

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

**Medición de algunos riesgos de una institución
financiera**

Trabajo Profesional

Que para obtener el título de

Matemático

Presenta:

José Ramón Rodríguez Mancilla

Asesora:

Dra. María del Pilar Alonso Reyes

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Propósito	3
Introducción	4
1. Generación de escenarios de una variable de interés	5
Introducción	5
1.1. Un periodo	5
1.1.1. Consistencia con la opinión experta	6
1.1.2. Determinación de probabilidades	6
1.1.3. Tamaño de los cambios	8
1.1.4. Ejemplo	9
1.2. Dos periodos	10
1.2.1. Determinación de esperanzas condicionales	11
1.2.2. Tamaño de los cambios	13
1.2.3. Consistencia con la opinión experta	14
1.2.4. Ejemplo	14
1.3. Tres periodos	16
1.3.1. Determinación de esperanzas condicionales	17
1.4. Comentarios	18
1.5. Referencias	18
2. Determinación de límites de inversión	19
Introducción	19
2.1. Modelo	19
2.1.1. Variables y parámetros	19
2.1.2. Planteamiento	20
2.2. Instrumentación	21
2.2.1. Caso de eventos de incumplimiento independientes	21
2.2.1.1. Ejemplo	22
2.2.1.2. Ejemplo	23
2.2.2. Caso general	24
2.2.2.1. Ejemplo	24
2.3. Comentarios	24
2.4. Referencias	25
3. Medición de riesgos operativos	26
Introducción	26
3.1. Definición de riesgo operativo	26
3.2. Desafíos en la medición del riesgo operativo	26
3.3. Medición del riesgo operativo	27
3.3.1. Distribución de pérdidas por riesgo operativo	28
3.4. Enfoque alternativo para medir el riesgo operativo	28
3.4.1. Descripción general	28
3.4.2. Identificación de riesgos operativos	29
3.4.3. Asignación de severidades	29

3.4.4.	Determinación de probabilidades	29
3.4.5.	Obtención de la distribución de severidades	30
3.4.6.	Medición del riesgo	30
3.4.6.1.	Medida primaria	31
3.4.6.2.	Medida complementaria	31
3.4.7.	Ejemplo	31
3.4.7.1.	Identificación de riesgos	32
3.4.7.2.	Asignación de severidades	32
3.4.7.3.	Determinación de probabilidades	35
3.4.7.4.	Obtención de la distribución de severidades	35
3.4.7.5.	Medición de riesgos	36
3.5.	Actualización de probabilidades	36
3.5.1.	Metodología	36
3.5.1.1.	Descripción	36
3.5.1.2.	Ejemplo	37
3.5.2.	Instrumentación	37
3.5.2.1.	Procedimiento de cálculo	37
3.5.2.2.	Ejemplo	38
3.5.2.3.	Determinación de parámetros	39
3.5.2.4.	Ejemplo	41
3.6.	Comentarios	41
3.7.	Referencias	42
Conclusiones		43

Propósito

El propósito de este informe es describir algunas de las aplicaciones matemáticas que he desarrollado en materia de medición de riesgos durante el tiempo que he trabajado en el Banco de México, las cuales ilustran como al aplicar matemáticas logré:

- Pronosticar variables relevantes para la medición de riesgos financieros, mediante el desarrollo de un modelo que permite generar escenarios consistentes con expectativas futuras de dichas variables, a partir de pronósticos de expertos sobre su comportamiento.
- Mitigar el riesgo de crédito asociado a decisiones de inversión, a través del desarrollo de un modelo que permite minimizar dicho riesgo bajo ciertas condiciones.
- Medir los riesgos operativos, mediante el desarrollo de dos modelos, uno para evaluar cuantitativamente este tipo de riesgo y otro para actualizar sus parámetros.

Introducción

Toda decisión implica beneficios y afectaciones potenciales, en independencia del ámbito donde dicha decisión se tome. Asimismo, existen eventos o fenómenos sobre los que no se tiene control, los cuales pueden generar también afectaciones potenciales.

A las afectaciones potenciales referidas anteriormente se les denomina riesgos, por lo que puede afirmarse entonces que éstos son inherentes a las decisiones que tomamos, por lo que es importante entenderlos y medirlos para identificar aquéllos que puedan asumirse y determinar los que deban mitigarse.

En este contexto, las decisiones que se toman en el ámbito financiero son principalmente de inversión y los riesgos asociados a las mismas, denominados riesgos financieros, corresponden a las pérdidas potenciales derivadas de dichas decisiones.

Para medir los riesgos financieros, es importante pronosticar el comportamiento futuro de los valores de los activos en los cuales se desea invertir. En el primer capítulo del informe se describe una metodología para generar escenarios futuros de una variable de interés.

Por otra parte, para mitigar los riesgos financieros, típicamente se toman acciones de diversificación entre los activos de inversión considerados. En el segundo capítulo del informe se expone una metodología para determinar límites de inversión a fin de mitigar los riesgos correspondientes.

En independencia del ámbito en que una empresa o institución se desarrolle, las decisiones que ésta tome en relación al marco normativo y la infraestructura tecnológica bajo la cual opere y funcione implican, como cualquier otra decisión, riesgos, a los cuales se les denomina riesgos operativos. En el tercer capítulo del informe se describe una metodología para medirlos.

En cada uno de los capítulos de este informe se incluye una lista de las referencias técnicas que describen los conceptos matemáticos utilizados por los modelos y las metodologías que se presentan en los mismos.

Finalmente, después del último capítulo, se presenta un conjunto de conclusiones generales.

Capítulo 1

Generación de escenarios de una variable de interés

Introducción

En este capítulo presento una metodología que desarrollé para generar escenarios futuros de una variable financiera de interés, tal como el tipo de cambio peso por dólar, que sean consistentes con un conjunto de valores de referencia; pronosticados por un grupo de expertos con base en su experiencia. La generación de este tipo de escenarios es de utilidad para la toma de decisiones en el ámbito financiero.

La metodología desarrollada utiliza árboles de escenarios como los descritos en Baxter, et al (1999) y conceptos elementales de probabilidad como valor esperado, e. g. Mood, et al (1974), medida de probabilidad, e. g. Ash (2008), y esperanza condicional, e. g. Ross (1997); y permite generar hasta tres periodos de escenarios, no necesariamente de la misma duración, y es aplicable a cualquier variable de interés que sea cuantificable, en independencia si ésta es o no de índole financiero. En seguida se describe e ilustra la aplicación de la metodología.

1.1. Un periodo

Sea Y la variable de interés. En el caso de un periodo, se conoce el valor inicial de la variable de interés en el tiempo t_0 , $Y_0 \in \mathfrak{R}$, y un valor esperado de ésta para el tiempo t_1 , μ , pronosticado por un grupo de expertos, a los que se refiere en adelante como la opinión experta, a partir de los cuales se desean obtener tres posibles escenarios en t_1 , Y_u , Y_m y Y_d , los cuales toman valores en \mathfrak{R} , con sus respectivas probabilidades, p_u , p_m y p_d , de manera tal que estos valores sean consistentes con el valor esperado μ , en cuanto a que satisfacen la condición:

$$\mu = Y_u p_u + Y_m p_m + Y_d p_d \equiv E^P [Y_{t_1}] \quad (1.1)$$

donde $E^P [Y_{t_1}]$ denota el valor esperado de la variable aleatoria Y en el tiempo t_1 , bajo la medida de probabilidad $P \equiv (p_u, p_m, p_d)$.

Por simplicidad, consideramos que el escenario Y_m corresponde al valor inicial de Y , i. e. $Y_m = Y_0$; y que los otros dos escenarios, Y_u y Y_d , corresponden a cambios de la variable de la misma magnitud, pero de signo contrario. Esto es, suponemos que $Y_u = Y_m + \Delta Y$ y $Y_d = Y_m - \Delta Y$, para $\Delta Y \geq 0$. De esta manera, tomando en cuenta que $p_u + p_m + p_d = 1$, la condición (1.1) implica

$$\mu = Y_0 + \Delta Y (p_u - p_d) \quad (1.2)$$

de donde se deduce el siguiente resultado.

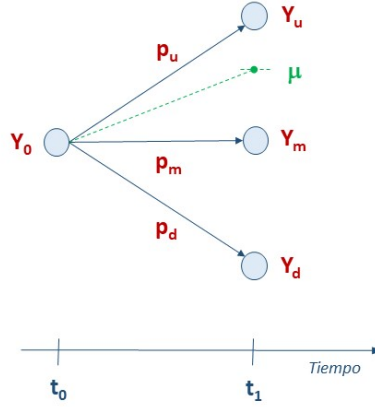


Figura 1.1: Modelo de un periodo

1.1.1. Consistencia con la opinión experta

Lema 1. $\mu \geq Y_0$ si y solamente si $p_u \geq p_d$.

Demostración. Es directa de la ecuación (1.2). □

El resultado anterior tiene la siguiente interpretación:

- Si la expectativa de la opinión experta es que el valor de la variable Y se incremente o mantenga su valor inicial, entonces la probabilidad de que incremente su valor es mayor o igual que la probabilidad de que éste decrezca.
- Si la expectativa de la opinión experta es que el valor de la variable Y se reduzca o mantenga su valor respecto a su valor inicial, entonces la probabilidad de que incremente su valor es menor o igual a la probabilidad de que éste decrezca.

1.1.2. Determinación de probabilidades

No obstante que las probabilidades de incremento y decremento de la variable Y se comportan consistentemente con el valor pronosticado por el experto, conforme a lo descrito en el Lema 1 y su interpretación, la condición (1.2) no es suficiente para determinar las probabilidades. Por tal motivo, se considera una restricción adicional en términos de la varianza de la variable Y en t_1 , a la que denotamos por σ^2 ; a saber, la siguiente:

$$\sigma^2 = (Y_u - \mu)^2 p_u + (Y_m - \mu)^2 p_m + (Y_d - \mu)^2 p_d \quad (1.3)$$

De esta manera, a partir de los supuestos realizados sobre los valores Y_u , Y_m y Y_d y de las condiciones (1.1) y (1.3), se determinan expresiones para las respectivas probabilidades, en función de μ , σ^2 y ΔY , como se demuestra en el siguiente resultado:

Proposición 1.

$$\begin{aligned} p_u &= \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2}{(\Delta Y)^2} + \frac{\mu - Y_0}{\Delta Y} \right] \\ p_d &= \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2}{(\Delta Y)^2} - \frac{\mu - Y_0}{\Delta Y} \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Demostración. Obsérvese que

$$\begin{aligned}(Y_u - \mu)^2 p_u &= (Y_0 - \mu)^2 p_u + (\Delta Y)^2 p_u + 2\Delta Y(Y_0 - \mu)p_u \\ (Y_d - \mu)^2 p_d &= (Y_0 - \mu)^2 p_d + (\Delta Y)^2 p_d - 2\Delta Y(Y_0 - \mu)p_d \\ (Y_m - \mu)^2 p_m &= (Y_0 - \mu)^2 p_m\end{aligned}$$

Al sustituir las expresiones anteriores en (1.3) se obtiene

$$\sigma^2 = (Y_0 - \mu)^2 + (\Delta Y)^2(p_u + p_d) + 2\Delta Y(Y_0 - \mu)(p_u - p_d) \quad (1.5)$$

De la ecuación (1.2) se obtiene que

$$p_u = p_d + \left(\frac{\mu - Y_0}{\Delta Y} \right) \quad (1.6)$$

Al sustituir (1.6) en (1.5) se obtiene

$$\frac{\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2}{(\Delta Y)^2} = 2p_d + \left(\frac{\mu - Y_0}{\Delta Y} \right)$$

de donde

$$p_d = \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2}{(\Delta Y)^2} - \frac{\mu - Y_0}{\Delta Y} \right]$$

Finalmente, de la expresión anterior y (1.6) se obtiene

$$p_u = \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2}{(\Delta Y)^2} + \frac{\mu - Y_0}{\Delta Y} \right]$$

□

Los valores dados por (1.4) para p_u y p_d garantizan que se cumplan las condiciones (1.1) y (1.3). Sin embargo, no aseguran que dichos valores sean mayores o iguales a cero ni que su suma sea menor o igual que uno. Para tal efecto, deben establecerse restricciones adicionales sobre ΔY , las cuales se describen en el siguiente resultado.

Lema 2. Sean p_u y p_d definidas de acuerdo a (1.4). Entonces, $p_u, p_d \geq 0$ y $p_u + p_d \leq 1$ si y solamente si ΔY satisface las siguientes condiciones:

1. $\Delta Y \geq \sqrt{\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2}$.
2. Si $\mu \neq Y_0$, entonces $\Delta Y \leq \frac{\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2}{|\mu - Y_0|}$

Demostración. De (1.4) se obtiene que

$$p_u + p_d = \frac{\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2}{(\Delta Y)^2}$$

De la expresión anterior se deduce inmediatamente que $p_u + p_d \leq 1$ si y solamente si se cumple la condición 1.

Por otra parte, (1.4) y $p_u \geq 0$, $p_d \geq 0$ implican

$$\begin{aligned}\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2 &\geq -(\mu - Y_0)\Delta Y \\ \sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2 &\geq (\mu - Y_0)\Delta Y\end{aligned}$$

de donde

$$\sigma^2 + (Y_0 - \mu)^2 \geq |\mu - Y_0|\Delta Y$$

por lo que se cumple la condición 2. Finalmente, dicha condición implica, por (1.4), que $p_u \geq 0$ y $p_d \geq 0$.

□

1.1.3. Tamaño de los cambios

Para cada valor del rango establecido en el Lema 2 para ΔY , los valores respectivos de p_u y p_d , determinados mediante la aplicación de (1.4), cumplen con las condiciones requeridas para ser consideradas probabilidades. Es decir, existe un conjunto de medidas de probabilidad para la variable Y que garantizan que su media y varianza coincidan, respectivamente, con el valor futuro previsto por el experto y el valor estimado de su varianza.

Por lo anterior, es necesario establecer un criterio adicional para determinar las probabilidades p_u y p_d de manera única. Dicho criterio puede plantearse directamente en términos de ΔY o indirectamente sobre el rango de probabilidades asociado al rango de valores factibles de ΔY . En el presente análisis, se opta por el segundo planteamiento, considerando que es más intuitivo.

De esta manera, se establece el siguiente criterio:

- Si $\mu > Y_0$, selecciónese el valor medio del intervalo $[p_u^{min}, p_u^{max}]$, donde p_u^{min} y p_u^{max} son, respectivamente, los valores mínimo y máximo de p_u como función de ΔY , definida mediante la relación (1.4), sobre el intervalo factible de valores de ΔY establecido en el Lema 2. La existencia de los valores extremos referidos está garantizada por la continuidad de la función p_u , respecto a ΔY , y porque el intervalo de sus valores factibles es cerrado.

En caso de contar con información adicional sobre las probabilidades, se utiliza ésta para determinar un valor $p \in [p_u^{min}, p_u^{max}]$.

En cualquier caso, se determina el valor de ΔY asociado a la probabilidad elegida utilizando la Proposición 2 que se presenta más adelante.

- Si $\mu < Y_0$, selecciónese el valor medio del intervalo $[p_d^{min}, p_d^{max}]$, donde p_d^{min} y p_d^{max} son, respectivamente, los valores mínimo y máximo de p_d como función de ΔY , definida mediante (1.4), sobre el intervalo factible de valores de ΔY establecido en el Lema 2. La existencia de los valores extremo referidos está garantizada por la continuidad de la función p_d , respecto a ΔY , y porque el intervalo de sus valores factibles es cerrado.

En caso de contar con información adicional sobre las probabilidades, se utiliza ésta para determinar un valor $p \in [p_d^{min}, p_d^{max}]$.

En cualquier caso, se determina el valor de ΔY asociado a la probabilidad elegida utilizando la Proposición 2.

- Si $\mu = Y_0$, selecciónese $\Delta Y = 2\sigma$, lo cual equivale a seleccionar el valor medio del rango de las probabilidades p_u y p_d , las cuales coinciden en este caso.

Proposición 2. Sea ΔY tal que $p_u(\Delta Y) = p$, para $p \in [p_u^{min}, p_u^{max}]$. Entonces,

$$\Delta Y = \frac{(\mu - Y_0) + \sqrt{(\mu - Y_0)^2 [1 + 8p] + 8p\sigma^2}}{4p} \quad (1.7)$$

Demostración. De (1.4) y la condición $p_u(\Delta Y) = p$, se deduce que ΔY debe satisfacer la ecuación cuadrática

$$2p(\Delta Y)^2 - (\mu - Y_0)\Delta Y - (\sigma^2 + (\mu - Y_0)^2) = 0$$

la cual tiene dos soluciones:

$$\frac{(\mu - Y_0) + \sqrt{(\mu - Y_0)^2 [1 + 8p] + 8p\sigma^2}}{4p}$$

y

$$\frac{(\mu - Y_0) - \sqrt{(\mu - Y_0)^2 [1 + 8p] + 8p\sigma^2}}{4p}$$

De estas dos soluciones, la solución positiva es la única que satisface las restricciones del Lema 2 de donde se concluye (1.7). \square

Proposición 3. Sea ΔY tal que $p_d(\Delta y) = p$, para $p \in [p_d^{min}, p_d^{max}]$. Entonces,

$$\Delta Y = \frac{-(\mu - Y_0) + \sqrt{(\mu - Y_0)^2 [1 + 8p] + 8p\sigma^2}}{4p} \quad (1.8)$$

Demostración. La demostración de (1.8) es análoga a la de (1.7). \square

1.1.4. Ejemplo

El 13 de abril del 2023, el Banco de México publicó en su página de internet el tipo de cambio de referencia de pesos por dólar para solventar obligaciones denominadas en dólares liquidables en dos días hábiles en la República Mexicana, el cual correspondió a un valor de 18.0152 pesos por dólar.

Al respecto, una institución financiera, a fin de poder tomar ciertas decisiones sobre operaciones cambiarias en el corto plazo, necesitaba estimar tres posibles escenarios del tipo de cambio de pesos por dólar (valores y probabilidades) en un mes a partir de la fecha referida: uno de su incremento, otro de su decremento y un tercero en el que se mantenga constante.

Para tal efecto, dicha institución financiera aplicó la metodología para un periodo de un mes de la siguiente manera:

- Tomó como valor inicial (Y_0) el tipo de cambio de referencia de pesos por dólar del 13 de abril del 2023.
- Estimó, con base en el análisis y experiencia de su personal, un tipo de cambio de 18.5 pesos (μ) por dólar en un mes a partir de dicha fecha.
- Estimó que la desviación estándar del valor del tipo de cambio (σ) en un mes es de 0.439, mediante el siguiente procedimiento:
 - Obtuvo los tipos de cambio pesos por dólar que fueron observados diariamente del 4 de enero del 2021 al 13 de abril del 2023, publicados en el sitio de internet del Banco de México, los cuales corresponden a un total de 575 observaciones.
 - Calculó las tasas mensuales logarítmicas del tipo de cambio pesos por dólar que fueron observadas del 4 de enero del 2021 al 13 de abril del 2023. Es decir, calculó los valores

$$r_t \equiv \log \left(\frac{Y_{t+21}}{Y_t} \right)$$

donde Y_t es el tipo de cambio pesos por dólar observado el día (hábil bancario) t y 21 es el número promedio de días hábiles de un mes. Se calcularon un total de 554 tasas mensuales logarítmicas.

- Estimó la media y la desviación estándar de las tasas mensuales logarítmicas observadas (r_t), las cuales son respectivamente $\mu' = -0.003$ y $\sigma' = 0.024$.
- Estimó la desviación estándar del valor del tipo de cambio pesos por dólar en un mes, denotado por Y_{t_1} , asumiendo que la tasa mensual logarítmica (r) se distribuyen de acuerdo a una distribución Normal y que $Y_{t_1} = Y_0 e^r$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{Var(Y_{t_1})} \\ &= \sqrt{Var(Y_0 e^r)} \\ &= Y_0 \sqrt{Var(e^r)} \\ &= Y_0 \sqrt{e^{2\mu' + 2(\sigma')^2} - e^{2\mu' + (\sigma')^2}} \\ &= 18.0152 \sqrt{e^{2(-0.003) + 2(0.024)^2} - e^{2(-0.003) + (0.024)^2}} \\ &= 0.439 \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad es consecuencia de que Y_{t_1} se distribuya de acuerdo a una distribución lognormal.

- Determinó el rango de valores factibles de ΔY mediante la aplicación del Lema 2: $[0.654, 0.882]$.
- Calculó el rango de probabilidades de incremento del tipo de cambio peso por dólar, a partir del rango de valores de ΔY y de la relación (1.4): $[0.549, 0.871]$.
- A partir del valor medio del rango de probabilidades, correspondiente a 0.710, obtuvo la ΔY respectiva: 0.7454.
- Estimó los tres escenarios:
 - $18.7606 = 18.0152 + 0.7454$, con una probabilidad de 0.710.
 - 18.0152 , con una probabilidad de 0.230.
 - $17.2698 = 18.0152 - 0.7454$, con una probabilidad de 0.060.

1.2. Dos periodos

En este caso se cuenta con un valor inicial Y_0 y dos valores esperados μ_1 y μ_2 en los tiempos t_1 y t_2 , respectivamente, donde $t_1 < t_2$. A partir de esta información se desean obtener tres escenarios de Y en t_1 y nueve escenarios de Y en t_2 , con sus correspondientes probabilidades, de manera tal que:

- Cada uno de los escenarios en t_1 derive en tres escenarios en t_2 y que cada escenario en t_2 provenga de un único escenario en t_1 .
- Los escenarios sean consistentes con la trayectoria esperada (μ_1, μ_2) , al satisfacer las condiciones $\mu_1 = E^{P_1} [Y_{t_1}]$ y $\mu_2 = E^{P_2} [Y_{t_2}]$, donde $E^{P_i} [Y_{t_i}]$ denota el valor esperado de Y en t_i , bajo la medida de probabilidad P_i , para $i = 1, 2$.

Para determinar los escenarios de Y en t_1 se aplica la metodología de un periodo sobre $[t_0, t_1]$, a partir de μ_1 y la varianza que se estime sobre dicho periodo, σ_1^2 , de donde se obtienen los valores de Y_u, Y_m y Y_d , así como sus respectivas probabilidades p_u, p_m y p_d .

Por su parte, para la determinación de escenarios de Y en t_2 se procede de la siguiente manera:

- Se determinan las esperanzas condicionales $\mu_{2|u}, \mu_{2|m}$ y $\mu_{2|d}$, donde:
 - $\mu_{2|u}$ es la esperanza de Y en t_2 , dado que $Y_{t_1} = Y_u$.
 - $\mu_{2|m}$ es la esperanza de Y en t_2 , dado que $Y_{t_1} = Y_m$.
 - $\mu_{2|d}$ es la esperanza de Y en t_2 , dado que $Y_{t_1} = Y_d$.
- Se estiman las varianzas condicionales $\sigma_{2|u}^2, \sigma_{2|m}^2$ y $\sigma_{2|d}^2$, donde:
 - $\sigma_{2|u}^2$ es la varianza de Y sobre el intervalo $[t_1, t_2]$, dado que $Y_{t_1} = Y_u$.
 - $\sigma_{2|m}^2$ es la varianza de Y sobre el intervalo $[t_1, t_2]$, dado que $Y_{t_1} = Y_m$.
 - $\sigma_{2|d}^2$ es la varianza de Y sobre el intervalo $[t_1, t_2]$, dado que $Y_{t_1} = Y_d$.
- Se aplica la metodología de un periodo para los siguientes casos:
 - $\mu_{2|u}$ y $\sigma_{2|u}^2$, para obtener los valores de Y en t_2 , dado que el valor de Y en t_1 sea Y_u , así como sus respectivas probabilidades.
 - $\mu_{2|m}$ y $\sigma_{2|m}^2$, para obtener los valores de Y en t_2 , dado que el valor de Y en t_1 sea Y_m , así como sus respectivas probabilidades.
 - $\mu_{2|d}$ y $\sigma_{2|d}^2$, para obtener los valores de Y en t_2 , dado que el valor de Y en t_1 sea Y_d , así como sus respectivas probabilidades.

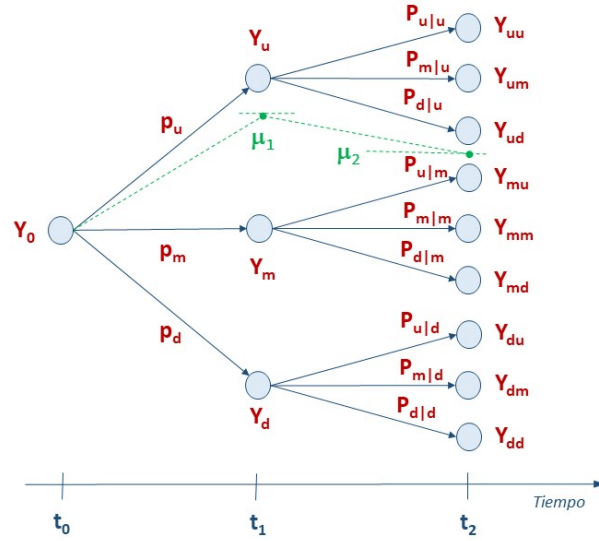


Figura 1.2: Modelo de dos periodos

1.2.1. Determinación de esperanzas condicionales

Las esperanzas condicionales se asocian a la expectativa μ_2 aplicando el siguiente resultado elemental de esperanza condicional:

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= E[Y_{t_2}] \\
 &= E[E[Y_{t_2}|Y_{t_1}]] \\
 &= E[Y_{t_2}|Y_{t_1} = Y_u]p_u + E[Y_{t_2}|Y_{t_1} = Y_m]p_m + E[Y_{t_2}|Y_{t_1} = Y_d]p_d \\
 &= \mu_{2|u}p_u + \mu_{2|m}p_m + \mu_{2|d}p_d
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Para determinar las esperanzas condicionales, además de la condición (1.9), se consideran las siguientes restricciones:

- La esperanza de crecimiento de Y para t_2 , dado que su valor no cambió en el primer periodo, corresponde a un valor $\mu_{1,2}$, determinado por la opinión experta:

$$E[Y_{t_2}|Y_{t_1} = Y_m] = \mu_{2|m} = \mu_{1,2} \tag{1.10}$$

- Las esperanzas $\mu_{2|u}$ y $\mu_{2|d}$ se relacionan con $\mu_{1,2}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mu_{2|u} &= \mu_{1,2} + \delta_u \\
 \mu_{2|d} &= \mu_{1,2} - \delta_d
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

para $\delta_u, \delta_d \in \mathfrak{R}$.

- Se considera la variabilidad de las esperanzas de Y en t_2 , dada la información de Y en t_1 :

$$\text{Var}(E[Y_{t_2}|Y_{t_1}]) \equiv \sigma_{1,2}^2 \tag{1.12}$$

A partir de (1.9), (1.10), (1.11) y (1.12) se establece el siguiente sistema de ecuaciones para δ_u y δ_d :

$$\begin{aligned}\mu_2 - \mu_{1,2} &= \delta_u p_u - \delta_d p_d \\ \sigma_{1,2}^2 - (\mu_{1,2} - \mu_2)^2 &= \delta_u^2 p_u + \delta_d^2 p_d + 2(\mu_{1,2} - \mu_2)(\delta_u p_u - \delta_d p_d)\end{aligned}\quad (1.13)$$

cuya solución se describe en el siguiente resultado.

Proposición 4. *Las esperanzas condicionales $\mu_{2|u}$ y $\mu_{2|d}$, bajo los supuestos (1.10), (1.11) y (1.12), se pueden expresar, respectivamente, como $\mu_{1,2} + \delta_u$ y $\mu_{1,2} - \delta_d$, donde*

$$\delta_d = \frac{\delta_u p_u - (\mu_2 - \mu_{1,2})}{p_d} \quad (1.14)$$

δ_u tiene dos posibles valores:

$$\frac{\frac{2(\mu_2 - \mu_{1,2})p_u}{p_d} + \sqrt{\frac{4(\mu_2 - \mu_{1,2})^2 p_u^2}{p_d^2} + 4p_u \left(1 + \frac{p_u}{p_d}\right) \left[\sigma_{1,2}^2 + (\mu_2 - \mu_{1,2})^2 \left(1 - \frac{1}{p_d}\right)\right]}}{2p_u \left(1 + \frac{p_u}{p_d}\right)} \quad (1.15)$$

y

$$\frac{\frac{2(\mu_2 - \mu_{1,2})p_u}{p_d} - \sqrt{\frac{4(\mu_2 - \mu_{1,2})^2 p_u^2}{p_d^2} + 4p_u \left(1 + \frac{p_u}{p_d}\right) \left[\sigma_{1,2}^2 + (\mu_2 - \mu_{1,2})^2 \left(1 - \frac{1}{p_d}\right)\right]}}{2p_u \left(1 + \frac{p_u}{p_d}\right)} \quad (1.16)$$

Demostración. La expresión (1.14) se obtiene de despejar δ_d de la primera ecuación del sistema de ecuaciones (1.13).

Por su parte, al sustituir (1.14) en la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (1.13) se obtiene que δ_u debe satisfacer la ecuación de segundo grado:

$$0 = \left[p_u \left(1 + \frac{p_u}{p_d}\right)\right] \delta_u^2 + \left[-\frac{2(\mu_2 - \mu_{1,2})p_u}{p_d}\right] \delta_u + \left[-\sigma_{1,2}^2 - (\mu_2 - \mu_{1,2})^2 \left(1 - \frac{1}{p_d}\right)\right]$$

de donde se deducen (1.15) y (1.16). □

La proposición anterior establece dos valores factibles para δ_u . Al respecto, la metodología utiliza la siguiente:

$$\delta_u = \frac{\frac{2(\mu_2 - \mu_{1,2})p_u}{p_d} + \sqrt{\frac{4(\mu_2 - \mu_{1,2})^2 p_u^2}{p_d^2} + 4p_u \left(1 + \frac{p_u}{p_d}\right) \left[\sigma_{1,2}^2 + (\mu_2 - \mu_{1,2})^2 \left(1 - \frac{1}{p_d}\right)\right]}}{2p_u \left(1 + \frac{p_u}{p_d}\right)} \quad (1.17)$$

Lo anterior a partir de las siguientes observaciones:

- En el caso particular en que $\mu_2 = \mu_{1,2}$, es decir, si la esperanza del valor de Y en t_2 se mantiene en μ_2 cuando el valor de Y en t_1 sea igual al valor inicial Y_0 , la condición (1.9) se reduce a

$$\mu_2 = \mu_{2|u} p_u + \mu_2 p_m + \mu_{2|d} p_d$$

de donde

$$\begin{aligned}\mu_2(p_u + p_d) &= \mu_2(1 - p_m) \\ &= \mu_{2|u} p_u + \mu_{2|d} p_d\end{aligned}$$

por lo que

$$\mu_2 = \left(\frac{p_u}{p_u + p_d}\right) \mu_{2|u} + \left(\frac{p_d}{p_u + p_d}\right) \mu_{2|d}$$

Es decir, si $\mu_{1,2} = \mu_2$, entonces μ_2 se encuentra entre $\mu_{2|u}$ y $\mu_{2|d}$.

- Para las variables financieras para las cuales se desarrolló la metodología, se ha observado que entre mayor es su crecimiento, mayores son sus expectativas de crecimiento.
- Por lo anterior, se supone que $\mu_{2|u} > \mu_{2|d}$, lo cual implica, por (1.11) y $\mu_{2|u} > \mu_2 > \mu_{2|d}$, que $\delta_u > 0$ y $\delta_d > 0$, condiciones que se cumplen únicamente para la solución (1.17).

1.2.2. Tamaño de los cambios

En independencia de la solución de δ_u que se utilice, es necesario conocer las condiciones bajo las cuales δ_u sea un número real. Dichas condiciones se establecen en el siguiente lema.

Lema 3. Sean $\mu_{1,2}$ y μ_2 tales que $\mu_{1,2} - \mu_2 \neq 0$. Entonces, $\delta_u \in \Re$ si y solamente si

$$\Delta Y \leq \sqrt{[\sigma_1^2 + (\mu_1 - Y_0)^2] \left[1 + \left(\frac{\sigma_{1,2}}{\mu_2 - \mu_{1,2}} \right)^2 \right]} \quad (1.18)$$

Demostración. De (1.15) y (1.16) se observa que $\delta_u \in \Re$ si y solamente si

$$\frac{4(\mu_2 - \mu_{1,2})^2 p_u^2}{p_d^2} + 4p_u \left(1 + \frac{p_u}{p_d} \right) \left[\sigma_{1,2}^2 + (\mu_2 - \mu_{1,2})^2 \left(1 - \frac{1}{p_d} \right) \right] \geq 0$$

expresión que al multiplicarse por $\frac{p_d}{4p_u}$, es equivalente a

$$(\mu_2 - \mu_{1,2})^2 \left[\frac{p_u}{p_d} + (p_u + p_d) - \left(1 + \frac{p_u}{p_d} \right) \right] + (p_u + p_d) \sigma_{1,2}^2 \geq 0$$

de donde

$$(p_u + p_d) [(\mu_2 - \mu_{1,2})^2 + \sigma_{1,2}^2] \geq (\mu_2 - \mu_{1,2})^2$$

expresión a partir de la cual, al usar que $p_u + p_d = 1 - p_m$, se obtiene que

$$(\mu_2 - \mu_{1,2})^2 \leq \left(\frac{1 - p_m}{p_m} \right) \sigma_{1,2}^2 \quad (1.19)$$

De (1.4) se obtiene que $p_u + p_d = \frac{\sigma_1^2 + (\mu_1 - Y_0)^2}{(\Delta Y)^2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1 - p_m}{p_m} &= \frac{p_u + p_d}{1 - (p_u + p_d)} \\ &= \frac{\sigma_1^2 + (\mu_1 - Y_0)^2}{(\Delta Y)^2 - [\sigma_1^2 + (\mu_1 - Y_0)^2]} \end{aligned}$$

Luego entonces, al sustituir la expresión anterior en (1.19) se deduce que

$$(\mu_2 - \mu_{1,2})^2 ((\Delta Y)^2 - [\sigma_1^2 + (\mu_1 - Y_0)^2]) \leq [\sigma_1^2 + (\mu_1 - Y_0)^2] \sigma_{1,2}^2$$

Por lo tanto,

$$(\Delta Y)^2 \leq [\sigma_1^2 + (\mu_1 - Y_0)^2] \left[1 + \left(\frac{\sigma_{1,2}}{\mu_2 - \mu_{1,2}} \right)^2 \right]$$

de donde se concluye el resultado. □

1.2.3. Consistencia con la opinión experta

De manera análoga al caso de un periodo, el modelo para dos periodos también es consistente con las expectativas de la opinión experta, conforme a lo que se describe en el siguiente resultado.

Lema 4. *Supóngase que $\mu_{1,2} = \mu_1$. Entonces:*

- $Y_0 \leq \mu_1$ y $\mu_2 \leq \mu_1$ implica $\delta_u \leq \delta_d$.
- $\mu_1 \leq Y_0$ y $\mu_1 \leq \mu_2$ implica $\delta_d \leq \delta_u$.

Demostración. Se demuestra primero que $Y_0 \leq \mu_1$ y $\mu_2 \leq \mu_1$ implica $\delta_u \leq \delta_d$. De la primera igualdad del sistema de ecuaciones (1.13) se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta_u \left(\frac{p_u}{p_d} \right) &= \frac{\mu_2 - \mu_{1,2}}{p_d} + \delta_d \\ &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{p_d} + \delta_d \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue del supuesto $\mu_{1,2} = \mu_1$. Por tanto, si $\mu_2 \leq \mu_1$, se deduce que

$$\delta_u \left(\frac{p_u}{p_d} \right) \leq \delta_d \quad (1.20)$$

Por otro lado, $\mu_1 \geq Y_0$ implica, por el Lema 1, $p_u \geq p_d$ y por tanto, de (1.20), se concluye que $\delta_u \leq \delta_d$. La demostración de $\mu_1 \leq Y_0$ y $\mu_1 \leq \mu_2$ implican $\delta_d \leq \delta_u$ es similar. □

Los resultados anteriores tienen la siguiente interpretación:

- Si la esperanza de la opinión experta es que el valor de la variable Y se incremente o mantenga durante el primer periodo ($Y_0 \leq \mu_1$) y posteriormente, se decremente durante el segundo periodo ($\mu_2 \leq \mu_1$), entonces el decremento esperado en dicho periodo ($\mu_{2|d} = \mu_{1,2} - \delta_d$) es mayor en magnitud que el incremento esperado respectivo ($\mu_{2|u} = \mu_{1,2} + \delta_u$).
- Si la esperanza de la opinión experta es que el valor de la variable Y se reduzca o mantenga durante el primer periodo ($\mu_1 \leq Y_0$) y posteriormente se incremente durante el segundo periodo ($\mu_1 \leq \mu_2$), entonces el incremento esperado en dicho periodo ($\mu_{2|u} = \mu_{1,2} + \delta_u$) es mayor en magnitud que el decremento esperado correspondiente ($\mu_{2|d} = \mu_{1,2} - \delta_d$).

Cabe mencionar que los resultados del Lema 4 son válidos para las dos soluciones de δ_u descritas en (1.15) y (1.16).

1.2.4. Ejemplo

Considere la institución financiera del ejemplo anterior, la cual desea ampliar el horizonte de sus pronósticos del tipo de cambio pesos por dólar a tres meses.

Para tal efecto, la institución financiera instrumentó la metodología de dos periodos de la siguiente manera:

- Consideró como primer periodo el primer mes, a partir del 13 de abril del 2023 y como segundo periodo los dos meses posteriores.
- Estimó, con base al análisis y experiencia de su personal, lo siguiente:
 - Un tipo de cambio de 18.75 pesos por dólar para el segundo periodo (i. e. $\mu_2 = 18.75$), es decir, en tres meses a partir del 13 de abril del 2023.

- Un tipo de cambio de 18.25 pesos por dólar para el segundo periodo, si al final del primer periodo el tipo de cambio se mantiene en 18.0152 pesos por dólar (i. e. $\mu_{1,2} = 18.25$). Es decir, estimó que el tipo de cambio alcance un valor de 18.25 pesos por dólar en tres meses, a partir del 13 de abril del 2023, si un mes después de dicha fecha el tipo de cambio se mantiene en 18.0152 pesos por dólar.
- Estimó una desviación estándar del valor del tipo de cambio para el segundo periodo ($\sigma_{1,2}$) igual a 0.518 de la siguiente manera:
 - A partir de los tipos de cambio pesos por dólar observados del 4 de enero del 2021 al 13 de abril del 2023, calculó las tasas bimestrales logarítmicas respectivas en dicho periodo. Es decir, calculó los valores

$$r_t \equiv \log \left(\frac{Y_{t+42}}{Y_t} \right)$$

donde Y_t es el tipo de cambio peso por dólar observado el día (hábil) t y 42 es el número promedio de días hábiles de dos meses. Se calcularon un total de 533 tasas bimestrales logarítmicas.

- Estimó la media y la desviación estándar de las tasas mensuales logarítmicas observadas, las cuales son respectivamente $\mu'' = -0.007$ y $\sigma'' = 0.028$.
- Estimó la desviación estándar del valor del tipo de cambio peso por dólar al final del segundo periodo, denotado por Y_{t_2} , a partir de la expectativa del primer periodo (μ_1), asumiendo que la tasa bimestral logarítmica (r) se distribuyen de acuerdo a una distribución normal y que $Y_{t_2} = \mu_1 e^r$:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \sqrt{\text{Var}(E[Y_{t_2}|Y_{t_1}])} \\ &= \sqrt{\text{Var}(\mu_1 e^r)} \\ &= \mu_1 \sqrt{\text{Var}(e^r)} \\ &= \mu_1 \sqrt{e^{2\mu'' + 2(\sigma'')^2} - e^{2\mu'' + (\sigma'')^2}} \\ &= 18.5 \sqrt{e^{2(-0.007) + 2(0.028)^2} - e^{2(-0.007) + (0.028)^2}} \\ &= 0.518 \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad es consecuencia de que Y_{t_2} se distribuya de acuerdo a una distribución lognormal.

- Determinó la esperanza del tipo de cambio para el segundo periodo, a partir de cada escenario considerado para el primer periodo, mediante la aplicación de la Proposición 4 y observando que el valor de ΔY para el primer periodo, 0.7454, es menor que la cota superior establecida por (1.18), que en este caso corresponde a 0.941. Las expectativas en cuestión son:
 - $\mu_{2|u} = 18.25 + 0.795 = 19.045$.
 - $\mu_{2|m} = 18.25$.
 - $\mu_{2|d} = 18.25 - 1.078 = 17.172$.
- Para cada escenario considerado en el primer periodo, determinó los tres escenarios derivados de éste para el segundo periodo, aplicando la metodología del primer periodo, como se describe en seguida:
 - Tomando como valor inicial $Y_u = 18.7606$, como valor esperado $\mu_{2|u} = 19.045$ y como desviación estándar $\sigma = 0.525$, estimada con el mismo método utilizado para estimar $\sigma_{1,2}$, determinó el rango factible de ΔY , $[0.597, 1.254]$, mediante la aplicación del Lema 2, y el rango correspondiente de probabilidades de incremento, $[0.227, 0.738]$, utilizando (1.4), a partir de lo cual determinó utilizar 0.773 como el valor de ΔY , asociado con una probabilidad de incremento de 0.482, de donde se obtuvieron los siguientes escenarios:

- 19.5333, con una probabilidad de 0.482.
 - 18.7606, con una probabilidad de 0.403.
 - 17.9879, con una probabilidad de 0.115.
- Tomando como valor inicial $Y_m = 18.0152$, como valor esperado $\mu_{2|m} = 18.250$ y como desviación estándar $\sigma = 0.504$, estimada con el mismo método utilizado para estimar $\sigma_{1,2}$, determinó el rango factible de ΔY , $[0.556, 1.317]$, mediante la aplicación del Lema 2, y el rango correspondiente de probabilidades de incremento, $[0.178, 0.711]$, utilizando (1.4), a partir de lo cual determinó utilizar 0.736 como el valor de ΔY , asociado con una probabilidad de incremento de 0.445, de donde se obtuvieron los siguientes escenarios:
 - 18.7515, con una probabilidad de 0.445.
 - 18.0152, con una probabilidad de 0.430.
 - 17.2789, con una probabilidad de 0.126.
 - Tomando como valor inicial $Y_d = 17.2698$, como valor esperado $\mu_{2|d} = 17.172$ y como desviación estándar $\sigma = 0.483$, estimada con el mismo método utilizado para estimar $\sigma_{1,2}$, determinó el rango factible de ΔY , $[0.493, 2.477]$, mediante la aplicación del Lema 2, y el rango correspondiente de probabilidades de decremento, $[0.04, 0.60]$, utilizando (1.4), a partir de lo cual determinó utilizar 0.698 como el valor de ΔY , asociado con una probabilidad de decremento de 0.32, de donde se obtuvieron los siguientes escenarios:
 - 17.9682, con una probabilidad de 0.179.
 - 17.2698, con una probabilidad de 0.501.
 - 16.5714, con una probabilidad de 0.320.

1.3. Tres periodos

Dado el valor inicial Y_0 en t_0 y los valores esperados μ_1 , μ_2 y μ_3 , en los tiempos t_1 , t_2 y t_3 , respectivamente, donde $t_1 < t_2 < t_3$, se desean obtener tres escenarios de Y en t_1 , nueve escenarios de Y en t_2 y veintisiete escenarios de Y en t_3 , con sus correspondientes probabilidades de manera tal que:

- Cada uno de los escenarios en t_i derive en tres escenarios en t_{i+1} y que cada escenario en t_{i+1} provenga de un único escenario en t_i , para $i = 1, 2$.
- Los escenarios sean consistentes con la trayectoria esperada (μ_1, μ_2, μ_3) , al satisfacer las condiciones $\mu_i = E^{P_i}[Y_{t_i}]$, donde E^{P_i} denota el valor esperado de Y en t_i , bajo la medida P_i , para $i = 1, 2, 3$.

Para determinar los escenarios de Y en t_1 y t_2 se aplica, respectivamente, el modelo para uno y dos periodos.

Por su parte, para obtener los escenarios de Y en t_3 se procede de la siguiente manera:

- Los veintisiete escenarios de Y en t_3 se dividen en tres grupos de nueve escenarios, cada uno de los cuales corresponde a los escenarios derivados a partir de cada uno de los tres escenarios de Y en t_1 . Es decir, un grupo corresponde a los nueve escenarios de Y en t_3 que derivan de Y_u , otro grupo corresponde a los nueve escenarios en t_3 que derivan de Y_m y el tercer grupo consiste en los escenarios en t_3 que derivan de Y_d .
- Para cada uno de los tres grupos descritos anteriormente se aplica el modelo de dos periodos de la siguiente manera:
 - El escenario de Y en t_1 del cual deriven los escenarios del grupo, Y_u , Y_m o Y_d , según corresponda, es considerado como valor inicial.

- Los escenarios de Y en t_2 derivados del valor de Y en t_1 considerado como valor inicial, conforman los escenarios del primer periodo.
 - Los escenarios de Y en t_3 derivados del valor de Y en t_1 considerado como valor inicial, constituyen los escenarios del segundo periodo.
- Para determinar los escenarios de los grupos descritos anteriormente, es necesario conocer su valor esperado, el cual corresponde al valor esperado de Y en t_3 , dado que Y toma el valor Y_l en t_1 , para $l \in \{u, m, d\}$, al que se denota por $\mu_{3|l}$ y cuyo cálculo se describe en seguida.

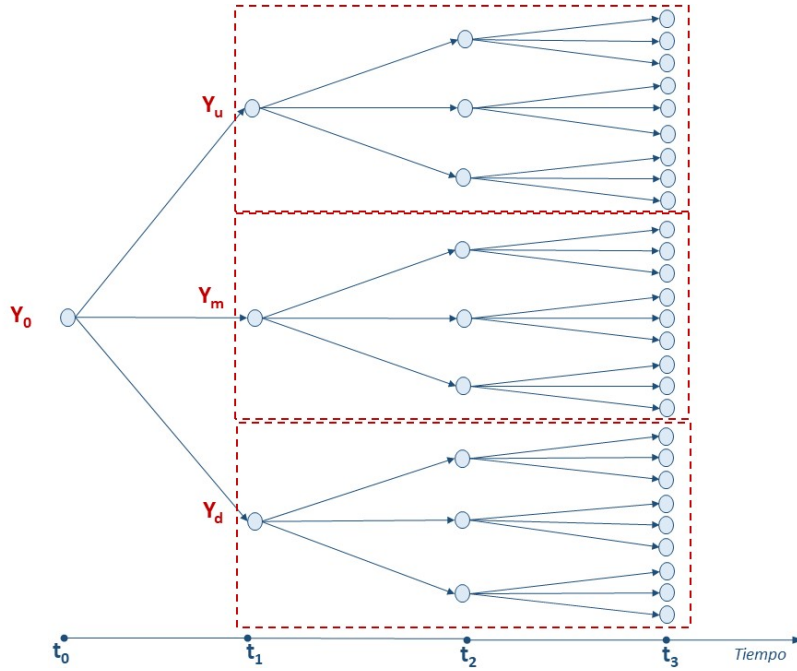


Figura 1.3: Aplicación del modelo de dos periodos al caso de tres periodos

1.3.1. Determinación de esperanzas condicionales

Para obtener $\mu_{3|l}$, para $l \in \{u, m, d\}$, se procede de manera análoga al caso en que se obtiene $\mu_{2|l}$, para el caso de dos periodos. A saber, se consideran las siguientes restricciones:

- Las esperanzas condicionales cumplen con la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 \mu_3 &= E[Y_{t_3}] \\
 &= E[E[Y_{t_3}|Y_{t_1}]] \\
 &= E[Y_{t_3}|Y_{t_1} = Y_u]p_u + E[Y_{t_3}|Y_{t_1} = Y_m]p_m + E[Y_{t_3}|Y_{t_1} = Y_d]p_d \\
 &= \mu_{3|u}p_u + \mu_{3|m}p_m + \mu_{3|d}p_d
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

- La expectativa de crecimiento de Y para t_3 , dado que su valor no cambió en el primer periodo, de t_0 a t_1 , corresponde a un valor $\mu_{1,3}$, determinado por la opinión experta:

$$E[Y_{t_3}|Y_{t_1} = Y_m] = \mu_{3|m} = \mu_{1,3} \tag{1.22}$$

- Tomando en consideración la restricción anterior, $\mu_{3|u}$ y $\mu_{3|d}$ se relacionan con $\mu_{1,3}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mu_{3|u} &= \mu_{1,3} + \delta_u^{1,3} \\ \mu_{3|d} &= \mu_{1,3} - \delta_d^{1,3}\end{aligned}\tag{1.23}$$

para $\delta_u^{1,3}, \delta_d^{1,3} \in \mathfrak{R}$.

- La variabilidad de las esperanzas de Y en t_3 , dado el valor de Y en t_1 :

$$\text{Var} (E [Y_{t_3}|Y_{t_1}]) \equiv \sigma_{1,3}^2\tag{1.24}$$

Bajo las restricciones anteriores se pueden aplicar las expresiones (1.14), (1.17) y (1.18) para resolver para $\delta_u^{1,3}$ y $\delta_d^{1,3}$.

1.4. Comentarios

En seguida se exponen algunos comentarios sobre el material expuesto en este capítulo:

- La metodología descrita en este capítulo puede ser aplicada a cualquier variable de interés, en independencia que ésta sea o no del ámbito financiero.
- La metodología requiere de los siguientes parámetros:
 - Una trayectoria esperada de la variable de interés sobre el horizonte de tiempo considerado.
 - La variabilidad estimada de la variable de interés alrededor de la trayectoria esperada.
- Los principales conceptos matemáticos a partir de los cuales se desarrolla la metodología son probabilidad y álgebra elemental.
- Los ejemplos descritos en este capítulo se desarrollaron ex profeso para ilustrar la aplicación de la metodología.
- La elección de la solución de δ_u a utilizar a partir de (1.15) y (1.16), depende de la naturaleza de las variables a las que se aplique la metodología.

1.5. Referencias

- Ash, R.B. (2008), Basic Probability Theory, Dover Publications, Inc.
- Baxter, M., Rennie, A. (1999), Financial Calculus, Cambridge University Press.
- Mood, A.M., Graybill, F.A., Boes, D.C. (1974), Introduction to the Theory of Statistics, Third Edition, McGraw-Hill.
- Ross, S.M. (1997), Introduction to Probability Models, Sixth Edition, Academic Press.

Capítulo 2

Determinación de límites de inversión

Introducción

En este capítulo describo una metodología que desarrollé para determinar los límites de inversión de una institución financiera, cuando ésta invierte en depósitos a corto plazo que le permiten disponer de liquidez inmediata, pero que están expuestos al riesgo de incumplimiento por parte de las instituciones en las que se realizan dichos depósitos. La metodología puede aplicarse también en el caso de instituciones no financieras que realicen este tipo de inversiones.

La metodología se basa en un modelo de optimización que busca minimizar el riesgo al que se expone la institución financiera al invertir en dichos depósitos. Bajo ciertas condiciones, la metodología permite obtener fórmulas explícitas de los límites de inversión que facilitan su cálculo e interpretación. En seguida se describe el modelo.

2.1. Modelo

2.1.1. Variables y parámetros

El planteamiento del modelo requiere la definición de las siguientes variables:

- M es el monto que la institución invertirá en depósitos a corto plazo.
- N es el número instituciones o contrapartes con las que la institución realizará los depósitos.
- w_j es el porcentaje del monto M invertido con la contraparte j , para $j = 1, \dots, N$.
- π_j es la pérdida asociada al depósito j , la cual es igual a $w_j M$ con probabilidad p_j , cuando incumple la contraparte j , y cero en otro caso, con probabilidad $1 - p_j$, para $j = 1, \dots, N$.

De esta manera, la pérdida asociada a la inversión de un monto M en depósitos a corto plazo, puede expresarse de la siguiente manera:

$$\Pi \equiv \sum_{j=1}^N \pi_j \tag{2.1}$$

2.1.2. Planteamiento

El modelo considera como medida del riesgo del incumplimiento de las contrapartes a la varianza de la pérdida respectiva, e. g. Mood (1974), la cual se calcula a partir de (2.1) como

$$\begin{aligned}
 Var [\Pi] &= \sum_{j=1}^N Var [\pi_j] + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{i < j} COV(\pi_j, \pi_i) \\
 &= M^2 \left[\sum_{j=1}^N w_j^2 p_j (1 - p_j) \right] \\
 &\quad + 2M^2 \left[\sum_{j=1}^N \sum_{i < j} w_j w_i \rho_{j,i} \sqrt{p_j (1 - p_j)} \sqrt{p_i (1 - p_i)} \right]
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $\rho_{j,i}$ es la correlación entre el incumplimiento de la contraparte j y el incumplimiento de la contraparte i , para $j = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, N$ e $i < j$.

La expresión (2.2) puede reexpresarse en términos matriciales de la siguiente manera:

$$Var [\Pi] = M^2 (w^T \Sigma w) \tag{2.3}$$

donde $\Sigma_{j,i} = \rho_{j,i} \sqrt{p_j (1 - p_j)} \sqrt{p_i (1 - p_i)}$, para toda $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, n$.

De esta manera, el modelo tiene como propósito determinar los límites de inversión con cada contraparte j , para $j = 1, \dots, N$, de manera tal que se minimice la varianza de la pérdida, lo cual puede expresarse en términos del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
 &Min \quad M^2 (w^T \Sigma w) \\
 &s.a. \\
 &\sum_{j=1}^N w_j = 1 \\
 &w_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde las restricciones $\sum_{j=1}^N w_j = 1$ y $w_j \geq 0$ corresponden, respectivamente, a la condición de que se invierta la totalidad del monto M y que cada inversión corresponde a un depósito.

Dado que $M^2 > 0$ y que $\sum_{j=1}^N w_j = 1$ y $w_j \geq 0$ pueden reexpresarse, respectivamente, como $w^T \mathbf{1} = 1$, donde $\mathbf{1}^T \equiv (1, \dots, 1)$, $w^T = (w_1, \dots, w_N)$ y $w \geq \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}^T \equiv (0, \dots, 0)$, el problema de optimización (2.4) puede a su vez reexpresarse como

$$\begin{aligned}
 &Min \quad w^T \Sigma w \\
 &s.a. \\
 &w^T \mathbf{1} = 1 \\
 &w \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

El problema de optimización (2.5) es el modelo de referencia para la determinación de los límites de inversión.

2.2. Instrumentación

En este apartado se describe cómo resolver el problema (2.5). Para tal efecto, se estudia primero el caso particular en que los eventos de incumplimiento sean independientes dado que:

- Tiene solución explícita.
- La interpretación de su solución es relativamente sencilla.
- Su solución puede utilizarse como referencia para interpretar la solución del caso general.

2.2.1. Caso de eventos de incumplimiento independientes

Para obtener la solución de (2.5) bajo el supuesto de eventos de incumplimiento independientes, se resolverá una versión *relajada* del mismo, en la que no se considera la restricción de no negatividad y para la cual se observará que su solución, por su naturaleza, cumple con la no negatividad.

De esta manera, en la siguiente proposición se obtiene la solución explícita del problema (2.5), sin considerar la no negatividad.

Proposición 5. *La solución del problema de optimización (2.5), sin considerar la restricción de no negatividad, a la que se denota por w^* , es*

$$w^* = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \quad (2.6)$$

Demostración. Las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker, e. g. Bazara, et al (1993), establecen la existencia de $\lambda \in \Re$ tal que

$$\Sigma w^* - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

de donde, dado que la matriz Σ es invertible, se deduce que

$$w^* = \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

De la expresión anterior y de la restricción $w^T \mathbf{1} = 1$, la cual debe cumplir w^* , se obtiene que

$$1 = \mathbf{1}^T w^* = \lambda (\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})$$

de donde

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

Por lo tanto,

$$w^* = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

□

A partir del resultado anterior, se obtiene la solución del problema (2.5) para el caso de eventos de incumplimiento independientes, como se demuestra en el siguiente corolario.

Corolario 1. *La solución del problema de optimización (2.5), sin considerar la restricción de no negatividad y bajo el supuesto de independencia de incumplimientos, es decir, bajo el supuesto que $\Sigma_{j,i} = 0$, para $j \neq i$, $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$, a la que denotamos por w^* , es*

$$w_j^* = \frac{K}{p_j(1-p_j)} \quad (2.7)$$

para toda $j = 1, \dots, N$, donde

$$K = \frac{1}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{p_j(1-p_j)}}$$

Demostración. Obsérvese que el supuesto $\Sigma_{j,i} = 0$, para $j \neq i$, $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$ implica que la matriz Σ es diagonal y por lo tanto su inversa es otra matriz diagonal cuyos elementos sobre la misma son los recíprocos de los elementos respectivos de la diagonal de Σ . Es decir,

$$\Sigma_{j,j}^{-1} = \frac{1}{p_j(1-p_j)}$$

para toda $j = 1, \dots, N$. Luego entonces,

$$\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{p_j(1-p_j)}$$

de donde, al aplicar la Proposición 5, se concluye el resultado. □

Obsérvese que la solución (2.7) es positiva para toda $j = 1, \dots, N$, dado que $p_j(1-p_j) > 0$ para toda $j = 1, \dots, N$. Por lo anterior, debe ser también la solución del caso general bajo independencia de incumplimientos, como se formaliza en el siguiente resultado.

Lema 5. *La solución del problema (2.5) bajo el supuesto de independencia de incumplimientos es (2.7).*

Demostración. Basta observar que la solución (2.7) es no negativa y que el valor óptimo del problema *relajado*, sin considerar la restricción de no negatividad, debe ser mayor o igual al valor óptimo del problema (2.5), por lo que debe ser solución de éste. □

La interpretación de la solución (2.7) del problema (2.5) cuando los eventos de incumplimiento son independientes es relativamente sencilla. A saber, que el límite de inversión con la j -ésima contraparte es inversamente proporcional a la varianza de su pérdida por incumplimiento.

2.2.1.1. Ejemplo

Considere una institución financiera que ha decidido realizar depósitos de corto plazo por un monto de M dólares con tres contrapartes: la contraparte A, la contraparte B y la contraparte C.

Para cada una de dichas contrapartes, la institución financiera ha estimado la probabilidad de su incumplimiento para el horizonte sobre el cual desea realizar los depósitos. Para la contraparte A ha estimado una probabilidad de incumplimiento de 0.05, mientras que para las contrapartes B y C ha estimado, respectivamente, una probabilidad de 0.04 y 0.07.

En un primer análisis, la institución financiera desea determinar el porcentaje del monto M que debiese depositarse con cada contraparte, suponiendo que los eventos de incumplimiento de dichas contrapartes son independientes entre sí.

De esta manera, la institución financiera aplica el resultado (2.7) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\frac{1}{0.05(1-0.05)} + \frac{1}{0.04(1-0.04)} + \frac{1}{0.07(1-0.07)}} \\ &= \frac{1}{21.053 + 26.042 + 15.361} \\ &= \frac{1}{62.455} = 0.016 \end{aligned}$$

de donde, los porcentajes de inversión con las contrapartes A, B y C son:

$$w_A = (0.016) \frac{1}{(0.05)(1-0.05)} = 0.33708$$

$$w_B = (0.016) \frac{1}{(0.04)(1-0.04)} = 0.41697$$

$$w_C = (0.016) \frac{1}{(0.07)(1-0.07)} = 0.24595$$

Para motivar el estudio del caso general, el cual incluye la restricción de no negatividad, se analiza el siguiente ejemplo.

2.2.1.2. Ejemplo

Considérese a la institución financiera del ejemplo anterior, la cual, en un segundo análisis, ha estimado la matriz de correlaciones de los incumplimientos de las contrapartes A, B y C, y desea determinar los porcentajes óptimos con esta información adicional.

Para tal efecto, la institución financiera aplica la solución (2.6), la cual permite considerar dependencia entre eventos de incumplimiento, bajo el entendido que, de ser positivos los porcentajes de dicha solución, ésta corresponderá a la solución buscada.

De esta manera, la matriz de correlaciones de eventos de incumplimiento estimada por la institución financiera es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.7 \\ 0.5 & 1 & 0.1 \\ -0.7 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

a partir de la cual, conociendo las varianzas de los incumplimientos de cada contraparte, ha estimado la matriz de covarianzas:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.048 & 0.021 & -0.039 \\ 0.021 & 0.038 & 0.005 \\ -0.039 & 0.005 & 0.065 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 115.789 & -74.146 & 74.929 \\ -74.146 & 73.785 & -50.002 \\ 74.929 & -50.002 & 64.004 \end{pmatrix}$$

De esta manera,

$$\Sigma^{-1} \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 116.572 \\ -50.363 \\ 88.932 \end{pmatrix}$$

Por lo que $\mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1} = 155.141$ y por tanto, de (2.6), los porcentajes óptimos de inversión son:

$$w^* = \begin{pmatrix} 0.75140 \\ -0.32463 \\ 0.57323 \end{pmatrix}$$

Esta solución no es la buscada por la institución financiera, dado que uno de los porcentajes es negativo, el asociado a la contraparte B, y por tanto, éste no corresponde a un depósito sino a un préstamo que se le solicitaría a dicha contraparte, cuyo monto, junto con el considerado inicialmente por la institución financiera para los depósitos, se depositaría con las contrapartes A y C.

2.2.2. Caso general

Proposición 6. La solución del problema (2.5), denotada por w^* , es

$$w^* = \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \Sigma^{-1} \mu \quad (2.8)$$

donde $\lambda \in \Re$ y $\mu^T = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ satisfacen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N w_j &= 1 \\ w_j^* \mu_j &= 0, \quad \forall j = 1, \dots, N. \\ w_j^* &\geq 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Demostración. Directa de aplicar las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker. \square

2.2.2.1. Ejemplo

Considérese a la institución financiera de los dos ejemplos anteriores, la cual resuelve las ecuaciones (2.8) y (2.9), para λ , w_A , w_B , w_C , μ_A , μ_B y μ_C , obteniendo los siguientes porcentajes óptimos:

$$w^* = \begin{pmatrix} 0.546206 \\ 0.000000 \\ 0.453794 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda = 0.008186$ y

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.000004 \\ 0.005735 \\ 0.000211 \end{pmatrix}$$

Es decir, la solución óptima para la institución financiera es depositar 54.62 % con la contraparte A, 45.38 % con la contraparte C y no realizar ningún depósito con la contraparte B.

2.3. Comentarios

A continuación, se hacen algunos comentarios sobre el material expuesto en este capítulo:

- La metodología descrita en este capítulo es aplicable en cualquier institución financiera o no financiera que considere realizar depósitos de corto plazo para poder disponer de liquidez inmediata.
- La metodología requiere únicamente de dos conjuntos de parámetros:
 - Las probabilidades de incumplimiento de las contrapartes con las cuales se realizarán los depósitos.
 - Las correlaciones de los eventos de incumplimiento de dichas contrapartes.

Ambos insumos pueden ser obtenidos a partir de información que publican agencias calificadoras tales como Moody's y Standard and Poor's.

- La metodología está basada en un modelo de optimización cuyo planteamiento requiere de conceptos elementales de probabilidad y cuya solución utiliza condiciones de optimalidad estándares.
- En el caso de considerar eventos de incumplimiento independientes, la metodología permite derivar una expresión explícita de los porcentajes de inversión y brindar una interpretación relativamente intuitiva.
- Los ejemplos de este capítulo se desarrollaron ex profeso para ilustrar la aplicación del modelo.

- El modelo de la metodología puede extenderse fácilmente para considerar restricciones adicionales, tales como:
 - Límites mínimos o máximos de montos o porcentajes de depósitos con las contrapartes consideradas.
 - Límite máximo de la pérdida esperada.

2.4. Referencias

- Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M. (1993), *Nonlinear Programming, Second Edition*, Wiley.
- Mood, A.M., Graybill, F.A., Boes, D.C. (1974), *Introduction to the Theory of Statistics, Third Edition*, McGraw-Hill.

Capítulo 3

Medición de riesgos operativos

Introducción

En este capítulo se describen dos metodologías. Una para medir el riesgo operativo y otra para actualizar los parámetros de la primera. Ambas metodologías son aplicables a cualquier proceso de cualquier empresa o institución.

La primera metodología consiste esencialmente en obtener, bajo ciertos supuestos, la distribución de probabilidad de la severidad de los riesgos operativos que se identifiquen de cada proceso, a partir de la experiencia de las personas que los ejecutan y de la información que pudiera existir sobre la ocurrencia de dichos riesgos operativos, y medir el riesgo a partir de dicha distribución.

La segunda metodología consiste en actualizar las probabilidades de la distribución de severidades referida anteriormente, con base en un enfoque bayesiano, conforme se vaya recabando información sobre la ocurrencia de los riesgos operativos involucrados.

A continuación se describen e ilustran ambas metodologías, después de proporcionar un breve contexto sobre la medición de los riesgos operativos.

3.1. Definición de riesgo operativo

Si bien no existe una definición universalmente aceptada sobre riesgo operativo, éste se refiere en términos generales a las afectaciones potenciales que enfrentan las empresas e instituciones derivadas de su operación, así como de aquellas ocasionadas por eventos externos respecto a los cuales no tienen control.

Las afectaciones potenciales asociadas a la operación de una empresa o institución incluyen, entre otros, las fallas en la ejecución o el diseño de sus procesos internos, así como en la selección de su personal o en la adopción de los sistemas computacionales que utilizan.

Por su parte, los eventos externos fuera del control de la empresa o la institución incluyen, entre otros, fenómenos naturales, como terremotos e inundaciones, y fenómenos sociales, tales como manifestaciones, golpes de estado y revoluciones.

3.2. Desafíos en la medición del riesgo operativo

La medición de los riesgos operativos de cualquier empresa o institución enfrenta típicamente tres principales desafíos:

1. No existe una definición universalmente aceptada sobre el riesgo operativo.

2. Se cuenta con poca información o información poco confiable sobre la ocurrencia de eventos de riesgo operativo.
3. No existe una metodología estandarizada para medirlo.

En relación al primer desafío, cabe mencionar que en el ámbito financiero existe una deficiencia de referencia, establecida por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (CSBB), la cual define el riesgo operativo como *el riesgo de pérdida derivado de procesos internos, personas o sistemas inadecuados o de fallas de éstos, así como de eventos externos*.

En cuanto al segundo desafío, sus principales causas son:

- Una cultura organizacional que considera la ocurrencia de este tipo de riesgos como algo negativo, cuyo reporte conlleva responsabilizar al personal de lo sucedido.
- Algunos errores o fallas que pueden detectarse mucho tiempo después de haber ocurrido, lo que no permite contar con una base de datos con información oportuna.
- Algunas de las pérdidas pueden ser recuperadas, por lo que, aunque se registren, éstas deben ser ajustadas posteriormente, en caso que en efecto puedan ser recuperadas.
- Errores en la descripción de los eventos de riesgo reportados.

Finalmente, respecto al último desafío, éste es consecuencia de los dos anteriores.

3.3. Medición del riesgo operativo

Como se mencionó anteriormente, no existe una metodología estándar para medir el riesgo operativo, por lo que cada empresa o institución que esté interesada en medirlo utiliza el enfoque que considere más conveniente.

Sin embargo, en el ámbito financiero, existen tres enfoques de referencia propuestos por el CSBB:

- Básico.
- Estandarizado.
- Avanzado.

El enfoque básico consiste en estimar la pérdida esperada asociada al riesgo operativo, como una proporción predeterminada del promedio aritmético del ingreso anual neto de los últimos tres años de la empresa o institución de la que se trate, donde el valor de dicha proporción ha sido establecido por el CSBB.

El enfoque estandarizado consiste en separar las actividades de la empresa o institución en un conjunto preestablecido de líneas de negocio, aplicar el enfoque básico en cada una de estas líneas de negocio y sumar las pérdidas estimadas asociadas al riesgo operativo, para cada una de estas líneas de negocio.

El enfoque avanzado consiste en estimar una distribución de probabilidad de pérdidas por riesgo operativo, a partir de la cual se determina la pérdida esperada o alguna otra medida de riesgo que se considere apropiada.

Los enfoques básico y estandarizado son relativamente sencillos y pueden ser utilizados por empresas o instituciones que no cuenten con información sobre la ocurrencia de sus riesgos o con personal capacitado en materia de administración de riesgos.

Por su parte, el enfoque avanzado es el que permite obtener una medición más precisa del riesgo operativo, el cual se describe a continuación.

3.3.1. Distribución de pérdidas por riesgo operativo

Para determinar la distribución de probabilidad de las pérdidas por riesgo operativo se requiere estimar y combinar las distribuciones de probabilidad de su frecuencia y su severidad, e. g. Mood, et al (1974). Para tal efecto, se utiliza usualmente el siguiente modelo:

$$P = \sum_{i=1}^N X_i \quad (3.1)$$

donde:

- P es la pérdida por riesgo operativo.
- N es el número de eventos de riesgo operativo que ocurren en el periodo de tiempo considerado.
- X_i es la pérdida asociada al i -ésimo evento de riesgo operativo que ocurre en el periodo de tiempo considerado, para $i = 1, \dots, N$.

Para obtener la distribución de la variable aleatoria P definida por (3.1), es común suponer que la variable aleatoria N es independiente de las variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$ y que éstas son independientes entre sí.

Adicionalmente, la instrumentación de (3.1) requiere estimar los parámetros de las distribuciones de probabilidad de la frecuencia y severidad consideradas. Para tal efecto, en independencia de las distribuciones involucradas, lo ideal es contar con datos observados, tanto de la frecuencia de ocurrencia de los eventos de riesgo operativo como de los montos de las pérdidas asociadas a los mismos, que permitan realizar estimaciones relativamente precisas de dichos parámetros.

En la práctica, conforme a lo descrito en la sección 3.2, es típico que las empresas e instituciones no cuenten con datos observados sobre sus eventos de riesgo operativo, lo cual dificulta la aplicación del modelo (3.1).

Por lo anterior, a continuación se expone la metodología que desarrollé para medir el riesgo operativo, cuya aplicación no requiere de datos observados sobre los riesgos operativos sucedidos y la cual permite la actualización de sus parámetros conforme se vayan recopilando dichos datos.

3.4. Enfoque alternativo para medir el riesgo operativo

3.4.1. Descripción general

La metodología se aplica a cada proceso de la empresa o institución de que se trate, para cada uno de los cuales se llevan a cabo las siguientes tareas:

1. Se identifican sus riesgos operativos.
2. Se asigna a cada uno de dichos riesgos un valor numérico que represente la severidad de las consecuencias en caso de que éste ocurra.
3. Se determina la probabilidad de ocurrencia de cada riesgo operativo identificado, a partir de una estimación preliminar de su tasa promedio de ocurrencia, en base en la experiencia de la empresa o institución.
4. Se obtiene la distribución de las severidades de los riesgos operativos identificados.
5. Se mide el riesgo operativo a partir de la distribución de severidades.

3.4.2. Identificación de riesgos operativos

Para identificar los riesgos operativos de un proceso se siguen los siguientes pasos:

1. Identificar para cada actividad del proceso las consecuencias de que ésta no se lleve a cabo conforme a lo establecido.
2. Seleccionar aquellas actividades del proceso tales que las consecuencias de no ejecutarlas conforme a lo establecido, puedan afectar la entrega o provisión de los productos o servicios que genera el proceso.
3. Los eventos asociados a la materialización de las consecuencias de no llevar a cabo las actividades del proceso seleccionadas en el paso anterior, conforman el conjunto de riesgos operativos de dicho proceso.

3.4.3. Asignación de severidades

A cada evento de riesgo operativo identificado debe asignársele la severidad de la afectación que ocasionaría en caso de que éste ocurriese.

Para tal efecto, pueden seguirse los siguientes pasos:

1. Establecer una escala cualitativa de severidad que permita a los responsables y participantes del proceso en cuestión, categorizar la afectación de cada riesgo operativo identificado.
2. Establecer una escala cuantitativa que tenga una relación biunívoca con la escala cualitativa establecida. Es decir, que asocie un valor numérico único a cada elemento de la escala cualitativa y tal que para cada valor numérico se asocie un único valor en la escala cualitativa. La escala cuantitativa permitirá medir el riesgo operativo del proceso.

Lo anterior puede expresarse de la siguiente manera:

- Sea K un número entero positivo que representa el número de categorías de severidad consideradas.
- Sea C_k la denominación de la k -ésima categoría cualitativa de severidad, para $k = 1, \dots, K$, tal que si $i < j$, entonces la categoría C_i representa un menor grado de severidad que la categoría C_j .
- El conjunto $\{C_1, \dots, C_K\}$ representa una escala cualitativa de severidad.
- Sea $G : \{C_1, \dots, C_K\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función tal que $G(C_i) < G(C_j)$ para $i < j$; $1 \leq i, j \leq K$.
- El conjunto $\{G(C_1), \dots, G(C_K)\}$ representa una escala cuantitativa asociada a la escala cualitativa $\{C_1, \dots, C_K\}$.

3.4.4. Determinación de probabilidades

Para determinar las probabilidades de ocurrencia de los eventos de riesgo operativo identificados, se hacen los siguientes supuestos:

1. Durante la ejecución del proceso se materializa solamente uno de los riesgos identificados y en una sola ocasión.
2. Los riesgos operativos identificados ocurren de manera independiente.
3. La frecuencia de ocurrencia de cada riesgo operativo identificado se comporta de acuerdo a una distribución Poisson, e. g. Ross (1997).

Bajo las consideraciones y supuestos anteriores, la probabilidad de ocurrencia de cada riesgo operativo identificado es directamente proporcional a su tasa de ocurrencia, como se demuestra a continuación.

Proposición 7. Sea R el conjunto de riesgos operativos identificados de un proceso, N_T^j el número de ocasiones que el riesgo $j \in R$ ocurre en el intervalo de tiempo $[0, T]$, para $T \geq 0$, y Ω^* el evento definido como

$$\Omega^* \equiv \bigcup_{j \in R} \left\{ N_T^j = 1 \mid N_T^i = 0, \forall i \in R, i \neq j, \right\}$$

Supóngase que N_T^j es una variable aleatoria que se distribuye de acuerdo a una distribución Poisson con parámetro $\lambda_j > 0$, es decir, se cumple que:

$$P\left(N_T^j = k\right) = e^{-\lambda_j T} \frac{(\lambda_j T)^k}{k!}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Entonces,

$$p_j \equiv P\left(N_T^j = 1 \mid \Omega^*\right) = \frac{\lambda_j}{\sum_{j \in R} \lambda_j} \quad (3.2)$$

para $j \in R$.

Demostración. Sea $j \in R$. Luego entonces, de la definición de probabilidad condicional y de propiedades elementales de probabilidad, se obtiene que

$$p_j = \frac{P\left(N_T^j = 1; N_T^i = 0, \forall i \in R, i \neq j\right)}{\sum_{j \in R} P\left(N_T^j = 1; N_T^i = 0, \forall i \in R, i \neq j\right)} \quad (3.3)$$

Nótese que el supuesto de independencia implica que

$$P\left(N_T^j = 1; N_T^i = 0, \forall i \in R, i \neq j\right) = P\left(N_T^j = 1\right) \prod_{i \in R, i \neq j} P\left(N_T^i = 0\right)$$

Por lo tanto, dado que $N_T^j \sim Poisson(\lambda_j T)$, se deduce

$$P\left(N_T^j = 1; N_T^i = 0, \forall i \in R, i \neq j\right) = e^{-\lambda_j T} \lambda_j T \prod_{i \in R, i \neq j} e^{-\lambda_i T} = \lambda_j T \prod_{i \in R} e^{-\lambda_i T} \quad (3.4)$$

De (3.3) y (3.4) se concluye (3.2). □

3.4.5. Obtención de la distribución de severidades

Se refiere a la distribución de probabilidad de la severidad del riesgo operativo del proceso que ocurra, dado que solamente sucede uno de sus riesgos operativos identificados.

En términos matemáticos, la distribución de severidades corresponde a la distribución de probabilidad de la variable aleatoria S que toma los valores $G(C_1), \dots, G(C_K)$, conforme a lo definido en la subsección 3.4.3, con las siguientes probabilidades:

$$P(S = G(C_k)) = \sum_{\{j \in R \mid GS(j) = G(C_k)\}} p_j$$

para $k = 1, \dots, K$, donde R es el conjunto de riesgos operativos identificados y $GS(j)$ es la categoría cualitativa de severidad asignada al riesgo $j \in R$, conforme a la escala cuantitativa de severidad $\{G(C_1), \dots, G(C_K)\}$.

3.4.6. Medición del riesgo

Para medir el riesgo operativo de un proceso a partir de la distribución de severidades, se utilizan dos medidas de riesgo: una primaria y otra complementaria.

3.4.6.1. Medida primaria

La medida de riesgo primaria utilizada es el Valor en Riesgo (VaR), una de las medidas más populares en el ámbito de administración de riesgos, referirse por ejemplo a Hull (2012), la cual se define en este contexto como un percentil de la distribución de severidades de los riesgos operativos identificados y que puede expresarse como

$$VaR_\alpha = S_1^\alpha$$

donde:

- $\alpha \in (0, 1)$ es el nivel de confianza, el cual es determinado por el evaluador del riesgo operativo.
- S_1^α es el valor mínimo del conjunto $\{G(C_k) | k = 1, \dots, K\}$ tal que

$$F(S_1^\alpha) \geq \alpha$$

donde $F(\cdot)$ es la función de distribución de severidades del proceso, es decir,

$$F(s) = \sum_{u \leq s} P(S = u)$$

El VaR_α se interpreta como la máxima severidad que pueden alcanzar los riesgos identificados con una probabilidad α .

3.4.6.2. Medida complementaria

Por su parte, la medida de riesgo complementaria es el Valor en Riesgo Condicional, o CVaR, por su siglas en inglés, Conditional Value at Risk, referirse por ejemplo a Rockafellar, et al (2002), que en este contexto se define como la severidad esperada del riesgo operativo del proceso que se haya materializado, en caso que la severidad de dicho riesgo sea mayor al VaR_α y la cual puede expresarse como

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha &= E[S | S \geq VaR_\alpha] \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \left[(F(S_1^\alpha) - \alpha) VaR_\alpha + \sum_{s > S_1^\alpha} P(S = s)s \right] \end{aligned}$$

3.4.7. Ejemplo

Considérese el proceso de reclutamiento de personal de una empresa descrito en la Figura 3.1, el cual es ejecutado por su área de recursos humanos cada vez que alguna de las unidades administrativas de la empresa le solicita reclutar a una persona para cubrir alguna plaza o puesto vacante.

Dada la alta rotación de personal que experimenta la empresa, por la naturaleza de los servicios que ésta ofrece, el director general de la misma estableció un plazo máximo de 30 días hábiles para reclutar a una persona y un plazo adicional de 15 días hábiles en caso de que el perfil requerido sea muy especializado. Sin embargo, conciente de los riesgos operativos a los que se encuentra sujeto dicho proceso, ha instruido al área de administración de riesgos de la empresa a evaluar dichos riesgos operativos, con el propósito de identificar acciones que pudieran llevarse a cabo para mitigarlos.

De esta manera, considerando que no se cuenta con registros de incidentes en la ejecución del proceso de reclutamiento de personal, el área de administración de riesgos decidió aplicar el enfoque alternativo para la medición del riesgo operativo de dicho proceso, como se describe enseguida.

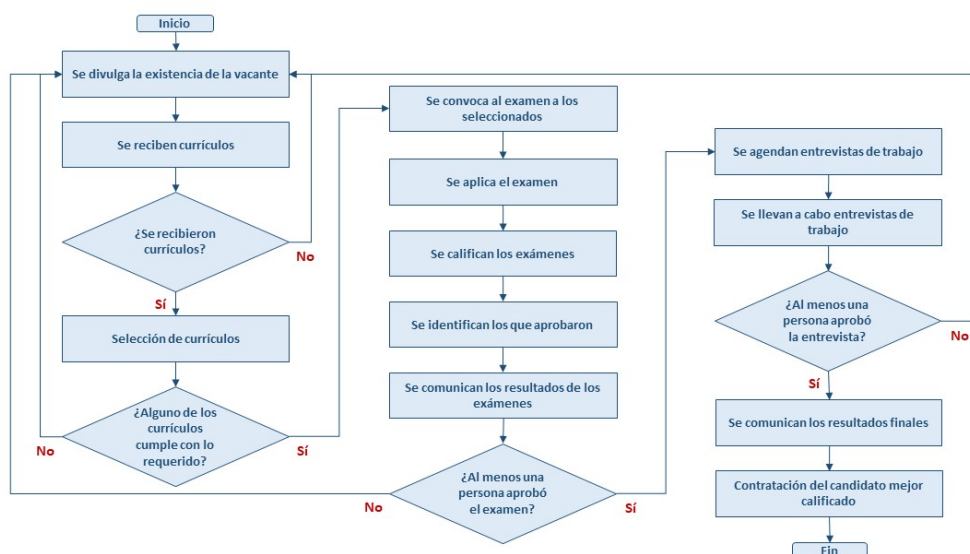


Figura 3.1: Diagrama de flujo de un proceso de reclutamiento de personal

3.4.7.1. Identificación de riesgos

A partir de conversaciones con el personal del área de recursos humanos y aquél que lleva a cabo el proceso de reclutamiento, se identificaron catorce riesgos operativos asociados a doce de sus dieciséis actividades, los cuales se describen en el Cuadro 3.1.

Actividad	Riesgo operativo
Se divulga la existencia de la vacante	No se divulga Errores en la descripción del perfil requerido Error u omisión de la dirección de envío
¿Se recibieron currículos?	No se reciben currículos
¿Algún currículum cumple con lo requerido?	Ninguno cumple con lo requerido
Se convoca al examen a los seleccionadas	Comunicación deficiente
Se califican los exámenes	Errores en la evaluación del examen
Se comunican los resultados de los exámenes	Comunicación deficiente
¿Al menos una persona aprobó el examen?	Ninguno aprueba el examen
Se agendan entrevistas de trabajo	Comunicación deficiente
Se llevan a cabo entrevistas de trabajo	Errores en las entrevistas
¿Al menos una persona aprueba la entrevista?	Ninguno aprueba la entrevista
Se comunican los resultados finales	Comunicación deficiente
Contractación del mejor candidato	Desiste el candidato seleccionado

Cuadro 3.1: Riesgos operativos identificados

3.4.7.2. Asignación de severidades

Los riesgos operativos identificados implican dos tipos de afectaciones: retrasos en en el proceso de contratación, debido a que deben repetirse ciertas actividades o reducciones en la calidad del candidato seleccionado, derivado de errores u omisiones. Al respecto, en el Cuadro 3.2 se describe la afectación asociada a cada riesgo identificado.

Para medir la severidad de los retrasos y las reducciones de calidad, el área de administración de riesgos adoptó una escala cualitativa de tres niveles ($K = 3$):

- (C_1) Leve.
- (C_2) Moderado.
- (C_3) Grave.

Asimismo, para esta escala cualitativa, el área de administración de riesgos determinó una escala cuantitativa mediante la función

$$G(C_k) = \begin{cases} 0.25 & k = 1 \\ 0.5 & k = 2 \\ 1.0 & k = 3 \end{cases}$$

Riesgo operativo	Tipo de afectación
No se divulga	Retraso
Errores en la descripción del perfil requerido	Reducción de calidad
Error u omisión de la dirección de envío	Retraso
No se reciben currículos	Retraso
Ninguno cumple con lo requerido	Retraso
Comunicación deficiente (examen)	Reducción de calidad
Errores en la evaluación del examen	Reducción de calidad
Comunicación deficiente (resultados examen)	Reducción de calidad
Ninguno aprueba el examen	Retraso
Comunicación deficiente (agenda entrevistas)	Reducción de calidad
Errores en las entrevistas	Reducción de calidad
Ninguno aprueba la entrevista	Retraso
Comunicación deficiente (resultados finales)	Reducción de calidad
Desiste el candidato seleccionado	Retraso

Cuadro 3.2: Tipo de afectación de los riesgos operativos identificados

Para asignar la severidad de los retrasos, el área de administración de riesgos de la empresa procedió de la siguiente manera:

1. Con base en la experiencia del personal que participa en el proceso de reclutamiento de personal, se estimó la duración promedio de cada una de sus actividades, las cuales se presentan en el Cuadro 3.3.
2. Se determinó una duración promedio de ejecución del proceso de 22 días hábiles, a partir de la suma de las duraciones promedio de sus actividades.
3. Para cada riesgo operativo asociado a un retraso:
 - a) Se determinó la duración promedio del retraso como la suma de la duraciones promedio de las actividades que deben repetirse en caso de que el riesgo ocurriese.
 - b) En caso de que la suma del retraso estimado y la duración promedio del proceso sea menor o igual que el plazo máximo de 30 días hábiles establecido por el director general de la empresa, se considera que la severidad del riesgo es *leve*.
 - c) En caso contrario, es decir, si la suma referida anteriormente es mayor que el plazo máximo establecido por el director general, entonces:
 - 1) Si la suma en cuestión es menor o igual que la suma del plazo máximo (30 días) y el plazo adicional (15 días) establecidos, entonces se considera que la severidad del riesgo es *moderada*.
 - 2) En otro caso, se considera que la severidad del riesgo es *grave*.

De esta manera, el área de administración de riesgos determinó las severidades para los riesgos operativos cuya ocurrencia implica un retraso, como se muestra en el Cuadro 3.4. Por ejemplo, para el riesgo relativo al error u omisión de la dirección de envío de los currículos, consideró que el área de recursos humanos se daría cuenta 6 días después de haber divulgado el perfil requerido, transcurrido el periodo establecido para la divulgación de la existencia de la vacante y la recepción de los currículos, por lo que deberán reperirse estas dos actividades, lo que implica que la duración total estimada del proceso de reclutamiento pasaría de 22 días a $(22 + 6)$ 28 días, la cual es menor al periodo máximo de 30 días, por lo que el retraso se considera *leve*.

Cabe mencionar que en el caso particular del riesgo en que desiste el candidato seleccionado, se asume que puede contratarse a otro de los candidatos finalistas y que este proceso requiere en promedio de 5 días hábiles.

Actividad	Duración promedio (días)
Se divulga la existencia de la vacante	1
Se reciben los currículos	5
¿Se recibieron currículos?	0
Selección de currículos	1
¿Alguno de los currículos cumple con lo requerido?	0
Se convoca al examen a los seleccionados	3
Se aplica el examen	1
Se califican los exámenes	1
Se identifican los que aprobaron	1
Se comunican los resultados de los exámenes	1
¿Al menos una persona aprobó el examen?	0
Se agendan entrevistas de trabajo	1
Se llevan a cabo entrevistas de trabajo	5
¿Al menos una persona aprobó la entrevista?	0
Se comunican los resultados finales	1
Contractación del candidato mejor calificado	1

Cuadro 3.3: Duraciones promedio por actividad del proceso

Riesgo operativo	Retraso (días)	Severidad
No se divulga	1	Leve
Error u omisión de la dirección de envío	6	Leve
No se reciben currículos	6	Leve
Ninguno cumple con lo requerido	7	Leve
Ninguno aprueba el examen	14	Moderado
Ninguno aprueba la entrevista	20	Moderado
Desiste el candidato seleccionado	5	Leve

Cuadro 3.4: Severidad de los retrasos

En cuanto a la severidad de los riesgos asociados a las reducciones de calidad de los candidatos para ocupar la vacante, el área de administración de riesgos consideró:

- *Leves*, los asociados a comunicaciones deficientes.
- *Moderados*, los que inciden en el perfil requerido.
- *Graves*, los que inciden en los dos elementos de referencia principales para elegir al candidato: el examen y la entrevista.

Bajo estos criterios, el área de administración de riesgos determinó las severidades de los riesgos que se describen en el Cuadro 3.5.

Riesgo operativo	Severidad
Errores en la descripción del perfil requerido	Moderado
Comunicación deficiente (convocatoria a examen)	Leve
Errores en la evaluación del examen	Grave
Comunicación deficiente (resultados de examen)	Leve
Comunicación deficiente (entrevistas)	Leve
Errores en las entrevistas	Grave
Comunicación deficiente (resultados finales)	Leve

Cuadro 3.5: Severidad de afectaciones de calidad de los candidatos

3.4.7.3. Determinación de probabilidades

Para determinar las probabilidades de los riesgos operativos identificados, el área de administración de riesgos estimó sus tasas de ocurrencia promedio por ejecución, a partir de la frecuencia observada por el personal que participa en el proceso, considerando las últimas cien ocasiones en que el proceso de reclutamiento ha sido ejecutado. A partir de estas tasas de ocurrencia, se obtuvieron las probabilidades, conforme a la Proposición 7. Los cálculos respectivos se describen en el Cuadro 3.6.

Riesgo operativo	Frec. Obs.	Tasa Ocurr.	Probabilidad
No se divulga.	1	0.01	0.02
Errores en la descripción del perfil requerido	4	0.04	0.10
Error u omisión de la dirección de envío	1	0.01	0.02
No se reciben currículos	1	0.01	0.02
Ninguno cumple con lo requerido	5	0.05	0.12
Comunicación deficiente (examen)	2	0.02	0.05
Errores en la evaluación del examen	3	0.03	0.07
Comunicación deficiente (resultados examen)	2	0.02	0.05
Ninguno aprueba el examen	8	0.08	0.19
Comunicación deficiente (entrevistas)	2	0.02	0.05
Errores en las entrevistas	3	0.03	0.07
Ninguno aprueba la entrevista	6	0.06	0.14
Comunicación deficiente (resultados finales)	2	0.02	0.05
Desiste el candidato seleccionado	2	0.02	0.05

Cuadro 3.6: Cálculo de probabilidades de riesgos operativos identificados

Por ejemplo, en el caso del riesgo en que ninguno de los candidatos aprueba el examen, el personal que participa en el proceso recuerda 8 casos en las últimas 100 ejecuciones del proceso, por lo que se estima que la tasa promedio de ocurrencia por ejecución es igual a 0.08 (8/100). De esta manera, observando que la suma de las tasas es 0.42 (referirse al Cuadro 3.6), al aplicar la Proposición 7 se obtiene que la probabilidad del riesgo en cuestión es 0.19.

3.4.7.4. Obtención de la distribución de severidades

A partir de las probabilidades determinadas para cada riesgo operativo identificado y de las severidades asignadas a cada uno de éstos, descritas en el Cuadro 3.7, el área de administración de riesgos determinó la distribución de severidades del proceso de contratación de personal:

k	C_k	$G(C_k)$	$P(S = G(C_k))$	$P(S \leq G(C_k))$
1	Leve	0.25	0.43	0.43
2	Moderado	0.5	0.43	0.86
3	Grave	1	0.14	1

Riesgo operativo	Severidad	Probabilidad
No se divulga	Leve	0.02
Errores en la descripción del perfil requerido	Moderado	0.10
Error u omisión de la dirección de envío	Leve	0.02
No se reciben currículos	Leve	0.02
Ninguno cumple con lo requerido	Leve	0.12
Comunicación deficiente (examen)	Leve	0.05
Errores en la evaluación del examen	Grave	0.07
Comunicación deficiente (resultados examen)	Leve	0.05
Ninguno aprueba el examen.	Moderado	0.19
Comunicación deficiente (entrevistas)	Leve	0.05
Errores en las entrevistas	Grave	0.07
Ninguno aprueba la entrevista	Moderado	0.14
Comunicación deficiente (resultados finales)	Leve	0.05
Desiste el candidato seleccionado	Leve	0.05

Cuadro 3.7: Severidad y probabilidad de los riesgos operativos identificados

3.4.7.5. Medición de riesgos

A partir de la distribución de severidades, el área de administración de riesgos determinó la siguiente medición primaria y complementaria del riesgo operativo, para un nivel de confianza del 85 %:

$$\begin{aligned}
 VaR_{0.85} &= 0.5 \\
 CVaR_{0.85} &= 0.5 + \frac{1}{1 - 0.85} [(0.86 - 0.85) 0.5 + (0.14)1] \\
 &= 0.98
 \end{aligned}$$

3.5. Actualización de probabilidades

En la sección anterior describí la metodología que desarrollé para evaluar el riesgo operativo, la cual no requiere contar con datos observados para poder aplicarse.

Sin embargo, es importante recabar datos de los eventos de riesgo operativo ocurridos y utilizarlos para actualizar las probabilidades estimadas de los mismos, a fin de lograr que la evaluación del riesgo operativo sea más precisa. Para llevar a cabo la actualización de dichas probabilidades, utilicé un enfoque bayesiano, e. g. Rachev, et al (2008), como se describe a continuación.

3.5.1. Metodología

3.5.1.1. Descripción

Sea R el conjunto de riesgos operativos identificados y λ_j la tasa de ocurrencia estimada del riesgo $j \in R$. Supóngase que durante el periodo de tiempo de observación establecido, el riesgo operativo j ha ocurrido n_j ocasiones y se desea actualizar la tasa de ocurrencia λ_j a partir de esta información.

Para tal efecto, la idea central es estimar la distribución de probabilidad de la tasa de ocurrencia λ_j , a partir una distribución inicial que se considere razonable para la misma y de la frecuencia observada del riesgo j , y después determinar la media de la distribución estimada. Dicho valor será el valor actualizado de la tasa de ocurrencia.

De manera más específica, el valor actualizado de la tasa de ocurrencia λ_j es la media de la distribución de probabilidad de λ_j definida como:

$$\pi(\lambda_j | n_j) = \pi(\lambda_j) \frac{L(\lambda_j | n_j)}{f(n_j)} \tag{3.5}$$

donde:

- $\pi(\lambda_j|n_j)$ es la distribución estimada (a posteriori) de λ_j , dado el valor observado n_j .
- $\pi(\lambda_j)$ es la distribución inicial (a priori) de λ_j .
- $L(\lambda_j|n_j)$ es la función de verosimilitud.
- $f(n_j)$ es la función de densidad de los datos.

Bajo el enfoque alternativo de medición del riesgo operativo expuesto en este capítulo, se asume que la frecuencia de ocurrencia del riesgo j se distribuye de acuerdo a una distribución Poisson con parámetro λ_j , por lo que

$$L(\lambda_j|n_j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_j}}{n_j!} \quad (3.6)$$

Para determinar la distribución $\pi(\lambda_j|n_j)$, se asume que $\pi(\lambda_j)$ es uniforme en el intervalo $[a, b]$, para $a > 0$. De esta manera, a partir de (3.5) y (3.6), el valor actualizado de λ_j , digamos λ'_j , corresponde al valor esperado de $\pi(\lambda_j|n_j)$ y puede expresarse como

$$\lambda'_j = \int_a^b \lambda \left[\frac{\left(\frac{1}{b-a}\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_j}}{n_j!}}{\int_a^b \left(\frac{1}{b-a}\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_j}}{n_j!} d\lambda} \right] d\lambda = \frac{\int_a^b e^{-\lambda} \lambda^{n_j+1} d\lambda}{\int_a^b e^{-\lambda} \lambda^{n_j} d\lambda} \quad (3.7)$$

3.5.1.2. Ejemplo

Supóngase que para un proceso particular se identificó un riesgo operativo que, de acuerdo a la experiencia del responsable de dicho proceso, ha sucedido cuando menos una vez cada dos años y cuando mucho siete veces cada dos años. De esta manera, asumiendo una distribución uniforme para la tasa de ocurrencia, la tasa de ocurrencia promedio es de dos veces por año.

Después de un año, se observó que el riesgo sucedió en una ocasión, por lo que con base en (3.7) se actualizó su tasa de ocurrencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \int_{0.5}^{3.5} \lambda \left[\frac{\left(\frac{1}{3.5-0.5}\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1!}}{\int_{0.5}^{3.5} \left(\frac{1}{3.5-0.5}\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1!} d\lambda} \right] d\lambda \\ &= \frac{\int_{0.5}^{3.5} e^{-\lambda} \lambda^2 d\lambda}{\int_{0.5}^{3.5} e^{-\lambda} \lambda d\lambda} \\ &= \frac{1.32953}{0.77391} = 1.71794 \end{aligned}$$

Obsérvese que el resultado obtenido es intuitivo, dado que la frecuencia observada es menor que la tasa de ocurrencia promedio asumida inicialmente.

3.5.2. Instrumentación

La instrumentación de la metodología descrita anteriormente, requiere de un procedimiento eficiente de cálculo y de un método para determinar los parámetros requeridos.

3.5.2.1. Procedimiento de cálculo

La expresión (3.7) puede reformularse de manera tal que facilite el cálculo de la tasa de ocurrencia promedio actualizada y el estudio de algunas de sus propiedades, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 8. Sea R el conjunto de riesgos operativos identificados de un proceso y λ_j la tasa de ocurrencia estimada del riesgo j , para $j \in R$. Supóngase que durante el periodo de observación establecido, el riesgo operativo j ha ocurrido n_j ocasiones y que la distribución de probabilidad inicial de la tasa de ocurrencia es uniforme en el intervalo $[a, b]$. Entonces, la tasa de ocurrencia promedio actualizada es:

$$\lambda'_j = (n_j + 1) + \left[\frac{e^{-a}a^{n_j+1} - e^{-b}b^{n_j+1}}{G(n_j)} \right] \quad (3.8)$$

donde $G(y) \equiv \int_a^b e^{-\lambda} \lambda^y d\lambda$, la cual puede calcularse de manera recursiva de la siguiente manera

$$G(y) = (e^{-a}a^y - e^{-b}b^y) + yG(y-1) \quad (3.9)$$

para $y \geq 1$ y $G(0) = e^{-a} - e^{-b}$.

Demostración. Obsérvese que por integración por partes se deduce que

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_a^b e^{-\lambda} \lambda^y d\lambda \\ &= (-e^{-\lambda} \lambda^y) \Big|_a^b + y \int_a^b e^{-\lambda} \lambda^{y-1} d\lambda \\ &= (e^{-a}a^y - e^{-b}b^y) + y \int_a^b e^{-\lambda} \lambda^{y-1} d\lambda \\ &= (e^{-a}a^y - e^{-b}b^y) + yG(y-1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, al aplicarlo a (3.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} \lambda'_j &= \int_a^b \lambda \left[\frac{\left(\frac{1}{b-a}\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_j}}{(n_j)!}}{\int_a^b \left(\frac{1}{b-a}\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_j}}{(n_j)!} d\lambda} \right] d\lambda \\ &= \frac{\int_a^b e^{-\lambda} \lambda^{n_j+1} d\lambda}{\int_a^b e^{-\lambda} \lambda^{n_j} d\lambda} \\ &= \frac{G(n_j+1)}{G(n_j)} \\ &= \frac{(e^{-a}a^{n_j+1} - e^{-b}b^{n_j+1}) + (n_j+1)G(n_j)}{G(n_j)} \\ &= \frac{(e^{-a}a^{n_j+1} - e^{-b}b^{n_j+1})}{G(n_j)} + (n_j+1) \\ &= (n_j+1) + \left[\frac{e^{-a}a^{n_j+1} - e^{-b}b^{n_j+1}}{G(n_j)} \right] \end{aligned}$$

□

3.5.2.2. Ejemplo

Considérese el ejemplo anterior, pero ahora suponga que el riesgo ocurrió en un par de ocasiones, en lugar de una sola vez. Se busca determinar la tasa de ocurrencia actualizada.

A partir de (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned}
G(2) &= e^{-0.5}0.5^2 - e^{-3.5}3.5^2 + 2G(1) \\
&= -0.21829 + 2G(1) \\
&= -0.21829 + 2(e^{-0.5}0.5 - e^{-3.5}3.5 + G(0)) \\
&= -0.21829 + 2(0.19757 + G(0)) \\
&= -0.25085 + 2(0.19757 + (e^{-0.5} - e^{-3.5})) \\
&= -0.258085 + 2(0.19757 + 0.57633) \\
&= 1.32953
\end{aligned}$$

De donde al aplicar (3.8), se obtiene el valor de la tasa actualizada:

$$\begin{aligned}
\lambda' &= (2 + 1) + \left[\frac{e^{-0.5}0.5^{2+1} - e^{-3.5}3.5^{2+1}}{G(2)} \right] \\
&= 3 + \left[\frac{-1.21890}{1.32953} \right] \\
&= 2.08321
\end{aligned}$$

El resultado obtenido es intuitivo, dado que la frecuencia observada es igual que la tasa de ocurrencia promedio asumida inicialmente, por lo que se esperaría que el valor actualizado de dicha tasa fuese parecido al valor asumido inicialmente.

3.5.2.3. Determinación de parámetros

El procedimiento de actualización requiere de la determinación de los valores mínimo (a) y máximo (b) de la distribución uniforme que se considera de manera inicial para la tasa de ocurrencia (λ).

Para el establecimiento de dichos valores, se puede recurrir en primera instancia a la experiencia de las personas que son responsables o ejecutan el proceso en cuestión, como se ilustró en los ejemplos anteriores.

Sin embargo, lo anterior no siempre es factible, por lo que es importante contar con otros métodos para poder determinar los valores a y b .

Un método alternativo para determinar los valores a y b consiste en estimar directamente la tasa de ocurrencia promedio inicial y posteriormente calcular a y b de tal manera que:

- La media de la distribución uniforme coincida con la tasa de ocurrencia inicial, es decir, que se cumpla la condición $\lambda = \frac{a+b}{2}$.
- La tasa de ocurrencia actualizada coincida con la tasa de ocurrencia inicial, cuando la frecuencia observada del número de eventos asociados al riesgo en cuestión sea igual a dicha tasa inicial.

Para instrumentar este método se utilizarán los resultados que se exponen a continuación.

Lema 6. Sea $G(y) \equiv \int_a^b e^{-\lambda} \lambda^y d\lambda$ y n un número natural mayor o igual a dos. Entonces,

$$G(n) = (e^{-a}a^n - e^{-b}b^n) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=0}^i [n-j] \right) (e^{-a}a^{n-(i+1)} - e^{-b}b^{n-(i+1)}) \quad (3.10)$$

Demostración. La demostración es por inducción. Al aplicar la ecuación (3.9) y $G(0) = e^{-a} - e^{-b}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
G(2) &= (e^{-a}a^2 - e^{-b}b^2) + 2G(1) \\
&= (e^{-a}a^2 - e^{-b}b^2) + 2[(e^{-a}a - e^{-b}b) + G(0)] \\
&= (e^{-a}a^2 - e^{-b}b^2) + 2[(e^{-a}a - e^{-b}b) + (e^{-a} - e^{-b})] \\
&= (e^{-a}a^2 - e^{-b}b^2) + 2(e^{-a}a - e^{-b}b) + 2(e^{-a} - e^{-b})
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Obsérvese que:

$$\sum_{i=0}^1 \left(\prod_{j=0}^i [2-j] \right) (e^{-a}a^{2-(i+1)} - e^{-b}b^{2-(i+1)}) = 2(e^{-a}a - e^{-b}b) + 2(e^{-a} - e^{-b}) \tag{3.12}$$

Luego entonces, de (3.11) y (3.12), se deduce que (3.10) se cumple para $n = 2$.

Supongamos que (3.10) se cumple para $n > 2$. Obsérvese que

$$(n+1) \prod_{j=0}^i [n-j] = \prod_{j=0}^{i+1} [(n+1)-j]$$

y

$$(n+1)(e^{-a}a^n - e^{-b}b^n) = \prod_{j=0}^0 [(n+1)-j] (e^{-a}a^{(n+1)-(0+1)} - e^{-b}b^{(n+1)-(0+1)})$$

Luego entonces, al combinar las expresiones anteriores con (3.10), se obtiene

$$(n+1)G(n) = \sum_{s=0}^{(n+1)-1} \left(\prod_{j=0}^s [(n+1)-j] \right) (e^{-a}a^{(n+1)-(s+1)} - e^{-b}b^{(n+1)-(s+1)}) \tag{3.13}$$

De (3.13) y (3.9) se concluye que (3.10) se cumple para $n+1$. Luego entonces, por el principio de inducción, (3.10) se cumple para $n \geq 2$. □

La expresión (3.10) puede reformularse de la siguiente manera:

$$G(n) = e^{-a} \left[a^n + \sum_{i=1}^n O_n^i a^{n-i} \right] - e^{-b} \left[b^n + \sum_{i=0}^n O_n^i b^{n-i} \right] \tag{3.14}$$

donde

$$O_n^i \equiv \prod_{j=0}^{i-1} (n-j)$$

En el contexto de cálculo combinatorio, O_n^i representa las ordenaciones sin repetición de un conjunto de n elementos tomados de i en i .

Proposición 9. *Sea R el conjunto de riesgos operativos identificados de un proceso y λ_j la tasa de ocurrencia estimada del riesgo j , para $j \in R$. Supóngase que la distribución de probabilidad inicial de la tasa de ocurrencia λ_j es uniforme en el intervalo $[a, b]$ y se desean determinar a y b de tal manera que la tasa de ocurrencia actualizada λ_j' , calculada conforme a (3.8), coincida con n_j , donde n_j es el número de ocasiones que sucede el riesgo j .*

Entonces, $a = \lambda_j - h$, $b = \lambda_j + h$ y h satisface la siguiente ecuación:

$$G(n_j) = e^{-(\lambda_j+h)}(\lambda_j+h)^{n_j+1} - e^{-(\lambda_j-h)}(\lambda_j-h)^{n_j+1} \tag{3.15}$$

donde $G(y) \equiv \int_a^b e^{-\lambda} \lambda^y d\lambda$.

Demostración. El resultado se sigue de inmediato al sustituir λ'_j por n_j en (3.8) y de observar que λ_j debe distar de a y b en una misma cantidad h , dado que es el promedio de estos valores. \square

El resultado anterior establece condiciones necesarias para determinar los valores a y b de tal manera que la tasa de ocurrencia no cambie mientras coincida con el número de eventos que ocurran.

Corolario 2. *La ecuación (3.15) es equivalente a*

$$0 = e^{-(\lambda_j - h)} \left[(\lambda_j - h)^{n_j + 1} + (\lambda_j - h)^{n_j} + \sum_{i=1}^n O_{n_j}^i (\lambda_j - h)^{n_j - i} \right] - e^{-(\lambda_j + h)} \left[(\lambda_j + h)^{n_j + 1} + (\lambda_j + h)^{n_j} + \sum_{i=0}^n O_{n_j}^i (\lambda_j + h)^{n_j - i} \right] \quad (3.16)$$

Demostración. Se sigue de inmediato al sustituir (3.14), con $a = \lambda_j - h$ y $b = \lambda_j + h$, en (3.15). \square

3.5.2.4. Ejemplo

Supóngase que para un riesgo particular de un proceso, se ha estimado una tasa de ocurrencia promedio de dos y se desean determinar el valor mínimo a y el valor máximo b de dicha tasa, de tal forma que la tasa de ocurrencia promedio represente el valor esperado de la distribución uniforme entre dichos valores y tal que la tasa de ocurrencia actualizada coincida con la tasa inicial estimada, en caso de que el riesgo se materialice en dos ocasiones.

Al aplicar (3.16) se deduce que debe satisfacerse la siguiente ecuación:

$$0 = e^{-(2-h)} [(2-h)^3 + (2-h)^2 + 2(2-h) + 2] - e^{-(2+h)} [(2+h)^3 + (2+h)^2 + 2(2+h) + 2]$$

La solución es $h = 0.2$, por lo que $a = 2 - 0.2 = 1.8$ y $b = 2 + 0.2 = 2.2$.

3.6. Comentarios

A continuación, se hacen algunos comentarios sobre el material expuesto en este capítulo:

- Las metodologías descritas en este capítulo son factibles de aplicarse en cualquier empresa o institución, dado que su aplicación no requiere de datos ni de conocimientos muy especializados.
- La teoría matemática que sustenta dichas metodologías es relativamente sencilla, dado que parte de conceptos elementales de cálculo, probabilidad y estadística bayesiana.
- La interpretación de los elementos de estas metodologías es intuitiva, lo que facilita comunicar las ideas centrales asociadas a los mismos a los directivos u órganos de gobierno de las empresas o instituciones de las que se trate.
- Bajo el enfoque bayesiano, existen distribuciones de probabilidad iniciales para la tasa de ocurrencia de los eventos de riesgo operativo con mejores propiedades que la distribución uniforme que se considera en la metodología para actualizar probabilidades, tal como la distribución beta. Sin embargo, se optó por la distribución uniforme por su sencillez interpretativa.
- El ejemplo de la subsección 3.4.7 se desarrolló ex profeso para ilustrar el enfoque alternativo para la medición de riesgos operativos, considerando un proceso común en cualquier empresa o institución, en independencia de su rubro, el proceso de reclutamiento de personal.
- El resultado de la Proposición 7, en el que se demuestra que las probabilidades de los eventos de riesgo operativo son directamente proporcionales a las tasas de ocurrencia de los mismos bajo el supuesto que cada uno de éstos ocurre de acuerdo a una distribución Poisson, puede también obtenerse en términos de los tiempos entre ocurrencias de dichos eventos, los cuales, como es

bien sabido, se distribuyen de acuerdo a una distribución exponencial. A saber, la probabilidad de ocurrencia de un evento de riesgo operativo es igual a la probabilidad de que el tiempo para que éste ocurra sea menor que cualquiera de los tiempos de ocurrencia de los otros eventos de riesgo.

3.7. Referencias

- Hull, J.C. (2012), Risk Management and Financial Institutions, Third Edition, Wiley Finance.
- Mood, A.M., Graybill, F.A., Boes, D.C. (1974), Introduction to the Theory of Statistics, Third Edition, McGraw-Hill.
- Rachev, S.T., Hsu, J.S.J., Bagasheva, B.S., Fabozzi, F.J. (2008), Bayesian Methods in Finance, Wiley.
- Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2002), Conditional Value-at-Risk for general loss distributions, Journal of Banking and Finance 26, 1443–1471.
- Ross, S.M. (1997), Introduction to Probability Models, Sixth Edition, Academic Press.

Conclusiones

- En el presente informe se describen cuatro metodologías desarrolladas para una institución financiera, con el objeto de pronosticar variables de su interés, así como para medir y mitigar sus riesgos financieros y operativos.
- Dichas metodologías pueden aplicarse a cualquier tipo de institución u organización, no solamente para aquellas de índole financiero.
- Cada una de estas metodologías está sustentada en resultados matemáticos derivados ex profeso para tal efecto, cada uno de los cuales es demostrado en este informe.
- Las principales herramientas matemáticas utilizados para el desarrollo de las metodologías en comento son probabilidad, estadística bayesiana y optimización.
- Para ilustrar la aplicación de cada una de las metodologías desarrolladas, se diseñaron y elaboraron ejemplos específicos para el presente informe.
- Al final de cada capítulo del presente informe, se hacen comentarios particulares sobre las metodologías descritas en el mismo, los cuales tienen como propósito destacar aspectos relevantes de dichas metodologías.