



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ESPACIO CLASIFICANTE PARA CONMUTATIVIDAD DE UN GRUPO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
LUIS EDUARDO GARCÍA HERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL:
DR. OMAR ANTOLÍN CAMARENA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. MARCELO ALBERTO AGUILAR GONZÁLEZ DE LA VEGA, IMATE, UNAM
DR. NOÉ BÁRCENAS TORRES, CCM, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE DE 2023.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Tesis de Doctorado
El espacio clasificante para conmutatividad de un grupo

Luis Eduardo García Hernández
Asesor: Omar Antolín Camarena

17 de noviembre

Agradecimientos

En este espacio quiero agradecer el apoyo del proyecto PAPIIT con título *Geometría de gran escala y topología algebraica* con clave IN101423 mediante el cual se me brindó una beca de obtención de grado en el doctorado, este apoyo fue fundamental para llevar a buen término el presente trabajo. De igual forma quiero agradecer de manera relevante al Dr. Noé Barcenás Torres encargado de dicho proyecto y parte de mi comité doctoral por impulsar mi desarrollo en el programa y brindar su apoyo en la obtención de dicha beca.

Adicionalmente quiero agradecer de forma especial al Dr. Omar Antolín Camarena, tutor principal del doctorado. Su apoyo y participación a lo largo del programa fueron invaluable para desarrollar mis habilidades en la producción científica y el entendimiento profundo de matemáticas.

También quiero destacar el apoyo del Dr. Marcelo Aguilar por ayudarme en el principio del programa a guiar los primeros pasos del doctorado y posteriormente colaborar en mi comité tutorial. De igual forma a los sinodales Rita Jimenez, Luis Jorge Sánchez y Bernardo Villareal por sus valiosos comentarios en la revisión del presente escrito. Además quiero mencionar de manera importante el apoyo del Dr. Luis Jorge Sánchez quien se convirtió en un gran colega durante la investigación final del doctorado.

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	11
1.1. Construcciones fundamentales y un par de motivaciones	11
1.2. Modelos de $E_{com}G$ para grupos discretos	14
1.3. Resultados estructurales de $E_{com}(G)$	18
1.4. Productos amalgamados $K_1 *_A K_2$	22
2. $E_{com}G$ para grupos finitos	25
2.1. Grupos de orden menor a 32	26
2.2. Familias infinitas de grupos finitos	29
2.3. El morfismo conmutador y grupos simétricos	34
3. Grupos fundamentales de 3-variedades	41
3.1. 3-variedades geométricas	43
3.2. 3-variedades modeladas en \mathbb{S}^3	45
3.3. 3-variedades modeladas en \mathbb{H}^3	47
3.4. 3-variedades modeladas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$	48
3.5. 3-variedades modeladas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ o $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$	48
3.6. Algunos grupos cristalográficos.	49

3.7. 3-variedades modeladas en \mathbb{E}^3	52
3.8. 3-variedades modeladas en Nil	57
3.8.1. Productos semidirectos	58
3.8.2. Cociente cristalográfico orientable	58
3.8.3. Caso pg	59
3.8.4. Caso pgg	63
3.9. 3-variedades modeladas en Sol	68
A. Código GAP	73
B. Código para caso esférico	75
Bibliografía	79

Introducción

Para un grupo topológico G , se puede dar una topología al conjunto de homomorfismos $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, G)$ como el subespacio de G^n que consiste en n -adas de elementos de G que conmutan entre sí. Recordando que existe un modelo del espacio BG (el espacio clasificante de G) como espacio simplicial, resulta que las n -adas conmutativas forman un subespacio simplicial. La realización geométrica de este subespacio simplicial se llama el espacio clasificante para conmutatividad de G y se denota como $B_{\text{com}}(G)$. De manera precisa, para un grupo topológico G , se define $B_{\text{com}}(G)$ como la realización geométrica del espacio simplicial siguiente:

$$\{(g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \text{ para cada } i, j\}$$

con morfismos de caras

$$d_i(g_1, g_2, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, g_3, \dots, g_n) & \text{si } i = 0 \\ (g_1, g_2, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) & \text{si } 1 \leq i < n \\ (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) & \text{si } i = n \end{cases}$$

y morfismos de degeneración $s_i(g_1, g_2, \dots, g_n) = (g_1, g_2, \dots, g_i, e, g_{i+1}, \dots, g_n)$. Este espacio es conocido como *espacio clasificante para conmutatividad* de G .

Este espacio fue introducido por primera vez en [ACG12] y estudiado más a fondo en [AG15], donde se definió una noción de G -haz principal transicionalmente conmutativo. Este tipo de G -haz se clasifica mediante $B_{\text{com}}(G)$ aunque en un principio esta definición tenía ciertos problemas.

Por otro lado, recordemos que BG es la construcción anterior tomando como conjuntos los G^n con $n \geq 0$, adicionalmente considerando la construcción con simplejos los conjuntos G^n ,

con morfismos de caras borrar una coordenada y de degeneración repetir una coordenada, la realización geométrica de esta construcción define un espacio EG el cual viene equipado con una acción de G . El espacio cociente vía esta acción define el haz universal $EG \rightarrow BG$.

Puesto que $B_{\text{com}}(G)$ tiene un morfismo canónico inducido por las inclusiones hacia BG , uno puede tomar el producto fibrado de este morfismo $B_{\text{com}}(G) \rightarrow BG$ a lo largo del haz universal $EG \rightarrow BG$, al espacio resultante se le denota por $E_{\text{com}}(G)$. Cuando G es abeliano, $B_{\text{com}}(G)$ coincide con BG y $E_{\text{com}}(G)$ coincide con EG , pues la condición extra de conmutatividad sobre las n -adas se cumple de forma automática y entonces coinciden las construcciones vía espacios simpliciales usuales.

Un aspecto interesante que fue desarrollado en la tesis [Cep20] es la corrección de la noción de equivalencia de G -haces principales que clasifica el espacio $B_{\text{com}}(G)$. La definición inicial de dicha equivalencia fue expuesta en un principio en [AG15]. En la tesis, los G -haces principales con los que se trabajan son haces enriquecidos con una *estructura transicionalmente conmutativa*; en estos haces enriquecidos se puede definir una relación de equivalencia la cual define un conjunto $\text{Haz}_G^{\text{com}} M$ de clases de isomorfismo de G -haces principales sobre M con estructuras transicionalmente conmutativas. Uno de los principales teoremas en [Cep20] es que este conjunto está en relación biyectiva con las clases de homotopía de morfismos de M en $B_{\text{com}}(G)$.

Por otro lado, se puede considerar qué tan lejos está el espacio $E_{\text{com}}(G)$ de ser contráctil como una medida de la no conmutatividad de G . Como ejemplo de lo anterior en [AGV21] se demuestra que para grupos de Lie compactos, no necesariamente conexos, G es abeliano si y solo si $E_{\text{com}}(G)$ es contráctil, y de hecho, si y solo si $\pi_k(E_{\text{com}}(G)) = 0$ para $k \in \{1, 2, 4\}$ (note la ausencia de 3 en ese conjunto).

Hasta ahora la mayoría de la atención se ha centrado en $B_{\text{com}}(G)$ y $E_{\text{com}}(G)$ en el caso de grupos de Lie, y más particularmente en grupos de Lie compactos, pero las definiciones también son interesantes para grupos discretos. En el caso de un grupo discreto G , el teorema citado en el párrafo anterior se puede mejorar para decir que G es abeliano si y solo si $E_{\text{com}}(G)$ es simplemente conexo, como se demostró por primera vez en [Oka14] y con una prueba diferente en [AGV21]. Más aún, para grupos discretos se pueden dar modelos combinatorios del tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$ tomando como punto de partida algunos conjuntos parcialmente ordenados específicos. Este fue uno de los primeros resultados desarrollados a lo largo del trabajo.

Teorema A. *Dado un grupo discreto G , los siguientes complejos CW son homotópicamente equivalentes.*

- (1) $E_{\text{com}}(G)$,
- (2) la realización geométrica de $\text{AbCo}(G)$,
- (3) la realización geométrica de $\text{mAbCo}(G)$,
- (4) la realización geométrica del complejo simplicial con conjunto de vértices

$$\{gM \mid g \in G, M \in \text{Ab}(G) \text{ maximal}\}$$

y cuyos simplejos son conjuntos $g_1M_1, g_2M_2, \dots, g_jM_j$ tales que $g_1M_1 \cap \dots \cap g_jM_j \neq \emptyset$.

Todas estas equivalencias no son resultados nuevos, pues se pueden encontrar en [AH93], [AV19] y [AG15]. No obstante, algunas de estas se redescubrieron en el transcurso del doctorado e incluso se produjo un nuevo modelo que corresponde al punto (4) del teorema anterior. La descripción de estos modelos se encuentra en la sección 1.2 y el resultado en concreto puede ser consultado con más detalle en el Teorema 1.2.4.

Es justo decir que este es el punto de partida fundamental para todo el desarrollo subsecuente. A partir de estos modelos es posible clasificar el tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$ para familias interesantes de grupos, y gran parte del trabajo se centra en este aspecto. De igual forma, a lo largo del capítulo 1 se desarrollan resultados estructurales que facilitan el estudio de $E_{\text{com}}(G)$ en diversos puntos del trabajo; varios de estos se fueron demostrando conforme fueron apareciendo nuevas preguntas y construcciones a estudiar. Ejemplo de ello son la Proposición 1.3.1, el Teorema 1.3.4 y el Teorema 1.3.6 que tratan los casos de extensiones centrales, productos libres y ciertos productos amalgamados, respectivamente.

En el capítulo 2 nos enfocamos en el estudio de grupos finitos G y qué tipo de homotopía puede tener $E_{\text{com}}(G)$ en estos casos. En el sentido anterior, el teorema 2.1.3 es uno de los principales resultados nuevos y consiste en lo siguiente:

Teorema B. *Para cualquier grupo finito G con orden menor o igual a 31, se tiene que $E_{\text{com}}G$ tiene el tipo de homotopía de una cuña de círculos.*

La prueba de este resultado requirió la implementación de herramientas computacionales,

además de lidiar con un caso excepcional que llevó al desarrollo de una nueva técnica. Dicha técnica se expone en el Proposición [2.1.1](#).

De igual forma, es interesante saber si para ciertas familias de grupos es posible clasificar el tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$, donde los grupos varían no necesariamente por el orden. En ese sentido, se logró probar lo siguiente:

Teorema C. *Para las familias de grupos diédricos, cuaternios generalizados, semi-diédricos y productos semidirectos en campos, se cumple que $E_{\text{com}}(G)$ tiene el tipo de homotopía de una cuña finita de círculos.*

La información más precisa relativa a este resultado se describe en la siguiente tabla.

Familia de grupos	Número de círculos	Demstrado en
Grupos Diédricos D_{2n}	$n^2 - 1$ con n par, $\frac{n^2}{4} - 1$ con n impar	Teorema 2.2.1
Grupos de cuaternios generalizados Q_{4n}	$n^2 - 1$	Teorema 2.2.2
Grupos semi-diédricos SD_{2^n}	$2^{2^n-4} - 1$	Teorema 2.2.3
Productos semidirectos en campos $H < F^\times$, $ F = q$, $ H = d$, $G = F \rtimes H$	$(d - 1)(q^2 - 1)$	Teorema 2.2.4

Los Teoremas B y C motivan una pregunta que los autores de [\[ACG12\]](#) formularon y que se encuentra en la página 15: ¿Si G es un grupo finito discreto, es $B_{\text{com}}(G)$ un espacio Eilenberg-Mac Lane de tipo $K(\pi, 1)$?

Al ser $E_{\text{com}}(G)$ el producto fibrado del morfismo $B_{\text{com}}(G) \rightarrow BG$, hay una sucesión exacta larga que involucra los grupos de homotopía de estos tres espacios, a partir de la cual es fácil ver que, para G discreto, $E_{\text{com}}(G)$ es un $K(\pi, 1)$ si y solo si $B_{\text{com}}(G)$ lo es. Esto implica que la pregunta planteada en el párrafo anterior se puede trasladar al estudio del tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$.

A pesar de la evidencia desarrollada para contestar esta pregunta, en [\[Oka14\]](#) se describieron los primeros ejemplos de grupos G para los cuales $E_{\text{com}}(G)$ y $B_{\text{com}}(G)$ no son espacios $K(\pi, 1)$. En dicho trabajo se muestra que si G es cualquiera de los dos grupos extraspeciales de orden 32, entonces $\pi_1(E_{\text{com}}(G)) \cong \mathbb{Z}/2$, y la cubierta universal de $E_{\text{com}}(G)$ es homotópicamente equivalente a $\sqrt[151]{S^2}$. Como cuestión particular se deduce que la cota de 31 sobre el orden de los grupos presentada en el Teorema B es la mejor que se puede dar.

Utilizando estos resultados y la implementación de algunas nuevas maquinarias se logró

responder de manera más extensa que existen otros ejemplos de grupos G con $B_{\text{com}}(G)$ no $K(\pi, 1)$, en concreto se demostró el siguiente teorema:

Teorema D. *Para cada $n \geq p^5$ se tiene que $\pi_1(E_{\text{com}}(S_n))$ tiene elementos de orden p , en particular ningún $E_{\text{com}}(S_n)$ es un $K(\pi, 1)$ para $n \geq 32$.*

el cual se puede consultar en el Teorema [2.3.13](#).

Finalmente, en el capítulo 3 se expone la clasificación del tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$ cuando G es un grupo fundamental de ciertas 3-variedades. Este es un salto muy común que se hace entre grupos finitos e infinitos, pues la teoría de tres variedades tiene muy bien estudiados qué tipos de grupos pueden aparecer como grupos fundamentales de estos espacios.

Para X una 3-variedad riemanniana, decimos que X es homogénea si el grupo de isometrías $\text{Isom}(X)$ actúa transitivamente sobre X . Adicionalmente, decimos que X es unimodular si tiene un cociente de volumen finito. Una geometría es una 3-variedad X simplemente conexa, homogénea y unimodular junto con el grupo de simetrías. Una 3-variedad es geométrica si es difeomorfa a un cociente X/Γ donde $(X, \text{Isom}(X))$ es una geometría y Γ es un subgrupo discreto de $\text{Isom}(X)$. De acuerdo a los trabajos de Thurston existen 8 geometrías maximales tridimensionales salvo equivalencia denotadas por \mathbb{S}^3 , \mathbb{E}^3 , \mathbb{H}^3 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$, $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$, Nil, y Sol.

Dado esto, el teorema principal del capítulo 3 es el siguiente:

Teorema E. *Sea G el grupo fundamental de una 3-variedad geométrica, cerrada y orientable. Entonces, $E_{\text{com}}(G)$ es homotópicamente equivalente a $\bigvee_I S^1$, donde I es un conjunto de índices finito o infinito numerable (posiblemente vacío). Además, tenemos lo siguiente:*

- (1) *I es vacío si y solo si G es abeliano, en cuyo caso $E_{\text{com}}(G)$ es contráctil.*
- (2) *I es infinito si y solo si G es infinito y no abeliano.*

Esta clasificación del tipo de homotopía de grupos de 3-variedades depende fuertemente de la clasificación geométrica de Thurston y del estudio muy específico de los grupos fundamentales que aparecen en esta clasificación.

Para los casos de las geometrías del tipo \mathbb{S}^3 , resulta que casi todos los posibles grupos fundamentales son grupos finitos donde se pueden implementar las técnicas y resultados

del capítulo 2. No obstante, cabe destacar que aparecen también ciertas familias infinitas de grupos para las cuales se combinan los resultados estructurales del capítulo 1 y algunas herramientas computacionales.

En los casos de las variedades modeladas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ y $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$, los grupos fundamentales que aparecen son \mathbb{Z} , D_∞ y grupos que son extensiones centrales para los cuales se pueden utilizar varias herramientas de los resultados estructurales expuestos en el capítulo 1. En un sentido similar, para el caso de las geometrías modeladas en \mathbb{H}^3 , los grupos hiperbólicos que aparecen tienen estructuras de subgrupos abelianos muy bien distinguidas que ayuda a su estudio.

Por último, las geometrías modeladas en \mathbb{E}^3 , Nil, y Sol fueron las más complicadas. Dichas geometrías requirieron el estudio de $E_{\text{com}}(G)$ para ciertos grupos cristalográficos que se pueden encontrar en la sección 3.6. En esta sección, cabe destacar el uso de ciertas técnicas de teoría geométrica de grupos y de igual manera algunos de los resultados estructurales.

Adicionalmente, en estas tres geometrías se requirió el estudio exhaustivo de los patrones de intersecciones de los subgrupos abelianos de diversos productos amalgamados del tipo $K *_A K$ donde K es el grupo fundamental de una botella de Klein y A un \mathbb{Z}^2 encajado en las botellas de Klein. En varios de estos casos, se requirió trabajar con presentaciones muy concretas de los grupos para poder describir los patrones de intersección con base al patrón de intersección de grupos más sencillos. La complejidad de los tipos de productos amalgamados que aparecen en estas geometrías va creciendo a partir de las modelas en \mathbb{E}^3 , pasando por los casos Sol y culminando con los más complicados en el caso de las geometrías modeladas en Nil.

Para finalizar la introducción, vale la pena preguntarse: ¿hasta qué punto las técnicas desarrolladas pueden implementarse en el caso de grupos finitos para hacer más grande la familia de grupos G con $E_{\text{com}}(G)$ del tipo de homotopía de una cuña de círculos? De igual forma, ¿cuál es el n más pequeño tal que $E_{\text{com}}(S_m)$ no es un $K(\pi, 1)$ para $m \geq n$? Y, por último, ¿es posible terminar la clasificación del tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$ en el caso de G un grupo fundamental de una 3-variedad cerrada y orientable no geométrica?

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Construcciones fundamentales y un par de motivaciones

Las definiciones fundamentales con las que se trabajará a lo largo del escrito están basadas en las construcciones introducidas en *Commuting elements, simplicial spaces and filtrations of classifying spaces* por A. Adem, F. Cohen y E. Torres-Giese ([ACG12]).

Definición 1.1.1. Para un grupo topológico G se define $B_{com}G$ como la realización geométrica del espacio simplicial siguiente

$$\{(g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \text{ para cada } i, j\}$$

con morfismos de caras

$$d_i(g_1, g_2, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, g_3, \dots, g_n) & i = 0 \\ (g_1, g_2, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) & 1 \leq i < n \\ (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) & i = n \end{cases}$$

y morfismos de degeneración $s_i(g_1, g_2, \dots, g_n) = (g_1, g_2, \dots, g_i, e, g_{i+1}, \dots, g_n)$. Este espacio es conocido como *espacio clasificante para conmutatividad de G* .

Definición 1.1.2. Para un grupo topológico G las inclusiones

$$\{(g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \text{ para cada } i, j\} \rightarrow G^n$$

inducen un morfismo canónico

$$B_{\text{com}}(G) \rightarrow BG.$$

A la fibra homotopica del haz principal $EG \rightarrow BG$ a lo largo de este morfismo se le denota $E_{\text{com}}G$. Es decir que el siguiente diagrama es un producto fibrado en la categoría de espacios topológicos salvo homotopía.

$$\begin{array}{ccc} E_{\text{com}}(G) & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{\text{com}}(G) & \longrightarrow & BG \end{array}$$

Una discusión importante que puede ser encontrada en [Cep20] es que $B_{\text{com}}(G)$ efectivamente clasifica ciertos haces enriquecidos.

Definición 1.1.3. Dado un G -haz principal $\pi : E \rightarrow M$, una *trivialización conmutativa* es una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M junto con trivializaciones $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ tales que las funciones de transición ρ_{ij} asociadas a estas trivializaciones conmutan dos a dos, es decir, para todo $x \in U_i \cap U_j \cap U_k \cap U_l$ se tiene que

$$\rho_{ij}(x)\rho_{kl}(x) = \rho_{kl}(x)\rho_{ij}(x)$$

Una *estructura transicionalmente conmutativa* del haz $\pi : E \rightarrow M$ es una elección de una trivialización conmutativa.

Definición 1.1.4. Sean $(\pi_1 : E_1 \rightarrow M, \{U_i\}_{i \in I}, \varphi_i)$ y $(\pi_2 : E_2 \rightarrow M, \{V_j\}_{j \in J}, \phi_j)$ dos estructuras transicionalmente conmutativas sobre M . Decimos que estas dos estructuras son equivalentes si existe una estructura transicionalmente conmutativa sobre algún G -haz principal $\pi : E \rightarrow M \times [0, 1]$ sobre $M \times [0, 1]$, digamos

$$(\pi : E \rightarrow M \times [0, 1], \{W_k\}_{k \in K}, \psi_k)$$

tal que

- (1) al intersectar la familia $\{W_k\}_{k \in K}$ con $M \times \{0\}$ y $M \times \{1\}$ son refinamientos de $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{V_j\}_{j \in J}$, respectivamente.
- (2) $\pi^{-1}(M \times \{0\}) = E_1$ y $\pi^{-1}(M \times \{1\}) = E_2$
- (3) $\pi|_{M \times \{0\}} = \pi_1$ y $\pi|_{M \times \{1\}} = \pi_2$
- (4) $\psi_k|_{W_k \cap M \times \{0\}} = \varphi_k|_{W_k \cap M \times \{0\}}$ y $\psi_k|_{W_k \cap M \times \{1\}} = \phi_k|_{W_k \cap M \times \{1\}}$

Al conjunto de estructuras transicionalmente conmutativas sobre M modulo esta relación de equivalencia se le denota por $\text{Haz}_G^{\text{com}} M$.

Teniendo en cuenta estas definiciones, podemos notar que el espacio $B_{\text{com}} G$ efectivamente clasifica las estructuras transicionalmente conmutativas.

El espacio $B_{\text{com}} G$ clasifica los haces transicionalmente conmutativos en el sentido siguiente.

Teorema 1.1.5. *El morfismo siguiente es una biyección natural*

$$\begin{aligned} \Psi_M : [M, B_{\text{com}} G] &\rightarrow \text{Haz}_G^{\text{com}} M \\ [f] &\rightarrow [f^*(E_{\text{com}} G)] \end{aligned}$$

Donde $[M, B_{\text{com}} G]$ denota el conjunto de clases de homotopía de funciones $f : M \rightarrow B_{\text{com}} G$ y $f^*(E_{\text{com}} G)$ denota el producto fibrado de la estructura transicionalmente conmutativa canónica del haz $E_{\text{com}} G \rightarrow B_{\text{com}} G$.

Por otro lado $E_{\text{com}} G$ resulta interesante pues es un espacio que mide el grado de conmutatividad de G . Como ejemplo tenemos el siguiente resultado de [AGV21].

Teorema 1.1.6. *Para un grupo de Lie compacto G las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) G es abeliano
- (2) $E_{\text{com}} G$ es contráctil
- (3) $\pi_i(E_{\text{com}} G) = 0$ para $i = 1, 2, 4$.

De forma alterna a la definición topológica de $E_{\text{com}}(G)$, se puede demostrar lo siguiente.

Proposición 1.1.7. *Para un grupo topológico G considera el espacio simplicial siguiente*

$$\{(g_0, g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^{n+1} \mid g_0 \in G, g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \text{ para cada } i, j\}$$

los morfismos de caras son

$$d_i(g_1, g_2, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_1, g_2, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) & i < n \\ (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) & i = n \end{cases}$$

y los morfismos de degeneración son $s_i(g_1, g_2, \dots, g_n) = (g_1, g_2, \dots, g_i, e, g_{i+1}, \dots, g_n)$. La realización geométrica de este espacio simplicial es homotópicamente equivalente a $E_{\text{com}}(G)$.

Demostración. Esto se sigue de la restricción a la construcción usual de espacio total considerando la condición de conmutatividad. \square

1.2. Modelos de $E_{\text{com}}G$ para grupos discretos

Al restringir el estudio a grupos G discretos para las construcciones planteadas en la sección anterior, es posible presentar diversos modelos del espacio $E_{\text{com}}G$.

En esta sección establecemos que para cada grupo discreto G , el espacio $E_{\text{com}}(G)$ es homotópicamente equivalente a la realización geométrica del COPO $\text{mAbCo}(G)$, el conjunto parcialmente ordenado que consiste de todas las clases laterales de subgrupos abelianos maximales de G y sus intersecciones. Este resultado (que se puede consultar en Teorema [1.2.4](#)) es el punto de partida de todos nuestros cálculos.

Definición 1.2.1 (Altura de un COPO). Sea P un COPO. Decimos que una cadena $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ en P tiene longitud n , y la *altura de P* es la longitud máxima de una cadena en P . Observa que la altura de P coincide con la dimensión de la realización geométrica (del nervio) de P .

Definición 1.2.2 (COPOS de subgrupos abelianos). Sea G un grupo. Definimos los siguientes COPOS:

- $\text{Ab}(G)$ como el COPO de todos los subgrupos abelianos de G .

- $\text{AbCo}(G)$ como el COPO de todas las clases laterales de subgrupos abelianos de G .
- $\text{mAbCo}(G)$ como el COPO de todas los gB tales que $g \in G$ y B es una intersección de subgrupos abelianos maximales de G .

En todos estos COPOS, la relación de orden es la dada por la inclusión.

Comentario 1.2.3. Sea G un grupo y Z su centro. Observemos que todos los subgrupos abelianos maximales de G contienen a Z . De hecho, se puede mostrar que Z es igual a la intersección de todos los subgrupos abelianos maximales de G .

Todos los cálculos sobre el tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$ se basan en el siguiente resultado, que se utilizará de aquí en adelante sin más menciones. Por lo tanto, en todo el escrito solo trabajaremos con (la realización geométrica de) $\text{mAbCo}(G)$ y $\text{AbCo}(G)$. Cabe destacar que la prueba de este resultado puede ser consultada en la sección 2.1 de [AV19] aunque gran parte de los resultados también se demostraron en [AH93]. DE igual forma la equivalencia del punto (4) se puede deducir del trabajo en [AH93], pero en particular este modelo se redescubrió en el trabajo de doctorado.

Teorema 1.2.4. *Dado un grupo discreto G , los siguientes complejos CW son homotópicamente equivalentes.*

- (1) $E_{\text{com}}(G)$,
- (2) la realización geométrica de $\text{AbCo}(G)$,
- (3) la realización geométrica de $\text{mAbCo}(G)$,
- (4) la realización geométrica del complejo simplicial con conjunto de vértices

$$\{gM \mid g \in G, M \in \text{Ab}(G) \text{ maximal}\}$$

y cuyos simplejos con conjuntos $g_1M_1, g_2M_2, \dots, g_jM_j$ tales que $g_1M_1 \cap \dots \cap g_jM_j \neq \emptyset$.

Demostración. ▪ (1) **equivalente a** (2) De la definición de $B_{\text{com}}(G)$ como realización geométrica de un conjunto simplicial, podemos ver que $B_{\text{com}}(G) = \bigcup_{a \in \text{Ab}(G)} BA$, pensando a BA como subespacio de BG . Puesto que la colección $\{BA \mid A \in \text{Ab}(G)\}$

es cerrada bajo intersección, esta unión es en realidad un colímite indexado por el COPO $\text{Ab}(G)$, de donde tenemos que

$$B_{\text{com}}(G) = \text{colim}_{A \in \text{Ab}(G)} BA.$$

El morfismo canónico inducido $B_{\text{com}}(G) \rightarrow BG$ es claramente el morfismo inducido en el colímite por las inclusiones $BA \rightarrow BG$. Veamos primero que este colímite es de hecho con colímite homotópico.

De acuerdo a las prueba de [Hat02][Proposición 4G.2 y corolario 4G.3] el tipo de homotopia de $B_{\text{com}}(G)$ es equivalente al tomar este colímite por la subcubierta de espacios BA con A abeliano, esto pues la familia $\{BA | A \in \text{Ab}(G)\}$ es una cubierta por subcomplejos de $B_{\text{com}}(G)$.

Ahora podemos calcular $E_{\text{com}}(G)$ como la fibra homotopica del morfismo canónico $\text{hocolim}_{A \in \text{Ab}(G)} BA \rightarrow BG$. Para hacer esto usamos que los *colímites homotópicos son universales*, que significa que dado un morfismo $f : X \rightarrow Y$ el funtor de producto fibrado homotópico $f^* : \mathbf{Top}/Y \rightarrow \mathbf{Top}/X$ preserva colímites homotópicos. Entonces tomando el producto fibrado del diagrama completo a lo largo de la inclusión del punto base $* \rightarrow BG$, se produce un nuevo diagrama cuyo colímite homotópico es $E_{\text{com}}(G)$. Puesto que la fibra homotopica de la inclusión $BA \rightarrow BG$ es el espacio discreto G/A , tenemos que

$$E_{\text{com}}(G) \simeq \text{hocolim}_{a \in \text{Ab}(G)} G/A.$$

Ahora es necesario una descripción del colímite homotópico del funtor $G/(-) : \text{Ab}(G) \rightarrow \mathbf{Con}$. El teorema de Thomason establece que $\text{hocolim} G/(-)$ es el nervio de la construcción de la categoría de puntos de Grothendieck aplicada a $G/(-)$. No es difícil verificar que la categoría de elementos de $G/(-)$ es de hecho el COPO $\text{AbCo}(G)$. Todo esto implica que

$$E_{\text{com}}(G) \simeq |N(\text{AbCo}(G))|.$$

- (2) **equivalente a (3)** Para probar la equivalencia con $\text{mAbCo}(G)$, veamos que podemos aplicar el teorema A de Quillen en el caso especial de la inclusión de COPOS $\text{mAbCo}(G) \hookrightarrow \text{AbCo}(G)$ la cual induce una equivalencia homotopica puesto que para

cada $C \in \text{AbCo}(G)$, el COPO $P_c = \{C' \in \text{mAbCo}(G) | C \subset C'\}$ tiene nervio contráctil. Sea A un subgrupo abeliano de G y sea M la intersección de todos los subgrupos maximales abelianos de G que contienen a A . Entonces si $A \subset M'$ es la intersección de algunos subgrupos abelianos maximales, se debe de tener que $M \subset M'$, esto implica que el COPO $P_g A$ tiene a gM como menor elemento y se sigue que el nervio es contráctil. De donde concluimos la equivalencia de las realizaciones geométricas de $\text{AbCo}(G)$ y $\text{mAbCo}(G)$.

- (3) **equivalente a (4)** Para esta equivalencia consideremos los subCOPOS

$$X_{gM} = \{C \in \text{AbCo}(G) | C \subset gM\}$$

para cada elemento g y cada subgrupo abeliano maximal M . Por la condición de maximalidad de los M 's se tiene que esta familia de subCOPOS cubre al COPO $\text{mAbCo}(G)$ de donde $|N(X_{gM})|$ es una cubierta por subsimplejos de $|N(\text{mAbCo}(G))|$. Adicionalmente si una familia g_1M_1, \dots, g_jM_j cumple que $g_1M_1 \cap \dots \cap g_jM_j \neq \emptyset$, podemos seleccionar un $g \in g_1M_1 \cap \dots \cap g_jM_j$, y se debe de cumplir que $gM_1 = g_1M_1, \dots, gM_j = g_jM_j$ (las clases laterales coinciden para el elemento g), de y se puede concluir que

$$M_1 \cap \dots \cap M_j = g^{-1}(g(M_1 \cap \dots \cap M_j)) = g^{-1}(gM_1 \cap \dots \cap gM_j) \neq \emptyset.$$

De lo anterior, tomando $\overline{M} = M_1 \cap \dots \cap M_j$, se cumple que

$$g_1M_1 \cap \dots \cap g_jM_j = g\overline{M}$$

y entonces la intersección de los COPOS $X_{g_1M_1}, \dots, X_{g_jM_j}$ resulta ser $X_{g\overline{M}}$ de donde la intersección de los subcomplejos $|N(X_{g_1M_1})|, \dots, |N(X_{g_jM_j})|$ es $|N(X_{g\overline{M}})|$ el cual es contráctil ($g\overline{M}$ es un elemento máximo del COPO). Todo esto implica que podemos utilizar el teorema del nervio para concluir que $|N(\text{mAbCo}(G))|$ es homotópicamente equivalente a la realización geométrica del complejo simplicial descrito en (4).

□

Teniendo como punto de partida el modelo de $\text{mAbCo}(G)$ se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.1. Para G un grupo discreto, si $\text{mAbCo}(G)$ es un COPO de altura k entonces existe un modelo de $E_{\text{com}}G$ con simplejos de dimensión menor o igual a k .

1.3. Resultados estructurales de $E_{\text{com}}(G)$

En esta sección probamos algunos resultados fundamentales sobre el tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$, que son interesantes por sí mismos. Estos resultados serán utilizados en el resto del trabajo.

Proposición 1.3.1. *Considere la siguiente extensión de grupos*

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1.$$

Sea \mathcal{P} el COPO de las clases laterales de todos los subgrupos abelianos de G que contienen a K , y sea \mathcal{Q} el COPO de las clases laterales de los subgrupos de Q cuya preimagen en G es abeliana. Entonces \mathcal{P} y \mathcal{Q} son isomorfos. Además, si \mathcal{P}_{max} (resp. \mathcal{Q}_{max}) es el COPO de las intersecciones finitas de elementos maximales de \mathcal{P} (resp. \mathcal{Q}), entonces \mathcal{P}_{max} es isomorfo a \mathcal{Q}_{max} .

Demostración. La biyección estándar entre subgrupos de G que contienen a K y subgrupos de Q se restringe a una biyección entre subgrupos abelianos de G que contienen a K y subgrupos de Q con preimagen abeliana en G . Dado un subgrupo H de G que contiene a K sea \bar{H} su imagen en Q . Notemos que $[G : H] = [Q : \bar{H}]$. Esto implica que la biyección que tenemos entre subgrupos también da lugar a un isomorfismo del COPO de clases laterales. \square

Se implementará este resultado en diversas ocasiones donde cada subgrupo abeliano de Q tiene preimagen abeliana en G , de modo que \mathcal{Q} y \mathcal{Q}_{max} son realmente $\text{AbCo}(Q)$ y $\text{mAbCo}(Q)$ respectivamente. Además en esos casos la extensión será central.

Teorema 1.3.2. *Sea G un grupo infinito numerable no abeliano. Supongamos que para cada par de subgrupos abelianos maximales distintos A y B de G , $A \cap B = 1$. Entonces, $E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.*

Demostración. La hipótesis implica directamente que $\text{mAbCo}(G)$ tiene altura 1, por lo tanto su realización geométrica tiene dimensión 1 y tiene un número finito o infinito

numerable de celdas. Concluimos, por el Teorema 1.2.4, que $E_{\text{com}}(G)$ es homotópicamente equivalente a una cuña de círculos. Sólo queda por probar que hay infinitos de estos círculos.

Consideramos Y el subcomplejo de la realización geométrica X de $\mathbf{mAbCo}(G)$ dado de la siguiente manera:

- Todos los vértices de X pertenecen a Y .
- Todas las aristas de la forma $\{\{g\}, A\}$ con $g \in A$ y A un subgrupo abeliano máximo de G , pertenecen a Y .
- Para cada vértice de X de la forma xA con $A \neq 1$, escogemos y fijamos un representante de la clase lateral correspondiente, digamos x . La arista $\{\{x\}, xA\}$ pertenece a Y .

Afirmamos que Y es conexo. Cualquier clase lateral del grupo trivial, digamos $\{g\}$, está contenido en algún subgrupo abeliano máximo A , y Y tiene las aristas $\{\{1\}, A\}, \{\{g\}, A\}$, que conectan $\{g\}$ a $\{1\}$. Por otro lado cualquier clase lateral de un subgrupo abeliano maximal A , tiene un representante escogido x y Y tiene la arista $\{\{x\}, xA\}$ conectando xA a una clase lateral del grupo trivial, el cual ya hemos conectado a $\{1\}$.

Ya que Y es conexo y contiene todos los vértices de X , un árbol maximal T de Y también es un árbol maximal de X que contiene todos los vértices. Para finalizar la demostración, es suficiente mostrar que hay infinitas aristas en X que no pertenecen a Y . Entre los subgrupos abelianos máximos de G existe, ya sea un subgrupo H de índice infinito o un subgrupo propio infinito K ; veamos cada caso por separado. Sea H como en el primer caso, note que, por construcción de Y , para cada clase lateral $gH \neq H$ hay exactamente una arista en Y de la forma $\{\{x\}, gH\}$, y dado que H es no trivial existe un elemento $y \neq x$ tal que la arista $\{\{y\}, gH\}$ no pertenece a Y ; esto finaliza la demostración en el primer caso. Sea K como en el segundo caso, ya que K es propio existe una clase lateral $gK \neq K$, como en el caso anterior, todas excepto una de las aristas de la forma $\{\{y\}, gK\}$ no pertenecen a Y ; esto finaliza la demostración del segundo caso. \square

El siguiente corolario es una consecuencia directa de la Proposición 1.3.1 y el Teorema 1.3.2.

Corolario 1.3.3. *Sea G un grupo, y denotemos por Z el centro de G . Suponga que para cada par de subgrupos abelianos maximales distintos A y B de G , $A \cap B = Z$, y suponga que Z tiene índice infinito numerable en G . Entonces, $E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.*

Teorema 1.3.4. *Sea G_1 y G_2 grupos no triviales. Entonces*

$$E_{\text{com}}(G_1 * G_2) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} E_{\text{com}}(G_1) \vee \bigvee_{\mathbb{N}} E_{\text{com}}(G_2) \vee \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$$

Demostración. Denotemos por G al producto libre $G_1 * G_2$. Por el teorema de Kurosh, cualquier subgrupo abeliano de $G_1 * G_2$ es o un subgrupo de un conjugado de G_1 , un subgrupo de un conjugado de G_2 , o un subgrupo cíclico infinito generado por un elemento que no es conjugado a ningún elemento de G_1 o G_2 . Además, subgrupos abelianos de diferentes tipos se intersectan solo en el subgrupo trivial. Esto implica que el COPO de subgrupos abelianos (resp. maximales abelianos) de $G_1 * G_2$ es la unión de todos los subgrupos abelianos (resp. maximales abelianos) de todos los conjugados de G_1 , todos los subgrupos abelianos (resp. máximos abelianos) de todos los conjugados de G_2 y todos los subgrupos cíclicos generados por elementos (resp. elementos primitivos) no conjugados a G_1 o G_2 . Para el COPO de clases laterales, tenemos

$$\mathbf{mAbCo}(G) = \bigcup_{y \in G/G_1} \bigsqcup_{g \in G/G_1^y} g \cdot \mathbf{mAbCo}(G_1^y) \cup \bigcup_{x \in G/G_2} \bigsqcup_{g \in G/G_2^x} g \cdot \mathbf{mAbCo}(G_2^x) \cup \mathbf{Co}P$$

donde P es el COPO conformado por el subgrupo 1 y todos los subgrupos abelianos maximales generados por un elemento primitivo no conjugado a ninguno de los factores; y $\mathbf{Co}P$ denota el COPO de clases laterales de subgrupos en P .

Consideremos el subcomplejo Y de la realización geométrica X de $\mathbf{mAbCo}(G)$ dado de la siguiente manera:

- Para cada $g \in G \setminus \{1\}$ sea M_g un subgrupo abeliano máximo de G fijo, tal que $g \in M_g$. Las aristas $\{\{1\}, M_g\}$ y $\{\{g\}, M_g\}$ pertenecen a Y .
- Para cada vértice de X de la forma xA con A un subgrupo abeliano maximal y $xA \neq A$, seleccionamos y fijamos un representante de la clase lateral xA , digamos x . La arista $\{\{x\}, xA\}$ pertenece a Y .
- Todos los vértices en las aristas anteriores pertenecen a Y , es decir, los vértices de

Y son los conjuntos de un solo elemento y las clases laterales de todos los subgrupos abelianos maximales de G .

Afirmamos que Y es conexo. Primero, cualquier clase lateral del grupo trivial, digamos $\{g\}$, está contenido en M_g , y Y tiene las aristas $\{\{1\}, M_g\}, \{\{g\}, M_g\}$, que conectan $\{g\}$ con $\{1\}$. En segundo lugar, cualquier clase lateral de un subgrupo abeliano máximo A , tiene un representante elegido x y Y tiene la arista $\{\{x\}, xA\}$ conectando xA con la clase lateral $\{x\}$ del grupo trivial, al que ya hemos conectado con 1. Además, a partir de la construcción de Y , este subcomplejo es un árbol; de hecho, tomando $\{1\}$ como la raíz, los niveles sucesivos del árbol son los M_g , después los $\{g\}$ para $g \neq 1$, y por último las clases laterales no subgrupos xA .

Tenemos que Y tiene intersección no vacía con cada $g \cdot \text{mAbCo}(G_i^y)$. También para cada clase lateral xH en P con $xH \neq H$, hay infinitas aristas de X que no pertenecen a Y . Por lo tanto, después de colapsar Y , tenemos un complejo con tipo de homotopía la cuña de infinitas copias de $E_{\text{com}}(G_1)$ más un número numerable de copias de S^1 , infinitas copias de $E_{\text{com}}(G_2)$ más un número numerable de copias de S^1 , y una cantidad numerable de copias de S^1 de P . \square

Teorema 1.3.5. *Supongamos que G es un grupo hiperbólico libre de torsión en el sentido de Gromov. Supongamos que G no es virtualmente cíclico. Entonces*

$$E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1.$$

Demostración. En un grupo hiperbólico el centralizador de cualquier grupo cíclico infinito es virtualmente cíclico, en particular, todo subgrupo abeliano de G es trivial o cíclico infinito (ver, por ejemplo, [BH99, Corolario III.3.10]). Por otro lado, si H y K son subgrupos maximales cíclicos infinitos de G , entonces $H = K$ o $H \cap K = 1$ (ver, por ejemplo, [JL06, Observación 7]). Dado que G no es virtualmente cíclico, y en particular no abeliano y numerable infinito, la conclusión se sigue del Teorema 1.3.2. \square

Teorema 1.3.6. *Supongamos que A y B son grupos abelianos con un subgrupo común propio F . Entonces*

$$E_{\text{com}}(A *_F B) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1.$$

Demostración. El teorema de Kurosh implica que cualquier subgrupo abeliano de $(A/F) * (B/F)$ es un subgrupo de un conjugado de A/F , un subgrupo de un conjugado de B/F o cíclico infinito. En los tres casos, se puede ver fácilmente que la pre-imagen del subgrupo en $A *_F B$ es abeliano. Por lo tanto, la Proposición 1.3.1 implica que $\mathfrak{mAbCo}(A *_F B)$ y $\mathfrak{mAbCo}((A/F) * (B/F))$ son isomorfos. Finalmente, el Teorema 1.3.4 establece la afirmación, ya que $E_{\text{com}}(A/F)$ y $E_{\text{com}}(B/F)$ son contráctiles. \square

Ejemplo 1. Supongamos que $G = SL_2(\mathbb{Z})$ y $H = PSL_2(\mathbb{Z})$. Dado que $G \cong \mathbb{Z}/4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}/6$ y $H \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, el Teorema 1.3.6 implica que ambos $E_{\text{com}}(G)$ y $E_{\text{com}}(H)$ tienen el tipo de homotopía de $\bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.

Otro resultado que se cumple es la construcción para productos:

Lema 1.3.7. *Para cualesquiera grupos G_1 y G_2 , se tiene que*

$$E_{\text{com}}(G_1 \times G_2) \simeq E_{\text{com}}(G_1) \times E_{\text{com}}(G_2).$$

Demostración. Cualquier subgrupo abeliano M de $G_1 \times G_2$ está contenido en $\pi_1(M) \times \pi_2(M)$, que también es abeliano. Por lo tanto, los subgrupos abelianos maximales de $G_1 \times G_2$ son de la forma $A_1 \times A_2$ con A_1 y A_2 subgrupos abelianos maximales de G_1 y G_2 , respectivamente. Esto implica que el COPO $\mathfrak{mAbCo}(G_1 \times G_2)$ es isomorfo a $\mathfrak{mAbCo}(G_1) \times \mathfrak{mAbCo}(G_2)$ con la relación dada por a cada clase lateral $(g_1, g_2)A_1 \times A_2$ asociarle el par (g_1A_1, g_2A_2) . Como la realización geométrica de un COPO respeta los productos, el resultado se sigue de esto. \square

1.4. Productos amalgamados $K_1 *_A K_2$

Para finalizar este capítulo incluimos el siguiente resultado que será implementado de manera recurrente en varias secciones del capítulo 3. En concreto se establecerá una notación y un resultado para estudiar la estructura de los grupos de la forma $K_1 *_A K_2$ donde K_1 y K_2 son copias del grupo fundamental de la botella de Klein y A es el subgrupo \mathbb{Z}^2 de índice dos de K_1 y K_2 .

Estos grupos aparecerán en el análisis de las geometrías \mathbb{E}^3 , Nil y Sol.

Notación 1.4.1. Sea G un grupo de la forma $K_1 *_A K_2$ donde K_1 y K_2 son copias del grupo fundamental de la botella de Klein, A es el subgrupo \mathbb{Z}^2 de índice dos de K_1 y

K_2 , y la amalgama está dada por un automorfismo $\varphi: A \rightarrow A$. Dado que A es normal en ambos factores de G , concluimos que A es normal en G . Además, G/A es isomorfo al grupo diédrico infinito D_∞ . Denotemos a p como el homomorfismo cociente. Puesto que D_∞ es isomorfo a $\mathbb{Z} \rtimes_{-1} \mathbb{Z}_2$, tenemos un subgrupo de índice 2, $G' = p^{-1}(\mathbb{Z} \rtimes 0)$ de G , que es isomorfo a $A \rtimes_{\varphi'} \mathbb{Z}$, donde φ' es un cierto automorfismo de A que depende de φ . Todo esto se puede resumir en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z} \rtimes_{-1} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \end{array}$$

Dependiendo del automorfismo φ , A puede o no ser un subgrupo abeliano maximal de G . Clasificaremos los subgrupos abelianos máximos de G que no son iguales a A (si A no es maximal, son todos ellos) de la siguiente manera:

Tipo I aquellos que son subconjugados a uno de los factores, o equivalentemente, aquellos que tienen una imagen finita no trivial bajo p , y

Tipo II aquellos que son subgrupos de G' , o equivalentemente aquellos que tienen imagen infinita bajo p .

Dados elementos $x, y \in G$ denotamos $p(x)$ por \bar{x} y $x^y = yxy^{-1}$.

Lema 1.4.2. *Sea $K_1 *_A K_2$ el producto amalgamado donde K_1, K_2 son copias del grupo fundamental de la botella de Klein y A es el subgrupo \mathbb{Z}^2 de índice dos de K_1 y K_2 . Sean $x \in K_1 \setminus A$ y $y \in K_2 \setminus A$ los elementos que generan las copias de $0 \rtimes \mathbb{Z}$ en K_1 y K_2 , respectivamente. Entonces:*

- (1) todo conjugado de K_i para $i = 1, 2$ es de la forma $K_i^{(xy)^n}$ para $n \in \mathbb{Z}$,
- (2) el centro de $K_1^{(xy)^n}$ (resp. $K_2^{(xy)^n}$) es el grupo cíclico infinito generado por $(x^2)^{(xy)^n}$ (resp. $(y^2)^{(xy)^n}$),
- (3) cualquier subgrupo abeliano de $K_1 *_A K_2$ que es maximal entre aquellos de tipo II, es maximal abeliano en $K_1 *_A K_2$.

Demostración. Vamos a demostrar (1), y notemos que (2) es una consecuencia directa de (1), puesto que $x^2, y^2 \in A$ son los generadores de las copias de $0 \rtimes 2\mathbb{Z}$.

Sea $p: K_1 *_A K_2 \rightarrow D_\infty = \langle \bar{x} \rangle * \langle \bar{y} \rangle$ el homomorfismo cociente siguiendo la notación 1.4.1. Notemos que $K_1^g = p^{-1}(\langle \bar{x} \rangle^{\bar{g}})$, el resultado ahora sigue del hecho que todos los conjugados de $\langle \bar{x} \rangle$ en D_∞ son de la forma $\langle \bar{x} \rangle^{\langle \bar{x}\bar{y} \rangle^n}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Para demostrar (3), sea B un subgrupo abeliano de $K_1 *_A K_2$ que es maximal entre los de tipo II, entonces $p(B)$ es infinito. Sea C un subgrupo abeliano de $K_1 *_A K_2$ que contenga a B , entonces $p(C)$ es infinito, y por lo tanto C es de tipo II. Concluimos que $B = C$ por maximalidad. □

Capítulo 2

$E_{com}G$ para grupos finitos

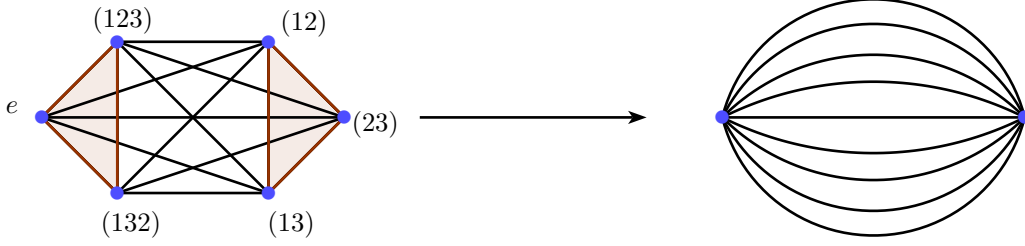
Dentro del estudio de esta teoría, los grupos finitos representan una clase interesante (y bastante compleja) de estudiar. Por ejemplo existen diversas familias de grupos que satisfacen tener modelos para $E_{com}G$ homotópicamente equivalentes a cuñas de círculos. Y por otro lado existen familias que ni si quiera son $K(\pi, 1)$. Dentro de este capítulo abordaremos avances en estos dos sentidos anteriores y algunas de las estrategias generales para tratar estos casos.

A manera de ejemplo veamos el siguiente caso.

Ejemplo 2. Para el grupo simétrico S_3 , el espacio $E_{com}S_3$ tiene el tipo de homotopía de la cuña de 8 círculos.

Utilizando el modelo $\text{AbCo}(S_3)$ podemos notar que habrán 2 triángulos, uno por cada clase lateral del subgrupo cíclico de tres elementos. Además de esto cada dos elementos fuera de estos triángulos están unidos por una arista pues estos conjuntos son una clase lateral de un subgrupo generado por una transposición. Teniendo en cuenta lo anterior el tipo de homotopía de este modelo se puede visualizar en la Figura [2.1](#).

Para concluir lo que se hace es contraer cada uno de los triángulos para obtener un espacio con tipo de homotopía equivalente, el cual consiste en dos vértices y 9 aristas entre estos, esto resulta una cuña de 8 círculos al contraer cualquiera de las aristas.

Figura 2.1: $\text{mAbCo}(S_3)$

2.1. Grupos de orden menor a 32

Dentro de la gama de grupos finitos G podemos estudiar el tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$ conforme el orden de G aumenta. Como es de esperar los grupos finitos de ordenes bajos no están muy alejados de ser abelianos. Un hecho que se notará mas adelante es que para cualquier grupo de orden menor o igual a 31, $\text{mAbCo}(G)$ tiene altura 2 salvo en el caso de $G = S_4$ el grupo simétrico de 4 elementos. En la siguiente proposición trabajamos de forma concreta este caso.

Proposición 2.1.1. $E_{\text{com}}(S_4) = \bigvee_{113} S^1$.

Demostración. Los subgrupos abelianos maximales de S_4 son de tres tipos, \mathbb{Z}_3 generado por un 3-ciclo, \mathbb{Z}_4 generado por un 4-ciclo y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ generados por dos transposiciones ajenas. Las posibles intersecciones de estos grupos son el subgrupo trivial y los subgrupos $\{1, \alpha\beta\}$ donde α y β son transposiciones ajenas. Entonces las cadenas maximales en $\text{mAb}(S_4)$ son:

- (1) $1 < \{1, \alpha\beta\} < \langle \alpha, \beta \rangle$ para α y β trasposiciones ajenas,
- (2) $1 < \{1, \gamma^2\} < \langle \gamma \rangle$ con γ un 4-ciclo.

Lo anterior implica que los triángulos en $\text{mAbCo}(S_4)$ son de uno de los siguientes tipos:

- (1) $\{g\} < g\{1, \alpha\beta\} < g\langle \alpha, \beta \rangle$ para α y β transposiciones ajenas
- (2) $\{g\} < g\{1, \gamma^2\} < g\langle \gamma \rangle$ con γ un 4-ciclo.

Note que para un elemento $g \in S_4$ y un 4-ciclo γ hay un único triángulo de la forma (2) por lo que podemos eliminar la arista $g < g\langle\gamma\rangle$ y el interior del triángulo sin alterar el tipo de homotopía. De manera similar cada arista $\{g\} < g\langle\alpha, \beta\rangle$ está en un único triángulo, que es de la forma (1). También podemos eliminar esas aristas y el interior de los triángulos que las contienen sin cambiar el tipo de homotopía. Después de realizar este proceso se obtiene una gráfica la cual tiene el tipo de homotopía de una cuña de círculos.

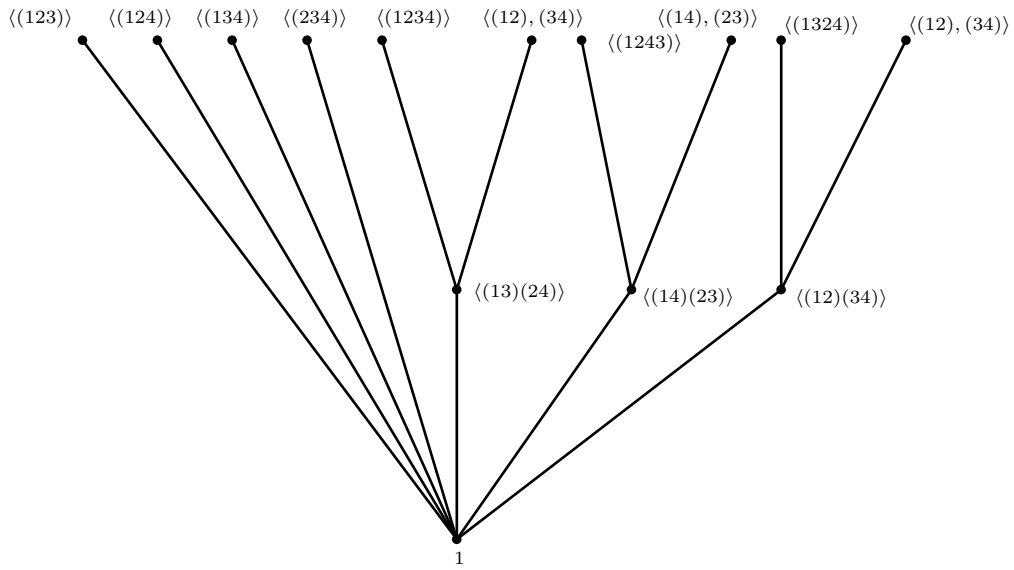


Figura 2.2: El diagrama de Hasse de $\mathbf{mAb}(S_4)$.

Los vértices son $24/3 = 8$ por cada 3-ciclo (uno por cada clase lateral del grupo generado por el 3-ciclo) de los cuales hay 4, $24/4 = 6$ por cada 4-ciclo (uno por cada clase lateral del grupos generado por el 4-ciclo) de los cuales hay 3, $24/4 = 6$ por cada grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (uno por cada clase lateral de dichos grupos) de los cuales hay 3, $24/2 = 12$ por cada grupo \mathbb{Z}_2 (uno por cada clase lateral del grupo generado por producto de transposiciones ajenas) de los cuales hay 3 y por último 24 mas de las clases laterales del elemento trivial. Cada clase lateral de un \mathbb{Z}_3 está conectada a 3 clases laterales del elemento trivial, cada clase lateral de un \mathbb{Z}_4 esta conectada a 2 vértices, cada clase lateral de un $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ está conectada a dos vértices y por último cada clase lateral de los \mathbb{Z}_2 está conectada a 2 clases laterales del elemento trivial. Utilizando la característica de Euler obtenemos entonces que el número

de círculos es

$$(3 \cdot 8 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 12 \cdot 3) - (8 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 12 \cdot 3 + 24) + 1 = 113.$$

□

El diagrama de Hasse de un COPO es una representación donde los elementos x se representan con puntos y la noción de $x < y$ se representa por una arista de manera que no existe z con $x < z < y$. Con esto en cuenta la noción de transitividad del COPO se puede entender como que hay un camino entre los elementos. En la Figura 2.2 se puede ver el diagrama de Hasse de $\mathbf{mAb}(S_4)$.

De hecho, un teorema que se puede motivar en este resultado es el siguiente.

Teorema 2.1.1. *Sea G un grupo tal que $\mathbf{mAb}(G)$ tiene altura menor o igual que 2 y es un árbol. Entonces $E_{\text{com}}(G)$ tiene el tipo de homotopía de una cuña de círculos.*

Demostración. Estudiemos $\mathbf{mAbCo}(G)$ bajo estas condiciones. Si $\mathbf{Ab}(G)$ tiene altura 1, entonces por el Corolario 1.3.3 se tiene que $\mathbf{mAbCo}(G)$ es una gráfica de donde se sigue el resultado. Si la altura de $\mathbf{Ab}(G)$ es 2, entonces por el Corolario 1.2.1 sabemos que $E_{\text{com}}(G)$ admite una descomposición como complejo CW con celdas de dimensión 2 (triángulos) o menores. Consideremos uno de los triángulos, este corresponde a una cadena maximal de la forma $gZ < gH < gM$ con g un elemento del grupo, Z el centro del grupo, M un grupo maximal y H un subgrupo intermedio entre Z y M . Notemos que la arista $gZ < gM$ es una arista que solo esta contenida en ese triángulo, esto pues si existiera otro triángulo dado por la cadena $gZ < g\bar{H} < gM$, esto implica que $Z < \bar{H} < M$ es cadena de $\mathbf{mAb}(G)$, pero por hipótesis este COPO es un árbol, y también se tiene la cadena $Z < H < M$, entonces $H = \bar{H}$. Lo anterior implica que un triángulo que contiene a gZ y gM esta determinado de manera única. Al tener $gZ < gM$ arista libre, podemos colapsar dicha arista y el interior del triángulo, haciendo esto con cada triángulo obtenemos un espacio homotópicamente equivalente que ahora solo tiene vértices y aristas, por lo tanto tiene tipo de homotopía de una cuña de círculos. □

Comentario 2.1.2. Un comentario importante a notar es que la prueba del anterior teorema no usa el hecho de que G sea finito, de hecho esta prueba es válida para grupos infinitos también, lo que puede cambiar es la cantidad de círculos en la cuña.

El principal teorema de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.1.3. *Para cualquier grupo finito G con orden menor o igual a 31, se tiene que $E_{\text{com}}G$ tiene el tipo de homotopía de una cuña de círculos.*

Demostración. Esta demostración depende fuertemente en el código que se puede encontrar en el Apéndice [A](#). Con este código y la paquetería de GAP es posible demostrar que todos los grupos hasta orden 31 tienen altura 1 salvo para el caso de S_4 . La Proposición [2.1.1](#) muestra que este caso también resulta homotópicamente equivalente a una cuña de círculos, de donde se sigue el teorema. □

Un comentario importante es que para orden 32 existen grupos G cuyos $E_{\text{com}}(G)$ no serán homotópicamente equivalentes a una cuña de círculos. Esto se puede encontrar en [\[Oka14\]](#) donde se muestra que para uno de los grupos extraespeciales de orden 32, el grupo fundamental de $E_{\text{com}}(G)$ tiene torsión y por lo tanto no es un $K(\pi, 1)$.

2.2. Familias infinitas de grupos finitos

Teorema 2.2.1. *Los grupos diédricos D_{2n} satisfacen que*

$$E_{\text{com}}(D_{2n}) \simeq \begin{cases} \bigvee_{n^2-1} S^1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \bigvee_{\frac{n^2}{4}-1} S^1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} .$$

Demostración. Recordemos que el grupo diédrico D_{2n} tiene orden $2n$ y tiene presentación

$$\langle a, x \mid a^n = x^2 = e, xax = a^{-1} \rangle$$

donde a y x pueden ser pensadas como transformaciones del plano \mathbb{R}^2 dadas de la siguiente manera: a es la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$ y x la reflexión sobre el eje X . En este sentido D_{2n} nos da simetrías del polígono regular de n lados con vértices los puntos

$$P_n := \left\{ \left(\cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right), \sin \left(\frac{2\pi j}{n} \right) \right) \mid 0 \leq j \leq n-1 \right\} .$$

- **Caso n impar.** Si n es impar el polígono con vértices en P_n es un polígono con una cantidad impar de lados. Los subgrupos abelianos maximales en este caso son los

siguientes: $\langle a \rangle$ y $\langle z \rangle$ con z una reflexión (i.e. $z^2 = 1$). Lo anterior se debe a que si un subgrupo abeliano A contienen dos reflexiones z_0 y z_1 diferentes, estas tienen ejes de simetría que forman un ángulo múltiplo de $\frac{2\pi}{n}$ lo cual produce una rotación de ángulo $\frac{4\pi}{n}$ pero dicha rotación no conmuta con z_0 (ni z_1) pues en el caso impar $\frac{4\pi}{n}$ no puede ser π . Esto concluye el análisis de los grupos abelianos que contienen una reflexión. Si no contienen una reflexión, entonces es un subgrupo de $\langle a \rangle$ el cual es el abeliano maximal. Luego, la intersección de cualesquiera de estos dos grupos diferentes es trivial. Lo anterior implica que $\text{Ab}(D_{2n})$ tiene altura 1, así que $\text{mAbCo}(D_{2n})$ es un gráfica, de donde podemos usar la característica de Euler para calcular el número de círculos. Las clases laterales de $\langle a \rangle$ son 2, mientras que las clases laterales de cada grupo de reflexión $\langle z \rangle$ son n y hay n de estos grupos. Cada clase lateral de $\langle a \rangle$ están conectada a n clases laterales del elemento trivial y cada clase lateral de un $\langle z \rangle$ está conectado a dos clases laterales del elemento trivial. Todo lo anterior implica que la cantidad de círculos es

$$2 \cdot n + n \cdot n \cdot 2 - (2 + n \cdot n + 2n) + 1 = 2n + 2n^2 - 2 - n^2 - 2n + 1 = n^2 - 1.$$

- **Caso n par.** Si n es par el polígono con vértices en P_n es un polígono con una cantidad par de lados. Los subgrupos abelianos maximales en este caso son los siguientes: $\langle a \rangle$ y $\langle z_1, z_2 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ con z_1 y z_2 reflexiones con ejes perpendiculares (grupos de Klein). La razón de esto de manera muy similar al caso de n impar es que si un subgrupo abeliano A contiene dos reflexiones z_1 y z_2 estas producen un rotación de ángulo $\frac{4\pi}{n}j$ la cual conmuta con ellas si y sólo si este ángulo resulta igual a 2π o π , en el primer caso los ejes de las reflexiones deben ser iguales, en el segundo, los ejes de las reflexiones son perpendiculares. En este caso la intersección de cualesquiera dos grupos es el centro que es el grupo $z = \{1, a^{\frac{n}{2}}\}$, entonces $\text{Ab}(D_{2n})$ es de altura 1, así que $\text{mAbCo}(D_{2n})$ es un gráfica, de donde podemos utilizar la característica de Euler. Las clases laterales de $\langle a \rangle$ son 2, mientras que las clases laterales de cada grupo de Klein son $\frac{n}{2}$ y hay $\frac{n}{2}$ de estos grupos. Cada clase lateral de $\langle a \rangle$ está conectada a $\frac{n}{2}$ clases laterales de Z y cada clase lateral de un grupo de Klein está conectada a 2 clases laterales del elemento trivial. Todo lo anterior implica que la cantidad de círculos es

$$2 \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2 - \left(2 + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} + n\right) + 1 = \frac{n^2}{4} - 1.$$

□

La demostración del siguiente resultados es análoga a la que se encuentra en [AV19, Example 13] para el caso especial en el que n es una potencia de dos.

Teorema 2.2.2. *Sea Q_{4n} el grupo finito de cuaterniones generalizados de orden $4n$. Entonces $E_{\text{com}}(Q_{4n}) \simeq \bigvee_{n^2-1} S^1$.*

Demostración. El grupo Q_{4n} admite la siguiente presentación, ver [Bro94, p. 98]:

$$Q_{4n} = \langle x, y \mid y^{2n} = 1, x^2 = y^n, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$$

Con esta presentación es fácil verificar que los elementos pueden ser escritos de manera única como $x^i y^a$ con $i \in \{0, 1\}$ y $0 \leq a \leq 2n - 1$. Siguiendo esta presentación, un par de elementos conmutan solo si pertenecen a $\langle y \rangle$ o pertenecen a $\langle z \rangle$ con $z \notin \langle y \rangle$. Por lo tanto, los subgrupos abelianos máximos de Q_{4n} son: el grupo cíclico $A = \langle y \rangle$ de orden $2n$ y para cada $z \notin A$ el grupo $\langle z \rangle$ que es un grupo de orden 4. La intersección de cualesquiera dos subgrupos distintos es el centro $\{1, x^2 = y^n\}$, entonces $\text{Ab}(Q_{4n})$ tiene altura 1, así que $\text{mAbCo}(Q_{4n})$ es un gráfica . Hay 2 clases laterales de A y para cada subgrupo de orden 4 hay n clases laterales, dado que hay n de estos subgrupos en el nivel superior del conjunto parcialmente ordenado $\text{mAbCo}(Q_{4n})$ hay $n^2 + 2$ vértices. En el nivel inferior hay $2n$ vértices, las clases laterales de Z . Las clases laterales de A están conectadas a n clases laterales de Z y las clases laterales de un cíclico de orden 4 están conectadas a 2 clases laterales de Z , todo lo anterior implica que el número de círculos que hay es

$$2 \cdot n + n \cdot n \cdot 2 - (2 + n \cdot n + 2n) + 1 = n^2 - 1.$$

□

Teorema 2.2.3. *El grupo semi-diédrico de orden 2^n (con $n \geq 4$), que se denota por SD_{2^n} , es un grupo finitamente presentado de la siguiente manera*

$$\langle a, x \mid a^{2^{n-1}} = x^2 = e, xax = a^{2^{n-2}-1} \rangle$$

Estos grupos satisfacen lo siguiente

$$E_{\text{com}}SD_{2^n} \simeq \bigvee_{2^{2n-4}-1} S^1.$$

Demostración. De la presentación se tiene x tiene orden 2, mientras que a tiene orden 2^{n-1} , además se satisface la siguiente relación

$$ax = xa^{2^{n-2}-1}.$$

Con esta identidad se tiene que los elementos de G tienen representación única de la forma $x^i a^j$ con $0 \leq i \leq 1$ y $0 \leq j \leq 2^{n-1} - 1$. Si $y = a^i$ y $z = xa^r$, entonces $zy = xa^{r+i}$ mientras que $yz = a^i xa^r = xa^{(2^{n-2}-1)i} a^r = xa^{i(2^{n-2}-1)+r}$, la diferencia de los exponentes en a es $i(2^{n-2} - 2)$ la cual es divisible por 2^{n-1} solo cuando $i = 2^{n-2}$ o $i = 0$. Lo anterior implica que $a^{2^{n-2}}$ esta en el centro y que ningún elemento que tiene x en su representación está en el centro (pues no conmuta por ejemplo con a). Luego el centro de G es el grupo $\langle a^{2^{n-2}} \rangle$ que tiene orden 2.

Como $A = \langle a \rangle$ es un subgrupo cíclico de índice 2 en G (y G no es abeliano) se tiene que este es un subgrupo abeliano maximal. Por el párrafo anterior los únicos elemento de A que conmutan con un elemento $z \notin \langle a \rangle$ son $\{1, a^{2^{n-2}}\}$. Ahora consideremos $w = xa^j$, veamos que $zw = xa^r xa^j = x^2 a^{r(2^{n-2}-1)+j} = a^{r(2^{n-2}-1)+j}$, mientras que $wz = xa^j xa^r = x^2 a^{j(2^{n-2}-1)+r} = a^{j(2^{n-2}-1)+r}$, estos elementos son iguales si y sólo si 2^{n-1} divide a la diferencia que es $(r - j)(2^{n-2} - 2)$ lo cual es equivalente a que 2^{n-2} divida a $r - j$, por las condiciones sobre r, j esto último solo es posible si $r = j$ o si $j = 2^{n-2} + r$ (suponiendo $r < j$). Luego los subgrupos maximales que tienen a z son de la forma $\{1, z = xa^r, a^{2^{n-2}}, xa^{2^{n-2}+r}\}$.

De este estudio es claro que la intersección de cualesquiera dos grupos abelianos maximales diferentes es el centro. Para calcular el número de círculos la cuenta es totalmente análoga al caso de los cuaternios generalizados por tener A un subgrupo de índice 2, todos los demás subgrupos de orden 4 y el centro de orden 2. Entonces la cantidad de círculos es

$$\left(\frac{2^n}{4}\right)^2 - 1 = 2^{2n-4} - 1.$$

□

Teorema 2.2.4. *Para un campo F finito de q elementos y un subgrupo $H < F^\times$ de orden d se cumple que*

$$E_{com}(F \rtimes H) \simeq \bigvee_{(d-1)(q^2-1)} S^1$$

donde la acción de H sobre F es la multiplicación por la izquierda.

Demostración. Una manera equivalente de tomar al grupo $G = F \rtimes H$ es como el conjunto de transformaciones $F \rightarrow F$ de la forma $ax + b$ con $a \in H$ y $b \in F$. Teniendo en cuenta esto veamos cuando dos elementos $f_1(x) = ax + b$ y $f_2(x) = cx + d$, conmutan. Se satisfacen las siguientes expresiones:

$$(f_1 \circ f_2)(x) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$$

$$(f_2 \circ f_1)(x) = c(ax + b) + d = cax + cb + d$$

estas funciones son iguales si y sólo si $ad + b = cb + d$. Para $a, c \neq 1$ esta expresión es equivalente a $(-b)(a - 1)^{-1} = (-d)(c - 1)$ los cuales son los puntos fijos de f_1 y f_2 , respectivamente. Entonces dos transformaciones *afines* de este estilo conmutan si y sólo si tienen el mismo punto fijo. Si por en cambio a es 1, la expresión $ad + b = cb + d$ implica que $c = 1$ y viceversa, es decir que una *traslación* conmuta solo con otra traslación. Después de este análisis podemos concluir que los subgrupos abelianos maximales están dados de la siguiente manera:

$$T = \{x + b | b \in F\}, \quad \forall \psi \in F, \quad T_\psi = \{f | f(\psi) = \psi\}.$$

El grupo T tiene orden q y por lo tanto índice d en G . Para los restante, dado un $\psi \in F$ y un $a \in H \setminus \{1\}$, existe un único b (a saber $(1 - a)\psi$) tal que $a\psi + b = \psi$, por lo tanto el orden de cada T_ψ es d y entonces el índice es q . Adicionalmente es claro que la intersección entre cada par de grupos de esta familia es trivial, entonces $\text{Ab}(G)$ tiene altura 1 y $\text{mAbCo}(G)$ es un gráfica . Entonces podemos usar la característica de Euler para contar la cantidad de círculos. Las clases laterales de T están conectadas a q clases laterales del elemento trivial, y las clases laterales de un H_ψ están conectadas a d clases laterales del elemento trivial. Todo esto implica que hay $q \cdot d + q \cdot q \cdot d$ aristas. La cantidad de vértices de clases laterales de subgrupos maximales abelianos es $d + q \cdot q$ y de clases laterales del elemento

trivial es $q \cdot d$. Con todo esto la formula para la cantidad de círculos es

$$\begin{aligned} q \cdot d + q \cdot q \cdot d - (d + q \cdot q + q \cdot d) + 1 &= q^2d - d - q^2 + 1 \\ &= q^2(d - 1) - (d - 1) \\ &= (q^2 - 1)(d - 1). \end{aligned}$$

□

2.3. El morfismo conmutador y grupos simétricos

En esta sección trabajaremos con el morfismo conmutador de un grupo, el cual servirá para detectar torsión en grupos fundamentales de $E_{\text{com}}(S_n)$ para n suficientemente grande. Para ello es necesario introducir algunas definiciones previas y ciertos resultados. Toda la exposición previa al Teorema 2.3.13 está basada en lo desarrollado en [AV19].

Lema 2.3.1. *Para un grupo G y un subconjunto finito $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ de G son equivalentes las siguientes condiciones.*

- (1) *Los elementos $s_0^{-1}s_1, s_1^{-1}s_2, \dots, s_{n-1}^{-1}s_n$ conmutan dos a dos*
- (2) *$\langle S^{-1}S \rangle = \langle s_i^{-1}s_j \mid s_i, s_j \in S \rangle$ es abeliano.*
- (3) *El conjunto S esta contenido en una clase lateral de algún subgrupo abeliano de G .*

Demostración. La condición (2) se sigue de (1) pues cada producto de $S^{-1}S$ puede ser obtenido de un producto de los elementos listados en (1) o de inversos de esos elementos. La condición (2) implica (3) pues $S \subset s_0 \langle S^{-1}S \rangle$. Por último si $S \subset gA$ con A abeliano, podemos pensar que $g = s_i$ (pues $s_i \in gA$ para cada i), de donde obtenemos que los elementos $s_0^{-1}s_1, s_1^{-1}s_2, \dots, s_{n-1}^{-1}s_n$ pertenecen a A y entonces conmutan dos a dos. □

Definición 2.3.2. Decimos que un subconjunto finito $\{g_0, g_1, \dots, g_n\} \subset G$ es *afinmente conmutativo* si satisface alguna de las condiciones del lema anterior.

Definición 2.3.3. Para un grupo G , denotamos por $\text{AfCom}(G)$ al complejo simplicial cuyos vértices son los elementos de G y simplejos están dados por los conjuntos afinmente conmutativos.

Para cada $g \in G$ sea $X_g = \{C \in \text{AbCo}(G) | g \in C\} = \{gA | A \in \text{Ab}(G)\}$. Estos subCOPOS forman una cubierta de $\text{AbCo}(G)$, entonces $|N(X_g)|$ forman una cubierta por subcomplejos de $|N(\text{AbCo}(G))|$.

Lema 2.3.4. *Sea $S \subset G$ un subconjunto finito no vacío y $X_S = \bigcap_{s \in S} X_s$. Entonces*

- (1) X_S es no vacío si y sólo si S es un conjunto afinmente conmutativo
- (2) Cuando S es afinmente conmutativo, entonces

$$X_S = \{sA | \langle s^{-1}S \rangle \subset A \in \text{Ab}(G)\}$$

para cada S . Más aun, se tiene que $N(X_S) \simeq \text{pt}$.

Demostración. Para (1) veamos que una clase lateral C pertenece a X_s si y sólo si para cada $s \in S$, se tiene que $s \in C$, por el inciso (3) del Lema 2.3.1 se tiene que esto pasa si y sólo si S es afinmente conmutativo.

Para (2) consideremos s cualquier elemento de S . Si $S \subset C \in \text{AbCo}(G)$, entonces C es clase lateral del grupo abeliano $s^{-1}C$. Luego

$$S \subset C \Leftrightarrow s^{-1}S \subset s^{-1}C \Leftrightarrow \langle s^{-1}S \rangle \subset s^{-1}C$$

que implica la formula deseada y también muestra que $s\langle s^{-1}S \rangle$ es una clase lateral minimal en este subCOPO, de donde se tiene que el nervio es contráctil. \square

Teorema 2.3.5. *Para G un grupo discreto se cumple que $E_{\text{com}}(G) \simeq |\text{AfCom}(G)|$.*

Demostración. El Lema 2.3.4 implica que tenemos las hipótesis para aplicar el teorema del nervio a $|N(\text{AbCo}(G))|$ con la cubierta $\{|N(X_g)| | g \in G\}$. Lo cual nos dice que $N(\text{AbCo}(G))$ es homotópicamente equivalente al complejo simplicial cuyos vértices son X_g y donde los simplejos son familias $\{X_{g_0}, X_{g_1}, \dots, X_{g_n}\}$ donde $X_{g_0} \cap \dots \cap X_{g_n} \neq \emptyset$, lo cual ocurre si y sólo si $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ es un conjunto afinmente conmutativo. \square

Recordemos un resultado auxiliar [AV19, Proposición 15]. Dado un complejo simplicial K , es posible definir un conjunto simplicial $\text{Sing}(K)$ de la siguiente manera

$$\text{Sing}(K)_n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in V(K)^{n+1} | \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in K\},$$

con morfismos de caras y de degeneración dados por borrar y repetir las coordenadas de manera usual. La prueba del siguiente resultado puede ser encontrada en [AV19].

Teorema 2.3.6. *Dado un complejo simplicial K se tiene que $|\text{Sing}(K)| \simeq |K|$.*

Con este resultado podemos usar de manera indistinta el modelo de $E_{\text{com}}(G)$ dado por el complejo simplicial o el conjunto simplicial definido por las familias de elementos afínmente conmutativos.

Lema 2.3.7. *Sea $\{g, h, k\}$ un conjunto afínmente conmutativo. Entonces $[g, h][h, k] = [g, k]$.*

Demostración. Por hipótesis $[g^{-1}h, h^{-1}k] = [h^{-1}g, k^{-1}h] = 1$, entonces

$$\begin{aligned} [g, h][h, k] &= (g^{-1}h^{-1}gh)(h^{-1}k^{-1}hk) \\ &= g^{-1}(h^{-1}g)(k^{-1}h)k = g^{-1}(k^{-1}h)(h^{-1}g)k = g^{-1}k^{-1}gk \\ &= [g, k] \end{aligned}$$

□

Como corolario del resultado anterior tenemos que

Corolario 2.3.8. *A cada colección ordenada (g_0, g_1, \dots, g_n) de elementos afínmente conmutativo podemos asociarle la colección $([g_0, g_1], [g_1, g_2], \dots, [g_{n-1}, g_n])$. Estas funciones definen una función simplicial entre $\mathbf{c}_\bullet : \text{AfCom}(G) \rightarrow B_\bullet[G, G]$.*

Definición 2.3.9. Tomando realización geométrica del morfismo simplicial anterior se define

$$\mathbf{c} : E_{\text{com}}(G) \rightarrow B[G, G]$$

al cual denotamos por *morfismo conmutador*.

Utilizando la [AKO11, Proposición 2.7] se puede argumentar lo siguiente. Es posible dar una descripción del grupo fundamental de $E_{\text{com}}(G)$ cuando G es discreto de la siguiente manera. En general para un conjunto simplicial el grupo fundamental puede ser obtenido del proceso de tomar una árbol generador del 1-esqueleto, con las siguientes relaciones

- hay un generador x_σ por cada 1-simplejo σ , que corresponde a un lazo en la realización geométrica que empieza en el punto base, sigue el árbol generados a un vértice inicial de σ , continua por este 1-simplejo y regresa al punto base vía el árbol generador, y
- hay dos tipos de relaciones: (a) los generadores correspondientes a aristas del árbol son triviales, y (b) para cada triángulo τ , las aristas en la frontera de τ satisfacen $x_{\delta_1\tau} = x_{\delta_0\tau}x_{\delta_2\tau}$.

Al aplicar esto al caso de $E_{\text{com}}(G)$ como conjunto simplicial, podemos tomar el punto base como el 0-simplejo dado por el elemento $1 \in G$ y tomar un árbol generador como la estrella centrada en 1. En este caso se tiene para cada $(g, h) \in G^2$ un generador $x_{g,h}$ teniendo así el conjunto $X = \{x_{g,h} | (g, h) \in G^2\}$. El generador $x_{g,h}$ representa el lazo en $E_{\text{com}}(G)$ obtenido por unir los 1-simplejos $(1, g), (g, h), (h, 1)$. Por último al recordar como están dados los triángulos en el modelo de $E_{\text{com}}(G)$ como conjunto simplicial concluimos el siguiente resultado:

Lema 2.3.10. *Sea G un grupo discreto. Entonces el grupo fundamental de $E_{\text{com}}(G)$ admite la presentación*

$$\begin{aligned} \pi_1(E_{\text{com}}(G), 1) = \langle X | \{x_{g,1}, x_{1,g} | g \in G\} \\ \cup \{x_{g,h}x_{h,k}x_{g,k}^{-1} | \{g, h, k\} \subset G \text{ es afínmente conmutativo}\} \rangle \end{aligned}$$

Todo lo desarrollado en esta sección se estableció para obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.3.11. *Sea G grupo discreto y $\mathbf{c} : E_{\text{com}}(G) \rightarrow B[G, G]$ el morfismo conmutador, entonces el homomorfismo inducido en grupos fundamentales*

$$\mathbf{c}_* : \pi_1(E_{\text{com}}(G)) \rightarrow \pi_1(B[G, G])$$

es un homomorfismo suprayectivo y se satisface que $\mathbf{c}_(x_{g,h}) = [g, h]$. Adicionalmente \mathbf{c}_* es una transformación natural entre los funtores $\pi_1(E_{\text{com}}(-))$ y $[-, -]$.*

Demostración. Recordemos que el generador $x_{g,h} \in \pi_1(E_{\text{com}}(G))$ representa la trayectoria de concatenar los 1-simplejos $(1, g), (g, h), (h, 1)$, según la definición del morfismo conmutador estos 1-simplejos van a dar $[1, g] = 1$, $[g, h]$ y $[h, 1] = 1$ en $B[G, G]$ de

donde se sigue que $\mathfrak{c}_*(x_{g,h}) = [g, h]$, esto en particular demuestra que \mathfrak{c}_* es suprayectiva pues en la imagen está toda la familia de generadores $[g, h] \in [G, G]$. La naturalidad se sigue de la presentación del grupo fundamental y de que familias afinmente conmutativas se envían con homomorfismo en familias afinmente conmutativas. \square

De acuerdo al [Oka16, Corolario 4.6] se tiene el siguiente resultado

Teorema 2.3.12. *Sea p un primo y G un grupo extra especial de orden p^{2r+1} con $r \geq 2$. Entonces $\pi_1(E_{\text{com}}(G)) \cong \mathbb{Z}/p$*

Como aplicación del morfismo conmutador podemos ver que lo anterior implica el siguiente teorema.

Teorema 2.3.13. *Para cada $n \geq p^5$ se tiene que $\pi_1(E_{\text{com}}(S_n))$ tiene elementos de orden p , en particular ningún $E_{\text{com}}(S_n)$ es un $K(\pi, 1)$ para $n \geq 32$.*

Demostración. Consideremos G un grupo extra especial de orden p^5 , por el teorema de Cayley tenemos que $G \hookrightarrow S_n$ con $n \geq p^5$, este homomorfismo induce un mapeo entre $E_{\text{com}}(G) \rightarrow E_{\text{com}}(S_n)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo Teorema 2.3.11

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E_{\text{com}}(G)) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(E_{\text{com}}(S_n)) \\ \mathfrak{c}_* \downarrow & & \mathfrak{c}_* \downarrow \\ [G, G] & \longrightarrow & [S_n, S_n] \end{array}$$

Como los grupos extra especiales no son abelianos se debe cumplir que $[G, G] \neq 1$. Por el Teorema 2.3.12 y el Teorema 2.3.11 se debe de cumplir que $[G, G]$ es cociente de \mathbb{Z}/p , entonces $[G, G] \cong \mathbb{Z}/p$. Sea $[\alpha] \in \pi_1(E_{\text{com}}(G))$ tal que $\mathfrak{c}_*([\alpha]) = v$ donde v es un generador de \mathbb{Z}/p . Como el homomorfismo inferior es la inclusión, entonces este homomorfismo es inyectivo. Luego el diagrama conmutativo cumple que el recorrido con el morfismo conmutador y el homomorfismo inferior envía $[\alpha]$ a un elemento no trivial (pues $v \in G$ tiene orden p). Luego $\iota_*([\alpha])$ debe ser no trivial, pues de lo contrario el camino superior en el diagrama mandaría $[\alpha]$ a un elemento trivial en $[S_n, S_n]$, lo cual es absurdo por la construcción de $[\alpha]$, entonces $\iota_*([\alpha]) \in \pi_1(E_{\text{com}}(S_n))$ es un elemento no trivial que bajo el homomorfismo conmutador cae a un elemento de orden p , esto fuerza a que $\iota_*([\alpha])$ es de orden p en el grupo fundamental.

En particular cuando $p = 2$ el simétrico mas pequeño que podemos obtener es S_{32} el cual debe cumplir que $\pi_1(E_{\text{com}}(S_{32}))$ tiene elementos de orden 2. \square

La cota de 32 se puede mejorar utilizando teoría de acciones sobre vectores del grupo extra especial, esto para mejorar el encaje. Algo importante a comentar es que en [Oka15, Theorem 1.2] se demuestra este mismo tipo de resultados empleando una noción llamada *sucesión simpléctica*.

Aunque esta prueba muestra la existencia de elementos de orden dos en $\pi_1(E_{\text{com}}(S_n))$ a partir de $n = 32$, computacionalmente con SAGE se puede ver que para $n = 5$ aparecen elementos de orden 2 en el grupo fundamental de $E_{\text{com}}(S_5)$, el problema es que no se sabe si esos elementos son estables en cuanto a la torsión que detectan (es decir si las inclusiones de los simétricos inducen en los grupos fundamentales elementos de la misma torsión).

Capítulo 3

Grupos fundamentales de 3-variedades

Dando el salto a grupos infinitos una clase interesante y bien estudiada es la de grupos fundamentales de 3-variedades. Aunque aún no se sabe la clasificación del tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$ para todos estos grupos se ha logrado realizar una gran avance el cual se expone en este capítulo.

Como consecuencia directa del Teorema 3.2 mostramos que $E_{\text{com}}(G)$, y por lo tanto $B_{\text{com}}(G)$, es un espacio $K(\pi, 1)$ cuando G es el grupo fundamental de una suma conexa de 3-variedades geométricas, orientables y cerradas.

Thurston demostró que existen ocho geometrías máximas tridimensionales, salvo equivalencias ([Sco83, Teorema 5.1]): \mathbb{S}^3 , \mathbb{E}^3 , \mathbb{H}^3 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$, $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$, Nil y Sol. El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

Teorema 3.1. *Sea G el grupo fundamental de una 3-variedad geométrica orientable cerrada. Entonces $E_{\text{com}}(G)$ es homotópicamente equivalente a $\bigvee_I S^1$, donde I es un conjunto de índices finito o infinito numerable (posiblemente vacío). Además, tenemos lo siguiente:*

- (1) *I es vacío si y solo si G es abeliano, en cuyo caso $E_{\text{com}}(G)$ es contráctil.*
- (2) *I es infinito si y solo si G es infinito y no abeliano.*

A partir de Teorema 3.1 concluimos que $E_{\text{com}}(G)$ es una cuña finita y no trivial de círculos

exactamente cuando G es finito y no abeliano, lo que, según el teorema de Perelman, sucede cuando G es el grupo fundamental de una variedad esférica. En ese caso, se tiene el cálculo explícito del número de círculos en la descomposición de la cuña. Algunos de estos cálculos se realizaron utilizando GAP.

Como consecuencia del Teorema 3.1, el Teorema 1.3.4 y el teorema de descomposición de Kneser-Milnor (ver Teorema 3.1.1), obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2. *Sea M una 3-variedad no trivial, orientable y cerrada con grupo fundamental G . Supongamos que $P_1 \# \cdots \# P_n$ es la descomposición prima de M , con $n \geq 2$, y cada P_i es una 3-variedad geométrica. Entonces $E_{\text{com}}(G)$ es homotópicamente equivalente a $\bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.*

Demostración. La prueba de este resultado depende de que se satisfice la siguiente condición.

$$\pi_1(M) = \pi_1(P_1 \# \cdots \# P_n) \cong \pi_1(P_1) * \cdots * \pi_1(P_n)$$

Por el Teorema 3.1 cada factor de este producto libre tiene tipo de homotopía la cuña de círculos. Usando el Teorema 1.3.4 se deduce el resultado, pues este producto libre al menos tiene dos factores. \square

La prueba del Teorema 3.1 se realiza caso por caso, es decir, analizando los posibles grupos fundamentales que aparecen para cada una de las ocho geometrías tridimensionales. En la siguiente tabla resumimos las referencias para cada geometría:

Tipo de geometría	Trabajado en
S^3	Teorema 2.2.2, Teorema 3.2.3, Teorema 3.2.1 y Teorema 3.2.2
H^3	Teorema 3.3.1
$S^2 \times E$	Apartado 3.4
$H^2 \times E$ o $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$	Teorema 3.5.1
E^3	Teorema 3.7.1 y Teorema 3.7.4
Nil	Teorema 3.8.1, Teorema 3.8.2, Teorema 3.8.6 y Teorema 3.8.10
Sol	Teorema 3.9.2 y Teorema 3.9.5

Cuadro 3.1: $E_{\text{com}}(G)$ del grupo fundamental G de una 3-variedad geométrica orientable

Para darse una idea comentemos de forma general las estrategias de la prueba de los teoremas en el Cuadro 3.1. El espacio $E_{\text{com}}(G)$ es homotópicamente equivalente a la realización geométrica del COPO $\mathbf{mAbCo}(G)$. Para la mayoría de los grupos fundamentales involucrados, resulta que $\mathbf{mAbCo}(G)$ tiene altura 1, es decir, su realización geométrica tiene dimensión uno, por lo que es directo que tiene el tipo de homotopía de una cuña de círculos. Los casos excepcionales son los productos amalgamados de la forma $K *_{\mathbb{Z}^2} K$, donde K es el grupo fundamental de la botella de Klein. Dichos grupos aparecen en las geometrías E^3 , Nil y Sol. En estos casos, $\mathbf{mAbCo}(G)$ tiene altura 2, por lo que tenemos triángulos en su realización geométrica. Sin embargo, siempre ocurre que algunos triángulos tienen caras libres, es decir, tienen una cara que no pertenece a ningún otro triángulo, y se pueden colapsar a las otras dos caras. Finalmente, después de colapsar estos triángulos, sucede que todos los triángulos restantes tienen una cara libre y también se pueden colapsar. En conclusión, mediante un procedimiento de colapso en dos etapas, vemos que la realización geométrica de $\mathbf{mAbCo}(G)$ se puede retraer a su 1-esqueleto, y esto concluye la prueba.

3.1. 3-variedades geométricas

En esta sección revisaremos un poco la teoría de las 3-variedades. Para más detalles, vea [Sco83], [Mor05].

Una variedad *Riemanniana* X es un variedad suave que admite una métrica riemanniana. Si el grupo de isometría $\text{Isom}(X)$ actúa de manera transitiva, decimos que X es *homogéneo*.

Si además X tiene un cociente de volumen finito, X es *unimodular*. Una *geometría* es una variedad riemanniana simplemente conexa, homogénea, unimodular junto con su grupo de isometría. Dos geometrías $(X, \text{Isom}(X))$ y $(X', \text{Isom}(X'))$ son *equivalentes* si $\text{Isom}(X) \cong \text{Isom}(X')$ y existe un difeomorfismo $X \rightarrow X'$ que respeta las acciones de $\text{Isom}(X)$ y $\text{Isom}(X')$. Una geometría $(X, \text{Isom}(X))$ (abreviada como X) es *maximal* si no hay una métrica riemanniana en X con respecto a la cual el grupo de isometrías contiene estrictamente a $\text{Isom}(X)$. A una variedad M se le llama *geométrica* si hay una geometría X y un subgrupo discreto $\Gamma \leq \text{Isom}(X)$ que actúa libremente en X , tal que M es difeomorfo al cociente X/Γ ; también decimos que M *admite una estructura geométrica* modelada en X . Del mismo modo, una variedad con frontera no vacía es geométrica si su interior es geométrica.

Es una consecuencia del teorema de uniformización de superficies compactas (2-variedades), que estas admiten métricas riemannianas con curvatura constante; es decir, las superficies compactas admiten estructuras geométricas modeladas en \mathbb{S}^2 , \mathbb{E}^2 , o \mathbb{H}^2 . En tres dimensiones, no se garantiza la curvatura constante. Thurston demostró que existen ocho geometrías 3-dimensionales máximas salvo equivalencia ([Sco83, Teorema 5.1]): \mathbb{S}^3 , \mathbb{E}^3 , \mathbb{H}^3 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$, $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$, Nil, y Sol.

Una n -variedad *cerrada* es una n -variedad que es compacta sin frontera. Una *suma conexa* de dos n -variedades M y N , denotada $M\#N$, es una variedad que se obtiene al eliminar los interiores de un disco suave n -dimensional D^n de cada variedad y luego identificar las fronteras \mathbb{S}^{n-1} . Una n -variedad es *no trivial* si no es homeomorfa a \mathbb{S}^n . Una n -variedad *prima* es una variedad no trivial que no puede ser descompuesta como una suma conexa de dos n -variedades no triviales; es decir, si $M = N\#P$ para algunas n -variedades N, P , entonces $N \cong \mathbb{S}^n$ o $P \cong \mathbb{S}^n$. Una n -variedad M se llama *irreducible* si cada 2-esfera $\mathbb{S}^2 \subset M$ es frontera de una bola $D^3 \subset M$. Es bien conocido que todas las variedades primas orientables son irreducibles con la excepción de $S^1 \times S^2$. El siguiente es un teorema bien conocido de Kneser (existencia) y Milnor (unicidad).

Teorema 3.1.1 (Descomposición prima). Sea M un 3-variedad, no trivial, orientable y cerrada. Entonces $M = P_1\#\dots\#P_n$ donde cada P_i es primo. Además, esta descomposición es única salvo el orden y homeomorfismo.

3.2. 3-variedades modeladas en \mathbb{S}^3

El grupo fundamental de una 3-variedad modelada en \mathbb{S}^3 es o bien cíclico finito o el producto directo de un grupo cíclico finito con un grupo descrito en la siguiente lista, véase por ejemplo [AFW15, p. 12].

- (1) $Q_{4n} = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^n \rangle$ donde $n \geq 2$,
- (2) $P_{48} = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^3 = y^4, x^4 = 1 \rangle$,
- (3) $P_{120} = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^3 = y^5, x^4 = 1 \rangle$,
- (4) $D_{2^m(2n+1)} = \langle x, y \mid x^{2^m} = 1, y^{2n+1} = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$, donde $m \geq 2$ y $n \geq 1$,
- (5) $P'_{8,3^m} = \langle x, y, z \mid x^2 = (xy)^2 = y^2, zxz^{-1} = y, zyz^{-1} = xy, z^{3^m} = 1 \rangle$, donde $m \geq 1$.

Dado que el Lema 1.3.7 permite calcular el tipo de homotopía de productos directos, es suficiente calcular $E_{\text{com}}(G)$ para los grupos anteriores.

Las conclusiones del siguiente teorema se obtuvieron utilizando la asistencia computacional de GAP. Esto es posible porque estamos tratando con dos grupos muy concretos. El código se puede encontrar en el Apéndice B.

Teorema 3.2.1. *Se cumple lo siguiente:*

- $E_{\text{com}}(P_{48}) \simeq \bigvee_{167} S^1$, y
- $E_{\text{com}}(P_{120}) \simeq \bigvee_{1079} S^1$.

Teorema 3.2.2. *Para $m \geq 2$ y $n \geq 1$, $E_{\text{com}}(D_{2^m(2n+1)}) \simeq \bigvee_{(2n+1)^{2^m-1}} S^1$.*

Demostración. Primero probemos que x^2 está en el centro y que $D_{2^m(2n+1)}/\langle x^2 \rangle \cong D_{2(2n+1)}$. Utilizando la presentación tenemos que

$$x^2 y x^{-2} = x y^{-1} x^{-1} = y,$$

así que x^2 está en el centro. Además,

$$D_{2^m(2n+1)}/\langle x^2 \rangle \cong \langle \bar{x}, \bar{y} \mid \bar{y}^{2n+1} = 1, \bar{x}\bar{y}\bar{x}^{-1} = \bar{y}^{-1}, \bar{x}^2 = 1 \rangle = D_{2(2n+1)}.$$

Entonces $D_{2^m(2n+1)}$ se puede ver como una extensión central, en la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2^{m-1} \rightarrow D_{2^m(2n+1)} \rightarrow D_{2(2n+1)} \rightarrow 1.$$

Recordemos que $D_{2(2n+1)}$ puede ser representado como el grupo de isometría de un $(2n+1)$ -ágono. Dado que $2n + 1$ es impar, cada subgrupo abeliano de $D_{2(2n+1)}$ es generado por una rotación o una reflexión, por lo tanto, la preimagen en $D_{2^m(2n+1)}$ de cualquier subgrupo abeliano de $D_{2(2n+1)}$ es abeliana, entonces por Proposición 1.3.1 se tiene que $\text{mAbCo}(D_{2^m(2n+1)}) \cong \text{mAbCo}(D_{2(2n+1)})$.

Aplicando el Teorema 2.2.1 se concluye el resultado. \square

Teorema 3.2.3. *Para todo $m \geq 1$ tenemos que $E_{\text{com}}(P'_{8,3^m}) \simeq \bigvee_{39} S^1$.*

Demostración. De la presentación de $P'_{8,3^m}$ se tiene que tanto z^3 como $x^2 = y^2$ son elementos centrales, por lo tanto, el subgrupo generado por ellos es un subgrupo central (en realidad es el centro mismo). El grupo cociente tiene la siguiente presentación

$$\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} | (\bar{x}\bar{y})^2, \bar{z}\bar{x}\bar{z}^{-1} = \bar{y}, \bar{z}\bar{y}\bar{z}^{-1} = \bar{x}\bar{y} \rangle$$

que ya no depende de m . Se puede verificar, usando GAP por ejemplo, que este grupo cociente es A_4 , el grupo alternante sobre cuatro elementos. Por la Proposición 1.3.1 es suficiente calcular el COPO de clases laterales de subgrupos abelianos de A_4 que tienen preimagen abeliana en $P'_{8,3^m}$. Todos los subgrupos abelianos de A_4 son cíclicos de orden 3, con la única excepción del subgrupo de Klein, que es no cíclico de orden 4. Recordemos que, dado que el subgrupo kernel es central, la preimagen de cualquier subgrupo cíclico de A_4 es abeliana. Afirmamos que la preimagen del subgrupo de Klein no es abeliana. De hecho, el subgrupo de Klein está generado por las imágenes de x y y , y se puede verificar con GAP que no conmutan dentro de $P'_{24} = P'_{8,3^1}$ (ver Apéndice A), que es un cociente de $P'_{8,3^m}$ para todo $m \geq 1$. En conclusión, para todo $m \geq 1$, $E_{\text{com}}(P'_{8,3^m})$ tiene el tipo de homotopía de la realización geométrica del conjunto parcialmente ordenado de clases laterales de subgrupos cíclicos de A_4 . En particular, todos los $E_{\text{com}}(P'_{8,3^m})$ tienen el mismo tipo de homotopía y calculamos $E_{\text{com}}(P'_{24}) \simeq \bigvee_{39} S^1$ usando GAP en el Apéndice B. \square

3.3. 3-variedades modeladas en \mathbb{H}^3

Las variedades modeladas en \mathbb{H}^3 , también conocidas como variedades hiperbólicas, pueden tener frontera vacía o no.

Teorema 3.3.1. *Sea G el grupo fundamental de una variedad hiperbólica de volumen finito M . Entonces $E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.*

Demostración. Tenemos dos casos dependiendo de si M es cerrada o no. En cualquier caso, G es un grupo libre de torsión porque M es un $K(G, 1)$ de dimensión finita.

Si M es cerrada, entonces G es un grupo hiperbólico por palabras, libre de torsión y que no es virtualmente cíclico, ver [AFW15, Tabla 1 en la página 19]. Entonces la afirmación se deduce del Teorema 1.3.5.

Ahora, veamos el caso donde M no es cerrada. El siguiente argumento se puede encontrar en [LS22, Teorema 3.1].

Considera la colección \mathcal{B} de subgrupos de G compuesta por

- Todos los conjugados de los grupos fundamentales de las cúspides de M . Todos estos grupos son isomorfos a \mathbb{Z}^2 ya que cada cúspide es homeomorfa al producto de un toro y un intervalo.
- Todos los subgrupos virtualmente cíclicos infinitos maximales de G que no son subconjugados al grupo fundamental de una cúspide. Todos estos grupos son isomorfos a \mathbb{Z} debido a la clasificación de los grupos virtualmente cíclicos.

En [LO07, Teorema 2.6], Lafont y Ortiz verificaron que cada subgrupo virtualmente cíclico infinito de G está contenido en un elemento de \mathcal{B} . Por otro lado, si H es un subgrupo \mathbb{Z}^2 de G , entonces H no contiene un subgrupo isomorfo a un grupo libre con dos generadores, por lo tanto, por la alternativa de Tits para el grupo relativamente hiperbólico, ver por ejemplo [BW13, Remark3.5], H es subconjugado al grupo fundamental de una cúspide, es decir, H está contenido en un elemento de \mathcal{B} . También en [LO07, Teorema 2.6] se prueba que la intersección de cualquier dos elementos de \mathcal{B} es trivial. Ahora el resultado se deduce del Teorema 1.3.2. □

3.4. 3-variedades modeladas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$

Existen solo dos grupos fundamentales posibles para variedades modeladas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$, que son \mathbb{Z} y el grupo diédrico infinito $D_\infty \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$, ver por ejemplo la Tabla 1 en la página 19 en [AFW15]. En estos casos $E_{\text{com}}(\mathbb{Z})$ es contráctil y, por el Teorema 1.3.4, $E_{\text{com}}(D_\infty) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.

3.5. 3-variedades modeladas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ o $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$

Por [Thu97, Teorema 4.7.10], tenemos que cualquier grupo que aparezca como el grupo fundamental de una variedad modelada en $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$, también es el grupo fundamental de una variedad modelada en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$. Por lo tanto, solo tenemos que lidiar con grupos fundamentales de variedades modeladas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$.

Teorema 3.5.1. *Sea G el grupo fundamental de una 3-variedad de volumen finito modelada en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$. Entonces $E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.*

Demostración. Sea M una variedad 3-dimensional de volumen finito modelada en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ con grupo fundamental G . Entonces, M es un espacio fibrado de Seifert con el orbifold base B modelado en \mathbb{H}^2 . Por [AFW15, Teorema 2.5.2] tenemos la siguiente extensión central

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$$

donde \mathbb{Z} es generado por una fibra regular de M , y Q es el grupo fundamental del orbifold de B , en particular, Q es un grupo fuchsiano finitamente generado.

Sabemos que para un grupo fuchsiano, todos los subgrupos abelianos son cíclicos (finitos o infinitos). Así, la preimagen bajo el mapa $G \rightarrow Q$ de cualquier subgrupo abeliano de Q es un subgrupo abeliano de G . Por lo tanto, por la Proposición 1.3.1, $\text{mAbCo}(G)$ es isomorfo, como un conjunto parcialmente ordenado, a $\text{mAbCo}(Q)$. Se deduce de argumentos estándar de la geometría hiperbólica del plano que la intersección de dos subgrupos cíclicos maximales distintos en un grupo fuchsiano es trivial. El resultado ahora se sigue de Teorema 1.3.2. \square

3.6. Algunos grupos cristalográficos.

El principal objetivo de esta sección es establecer los resultados necesarios para tratar con las geometrías \mathbb{E}^3 , Nil y Sol. Los grupos fundamentales que surgen de estas geometrías tienen la característica común de ser grupos virtualmente poli- \mathbb{Z} . Es por eso que establecemos notaciones y algunos hechos básicos sobre este tipo de grupos. También calculamos el tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(G)$ para el grupo diédrico infinito D_∞ y algunos grupos cristalográficos, ya que estos aparecerán como cocientes de los grupos fundamentales de variedades modeladas en \mathbb{E}^3 , Nil y Sol.

Definición 3.6.1. Un grupo G se llama *poli- \mathbb{Z} de rango n* si admite una filtración $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ tal que $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ y $G_{i+1}/G_i \cong \mathbb{Z}$ para todo i .

Es bien sabido que el rango no depende de la filtración, es decir, es un invariante bien definido del grupo que denotamos $\text{rank}(G)$. Utilizaremos los siguientes hechos bien conocidos sobre los grupos poli- \mathbb{Z} que se pueden encontrar, por ejemplo, en [Seg83, p. 16].

Proposición 3.6.2. Sea G un grupo poli- \mathbb{Z} y H un subgrupo. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

- (1) H es un grupo poli- \mathbb{Z} .
- (2) $\text{rank}(H) \leq \text{rank}(G)$.
- (3) $\text{rank}(H) = \text{rank}(G)$ si y solo si H tiene índice finito en G .

Un resultado importante que resultará útil es el siguiente.

Lema 3.6.3. Sea $D_\infty = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ el grupo diédrico infinito. Entonces:

- (1) el centro de D_∞ es trivial,
- (2) el subgrupo generado por ab , donde a y b son generadores de cada uno de los factores de D_∞ , es el único subgrupo abeliano maximal de D_∞ de rango 1,
- (3) todo subgrupo finito no trivial de D_∞ es conjugado a uno de los factores, y
- (4) si A y B son dos subgrupos abelianos maximales distintos de D_∞ , entonces $A \cap B$ es trivial.

Demostración. Sean a y b generadores de cada factor en D_∞ . Entonces D_∞ es el conjunto de palabras en a y b donde no hay a 's juntas ni b 's juntas. Para (1) notemos lo siguiente. Para un elemento no trivial en $z \in Z(D_\infty)$ se debería cumplir que $za = az$, entonces z empieza con a . Por otro lado también se tendría que $zb = bz$, entonces z empieza con b lo cual es un absurdo. Por lo tanto el centro solo consiste de la palabra vacía. Para (2) y (3) notemos lo siguiente. Como el centro es trivial cada subgrupo abeliano de D_∞ debe ser cíclico. Veamos los siguientes casos.

- Si $z = abab \cdots ba$, entonces $z^2 = (abab \cdots ba)(abab \cdots ba) = 1$ pues se simplifican las letras en cada producto interior.
- Si $z = bab \cdots ab$, entonces de forma similar al caso anterior $z^2 = 1$.

En cualquiera de estos casos el grupo $\langle z \rangle$ es finito de orden 2. Esto prueba (2) pues cada uno de estos elementos son conjugados de a y b , respectivamente. Para un z que no cae en estos casos se tiene que $z \in \langle ab \rangle$ o $z \in \langle ba \rangle$, pero $(ab)^{-1} = ba$, entonces podemos decir que $z \in \langle ab \rangle$, de donde se sigue que el único abeliano maximal de rango 1 es $\langle ab \rangle$. Por último (4) se sigue de que con (2) y (3) tenemos una descripción completa de los subgrupos abelianos como la familia de conjugados a los factores junto con el grupo $\langle ab \rangle$, luego para cualesquiera subgrupos A y B de esta colección con $A \neq B$ se cumple que $A \cap B = 1$.

□

Proposición 3.6.4. *Sea $K = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ el grupo fundamental de la botella de Klein. Entonces*

- (1) *todo subgrupo abeliano de K es libre de rango a lo sumo 2,*
- (2) *$Z = 0 \rtimes 2\mathbb{Z}$ es el centro de K ,*
- (3) *$\mathbb{Z} \rtimes 2\mathbb{Z}$ es el único subgrupo abeliano maximal de K de rango 2,*
- (4) *si A y B son dos subgrupos abelianos maximales distintos de K de rango 1 que no están contenidos en $\mathbb{Z} \rtimes 2\mathbb{Z}$, entonces ambos A y B contienen a Z como un subgrupo de índice 2 y $A \cap B = Z$,*
- (5) *la intersección de cualquier subgrupo abeliano maximal de rango 1 con $\mathbb{Z} \rtimes 2\mathbb{Z}$ es igual a Z , y*
- (6) *$E_{\text{com}}(K) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.*

Demostración. Dado que K es un grupo poli- \mathbb{Z} libre de torsión de rango 2, (1) es evidente. Obsérvese que tenemos una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow Z \rightarrow K \xrightarrow{p} D_\infty \rightarrow 1$$

donde D_∞ es el grupo diédrico infinito que es isomorfo tanto a $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$ como a $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$. Notemos que el centro de K se mapea en el centro de D_∞ que es trivial, por lo tanto, el centro de K está contenido en Z . No es difícil ver que Z está contenido en el centro de K , esto prueba (2). Las afirmaciones (3) y (4) son consecuencia directa del Proposición 1.3.1 y el Lema 3.6.3.

Probemos (5). Sea A un subgrupo abeliano maximal de K . Por (4), el centro Z está contenido tanto en A como en $\mathbb{Z} \rtimes 2\mathbb{Z}$. Por lo tanto, $Z \subseteq A \cap (\mathbb{Z} \rtimes 2\mathbb{Z})$. Si esta inclusión es estricta, ya que Z tiene índice 2 en A , se deduciría que A está contenido en $Z \subseteq \mathbb{Z} \rtimes 2\mathbb{Z}$ lo cual es imposible por la maximalidad de A .

Finalmente, la parte (6) es una consecuencia directa de la parte (5) y el Corolario 1.3.3. \square

En cuanto a los grupos cristalográficos, consideremos las siguientes matrices:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Proposición 3.6.5. Sea $Q = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{A_n} \mathbb{Z}/n$ donde A_n es una de las matrices en la Ecuación (3.1). Entonces

- (1) todo elemento en $Q - (\mathbb{Z}^2 \rtimes 0)$ tiene orden finito,
- (2) todo subgrupo finito de Q es cíclico,
- (3) la intersección de cualquier par de subgrupos abelianos maximales finitos de Q es trivial,
- (4) $\mathbb{Z}^2 \rtimes 0$ es el único subgrupo abeliano maximal infinito de Q ,
- (5) $E_{\text{com}}(Q) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.

Demostración. Este grupo Q es uno de los grupos cristalográficos del plano, generado por traslaciones por vectores en \mathbb{Z}^2 y una única rotación alrededor del origen de orden n . Cada

elemento en el grupo es o una traslación o una rotación de orden que divide a n alrededor de algún centro, lo cual implica directamente (1) y (2). Es fácil ver cuándo dos elementos conmutan: dos traslaciones siempre conmutan, dos rotaciones solo conmutan si tienen el mismo centro, y una traslación nunca conmuta con una rotación. Esto implica que los subgrupos abelianos maximales son el grupo de traslaciones y, para cada posible centro de rotación, el grupo de todas las rotaciones con ese centro. Las afirmaciones (3) y (4) se deducen de esta descripción de los subgrupos abelianos maximales.

La parte (5) es una consecuencia directa de las partes (3) y (4) y el Corolario 1.3.3. \square

3.7. 3-variedades modeladas en \mathbb{E}^3

Existen exactamente seis 3-variedades orientables compactas modeladas en \mathbb{E}^3 y sus grupos fundamentales son los siguientes, ver por ejemplo [Wol11, Teorema 3.5.5].

- $G_n = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi_n} \mathbb{Z}$, donde φ_n es una de las siguientes matrices:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \varphi_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de órdenes 1, 2, 3, 4 y 6 respectivamente.

- El sexto grupo, que denotamos Γ_6 , admite la presentación:

$$\langle x, y, z \mid xy^2x^{-1} = y^{-2}, yx^2y^{-1} = x^{-2}, z = y^{-1}x^{-1} \rangle.$$

Notemos que el subgrupo T generado por x^2 , y^2 y z^2 es el subgrupo de traslaciones de Γ_6 , y por lo tanto es isomorfo a \mathbb{Z}^3 . También se tiene que los subgrupos $K_x = \langle x, y^2 \rangle$ y $K_y = \langle x^2, y \rangle$ son isomorfos al grupo fundamental de la botella de Klein y tenemos la siguiente descomposición

$$\Gamma_6 \cong K_x *_A K_y$$

donde A es el subgrupo generado por x^2 y y^2 . No es difícil ver que, siguiendo la Notación 1.4.1, Γ'_6 es isomorfo a $A \rtimes_{-1} \langle \bar{x}\bar{y} \rangle = A \rtimes_{-1} \langle \bar{z} \rangle = G_2$.

Teorema 3.7.1. (1) $E_{\text{com}}(G_1)$ es contráctil,

- (2) todo subgrupo abeliano de G_n de rango al menos 2, con $n \neq 1$, está contenido en $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi_n} n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^3$,
- (3) el centro Z de G_n , para $n \neq 1$, es igual a $\{0\} \rtimes_{\varphi_n} n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, y la intersección de cualquier dos subgrupos abelianos maximales distintos de G_n es Z ,
- (4) $E_{\text{com}}(G_n) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$ para $n = 2, 3, 4, 6$.

Demostración. La conclusión de (1) es clara ya que $G_1 = \mathbb{Z}^3$ es abeliano. Para el resto de la prueba, fijemos un $n = 2, 3, 4, 6$ y, para abreviar, pongamos $\varphi = \varphi_n$, y $G = G_n$.

Demostremos (2). Sea B un subgrupo abeliano de G de rango al menos 2 tal que $Z \leq B$ (ver Observación 1.2.3). Tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow B \cap (\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \{0\}) \rightarrow B \rightarrow m\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

donde m divide a n . Así, B es generado por $B \cap (\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \{0\})$ y una preimagen x de un generador del cociente $m\mathbb{Z}$. Además, dado que x es de la forma (z, m) y B es abeliano, tenemos que $(0, m)$ actúa trivialmente por conjugación en $B \cap (\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \{0\})$. Ya que B tiene rango 2, tenemos que $B \cap (\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \{0\})$ no es trivial, y por lo tanto $n = m$ porque φ^m no tiene puntos fijos a menos que n divida a m . Así, en este caso, tenemos que B es de la forma $(B \cap (\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \{0\})) \times n\mathbb{Z}$. Si además, B es un subgrupo abeliano maximal de G , entonces $B = \mathbb{Z}^2 \times n\mathbb{Z}$.

Ahora procedemos con la prueba de la parte (3). Puesto que el único punto fijo de φ y sus potencias (no triviales) es $(0, 0)$, se tiene que el centro es justo $\{0\} \rtimes_{\varphi_n} n\mathbb{Z}$. Afirmamos que si B y C son dos subgrupos abelianos maximales distintos que satisfacen que su intersección con $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \{0\}$ es trivial, entonces $B \cap C = Z$. Consideremos el cociente $G/Z = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Es fácil ver que, de la definición de φ , la acción de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$ es libre, por lo tanto, por [LS00, Lemma 6.3(i)], G/Z satisface que la intersección de cualquier dos subgrupos maximales finitos (de hecho cíclicos) de G/Z es trivial. Ahora, la afirmación se sigue por el teorema de correspondencia aplicado a la proyección $G \rightarrow G/Z$.

Para finalizar la prueba de (3), probemos que la intersección de cualesquiera dos subgrupos abelianos maximales distintos de G/Z es trivial. Luego (4) se concluye de del Corolario 1.3.3. Del párrafo anterior solo tenemos que mostrar que la intersección de $T = \mathbb{Z}^2 \times n\mathbb{Z}$ con cualquier otro subgrupo abeliano maximal B (los descritos en el párrafo anterior) es exactamente Z . Dado que $B \cap \mathbb{Z}^2 = 0$, tenemos que $T \cap B \leq Z$, y ya

que son maximales, $T \cap B \geq Z$ también. \square

Ahora veamos que sucede con los subgrupos abelianos de Γ_6 . En el siguiente lema describimos los subgrupos abelianos maximales de Γ_6 y sus intersecciones; todas las conclusiones en este lema se resumen en la Figura 3.1.

Lema 3.7.2. *Siguiendo la Notación 1.4.1 tenemos que:*

- (1) todo subgrupo abeliano de Γ_6 es libre de rango a lo sumo 3,
- (2) el subgrupo $T = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle$ es el único subgrupo abeliano maximal de rango 3 de Γ_6 ,
- (3) todo subgrupo abeliano de rango 2 de G está contenido en T , en particular no hay subgrupos abelianos maximales de rango 2,
- (4) la intersección de cualquier dos subgrupos del Tipo II es $\langle z^2 \rangle$,
- (5) el centro de cualquier conjugado de K_x (resp. K_y) es $\langle x^2 \rangle$ (resp. $\langle y^2 \rangle$),
- (6) la intersección de cualquier dos subgrupos del Tipo I que están contenidos en conjugados de K_x (resp. K_y) es $\langle x^2 \rangle$ (resp. $\langle y^2 \rangle$),
- (7) los centros de cualquier conjugado de K_x y cualquier conjugado de K_y se intersectan trivialmente,
- (8) la intersección de cualquier subgrupo del Tipo I con cualquier subgrupo del Tipo II diferente de T es trivial,
- (9) la intersección de T con cualquier subgrupo del Tipo I es o bien $\langle x^2 \rangle$ o $\langle y^2 \rangle$.

Demostración. (1) Ya que G es un grupo poli- \mathbb{Z} sin torsión de rango 3, cualquier subgrupo abeliano es libre de rango a lo sumo 3, ver Proposición 3.6.2.

- (2) Para cualquier grupo cristalográfico n -dimensional, el grupo de translaciones es el único subgrupo abeliano maximal de rango n .
- (3) Sea B un subgrupo abeliano de rango 2 de Γ_6 . Si $p(B)$ es finito, entonces B es subconjugado a K_x o K_y , por lo que B debe estar contenido en $A \subseteq T$. Si $p(B)$ es infinito, entonces B está contenido en Γ'_6 . Por lo tanto, por el inciso (2) del Teorema 3.7.1, B está contenido en T .

- (4) Es una consecuencia directa del hecho de que Γ'_6 es isomorfo a G_2 y Teorema 3.7.1 (3).
- (5) Por (1) del Lema 1.4.2 todos los conjugados de K_x (resp. K_y) son de la forma $K_x^{z^n}$ (resp. $K_y^{z^n}$) para algún $n \in \mathbb{Z}$. Es fácil comprobar que $(x^2)^z = x^{-2}$ y $(y^2)^z = y^{-2}$ directamente de la presentación. La afirmación se sigue del inciso (2) del Lema 1.4.2.
- (6) Esto es una consecuencia de la afirmación anterior y el inciso (4) del Proposición 3.6.4.
- (7) Por la afirmación (6) tenemos, para todo n , que $Z(K_x)^{z^n} \cap Z(K_y)^{z^n} = \langle x^2 \rangle \cap \langle y^2 \rangle$, y la última intersección es claramente trivial ya que x^2 y y^2 son generadores independientes del grupo de traslaciones de T .
- (8) Sea B un subgrupo de tipo I y C un subgrupo del Tipo II diferente de T . Por las partes (2) y (3) tanto B como C deben ser cíclicos infinitos. Por la parte (6) B contiene $\langle x^2 \rangle$ o $\langle y^2 \rangle$ como un subgrupo de índice finito, y por la parte (4), C contiene $\langle z^2 \rangle$ como un subgrupo de índice finito. La afirmación se sigue notando que $\langle x^2 \rangle \cap \langle z^2 \rangle$ y $\langle y^2 \rangle \cap \langle z^2 \rangle$ son triviales.
- (9) Sea B un subgrupo abeliano maximal del Tipo I, lo que significa que $p(B)$ es finito. Ya que $p(T)$ es cíclico infinito, debemos tener que $p(B \cap T) = 0$, de modo que $B \cap T \leq \ker(p) = \langle x^2, y^2 \rangle$. Por Proposición 3.6.4 (5), la intersección de B con $\langle x^2, y^2 \rangle$ es el centro del conjugado de K_x o K_y que contiene B , y por la parte (5) esto es o bien $\langle x^2 \rangle$ o $\langle y^2 \rangle$.

□

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del lema anterior.

Corolario 3.7.3. *Siguiendo la Notación 1.4.1 y el Lema 3.7.2, toda cadena máxima en $\text{mAb}(G)$ es de uno de los siguientes tipos:*

- (1) $1 < \langle w \rangle < T$ donde w es ya sea x^2 , y^2 o z^2 ,
- (2) $1 < \langle w \rangle < C_w$ donde w es ya sea x^2 , y^2 o z^2 y C_w es un grupo cíclico infinito que contiene a $\langle w \rangle$ como un subgrupo de índice 2,

Teorema 3.7.4. *Tenemos que $E_{\text{com}}(\Gamma_6) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.*

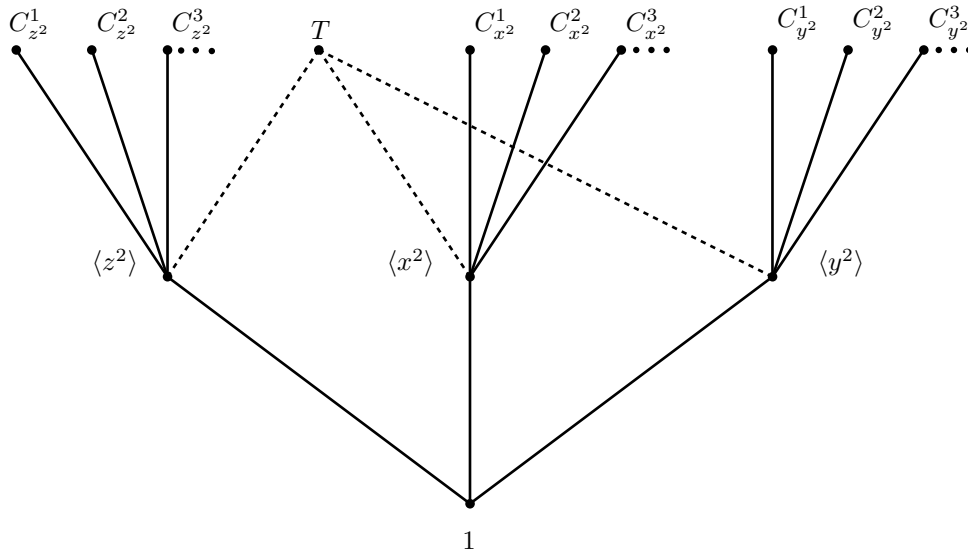


Figura 3.1: El diagrama de Hasse de $\mathbf{mAb}(\Gamma_6)$. Subgrupos de la forma $C_{z^2}^i$ son cíclicos infinitos de Tipo II. Subgrupos de la forma $C_{x^2}^i$ y $C_{y^2}^i$ son cíclicos infinitos de Tipo I.

Demostración. Como consecuencia del Corolario [3.7.3](#), todas las cadenas máximas en $\mathbf{mAbCo}(G)$ son de uno de los siguientes tipos:

- (1) $\{g\} < g\langle w \rangle < gT$ donde w es ya sea x^2 , y^2 o z^2 ,
- (2) $\{g\} < g\langle w \rangle < gC_w$ donde w es ya sea x^2 , y^2 o z^2 y C_w es un grupo cíclico infinito que contiene a $\langle w \rangle$ como un subgrupo de índice 2,

Nótese que para una elección dada de $g \in G$ y un subgrupo C_w de Tipo I, hay un único triángulo de la forma (2) en la lista anterior, por lo que podemos eliminar la arista $g < gC_w$ y el interior del triángulo sin cambiar el tipo de homotopía. Después de eliminar esos triángulos, cada arista de la forma $\{g\} < g\langle w \rangle$ está en un triángulo único, que es de la forma (1). También podemos eliminar esas aristas y el interior de esos triángulos que contienen las aristas, sin cambiar el tipo de homotopía.

En este punto, no nos quedan triángulos, lo que muestra que $\mathbf{mAbCo}(G)$ tiene el tipo de homotopía de una gráfica, y por lo tanto de una cuña de círculos (ya que es conexo). El complejo obtenido después de quitar los triángulos todavía contiene una copia de $\mathbf{mAbCo}(G')$, que tiene el tipo de homotopía de una cuña numerable infinita de círculos, y

por lo tanto $\mathfrak{mAbCo}(G)$ también tiene este tipo de homotopía. \square

3.8. 3-variedades modeladas en Nil

Una clasificación muy explícita de los grupos fundamentales de variedades modeladas en Nil se puede encontrar en [Dek+95]. En ese trabajo, dividen la clasificación en siete familias infinitas a las que llaman Tipo 1-7. Estos tipos de grupos se pueden agrupar en tres conjuntos.

Productos semidirectos Grupos de la forma $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ donde φ es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } n \geq 1. \text{ Esto corresponde a los grupos de Tipo 1 en [Dek+95].}$$

Cociente cristalográfico orientable Grupos G que son una extensión central con una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rtimes_{A_n} \mathbb{Z}/n \rightarrow 1 \quad (3.2)$$

donde A_n es una de las matrices en la Ecuación (B.1). Estos grupos corresponden a los Tipos 2, 5, 6 y 7 en [Dek+95].

Cociente cristalográfico no orientable Subdividimos estos grupos en dos Tipos que llamaremos Tipo pg y Tipo pgg respectivamente. Los grupos del Tipo pg se definen mediante la siguiente presentación:

$$E_k = \langle a, b, c, \alpha \mid [a, b] = c^{2k}, \alpha c = c^{-1} \alpha, [c, a] = [c, b] = 1, \alpha b = b^{-1} \alpha c^{-k}, \alpha^2 = a \rangle$$

mientras que los grupos del Tipo pgg se definen mediante la siguiente presentación:

$$\Gamma_k = \langle a, b, c, \alpha, \beta \mid [a, b] = c^{2k}, [c, a] = 1, [c, b] = 1, \alpha c = c^{-1} \alpha, \beta a = a^{-1} \beta c^k, \beta b = b^{-1} \beta c^{-k}, \beta^2 = c, \alpha^2 = a, \alpha b = b^{-1} \alpha c^{-k}, \beta \alpha = a^{-1} b^{-1} \alpha \beta c^{-k-1} \rangle$$

donde k en cada caso es un entero positivo. Estos grupos corresponden a los Tipos 3 y 4 en [Dek+95].

3.8.1. Productos semidirectos

Teorema 3.8.1. *Sea $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ donde φ es una matriz de la forma $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $n \geq 1$.*

Entonces

- (1) *todo subgrupo abeliano maximal de G tiene rango 2,*
- (2) *la intersección de cualquier dos subgrupos maximales es igual a $Z(G)$,*
- (3) *$E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.*

Demostración. Consideremos la extensión central

$$1 \rightarrow Z \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$$

donde $Z = \mathbb{Z}$, el primer mapeo está dado por $n \mapsto (n, 0, 0)$ y el segundo mapeo es la proyección al cociente. Notemos que Q es isomorfo a \mathbb{Z}^2 .

Notemos que G es un grupo poli- \mathbb{Z} de rango 3 que no contiene un subgrupo \mathbb{Z}^3 , ver [AFW15, Tabla 1]. Por otro lado, no es difícil verificar que Z es el centro de G . Dado que Q es isomorfo a \mathbb{Z}^2 , y la preimagen en G de cualquier subgrupo cíclico infinito de Q es abeliano de rango 2, concluimos que todo subgrupo abeliano maximal de G es isomorfo a \mathbb{Z}^2 y contiene Z . Esto prueba (1). Llamemos p al homomorfismo suprayectivo $G \rightarrow Q$. Como Q es libre de torsión, cualquier subgrupo abeliano maximal de G isomorfo a \mathbb{Z} debe ser igual a Z . Sean $B, C \cong \mathbb{Z}^2$ dos subgrupos abelianos maximales de G , entonces $p(B)$ y $p(C)$ son subgrupos abelianos maximales de Q que son isomorfos a \mathbb{Z} . Por lo tanto, o $p(B) = p(C)$ o $p(B) \cap p(C)$ es trivial. Esto prueba (2). Ahora (3) se deduce directamente de Corolario 1.3.3. \square

3.8.2. Cociente cristalográfico orientable

Teorema 3.8.2. *Sea G el grupo fundamental de una 3-variedad modelada en Nil y tal que se tiene la extensión central siguiente*

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rtimes_{A_n} \mathbb{Z}/n \rightarrow 1 \tag{3.3}$$

donde A_n es una de las matrices en la Ecuación (3.1). Entonces $E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.

Demostración. Dado que la extensión es central, podemos usar la Proposición 1.3.1 para traducir el problema al estudio del conjunto parcialmente ordenado generado por los subgrupos abelianos maximales de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{A_n} \mathbb{Z}/n$ que tienen preimagen abeliana en G .

Por la Proposición 3.6.5 tenemos que todo subgrupo abeliano de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{A_n} \mathbb{Z}/n$ es o bien cíclico finito o un subgrupo de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{A_n} \{0\}$. La preimagen de (cualquier subgrupo de índice finito de) $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{A_n} \{0\}$ en G es claramente no abeliana, de lo contrario G contiene un subgrupo \mathbb{Z}^3 lo cual es imposible en presencia de geometría Nil. Por lo tanto, se tiene que los únicos subgrupos abelianos de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{A_n} \mathbb{Z}/n$ con preimagen abeliana son los cíclicos (infinitos o finitos). Claramente, la intersección de dos de estos subgrupos cíclicos maximales distintos es trivial. Por lo tanto, la intersección de cualquier dos subgrupos abelianos maximales distintos de G es el grupo kernel \mathbb{Z} ; ahora la afirmación se deduce de Corolario 1.3.3. \square

3.8.3. Caso pg

Esta es una familia de grupos, uno para cada número entero positivo k , y corresponden al Tipo 3 en [Dek+95]. Tenemos la siguiente presentación

$$E_k = \langle a, b, c, \alpha \mid [a, b] = c^{2k}, \alpha c = c^{-1} \alpha, [c, a] = [c, b] = 1, \alpha b = b^{-1} \alpha c^{-k}, \alpha^2 = a \rangle$$

Lema 3.8.3. *Sea k un número entero positivo. Entonces E_k entra en la siguiente sucesión exacta corta*

$$1 \rightarrow \langle a, c \rangle \rightarrow E_k \rightarrow \langle \bar{\alpha} \rangle * \langle \bar{b}\alpha \rangle \rightarrow 1$$

*En particular, tenemos una descomposición $E_k = K_\alpha *_A K_{b\alpha}$, donde $K_\alpha = \langle c, \alpha \rangle$, $K_{b\alpha} = \langle c, b\alpha \rangle$, y $A = \langle a, c \rangle$.*

Además, siguiendo la Notación 1.4.1, E'_k es isomorfo a $A \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ donde φ es el automorfismo de A dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Las relaciones que definen E_k implican que el subgrupo $\langle c, \alpha \rangle$ es estable bajo conjugación para b y α , por lo tanto, $\langle a, c \rangle$ es un subgrupo normal de E_k . Es evidente que el grupo cociente $p(E_k) = E_k / \langle a, c \rangle$ es generado por $\bar{\alpha}$ y $\bar{b}\alpha$. Además $p(E_k)$ admite la siguiente presentación $\langle \bar{\alpha}, \bar{b}\alpha \mid (\bar{\alpha})^2 = 1, \bar{b}\alpha^2 = 1 \rangle$ porque $b\alpha b\alpha = b b^{-1} \alpha c^{-k} \alpha = \alpha c^{-k} \alpha = c^k \alpha^2 = c^k a$, así que $p(E_k) = \langle \bar{\alpha} \rangle * \langle \bar{b}\alpha \rangle \cong D_\infty$. Dado que $\alpha^2 = a$ y $\alpha c \alpha^{-1} = c^{-1}$, A es

un subgrupo de índice 2 de $\langle c, \alpha \rangle$ y este grupo es libre de torsión y no abeliano, así que $\langle c, \alpha \rangle = K_\alpha$ es el grupo fundamental de una botella Klein, de manera similar $\langle c, b\alpha \rangle = K_{b\alpha}$ es el grupo fundamental de una botella Klein.

Para terminar, de la presentación, tenemos que $(b\alpha^2)c(b\alpha^2)^{-1} = c$ y $(b\alpha^2)a(b\alpha^2)^{-1} = b\alpha^2b^{-1} = bab^{-1} = c^{2k}a$ así que el automorfismo $A \rightarrow A$ dado por conjugación por $b\alpha^2$ está representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base ordenada c, a . □

En el siguiente lema describimos los subgrupos abelianos maximales de E_k y sus intersecciones. Todas las conclusiones en este lema se resumen en la Figura 3.2.

Lema 3.8.4. *Siguiendo la Notación 1.4.1, tenemos que:*

- (1) *todo subgrupo abeliano de E_k es libre con rango a lo más 2,*
- (2) *todo subgrupo abeliano maximal de Tipo II tiene rango 2 y la intersección de dos de estos subgrupos es $\langle c \rangle$,*
- (3) *el centro de $K_\alpha^{(ba)^n}$ (resp. $K_{b\alpha}^{(ba)^n}$) es $\langle c^{2nk}a \rangle$ (resp. $\langle c^{(2n+1)k}a \rangle$),*
- (4) *dado $i, j \in \{\alpha, b\alpha\}$, si $K_i^{(ba)^n} \neq K_j^{(ba)^m}$, entonces $Z(K_i^{(ba)^n}) \cap Z(K_j^{(ba)^m})$ es trivial,*
- (5) *la intersección de dos subgrupos del Tipo I que están contenidos en un conjugado $K_i^{(ba)^n}$ es $Z(K_i^{(ba)^n})$,*
- (6) *la intersección de dos subgrupos del Tipo I es trivial si pertenecen a conjugados distintos de los factores de E_k ,*
- (7) *la intersección de A con un subgrupo del Tipo I que está contenido en un subconjugado a $K_i^{(ba)^n}$ es $Z(K_i^{(ba)^n})$,*
- (8) *la intersección de A con un subgrupo de Tipo II es $\langle c \rangle$,*
- (9) *la intersección de cualquier subgrupo de Tipo I con cualquier subgrupo de Tipo II es trivial.*

Demostración. (1) Dado que E_k es un grupo virtualmente poli- \mathbb{Z} libre de torsión de rango 3, cualquier subgrupo abeliano es libre con rango a lo más 3. Por otro lado, E_k no puede tener un subgrupo \mathbb{Z}^3 ya que esta posibilidad solo ocurre, en el contexto de 3-variedades, en presencia de una métrica euclidiana.

(2) Todo subgrupo de Tipo II está contenido en E'_k . La afirmación se sigue directamente del Teorema 3.8.1.

(3) Por el Lema 1.4.2 (1) todos los conjugados de K_α (resp. $K_{b\alpha}$) son de la forma $K_\alpha^{(ba)^n}$ (resp. $K_{b\alpha}^{(ba)^n}$) para algún $n \in \mathbb{Z}$. Es fácil comprobar que $(\alpha^2)^{ba} = c^{2k}a$ y $((b\alpha)^2)^{ba} = (c^k a)^{ba} = c^{3k}a$ directamente de la presentación. Luego la afirmación se sigue del inciso (2) del Lema 1.4.2.

(4) Por la afirmación anterior, los centros $Z(K_i^{(ba)^n})$ y $Z(K_j^{(ba)^m})$ son de la forma $\langle c^{j_n k} a \rangle$ y $\langle c^{j_m k} a \rangle$ para algunos j_n y j_m . Es fácil verificar que $j_n \neq j_m$, independientemente de si $i = j$ o no, siempre que $Z(K_i^{(ba)^n}) \neq Z(K_j^{(ba)^m})$. Así que $\langle c^{j_n k} a \rangle \cap \langle c^{j_m k} a \rangle = 1$ (podemos pensar en estos grupos como líneas en el plano de coordenadas enteras $\mathbb{Z}^2 \cong \langle c, a \rangle$ con diferentes pendientes).

(5) Esto se sigue del inciso (3) en la Proposición 3.6.4.

(6) Sea B, C subgrupos de Tipo I que están contenidos en diferentes conjugados $K_i^{(ba)^n}$ y $K_j^{(ba)^m}$, respectivamente. Entonces, por el inciso (4) de la Proposición 3.6.4, $Z(K_i^{(ba)^n})$ y $Z(K_j^{(ba)^m})$ son subgrupos de índice 2 de B y C , respectivamente. Por la parte (4), los centros tienen intersección trivial, y así también B y C .

(7) Esto se sigue del inciso (4) en la Proposición 3.6.4.

(8) Dado que A es maximal en E'_k y $Z(E'_k) = \langle c \rangle$, esta afirmación es una consecuencia directa del inciso (2) del Teorema 3.8.1.

(9) Sea B un subgrupo de Tipo I y C un subgrupo de Tipo II, esto significa que $p(B) \cong \mathbb{Z}/2$ y $p(C) \cong \mathbb{Z}$. Entonces $p(B \cap C) \subset p(B) \cap p(C) = 1$, así que $B \cap C \subset A = \langle c, a \rangle$. Por lo tanto $B \cap C = B \cap C \cap A = (B \cap A) \cap (C \cap A) = Z(K_i^{(ba)^n}) \cap \langle c \rangle = \langle c^{j_n k} a \rangle \cap \langle c \rangle = 1$.

□

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del lema anterior.

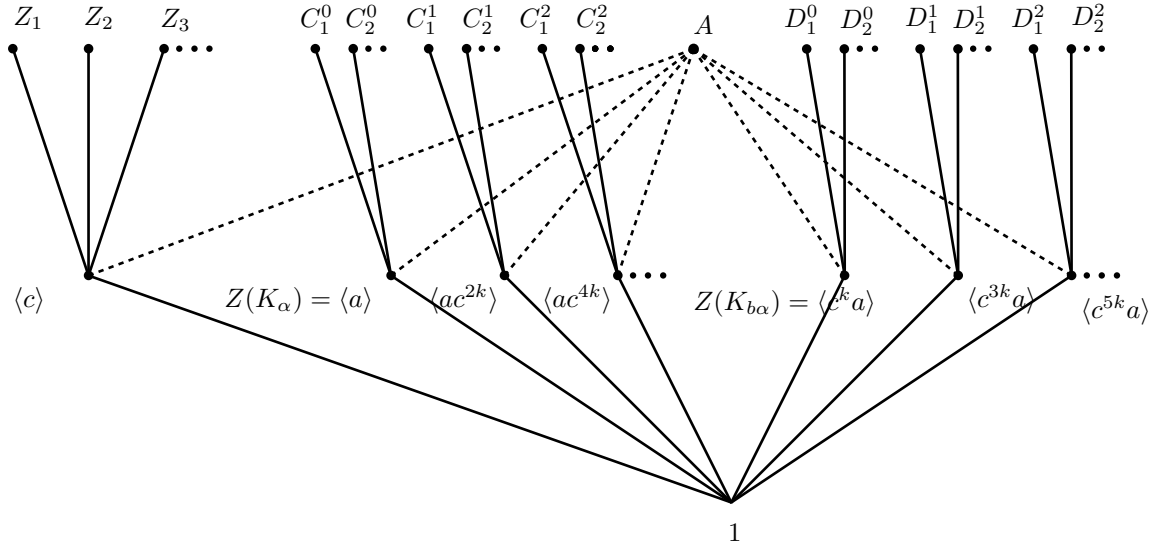


Figura 3.2: El diagrama de Hasse de $\mathbf{mAb}(E_k)$. Los subgrupos de la forma Z_i son exactamente aquellos del Tipo II. Los subgrupos en el nivel intermedio, aparte de $\langle c \rangle$, son exactamente los centros de los conjugados de K_α y $K_{b\alpha}$. Los subgrupos de la forma C_j^i y D_j^i son del Tipo I.

Corolario 3.8.5. Siguiendo la Notación [1.4.1](#) y el Lema [3.8.4](#), cada cadena máxima en $\mathbf{mAb}(G)$ es de uno de los siguientes tipos:

- (1) $1 < \langle c \rangle < A$ donde $A = \langle a, c \rangle$,
- (2) $1 < \langle c^{mk} a \rangle < A$ donde $m \in \mathbb{Z}$,
- (3) $1 < \langle c \rangle < B$ donde B es un subgrupo del Tipo II,
- (4) $1 < \langle c^{mk} a \rangle < C$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y C es un grupo cíclico infinito que contiene a $\langle c^{mk} a \rangle$ como un subgrupo de índice 2,

Teorema 3.8.6. Sea k un número entero positivo, entonces $E_{\text{com}}(E_k) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.

Demostración. Como consecuencia de Corolario [3.8.5](#), todas las cadenas máximas en $\mathbf{mAbCo}(E_k)$ son de uno de los siguientes tipos:

- (1) $\{g\} < g\langle w \rangle < gA$ donde w es c o $c^{mk} a$,
- (2) $\{g\} < g\langle c \rangle < gB$ donde B es un subgrupo del Tipo II,

(3) $\{g\} < g\langle ac^{mk} \rangle < gC$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y C es un subgrupo del Tipo I.

Notemos que para una elección de un $g \in E_k$, un subgrupo C del Tipo I y un subgrupo B del Tipo II, los triángulo que tienen a $\{g\}$ de las formas (3) y (2) son los únicos que contienen las aristas $\{g\} < gC$ y $\{g\} < gB$, respectivamente, así que podemos colapsar esas aristas $g < gC$ y $g < gB$ y los interiores de los triángulos sin cambiar el tipo de homotopía. Después de eliminar esos triángulos, cada arista de la forma $\{g\} < g\langle ac^{mk} \rangle$ o $\{g\} < g\langle c \rangle$ está en un único triángulo, que es de la forma (1). Podemos colapsar esas aristas y el interior de es triángulos sin cambiar el tipo de homotopía tampoco.

En este punto, no tenemos triángulos restantes, lo que muestra que $\mathbf{mAbCo}(E_k)$ tiene el tipo de homotopía de un gráfica , y por lo tanto de una cuña de círculos (ya que es conexo). El complejo obtenido después de eliminar los triángulos aún contiene una copia de $\mathbf{mAbCo}(E'_k)$, que tiene el tipo de homotopía de una cuña numerable infinita de círculos, y por lo tanto, también $\mathbf{mAbCo}(E_k)$ tiene esté tipo de homotopía. \square

3.8.4. Caso pgg

Esta es una familia de grupos, uno para cada número entero positivo par k , y corresponden al Tipo 4 en [Dek+95]. Tenemos la siguiente presentación

$$\Gamma_k = \langle a, b, c, \alpha, \beta \mid [a, b] = c^{2k}, [c, a] = 1, [c, b] = 1, \alpha c = c^{-1}\alpha, \beta a = a^{-1}\beta c^k, \beta b = b^{-1}\beta c^{-k}, \beta^2 = c, \alpha^2 = a, \alpha b = b^{-1}\alpha c^{-k}, \beta \alpha = a^{-1}b^{-1}\alpha\beta c^{-k-1} \rangle$$

Lema 3.8.7. *Sea k un número entero positivo par. Entonces*

(1) Γ_k entra en la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \langle a, c \rangle \rightarrow \Gamma_k \rightarrow \langle \bar{\alpha} \rangle * \langle \bar{\beta} \rangle \rightarrow 1$$

*En particular, tenemos una descomposición $\Gamma_k = K_\alpha *_A K_\beta$, donde $K_\alpha = \langle c, \alpha \rangle$, $K_\beta = \langle c, \beta \rangle$, y $A = \langle a, c \rangle$,*

(2) *definamos $\gamma = \alpha\beta$, entonces $\gamma^2 = b$ y Γ'_k entra en la siguiente sucesión exacta corta*

$$1 \rightarrow \langle c, b \rangle \rightarrow \Gamma'_k \rightarrow \langle \bar{\gamma}a \rangle * \langle \bar{\gamma} \rangle \rightarrow 1$$

Además, Γ'_k es un grupo del Tipo pg.

Demostración. (1) Las relaciones que definen Γ_k implican que el subgrupo $\langle a, c \rangle$ es estable bajo conjugación para b , α y β , por lo tanto, $\langle a, c \rangle$ es un subgrupo normal de Γ_k . Las relaciones en el grupo cociente, $p(\Gamma_k)$, que no son triviales son $\bar{\beta}\bar{b} = \bar{b}^{-1}\bar{\beta}$, $\bar{\beta}^2 = 1$, $\bar{\alpha}^2 = 1$, $\bar{\alpha}\bar{b} = \bar{b}^{-1}\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}\bar{\alpha} = \bar{b}^{-1}\bar{\alpha}\bar{\beta}$. La última implica que $\bar{b} = \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta}$, todas estas ecuaciones implican que $p(\Gamma_k)$ admite la presentación $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} | \bar{\alpha}^2 = 1, \bar{\beta}^2 = 1 \rangle$, así que $p(\Gamma_k) = \langle \bar{\alpha} \rangle * \langle \bar{\beta} \rangle \cong D_\infty$. Dado que $\alpha^2 = a$ y $\alpha c \alpha^{-1} = c^{-1}$, A es un subgrupo de índice 2 de $\langle c, \alpha \rangle$ y este grupo no es abeliano, así que $\langle c, \alpha \rangle = K_\alpha$ es el grupo fundamental de una botella de Klein, de manera similar, $\langle c, \beta \rangle = K_\beta$ es el grupo fundamental de una botella de Klein.

(2) Siguiendo la presentación, tenemos

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \alpha\beta\alpha\beta = \alpha(a^{-1}b^{-1}\alpha\beta c^{-k-1})\beta \\ &= \alpha(a^{-1}b^{-1}c^{k+1}\alpha\beta)\beta \\ &= \alpha a^{-1}b^{-1}c^{k+1}\alpha c \\ &= \alpha a^{-1}b^{-1}c^k\alpha \\ &= a^{-1}\alpha(b^{-1}\alpha)c^{-k} \\ &= a^{-1}\alpha(\alpha b c^k)c^{-k} = b \end{aligned}$$

Dado que $\Gamma'_k = \langle a, c, \alpha\beta = \gamma \rangle$, tenemos $aba^{-1} = c^{2k}b$, $cbc^{-1} = b$, $\gamma b \gamma^{-1} = \gamma \gamma^2 \gamma^{-1} = \gamma^2 = b$, $aca^{-1} = c$, $ccc^{-1} = c$ y $\gamma c \gamma^{-1} = \alpha\beta\beta^2\beta^{-1}\alpha^{-1} = \alpha\beta^2\alpha^{-1} = \alpha c \alpha^{-1} = c^{-1}$. Estas ecuaciones implican que $\langle b, c \rangle$ es normal en Γ'_k . El grupo $\Gamma'_k / \langle c \rangle$ admite la presentación $\langle \bar{a}, \bar{\gamma} | \bar{\gamma}\bar{a} = \bar{a}^{-1}\bar{\gamma} \rangle$ que es isomorfo a $\langle \bar{a} \rangle \rtimes_{-1} \langle \bar{\gamma} \rangle$. Con esta equivalencia, tenemos que $\Gamma'_k / \langle b = \gamma^2, c \rangle = \langle \bar{a} \rangle \rtimes_{-1} \langle \bar{\gamma} | \bar{\gamma}^2 \rangle$ que es isomorfo a $\langle \bar{\gamma} a \rangle * \langle \bar{\gamma} \rangle$. Dado que $\gamma^2 = b$ y $\gamma c \gamma^{-1} = c^{-1}$, $\langle c, \gamma \rangle$ es un subgrupo de índice 2 de $\langle b, c \rangle$ y este grupo no es abeliano, así que $\langle b, \gamma \rangle = K_\gamma$ es el grupo fundamental de una botella de Klein. De manera similar, $\langle c, \gamma a \rangle = K_{\gamma a}$ es el grupo fundamental de una botella de Klein. El automorfismo de esta amalgama está dado por $aca^{-1} = c$, y $aba^{-1} = c^{2k}b$, equivalentemente, el automorfismo es dado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces Γ'_k es un grupo del caso pg.

□

En el siguiente lema describimos los subgrupos abelianos maximales de Γ_k y sus intersecciones. Todas las conclusiones en este lema se resumen en la Figura 3.3.

Lema 3.8.8. *Siguiendo la Notación 1.4.1, tenemos que:*

- (1) todo subgrupo abeliano de Γ_k es libre de rango a lo más 2,
- (2) como se observa con líneas negritas en la Figura 3.3, el diagrama de subgrupos de Tipo II (que son subgrupos del grupo Γ'_k que es de tipo pg) y sus intersecciones está descrito por el Lema 3.8.4 y la Figura 3.2, con el ajuste de que los generadores a y b se intercambian,
- (3) el centro de $K_\alpha^{(\beta\alpha)^n}$ (resp. $K_\beta^{(\beta\alpha)^n}$) es $\langle ac^{-nk} \rangle$ (resp. $\langle c \rangle$),
- (4) si $i, j \in \{\alpha, \beta\}$ y si $K_i^{(\beta\alpha)^n} \neq K_j^{(\beta\alpha)^m}$, entonces $Z(K_i^{(\beta\alpha)^n}) \cap Z(K_j^{(\beta\alpha)^m})$ es trivial,
- (5) la intersección de dos subgrupos de Tipo I que están contenidos en el conjugado $K_i^{(\beta\alpha)^n}$ es $Z(K_i^{(\beta\alpha)^n})$,
- (6) la intersección de dos subgrupos de Tipo I es trivial si pertenecen a conjugados distintos de los factores de Γ_k ,
- (7) la intersección de A con un subgrupo de Tipo I que está contenido en un subconjugado a $K_i^{(\beta\alpha)^n}$ es $Z(K_i^{(\beta\alpha)^n})$,
- (8) la intersección de A con un subgrupo de Tipo II es trivial o igual a $\langle c \rangle$.
- (9) la intersección de cualquier subgrupo de Tipo I con cualquier subgrupo de Tipo II es trivial o igual a $\langle c \rangle$.

Demostración. (1) Ya que Γ_k es un grupo virtualmente poli- \mathbb{Z} sin torsión de rango 3, cualquier subgrupo abeliano es libre de rango a lo más 3. Por otro lado, Γ_k no puede tener un subgrupo \mathbb{Z}^3 ya que esta posibilidad solo ocurre, en el contexto de 3-variedades, en presencia de una métrica euclidiana.

- (2) Dado que todo subgrupo de Tipo II de Γ_k es en realidad un subgrupo de Γ'_k , esta afirmación es una consecuencia directa del Lema 3.8.7 (2) y el Lema 3.8.4. Se puede también consultar en la Figura 3.2.

- (3) Por el inciso (1) del Lema 1.4.2 (1) todos los conjugados de K_α (resp. K_β) son de la forma $K_\alpha^{(\alpha\beta)^n}$ (resp. $K_\beta^{(\alpha\beta)^n}$) para algún $n \in \mathbb{Z}$. Es fácil comprobar que $(\alpha^2)^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} = a^{-1}c^k$ y $(\beta^2)^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta} = c^{-1}$ directamente de la presentación. La afirmación se sigue ahora del inciso (2) del Lema 1.4.2.
- (4) Por la afirmación anterior, los centros $Z(K_i^{(\alpha\beta)^m})$ y $Z(K_j^{(\alpha\beta)^n})$ son de la forma $\langle ac^{mk} \rangle$ y $\langle c \rangle$. Así que $Z(K_i^{(\alpha\beta)^m}) \cap Z(K_j^{(\alpha\beta)^n}) = 1$ siempre que $Z(K_i^{(\alpha\beta)^m}) \neq Z(K_j^{(\alpha\beta)^n})$ (podemos pensar en estos grupos como líneas en el plano de coordenadas enteras $\mathbb{Z}^2 \cong \langle c, a \rangle$ con diferentes pendientes).
- (5) Esto se sigue del inciso (3) de la Proposición 3.6.4.
- (6) Sean B y D subgrupos de Tipo I que están contenidos en diferentes conjugados $K_i^{(\alpha\beta)^n}$ y $K_j^{(\alpha\beta)^m}$, respectivamente. Entonces, por el inciso (4) de la Proposición 3.6.4, $Z(K_i^{(\alpha\beta)^n})$ y $Z(K_j^{(\alpha\beta)^m})$ son subgrupos de índice 2 de C y D , respectivamente. Por la parte (4), los centros tienen intersección trivial, y por lo tanto C y D también.
- (7) Esto se sigue del inciso (4) de la Proposición 3.6.4.
- (8) Esta afirmación se puede verificar en la Figura 3.3.
- (9) Sea B un subgrupo de Tipo I y C un subgrupo de Tipo II, esto significa que $p(B) \cong \mathbb{Z}/2$ y $p(C) \cong \mathbb{Z}$. Luego $p(B \cap C) \subset p(B) \cap p(C) = 1$, así que $B \cap C \subset A = \langle c, a \rangle$. Por lo tanto $B \cap C = B \cap C \cap A = (B \cap A) \cap (C \cap A)$, y la última intersección es o bien trivial o $\langle c \rangle$ por las afirmaciones anteriores.

□

Corolario 3.8.9. Siguiendo la Notación 1.4.1 y Lema 3.8.4, toda cadena máxima en $\text{mAb}(G)$ es de uno de los siguientes tipos:

- (1) $1 < \langle c \rangle < B$ donde B es un subgrupo de Tipo II dentro de Γ'_k ,
- (2) $1 < \langle c \rangle < \langle c, b \rangle$,
- (3) $1 < \langle c^{mk}b \rangle < C$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y C es un grupo cíclico infinito que contiene a $\langle c^{mk}b \rangle$ como un subgrupo de índice 2,
- (4) $1 < \langle c^{mk}b \rangle < \langle c, b \rangle$ donde $m \in \mathbb{Z}$,

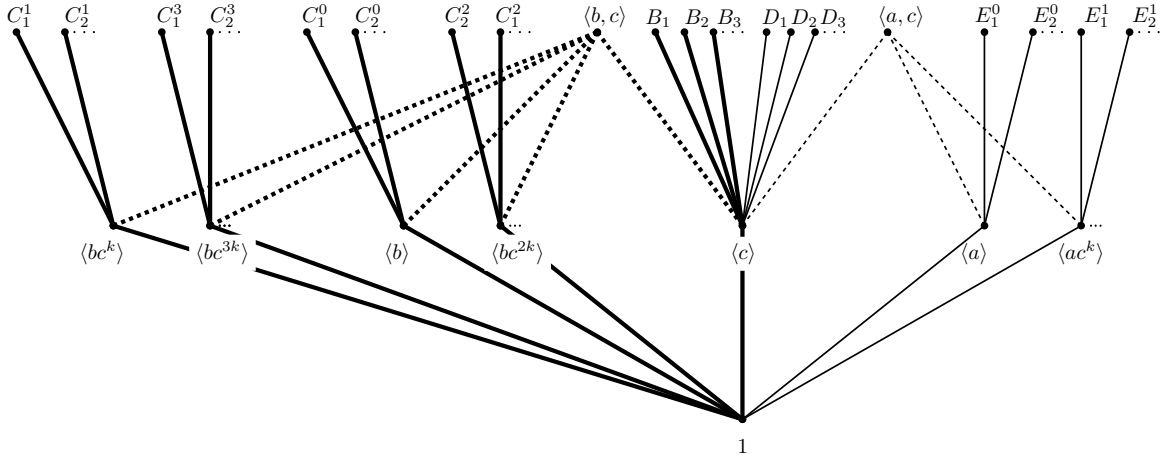


Figura 3.3: El diagrama de Hasse de $\mathbf{mAb}(\Gamma_k)$. El subdiagrama en líneas negritas corresponde al diagrama de Hasse de $\mathbf{mAb}(\Gamma'_k)$ y, por lo tanto, los grupos en el nivel superior son de Tipo II; notemos que dado que $\mathbf{mAb}(\Gamma'_k)$ pertenece al Caso pg el subdiagrama es idéntico a Figura 3.2.

Los subgrupos de la forma D_j y E_j^i son de Tipo I.

- (5) $1 < \langle c \rangle < D$ donde D es un subgrupo de Tipo I,
- (6) $1 < \langle c \rangle < A$ donde $A = \langle a, c \rangle$,
- (7) $1 < \langle c^{mk}a \rangle < E$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y E es un grupo cíclico infinito que contiene a $\langle c^{mk}a \rangle$ como un subgrupo de índice 2,
- (8) $1 < \langle c^{mk}a \rangle < \langle a, c \rangle$ donde $m \in \mathbb{Z}$,

Teorema 3.8.10. Sea k un número entero positivo, entonces $E_{\text{com}}(E_k) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.

Demostración. Esta prueba es muy similar a la del Teorema 3.8.6. Cualquier cadena máxima en $\mathbf{mAbCo}(\Gamma_k)$ se obtiene multiplicando una de las cadenas listadas en el Corolario 3.8.9 por un elemento de grupo g . Para una elección de un g , la arista que va desde $\{g\}$ hasta el elemento máximo de una cadena es de las formas (1), (3), (5) o (7) solo está contenida en ese triángulo. Por lo tanto, podemos colapsar esas aristas y los interiores de los triángulos sin cambiar el tipo de homotopía. Después de eliminarlos, en cada cadena máxima de de las formas (2), (4), (6) o (8), la arista desde $\{g\}$ hasta el elemento medio está contenida en un único triángulo, por lo que ahora podemos colapsar esas aristas y los interiores de esos triángulos. Después de esto, no quedan triángulos, mostrando que $\mathbf{mAbCo}(\Gamma_k)$ tiene el tipo de homotopía de un gráfica, y por lo tanto de

una cuña de círculos (ya que es conexo). El complejo obtenido después de eliminar los triángulos aún contiene una copia de $\mathbf{mAbCo}(\Gamma'_k)$, que tiene el tipo de homotopía de una cuña numerable infinita de círculos, y por lo tanto $\mathbf{mAbCo}(\Gamma_k)$ también tiene este tipo de homotopía. \square

3.9. 3-variedades modeladas en Sol

De acuerdo con [AFW15, Theorem 1.8.2], los grupos fundamentales de variedades modeladas en Sol se pueden dividir en dos categorías que describimos a continuación.

Productos semidirectos Grupos de la forma $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ donde φ es un automorfismo de \mathbb{Z}^2 que no fija ningún subgrupo de rango 1.

Amalgamas Grupos de la forma $K *_A K$ donde K es el grupo fundamental de la botella de Klein, $A = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$, y la amalgama está dada por un automorfismo $\varphi: A \rightarrow A$ que no fija ningún subgrupo de rango 1.

Lema 3.9.1. *Sea $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ donde φ es un automorfismo de \mathbb{Z}^2 que no fija ningún subgrupo de rango 1. Entonces si $H = \mathbb{Z}^2 \rtimes \{0\}$, se cumple que $H \cap C$ es trivial para cualquier subgrupo C abeliano maximal distinto de H . Además se cumple que $\text{comm}_G C = C$ donde*

$$\text{comm}_G C = \{g \in G \mid gCg^{-1} \cap C \neq 1\}.$$

Demostración. Sea C un subgrupo abeliano maximal de G distinto de H y $p: G \rightarrow \mathbb{Z}$ la proyección sobre el segundo factor de G . Si $C \cap H$ no es trivial, debe ser un subgrupo cíclico infinito del núcleo de p , y por lo tanto $p(C \cap H)$ tiene rango cero, es decir, $p(C \cap H)$ es finito, de donde se sigue que es trivial. Entonces, $C \cap H$ está contenido en H lo cual contradice la maximalidad de C , esto prueba la afirmación.

Dado que $\text{comm}_G C$ es un subgrupo de G , es poli- \mathbb{Z} por la Proposición 3.6.2. Supongamos que $\text{comm}_G C$ contiene un subgrupo L de rango 2, entonces $L \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ y por lo tanto contiene un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^2 , que está contenido en H por ser el único subgrupo maximal \mathbb{Z}^2 de G . Dado que $\text{comm}_G C$ contiene tanto L como a C , y $C \cap L$ es trivial, tenemos que $\text{comm}_G C$ es de rango 3, y por lo tanto tiene índice finito en G según la Proposición 3.6.2. Esto implica que $\text{comm}_G C$ también es de la forma $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$ donde ψ es un automorfismo de \mathbb{Z}^2 que no fija ningún subgrupo de rango 1, en particular este

grupo no tiene ningún subgrupo cíclico normal no trivial según [LS22, Lemma 4.8(b)]. Por otro lado, $\text{comm}_G C$ normaliza un subgrupo de índice finito de C (vea por ejemplo [LW12, Lemma 5.15]), lo cual es una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $\text{comm}_G C$ es de rango uno, es decir, $\text{comm}_G C$ es cíclico infinito. Dado que $C \subseteq \text{comm}_G C$, por maximalidad de C tenemos que $C = \text{comm}_G C$. \square

Teorema 3.9.2. *Sea $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ donde φ es un automorfismo de \mathbb{Z}^2 que no fija ningún subgrupo de rango 1. Entonces*

- (1) todo subgrupo abeliano de G es libre de rango a lo sumo 2,
- (2) el subgrupo $\mathbb{Z}^2 \rtimes \{0\}$ es el único subgrupo abeliano maximal de rango 2,
- (3) la intersección de cualquier dos subgrupos abelianos maximales de G es trivial, y
- (4) $E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.

Demostración. (1) Dado que G es un grupo poli- \mathbb{Z} finitamente generado y sin torsión de rango 3, todo subgrupo abeliano de G es de la forma \mathbb{Z}^n con $n \leq \text{rank}(G) = 3$. Observemos que G no puede tener un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^3 , porque tendría índice finito según la Proposición 3.6.2, pero los únicos grupos de 3-variedades con esta propiedad son los modelados en \mathbb{E}^3 .

- (2) Esta afirmación se sigue del [LS22, Lemma 4.8].
- (3) Sean C y D dos subgrupos abelianos maximales de G isomorfos a \mathbb{Z} , tales que $C \cap D$ no es trivial. Esto implica que C y D son commensurables, y por lo tanto $\text{comm}_G C = \text{comm}_G D$. Según el Lema 3.9.1, concluimos que $C = D$. Por otro lado el mismo Lema 3.9.1 implica que $C \cap H$ es trivial, entonces para cualquier par de subgrupos abelianos maximales distintos se concluye que la intersección es trivial. \square

En el siguiente lema describimos los subgrupos abelianos maximales de $K *_A K$ y sus intersecciones, todas las conclusiones en este lema están resumidas en la Figura 3.4.

Lema 3.9.3. *Siguiendo la Notación 1.4.1 tenemos que:*

- (1) todo subgrupo abeliano de G es libre de rango a lo más 2,

- (2) el subgrupo A es el único subgrupo abeliano maximal de rango 2,
- (3) la intersección de cualquier par de subgrupos del Tipo II es trivial, y la intersección de cualquier subgrupo del Tipo II con A es trivial,
- (4) la intersección de cualquier subgrupo del Tipo I con cualquier subgrupo del Tipo II es trivial,
- (5) la intersección de cualquier par de subgrupos del Tipo I que están contenidos en un conjugado K_i^x es $Z(K_i^x)$,
- (6) la intersección de A con un subgrupo del Tipo I que está contenido en el subconjugado K_i^x es $Z(K_i^x)$,
- (7) si $K_i^x \neq K_j^y$, entonces $Z(K_i^x) \cap Z(K_j^y)$ es trivial.

Demostración. (1) Dado que G es un grupo poli- \mathbb{Z} sin torsión de rango 3, cualquier subgrupo abeliano es libre de rango a lo más 3. Por otro lado, G no puede tener un subgrupo \mathbb{Z}^3 ya que esta posibilidad solo ocurre, en el contexto de 3-variedades, en presencia de una métrica euclidiana.

- (2) Sea H un subgrupo abeliano de rango 2 de G . Veamos que $p(H)$ no puede ser un subgrupo infinito de $\mathbb{Z} \rtimes_{-1} \mathbb{Z}/2$. Si $p(H)$ fuera infinito significaría que un generador de $p(H)$ estabiliza el subgrupo de rango uno $H \cap A$, lo cual es imposible. Entonces $H' = H \cap G'$ es un subgrupo abeliano de rango 2 subconjugado a uno de los factores de G , y podemos concluir de la Proposición 3.6.4 que H es un subgrupo de A .
- (3) Se sigue directamente del inciso (3) de la Teorema 3.9.2.
- (4) Sean H_1 y H_2 subgrupos del Tipo I y II respectivamente. Entonces $p(H_1)$ es finito y $p(H_2)$ es cíclico infinito, así que $p(H_1) \cap p(H_2) = 1$. Por lo tanto $H_1 \cap H_2 \subseteq \ker p = A$. Pero por la afirmación anterior, $H_2 \cap A = 1$, y por lo tanto $H_1 \cap H_2 = 1$ también.
- (5) Se sigue directamente del inciso (4) de la Proposición 3.6.4.
- (6) Se sigue directamente del inciso (5) de la Proposición 3.6.4.
- (7) Notemos que $Z(K_i^x) \cap Z(K_j^y) = 1$ es equivalente a $Z(K_i) \cap Z(K_j^{x^{-1}y}) = 1$. Entonces, probemos $Z(K_i) \cap Z(K_j^x) = 1$, siempre que $K_i \neq K_j^x$. Hay dos casos:

Caso 1. $i = j$ Primero consideremos el caso en el cual $x \in G'$. Ya que G' es isomorfo a $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi'} \mathbb{Z}$, tenemos que para $a \in A$ (en particular para $a \in Z(K_i^x)$), $xa x^{-1} = \varphi'^{(n)}(a)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Dado que $K_i \neq K_i^x$, tenemos que $n \neq 0$. Entonces

$$Z(K_i) \cap Z(K_i^x) = Z(K_i) \cap \varphi'^{(n)}(Z(K_i)) = 1.$$

donde la última igualdad se cumple porque φ' no fija ningún subgrupo de rango 1 de A . Ahora, manejemos el caso general. Dado que G' tiene índice 2, entonces $x^2 \in G'$. Por el argumento anterior, $Z(K_i) \cap Z(K_i^{x^2}) = 1$. Si tuviéramos $Z(K_i) \cap Z(K_i^x) \neq 1$, sea a un generador de esa intersección. Tenemos $xa x^{-1} = a^{\pm 1}$, y así $x^2 a x^{-2} = a$, contradiciendo que $Z(K_i) \cap Z(K_i^{x^2}) = 1$.

Caso 2. $i \neq j$. Notemos que $H = \langle K_1, K_2^x \rangle$ tiene índice finito en G . Por lo tanto, la variedad \tilde{M}/H es una 3-variedad modelada en Sol, donde \tilde{M} es el cubrimiento universal de la 3-variedad inicial. Por lo tanto, H es isomorfo a $K_1 *_A K_2$ por un automorfismo $\psi: A \rightarrow A$ que no fija ningún subgrupo de rango 1. Dado que $Z(K_1) \cap Z(K_2^x) \subset Z(H) = 1$, se sigue el resultado.

□

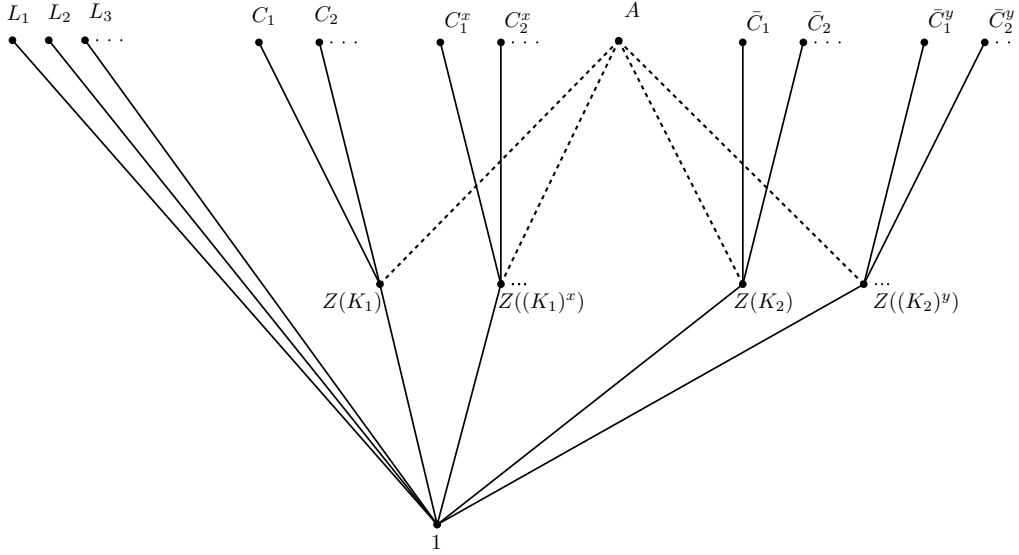


Figura 3.4: Diagrama de Hasse de $\mathbf{mAb}(K_1 *_A K_2)$. Los subgrupos de la forma L_i son del Tipo II. Los subgrupos de la forma C_i, C_i^x, \bar{C}_i y \bar{C}_i^y son del Tipo I.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del lema anterior.

Corolario 3.9.4. Siguiendo la Notación 1.4.1 y el Lema 3.9.3, toda cadena máxima en $\mathbf{mAb}(G)$ es de uno de los siguientes tipos:

- (1) $1 < L$ con L del Tipo II,
- (2) $1 < Z(K_i^x) < A$ para algún $x \in G$ y $i \in \{1, 2\}$,
- (3) $1 < Z(K_i^x) < C$ para algún $x \in G$ y $i \in \{1, 2\}$, y C del Tipo I.

Teorema 3.9.5. Sea G un grupo de la forma $K *_A K$ donde $A = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$ y la amalgama está dada por un automorfismo $\varphi: A \rightarrow A$ que no fija ningún subgrupo de rango 1. Entonces, $E_{\text{com}}(G) \simeq \bigvee_{\mathbb{N}} S^1$.

Demostración. Como consecuencia del Corolario 3.9.4, todas las cadenas máximas en $\mathbf{mAbCo}(G)$ son de uno de los siguientes tipos:

- (1) $\{g\} < gL$ con L del Tipo II,
- (2) $\{g\} < gZ(K_i^x) < gA$ para algún $x \in G$ y $i \in \{1, 2\}$,
- (3) $\{g\} < gZ(K_i^x) < gC$ para algún $x \in G$ y $i \in \{1, 2\}$, y C del Tipo I.

Notemos que para un elección de un $g \in G$ y un subgrupo C del Tipo I, hay un único triángulo de la forma (3) en la lista anterior, por lo que podemos colapsar la arista $g < gC$ y el interior del triángulo sin cambiar el tipo de homotopía. Después de colapsar esos triángulos, cada arista de la forma $\{g\} < gZ(K_i^x)$ está en un único triángulo, que es de la forma (2). También podemos colapsar esas aristas y el interior de los triángulos que las contienen sin cambiar el tipo de homotopía.

En este punto, no nos quedan triángulos, lo que muestra que $\mathbf{mAbCo}(G)$ tiene el tipo de homotopía de una gráfica y, por lo tanto, de una cuña de círculos (ya que es conexo). El complejo obtenido después de eliminar los triángulos aún contiene una copia de $\mathbf{mAbCo}(G')$ (compuesta por las aristas de la forma (1)), que tiene el tipo de homotopía de una cuña de numerable infinita círculos, y por lo tanto, $\mathbf{mAbCo}(G)$ también tiene este tipo de homotopía. \square

Apéndice A

Código GAP

Mostraremos un código en GAP que puede ser utilizado para verificar que $\mathbf{mAb}(G)$, y por lo tanto también $\mathbf{mAbCo}(G)$, tiene altura 1.

Primero, definimos una función para calcular los conjuntos maximales bajo inclusión en una familia dada de conjuntos. Un conjunto s en la familia es maximal si la lista de conjuntos que contienen a s tiene longitud uno (es decir, consiste solamente de s):

```
maximal:=sets->Filtered (sets ,  
                        s->Length ( Filtered (sets ,t->IsSubset (t ,s)))=1);
```

A continuación, definimos funciones para calcular los subgrupos abelianos maximales de un grupo G , y para calcular la familia de intersecciones por pares de subgrupos abelianos maximales:

```
maxAbSub := G->maximal ( Filtered ( AllSubgroups (G) , IsAbelian ));
```

```
intMaxAbSub := G -> List ( Combinations (maxAbSub(G) ,2) ,  
                          P->Intersection (P[1] ,P[2]));
```

Para verificar si un grupo G tiene $\mathbf{mAbCo}(G)$ de altura 1, simplemente verificamos si todas las intersecciones por pares de subgrupos abelianos máximos son iguales al centro de G :

```
isHeight1 := G -> ForAll (intMaxAbSub(G) , A -> A = Center (G));
```

Cuando un grupo G tiene $\mathbf{mAbCo}(G)$ de altura 1, la realización geométrica de $\mathbf{mAbCo}(G)$ es una gráfica, y por lo tanto es homotópicamente equivalente a una cuña de círculos.

Podemos calcular cuántos círculos hay realizando el siguiente calculo basado en la característica de Euler de la grafica:

```
circles := function(G)
  local maxAb, Z, edges, vertices;
  Assert(0, isHeight1(G));
  maxAb := maxAbSub(G);
  Z := Center(G);
  edges := Index(G,Z) * Length(maxAb);
  vertices := Sum(maxAb,A->Index(G,A)) + Index(G,Z);
  return edges - vertices + 1;
end;
```

Apéndice B

Código para caso esférico

Podemos calcular fácilmente el tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(P_{48})$ via el siguiente código auxiliados del apéndice anterior:

```
gap> F := FreeGroup("x", "y");; x := F.1;; y := F.2;;
gap> G := F / [x^(-2) * (x*y)^3, x^(-2) * y^4, x^4];; IdGroup(G);
[ 48, 28 ]
gap> isHeight1(G);
true
gap> circles(G);
167
```

De manera similar, podemos calcular el tipo de homotopía de $E_{\text{com}}(P_{120})$:

```
gap> G := F / [x^(-2) * (x*y)^3, x^(-2) * y^5, x^4];; IdGroup(G);
[ 120, 5 ]
gap> isHeight1(G);
true
gap> circles(G);
1079
```

Finalmente, calculamos el número de círculos en $E_{\text{com}}(P'_{8,3^m})$. Este cálculo es más complejo ya que no estamos hablando de un único grupo sino más bien de una familia de grupos, uno para cada $m \geq 1$. La demostración del Teorema [3.2.3](#) esboza el cálculo dejando solo un par de afirmaciones para verificar con GAP, lo cual hacemos ahora.

La primera afirmación es que x y y no conmutan en $P'_{8.3m}$. Para verificar esto, notemos que $P'_{24} = P'_{8.3^1}$ es un cociente de $P'_{8.3m}$ para cualquier $m \geq 1$, por lo que basta con verificar que x y y no conmutan en P'_{24} :

```
gap> F := FreeGroup("x", "y", "z");;
gap> x := F.1;; y := F.2;; z:=F.3;;
gap> G := F / [x^2 * y^(-2), x^2 * (x*y)^(-2), z^3,
              (x^z) * y^(-1), (y^z) * (x*y)^(-1)];;
gap> IdGroup(G);
[ 24, 3 ]
gap> IsAbelian(Subgroup(G, [G.1, G.2]))
false
```

Habiendo verificado esa afirmación, la demostración de Teorema [3.2.3](#) muestra que todos los $E_{\text{com}}(P'_{8.3m})$ son una cuña del mismo número de círculos, así que para verificar el número de círculos afirmado allí basta con revisar $E_{\text{com}}(P'_{24})$:

```
gap> isHeight1(G);
true
gap> circles(G);
39
```

Bibliografía

- [AH93] Herbert Abels y Stephan Holz. «Higher generation by subgroups». En: *Journal of Algebra* 160.2 (1993), págs. 310-341.
- [ACG12] Alejandro Adem, Frederick R Cohen y Enrique Torres Giese. «Commuting elements, simplicial spaces and filtrations of classifying spaces». En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 152. 1. Cambridge University Press. 2012, págs. 91-114.
- [AG15] Alejandro Adem y José Gómez. «A classifying space for commutativity in Lie groups». En: *Algebraic & Geometric Topology* 15.1 (2015), págs. 493-535.
- [AGV21] Omar Antolín-Camarena, Simon Gritschacher y Bernardo Villarreal. «Higher generation by abelian subgroups in Lie groups». En: *Transformation Groups* (2021), págs. 1-16.
- [AV19] Omar Antolín-Camarena y Bernardo Villarreal. «The Complex of Affinely Commutative Sets». En: *arXiv preprint arXiv:1906.07205* (2019).
- [AKO11] M. Aschbacher, R. Kessar y B. Oliver. *Fusion Systems in Algebra and Topology*. Vol. 391. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2011.
- [AFW15] Matthias Aschenbrenner, Stefan Friedl y Henry Wilton. *3-manifold groups*. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015, págs. xiv+215. ISBN: 978-3-03719-154-5. DOI: [10.4171/154](https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.4171/154). URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.4171/154>.
- [BW13] Hadi Bigdely y Daniel T. Wise. «Quasiconvexity and relatively hyperbolic groups that split». En: *Michigan Math. J.* 62.2 (2013), págs. 387-406. ISSN: 0026-2285. DOI: [10.1307/mmj/1370870378](https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1307/mmj/1370870378). URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1307/mmj/1370870378>.

- [BH99] Martin R. Bridson y André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Vol. 319. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999, págs. xxii+643. ISBN: 3-540-64324-9. DOI: [10.1007/978-3-662-12494-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9).
- [Bro94] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*. Vol. 87. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1982 original. Springer-Verlag, New York, 1994, págs. x+306. ISBN: 0-387-90688-6.
- [Cep20] Mauricio Cepeda. «Transitionally Commutative Bundles and Characteristic Classes». Tesis doct. Universidad Nacional de Colombia, 2020, pág. 75.
- [Dek+95] Karel Dekimpe et al. «Affine structures for closed 3-dimensional manifolds with nil-geometry». En: *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 46.182 (1995), págs. 141-167. ISSN: 0033-5606. DOI: [10.1093/qmath/46.2.141](https://doi.org/10.1093/qmath/46.2.141). URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1093/qmath/46.2.141>.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002, págs. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.
- [JL06] Daniel Juan-Pineda y Ian J. Leary. «On classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups». En: *Recent developments in algebraic topology*. Vol. 407. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, págs. 135-145.
- [LO07] Jean-François Lafont e Ivonne J. Ortiz. «Relative hyperbolicity, classifying spaces, and lower algebraic K -theory». En: *Topology* 46.6 (2007), págs. 527-553. ISSN: 0040-9383. DOI: [10.1016/j.top.2007.03.001](https://doi.org/10.1016/j.top.2007.03.001). URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/j.top.2007.03.001>.
- [LS22] Porfirio L. León Álvarez y Luis Jorge Sánchez Saldaña. «Classifying spaces for the family of virtually abelian subgroups of orientable 3-manifold groups». En: *Forum Math.* 34.5 (2022), págs. 1277-1296. ISSN: 0933-7741,1435-5337. DOI: [10.1515/forum-2022-0006](https://doi.org/10.1515/forum-2022-0006). URL: <https://doi.org/10.1515/forum-2022-0006>.
- [LS00] Wolfgang Lück y Roland Stamm. «Computations of K - and L -theory of cocompact planar groups». En: *K-Theory* 21.3 (2000), págs. 249-292. ISSN: 0920-3036. DOI: [10.1023/A:1026539221644](https://doi.org/10.1023/A:1026539221644). URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1023/A:1026539221644>.
- [LW12] Wolfgang Lück y Michael Weiermann. «On the classifying space of the family of virtually cyclic subgroups». En: *Pure Appl. Math. Q.* 8.2 (2012), págs. 497-555.
- [Mor05] John W. Morgan. «Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds». En: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 42.1 (2005), págs. 57-78. ISSN: 0273-0979. DOI: [10.1090/S0273-0979-04-01045-6](https://doi.org/10.1090/S0273-0979-04-01045-6). URL: <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-04-01045-6>.

- [Oka14] Cihan Okay. «Homotopy colimits of classifying spaces of abelian subgroups of a finite group». En: *Algebraic & Geometric Topology* 14.4 (2014), págs. 2223-2257.
- [Oka15] Cihan Okay. «Colimits of abelian groups». En: *Journal of Algebra* 443 (2015), págs. 1-12. ISSN: 0021-8693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.07.018>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869315003816>.
- [Oka16] Cihan Okay. «Spherical posets from commuting elements». En: *Journal of Group Theory* 21 (ago. de 2016). DOI: [10.1515/jgth-2018-0008](https://doi.org/10.1515/jgth-2018-0008).
- [Sco83] Peter Scott. «The geometries of 3-manifolds». En: *Bull. London Math. Soc.* 15.5 (1983), págs. 401-487. ISSN: 0024-6093. DOI: [10.1112/blms/15.5.401](https://doi.org/10.1112/blms/15.5.401). URL: <https://doi.org/10.1112/blms/15.5.401>.
- [Seg83] Daniel Segal. *Polycyclic groups*. Vol. 82. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1983, págs. xiv+289. ISBN: 0-521-24146-4. DOI: [10.1017/CB09780511565953](https://doi.org/10.1017/CB09780511565953). URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1017/CB09780511565953>.
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. Vol. 35. Princeton Mathematical Series. Edited by Silvio Levy. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, págs. x+311. ISBN: 0-691-08304-5.
- [Wol11] Joseph A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. Sixth. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011, págs. xviii+424. ISBN: 978-0-8218-5282-8. DOI: [10.1090/chel/372](https://doi.org/10.1090/chel/372). URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1090/chel/372>.