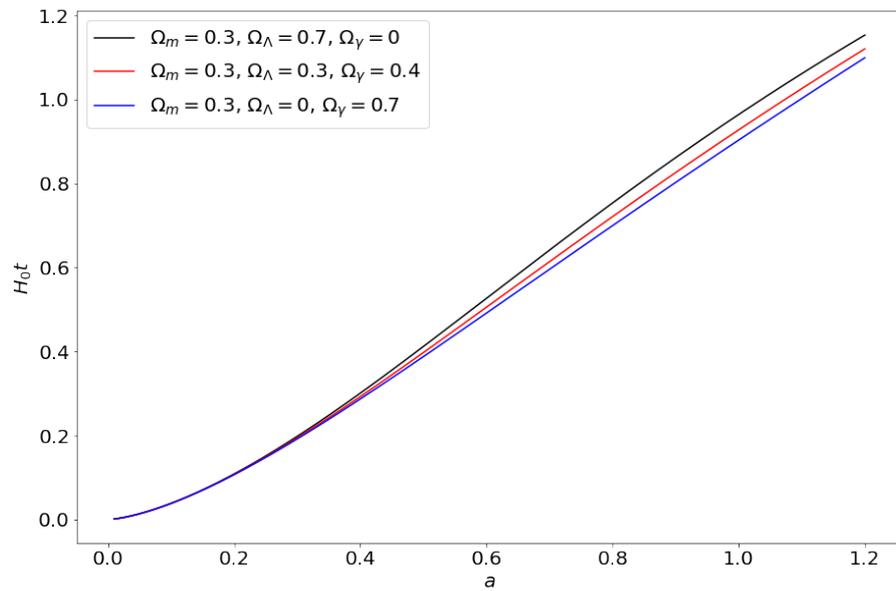


Figura 4.1: La ley de Hubble cambia debido a la aceleración causada por la constante de CG γ . Estos valores se determinaron inspirados en el modelo cosmológico estándar.

Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos mostrado como las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein son útiles tanto en aplicaciones en Cosmología y en modelos de Gravedad Modificada. En el Cap. 2 hemos discutido ampliamente la necesidad de este tipo de soluciones en el análisis de los fundamentos de cada de teoría de Gravedad, así como el plantear modelos de juguete para analizar el posible impacto de las inhomogeneidades e anisotropías en la Cosmología, sin introducir modelos perturbativos del modelo estándar de la Cosmología.

En el Cap. 3 comenzamos presentando una nueva aproximación a los modelos Szekeres-II, que se han considerado inadecuados para describir la evolución de las inhomogeneidades cosmológicas en un fondo homogéneo [58]. Hemos ideado configuraciones tipo “pancake” construidas empalmando suave-

mente regiones Szekeres–II cuasi–planas con cualquier cosmología compatible con una métrica Robertson–Walker espacialmente plana: Modelos FLRW, pero también de Sitter, anti de Sitter y espaciotiempos de Minkowski (sección 3.1.1). Como 2.3.2 se muestra en Sec. 2.3.2, los modelos Szekeres–II son (en general) Petrov tipo I y por lo tanto son compatibles con una amplia variedad de fuentes, incluyendo mezclas de fluidos y campos escalares y con fuentes que requieren modos vectoriales y tensoriales, tales como campos magnéticos y ondas gravitacionales.

Las construcciones “pancake” resultantes descritas anteriormente permiten la descripción de un número numerable arbitrario de inhomogeneidades localizadas que evolucionan juntas, inmersas en una cosmología homogénea e isótropa a la que se empalman suavemente. En Sec. 3.1.2 proporcionamos tres sencillos ejemplos de juguete para ilustrar las configuraciones de “pancakes”: Regiones de polvo Szekeres–II en fondos Λ CDM y de Sitter, así como regiones de polvo no comóvil en un fondo de Einstein de Sitter. En la Sec. 3.2.6, se muestra que los valores propios de los tensores eléctrico de Weyl y de “shear”, respectivamente, constituyen la parte no homogénea de la densidad y del escalar de Hubble, mientras que las velocidades peculiares están directamente relacionadas con el tensor de Weyl magnético. Dado que estas partes inhomogéneas se anulan en las zonas de empalme FLRW o de Sitter, las inhomogeneidades Szekeres–II pueden considerarse rigurosamente como perturbaciones covariantes exactas sobre el fondo definido por estos empalmes.

Merece la pena relacionar las construcciones “pancake” que hemos ideado y discutido aquí con los modelos de redes periódicas presentados por

Delgado y Buchert en [143], también basados en empalmes similares pero que sólo implican regiones de polvo comóvil en Szekeres-II y espacio-tiempos FLRW de polvo (sólo consideraron el modelo de Einstein de Sitter ya que asumieron $\Lambda = 0$). Estos autores consideraron los modelos de polvo Szekeres-II para probar un formalismo que desarrollaron para generar una generalización relativista totalmente general de la aproximación newtoniana de Zeldovich. Como muestran, la coincidencia suave con las regiones FLRW es una condición necesaria y suficiente para la existencia de “dominios de homogeneidad” para los que la “backreaction” (en los formalismos de promediación de Buchert) desaparece idénticamente. Dado que las construcciones de “panqueques” que hemos introducido en este artículo son más generales que el simple polvo comoving con $\Lambda = 0$, permitiendo una amplia variedad de fuentes y regiones FLRW y no restringidas a tener una distribución de red periódica, sin duda merece la pena profundizar en los resultados de [143]. Aunque estos modelos son inherentemente inhomogéneos y anisótropos, dada su riqueza de parámetros libres el reto consiste en acomodar su inhomogeneidad y anisotropía para ajustarse a las restricciones observacionales. Por último, la posibilidad de describir la dinámica de mezclas de fluidos con campos escalares, campos magnéticos y ondas gravitacionales inmersos en espacios-tiempo de Sitter o anti-Sitter, como branas de 4 dimensiones, conduce a aplicaciones potenciales de los modelos Szekeres-II al modelado del universo temprano, incluyendo escenarios inflacionarios, recalentamiento y teoría cuántica de campos semiclásica. Merece la pena estudiar estas posibles aplicaciones en futuros trabajos.

Con la esperanza de motivar una mayor exploración de estas configuraciones, trabajamos en un modelo de juguete menos idealizadas que implican

velocidades peculiares realistas y un fondo Λ CDM [2] Sec. 3.2. Encontramos una atractiva interpretación física para los modelos Szekeres-II considerados como modelos que describen CDM y energía oscura modelados como un término Λ con la novedad de incorporar velocidades peculiares $v^a = q^a/\rho$ para una fuente CDM no comóvil, todo ello en el contexto de los “modelos de pancakes” de inhomogeneidades cosmológicas descritas por regiones de soluciones Szekeres-II empalmadas previamente con un fondo Λ CDM Sec. 3 [1]. También hemos proporcionado una visión complementaria a trabajos anteriores que analizan los efectos de fuentes cosmológicas (por ejemplo bariones y CDM) que evolucionan a lo largo de diferentes marcos de 4 velocidades [46]).

Para ilustrar los efectos de la inhomogeneidad local y la anisotropía aportada por los modelos comparamos sus variables dinámicas con sus valores en el fondo Λ CDM. Para ello, consideramos una configuración formada por una única región Szekeres-II que se extiende 1.5 veces el radio de Hubble en la dirección w , suavemente empalmada con un fondo Λ CDM en ambos extremos. Obtuvimos (véanse las figuras 3.4, 3.5) mediante integración numérica de las ecuaciones de campo los contrastes temporales cósmicos actuales respecto a este fondo de la densidad y el escalar de Hubble ($\delta_0^{\Omega\rho}$ y $\delta_0^{\mathcal{H}}$ de (3.77)), también en diferentes tiempos cósmicos (véase la figura 3.8). En todas las cantidades la variación con respecto a la coordenada angular fue muy débil, identificando así una anisotropía basada en diferencias a lo largo de (esencialmente) dos direcciones: r y w (como se sugiere al observar la métrica (2.70) en coordenadas rectangulares x, y en lugar de r, ϕ).

Las figuras 3.4 y 3.5 revelan los valores actuales en tiempo cósmico de los contrastes de densidad y escalar de Hubble dentro de la región de Szekeres–II, que varían respectivamente de cero a valores máximos de 0,4 y 0,1 aproximadamente siguiendo el mismo patrón a lo largo de ambas direcciones r y w . Probamos varias combinaciones de condiciones iniciales y encontramos aproximadamente los mismos patrones de variación con diferentes valores máximos, indicando así una desviación relativamente leve de la isotropía local que puede controlarse mediante elecciones adecuadas de parámetros libres al menos en escalas hasta el radio de Hubble.

La figura 3.5 revela que el contraste del escalar de Hubble, $\delta_0^{\mathcal{H}}$, exhibe fluctuaciones con respecto al valor de fondo, H_0 , del mismo orden de magnitud $\sim 10\%$ asociado con la “tensión de H_0 ”. Sin embargo, las velocidades peculiares tienen un efecto insignificante sobre $\delta_0^{\mathcal{H}}$, que difiere en $\sim 0,01\%$ cuando se calcula para el modelo Szekeres–II con los mismos parámetros sin estas velocidades ($v^r = v^\phi = 0$). Este hecho concuerda con las observaciones que indican que las velocidades peculiares proporcionan fluctuaciones de como mucho 0,1% a la tensión de H_0 , [201]. Creemos que se trata de resultados interesantes que deberían examinarse en un contexto observacional.

El comportamiento de la velocidad peculiar radial actual $v_{r0} = [v_r]_0$ se muestra en la figura 3.7. Obsérvese cómo v_{r0} desaparece en $r = 0$ y aumenta aproximadamente de forma lineal con r para todo w dentro de la región Szekeres–II, mientras que en la dirección w toma valores mayores a medida que r aumenta (desapareciendo tal como exigen las condiciones de unión en los valores w que marcan la interfaz de coincidencia). Este patrón ilustra cómo

$r = 0$ para w variables denota el lugar de coordenadas de los observadores privilegiados, análogo a los observadores a lo largo del centro de simetría de la simetría esférica. Sin embargo, no se trata de un mero efecto de coordenadas, ya que la curva a lo largo de $r = 0$ parametrizada por w es una geodésica espacial y un vector de Killing de las hipersuperficies ortogonales a la velocidad 4-comoving (véase [1] y Sec. 3.1.1).

Encontramos elecciones de parámetros libres que conducen a una evolución libre de cruces de capas con velocidades peculiares que permanecen en el régimen no relativista $|v_r|_0 < 0,01c$ al menos en escalas del orden del radio de Hubble en las direcciones principales r y w . Sin embargo, también encontramos combinaciones de parámetros libres que conducen a cruces de cáscara alrededor de $z = 3$, con velocidades peculiares que crecen e incluso divergen, identificando así estos puntos espaciotemporales como marcadores del inicio de la virialización cuando un modelo basado en una descripción de polvo de CDM deja de ser válido. Estimamos una masa CDM de $\sim 10^{15}$ (MASAS SOLARES) contenida en una región asociada a estos cruces de envolturas que puede identificarse con un gran cúmulo galáctico.

Reconocemos plenamente las limitaciones de los modelos que hemos estudiado en este trabajo: son básicamente modelos de juguete de inhomogeneidades en un fondo Λ CDM que sólo son válidos en las escalas y tiempos cósmicos en los que CDM puede modelarse como polvo. La novedad de nuestro enfoque (con respecto al uso previo de los modelos de Szekeres en este contexto) es que consideramos la clase Szekeres-II y que CDM no está comoving con el marco asociado con el CMB y el fondo Λ CDM. Evidentemente, estos

modelos de juguete no pueden describir un proceso altamente complejo como la virialización, pero podemos suponer que los cruces de cáscara (que son una característica genérica) pueden marcar el límite de validez de los modelos debido al inicio de este proceso.

No obstante, creemos que estos modelos de juguete tienen un valioso potencial para aplicaciones cosmológicas: en primer lugar, permiten estudiar las velocidades peculiares no relativistas observadas en el marco de una solución exacta de la Relatividad General, contribuyendo así potencialmente a mejorar nuestra comprensión del papel de las velocidades peculiares en la dinámica cósmica, no sólo a escalas locales de subhorizonte profundo, sino incluso a escalas comparables al horizonte de Hubble. Asimismo, una mejor comprensión de la dinámica de las velocidades peculiares y los flujos de Hubble desde diferentes congruencias de observadores puede contribuir a abordar la tensión H_0 . Por último, los modelos pueden servir como solución exacta para probar códigos numéricos en el campo emergente de la cosmología relativista numérica.

Por otro lado, hemos mostrado la posibilidad de tener campos escalares inhomogéneos en un fondo Szekeres-II, tanto en el caso cuasi-plano como en el caso en el que la constante de curvatura $k \neq 0$. A pesar de que la solución exacta que encontramos haya sido para un campo escalar sin presiones anisotrópicas, hemos mostrado que es posible obtener una solución numérica para el caso general. Utilizando un “modelo de pancakes”, el estudio de campos escalares en un espacio-tiempo Szekeres-II provee un modelo de juguete para poder estudiar inflación y un escenario de recalentamiento, es necesario

un mayor estudio de este modelo. Sin embargo, la posibilidad de poder hacer un empalme con el modelo Λ CDM permite poder obtener correcciones a las predichas por el modelo estándar de la cosmología y así acotar parámetros libres en la teoría.

Como se discutió en Sec. 4.1 los modelos inhomogéneos son útiles para probar los fundamentos de teorías modificadas de gravedad. En particular podemos analizar la posibilidad de tener modelos inhomogéneos que puedan resolver alguno de los problemas actuales en Cosmología, Cap. 1. Es por ello que analizamos el comportamiento físico de soluciones exactas en dos modelos de gravedad, uno de ellos la teoría de Gravedad Teleparalela y el otro, una teoría reciente denominada “Cotton Gravity”.

En Sec. 4.2 estudiamos los efectos de teorías de gravedad basados en la torsión, concretamente la gravedad $f(T, B)$, con T el escalar de torsión y B el término de frontera de la teoría, en los modelos de polvo LTB esféricamente simétricos, que es una solución exacta simple que proporciona una descripción de polvo de la materia oscura fría.

Comenzamos discutiendo la solución de Schwarzschild y su relación con la métrica LTB, que provee una comprobación de consistencia para probar las soluciones en las teorías $f(T, B)$ y como ansatz para las ecuaciones diferenciales parciales resultantes. En primer lugar, discutimos brevemente los principios de TG, para poder analizar la tétrada esféricamente simétrica más general, que recupera la métrica LTB en GR. En dicho análisis, la simetría $SO(3)$ es compatible con el gauge Weitzenböck como consecuencia de una elección adecuada de los parámetros y además se demostró que la componente

tr de la parte antisimétrica de las ecuaciones de campo no se anula, por lo que las componentes simétricas y no simétricas de las ecuaciones deben resolverse simultáneamente con el fin de proporcionar la comprobación de consistencia para las soluciones a probar en teorías $f(T, B)$.

Como estamos interesados en escenarios cosmológicos viables, reducimos nuestro análisis al caso espacialmente plano y consideramos un par de funcionales $f(T, B)$, versiones modificadas de los modelos de Ley de Potencia (4.37) y Ley de Potencia Mixta (4.48), que han demostrado tener éxito en la reproducción de escenarios cosmológicos como la aceleración cósmica tardía sin aludir a una constante cosmológica y que resuelven la tensión H_0 .

El interés por estudiar modelos no homogéneos en TG es que pueden construirse modelos de juguete, permitiendo analizar la formación de estructuras y la expansión cosmológica acelerada en esquemas locales. Para investigar esto, se propuso un ansatz $\dot{Y}^2 = \frac{2M}{Y^l}$, que se basa en la solución clásica de Schwarzschild, y se encontró que la elección del parámetro $l = 4$ era una solución que recuperaba la gravedad con una forma cerrada para la función radial de Y . Esta solución también proporciona una ecuación continua y regular para las densidades de masa-energía en términos de la función radial Y y los parámetros libres para la funcional $f(T, B)$. Sin embargo, esto modifica la ecuación de Friedmann e impone restricciones especiales para reproducir una formación de estructura factible basada en observaciones. En particular, el caso $l = 4$ puede resolverse para $\alpha = 0$ ¹, véase Sec. 4.4.2, y $l = 1$ lo que se reduce al modelo FLRW. Para el modelo de ley de potencia mixta, $f(T, B) = f_0 T^m B^n$,

¹Recordando que en este caso α se obtiene de la definición del funcional $f(T, B) = -T + \alpha T^m + \beta B^n$.

con el mismo ansatz para la función Y que en el caso de ley de potencias. Consideramos los valores $n + m = 1$, $(l - 4)n - 2m = 0$ y $n = 2^{\frac{m}{2}}$, siendo que éstos resuelven el sistema de ecuaciones, véase detalle en Sec. 4.4.2. Solamente la primera opción proporciona una l constante sin imponer restricciones adicionales sobre Y o M .

Además, identificamos dos posibles soluciones para los casos de $l = 1$ y $l = 4$. Sin embargo, el caso de $l = 4$ da lugar a una solución de vacío debido a que se anula el término de frontera. El caso de $l = 1$ no altera la ley de Hubble y, por tanto, da lugar a la solución estándar de la función radial Y . Cabe destacar que todas las restricciones incluyen $l = 4$ como solución, y sólo $n + m = 1$ incluye el caso $l = 1$. En este caso, la densidad de masa-energía se expresa en términos de la densidad de masa-energía de GR, más un término adicional. Este término adicional resulta en un defecto de masa en comparación con GR cuando $f_0 > 0$. Como extensión de nuestro análisis, cada parámetro puede ser restringido por las observaciones actuales, cuyo estudio se reportará en un futuro próximo.

Como hemos enfatizado a lo largo de este trabajo, los modelos inhomogéneos pueden servir para poner a prueba los fundamentos de la teoría y analizar fenomenológicamente las consecuencias de la misma. Continuando con modelos LTB presentamos en Cap. 4 la primera solución exacta e inhomogénea en una teoría de Gravedad modificada de reciente creación, denominada Cotton Gravity. Mostramos que esta teoría es inconsistente como una generalización de la RG, siendo que la solución de fondo en cosmología (Modelos FLRW) no se puede obtener directamente a partir de las ecuaciones de cam-

po de la teoría. Sin embargo, de la solución que obtenemos mostramos que una solución tipo FLRW que incluye una constante de integración adicional que puede modelarse como un fluido de quintaesencia con un parámetro de ecuación de estado $w = 2/3$. El que aparezca esta constante de integración adicional no es ninguna sorpresa siendo que las ecuaciones de campo pueden considerarse como combinaciones de los tensores de energía-momento y de Einstein, por tanto dos constantes de integración adicionales aparecerán en la teoría, γ , Λ . Además mostramos un procedimiento genérico a partir del cual se pueden obtener más soluciones exactas para esta teoría a partir de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein.

Como se discutió previamente, las ecuaciones de CG en general admitirán una clase de soluciones más amplia que aquellas de RG. Por ejemplo, podríamos considerar flujos de energía en una métrica LTB, sin embargo éstos serán puramente consecuencia de la geometría del espacio-tiempo como se mostró en la Sec. 4.5.

Apéndice

A

Análisis de modelos cosmológicos usando redes neuronales

A fin de abordar algunos de los problemas del modelo Λ CDM, existen varias propuestas, como el modelo de energía oscura dinámica [202], modelos que mostramos y discutimos previamente Cap. 2-3 [1, 3], así como modelos de gravedad modificada Cap. 4 [20]. Sin embargo, el gran número de soluciones propuestas [203] de diferente naturaleza y problemas intrínsecos, así como la precisión y los errores sistemáticos en los datos, dificultan el análisis de todas estas propuestas disponibles. Es por ello que el Aprendizaje Automático “Machine Learning” (ML) y las Redes Neuronales “Neural Networks” (NNs) se han convertido en una poderosa herramienta para el análisis de conjuntos de datos en cosmología [204, 205]. La potente capacidad de predicción de las NNs, combinada con el eficiente costo computacional de estas arquitecturas [206,

207] han demostrado proveer predicciones precisas. Sin embargo, la cantidad limitada de datos cosmológicos da lugar a un problema fundamental para el análisis y la predicción de datos, ya que estas NN necesitan varios miles de puntos de datos para lograr la convergencia [183].

A.1 Redes Neuronales Recurrentes para cosmologías de energía oscura

Las “Redes Neuronales Artificiales” (ANN) son un modelo de ML que han demostrado ser potentes herramientas para analizar una gran cantidad de datos y proporcionar predicciones precisas [204, 205]. Las NN están compuestas por nodos en los que los datos se procesan mediante cálculos, estos nodos se conocen como neuronas o unidades [208]. Se pueden apilar varias capas de unidades para formar lo que se conoce como “Deep Learning”, que permite resolver tareas complejas [209]. Esta arquitectura está formada por una capa de entrada, una o varias capas ocultas y una capa de salida. En una ANN, las neuronas de una capa están totalmente conectadas a las neuronas de las capas anteriores. Dos casos particulares de ANN son las redes neuronales recurrentes (RNN) y las redes neuronales convolucionales (CNN) [210]. Las CNN están diseñadas para trabajar con entradas [211, 212] estructuradas en cuadrícula, como las imágenes, pero también tienen éxito en muchas otras tareas, como el reconocimiento de voz y el procesamiento del lenguaje natural. Mientras tanto, las RNN trabajan con datos secuenciales, en este caso cada entrada está influida por las entradas anteriores [213, 214]. En una RNN, exis-

te una correspondencia uno a uno entre las capas de la red y las posiciones en la secuencia. La característica clave de la RNN es que la salida de la capa oculta en un paso t se utiliza como entrada en el paso $t + 1$. Dado que la salida en un paso de tiempo t es una función de todas las entradas de los pasos de tiempo anteriores, se dice que la RNN tiene una forma de “memoria”. Las RNN se han aplicado con éxito al reconocimiento de la escritura a mano y del habla, a las predicciones de series temporales y a su reciente uso en aplicaciones cosmológicas [206, 207], por lo que en lo sucesivo consideraremos las RNN.

Las neuronas tienen números como entradas y salidas. Cada entrada x tiene asociado un peso aleatorio w :

$$z = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n \quad (\text{A.1})$$

De Ec. (A.1) es claro que los datos de entrada forman matrices X_i , los pesos forman más matrices W_i , por lo que podemos escribir el producto de estas matrices como [215]

$$Z_{i+1} = W_i^T X_i. \quad (\text{A.2})$$

Para obtener la salida se utiliza una función de activación no lineal ϕ que modula y hereda un comportamiento no lineal al valor de Z_i , y asigna valores para la siguiente capa. Este proceso se denomina propagación hacia delante (“Forward propagation”) y se repite hasta llegar a la última capa. Por lo tanto, las capas siguientes adoptan los valores

$$X_{i+1} = \phi(Z_{i+1}). \quad (\text{A.3})$$

Se pueden utilizar distintas opciones de funciones de activación para simular diferentes modelos de aprendizaje automático, y su elección es una parte

crucial de la construcción de redes neuronales, ya que las no linealidades que incorporan las funciones de activación son de distinta naturaleza. El uso de funciones diferenciables como funciones de activación presenta una ventaja, ya que para el ajuste de los pesos se puede utilizar un método de optimización llamado “Gradient Descent” [216], que, como su nombre indica, hace uso de las derivadas para ajustar los parámetros de la red con el fin de minimizar la pérdida. Algunos ejemplos de funciones de activación diferenciables son la tangente hiperbólica ($\tanh(z)$), la función Unidad Lineal Rectificada: $\text{ReLU}(z) = \max(0, z)$, la unidad lineal exponencial (ELU), la ELU Escalada (SELU) [210]. Por ejemplo, para predecir la probabilidad de una clase binaria, es habitual utilizar la función sigmoidea:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}. \quad (\text{A.4})$$

La función ReLU es continua pero no diferenciable en $z = 0$ y su derivada es 0 para $z < 0$. Esta función ha sustituido en gran medida a la función sigmoidea en las ANN debido a la facilidad en el entrenamiento, tiene la ventaja de ser rápida de calcular. Además, el hecho de que no tenga un valor de salida máximo ayuda a reducir algunos problemas durante el método de optimización. Se ha demostrado que la función ELU supera a ReLU, reduciendo el tiempo de entrenamiento y obteniendo mejores resultados en el conjunto de pruebas. Su definición es

$$\text{ELU}_\alpha(z) = \begin{cases} \alpha(e^z - 1) & z < 0 \\ z & z \geq 0 \end{cases}$$

El SELU es una variante escalada de la función de activación ELU. Esta función puede realizar la auto-normalización bajo ciertas condiciones, y superar

a otras funciones de activación. Su definición es:

$$\text{SELU}(z) = \lambda \begin{cases} \alpha(e^z - 1) & z < 0 \\ z & z \geq 0 \end{cases}$$

La tangente hiperbólica es continua, diferenciable, y su valor de salida oscila entre -1 y 1 , en comparación con la sigmoidea que oscila entre 0 y 1 . Se relacionan mediante la fórmula $\tanh(z) = 2\sigma(2z) - 1$. El mayor gradiente respecto a la sigmoide hace que sea más fácil de entrenar.

En la última capa de las ANN, el valor de las neuronas se evalúa mediante una métrica llamada función de pérdida (o simplemente pérdida), que mide la diferencia entre la predicción de la ANN y el valor real. Un ejemplo de función de pérdida es el error cuadrático medio (ECM):

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_i^n (Y_i - Y'_i)^2, \quad (\text{A.5})$$

donde Y'_i es el valor esperado, y Y_i es la predicción. La pérdida se minimiza mediante un algoritmo de optimización. A continuación, los valores de los pesos se ajustan con el método denominado retropropagación (CITA). La parte de una NN que conserva algún estado a lo largo de los pasos temporales se denomina célula (o celda) de memoria. Las capas ocultas pueden utilizar una función de activación.

La elección del optimizador es otro hiperparámetro. Entrenar una red neuronal profunda muy grande puede ser extremadamente lento. Se puede aumentar la velocidad utilizando un optimizador más rápido que Gradient Descent. Algunos de los algoritmos de optimización más populares son la optimización de momento, el Gradiente Acelerado de Nesterov, AdaGrad, RMS-Prop, Adam, etc. La optimización de momento trata con gradientes previos:

en cada iteración, resta el gradiente local del vector de momento \mathbf{m} (multiplicado por la tasa de aprendizaje μ), y actualiza los pesos añadiendo este vector de momento. Para simular algún tipo de mecanismo de fricción y evitar que el impulso crezca demasiado, el algoritmo introduce un nuevo hiperparámetro β , llamado impulso, que debe establecerse entre 0 (alta fricción) y 1 (sin fricción). Un valor típico de momentum es 0,9. Esta técnica permite acelerar el entrenamiento. La idea básica es dar mayor preferencia a las direcciones coherentes sobre los pasos múltiples. Esto permite utilizar pasos más grandes en la dirección correcta de aprendizaje. El algoritmo RMSProp evita el riesgo de ir demasiado rápido en el proceso de aprendizaje y no converger nunca al óptimo global. Esto se consigue acumulando sólo los gradientes de las iteraciones más recientes. Era el algoritmo de optimización preferido de muchos investigadores hasta que salió a la luz la optimización Adam. Adam significa estimación adaptativa de momentos, y combina las ideas de la optimización de momentos y RMSProp: como la optimización de momentos, realiza un seguimiento de una media exponencialmente decreciente de gradientes pasados; y como RMSProp, realiza un seguimiento de una media exponencialmente decreciente de gradientes pasados al cuadrado. Adam es un algoritmo de tasa de aprendizaje adaptativo que requiere un menor ajuste de sus hiperparámetros. Este algoritmo es muy popular porque incorpora la mayoría de las ventajas de otros algoritmos, y a menudo supera a los otros métodos.

Las RNN utilizan la retropropagación, por lo que tienen problemas como el gradiente evanescente (y explosivo) y la dependencia a largo plazo. Como resultado, se han propuesto algunas variantes de la red neuronal recurrente, como la memoria a corto plazo de larga duración (LSTM) y la unidad

recurrente controlada (GRU). La LSTM resuelve los problemas anteriores introduciendo un mecanismo llamado compuertas, que guarda la información y olvida lo que no es importante para el aprendizaje. Básicamente, utiliza el estado de una célula como una especie de memoria a largo plazo que retiene una parte de la información de estados anteriores mediante una combinación de operaciones parciales de “olvido” e “incremento” de los estados anteriores de la célula. La red neuronal resultante es capaz de modelar dependencias de largo alcance en los datos. Por estas razones, éste es el tipo de RNN más utilizado. Los modelos bidireccionales utilizan información del pasado y del futuro de un paso temporal específico, empleando estados ocultos separados para las direcciones hacia delante y hacia atrás, que suelen proporcionar un mejor rendimiento. La GRU se considera una simplificación de la LSTM, pero tiene dos puertas y utiliza un estado oculto para transferir información. La LSTM controla directamente la cantidad de información que cambia en el estado oculto utilizando puertas de olvido y salida independientes. Por otro lado, una GRU utiliza una única puerta de reinicio para lograr el mismo objetivo. Sin embargo, la idea básica de la GRU es similar a la de una LSTM, en términos de cómo reinicia parcialmente los estados ocultos.

A.2 Redes Neuronales Recurrentes para el análisis de cosmologías de energía oscura

Un problema a estudiar con las RNN es que tan bien ajustan los modelos de energía oscura a los datos observacionales y la posibilidad de obtener

datos generados por estas redes RNN a partir de ese ajuste. A continuación damos una breve reseña de los modelos de energía oscura dinámica.

A.2.1 Cosmologías de energía oscura

Siendo que el problema de la naturaleza de la energía oscura aún es un tema abierto, una manera estándar de estudiar a la energía oscura es introducir una parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura [17, 217, 18]. Mediante esta ecuación se puede estudiar el comportamiento de la energía oscura en un modelo FLRW, las cuales se encuentran en términos del corrimiento al rojo, i.e.

$$p_{DE} = w(z)\rho_{DE}. \quad (\text{A.6})$$

Existen muchas propuestas de parametrizaciones en la literatura [17]. En nuestro caso analizaremos dos de ellas, para ello utilizamos las ecuaciones de Friedmann y Raychaudhuri:

$$E(z)^2 = \left(\frac{H(z)}{H_0} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_m + \rho_{DE})[\Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0(DE)}f(z)]$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2}[\Omega_m + \Omega_{DE}(1+3w)]$$

donde H es el parámetro de Hubble, y el subíndice 0 indica valores evaluados al día de hoy.

Utilizando la ecuación de la densidad de energía oscura

$$\rho_{DE}(z) = \rho_{0(DE)}f(z)$$

donde

$$f(z) = \exp\left(3 \int_0^z \frac{1 + w(z')}{1 + z'} dz'\right).$$

Por tanto, modelar $w(z)$ puede dar una descripción del parámetro de Hubble.

A.2.2 Cosmologías de energía oscura dinámica

- Parametrización Lambda Cold Dark Matter Λ CDM. Usamos este modelo como referencia. Tiene un parámetro independiente Ω_m , y está dado por:

$$E(z)^2 = \Omega_m(1 + z)^3 + (1 - \Omega_m)$$

donde consideramos $w = -1$. Como se mencionó en el Cap. 2, el modelo Λ CDM es el modelo estándar de la cosmología, usaremos este modelo como base para comparar con el resto de los modelos.

- Parametrización “Redshift” Lineal: La ecuación de estado de la energía oscura es

$$w(z) = w_0 - w_1 z,$$

y por tanto obtenemos

$$E(z)^2 = \Omega_m(1 + z)^3 + (1 - \Omega_m)(1 + z)^{3(1+w_0+w_1)} e^{-3w_1 z}.$$

Esta ecuación de estado es una primera aproximación a una serie de Taylor, sin embargo es claro que tiene divergencias para $z \rightarrow \infty$ que deben tomarse en cuenta al generalizar esta ecuación de estado.

- Parametrización Chevallier-Polarski-Linder (CPL). En este caso tenemos la ecuación de estado:

$$w(z) = w_0 + \frac{z}{1+z}w_1, \quad (\text{A.7})$$

y la evolución en este caso es

$$E(z)^2 = \Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_m)(1+z)^{3(1+w_0)}(1+z^2)^{3w_1/2}. \quad (\text{A.8})$$

En este caso, se tiene una mejor aproximación en una serie tipo Taylor, ya que se toma en cuenta el comportamiento divergente de la parametrización “Redshift” lineal al hacer la expansión no sobre el corrimiento al rojo, sino sobre el factor de escala $a(z) = z/1+z$. Esta ecuación de estado ha sido popular en los análisis de datos cosmológicos por su buen ajuste [17, 218, 219], sin embargo tiene un comportamiento divergente a tiempos futuros $z = -1$.

- Parametrización Barboza-Alcaniz (BA): La ecuación de estado es

$$w(z) = w_0 + \frac{z(1+z)}{1+z^2}w_1, \quad (\text{A.9})$$

y la evolución del modelo es

$$E(z)^2 = \Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_m)(1+z)^{3(1+w_0)}(1+z^2)^{3w_1/2}. \quad (\text{A.10})$$

En este caso, la parametrización de BA carece de la divergencia encontrada en los modelos CPL. Al igual que en la parametrización CPL, BA es consistente con las observaciones [218, 220, 221].

A.2.3 Usando redes neuronales para en modelos de energía oscura

La metodología que hemos propuesto es construir una RNN variando cada uno de los hiperparámetros, mostrados en la Tabla A.1, esto lleva a dos arquitecturas. Además se utilizó como función de activación tanh, como función de pérdida error cuadrático medio y “Adam” como optimizador. Estos parámetros fueron escogidos basándonos en la literatura [207] y probando diferentes elecciones que pueden reproducir los vecindarios de confianza obtenidos por los datos de Pantheon [222] a $1-\sigma$.

Arquitectura	Neuronas	Tamaño del lote	Épocas	Dropout
	Iteraciones	Caminantes Aleatorios	Tasas de convergencia	Bins de una muestra
1	200	5	100	0.7
2	200	10	150	0.7

Tabla A.1: Elección de los hiperparámetros en ambas arquitecturas y su asociación con el lenguaje de procesamiento Bayesiano en cosmología.

Los hiperparámetros de las RNN pueden identificarse con elementos en el análisis Bayesiano usual en cosmología (Los fundamentos y el desarrollo del análisis Bayesiano en cosmología se encuentran descritos extensamente en diversos textos especializados, por ejemplo [223, 224, 225]). Las neuronas pueden verse como iteraciones, siendo que la cantidad de las neuronas es las veces que los datos serán procesados a través de la red neuronal. Las épocas pueden relacionarse con las tasas de convergencia siendo que es el análogo al

criterio de Gelman-Rubin [223, 224, 225]. El tamaño de la muestra (“Batch size”) está relacionado con el número de caminantes aleatorios, siendo que una elección menos fina del tamaño de lote dará lugar a un resultado menos preciso. Finalmente el “dropout” puede asociarse con los “Bins” de una muestra siendo que el “dropout” es una elección de la cantidad de nodos entre capas delanteras y traseras para evitar una sobreestimación.

Por esto mismo, el proceso de entrenamiento de las RNN’s puede pensarse como una alternativa a el análisis Bayesiano en programas como emcee [226] o Montepython [227]. La ventaja principal de las RNN sobre estos programas es el tiempo de procesamiento de las RNN’s, el cual es varios órdenes de magnitud menor para la cantidad de datos utilizados. Sin embargo, cabe destacar que la cantidad de datos utilizados, 1048, es de un orden mucho menor a lo que usualmente se usa en análisis con RNN [228, 229, 230] los cuales se hacen con conjuntos de datos del orden de, al menos, 100 mil datos. La cantidad de datos tendrá un impacto en los resultados obtenidos y la elección de los hiperparámetros. Cambiando de base de datos a Pantheon+ [231, 232], la cual cuenta con 1701 datos compuestos por 1550 supernovas Sne Ia, los hiperparámetros usados Sec. A.2.3 no dan lugar a un vecindario de confianza que coincida a $1 - \sigma$ con aquél de los datos de Pantheon+. Los cambios que deberán efectuarse es un trabajo en curso que se reportará a futuro.

En entrenamiento supervisado, dos conjuntos de datos deben ser considerados, un conjunto de entrenamiento y un conjunto de validación. En nuestro caso, para cada arquitectura los datos constan de el corrimiento al rojo (z) y la magnitud aparente (m_B) de la muestra de Pantheon que consiste en

1048 SNe-Ia [222]. Dividimos el conjunto total de datos en un conjunto de entrenamiento que consiste de 80 % de la muestra, elegida al azar, además de los primeros y últimos diez corrimientos al rojo y su correspondiente m_B , siendo que esta elección probó ser exitosa para proporcionar los vecindarios de confianza correctos para el modelo de concordancia Fig. A.2, siendo que la densidad de puntos en los corrimientos al rojo mayores es considerablemente más baja, el no incluirlos llevaba a un aprendizaje incorrecto que devolvía una ley de Hubble con una densidad de materia no física. Por otro lado, en el conjunto de validación también se fijan los primeros y últimos diez datos junto con el 20 % restante de la muestra. Una vez que el entrenamiento de las RNN ha sido completado, obtenemos una predicción del corrimiento al rojo y su correspondiente m_B que consiste de 2000 puntos.

DISCUSION DE LA CANTIDAD DE DATOS

A.3 Comparando las predicciones de la RNN con cosmologías de energía oscura

Una vez que se obtuvieron los datos predichos por la RNN, obtuvimos los vecindarios de confianza para ambas arquitecturas y para el conjunto de datos de Pantheon. El ajuste se hace minimizando la función

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{ij} X^i C_{ij}^{-1} X^j, \quad (\text{A.11})$$

donde C_{ij} es la matriz de covarianza de los datos de Pantheon, \vec{X} es el vector de los parámetros libres del modelo. En nuestro caso, ese vector está dado por

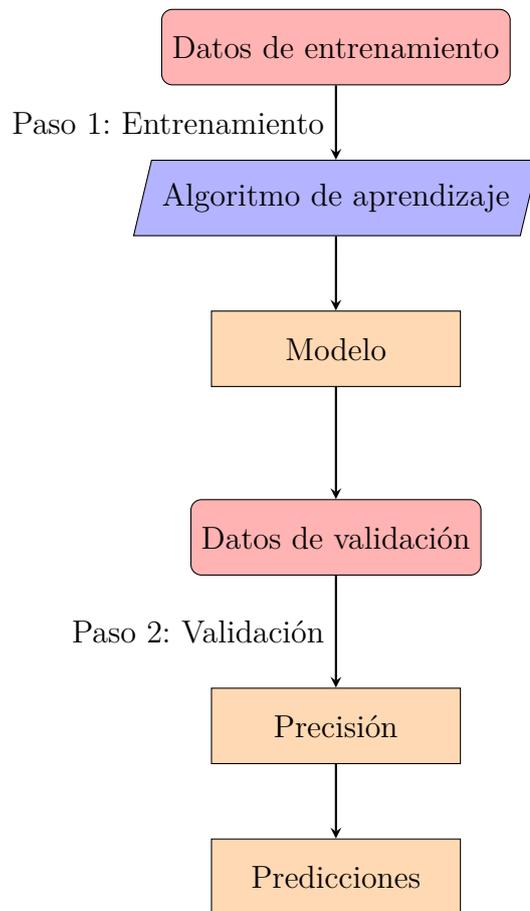


Figura A.1: Proceso de obtener datos predichos por una RNN.

el módulo de distancia de la muestra de Pantheon

$$\mu(z_i, \Omega_{m,0}, H_0, w_0, w_1) = 5 \log_{10} \left[(1+z) \int_0^z E^{-1}(u, \Omega_m, H_0, w_0, w_1) du \right] + 25, \quad (\text{A.12})$$

haciendo así a nuestro vector

$$X^i = \mu(z_i, \Omega_{m,0}, H_0, w_0, w_1) - \mu_{obs}(z_i) \quad (\text{A.13})$$

La minimización se efectuó con la paquetería Scipy¹ en un programa de Python y posteriormente se utilizó un algoritmo de método de Montecarlo basado en cadenas de Markov, emcee² [226]. En todos los casos se utilizaron 30000 pasos y 32 caminantes aleatorios, de lo cual se descartaron 700 pasos con un thin de 200 y se escogieron “priors planos” cuyos valores fueron obtenidos de la minimización en Scipy y éstos se encuentran en la Tab. A.2.

Modelo	w_0	w_1	H_0	$\Omega_{m,0}$
Λ CDM	-1 ³	0	73.63	0.30
CPL	-1.04	0.04	73.76	0.29
BA	-1.08	-0.65	73.59	0.36

Tabla A.2: Priors planos utilizados en emcee.

Mediante este ajuste obtuvimos una concordancia de 1- σ entre los vecindarios de confianza obtenidas por ambas arquitecturas y las del conjunto de datos Pantheon, Fig. A.2. Obsérvese que los errores de las predicciones son mucho mayores que los obtenidos a partir del conjunto de datos original. Sin

¹<https://scipy.org/>

²<https://emcee.readthedocs.io/>

embargo, como se puede ver en la Fig. A.4 hay una diferencia de 0,05 % de diferencia entre el modelo teórico y el predicho en el rango de corrimiento al rojo analizado.

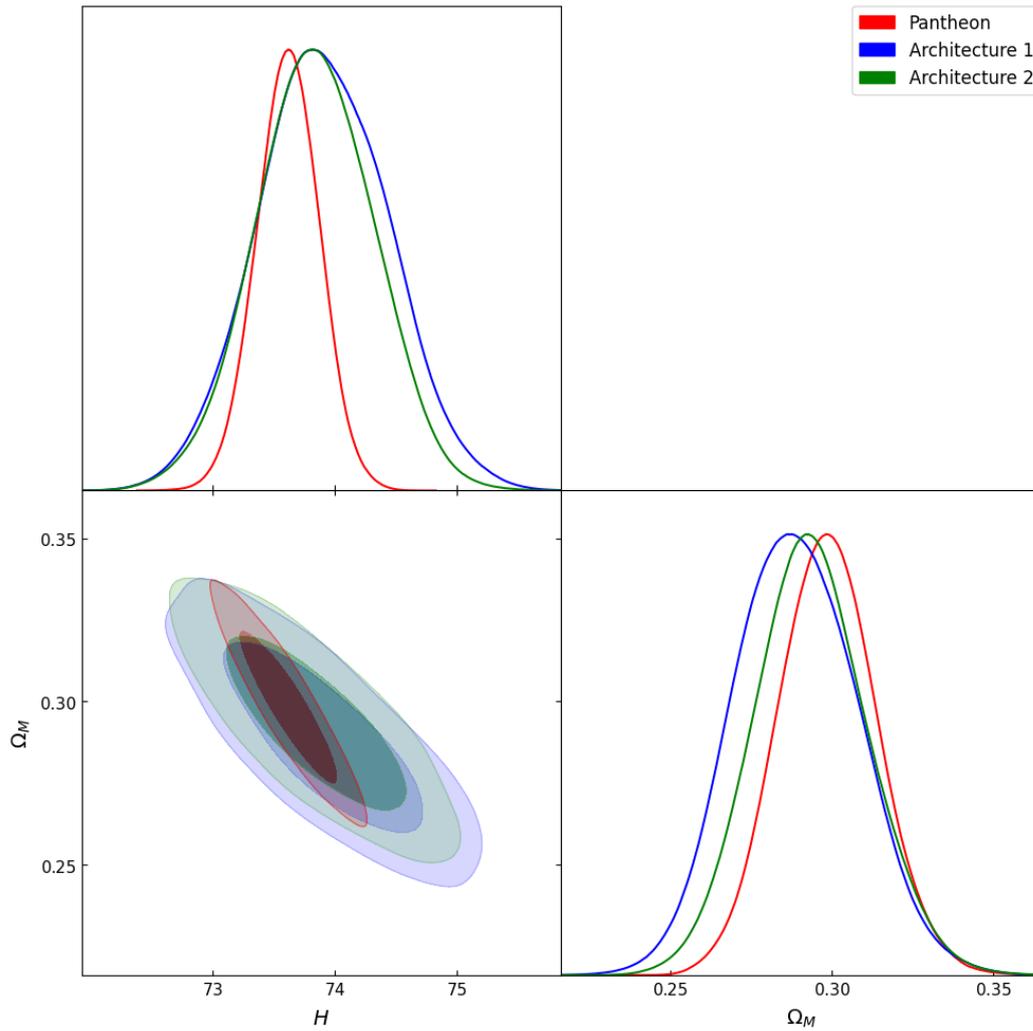


Figura A.2: Vecindarios de confianza para el modelo LCDM utilizando los datos predichos a través de la RNN y el conjunto de datos Pantheon.

Para mostrar la viabilidad cosmológica de dichas arquitecturas, analizamos dos parametrizaciones diferentes de la Ecuación de Estado (EoS), un

modelo CPL Ec. (A.7) y un modelo BA Ec. (A.9). Como se muestra en la Fig. A.4 tanto para CPL como para BA las diferencias entre las magnitudes aparentes obtenidas a partir de las predicciones de la RNN y los modelos teóricos. Como puede observarse en todos los casos, las discrepancias son inferiores a 0,2% para los corrimientos al rojo considerados. Se obtuvieron resultados similares para la *Arquitectura 2*, Fig. A.5.

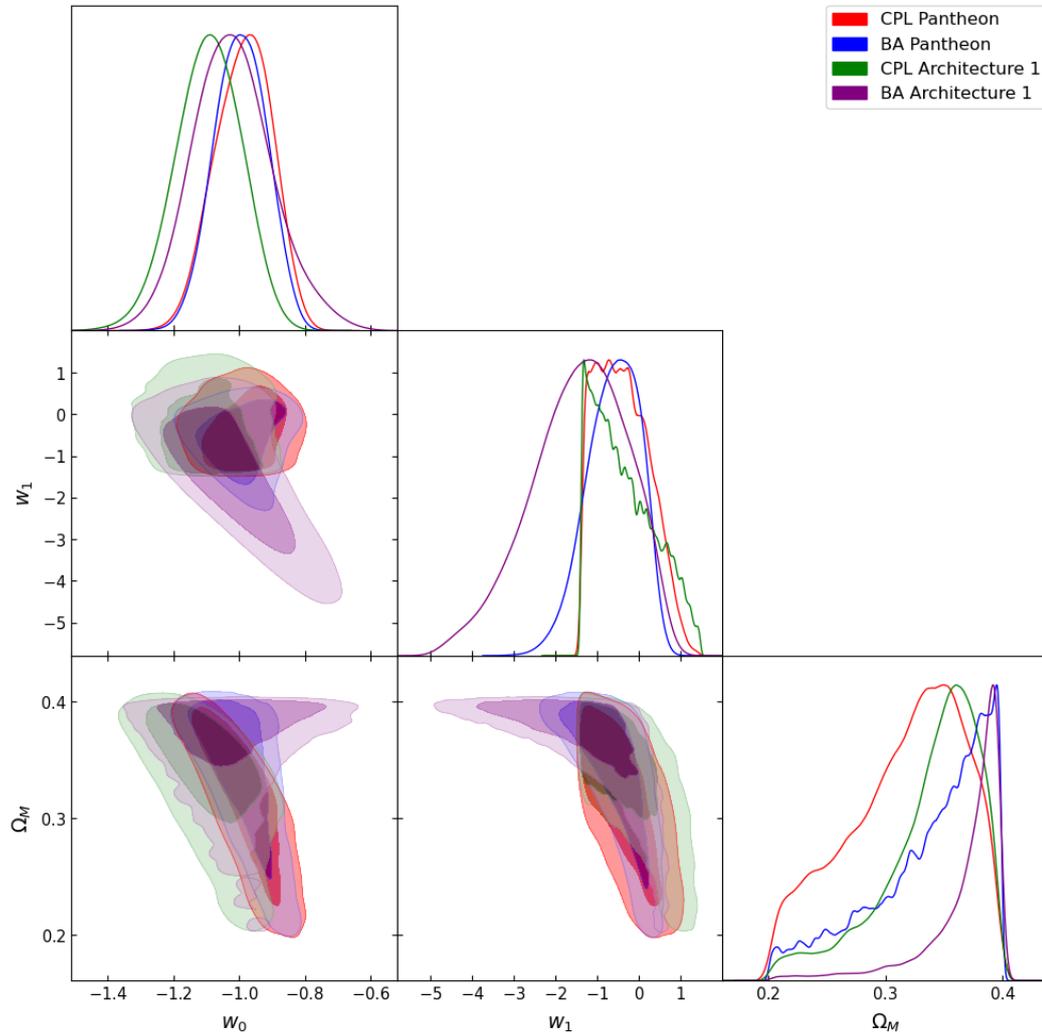


Figura A.3: Vecindarios de confianza para los modelos BA y CPL para los datos predichos por la RNN y el conjunto de datos de Pantheon.

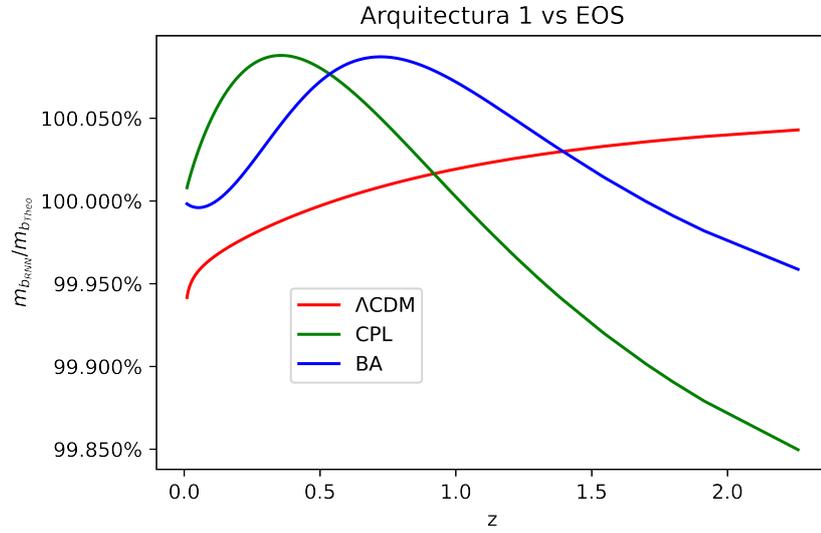


Figura A.4: Comparación de la magnitud aparente (m_B) predicha por la RNN con la magnitud aparente obtenida de los modelos teóricos para la arquitectura 1.

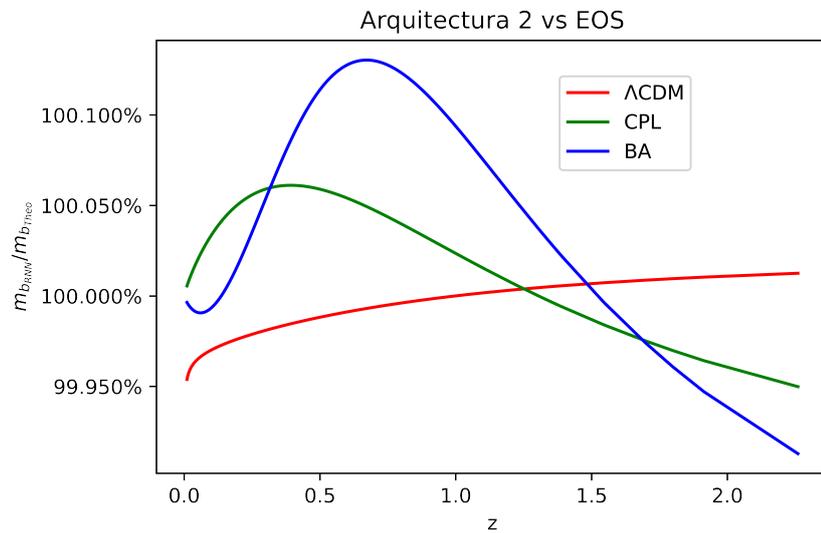


Figura A.5: Comparación de la magnitud aparente (m_B) predicha por la RNN con la magnitud aparente obtenida de los modelos teóricos para la arquitectura 2.

Bibliografía

- [1] Sebastián Nájera and Roberto A Sussman. Pancakes as opposed to swiss cheese. *Classical and Quantum Gravity*, 38(1):015016, 2020. (ref. pág. i, 30, 54, 60, 66, 132, 134, 141)
- [2] Sebastián Nájera and Roberto A Sussman. Non-comoving cold dark matter in a Λ cdm background. *The European Physical Journal C*, 81(4):374, 2021. (ref. pág. i, 30, 66, 132)
- [3] Sebastián Nájera, Aram Aguilar, Geovanny A Rave-Franco, Celia Escamilla-Rivera, and Roberto A Sussman. Inhomogeneous solutions in $f(t, b)$ gravity. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 19(Supp01):2240003, 2022. (ref. pág. i, 94, 103, 141)
- [4] Sebastián Nájera, Aldo Gamboa, Alejandro Aguilar-Nieto, and Celia Escamilla-Rivera. On negative mass cosmology in general relativity. *Astronomy & Astrophysics*, 651:L13, 2021. (ref. pág. ii)
- [5] Celia Escamilla-Rivera, José María de Albornoz-Caratozzolo, and Sebastián Nájera. Fab-four cosmography to tackle the hubble tension. *arXiv preprint arXiv:2306.14855*, 2023. (ref. pág. ii)

-
- [6] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. (ref. pág. 1, 3, 4, 6, 18, 26, 43, 86)
- [7] B. Ratra and M. S. Vogeley. The beginning and evolution of the universe. *PASP*, 120(865):235, 2008. (ref. pág. 1)
- [8] J. D. North. *The Measure of the Universe: A History of Modern Cosmology*. Dover, 1990. (ref. pág. 1)
- [9] M. S. Longair. *The Cosmic Century: A History of Astrophysics and Cosmology*. Cambridge University Press, 2009. (ref. pág. 1)
- [10] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophys. J.*, 142(1):419, 1965. (ref. pág. 2)
- [11] R. Massey, T. Kitching, and J. Richard. The dark matter of gravitational lensing. *Rep. Prog. Phys.*, 73(086901):1–26, 2010. (ref. pág. 4)
- [12] P. Astier. The expansion of the universe observed with supernovae. *Rep. Prog. Phys.*, 75(116901):1–35, 2012. (ref. pág. 4)
- [13] Saul Perlmutter, Goldhaber Aldering, Gerson Goldhaber, RA Knop, Peter Nugent, Patricia G Castro, Susana Deustua, Sebastien Fabbro, Ariel Goobar, Donald E Groom, et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999. (ref. pág. 4)
- [14] Adam G Riess, Alexei V Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M Garnavich, Ron L Gilliland, Craig J Hogan,

- Saurabh Jha, Robert P Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998. (ref. pág. 4)
- [15] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press, 2010. (ref. pág. 4, 5)
- [16] S. Carroll. The cosmological constant. *Living Rev. Relativity*, 4(1):1–56, 2001. (ref. pág. 5)
- [17] Celia Escamilla-Rivera. Status on bidimensional dark energy parameterizations using SNe Ia JLA and BAO datasets. *Galaxies*, 4(3):8, 2016. (ref. pág. 5, 148, 150)
- [18] Dragan Huterer and Daniel L Shafer. Dark energy two decades after: observables, probes, consistency tests. *Reports on Progress in Physics*, 81(1):016901, 2017. (ref. pág. 5, 148)
- [19] Edmund J Copeland, Mohammad Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15(11):1753–1935, 2006. (ref. pág. 5)
- [20] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, 513:1–189, 2012. (ref. pág. 5, 17, 94, 95, 141)
- [21] T. Padmanabhan. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, 1993. (ref. pág. 7, 8, 26)

-
- [22] J. M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D.*, 22(8):1882–1905, 1980. (ref. pág. 7, 36)
- [23] G. F. R. Ellis and M. Bruni. Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations. *Phys. Rev. D.*, 40(6):1804–1818, 1989. (ref. pág. 7, 36)
- [24] George FR Ellis, Roy Maartens, and Malcolm AH MacCallum. *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press, 2012. (ref. pág. 8, 10, 15, 22, 23, 26, 36, 40, 51, 57, 121)
- [25] C. Fidler, A. Kleinjohanna, T. Tramb, C. Rampfc, and K. Koyamad. A new approach to cosmological structure formation with massive neutrinos. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2019(25):1–28, 2019. (ref. pág. 8)
- [26] K. S. Dawson et al. The baryon oscillation spectroscopic survey of sdss-iii. *AJ*, 145(1):1–41, 2012. (ref. pág. 8)
- [27] M. J. Drinkwater et al. The wigglez dark energy survey: survey design and first data release. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 401(3):1429–1452, 2012. (ref. pág. 8)
- [28] Stephen R Green and Robert M Wald. Newtonian and relativistic cosmologies. *Physical Review D*, 85(6):063512, 2012. (ref. pág. 9)
- [29] J. Adamek and C. Fidler. The large-scale general-relativistic correction for Newtonian mocks. *arXiv e-prints*, page arXiv:1905.11721, May 2019. (ref. pág. 9)

-
- [30] X. Hernández and R. A. Sussman. On the newtonian limit and cut-off scales of isothermal dark matter haloes with cosmological constant. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 345(3):871–882, 2003. (ref. pág. 9)
- [31] G. F. R. Ellis et al. General relativistic analysis of peculiar velocities. *Class. Quantum Grav.*, 18(23):5115–5123, 1998. (ref. pág. 10)
- [32] H. van Elst and G. F. R. Ellis. Quasi-newtonian dust cosmologies. *Class. Quantum Grav.*, 15(11):3545–3573, 1998. (ref. pág. 10)
- [33] Michael A Strauss and Jeffrey A Willick. The density and peculiar velocity fields of nearby galaxies. *Physics reports*, 261(5-6):271–431, 1995. (ref. pág. 10)
- [34] R. B. Tully, E. J. Shaya, I.D. Karachentsev, H.M. Courtois, D. D. Kocevski, and et al. L. Rizzi. Our peculiar motion away from the local void. *Astrophys. J.*, 676(1):184–205, 2008. (ref. pág. 10)
- [35] A. Kashlinsky, F. Atrio-Barandela, D. Kocevski, and H. Ebeling. A measurement of large-scale peculiar velocities of clusters of galaxies: Results and cosmological implications. *Astrophys. J.*, 686(2):L49–L52, 2009. (ref. pág. 10)
- [36] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993. (ref. pág. 11)
- [37] K. Bolejko, M. Ahsan Nazerb, and D. L. Wiltshireb. Differential cosmic expansion and the hubble flow anisotropy. *JCAP*, 2016:1–31, 2016. (ref. pág. 11)

-
- [38] Henk van Elst and George FR Ellis. The covariant approach to lrs perfect fluid spacetime geometries. *Classical and Quantum Gravity*, 13(5):1099, 1996. (ref. pág. 11)
- [39] M. S. Turner. Tilted universe and other remnants of the preinflationary universe. *Phys. Rev. D.*, 84(1):064036, 1991. (ref. pág. 11)
- [40] L. Herrera, A. Di Prisco, and J. Ibañez. Tilted lemaitre-tolman-bondi spacetimes: Hydrodynamic and thermodynamic properties. *Phys. Rev. D.*, 84(1):064036, 2011. (ref. pág. 11)
- [41] A. G. Riess et al. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1 % foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond Λ CDM. *ApJ*, 876(1), 2019. (ref. pág. 11)
- [42] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Bacigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020. (ref. pág. 11, 24, 117)
- [43] V. Marra et al. Cosmic variance and the measurement of the local hubble parameter. *Phys. Rev. Lett.*, 24(14):R91, 2013. (ref. pág. 11)
- [44] C. A. P. Bengaly, J. Larena, and R. Maartens. Is the local hubble flow consistent with concordance cosmology? *JCAP*, 03:1–13, 2019. (ref. pág. 12)
- [45] H.J. Macpherson, P.D. Lasky, and D.J. Price. The trouble with hubble: local versus global expansion rates in inhomogeneous cosmological si-

- ulations with numerical relativity. *Astrophys. J. Lett.*, 865(1):L4–L12, 2018. (ref. pág. 12, 14)
- [46] I. D. Gaspar, J. C. Hidalgo, and R. A. Sussman. Non-comoving baryons and cold dark matter in cosmic voids. *Eur. Phys. J. C*, 79(106):1–13, 2019. (ref. pág. 13, 132)
- [47] N. P. Humphreys, R. Maartens, and D. R. Matravers. Anisotropic observations in universes with nonlinear inhomogeneity. *JCAP*, 477(1):47–57, 1997. (ref. pág. 13)
- [48] C. G. Tsagas. Large-scale peculiar motions and cosmic acceleration. *MNRAS*, 405(1):503–508, 2010. (ref. pág. 13)
- [49] C. G. Tsagas. Peculiar motions, accelerated expansion and the cosmological axis. *Phys. Rev. D.*, 484(6):063503–1–063503–9, 2011. (ref. pág. 13, 69)
- [50] E. Tsaprazi and C. G. Tsagas. On the kinematics of large-scale peculiar motions. *arXiv e-prints*, page arXiv:1906.05164, Jun 2019. (ref. pág. 13)
- [51] T. Buchert and M. Ostermann. Lagrangian theory of structure formation in relativistic cosmology: Lagrangian framework and definition of a nonperturbative approximation. *Phys. Rev. D.*, 86(2):023520–1–023520–21, 2012. (ref. pág. 14)
- [52] V. Mewes, Y. Zlochower, M. Campanelli, I. Ruchlin, Z.B. Etienne, and T. W. Baumgarte. Numerical relativity in spherical coordinates with the einstein toolkit. *Phys. Rev. D.*, 97:084059, 2018. (ref. pág. 14)

-
- [53] H. J. Macpherson, P. D. Lasky, and D. J. Price. Inhomogeneous cosmology with numerical relativity. *Phys. Rev. D.*, 95:064028, 2017. (ref. pág. 14)
- [54] E. Bentivegna and M. Bruni. Effects of nonlinear inhomogeneity on the cosmic expansion with numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 116(25):251302, 2016. (ref. pág. 14)
- [55] K. Bolejko. Relativistic numerical cosmology with silent universes. *Class. Quantum Grav.*, 35(2):024003, 2017. (ref. pág. 14)
- [56] D. Daverio, Y. Dirian, and E. Mitsou. A numerical relativity scheme for cosmological simulations. *Class. Quantum Grav.*, 34(23):237001, 2017. (ref. pág. 14)
- [57] Jerzy Plebanski and Andrzej Krasinski. *An introduction to general relativity and cosmology*. Cambridge University Press, 2006. (ref. pág. 15, 44, 46, 48, 114, 125)
- [58] Andrzej Krasinski. *Inhomogeneous cosmological models*. Cambridge University Press, 2006. (ref. pág. 15, 16, 20, 26, 28, 40, 45, 46, 47, 48, 53, 60, 129)
- [59] K. Bolejko and R. A. Sussman. Cosmic spherical void via coarse-graining and averaging non-spherical structures. *Phys. Lett. B.*, 697(4):265–270, 2011. (ref. pág. 15, 20, 48, 53)
- [60] R. A. Sussman and I. D. Gaspar. Multiple non-spherical structures from the extrema of szekeres scalars. *Phys. Rev. D.*, 92:083533, 2015. (ref. pág. 16)

-
- [61] Roberto A Sussman, Juan Carlos Hidalgo, Ismael Delgado Gaspar, and Gabriel Germán. Nonspherical szekeres models in the language of cosmological perturbations. *Physical Review D*, 95(6):064033, 2017. (ref. pág. 16)
- [62] R. A. Sussman, I. D. Gaspar, and J. C. Hidalgo. Coarse-grained description of cosmic structure from szekeres models. *JCAP*, 03:012–012, 2016. (ref. pág. 16)
- [63] D. J. McMannus and A. A. Coley. Shear-free, irrotational, geodesic, anisotropic fluid cosmologies. *Class. Quantum Grav.*, 11(8):2045, 1994. (ref. pág. 16)
- [64] D. J. McMannus and A. A. Coley. On spacetimes admitting shear-free, irrotational, geodesic timelike congruences. *Class. Quantum Grav.*, 11(5):1261, 1994. (ref. pág. 16)
- [65] R. A. Sussman. New solutions for heat conducting fluids with a normal shear-free flow. *Class. Quantum Grav.*, 10(12):2675–2690, 1993. (ref. pág. 16)
- [66] Mustapha Ishak, Tessa Baker, Philip Bull, Eske M Pedersen, Jonathan Blazek, Pedro G Ferreira, C Danielle Leonard, Weikang Lin, Eric Linder, Kris Pardo, et al. Modified gravity and dark energy models beyond $w(z)$ cdm testable by lsst. *arXiv preprint arXiv:1905.09687*, 2019. (ref. pág. 17, 94)

- [67] Yi-Fu Cai, Salvatore Capozziello, Mariafelicia De Laurentis, and Emmanuel N. Saridakis. $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology. *Rept. Prog. Phys.*, 79(10):106901, 2016. (ref. pág. 17, 18)
- [68] Manuel Hohmann, Laur Järv, Martin Krššák, and Christian Pfeifer. Modified teleparallel theories of gravity in symmetric spacetimes. *Phys. Rev. D*, 100(8):084002, 2019. (ref. pág. 17, 98, 101, 102)
- [69] Rebecca Briffa, Salvatore Capozziello, Jackson Levi Said, Jurgen Mifsud, and Emmanuel N. Saridakis. Constraining teleparallel gravity through Gaussian processes. *Class. Quant. Grav.*, 38(5):055007, 2020. (ref. pág. 17)
- [70] Rafael C. Nunes. Structure formation in $f(T)$ gravity and a solution for H_0 tension. *JCAP*, 05:052, 2018. (ref. pág. 17, 96)
- [71] Celia Escamilla-Rivera and Jackson Levi Said. Cosmological viable models in $f(T, B)$ theory as solutions to the H_0 tension. *Class. Quant. Grav.*, 37(16):165002, 2020. (ref. pág. 17, 96, 110, 114, 117)
- [72] Yi-Fu Cai, Martiros Khurshudyan, and Emmanuel N. Saridakis. Model-independent reconstruction of $f(T)$ gravity from Gaussian Processes. *Astrophys. J.*, 888:62, 2020. (ref. pág. 17, 96)
- [73] José G. Pereira. *Teleparallelism: A New Insight Into Gravity*. 2 2013. (ref. pág. 17)
- [74] Jose Beltrán Jiménez, Lavinia Heisenberg, and Tomi S. Koivisto. The Geometrical Trinity of Gravity. *Universe*, 5(7):173, 2019. (ref. pág. 18)

-
- [75] V. Andrade, Leo Guillen, and Jose Pereira. Teleparallel gravity: An overview. 12 2000. (ref. pág. 18)
- [76] Scott Dodelson and Fabian Schmidt. *Modern cosmology*. Academic press, 2020. (ref. pág. 18)
- [77] Pavan Kumar Aluri, Paolo Cea, Pravabati Chingangbam, Ming-Chung Chu, Roger G Clowes, Damien Hutsemékers, Joby P Kochappan, Alexia M Lopez, Lang Liu, Niels CM Martens, et al. Is the observable universe consistent with the cosmological principle? *Classical and Quantum Gravity*, 40(9):094001, 2023. (ref. pág. 18, 27)
- [78] Nathan J Secrest, Sebastian von Hausegger, Mohamed Rameez, Roya Mohayaee, Subir Sarkar, and Jacques Colin. A test of the cosmological principle with quasars. *The Astrophysical Journal Letters*, 908(2):L51, 2021. (ref. pág. 18, 19)
- [79] Tobias Nadolny, Ruth Durrer, Martin Kunz, and Hamsa Padmanabhan. A new way to test the cosmological principle: measuring our peculiar velocity and the large-scale anisotropy independently. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(11):009, 2021. (ref. pág. 18, 24)
- [80] Derek Raine and Edwin George Thomas. *An introduction to the science of cosmology*. CRC press, 2018. (ref. pág. 18)
- [81] Nathan J Secrest, Sebastian von Hausegger, Mohamed Rameez, Roya Mohayaee, and Subir Sarkar. A challenge to the standard cosmological model. *The Astrophysical Journal Letters*, 937(2):L31, 2022. (ref. pág. 18, 19)

- [82] Lawrence Dam, Geraint F Lewis, and Brendon J Brewer. Testing the cosmological principle with catwise quasars: A bayesian analysis of the number-count dipole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, page stad2322, 2023. (ref. pág. 18, 19, 24)
- [83] LG Balázs, Z Bagoly, JE Hakkila, I Horváth, J Kóbori, II Rácz, and LV Tóth. A giant ring-like structure at $0.78 < z < 0.86$ displayed by grbs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 452(3):2236–2246, 2015. (ref. pág. 18, 20)
- [84] Francesco Sylos Labini and Yuri V Baryshev. Testing the copernican and cosmological principles in the local universe with galaxy surveys. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(06):021, 2010. (ref. pág. 18, 19, 20, 24)
- [85] David Camarena, Valerio Marra, Ziad Sakr, and Chris Clarkson. The copernican principle in light of the latest cosmological data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 509(1):1291–1302, 2022. (ref. pág. 18, 20)
- [86] Martín López-Corredoira and Louis Marmet. Alternative ideas in cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, 31(08):2230014, 2022. (ref. pág. 18, 19, 20)
- [87] Dominik J Schwarz. Thoughts on the cosmological principle. *Grumiller, D. ea, ed., Fundamental Interactions: A Memorial Volume for Wolfgang Kummer*, pages 267–276, 2010. (ref. pág. 18, 20, 24)

-
- [88] Roy Maartens. Is the universe homogeneous? *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 369(1957):5115–5137, 2011. (ref. pág. 18, 20)
- [89] Chris Clarkson. Establishing homogeneity of the universe in the shadow of dark energy. *Comptes Rendus Physique*, 13(6-7):682–718, 2012. (ref. pág. 18, 20)
- [90] Thomas Buchert, Alan A Coley, Hagen Kleinert, Boudewijn F Roukema, and David L Wiltshire. Observational challenges for the standard flrw model. *International Journal of Modern Physics D*, 25(03):1630007, 2016. (ref. pág. 18)
- [91] Tracey Friday, Roger G Clowes, and Gerard M Williger. Correlated orientations of the axes of large quasar groups on gpc scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 511(3):4159–4178, 2022. (ref. pág. 19)
- [92] Thilo M Siewert, Matthias Schmidt-Rubart, and Dominik J Schwarz. Cosmic radio dipole: Estimators and frequency dependence. *Astronomy & Astrophysics*, 653:A9, 2021. (ref. pág. 19)
- [93] Ashok K Singal. Large peculiar motion of the solar system from the dipole anisotropy in sky brightness due to distant radio sources. *The Astrophysical Journal Letters*, 742(2):L23, 2011. (ref. pág. 19)
- [94] Alexia M Lopez, Roger G Clowes, and Gerard M Williger. A giant arc on the sky. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 516(2):1557–1572, 2022. (ref. pág. 20)

-
- [95] István Horváth, Zsolt Bagoly, Jon Hakkila, and L Viktor Tóth. New data support the existence of the hercules-corona borealis great wall. *Astronomy & Astrophysics*, 584:A48, 2015. (ref. pág. 20)
- [96] István Horváth, Dorottya Szécsi, J Hakkila, Á Szabó, II Racz, László Viktor Tóth, Sándor Pintér, and Zsolt Bagoly. The clustering of gamma-ray bursts in the hercules–corona borealis great wall: the largest structure in the universe? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498(2):2544–2553, 2020. (ref. pág. 20)
- [97] Sam Christian. Re-examining the evidence of the hercules–corona borealis great wall. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 495(4):4291–4296, 2020. (ref. pág. 20)
- [98] Roger G Clowes, Kathryn A Harris, Srinivasan Raghunathan, Luis E Campusano, Ilona K Söchting, and Matthew J Graham. A structure in the early universe at z 1.3 that exceeds the homogeneity scale of the Λ CDM concordance cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429(4):2910–2916, 2013. (ref. pág. 20)
- [99] Jonathan HW Wong, Tom Shanks, Nigel Metcalfe, and JR Whitbourn. The local hole: a galaxy underdensity covering 90 per cent of sky to 200 mpc. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 511(4):5742–5755, 2022. (ref. pág. 20)
- [100] Eleonora Di Valentino, Olga Mena, Supriya Pan, Luca Visinelli, Weiqiang Yang, Alessandro Melchiorri, David F Mota, Adam G Riess, and

- Joseph Silk. In the realm of the hubble tension – a review of solutions. *arXiv preprint arXiv:2103.01183*, 2021. (ref. pág. 20, 84)
- [101] Stephen W Hawking and George FR Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 2023. (ref. pág. 22, 44)
- [102] Bernard JT Jones. *Precision cosmology: the first half million years*. Cambridge University Press, 2017. (ref. pág. 22, 24)
- [103] John A Peacock. *Cosmological physics*. Cambridge university press, 1999. (ref. pág. 22)
- [104] George F. R. Ellis and Henk van Elst. Cosmological Models (Cargèse lectures 1998). In Marc Lachièze-Rey, editor, *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, volume 541 of *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, pages 1–116, Jan 1999. (ref. pág. 23, 40)
- [105] Timothy Clifton, Chris Clarkson, and Philip Bull. The isotropic black-body CMB as evidence for a homogeneous universe. *Phys. Rev. Lett.*, 109:051303, 2012. (ref. pág. 24)
- [106] Carlos AP Bengaly, Roy Maartens, Nandrianina Randriamiarinarivo, and Albert Baloyi. Testing the cosmological principle in the radio sky. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(09):025, 2019. (ref. pág. 24)
- [107] Jonathan Carrick, Stephen J Turnbull, Guilhem Lavaux, and Michael J Hudson. Cosmological parameters from the comparison of peculiar velocities with predictions from the 2m++ density field. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 450(1):317–332, 2015. (ref. pág. 24)

-
- [108] Fei Qin. Gaussianization of peculiar velocities and bulk flow measurement. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 21(10):242, 2021. (ref. pág. 24)
- [109] Yigon Kim, Chan-Gyung Park, Hyerim Noh, and Jai-chan Hwang. Cmass galaxy sample and the ontological status of the cosmological principle. *Astronomy & Astrophysics*, 660:A139, 2022. (ref. pág. 24)
- [110] CA Schärf, MA Treyer, K Jahoda, T Piran, O Lahav, and EA Boldt. The 2-10 keV xrb dipole and its cosmological implications. Technical report, 1999. (ref. pág. 24)
- [111] Konstantinos Migkas and Thomas H Reiprich. Anisotropy of the galaxy cluster x-ray luminosity–temperature relation. *Astronomy & Astrophysics*, 611:A50, 2018. (ref. pág. 24)
- [112] David H Weinberg, Romeel Dave, Neal Katz, and Juna A Kollmeier. The Lyman- α forest as a cosmological tool. In *AIP Conference Proceedings*, volume 666, pages 157–169. American Institute of Physics, 2003. (ref. pág. 24)
- [113] Evgeny O Zavarygin and John K Webb. A search for cosmological anisotropy using the Lyman alpha forest from SDSS quasar spectra. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(3):3966–3980, 2019. (ref. pág. 24)
- [114] Carlos Bengaly. A null test of the cosmological principle with BAO measurements. *Physics of the Dark Universe*, 35:100966, 2022. (ref. pág. 24)

-
- [115] Ofer Lahav. Observational tests for the cosmological principle and world models. In *Structure Formation in the Universe: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Structure Formation in the Universe Cambridge, UK 26 July–6 August 1999*, pages 131–142. Springer, 2001. (ref. pág. 24)
- [116] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010. (ref. pág. 24, 43)
- [117] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019. (ref. pág. 25, 42)
- [118] Douglas H Rudd, Andrew R Zentner, and Andrey V Kravtsov. Effects of baryons and dissipation on the matter power spectrum. *The Astrophysical Journal*, 672(1):19, 2008. (ref. pág. 28, 67)
- [119] Roy Maartens, Tim Gebbie, and George FR Ellis. Cosmic microwave background anisotropies: Nonlinear dynamics. *Physical Review D*, 59(8):083506, 1999. (ref. pág. 29)
- [120] CJS Clarke and Tevian Dray. Junction conditions for null hypersurfaces. *Classical and Quantum Gravity*, 4(2):265, 1987. (ref. pág. 30)
- [121] Marc Mars and Jose MM Senovilla. Geometry of general hypersurfaces in spacetime: junction conditions. *Classical and Quantum Gravity*, 10(9):1865, 1993. (ref. pág. 31, 55, 56)
- [122] J. M. Stewart and M. Walker. Perturbations of space-time in general relativity. *Proc. Soc. London*, 341(1624):49–74, 1974. (ref. pág. 36)

-
- [123] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge university press, 2009. (ref. pág. 40, 43, 44, 118)
- [124] Michael E Cahill and George C McVittie. Spherical symmetry and mass-energy in general relativity. ii. particular cases. *Journal of Mathematical Physics*, 11(4):1392–1401, 1970. (ref. pág. 43)
- [125] Kayll Lake. Gravitational collapse of dust with a cosmological constant. *Physical Review D*, 62(2):027301, 2000. (ref. pág. 43, 47)
- [126] SS Deshingkar, S Jhingan, A Chamorro, and PS Joshi. Gravitational collapse and the cosmological constant. *Physical Review D*, 63(12):124005, 2001. (ref. pág. 43, 47)
- [127] Krzysztof Bolejko, Andrzej Krasiński, Charles Hellaby, and Marie-Noëlle Célérier. *Structures in the Universe by exact methods: formation, evolution, interactions*. Cambridge University Press, 2010. (ref. pág. 43, 47, 53, 108, 109, 110)
- [128] Anirudh Pradhan, I Aotemshi, and GP Singh. Plane symmetric domain wall in lyra geometry. *Astrophysics and Space Science*, 288(3):315–325, 2003. (ref. pág. 43)
- [129] Guenter Goetz. The gravitational field of plane symmetric thick domain walls. *Journal of mathematical physics*, 31(11):2683–2687, 1990. (ref. pág. 43)

-
- [130] DRK Reddy, KS Adhao, and SD Katore. On plane symmetric domain walls and cosmic strings in bimetric theory. *Astrophysics and Space Science*, 301:149–151, 2006. (ref. pág. 43)
- [131] Roberto A Sussman. Quasi-local variables and inhomogeneous cosmological sources with spherical symmetry. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1083, pages 228–235. American Institute of Physics, 2008. (ref. pág. 46)
- [132] Kari Enqvist. Lemaitre–tolman–bondi model and accelerating expansion. *General Relativity and Gravitation*, 40(2-3):451–466, 2008. (ref. pág. 46, 108, 109)
- [133] Roberto A Sussman, Juan Carlos Hidalgo, Peter KS Dunsby, and Gabriel German. Spherical dust fluctuations: The exact versus the perturbative approach. *Physical Review D*, 91(6):063512, 2015. (ref. pág. 46, 48, 53)
- [134] Roberto A Sussman. Quasilocal variables in spherical symmetry: Numerical applications to dark matter and dark energy sources. *Physical Review D*, 79(2):025009, 2009. (ref. pág. 47, 109)
- [135] Sebastián Nájera and Roberto A Sussman. Geometric and physical properties of closed ever expanding dust models. *General Relativity and Gravitation*, 50(8):94, 2018. (ref. pág. 47, 127)
- [136] P Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics*, 41:55–64, 1975. (ref. pág. 47)

-
- [137] DA Szafron. Inhomogeneous cosmologies: New exact solutions and their evolution. *Journal of Mathematical Physics*, 18(8):1673–1677, 1977. (ref. pág. 47)
- [138] Masumi Kasai. Construction of inhomogeneous universes which are friedmann-lemaitre-robertson-walker on average. *Physical review letters*, 69(16):2330, 1992. (ref. pág. 49, 53, 59)
- [139] Mustapha Ishak and Austin Peel. Growth of structure in the szekeres class-ii inhomogeneous cosmological models and the matter-dominated era. *Physical Review D*, 85(8):083502, 2012. (ref. pág. 49, 53, 59)
- [140] Austin Peel, Mustapha Ishak, and MA Troxel. Large-scale growth evolution in the szekeres inhomogeneous cosmological models with comparison to growth data. *Physical Review D*, 86(12):123508, 2012. (ref. pág. 49, 53, 59)
- [141] Hernando Quevedo and Roberto A Sussman. On the thermodynamics of simple non-isentropic perfect fluids in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 12(3):859, 1995. (ref. pág. 49, 59)
- [142] Bartolomé Coll, Joan J Ferrando, and Juan A Saez. Thermodynamic class ii szekeres-szafron solutions. regular models. *Classical and Quantum Gravity*, 2020. (ref. pág. 49, 59)
- [143] Ismael Delgado Gaspar and Thomas Buchert. Lagrangian theory of structure formation in relativistic cosmology. vi. comparison with szekeres exact solutions. *Physical Review D*, 103(2):023513, 2021. (ref. pág. 49, 53, 57, 91, 131)

-
- [144] Timothy Clifton. Back-reaction in relativistic cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, 22(03):1330004, 2013. (ref. pág. 52)
- [145] Eric Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004. (ref. pág. 55)
- [146] Jean-Philippe Bruneton and Julien Larena. Dynamics of a lattice universe: the dust approximation in cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 29(15):155001, 2012. (ref. pág. 57)
- [147] Timothy Clifton, Pedro G Ferreira, and Kane O'Donnell. Improved treatment of optics in the lindquist-wheeler models. *Physical Review D*, 85(2):023502, 2012. (ref. pág. 57)
- [148] Stephen W Goode. Spatially inhomogeneous cosmologies with heat flow. *Classical and Quantum Gravity*, 3(6):1247, 1986. (ref. pág. 59)
- [149] S. W. Goode. Spatially inhomogeneous cosmologies with heat flow. *Class. Quantum Grav.*, 3(6):1247–1263, 1986. (ref. pág. 66)
- [150] Gagandeep S Anand, R Brent Tully, Luca Rizzi, Edward J Shaya, and Igor D Karachentsev. Peculiar velocities of galaxies just beyond the local group. *The Astrophysical Journal*, 880(1):52, 2019. (ref. pág. 68)
- [151] Christopher M Springob, Christina Magoulas, Matthew Colless, Jeremy Mould, Pirin Erdoğdu, D Heath Jones, John R Lucey, Lachlan Campbell, and Christopher J Fluke. The 6df galaxy survey: peculiar velocity field and cosmography. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 445(3):2677–2697, 2014. (ref. pág. 68)

-
- [152] Tereasa G Brainerd and Jens V Villumsen. On the peculiar velocity field of cdm universe. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 436, no. 2, p. 528-541, 436:528–541, 1994. (ref. pág. 68)
- [153] Alberto Navarro and José Navarro. Lovelock’s theorem revisited. *Journal of Geometry and Physics*, 61(10):1950–1956, 2011. (ref. pág. 94)
- [154] David Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971. (ref. pág. 94)
- [155] David Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, 1972. (ref. pág. 94)
- [156] Salvatore Capozziello, Mariafelicia De Laurentis, and Valerio Faraoni. A bird’s eye view of $f(r)$ -gravity. *arXiv preprint arXiv:0909.4672*, 2009. (ref. pág. 95)
- [157] Salvatore Capozziello, Vincenzo F Cardone, and Antonio Troisi. Reconciling dark energy models with $f(r)$ theories. *Physical Review D*, 71(4):043503, 2005. (ref. pág. 95)
- [158] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. $f(r)$ theories. *Living Reviews in Relativity*, 13(1):1–161, 2010. (ref. pág. 95)
- [159] Cedric Deffayet. Theory and phenomenology of dgp gravity. *International Journal of Modern Physics D*, 16(12a):2023–2033, 2007. (ref. pág. 95)

-
- [160] Israel Quiros and Tonatiuh Matos. Thick dgp braneworlds. *Physical Review D*, 78(10):103506, 2008. (ref. pág. 95)
- [161] Gabriela Bárcenas-Enríquez, Celia Escamilla-Rivera, and Miguel Angel Garcia-Aspeitia. Cosmological analysis of a Dvali-Gabadadze-Porrati stable model with $H(z)$ observations. *Rev. Mex. Fis.*, 64(6):584–589, 2018. (ref. pág. 95)
- [162] Carl Brans and Robert H Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, 124(3):925, 1961. (ref. pág. 95)
- [163] Tony S Almeida, ML Pucheu, C Romero, and JB Formiga. From brans-dicke gravity to a geometrical scalar-tensor theory. *Physical Review D*, 89(6):064047, 2014. (ref. pág. 95)
- [164] Tsutomu Kobayashi. Horndeski theory and beyond: a review. *Reports on Progress in Physics*, 82(8):086901, 2019. (ref. pág. 95)
- [165] Marco Crisostomi, Matthew Hull, Kazuya Koyama, and Gianmassimo Tasinato. Horndeski: beyond, or not beyond? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(03):038, 2016. (ref. pág. 95)
- [166] Jérôme Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. Exploring gravitational theories beyond horndeski. *arXiv preprint arXiv:1408.1952*, 2014. (ref. pág. 95)
- [167] Alexander Yu Kamenshchik, Ekaterina O Pozdeeva, Alessandro Tronconi, Giovanni Venturi, and Sergey Yu Vernov. Integrable cosmological models with non-minimally coupled scalar fields. *Classical and Quantum Gravity*, 31(10):105003, 2014. (ref. pág. 95)

-
- [168] Orest Hrycyna and Marek Szydłowski. Non-minimally coupled scalar field cosmology on the phase plane. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(04):026, 2009. (ref. pág. 95)
- [169] Andrew P Billyard and Alan A Coley. Interactions in scalar field cosmology. *Physical Review D*, 61(8):083503, 2000. (ref. pág. 95)
- [170] John D Barrow and P Saich. Scalar-field cosmologies. *Classical and Quantum Gravity*, 10(2):279, 1993. (ref. pág. 95)
- [171] Celia Escamilla-Rivera and Júlio C Fabris. The possibility of a non-lagrangian theory of gravity. *Universe*, 7(7):230, 2021. (ref. pág. 95)
- [172] Salvatore Capozziello and Mariafelicia De Laurentis. Extended theories of gravity. *Physics Reports*, 509(4-5):167–321, 2011. (ref. pág. 95, 96)
- [173] Salvatore Capozziello and Francesco Bajardi. Nonlocal gravity cosmology: An overview. *International Journal of Modern Physics D*, 31(06):2230009, 2022. (ref. pág. 95)
- [174] Sebastian Bahamonde, Konstantinos F Dialektopoulos, Celia Escamilla-Rivera, Gabriel Farrugia, Viktor Gakis, Martin Hendry, Manuel Hohmann, Jackson Levi Said, Jurgen Mifsud, and Eleonora Di Valentino. Teleparallel gravity: From theory to cosmology. *arXiv preprint arXiv:2106.13793*, 2021. (ref. pág. 96, 99, 100, 102)
- [175] Roberto Casadio, Iberê Kuntz, and Gregorio Paci. Quantum fields in teleparallel gravity: renormalization at one-loop. *The European Physical Journal C*, 82(3):186, 2022. (ref. pág. 96)

-
- [176] Francesco Bajardi and Salvatore Capozziello. Noether symmetries and quantum cosmology in extended teleparallel gravity. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 18(supp01):2140002, 2021. (ref. pág. 96)
- [177] Sebastian Bahamonde, Salvatore Capozziello, Mir Faizal, and Rafael C Nunes. Nonlocal teleparallel cosmology. *The European Physical Journal C*, 77:1–8, 2017. (ref. pág. 96)
- [178] AS Fernandes, SC Ulhoa, and RGG Amorim. On quantum cosmology in teleparallel gravity. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 965, page 012014. IOP Publishing, 2018. (ref. pág. 96)
- [179] Junpei Harada. Emergence of the cotton tensor for describing gravity. *arXiv preprint arXiv:2105.09304*, 2021. (ref. pág. 96, 118, 122)
- [180] Junpei Harada. Cotton gravity and 84 galaxy rotation curves. *Physical Review D*, 106(6):064044, 2022. (ref. pág. 96)
- [181] Slava G Turyshev and Viktor T Toth. The pioneer anomaly. *Living Reviews in Relativity*, 13(1):1–175, 2010. (ref. pág. 96, 122)
- [182] Alexey Golovnev, Tomi Koivisto, and Marit Sandstad. On the covariance of teleparallel gravity theories. *Class. Quant. Grav.*, 34(14):145013, 2017. (ref. pág. 97)
- [183] Ruben Aldrovandi and José Geraldo Pereira. *Teleparallel Gravity*. Springer Netherlands, 2013. (ref. pág. 97, 98, 142)

-
- [184] Martin Krššák and Emmanuel N. Saridakis. The covariant formulation of $f(T)$ gravity. *Class. Quant. Grav.*, 33(11):115009, 2016. (ref. pág. 98)
- [185] M. Krssak, R. J. van den Hoogen, J. G. Pereira, C. G. Böhrer, and A. A. Coley. Teleparallel theories of gravity: illuminating a fully invariant approach. *Class. Quant. Grav.*, 36(18):183001, 2019. (ref. pág. 99)
- [186] Alexey Golovnev and Maria-Jose Guzman. Lorentz symmetries and primary constraints in covariant teleparallel gravity. 10 2021. (ref. pág. 99)
- [187] Baojiu Li, Thomas P. Sotiriou, and John D. Barrow. $f(T)$ gravity and local Lorentz invariance. *Phys. Rev. D*, 83:064035, 2011. (ref. pág. 99)
- [188] Nicola Tamanini and Christian G. Boehmer. Good and bad tetrads in $f(T)$ gravity. *Phys. Rev. D*, 86:044009, 2012. (ref. pág. 99)
- [189] Sebastian Bahamonde and Ugur Camci. Exact Spherically Symmetric Solutions in Modified Teleparallel gravity. *Symmetry*, 11(12):1462, 2019. (ref. pág. 99, 104)
- [190] Sebastian Bahamonde, Alexey Golovnev, María-José Guzmán, Jackson Levi Said, and Christian Pfeifer. Black Holes in $f(T, B)$ Gravity: Exact and Perturbed Solutions. 10 2021. (ref. pág. 100)
- [191] Mustafa Salti and Ali Havare. Energy distribution in ltb space-time. Technical report, 2005. (ref. pág. 103)

-
- [192] Andrzej Krasiński and Charles Hellaby. Structure formation in the lemaître-tolman model. *Physical Review D*, 65(2):023501, 2001. (ref. pág. 110)
- [193] David Alonso, Juan Garcia-Bellido, Troels Haugbølle, and Julian Vicente. Large scale structure simulations of inhomogeneous lemaître-tolman-bondi void models. *Physical Review D*, 82(12):123530, 2010. (ref. pág. 110)
- [194] Neil P Humphreys, Roy Maartens, and David R Matravers. Regular spherical dust spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, 44(12):3197–3215, 2012. (ref. pág. 113)
- [195] Roberto A Sussman and Luisa G Jaime. Lemaître–tolman–bondi dust solutions in $f(r)$ gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 34(24):245004, 2017. (ref. pág. 113, 116)
- [196] Émile Cotton. Sur les variétés a trois dimensions. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, volume 1, pages 385–438, 1899. (ref. pág. 118)
- [197] Alberto A García, Friedrich W Hehl, Christian Heinicke, and Alfredo Macias. The cotton tensor in riemannian spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 21(4):1099, 2004. (ref. pág. 118, 119)
- [198] Pedro Bargueño. Comment on “Emergence of the Cotton tensor for describing gravity”. *Phys. Rev. D*, 104(8):088501, 2021. (ref. pág. 119)

-
- [199] Carlo Alberto Mantica and Luca Guido Molinari. Codazzi tensors and their space-times and cotton gravity. *General Relativity and Gravitation*, 55(4):62, 2023. (ref. pág. 120, 121)
- [200] Shinji Tsujikawa. Quintessence: a review. *Classical and Quantum Gravity*, 30(21):214003, 2013. (ref. pág. 126)
- [201] Thomas M Sedgwick, Chris A Collins, Ivan K Baldry, and Philip A James. The effects of peculiar velocities in sn ia environments on the local H_0 measurement. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 500(3):3728–3742, 2021. (ref. pág. 133)
- [202] Gong-Bo Zhao, Marco Raveri, Levon Pogosian, Yuting Wang, Robert G. Crittenden, Will J. Handley, Will J. Percival, Florian Beutler, Jonathan Brinkmann, Chia-Hsun Chuang, Antonio J. Cuesta, Daniel J. Eisenstein, Francisco-Shu Kitaura, Kazuya Koyama, Benjamin L’Huillier, Robert C. Nichol, Matthew M. Pieri, Sergio Rodriguez-Torres, Ashley J. Ross, Graziano Rossi, Ariel G. Sánchez, Arman Shafieloo, Jeremy L. Tinker, Rita Tojeiro, Jose A. Vazquez, and Hanyu Zhang. Dynamical dark energy in light of the latest observations. *Nature Astronomy*, 1(9):627–632, aug 2017. (ref. pág. 141)
- [203] Nils Schöneberg, Guillermo Franco Abellán, Andrea Pérez Sánchez, Samuel J. Witte, Vivian Poulin, and Julien Lesgourgues. The H_0 Olympics: A fair ranking of proposed models. *Phys. Rept.*, 984:1–55, 2022. (ref. pág. 141)

- [204] Michelle Ntampaka, Camille Avestruz, Steven Boada, Joao Caldeira, Jessi Cisewski-Kehe, Rosanne Di Stefano, Cora Dvorkin, August E Evrard, Arya Farahi, Doug Finkbeiner, et al. The role of machine learning in the next decade of cosmology. *arXiv preprint arXiv:1902.10159*, 2019. (ref. pág. 141, 142)
- [205] Celia Escamilla-Rivera. Deep learning for cosmology. *PoS, AISIS2019:021*, 2020. (ref. pág. 141, 142)
- [206] Celia Escamilla-Rivera, Maryi Alejandra Carvajal Quintero, and S. Capozziello. A deep learning approach to cosmological dark energy models. *JCAP*, 03:008, 2020. (ref. pág. 141, 143)
- [207] Celia Escamilla-Rivera, Maryi Carvajal, Cristian Zamora, and Martin Hendry. Neural networks and standard cosmography with newly calibrated high redshift GRB observations. *JCAP*, 04(04):016, 2022. (ref. pág. 142, 143, 151)
- [208] Jürgen Schmidhuber. Deep learning in neural networks: An overview. *Neural networks*, 61:85–117, 2015. (ref. pág. 142)
- [209] Laith Alzubaidi, Jinglan Zhang, Amjad J Humaidi, Ayad Al-Dujaili, Ye Duan, Omran Al-Shamma, José Santamaría, Mohammed A Fadhel, Muthana Al-Amidie, and Laith Farhan. Review of deep learning: Concepts, cnn architectures, challenges, applications, future directions. *Journal of big Data*, 8:1–74, 2021. (ref. pág. 142)
- [210] Charu C Aggarwal et al. Neural networks and deep learning. *Springer*, 10(978):3, 2018. (ref. pág. 142, 144)

-
- [211] Christopher J Shallue and Daniel J Eisenstein. Reconstructing cosmological initial conditions from late-time structure with convolutional neural networks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 520(4):6256–6267, 2023. (ref. pág. 142)
- [212] Yue-Lin Sming Tsai, Yi-Lun Chung, Qiang Yuan, and Kingman Cheung. Inverting cosmic ray propagation by convolutional neural networks. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(03):044, 2022. (ref. pág. 142)
- [213] Zhiqiang Que, Erwei Wang, Umar Marikar, Eric Moreno, Jennifer Ngadiuba, Hamza Javed, Bartłomiej Borzyszkowski, Thea Aarrestad, Vladimir Loncar, Sioni Summers, et al. Accelerating recurrent neural networks for gravitational wave experiments. In *2021 IEEE 32nd International Conference on Application-specific Systems, Architectures and Processors (ASAP)*, pages 117–124. IEEE, 2021. (ref. pág. 142)
- [214] Felix Kahlhoefer, Michael Korsmeier, Michael Krämer, Silvia Manconi, and Kathrin Nippel. Constraining dark matter annihilation with cosmic ray antiprotons using neural networks. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(12):037, 2021. (ref. pág. 142)
- [215] Isidro Gómez-Vargas, J. Alberto Vázquez, Ricardo Medel Esquivel, and Ricardo García-Salcedo. Cosmological reconstructions with artificial neural networks, 2021. (ref. pág. 143)
- [216] Yong Yu, Xiaosheng Si, Changhua Hu, and Jianxun Zhang. A review of recurrent neural networks: Lstm cells and network architectures. *Neural*

- computation*, 31(7):1235–1270, 2019. (ref. pág. 144)
- [217] Bamba Kazuharu, Salvatore Capozziello, Sergei D Odintsov, et al. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. *ASTROPHYSICS AND SPACE SCIENCE*, 342:155–228, 2012. (ref. pág. 148)
- [218] Ahmad Mehrabi. Growth of perturbations in dark energy parametrization scenarios. *Physical Review D*, 97(8):083522, 2018. (ref. pág. 150)
- [219] Mehdi Rezaei, Mohammad Malekjani, Spyros Basilakos, Ahmad Mehrabi, and David F Mota. Constraints to dark energy using pade parameterizations. *The Astrophysical Journal*, 843(1):65, 2017. (ref. pág. 150)
- [220] Eoin Ó Colgáin, MM Sheikh-Jabbari, and Lu Yin. Can dark energy be dynamical? *Physical Review D*, 104(2):023510, 2021. (ref. pág. 150)
- [221] Celia Escamilla-Rivera and Antonio Nájera. Dynamical dark energy models in the light of gravitational-wave transient catalogues. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(03):060, 2022. (ref. pág. 150)
- [222] Daniel Moshe Scolnic, DO Jones, A Rest, YC Pan, R Chornock, RJ Foley, ME Huber, R Kessler, Gautham Narayan, AG Riess, et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, 859(2):101, 2018. (ref. pág. 151, 153)

-
- [223] Roberto Trotta. Bayesian methods in cosmology, 2017. (ref. pág. 151, 152)
- [224] L. Verde. *Statistical Methods in Cosmology*, pages 147–177. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010. (ref. pág. 151, 152)
- [225] Michael P Hobson. *Bayesian methods in cosmology*. Cambridge University Press, 2010. (ref. pág. 151, 152)
- [226] Daniel Foreman-Mackey, David W Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: the mcmc hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925):306, 2013. (ref. pág. 152, 155)
- [227] Thejs Brinckmann and Julien Lesgourgues. Montepython 3: boosted mcmc sampler and other features. *Physics of the Dark Universe*, 24:100260, 2019. (ref. pág. 152)
- [228] Anvaradh Nanduri and Lance Sherry. Anomaly detection in aircraft data using recurrent neural networks (rnn). In *2016 Integrated Communications Navigation and Surveillance (ICNS)*, pages 5C2–1. Ieee, 2016. (ref. pág. 152)
- [229] Yanbai He, Rui Chen, Xinya Li, Chuanyan Hao, Sijiang Liu, Gangyao Zhang, and Bo Jiang. Online at-risk student identification using rnn-gru joint neural networks. *Information*, 11(10):474, 2020. (ref. pág. 152)
- [230] Mounir Guesbaya, Francisco García-Mañas, Francisco Rodríguez, and Hassina Megherbi. A soft sensor to estimate the opening of greenhouse vents based on an lstm-rnn neural network. *Sensors*, 23(3):1250, 2023. (ref. pág. 152)

-
- [231] Dan Scolnic, Dillon Brout, Anthony Carr, Adam G Riess, Tamara M Davis, Arianna Dwomoh, David O Jones, Noor Ali, Pranav Charvu, Rebecca Chen, et al. The pantheon+ analysis: the full data set and light-curve release. *The Astrophysical Journal*, 938(2):113, 2022. (ref. pág. 152)
- [232] Dillon Brout, Georgie Taylor, Dan Scolnic, Charlotte M Wood, Benjamin M Rose, Maria Vincenzi, Arianna Dwomoh, Christopher Lidman, Adam Riess, Noor Ali, et al. The pantheon+ analysis: Supercal-fragilistic cross calibration, retrained salt2 light-curve model, and calibration systematic uncertainty. *The Astrophysical Journal*, 938(2):111, 2022. (ref. pág. 152)