



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CORRESPONDENCIA HOLOGRÁFICA: AGUJEROS DE
GUSANO Y ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ALEJANDRO ALVARADO CORZO

TUTOR

DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno:
Alvarado
Corzo
Alejandro
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
417071211
2. Datos del tutor:
Dr.
Chernicoff
Minsberg
Mariano
3. Datos del sinodal 1:
Dr.
Vergara
Oliver
José David
4. Datos del sinodal 2:
Dr.
De la Macorra
Pettersson Moriel
Axel Ricardo
5. Datos del sinodal 3:
Dr.
Patiño
Jaidar
Erick Leonardo
6. Datos del sinodal 4:
Dr.
García
Zenteno
José Antonio Rafael
7. Datos de la tesis:
Correspondencia holográfica: Agujeros de gusano y Entropía de Entrelazamiento
152 p.
2023

A mi madre.

Agradecimientos

Antes de todo, quiero agradecer a quienes, de una u otra forma, fueron parte fundamental para que esto se llavara a cabo.

En primer lugar, a Mariano, por todas las discusiones enriquecedoras sobre física, por tomarte el tiempo de leer todo lo que escribí y darme tantas correcciones que me ayudaron a entender de mejor manera la física de este trabajo. Sobre todo, por tenerme paciencia durante todo este tiempo y darme la oportunidad de trabajar en temas tan apasionantes.

A Ángel Sánchez, por ser un excelente profesor durante tantos semestres en la carrera, y por tu manera de explicar la física que me animaron a acercarme a la fascinante física de las partículas elementales. A Eric Vázquez-Jáuregui, por guiarme durante el servicio social, por la ayuda con la compu y los códigos, y por todas las discusiones interesantísimas sobre física nuclear. A mis sinodales, por los valiosos comentarios sobre este trabajo.

El agradecimiento más a importante, a mi Madre, porque sin ti nada habría sido posible. Por ser mi amiga y aconsejarme. Porque si algo bueno hay en mí, es porque ha venido de ti. Y aunque habrías merecido algo mejor, aún así, con todas sus imperfecciones, a ti te pertenece.

A mi hemanito, por darme el valor para intentar ser mejor, y por ser un gran amigo.

A José y Alix, por ser mis hermanos de toda la vida, por animarme tanto cada que volvemos a estar juntos.

A Mamay, por su cariño y por siempre darme de comer rico cuando puedo ir a casa. A mi tía Mely, a mi tío Agus, a David, por todo el cariño y por siempre resivirme con tanto gusto en su casa. A la pequeña Naty por quererme tanto, hacerme reír y animarme con sus llamadas.

Al crew, Dardón, Palenque, Soto y Calep, por ser parte de la aventura de la física que comenzó hace tanto tiempo en la prepa, por las risas y las las retas en CU. Espero que nuestros caminos se sigan juntando.

A Dani, Yona y Fabían, por las aventuras, por siempre estar para mí cuando lo necesito, por ser mis mejores amigos.

Para terminar, un agradecimiento muy especial, para Vane. Por ser una persona tan maravillosa, por los infinitos momentos bonitos, por guiarme y aconsejarme, por estar para mí de tantas formas distintas y durante tanto tiempo, por ser la luz en la oscuridad. Porque no le temo al mundo cuando tú estás.

Resumen

En este trabajo hemos utilizado la llamada Correspondencia Holográfica para investigar la increíble conjetura propuesta por Susskind y Maldacena en [1], donde se propone la relación entre el entrelazamiento cuántico y los agujeros de gusano, conocida como conjetura ER=EPR. La Correspondencia Holográfica es una herramienta de cálculo que resulta útil para el estudio de las teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas. Para describir esto, en primer lugar revisamos algunos de los conceptos fundamentales de la teoría cuántica de campos, la Relatividad General y la teoría de cuerdas. Con estos conceptos, desarrollamos una deducción heurística del ejemplo mejor entendido de dicha correspondencia, que establece la equivalencia entre la teoría de Super Yangs-Mills $\mathcal{N} = 4$ en el espacio-tiempo plano $(3 + 1)$ -dimensional y una teoría de cuerdas en el espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$, y describimos algunas de sus características relevantes. Con el fin de presentar evidencia sobre la conjetura ER=EPR, explicamos en qué consiste y cómo se calcula la entropía de entrelazamiento holográfica. Para comprender esto de mejor manera exploramos algunos ejemplos del cálculo de la entropía de entrelazamiento holográfica en diferentes configuraciones. Una vez descrito todo lo anterior, calculamos la entropía de entrelazamiento holográfica a través de la geometría de un agujero de gusano que conecta a dos regiones asintóticamente AdS. Como resultado de este estudio concluimos que, desde el punto de vista de la entropía de entrelazamiento holográfica, la relación entre entrelazamiento cuántico y agujeros de gusano está condicionada al hecho de que éstos últimos sean atravesables.

Índice general

Agradecimientos	3
Resumen	5
Introducción	8
1. Teoría cuántica de campos	16
1.1. Relatividad Especial	16
1.2. Elementos de la Teoría Cuántica de Campos	28
1.2.1. El campo de Klein-Gordon libre	30
1.2.2. Simetrías	32
1.2.3. Cuantización canónica del campo escalar	33
1.2.4. Campo libre de Dirac y de norma	37
1.3. Teorías de Yang-Mills	49
1.3.1. Simetría conforme y Supersimetría	53
1.3.2. Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$	56
1.4. Entrelazamiento cuántico	57
1.4.1. Entropía de entrelazamiento	62
2. Teoría gravitacional	67
2.1. Relatividad General	67
2.2. Agujeros negros	74
2.2.1. La métrica de Schwarzschild	74
2.2.2. Agujeros de gusano	79
2.2.3. Termodinámica de agujeros negros	82
2.3. El espacio-tiempo de Anti-de Sitter	83
2.3.1. Agujeros negros en AdS	85
3. Correspondencia holográfica	88
3.1. Teoría de cuerdas	88
3.1.1. La Cuerda bosónica libre	89
3.1.2. Teoría de Cuerdas Tipo IIB	103
3.2. La correspondencia AdS/CFT	104
3.2.1. Dedución de la correspondencia	105

3.2.2. Aspectos generales de la correspondencia AdS/CFT	114
4. Entropía de Entrelazamiento holográfica	122
4.1. Fórmula de Ryu-Takayanagi	122
4.1.1. Entropía de entrelazamiento en AdS/CFT a $T = 0$	126
4.2. Agujeros de gusano y entropía de entrelazamiento	134
4.2.1. Conjetura ER=EPR	134
4.2.2. Agujero de gusano en AdS ₅	135
4.2.3. Entropía de entrelazamiento holográfica de la CFT ₄ dual al agujero de gusano en AdS ₅	137
5. Conclusiones	147

Introducción

Con el ambicioso propósito de entender y describir el Universo del que formamos parte, a lo largo de la historia la ciencia se ha encargado de construir teorías cada vez más precisas que describen los diferentes fenómenos y elementos que lo constituyen. Sin embargo, ante cada respuesta, nuevas y más profundas preguntas aparecen. Por ejemplo, a finales del siglo IXX, con teorías clásicas como el electromagnetismo de Maxwell o la mecánica de Newton, gran parte de los fenómenos físicos que nos rodean cotidianamente, desde las ondas de luz hasta el movimiento de los planetas al rededor del sol, podían ya ser descritos con asombrosa precisión. No obstante, y a pesar del éxito de dichas teorías, había un sin número de preguntas que no podían ser respondidas, y de las cuales surgiría una revolución en la física a principios del siglo XX [2]. Como introducción a este trabajo, el presente texto intenta describir de manera amigable y sin tecnicismos, de forma divulgativa, las teorías físicas y conceptos que sirven como base para la construcción de esta tesis. Algunos de los desarrollos técnicos más importantes de estas ideas serán discutidos a lo largo del texto.

En 1905 Albert Einstein presentó su teoría de la *Relatividad Especial* [3], cambiando con ello la forma en la que entendemos al espacio y al tiempo. Dicha teoría explica cómo interpretar el movimiento relativo de los objetos respecto a diferentes sistemas de referencia inerciales [4]. Éstos son aquellos que se mueven con rapidez constante. La Relatividad especial está basada en dos postulados fundamentales [3]:

- 1. *La velocidad de la luz es la misma para cualquier observador inercial.*
- 2. *Las leyes de la física son las mismas para todos los observadores inerciales.*

Estos principios de la naturaleza nos muestran una conexión profunda entre el espacio y el tiempo; estos forman una única entidad de 4 dimensiones (3 espaciales y una temporal) a la que llamamos *espacio-tiempo* [4]. Además, la Relatividad Especial revela que, contrario a nuestra experiencia cotidiana, las mediciones de distancias y tiempos se ven afectadas por el movimiento de los distintos observadores [3]. Por ejemplo, en una nave espacial viajando muy rápido, a una velocidad comparable con la de la luz, con respecto a la tierra, el tiempo transcurrirá más lento que en la propia tierra, debido a un fenómeno conocido como *dilatación del tiempo* [4]. De esta manera, la teoría de la Relatividad Especial nos proporciona una descripción del movimiento distinta a la obtenida por la teoría clásica de Newton, y esta diferencia se vuelve más evidente

a medida que aumenta la velocidad de los objetos estudiados. Es decir, la teoría de Newton describe correctamente la cinemática y la dinámica de objetos que se mueven a bajas velocidades, pero se vuelve obsoleta a medida que los objetos de estudio se aproximan a la velocidad de la luz, y es ahí donde se requiere de la descripción de la Relatividad Especial.

Una década más tarde, en 1915, Einstein daría otro enorme paso en el entendimiento de nuestro Universo al publicar su teoría de la *Relatividad General* [3]. Esta teoría extiende la Relatividad Especial para tomar en cuenta a los sistemas de referencia no inerciales, que son aquellos que se encuentran acelerados con respecto a otro sistema de referencia [4]. La Relatividad General describe la equivalencia entre la interacción gravitacional y la geometría del espacio-tiempo, pues esencialmente nos dice que la gravedad es una manifestación de que el espacio-tiempo es curvado por la presencia de materia o energía [4], dando como resultado que cualquier objeto que se mueva sobre esta región deformada del espacio-tiempo siga una trayectoria curva. Es decir, cuando el espacio-tiempo es plano los objetos siguen trayectorias rectas, sin embargo, la presencia de materia o energía curva el espacio-tiempo de modo que los objetos siguen trayectorias curvas (ver Figura 1) [2].

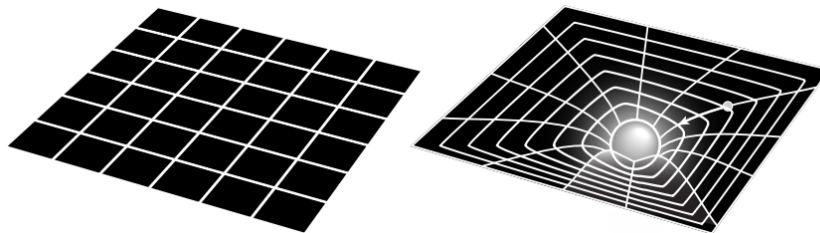


Figura 1: El espacio-tiempo es plano en ausencia de materia (izquierda), pero es curvado en presencia de materia (derecha). De acuerdo a la Relatividad General, la gravedad es la manifestación de esta curvatura. Imagen tomada de [4].

Muy poco tiempo después de que la Relatividad General fue presentada, se mostró que la teoría predice la existencia de ciertos objetos astrofísicos con la propiedad de tener una atracción gravitacional tan grande que nada, ni siquiera la luz, es capaz de escapar de ellos, por lo que eventualmente se conocerían como *agujeros negros* [3]. Actualmente, a partir de distintos tipos de mediciones directas e indirectas, tenemos la certeza de la existencia de los agujeros negros en el Universo. Tan es así que en Abril del 2019 el proyecto del Event Horizon Telescope publicó la asombrosa primera imagen captada de un agujero negro (ver Figura 2) [5]. La imagen muestra la silueta de un agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 [5, 6]. Dicha imagen proporciona la evidencia más sólida hasta la fecha de la existencia de agujeros negros supermasivos, y por tanto es uno de los más grandes éxitos de la teoría de Einstein. La Relatividad General ha tenido muchos otros éxitos en la correcta descripción de

la naturaleza, desde estrellas y galaxias, hasta la expansión del Universo mismo. Sin embargo, tal como la teoría de Newton, la teoría de Einstein puede resultar insuficiente para describir ciertos aspectos del Universo, como lo es por ejemplo lo que sucede en la singularidad de los agujeros negros, donde la Relatividad General deja de ser válida [4].



Figura 2: Imagen de un agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87. La imagen muestra un anillo brillante formado cuando la trayectoria de la luz se curva debido a la intensa gravedad al rededor del agujero negro. Imagen tomada de la colaboración Event Horizon Telescope [6].

Las escalas microscópicas del Universo, distancias del orden del tamaño de átomos y moléculas (o menos), son otro de los límites inaccesibles para la física clásica, por lo que para la correcta descripción de los fenómenos a tales escalas tuvo que ser desarrollada la llamada *mecánica cuántica* [2]. Esta teoría trajo consigo una forma fundamentalmente nueva de entender la naturaleza pues, a diferencia de la mecánica de Newton, la mecánica cuántica proporciona una descripción de los fenómenos físicos únicamente a partir de *probabilidades*. El éxito de la mecánica cuántica es incuestionable, pues hasta el día de hoy ha sido corroborada experimentalmente una infinidad de veces. Por otra parte, si bien la mecánica cuántica es una herramienta muy útil en la descripción microscópica de la naturaleza, resulta insuficiente para estudiar los constituyentes más fundamentales del universo, pues hemos descubierto que los átomos no son las piezas indivisibles básicas en la construcción de toda la materia, sino que son estructuras conformadas por elementos más pequeños. Hoy sabemos, por medio de diversos experimentos, que los átomos están formados por *electrones* que orbitan un núcleo y éste a su vez está compuesto por protones y neutrones. Los protones y neutrones a su vez están formados por *quarks* [2]. Hasta donde los experimentos nos han dejado indagar, electrones y quarks son objetos sin estructura, por lo que son pensados como los constituyentes últimos de la materia y se conocen como *partículas elementales* [7].

Para estudiar la física de estas partículas fundamentales resulta necesario una teoría que combine la mecánica cuántica y la Relatividad Especial, convergiendo en un lenguaje conocido como *teoría cuántica de campos (QFT)*¹ [7]. Dicho marco teórico permite el estudio, en el espacio-tiempo plano de 4 dimensiones, de las partículas elementales de la materia, así como la forma en la que éstas interactúan entre sí. Esto ha permitido construir un modelo de todas las partículas elementales que hemos encontrado en la naturaleza y las correspondientes fuerzas que describen sus interacciones, que ha recibido el nombre de *Modelo Estándar* [8].

El Modelo Estándar nos dice que las partículas elementales que componen a la materia, denominadas *fermiones*, se dividen en dos clases, *leptones* y *quarks*, y estos a su vez se organizan en tres familias de estructura muy parecida pero masa distinta [8]. A los leptones pertenece el *electrón* (e^-) y su correspondiente *neutrino* (ν_e), mientras que a los quarks pertenece el quark *up* (u) y el quark *down* (d). Los quarks u y d pueden combinarse para formar neutrones y protones, por lo que estas cuatro partículas (e^-, ν_e, u, d) pertenecientes a la primera familia, la más liviana, son suficientes para formar cualquier átomo y por tanto cualquier estructura de materia ordinaria en el universo, desde las estrellas hasta nosotros mismos [2]. Existen sin embargo otras dos familias de fermiones con mayor masa, presentadas en el Cuadro 1. El hecho de que tales partículas sean más masivas causa que éstas solo puedan ser observadas en situaciones que involucren velocidades relativistas [2]. Así como los quarks u y d se combinan para formar protones y neutrones, los seis quarks pueden combinarse de distintas formas para conformar así un conjunto muy variado de partículas denominadas *Hadrones* [7].

Fermiones			
Leptones	masa (MeV)	Quarks	masa (MeV)
<i>Electrón</i> e^-	0.5	<i>Up</i> u	2
<i>e-neutrino</i> ν_e	$< 2 \times 10^{-6}$	<i>Down</i> d	5
<i>Muón</i> μ^-	106	<i>Charm</i> c	1200
<i>μ-neutrino</i> ν_μ	< 0.19	<i>Strange</i> s	100
<i>Tauón</i> τ^-	1777	<i>Top</i> t	171,000
<i>τ-neutrino</i> ν_τ	< 18	<i>Bottom</i> b	4,200

Cuadro 1: Partículas elementales de materia del Modelo estándar, llamadas fermiones; se dividen en dos clases, leptones y quarks, y estos a su vez se dividen en tres familias de masas distintas. Información obtenida de [8].

De acuerdo con el Modelo Estándar, las interacciones entre las partículas de materia se da por medio del intercambio de otras partículas elementales mediadoras llamadas *bosones* [7]. Estas interacciones entre partículas son lo que comúnmente se

¹Aquí, y en adelante, las siglas están dadas en inglés.

conoce como *fuerzas fundamentales*. Experimentalmente sabemos que todas las interacciones conocidas en la naturaleza son gobernadas por alguna combinación de cuatro fuerzas fundamentales [8]: *Electromagnética, fuerza nuclear fuerte, fuerza nuclear débil y gravitacional*. Sin embargo, por razones que discutiremos más adelante, el Modelo Estándar solo describe las primeras de estas tres fuerzas fundamentales. Según este Modelo cada una de estas interacciones tiene asociada al menos una partícula bosónica que porta dicha fuerza; la fuerza electromagnética tiene asociado al *fotón*, la fuerza nuclear débil a los *bosones* Z , W^+ y W^- , y la fuerza nuclear fuerte 8 tipos de *gluones* [7] (ver Cuadro 2). Finalmente, para completar la colección de partículas bosónicas del Modelo Estándar (ver Cuadro 2) hace falta agregar una partícula elemental adicional, conocida como el *bosón de Higgs*, cuya naturaleza es distinta a las demás, pues al interactuar con él, el resto de partículas fundamentales ya mencionadas adquieren su masa característica [7].

Bosones	
Interacción	Partícula
<i>Electromagnética</i>	<i>Fotón γ</i>
<i>Débil</i>	<i>Bosón Z, W^+, W^-</i>
<i>Fuerte</i>	<i>Gluones g</i>
<i>Masa</i>	<i>Bosón de Higgs H</i>

Cuadro 2: Bosones del Modelo Estándar; Las partículas portadoras de las fuerzas fundamentales, y el bosón de Higgs encargado de la masa característica de las demás partículas.

El Modelo Estándar de las partículas elementales está compuesto en realidad por un conjunto de teorías, como lo es por ejemplo la *cromodinámica cuántica (QCD)*, la cual se encarga de describir a la fuerza fuerte, es decir, cómo interactúan las partículas portadoras de carga de color [8]. Sin embargo, empleando el lenguaje general de la teoría cuántica de campos, es posible construir innumerables tipos de teorías, cada una con diferente contenido de partículas/campos. No obstante, la evidencia experimental nos muestra que es el Modelo Estándar el que describe, con extraordinaria precisión, a las partículas elementales presentes en nuestro Universo. Parte de la evidencia experimental proviene de la colisión de partículas a velocidades relativistas, lo cual puede lograrse, por ejemplo, empleando los llamados *aceleradores de partículas* [8]. Un ejemplo de esto es el descubrimiento del Bosón de Higgs: La existencia de esta partícula fue propuesta teóricamente por Peter Higgs en la década de los 60's, pues resulta necesaria para la consistencia matemática del Modelo Estándar y para que los fermiones tengan masa [2], sin embargo, no fue sino hasta medio siglo después que, en el año 2012, dicha partícula fue observada en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en el CERN [7].

A pesar del gran éxito del Modelo Estándar, resulta claro que no es la última

palabra pues, entre otras cosas, existen ciertos límites de la física de partículas que no pueden ser descritos con dicho marco teórico debido a lo complicado que resultan los cálculos matemáticos. Tal es el caso del llamado *régimen de acoplamiento fuerte* [7], en el cual las interacciones entre las partículas se vuelven tan intensas que resulta muy difícil estudiarlas con las herramientas de dicha teoría [9]. Más aún, existen varios aspectos importantes de la naturaleza que parecen inaccesibles para el Modelo Estándar, como lo es la descripción microscópica de la gravedad, razón por la cual, a diferencia del resto de fuerzas fundamentales, no escribimos una partícula fundamental asociada a la interacción gravitacional en el Cuadro 2 del Modelo Estándar. El Modelo Estándar y la Relatividad General parecen ser incompatibles, pues hasta ahora la incorporación de la gravedad en el lenguaje de las otras fuerzas fundamentales no ha sido posible [4]. Tal descripción de la gravedad resulta indispensable para comprender aspectos importantes como el origen del universo, o lo que sucede en el interior de los agujeros negros [4].

En este contexto podemos introducir a la llamada *Teoría de Cuerdas*, la cual se trata de una ambiciosa teoría que, entre otras cosas, busca describir los aspectos inaccesibles para el Modelo Estándar. La idea básica detrás de esta teoría es que los constituyentes fundamentales de la materia y sus interacciones no son partículas, es decir objetos puntuales, sino *cuerdas*, que además de trasladarse pueden vibrar [9]. De acuerdo a la teoría de cuerdas, lo que hemos llamado partículas elementales son en realidad la manifestación de esta cuerda, que al vibrar con diferentes frecuencias puede ser identificada como las diferentes partículas de la naturaleza (ver Figura 3). Es decir, a nivel fundamental, la materia y sus interacciones no consisten de diferentes tipos de partículas puntuales, sino de un único tipo de objeto unidimensionalmente extendido que puede vibrar de diferentes formas, y con cada forma específica de vibrar de la cuerda surge una partícula con sus propiedades particulares [10].

Más aún, se encuentra que un modo de vibrar de la cuerda da lugar al *gravitón*, la que teóricamente es la partícula cuántica de la interacción gravitacional, siendo así la teoría de cuerdas una de las teorías más prometedoras de gravedad cuántica [10]. Además de esto, la teoría de cuerdas añade ciertos elementos adicionales: Por ejemplo, predice la existencia de una simetría entre las partículas elementales de la materia (fermiones) y las partículas asociadas a las interacciones (bosones), conocida como *supersimetría* [11], y nos dice además que el espacio-tiempo debe tener 10 dimensiones (9 espaciales y una temporal) en lugar de las 4 dimensiones usuales [10]. Pese a lo prometedor de esta teoría, hasta el momento no existe ningún tipo de evidencia experimental de estas nuevas ideas incorporadas y por tanto de que la propuesta de la teoría de cuerdas sea la forma correcta de entender y describir el Universo [10].

Si bien la confirmación experimental parece estar lejos de llegar, la teoría de cuerdas sigue en desarrollo, consiguiendo avances en diversas áreas de la física teórica y las matemáticas [10]. En particular, a partir de la teoría de cuerdas se han desarrollado

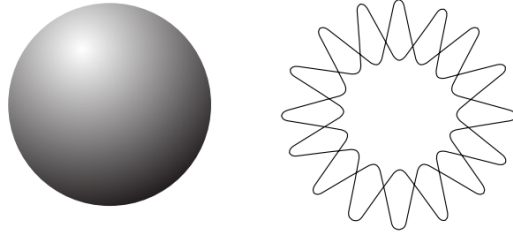


Figura 3: De acuerdo a la teoría de cuerdas, los diferentes modos de vibrar de una cuerda (derecha) pueden ser interpretados como las distintas partículas elementales de la naturaleza (izquierda). Imagen tomada de [4].

nuevas herramientas para estudiar ciertos aspectos del régimen de acoplamiento fuerte en el contexto de QFT. De esta forma surge la llamada *correspondencia AdS/CFT* [9, 12] propuesta por Juan Maldacena a finales de la década de los 90's. La idea básica requiere de dos elementos: Por un lado se requiere de una teoría cuántica de campos particular, muy parecida a la QCD y que vive en el espacio-tiempo plano 4-dimensional [13]. En segundo lugar se requiere de una cierta teoría de cuerdas, es decir, una teoría con gravedad y dimensiones adicionales, que da lugar a un particular espacio-tiempo curvo 10-dimensional. La correspondencia AdS/CFT establece que dichos elementos, que parecen constituir universos totalmente distintos, son en realidad completamente *equivalentes* [9]. Es decir, existen dos lenguajes muy distintos entre sí que en realidad describen el mismo sistema físico [9]. En particular, esta correspondencia identifica a la física en un espacio-tiempo de 4 dimensiones con la física en un espacio-tiempo de 10 dimensiones, y es en este sentido en el que la Correspondencia AdS/CFT es también conocida como la *Correspondencia Holográfica*² [9].

La equivalencia establecida en la Correspondencia Holográfica nos proporciona un *diccionario* que codifica la información y la traduce de una teoría a la otra [9]. En un límite particular este diccionario codifica el régimen de interacciones fuertes de un lado de la correspondencia con el régimen de interacciones débiles del otro. Así, si la teoría de campos está en el régimen de acoplamiento fuerte, la teoría gravitacional estará en el régimen de acoplamiento débil [12]. Dicho de otra forma, la Correspondencia Holográfica traduce cálculos complejos en la teoría de campos en cálculos más sencillos en la teoría gravitacional. Esto establece a la Correspondencia Holográfica como una formidable herramienta de cálculo y uno de los descubrimientos más interesantes en la física teórica de las últimas décadas.

En particular, en este trabajo estamos interesados en usar la Correspondencia Holográfica como herramienta para investigar la relación entre los *agujeros de gusano* y

²En alusión a un holograma óptico que codifica la información de un objeto tridimensional en una imagen bidimensional.

el *entrelazamiento cuántico*: Por un lado, la teoría de la Relatividad General permite una solución muy peculiar; dos agujeros negros pueden estar conectados a través un agujero de gusano (ver Figura 4) [3]. Los agujeros de gusano, también conocidos como *puentes de Einstein-Rosen (ER)*, son entonces un tipo de geometría que permiten conectar dos regiones del espacio-tiempo [14]. Estas geometrías han sido fuente de inspiración tanto en la ciencia como en la ciencia ficción, pues ya que los agujeros de gusano pueden conectar regiones distantes, constantemente se ha imaginado la posibilidad de viajar a través de éstos con el fin de reducir las distancias en el Universo. Sin embargo, resulta que los agujeros de gusano capaces de ser atravesados requieren de cierto tipo de materia exótica que no existe en nuestro Universo [3, 15].

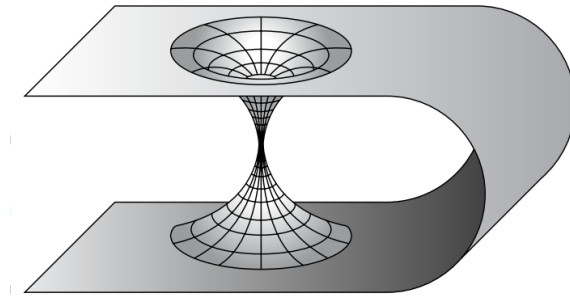


Figura 4: Los agujeros de gusano son geometrías que conectan a dos regiones del espacio-tiempo. Imagen tomada de [4].

Por otro lado, se encuentra que en toda teoría cuántica existe un fenómeno muy interesante conocido como entrelazamiento cuántico: Este fenómeno tiene que ver con la correlación entre dos subsistemas de un sistema cuántico [16]. Si consideremos, por ejemplo, un sistema de dos partículas cuánticas en un estado entrelazado, sistema conocido como *par EPR*, la correlación debida al entrelazamiento tiene como consecuencia que las propiedades de una partícula de este par no puedan describirse de manera independiente de la otra partícula [16]. Además, se encuentra que este fenómeno surge sin importar cuan separadas se encuentren dichas partículas [16].

Aunque los agujeros de gusano y el entrelazamiento cuántico tengan orígenes muy distintos, Maldacena y Susskind propusieron que estos dos conceptos son de hecho equivalentes [1]: El escenario en el que dos agujeros negros están conectados por un puente de Einstein-Rosen (ER) puede ser interpretado como un estado entrelazado. Así mismo, cualquier estado entrelazado, incluso si consiste solo de un par EPR, tiene asociado algún tipo de puente de Einstein-Rosen (ER). Esta propuesta es conocida como *conjetura ER=EPR* [1]. La propuesta de Maldacena y Susskind resulta sorprendente, por lo que el estudio de esta conjetura ha sido de mucho interés en la física, y es por lo que hemos decidido abordar su investigación en esta tesis. El objetivo de este trabajo es entonces emplear la Correspondencia Holográfica como herramienta para obtener algún tipo de evidencia sobre la conjetura ER=EPR.

Capítulo 1

Teoría cuántica de campos

De acuerdo a la Introducción, el desarrollo de este trabajo descansa sobre dos grandes pilares, la teoría cuántica de campos y la Relatividad General. El presente Capítulo está dedicado a describir algunos conceptos fundamentales del lenguaje de la teoría cuántica de campos. En primer lugar, en la Sección 1.1, repasamos algunos aspectos importantes de la teoría de la Relatividad Especial de Einstein. Con esta base, en la Sección 1.2 presentamos propiamente a los elementos de la teoría cuántica de campos, describiendo aquellos campos que serán cruciales en el resto del texto, el proceso de cuantización de los mismos, así como algunas de sus interacciones. Posteriormente, en la Sección 1.3 introducimos a las teorías de campos conocidas como teorías de Yang mills, las cuales tendrán un papel importante en el resto del texto. Para finalizar, en la Sección 1.4 presentamos a la llamada entropía de entrelazamiento y algunas de sus características más relevantes.

1.1. Relatividad Especial

El trabajo que se lleva a cabo en estas páginas tiene como punto de partida la teoría de la Relatividad Especial [17, 3], desarrollada en 1905 por Albert Einstein, y que resulta indispensable para describir la física clásica (y cuántica) en *sistemas de referencia inerciales*. Estos son definidos por la primera ley de Newton. De acuerdo a esta ley, un sistema de referencia inercial es aquél en el que un cuerpo libre, que no está sujeto a fuerzas externas, no es acelerado [17]. Cualquier sistema que se mueve con velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial es también un sistema de referencia inercial. La Relatividad Especial postula que cualquier teoría física en dichos marcos inerciales debe cumplir lo siguiente [3]:

1. Las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales.
2. La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales, sin importar la velocidad del observador o de la fuente.

Se asume además que el espacio y el tiempo deben ser *homogéneos* e *isotrópicos*¹ [3]. Las transformaciones que relacionan los sistemas de referencia inerciales y que respetan ambos postulados son las llamadas *transformaciones de Lorentz* [3]. Si el sistema² S' , con coordenadas $(x', y', z'; ct')$, se mueve relativo a S , con coordenadas $(x, y, z; ct)$, en la dirección x y con rapidez constante v , estas transformaciones se escriben como [17]

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \quad , \\ x' &= \gamma\left(x - \frac{v}{c}ct\right) \quad , \\ y' &= y \quad , \\ z' &= z \quad , \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ y c es la velocidad de la luz [3]. Cuando $v \ll c$, $\gamma \approx 1$, lo cual indica que para velocidades mucho menores que la velocidad de la luz se recuperan las transformaciones de Galileo³ [3].

El hecho de que estas transformaciones sean las adecuadas para describir la relación entre sistemas de referencia inerciales trae consigo diversas consecuencias físicas y geométricas. Lo primero que es posible notar es que las transformaciones de Lorentz (1.1) mezclan el tiempo t y las coordenadas espaciales (x, y, z) , lo cual indica que no es posible separar espacio y tiempo, sino que se trata de un solo ente físico al que llamamos *espacio-tiempo*. De esta forma, para definir un punto en el espacio-tiempo es necesario especificar cuatro coordenadas, por ejemplo (x, y, z, ct) . Cada punto en el espacio-tiempo definido de esta manera es denominado *evento* [3].

Física del espacio-tiempo

Debido a dicha relación entre la coordenada temporal y las coordenadas espaciales resulta conveniente introducir los llamados *diagramas espacio-tiempo* para describir ciertos aspectos de la física de la Relatividad Especial: Para un sistema inercial S dibujamos una dirección espacial en el eje horizontal, comúnmente la coordenada x , y en el eje vertical la coordenada temporal ct [17], como se muestra en la Figura 1.1. Cada punto P en este diagrama representa un evento. En este diagrama podemos trazar, por ejemplo, la curva que traza una partícula clásica moviéndose en el espacio-tiempo, conocida como *línea de mundo* (ver Figura 1.1 izquierda). Por su parte, los rayos de luz en dirección x , que se mueven con rapidez c , dibujan líneas rectas a 45°

¹Los que significa que no existen puntos ni direcciones especiales en el espacio y el tiempo [17].

²Comúnmente se denota a los marcos de referencia por S, S', S'' , etc. Los ejes de estos sistemas pueden ser etiquetadas de distintas formas, por ejemplo, x, y, z .

³Las transformaciones de Galileo definen el cambio de sistemas de referencia inerciales en la mecánica de Newton: $t' = t$, $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$.

[17] (ver Figura 1.1 derecha). Debido a los postulados de la Relatividad Especial se encuentra que ninguna partícula puede moverse más rápido que la velocidad de la luz⁴, lo cual significa que la línea de mundo de cualquier partícula debe tener siempre una pendiente mayor o igual a 45° [17].

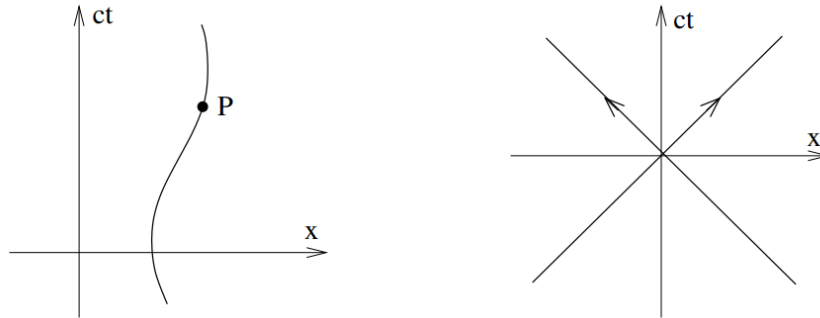


Figura 1.1: Diagramas espacio-tiempo: coordenada temporal ct en el eje vertical y coordenada espacial x en el eje horizontal. Las curvas que trazan las trayectorias de partículas moviéndose en el espacio-tiempo se conocen como líneas de mundo (izquierda). Los rayos de luz trazan rectas a 45° (derecha). Imagen tomada de [17].

En un diagrama espacio-tiempo pueden representarse distintos observadores inerciales: Si además del sistema S nos interesa representar al sistema inercial S' que se mueve en la dirección x y con rapidez constante v , a partir de las transformaciones de Lorentz (1.1) se encuentra que el eje ct' está dado por la ecuación $x = vt$, mientras que el eje x' está dado por la ecuación $ct = \frac{v}{c}x$ [17]. Es decir, se representan como rectas inclinadas con respecto a los ejes (ct, x) del sistema S , como se muestra en la Figura 1.2. De esta forma, los ejes (ct', x') del sistema S' pueden ser pensados como los ejes (ct, x) del sistema S rotados en dirección del rayo de luz diagonal (representado con la línea punteada) por el mismo ángulo $\phi = \arctan v/c$ [17]. Que estos ejes sean simétricos con respecto al rayo de luz diagonal refleja el hecho de que la velocidad de la luz es igual a c para ambos observadores inerciales [17]. Establecido esto, podemos emplear estos diagramas para describir de forma más clara algunas de las consecuencias físicas de la Relatividad Especial.

Simultaneidad: Para un observador inercial S dos eventos P_1 y P_2 son simultáneos si ocurren al mismo tiempo $t_1 = t_2$. En un diagrama espacio-tiempo para el sistema S con ejes (ct, x) podemos dibujar las líneas que conectan eventos simultáneos como líneas paralelas al eje x [17], como se muestra en la Figura 1.3 (izquierda). Por otra parte, para el sistema inercial S' con coordenadas (ct', x') los eventos simultáneos,

⁴De las transformaciones de Lorentz (1.1) y la definición de γ es fácil ver que $v > c$ resulta en un número imaginario sin sentido físico.

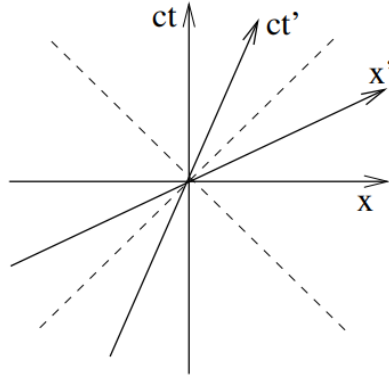


Figura 1.2: En los diagramas espacio-tiempo pueden representarse diferentes sistemas inerciales. Los ejes (ct', x') de un sistema S' moviéndose en dirección x con rapidez constante v se encuentran dados por las ecuaciones $x = vt$ para ct' y $ct = \frac{v}{c}x$ para x' . Imagen tomada de [17].

que ocurren al mismo tiempo t' , están conectados por líneas paralelas al eje x' , como se muestra en la Figura 1.3 (derecha) [17]. De esta imagen podemos ver que los eventos P_1 y P_2 , que para el observador S son simultáneos, no están conectados por líneas de simultaneidad en S' , por lo que para este observador dichos eventos no son simultáneos [17]. De esta forma, dos eventos que en un sistema inercial son simultáneos, no lo serán para otro sistema inercial moviéndose con rapidez v [17]. Por tanto, un resultado asombroso de la Relatividad Especial es que la simultaneidad es dependiente del observador.

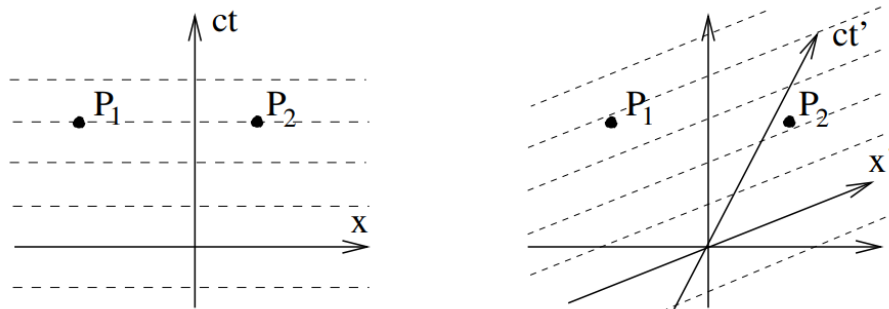


Figura 1.3: Para un sistema inercial S con ejes (ct, x) dos eventos simultáneos P_1 y P_2 está conectados por líneas paralelas al eje x (izquierda). Para un sistema sistema inercial S' con ejes (ct', x') los eventos simultáneos están conectados por líneas paralelas al eje x' . Por tanto, eventos simultáneos en S no son simultáneos en S' . Imagen tomada de [17].

Causalidad: Hemos visto que diferentes observadores inerciales pueden estar en

desacuerdo respecto al orden temporal de dos eventos. Es natural preguntarnos entonces si es posible asegurar que un evento sucedió definitivamente antes que otro, de modo que un evento P_i que fue causa de otro evento P_f haya sucedido antes para cualquier observador inercial. Esto es importante ya que, de no ser así, el futuro podría tener efectos en el pasado, lo que se conoce como violación de la causalidad [3].

Para ver esto resulta conveniente introducir al llamado *cono de luz*; representando en un diagrama espacio-tiempo a los rayos de luz diagonales que emergen de un evento P particular, el cono de luz es la superficie (agregando una dimensión espacial adicional) que dibujan dichos rayos de luz [17], como se muestra en la Figura 1.4. Esta geometría consiste en realidad en dos conos, el cono de luz futuro que incluye la región por encima de P y el cono de luz pasado que incluye la región por debajo de P .

Notemos ahora que, ya que las transformaciones de Lorentz son posibles solamente para $v \leq c$, las líneas de simultaneidad para cualquier sistema inercial no pueden tener una inclinación mayor a 45° con respecto al eje espacial x [17]. Esto significa que para todo observador inercial, cualquier evento Q dentro del cono de luz futuro (ver Figura 1.4) sucederá después de P [17]. Por tanto aquellos eventos que pueden ser causalmente influenciados por P deben estar dentro del cono de luz futuro [17], de modo que se respeta así la causalidad para cualquier observador inercial. Similarmente, cualquier evento que pudo tener una influencia sobre P debe estar dentro del cono de luz pasado [14]. Por su parte, aquellos eventos R fuera del cono de luz (ver Figura 1.4) no deben tener influencia causal sobre P , pues tal y como pasó en el ejemplo previo, un observador podría afirmar que el evento P y el evento R fueron simultáneos, por lo que uno no podría ser la causa del otro.

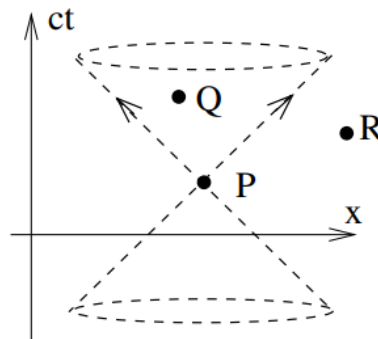


Figura 1.4: El cono de luz de un evento P se define como la geometría que trazan los rayos de luz provenientes de P . Ésta se divide en el cono de luz pasado y el cono de luz futuro. Aquellos eventos Q dentro del cono de luz pueden tener una relación de causalidad con P , mientras que aquellos eventos R fuera del cono de luz no pueden estar relacionados causalmente con P . Imagen tomada de [17].

Geometría del espacio-tiempo

La Relatividad Especial nos dice que las mediciones de tiempo y longitud son relativas al movimiento del observador inercial. Cabe preguntarnos entonces si hay alguna forma de medir distancias entre dos eventos del espacio-tiempo que sea igual para todo observador inercial. Resulta que es posible construir una cantidad invariante ante las transformaciones de Lorentz⁵, que en una cierta elección de coordenadas está dada por [18]

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad . \quad (1.2)$$

Esta cantidad es conocida como el *intervalo* y proporciona una caracterización, independiente del observador, de medir la distancia entre dos eventos en el espacio-tiempo [17]. De modo que, para cualesquiera sistemas inerciales S y S' se cumple que [17]

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \quad .$$

Al espacio-tiempo cuyo intervalo queda invariante bajo las transformaciones de Lorentz se le conoce como el *espacio-tiempo de Minkowsky* [17]. Como veremos más adelante, la forma particular en la que se miden distancias espacio-temporales caracteriza al espacio-tiempo. Por ejemplo, el espacio-tiempo de Minkowski es topológicamente equivalente al espacio Euclidiano en 4 dimensiones, sin embargo estos espacios son esencialmente diferentes ya que la forma de medir distancias es distinta [17]. Esta diferencia radica en el signo negativo presente en el intervalo de Minkowski, que distingue las coordenadas espaciales de la temporal. Para identificar esta diferencia entre las coordenadas se dice que este espacio-tiempo tiene dimensión $d = 3 + 1$. Un espacio-tiempo de este tipo es conocido como *Lorentziano* [3]. En particular, Minkowski es un espacio-tiempo sin *curvatura*, propiedad en la que ahondaremos en el siguiente Capítulo [14].

Así mismo, el intervalo (1.2) puede ser escrito en forma diferencial, también llamado elemento de línea de Minkowski, como [17]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad . \quad (1.3)$$

En general, es el elemento de línea el que define la estructura causal del espacio-tiempo de Minkowski. Para ver esto notemos que, dada la elección de signatura, el intervalo admite tres posibles valores, que podemos identificar de la siguiente manera [3],

- $ds^2 = 0$ intervalo tipo-luz,
- $ds^2 > 0$ intervalo tipo-espacio,

⁵La signatura $(-, +, +, +)$ es elegida por convención. Otra signatura comúnmente usada es $(+, -, -, -)$.

- $ds^2 < 0$ intervalo tipo-tiempo.

Comparando con la ecuación (1.3) podemos interpretar físicamente a cada intervalo. Los intervalos tipo luz $ds^2 = 0$ cumplen que $|dx|/|dt| = c$, lo que significa que estos intervalos, como su nombre bien lo indica, pueden ser recorridos únicamente a la velocidad de la luz c . En un diagrama espacio-tiempo los intervalos tipo-luz corresponden entonces a los rayos de luz representados como rectas a 45° . En particular, esto permite definir a los conos de luz, que como sabemos contienen la información de la causalidad en el espacio-tiempo, en términos del elemento de línea, como la superficie en el espacio-tiempo de Minkowski que cumple la condición $ds^2 = 0$ con origen en un evento P [3].

Por su parte, los intervalos tipo-tiempo $ds^2 < 0$ son tales que cubren la región dentro del cono de luz, por lo que cualesquiera dos eventos conectados por un intervalo tipo-tiempo pueden estar causalmente relacionados. En particular, estos intervalos cumplen que $|dx|/|dt| < c$, por lo que pueden ser recorridos a velocidades $v < c$ [3]. Por el contrario, los intervalos tipo-espacio $ds^2 > 0$ cubren la región fuera del cono de luz, por lo que cualesquiera dos eventos conectados por este intervalo no pueden tener relación causal. Podemos ver esto notando que intervalos tipo-espacio son tales que $|dx|/|dt| > c$, por lo que para recorrerlos hace falta viajar a velocidades superiores a la velocidad de la luz [3], lo cual resulta imposible si se respetan los postulados de la Relatividad Especial.

Resulta conveniente definir la siguiente notación para las coordenadas del espacio-tiempo: $ct = x^0$, $x = x^1$, $y = x^2$ y $z = x^3$, tal que para referirnos al conjunto de coordenadas del espacio-tiempo empleamos x^μ , donde $\mu = 0, 1, 2, 3$, y para las coordenadas espaciales x^i , con $i = 1, 2, 3$. Esto permite escribir el elemento de línea de Minkowski de forma compacta⁶ [3]

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \quad (1.4)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la llamada *métrica de Minkowski* [17]. Como veremos más adelante, la métrica es el objeto geométrico fundamental que codifica las propiedades del espacio-tiempo. Para el espacio-tiempo de Minkowski es posible escribir dicha métrica como una matriz simétrica 4×4 , dada por [3],

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad . \quad (1.5)$$

Establecido lo anterior, con el fin de ahondar en la estructura geométrica del espacio-tiempo de Minkowski, es preciso visitar a las transformaciones de Lorentz:

⁶Se emplea la convención de sumas de Einstein que indica una suma implícita sobre índices repetidos.

Estas son transformaciones lineales⁷ que relacionan de forma continua y biyectiva los sistemas inerciales con coordenadas x^μ y $x^{\mu'}$, es decir, son *difeomorfismos*⁸, denotadas por $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ y que satisfacen [3]

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \quad , \quad (1.6)$$

mientras que la transformación inversa satisface $\Lambda^{\nu}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}$. Por definición, el intervalo debe ser invariante ante dichas transformaciones, es decir,

$$ds'^2 = \eta_{\mu'\nu'} x^{\mu'} dx^{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = ds^2 \quad ,$$

lo que indica que las transformaciones de Lorentz Λ deben satisfacer la relación [3]

$$(\Lambda^T)_{\alpha}^{\mu'} \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad . \quad (1.7)$$

Esta relación puede ser escrita en notación matricial como

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad , \quad (1.8)$$

de donde se sigue inmediatamente que el determinante de estas matrices es [3]

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad . \quad (1.9)$$

Así, una transformación de Lorentz puede ser pensada como una matriz Λ que rota en el espacio-tiempo a las coordenadas x^μ del sistema S para obtener las coordenadas $x^{\mu'}$ del sistema S' , tal y como describimos previamente en los diagramas espacio-tiempo (ver Figura 1.2), es decir, [3]

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \quad , \quad (1.10)$$

mientras que en su forma matricial esto se escribe $x' = \Lambda x$. De igual forma es posible escribir la transformación inversa $x^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu'} x^{\mu'}$.

De manera general, dentro de las transformaciones de Lorentz Λ podemos encontrar a las rotaciones espaciales usuales, por ejemplo, la rotación en el plano $x^1 x^2$ en un ángulo θ , tal que

$$\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (1.11)$$

⁷Una transformación lineal es una función de un espacio vectorial a otro $T : V \rightarrow W$, que preserva las operaciones de adición de vectores y multiplicación por escalares, tal que

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in V$.

⁸Un difeomorfismo es un mapeo diferenciable, biyectivo e invertible que relaciona un espacio continuo con otro [3].

Por su parte, las transformaciones espacio-temporales de Lorentz que vimos antes, dadas en la ecuación (1.1), son también llamadas *boosts de Lorentz* y pueden ser escritas como matrices de rotación hiperbólicas en el espacio-tiempo [17]; por ejemplo, un boost a lo largo de la dirección x^1 se encuentra que está dado por [17]

$$\Lambda(\phi) = \begin{bmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

donde el parámetro hiperbólico de la transformación es dado por la rapidez v del sistema inercial S' con respecto a S , tal que $\phi = \arctan v/c$ [3].

Es posible demostrar que las matrices que cumplen la condición (1.9) forman un *grupo*⁹ de Lie¹⁰, denominado el *grupo de Lorentz* en (3+1) dimensiones y denotado como $O(1,3)$ [19]. Si bien todas las transformaciones del grupo $O(1,3)$ son admisibles matemáticamente, para obtener transformaciones con sentido físico debemos restringirnos al subgrupo¹¹ $SO^+(1,3)$, denominado el *grupo de Lorentz restringido* [3], el cual incluye al *subgrupo propio* que cumple la condición $\det \Lambda = +1$ y al *ortócrono* con la condición $\Lambda^0_0 \geq 1$, ya que estos preservan la orientación del espacio-tiempo y la dirección del tiempo respectivamente [3, 19]. Este subgrupo incluye a las rotaciones usuales de las coordenadas espaciales, y los boosts de Lorentz. A este subgrupo se le conoce como el grupo de Lorentz y se denota con $SO(1,3)$ [3].

Adicionalmente, las traslaciones espacio-temporales $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, donde a^μ es un vector constante que especifica la traslación espacio-temporal, son otro conjunto de transformaciones del espacio-tiempo que dejan invariante al intervalo [17], de tal forma que la transformación más general entre sistemas de referencia inerciales queda descrita como

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu + a^{\mu'} \quad . \quad (1.13)$$

El conjunto completo de transformaciones de Lorentz y traslaciones forman el llamado *grupo de Poincaré* [3].

Por otra parte, resulta útil considerar a las transformaciones del grupo de Lorentz $SO(3,1)$ en términos de sus *generadores*¹²: Para esto consideremos a dichas

⁹Formalmente, un grupo es un conjunto G con una operación \circ definida en G , si el grupo (G, \circ) satisface que: para todo $g_1, g_2 \in G, g_1 \circ g_2 \in G. \exists! e \in G$ tal que $\forall g \in G, g \circ e = g = e \circ g. \forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g. \forall g_1, g_2, g_3 \in G, g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ [19].

¹⁰Un grupo de Lie G es un grupo continuo para el que la regla de multiplicación implica funciones diferenciables de los parámetros que etiquetan a los elementos del grupo.

¹¹Un subgrupo de G es un subconjunto de elementos que por sí mismos forman un grupo bajo la misma regla de multiplicación [19].

¹²Para un grupo de Lie G arbitrario, los generadores son tales que cualquier transformación finita

transformaciones de manera infinitesimal, es decir, $\Lambda(\omega)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$ ¹³, con ω el parámetro asociado a la transformación, de tal forma que haciendo transformaciones infinitesimales sucesivas obtenemos una transformación finita [21]. Los generadores $J_{\mu\nu}$ son entonces matrices 4×4 tales que $\Lambda(\omega)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(J_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$, de tal manera que la transformación finita se obtiene mediante [19, 22]

$$\Lambda(\omega) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \quad . \quad (1.14)$$

Las componentes de los generadores son especificadas por $(J_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\eta_{\rho\nu}\delta^\mu{}_\sigma - \eta_{\sigma\nu}\delta^\mu{}_\rho)$ [19]. Así, los generadores J_{kl} con $k, l = 1, \dots, 3$ son los generadores de las rotaciones en el espacio, mientras que las J_{0k} corresponden a los boosts. Estos generadores forman la llamada *álgebra de Lie*¹⁴ $\mathfrak{so}(3, 1)$ y satisfacen la relación de conmutación¹⁵ [19, 22]

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}) \quad . \quad (1.15)$$

Es posible considerar además a los cuatro generadores P^μ de las traslaciones espacio-temporales, conformando así el grupo de Poincaré $(3, 1)$ [19].

Las matrices Λ que hasta ahora han caracterizado al grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ son sin embargo solo una representación¹⁶ específica del grupo que actúa sobre las coordenadas del espacio-tiempo, llamada *representación fundamental* [21, 23]. En general el grupo de Lorentz puede actuar sobre diferentes tipos de objetos y ante cada uno de estos actúa en una representación específica [19]. En particular, estaremos interesados en cómo transforman ciertos objetos que denominamos *campos*, que definiremos en las secciones siguientes, ante las transformaciones del grupo de Lorentz.

Con esto hemos descrito lo que consideramos son los elementos del espacio-tiempo de Minkowski más importantes para este trabajo. Este espacio-tiempo, cabe recordar, surge directamente de cumplir con los postulados de la Relatividad Especial. Concretamente, la Relatividad Especial busca construir leyes físicas que sean iguales para todos los observadores inerciales en el espacio-tiempo de Minkowski, es decir, leyes invariantes ante las transformaciones del grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ [3]. Para ver esto dedicaremos el resto de esta sección a describir brevemente la dinámica de partículas clásicas sobre el espacio-tiempo de Minkowski.

puede escribirse como [20]

$$U(\alpha) = e^{\alpha^a X_a} \quad ,$$

con α el parámetro de la transformación y $a = 1, \dots, N$, con N la dimensión del grupo [19].

¹³Con $|\omega_{\rho\nu}| \ll 1$ y tal que $\omega_{\rho\nu}$ es antisimétrico ante el intercambio de sus índices, es decir $\omega_{\rho\nu} = -\omega_{\nu\rho}$.

¹⁴Dado un grupo de Lie G el álgebra \mathfrak{g} de G es dado por aquellas matrices X $n \times n$ tales que $e^{tX} \in G$ para toda $t \in \mathbb{R}$ [19, 20].

¹⁵El conmutador de dos operadores o matrices A, B se define como la operación $[A, B] = AB - BA$.

¹⁶Formalmente, una representación D de un grupo (G, \circ) es un mapeo entre cualquier elemento del grupo $g \in G$ y una transformación lineal $D(g)$ de algún espacio vectorial V , $g \rightarrow D(g)$, tal que todas las propiedades del grupo son preservadas [19].

Dinámica relativista

Para describir la dinámica relativista de las partículas clásicas es conveniente introducir el concepto del *tiempo propio*, definido como el tiempo de un sistema físico en movimiento medido desde su propio marco de referencia con respecto al cual se encuentra en reposo [3]. Para entender esto consideremos una partícula clásica en reposo respecto al sistema S' . Al tiempo t' experimentado por esta partícula en reposo es al que llamamos tiempo propio y comúnmente es denotado por τ . Dado que la partícula está en reposo en este sistema tenemos que $d\vec{x}'^2 = 0$, de modo que el intervalo entre dos puntos de la línea de mundo de la partícula en reposo está dado por [17]

$$ds'^2 = c^2 d\tau'^2 \quad .$$

Dado que el intervalo es una cantidad invariante para cualquier observador inercial, tal que $ds'^2 = ds^2$, podemos concluir que el tiempo propio también lo es, tal que $d\tau^2 = d\tau'^2$ [3]. Por tanto, aunque el tiempo coordenado t sea relativo al observador inercial, el tiempo propio τ no lo es, de modo que cualquier observador inercial medirá el mismo tiempo propio τ [3].

Así, el tiempo propio τ permite definir cantidades físicas como si fueran medidas por observadores en su propio marco de referencia instantáneo [3]. En particular, el tiempo propio permite parametrizar la trayectoria de las partículas clásicas de manera que todos los observadores inerciales concuerden [17]. De esta forma, la línea de mundo de una partícula clásica vista desde un sistema inercial S puede ser pensada como una curva parametrizada $x^\mu(\tau)$ [17]. Se encuentra además que el tiempo coordenado t y el tiempo propio τ están relacionados por [3]

$$dt = \gamma_u d\tau \quad , \quad (1.16)$$

donde $\gamma_u = (1 - |\vec{u}|^2/c^2)^{-1/2}$, con $\vec{u} = d\vec{x}/dt$ la velocidad de la partícula con respecto al sistema inercial S .

La trayectoria de una partícula clásica en el espacio-tiempo puede ser escrita como un vector de 4 componentes, es decir [17],

$$x(\tau) = \begin{pmatrix} x^0(\tau) \\ \vec{x}(\tau) \end{pmatrix} \quad . \quad (1.17)$$

Esto permite generalizar la definición de velocidad en el espacio-tiempo, al definir la *4-velocidad* de una partícula clásica como [3]

$$U \equiv \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \frac{dx}{dt} = \gamma_u \begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix} \quad . \quad (1.18)$$

Esta definición es útil pues se encuentra que ante las transformaciones del grupo de Lorentz las componentes de la 4-velocidad transforman como [3]

$$U^\mu \rightarrow U^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu U^\nu \quad , \quad (1.19)$$

que es precisamente la forma en la transforman las coordenadas x^μ . En general, podemos definir a los *4-vectores* como aquellos objetos de 4 componentes $A = A^\mu$ que transforman ante Lorentz como transforman las coordenadas x^μ , es decir [17],

$$A^\mu \rightarrow A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^\nu \quad . \quad (1.20)$$

En este sentido, el *4-momento* de una partícula clásica relativista de masa m está definido por [17]

$$p = mU = \begin{pmatrix} m\gamma_u c \\ m\gamma_u \vec{u} \end{pmatrix} \quad , \quad (1.21)$$

donde las componentes espaciales son la generalización relativista del 3-momento de la partícula de masa m , es decir [17],

$$\vec{p} = m\gamma_u \vec{u} \quad . \quad (1.22)$$

Es interesante notar que el momento diverge cuando la velocidad de la partícula con masa m se aproxima a la velocidad de la luz $|u| = c$. Esto nos dice que las partículas masivas solo pueden viajar en el espacio-tiempo con velocidad inferior a la velocidad de la luz $|u| < c$ en intervalos tipo-tiempo [17].

Por su parte la componente p^0 se identifica como la energía total de la partícula, tal que $p^0 = E/c = \frac{1}{c}m\gamma_u c^2$ [17]. De modo que podemos escribir al 4-momento como

$$p = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad . \quad (1.23)$$

La energía relativista total de una partícula clásica de masa m está dada por [3]

$$E = m\gamma_u c^2 \quad . \quad (1.24)$$

Esta ecuación proporciona uno de los resultados más importantes a los que llegó Einstein con al Relatividad Especial, pues nos dice que la masa y la energía son equivalentes. Si consideramos una partícula en reposo, tal que $\vec{u} = 0$, la expresión para la energía se reduce a la que es probablemente la fórmula más conocida de la física, es decir [3],

$$E = mc^2 \quad . \quad (1.25)$$

Por otra parte, sabemos que ciertas cantidades deben ser iguales para todos los observadores inerciales, como el intervalo ds^2 y el tiempo propio $d\tau^2$, por lo que no pueden ser codificadas en términos de 4-vectores. A estas cantidades se les conoce como *invariantes o escalares de Lorentz* [3]. Con esta finalidad se define el producto interior de 4-vectores en el espacio-tiempo. Para dos 4-vectores $A = (A^\mu)$ y $B = (B^\mu)$ se define el producto interior en términos de la métrica de Minkowski como [3]

$$A \cdot B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu = -A^0 B^0 + A^i B^i \quad , \quad (1.26)$$

y se encuentra que la cantidad $A \cdot B$ es precisamente un escalar de Lorentz [3].

Un ejemplo importante de esto es el producto interior del 4-momento p consigo mismo: Consideremos el 4-momento de una partícula clásica de masa m medido desde su propio marco de referencia en reposo, es decir, $p = (mc, \vec{0})$, tal que

$$p \cdot p = p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \quad . \quad (1.27)$$

Ya que el producto interior es un escalar, la cantidad $m^2 c^2$ es la misma para todo observador inercial. Para un sistema inercial arbitrario, se encuentra que [3]

$$p^\mu p_\mu = -\frac{E^2}{c^2} + |\vec{p}|^2 c^2 \quad . \quad (1.28)$$

Comparando las ecuaciones (1.27) y (1.28) se encuentra que la relación de energía-momento para partículas con masa en movimiento está dada por [3],

$$E^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2 \quad . \quad (1.29)$$

En cuanto a partículas sin masa, de (1.27) es claro que cumplen [17]

$$p^\mu p_\mu = 0 \quad , \quad (1.30)$$

lo que nos indica que el 4-momento de una partícula no masiva se mueve siempre a lo largo de un intervalo tipo-luz [17]. Dicho de otra forma, las partículas no masivas siempre se mueven a la velocidad de la luz c . De la ecuación (1.29) vemos que el 3-momento y la energía de una partícula sin masa están relacionadas por $E^2 = |\vec{p}|^2 c^4$. Así, el 4-momento puede ser escrito como [17]

$$p = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{p} \end{pmatrix} \quad , \quad (1.31)$$

donde \hat{p} es un vector unitario en la dirección del movimiento de la partícula [17]. Con esto tenemos los elementos básicos para describir el movimiento de partículas clásicas en el espacio-tiempo de Minkowski.

1.2. Elementos de la Teoría Cuántica de Campos

Al construir una versión de la mecánica cuántica consistente con la Relatividad Especial surgen diversos problemas [24]. Como veremos, estos problemas pueden ser resueltos si consideramos que las entidades fundamentales de la naturaleza son *campos cuánticos*, y lo que llamamos partículas elementales no son otra cosa que las excitaciones de dichos campos. Un argumento para pensar a las partículas como excitaciones de un campo es que todas las partículas de un mismo tipo son iguales [24]. Dos electrones, por dar un ejemplo, son idénticos en todos los sentidos, sin importar

de donde vienen o por lo que han pasado. Esto significa que todos los electrones están hechos de lo mismo. De lo que están hechos los electrones sería entonces un campo, en particular, para este ejemplo, el campo del electrón [24]. No obstante, para comprender estas ideas y demás conceptos de la teoría cuántica de campos es conveniente comenzar repasando la teoría de campos clásicos.

Un campo puede ser definido como una función que asocia un objeto matemático, que puede representar alguna cantidad física, a cada punto del espacio-tiempo. Así, por ejemplo, el campo escalar real ϕ es definido como aquél que asigna un número real $\phi(x)$ a cada punto x del espacio-tiempo [24]. En analogía con un sistema de N partículas descrito por un número finito de coordenadas $\vec{x}_n(t)$, donde n es un índice que etiqueta a cada partícula, podemos escribir al campo escalar como $\phi_{\vec{x}}(t)$, donde \vec{x} pasa a ser un índice continuo en \mathbb{R}^3 , lo que deja en evidencia la condición del campo $\phi(x)$ como un sistema de infinitos grados de libertad [21]. El campo escalar real $\phi(x)$ es el campo más sencillo con el que podemos comenzar nuestra discusión, por lo que nos será de utilidad para desarrollar los elementos básicos de la teoría de campos, los cuales podrán ser extendidos a otros tipos de campos más complicados que veremos más adelante.

La dinámica del campo escalar real $\phi(x)$ está codificada en una acción $\mathcal{S}[\phi]$, definida como la integral en el espacio-tiempo de la *densidad lagrangiana* \mathcal{L} , la cual es una funcional del campo y sus primeras derivadas $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ ¹⁷, es decir [22],

$$\mathcal{S}[\phi] = \int d^{3+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^{3+1}x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{V}(\phi) \right) \quad , \quad (1.32)$$

donde podemos hacer la identificación $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$, con $\mathcal{K} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ y $\mathcal{V}(\phi)$ la energía cinética y potencial del sistema continuo respectivamente. El principio de mínima acción da lugar a las ecuaciones de movimiento del campo $\phi(x)$, las ecuaciones de Euler-Lagrange, que están dadas por [24]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad . \quad (1.33)$$

Adicionalmente, es posible obtener una descripción de la dinámica del campo escalar real a partir del formalismo Hamiltoniano [24]. Para esto es necesario definir la *densidad de momento canónico* conjugado al campo $\phi(x)$, dada por [24]

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi(x))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\phi}(x))} \quad . \quad (1.34)$$

La *densidad Hamiltoniana*, que es una función del campo $\phi(x)$ y su momento canónico conjugado π , es definida como [24]

¹⁷Donde empleamos la notación $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ para la derivada parcial, con $\mu = 0, 1, \dots, 3$.

$$\mathcal{H} \equiv \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \quad . \quad (1.35)$$

De modo que el *Hamiltoniano* está dado por [24]

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] \quad . \quad (1.36)$$

1.2.1. El campo de Klein-Gordon libre

Como hemos mencionado, la motivación para desarrollar una teoría de campos es conseguir una versión relativista de la mecánica cuántica, de modo que estamos interesados en estudiar una teoría de campos consistente con la Relatividad Especial, lo que significa que debe estar definida sobre el espacio-tiempo de Minkowski con métrica (1.4) y que debe ser invariante ante las transformaciones de Lorentz. El hecho de que una teoría de campos sea invariante ante las transformaciones de Lorentz implica que éstas dejan invariante a la acción, y en consecuencia, a las ecuaciones de movimiento. En particular, el campo escalar real $\phi(x)$ es definido como aquél que ante las transformaciones de Lorentz (1.10) transforma mediante [24],

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad . \quad (1.37)$$

Consideremos ahora un campo escalar real $\phi(x)$ con masa m , de manera que $\mathcal{V} = \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2$. La acción invariante ante transformaciones de Lorentz del campo escalar real libre con masa m , definido sobre el espacio-tiempo de Minkowski 3 + 1 dimensional, está dada por [22]

$$\mathcal{S}[\phi] = \int d^{3+1}x \left(\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2 \right) \quad . \quad (1.38)$$

Por comodidad, en (1.38) y en el resto del texto usamos las llamadas *unidades naturales*, que son tales que $c = \hbar = 1^{18}$. Con esto, las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo escalar real son [22]

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0 \quad . \quad (1.39)$$

La ecuación (1.39) es conocida como la *ecuación de Klein-Gordon*. Por definición, la acción del campo escalar real (1.38) es invariante ante las transformaciones de Lorentz sobre el campo $\phi(x)$, de modo que, si $\phi(x)$ es solución de la ecuación (1.39), entonces $\phi(\Lambda^{-1}x)$ también lo es [24], y podemos asegurar que la teoría del campo escalar real es consistente con la Relatividad Especial [24].

Es posible mostrar que la solución clásica a la ecuación (1.39) son ondas planas de la forma $e^{-ip\cdot x}$ sujetas a la relación de dispersión $p^\mu p_\mu = -m^2$ [24]. De esta forma, podemos escribir al campo como una combinación de ondas planas a través de una

¹⁸En unidades naturales E, p, m y $1/x^\mu$ tienen las mismas unidades.

transformada de Fourier, cambiando $\phi(t, \vec{x})$ por $\phi(t, \vec{p})$, es decir, pasar del espacio de posiciones al espacio de los momentos, tal que [22],

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2\pi^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(t, \vec{p}) \quad . \quad (1.40)$$

La ecuación (1.40) es invariante bajo transformaciones de Lorentz debido al factor $E_{\vec{p}}$ colocado en el denominador [12]. Esto puede verse directamente de la integral sobre el momento,

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} = \int \frac{d^4\vec{p}}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) \quad , \quad (1.41)$$

que es una expresión manifiestamente invariante, donde Θ es la función paso definida como $\Theta(p^0) = 1$ para $p^0 > 0$ y $\Theta(p^0) = 0$ para $p^0 < 0$ [12].

Sustituyendo (1.40) en la ecuación de Klein-Gordon (1.39) se encuentra que la ecuación de movimiento correspondiente en el espacio de los momentos está dada por [22]

$$[\partial_0^2 + (|\vec{p}|^2 + m^2)] \phi(t, \vec{p}) = 0 \quad , \quad (1.42)$$

que podemos identificar como la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple que vibra con frecuencia $\omega_{\vec{p}} = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ [22, 23]. Así, para cada valor de \vec{p} , $\phi(t, \vec{p})$ satisface la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia $\omega_{\vec{p}}$, lo que significa que el campo $\phi(x)$ puede entenderse como una superposición de un número infinito de osciladores armónicos desacoplados [22].

Dicho lo anterior, podemos escribir la solución más general a la ecuación de Klein-Gordon en términos de modos de Fourier $a^*(t, \vec{p})$ y $a(t, \vec{p})$, es decir [12],

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a(t, \vec{p}) e^{-ip\cdot x} + a^*(t, \vec{p}) e^{ip\cdot x}) \quad . \quad (1.43)$$

Cada modo de Fourier satisface entonces la ecuación de un oscilador armónico, lo cual permite además interpretar a cada modo de Fourier como un modo normal de vibración del campo $\phi(t, \vec{x})$, es decir, cualquier configuración del campo $\phi(t, \vec{x})$ puede escribirse como una combinación de estos patrones de movimiento colectivo independientes entre sí [21].

Por otra parte, hemos visto que en el formalismo Hamiltoniano las variables dinámicas son el campo $\phi(t, \vec{x})$ y su momento canónico conjugado $\pi(t, \vec{x})$, definido por la ecuación (1.34). Para el campo de Klein-Gordon con acción (1.38) el momento canónico conjugado está dado por $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ [24]. Con esto, se encuentra que el Hamiltoniano del sistema está dado por [24]

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) \quad . \quad (1.44)$$

Como veremos más adelante esto será de utilidad para desarrollar el tratamiento cuántico del campo.

1.2.2. Simetrías

Es importante introducir ahora uno de los conceptos esenciales en la física, y en particular en la teoría cuántica de campos, esto es, el concepto de *simetrías*. En el contexto de la teoría de campos se denomina simetría a una transformación que deja invariante a la acción del sistema, y en consecuencia a las ecuaciones de movimiento [22]. Por ejemplo, hemos visto que la acción (1.38) es invariante antes las transformaciones de Lorentz aplicadas a las coordenadas del espacio-tiempo y al campo escalar $\phi(x)$. Se dice entonces que las transformaciones de Lorentz son una simetría de la teoría del campo de Klein-Gordon libre.

El rol fundamental de las simetrías en la física puede entenderse de la relación existente entre simetrías continuas y leyes de conservación. Esta relación queda establecida a través del *teorema de Noether*, demostrado por la matemática Emmy Noether [3, 19]: Sin entrar en detalles, este resultado enuncia que *toda simetría continua y global de un sistema conduce a una cantidad cuyo valor es conservado en el tiempo, llamada constante de movimiento o carga de Noether* [3].

En particular, en el formalismo lagrangiano, dicho teorema establece que cada simetría continua de la acción da lugar a una *corriente conservada* \mathcal{J}^μ , tal que la ecuación de movimiento implica que [24]

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \quad . \quad (1.45)$$

Una corriente conservada implica a su vez la existencia de una *carga conservada* definida como [24]

$$\mathcal{Q} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0 \quad . \quad (1.46)$$

Para entender este resultado es conveniente revisar un ejemplo. Sabemos que la acción del campo escalar real libre (1.38) es, por construcción, invariante ante las transformaciones de Lorentz. Una teoría consistente con la Relatividad Especial, sin embargo, debe ser invariante en general ante las transformaciones del grupo de Poincaré, que, como hemos visto, incluye tanto a las transformaciones de Lorentz como a las traslaciones en el espacio-tiempo. Para ejemplificar el teorema de Noether consideremos entonces a las traslaciones en el espacio-tiempo, tales que $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, donde a^μ es un vector constante que especifica la traslación. Bajo estas transformaciones, el campo escalar real $\phi(x)$ transforma como [24]

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x - a) = \phi(x) - a^\mu \partial_\mu \phi(x) + \mathcal{O}(a^2) \quad . \quad (1.47)$$

Es posible mostrar que la transformación (1.47) aplicada al campo $\phi(x)$ deja invariante a la acción [22]. Aplicando entonces el teorema de Noether se puede demostrar que la corriente conservada es $\mathcal{J}^\mu = -a^\nu T^\mu_\nu$ [24, 22], donde

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad , \quad (1.48)$$

es llamado el *tensor de energía-momento* del campo ϕ [22]. En particular, se cumple que $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$, que es precisamente la conservación de la energía E y el momento lineal total P^i de la configuración del campo ϕ , que están dados por [24]

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) \quad , \quad (1.49)$$

$$P^i = \int d^3x \dot{\phi} \partial^i \phi \quad . \quad (1.50)$$

Si en lugar de las traslaciones espacio-temporales consideramos a las transformaciones de Lorentz, empleando el Teorema de Noether, se encuentra que la corriente conservada que surge de esta simetría en la teoría del campo escalar de Klein-Gordon puede ser escrita como [24]

$$(\mathcal{J}^\mu)^{\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho} \quad . \quad (1.51)$$

En particular, para $\rho, \sigma = 1, 2, 3$, las transformaciones de Lorentz son rotaciones espaciales y las tres cargas conservadas, dadas por [24]

$$\mathcal{Q}^{ij} = \int d^3x (x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) \quad , \quad (1.52)$$

con $i, j = 1, 2, 3$, corresponden al momento angular total del campo $\phi(x)$.

Como hemos mencionado, las simetrías son un concepto fundamental en la teoría cuántica de campos, y en particular, lo son en el desarrollo de este trabajo. Por lo cual, además de las simetrías que hemos repasado, diferentes tipos de simetrías aparecerán más adelante en el texto.

1.2.3. Cuantización canónica del campo escalar

Una vez descrito el tratamiento clásico del campo escalar real, podemos presentar el procedimiento para cuantizarlo. Una forma de obtener la descripción cuántica de una teoría de campos es siguiendo el proceso conocido como *cuantización canónica* [22]. Ejemplificaremos entonces este proceso con el campo escalar real libre $\phi(x)$ de masa m , cuya dinámica clásica está codificada por la acción (1.38).

El proceso de cuantización canónica consiste en promover las variables canónicas $\phi(t, \vec{x})$ y $\pi(t, \vec{x})$ a operadores $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ y $\hat{\pi}(t, \vec{x})$, e imponer las siguientes reglas de conmutación a tiempos iguales [24, 22]:

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad , \quad (1.53)$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] = 0 = [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] \quad , \quad (1.54)$$

donde $\delta^3(\vec{x})$ es la *delta de Dirac*¹⁹ en 3 dimensiones. Establecido esto, y sabiendo que la solución general a la ecuación de movimiento (1.39) puede ser escrita en términos de los modos $a^*(t, \vec{p})$ y $a(t, \vec{p})$, podemos promover estos modos a operadores $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$, con lo que el operador de campo $\hat{\phi}(x)$ queda escrito como [24]

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad . \quad (1.55)$$

Así mismo podemos escribir al operador de momento conjugado $\hat{\pi}(x)$ en términos de estos mismos operadores, tal que [24]

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad . \quad (1.56)$$

Ya que cada modo de momento \vec{p} del campo de Klein-Gordon $\phi(x)$ cumple la ecuación clásica de un oscilador armónico, podemos proceder tal como se hace en la cuantización del oscilador armónico, en el contexto de la mecánica cuántica, para encontrar el espectro de energía del sistema. Para ver esto notemos que de las relaciones de conmutación (1.53) y (1.54) podemos escribir las relaciones de conmutación de los operadores $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$, es decir [24],

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad , \quad [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] \quad . \quad (1.57)$$

Es sencillo ver que estas relaciones de conmutación para cada valor de \vec{p} coinciden con las relaciones de conmutación de los operadores de ascenso y descenso del oscilador armónico, lo que nos da un indicio de la naturaleza de $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$ como operadores de creación y aniquilación de partículas. Podemos escribir ahora el Hamiltoniano (1.44) en término de estos operadores $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$, el cual está dado por [24]

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) \right] \quad , \quad (1.58)$$

¹⁹La función delta de Dirac $\delta^n(\vec{x})$ en n dimensiones es cero en todos lados excepto en $\vec{x} = \vec{0}$ y cumple que [22]

$$\int d^n x \delta^n(\vec{x}) = 1.$$

con la relación $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. De nuevo, es fácil identificar este Hamiltoniano con el del oscilador armónico cuántico para cada valor de \vec{p} . Esto nos indica que, igual que con el oscilador armónico, es posible construir el espectro de energía del sistema a partir de los operadores $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$ [24].

Comparar el Hamiltoniano (1.58) con el del oscilador armónico nos dice además que el segundo término dentro los corchetes en (1.58), proporcional a $\delta(0)$, puede ser interpretado como la suma sobre los infinitos modos con energía de punto cero $\frac{1}{2}\omega_{\vec{p}}$ [22]. Afortunadamente, esta energía infinita no puede ser detectada experimentalmente, pues los experimentos miden solamente diferencias de energía con el estado base de \hat{H} . Por tanto, podemos abstraer este término constante infinito declarando que el Hamiltoniano está dado por [24]

$$:\hat{H} := \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \quad , \quad (1.59)$$

donde hemos introducido el *orden normal* de un operador \hat{O} , denotado por $:\hat{O}:$, que consiste en colocar todos los operadores $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ a la izquierda, por ejemplo, $:\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} := \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ [25].

Al ignorar el término constante infinito tenemos que el estado de mínima energía del campo $\phi(x)$ es de energía $E = 0$ [22]. Dicho estado base del campo $\phi(x)$, eigenestado de \hat{H} , es conocido como el *vacío* $|0\rangle$, y es tal que [24]

$$\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad , \quad (1.60)$$

con la normalización $\langle 0|0\rangle = 1$. Con esto, podemos entonces construir los eigenestados de mayor energía de \hat{H} , los estados excitados del campo $\phi(x)$, actuando sobre el vacío con el operador de creación $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, es decir [24],

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \quad , \quad (1.61)$$

con la normalización $\langle \vec{p}|\vec{p}'\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$ y que es invariante relativista debido al factor $\sqrt{2E_{\vec{p}}}$ [24]. El estado (1.61) es entonces un eigenestado de \hat{H} con energía tal que [24]

$$\hat{H}|\vec{p}\rangle = \omega_{\vec{p}}|\vec{p}\rangle \quad , \quad (1.62)$$

con $\omega_{\vec{p}}^2 = E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Podemos identificar esta ecuación como la relación de dispersión relativista para una partícula de masa m y 3-momento \vec{p} (1.29). Por tanto, podemos interpretar al estado $|\vec{p}\rangle$ como el eigenestado del momento de una sola partícula relativista de masa m [24].

De esta manera, es posible mostrar que al construir el operador de momento total $\hat{\vec{P}}$ a partir del momento total clásico (1.50), tal que [24]

$$\hat{P} = - \int d^3x \hat{\pi} \vec{\nabla} \hat{\phi} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \quad , \quad (1.63)$$

se cumple que $\hat{P}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle$ [24], lo que asegura que el estado $|\vec{p}\rangle$ tiene momento \vec{p} . Con todo esto, resulta natural entender a las excitaciones del campo $\phi(x)$ como partículas relativistas, ya que estas son entidades discretas que cumplen la relación de dispersión relativista [22]. Adicionalmente, es posible mostrar que al construir el operador de momento angular total del campo \hat{J}^i a partir de la expresión clásica (1.51), tal que [24]

$$\hat{J}^i = \epsilon^{ijk} \int (\mathcal{J}^0)^{jk} \quad , \quad (1.64)$$

y al actuar sobre el estado de una partícula con momento $\vec{p} = 0$, se cumple que $\hat{J}^i|\vec{p} = 0\rangle = 0$, lo que nos indica que la partícula no tiene un momento angular intrínseco. Dicho de otra forma, las excitaciones del campo $\phi(x)$ corresponden a partículas con espín 0 [24].

Con todo lo anterior, tenemos que los operadores $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$ tienen la interpretación de ser operadores de *creación* y *aniquilación*, respectivamente, de partículas relativistas escalares de masa m , con espín 0, libres y con momento \vec{p} . El operador de campo $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ tiene por tanto la interpretación física de representar un campo escalar cuántico cuyas excitaciones corresponden a las mencionadas partículas escalares en la posición \vec{x} al tiempo t [24, 22].

Así, el espacio de Hilbert completo de la teoría del campo escalar real libre $\phi(x)$ puede ser obtenido al actuar sobre el vacío con diferentes combinaciones de $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$. De manera que es posible obtener estados de multi-partículas $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle$ actuando con n operadores de creación sobre el vacío, es decir [22, 24],

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = \left(\sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_n}} \right) \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \quad . \quad (1.65)$$

El espacio de todos los distintos estados de multi-partículas, incluyendo al vacío, es conocido como el *espacio de Fock* \mathcal{F} , y es escrito como la suma directa de los espacios de Hilbert de n partículas, es decir, $\mathcal{F} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^n$ [22, 24].

Adicionalmente, es útil definir al *operador de número* \hat{N} , el cual cuenta el número de partículas en un estado dado del espacio de Fock, que está dado por [24]

$$\hat{N} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \quad , \quad (1.66)$$

y cumple que $\hat{N}|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = n|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle$, con n el número de partículas del estado. Es posible mostrar que este operador conmuta con el Hamiltoniano, tal que $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$, lo cual asegura que el número de partículas es conservado. Esta propiedad

sin embargo solo está presente en teorías libres, pero no se mantiene para teorías con interacciones, donde el número de partículas puede cambiar [24].

Por otra parte, en el formalismo de la teoría cuántica del campo escalar libre, el propagador que describe la amplitud de que una partícula escalar libre se propague de un punto x' a un punto x en el espacio-tiempo, es definido por el *propagador de Feynman* [24, 22] y está dado por

$$\Delta_F(x - x') = \langle 0|T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\}|0\rangle \quad , \quad (1.67)$$

donde T representa el *orden temporal*²⁰. Tal propagador contiene la información de la estructura causal de la teoría, y en particular nos asegura que ninguna partícula asociada al campo escalar puede viajar en intervalos tipo-espacio fuera del cono de luz. De forma explícita, en el espacio de posiciones, este propagador para el campo escalar real libre es escrito como [22]

$$\Delta_F(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-x')} \quad . \quad (1.68)$$

Estos son algunos de los conceptos relevantes en el desarrollo de una teoría cuántica de campos libre, ejemplificados con el campo escalar real $\phi(x)$, que por medio de la cuantización canónica reproduce la física de partículas cuánticas consistente con la Relatividad Especial. Sin embargo, considerar un campo escalar real ha dado lugar únicamente a partículas con espín 0, por lo que para obtener la física de otro tipo de partículas es necesario considerar otro tipo de campos.

1.2.4. Campo libre de Dirac y de norma

Hemos mencionado que estamos interesados en teorías de campos consistentes con la Relatividad Especial. En particular, hemos visto que ante las transformaciones de Lorentz (1.10) el campo escalar real $\phi(x)$ transforma mediante $\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$. Se dice entonces que el campo escalar $\phi(x)$ transforma de forma trivial ante las transformaciones de Lorentz. Luego, cuantizar este campo ha dado lugar a partículas escalares de espín 0. Sin embargo, además de partículas con espín 0, existen en la naturaleza partículas con diferentes valores de espín. Como veremos ahora, en la teoría cuántica de campos estas partículas surgen naturalmente al considerar campos que transformen de manera no trivial ante el grupo de Lorentz.

Un ejemplo familiar de un campo que transforma de forma no trivial bajo Lorentz es el campo vectorial sin masa $A_\mu(x)$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, que como veremos más

²⁰ T coloca todos los operadores evaluados en tiempos posteriores a la izquierda, es decir

$$T\{\phi(x)\phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x)\phi(x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ \phi(x')\phi(x) & \text{si } x'^0 > x^0. \end{cases}$$

adelante resulta describir la teoría electromagnética de Maxwell, y que transforma mediante [24]

$$A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) \quad , \quad (1.69)$$

con Λ las matrices del grupo de Lorentz en la representación fundamental, descritas en la Sección 1.1. En general, un campo arbitrario con n componentes ϕ^a , con $a = 1, 2, \dots, n$, transforma ante una transformación finita de Lorentz mediante [12]

$$\phi'^a(x) = D(\Lambda(\omega))^a{}_b \phi^b(\Lambda^{-1}x) \quad , \quad (1.70)$$

donde las matrices $D(\Lambda)$ forman una representación del grupo de Lorentz y son tales que [12]

$$D(\Lambda(\omega)) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) \quad . \quad (1.71)$$

Los elementos $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ satisfacen la relación de conmutación (1.15), por lo que forman una representación del álgebra²¹ de Lorentz [19, 22]. Por tanto, un campo es definido según la representación $D(\Lambda(\omega))$ en la que transforma ante el grupo de Lorentz. Así, la *representación trivial* [19, 22] $D(\Lambda(\omega)) = 1$ define al campo escalar real, tal que $\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$ [22].

Simetrías internas

Antes de continuar es conveniente introducir otro tipo de simetría importante en la teoría cuántica de campos, conocidas como *simetrías internas* [19, 24]. Éstas son transformaciones que actúan directamente sobre los campos y no sobre las coordenadas espacio-temporales, de modo que para algún campo arbitrario ϕ éstas pueden escribirse de forma sencilla como [24]

$$\phi'(x) = e^{-i\alpha G}\phi(x) \quad , \quad (1.72)$$

donde G son los generadores de algún grupo de Lie en cierta representación, y α es un parámetro real asociado a la transformación [12, 19]. Si el parámetro α es constante y por tanto no depende de las coordenadas del espacio-tiempo se dice que esta es una transformación *global*, pues transforma de igual forma en cualquier punto del espacio-tiempo, mientras que si depende de las coordenadas $\alpha = \alpha(x)$ es una transformación *local* [24].

El ejemplo más sencillo de este tipo de simetría es el del campo escalar complejo $\phi(x) = (\phi_1(x) + i\phi_2(x))/\sqrt{2}$ de masa m , cuya acción está dada por [12]

²¹Si un conjunto L^i , con $i = 1, 2, \dots, N$, de matrices $n \times n$ satisface la misma regla de conmutación que los generadores del álgebra de Lie, se dice que las matrices L^i forman una representación del álgebra [20].

$$\mathcal{S} = \int d^{3+1}x \left(-\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \right) . \quad (1.73)$$

Ante las transformaciones del llamado grupo $U(1)$, cuyo generador es simplemente $G = 1$, el campo escalar complejo transforma como [24, 12]

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x) \quad , \quad (1.74)$$

$$\phi^*(x) \rightarrow \phi'^*(x) = e^{-i\alpha} \phi^*(x) \quad . \quad (1.75)$$

Es posible mostrar que ante estas transformaciones la acción del campo escalar complejo permanece invariante, de modo que esta teoría exhibe una simetría interna global bajo el grupo $U(1)$ [12, 24]. Por tanto es posible emplear el teorema de Noether para determinar la carga conservada correspondiente. Este tipo de cargas conservadas, como veremos, tienen la interpretación de ser la carga eléctrica o el número de partícula [24]. Con estos elementos podemos introducir ciertos campos que son de gran relevancia en la construcción de este trabajo, estos son, el *campo de Dirac* y el *campo de norma*.

Campo de Dirac libre

Se define al *campo de Dirac* libre $\psi^\alpha(x)$ como el campo de cuatro componentes complejas, etiquetadas por $\alpha = 1, 2, 3, 4$, que transforma bajo Lorentz de forma no trivial mediante [22]

$$\psi'^\alpha(x) = S[\Lambda(\omega)]^\alpha_\beta \psi^\beta(\Lambda^{-1}x) \quad , \quad (1.76)$$

donde

$$S(\Lambda(\omega)) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \quad . \quad (1.77)$$

La representación $S(\Lambda(\omega))$ fue desarrollada por Paul Dirac y se le conoce como *representación espinorial* [22]. A los vectores complejos ψ^α que transforman en esta representación se les denomina *espinores de Dirac*, de tal manera que el campo $\psi^\alpha(x)$ asigna un espinor a cada punto del espacio-tiempo. Por su parte los generadores $S^{\mu\nu}$ están dados por

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad , \quad (1.78)$$

donde las γ^μ , con $\mu = 0, 1, 2, 3$, son matrices 4×4 conocidas como *matrices de Dirac*²² y son tales que satisfacen el *álgebra de Clifford* [22]

²²Podemos escribir las matrices de Dirac como [24]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I} \quad . \quad (1.79)$$

Con el fin de obtener una acción invariante de Lorentz para este campo resulta conveniente definir el llamado *espinor conjugado de Dirac* como $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ [24]. Con esto, Dirac mostró que la acción invariante ante Lorentz más sencilla que puede escribirse para el campo $\psi^\alpha(x)$ libre con masa m está dada por [22]

$$\mathcal{S}_D = \int d^{3+1}x (i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi) \quad , \quad (1.80)$$

donde se define $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es posible obtener la ecuación de movimiento para el campo $\psi^\alpha(x)$

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad , \quad (1.81)$$

conocida como la *ecuación de Dirac* [24, 22]. La solución clásica más general a la ecuación de Dirac puede escribirse como una suma de ondas planas: con $\psi(x) = u(\vec{p})e^{-ip\cdot x}$ modos de frecuencia positiva y $\psi(x) = v(\vec{p})e^{+ip\cdot x}$ modos de frecuencia negativa. A nivel cuántico, las soluciones de frecuencia positiva darán lugar a partículas, mientras que las soluciones de frecuencia negativa a antipartículas [25].

En las soluciones de ondas planas $u(\vec{p})$ y $v(\vec{p})$ son los espinores que satisfacen la ecuación de Dirac en el espacio de momentos, de manera que $(\not{p} + m)u(\vec{p})=0$ y $(\not{p} - m)v(\vec{p})=0$ respectivamente, con $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ [24, 22]. Es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes a cada una de estas ecuaciones, las cuales pueden ser escritas como²³ [22]

$$u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix} \quad . \quad (1.82)$$

con $s = 1, 2$, donde ξ y η son espinores de dos componentes. Estos espinores de dos componentes definen al *espín* del campo. Para entender esto consideremos la solución de frecuencia positiva con masa m y momento $\vec{p} = 0$, tal que

$$u^s(\vec{p}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad . \quad (1.83)$$

Un campo con espín *arriba* a lo largo de una dirección dada es descrito por el eigenvector ξ de la matriz de Pauli correspondiente con eigenvalor $+1$, o con eigenvalor -1 para un campo con espín *abajo* [24]. Podemos considerar, por ejemplo, los eigenestados de σ^3 , de modo que $(\xi^1)^T = (1, 0)$ describe un campo con espín arriba a lo largo

donde las σ^i son las llamadas matrices de Pauli [24],

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

²³Empleando $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$ y $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$.

del eje z , mientras que $(\xi^2)^T = (0, 1)$ un campo con espín abajo [24]. Como veremos, al cuantizar el campo de Dirac, este espín dará lugar al espín de las partículas asociadas.

Otro aspecto importante a mencionar son las simetrías y cantidades conservadas de esta teoría. Por construcción, la acción (1.80) es invariante ante las transformaciones de Lorentz, por lo que puede aplicarse el teorema de Noether para calcular la corriente conservada. Así [24],

$$(\mathcal{J}^\mu)^{\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho} - i\bar{\psi}\gamma^\mu S^{\rho\sigma}\psi \quad . \quad (1.84)$$

Podemos notar que, a diferencia de la corriente conservada asociada a la simetría de Lorentz en la acción del campo escalar (1.51), la corriente conservada (1.84) tiene un término adicional. A nivel cuántico, al promover $(\mathcal{J}^\mu)^{\rho\sigma}$ a un operador, se encuentra que dicho término adicional es responsable del valor del espín de los estados de una partícula [24].

Además, es posible mostrar que la acción del campo de Dirac (1.80) es invariante ante la rotación de fase del espinor $\psi' = e^{-iq\theta}\psi$ [24, 22], con θ el parámetro constante de la transformación y q una constante que interpretaremos más adelante. Es decir, la acción de Dirac tiene una simetría interna global bajo el grupo $U(1)$. Es posible mostrar que la carga conservada asociada a esta simetría está dada por [24]

$$Q = q \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \psi^\dagger \psi \quad . \quad (1.85)$$

Como veremos, a nivel cuántico esta carga conservada tiene la interpretación de ser la carga eléctrica de las partículas asociadas al campo de Dirac [24].

Teniendo en cuenta todo lo anterior, es posible proceder con el proceso de cuantización canónica para el campo de Dirac libre. Este proceso es parecido al llevado a cabo para el campo escalar, salvo por algunas diferencias sustanciales: Se escribe entonces al campo de Dirac como una combinación de ondas planas y se promueve a un operador $\hat{\psi}(x)$, es decir [24, 22],

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^2 \left(\hat{a}_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{+ip \cdot x} \right) \quad , \quad (1.86)$$

donde el índice $s = 1, 2$ etiqueta los diferentes estados de *espín* [24]. De igual manera puede ser escrito el campo $\hat{\bar{\psi}}(x)$ en términos de operadores $\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ y $\hat{b}_{\vec{p}}^s$. Como en el campo escalar, $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ tendrá la interpretación de crear las partículas asociadas al campo de Dirac, mientras que $\hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ la de crear las antipartículas correspondientes [24].

Antes de imponer las relaciones de conmutación canónicas es conveniente ver qué forma tiene el operador Hamiltoniano del sistema. Se encuentra que éste puede ser escrito como [24]

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \right) . \quad (1.87)$$

Con esto, es posible mostrar que si se impusieran relaciones de conmutación al campo ψ y su momento canónico conjugado $\pi = i\psi^\dagger$, como en el caso del campo escalar, se obtendría un hamiltoniano no acotado inferiormente, pues los estados creados por $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ contribuyen con energía negativa arbitrariamente grande [22]. Para obtener un espectro de energía con sentido físico se imponen entonces las llamadas relaciones de *anticomutación*²⁴, tal que [24]

$$\{\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\mathbb{I} \quad , \quad \{\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)\} = 0 \quad , \quad (1.88)$$

mientras que para los operadores de creación y aniquilación estas relaciones son

$$\{\hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{ss'} = \{\hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger}\} \quad , \quad (1.89)$$

$$\{\hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'}\} = \{\hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'}\} = 0 = \{\hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger}\} = \{\hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'}\} \quad . \quad (1.90)$$

Con estas relaciones y el orden normal²⁵, que subtrae la energía constante del vacío, se puede escribir al Hamiltoniano como [24]

$$: \hat{H} := \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right) . \quad (1.91)$$

Esto permite calcular de forma adecuada el espectro de energía: Se define al vacío de la teoría como el estado $|0\rangle$ que satisface $\hat{a}_{\vec{p}}^s|0\rangle = \hat{b}_{\vec{p}}^s|0\rangle = 0$ [24]. Así, equivalentemente al campo escalar, es posible construir una torre de eigenestados de energía, que tienen la interpretación de ser partículas y antipartículas, al actuar sobre el vacío con los operadores de creación $\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ y $\hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ respectivamente [24]. Por ejemplo, el estado de una partícula está dado por

$$|\vec{p}, s\rangle = \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger}|0\rangle \quad , \quad (1.92)$$

con $s = 1, 2$, lo que deja de manifiesto los dos grados de libertad de estas partículas. Si ahora construimos el operador de espín a partir del momento angular total clásico (1.84) y se aplica sobre el estado de una partícula con momento $\vec{p} = 0$ se encuentra que el valor del espín de esta partícula es $1/2$. Consideremos por ejemplo el operador de espín en la dirección z , denotado \hat{S}_z , que al actuar sobre el estado de una partícula estacionaria es tal que [22]

²⁴El anticonmutador de dos operadores o matrices A, B se define como la operación $\{A, B\} = AB + BA$.

²⁵Debido a las relaciones de anticomutación se define el orden normal como $:\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger := -\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger\hat{a}_{\vec{p}}$ y $:\hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger := -\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger\hat{b}_{\vec{p}}$.

$$\hat{S}_z \hat{a}_0^{1\dagger} |0\rangle = \hat{S}_z |0, 1\rangle = +\frac{1}{2} |0, 1\rangle, \quad \hat{S}_z \hat{a}_0^{2\dagger} |0\rangle = \hat{S}_z |0, 2\rangle = -\frac{1}{2} |0, 2\rangle \quad , \quad (1.93)$$

donde $|0, 1\rangle$ y $|0, 2\rangle$ corresponden al estado de una partícula con espín arriba y espín abajo respectivamente, con eigenvalor $1/2$ y $-1/2$ [22]. Esta misma discusión puede llevarse a cabo para los estados de una antipartícula, encontrando que partículas y antipartículas asociadas al campo de Dirac tienen el mismo valor de espín $1/2$ [22].

Para concluir, podemos escribir la carga conservada (1.85) en términos de los operadores de creación y aniquilación, de donde se obtiene [22]

$$Q = q \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right) \quad . \quad (1.94)$$

De aquí podemos ver que $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ crea partículas de carga positiva $+q$, mientras $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ crea antipartículas con carga negativa $-q$ [21]. Con esto, podemos concluir finalmente que al cuantizar el campo de Dirac $\psi^\alpha(x)$ se obtiene la descripción asociada a la física de partículas y antipartículas libres, con espín $\frac{1}{2}$ y portadoras de carga eléctrica [22]. En particular, las excitaciones del campo de Dirac pueden describir ciertas partículas de materia, entre ellas quarks y leptones, como lo es por ejemplo el electrón [25].

Campo de Norma

Hemos visto que además de las transformaciones espacio-temporales hay otro tipo de transformaciones que pueden dejar invariante a la acción de una teoría, las llamadas simetrías internas. Antes consideramos el caso del campo escalar complejo $\phi(x)$, cuya acción (1.73) resulta invariante ante la transformación global $\phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x)$ del grupo $U(1)$, con α el parámetro constante de la transformación [12]. Pensemos ahora en una transformación local del campo escalar complejo $\phi(x)$ ante el grupo *abeliano*²⁶ $U(1)$, es decir, una tal que el parámetro de la transformación depende del espacio-tiempo $\alpha = \alpha(x)$, es decir [12]

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{iq\alpha(x)} \phi(x) \quad . \quad (1.95)$$

En tal caso podemos notar que la derivada del campo $\phi(x)$ no transforma de acuerdo a (1.95), ya que $\partial_\mu \phi'(x) = \partial_\mu (e^{iq\alpha(x)} \phi(x)) \neq e^{iq\alpha(x)} \partial_\mu \phi(x)$. Esto implica que la acción del campo escalar complejo (1.73) no será invariante ante tal transformación local [12].

Con el fin de obtener una acción para el campo escalar complejo invariante ante (1.95), es posible introducir un campo vectorial no masivo $A_\mu(x)$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, que transforma ante las transformaciones de Lorentz como (1.69). En este contexto

²⁶Si los generadores de un grupo G conmutan, es decir, $[L^i, L^j] = 0$, se dice que G es un grupo abeliano. En el caso contrario G es no abeliano [19].

el campo $A_\mu(x)$ es conocido como *campo de norma*, e introducirlo permite definir la *derivada covariante* D_μ , dada por [12]

$$D_\mu\phi(x) \equiv (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi(x) \quad , \quad (1.96)$$

donde el parámetro q es conocido como la constante de acoplamiento y cuya interpretación física discutiremos más adelante. Con esto tenemos que [12]

$$D_\mu\phi'(x) = D_\mu(e^{iq\alpha(x)}\phi(x)) = e^{iq\alpha(x)}D_\mu\phi(x) \quad , \quad (1.97)$$

por lo que la derivada covariante del campo escalar complejo $\phi(x)$ sí transforma de acuerdo a (1.95). Para esto el campo de norma $A_\mu(x)$ debe transformar ante el grupo $U(1)$ (1.95) mediante [12]

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x) \quad , \quad (1.98)$$

transformación conocida como *transformación de norma* [12].

Así, es posible construir una acción para el campo escalar complejo $\phi(x)$ tal que resulte invariante ante (1.95) y (1.98) tomando como punto de partida la acción (1.73) y reemplazando la derivada parcial ∂_μ por la derivada covariante D_μ , es decir [12],

$$\mathcal{S} = \int d^{3+1}x \left(-(D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \right) \quad . \quad (1.99)$$

Este procedimiento es conocido como *acoplamiento mínimo* [24, 22], y genera precisamente un cierto acoplamiento entre los campos ϕ y A_μ , de modo que el parámetro q en (1.96) controla la intensidad de este acoplamiento. En general, a cualquier teoría que introduzca un campo vectorial $A_\mu(x)$ para inducir una simetría ante una transformación local se le denomina *teoría de norma* [22].

Así, para obtener la dinámica del campo $A_\mu(x)$ es necesario construir una cantidad invariante ante dicha transformación de norma, conocida como la *intensidad del campo*, dada por [12]

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad (1.100)$$

de tal forma que la dinámica está codificada en la acción invariante de norma [12],

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4} \int d^{3+1}x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad (1.101)$$

que conduce a las siguientes ecuaciones de movimiento [12]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (1.102)$$

Además, se puede mostrar que $F_{\mu\nu}$ satisface la relación,

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad , \quad (1.103)$$

conocida como *identidad de Biachi* [12]. De las ecuaciones de movimiento (1.102) y la identidad de Bianchi (1.103) pueden derivarse precisamente las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo libre de fuentes [12, 24]. Para relacionar estas ecuaciones con las ecuaciones de Maxwell en su forma usual escribimos $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ y se definen el campo eléctrico $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ y el campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Con esto la intensidad del campo está dada por [24]

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_z & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_x & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.104)$$

Debido a limitaciones de tiempo, en este texto no desarrollaremos el proceso completo de cuantización canónica para el campo de norma $A_\mu(x)$ libre, en su lugar mencionaremos únicamente los aspectos más relevantes. En primer lugar, es importante mencionar que la simetría de norma tiene una interpretación distinta a las simetrías globales: una transformación de norma es una transformación de algún grado de libertad que no modifica ninguna propiedad física observable [24]. Es decir, dos configuraciones de un campo relacionadas por una transformación de norma dan lugar a las mismas observables físicas [25]. Así, una simetría de norma es entendida como una redundancia en la descripción física de la teoría [24]. En este sentido, las diferentes configuraciones de un mismo sistema físico son conocidas como diferentes *normas* [24]. Dicho de otra forma, es posible elegir entre diferentes formulaciones de la teoría, o normas, y la física es exactamente la misma. La invariancia de norma es entonces una redundancia en la descripción que se introduce para poder obtener un lagrangiano invariante ante una cierta transformación local [24].

Por construcción, la dinámica del campo vectorial A^μ es invariante de norma, es decir, es invariante ante la transformación de norma (1.98), lo que significa que si A^μ describe al campo electromagnético en alguna situación, entonces $A_\mu(x) - \partial_\mu\mathcal{X}(x)$ ²⁷ también lo hace. En este caso, elegir una norma significa elegir una forma particular de $\mathcal{X}(x)$ [25]. En la teoría electromagnética algunas de las normas más comunes son la llamada *norma de Lorentz* que está dada por $\partial_\mu A^\mu = 0$ ²⁸, y la *norma de Coulomb* dada por $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ [24].

La invariancia de norma en la teoría electromagnética se traduce entonces en una redundancia en la descripción física: El campo A^μ tiene cuatro componentes, que podemos interpretar como 4 grados de libertad, sin embargo, la cuantización de dicho campo da lugar al fotón, el cual tiene solo dos grados de libertad que interpretamos como sus estados de polarización [24]. Es decir, de las cuatro componentes del campo A^μ solo dos de ellas son físicas, mientras que las dos restantes son redundantes [25]. Así, se tienen dos formas de cuantizar el campo A^μ ; es posible elegir la norma desde

²⁷Donde hemos tomado $\mathcal{X}(x) = \frac{1}{q}\alpha(x)$.

²⁸Es sencillo ver que esto se cumple si $\partial^2\mathcal{X}(x) = \partial_\mu A^\mu$.

el principio para reducir los grados de libertad de cuatro a dos, o primero cuantizar para después hacer una elección de norma conveniente. Por simplicidad, en este texto describiremos brevemente la primera de estas opciones.

Para realizar el proceso de cuantización comenzamos entonces eligiendo la norma de coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Es posible mostrar que esta condición tiene como consecuencia que $A^0 = 0$ [24]. Esto da como resultado reducir los grados de libertad de cuatro a dos [24]. En esta norma la ecuación de movimiento para el campo \vec{A} está dada por [24]

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{A} = 0 \quad . \quad (1.105)$$

La solución puede ser escrita como [24]

$$\vec{A} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{\xi}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad , \quad (1.106)$$

con $\vec{\xi} \cdot \vec{p} = 0$, es decir, $\vec{\xi}$ es un vector perpendicular a la dirección de movimiento \vec{p} . Podemos elegir $\vec{\xi}$ como una combinación de dos vectores ortonormales $\vec{\epsilon}_r$, con $r = 1, 2$, que satisfacen $\vec{\epsilon}_r \cdot \vec{p} = 0$. Estos dos vectores corresponden a los dos estados de polarización del fotón [24]. Así, la expansión de modos del operador \hat{A} está dada por [24]

$$\hat{A}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|^2}} \sum_{r=1}^2 \vec{\epsilon}_r(\vec{p}) \left[\hat{a}_{\vec{p}}^r e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^{r\dagger} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \quad . \quad (1.107)$$

Calculamos ahora el momento canónico conjugado al campo A^μ el cual está dado por [24]

$$\pi^0 = 0 \quad , \quad \pi^i = -F^{0i} = E^i \quad . \quad (1.108)$$

Con esto, es posible mostrar que las relaciones de conmutación del campo \hat{A}^i y su momento canónico conjugado $\hat{\pi}^i$ consistentes con la elección de norma están dadas por [24]

$$[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{E}_j(\vec{y})] = i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad . \quad (1.109)$$

Estas relaciones de conmutación son equivalentes a las relaciones de conmutación usuales de los operadores de creación y aniquilación que están dadas por [24]

$$[\hat{a}_{\vec{p}}^r, \hat{a}_{\vec{q}}^s] = [\hat{a}_{\vec{p}}^{r\dagger}, \hat{a}_{\vec{q}}^{s\dagger}] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_{\vec{p}}^r, \hat{a}_{\vec{q}}^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad . \quad (1.110)$$

Finalmente, es posible obtener el Hamiltoniano después del orden normal, que está dado por [24]

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 \hat{a}_{\vec{p}}^{r\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^r \quad , \quad (1.111)$$

con $E_{\vec{p}} = |\vec{p}|$. El operador $\hat{a}_{\vec{p}}^{r\dagger}$ crea entonces partículas de momento \vec{p} y energía $E_{\vec{p}}$. Es posible mostrar además estas partículas tienen espín 1 [24]. Por tanto, las excitaciones del campo electromagnético A^μ son fotones, los cuales tienen dos estados de polarización transversales [25].

Interacciones

Hemos visto que el proceso de acoplamiento mínimo induce cierto acoplamiento entre el campo de norma $A_\mu(x)$ y el campo escalar complejo $\phi(x)$. De modo que combinando la acción (1.99) y (1.101) se obtiene

$$\mathcal{S} = \int d^{3+1}x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \right) \quad , \quad (1.112)$$

que precisamente describe la interacción entre el campo de norma $A_\mu(x)$ y el campo escalar complejo $\phi(x)$. Dicho proceso de acoplamiento mínimo puede ser usado de igual forma para el campo de Dirac $\psi^\alpha(x)$, promoviendo la simetría global, descrita en la Sección 1.2.4, a una simetría local²⁹ de la acción (1.80) ante el grupo de norma abeliano $U(1)$ ³⁰, lo que tiene como resultado la acción de la *electrodinámica cuántica (QED)* [24, 22]

$$\mathcal{S}_{QED} = \int d^{3+1}x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \right) \quad , \quad (1.113)$$

que describe, por ejemplo, las interacciones entre electrones y positrones, partículas y antipartículas, respectivamente, asociadas al espinor de Dirac ψ^α , y fotones, asociados al campo de norma A_μ [24]. La intensidad de acoplamiento es determinado por el parámetro q definida en (1.96), que se interpreta como la carga eléctrica de la partícula asociada al espinor ψ que aparece en la ecuación (1.94) [24].

La descripción cuántica de las teorías de campos con interacciones generalmente tiene como una de sus consecuencias que, para ciertas escalas de energía, los parámetros físicos de estas teorías dependen de la escala energética E , o de la distancia

²⁹Transformando al espinor ψ de acuerdo a

$$\psi' = e^{iq\theta(x)}\psi.$$

³⁰A través de la derivada covariante

$$D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi(x).$$

$l \sim 1/E$, a la cual se estudia la teoría [24, 22]. En particular, es común que la intensidad del acoplamiento de las teorías con interacción dependan de la escala de energía. Podemos escribir entonces al valor efectivo de la constante de acoplamiento como $q = q(\mu)$, con μ una apropiada escala de energía, o el inverso de la escala de longitud [26]. Para QED la dependencia de la constante de acoplamiento con la escala de energía es comúnmente expresada por medio de la llamada *constante de estructura fina* $\alpha \equiv q^2/4\pi$ [24], definida como [26]

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{2}{3}\alpha(\mu_0) \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)} \quad . \quad (1.114)$$

donde μ_0 es una escala de energía de referencia. Para la electrodinámica cuántica se encuentra que el valor de la carga $q(\mu)$ es directamente proporcional a dicha escala de energía [24]. Esta expresión es válida para $\mu \gg m_e$, con m_e la masa del electrón, es decir, para distancias menores que el radio de Compton del electrón [27]. Para energías tales que $\mu < m_e$, se encuentra que $\alpha(\mu)$ toma el valor constante $\alpha \approx 1/137$ [24, 27], y por tanto la carga eléctrica del electrón toma su valor constante conocido $q = e$.

Por otra parte, en cualquier teoría cuántica de campos toda la información local³¹ de la teoría está contenida en cantidades conocidas como *funciones de correlación* de operadores locales [24]. Denotando al vacío de una teoría como $|\Omega\rangle$, tal que $H|\Omega\rangle = 0$, se define la función de correlación, o correlador de N puntos como [22]

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = \langle \Omega | T \{ \hat{O}_1(x_1) \hat{O}_2(x_2) \dots \hat{O}_N(x_N) \} | \Omega \rangle \quad , \quad (1.115)$$

con $\hat{O}_i(x_i)$ un conjunto de operadores locales de la teoría. Para la teoría libre del campo escalar real, por dar un ejemplo, el propagador de Feynman $\Delta_F(x - x') = \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \} | 0 \rangle$ es el correlador de dos puntos de esta teoría. Como mencionamos previamente, el propagador de Feynman del campo escalar libre contiene la información de la amplitud de probabilidad de que, si una partícula se encuentra en \vec{x} al tiempo x^0 , se encuentre en \vec{x}' al tiempo x'^0 , con $x'^0 > x^0$. En general, las funciones de correlación contienen la información del grado de correlación entre las diferentes partes del sistema [25]. Más aun, resulta que los correladores son las funciones de Green³² de la teoría, y por tanto contienen toda la información local que podemos obtener de la misma [24].

³¹Se le denomina local a toda cantidad que está determinada solo por el valor de ésta en un punto del espacio-tiempo.

³²La función de Green puede entenderse como la solución a un cierto tipo de ecuación diferencial, que involucra no solo funciones, sino también distribuciones. En el caso de la ecuación de movimiento del campo escalar libre (1.39), debe cumplir [24]

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_F(x - x') = -i\delta^4(x - x').$$

Además, resulta que las teorías con interacciones no pueden ser cuantizadas por medio de la cuantización canónica [22], lo cual tiene como consecuencia que, entre otras cosas, no puedan ser resueltas de forma analítica [25]. No obstante, si las interacciones son débiles, la dinámica de los campos puede ser aproximada por medio de un desarrollo en potencias en términos de la constante de acoplamiento, conocida como *expansión perturbativa* [22]. En la electrodinámica cuántica, por ejemplo, es posible ver de la ecuación (1.114) que $\alpha(\mu)$, o equivalentemente la constante de acoplamiento $q(\mu)$, aumentan logarítmicamente con la escala de energía μ , o el inverso de la escala de longitud. Por tanto, en dicha teoría el régimen de acoplamiento débil corresponde a bajas energías, o largas distancias, por lo que en tal caso puede ser descrita a través de la expansión perturbativa.

Sin embargo, la descripción dada por la expansión perturbativa no puede llevarse a cabo para teorías con acoplamiento fuerte, en el llamado régimen de acoplamiento fuerte, por lo que en tal caso dicha herramienta de cálculo queda sobrepasada [24]. Por tanto, para describir estas teorías con acoplamiento fuerte se requieren de otros artefactos teóricos. Particularmente, como veremos más adelante, en este trabajo se busca describir una herramienta que permite realizar cálculos en dicho régimen de acoplamiento fuerte en ciertas circunstancias.

1.3. Teorías de Yang-Mills

El estudio de las teorías de norma resulta crucial en la descripción de la física de partículas pues a través de éstas es posible formular la descripción de las interacciones fundamentales presentes en el Modelo Estándar [8]. En la Sección 1.2.4 hemos introducido las teorías de norma como aquellas que acoplan un campo de norma a una teoría libre, a través del acoplamiento mínimo, para inducir una simetría ante una cierta transformación local. En dicha Sección repasamos la simetría ante un grupo abeliano, en particular el llamado grupo $U(1)$, con lo que fue posible escribir la acción de QED. Es posible extender tal desarrollo a grupos de transformaciones *no abelianas*, en descripciones conocidas como teorías de *Yang-Mills* [22, 26], con las cuales es posible describir otras interacciones fundamentales.

Para mostrar este procedimiento supongamos un cierto campo con N componentes ϕ^i , con $i = 1, \dots, N$, como un elemento de un espacio vectorial N -dimensional, sobre el cual actúa un grupo de Lie no abeliano de transformaciones locales G , actuando sobre el campo en su representación fundamental³³, tal que $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(x)\phi(x)$. En componentes esto es [12]

$$\phi^j(x) \rightarrow \phi'^j(x) = U^j_k(x)\phi^k(x) = \left(e^{i\alpha^a(x)T_a}\right)^j_k \phi^k(x) \quad , \quad (1.116)$$

³³La representación fundamental es la representación del grupo más pequeña no trivial de la cual otras representaciones pueden ser generadas.

con $j, k = 1, \dots, N$ y donde $U(x) = e^{i\alpha^a(x)T_a}$ es un elemento del grupo G y T_a son los generadores del álgebra de Lie correspondiente con relación de conmutación dada por [19]

$$[T_a, T_b] = if_{ab}{}^c T_c \quad , \quad (1.117)$$

donde las $f_{ab}{}^c$ son conocidas como constantes de estructura y son tales que $f_{ab}{}^c \neq 0$ por ser un grupo no abeliano [19, 20]. El número n de generadores, tal que $a, b, c = 1, \dots, n$, coincide con la dimensión n del grupo G , esto quedará más adelante. Tomando el parámetro $\alpha^a(x)$ de forma infinitesimal podemos escribir la transformación del campo como [12]

$$\phi^j(x) \rightarrow \phi'^j(x) = \phi^j(x) + i\alpha^a(x)(T_a)^j{}_k \phi^k(x) \quad . \quad (1.118)$$

Resulta que, tal y como sucedió en el caso abeliano, la derivada del campo ϕ no transforma de acuerdo a (1.116) como lo hace el propio campo ϕ , por lo que la acción correspondiente no será invariante ante tal transformación. Para inducir tal simetría debemos introducir, para cada elemento del álgebra T_a , un campo de norma vectorial A_μ^a , que permite definir la derivada covariante como [12]

$$(D_\mu)^i{}_j \equiv \delta^i{}_j \partial_\mu + iA_\mu^a (T_a)^i{}_j \quad . \quad (1.119)$$

Imponiendo además la regla de transformación ante (1.116) del campo de norma $A_\mu \equiv A_\mu^a T_a$ [12],

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu^U(x) \equiv U(x)A_\mu U^\dagger(x) - iU(x)\partial_\mu U^\dagger(x) \quad . \quad (1.120)$$

Empleando la derivada covariante y la regla de transformación de A_μ , la derivada del campo ϕ transforma de acuerdo a (1.116). Por tanto, reemplazando la derivada usual ∂_μ por la derivada covariante D_μ la acción asociada al campo es invariante ante dicha transformación local [12].

Para describir la dinámica del campo es preciso definir el tensor de intensidad del campo como $F_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]$ [12]. En términos del campo de norma esto se escribe

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv F_{\mu\nu}^a T_a \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f_{bc}{}^a A_\mu^b A_\nu^c) T_a \quad . \end{aligned} \quad (1.121)$$

Con esto es posible escribir la acción invariante de norma del campo A_μ^a de la teoría de Yang-Mills, escrita como [12]

$$\mathcal{S}_{YM} = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \quad , \quad (1.122)$$

donde g^2 es la constante de acoplamiento de Yang-Mills [12]. Podemos notar que \mathcal{S}_{YM} , a diferencia de la acción del electromagnetismo (1.101), contiene términos cúbicos y

cuadráticos, por lo que es una teoría con autointeracciones, es decir, la partículas asociadas a este campo tendrán interacciones entre sí [12].

Concretamente, como veremos más adelante, para este trabajo son relevantes las teorías de norma con grupo $SU(N)$ [20], con N el rango del grupo y dimensión $N^2 - 1$, cuya álgebra de Lie correspondiente es $\mathfrak{su}(N)$, y los generadores T_a , con $a = 1, \dots, N^2 - 1$, en la representación fundamental son matrices $N \times N$. Comúnmente para Yang-Mills con grupo $SU(N)$ la expresión (1.122) es escrita de forma alternativa en términos de una traza como³⁴ [12]

$$\mathcal{S}_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad . \quad (1.123)$$

Tal como en la Sección 1.2.4 vimos que es posible acoplar el campo de norma del grupo abeliano $U(1)$ a un campo de Dirac, en general, es posible realizar el acoplamiento mínimo del campo de norma $SU(N)$ con N_f campos de Dirac, cada uno transformando en la representación fundamental del grupo [12]. En tal caso N será el número de estados distintos que tendrán las partículas, denominados carga de *color*, es decir, tendrán N posibles colores, mientras que los N_f distintos campos de Dirac se conocen como *sabores* [26]. En particular, la teoría de norma con grupo $SU(3)$ describe la interacción fuerte a través del acoplamiento del campo de norma no abeliano A_μ^I , con $I = 1, 2, \dots, 8$, con $N_f = 6$ espinores de Dirac ψ . Así, la acción de la *cromodinámica cuántica (QCD)* está dada por [12],

$$\mathcal{S}_{QCD} = \int d^{3+1}x \left(-\frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi \right) \quad , \quad (1.124)$$

donde $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$. Esta teoría describe las interacciones entre quarks, partículas fermiónicas de espín 1/2 asociadas al espinor de Dirac, y gluones, partículas bosónicas de espín 1 asociadas al campo de norma no abeliano A_μ^I , así como sus antipartículas correspondientes.

La constante de acoplamiento g^2 en (1.123) mide la intensidad de las interacciones y generalmente dependerá de la escala de energía de los procesos estudiados, como mencionamos anteriormente. Es conveniente entonces escribir al valor efectivo de la constante de acoplamiento como $g = g(\mu)$, con μ una apropiada escala de energía [26]. En general, la dependencia de la constante de acoplamiento con la escala de energía es expresada por medio de la llamada *función* $\beta(g)$, definida como [26]

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{dg}{d\mu} \quad , \quad (1.125)$$

³⁴Usando que para los generadores de $SU(N)$ se cumple que $\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ [20]. De modo que

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F^{a\mu\nu} T_a F_{\mu\nu}^b T_b) = -\frac{1}{2} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^b \text{Tr}(T_a T_b) = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a.$$

tal que para Yang-Mills $SU(N)$ está dada por [12]

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{48\pi^2}(11N - 2N_f) \quad , \quad (1.126)$$

con N_F el número de espinores de Dirac acoplados al campo de norma. Por tanto, para teorías de Yang-Mills $SU(N)$ con $11N > 2N_F$, tal como QCD ($N = 3$ y $N_f = 6$), se encuentra que $\beta(g) < 0$, es decir, la constante de acoplamiento decrece con la energía (aumenta con las distancias) [12]. Esto tiene como consecuencia que dichas teorías se vuelvan libres a muy altas energías $\mu \rightarrow \infty$, característica conocida como *libertad asintótica* [12], mientras que a bajas energías $\mu \rightarrow 0$ se encuentren en el *régimen de acoplamiento fuerte*, donde no es posible estudiarlas por medio de las herramientas estándar de QFT. Así, el estudio de la cromodinámica cuántica en el régimen de acoplamiento fuerte se vuelve muy complicado.

En la naturaleza podemos encontrar diversos sistemas en el régimen de acoplamiento fuerte en los que podríamos estar interesados en estudiar. Un ejemplo de esto es el llamado *plasma de quarks y gluones*: Bajo circunstancias normales, en la naturaleza quarks y gluones permanecen confinados formando protones y neutrones, sin embargo, a temperaturas suficientemente altas, estos se encuentran sueltos formando un plasma fuertemente acoplado [12, 13]. Así que, aunque QCD sea muy complicada de estudiar en este régimen, es preciso encontrar una forma de estudiar dichos sistemas fuertemente acoplados. Una manera de abordar este problema es considerando teorías alternativas similares a QCD pero que sean más accesibles en términos de los cálculos. Dicho de otra forma, estamos interesados en modelos idealizados que supongan una aproximación a los sistemas reales de la naturaleza [12]. Con este propósito, en lo que resta de esta Sección 1.3 describiremos una teoría de Yang-Mills particular, parecida a QCD, que puede ser usada como modelo de juguete en el estudio de ciertos aspectos de sistemas fuertemente acoplados [12].

Antes de continuar cabe mencionar un aspecto interesante de las teorías de Yang-Mills: Gerard t' Hooft propuso la posibilidad de simplificar considerablemente una teoría de norma no abeliana al aumentar el número de colores N [13]. Para ver esto notemos que para la teoría de Yang-Mills $SU(N)$ con función $\beta(\mu)$ dada por la ecuación (1.126), es claro que en el límite $N \rightarrow \infty$ la función $\beta(\mu)$ diverge. Sin embargo, si se define al *acoplamiento de t' Hooft* como $\lambda \equiv g^2 N$, y se toma el límite

$$N \rightarrow \infty \text{ mientras } \lambda \text{ es fija} \quad ,$$

se encuentra que, si bien esto implica que $g^2 \rightarrow 0$, la teoría no se vuelve libre pues el acoplamiento efectivo es ahora determinado por la constante λ , que no es cero [12]. Lo que resulta interesante es que el factor $1/N$ es pequeño, lo que significa que la teoría se simplifica ya que es posible realizar una expansión en potencias de este valor para calcular las interacciones entre partículas [12]. Este límite será de gran relevancia más adelante en este trabajo.

1.3.1. Simetría conforme y Supersimetría

Hemos mencionado que estamos interesados en describir una teoría de norma parecida a QCD pero con simplificaciones que nos permitan estudiarla en el régimen de acoplamiento fuerte. Una forma de obtener una teoría idealizada es exigiendo que exhiba ciertas simetrías que la simplifiquen. Con esto en mente, es conveniente dedicar este apartado a describir un par de simetrías que resultan muy importantes en la física teórica.

Teorías de campos conforme

En la Sección 1.1 introdujimos al grupo de Poincaré como el grupo general de transformaciones del espacio-tiempo plano, sin embargo es posible extender tal descripción y considerar al llamado *grupo conforme*, consistente de transformaciones que preservan ángulos. En el espacio-tiempo de Minkowski las *transformaciones conformes* resultan ser las transformaciones locales más generales que preservan la estructura causal, de tal forma que intervalos tipo tiempo son mapeados a intervalos tipo tiempo, y de igual forma para los tipo espacio y tipo luz [12].

Supongamos un elemento de línea en alguna elección de coordenadas, que en general se escribe como $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$. Se define a las transformaciones de *Weyl* como aquellas que dejan invariante a la métrica salvo por un factor de escala arbitrario que depende del espacio-tiempo [12], es decir, aquellas transformaciones $x \rightarrow x' = f(x)$ tal que [13]

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega(x)^{-2}g_{\mu\nu}(x) \quad . \quad (1.127)$$

Así, una transformación de Weyl es tal que $ds'^2 = \Omega(x)^{-2}ds^2$, es decir, dichas transformaciones cambian la longitud de un intervalo infinitesimal pero dejan los ángulos localmente invariantes, lo que significa que preservan la causalidad [13]. Si consideramos al espacio-tiempo de Minkowski, con métrica $\eta_{\mu\nu}$ ³⁵, las transformaciones que preservan ángulos, tales que

$$\eta_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega(x)^{-2}\eta_{\mu\nu}(x) \quad , \quad (1.128)$$

se denominan transformaciones conformes [13]. Las rotaciones y traslaciones, con generadores $J_{\mu\nu}$ y P_μ respectivamente, que forman el grupo de Poincaré, son el caso particular de transformaciones conformes con $\Omega(x) = 1$ [28].

Además de teorías de campos invariantes ante el grupo de Poincaré, en el espacio-tiempo de Minkowski, se encuentra que existen teorías que además resultan invariantes ante otro tipo de transformaciones conformes. Particularmente, estamos interesados

³⁵Como hasta ahora, seguimos considerando a Minkowski 3+1-dimensional con métrica $\eta_{\mu\nu}$, tal que $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 3$.

en teorías invariantes ante transformaciones de escala, o dilataciones, dadas en función de un parámetro λ como [11]

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \quad . \quad (1.129)$$

La simetría de escala en una teoría de campos resulta interesante ya que, a nivel clásico, dicha simetría tiene como consecuencia que la física de tal teoría es la misma sin importar las escalas de longitud [28]. Por otro lado, si una teoría de campos exhibe simetría de escala incluso a nivel cuántico, debe ser entonces independiente de la escala energética μ , es decir, la función β debe anularse [28].

Adicionalmente, por razones que no cabe discutir en este texto, se encuentra que las teorías invariantes de escala son también invariantes ante de un tipo de transformaciones conocidas como transformaciones conformes especiales, parametrizadas por b_μ , tal que [11]

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2x^\nu b_\nu + b^2 x^2} \quad . \quad (1.130)$$

Los generadores de estas transformaciones conformes son D para las dilataciones y K_μ para las transformaciones especiales [11].

Si además de ser invariante ante el grupo de Poincaré, una teoría es invariante ante estas nuevas transformaciones conformes, dicha teoría es llamada *teoría de campos conforme* [11]. Así, una teoría de campos conforme es invariante ante las transformaciones del grupo conforme cuya álgebra consiste de los generadores: $J_{\mu\nu}$ de boosts y rotaciones espaciales, P_μ de traslaciones espacio-temporales, D de dilataciones y K_μ de transformaciones especiales. Además, es posible demostrar que el grupo conforme en 3+1 dimensiones es isomorfo al grupo $SO(4, 2)$ [12].

Supersimetría

En secciones pasadas hemos visto que las partículas asociadas a las excitaciones de los distintos campos pueden ser esencialmente de dos tipos: Fermiones, que son partículas con espín semientero, como las partículas de espín $s = 1/2$ asociadas al campo de Dirac ψ ; y bosones, que son partículas de espín entero, como las partículas de espín $s = 1$ asociadas al campo de norma A o las partículas de espín $s = 0$ asociadas al campo escalar ϕ [11]. Dicho esto, revisaremos ahora un tipo distinto de transformaciones de simetría que mezclan entre sí a las partículas bosónicas y fermiónicas conocida como *Supersimetría (SUSY)* [11].

En el contexto de este trabajo la supersimetría es una propiedad importante pues se encuentra que impone ciertas restricciones en la dinámica de las teorías de campos

supersimétricas [11]. Estas restricciones, sin embargo, no son lo suficientemente fuertes como para impedir que ocurran las cosas que estamos interesados en estudiar [11]. De este modo, las teorías de campo supersimétricas proporcionan una importante colección de modelos de juguete que nos permiten entender ciertos aspectos de las teorías de campos [11]. Por otra parte, es preciso tener presente que hasta nuestros días no se ha encontrado evidencia experimental de que la supersimetría esté presente en la naturaleza [11].

Para ver esto supongamos una teoría que incluye un campo escalar $\phi(x)$, cuyas partículas asociadas son bosones, y un espinor $\psi(x)$, cuyas partículas asociadas son fermiones. Una transformación de supersimetría es tal que relaciona al campo $\phi(x)$ y $\psi(x)$, es decir [11],

$$\delta_\epsilon \phi = \epsilon \psi \quad \text{y} \quad \delta_\epsilon \psi = \epsilon \phi \quad , \quad (1.131)$$

donde ϵ el parámetro de la transformación. Si una teoría de campos resulta invariante ante una transformación de este tipo, se dice que exhibe una supersimetría [28].

Siendo concretos, consideremos un modelo sencillo con supersimetría, que incluye un campo escalar complejo ϕ y un espinor de dos componentes ψ_α , con $\alpha = 1, 2$, cuya acción en el espacio-tiempo plano está dada por [12]

$$\mathcal{S} = \int d^{3+1}x \left(-\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - i \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \right) \quad . \quad (1.132)$$

Se encuentra que esta acción resulta invariante ante las transformaciones supersimetría dadas por [12]

$$\delta_\epsilon \phi = \sqrt{2} \epsilon \psi \quad \text{y} \quad \delta_\epsilon \psi = \sqrt{2} i (\sigma^\mu \bar{\epsilon})_\alpha \partial_\mu \phi \quad , \quad (1.133)$$

donde el parámetro de la transformación es un espinor de dos componentes ϵ_α . En particular, ϵ no depende de las coordenadas x^μ , por lo que (1.133) corresponde a una simetría global de la acción [12].

La supersimetría es entonces una simetría global ante el intercambio de partículas de espín entero, bosones, en partículas de espín semientero, fermiones, y viceversa [11]. En particular, esto resulta en que en una teoría supersimétrica cada partícula tiene un *supercompañero*, que es una partícula cuyo espín s difiere por $1/2$ de la original [28]. Por ejemplo, una partícula fermiónica tendrá un supercompañero que corresponde a su contraparte bosónica. Así, todas las partículas de la teoría están emparentados entre sí a través de la supersimetría [11].

La supersimetría da lugar, por ejemplo, a un tipo de carga conservada Q , que genera dicha transformación, conocida como *supercarga* [11] y se encuentra que corresponde a un espinor de dos componentes Q_α , así como su contraparte $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, con

$\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ [12]. En general es posible que una teoría exhiba más de una supersimetría, es decir, que tenga múltiples supercargas Q^I , con $I = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$ el número de supersimetrías independientes presentes [28], situación comunmente conocida como supersimetría extendida [11].

Adicionalmente, una teoría supersimétrica con supercarga Q , es decir $\mathcal{N} = 1$, puede exhibir también una simetría interna global ante transformaciones $U(N)$ que rotan la fase de la supercarga, actuando como $Q_\alpha \rightarrow e^{-i\lambda} Q_\alpha$ y $\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{i\lambda} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ [11]. Tal simetría es conocida como *simetría R*, comúnmente denotada como $U(N)_R$ [28]. Para teorías tales que $\mathcal{N} > 1$ la simetría R rota las supercargas Q^I entre sí [11], de modo que se tiene un grupo de simetría R distinto para cada número de supersimetrías. El caso que en breve nos resultará de particular interés es $\mathcal{N} = 4$, cuyo grupo de simetría R es el llamado grupo $SU(4)_R$, grupo que además resulta isomorfo al grupo $SO(6)_R$ [11].

1.3.2. Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$

Habiendo establecido todo lo anterior, tenemos finalmente los elementos para describir a la teoría cuántica de campos que será de principal relevancia en este trabajo. Como hemos mencionado, estamos interesados en una teoría de campos parecida a QCD, pero con simplificaciones que la vuelvan más manejable en términos de cálculos. Una forma de lograr esto es a partir de una teoría de norma que exhibe simetría conforme y supersimetría, la cual describiremos en esta Sección.

En el espacio-tiempo plano 4-dimensional el número más grande de supercargas que se pueden tener es $\mathcal{N} = 4$, por lo que una teoría con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías es conocida como *maximalmente supersimétrica* [12]. De esta forma, podemos definir a la llamada teoría de *Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$* (*SYM $\mathcal{N} = 4$*), o *Yang-Mills maximalmente supersimétrica (MSYM)*, como la teoría de Yang-Mills con mayor número de supersimetrías en el espacio-tiempo de Minkowski 4-dimensional. Dicha teoría es por tanto invariante ante las transformaciones generadas por cuatro supercargas Q^I , con $I = 1, 2, 3, 4$. MSYM mantiene además la invariancia ante el grupo de norma $SU(N)$, por lo que tiene campos de norma gluónicos no abelianos $A_\mu \equiv A_\mu^a T_a$ con $a = 1, \dots, N^2 - 1$. El contenido de campos de la teoría incluye además seis campos escalares reales no masivos $\phi^i(x)$, con $i = 1, 2, \dots, 6$, y cuatro espinores no masivos $\lambda_\alpha^b(x)$, con $b = 1, 2, 3, 4$, $\alpha = 1, 2$ [12].

La dinámica de SYM $\mathcal{N} = 4$ está descrita por [13]

$$\mathcal{S}_{MSYM} = \int d^4x \text{Tr} \left[-\frac{1}{2g^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - (D_\mu \phi^i)^2 - i \bar{\lambda}^b \bar{\sigma}^\mu D \lambda^b + O(\phi^4) + O(\lambda \lambda \phi) \right], \quad (1.134)$$

con $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$ y $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = (\lambda_\alpha)^*$. Escrita de esta forma resulta fácil describir las componentes la acción de MSYM: El primer término corresponde a la dinámica de los campos de norma A_μ^a , mientras que los siguientes dos términos corresponden a la dinámica de los campos escalares ϕ^i y espinoriales λ^b acoplados al campo gluónico a través de la derivada covariante. Finalmente, escritos únicamente de forma esquemática, los últimos dos términos corresponden a interacciones del tipo ϕ^4 y $\lambda\lambda\phi$ que representa interacciones entre campos espinoriales y campos escalares [13].

Por razones que quedarán claras en el siguiente Capítulo, conocer las simetrías globales de esta teoría es de mucha relevancia. En primera instancia, como cualquier teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo de Minkowski, MSYM es invariante ante las transformaciones del grupo de Poincaré. Además, se encuentra que dicha teoría es invariante de escala, incluso después del proceso de cuantización, es decir, SYM $\mathcal{N} = 4$ es una CFT a nivel cuántico [12]. En particular, esto significa que la función β se anula, es decir, la constante de acoplamiento g para MSYM no depende de la escala energética [12].

Por otra parte, como hemos mencionado, MSYM es invariante ante transformaciones generadas por 4 supercargas Q^I , por lo que las simetrías de MSYM son entonces una combinación de supersimetría y simetría conforme, conocida como *simetría superconforme* [12]. Al considerar a los generadores del grupo conforme es necesario incluir además 4 *supercargas conformes* S^K , con $K = 1, 2, 3, 4$ [12]. Adicionalmente, MSYM exhibe una simetría R ante el grupo $SU(4)_R \simeq SU(6)_R$, que, como se mencionó previamente, es un grupo de transformaciones internas que rota a las supercargas entre sí [28].

En resumen, las simetrías globales de SYM $\mathcal{N} = 4$ son dadas por el grupo $SO(4, 2)$ de la simetría conforme, el grupo $SO(6)$ de la simetría R , y las 32 componentes de supersimetrías (4 supercargas y 4 supercargas conformes). En conjunto se dice que el *supergrupo* de simetrías globales de SYM $\mathcal{N} = 4$ es el llamado $SU(2, 2|4)$ [12].

Así, MSYM supone un modelo de juguete en el que podemos estudiar ciertos aspectos que resultan inaccesibles para QCD [12]. Por supuesto, MSYM no es la única teoría parecida a QCD que puede ser usada como modelo de juguete, sin embargo, por razones que quedarán claras más adelante, MSYM es la teoría que nos resulta de particular interés en este trabajo. Aquí cabe recordar que en este trabajo estamos interesados en describir una herramienta de cálculo que nos permita indagar en el régimen de acoplamiento fuerte donde la expansión perturbativa queda rebasada.

1.4. Entrelazamiento cuántico

Al estudiar una teoría cuántica de campos particular, comúnmente se investigan las propiedades de las funciones de correlación de operadores locales de la teoría. No

obstante, es igualmente importante estudiar las propiedades de cantidades no locales. En este trabajo nos interesa estudiar una de las propiedades no locales de cualquier teoría cuántica, el llamado *entrelazamiento cuántico* [16], propiedad que pone de manifiesto con mayor claridad algunas de las diferencias entre la física cuántica y la física clásica. Es por esto que, para concluir este Capítulo, en esta Sección repasaremos dicho concepto.

Para presentar el entrelazamiento cuántico es conveniente comenzar describiendo el ejemplo más sencillo en el contexto de la mecánica cuántica: Consideremos dos sistemas cuánticos, cada uno con un espacio de Hilbert asociado, \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente, tal que el espacio de Hilbert del sistema combinado es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Si un estado $|\Psi\rangle$ del sistema combinado *no* puede escribirse como

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad , \quad (1.135)$$

se dice que el estado $|\Psi\rangle$ está *entrelazado* [16]. Por el contrario, si el estado $|\Psi\rangle$ *sí* puede ser escrito como (1.135) se dice que es un estado *separable* [16]. El entrelazamiento cuántico es entonces una propiedad de dos o más sistemas cuánticos y puede definirse como la no separabilidad de los estados cuánticos del sistema combinado [16].

Para entender mejor el ejemplo mencionado, pensemos en un sistema de dos partículas en el que cada una de éstas puede tener uno de dos estados posibles, formando un sistema conocido como *qubit*: Sin pérdida de generalidad consideremos al espín en la dirección z de dichas partículas como la base del espacio de Hilbert \mathcal{H} , con eigenestados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ ³⁶, de manera que cada partícula puede estar en el estado $|\uparrow\rangle$ o en $|\downarrow\rangle$. En este caso el estado escrito como

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \quad , \quad (1.136)$$

es un estado separable [16]. Por el contrario, el estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \quad , \quad (1.137)$$

es un estado entrelazado [16]. El estado (1.137) es comúnmente conocido como *par EPR*, por Einstein, Podolski y Rosen, quienes en un principio mostraron dicha propiedad de los sistemas cuánticos [16].

³⁶El conjunto de eigenvectores $\{|\psi_i\rangle\}$ de un operador observable \hat{O} constituyen una base para el espacio de Hilbert \mathcal{H} , de modo que el estado $|\psi\rangle$ un sistema puede ser escrito como $|\psi\rangle = \sum_i^n a_i |\psi_i\rangle$ [29], donde a_i son coeficientes complejos. Los eigenvalores $\{\lambda_i\}$ son los únicos resultados que podemos obtener al realizar una medición de \hat{O} sobre el sistema descrito por el estado $|\psi\rangle$ [29]. Si al hacer una medición, el resultado es λ_i , para alguna i particular, entonces el estado $|\psi\rangle$ del sistema inmediatamente *colapsa* al eigenestado $|\psi_n\rangle$ [16], tal que $|\psi\rangle \rightarrow |\psi_n\rangle$. Esto significa que si se realiza una segunda medición de \hat{O} sobre el sistema inmediatamente después de la primera medición, entonces con seguridad el resultado será λ_i [16].

Para indagar más en la física del entrelazamiento cuántico consideremos otro ejemplo. Supongamos que preparamos un sistema de dos partículas, la partícula α y la partícula β , en el estado (1.137), que llamaremos $|EPR\rangle$, por lo que dichas partículas están entrelazadas formando así un par EPR. Éste es un estado de espín total cero en la dirección z , de modo que el estado $|EPR\rangle$ es una superposición de dos casos posibles: que la partícula α esté en el estado con espín $|\uparrow\rangle_\alpha$ mientras la partícula β esté en el estado con espín $|\downarrow\rangle_\beta$, y viceversa, es decir, el estado

$$|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_\alpha |\downarrow\rangle_\beta - |\downarrow\rangle_\alpha |\uparrow\rangle_\beta) \quad . \quad (1.138)$$

Al hacer una medición del espín en la dirección z de dichas partículas, el estado *colapsa* en solo uno de estos dos casos posibles. Supongamos ahora que tenemos dos observadores en locaciones distantes, Alice y Bob, quienes llevan consigo una de las partículas del par EPR. Alice medirá el espín de la partícula α , por lo que puede obtener el estado $|\uparrow\rangle_\alpha$ o bien el estado $|\downarrow\rangle_\alpha$, cada uno con 50 % de probabilidad. Análogamente, Bob medirá el espín de la partícula β , obteniendo $|\uparrow\rangle_\beta$ o $|\downarrow\rangle_\beta$ con 50 % de probabilidad. Sin embargo, si Alice mide primero el espín de la partícula α y encuentra, por ejemplo, que se encuentra en el estado $|\uparrow\rangle_\alpha$, entonces el par EPR inmediatamente colapsará en el estado $|\uparrow\rangle_\alpha |\downarrow\rangle_\beta$, de modo que cuando Bob mida el espín de la partícula β *necesariamente*, con 100 % de probabilidad, encontrará que se encuentra en el estado $|\downarrow\rangle_\beta$. Esto indica que, debido al entrelazamiento cuántico de las partículas α y β , la medición de Alice determinará la medición de Bob, sin importar lo lejos que se encuentren; lo que sea que Alice observe, Bob observará lo contrario [16].

El entrelazamiento es entonces una propiedad que describe una correlación entre los sistemas cuánticos entrelazados, de tal forma que, sin importar cuan separados estén los unos de los otros, realizar una medición sobre un sistema cuántico afectará instantáneamente la medición sobre el otro. En este sentido, el entrelazamiento cuántico aparece como una propiedad no local de los sistemas cuánticos [16]. Esto parecería estar en conflicto con la Relatividad Especial, sin embargo, no existe forma de usar dicha correlación para enviar información más rápido que la velocidad de la luz [16]. Alice y Bob por tanto no podrían usar el entrelazamiento de las partículas α y β para enviarse señales mutuamente; si Bob mide el espín de su partícula y encuentra $|\uparrow\rangle_\beta$, no tendría forma de saber si esto ha ocurrido por el colapso del par EPR cuando él hizo la medición, o si ha sido porque Alice previamente había medido el estado $|\downarrow\rangle_\alpha$ [16]. La compatibilidad entre el entrelazamiento cuántico y la Relatividad Especial (y General) es en realidad más profunda, sin embargo, esta discusión queda fuera del alcance de este trabajo. Una revisión de dicha discusión puede encontrarse en [30]. Por otra parte, como hemos mencionado, el entrelazamiento es una de las propiedades que distingue a los sistemas cuánticos de los sistemas clásicos [31], y en la actualidad juega un rol importante en el desarrollo de todas las potenciales tecnologías cuánticas, como la criptografía cuántica o la computación cuántica [31].

En general, un estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, llamado *estado puro* [16], es escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle \quad , \quad (1.139)$$

donde $|e_i\rangle$ y $|e_j\rangle$ son alguna base para \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente, tal que $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ con n, m el número de elementos de la base. De esta forma, un estado $|\Psi\rangle$ es separable si los coeficientes c_{ij} pueden ser factorizados como $c_{ij} = c_i^A c_j^B$, por lo que puede ser escrito mediante [16]

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_i^A |e_i\rangle_A \otimes c_j^B |e_j\rangle_B = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad , \quad (1.140)$$

es decir, el estado $|\Psi\rangle$ puede ser escrito como el producto tensorial de los estados $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ y $|\psi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$. Si el estado no admite dicha separación entonces es un estado entrelazado [16].

Esta discusión puede ser generalizada a cualquier número de sistemas cuánticos, es decir, cualquier número de espacios de Hilbert, tal que $\mathcal{H} = \otimes_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}$, con $\alpha = 1, 2, \dots, n$. En este caso, un estado $|\Psi\rangle \in \otimes_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}$ puede ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} c_{i_1, i_2, \dots, i_n} |e_{i_1}\rangle_1 \otimes |e_{i_2}\rangle_2 \otimes \dots \otimes |e_{i_n}\rangle_n \quad , \quad (1.141)$$

donde $|e_{i_{\alpha}}\rangle_{\alpha}$ son base de \mathcal{H}_{α} . Si los coeficientes pueden ser factorizados como $c_{i_1, i_2, \dots, i_n} = c_{i_1}^1 c_{i_2}^2 \dots c_{i_n}^n$, dicho estado es separable, por lo que si tal factorización no es posible, es un estado entrelazado [16].

En particular, estamos interesados en estudiar el entrelazamiento cuántico en el contexto de las teorías cuánticas de campos, donde los sistema cuánticos tienen un número infinito de grados de libertad. Para motivar esto, consideremos un sistema reticulado, tal que en cada punto de la retícula se define un espacio de Hilbert \mathcal{H}_{α} . Pensemos además que en cada punto de dicha retícula se tiene una partícula, cada una con un valor de espín en la dirección z . En un sistema con muchos grados de libertad, o muchas partículas, resulta más útil preguntarnos si un estado entre dos subsistemas es entrelazado. Podemos separar entonces este sistema por en dos regiones \mathcal{A} y \mathcal{A}^c , tal que el espacio de Hilbert del sistema total es $\mathcal{H} = \otimes_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$ [32] (Ver Figura 1.5), y preguntarnos si un estado entre los subsistemas \mathcal{A} y \mathcal{A}^c es entrelazado.

Por otro lado, existe una generalización de la descripción de un estado cuántico de un sistema en términos de matrices de densidad, las cuales contienen toda la información del estado del sistema [16], y la cual nos será de utilidad en el estudio del entrelazamiento cuántico. En dicha descripción un estado puro $|\psi\rangle$ es descrito por la *matriz de densidad*, definida como el operador [16]

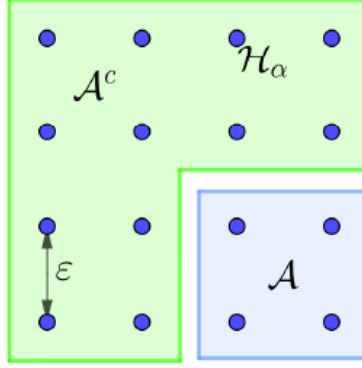


Figura 1.5: Sistema cuántico dividido en dos regiones \mathcal{A} y \mathcal{A}^c . Imagen tomada de [33].

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_i c_i c_i^* |e_i\rangle\langle e_i| \quad . \quad (1.142)$$

Si la matriz densidad del estado $|\psi\rangle$ puede escribirse como (1.142) se dice que se trata de un estado *puro*, el caso contrario es un estado *mezclado* [16]. Por otro lado, el valor de expectación de cualquier operador \hat{O} está dado por [16]

$$\langle\hat{O}\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = Tr(\rho\hat{O}) \quad . \quad (1.143)$$

Para entender la relación de esto con el entrelazamiento cuántico consideremos un ejemplo. Como hemos mencionado, estamos interesados en subsistemas \mathcal{A} y \mathcal{A}^c , tal que el espacio de Hilbert del sistema total es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$. Si el estado del sistema completo es $|\Psi\rangle$, entonces la matriz de densidad del sistema es $\rho_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Supongamos que un observador, Alice, tiene acceso solo al subsistema \mathcal{A} , de manera que sus mediciones estarán asociadas a operadores de la forma [16]

$$\hat{O} = \hat{A} \otimes \hat{1} \quad . \quad (1.144)$$

Ya que el estado del sistema completo es descrito por la matriz de densidad $\rho_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c}$, el valor de expectación de la mediciones de Alice estarán dadas por

$$\langle\hat{A}\rangle = Tr_{\mathcal{A}} Tr_{\mathcal{A}^c} \left([\hat{A} \otimes \hat{1}] \rho_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c} \right) = Tr_{\mathcal{A}} (A \rho_{\mathcal{A}}) \quad , \quad (1.145)$$

donde hemos definido a la *matriz de densidad reducida* como [16]

$$\rho_{\mathcal{A}} = Tr_{\mathcal{A}^c} \rho_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c} \quad . \quad (1.146)$$

Tenemos que, desde la perspectiva de Alice, el subsistema al que tiene acceso está determinado por la matriz de densidad reducida $\rho_{\mathcal{A}}$. Es decir, el subsistema $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ está relacionado con la matriz de densidad del sistema completo $\rho_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c}$ tomando la traza parcial sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$ [16]. Finalmente, se tiene que el estado $|\Psi\rangle$ es

entrelazado si la matriz de densidad reducida $\rho_{\mathcal{A}}$ describe un estado mezclado. En el caso contrario, se tiene que $|\Psi\rangle$ es un estado separable [16].

1.4.1. Entropía de entrelazamiento

Una vez establecido el concepto de entrelazamiento, ahora estamos interesados en definir una forma de cuantificar dicho entrelazamiento. Con este propósito resulta conveniente introducir el concepto de *entropía de entrelazamiento*. Para esto primero se define la entropía dada una distribución de probabilidad clásica $\{p_i\}$, mediante [16]

$$S = - \sum_i p_i \log p_i \quad , \quad (1.147)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$, con N el número de estados posibles³⁷. En particular, en el contexto de la teoría de la información (1.147) es llamada la *entropía de Shannon*, mientras que en el ámbito de la física estadística esta cantidad es usualmente multiplicada por la constante de Boltzmann k_b y es conocida como *entropía de Gibbs* [16]. Dicha cantidad es una medida de la incertidumbre codificada en la distribución de probabilidad [16]. Por ejemplo, si se tiene el caso en que $p_1 = 1$, y por tanto para el resto $p_i = 0$, se tiene $S = 0$, es decir, no hay incertidumbre. En el caso contrario, si $p_i = 1/N$, se tiene que $S = \log N$, por lo que la entropía es maximizada [16].

Para un sistema cuántico descrito por una matriz de densidad ρ se define la *entropía de von Neumann* como [16]

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho) \quad . \quad (1.148)$$

Particularmente, si empleamos la matriz de densidad reducida entonces $S(\rho_{\mathcal{A}})$ es llamada *entropía de entrelazamiento* de \mathcal{A} con respecto a \mathcal{A}^c , $S_{EE}(\mathcal{A})$ y se escribe como [16]

$$S_{EE}(\mathcal{A}) \equiv S(\rho_{\mathcal{A}}) = -Tr(\rho_{\mathcal{A}} \log \rho_{\mathcal{A}}) \quad . \quad (1.149)$$

Así, la entropía de entrelazamiento resulta ser una medida del entrelazamiento entre el subsistema \mathcal{A} y el subsistema \mathcal{A}^c , para un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$ [16], es decir, cuantifica qué tan correlacionados están \mathcal{A} y \mathcal{A}^c [16]. Intuitivamente, podemos interpretar a la cantidad $S_{EE}(\mathcal{A})$ como el grado de incertidumbre que comparten los subsistemas \mathcal{A} y \mathcal{A}^c en el estado $|\psi\rangle$ [34].

Para entender mejor estas ideas es conveniente revisar nuevamente el ejemplo del sistema de dos qubits formando un par EPR (1.137). Considerando el primer qubit como \mathcal{A} y el segundo como \mathcal{A}^c , tal que la base del espacio de Hilbert, correspondiente

³⁷Si la distribución de probabilidad es continua entonces la expresión (1.147) es dada por una integral.

al espín en la dirección z de cada partícula, es $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}_{\mathcal{A}}$ y $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}_{\mathcal{A}^c}$ para $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$ respectivamente. De esta forma el estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$ lo escribimos como

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad . \quad (1.150)$$

La matriz de densidad de tal estado es

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \quad , \quad (1.151)$$

por lo que matriz de densidad reducida es entonces

$$\rho_{\mathcal{A}} = \langle\uparrow|\rho|\uparrow\rangle_{\mathcal{A}^c} + \langle\downarrow|\rho|\downarrow\rangle_{\mathcal{A}^c} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (1.152)$$

Por tanto, la entropía de entrelazamiento de \mathcal{A} con respecto a \mathcal{A}^c es

$$S_{EE}(\mathcal{A}) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \log 2 \quad , \quad (1.153)$$

tal que $S_{EE}(\mathcal{A}) = 1$ empleando \log_2 . Es decir, las partículas en un par ERP están máximamente entrelazadas [16]. En general, se encuentra que la entropía de entrelazamiento es cero para un estado puro y diferente de cero para un estado mezclado [16].

La entropía de entrelazamiento posee algunas propiedades relevantes [16]; considerando un sistema dividido en distintas regiones \mathcal{A}_i , es decir, $\mathcal{A} = \cup_i \mathcal{A}_i$ tal que el espacio de Hilbert del sistema completo es $\mathcal{H} = \otimes_i \mathcal{H}_{\mathcal{A}_i}$. La entropía de entrelazamiento cumple lo siguiente [32]

- *Subaditividad:*

$$S_{EE}(\mathcal{A}_1) + S_{EE}(\mathcal{A}_2) \geq S_{EE}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) \quad . \quad (1.154)$$

- *Desigualdad de Araki-Lieb:*

$$|S_{EE}(\mathcal{A}_1) - S_{EE}(\mathcal{A}_2)| \leq S_{EE}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) \quad . \quad (1.155)$$

En particular, si $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ conforman el sistema completo, que es un estado puro, es decir, si $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}^c$, se tiene que $S_{EE}(\mathcal{A}) = S_{EE}(\mathcal{A}^c)$.

- *Subaditividad fuerte:*

$$S_{EE}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) + S_{EE}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3) \geq S_{EE}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3) + S_{EE}(\mathcal{A}_3) \quad , \quad (1.156)$$

y

$$S_{EE}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) + S_{EE}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3) \geq S_{EE}(\mathcal{A}_1) + S_{EE}(\mathcal{A}_3) \quad . \quad (1.157)$$

Se ha encontrado que la entropía de entrelazamiento tiene aplicaciones en diversas áreas de la física, como lo son la materia condensada, mecánica estadística, y en gran medida en teoría de la información cuántica [30, 31]. En particular, en este trabajo estamos interesados en estudiar la relación entre la entropía de entrelazamiento y ciertos sistemas gravitacionales [32], tema que trataremos más adelante en el texto.

Entropía de entrelazamiento en QFT

Una vez revisados los conceptos básicos del entrelazamiento podemos dar paso a la formulación de la entropía de entrelazamiento en algunas teorías cuántica de campos. La transición natural de un sistema discreto a un sistema continuo podemos entenderla pensando en un sistema reticulado (ver Figura 1.5). En tal caso cada elemento del sistema está distanciado una cantidad ϵ , tomando entonces el límite $\epsilon \rightarrow 0$ nos encontramos con el límite continuo (ver Figura 1.6). En el ejemplo discreto de la retícula de espines se tenía un grado de libertad por cada punto de la retícula, de esta forma, en el límite continuo se tienen infinitos grados de libertad. Por otro lado, como vemos en la Figura 1.6, al dividir al sistema continuo en dos subsistemas obtenemos tres regiones espaciales, las regiones \mathcal{A} y \mathcal{A}^c , separadas por una superficie de entrelazamiento $\partial\mathcal{A}$, que corresponde a la frontera de \mathcal{A} (o de \mathcal{A}^c).

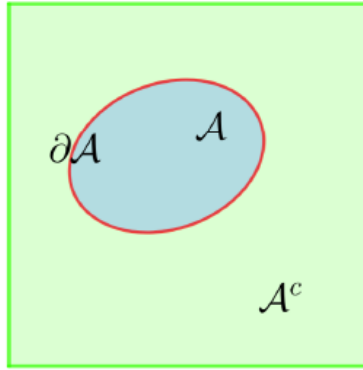


Figura 1.6: Sistema cuántico continuo dividido en dos regiones espaciales \mathcal{A} y \mathcal{A}^c a través de la frontera $\partial\mathcal{A}$. Imagen tomada de [33].

Considerando, por ejemplo, la teoría del campo escalar libre $\phi(x)$ sobre un espacio-tiempo plano \mathcal{M} d -dimensional, podemos definir un subsistema como una región espacial $(d-1)$ -dimensional \mathcal{A} tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ a un tiempo fijo t_0 . De esta forma, dado un estado $|\Psi\rangle$ de la teoría, como el estado de vacío $|0\rangle$, la entropía de entrelazamiento $S_{EE}(\mathcal{A})$ es definida por (1.149) [32]. En este ejemplo, la entropía de entrelazamiento nos dice qué tan entrelazados están los subsistemas \mathcal{A} y \mathcal{A}^c , es decir, qué tan correlacionados están los grados de libertad de $\phi(x)|_{\vec{x} \in \mathcal{A}}$ con $\phi(x)|_{\vec{x} \in \mathcal{A}^c}$. Debido a este entrelazamiento se cumple, por ejemplo, el hecho de que $\langle 0|T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\}|0\rangle \neq 0$ [34].

Como hemos mencionado previamente, en cualquier QFT comunmente estamos interesados en las funciones de correlación de operadores locales como la información básica de la teoría, sin embargo, podríamos considerar, en cierto sentido, a la entropía de entrelazamiento como información todavía más básica; pues la entropía de entrelazamiento requiere únicamente de especificar el estado $|\Psi\rangle$ de la teoría (y una región de entrelazamiento \mathcal{A}), mientras que las funciones de correlación requieren de el

estado y la elección de un conjunto de operadores locales $\hat{\mathcal{O}}_i$ (y sus posiciones x_i) [34].

Por otro lado, ya que toda teoría cuántica de campos tiene infinitos grados de libertad, existirán infinitas correlaciones entre los grados de libertad de las regiones infinitamente cercanas de los subsistemas \mathcal{A} y \mathcal{A}^c , por lo que el entrelazamiento de los dos subsistemas es infinito. Por tanto, se tiene que la entropía de entrelazamiento en una teoría cuántica de campos es una cantidad divergente $S_{EE}(\mathcal{A}) \rightarrow \infty$ [32]. Para obtener un resultado finito es necesario introducir un *corte ultravioleta* ϵ [32] (de escala de energía $E \sim 1/\epsilon \rightarrow \infty$), es decir, una cantidad espacial $\epsilon \rightarrow 0$ que separara los grados de libertad de los subsistemas [32]. Tomando en cuenta esto, se encuentra que para cualquier teoría cuántica de campos libre, d-dimensional en un espacio-tiempo plano, definida con un corte ultravioleta $\epsilon \rightarrow 0$ y dada una región \mathcal{A} , la entropía de entrelazamiento tiene la siguiente estructura [12, 35],

$$S_{EE}(\mathcal{A}) = c_0 \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{(d-2)} + c_1 \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{(d-3)} + \dots + S_0(\mathcal{A}) \quad , \quad (1.158)$$

donde L es una escala que determina el tamaño típico de la región \mathcal{A} , $S_0(\mathcal{A})$ es una constante finita, d la dimensión del espacio-tiempo y las constantes c_i son coeficientes que dependen de la frontera $\partial\mathcal{A}$ y de la teoría [12, 35].

Es posible notar que el primer término en (1.158) escala como L^{d-2} , es decir, es proporcional al área de la frontera $\partial\mathcal{A}$, por lo que se dice que la entropía de entrelazamiento satisface una *ley de área* [12]. De esta forma podemos escribir esquemáticamente la entropía de entrelazamiento en función del primer término en (1.158), el término dominante, como [12, 36]

$$S_{EE}(\mathcal{A}) = \gamma \frac{Area(\partial\mathcal{A})}{\epsilon^{d-2}} + \text{términos subdominantes} \quad , \quad (1.159)$$

donde γ es una constante que depende del sistema. Para intentar entender este resultado debemos pensar en la propiedad de la entropía de entrelazamiento que asegura que $S_{EE}(\mathcal{A}) = S_{EE}(\mathcal{A}^c)$, lo cual debe mantenerse sin importar qué tan pequeña hagamos la región \mathcal{A} . Esto nos indica que la entropía de entrelazamiento debe depender de alguna propiedad común entre \mathcal{A} y \mathcal{A}^c , y la única propiedad que debe cumplir esto sin importar el tamaño de dichas regiones, al menos en teorías libres, es precisamente la interfaz entre éstas $\partial(\mathcal{A}) = \partial(\mathcal{A}^c)$ [37].

En particular, como hemos mencionado anteriormente, en este trabajo estamos interesados en estudiar ciertas teorías de campos invariantes de escala: Se encuentra que en el estado de vacío $|0\rangle$ de una CFT libre, en el espacio-tiempo plano d-dimensional, la estructura de la entropía de entrelazamiento (1.158) toma la siguiente forma [32, 37]

$$S_{EE}(\mathcal{A}) = \begin{cases} a_1 \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-2} + a_2 \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-4} + \dots + a_{d-2} \left(\frac{L}{\epsilon}\right) + \tilde{f} & , \quad \text{para } d \text{ impar,} \\ a_1 \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-2} + a_2 \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-4} + \dots + a_{d-3} \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^2 + \tilde{c} \log\left(\frac{L}{\epsilon}\right) & , \quad \text{para } d \text{ par,} \end{cases} \quad (1.160)$$

donde las constantes a_i y los coeficientes \tilde{c} y \tilde{f} dependen de las características de la particulares de la CFT.

Se encuentra, por ejemplo, que la simetría conforme de una CFT libre en $d = 1 + 1$ dimensiones espacio-temporales facilita ciertos cálculos, por lo que en este caso particular es posible calcular de forma exacta la entropía de entrelazamiento a partir de las herramientas de QFT [36]. Consideremos el estado de vacío de una CFT en el espacio-tiempo plano $(1 + 1)$ -dimensional y tomemos la región espacial \mathcal{A} , a tiempo fijo $t = t_0$, dada por

$$\mathcal{A} = \{x \mid -\ell_A/2 < x_2 < \ell_A/2\} \quad ,$$

que corresponde a un intervalo de longitud ℓ_A sobre la coordenada espacial x . Con estas condiciones resulta que la entropía de entrelazamiento puede ser calculada de forma exacta, y se encuentra que está dada por [12, 37]

$$S_{EE}(\mathcal{A}) = \frac{c}{3} \log\left(\frac{\ell_A}{\epsilon}\right) \quad , \quad (1.161)$$

donde ϵ es el corte ultravioleta, y c es la carga central de la CFT [12]. En fácil ver que este resultado está de acuerdo con la estructura general (1.160), tal que $\tilde{c} = c/3$. Si consideramos ahora al espacio de la CFT como un círculo de circunferencia L , tal que la región \mathcal{A} es un segmento de longitud ℓ_A , la expresión (1.161) queda dada por [12]

$$S_{EE}(\mathcal{A}) = \frac{c}{3} \log\left(\frac{L}{\pi\epsilon} \sin\left(\frac{\pi\ell_A}{L}\right)\right) \quad . \quad (1.162)$$

El procedimiento común para calcular la entropía de entrelazamiento en el vacío de una teoría cuántica de campos libre, con las herramientas de QFT, es un método de cálculo conocido como *truco de réplica* [36]. En este trabajo no desarrollaremos dicho método, basta con resaltar que para cualquier teoría cuántica de campos en $d > 2$ dimensiones, el cálculo de la entropía de entrelazamiento, incluso para teorías libres, resulta en general muy complicado [36]. Es en este contexto en el que se desarrolla este trabajo, pues en el Capítulo 4 buscamos describir una herramienta de cálculo alternativa a las comúnmente conocidas en QFT, con el fin de calcular la entropía de entrelazamiento, de forma más sencilla, en ciertas CFT en el régimen de acoplamiento fuerte.

Capítulo 2

Teoría gravitacional

En el presente Capítulo describimos algunos de los elementos básicos de la teoría de la Relatividad General. En particular, presentamos las ecuaciones de Einstein. Habiendo establecido esto, damos paso a describir ciertas soluciones a estas ecuaciones de campo que nos son de particular interés. En la Sección 2.2 describimos el espacio-tiempo de Schwarzschild, su estructura causal, así como algunas propiedades termodinámicas de dicha solución. Finalmente, en la Sección 2.3 describimos ciertos aspectos importantes del espacio-tiempo de Anti-de Sitter, el cual es una de las piezas claves en el desarrollo de este trabajo.

2.1. Relatividad General

En la Sección 1.1 hemos visto que la Relatividad Especial proporciona la descripción de la física entre sistemas de referencia inerciales y nos muestra que el espacio y el tiempo conforman un solo ente con propiedades geométricas particulares al que llamamos espacio-tiempo. Esta descripción es generalizada a sistemas de referencia *no inerciales* por la teoría de la *Relatividad General* [3, 14], desarrollada por Albert Einstein y David Hilbert, de forma independiente, en 1915. La Relatividad General tiene como base dos principios fundamentales; el primero postula que todas las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los marcos de referencia, sean inerciales o no [3]. El segundo, conocido como *Principio de Equivalencia*, postula que en caída libre, en cualquier campo gravitacional, se tiene un marco de referencia en el que la física observada puede describirse, de forma local, simplemente con la Relatividad Especial [3, 18]. En otras palabras, el principio de equivalencia establece la existencia de sistemas de referencia *localmente inerciales* en los cuales el efecto de cualquier campo gravitacional desaparece [14].

Geoméricamente, lo anterior significa que siempre existe una elección de coordenadas en la cual la métrica del espacio-tiempo se ve localmente como el espacio-tiempo de Minkowski alrededor de un punto dado [14]. De esta manera, una partícula en un campo gravitacional se mueve igual a como lo haría de forma libre en un espacio-

tiempo con *curvatura*, cantidad que definiremos más adelante, y que localmente se ve como Minkowski. Dicho de otra forma, la gravedad se manifiesta distorsionando la geometría del espacio-tiempo plano, dotándolo de curvatura. Resulta que el espacio-tiempo debe ser descrito como una *variedad pseudo-riemanniana*¹, pues es éste el ente geométrico que cumple con la característica de ser localmente plano [3, 14]. La geometría local de una variedad d-dimensional queda totalmente descrita por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, con $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d - 1$, y en general sus componentes pueden ser distintos tipos de funciones de las coordenadas, por lo que la métrica puede ser un objeto dinámico. Así, en una variedad d-dimensional arbitraria el elemento de línea se escribe entonces como $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ [14].

Para introducir la noción de curvatura de forma intuitiva, es útil considerar el caso Euclideo. En un espacio Euclideo dos líneas rectas paralelas no se cruzan en ningún punto. Tal enunciado es conocido como el *postulado del paralelismo* [3], y todo espacio en el que este postulado es válido, se dice que es un espacio *plano*. Dicho de otra forma, las líneas paralelas solo existen en el espacio plano. Esta idea puede ser extendida al espacio-tiempo, y es posible mostrar que el espacio-tiempo de Minkowski es precisamente un espacio-tiempo plano. Por el contrario, si en un espacio-tiempo no se encuentran dichas trayectorias paralelas, se dice que es un espacio-tiempo con curvatura [3]. Es preciso entonces indagar en el concepto de línea recta. En la geometría Euclidiana las líneas rectas son las curvas de mínima longitud que conectan dos puntos del espacio. En general, en un espacio-tiempo arbitrario, las curvas que extremizan la longitud entre dos puntos son llamadas *geodésicas* [3]. Así, las líneas rectas son las curvas geodésicas del espacio-tiempo plano.

Si bien la métrica es el objeto geométrico fundamental, para caracterizar matemáticamente la curvatura de un espacio-tiempo d-dimensional es necesario introducir algunos elementos adicionales. En primer lugar definimos la *derivada covariante* ∇_μ , que al actuar sobre un vector V^ν es escrita como [3, 14]

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \quad , \quad (2.1)$$

con $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d - 1$, donde $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ es la derivada parcial usual y a los factores $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ se les conoce como los *símbolos de Christoffel* [3, 14]. Dicha derivada covariante es la generalización de la derivada usual de un espacio-tiempo plano en coordenadas cartesianas a uno en coordenadas curvilíneas, y está dada por dicha derivada usual ∂_μ más un factor adicional $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$. Es decir, la derivada covariante se reduce a la derivada usual cuando se emplean coordenadas cartesianas tal que $\Gamma^\nu_{\mu\lambda} =$

¹Una variedad Riemanniana debe tener solo eigenvalores positivos en la métrica, mientras que el espacio-tiempo, como se vio previamente, tiene un signo distinto entre las coordenadas espaciales y la temporal [14].

0². Este término adicional, también conocido como *conexión de Levi-Civita*, es por tanto la contribución de una elección de coordenadas curvilíneas a la derivada, y es tal que es compatible con la métrica $g_{\mu\nu}$, es decir $\nabla_{\mu}g_{\nu\sigma} = 0$ [3], por lo que puede ser escrito en términos de la métrica mediante³ [3]

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad . \quad (2.2)$$

Una vez hecha la introducción de los símbolos de Christoffel podemos determinar la ecuación que define a las curvas geodésicas en un espacio-tiempo arbitrario; supongamos una curva $x(\lambda)$, con λ un parámetro *afín*⁴ arbitrario, en un espacio-tiempo d -dimensional dado con métrica $g_{\mu\nu}$. Como hemos mencionado, las geodésicas son las curvas que extremizan la longitud espacio-temporal entre dos eventos, por lo que podemos emplear el Principio de Mínima Acción para calcularlas, esto es [38]

$$\mathcal{A} = \int_C ds = \int_C \sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} = \int_C \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}} d\lambda \quad , \quad (2.3)$$

cuya ecuación de movimiento es la llamada *ecuación de la geodésica*, dada por [3, 38]

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0 \quad . \quad (2.4)$$

Así, la curva $x^{\mu}(\lambda)$ que satisface esta ecuación es llamada *geodésica*. La expresión (2.4) es por tanto la generalización de la ecuación de una línea recta de un espacio-tiempo plano a uno con curvatura. Es posible notar que si $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = 0$ la ecuación (2.4) es precisamente la ecuación usual de una línea recta⁵, lo que nos indica que la información de la curvatura del espacio-tiempo está codificada en este factor $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$.

Si bien los símbolos de Christoffel proporcionan cierta noción de la curvatura de una variedad, para obtener toda la información sobre esta curvatura de forma unívoca

²Formalmente, la conexión se define mediante [3]

$$\frac{\partial e_{\mu}}{\partial x_{\nu}} := \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e_{\lambda} \quad ,$$

donde e_{μ} son los vectores base de las coordenadas elegidas. Es claro que en coordenadas cartesianas $\partial e_{\mu}/\partial x_{\nu} = 0$.

³Aquí asumimos que estamos en un espacio-tiempo con *torsión* cero, es decir, tal que $T^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} + \Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]} = 0$.

⁴Un parámetro afín λ es aquél que está relacionado con el tiempo propio τ mediante

$$\lambda = a\tau + b,$$

con a y b constantes [14].

⁵Es posible notar que en las coordenadas Cartesianas del espacio Euclídeo $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = 0$ tal que la ecuación (2.4) es dada por

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} = 0 \Rightarrow x^{\mu}(\lambda) = a^{\mu}\lambda + b^{\mu},$$

con $a^{\mu}, b^{\mu} = cte$, que es la ecuación usual de una línea recta [3].

es necesario construir un objeto geométrico llamado el *tensor de Riemann* o *tensor de curvatura* $R^\beta_{\alpha\mu\nu}$, que en términos de la conexión se define mediante [14]

$$R^\beta_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \partial_\nu \Gamma^\beta_{\mu\alpha} + \Gamma^\beta_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\alpha} - \Gamma^\beta_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\alpha} \quad . \quad (2.5)$$

Para entender geoméricamente al tensor de curvatura podemos recurrir al concepto de paralelismo en una variedad. En una variedad con métrica $g_{\mu\nu}$ es posible hablar del paralelismo de un vector a través del concepto de *transporte paralelo* [18]; se dice que un vector arbitrario V es transportado paralelamente a lo largo de una trayectoria $x^\mu(\lambda)$, parametrizada por un parámetro afín λ , si dicho vector no cambia a lo largo de la trayectoria, es decir [12],

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu V^\mu = \frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} V^\rho = 0 \quad . \quad (2.6)$$

Ésta es conocida como ecuación de transporte paralelo [3]. De la ecuación (2.4) vemos que una geodésica es entonces una curva a lo largo de la cual su propio vector tangente $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ es transportado paralelamente [3]. Pensemos ahora en el transporte paralelo de un vector V en un circuito cerrado. Consideremos, por ejemplo, la configuración de la Figura 2.1; primero se transporta paralelamente el vector a largo de la trayectoria A y luego a lo largo de B, para luego ser transportado primero por B y luego por A. Al comparar la diferencia entre ambas formas de transportar el vector V se encuentra una diferencia entre los vectores transportados $\delta V^\mu = V^\mu_{AB} - V^\mu_{BA}$ dada por [12]

$$\delta V^\mu = R^\mu_{\alpha\beta\nu} V^\alpha A^\beta B^\nu \quad . \quad (2.7)$$

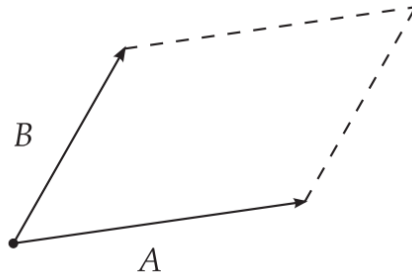


Figura 2.1: Transporte paralelo en un espacio-tiempo arbitrario. Imagen tomada de [12].

Si pensamos de nuevo en el espacio plano Euclídeo es claro que si transportamos un vector de forma paralela en cualquier circuito cerrado éste no cambiará. Sin embargo, la ecuación (2.7) nos dice que en general, en un espacio-tiempo arbitrario, al transportar paralelamente un vector a lo largo de un circuito cerrado obtendremos un vector distinto al vector original. Esta es la diferencia formal entre un espacio-tiempo plano y un espacio-tiempo curvo: Si ante el transporte paralelo de un vector a lo largo de

un circuito cerrado éste no cambia, se dice que el espacio-tiempo es plano, en el caso contrario se dice que se trata de un espacio-tiempo curvo [18]. Así, de la ecuación (2.7) es claro que si las componentes del tensor de Riemann son cero entonces el espacio-tiempo es plano, por el contrario, si alguna de las componentes del tensor es distinta de cero, el espacio-tiempo tiene curvatura [18].

Adicionalmente, a partir de ciertas contracciones⁶ del Riemann, es posible derivar algunos objetos geométricos importantes, como el *tensor de Ricci* [14], definido por

$$R_{\mu\nu} = R^{\beta}_{\mu\beta\nu} \quad , \quad (2.8)$$

y el escalar de curvatura [14],

$$R = R^{\mu}_{\mu} \quad , \quad (2.9)$$

los cuales proporcionan información crucial sobre la curvatura. Existe además una relación interesante entre dichos objetos matemáticos, pues se cumple que [14]

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\nu} R \quad . \quad (2.10)$$

Tenemos entonces que la curvatura de cualquier espacio-tiempo queda totalmente descrita matemáticamente por la métrica y sus segundas derivadas.

Por otro lado, la descripción de las teorías de campos presentada en el Capítulo 1 y formulada en el espacio-tiempo de Minkowski puede ser generalizada a espacio-tiempos con curvatura. Una forma de acoplar los campos de materia a un espacio-tiempo curvo en una acción \mathcal{S} es a través del acoplamiento mínimo [12], es decir, reemplazar la derivada usual ∂_{μ} por la derivada covariante ∇_{μ} , la métrica del espacio-tiempo plano $\eta_{\mu\nu}$ por la métrica del espacio-tiempo con curvatura $g_{\mu\nu}$, y la medida de integración $\int d^d x$ por $\int d^d x \sqrt{-|g|}$ ⁷ [12]. Para ilustrar esta receta consideremos, por ejemplo, al campo escalar real ϕ , cuya acción en el espacio-tiempo plano fue escrita en la Sección 1.2.1 y que para un espacio-tiempo curvo d -dimensional se escribe como⁸ [12]

$$\mathcal{S} = \int d^d x \sqrt{-|g|} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad . \quad (2.11)$$

Esta descripción puede realizarse para los distintos tipos de campos que hemos visto en el Capítulo 1. De esta manera, toda la información de la materia de un sistema puede ser descrita por una acción $\mathcal{S}_M[g_{\mu\nu}, \phi]$ que en general dependerá de los diferentes tipos de campos que componen al sistema. Es posible además generalizar la conservación

⁶Matemáticamente, una contracción es el emparejamiento de las componentes de un tensor en un subespacio \mathbb{V} con sus componentes en el subespacio dual $\tilde{\mathbb{V}}$. Pragmáticamente esto se traduce en la suma de índices repetidos, uno superior y otro inferior, de un mismo tensor [3].

⁷Donde $|g|$ es el determinante de la métrica.

⁸Para el campo escalar real ϕ se mantiene la derivada usual ∂_{μ} en lugar de la derivada covariante pues actúan de la misma forma ante escalares.

de la energía, descrita en el espacio-tiempo plano por $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$; en el espacio-tiempo curvo el tensor de energía-momento se define mediante

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad , \quad (2.12)$$

de tal manera que la conservación de la energía es dada por $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ [12, 14].

Podemos ahora introducir las ecuaciones de campo de Einstein para la gravedad; Las ecuaciones de campo deben ser correctas en el límite Newtoniano y por tanto deben satisfacer la ecuación de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G_N \rho$, donde ρ es la densidad de energía [3]. En la gravedad Newtoniana la fuente del campo gravitacional es la densidad de masa, de modo que ahora la fuente debe estar relacionada de alguna manera con la densidad de energía. Ya que esperamos obtener una ecuación tensorial el mejor candidato es el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Por tanto, de acuerdo con el principio de equivalencia, como primera conjetura para llevar a cabo tal descripción, es posible relacionar la geometría del espacio-tiempo y la materia, proponiendo que $R_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$ [3].

Sin embargo, tal relación no puede ser correcta, pues la conservación de la energía dicta que $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, lo cual implicaría que $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$, que no es cierto en general, como podemos ver directamente de la ecuación (2.10) [3]. En cambio, es posible construir una cantidad, conocida como el *tensor de Einstein* $G_{\mu\nu}$, definido por [3]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad , \quad (2.13)$$

que satisface que $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, y por tanto es posible relacionar la geometría del espacio-tiempo y la materia mediante $G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$. Por otro lado, dichas ecuaciones de campo pueden ser derivadas a partir la *acción de Einstein-Hilbert*, dada por [12, 14]

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int dx^d \sqrt{-|g|} (R - 2\Lambda) \quad , \quad (2.14)$$

donde G_N es la constante gravitacional de Newton y se ha introducido una constante adicional Λ , llamada *constante cosmológica* [3]. Dicha constante fue introducida por Einstein con el fin de obtener soluciones cosmológicas estáticas (con $d = 4$), es decir, soluciones del comportamiento del universo que fueran permanentes en el tiempo [18, 39]. Sin embargo, años más tarde Hubble descubrió que el universo no era estático, sino que se encontraba en expansión, por lo que la constante cosmológica fue temporalmente removida [39]. Su posible existencia continuó siendo debatida por décadas y, actualmente, observaciones astronómicas sugieren que la constante cosmológica es en realidad diferente de cero y positiva [18]. No obstante, ciertas soluciones a las ecuaciones de campo con diferentes valores de la constante cosmológica fueron estudiadas y han sido de mucha relevancia en la física [14], como lo es, por ejemplo, el llamado espacio-tiempo de Anti-de Sitter, solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, que, como veremos más adelante, será de relevancia en este

trabajo.

Por otra parte, para que la acción de la Relatividad General esté bien definida resulta necesario agregar una componente adicional a la acción que contenga la información de la frontera del espacio-tiempo subsecuente [12, 38], conocido como el *término de frontera de Gibbons–Hawking*, definido por [12]

$$\mathcal{S}_{GH} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^{d-1}x \sqrt{\gamma} K \quad , \quad (2.15)$$

donde γ es la métrica inducida en la frontera $\partial\mathcal{M}$ y K se refiere a la traza de la *curvatura extrínseca*⁹ [40, 39], definida en términos de la métrica inducida por $K = \gamma^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}$, con n_{ν} un vector normal unitario [12]. Por tanto, la acción apropiada del sistema gravitacional total debe ser

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}_{GH} + \mathcal{S}_M \quad . \quad (2.16)$$

A partir (2.16), variando la acción con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, se obtienen finalmente las ecuaciones de campo de la Relatividad General con constante cosmológica [3, 18],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad . \quad (2.17)$$

El lado izquierdo en (2.17) tiene elementos puramente geométricos que especifican la curvatura, mientras que el lado derecho contiene la información del contenido de materia. Las ecuaciones de campo de la Relatividad General nos dicen por tanto que la materia deforma la geometría del espacio-tiempo dotándolo de curvatura, y es esta curvatura lo que entendemos como interacción gravitacional [14]. En general, fijando el contenido de campos en el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, especificando un valor para la constante cosmológica Λ e imponiendo condiciones de simetría, resolver las ecuaciones de campo significa entonces encontrar la métrica $g_{\mu\nu}$ que satisfaga las ecuaciones, es decir, encontrar el espacio-tiempo que resulta al colocar tal contenido de materia y que cumple las simetrías impuestas. El espacio-tiempo de Minkowski 3+1 dimensional estudiado en la Sección 1.1, por ejemplo, es la solución estática y con simetría esférica a las ecuaciones de campo sin constante cosmológica y en ausencia de materia, es decir, $T_{\mu\nu} = \Lambda = 0$ [14]. Interesantemente, la teoría de Einstein permite describir al espacio-tiempo en un número arbitrario d de dimensiones [12].

En la Sección 1.1 vimos que el grupo de simetrías del espacio-tiempo de Minkowski es el grupo de Poincaré. Para generalizar estas ideas y caracterizar las simetrías de un espacio-tiempo arbitrario, es necesario introducir un objeto matemático llamado *vector de killing* [14]. Si un conjunto de transformaciones que dejan invariantes a la

⁹La curvatura extrínseca proviene de considerar a la variedad como inmersa en un espacio de mayor dimensión y preguntarnos qué tan curva es la variedad respecto a dicho espacio [18].

métrica, denominadas *isometrías*, es generado a partir de un campo vectorial $K^\mu(x)$, entonces K^μ debe ser un *campo vectorial de Killing* [12, 14]. Matemáticamente K^μ debe cumplir la llamada *ecuación de Killing*, es decir, [14]

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 \quad , \quad (2.18)$$

donde ∇_μ es la derivada covariante definida por (2.1). Los vectores de Killing permiten además identificar la carga conservada asociada a tal simetría. Consideramos por ejemplo la geodésica $x^\mu(\lambda)$ descrita por la trayectoria de una partícula clásica masiva, si el espacio-tiempo admite un vector de Killing K , es posible identificar la cantidad que se conserva a lo largo de la geodésica, dada por [14]

$$Q = K_\mu U^\mu = K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad , \quad (2.19)$$

donde U^μ es la 4-velocidad de la partícula. Los vectores de Killing son entonces de gran relevancia pues nos permiten encontrar cantidades conservadas asociadas a la geometría del espacio-tiempo.

A partir de este concepto es posible definir un espacio-tiempo *maximalmente simétrico* como aquel que posee el número más grande posible de vectores de Killing linealmente independientes (isometrías), que para una variedad de dimensión d está dado por $d(d+1)/2$ [12]. Como vimos, el espacio-tiempo de Minkowski es invariante ante transformaciones de Lorentz y traslaciones espacio-temporales, por lo que en d dimensiones se tienen d isometrías traslacionales y $d(d-1)/2$ isometrías rotacionales, incluyendo a los boosts, dando un total de $d(d+1)/2$ isometrías, por lo que Minkowski es un ejemplo de un espacio-tiempo maximalmente simétrico [12].

2.2. Agujeros negros

Después de haber presentado algunos elementos de la Relatividad General examinaremos ahora algunas soluciones a las ecuaciones de Einstein que son de particular interés para este trabajo. La solución más sencilla y que tiene diversas aplicaciones físicas es el llamado espacio-tiempo de *Schwarzschild*. Como veremos en esta Sección, la métrica de Schwarzschild describe objetos de mucho interés presentes en nuestro universo, conocidos como *agujeros negros*. Por simplicidad comenzaremos estudiando el espacio-tiempo de Schwarzschild como solución a las ecuaciones de campo sin constante cosmológica, mientras que el caso con $\Lambda \neq 0$ será estudiado más adelante.

2.2.1. La métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild [3, 18] es una solución de vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) a las ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica ($\Lambda = 0$), con simetría

esférica y estática, que en d dimensiones espacio-temporales, en una cierta elección de coordenadas llamadas coordenadas de Schwarzschild [18], está dada por [12]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad , \quad (2.20)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2\mu}{r^{d-3}} \quad , \quad (2.21)$$

con $0 \leq r < \infty$, $-\infty \leq t, x^\mu < \infty$ y donde $d\Omega_{d-2}^2$ es el elemento de línea de la esfera S^{d-2} . La constante μ está relacionada con la masa del agujero negro mediante la siguiente expresión [12]

$$\mu = \frac{8\pi GM}{(d-2)VOL(S^{d-2})} \quad , \quad (2.22)$$

donde el parámetro M representa la masa del agujero negro¹⁰ centrada en el origen espacial de la geometría y $VOL(S^{d-2})$ es el volumen de la esfera S^{d-2} . Esta métrica fue originalmente hallada en $d = 4$ dimensiones por Karl Schwarzschild en 1916.

En primera instancia, es fácil notar que alejarnos lo suficiente del agujero negro, es decir, tomar el límite $r \rightarrow \infty$, implica que $f(r) = 1$, con lo que la métrica (2.20) toma la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad ,$$

que es precisamente la métrica de Minkowski escrita en coordenadas esféricas. A un espacio-tiempo que en infinito ($r \rightarrow \infty$ para estas coordenadas) se comporte como Minkowski se le llama espacio-tiempo *asintóticamente Minkowski*, o *asintóticamente plano* [14]. Se dice entonces que la solución de Schwarzschild cuando $\Lambda = 0$ describe un espacio-tiempo asintóticamente plano [14].

Es evidente que la métrica (2.20) tiene dos valores especiales para la coordenada radial, $r = 0$ y $r = r_h = (2\mu)^{1/(d-3)}$, pues son tales que la métrica diverge. A estos puntos divergentes se les llama *singularidades* [3]. La interpretación de estas singularidades es distinta para cada caso: El origen $r = 0$ es conocido como *la singularidad* pues corresponde a una singularidad física del espacio-tiempo donde la curvatura diverge [3], y es tal que no puede ser removida con una distinta elección de coordenadas. Este tipo de singularidades pueden ser identificadas si alguna combinación escalar del tensor de Riemman o del tensor de Ricci divergen [3]. En particular, para el espacio-tiempo de Schwarzschild el término $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, conocido como el *escalar*

¹⁰El parámetro M surge como una constante de integración en la solución de las ecuaciones de campo. Una primera interpretación de M como la masa del objeto que genera el campo gravitacional proviene del límite de la gravedad Newtoninana, es decir, lejos de la fuente del campo gravitacional se debe cumplir que $g_{00} \rightarrow -(1 + 2\Phi)$, donde el potencial es $\Phi = -\frac{G_N M}{r^{d-3}}$ [14, 38].

de *Kretschmann*, diverge en $r = 0$ [14]. Por su parte el valor r_h , conocido como el *radio de Schwarzschild* y que surge de la condición $f(r_h) = 0$, es una *singularidad de coordenadas*, pues depende de la elección de coordenadas y no del espacio-tiempo mismo, es decir, es posible hacer una elección de coordenadas en las que la métrica no diverja en $r = r_h$. Más aún, se puede mostrar que ningún escalar de curvatura diverge en $r = r_h$ [3].

Para entender las consecuencias físicas de la singularidad de coordenadas en $r = r_h$ es preciso indagar en la estructura causal del espacio-tiempo. Por simplicidad fijemos por ahora la dimensión a $d = 4$, con lo que el radio de Schwarzschild está dado por $r_h = 2GM$ y la métrica (2.20) queda escrita como [14]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad . \quad (2.23)$$

Considerando geodésicas radiales nulas que definen a los conos de luz, es decir $ds^2 = 0$, de la métrica (2.23) se tiene que [14]

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad . \quad (2.24)$$

Esta ecuación indica que acercarse al radio de Schwarzschild $r \rightarrow r_h = 2GM$ implica, en términos del tiempo coordenado t , que $dt/dr \rightarrow \infty$, es decir, los conos de luz se van cerrando a medida que nos acercamos a r_h , como se muestra pictóricamente en la Figura 2.2.

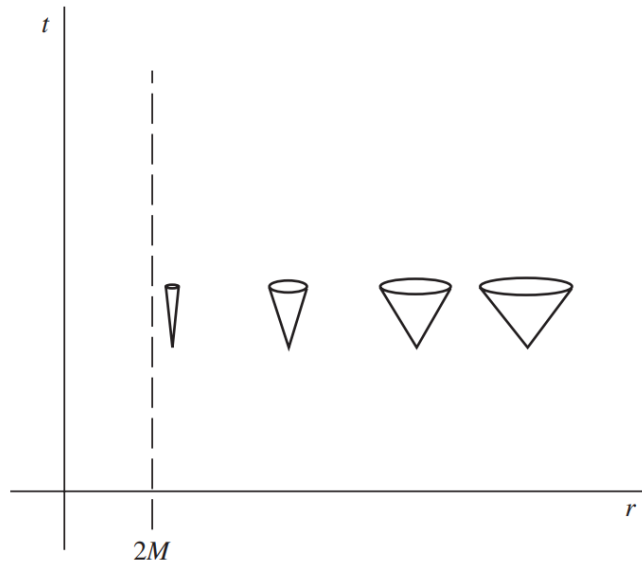


Figura 2.2: Los conos de luz en las coordenadas de Schwarzschild se cierran cerca de $r_h = 2M$. Aquí consideramos $G = 1$. Imagen tomada de [18].

Lo anterior tiene consecuencias muy interesantes, pues sabemos que cualquier partícula está constreñida a moverse en el cono de luz, y ya que estos se cierran cuando más cerca están del radio de Schwarzschild, tendremos que a una partícula le tomará un intervalo de tiempo coordinado t mayor seguir acercándose hacia $r_h = 2GM$ cuanto más cerca de este valor se encuentre, como podemos ver de la Figura 2.2. En el límite $r \rightarrow r_h = 2GM$, a una partícula le tomará un tiempo coordinado infinito alcanzar la superficie en r_h . Se dice entonces que, para esta métrica, r_h es un *horizonte causal* [12], es decir, una superficie que marca la frontera de la región que es causalmente accesible. Dicha superficie r_h es comúnmente conocida como *horizonte de eventos* [14]. Por otra parte, es posible mostrar que a cualquier partícula, desde su propio sistema de referencia inercial, le toma un tiempo propio τ finito alcanzar la superficie $r = r_h$ [18].

Si cualquier partícula puede atravesar el horizonte de eventos sin ninguna restricción, resulta natural preguntarnos qué ocurre con ellas una vez que están dentro. Es posible mostrar que dentro del horizonte de eventos, es decir, en la región $r < r_h$, las coordenadas espaciales y temporal son intercambiadas, de modo que ir hacia el futuro se traduce en reducir la coordenada radial, es decir, una vez que la partícula cruza el horizonte el único futuro posible es aquél en el que termina en la singularidad en $r = 0$ [3]. Esto tiene como consecuencia que cualquier proceso físico que suceda dentro del horizonte se queda dentro de éste y no puede enviar ningún tipo de información al exterior [3]. Este impedimento de poder escapar al exterior es independiente del tipo de partícula, por lo que incluso a las partículas sin masa, como el fotón, les es imposible escapar del horizonte una vez que lo atravesaron, y es por esto que a estos objetos se les ha dado el nombre de agujeros negros [3].

Resulta que las coordenadas que hasta ahora hemos usado para describir la solución de Schwarzschild describen apenas una región del espacio-tiempo [14]. Con el fin de extender tal descripción, es posible emplear las llamadas *coordenadas de Kruskal-Szekeres* definidas como [14],

$$U = -\exp\left(-\frac{t - r_*}{4GM}\right) \quad , \quad (2.25)$$

$$V = \exp\left(\frac{t + r_*}{4GM}\right) \quad , \quad (2.26)$$

donde r_* es llamada la *coordenada tortuga*¹¹. Estas coordenadas U y V son coor-

¹¹Esta nueva coordenada radial, también conocida como coordenada de Regge-Wheler, es definida mediante

$$r_* = r + 2GM \log\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \quad ,$$

y mapea la región localizada fuera del horizonte $2GM < r < \infty$ a la región $-\infty < r_* < \infty$, de tal forma que los rayos de luz entrantes se acercan al horizonte cada vez más lento, por lo cual recibe el nombre de coordenada tortuga.

denadas nulas, pues definen a los rayos de luz viajando en la dirección radial¹². Es posible demostrar que con estas coordenadas la métrica queda escrita como [14]

$$ds^2 = \frac{32(GM)^3}{r} e^{-r/2GM} dUdV + r^2 d\Omega_2^2 \quad . \quad (2.27)$$

Se tiene entonces que la métrica (2.23) cubre solo la región del espacio-tiempo con $U < 0$ y $V > 0$, pero es perfectamente posible extender estas coordenadas a $-\infty < U, V < \infty$ y obtener el espacio-tiempo extendido denominado el espacio-tiempo de Kruskal, el cual resulta ser la extensión maximal de la solución de Schwarzschild [14], es decir, las coordenadas de Kruskal-Szekeres describen el espacio-tiempo completo de la solución de Schwarzschild. Por otra parte, es posible notar que, en las coordenadas de Kruskal-Szekeres, no se tiene ninguna divergencia en el horizonte $r_h = 2GM$, es decir, empleando esta elección de coordenadas hemos eliminado la singularidad de coordenadas en $r = r_h$.

Es posible ver además que, empleando dichas coordenadas, se cumple la siguiente relación [14]

$$UV = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) \exp \left(\frac{r}{2GM} \right) \quad , \quad (2.28)$$

de donde resulta sencillo observar que el horizonte $r_h = 2GM$ implica que en las nuevas coordenadas $U = 0$, o bien $V = 0$, lo que puede llevarnos a la conclusión de que en este espacio-tiempo no se tiene solo un horizonte de eventos, si no dos, que se intersecan en $U = V = 0$ [14]. Más aún, la singularidad en $r = 0$ se traduce en $UV = 1$, que resulta ser una hipérbola que tiene dos componentes desconectadas [14]. Esto puede verse de forma pictórica en el *diagrama de Kruskal* mostrado en la Figura 2.3. En dicha figura se han representado las superficies $U = 0$ y $V = 0$, es decir los dos horizontes, con líneas a 45°, y las hipérbolas que corresponden a las singularidades.

Para darle significado físico a este diagrama es conveniente dividirlo en cuatro cuadrantes I, II, III, IV. Las regiones I y II corresponden al exterior y al agujero negro respectivamente, éste último delimitado por la singularidad y el horizonte de eventos. Ambas regiones ya aparecían en las coordenadas originales de Schwarzschild, sin embargo en estas nuevas coordenadas vemos que la singularidad se trata ahora de una superficie tipo-espacio, es decir, la singularidad no es un punto en el espacio, sino más bien un lugar en el futuro. Así, una partícula que atraviesa el horizonte desde el exterior I no tiene más que alcanzar la singularidad $r = 0$ dentro de la región II [3].

Por su parte, el cuadrante IV ha aparecido al extender la solución de Schwarzschild. Podemos notar que la región IV no es más que la inversión temporal de la región II, lo que implica que existe una singularidad en $r = 0$, como una superficie

¹²Las coordenadas nulas son definidas mediante $u = t - r_*$ y $v = t + r_*$, de tal manera que las superficies con $u = const$ y $v = const$ describen geodésicas radiales nulas salientes y entrantes respectivamente.

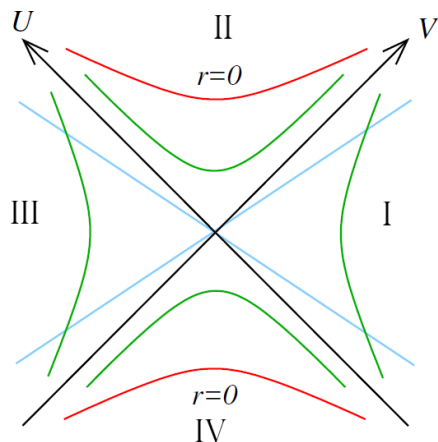


Figura 2.3: Diagrama de Kruskal que representa la extensión maximal de la solución de Schwarzschild. Los ejes U y V corresponden a horizontes asociados a $r_h = 2GM$. Imagen tomada de [14].

tipo espacio, pero ésta se encuentra en el pasado. Esto significa que una partícula que se encuentra dentro del horizonte en la región IV no tiene otra opción más que salir de éste hacia el exterior en la región I. Ya que la región IV es totalmente opuesta al agujero negro, es comúnmente llamada *agujero blanco* [3]. Debido a esta singularidad existente en el pasado, al horizonte del agujero negro, descrito por $V = 0$, se le denomina horizonte futuro, mientras que al horizonte del agujero blanco, descrito a su vez por $U = 0$, se le llama horizonte pasado. En nuestro universo sabemos que los agujeros negros astrofísicos se forman a partir del colapso gravitacional de ciertos objetos, sin embargo, no conocemos ningún proceso físico por el cual pueda crearse un agujero blanco, por lo que esta solución no describe un objeto presente en nuestro universo [3].

2.2.2. Agujeros de gusano

En la Relatividad General existen un tipo de estructuras geométricas, solución a las ecuaciones de Einstein, que conectan dos regiones asintóticas del espacio-tiempo, comúnmente conocidas como *agujeros de gusano* [14, 15]. Dichas geometrías fueron descritas por primera vez en 1935 en un trabajo de Albert Einstein y Nathan Rosen [41], por lo que originalmente se han llamado *puentes de Einstein-Rosen (ER)* [15]. Como veremos más adelante, resulta que los agujeros de gusano tienen cierta conexión con el entrelazamiento cuántico [15], propiedad de los sistemas cuánticos que describimos en la Sección 1.4. La conexión entre estas geometrías espacio-temporales y dicha propiedad de los sistemas cuánticos será la principal pieza de estudio de este trabajo.

En la Sección anterior, entre otras cosas, hemos discutido la parte derecha del dia-

grama de Kruskal (Fig. 2.3), que tiene como exterior la Región I, la cual se extiende desde $r_h = 2GM$ hasta $r \rightarrow \infty$. Ésta es asintóticamente Minkowski y por tanto describe la geometría del espacio-tiempo fuera del agujero negro. La parte izquierda del diagrama la hemos reservado para esta Sección, ya que revela ante nosotros una característica muy importante de esta solución, pues a partir del Diagrama 2.3 es posible ver que la Región III es la reflexión de la Región I, con exactamente las mismas propiedades, y que por tanto es también el exterior de un agujero negro asintóticamente Minkowski descrito por la métrica de Schwarzschild [14]. Este exterior, sin embargo, está desconectado causalmente del exterior I. Tenemos entonces que el espacio-tiempo completo de la solución de Schwarzschild describe dos regiones asintóticamente planas [14].

Para indagar en la geometría entre las regiones asintóticas I y III notemos que tomando la rebanada a $t = 0$ del espacio-tiempo obtenemos una línea horizontal tipo-espacio que atraviesa el diagrama en $U = V = 0$, que es precisamente la región que queremos describir. Consideremos entonces la métrica de Schwarzschild (2.23) con $t = 0$, es decir,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad , \quad (2.29)$$

que describe la geometría espacial válida para ambos exteriores, I y III, pero de forma independiente [14]. Para unir ambas geometrías y obtener una métrica que describa ambos exteriores al mismo tiempo consideremos una nueva coordenada radial $\rho \in (0, \infty)$ definida mediante [14]

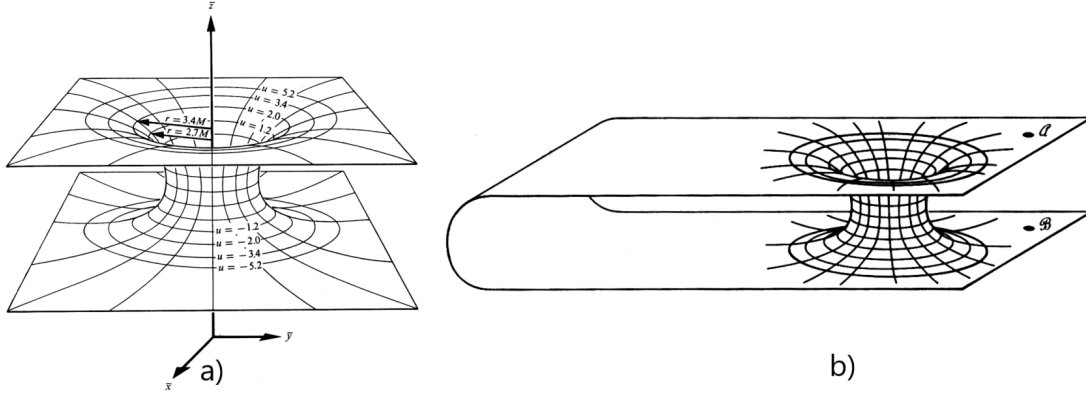
$$r = \rho \left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^2 \quad . \quad (2.30)$$

Esta coordenada tiene dos valores para cada valor de $r > 2GM$ y un solo valor en el horizonte, por lo que es capaz de describir ambos exteriores conectados en $r = r_h$ [14]. Empleando esta coordenada, la métrica (2.29) toma la siguiente forma [14]

$$ds^2 = \left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad . \quad (2.31)$$

Es posible mostrar que tomando los límites $\rho \rightarrow 0$ y $\rho \rightarrow \infty$, la métrica (2.31) describe el espacio plano Euclideo \mathbb{R}^3 [14]. Con esto podemos interpretar que la métrica (2.31) describe la geometría espacial de un agujero de gusano que conecta a las dos regiones asintóticamente planas, en $\rho \rightarrow 0$ y $\rho \rightarrow \infty$ respectivamente. Podemos concluir por tanto que el espacio-tiempo de la solución de Schwarzschild describe dos regiones asintóticamente planas conectadas a través de un agujero de gusano [14]. Una forma de visualizar esta geometría a partir de la métrica (2.31) es tomando la rebanada del espacio con $\theta = \pi/2$, con lo que obtenemos una superficie 2-dimensional que puede ser visualizada como superficie de revolución inmersa en el espacio Eucli-

deo 3-dimensional [39], como se ve en la Figura 2.4 a).



5

Figura 2.4: a) Agujero de gusano que resulta de pegar las dos regiones exteriores del agujero negro en la extensión maximal de Schwarzschild. Esta geometría puede interpretarse como un puente que conecta dos regiones asintóticamente planas de universos distintos. b) Dos agujeros negros en el mismo universo conectados en su interior por un agujero de gusano. Imágenes tomadas de [39].

Podemos asociar distintas interpretaciones a las regiones conectadas por el agujero de gusano. La primera es que cada una de estas regiones asintóticamente planas corresponden a un universo distinto con su propio agujero negro [39], como se representa en la Figura 2.4 a). La segunda, es que se trata de dos agujeros negros alejados entre sí pero que se encuentran en el mismo universo asintóticamente plano [39], como se ve en la Figura 2.4 b). Ambas geometrías describen la misma solución pero tienen diferentes topologías [39].

Diagramas de Penrose

Adicionalmente, y con el objetivo de poder entender y representar otras propiedades del espacio-tiempo, es posible visualizar al espacio-tiempo de Schwarzschild a través de una herramienta de la Relatividad General conocida como los *diagramas de Penrose* [14]. Los diagramas de Penrose son diagramas bidimensionales definidos bajo ciertas reglas particulares, útiles en el estudio de la estructura causal y demás propiedades globales del espacio-tiempo [14]. Dichos diagramas son obtenidos a partir de una transformación de Weyl de las coordenadas del espacio-tiempo, de manera que todo el espacio-tiempo infinito puede ser visualizado de forma pictórica en un diagrama.

Como vimos en la Sección 1.3.1, las transformaciones de Weyl son tales que dado un espacio-tiempo \mathcal{M} con métrica $g_{\mu\nu}$, se obtiene una métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, es decir, $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x)g_{\mu\nu}$, de tal manera que las distancias en el espacio-tiempo son modificadas mientras que los ángulos son preservados. En particular, esto significa que

dos métricas relacionadas por una transformación de Weyl poseen la misma estructura causal [14]. La idea es entonces realizar una transformación a la métrica que mapee el infinito en un punto finito, manteniendo intacta la estructura causal del espacio-tiempo original. Es decir, dado un espacio-tiempo \mathcal{M} se construye un nuevo espacio-tiempo $\tilde{\mathcal{M}}$ que contenga a \mathcal{M} de tal forma que las métricas estén relacionadas por una transformación de Weyl. Este proceso es conocido como *compactificación conforme* [14]. De esta forma es posible transformar un espacio-tiempo infinito en una región compacta, es decir, en un diagrama de Penrose [14].

En particular, es posible mostrar que el diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Schwarzschild asintóticamente plano es el mostrado en la Figura 2.5 [12]. Análogamente al diagrama de Kruskal, los sectores I y III representan el exterior asintóticamente plano de un agujero negro. Por su parte, los cuadrantes II y IV describen un agujero negro y un agujero blanco respectivamente, incluyendo sus singularidades en $r = 0$ representadas con líneas irregulares, mientras que los horizontes en $r = 2GM$ pasado y futuro son representados por \mathcal{H}^- y \mathcal{H}^+ respectivamente. Las regiones i^+ e i^- representan el infinito tipo-tiempo, pasado y futuro respectivamente, mientras que i^0 representa el infinito tipo-espacio. Finalmente, las regiones \mathcal{F}^+ y \mathcal{F}^- son la frontera del espacio-tiempo que aparece luego del proceso de compactificación, por lo que es llamada *frontera conforme*. [14]. Dicha frontera resulta ser la misma frontera conforme del espacio-tiempo de Minkowski, debido al carácter asintóticamente plano de la solución de Schwarzschild.

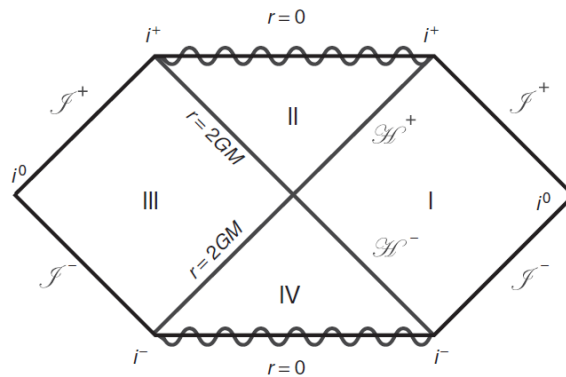


Figura 2.5: Diagrama de Penrose del agujero negro de Schwarzschild maximalmente extendido asintóticamente plano. Imagen tomada de [12].

2.2.3. Termodinámica de agujeros negros

Si bien hemos visto que la teoría clásica de la Relatividad General describe a los agujeros negros como objetos de los que nada, ni siquiera la luz, puede escapar de ellos, la historia no termina ahí. Esto cambia cuando se consideran ciertos aspectos

cuánticos del sistema [12]. La forma de introducir campos cuánticos en la Relatividad General se conoce como aproximación semi-clásica, y consiste en describir a los campos cuánticos de materia sobre un espacio-tiempo curvo clásico. En este contexto, se encuentra que los agujeros negros emiten radiación como si fueran un cuerpo negro [42, 43], con una temperatura dada por [12]

$$T_h = \frac{\hbar\kappa_s}{2\pi} \quad , \quad (2.32)$$

llamada *Temperatura de Hawking*, donde hemos usado $c = k_B = 1$, \hbar representa la constante de Planck y el factor κ_s es conocido como *gravedad superficial*¹³.

En particular, se encuentra que la temperatura para el agujero negro de Schwarzschild $d = 4$ dimensional asintóticamente plano está dada por [12]

$$T_h = \frac{1}{4\pi r_h} = \frac{1}{8\pi GM} \quad . \quad (2.33)$$

Esta es la temperatura del agujero negro que medirá un observador en infinito. De este resultado vemos que la temperatura del agujero negro es inversamente proporcional a su masa, de tal manera que cuando la masa disminuye, la temperatura aumenta. Es decir, la capacidad calorífica del agujero negro de Schwarzschild definida como $\partial M/\partial T$, es negativa [12]. Por tanto, dicho agujero negro no puede estar en equilibrio térmico con el exterior, pues al emitir radiación el agujero negro expulsa energía al infinito, lo cual se traduce en la reducción de su masa, aumentando así su temperatura. Esto conduce a que, eventualmente, el agujero negro se evapore [43].

Los agujeros negros son entonces objetos térmicos que siguen ciertas leyes similares a las leyes de la termodinámica [28, 43]. En particular, se encuentra que los agujeros negros tienen una entropía, conocida como *entropía de Bekenstein-Hawking*, que está dada por [12]

$$S_{BH} = \frac{A_h}{4\hbar G} \quad , \quad (2.34)$$

donde A_h es el área del horizonte de eventos del agujero negro. Resulta interesante notar que la entropía de un agujero negro es proporcional a su área, pues los sistemas estadísticos en general tienen una entropía que es proporcional a su volumen.

2.3. El espacio-tiempo de Anti-de Sitter

Hemos descrito ya soluciones de vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) a las ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica, por lo que dedicaremos el resto de este Capítulo a describir soluciones con constante cosmológica negativa, ya que éstas serán de

¹³La gravedad superficial es definida por la ecuación $\kappa_s K^\mu = K^\nu \Delta_\nu K^\mu$ [12], con $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d-1$ y donde K^ν es un vector de Killing asociado al horizonte del agujero negro.

relevancia en el desarrollo de este trabajo. El *espacio-tiempo de Anti-de Sitter* [12, 28], conocido también simplemente como *AdS*, es una solución estática, con simetría esférica y $T_{\mu\nu} = 0$ de las ecuaciones de campo (2.17) con constante cosmológica negativa $\Lambda < 0$. La métrica $d + 1$ -dimensional en una cierta elección de coordenadas, llamada *coordenadas globales* de AdS_{d+1} , se puede escribir como [13]

$$ds^2_{AdS} = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad , \quad (2.35)$$

donde $0 \leq r < \infty$ es la coordenada radial, mientras que $d\Omega_{d-1}^2$ corresponde al elemento de línea de una esfera unitaria $d - 1$ dimensional S^{d-1} y L es el radio de curvatura del espacio-tiempo, que en $d + 1$ dimensiones está dado por $L^2 = -\frac{d(d-1)}{2\Lambda}$ [12]. El escalar de curvatura de este espacio-tiempo es $R = -\frac{d(d+1)}{L^2}$ [12], lo que nos indica que AdS_{d+1} es un espacio-tiempo con curvatura constante negativa.

Así mismo, es posible describir al espacio-tiempo de Anti-de Sitter a través de una elección de coordenadas distinta, en las llamadas *coordenadas de Poincaré*, cuya métrica puede ser escrita como [12]

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \quad , \quad (2.36)$$

donde $\mu = 0, 1, \dots, d - 1$, y las coordenadas toman los rangos $0 \leq r < \infty$ y $-\infty \leq t, x^\mu < \infty$. Estas coordenadas sin embargo cubren solo una región de AdS_{d+1} , conocida como el *Parche de Poincaré* o *la cuña de Poincaré* [12]. Es posible notar directamente de la segunda igualdad en (2.36) que, a r fija, este espacio-tiempo puede interpretarse como Minkowski en d dimensiones espacio-temporales con un cierto factor de escala más una coordenada radial r adicional. Así, podemos pensar que cada valor de r tendrá un espacio-tiempo de Minkowski transversal a esta coordenada. Pictóricamente es posible representar al Parche de Poincaré como se ve en la Figura 2.6. Por otra parte, en esta elección de coordenadas es evidente que $r = 0$ corresponde a una singularidad de coordenadas, pues en este valor la métrica (2.36) diverge. Se dice entonces que en $r = 0$ el espacio-tiempo tiene un *horizonte causal* [12], lo que, como vimos en la Sección 2.2.1, significa que se trata de una superficie que marca la frontera de la región que es causalmente accesible.

A partir del proceso de compactificación conforme discutido en la Sección 2.2.2 es posible construir el diagrama de Penrose de AdS_{d+1} . En la Figura 2.7 se muestra el diagrama de Penrose de AdS_2 , mientras que AdS_{d+1} se obtiene agregando una esfera S^{d-1} en cada punto del diagrama [12]. La región triangular corresponde al parche de Poincaré de la métrica (2.36), donde $r = 0$ el horizonte causal [12]. En las coordenadas (2.36), AdS_{d+1} tiene una frontera conforme ∂AdS_{d+1} [12] localizada en $r \rightarrow \infty$. Es posible verificar que la frontera de AdS_{d+1} es una compactificación conforme de Minkowski d -dimensional [12], lo que, como hemos mencionado antes, significa que

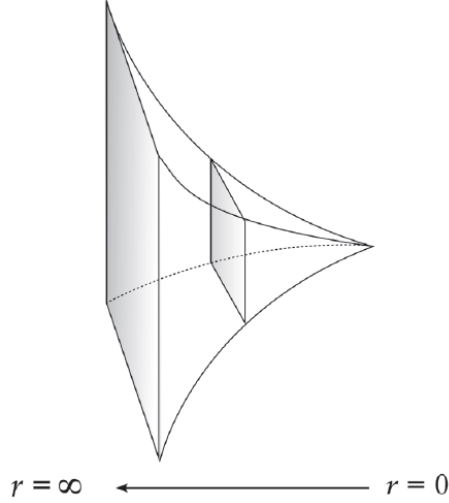


Figura 2.6: Representación del espacio-tiempo AdS en las coordenadas de Poincaré a t fijo. En cada valor de r hay una copia del espacio-tiempo plano de Minkowski. Imagen tomada de [12].

tienen la misma estructura causal.

Finalmente, por razones que quedarán más claras en la discusión del siguiente Capítulo, es importante mencionar al grupo de isometrías de AdS_{d+1} , el cual corresponde al grupo $SO(d, 2)$. Además, se puede mostrar que AdS_{d+1} contiene $(d + 1)(d + 2)/2$ vectores de Killing, por lo que, dada la definición de la Sección 2.1, se dice que Anti-de Sitter es un espacio-tiempo maximalmente simétrico [12].

2.3.1. Agujeros negros en AdS

Para concluir este Capítulo estudiaremos una solución a las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica negativa que describe a un agujero negro, conocida como *Schwarzschild-AdS* [12, 44]. La métrica $(d + 1)$ -dimensional de este espacio-tiempo, en una cierta elección de coordenadas, puede escribirse como [12]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad , \quad (2.37)$$

con

$$f(r) = 1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}} + \frac{r^2}{L^2} \quad , \quad (2.38)$$

donde L es el radio de curvatura de AdS , y μ está dada por [12]

$$\mu = \frac{8\pi GM}{(d - 1)VOL(S^{d-1})} \quad . \quad (2.39)$$

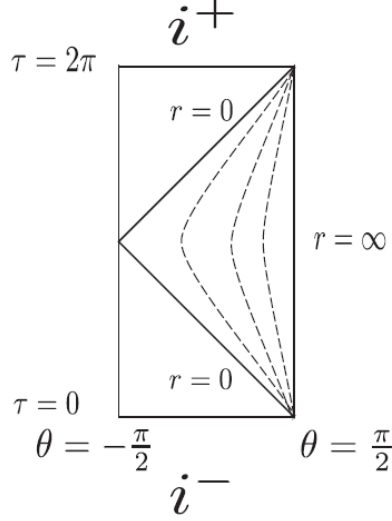


Figura 2.7: Diagrama de Penrose de AdS_2 . En este diagrama i^+ y i^- denotan el infinito futuro y el infinito pasado del espacio-tiempo respectivamente. Imagen tomada de [12].

De esta solución notamos que tomando el límite $r \rightarrow \infty$ obtenemos $f(r) = \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)$, con lo que la métrica de Schwarzschild-AdS se reduce a

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad , \quad (2.40)$$

que es precisamente la métrica de AdS (2.35) en $(d + 1)$ dimensiones. Esto significa que el espacio-tiempo de Schwarzschild-AdS es asintóticamente Anti-de Sitter [12].

Es posible mostrar que el espacio-tiempo de Schwarzschild-AdS comparte algunas características con el espacio-tiempo de Schwarzschild asintóticamente plano descrito previamente: En primer lugar, es resulta que Schwarzschild-AdS tiene una singularidad en $r = 0$ y un horizonte de eventos en $r = r_h$, donde r_h es la raíz más grande de $f(r_h) = 0$. Es posible además construir el espacio-tiempo maximalmente extendido de Schwarzschild-AdS y demostrar que el diagrama de Penrose de dicho espacio-tiempo es el mostrado en la Figura 2.8. Este diagrama nos muestra que la solución de Schwarzschild-AdS tiene dos regiones, I y II, asintóticamente AdS [12]. En particular, se encuentra que dichas regiones asintóticas están conectadas por un agujero de gusano [45]. Finalmente, se puede mostrar que el agujero negro de Schwarzschild-AdS $(d + 1)$ -dimensional tiene un temperatura de Hawking que está dada por [12]

$$T_h = \frac{dr_h^2 + (d - 2)L^2}{4\pi L^2 r_h} \quad , \quad (2.41)$$

donde d es la dimensión espacial. Estos son los elementos básicos de la teoría de la Relatividad General que serán de utilidad en el resto de este trabajo. En particular,

como veremos, los espacios-tiempo asintóticamente AdS serán de mucha relevancia en los Capítulos siguientes.

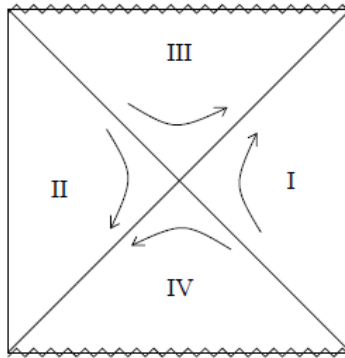


Figura 2.8: Diagrama de Penrose del agujero negro de Schwarzschild-AdS. Imagen tomada de [45].

Capítulo 3

Correspondencia holográfica

En este Capítulo describiremos la llamada correspondencia holográfica [12, 28]. En primera instancia, en la Sección 3.1 presentamos los elementos más importantes de la teoría de cuerdas para este trabajo. Dados estos elementos básicos, en la Sección 3.2 mostraremos una deducción simplificada de la correspondencia holográfica así como ciertos aspectos relevantes de ésta.

3.1. Teoría de cuerdas

El propósito de este trabajo, como hemos mencionado en los Capítulos previos, es presentar una herramienta de cálculo, alternativa a las herramientas usuales en QFT, que nos permita indagar sobre ciertos aspectos de las teorías cuánticas de campo en el régimen de acoplamiento fuerte. Como veremos más adelante, tal herramienta surge en el contexto de la llamada *teoría de cuerdas*, por lo que es conveniente dedicar esta sección a describir los aspectos básicos de dicha teoría.

La teoría cuántica de campos permite una descripción cuántica de las partículas fundamentales así como de las correspondientes interacciones. Por otro lado, la Relatividad General describe clásicamente a la gravedad, como una manifestación de la geometría del espacio-tiempo. En este contexto podemos introducir a la teoría de cuerdas, pues se trata de una ambiciosa teoría que, entre otras cosas, pretende ser un marco unificado que describa a nivel cuántico a todas las partículas e interacciones de la naturaleza [10]. En particular, la teoría de cuerdas intenta describir a la gravedad, por lo que se trata de una de las teorías más prometedoras de gravedad cuántica [10]. Es importante mencionar sin embargo que la teoría de cuerdas es todavía una teoría en construcción y que además incorpora ciertos elementos que hasta ahora no han tenido evidencia experimental [10].

3.1.1. La Cuerda bosónica libre

La idea básica detrás de la teoría de cuerdas es que, a nivel fundamental, la materia y sus interacciones no consisten de partículas puntuales, sino de objetos unidimensionalmente extendidos llamados *cuerdas* [10]. La principal diferencia entre partículas puntuales y cuerdas extendidas unidimensionalmente, es que estas últimas pueden vibrar de formas distintas [13]. A nivel cuántico, cada una de las distintas formas de vibrar de la cuerda da lugar a un tipo específico de partícula [34]. Dicho de otra forma, cada una de las distintas partículas del universo son en realidad diferentes modos de vibrar de la cuerda [10]. Para entender este enunciado es conveniente revisar primero la teoría de cuerdas clásica para luego investigar la cuantización de ésta.

Una cuerda libre moviéndose en el espacio-tiempo barre una superficie (1+1)-dimensional conocida como *hoja de mundo* Σ [12, 10]. La hoja de mundo Σ es parametrizada por dos parámetros, $\sigma = \tau$ que es una coordenada tipo-tiempo y $\sigma^1 = \sigma$ que es una coordenada tipo-espacio [46], con $\sigma \in [0, \sigma_0]$, donde σ_0 será escogido más adelante de forma conveniente. La teoría de cuerdas puede describir dos tipos distintos de cuerdas, *cuerdas cerradas* y *cuerdas abiertas* [12]. Las hojas de mundo de cada tipo de cuerda tienen topologías distintas: La hoja de mundo de una cuerda cerrada describe un cilindro, mientras que la cuerda abierta describe una banda [10], como puede verse en la Figura 3.1.

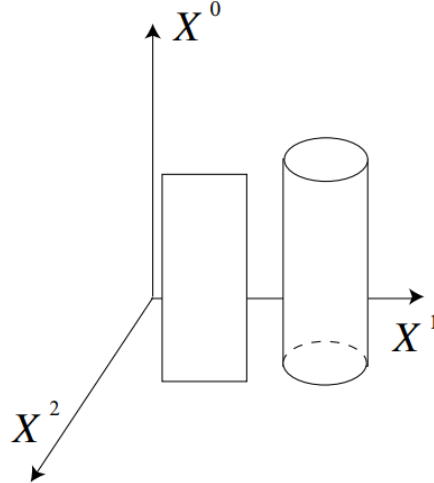


Figura 3.1: La teoría de cuerdas admite dos tipos de cuerda fundamental, cerradas y abiertas, que al moverse en el espacio-tiempo barren una superficie (1+1)-dimensional. Cuerdas cerradas describen cilindros, mientras que cuerdas abiertas describen bandas. Imagen tomada de [46].

Ecuación de movimiento

La hoja de mundo de una cuerda es entonces una superficie, inmersa en un espacio-tiempo D -dimensional, descrita por funciones $X^M(\tau, \sigma)$, con $M = 0, 1, \dots, D - 1$ (ver Fig. 3.2). La acción que describe a una cuerda libre relativista propagándose en un espacio-tiempo plano D -dimensional es la llamada *acción de Nambu-Goto*, dada por [12]

$$\mathcal{S}_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d\sigma^2 \sqrt{-\det(\partial_{\alpha} X^M \partial_{\beta} X^N \eta_{MN})} \quad , \quad (3.1)$$

donde $d\sigma^2 = d\sigma^0 d\sigma^1$, tal que $\alpha, \beta = 0, 1$. α' es relacionado con la longitud característica de la cuerda por $\alpha' = l_s^2$, de modo que el factor $T = 1/2\pi\alpha'$ se interpreta como la tensión de la cuerda [12, 10]. η_{MN} es la métrica del espacio-tiempo plano en D dimensiones espacio-temporales, tal que $M, N = 0, 1, \dots, D - 1$.

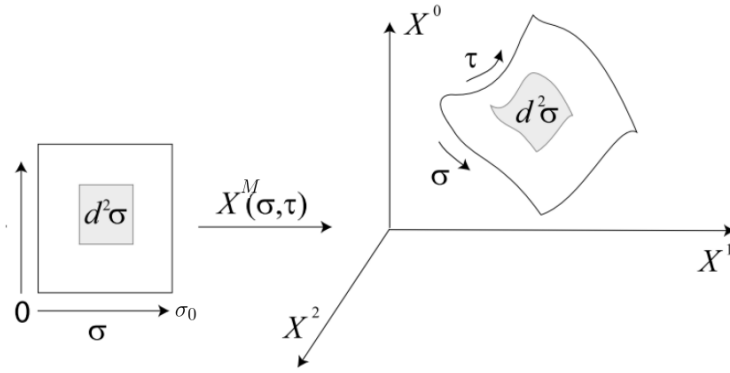


Figura 3.2: Las funciones $X^M(\sigma, \tau)$ describen la superficie de la hoja de mundo inmersa en el espacio-tiempo. Imagen tomada de [46].

En general, debido a la raíz cuadrada en (3.1), resulta complicado trabajar con la acción de Nambu-Goto [10]. Sin embargo, existe otra forma de la acción para la cuerda que clásicamente resulta equivalente a la acción de Nambu-Goto. Introduciendo la métrica intrínseca de la hoja de mundo $h_{\alpha\beta}(\sigma)$ como un campo auxiliar, se encuentra que la dinámica de la cuerda está dada por la llamada *acción de Polyakov* [12, 10],

$$\mathcal{S}_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d\sigma^2 \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^M \partial_{\beta} X^N \eta_{MN} \quad , \quad (3.2)$$

donde $h = \det(h_{\alpha\beta})$ y $h^{\alpha\beta}$ es la matriz inversa de $h_{\alpha\beta}$, tal que $h^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$. El nuevo campo $h_{\alpha\beta}(\sigma)$ es entonces una métrica dinámica en la hoja de mundo, de tal forma que, desde la perspectiva de la hoja de mundo, la acción (3.2) puede interpretarse como la acción de D campos escalares libres no masivos X en la hoja de mundo [10, 34]. En otras palabras, el sistema de una cuerda libre descrita por (3.2) puede reinterpretarse como una teoría cuántica de campos de D campos escalares libres en $(1 + 1)$

dimensiones [10].

En particular, ya que no hay un término cinético para $h_{\alpha\beta}$ en (3.2), se tiene que el tensor de energía-momento en la hoja de mundo tiene que ser cero, $T_{\alpha\beta} = 0$ [46]. Es posible mostrar que $T_{\alpha\beta}$ puede ser escrito como [46]

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^M \cdot \partial_\beta X_M - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^M \cdot \partial_\delta X_M = 0 \quad . \quad (3.3)$$

Esta es la ecuación de movimiento para $h_{\alpha\beta}$, y garantiza que $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{NG}$ [46]. Por otra parte, se encuentra que la acción de Polyakov es invariante ante las siguientes transformaciones :

- Transformaciones de Poincaré en el espacio-tiempo plano D-dimensional, $X^M \rightarrow X'^M = \Lambda^M_N X^N + a^M$, donde Λ^M_N y a^M son las transformaciones de Lorentz y traslaciones espacio-temporales del espacio-tiempo plano D-dimensional, respectivamente [12, 10].
- Reparametrizaciones en la hoja de mundo, también conocidas como difeomorfismos, dadas por $\sigma^\alpha \rightarrow \sigma'^\alpha = f^\alpha(\sigma)$. De tal forma que [12, 10]

$$h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial f^\delta}{\partial \sigma^\beta} h_{\gamma\delta}(\tau', \sigma') \quad y \quad X'^M(\tau', \sigma') = X^M(\tau, \sigma) \quad . \quad (3.4)$$

- Transformaciones de Weyl, dadas por [12, 10].

$$h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \rightarrow e^{2\omega(\tau, \sigma)} h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \quad y \quad X'^M(\tau', \sigma') = X^M(\tau, \sigma), \quad (3.5)$$

donde el parámetro de la transformación depende de las coordenadas $\omega = \omega(\tau, \sigma)$, por lo que se trata de una transformación local.

Las simetrías de Weyl y de reparametrizaciones pueden ser usadas para elegir una norma conveniente en la que la métrica de la hoja de mundo sea diagonal. En particular, eligiendo,

$$h_{\alpha\beta} = e^{2\omega(\tau, \sigma)} \eta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.6)$$

con $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1)$, conocida como *norma conforme*, se encuentra que la acción de Polyakov se simplifica y puede escribirse como, [12, 10]

$$\mathcal{S}_P = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d\sigma^2 (\partial_\tau X^M \partial_\tau X^N - \partial_\sigma X^M \partial_\sigma X^N) \eta_{MN} \quad , \quad (3.7)$$

que describe a D campos escalares libres de Klein-Gordon no masivos en la hoja de mundo [10]. De (3.7) se encuentra que la ecuación de movimiento para X^M está dada por la ecuación de onda libre [12, 10],

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2) X^M \quad . \quad (3.8)$$

Al fijar la norma, sin embargo, se ha perdido la información de $T_{\alpha\beta} = 0$, importante para asegurar que $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{NG}$. Por tanto, es necesario imponer esta condición como constricciones adicionales. En la norma (3.6), la condición (3.3) puede ser escrita como [46]

$$T_{01} = T_{10} = \partial_\tau X^M \cdot \partial_\sigma X_M = 0 \quad , \quad y \quad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} [(\partial_\tau X^M)^2 + (\partial_\sigma X^M)^2] \quad . \quad (3.9)$$

De esto se tiene que la traza del tensor de energía momento es cero, $Tr(T_{\alpha\beta}) = T_{00} - T_{11} = 0$, hecho que resulta una consecuencia directa de la invariancia ante transformaciones de Weyl mencionada previamente [46].

Condiciones de frontera

Para que el problema variacional esté bien definido es necesario especificar las condiciones de frontera. Como mencionamos previamente, es posible considerar dos tipos distintos de cuerdas, abiertas y cerradas, lo que dan lugar a dos tipos de hojas de mundo con diferente topología, por lo que habrán distintas condiciones de contorno para cada tipo de cuerda. Consideremos en primera instancia a las cuerdas cerradas, cuyas hojas de mundo son cilindros (ver Fig. 3.1), de modo que no tienen una frontera: Convenientemente, fijamos $\sigma_0 = 2\pi$, de modo que $\sigma \in [0, 2\pi]$. Para una cuerda cerrada los campos X^M están definidas sobre un círculo S^1 , por lo se que deben cumplir entonces las siguientes condiciones de frontera periódicas [12]

$$X^M(\tau, 0) = X^M(\tau, 2\pi) \quad , \quad \partial_\sigma X^M(\tau, 0) = \partial_\sigma X^M(\tau, 2\pi) \quad , \quad (3.10)$$

así mismo se debe cumplir que $h_{\alpha\beta}(\tau, 0) = h_{\alpha\beta}(\tau, 2\pi)$ [12].

Las cuerdas abiertas, cuyas hojas de mundo son bandas (ver Fig. 3.1), tienen una frontera que está dada por las líneas de mundo que describen los dos extremos de la cuerda: Resulta conveniente fijar $\sigma_0 = \pi$, tal que $\sigma \in [0, \pi]$, de modo que los puntos de los extremos de la cuerda son $\sigma = 0$ y $\sigma = \pi$. Definimos además $\bar{\sigma}$ como uno de los puntos extremos de la cuerda, es decir, $\bar{\sigma} = 0$ o bien $\bar{\sigma} = \pi$. Se encuentra que para una cuerda abierta se tienen dos posibles condiciones de contorno [12, 10];

- Condiciones de frontera de Neumann,

$$\partial_\sigma X^M(\tau, \bar{\sigma}) = 0. \quad (3.11)$$

Esta condición implica que los extremos de la cuerda puedan moverse libremente (ver Fig. 3.3 derecha) [10]. Físicamente, estas condiciones implican que el momento p^M se conserva, lo que significa que se respeta la invariancia ante traslaciones [46].

- Condiciones frontera de Dirichlet,

$$X^M(\tau, \bar{\sigma}) = \bar{x}_0^M \quad . \quad (3.12)$$

Esta condición implica que los extremos de la cuerda permanezcan fijos en el espacio en la posición constante \bar{x}_0^M (ver Fig. 3.3 izquierda) [10], y en particular que no respetan la invariancia ante traslaciones [46].

Ambas condiciones de frontera pueden ser implementadas para cada extremo de la cuerda y para cada una de las D dimensiones del espacio-tiempo de forma independiente, con la única restricción de imponer condiciones de Neumann para la dirección temporal [12].

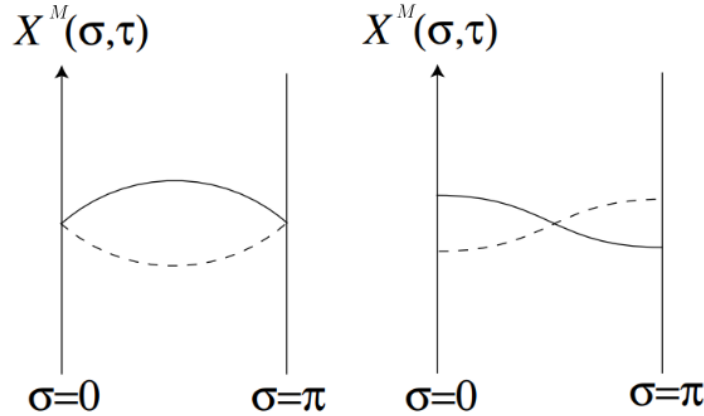


Figura 3.3: Ilustración de las condiciones de frontera Dirichlet (izquierda) y Neumann (derecha). Imagen tomada de [46].

Consideremos, por ejemplo, que una cuerda abierta tiene condiciones de Dirichlet para las coordenadas X^a , con $a = 0, 1, \dots, p$, y condiciones de Neumann para las coordenadas X^I , con $I = p + 1, \dots, D - 1$, es decir,

$$\begin{aligned} \partial_\sigma X^a(\tau, \bar{\sigma}) &= 0 \quad \text{para } a = 0, 1, \dots, p \quad , \\ X^I(\tau, \bar{\sigma}) &= \bar{x}_0^I \quad \text{para } I = p + 1, \dots, D - 1 \quad . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Con las condiciones de frontera (3.13) los extremos de la cuerda pueden deslizarse libremente por las $a = 0, 1, \dots, p$ direcciones pero no en las direcciones transversales restantes (ver Figura 3.4). Dicho de otra forma, los extremos permanecen en una hipersuperficie $(p+1)$ dimensional en el espacio-tiempo en la que estos extremos pueden moverse libremente [10]. Dicha superficie es conocida como *Dp-brana*, donde la etiqueta D es por las condiciones Dirichlet, mientras que p indica el número de dimensiones espaciales de la Dp-brana [10]. Estos objetos resultan muy importantes en el contexto de la teoría de cuerdas, por lo que profundizaremos en su descripción más adelante en el texto.

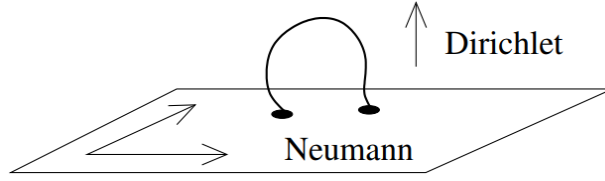


Figura 3.4: Los extremos de la cuerda pueden moverse libremente en la hipersuperficie formada por las coordenadas con condiciones tipo Neumann, pero no en las coordenadas transversales con condiciones tipo Dirichlet. Imagen tomada de [10].

Cuantización de la cuerda bosónica

Para encontrar la solución a las ecuaciones de movimiento es conveniente introducir a las llamadas *coordenadas cono de luz* sobre la hoja de mundo, definidas como [46]

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \quad . \quad (3.14)$$

Así, se definen las derivadas como $\partial_\pm = \partial/\partial\sigma^\pm$. En estas coordenadas la ecuación de movimiento (3.15) toma la siguiente forma [46]

$$\partial_+ \partial_- X^M = 0 \quad , \quad (3.15)$$

Adicionalmente, en estas condiciones las constricciones (3.9) están dadas por [12]

$$T_{\pm\pm} = (\partial_\pm X^M)^2 = 0 \quad , \quad T_{+-} = T_{-+} = 0 \quad . \quad (3.16)$$

La solución clásica más general a la ecuación de movimiento (3.15) puede ser escrita en términos de modos de movimiento izquierdo $X_L^M(\sigma^+)$ y derecho $X_R^M(\sigma^-)$, que son funciones dependientes de σ^+ y σ^- respectivamente, es decir, [12, 10]

$$X^M(\tau, \sigma) = X_L^M(\sigma^+) + X_R^M(\sigma^-) \quad . \quad (3.17)$$

■ Modos de cuerda cerrada.

Para una cuerda cerrada con condición de frontera (3.10), dichos modos de movimiento izquierdo y derecho pueden ser descompuestos en una serie de Fourier [12],

$$\begin{aligned} X_{(L)}^M(\sigma^+) &= \frac{x^M}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^M \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^M}{n} e^{-in\sigma^+} \quad , \\ X_{(R)}^M(\sigma^-) &= \frac{x^M}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^M \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^M}{n} e^{-in\sigma^-} \quad , \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde los factores x^M y p^M son identificados con la posición y el momento total del centro de masa de la cuerda, mientras que $\tilde{\alpha}_n^M$ y α_n^M son los coeficientes de los modos de Fourier izquierdo y derecho respectivamente, y deben ser tales que $\tilde{\alpha}_n^M = (\tilde{\alpha}_{-n}^M)^*$, $\alpha_n^M = (\alpha_{-n}^M)^*$ [10]. Además, en términos de los modos $\tilde{\alpha}_n^M$ y α_n^M las constricciones (3.16) pueden ser escritas como [12]

$$L_n = \tilde{L}_n = 0 \quad , \quad (3.19)$$

donde se define [12]

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m,M} \cdot \alpha_m^M \quad , \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m,M} \cdot \tilde{\alpha}_m^M \quad . \quad (3.20)$$

En particular, el modo $\tilde{\alpha}_0^M = \alpha_0^M$ es definido como [10]

$$\tilde{\alpha}_0^M = \alpha_0^M = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^M \quad , \quad (3.21)$$

con p^M el momento total de la cuerda. Esto implica que, por ejemplo, L_0 puede ser escrito como [46]

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m,M} \cdot \alpha^M p^2 \quad . \quad (3.22)$$

De este modo las constricciones (3.19) para L_0 y \tilde{L}_0 tienen una interpretación especial: De la relación de dispersión relativista sabemos que la masa M de la cuerda debe cumplir

$$M^2 = -p^M p_M \quad . \quad (3.23)$$

Combinando (3.23) y (3.22) se encuentra que la relación de la masa M , de la cuerda cerrada, con los modos $\tilde{\alpha}_n^M$ y α_n^M está dada por [10]

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{-n} \quad . \quad (3.24)$$

Para proceder con el proceso de cuantización canónica de la cuerda cerrada con las coordenadas X^M , proceso conocido como cuantización covariante, introducimos el momento canónico conjugado a X^M , que está dado por [10]

$$\Pi^M = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^M \quad , \quad (3.25)$$

donde hemos usado $\dot{X}^M = \partial_\tau X^M$. Con esto es posible proceder con el proceso de cuantización canónica de la cuerda cerrada: Se promueven X^M y Π^M a operadores y se imponen las relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales, tal que [12]

$$\left[\hat{X}^M(\tau, \sigma), \hat{\Pi}^M(\tau, \sigma') \right] = i\eta^{MN} \delta(\sigma - \sigma') \quad . \quad (3.26)$$

Los modos de la serie de Fourier de X^M son también promovidos a operadores, de manera que al introducir relaciones de conmutación (3.26) en las series (3.18), se obtienen las siguientes relaciones de conmutación [10]

$$[\hat{x}^M, \hat{p}_N] = i\delta_N^M \quad y \quad [\hat{\alpha}_n^M, \hat{\alpha}_m^N] = [\hat{\tilde{\alpha}}_n^M, \hat{\tilde{\alpha}}_m^N] = n\eta^{MN}\delta_{n+m,0} \quad . \quad (3.27)$$

Las relaciones de conmutación para \hat{x}^M y \hat{p}_N son los esperados para operadores que describen la posición y el centro de masa de la cuerda, mientras que las relaciones de conmutación para $\hat{\alpha}_m^M$ y $\hat{\tilde{\alpha}}_m^M$ son las relaciones de operadores de creación y aniquilación [10]. Para ver esto es conveniente definir a los siguientes operadores [10],

$$\hat{a}_n^M = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\alpha}_n^M \quad y \quad \hat{a}_n^{M\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\alpha}_{-n}^M \quad \text{para } m > 0 \quad . \quad (3.28)$$

que dan lugar a la relación de conmutación familiar $[\hat{a}_n^M, \hat{a}_m^{M\dagger}] = \eta^{MN}\delta_{nm}$ [10]. De esta forma, cada campo escalar X^M da lugar a dos torres infinitas de operadores de creación y aniquilación, una para cada modo de movimiento α_n y $\tilde{\alpha}_n$, con $\hat{\alpha}_n$ actuando como operador de aniquilación para $n > 0$ y como operador de creación para $n < 0$, y lo mismo para $\tilde{\alpha}_n$ [10].

Con esto podemos construir el espectro de la cuerda bosónica libre: Definiendo el estado de base de la cuerda cerrada libre $|0; p\rangle$, tal que

$$\hat{\alpha}_n^M |0; p\rangle = \hat{\tilde{\alpha}}_n^M |0; p\rangle = 0 \quad \text{para } n > 0 \quad , \quad (3.29)$$

donde p etiqueta el momento total del estado base, el cual es eigenvalor del operador de momento, es decir,

$$\hat{p}^M |0; p\rangle = p^M |0; p\rangle \quad . \quad (3.30)$$

De esta forma, es posible construir el espacio de Fock actuando sobre el estado base con los operadores de creación $\hat{\alpha}_n^M$ y $\hat{\tilde{\alpha}}_n^M$ con $n < 0$. Un estado general $|\Phi; p\rangle$ de la teoría de la cuerda cerrada libre puede ser obtenido entonces al actuar con una combinación de operadores de creación sobre el estado base [10],

$$|\Phi; p\rangle = \hat{\alpha}_{m_1}^{M_1} \hat{\alpha}_{m_2}^{M_2} \dots \hat{\tilde{\alpha}}_{m_1}^{M_1} \hat{\tilde{\alpha}}_{m_2}^{M_2} \dots |0; p\rangle \quad , \quad (3.31)$$

donde p etiqueta el momento del estado $|\Phi; p\rangle$, tal que [46]

$$\hat{p}^M |\Phi; p\rangle = p^M |\Phi; p\rangle \quad . \quad (3.32)$$

Cada estado en el espacio de Fock sobre la hoja de mundo es un estado excitado distinto de la cuerda cerrada y, desde el punto de vista del espacio-tiempo, cada uno de estos estados excitados de la cuerda tiene la interpretación de ser un tipo diferente de partícula [10, 47].

Existe, sin embargo, un problema con el espacio de Fock que hemos construido para la cuerda cerrada: De las relaciones de conmutación (3.27), se tiene que $[\hat{\alpha}_n^0, \hat{\alpha}_{-n}^0] = [\hat{\alpha}_n^0, \hat{\alpha}_{-n}^0] = -n$, lo cual conduce a que estados con un número impar de operadores de componente temporal son estados de norma negativa [46]. Por ejemplo, para el estado $\hat{\alpha}_{-1}^0|0; p\rangle$ se tiene que [10]

$$\langle p'; 0 | \hat{\alpha}_1^0 \hat{\alpha}_{-1}^0 | 0; p \rangle \sim -\delta^D(p - p') \quad .$$

Los estados de norma negativa son comúnmente conocidos como *fantasmas* [10]. Estos no son estados físicos, pues conllevan a problemas como la violación de la causalidad [46].

Además, para obtener el espectro físico de estados de excitación de la cuerda es necesario imponer a nivel cuántico las constricciones (3.19) [12]. Para promover (3.20) a operadores \hat{L}_n y $\tilde{\hat{L}}_n$ que estén bien definidos, es necesario definir el operador con componte temporal mediante [10]

$$\hat{L}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-m} \cdot \hat{\alpha}_m + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^2 \quad , \quad \tilde{\hat{L}}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-m} \cdot \hat{\alpha}_m + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^2 \quad . \quad (3.33)$$

Con esto, se tiene que un estado físico $|\text{fis}\rangle$ del espacio de Fock debe cumplir que [10]

$$(\hat{L}_0 - a)|\text{fis}\rangle = (\tilde{\hat{L}}_0 - \hat{a})|\text{fis}\rangle = 0 \quad , \quad (3.34)$$

para alguna a constante. En particular, como vimos antes, a nivel clásico las constricciones L_0 y \tilde{L}_0 determinan la masa de los modos de movimiento, a nivel cuántico estas constricciones determinan la masa de los estados de la cuerda cerrada, tal que la condición de masa (3.24) toma la siguiente forma [10]

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n \cdot \hat{\alpha}_{-n} - a \right) = \left(\frac{4}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n \cdot \hat{\alpha}_{-n} - a \right) \quad . \quad (3.35)$$

Por otro lado, los estados de norma negativa aparecen también en las llamadas teorías de norma, que hemos visto en la Sección 1.2.4, y pueden ser eliminados al fijar las simetrías de norma. En la teoría de la cuerda libre, descrita por la acción (3.2), las simetrías de norma son los difeomorfismos (3.4) y las simetrías de Weyl (3.5), y son fijadas al elegir la norma conforme (3.6). Sin embargo, es posible mostrar que la acción (3.2) tiene todavía a una cierta reparametrización como simetría de norma remanente [10]. En particular, se encuentra que la acción de Polyakov es invariante ante la siguiente transformación local [10]

$$\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+(\sigma^+) \quad , \quad \sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^-(\sigma^-) \quad . \quad (3.36)$$

Por tanto, es posible hacer una elección de norma adicional que fije dicha simetría de norma remanente. La mejor forma de hacer esto es eligiendo la llamada *norma de cono*

de luz [10]. Para esto introducimos a las coordenadas cono de luz espacio-temporales, definidas por [46]

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}) \quad . \quad (3.37)$$

Así, las D coordenadas espacio-temporales X^M consisten en las coordenadas nulas X^\pm y $D - 2$ coordenadas transversales X^i , con $i = 1, \dots, D - 2$. Con esto, se fija la norma cono de luz como [10]

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau \quad . \quad (3.38)$$

Se encuentra que con esta norma las constricciones clásicas (3.16) pueden ser resueltas de forma directa [10]. Más aún, es posible mostrar que con esta elección de norma es posible construir un espacio de Fock para la cuerda cerrada libre sin de estados de norma negativa [46].

La cuantización canónica de la cuerda cerrada con la norma (3.38), proceso conocido como cuantización cono de luz, puede llevarse a cabo de manera parecida a la cuantización covariante. Se define al estado base de la cuerda, $|0; p\rangle$, tal que [10]

$$\hat{\alpha}_n^i |0; p\rangle = \tilde{\alpha}_n^i |0; p\rangle = 0 \quad \text{para } n > 0 \quad . \quad (3.39)$$

donde $\hat{\alpha}_n^i$ y $\tilde{\alpha}_n^i$ son los operadores de aniquilación en las direcciones transversales, con $i = 1, 2, \dots, D - 2$. El espacio de Fock es construido entonces al operar sobre el estado base con los operadores de creación en las direcciones transversales $\hat{\alpha}_{-n}^i$ y $\tilde{\alpha}_{-n}^i$ con $n < 0$ [10]. La diferencia con la cuantización covariante descrita previamente es entonces que en la cuantización del cono de luz solo se actúa con los operadores de creación y aniquilación con índice espacial $i = 1, 2, \dots, D - 2$, lo cual asegura que, por construcción, los estados del espacio de Fock sean de norma positiva [10].

Resulta útil introducir a los llamados operadores de nivel, definidos por [46]

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i \quad , \quad \tilde{N} = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i \quad . \quad (3.40)$$

Con esto, es posible mostrar que en la cuantización del cono de luz se encuentra que la condición de masa (3.35), conocida como relación de nivel, toma la siguiente forma [10]

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\hat{N} - \frac{D-2}{24} \right) = \left(\tilde{N} - \frac{D-2}{24} \right) \quad , \quad (3.41)$$

con D la dimensión del espacio-tiempo. Esta relación permite describir el espectro de la cuerda cerrada libre. Consideremos, en primer lugar, el estado base de la cuerda cerrada definido en (3.39), es decir, el estado de la cuerda sin excitar tal que $N = \tilde{N} = 0$. De la condición (3.41) se encuentra que dicho estado tiene una masa dada por

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} \frac{D-2}{6} . \quad (3.42)$$

Se tiene entonces que el estado base de la cuerda $|0; p\rangle$ es un estado de masa $M^2 < 0$. Las partículas con esta condición son comúnmente conocidas como *taquiones* [10]. Si bien para este trabajo no cabe abordar tal discusión, debemos mencionar que dichos estados taquiónicos suponen una inestabilidad en la teoría [12, 10].

Consideremos ahora a los primeros estados excitados tales que $N = \tilde{N} = 1$, que están dados por [10]

$$|\Omega^{ij}; p\rangle = \hat{\alpha}_{-1}^i \hat{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle , \quad (3.43)$$

con $i, j = 1, 2, \dots, D-2$. Estos son $(D-2)^2$ estados de partícula. Los operadores $\hat{\alpha}^i$ y $\hat{\alpha}^j$ transforman como vectores bajo el grupo de transformaciones $SO(D-2)$, de modo que los estados $|\Omega^{ij}; p\rangle$ son tensores de rango dos que se obtienen del producto tensorial de dos vectores, uno de movimiento derecho y otro de movimiento izquierdo [46]. De la condición (3.41) se encuentra que estos estados tienen una masa dada por

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(1 - \frac{D-2}{24}\right) . \quad (3.44)$$

Es posible mostrar que, para que los estados $|\Omega^{ij}; p\rangle$ respeten la invariancia ante las transformaciones de Lorentz del espacio-tiempo plano D dimensional, dichos estados deben ser no masivos [10]. De la relación de masa (3.44) es claro que si $M^2 = 0$ entonces necesariamente $D = 26$. Por tanto, tenemos que la teoría de la cuerda libre en el espacio-tiempo de Minkowski es consistente solo en $D = 26$ dimensiones espacio-temporales [12]. El valor $D = 26$ es conocido como la dimensión crítica de la teoría de la cuerda bosónica [10].

Los estados $|\Omega^{ij}; p\rangle$ son entonces tensores de rango dos, y es posible mostrar que estos pueden descomponerse en un tensor simétrico sin traza, un tensor antisimétrico y un escalar [12]. Cada uno de estos son identificados con campos cuánticos en el espacio-tiempo, y son comúnmente denotados como $G_{MN}(X)$, $B_{MN}(X)$ y $\Phi(X)$, respectivamente [10]. El campo $G_{MN}(X)$ es identificado con el *Gravitón*, mientras que el campo escalar $\Phi(x)$ con el *Dilatón*. Por su parte el campo $B_{MN}(X)$ es conocido como el *campo de Kalb-Ramond* [12, 10]. En particular, resulta que la partícula asociada al campo $G_{MN}(X)$, el gravitón, es una partícula no masiva de espín 2, lo cual resulta particularmente interesante ya que, por argumentos que no cabe discutir en este texto, se encuentra que cualquier teoría de partículas no masivas de espín 2 interactuantes debe ser equivalente a la Relatividad General [10]. Esto nos indica que una teoría con cuerdas cerradas es una teoría con gravedad, donde el campo $G_{MN}(X)$ es identificado con la métrica del espacio-tiempo [10], lo que implica que el espacio-tiempo es dinámico [47].

▪ **Modos de cuerda abierta.**

Describamos ahora a una cuerda abierta. Antes mencionamos que la solución clásica general a la ecuación de movimiento (3.15) puede ser escrita en términos de modos de movimiento izquierdo y derecho, $X^M(\tau, \sigma) = X_L^M(\sigma^+) + X_R^M(\sigma^-)$, y podemos desarrollar estos modos en series de Fourier como [10]

$$\begin{aligned} X_{(L)}^M(\sigma^+) &= \frac{x^M}{2} + \alpha' p^M \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^M}{n} e^{-in\sigma^+} \quad , \\ X_{(R)}^M(\sigma^-) &= \frac{x^M}{2} + \alpha' p^M \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^M}{n} e^{-in\sigma^-} \quad . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sin embargo, las condiciones de frontera de la cuerda abierta imponen ciertas relaciones a los modos de movimiento. Consideremos, por ejemplo, las condiciones (3.13), es decir, una cuerda abierta con condiciones de Dirichlet para las coordenadas X^a , con $a = 0, 1, \dots, p$, y condiciones de Neumann para las coordenadas X^I , con $I = p + 1, \dots, D - 1$. Es posible mostrar que de estas condiciones de frontera se tiene lo siguiente:

- Las condiciones de Neumann, $\partial_\sigma X^a(\tau, \bar{\sigma}) = 0$, implican que [10]

$$\alpha_n^a = \tilde{\alpha}_n^a \quad .$$

- Las condiciones de Dirichlet, $X^I(\tau, \bar{\sigma}) = \bar{x}_0^I$, implican que [10]

$$x^I = \bar{x}_0^I \quad , \quad p^I = 0 \quad , \quad \alpha_n^I = -\tilde{\alpha}_n^I \quad .$$

Las condiciones de frontera para la cuerda abierta implican entonces que solo se tiene un conjunto de modos de movimiento, supongamos α_n^M , de forma que los modos $\tilde{\alpha}_n^M$ son determinados por las condiciones de frontera [10].

Al igual que con la cuerda cerrada, para cuantizar la cuerda abierta es conveniente introducir a las coordenadas espacio-temporales como de luz, sobre la Dp-brana, que definimos como [10]

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^p) \quad . \quad (3.46)$$

Con esto, es posible realizar el proceso de cuantización canónica igual que para la cuerda cerrada. Es posible mostrar que la condición de masa de la cuerda abierta está dada por [10]

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i + \sum_{i=p+1}^{D-1} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i - \frac{D-2}{24} \right) \quad , \quad (3.47)$$

donde, al igual que en la cuerda cerrada, se encuentra que la teoría es consistente solo con $D = 26$ dimensiones espacio-temporales [10]. Esto refleja el hecho de que una teoría de cuerdas abiertas necesariamente incluye cuerdas cerradas, ya que, al considerar interacciones entre las cuerdas, una cuerda abierta puede unirse y formar una cuerda cerrada [10]. La primera suma en (3.47) es sobre los modos paralelos a la Dp-brana, mientras que la segunda suma es sobre los modos perpendiculares a la Dp-brana.

Podemos describir ahora el espectro de la cuerda abierta con las condiciones de frontera (3.13). El estado base de la cuerda abierta, $|0; p\rangle$, es definido como

$$\hat{\alpha}_n^i |0; p\rangle = 0 \quad \text{para } n > 0 \quad , \quad (3.48)$$

con $i = 1, \dots, p-1, p+1, \dots, D-1$. De la relación de masa (3.47) se encuentra que el estado base tiene una masa dada por

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} \quad , \quad (3.49)$$

lo que indica que el estado base de la cuerda abierta es un estado taquiónico, y se puede mostrar que es un estado confinado en la Dp-brana [10]. Los primeros estados excitados, corresponden a estados sin masa [10], y son de dos tipos distintos:

- Oscilaciones longitudinales en la Dp-brana, $\hat{\alpha}_{-1}^a |0, k\rangle$, con $a = 1, \dots, p-1$, que corresponden a bosones de norma $A^a(X)$ con grupo de simetría $U(1)$ [10], cuya partícula asociada identificamos como el fotón.
- Oscilaciones transversales a la brana, $\hat{\alpha}_{-1}^I |0, k\rangle$, con $I = p+1, \dots, D-1$, que corresponden a campos escalares $\phi^I(X)$ confinados en la brana [10].

Los campos escalares $\phi^I(X)$ tienen la interpretación de ser fluctuaciones de la Dp-brana en las direcciones transversales, lo que parece indicarnos que la Dp-brana, más que solo una hipersuperficie geométrica, es un objeto dinámico de la teoría [10]. Con todo esto, hemos visto que la cuantización de la teoría de cuerdas da lugar a diferentes campos, cada uno de los cuales corresponde a campos de espín entero, por lo que a dicha descripción se le conoce como *teoría de cuerdas bosónica* [10].

Las interacciones entre cuerdas pueden ser introducidas geoméricamente postulando que dos cuerdas pueden unirse en una sola cuerda, y que por tanto una cuerda puede dividirse en dos cuerdas [47]. La intensidad de dichas interacciones está controlada por la constante de interacción de las cuerdas $g_s = g_c = g_a^2$ [12], donde g_c y g_a son las constantes para las cuerdas abiertas y cerradas respectivamente [12]. Resulta que en la teoría de cuerdas la constante de acoplamiento está relacionada con el campo dilatón como [47]

$$g_s = e^{\Phi_\infty} \quad , \quad (3.50)$$

donde Φ_∞ es el valor del campo del dilatón en infinito, es decir, $\Phi_\infty = \lim_{X \rightarrow \infty} \Phi(X)$ [10, 47]. Por tanto, se tiene que la constante de acoplamiento de las cuerdas no es un parámetro libre, si no que depende del campo $\Phi(X)$ [10].

Dp-branas

Las Dp-branas aparecieron en el texto como condiciones de frontera para las cuerdas abiertas, sin embargo, hemos visto que los campos escalares ϕ que surgen al cuantizar la cuerda abierta con condiciones Dirchlet pueden interpretarse como fluctuaciones transversales de la brana, lo que nos indica que las branas son en realidad objetos dinámicos. Así, además de cuerdas, en general la teoría de cuerdas parece incluir objetos dinámicos p-dimensionales [10].

Si las Dp-branas son objetos dinámicos entonces debemos tener una acción que codifique su movimiento. En el espacio-tiempo, una Dp-brana p dimensional barre una hipersuperficie $p + 1$ dimensional conocida como *volumen de mundo*. Considerando la simetría bajo Lorentz y bajo reparametrizaciones en el volumen de mundo, es natural considerar una extensión de la acción de Nambu-Goto (3.1), en el espacio-tiempo de Minkowski D -dimensional, con un número p de dimensiones espaciales, es decir [10],

$$\mathcal{S}_{Dp} = -T_{Dp} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(\partial_a X^M \partial_b X^N \eta_{MN})} \quad , \quad (3.51)$$

con $M, N = 0, 1, \dots, D - 1$ y donde $\xi = \xi^a$, con $a, b = 0, 1, \dots, p$, son las coordenadas del volumen de mundo de la Dp-brana, tal que $d^{p+1}\xi = d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^p$. T_{Dp} se interpreta como la tensión de la Dp-brana y está dada por [47]

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}} \quad . \quad (3.52)$$

Para una Dp-brana plana infinita, podríamos elegir $X^a = \xi^a$, con $a, b = 0, 1, \dots, p$, de modo que, como se mencionó previamente, las coordenadas dinámicas transversales pueden ser identificadas con las fluctuaciones ϕ^I , mediante $X^I(\xi) = 2\pi\alpha'\phi(\xi)$, con $I = p + 1, \dots, D - 1$ [10].

Como hemos mencionado antes, la cuantización de la cuerda abierta da lugar a campos de norma A^a , con $a = 1, \dots, p - 1$, con grupo de simetría $U(1)$. Es posible demostrar además que el extremo de la cuerda tiene carga eléctrica, de tal forma que se acopla a los campos A^a sobre la Dp-brana [12, 10]. Considerando la dinámica de los campos de norma A^a sobre la Dp-brana y las fluctuaciones de la propia Dp-brana ϕ^I , se encuentra la acción que codifica la dinámica de la Dp-brana en el espacio-tiempo plano es la llamada *acción de Dirac-Born-Infeld*, o *acción DBI*, y está dada por [12, 10]

$$\mathcal{S}_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(\gamma_{ab} + 2\pi\alpha'F_{ab})} \quad , \quad (3.53)$$

donde $\gamma_{ab} = \partial_a X^I \partial_b X^J \eta_{IJ}$ y F_{ab} es el tensor de intensidad del campo A^a . Si desarrollamos (3.53) y consideramos intensidades pequeñas del campo, es decir, conservamos solo los términos cuadráticos de la serie, se obtiene [10]

$$\mathcal{S} = -(2\pi\alpha')^2 T_p \int d^{p+1}\xi \left(\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{2} \partial_a \phi^I \partial^a \phi^I \right), \quad (3.54)$$

donde se han reescalado las posiciones para definir al campo escalar como $\phi^I = X^I/2\pi\alpha'$ [10]. Así, resulta que la dinámica de la Dp-brana, descrita por la acción (3.54), describe la teoría libre de Maxwell, en las p dimensiones de la Dp-brana, acoplada a un campo escalar no masivo [10].

3.1.2. Teoría de Cuerdas Tipo IIB

La descripción de la teoría de cuerdas bosónica tiene al menos dos problemas principales. En primera instancia hemos visto que al cuantizarla aparecen estados taquiónicos, que suponen cierta inestabilidad en la teoría. El segundo problema es que dicha teoría no incluye la descripción de campos fermiónicos, necesarios para modelar a las partículas observadas en la naturaleza [12]. Se puede demostrar que estos problemas son resueltos al considerar a la llamada *teoría de Supercuerdas* [12].

Es posible construir teorías de cuerdas que incluyan grados de libertad fermiónicos en la hoja de mundo, dando como resultado teorías supersimétricas [10]. En particular, por razones que quedarán claras en la Sección siguiente, en este trabajo estamos interesados en una teoría de cuerdas supersimétrica conocida como *teoría de supercuerdas Tipo IIB* [12]. Dicha teoría puede ser obtenida al agregar los grados de libertad fermiónicos en la hoja de mundo de la acción de Polyakov (3.2) [47]. Debido a limitaciones de tiempo, en este texto no desarrollaremos los detalles de dicha teoría, en su lugar, resaltaremos solo algunas de sus propiedades más importantes: La teoría de supercuerdas Tipo II B contiene cuerdas cerradas y abiertas, así como Dp-branas estables con $p = 0, 2, 3, 6, 8$ [10]. Al cuantizar dicha teoría se encuentran los siguientes resultados:

- La teoría es consistente en $D = 10$ dimensiones con supersimetría $\mathcal{N} = 2$, correspondiente a 32 supercargas [10].
- No hay estados taquiónicos en el espectro [10].
- El espectro contiene campos bosónicos no masivos, así como campos fermiónicos no masivos. En particular, el espectro contiene al campo $G_{MN}(X)$, el gravitón, al $B_{MN}(X)$, el campo de Kalb-Ramond, y $\Phi(X)$, el dilatón [10].

En el límite de bajas energías, tales que $E \ll l_s^2$, la dinámica de la teoría de supercuerdas tipo IIB puede ser descrita por una acción efectiva, que involucra solo a los campos no masivos, que está dada por [34]

$$\mathcal{S}_{IIB,eff} = \mathcal{S}_{SUGRA} + S(\alpha') \quad , \quad (3.55)$$

donde el término \mathcal{S}_{SUGRA} , dominante a bajas energías, es la acción de la llamada *supergravedad IIB* en $D = 10$ dimensiones espacio-temporales [12, 34]. La teoría de supergravedad puede ser entendida como la teoría gravitacional de Einstein acoplada a otros a campos de materia, de modo que podemos escribir la acción de supergravedad como [47]

$$\mathcal{S}_{sugra} = \frac{1}{16\pi G} \int d^{9+1}x \sqrt{-g_{MN}} \mathcal{R} + \dots \quad , \quad (3.56)$$

donde g_{MN} , con $M, N = 0, 1, \dots, 9$, es la métrica del espacio-tiempo, R es el escalar de Ricci, G es la constante de Newton, y los puntos suspensivos indican los campos de materia. En la teoría de supergravedad IIB se encuentra además que la constante de Newton 10-dimensional puede ser escrita en términos de la longitud de las cuerdas ℓ_s y su constante de acoplamiento g_s como [47]

$$16\pi G_N = \tilde{k}^2 = (2\pi)^7 g_s^2 \ell_s^8 \quad . \quad (3.57)$$

Las soluciones a las ecuaciones de movimiento de supergravedad IIB, en particular, proporcionan el espacio-tiempo en el cual se pueden propagar las cuerdas [34]. El espacio-tiempo de Minkowski 9+1 dimensional, por ejemplo, es una solución a dichas ecuaciones de movimiento [34]. Por otra parte, el término $S(\alpha')$ en (3.55) contiene una serie infinita de correcciones a la gravedad de Einstein [34]. Lo importante a tener en cuenta es que a bajas energías ($E \ll l_s^2$) la teoría de supercuerdas tipo IIB se reduce a la supergravedad IIB [34].

3.2. La correspondencia AdS/CFT

Dados algunos de los elementos básicos de la Relatividad General, la teoría cuántica de campos y la teoría de cuerdas, finalmente podemos dar paso a la descripción de la pieza clave de esta tesis. Como hemos mencionado previamente, en este trabajo buscamos describir una herramienta de cálculo que surge en el contexto de la teoría de cuerdas, esto es, la llamada *correspondencia AdS/CFT*, a la cual dedicaremos esta Sección. Un punto importante para entender a la correspondencia AdS/CFT es el concepto de *dualidad*, el cual es usado para describir la conexión entre dos teorías, aparentemente distintas, que resultan ser totalmente equivalentes, lo que significa que son dos descripciones alternativas de un *mismo* sistema físico [34]. La correspondencia AdS/CFT es pues un tipo de dualidad que, como describiremos a continuación, establece la equivalencia entre una cierta teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo plano d dimensional con una teoría de cuerdas en un espacio-tiempo curvo $d + 1$ dimensional [12], por lo que es también conocida como la *correspondencia holográfica*.

Si bien lo que establece la correspondencia AdS/CFT es en sí mismo sorprendente, resulta ser además una herramienta de cálculo sumamente útil pues, como veremos en la siguiente discusión, la correspondencia AdS/CFT es una dualidad que relaciona una teoría con acoplamiento fuerte con una teoría con acoplamiento débil [12], es decir, si la teoría cuántica de campos está fuertemente acoplada, la teoría gravitacional dual es clásica y débilmente curvada. De esta manera, ciertos aspectos de las teorías cuánticas de campos en el régimen de acoplamiento fuerte pueden ser calculados de forma más sencilla desde el marco de la teoría gravitacional dual [12]. Es por esto que la correspondencia AdS/CFT es actualmente una herramienta muy prometedora en el estudio de las teorías de campos fuertemente acopladas [47].

3.2.1. Deducción de la correspondencia

La correspondencia AdS/CFT es una conjetura propuesta en 1997 por Juan Maldacena [48] mientras estudiaba Dp-branas y agujeros negros en la teoría de cuerdas [47]. En la siguiente discusión pretendemos describir las ideas esenciales que permiten realizar una deducción heurística de dicha correspondencia. Esta deducción, como mostraremos a continuación, puede ser motivada a partir de la descripción de la teoría de cuerdas en presencia de Dp-branas.

Perspectiva de cuerdas abiertas

Tal y como hemos descrito previamente, desde la perspectiva de cuerdas abiertas, las Dp-branas son objetos extendidos en p direcciones espaciales e infinitamente delgadas en las $9 - p$ direcciones restantes, tal que sus excitaciones se describen a través de cuerdas abiertas, cuyos extremos pueden moverse libremente únicamente en las p direcciones de la brana. Dicho esto, podemos comenzar esta construcción teórica considerando una configuración particular para las Dp-branas en el contexto de la teoría de cuerdas tipo IIB en el espacio-tiempo plano en $(9 + 1)$ dimensiones espacio-temporales: Tomemos en primer lugar dos branas paralelas separadas una distancia r , etiquetadas como Dp-brana 1 y Dp-brana 2. En esta configuración habrán cuatro tipos de cuerda abierta, ya que una cuerda puede tener ambos extremos sujetos a la misma brana, 1 o 2, o bien puede tener un extremo sujeto a cada brana [10] (ver Figura 3.5). La cuantización de esta configuración da lugar a dos campos de norma no masivos para las cuerdas con dos extremos fijos en la misma brana, que podemos etiquetar como $(A_K)^1_1$ y $(A_K)^2_2$, con $K = 0, \dots, p$, para cuerdas fijadas a la brana 1 y 2 respectivamente [10, 47]. Por su parte, las cuerdas con extremos fijos en Dp-branas distintas dan lugar a dos campos de norma adicionales, que etiquetamos como $(A_K)^1_2$ y $(A_K)^2_1$, con la diferencia de ser campos masivos, con una masa dada por $m = r/2\pi\alpha'$, con r la distancia entre las branas [47]. Particularmente, cuando $r = 0$ se obtienen cuatro campos no masivos $(A_K)^a_b$, con $a, b = 1, 2$, y es posible mostrar que éstos corresponden a los campos de norma de un grupo de norma no abeliano $U(2)$ [10, 47]. Adicionalmente, dicha configuración dará lugar a $(9 - p)$ campos escalares sin masa ϕ^I con $I = 1, \dots, 9 - p$ [10, 47], que podemos escribir como una matriz 2×2 ,

es decir, $(\phi^I)^a_b$, la cual transforma en la representación adjunta del grupo $U(2)$ [47].

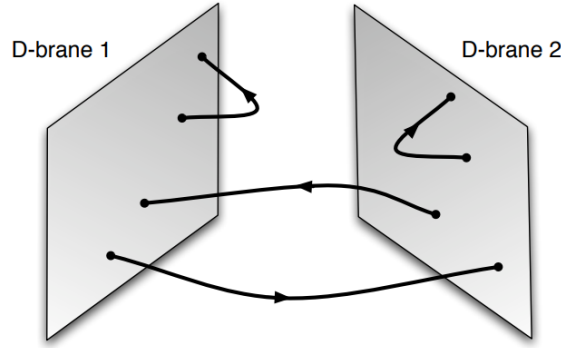


Figura 3.5: En una configuración de dos Dp -branas paralelas aparecerán cuatro tipos de cuerdas; dos sujetas a una misma brana, 1 o 2, y dos sujetas a branas distintas. Imagen tomada de [47].

Tomemos ahora la configuración de N Dp -branas paralelas arbitrariamente cercanas entre sí, es decir en el mismo lugar del espacio. La cuantización de esta configuración dará lugar a campos de norma no masivos del grupo de norma no abeliano $U(N)$, es decir, $(A_K)^m_n$, con $m, n = 1, \dots, N$, $K = 0, \dots, p$, así como $(9 - p)$ campos escalares sin masa $(\phi^I)^m_n$, con $I = 1, \dots, 9 - p$, los cuales transforman en la representación adjunta de $U(N)$ [10, 47]. Esto nos indica que la dinámica de una pila de N Dp -branas es descrita por una teoría de norma no abeliana [34].

En particular, consideremos la configuración de N D3-branas paralelas, que da lugar a N^2 campos de norma no abelianos sin masa $A_\mu \equiv A_\mu^a T_a$, con $a = 1, \dots, N^2$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, seis campos escalares no masivos $\phi^i = \phi^{ia} T_a$, con $i=1, \dots, 6$, y cuatro espinores no masivos λ_α^b , con $b = 1, \dots, 4$, $\alpha = 1, 2$ [47], todos en la representación adjunta de $U(N)$ de modo que pueden ser escritos como matrices $N \times N$ [47]. En el límite de bajas energías $E \ll l_s^2$, la parte bosónica de la acción efectiva que describe esta configuración de D3-branas corresponde a la versión no abeliana de la acción DBI (3.54) [34]. Si desarrollamos esta acción y consideramos solo intensidades pequeñas del campo de norma $F^{\mu\nu}$, la parte bosónica de la acción para dichas D3-branas puede escribirse como [10, 47]

$$\mathcal{S}_a = -(2\pi l_s^2)^2 T_{D3} \int d^{3+1} \xi \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^I D^\mu \phi^I + [\phi^i, \phi^j] + O(\alpha') \right) , \quad (3.58)$$

donde

$$T_{D3} = \frac{1}{(2\pi)^3 g_s l_s^{(3+1)}} . \quad (3.59)$$

El término $O(\alpha')$ en (3.58) representa una serie de correcciones en potencias de α' . Si tomamos entonces el límite de bajas energía $E \ll \alpha'^{-1/2}$, o equivalentemente $\alpha' \rightarrow 0$, agregamos la parte fermiónica de la teoría y definimos

$$g^2 = 4\pi g_s \quad , \quad (3.60)$$

como la constante de acoplamiento de Yang-Mills que aparece en (1.122), resulta que la dinámica de las N D3-branas está descrita por la acción de Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $U(N)$ en el espacio-tiempo plano $(3 + 1)$ dimensional [12, 47].

Adicionalmente, sabemos que los 6 campos ϕ^i describen la posición de las branas en las 6 direcciones transversales, y para el sistema de N D3-branas estos se vuelven campos matriciales $(\phi^i)^m_n$, con $m, n = 1, \dots, N$. Los grados de libertad del sistema asociados a estos campos se pueden descomponer como [34]

$$(\phi^i)^m_n = \frac{1}{N}(\phi^i)^m_n \delta_{mn} + (\phi_0^i)^m_n \quad , \quad (3.61)$$

donde el primer término corresponde a los elementos de la diagonal y físicamente representa la posición del centro de masa del sistema, mientras que el segundo término corresponde a los elementos fuera de la diagonal y físicamente representa las posiciones relativas al centro de masa [34]. Se puede mostrar que esto es equivalente a la descomposición $U(N) \simeq U(1) \times SU(N)$ [34]. Ya que $U(1)$ representa el movimiento del centro de masa del sistema, resulta que, debido a la invariancia ante traslaciones del centro de masa, esta contribución en la acción (3.58) es libre y pueda ser desacoplada [47]. Debido a esto, es posible demostrar que la dinámica de las N D3-branas está descrita por la acción de Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $SU(N)$ en el espacio-tiempo plano $(3 + 1)$ dimensional, que describimos previamente en la Sección 1.3.2, y cuya acción está escrita en la ecuación (1.134) [12, 47].

En esta descripción estamos considerando a las cuerdas como pequeñas perturbaciones de las Dp-branas, por lo que esta perspectiva está bien definida si la constante de acoplamiento para cuerdas abiertas y cerradas es pequeña, es decir, $g_s \ll 1$ [12]. Por otra parte, ya que $\alpha' = l_s^2$, donde l_s es la longitud característica de la cuerda, tomar el límite $\alpha' \rightarrow 0$ significa que $l_s \rightarrow 0$, es decir, estamos tomando el límite en el que las cuerdas son arbitrariamente pequeñas. En este límite la dinámica de las N D3-branas ha dado lugar a la teoría de MSYM con grupo de norma $SU(N)$, por lo que podemos considerar a la constante de acoplamiento efectiva dada por $g_s N$ y por tanto otra condición para que este tratamiento esté bien definido a nivel perturbativo es que $g_s N \ll 1$ [12].

Como hemos mencionado previamente, la teoría de cuerdas tipo IIB incluye también cuerdas cerradas, de modo que la acción efectiva de bajas energías para todos los modos no masivos de la cuerda incluye los siguientes componentes [28]:

- Cuerdas abiertas cuyos extremos permanecen sobre en la hipersuperficie (p+1) dimensional de las Dp-branas.
- Cuerdas cerradas propagándose en el espacio-tiempo plano (9+1) dimensional.
- Interacciones entre cuerdas abiertas y cerradas; por ejemplo, dos cuerdas abiertas sujetas a una Dp-brana pueden colisionar y forma una cuerda cerrada, la cual se propagará libremente alejándose de la brana [12] (ver Figura 3.6). Por supuesto que el proceso inverso, en el que una cuerda cerrada se separa en dos cuerdas abiertas en una Dp-brana, es igualmente posible.

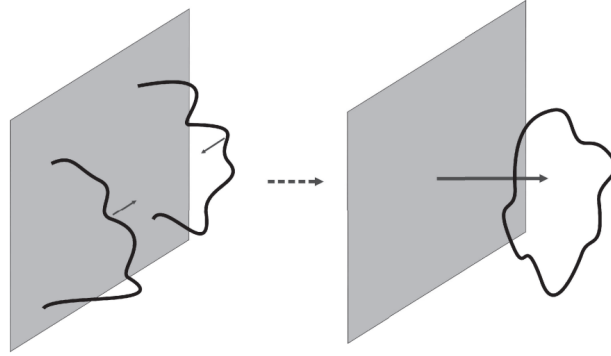


Figura 3.6: Dos cuerdas abiertas en una Dp-brana pueden colisionar y formar una cuerda cerrada, la cual se propagará en el espacio-tiempo alejándose de la brana. Imagen tomada de [28].

De esta manera, la acción del sistema completo puede ser escrita como [28]

$$\mathcal{S}_{ND3} = \mathcal{S}_a + \mathcal{S}_c + \mathcal{S}_{int} \quad , \quad (3.62)$$

donde \mathcal{S}_a contiene los modos de cuerdas abiertas, \mathcal{S}_c contiene los modos de cuerdas cerradas y \mathcal{S}_{int} las interacciones entre cuerdas abiertas y cerradas.

Sin embargo, resulta que la intensidad con la que las cuerdas cerradas interactúan, con cuerdas abiertas y con otras cuerdas cerradas, está determinada por la constante de Newton G_N a una determinada energía, es decir, $G_N E$ [47]. Ya que en la teoría de cuerdas IIB la constante de Newton está relacionada con la longitud de las cuerdas por la ecuación (3.57), tenemos que en el límite $l_s \rightarrow 0$, las cuerdas cerradas se vuelven no interactuantes, de modo que las cuerdas abiertas y cerradas se desacoplan, tal que $\mathcal{S}_{int} \rightarrow 0$, mientras que \mathcal{S}_c se reduce simplemente la acción de supergravedad libre en el espacio-tiempo de Minkowski (9+1) dimensional [12].

En conclusión, tenemos que en el límite $l_s \rightarrow 0$ la dinámica de N D3-branas paralelas consiste en cuerdas abiertas sujetas a las D3-branas, cuyas excitaciones dan

lugar a la teoría de Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $SU(N)$ en el espacio-tiempo plano $(3 + 1)$ dimensional de las D3-branas, así como cuerdas cerradas libres propagándose en el espacio-tiempo de Minkowski $(9+1)$ dimensional (ver Figura 3.7), de tal forma que podemos escribir la acción del sistema como [28]

$$\mathcal{S}_{ND3} = \mathcal{S}_{MSYM} + \mathcal{S}_{Mink_{10}} \quad . \quad (3.63)$$

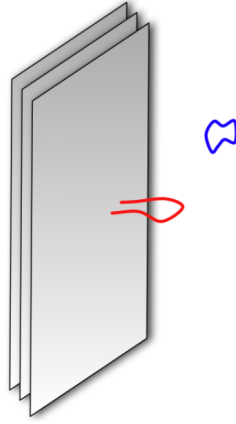


Figura 3.7: Sistema de N D3-branas en la perspectiva de cuerdas abiertas. En el límite $\alpha' \rightarrow 0$ el sistema consiste en cuerdas abiertas cuyos extremos permanecen en las branas y cuerdas cerradas propagándose en el espacio-tiempo plano $(9+1)$ dimensional. Imagen tomada de [47].

Perspectiva de cuerdas cerradas

Observemos ahora el sistema anterior desde un punto de vista distinto, desde la perspectiva de cuerdas cerradas. Como sabemos, debido a las cuerdas cerradas, la teoría de cuerdas es una teoría con gravedad. Particularmente, en el límite de bajas energías, la teoría de cuerdas tipo IIB está descrita por la acción de supergravedad tipo IIB en 10 dimensiones espacio-temporales. Por otro lado, las Dp-branas son objetos que tienen tensión, dada por (3.52), y por tanto, son pesadas. En una teoría con gravedad los objetos pesados deforman el espacio-tiempo, y las Dp-branas no son la excepción, de modo que su presencia deforma al espacio-tiempo plano 10 dimensional. El espacio-tiempo curvo generado por el sistema de N Dp-branas apiladas es descrito entonces por las ecuaciones de movimiento de supergravedad IIB [12, 47], y se encuentra que la métrica de dicho espacio-tiempo, en una cierta elección de coordenadas, está dada por [12, 47]

$$ds^2 = H(r)^{-1/2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + H(r)^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad , \quad (3.64)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski $(3 + 1)$ dimensional, mientras que el segundo término entre paréntesis es la métrica del espacio plano en las $(9 - 3)$ coordenadas

transversales a las D3-branas escritas en coordenadas esféricas, con r la coordenada radial y Ω_5 el elemento de ángulo sólido. La función $H(r)$ está dada por [12, 47]

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4, \quad (3.65)$$

donde

$$L^4 = 4\pi g_s N \ell_s^4. \quad (3.66)$$

El espacio-tiempo descrito por la métrica (3.64) es comúnmente conocido como *D3-brana negra*, mientras que L es interpretado como el radio de curvatura característico que de dicha brana negra [34]. Esta solución a las ecuaciones de supergravedad IIB sin embargo solo está bien definida bajo las siguientes condiciones:

- Para asegurar la validez de la aproximación de supergravedad, la curvatura del espacio-tiempo debe ser grande con respecto a la longitud característica de las cuerdas, es decir, tal que $\frac{L^4}{\ell_s^4} = g_s N \gg 1$ [12].
- Para asegurar una descripción perturbativa, las cuerdas deben ser débilmente acopladas, es decir, tal que $g_s \ll 1$ [34].
- Por tanto, para que el límite de supergravedad sea válido se requiere que $g_s \ll 1$ mientras que $N \rightarrow \infty$, de modo que $g_s N$ sea fijo y tal que $g_s N \gg 1$ [28].

Para entender este espacio-tiempo notemos, de la ecuación (3.65), que la métrica (3.64) depende únicamente de la coordenada radial r en las direcciones transversales a las D3-branas, de modo que podemos considerar el límite $r \gg L$, donde es claro que $H \simeq 1$, de modo que la métrica (3.64) se reduce a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski (9+1) dimensional. Dicho esto podemos interpretar físicamente a la métrica (3.64): Las D3-branas se extienden a lo largo de $p = 3$ direcciones espaciales de modo que, visto desde las (9 – 3) direcciones espaciales transversales a las D3-branas, el espacio-tiempo que surge debido a las N D3-branas es similar al espacio-tiempo curvo (6 + 1) dimensional que produce una partícula puntual, con masa $M \propto NT_p$, y que es asintóticamente Minkowski [47] (ver Figura 3.8). En este sentido, el parámetro L puede ser interpretado como la longitud del rango de los efectos gravitacionales de las N D3-branas, de manera que si $r \gg L$ el espacio-tiempo es débilmente curvado, mientras que si $r \ll L$ el espacio-tiempo es fuertemente curvado [47].

Consideremos ahora el límite $r \ll L$, en el que el espacio-tiempo está fuertemente curvado, para el cual $H \simeq L^4/r^2$, tal que la métrica (3.64) se reduce a

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + \frac{L^2}{r^2}dr^2 + L^2 d\Omega_5^2. \quad (3.67)$$

Comparando este resultado con la métrica (2.36), es evidente que los primeros dos términos en (3.67) son precisamente la métrica del espacio-tiempo de Anti-de Sitter

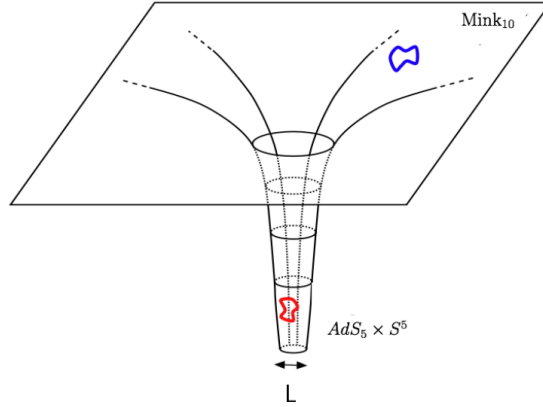


Figura 3.8: Sistema de N D3-branas en la perspectiva de cuerdas cerradas. En el límite $E \ll 1/L$ el sistema gravitacional debido a las N D3-branas consiste en cuerdas cerradas propagándose en el espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$ de radio L , así como cuerdas cerradas propagándose libremente en el espacio-tiempo plano (9+1) dimensional. Imagen tomada de [47].

en $d = 5$ dimensiones espacio-temporales con radio L en las llamadas coordenadas de Poincaré. De modo que podemos escribir la métrica (2.36) como

$$ds^2 = ds_{AdS_5}^2 + L^2 d\Omega_5^2 \quad , \quad (3.68)$$

donde el término $L^2 d\Omega_5^2$ describe una esfera de radio L en 5 dimensiones espaciales. Así, en el límite $r \ll L$, el espacio-tiempo curvo (9 + 1) dimensional que surge de una pila de N D3-branas se puede escribir como $AdS_5 \times S^5$, es decir, es el espacio-tiempo de Anti-de Sitter 5 dimensional tal que en cada punto hay una esfera 5 dimensional de radio L . Por su parte, lejos de las N D3-branas, tal que $r \gg L$, el espacio-tiempo se vuelve el espacio-tiempo de Minkowski 10 dimensional.

En este modo de describir al conjunto de D3-branas solo se tienen cuerdas cerradas, por lo que el sistema está compuesto por (ver Figura 3.8):

- Cuerdas cerradas propagándose libremente lejos de la D3-brana negra, tal que $r \gg L$, en el espacio-tiempo plano 10 dimensional.
- Cuerdas cerradas propagándose dentro de la D3-brana negra en el espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$, tal que $r \ll L$.
- Interacción entre ambos tipos de cuerdas cerradas, que físicamente se interpreta como la posibilidad que tienen las cuerdas cerradas de entrar o salir de la D3-brana negra [12].

Así, la acción del sistema completo puede ser escrita como [28]

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{AdS_5} + \mathcal{S}_{Mink_{10}} + \mathcal{S}_{int} \quad , \quad (3.69)$$

donde \mathcal{S}_{AdS_5} contiene los modos de cuerdas cerradas dentro de la D3-brana negra, $\mathcal{S}_{Mink_{10}}$ los modos de cuerdas cerradas fuera y \mathcal{S}_{int} las interacciones entre ambos tipos de cuerdas cerradas.

Por otra parte, podemos notar que la componente g_{00} de la métrica (3.64) depende de la coordenada radial r , de modo que la energía medida por observadores inerciales será distinta para distintos valores de r . En particular, la energía propia medida por un observador en r , que etiquetamos como E_r , se relaciona con la energía medida por un observador en infinito E_∞ mediante [12]

$$E_\infty = \sqrt{-g_{00}} E_r = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_r \quad . \quad (3.70)$$

Dicho esto, el siguiente paso en nuestra descripción de cuerdas cerradas es tomar el límite de bajas energías medida por observadores en infinito $E = E_\infty$, tal que $E \ll 1/L$, pues resulta que la interacción entre cuerdas cerradas es proporcional a LE , de modo que en este límite la interacción entre las distintas cuerdas cerradas desaparece [34]. Físicamente lo anterior se entiende de la siguiente manera: La longitud característica de la D3-brana negra es L , por lo que para cuerdas cerradas propagándose fuera en la región plana del espacio-tiempo, tal que $r \gg L$, y con una longitud de onda $\lambda = 1/E \gg L$, la D3-brana negra será inaccesible, por lo que no hay forma de que estas cuerdas sean absorbidas por la D3-brana negra [34]. Por el contrario, para cuerdas cerradas dentro de la D3-brana negra, tal que $r \ll L$, la energía medida en infinito estará relacionada con la energía propia de la cuerda como $E \propto r E_r$ [28], de modo que, aunque la excitación de la cuerda de lugar a estados con energía propia E_r arbitrariamente grande, para un observador en infinito la energía E será arbitrariamente pequeña a medida que $r \rightarrow 0$, por lo que ninguna cuerda cerrada tendrá la energía suficiente para escalar el potencial gravitacional y la probabilidad de emerger al exterior será nula [34].

En conclusión, tenemos que en el límite $E \ll 1/L$ la dinámica provocada por la deformación del espacio-tiempo debido a la pila de N D3-branas da lugar a los modos de cuerdas cerradas de la teoría de cuerdas tipo IIB en el espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$, más los modos de cuerdas cerradas que se propagan libremente en el espacio-tiempo de Minkowski (9 + 1) dimensional (ver Figura 3.8). Por tanto, y en analogía con la ecuación (3.63), podemos escribir la acción de este sistema como

$$\mathcal{S}_{ND3} = \mathcal{S}_{AdS_5} + \mathcal{S}_{Mink_{10}} \quad . \quad (3.71)$$

Interpretación

Tenemos entonces dos descripciones alternativas de un mismo sistema:

1. Perspectiva de cuerdas abiertas; Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $SU(N)$ en el espacio-tiempo plano (3+1) dimensional y supergravedad tipo IIB libre en el espacio-tiempo plano (9+1) dimensional, tal que

$$\mathcal{S}_{ND3} = \mathcal{S}_{AdS_5} + \mathcal{S}_{Mink_{10}} \quad .$$

Válido para energías tales que $E \ll 1/l_s$, y bien definida siempre que $g_s N \ll 1$ y $g_s \ll 1$.

2. Perspectiva de cuerdas cerradas; teoría de cuerdas tipo IIB en el espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$ y supergravedad tipo IIB libre en el espacio-tiempo plano (9+1) dimensional, tal que

$$\mathcal{S}_{ND3} = \mathcal{S}_{MSYM} + \mathcal{S}_{Mink_{10}} \quad .$$

Válido para energías tales que $E \ll 1/L$, y bien definida siempre $g_s \ll 1$ mientras que $N \rightarrow \infty$, tal que $g_s N$ sea fijo y $g_s N \gg 1$ [28].

Por otra parte, es posible notar por medio de la ecuación (3.66) que los límites de bajas energías $E \ll 1/l_s$ y $E \ll 1/L$ son equivalentes, de modo que para que ambas condiciones de energía se cumplan basta con tomar $l_s \rightarrow 0$, para energías E arbitrarias. De esta manera si consideramos $l_s \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ con $g_s N$ fijo, conocido como el límite de Maldacena, podemos considerar ambas perspectivas de forma equivalente para cualquier valor de E [34]. Si bien los límites perturbativos, $g_s N \ll 1$ y $g_s N \gg 1$, son mutuamente excluyentes, las teorías existen para cualquier valor de $g_s N$ [34]. Por tanto, estas dos perspectivas son descripciones alternativas del mismo sistema físico. En particular, ya que en ambas perspectivas aparece la teoría de supergravedad IIB $\mathcal{S}_{Mink_{10}}$, podemos comparar las ecuaciones (3.63) y (3.71), y con ello resulta natural identificar la relación

$$\mathcal{S}_{MSYM} = \mathcal{S}_{AdS_5} \quad .$$

Esto es precisamente la llamada correspondencia AdS/CFT, también conocida como la *conjetura de Maldacena*, la cual establece que, en los correspondientes límites, ambas teorías son equivalentes, es decir,

$$\begin{array}{l} MSYM \ SU(N) \\ \text{en Minkowski } (3+1) \end{array} = \begin{array}{l} \text{Teoría de cuerdas IIB} \\ \text{en } AdS_5 \times S^5. \end{array} \quad (3.72)$$

Es importante mencionar que la discusión que hemos desarrollado hasta ahora involucra solo al estado de vacío de MSYM, que corresponde la teoría de cuerdas IIB sobre $AdS_5 \times S^5$ sin excitaciones [34]. Sin embargo, si realmente toda la física de MSYM, incluyendo excitaciones con energías arbitrariamente grandes, es equivalente a la teoría de curdas IIB, entonces en esta teoría gravitacional debemos considerar deformaciones arbitrariamente grandes del espacio-tiempo AdS_5 , salvo por su valor en

la frontera ∂AdS [34]. Dicho de otra forma, un enunciado más preciso de la correspondencia holográfica es que la teoría de MSYM en Minkowski 4 dimensional es equivalente a la teoría de cuerdas IIB en un espacio-tiempo asintóticamente $AdS_5 \times S^5$ [34]. Así mismo, es importante tener presente que ninguna de las dos teorías que aparecen en ambos lados de la correspondencia describen sistemas reales de nuestro Universo y son más bien modelos de juguete idealizados que nos permiten estudiar de forma más simple ciertos aspectos de teorías de campos más aproximadas a la naturaleza.

Se conocen diversos ejemplos de la correspondencia entre una teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo plano $d + 1$ -dimensional y una teoría con gravedad en un espacio-tiempo curvo $d + 2$ -dimensional [12]. El ejemplo que hemos discutido, que involucra a la teoría de MSYM y a la teoría de cuerdas IIB en el espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$, es solo el ejemplo mejor entendido de este tipo de dualidad. De esta manera, además del enunciado de la correspondencia holográfica escrito en la ecuación (3.72), que relaciona a una CFT 4 dimensional con una teoría de cuerdas en AdS_5 , y que podemos escribir simplemente como AdS_5/CFT_4 , existen otros ejemplos de la correspondencia AdS/CFT que involucran CFTs con diferentes propiedades y en diferentes números de dimensiones espacio-temporales [12]. Por lo que un enunciado más general de la conjetura de Maldacena relaciona una teoría conforme en el espacio-tiempo plano $(d + 1)$ dimensional con una teoría gravitacional en $AdS_{d+2} \times M^p$ [12], es decir, una correspondencia AdS_{d+2}/CFT_{d+1} , donde M^p es alguna variedad compacta p -dimensional [12]. El resto de este Capítulo repasaremos algunas de las características importantes del ejemplo mejor entendido de la correspondencia AdS/CFT que hemos escrito en la ecuación (3.72).

3.2.2. Aspectos generales de la correspondencia AdS/CFT

La teoría de Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ está caracterizada por dos parámetros, la constante de acoplamiento g^2 y el parámetro N que, como mencionamos en la Sección 1.3, en el contexto de las teorías de Yang-Mills corresponde al número de colores. Por su parte, la teoría de cuerdas IIB es una teoría en un espacio-tiempo curvo caracterizada por la constante de Newton G_N y la longitud característica de las cuerdas l_s en unidades del radio de curvatura L . De las ecuaciones (3.60) y (3.66) vemos que los parámetros de las teorías se relacionan mediante [47]

$$g_s = \frac{g^2}{2\pi}, \quad \frac{L}{l_s} = (g^2 N)^{1/4} \quad . \quad (3.73)$$

En particular, esto nos indica que cualquier condición sobre $\frac{L}{l_s} = g_s N$, que indica qué tan grande es la curvatura del espacio-tiempo con respecto a la longitud característica de las cuerdas en la teoría de cuerdas IIB, es equivalente a una condición sobre el acoplamiento de t' Hooft $\lambda = g^2 N$ que controla las interacciones en la teoría de Super

Yang Mills, es decir [34]

$$\begin{aligned} \frac{L}{l_s} \gg 1 &\Leftrightarrow \lambda \gg 1, \\ \frac{L}{l_s} \ll 1 &\Leftrightarrow \lambda \ll 1. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Esto nos dice que cuando el espacio-tiempo está débilmente curvado ($L/l_s \gg 1$), la teoría de Super Yang Mills está fuertemente acoplada ($\lambda \gg 1$), mientras que cuando el espacio-tiempo está fuertemente curvado ($L/l_s \ll 1$), la teoría de Yang-Mills está débilmente acoplada ($\lambda \ll 1$). Es por esto que se dice que la correspondencia holográfica es una dualidad de *acoplamiento débil* \Leftrightarrow *acoplamiento fuerte* [34].

Como hemos mencionado antes, la teoría de cuerdas IIB puede ser descrita por supergravedad IIB si tomamos los límites $g_s \ll 1$ y $\frac{L}{l_s} = g_s N \gg 1$. Es decir, en estos límites la teoría de cuerdas IIB se simplifica y puede ser aproximada por supergravedad clásica, la cual esencialmente se refiere a la Relatividad General de Einstein acoplada a varios campos de materia [47]. Del lado de la teoría de Super Yang Mills esto es equivalente a tomar los límites $\lambda \gg 1$ mientras que $N \gg 1$. Esto significa que a nivel de cálculo resulta útil emplear la correspondencia holográfica para estudiar la teoría de Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ fuertemente acoplada y con un gran número de colores N a partir de únicamente una teoría de supergravedad clásica [47]. Es en este sentido en el que podemos entender a la correspondencia AdS/CFT como una herramienta de cálculo sumamente útil que nos permite estudiar aspectos de la teoría de campos en el régimen de acoplamiento fuerte que de otra forma serían muy complicados.

Comparando simetrías

A lo largo de esta Sección hemos escrito enunciados cada vez más sorprendentes sobre la conjetura de Maldacena, por lo que antes de seguir describiendo los aspectos más importantes de la correspondencia es conveniente revisar algunos puntos que nos motiven a seguir adelante y asegurarnos de que esta conjetura esté bien establecida. Para esto podemos recurrir a las simetrías globales de las teorías implicadas, las cuales a lo largo del texto hemos hecho énfasis en describir. Así pues, como una especie de experimento teórico, vamos a someter a la conjetura de Maldacena, en el ejemplo mejor entendido, a la prueba de comparar las simetrías globales en ambos lados de la correspondencia. Si realmente MSYM en Minkowski (3+1) dimensional es equivalente a la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$, la simetrías globales de ambas teorías deben ser las mismas.

La simetrías globales de la teoría de Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ en el espacio-tiempo plano (3+1) dimensional han sido descritas completamente en la Sección 1.3.2, por lo que basta con repasarlas:

1. La simetría conforme, con grupo $SO(4, 2)$.
2. La simetría R con grupo $SO(6)$.
3. Las 32 componentes de supersimetrías (4 supercargas y 4 supercargas conformes).

En conjunto se dice que el *supergrupo* de simetrías globales de SYM $\mathcal{N} = 4$ es el llamado grupo $SU(2, 2|4)$ [12].

Veamos ahora las simetrías globales de la teoría de cuerdas IIB en el espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$:

1. En primer lugar, a nivel geométrico, debemos considerar las isometrías del espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$; en la Sección 2.3 vimos que el espacio-tiempo de Anti-de Sitter $(d + 1)$ dimensional es un espacio-tiempo maximalmente simétrico con grupo de isometrías $SO(d, 2)$. De modo que en $(4 + 1)$ dimensiones el grupo de isometrías de AdS_5 es el grupo $SO(4, 2)$.
2. Por su parte, se encuentra que el grupo de isometrías de una 5-esfera es el grupo $SO(6)$.
3. Además de estas isometrías, en la Sección 3.1.2 vimos que la teoría de cuerdas IIB posee supersimetría $\mathcal{N} = 2$, que en $(9+1)$ dimensiones es equivalente a 32 componentes de supersimetrías.

Comparando los puntos 1., 2, y 3. en ambos recuentos de simetrías, podemos concluir que MSYM en Minkowski $(3+1)$ dimensional y la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ poseen el mismo grupo de simetrías globales, el grupo $SU(2, 2|4)$ [34]. Por tanto, de forma satisfactoria y asombrosa, la correspondencia holográfica, en el ejemplo (3.72), ha superado esta primera prueba. Es posible mostrar que esto se cumple aún para otros ejemplos de la correspondencia AdS/CFT.

Conexión UV/IR

Dicho lo anterior, podemos continuar describiendo algunos de los aspectos más relevantes de la correspondencia. Como vemos de la ecuación (3.73) existe una forma de relacionar los parámetros de las teorías en ambos lados de la correspondencia. En general, ya que ambas teorías son equivalentes, cualquier elemento, objeto o proceso de un lado de la correspondencia debe tener su contraparte en la teoría dual, y existe un *diccionario* que codifica la información de una teoría a la otra [34].

Sabemos que las teorías en ambos lados de la dualidad viven en diferentes dimensiones espacio-temporales, por tanto, la siguiente entrada del diccionario que es interesante investigar es cómo se relacionan las coordenadas de cada teoría. Con esto en mente resulta conveniente definir una nueva coordenada radial como $z = L^2/r \in$

$(0, \infty)$ de tal forma que la métrica de AdS_5 en el parche de Poincaré (2.36) puede ser escrita como [12]

$$ds_{AdS_5}^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \quad , \quad (3.75)$$

con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ y $\eta_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo de Minkowski $(3 + 1)$ dimensional. En estas coordenadas tenemos que en $z = 0$ se encuentra la frontera del espacio-tiempo ∂AdS y en $z \rightarrow \infty$ el horizonte causal [12]. De la ecuación (3.75) podemos ver que en esta métrica cada rebanada del espacio-tiempo a z constante es isométrica al espacio-tiempo de Minkowski $(3+1)$ dimensional. Por tanto, podemos identificar a las coordenadas x^μ del espacio-tiempo AdS_5 en el parche de Poincaré con las coordenadas x^μ del espacio-tiempo de Minkowski sobre el cual está definida la teoría de Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ [47]. Además, la región dentro de AdS_5 , sin la frontera ∂AdS , es comúnmente conocida como el bulto.

Identificadas ya las cuatro coordenadas x^μ del espacio-tiempo de Anti-de Sitter 5 dimensional, nos resta interpretar a la coordenada radial z . Para esto podemos considerar una transformación de escala en la teoría de Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$, es decir, $x^\mu \rightarrow sx^\mu$, con s el parámetro de la transformación, y notar que en la teoría de cuerdas IIB se traduce en la transformación de las coordenadas de AdS_5 $(z, x^\mu) \rightarrow (sz, sx^\mu)$ [34]. Esto nos indica que explorar distancias más grandes o más pequeñas en la teoría de Super Yang Mills en Minkowski $(3+1)$ dimensional se traduce en diferentes valores de la coordenada radial z en AdS_5 [34]. Dicho de otra forma, los distintos valores de la coordenada radial z de la teoría de cuerdas IIB en AdS_5 corresponde a las distintas escalas de longitud ℓ_{YM} en la teoría de MSYM en el espacio-tiempo plano, o bien, equivalentemente, el inverso de la coordenada radial $1/z$ corresponde a la escala de energía E_{YM} en MSYM [34]. Esto tiene una interpretación física muy interesante, pues en esencia nos dice que la energía E en la teoría de MSYM puede ser entendida como una dimensión espacial adicional [34]. En particular, el límite de altas energías en MSYM $E_{YM} \rightarrow \infty$, conocido como límite ultra violeta (UV) corresponde a $z \rightarrow 0$ en AdS, es decir, a la región cerca de la frontera ∂AdS , conocido como límite infrarojo (IR) en la teoría gravitacional [34], como se muestra en la Figura 3.9. Inversamente, el límite (IR) en MSYM corresponde a $z \rightarrow \infty$, el límite (UV) en la teoría gravitacional. Es por esto que a la identificación $z \leftrightarrow \ell_{YM}$ y $1/z \leftrightarrow E_{YM}$ se conoce comúnmente como conexión UV/IR [34].

Hemos visto entonces cómo se traduce de una teoría a la otra las 5 coordenadas de AdS_5 . Sin embargo, sabemos que la teoría de cuerdas IIB vive en $AdS_5 \times S^5$, por lo que aún están pendientes las 5 coordenadas espaciales de la 5-esfera. Resulta que estas 5 coordenadas de S^5 en la teoría de cuerdas no corresponden a coordenadas espaciales en MSYM, sino que parametrizan el espacio interno sobre el cual actúan las transformaciones del grupo $SO(6)$ de la simetría R [34].

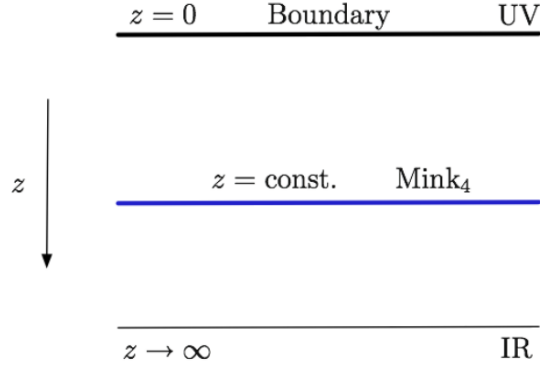


Figura 3.9: Relación entre la coordenada radial z de AdS y la escala de energía E_{YM} en MSYM. Imagen tomada de [47].

Correspondencia campo/operador

La siguiente entrada del diccionario en la que podemos indagar es en la forma en la que se traducen los elementos básicos de cada teoría. Del lado de la teoría de campos MSYM en el espacio-tiempo plano (3+1) dimensional los objetos que contienen la información física de la teoría son las funciones de correlación de operadores locales invariantes de norma $\hat{\mathcal{O}}(x^\mu)$ [28, 34]. Del lado de la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$, en el límite de supergravedad clásica, los objetos básicos son distintos tipos de campos, que podemos etiquetar de forma sencilla como $\phi(x^M)$ [28, 34], con $M = 0, 1, \dots, 9$. Cabe esperar entonces una correspondencia entre operadores invariantes de norma en MSYM y campos $\phi(x^M)$ en $AdS_5 \times S^5$.

En primer lugar notemos que, dada la correspondencia entre coordenadas de ambas teorías, las cuatro coordenadas x^μ en las que están definidos los operadores en la CFT corresponden con las coordenadas de AdS_5 pero no con las coordenadas de la S^5 , θ^a con $a = 1, \dots, 5$. Por tanto, los operadores invariantes de norma en MSYM deben corresponder a campos $\phi(x^\mu, z)$ definidos en AdS_5 con propiedades de transformación específicas bajo el grupo de transformaciones de la S^5 y de $SO(4, 2)$ [34]. Ya que la S^5 es un objeto compacto, usualmente es conveniente desarrollar a los campos definidos en 10 dimensiones espacio-temporales en términos de una torre de campos en AdS_5 y armónicos esféricos en la S^5 [47]. Así, por ejemplo, un campo escalar de supergravedad puede ser expresado como [28, 34]

$$\phi(x^\mu, z, \theta^a) = \sum_k \phi_k(x^\mu, z) Y_k(\theta^a) \quad , \quad (3.76)$$

donde $Y_k(\theta^a)$ son los armónicos esféricos en la S^5 . Por tanto, son los modos $\Phi_k(x^\mu)$ en AdS_5 los que directamente corresponden a operadores $\hat{\mathcal{O}}(x^\mu)$ en MSYM [28, 34].

Notemos ahora que la constante de acoplamiento g^2 de MSYM está relacionada

con la constante de acoplamiento de cuerdas g_s por la ecuación (3.73). Por su parte, como mencionamos en la Sección 3.1.2, la constante de acoplamiento de cuerdas g_s está relacionada por la ecuación (3.50) con el valor del campo del dilatón $\Phi(x)$ en el infinito de AdS_5 , es decir, con el valor de Φ en la frontera ∂AdS . Por tanto, deformar la teoría de campos al modificar la constante de acoplamiento g^2 corresponde a modificar un campo del bulto en la frontera ∂AdS [47]. En general, podríamos considerar una deformación en la acción de MSYM como [47]

$$\mathcal{S}_{MSYM} = \mathcal{S}_{MSYM} + \int d^4x \hat{\mathcal{O}}(x) \varphi(x) \quad , \quad (3.77)$$

con $\hat{\mathcal{O}}(x)$ un operador local invariante de norma y donde $\varphi(x)$ se interpreta como una constante de acoplamiento dependiente de la posición, es decir, una fuente de los campos de MSYM [34]. Particularmente, si $\varphi(x)$ es constante entonces la deformación (3.77) corresponde precisamente a la modificación de la constante de acoplamiento para el operador $\hat{\mathcal{O}}(x)$ [47]. Ya que la modificación de la constante de acoplamiento modifica el valor del campo de dilatón $\Phi(x)$ en la frontera ∂AdS , esto sugiere que para cada posible fuente $\varphi(x)$, de cada posible operador local invariante de norma, habrá un correspondiente campo $\phi(x)$ en AdS tal que su valor en la frontera ∂AdS pueda ser identificado con dicha fuente $\varphi(x)$, es decir [47],

$$\varphi(x) = \phi|_{\partial AdS}(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \phi(x) \quad . \quad (3.78)$$

Podemos concluir entonces que existe una correspondencia entre campos en AdS_5 $\phi(x^\mu, z)$ y operadores locales invariantes de norma en MSYM, comúnmente conocida como la correspondencia campo/operador [47]. Un ejemplo importante de esta correspondencia es el del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}(x)$ de MSYM, pues puede ser identificado con el valor en la frontera de la métrica $g_{\mu\nu}(x, z)$ del espacio-tiempo de la teoría de cuerdas [47].

Correspondencia AdS/CFT a temperatura finita

Hasta ahora hemos mencionado un ejemplo de la correspondencia AdS/CFT en la que la geometría de AdS_5 está en coordenadas del parche de Poincaré, sin embargo, sabemos que el parche de Poincaré cubre apenas una región de todo el espacio-tiempo de Anti-de Sitter. Resulta natural entonces preguntarnos qué relación tienen las coordenadas globales de AdS_5 en esta discusión, cuya métrica está escrita en la ecuación (2.35) en $d + 1$ dimensiones espacio-temporales. En este sentido, se encuentra que es posible establecer la correspondencia entre la teoría de cuerdas IIB en el espacio-tiempo AdS_5 global y a la teoría de MSYM definida sobre el espacio-tiempo $\mathbb{R}_t \times S^3$ [28] conocido como el *universo estático de Einstein*, cuya métrica está dada por [34]

$$ds_{CFT} = L^2(-d\tau^2 + d\Omega_3^2) \quad , \quad (3.79)$$

donde τ es la coordenada temporal definida en el rango $-\infty < \tau < \infty$ y $d\Omega_3^2$ corresponde al elemento de línea de la esfera unitaria S^3 .

Por otro lado, el análisis sobre la correspondencia que hemos seguido relaciona a la teoría de cuerdas con MSYM en el estado de vacío, es decir, a temperatura cero. Sin embargo, como hemos mencionado previamente, la correspondencia debe incluir a las excitaciones de MSYM, lo cual se traduce en deformaciones de AdS_5 , es decir, soluciones asintóticamente AdS_5 pero no necesariamente con $T_{\mu\nu} = 0$. Resulta que al considerar una temperatura T diferente de cero en MSYM, que físicamente representa un plasma fuertemente acoplado de las partículas de MSYM a temperatura T [12, 28], se modifica la métrica de AdS_5 en coordenadas de Poincaré en términos de la coordenada z (3.75) por [47]

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(-f dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{dz^2}{f} \right) , \quad (3.80)$$

donde

$$f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4} . \quad (3.81)$$

Esta geometría es llamada *brana negra de Schwarzschild-AdS*, también conocida como *agujero negro planar de Schwarzschild-AdS* [12, 34], y tiene un horizonte de eventos en $z = z_h$ [12]. El agujero negro planar de Schwarzschild-AdS₅ tiene una temperatura de Hawking que está dada por [12]

$$T_h = \frac{1}{\pi z_h} , \quad (3.82)$$

y, de acuerdo al diccionario de la correspondencia, ésta es precisamente la temperatura T del plasma de MSYM [12]. Además de temperatura, sabemos que un agujero negro tiene una entropía S_{BH} proporcional al área de su horizonte A_h , dada por la ecuación 2.34, y se encuentra que ésta puede ser identificada con la entropía térmica S del plasma de MSYM, es decir [12, 34]

$$S = S_{BH} = \frac{A_h}{4G} . \quad (3.83)$$

Por tanto, tenemos que el plasma fuertemente acoplado de MSYM a temperatura finita T tiene por dual gravitacional a la geometría de una brana negra asintóticamente AdS_5 [12, 47]. Visto de otra forma, estos resultados nos indican que es posible calcular cantidades termodinámicas de la teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$ en el régimen de acoplamiento fuerte a partir de las propiedades geométricas del espacio-tiempo asintóticamente AdS_5 .

Con esto concluimos este breve repaso de lo que son solo unos pocos de los elementos de la correspondencia holográfica. En años recientes ha habido un gran desarrollo

de la correspondencia holográfica en diferentes líneas de investigación, por lo que la cantidad de resultados que se tienen al respecto es en general mucho más amplio y han permitido realizar cálculos en diversos aspectos de ciertas teorías de norma [13, 47]. Entre los trabajos que se llevan a cabo en el contexto de esta dualidad está el de desarrollar y mejorar el diccionario que traduce los elementos entre las teorías duales, así como el de encontrar ejemplos de la correspondencia holográfica que involucren teorías cada vez más parecidas a QCD [12]. El resto de este trabajo será dedicado a describir una entrada particular del diccionario de la correspondencia que nos será de mucha utilidad en la descripción de la entropía de entrelazamiento en el contexto de la teoría cuántica de campos, a partir de ciertas geometrías en la teoría gravitacional dual.

Capítulo 4

Entropía de Entrelazamiento holográfica

En el presente capítulo describimos la entrada del diccionario de la correspondencia holográfica que permite calcular la entropía de entrelazamiento en algunas teorías de campo a través de la teoría gravitacional dual. Para comprender esto, en la Sección 4.1.1 mostramos algunos ejemplos del uso de dicha herramienta. Con esto, en la Sección 4.2 investigamos la relación entre agujeros de gusano y entrelazamiento cuántico por medio del cálculo de la entropía de entrelazamiento en una cierta configuración.

4.1. Fórmula de Ryu-Takayanagi

El objetivo principal de esta tesis es emplear la correspondencia AdS/CFT como herramienta de cálculo que nos permita estudiar la entropía de entrelazamiento de una CFT en el régimen de acoplamiento fuerte a partir de la correspondiente teoría gravitacional dual en el régimen débilmente acoplado. Es necesario entonces indagar en una entrada del diccionario que identifique la entropía de entrelazamiento de una CFT con alguna propiedad de la teoría gravitacional dual. Para motivar esta discusión notemos que en el Capítulo 3 llegamos a la conclusión de que, en el contexto de la correspondencia holográfica, es posible calcular propiedades dependientes de la temperatura T en SYM $\mathcal{N} = 4$ a partir de ciertas características geométricas del dual gravitacional. En particular, vimos que la entropía térmica S de MSYM a temperatura finita T está relacionada por la ecuación (3.83) con el área A_h del horizonte de un agujero negro planar de Schwarzschild-AdS. Esta relación entre la entropía de una CFT y la geometría de un espacio-tiempo es uno de los fundamentos que da lugar a la importante propuesta de Ryu y Takayanagi en el contexto de la entropía de entrelazamiento [49] que discutiremos a continuación.

Para enunciar la propuesta de Ryu y Takayanagi pensemos en una CFT fuertemente acoplada, definida sobre un espacio-tiempo plano $(d + 1)$ dimensional \mathcal{M} , que es dual a una teoría gravitacional clásica $(d + 2)$ dimensional asintóticamente AdS_{d+2} .

Consideremos ahora una región espacial d -dimensional $A \subset \mathcal{M}$ (a tiempo fijo $t = t_0$) delimitada por la frontera ∂A y con complemento B , sobre la cual está definida la CFT. Del lado gravitacional consideremos la rebanada del espacio-tiempo asintóticamente AdS_{d+2} al mismo tiempo $t = t_0$, y consideremos una superficie espacial γ_A de codimensión 2 que en la frontera ∂AdS coincide con la superficie cerrada ∂A , tal que $\partial\gamma_A = \partial A$ (ver Figura 4.1). La propuesta de Ryu y Takayanagi es que la entropía de entrelazamiento de la región A , $S_{EE}(A)$, puede ser calculada por medio de la siguiente fórmula [12, 49]

$$S_{HEE}(A) = \frac{Area(\gamma_{A,min})}{4G_N^{d+1}} \quad , \quad (4.1)$$

donde G_N^{d+1} es la constante de Newton en $d + 1$ dimensiones, mientras que $\gamma_{A,min}$ se refiere a la superficie de área mínima que cumple $\partial\gamma_A = \partial A$ y que además es continuamente deformable en A [37]. En general, la fórmula (4.1) requiere que γ_A sea una superficie extremal, es decir, que extremice el valor de su área. Por ejemplo, una superficie extremal en $d = 2$ dimensiones espaciales es una geodésica que, como explicamos en el Capítulo 2, es tal que extremiza la longitud entre dos puntos del espacio. Debido a la geometría, puede suceder que existan distintas superficies extremales. En tal situación, para la fórmula de Ryu-Takayanagi debe elegirse la superficie de área mínima [50]. De este modo, la entropía de entrelazamiento de una región A en una CFT fuertemente acoplada puede ser calculada a partir del área de una cierta geometría en la teoría gravitacional dual. La entropía de entrelazamiento calculada de esta forma es comúnmente llamada *entropía de entrelazamiento holográfica (HEE)* y denodada $S_{HEE}(A)$.

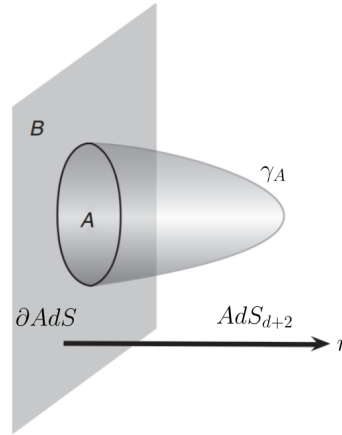


Figura 4.1: La entropía de entrelazamiento holográfica de la región espacial A de una CFT puede ser calculada por medio del área de una superficie mínima γ_A en AdS_{d+2} que cumple que $\partial\gamma_A = \partial A$. r se refiere a la dirección radial de AdS_{d+2} . Imagen tomada de [12].

Podemos notar que la diferencia sustancial entre la fórmula de Ryu-Takayanagi

(4.1) para la HEE y la entropía de Bekenstein-Hawking para agujeros negros (2.34) radica en que la fórmula de Ryu-Takayanagi admite superficies que no necesariamente son horizontes de eventos [34]. Las superficies γ_A en (4.1) son simplemente regiones geométricas que cumplen $\partial\gamma_A = \partial A$ y que son de superficie extremal y no representan necesariamente algún objeto físico en la teoría gravitacional [34]. Así, la fórmula de Ryu-Takayanagi (4.1) es la entrada del diccionario de la correspondencia holográfica que nos permitirá describir la entropía de entrelazamiento en una CFT en el régimen de acoplamiento fuerte a partir de cálculos clásicos en la teoría gravitacional. Una deducción de dicha fórmula puede encontrarse en [51]. En lugar de discutir su deducción, en este texto nos enfocaremos en realizar cálculos que ejemplifiquen el uso de dicha fórmula y compararemos lo obtenido con resultados de la entropía de entrelazamiento ya conocidos.

Superficies extremales

Como hemos explicado, la fórmula de Ryu-Takayanagi requiere calcular superficies extremales en el bulto, por lo que antes de intentar calcular algún ejemplo del cálculo de la HEE, es conveniente discutir una estrategia para determinar superficies extremales en un espacio-tiempo asintóticamente AdS [36]. Para esto, al igual que explicamos en el Capítulo de Relatividad General, recurrimos al problema variacional de extremizar cierta acción, de modo que al resolver la ecuación de movimiento obtengamos la superficie de área extremal.

Supongamos una CFT en el espacio-tiempo plano $(d+1)$ -dimensional que es dual al espacio-tiempo asintóticamente AdS $(d+2)$ dimensional cuya métrica en una cierta elección de coordenadas está dada por [36]

$$ds^2 = g_{MN}dx^M dx^N = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_{zz}dz^2 \quad , \quad (4.2)$$

donde $M, N = 0, 1, \dots, d+1$ mientras que $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d$, con $z \in (0, \infty)$ la coordenada radial y $x^0 = t$ la coordenada temporal. Aquí cabe recordar que las coordenadas x^μ son las que se relacionan con las coordenadas x^μ del espacio-tiempo plano donde se define la CFT. En la CFT consideramos una región espacial A d -dimensional al tiempo t_0 , de modo que tomamos la rebanada del espacio-tiempo (4.2) a tiempo fijo $t = t_0$, de manera que la métrica de tal geometría espacial está dada por

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = g_{ij}dx^i dx^j + g_{zz}dz^2 \quad , \quad (4.3)$$

donde $A, B = 1, \dots, d$ mientras que $i, j = 1, \dots, d-1$. Dada de la región espacial definida por (4.3), que es la rebanada del espacio-tiempo asintóticamente AdS_{d+2} a tiempo fijo $t = t_0$, estamos interesados en una superficie extremal γ_A , embebida en dicha región espacial, tal que $\partial\gamma_A = \partial A$. Para esto, podemos considerar una superficie parametrizada por parámetros intrínsecos ξ^i y asumir que la superficie $x^A(\xi^i)$ es la superficie γ_A de interés, de tal forma que la métrica inducida, de la superficie γ_A inmersa en (4.3), está dada por [36]

$$h_{ij} = g_{AB}(x^A(\xi^i)) \frac{\partial x^A}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^B}{\partial \xi^j} \quad , \quad (4.4)$$

y por tanto el elemento de línea en la superficie γ_A d -dimensional es

$$ds_{\gamma_A}^2 = h_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad . \quad (4.5)$$

Establecido esto, podemos plantear un problema variacional definido por una acción, que es precisamente el área funcional de γ_A , es decir, [36]

$$Area(\gamma_A) = \int ds_{\gamma_A} = \int d^d \xi \sqrt{\det h_{ij}} \quad , \quad (4.6)$$

con

$$\mathcal{L} = \sqrt{\det h_{ij}} \quad . \quad (4.7)$$

Así, la superficie de área extremal γ_A es tal que $x^A(\xi^i)$ satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange con las condiciones de frontera $\gamma_A|_{z \rightarrow 0} = \partial A$ [36].

En diversas situaciones, como veremos en la Sección siguiente, es conveniente tomar las coordenadas espaciales x^i como los parámetros ξ^i , de modo que la superficie γ_A d -dimensional está dada por la superficie parametrizada $z(x^i)$. En este caso la métrica inducida toma la forma [52]

$$h_{ij} = g_{ij} + g_{zz} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} \quad , \quad (4.8)$$

y por tanto el área funcional de γ_A está dada por

$$Area(\gamma_A) = \int d^d x \sqrt{\det \left[g_{ij} + g_{zz} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} \right]} \quad , \quad (4.9)$$

con

$$\mathcal{L} = \sqrt{\det \left[g_{ij} + g_{zz} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} \right]} \quad . \quad (4.10)$$

Una vez encontrada la superficie $z(x^i)$ que satisface las ecuación de movimiento, basta con calcular su área evaluando en (4.9) y entonces empleando (4.1) calculamos de forma asombrosamente simple la entropía de entrelazamiento de la región espacial A en la CFT [36]. El cálculo de las ecuaciones de Euler-Lagrange y de la integral (4.9) puede resultar complicado de forma analítica, pero puede ser relativamente sencillo si se emplean técnicas numéricas estándar [36].

4.1.1. Entropía de entrelazamiento en AdS/CFT a $T = 0$

Para entender de mejor forma el uso de la fórmula de Ryu-Takayanagi para el cálculo de la entropía de entrelazamiento holográfica es conveniente presentar algunos ejemplos de la correspondencia AdS/CFT en donde la teoría de campo está a $T = 0$, ya que en general estos casos resultan más sencillos.

Entropía de entrelazamiento para un intervalo en una CFT₂

El ejemplo más simple con el que podemos comenzar a probar la fórmula de Ryu-Takayanagi corresponde al estado de vacío de una CFT en el espacio-tiempo plano $(1 + 1)$ -dimensional cuyo dual holográfico es el espacio-tiempo clásico AdS_3 [37]. En este caso la región espacial A en el espacio-tiempo plano $(1 + 1)$ -dimensional a tiempo fijo $t = t_0$ corresponde a un intervalo de longitud ℓ_A sobre la coordenada espacial x (ver Figura 4.2). La métrica de AdS_3 en coordenadas de Poincaré (3.75) a tiempo fijo $t = t_0$ está dada por

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(dz^2 + dx^2) \quad , \quad (4.11)$$

con $x \in (-\infty, \infty)$ y z la coordenada radial tal que $z \in (0, \infty)$. En este espacio estamos interesados en obtener la superficie extremal γ_A en AdS_3 que cumple $\partial\gamma_A = \partial A$, que en este caso corresponde a la trayectoria de distancia mínima, es decir, la geodésica, que une a los extremos del intervalo A (ver Figura 4.2).

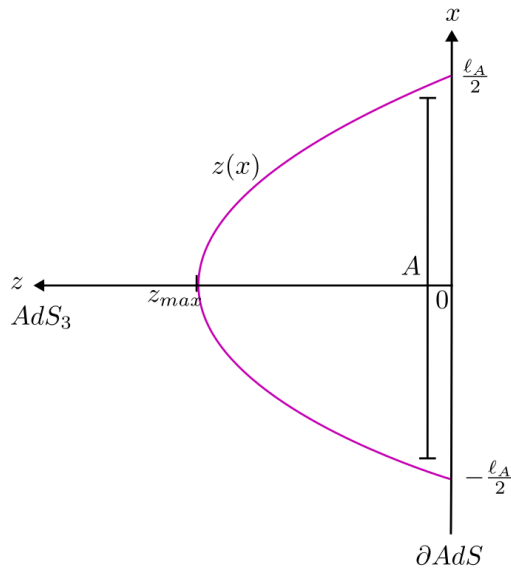


Figura 4.2: Intervalo A de longitud ℓ_A de una CFT definida en el espacio-tiempo plano $(1 + 1)$ -dimensional. La fórmula holográfica de Ryu-Takayanagi requiere una superficie γ_A en AdS_3 tal que $\partial\gamma_A = \partial A$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que el intervalo A en el espacio-tiempo plano está localizado en $x \in [-\frac{\ell_A}{2}, \frac{\ell_A}{2}]$. Se requiere entonces de una superficie extremal γ_A que podemos considerar como una trayectoria parametrizada $z(x)$, de modo que a partir de la métrica (4.11), podemos emplear la ecuación (4.9) para calcular la longitud propia dada por

$$\text{longitud}(\gamma_A) = \int dx \frac{L}{z(x)} \sqrt{1 + \frac{\partial z(x)}{\partial x} \frac{\partial z(x)}{\partial x}} = L \int dx \frac{\sqrt{1 + z'^2(x)}}{z(x)} \quad , \quad (4.12)$$

donde hemos usado $\frac{\partial z(x)}{\partial x} = z'(x)$. La curva γ_A debe ser tal que alcance la frontera en $z = 0$, de modo que, debido al factor $1/z$, la integral (4.12) será divergente. Físicamente esto es consecuencia de que la curva γ_A se extiende hasta la frontera ∂AdS de manera que, debido a la forma de medir distancias en AdS_3 , su longitud propia se vuelve infinita. Este comportamiento es equivalente al hecho de que, como explicamos en la Sección 1.4.1, la entropía de entrelazamiento de una teoría cuántica de campos es divergente [37]. Así que, tal y como hicimos en dicha Sección, para obtener un resultado finito debemos introducir un corte ultravioleta, es decir, una cantidad espacial $\epsilon \rightarrow 0$ que separe la curva γ_A de la frontera ∂AdS , de manera que regularice la divergencia en la longitud. De esta forma, la curva γ_A está definida ahora en $z \in [z_{max}, \epsilon]$, donde z_{max} corresponde al máximo valor que la coordenada z alcanza dentro del espacio-tiempo AdS_3 (ver Figura 4.2).

Como hemos explicado anteriormente, la curva $z(x)$ debe ser de longitud extremal, es decir, debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange, que está dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \right) = 0 \quad , \quad (4.13)$$

donde $\mathcal{L} = \sqrt{1 + z'^2(x)}/z(x)$. Lo que conduce a la siguiente ecuación para $z(x)$,

$$1 + z'^2(x) + z(x)z''(x) = 0 \quad . \quad (4.14)$$

Empleando ahora la condición de frontera $\partial\gamma_A = \partial A$, es decir, $z(x)|_{x \rightarrow \pm \ell_A/2} = 0$, encontramos que la curva de longitud mínima está dada por

$$z(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\ell_A^2 - 4x^2} \quad , \quad (4.15)$$

que podemos reordenar para encontrar la siguiente expresión,

$$z^2 + x^2 = \left(\frac{\ell_A}{2} \right)^2 \quad , \quad (4.16)$$

que para $z > 0$ no es más que la semicircunferencia de radio $\ell_A/2$ en el plano xz . Con esto, el corte ultravioleta ϵ se convierte en una restricción para x , tal que $x \in$

$[-\frac{\ell_A}{2} + \frac{\epsilon^2}{\ell_A}, \frac{\ell_A}{2} - \frac{\epsilon^2}{\ell_A}]$. Así, la longitud propia de la geodésica $\gamma_{A,min}$ está dada por

$$longitud(\gamma_{A,min}) = 2L \int_0^{\ell_A/2 - \epsilon^2/\ell_A} dx \frac{\ell_A/2}{(\ell_A/2)^2 - x^2} \quad , \quad (4.17)$$

donde, debido a que la geodésica es simétrica respecto al eje z , integramos dos veces en $x \in [0, \frac{\ell_A}{2} - \frac{\epsilon^2}{\ell_A}]$, o equivalentemente $z \in [z_{max}, \epsilon]$. Evaluando la integral (4.17) obtenemos que la longitud propia de la geodésica está dada por

$$longitud(\gamma_{A,min}) = 2L \log \left(\frac{\ell_A}{\epsilon} \right) \quad . \quad (4.18)$$

Evaluando ahora en la fórmula holográfica de Ryu-Takayanagi (4.1) tenemos que la entropía de entrelazamiento de la región espacial A en la CFT mencionada está dada por

$$S_{HEE}(A) = \frac{longitud(\gamma_{A,min})}{4G_N^3} = \frac{L}{2G_N^3} \log \left(\frac{\ell_A}{\epsilon} \right) \quad . \quad (4.19)$$

Este resultado coincide con el que se obtuvo en [37] para la misma configuración, y podemos notar que cumple la estructura general de la entropía de entrelazamiento para una CFT presentada en la ecuación (1.160). De la expresión (4.19) podemos ver además que la HEE está en función de $1/\epsilon$, de modo que crece tanto como $\epsilon \rightarrow 0$. Esto significa que la HEE es aún divergente. Físicamente esto se debe a que la curva γ_A se acerca a la frontera tanto como $\epsilon \rightarrow 0$. Sin embargo, al tomar un valor específico para ϵ , el resultado (4.19) adquiere un valor finito.

En particular, en el diccionario de la correspondencia CFT_2/AdS_3 se encuentra que la carga central c de la CFT está relacionada con los parámetros de AdS como [12]

$$c = \frac{3L}{2G_N^3} \quad . \quad (4.20)$$

Por lo que la entropía de entrelazamiento de la región A (4.19) puede ser escrita finalmente como

$$S_{HEE}(A) = \frac{c}{3} \log \left(\frac{\ell_A}{\epsilon} \right) \quad . \quad (4.21)$$

Este resultado está en perfecto acuerdo con el resultado (1.161) presentado en la Sección 1.4.1. Así, sorprendentemente, empleando la fórmula holográfica de Ryu-Takayanagi y siguiendo este sencillo desarrollo clásico, hemos reproducido un cálculo de la entropía de entrelazamiento hecho con herramientas de QFT, que en general resulta complicado. Como veremos más adelante, esto puede ser extendido a otras configuraciones, así como a otros ejemplos de la correspondencia AdS/CFT, con CFTs

con diferentes propiedades y en distintas dimensiones espacio-temporales.

En ciertos contextos, parte de la evidencia a favor de la propuesta de Ryu-Takayanagi proviene del hecho de la entropía de entrelazamiento holográfica reproduce las propiedades de la entropía de entrelazamiento dadas por las desigualdades escritas en la Sección 1.4.1 [51]. Por ejemplo, la configuración que hemos descrito, de la entropía de entrelazamiento holográfica para una CFT en el espacio-tiempo plano $(1 + 1)$ -dimensional, puede darnos además una prueba sencilla de la subaditividad fuerte, propiedad expresada en las ecuaciones (1.156) y (1.157): Supongamos tres regiones espaciales en la CFT_2 , A , B y C , que no se superponen. Consideremos ahora la entropía de entrelazamiento de la región $A+B$, S_{A+B} , y la entropía de entrelazamiento de la región $B+C$, S_{B+C} . En la descripción holográfica debemos considerar las geodésicas γ_{A+B} y γ_{B+C} que satisfacen las condiciones de frontera $\partial\gamma_{A+B} = \partial(A+B)$ y $\partial\gamma_{B+C} = \partial(B+C)$ respectivamente (ver Figura 4.3). Visualmente es posible notar que podemos dividir estas dos geodésicas en cuatro segmentos (ver Figura 4.3 a) y recombinarlos en dos curvas γ'_X que satisfacen $\partial\gamma'_X = \partial(X)$. Ya que en general las curvas γ'_X no son de longitud mínima, se cumple que $longitud(\gamma'_X) \geq longitud(\gamma_X)$, donde γ_X son las geodésicas que cumplen $\partial\gamma_X = \partial(X)$. Esto puede llevarse a cabo de dos formas distintas [51]:

I) Curvas γ'_B y γ'_{A+C} (ver Figura 4.3 b) que satisfacen

$$long(\gamma_{A+B}) + long(\gamma_{B+C}) = long(\gamma'_{A+B+C}) + long(\gamma'_B) \geq long(\gamma_{A+B+C}) + long(\gamma_B),$$

lo que implica la propiedad de subaditividad fuerte (1.156), es decir,

$$S_{HEE}(A+B) + S_{HEE}(B+C) \geq S_{HEE}(A+B+C) + S_{HEE}(B) \quad . \quad (4.22)$$

II) Curvas γ'_A y γ'_C (ver Figura 4.3 c) que satisfacen

$$long(\gamma_{A+B}) + long(\gamma_{B+C}) = long(\gamma'_A) + long(\gamma'_C) \geq long(\gamma_A) + long(\gamma_C) \quad ,$$

lo que implica la propiedad de subaditividad fuerte (1.157), es decir,

$$S_{HEE}(A+B) + S_{HEE}(B+C) \geq S_{HEE}(A) + S_{HEE}(C) \quad . \quad (4.23)$$

Otro aspecto interesante que podemos explorar con este ejemplo es considerando AdS_3 en coordenadas globales. En este caso la CFT_2 está definida sobre el espacio-tiempo $\mathbb{R}_t \times S^1$, que a tiempo fijo $t = t_0$ es simplemente la circunferencia S^1 de radio L con métrica $ds^2 = Ld\theta^2$, con θ la coordenada angular. La región A en la CFT_2 corresponde entonces al segmento de longitud ℓ_A tal que $\theta \in [0, 2\pi\ell_A/L]$. El espacio-tiempo de AdS_3 puede ser visualizado como un cilindro cuya coordenada vertical es la coordenada temporal t (ver Figura 4.4). La métrica de AdS_3 en coordenadas globales en términos de la coordenada radial $r = L^2/z$ puede ser descrita por la ecuación (2.35), tal que a tiempo fijo $t = t_0$ está dada por

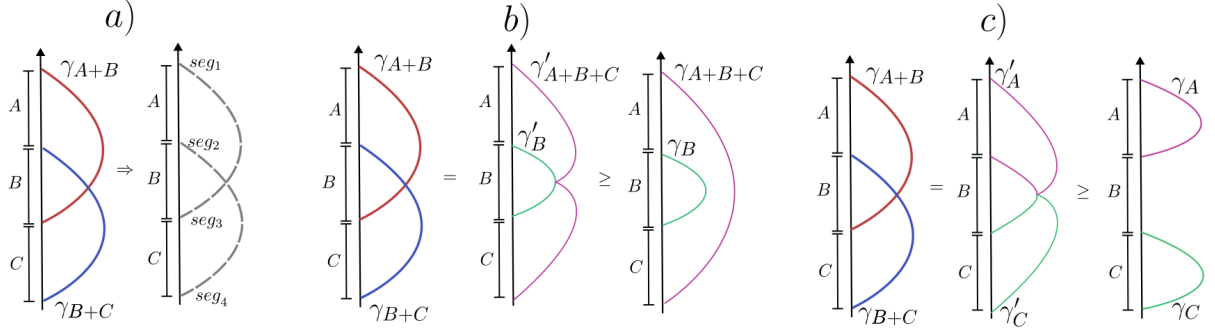


Figura 4.3: Ilustración de la propiedad de subaditividad fuerte de la entropía de entrelazamiento holográfica.

$$ds^2 = f(r)^{-1}dr + r^2d\theta^2 \quad , \quad (4.24)$$

donde

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{L^2} \quad , \quad (4.25)$$

tal que el borde de AdS global se encuentra en $r \rightarrow \infty$.

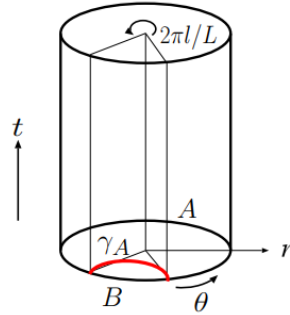


Figura 4.4: Rrepresentación del espacio-tiempo AdS_3 en coordenadas globales. A representa la región entrelazada en la CFT_2 y γ_A la curva extremal. Imagen tomada de [32].

Estamos interesados entonces en obtener la geodésica γ_A en AdS_3 global que cumple $\partial\gamma_A = \partial A$, es decir, la geodésica que conecta los puntos de la frontera $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi\ell_A/L$ en $r \rightarrow \infty$ (ver Figura 4.4). Como antes, podemos considerar la curva γ_A como la trayectoria parametrizada $r(\theta)$, de modo que su longitud propia está dada por

$$longitud(\gamma_A) = \int d\theta \sqrt{r^2(\theta) + \frac{r'^2(\theta)}{f(r(x))}} \quad , \quad (4.26)$$

con

$$\mathcal{L} = \sqrt{r^2(\theta) + \frac{r'^2(\theta)}{f(r(x))}} \quad , \quad (4.27)$$

donde $r'(\theta) = \partial r(\theta)/\partial \theta$. La geodésica $r(\theta)$ es la curva que satisface las correspondiente ecuación de Euler-Lagrange sujeta a las condiciones de frontera que, dada la simetría de la curva, pueden ser escritas como $r(\theta)|_{\theta \rightarrow 0} = r_{min}$, donde r_{min} se refiere al valor mínimo que toma la coordenada radial dentro de AdS_3 global, y $r(\theta)|_{\theta \rightarrow \theta_0} \rightarrow \infty$, donde $\theta_0 = \pi \ell_A/L$. Análogamente a como explicamos antes, podemos notar que en $r(\theta) \rightarrow \infty$ la expresión (4.26) diverge, por lo que debemos introducir un corte ultravioleta $\epsilon \rightarrow 0$ en la coordenada radial, tal que $r(\theta)|_{\theta \rightarrow \theta_0} \rightarrow L^2/2\pi\epsilon$.

Resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange con las condiciones de contorno dadas, sustituyendo en (4.26) y resolviendo la integral incluyendo el corte ultravioleta ϵ , se encuentra que la logitud propia de la geodésica γ_A está dada por

$$longitud(\gamma_{A,min}) = 2L \log \left(\frac{L \sin \theta_0}{\pi \epsilon} \right) = 2L \log \left(\frac{L}{\pi \epsilon} \sin \left(\frac{\pi \ell_A}{L} \right) \right) \quad . \quad (4.28)$$

Empleando la fórmula holográfica (4.1) calculamos entonces la entropía de entrelazamiento holográfica de la región A en la CFT, que está dada por

$$S_{HEE}(A) = \frac{longitud(\gamma_{A,min})}{4G_N^3} = \frac{c}{3} \log \left(\frac{L}{\pi \epsilon} \sin \left(\frac{\pi \ell_A}{L} \right) \right) \quad , \quad (4.29)$$

donde c es la carga central de la CFT dada por (4.20). Este resultado coincide con la entropía de entrelazamiento holográfica calculada en [32] y con con el resultado obtenido a partir de las herramientas estándar de QFT presentado en la ecuación (1.162). Así, la correspondencia AdS_3/CFT_2 por medio de la fórmula de Ryu-Takayanagi nos ha permitido realizar de forma sencilla el cálculo de la entropía de entrelazamiento en el estado de vacío y en una elección particular de una teoría de campos en el régimen fuertemente acoplado. Lo siguiente es emplear la fórmula holográfica en ejemplos de la correspondencia AdS/CFT con un número mayor de dimensiones.

Entropía de entrelazamiento para una esfera en una CFT_4

Un ejemplo interesante para usar la fórmula de Ryu-Takayanagi es en AdS_5/CFT_4 , pues fue con este ejemplo que realizamos la deducción de la correspondencia AdS/CFT en el Capítulo 3. Consideremos el estado de vacío de la CFT_4 en el espacio-tiempo plano cuya métrica a tiempo fijo $t = t_0$ en coordenadas esféricas está dada por $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin \theta d\phi^2$, con $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Por simplicidad,

tomemos la región espacial A 3-dimensional en la CFT_4 como la esfera sólida de radio R , tal que $r \in [0, R]$, de modo que la frontera ∂A corresponde a la esfera S^2 de radio R . Por su parte, la métrica de AdS_5 a tiempo fijo en coordenadas de Poincaré puede ser escrita como

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin \theta d\phi^2) \quad . \quad (4.30)$$

Estamos interesados entonces en obtener una superficie γ_A embebida en AdS_5 tal que $\partial\gamma_A = \partial A$. Dada la simetría esférica del problema, consideremos la superficie parametrizada $z(r)$. Empleando la ecuación (4.9) y la métrica (4.30) se encuentra que el área propia de la superficie $z(r)$ está dada por

$$Area(\gamma_A) = L^3 4\pi \int_0^{r_0} dr \frac{r^2 \sqrt{1 + z'^2}}{z^3} \quad . \quad (4.31)$$

Con esto, proponemos que la superficie extremal $z(r)$ es [51]

$$z^2 = R^2 - r^2 \quad . \quad (4.32)$$

Es sencillo comprobar que (4.32) satisface la ecuación de Euler-Lagrange sujeta a la condición de frontera $\partial\gamma_A = \partial A$, es decir, $z(r_0)|_{r_0 \rightarrow \pm R} = 0$. Por otra parte, podemos notar que en $z(r_0) = 0$ la integral (4.31) diverge debido al factor $1/z^3$, de modo que debemos introducir un corte ultravioleta $\epsilon \rightarrow 0$, tal que $r_0 = R - \epsilon^2/R$. Como hemos explicado anteriormente, esta divergencia surge del hecho de que las superficies se extienden hasta la frontera ∂AdS , de modo que su área propia resulta infinita.

Así, sustituyendo (4.32) en (4.31), incluyendo el corte ultravioleta, y resolviendo la integral, se encuentra que el área propia de la superficie extremal $\gamma_{A,min}$ está dada por

$$Area(\gamma_{A,min}) \simeq \frac{L^3 \pi}{2} \left(\frac{2R^2}{\epsilon^2} - 4 \log[R/\epsilon] - (1 + 2 \log[2]) \right) \quad . \quad (4.33)$$

Por tanto, la entropía de entrelazamiento de la esfera A de radio R en la CFT_4 , empleando la fórmula holográfica (4.1), está dada por

$$S_{HEE}(A) = \frac{Area(\gamma_{A,min})}{4G_N^5} \simeq \frac{L^3 \pi}{8G_N^5} \left(\frac{2R^2}{\epsilon^2} - 4 \log[R/\epsilon] - (1 + 2 \log[2]) \right) \quad . \quad (4.34)$$

De este resultado tenemos que los dos primeros términos dentro del paréntesis en (4.34) están en función del inverso del corte ultravioleta ϵ , lo que, tal y como explicamos antes, significa que estos términos son aún divergentes. Con esto, podemos definir el término divergente de la HEE como

$$S_{HEE}^{div}(A) = \frac{L^3 \pi}{8G_N^5} \left(\frac{2R^2}{\epsilon^2} - 4 \log[R/\epsilon] \right) \quad . \quad (4.35)$$

Podemos notar que este término, obtenido con la fórmula de Ryu-Takayanagi, está en acuerdo con la ley del área de la entropía de entrelazamiento así como con la estructura general de la entropía de entrelazamiento para el estado de vacío de una CFT_4 presentada en la ecuación (1.160). Así mismo, podemos definir el término finito de la HEE como

$$S_{HEE}^{fin}(A) = -\frac{L^3\pi}{8G_N^5} (1 + 2 \log[2]) \quad . \quad (4.36)$$

Por tanto, la entropía de entrelazamiento de la región A puede ser escrita como

$$S_{HEE}(A) \simeq S_{HEE}^{div}(A) + S_{HEE}^{fin}(A) \quad . \quad (4.37)$$

En particular, empleando el diccionario de la correspondencia, discutido en la Sección 3.2.2, se puede mostrar que la constante de Newton 5 dimensional G_N^5 se relaciona con la constante 10 dimensional G_N^{10} como [32]

$$G_N^5 = \frac{G_N^{10}}{\pi^3 L^5} \quad . \quad (4.38)$$

Empleando ahora la relación de los parámetros de SYM $\mathcal{N} = 4$ y la teoría gravitacional escrita en la ecuación (3.73), se encuentra que la constante G_N^5 está dada por [47]

$$G_N^5 = \frac{L^3\pi}{2N^2} \quad . \quad (4.39)$$

Por tanto, podemos escribir la expresión para la entropía de entrelazamiento de una esfera de radio R en la teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$ como

$$S_{HEE}(A) \simeq N^2 \left(\frac{R^2}{2\epsilon^2} - \log[R/\epsilon] - (1 + 2 \log[2]) \right) \quad . \quad (4.40)$$

Este resultado está en acuerdo con el calculado en [32]. Con esto hemos revisado algunos ejemplos del cálculo de la entropía de entrelazamiento holográfica en el contexto de la correspondencia AdS/CFT donde la CFT está a temperatura $T = 0$, y con ello hemos obtenido resultados que están de acuerdo con los que se obtienen empleando las técnicas estándar en algunas QFT, que como mencionamos antes resulta en general muy complicado. Además de lo que hemos descrito en este trabajo, los ejemplos del uso de dicha fórmula son variados. Por ejemplo, en [32] se calcula la HEE para una CFT en un número arbitrario de $d+1$ dimensiones espacio-temporales. Por otro lado, en [36] se calcula la HEE en ejemplos de la correspondencia AdS/CFT donde la CFT se encuentra a una temperatura T finita. Todo esto muestra que la fórmula de Ryu-Takayanagi es, como esperábamos, una herramienta muy útil en el estudio de la entropía de entrelazamiento para ciertas CFT.

4.2. Agujeros de gusano y entropía de entrelazamiento

Una vez que hemos descrito y presentado ejemplos de la fórmula de Ryu-Takayanagi, emplearemos el concepto de la entropía de entrelazamiento holográfica para investigar la relación entre geometrías de agujero de gusano y el entrelazamiento cuántico en el contexto de la correspondencia AdS/CFT. Esto motivado por el trabajo de Maldacena y Susskind [1], que revisaremos en la Sección siguiente, en el cual se conjetura que ciertas geometrías de agujero de gusano son duales a algunos estados entrelazados particulares en la CFT dual. En particular, en este trabajo examinaremos superficies extremales en la geometría de un agujero de gusano, que tiene dos regiones asintóticamente AdS, con el fin de analizar el entrelazamiento en las correspondientes teorías duales.

4.2.1. Conjetura ER=EPR

La relación entre geometrías de agujero de gusano y entrelazamiento cuántico fue presentada por primera vez en [45]. En el contexto de la correspondencia AdS/CFT un agujero negro eterno de Schwarzschild en un espacio-tiempo asintóticamente AdS es dual al estado de una CFT a temperatura $T \neq 0$ [47]. En su lugar, Maldacena consideró la extensión maximal del agujero negro de Schwarzschild-AdS que, como vimos en la Sección 2.3.1, puede ser visualizado a través del diagrama de Penrose de la Figura 2.8. De dicha Figura podemos notar que el agujero negro Schwarzschild-AdS tiene dos regiones asintóticamente AdS. Sin entrar en detalles, la propuesta de Maldacena es que la extensión maximal del espacio-tiempo del agujero negro de Schwarzschild-AdS es dual a dos copias idénticas no interactuantes de la misma CFT a temperatura T finita [45]. Dicho de otra forma, el lado derecho del diagrama de Penrose es dual a una copia de la CFT_1 , mientras que el lado izquierdo es dual a la segunda copia CFT_2 (ver Fig. 4.5) [37].

Por otro lado, hemos visto que las dos regiones asintóticamente AdS del agujero negro de Schwarzschild-AdS están conectadas por un agujero de gusano. En [45] Maldacena propone que la existencia de este agujero de gusano, que conecta dichas regiones asintóticamente AdS, en el diccionario de la correspondencia AdS/CFT se traduce en el entrelazamiento entre ciertos estados de la CFT_1 con la CFT_2 . Esto significa que ambas teorías no interactuantes se encuentran cierto estado entrelazado $|\Psi\rangle$, tal que las funciones de correlación entre ambas teorías, $\langle\Psi|\hat{O}_1\hat{O}_2|\Psi\rangle$, son diferentes de cero [37]. Dicho de otra forma, la propuesta de Maldacena es que la geometría de un agujero de gusano que conecta dos regiones asintóticamente AdS es dual a dos copias no interactuantes de la misma CFT en un cierto estado entrelazado [45].

Esta idea fue generalizada en el trabajo de Maldacena y Susskind [1], en el que propusieron que el estado de dos agujeros negros conectados por un agujero de gu-

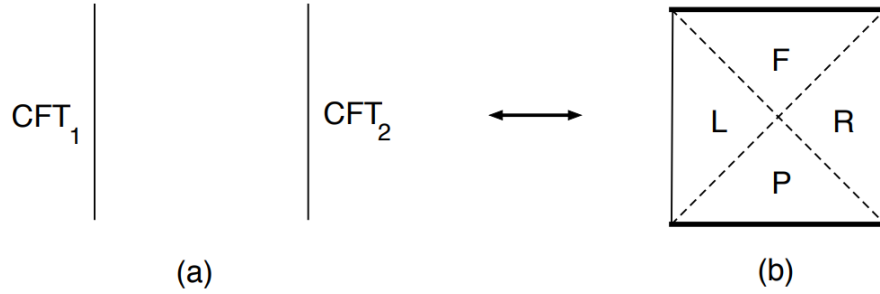


Figura 4.5: En [45] Maldacena propone que dos CFTs no interactuantes (a) están entrelazadas debido al agujero de gusano que conecta las dos regiones asintóticamente AdS (b) de la teoría dual. Imagen obtenida de [53].

sano, también llamado puente de Einstein-Rosen (ER), debe ser interpretado como un estado en el que los agujeros negros están máximamente entrelazados. La conjetura también afirma el sentido inverso, es decir, que cualquier estado entrelazado, aún sea solo un par de partículas entrelazadas que forman un par EPR, están conectados por algún tipo de puente de Einstein-rosen [1]. Esta propuesta es la llamada *conjetura ER = EPR* [1].

La conjetura ER=EPR postula entonces la sorprendente equivalencia entre dos conceptos muy interesantes en la física: el entrelazamiento cuántico y los agujeros de gusano. La exploración de esta hipótesis, en consecuencia, resulta ser un área de considerable interés, y es en este contexto en el que hemos decidido abordar su estudio en el presente trabajo. En particular, la conjetura ER=EPR, propone una relación entre geometría y entrelazamiento cuántico, por lo que está cercanamente relacionada con la entropía de entrelazamiento holográfica HEE. Por ejemplo, en [54] se proporcionó evidencia de la conjetura ER=EPR al corroborar que la entropía geométrica de los agujeros de gusano clásicos satisfacen las desigualdades de la entropía de entrelazamiento. Otro ejemplo es el proporcionado en [55], en el que Susskind argumenta, empleando la correspondencia de Ryu-Takayanagi, el por qué el entrelazamiento entre agujeros negros implica la existencia de puentes de Einstein-Rosen. En este trabajo estamos interesados en explorar esta dirección de la conjetura ER=EPR con el fin de aportar evidencia de la misma. Para esto, emplearemos la fórmula de Ryu-Takayanagi para analizar la entropía de entrelazamiento holográfica en la configuración de cierto agujero de gusano asintóticamente AdS.

4.2.2. Agujero de gusano en AdS_5

La geometría espacio-temporal en la que estamos interesados en este trabajo es la de un agujero de gusano asintóticamente AdS_5 , solución a las ecuaciones de Supergravedad tipo IIB, obtenido como una modificación de la solución $AdS_5 \times S^5$. La

métrica de esta geometría está dada por [50]

$$ds^2 = \left(\frac{H(u)}{\cos u} \right)^{1/2} \left(\frac{a^2 du^2}{16 \cos^2 u} + a^2 d\Omega_5^2 \right) + H(u)^{-1/2} (\cos v (-dt^2 + dz^2) + 2 \sin v dt dz + dx_1^2 + dx_2^2) \quad , \quad (4.41)$$

donde se definen las siguientes funciones,

$$H(u) = \left(\frac{l}{4} \right) \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \quad , \quad (4.42)$$

$$v = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \quad , \quad (4.43)$$

$$u = 2 \arcsin \left(\frac{r (r^2 + 2a^2)^{1/2}}{\sqrt{2} (r^2 + a^2)} \right) \quad , \quad (4.44)$$

de modo que la coordenada radial u toma los valores $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$. El parámetro a puede ser interpretado como el tamaño de la garganta del agujero de gusano [50]. Para analizar el espacio-tiempo descrito por la métrica (4.41) consideremos el infinito en la coordenada radial, es decir, el límite $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$: Tomando $u \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{a^4}{r^2}$ se obtiene

$$H(u) \simeq \frac{l^4}{r^4}, \quad v \simeq \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{a^4}{r^2} \right), \quad du^2 \simeq 16 \left(\frac{a^4}{r^2} \right)^2 \frac{dr^2}{r^2}.$$

Tomando ahora $r \rightarrow \infty$, tal que $\frac{a^4}{r^4} \ll 1$, se obtiene

$$\cos u \simeq \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a^4}{r^4} \right) = \sin \left(\frac{a^4}{r^4} \right) \simeq \frac{a^4}{r^4} \quad ,$$

$$\cos v \simeq \cos \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{a^4}{r^2} \right) \simeq 1 \quad , \quad \sin v \simeq \sin \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{a^4}{r^2} \right) \simeq \frac{a^4}{r^4} \quad .$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.41) la métrica adquiere la siguiente forma

$$ds_{u \rightarrow +\frac{\pi}{2}}^2 \simeq \frac{l^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} (-dt^2 + dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2) + l^2 d\Omega_5^2 \quad ,$$

que podemos identificar como la métrica del espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$ en coordenadas de Poincaré, con el parámetro l como el radio del espacio-tiempo AdS_5 . De igual forma es posible explorar el otro extremo en la coordenada radial, es decir, el límite $u \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, con lo se obtiene la métrica dada por [50],

$$ds_{u \rightarrow -\frac{\pi}{2}}^2 \simeq \frac{\sqrt{\pi} l^2}{a^2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) + \frac{a^2}{\sqrt{\pi} l^2} [\cos v_0 (-dt^2 + dz^2) + 2 \sin v_0 dt dz + dx_1^2 + dx_2^2] \quad , \quad (4.45)$$

donde se ha definido $v_0 = \pi\sqrt{5}/2$. Es posible mostrar que la métrica (4.45) describe un espacio-tiempo plano $9 + 1$ dimensional \mathbb{R}^{9+1} [50]. Con esto podemos interpretar la geometría descrita por la métrica (4.41) como la de un agujero de gusano que conecta las regiones asintóticas $AdS_5 \times S^5$ (en $u \rightarrow +\frac{\pi}{2}$) y \mathbb{R}^{9+1} (en $u \rightarrow -\frac{\pi}{2}$) [50]. De acuerdo a la propuesta de Maldacena y Susskind esta geometría podría tener por dual holográfico a dos teorías de campo no interactuantes en un particular estado entrelazado.

Es posible además realizar una reducción dimensional de la métrica (4.41), con lo que se obtiene un espacio-tiempo 5-dimensional cuya métrica está dada por [50]

$$ds^2 = \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{10}{3}} \left[\frac{a^2 du^2}{16 \cos^2 u} \left(\frac{H(u)}{\cos u}\right) + \frac{H(u)^{1/3}}{(\cos u)^{5/6}} (\cos v (-dt^2 + dz^2) + 2 \sin v dt dz + dx_1^2 + dx_2^2) \right] . \quad (4.46)$$

De esta métrica se puede demostrar que no hay geodésicas tipo-tiempo o tipo-luz que conecten las dos regiones asintóticas, por lo que la geometría se trata de un agujero de gusano no atravesable. Sin embargo, se encuentra que hay trayectorias tipo-tiempo no-geodésicas que sí conectan dichas regiones [50].

4.2.3. Entropía de entrelazamiento holográfica de la CFT_4 dual al agujero de gusano en AdS_5

Al igual que hicimos en los ejemplos anteriores para calcular la HEE, a continuación consideramos un particular subsistema de una CFT_4 , en una región espacial A , dual a la geometría del agujero de gusano asintóticamente AdS_5 . En particular, consideremos la región espacial A descrita como una banda extendida en las direcciones x_1 y z , definida como:

$$A = \{(x_1, x_2, z) \mid -\infty < x_1, z < \infty, -L/2 < x_2 < L/2\} . \quad (4.47)$$

Podemos tomar entonces la rebanada de la métrica 5-dimensional de la geometría del agujero de gusano (4.46) a tiempo fijo $t = 0$, tal que

$$ds^2 = \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{10}{3}} \left[\frac{a^2 du^2}{16 \cos^2 u} \left(\frac{H(u)}{\cos u}\right)^{4/3} + \frac{H(u)^{1/3}}{(\cos u)^{5/6}} (\cos(v) dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2) \right] . \quad (4.48)$$

Dada la geometría de la región A es conveniente considerar una superficie γ_A , embebida en el espacio-tiempo con métrica $g_{\mu\nu}$, con $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 4$, escrita en (4.41), como la superficie parametrizada $x_2 = x_2(u)$ (ver Fig. 4.6). La métrica inducida h_{ij} , con $i, j = 1, 2, 3$, de la superficie 3-dimensional γ_A tiene la siguiente forma,

$$h_{uu} = g_{uu} + g_{x_2x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u} = \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{10}{3}} \left[\frac{a^2}{16 \cos^2 u} \left(\frac{H(u)}{\cos u}\right)^{4/3} + \frac{H(u)^{1/3}}{\cos^{5/6} u} (x_2')^2 \right] ,$$

$$h_{zz} = g_{zz} + g_{x_2x_2} \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial z} = \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{10}{3}} \frac{H(u)^{1/3}}{\cos^{5/6} u} \cos v ,$$

$$h_{x_1x_1} = g_{x_1x_1} + g_{x_2x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{10}{3}} \frac{H(u)^{1/3}}{\cos^{5/6} u} .$$

De modo que el determinante de la métrica inducida h_{ij} está dado por

$$\det h = h_{uu} h_{zz} h_{x_1x_1} = \left(\frac{a}{l}\right)^{10} \frac{H(u)}{\cos^{5/2} u} \cos v \left[\frac{a^2 H(u)}{16 \cos^{5/2} u} + (x_2')^2 \right] .$$

Por tanto, el área de la superficie γ_A está dada por

$$Area(\gamma_A) = \left(\frac{a}{l}\right)^5 \int dx_1 dz du \frac{H(u)^{1/2}}{\cos^{5/4} u} \sqrt{L_1} , \quad (4.49)$$

donde hemos definido L_1 como

$$L_1 = \cos v \left[\frac{a^2 H(u)}{16 \cos^{5/2} u} + (x_2')^2 \right] . \quad (4.50)$$

Con esto, tenemos que

$$\mathcal{L} = \frac{H(u)^{1/2}}{\cos^{5/4} u} \sqrt{L_1} . \quad (4.51)$$

Como hemos explicado antes, para calcular la entropía de entrelazamiento la superficie parametrizada $x_2(u)$ debe satisfacer las ecuaciones de movimiento de (4.49). De dichas ecuaciones se encuentra que

$$\frac{d}{du} \left[\frac{\partial}{\partial(x_2')} \left(\frac{H(u)^{1/2}}{\cos^{5/4} u} \sqrt{L_1} \right) \right] = 0 ,$$

lo que conduce a la siguiente cantidad conservada [50],

$$\frac{\partial}{\partial(x_2')} \left(\frac{H(u)^{1/2}}{\cos^{5/4} u} \sqrt{L_1} \right) = 1/\alpha , \quad (4.52)$$

con $1/\alpha$ una constante de integración. Es posible reescribir la ecuación (4.52) de forma más sencilla como

$$\frac{H^{1/2} \cos v x_2'}{\cos^{5/4} u \sqrt{L_1}} = 1/\alpha . \quad (4.53)$$

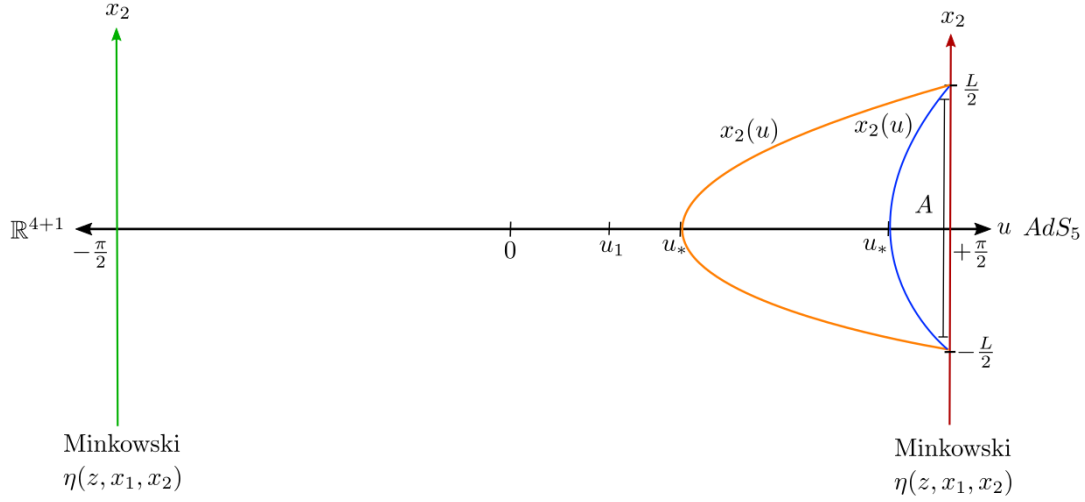


Figura 4.6: Ilustración de la geometría del agujero de gusano descrito por la métrica (4.41). La línea negra horizontal ilustra la coordenada radial u . Este es un agujero de gusano que conecta las regiones asintóticas AdS_5 en $u \rightarrow +\frac{\pi}{2}$, y \mathbb{R}^{9+1} en $u \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. El segmento A de longitud L es ilustrado por la línea vertical negra. Para cada valor de L existen dos superficies extremales $x_2(u)$ que se introducen en el bulto hasta una distancia radial máxima u_* . Una de tales dos superficies se introduce más en el bulto (naranja) mientras que la otra se aproxima más a la frontera (azul). u_1 es el valor máximo que puede tomar u_* .

Por otra parte, ya que se cumple $\partial\gamma_A = \partial A$, es decir, $x_2(u)|_{u \rightarrow \pi/2} = \pm L/2$, que físicamente significa que la superficie debe entrar en el bulto y luego retornar a la frontera ∂AdS , se sigue que en la distancia radial mínima u_* que la superficie puede alcanzar dentro del bulto (ver Fig. 4.6), la derivada de $x(u)$ diverge, es decir $x'_2(u_*) \rightarrow \infty$. Tomando entonces el límite $x'_2(u_*) \rightarrow \infty$ se encuentra que

$$\alpha^2 = f(u_*) \quad , \quad (4.54)$$

donde se ha definido

$$f(u) \equiv \frac{\cos^{5/2} u}{H \cos v} \quad . \quad (4.55)$$

Reescribiendo (4.53) en términos de $f(u)$, se obtiene

$$\frac{\cos v (x'_2)^2}{f(u) L_1} = \frac{1}{f(u_*)} \quad ,$$

de donde se tiene que

$$x'_2(u) = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{1}{\cos v [f(u_*) - f(u)]}} \quad . \quad (4.56)$$

De (4.56) se obtiene inmediatamente que la expresión para la superficie extremal $x_2(u)$ finalmente está dada por

$$x_2(u) = \frac{a}{4} \int_{u_*}^u \frac{du}{\sqrt{\cos v [f(u_*) - f(u)]}} \quad . \quad (4.57)$$

Con esto podemos reescribir el área de la superficie γ_A dada por la ecuación (4.49) como,

$$Area(\gamma_A) = 2 \left(\frac{a}{l}\right)^5 \int dx_1 dz du \frac{H(u)^{1/2}}{\cos^{5/4} u} \sqrt{L_1} = \frac{a}{2} \left(\frac{a}{l}\right)^5 L_\perp \int_{u_*}^{\pi/2} \frac{1}{f(u)} \sqrt{\frac{f(u_*)}{\cos v [f(u_*) - f(u)]}} \quad , \quad (4.58)$$

donde L_\perp es la longitud perpendicular de la banda, es decir, en las direcciones x_1 y z , y se asume además que $L_\perp \gg L$.

Podemos ver ahora que en el límite $u \rightarrow \pi/2$, es decir, en la región cerca de la frontera ∂AdS , se encuentra que el integrando en (4.58) toma la siguiente forma,

$$\frac{1}{f(u)} \sqrt{\frac{f(u_*)}{\cos v [f(u_*) - f(u)]}} \simeq \left(\frac{l}{a}\right)^4 \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^{3/2}} \quad , \quad (4.59)$$

de modo que el área (4.58), como esperamos, diverge. Tal y como hemos explicado antes, esta divergencia se debe a que las superficies se extienden hasta la frontera ∂AdS , lo que resulta en que su área propia sea infinita. Como hemos hecho anteriormente, para regularizar el área propia introducimos un corte ultravioleta $\epsilon \rightarrow 0$ en $u = \frac{\pi}{2} - \epsilon$, tal que el área regularizada está dada por

$$\begin{aligned} Area_{reg}(\gamma_A) &= \frac{a}{2} \left(\frac{a}{l}\right)^5 L_\perp \int_{\frac{\pi}{2} - \epsilon}^{\epsilon} d\epsilon \left(\frac{l}{a}\right)^4 \frac{1}{\epsilon^{3/2}} + (\text{contribución finita}) \quad , \\ &= \left[\frac{a^2 L_\perp^2}{l\sqrt{\epsilon}} - \frac{a^2 L_\perp^2}{l\sqrt{\frac{\pi}{2} - u_*}} \right] + (\text{contribución finita}) \quad , \\ &= \frac{a^2 L_\perp^2}{l\sqrt{\epsilon}} + Area_{fin}(\gamma_A) \quad . \end{aligned} \quad (4.60)$$

En (4.60) el término denominado (contribución finita) se refiere a la integral del área (4.58) evaluada lejos de la frontera ∂AdS , es decir, en el intervalo en el que el integrando en (4.58) toma la forma del lado izquierdo de la igualdad (4.59). Por otra parte, notamos que el primer término en la última igualdad de (4.60) está en función del inverso del corte ultravioleta ϵ , lo que implica que, como hemos explicado anteriormente, este término crece a medida que $\epsilon \rightarrow 0$, de modo que dicho término es todavía divergente. Físicamente este resultado se debe a que las superficies se extienden hacia la frontera ∂AdS tanto como $\epsilon \rightarrow 0$, por lo que su área propia crece.

Sin embargo, al elegir un valor específico para ϵ , el primer término en (4.60) resulta ser finito. Con esto, empleando la fórmula de Ryu-Takayanagi, tenemos que la entropía de entrelazamiento que surge del término dependiente del corte ultravioleta ϵ del área regularizada, denominado término divergente de la entropía de entrelazamiento, está dado por

$$S_{HEE}^{div}(A) = \frac{a^2 L_{\perp}^2}{4G_N^5 l \sqrt{\epsilon}} \quad . \quad (4.61)$$

Podemos ver además que el término (4.61) está de acuerdo con la ley del área de la entropía de entrelazamiento. Por otra parte, de (4.60) se encuentra que el área finita independiente del corte ultravioleta está dada por

$$\begin{aligned} Area_{\text{fin}}(\gamma_A) = & \frac{a^2 L_{\perp}^2}{l} \frac{1}{2} \int_{u_*}^{\pi/2} du \left\{ \left(\frac{a}{l} \right)^4 \frac{1}{f(u)} \sqrt{\frac{f(u_*)}{\cos v [f(u_*) - f(u)]}} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - u \right)^{3/2}} \right\} \\ & - \frac{a^2 L_{\perp}^2}{l} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - u_*}} \quad . \end{aligned} \quad (4.62)$$

Este resultado para el área finita de las superficies extremales concuerda con el obtenido en [50].

En términos de la superficie parametrizada $x_2(u)$ la longitud de la banda A está dada por $L = 2x_2(\pi/2)$. Así, es posible emplear la ecuación (4.57) para expresar la relación entre la distancia radial mínima u_* y la longitud L de la región entrelazada A , presentada en la gráfica de la Fig. 4.7. Esta gráfica indica que para cada valor de L existen dos superficies extremales con un valor de u_* (ver Fig. 4.6), y L tiene un valor máximo para un valor dado de u_* que está dado por $u_* \simeq 1.10$ [50]. Dicha gráfica muestra además que el parámetro u_* puede tomar únicamente valores $u_1 \leq u_* \leq \pi/2$, donde u_1 es tal que $\cos v(u_1) = 0$. De (4.43) se encuentra que el valor de u_1 está dado por

$$u_1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5} \right) \simeq 0.5773375 \quad .$$

Esto muestra que las superficies extremales pueden explorar en la geometría del agujero de gusano solo hasta una distancia radial u_1 máxima (ver Fig. 4.6), por lo que no pueden atravesar el agujero de gusano y alcanzar la región asintótica $u \rightarrow -\pi/2$. El hecho de que las superficies extremales no puedan atravesar el agujero de gusano debe ser consecuencia de que el espacio-tiempo (4.41) es un agujero de gusano no atravesable .

Por otro lado, de la Figura 4.7 notamos que, a partir del valor máximo de L , a medida que L disminuye, una superficie extremal se introduce hacia el agujero de

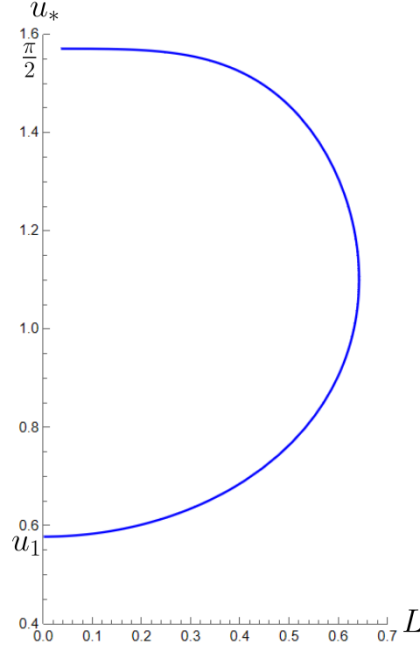


Figura 4.7: Gráfica de la distancia radial mínima u_* que las superficies extremales alcanzan dentro del bulto como función de la longitud L de la región A . u_1 es el valor máximo dentro del bulto que puede alcanzar u_* . Para esta gráfica se ha usado $a = 1$. El hecho de que la gráfica parezca no estar definida para $L = 0$ en la parte superior es resultado del método número usado para obtener dicha gráfica.

gusano, sin poder atravesarlo (solo hasta el valor máximo u_1), mientras que la otra superficie se acerca a la frontera en $u \rightarrow \pi/2$, como se muestra de forma pictórica en la Figura 4.6. El hecho de que L tenga un valor máximo es debido entonces a que las superficies extremales no pueden ir más allá del valor radial u_1 dentro de la geometría del agujero de gusano. En otras palabras, la existencia de un agujero de gusano no atravesable impone una cota máxima en el valor que puede tomar L .

Usando la fórmula de Ryu-Takayanagi para la parte finita del área de las superficies extremales dada por la ecuación (4.62) podemos calcular la parte finita de la entropía de entrelazamiento holográfica. La relación entre L y la parte finita de la HEE es presentada en la gráfica de la Figura 4.8. Para cada valor de L existen dos superficies extremales, es decir, para cada valor de L se tienen dos valores del área finita, por lo que obtenemos dos valores para la HEE. Como explicamos antes, para la HEE debemos elegir la superficie con menor área, que corresponde a la rama cóncava, la más negativa, de la gráfica de la Figura 4.8. Esta rama corresponde a las superficies extremales que se aproximan más a la frontera en $u \rightarrow \pi/2$ a medida que L disminuye, mientras que las superficies que se introducen más en el agujero de gusano son las superficies de mayor área finita, la rama menos negativa en la gráfica de la Figura 4.8. La parte finita de la entropía de entrelazamiento está dada entonces por

$$S_{HEE}^{\text{fin}}(A) = \frac{\text{Area}_{\text{fin}}(\gamma_A)}{4G_N^5} \quad . \quad (4.63)$$

Por tanto, la entropía de entrelazamiento del subsistema en la región A puede ser escrita como

$$S_{HEE}(A) \simeq S_{HEE}^{\text{div}}(A) + S_{HEE}^{\text{fin}}(A) \quad . \quad (4.64)$$

De la Figura 4.8 podemos notar que, para valores de $L \sim 0$, las superficies extremales de área mínima se aproximan más a la región asintótica AdS_5 , de modo que la HEE para estas superficies debe ser la misma que en AdS_5 puro, es decir, como si no existiera la geometría del agujero de gusano. Por otro lado, a medida que L se aproxima a su valor máximo, las superficies extremales de área mínima se introducen más en la geometría del agujero de gusano, por lo que la presencia del agujero de gusano modifica la HEE en comparación con AdS_5 puro. Al alcanzar el valor máximo de L el brazo de la rama cóncava de la Figura 4.8 se corta, debido a que la existencia de la geometría del agujero de gusano no permite valores mayores para L .

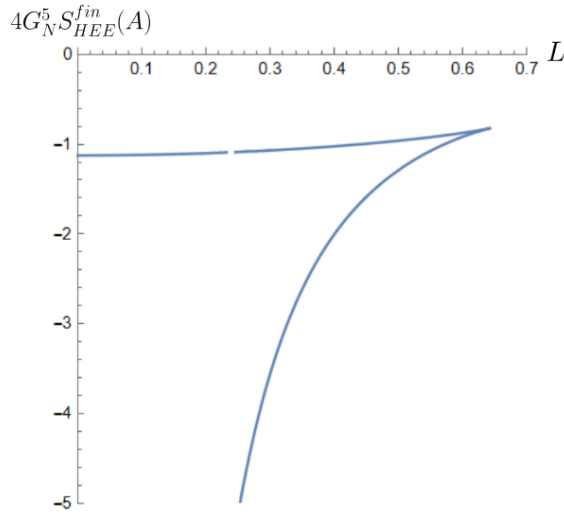


Figura 4.8: Gráfica de la parte finita de la HEE como función de la longitud L de la región A . Para esta gráfica se ha usado $a = l = L_{\perp} = 1$.

Como hemos mencionado, las superficies extremales son tales que no pueden atravesar el agujero de gusano, debido a que éste es no atravesable. Esto nos da un indicio de que la CFT dual a la geometría (4.41) no se encuentra en un estado entrelazado con otra teoría de campo. Según se enuncia en [50], si el dual holográfico a la geometría del agujero de gusano (4.41) fueran dos teorías de campos en un estado entrelazado, se esperaría que la entropía de entrelazamiento de la geometría del agujero de gusano fuera mayor que la entropía de entrelazamiento de AdS_5 puro. En [50] comparan la HEE de la región A dada por (4.63) con la HEE de la región A en AdS_5 puro. Dicha

comparación es hecha al graficar la diferencia entre la parte finita de la entropía de entrelazamiento en AdS_5 puro con la parte finita de la entropía de entrelazamiento en la geometría del agujero de gusano, mostrada en la Figura 4.9. Esta gráfica muestra que la HEE de la región A en AdS puro es mayor que la HEE en la geometría del agujero de gusano. Esto confirma que la CFT dual al agujero de gusano asintóticamente AdS_5 no se encuentra en un estado entrelazado con otra teoría de campo.

Por tanto, la presencia del agujero de gusano (4.41), al menos desde el punto de vista de la entropía de entrelazamiento holográfica, no implica que el dual holográfico corresponda a dos teorías cuánticas de campo en un estado entrelazado. Este hecho puede ser debido a que el agujero de gusano es no atravesable, lo que en particular implica que las superficies extremales no pueden atravesar el agujero de gusano y conectar las regiones asintóticas del agujero de gusano. Dicho de otra forma, argumentamos que, en el contexto de la entropía de entrelazamiento holográfica, un agujero de gusano no atravesable es dual a dos teorías de cuánticas de campos que no presentan entrelazamiento.

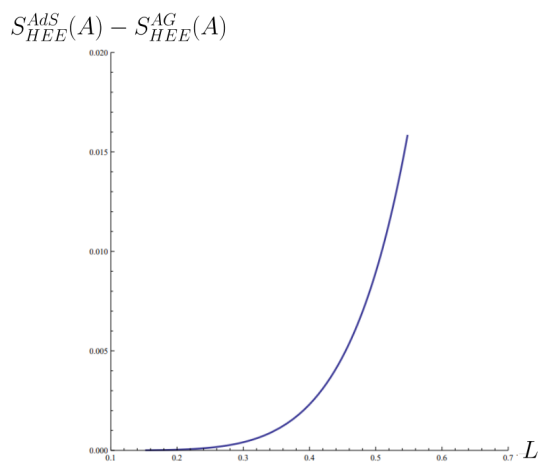


Figura 4.9: Diferencia entre la entropía de entrelazamiento holográfica en AdS_5 puro y en la geometría del agujero de gusano asintóticamente AdS_5 (4.41). Para esta gráfica se ha usado $4G_N^5 = a = l = L_\perp = 1$. Gráfica tomada de [49].

Conjetura ER=EPR para agujeros de gusano atravesables

En el análisis principal de este trabajo hemos llegado a la conclusión de que la geometría de un agujero de gusano no atravesable es dual a dos teorías de campo no entrelazadas. Para discutir este enunciado es conveniente revisar brevemente el caso de agujeros de gusano atravesables. Por ejemplo, en [50] se propone la geometría de un agujero de gusano asintóticamente AdS_4 descrito por la métrica que está dada por

$$ds^2 = (1 + r^2)(-dt^2 + dx^2 + dy^2) + \frac{dr^2}{1 + r^2} \quad . \quad (4.65)$$

Esta métrica describe la geometría de un agujero de gusano que conecta las regiones asintóticamente AdS_4 en $r \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow -\infty$ [50]. Es posible mostrar que esta geometría admite geodésicas nulas y tipo-tiempo que atraviesan el agujero de gusano y conectan las regiones asintóticas [50]. Suponiendo que el dual holográfico a esta geometría son dos CFT en el espacio-tiempo plano $2 + 1$ dimensional, consideramos cierto subsistema en la región espacial A definida como una banda de longitud L en la dirección x , extendida infinitamente en la dirección y . Es posible mostrar que el área de las superficies extremales γ_A , tales que $\partial\gamma_A = \partial A$, considerando un corte ultravioleta ϵ , está dada por [50]

$$Area(\gamma_A) = 2L_{\perp} \int_{r_*}^{1/\epsilon} dr \frac{1 + r^2}{\sqrt{(1 + r^2)^2 - (1 + r_*^2)^2}} \quad , \quad (4.66)$$

donde L_{\perp} es la extensión de la superficie en la dirección y , y r_* es la distancia máxima que alcanza la superficie dentro del bulto. La entropía de entrelazamiento holográfica como función de L es representada por la línea azul en la gráfica de la Figura 4.10. En dicha Figura se grafica también la HEE para AdS_4 puro representada por la línea roja punteada. Para valores de $L \sim 0$ el comportamiento de HEE de la geometría del agujero de gusano atravesable asintóticamente AdS_4 es el mismo que para AdS_4 puro. Sin embargo, a medida que el valor de L aumenta, la entropía de entrelazamiento en la geometría del agujero de gusano atravesable es mayor que para AdS_4 puro. Este es el comportamiento de la HEE que se espera si el dual holográfico de la geometría del agujero de gusano atravesable (4.65) corresponde a dos teorías de campo en un cierto estado entrelazado [50]. Esto indica que la propiedad de que el agujero de gusano sea atravesable está relacionado con el hecho de que el dual holográfico corresponda a dos CFT entrelazadas.

Otro ejemplo interesante de explorar es el trabajo hecho en [56]. De forma parecida a lo realizado en la Sección anterior, en dicho artículo se estudian superficies extremales en la geometría de un agujero de gusano que conecta dos regiones asintóticamente AdS_5 , con la diferencia de que éste es un agujero de gusano atravesable y es dual a dos teorías de campo entrelazadas. Como esperamos, en este artículo se encuentra que las superficies extremales pueden atravesar el agujero de gusano y conectar las regiones asintóticas [56]. Esto confirma de nueva cuenta que la propiedad de que las superficies extremales puedan atravesar el agujero de gusano está estrechamente relacionada con el hecho de que las teorías de campo duales estén entrelazadas. Por otro lado, existe evidencia de la conjetura ER=EPR para agujeros de gusano atravesables desde perspectivas distintas a la proporcionada por la HEE. En [57], por ejemplo, muestran que a través de cierto entrelazamiento entre dos teorías de campo se puede hacer que la geometría dual de un agujero de gusano se vuelva atravesable por un tiempo finito. Siguiendo esta línea, en [58] se estudian diversos aspectos de agujeros de gusano

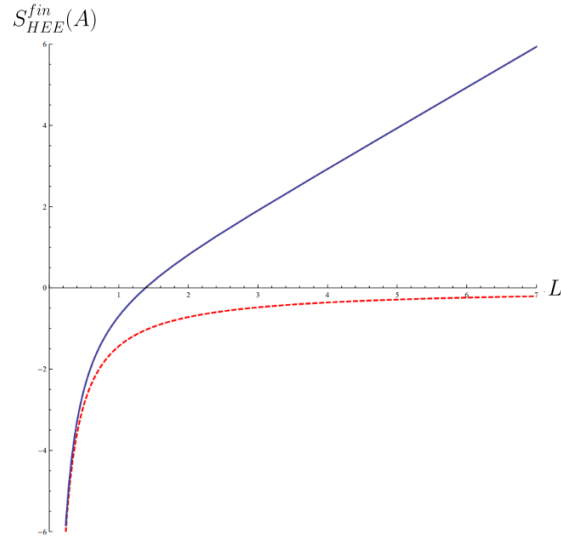


Figura 4.10: Gráfica de a parte finita de la entropía de entrelazamiento como función de L , para el agujero de gusano atravesable asintóticamente AdS_4 (línea azul), y para AdS_4 puro (línea roja). Para esta gráfica se ha usado $4G_N^4 = 1$. Gráfica tomada de [50].

que resultan atravesables mediante el entrelazamiento de las teorías de campo duales. Otro camino para explorar esta relación es la presentada en [59], donde se investiga la interpretación de un agujero de gusano atravesable en el contexto de la teoría de la información cuántica. La evidencia de la conjetura ER=EPR para agujeros de gusano atravesables en general es variada y sigue diferentes líneas de investigación. Tomando todo lo anterior como base, argumentamos que, al menos utilizando como herramienta a la HEE, para que un agujero de gusano tenga por dual a dos teorías de campo en un estado entrelazado, éste debe ser atravesable.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos investigado la relación entre agujeros de gusano y entrelazamiento cuántico usando la correspondencia AdS/CFT. Para poder desarrollar tal discusión en primera instancia hemos revisado los conceptos fundamentales de la teoría cuántica de campos, la Relatividad General y la teoría de cuerdas. Esto ha resultado muy enriquecedor pues permitió estudiar aspectos muy interesantes de dichas teorías. En particular, en el marco de la teoría cuántica de campos, hemos estudiado al entrelazamiento cuántico, el cual resulta una importante propiedad que mide aspectos de la correlación de los grados de libertad entre subsistemas de la teoría de campos. Por otro lado, investigamos soluciones muy interesantes que existen en la Relatividad General, conocidas como agujeros de gusano. Estos son geometrías que conectan dos regiones asintóticas del espacio-tiempo. Maldacena y Susskind propusieron que estos dos conceptos, de orígenes muy distintos, son equivalentes [1]. Esta propuesta es conocida como conjetura ER=EPR. Es en este contexto en el que hemos hecho uso de la correspondencia holográfica con el fin de aportar algún tipo de evidencia a la propuesta de Maldacena y Susskind.

Por otro lado, a partir de ciertos elementos de la teoría de cuerdas hemos podido discutir una deducción de la correspondencia holográfica. Esta correspondencia resulta en sí mismo un tema muy interesante, pues como hemos visto, relaciona diferentes aspectos y áreas de la física muy fascinantes. Lo más importante de la correspondencia holográfica es que, como hemos discutido en este trabajo, permite indagar en regímenes de ciertas teorías de campos que de otro modo resultan muy complicados de estudiar. Es por esto que en la actualidad la correspondencia holográfica es un tema de estudio de gran interés en la física. No obstante, todavía quedan muchos aspectos por explorar dentro de la correspondencia holográfica. Como mencionamos antes, entre los trabajos que se llevan a cabo en el contexto de esta dualidad está el de extender y mejorar el diccionario entre las teorías duales, así como el de encontrar ejemplos de la correspondencia que involucren teorías cada vez más parecidas a las teorías que describen a la naturaleza que observamos. En general, todavía queda mucho por investigar para conocer el verdadero potencial como herramienta de cálculo de la correspondencia holográfica.

Particularmente, en este trabajo utilizamos a la correspondencia holográfica para investigar la entropía de entrelazamiento holográfica a través de la fórmula de Ryu-Takanagi. Para ejemplificar el uso de la fórmula de Ryu-Takanagi hemos calculado la entropía de entrelazamiento en ciertas CFT en diferentes configuraciones. Los resultados que obtuvimos coinciden con los resultados obtenidos usando las herramientas de QFT. Podemos concluir entonces que la correspondencia holográfica a través de la fórmula de Ryu-Takayanagi, como esperábamos, resulta una herramienta de mucha utilidad para investigar la entropía de entrelazamiento en ciertas CFT.

Usando la fórmula de Ryu-Takayanagi como herramienta, hemos investigado la conjetura ER=EPR. Para esto hemos considerado la geometría de un agujero de gusano no atravesable asintóticamente AdS_5 dual a dos CFT no interactuantes. En la CFT dual hemos considerado a cierto subsistema en una región A definida como una banda de longitud L . Con esta configuración hemos analizado las superficies extremales en el bulto con el fin de calcular la entropía de entrelazamiento holográfica del subsistema en la región A . Por medio del análisis de esta configuración hemos visto que la existencia del agujero de gusano no atravesable impide que las superficies extremales puedan a travesar el agujero de gusano y conectar a las regiones asintóticas. Esto además impone una cota máxima en el valor que puede tomar L . Por otra parte, si el dual del agujero de gusano asintóticamente AdS_5 son dos CFT en un estado entrelazado, se esperaría que la HEE calculada en la geometría del agujero de gusano sea mayor que la HEE calculada en AdS_5 puro. Sin embargo, se ha encontrado lo contrario, es decir, la HEE en AdS_5 puro resulta mayor que la HEE en la geometría del agujero de gusano asintóticamente AdS_5 . De acuerdo a estos resultados, argumentamos que el agujero de gusano no atravesable asintóticamente AdS_5 es dual a dos CFT que no presentan entrelazamiento entre ellas.

Con el fin de discutir el argumento anterior revisamos algunos ejemplos del cálculo de la HEE en geometrías de agujeros de gusano atravesables. Entre otras cosas, estos ejemplos indican que el hecho de que el dual a la geometría de agujero de gusano asintóticamente AdS sean dos CFT en un cierto estado entrelazado está estrechamente relacionado con la propiedad de que dicho agujero de gusano sea atravesable. Adicionalmente, revisamos múltiple evidencia a favor de la conjetura ER=EPR para agujeros de gusano atravesables desde perspectivas distintas a la proporcionada por la HEE. Todo lo anterior nos permite llegar a la conclusión más importante de este trabajo: *para que un agujero de gusano, de acuerdo a la conjetura ER=EPR, sea dual a dos CFT en un estado entrelazado, al menos utilizando como herramienta a la HEE, necesariamente dicho agujero de gusano debe ser atravesable*. Como hemos mencionado, el estudio de esta conjetura se lleva a cabo desde diferentes líneas de investigación y se encuentra múltiple evidencia a su favor, sin embargo, todavía queda mucho por explorar para comprender el verdadero origen de esta relación, así como de sus posibles aplicaciones en la resolución de otros problemas en la física.

Bibliografía

- [1] Juan Maldacena y Leonard Susskind. «Cool horizons for entangled black holes». En: , *Fortsch. Phys.* 61 (2013), 781-811. arXiv:1306.0533 [hep-th].
- [2] Arthur Beiser. *Concepts of Modern Physics*. McGraw-Hill, 2003. ISBN: 0-07-244848-2.
- [3] Saúl Ramos-Sánchez. *Relatividad para futuros físicos*. CopIt-arXives, 2018. ISBN: 978-1-938128-18-9 ebook.
- [4] Andrew Zimmerman Jones. *String Theory For Dummies*. John Wiley, Sons, 2009.
- [5] NADIA DRAKE. «First-ever picture of a black hole unveiled». En: *National Geographic* (2019).
- [6] The Event Horizon Telescope Collaboration. «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole». En: *The Astrophysical Journal Letters* 875 (2019).
- [7] David Tong. *Particle Physics*. CERN Lectures.
- [8] Robert Mann. *An Introduction to Particle Physics and the Standard Model*. CRC Press, 2021. ISBN: 978-1-4200-8298-2.
- [9] Alberto Güijosa Hidalgo. «La correspondencia holográfica: gravedad, dimensiones, teoría de cuerdas y otros espejismos». En: *Avance y Perspectiva* 5 (2013).
- [10] David Tong. *String Theory*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos. 2009.
- [11] David Tong. *Supersymmetric Field Theory*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos. 2022.
- [12] Martin Ammon y Johanna Erdmenger. *Gauge/Gravity Duality, Foundations And Applications*. Cambridge University Press, 2015. ISBN: 978-1-107-01034-5.
- [13] Makoto Natsuume. *AdS/CFT Duality User Guide*. Lecture Notes in Physics. Springer, 2015.
- [14] David Tong. *General Relativity*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos. 2019.
- [15] Arnab Kundu. «Wormholes and Holography: An Introduction». En: *The European Physical Journal C* (2021 arXiv:2110.14958.).

- [16] David Tong. *Topics in Quantum Mechanics*. University of Cambridge Part II Mathematical Tripos. 2017.
- [17] David Tong. *Dynamics and Relativity*. University of Cambridge Part IA Mathematical Tripos. 2013.
- [18] Bernard Schutz. *A First Course In General Relativity*. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 978-0-521-88705-2.
- [19] Jakob Schwichtenberg. *Physics from Symmetry*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer, 2015. ISBN: 978-3-319-19200-0.
- [20] Howard Georgi. *Lie Algebras In Particle Physics*. CRC PRESS, 2019. ISBN: 978-0-367-09172-9.
- [21] Alberto Güijosa Hidalgo. *Teoría Cuántica de Campos I*. Apuntes de cursos de Posgrado UNAM.
- [22] Michael Peskin. Daniel Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. CRC Press, 2018. ISBN: 13978-0-201-50397-5.
- [23] Horatiu Nastase. *Introduction to quantum field theory I*. 2012.
- [24] David Tong. *Quantum Field Theory*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos. 2007.
- [25] Tom Lancaster. Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014. ISBN: N 978-0-19-969932-2.
- [26] David Tong. *Gauge theory*. 2018.
- [27] Anthony J.G. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics Vol 1*. CRC Press, 2013. ISBN: 978-1-4665-1299-3.
- [28] Horatiu Nastase. *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, 2015. ISBN: 978-1-107-08585-5.
- [29] David Griffiths. Darrell Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018. ISBN: 9781107189638.
- [30] Daniel R. Terno Asher Peres. «Quantum Information and Relativity Theory». En: *Rev.Mod.Phys.* 76:93-123,2004 (2003).
- [31] Matthew Headrick. «Lectures on entanglement entropy in field theory and holography». En: (2019 arXiv:1907.08126.).
- [32] Shinsei Ryu. Tadashi Takayanagi. «Aspects of Holographic Entanglement Entropy». En: *JHEP 0608:045,2006* (2006 arXiv:hep-th/0605073.).
- [33] Viktor G. Matyas. «Holographic Entanglement Entropy». En: *Department of Mathematical Sciences Durham University* (2018).
- [34] Alberto Güijosa Hidalgo. *Correspondencia Holográfica*. Apuntes de cursos de Posgrado UNAM.

- [35] H. Casini y M. Huerta. «Entanglement entropy in free quantum field theory». En: *J.Phys* (2009 arXiv:0905.2562).
- [36] Mukund Rangamani. Tadashi Takayanagi. «Holographic Entanglement Entropy». En: *JHEP 0608:045,2006* (2017 arXiv:1609.01287.).
- [37] Thomas Hartman. *Lectures on Quantum Gravity and Black Holes*. Cornell University. 2015.
- [38] T. Padmanabhan. *Gravitation, Foundations and Frontiers*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2010. ISBN: 978-0-511-67553-9.
- [39] K. S. Thorne C. W. Misner y J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman y Company, San Francisco, 1973.
- [40] A. Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press, 2013. ISBN: 978-0-691-14558-7.
- [41] A. Einstein y N. Rosen. «The Particle Problem in the General Theory of Relativity». En: *Phys. Rev.* 48 (1935), pág. 73.
- [42] S. W. Hawking. «Particle Creation by Black Holes». En: *Commun. math. Phys.* 43 (1975), págs. 199-220.
- [43] Ahmed Almheiri. Thomas Hartman. Juan Maldacena. Edgar Shaghoulian y Amirhossein Tajdini. «The entropy of Hawking radiation». En: *Rev. Mod. Phys* 93. arXiv:2006.06872 [hep-th] (2021).
- [44] M. Socolovsky. «Schwarzschild Black Hole in Anti-De Sitter Space». En: (2007 arXiv:1711.02744).
- [45] Juan Maldacena. «Eternal Black Holes in AdS». En: *JHEP* 0304.021 (2003 [hep-th/0106112].).
- [46] Katrin Becker. Melanie Becker. John Schwarz. *STRING THEORY AND M-THEORY : A MODERN INTRODUCTION*. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 978-0-511-25653-0.
- [47] Jorge Casalderrey-Solana. Hong Liu. David Mateos. Krishna Rajagopal. Achim Wiedeman. «Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions». En: (2012 arXiv:1101.0618).
- [48] Juan Maldacena. «The large N limit of superconformal field theories and supergravity». En: *Adv.Theor.Math.Phys.* 2:231-252 (1998 arXiv:hep-th/9711200.).
- [49] S. Ryu y T. Takayanagi. «Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de sitter space/conformal field theory correspondence». En: *Physical review letters.* 96.181602 (206 arXiv:arXiv:hep-th/0603001.).
- [50] Tadashi Takayanagi Mitsutoshi Fujita Yasuyuki Hatsuda. «Probing AdS Wormholes by Entanglement Entropy». En: 96.181602 (2011 arXiv:1104.4907 [hep-th]), págs. 1167-1190.

- [51] Tatzuma Nishioka. Shinsei Ryu. Tadashi Takayanagi. «Holographic Entanglement Entropy: An Overview». En: *J.Phys.A*42:504008 181602 (2009 arXiv:0905.0932 [hep-th]), págs. 1167-1190.
- [52] Mark Van Ramsdonk. *Lectures on Gravity and Entanglement*. 2016 arXiv:1609.00026.
- [53] Samir D. Mathur. «What is the dual of two entangled CFTs?» En: (feb. de 2014). arXiv: 1402.6378 [hep-th].
- [54] Hrant Gharibyan y Robert F. Penna. «Are entangled particles connected by wormholes? Evidence for the ER=EPR conjecture from entropy inequalities». En: *Phys. Rev. D* 89.6 (2014), pág. 066001. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.066001. arXiv: 1308.0289 [hep-th].
- [55] Leonard Susskind. «ER=EPR, GHZ, and the consistency of quantum measurements». En: *Fortsch. Phys.* 64 (2016), págs. 72-83. DOI: 10.1002/prop.201500094. arXiv: 1412.8483 [hep-th].
- [56] Mariano Chernicoff, Gaston Giribet y Emilio Rubín de Celis. «Extremal surfaces and thin-shell wormholes». En: *Phys. Rev. D* 106.8 (2022), pág. 086012. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.086012. arXiv: 2207.00072 [hep-th].
- [57] Ping Gao, Daniel Louis Jafferis y Aron C. Wall. «Traversable Wormholes via a Double Trace Deformation». En: *JHEP* 12 (2017), pág. 151. DOI: 10.1007/JHEP12(2017)151. arXiv: 1608.05687 [hep-th].
- [58] Juan Maldacena, Douglas Stanford y Zhenbin Yang. «Diving into traversable wormholes». En: *Fortsch. Phys.* 65.5 (2017), pág. 1700034. DOI: 10.1002/prop.201700034. arXiv: 1704.05333 [hep-th].
- [59] Ning Bao et al. «Traversable Wormholes as Quantum Channels: Exploring CFT Entanglement Structure and Channel Capacity in Holography». En: *JHEP* 11 (2018), pág. 071. DOI: 10.1007/JHEP11(2018)071. arXiv: 1808.05963 [hep-th].