



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

TRATAMIENTO VARIACIONAL INTERPOLATIVO DE LA  
ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER DISCRETA

UNIDIMENSIONAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

BARRIOS MARTÍNEZ DIEGO ILHUITEMOK

TUTOR

DR. JORGE FUJIOKA ROJAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2024





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Resumen

Este trabajo de tesis presenta un tratamiento variacional alternativo de la ecuación No-lineal de Schrödinger Discreta (DNLS) la cual es utilizada para describir la propagación de pulsos eléctricos a través de arreglos de fibras ópticas así como para el estudio de la evolución de los condensados de Bose-Einstein y la propagación de la energía en cadenas de proteínas, entre muchos otros análisis de arreglos de osciladores cuyas interacciones son no-lineales. El objetivo principal del presente trabajo es el estudio de la estabilidad de las soluciones del modelo DNLS mediante el análisis de la evolución de pulsos Gaussianos. Para ello los efectos discretos involucrados en el modelo DNLS se han encapsulado no en un conjunto de amplitudes localizadas en los elementos de los arreglos, sino en la acción de operadores de traslación respecto de la coordenada transversal de tal manera que las soluciones de la ecuación resultante sean funciones de onda dependientes de dos variables continuas con las cuales se ha podido realizar un tratamiento variacional mejor justificado. Gracias a dicha interpretación fue posible obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange y la densidad Lagrangiana que generan el modelo. Se dedujo la forma que el teorema de Noether adopta para este sistema y tres cantidades conservadas asociadas a sus invarianzas principales: invarianza de traslación transversal, de traslación de evolución y de norma. Mediante el método variacional de Anderson se determinó que un pulso Gaussiano puede evolucionar como un solitón variacional, un breather, un solitón asintótico o como un pulso difusivo. Se descubrió que los pulsos no pueden desplazarse a lo largo del arreglo con una velocidad mayor o igual que el doble del espaciamiento entre los elementos del mismo y se demostró que la estabilidad de las soluciones es mayor cuando los pulsos tienen amplitudes iniciales grandes, cuando los efectos no-lineales son intensos y cuan-

---

do el momento de los pulsos se aproxima a  $M_{lim} = (2w + 1)\pi\mathcal{N}_u/2$ , con  $w \in \mathbf{Z}$  y  $\mathcal{N}_u$  la norma del pulso. A demás, se encontró que los solitones variacionales pueden ser generados de dos formas diferentes: al anular los efectos de chirp en el pulso y al hacer que su momento sea igual a  $M_{lim}$ . En el primer caso las soluciones son del tipo bi-estable ya que dada una amplitud inicial pueden darse solitones con anchos diferentes, mientras que en el segundo caso los solitones evolucionan de tal manera que su centro tiende a posicionarse a una distancia no nula de su posición original. Finalmente se demostró que cuando los efectos discretos tienden a volverse irrelevantes la evolución de los pulsos Gaussianos tiende a ser descrita por la contraparte continua del modelo DNLS: la ecuación No-lineal de Schrödinger.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Un viajero impertérito . . . . .	1
1.2. Canales de vidrio . . . . .	2
1.3. Solitones multidisciplinarios . . . . .	4
1.4. Una discreta variación de la perspectiva . . . . .	5
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	7
<b>2. Deducciones y tratamiento variacional del modelo DNLS</b>	<b>10</b>
2.1. Derivaciones del modelo DNLS . . . . .	10
2.2. Método variacional de Anderson . . . . .	15
2.3. Tratamiento variacional discreto del modelo DNLS . . . . .	18
2.3.1. Primer deducción de la Lagrangiana efectiva para el modelo DNLS . . . . .	19
2.3.2. Segunda deducción de la Lagrangiana efectiva del modelo DNLS . . . . .	22
<b>3. Tratamiento variacional interpolativo del modelo DNLS homogéneo</b>	<b>23</b>
3.1. Representación interpolativa . . . . .	23
3.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas . . . . .	25
3.3. Hamiltoniano y conservación del momento . . . . .	26
3.4. Teorema de Noether . . . . .	29
3.5. Densidad Lagrangiana explícita . . . . .	35
3.6. Método variacional de Anderson en el modelo interpolativo . . . . .	37

3.6.1. Decoherencia negativa . . . . .	41
3.6.2. Decoherencia positiva . . . . .	56
3.6.3. Solitones variacionales . . . . .	58
3.7. Reducción del modelo DNLS al NLS . . . . .	65
<b>4. Conclusiones</b>	<b>68</b>
<b>Apéndice A. Complementos del tratamiento variacional interpolativo</b>	<b>73</b>
A.1. Ecuación de Euler-Lagrange extendida en la aproximación interpolativa del modelo DNLS . . . . .	73
A.2. Integración explícita de $\mathcal{L}$ con un ansatz Gaussiano . . . . .	76
A.3. $\Lambda_G^0$ posee un único máximo entre 0 y $\alpha$ en la decoherencia negativa . . . . .	80
<b>Apéndice B. Métodos numéricos</b>	<b>84</b>
B.1. Integración numérica RK4 adaptativa . . . . .	84
B.2. Gradiente descendiente . . . . .	94
<b>Referencias</b>	<b>100</b>

# Índice de figuras

3.1.	Esquema de la aproximación interpolativa del modelo DNLS. . . . .	24
3.2.	Esquema de la función $\Lambda_G^0$ para $\cos \{\delta p\} > 0$ . (a) Comportamiento de $\Lambda_G^0$ para $a$ entre 0 y $a_0$ . En $a = \alpha$ la función se anula. Cuando $a$ tiende a cero $\Lambda_G^0$ también lo hace. Entre 0 y $\alpha$ existe un único valor máximo definido como $\Lambda_b$ . (b) Comportamiento de $\Lambda_G^0$ para $a > a_0$ . La función tiene una cota inferior denotada por $\Lambda_c$ a la cual se aproxima de manera asintótica cuando $a$ tiende al infinito. . . . .	44
3.3.	Regiones permitidas para la evolución de $a$ delimitadas por la curva $\Lambda_G^0(a)$ en el caso $\Lambda_b > \Lambda_c$ . Es posible que el ancho del pulso evoluciones de tres maneras diferentes: puede crecer de manera indefinida ( $\Lambda \leq \Lambda_c$ ), puede oscilar ( $\Lambda_c < \Lambda < \Lambda_b$ ) o puede tender de manera asintótica a un valor ínfimo ( $\Lambda \geq \Lambda_b$ ). Estos posibles comportamientos están totalmente definidos por la posición de $\Lambda$ respecto de $\Lambda_c$ y $\Lambda_b$ . . . . .	45
3.4.	Comparativa entre dos pulsos difusivos con (a) $p = 0$ y (b) $p = 0.6\pi/2\delta$ . En ambos casos $a_0 = 0.7$ , $A_0 = 1.2$ , $b_0 = 0.005$ , $\delta = 0.1$ y $\Lambda = 0.008$ . . . . .	46
3.5.	Comparación de la evolución del ancho de los pulsos cuando $\Lambda = \Lambda_c$ (con $\Lambda_c$ dado por (3.104)), $a_0 = 1.2$ , $A_0 = 0.4$ , $\delta = 0.1$ , $p = 0$ y $b_0 = \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.05, \pm 0.005$ . . . . .	47
3.6.	Comparación de la evolución de $a$ con $\Lambda = (\Lambda_c + \Lambda_b)/2$ , $a_0 = 1.2$ , $A_0 = 0.4$ , $\delta = 0.1$ , $p = 0$ y $b_0 = \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.05, \pm 0.005$ . . . . .	48

3.7. Comparación de la evolución de  $a$  con  $\Lambda = \Lambda_b$  (determinado de forma numérica mediante el método del gradiente descendiente implementado en el Apéndice B.15),  $a_0 = 1.2$ ,  $A_0 = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $p = 0$  y  $b_0 = \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.05, \pm 0.005$ . . . 51

3.8. Regiones permitidas para la evolución de  $a$  delimitadas por la curva  $\Lambda_G^0(a)$  cuando  $\Lambda_c$  es mayor que  $\Lambda_b$ . En este caso no habrá manera de obtener pulsos oscilantes así que la solución se comportará como un solitón asintótico para  $\Lambda \geq \Lambda_b$  si  $b_0 < 0$  o  $\Lambda \geq \Lambda_c$  si  $b_0 > 0$ , mientras que el pulso será difusivo si  $\Lambda \leq \Lambda_b$  con  $b_0 < 0$  o  $\Lambda \leq \Lambda_c$  con  $b_0 > 0$ . . . . . 54

3.9. Evolución de  $a$  cuando  $\Lambda_c \geq \Lambda_b$ . Como condiciones iniciales se tiene  $a_0 = 10$ ,  $A_0 = 0.25$ ,  $\delta = 0.99$ ,  $p = 0$  y  $b_0 = \pm 0.025$ , valores que resultan en  $\Lambda_c = 5.58623$  y  $\Lambda_b = 2.73502$ . En la gráfica (a) se muestra un pulso difusivo para  $\Lambda < \Lambda_b$  mientras que en el gráfico (b) se muestran pulsos que evolucionan como solitones asintóticos cuando  $\Lambda > \Lambda_c$ . . . . . 55

3.10. Integración numérica de  $a$  para  $\Lambda$  entre  $\Lambda_c = 5.58623$  y  $\Lambda_b = 2.73502$  con condiciones iniciales  $a_0 = 10$ ,  $A_0 = 0.25$ ,  $\delta = 0.99$  y  $b_0 = \pm 0.025$ . . . . . 55

3.11. Esquema de la función  $\Lambda_G^0$  para  $\cos\{\delta p\} < 0$ . (a) Comportamiento de  $\Lambda_G^0$  para  $a$  entre 0 y  $a_0$ . En  $a = \alpha$  la función se anula. Cuando  $a$  tiende a cero  $\Lambda_G^0$  también lo hace. Entre 0 y  $\alpha$  existe un único valor mínimo definido como  $\Lambda_b$ . (b) Comportamiento de  $\Lambda_G^0$  para  $a > a_0$ . La función tiene una cota superior denotada por  $\Lambda_c < 0$  a la cual se aproxima de manera asintótica cuando  $a$  tiende al infinito. . . . . 56

3.12. Esquema de  $\Lambda_G^0$  en la decoherencia positiva cuando (a)  $\Lambda_c > \Lambda_b$  y cuando (b)  $\Lambda_c < \Lambda_b$ . . . . . 58



3.13. Evolución del ancho del pulso en la decoherencia positiva para diferentes valores de  $\Lambda$ . En los cuatro gráficos se utilizaron las condiciones iniciales  $a_0 = 1.2$ ,  $A_0 = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$  y  $p = \pi/\delta$ . En (a)  $b_0 = 0.5$  mientras que en (b)  $b_0 = -0.5$ . Por otro lado, en (c)  $b_0 = 1.4$  mientras que en (d)  $b_0 = -1.4$ . En (a) y en (b) los valores críticos de  $\Lambda$  están dados por  $\Lambda_b = -0.96946$  y  $\Lambda_c = -0.18816$  por lo que  $\Lambda_c > \Lambda_b$ , mientras que en (c) y (d) se tiene  $\Lambda_c = -1.04354$  y  $\Lambda_b = -0.93613$  con lo cual  $\Lambda_c < \Lambda_b$ . . . . . 59

3.14. Amplitud de los solitones variacionales bi-estables como función del ancho de los pulsos. . . . . 61

3.15. Solitones variacionales bi-estables obtenidos mediante la integración numérica del sistema (3.80)-(3.81) con los valores  $\delta = 0.75$ ,  $p = 0$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $A_0 = 0.3694$  (obtenido mediante (3.126)),  $a_0 = 0.15$  en el gráfico izquierdo y  $a_0 = 3.3932$  en el gráfico derecho. . . . . 61

3.16. Integración del sistema (3.80)-(3.82) con  $a = 1.4$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $b_0 = 0$ ,  $\Lambda = 1$  y  $A_0 = 0.11975$  (dado por (3.126)) en ambos gráficos. En (a)  $p = 0$  por lo que el pulso se mantiene centrado en  $x = 0$ , mientras que en (b)  $p = 1$  de tal manera que el pulso se moverá a lo largo del arreglo. . . . . 62

3.17. Norma de  $u_n$ , con el pulso inicialmente centrado en el elemento  $n = 0$  del arreglo, para (a) un solitón con chirp y (b) un solitón asintótico. En ambos casos se utilizaron los valores  $a_0 = 1.4$ ,  $A_0 = 1.2$ ,  $b_0 = 0.001$  y  $\delta = 0.1$ . Para la integración de la solución en (a) se tomaron en cuenta los valores  $p = \pi/2\delta$  y  $\Lambda = 1$  mientras que en (b) se hizo uso de  $p = \pi/4\delta$  y  $\Lambda = 0.0653$ . . . . . 64

B.1. Integración numérica del sistema (3.80)-(3.81) mediante un procedimiento adaptativo del método RK4 con las condiciones iniciales  $a_0 = 1.2$ ,  $b_0 = 0.001$ ,  $A_0 = 0.3$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $p = 0$  y  $\Lambda = 0.920717$  . . . . . 93

B.2. Determinación del mínimo valor mínimo de una función (curva punteada) para tres valores diferentes para  $\eta$ . a)  $\eta = 0.99$ , b)  $\eta = 0.35$  y c)  $\eta = 0.01$ . El punto azul corresponde al valor inicial mientras que el punto rojo es la posición final luego de 50 iteraciones. . . . . 95

B.3. Valor de  $\Lambda_b$  determinado mediante el método del gradiente descendiente con una tasa de integración adaptativa utilizando las condiciones iniciales  $a_0 = 1.2$ ,  $A_0 = 0.4$ ,  $b_0 = 0.5$ ,  $\delta = 0.1$  y  $p = 0$ . . . . . 99

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Un viajero impertérrito

En Agosto de 1834, un ingeniero civil escocés, de nombre John Scott Russell, observaba el paso de un bote tirado por caballos a gran velocidad el cual, al momento de frenar súbitamente, generó la formación de

[...] una solitaria elevación, un redondeado, suave y bien definido apilamiento de agua, que continuó su curso [...] aparentemente sin cambiar de forma o disminuir su velocidad (Scott Russell, 1855)

”solitaria elevación” que el mismo Russell bautizó como una *onda de traslación*.

La ausencia de una teoría matemática que describiera la emergencia de tal fenómeno resultó en un recibimiento hostil por parte de eminentes figuras tales como George Biddell Airy y George Gabriel Stokes. Los detractores objetaban con gran astucia mientras que los avances a favor de Russell eran lentos y atropellados debido al poco interés que la comunidad presentaba al respecto.

Tuvieron que pasar alrededor de sesenta años para que en 1895 Diederik Korteweg y Gustav de Vries descubren la ecuación que describe de forma correcta la evolución de este tipo de ondas, conocida como la *ecuación KdV* (Korteweg y de Vries, 1895), pero no fue hasta 1963 cuando Kruskal y Zabusky exponen su importancia al demostrar que dicho modelo emergía de forma natural

en la aproximación continua del modelo FPU (Kruskal y Zabusky, 1963) desarrollado por Enrico Fermi, John Pasta y Stanislaw Ulam (Fermi *et al.*, 1955) al proponer un sistema unidimensional de masas unidas por resortes cuya interacción fuera gobernada por un término no-lineal en la Ley de Hooke de tal manera que se pudiera arrojar algo de luz al misterio del por qué los sólidos tiene una conductividad de calor finita. Fermi esperaba que, dado un estado inicial en el que toda la energía se encontrara en el modo de oscilación más bajo (una condición inicial senoidal) el sistema se termalizaría después un lapso suficientemente prolongado, es decir, la energía se repartiría de manera equitativa en todos los modos de vibración del sistema, sin embargo, para sorpresa de los involucrados, la energía permanecía distribuida en los modos de vibración más bajos con una configuración periódica en el tiempo para nada trivial.

Fueron Kruskal y Zabusky (Kruskal y Zabusky, 1965) quienes descubrieron que dicho comportamiento se correspondía con un tren de ondas de traslación como las descritas por Russell, mas de cien años atrás, ondas que fueron bautizadas por los mismos Kruskal y Zabusky como *solitones*. Encontraron que si bien la interacción entre dos solitones se daba de forma no-lineal, el único remanente de dicho encuentro era un retraso de las fases, las ondas viajaban sin modificar su forma o velocidad. Dadas las condiciones de frontera periódicas del sistema, los solitones llegaban a un extremo reapareciendo en el otro, generando así el comportamiento periódico descrito por Fermi, Pasta y Ulam.

Con estos inesperados resultados se enciende la chispa que dio ignición a un intenso interés general en el estudio de los solitones en tan diversos e inesperados ámbitos.

## **1.2. Canales de vidrio**

Debido a la compensación de los efectos difusivos con los no-lineales, los solitones descritos por la ecuación KdV pueden recorrer grandes distancias sin cambiar su forma ni su velocidad, aún en presencia de otros solitones. Sin duda alguna, los trabajos de Kruskal y Zabusky convirtieron a los solitones en un tema bastante atractivo. La estabilidad de este tipo de ondas podría ser de gran

utilidad si se llegaran a propagar no mediante canales de agua, sino canales de vidrio, es decir, ondas electromagnéticas viajando a través de guías de vidrio. Tal cambio se dio en 1964 cuando Chiao, Garmire y Townes (Chiao *et al.*, 1964) expusieron las condiciones para que un haz electromagnético se propagara a través de un dieléctrico sin dispersarse. En 1973 Akira Hasegawa y Frederick Tappert anunciaron la posibilidad de generar pulsos de muy corta duración, lo suficientemente estables como para viajar largas distancias a través de fibras ópticas (Hasegawa y Tappert, 1973). El modelo propuesto por Hasegawa y Tappert que describiría la evolución de los pulsos está dado por la ecuación

$$i \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v_g \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_0 u \right) + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta |u|^2 u = 0 \quad (1.1)$$

siendo  $u(x, t)$  la amplitud del pulso,  $\nu_0$  la atenuación del dieléctrico y  $v_g$  la velocidad de grupo del pulso.

Su trabajo no era solo de carácter teórico. Gracias a la construcción del LASER en 1960 por el físico e ingeniero Theodore Harold Maiman, se podían emitir estos pulsos de luz si las fibras ópticas utilizadas para la transmisión eran lo suficientemente puras ya que, como Charles Kao Kuen y George Alfred Hockham lo demostraron en 1966, la luz propagada en los vidrios se disipa debido a las impurezas en el material (Kuen y Hockham, 1966). Seis años después de los trabajos de Hasegawa y Tappert se obtuvo una fibra cuya atenuación era unas 5000 veces menor que la de los vidrios fabricados hasta el momento (Miya *et al.*, 1979).

En 1980 Mollenaur et al. obtuvieron dos resultados con implicaciones revolucionarias en los ámbitos de las telecomunicaciones y de la física-matemática (Mollenaur *et al.*, 1980). Por un lado, lograron transmitir pulsos con una duración de 7 picosegundos a través de las nuevas guías purificadas haciendo posible la instalación del octavo cable transatlántico telefónico (TAT-8) en 1988, el primer cable hecho de fibras ópticas que conectó a Estados Unidos, Francia e Inglaterra, capaz de transmitir 20 megabits por segundo. Por otro lado, demostraron que en lugar del modelo propuesto por Hasegawa y Tappert la evolución de los pulsos se describía de manera más precisa mediante el

modelo

$$i\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u \quad (1.2)$$

visto desde un sistema de referencia que viaja a lo largo de la fibra con una velocidad igual a la velocidad de grupo del pulso. La importancia de este segundo resultado es que la ecuación (1.2), conocida como la ecuación *no-lineal de Schrödinger* (ecuación o modelo NLS), cuenta con propiedades matemáticamente interesantes y aplicaciones en una gran variedad de disciplinas. Su ubicuidad es tal que se considera como una de las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales más importantes de la física matemática.

### 1.3. Solitones multidisciplinares

El modelo propuesto por Mollenaur et al. ya había sido formulado (de forma más general) casi veinte años antes por Eugene P. Gross (Gross, 1961) y Lev Petrovich Pitaevskii (Pitaevskii, 1961), de forma independiente, para describir la dinámica de los condensados de Bose-Einstein. En 1972 Zakharov y Shabat (Zakharov y Shabat, 1972) demostraron que la ecuación (1.2) era totalmente integrable, es decir, que se podrían hallar sus soluciones explícitas mediante el método de *inverse scattering* desarrollado por Peter Lax (Lax, 1968) para resolver la ecuación KdV. El hecho de que el modelo NLS fuera totalmente integrable y que además describiera la propagación de solitones la convirtió en una ecuación lo suficientemente interesante como para que gran parte de la comunidad especializada en sistemas no-lineales le prestara mayor atención.

Si bien la ecuación no-lineal de Schrödinger se ha utilizado ampliamente para el estudio de la propagación de pulsos electromagnéticos a través de fibras ópticas y la dinámica de los condensados de Bose-Einstein, también se ha encontrado en el estudio de la dinámica no-lineal del ADN (Okaly *et al.*, 2018), en la transferencia de energía a lo largo de cadenas de moléculas (Davydov, 1979), en la propagación de ondas en plasmas (Fried y Ichikawa, 1973), en el entrenamiento de modelos de machine learning para la predicción de los precios en el mercado (Kartono *et al.*, 2020) y en el estudio de la formación de las galaxias (Kondoh *et al.*, 2000), por mencionar algunas de sus

muchas aplicaciones.

Los solitones de la ecuación NLS también se propagan a través de todo tipo de disciplinas.

## 1.4. Una discreta variación de la perspectiva

Si bien hay gran variedad de aplicaciones para la ecuación NLS ésta se ha visto mayormente presente en el estudio de la propagación de pulsos electromagnéticos a través de fibras ópticas y de los condensados de Bose-Einstein (en los cuales es conocida como la ecuación de Gross-Pitaevskii). En ambos casos, una variante muy interesante de la ecuación NLS se ha vuelto de gran interés y goza de una amplia gama de utilidades en todo tipo de disciplinas. Se trata de la ecuación *no-lineal de Schrödinger discreta* (ecuación DNLS, por sus siglas en inglés) descubierta por Theodore Holstein (Holstein, 1959) mientras estudiaba la dinámica de los electrones en una red cristalina. En dicho trabajo, el estado del sistema es expresado como la superposición lineal de funciones de onda centradas en cada una de las moléculas de la red cristalina. Al sustituir este modelo en la ecuación de Schrödinger que describe al sistema se obtiene una ecuación para la  $n$ -ésima amplitud que no solo involucra sus derivadas parciales respecto del tiempo y el espacio, sino que agrega, de forma lineal, los efectos de las amplitudes de probabilidad de las moléculas  $(n-1)$  y  $(n+1)$ -ésimas.

Si bien el modelo de Holstein corresponde a una ecuación del tipo DNLS la "forma estándar" de dicha ecuación fue introducida por Davydov y Kislukha (Davydov y Kislukha, 1973) en sus estudios sobre la propagación de *excitaciones solitarias* a lo largo de cadenas moleculares unidimensionales. En tales trabajos, la amplitud  $a_n$  de la probabilidad de que dicha excitación fuera encontrada en la  $n$ -ésima molécula evoluciona según el modelo

$$i\hbar \frac{\partial a_n}{\partial t} + M [a_{n+1} + a_{n-1}] - e a_n + G |a_n|^2 a_n = 0 \quad (1.3)$$

Once años después, J. C. Eilbeck et al. (Eilbeck *et al.*, 1984, 1985) generalizaron este modelo

mediante lo que ellos llamaron la ecuación DST (*discrete self-trapping*) dada por

$$i \frac{\partial a_j}{\partial t} + \gamma |a_j|^2 a_j + \epsilon \sum_k m_{jk} a_k = 0 \quad (1.4)$$

de tal manera que las amplitudes de probabilidad en cada molécula fueran afectadas no solo por sus vecinas más cercanas, sino también por el resto de moléculas en la cadena. Los investigadores estudiaron dicho modelo generalizado mediante un tratamiento variacional al descubrir que éste se podría deducir de la Lagrangiana

$$L = \sum_j \left[ \frac{1}{2} i \left( a_j^* \frac{\partial a_j}{\partial t} - a_j \frac{\partial a_j^*}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \gamma |a_j|^4 \right] + \epsilon \sum_{j,k} m_{jk} a_j^* a_k \quad (1.5)$$

aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales respecto de las amplitudes  $a_j$ .

Tal resultado sentaría las bases para tratamientos más profundos de la ecuación DNLS especialmente porque las cantidades conservadas del sistema podrían ser deducidas mediante las simetrías de ésta Lagrangiana, sin embargo, al igual que la ecuación NLS, éste modelo discreto tan rico en propiedades se vio aprovechado, de manera exclusiva, en el tratamiento de la materia condensada y al igual que el modelo NLS, su aprovechamiento en los estudios de redes ópticas no-lineales acopladas sacó a relucir su gran utilidad en la descripción de los sistemas discretos no-lineales.

Desarrollada la teoría para transmitir información mediante fibras ópticas, con pulsos de luz altamente estables, se dio un paso más en el avance de estas tecnologías cuando Stephen Jensen (Jensen, 1982) describió, teóricamente, la propagación de los pulsos electromagnéticos que viajan a través de dos guías de onda no-lineales muy próximas la una de la otra rodeadas de cierto material no-lineal no especificado. Jensen demostró que las *ondas evanescentes* en ambas guías generaban un intercambio de energía. Encontró que este intercambio se podría dar de dos formas: de manera oscilante o bien transfiriendo parte de la energía de una guía a la otra de forma permanente.

D. N. Christodoulides y R. I. Joseph (Christodoulides y Joseph, 1988) ampliaron el trabajo de Jensen estudiando la propagación de pulsos a través de un arreglo de fibras ópticas demostrando que la evolución del sistema se describía mediante el modelo discreto propuesto por Davydov y



Kislukha en sus estudios sobre la transferencia de energía en los polipéptidos y en trabajos subsecuentes A. B. Aceves et al. (Aceves *et al.*, 1996) estudiaron la interacción de solitones propagados en este nuevo arreglo retomando el tratamiento variacional de J. C. Eilbeck et al. (ecuación (1.5)). La confirmación experimental realizada por H. S. Eisenberg de estos trabajos al observar la propagación de *solitones discretos* en un arreglo de fibras ópticas posicionadas de forma paralela (Eisenberg *et al.*, 1998) dejó en claro la gran utilidad que el modelo DNLS podría llegar a tener en el estudio de diversos sistemas discretos no-lineales, desde el estudio de sistemas eléctricos (Marquie *et al.*, 1995) hasta la optimización en el costo computacional del entrenamiento de las redes neuronales (Borlenghi *et al.*, 2018).

Dada la importancia del modelo DNLS en el estudio de los sistemas discretos no-lineales se han desarrollado diversos métodos para arrojar algo de luz sobre algunas de sus propiedades, sin embargo, los tratamientos variacionales usuales resultan ser insatisfactorios ya que no justifican la práctica de ciertos procedimientos convenientemente aceptados. Es por ello que el principal objetivo de este trabajo es enfatizar la necesidad de una interpretación alternativa de la ecuación DNLS que cumpla con los requerimientos de continuidad necesarios en la elaboración de los métodos variacionales y poder contar con una manera de cuantificar la "intensidad" de los efectos discretos permitiendo una comparación más detallada entre éste y su contraparte continua, el modelo NLS. Para ello se realizará un repaso de los tratamientos variacionales usuales con el fin de identificar sus principales deficiencias y se introducirá un nuevo tratamiento del modelo DNLS basado en una *representación interpolativa* que permitirá un estudio variacional adecuado sin tener que despreciar los efectos discretos característicos de esta ecuación.

## 1.5. Estructura de la tesis

Esta tesis se estructura de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 se deriva la Ecuación No-lineal de Schrödinger Discreta a partir de su contraparte continua mediante dos métodos diferentes: por un lado, expresando el campo  $\Psi$  (cuya

evolución es descrita por la ecuación No-lineal de Schrödinger) como la superposición de funciones de onda localizadas distribuidas a lo largo de la coordenada transversal  $\xi$  en puntos igualmente espaciados; mientras que por otro lado, aproximando las derivadas respecto de las coordenadas transversales mediante diferencias finitas. Se introduce el método variacional de Anderson para el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales que pueden ser derivadas al aplicar un conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas a densidades Lagrangianas y se muestra cómo dicho método puede ser adaptado para estudiar variacionalmente las soluciones de sistemas descritos por el modelo DNLS.

En el Capítulo 3 se introduce un nuevo tratamiento variacional de la ecuación DNLS mediante lo que se ha denominado como una *representación interpolativa* del sistema. Se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas y la densidad Lagrangiana que generan dicho modelo y se aplica el método variacional de Anderson original para determinar de qué formas puede evolucionar un pulso con perfil inicialmente Gaussiana así como las condiciones bajo las cuales es posible obtener soluciones estacionarias y sus propiedades. Finalmente se muestra cómo la evolución de los pulsos localizados en el modelo DNLS tienden a comportarse de la misma manera que las soluciones del modelo NLS cuando los efectos discretos se vuelven irrelevantes.

En el Capítulo 4 se hace una lista de los resultados principales del tratamiento variacional desarrollado en el capítulo 3 y se presentan las conclusiones del trabajo en general.

En el Apéndice A se muestran los desarrollos explícitos para la obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas asociadas al modelo DNLS bajo la representación interpolativa, se desarrolla, paso a paso, la integración de la densidad Lagrangiana con una función de prueba Gaussiana para el tratamiento variacional de sistema y se demuestra la existencia y unicidad del umbral  $\Lambda_b$  el cual ayuda a determinar si los efectos no-lineales serán capaces de evitar que los pulsos se ensanchen sin límite alguno.

En el Apéndice B se muestran los programas desarrollados en Python para la integración numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante el método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden y para la determinación de los valores extremos de una función mediante el

método del gradiente descendiente, ambos implementados de forma adaptativa, con el fin de poseer mayor control en el manejo de los parámetros que intervienen en dichos cálculos.

# Capítulo 2

## Deducciones y tratamiento variacional del modelo DNLS

### 2.1. Derivaciones del modelo DNLS

Se parte del modelo NLS generalizado (o ecuación de Gross-Pitaevskii)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + (V + g|\Psi|^2) \Psi, \quad (2.1)$$

con  $a$  y  $g$  constantes, y  $V$  una función que puede depender tanto de  $\xi$  como de  $\tau$  (usualmente asociada a los potenciales externos que afectan al sistema). En general se supone que el campo  $\Psi$  puede ser expresado como la superposición de una *base completa ortonormal*  $\{\phi_m(\xi)\}_m$  (por ejemplo, funciones de Wannier) tal que

$$\Psi(\tau, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(\tau) \phi_m(\xi). \quad (2.2)$$

Sustituyendo (2.2) en (2.1) y proyectando en el  $n$ -ésimo estado  $\phi_n$ , es decir, multiplicando por

$\phi_n^*$  e integrando de  $-\infty$  a  $\infty$  respecto de  $\xi$ , tomando en cuenta la ortonormalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(\xi) \phi_m^*(\xi) d\xi = \delta_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(\xi) \phi_n^*(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

se obtiene

$$i \frac{dc_n}{d\tau} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( -\alpha c_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \phi_m}{d\xi^2} \phi_n^* d\xi + c_m \int_{-\infty}^{\infty} V \phi_m \phi_n^* d\xi + \sum_{n', m'=-\infty}^{\infty} g c_{m'} c_{n'}^* c_m U_{m' n' mn} \right), \quad (2.4)$$

con

$$U_{m' n' mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{m'} \phi_{n'}^* \phi_m \phi_n^* d\xi, \quad (2.5)$$

término conocido como *matriz de interacción*.

Integrando por partes el primer término dentro de la suma en (2.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \phi_m}{d\xi^2} \phi_n^* d\xi = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[ \frac{d\phi_m}{d\xi} \phi_n^* \right] \Big|_{-\xi}^{\xi} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_m}{d\xi} \frac{d\phi_n^*}{d\xi} d\xi, \quad (2.6)$$

dado que se espera encontrar soluciones localizadas, es decir, campos que se anulen en el infinito, se supone que  $\phi_m(\xi \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$  para todo  $m$ , así que el primer término del lado derecho en (2.6) se anula dando como resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \phi_m}{d\xi^2} \phi_n^* d\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_m}{d\xi} \frac{d\phi_n^*}{d\xi} d\xi. \quad (2.7)$$

Ya sea que el campo  $\Psi$  corresponda al estado de un condensado de Bose-Einstein sometido a un potencial externo periódico (Trombettoni y Smerzi, 2001), a la propagación de pulsos en arreglos de fibras ópticas (Christodoulides y Joseph, 1988) o a la dinámica de los electrones en una red cristalina (Holstein, 1959), la configuración del sistema suele ser tal que las funciones de onda  $\phi_n$  se encuentren *estrechamente confinadas*, es decir, que la transición del estado  $\phi_n$  al  $\phi_m$  solo se da entre vecinos inmediatos (entre los estados  $\phi_n$  y  $\phi_{n\pm 1}$ ). En consecuencia, los efectos de

*tunelamiento* (transición entre estados) se darán de la siguiente manera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_m}{d\xi} \frac{d\phi_n^*}{d\xi} d\xi = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} V \phi_m \phi_n^* d\xi = 0, \quad (2.8)$$

para todo  $m \neq n, n \pm 1$ .

Mediante la igualdad (2.7) y la condición (2.8) los primeros dos términos dentro de la suma en (2.4) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ -\alpha c_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \phi_m}{d\xi^2} \phi_n^* d\xi \right] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \alpha c_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_m}{d\xi} \frac{d\phi_n^*}{d\xi} d\xi \right] \\ &= \sum_{m=n-1}^{n+1} \left[ \alpha c_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_m}{d\xi} \frac{d\phi_n^*}{d\xi} d\xi \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

y

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ c_m \int_{-\infty}^{\infty} V \phi_m \phi_n^* d\xi \right] = \sum_{m=n-1}^{n+1} \left[ c_m \int_{-\infty}^{\infty} V \phi_m \phi_n^* d\xi \right]. \quad (2.10)$$

El mismo confinamiento de las funciones de onda  $\phi_n$  permite que solo se tomen en cuenta los términos de la forma  $U_n = U_{nnnn}$  (Marzari *et al.*, 2012) de tal manera que

$$\sum_{m,n',m'=-\infty}^{\infty} g c_{m'} c_{n'}^* c_m U_{m'n'mn} = g |c_n|^2 c_n U_n. \quad (2.11)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11) en (2.4) se obtiene la ecuación **no-lineal de Schrödinger discreta**

$$\boxed{i \frac{dc_n}{d\tau} = - (K^+ c_{n+1} + K^- c_{n-1}) + (\epsilon_n + U_n |c_n|^2) c_n}, \quad (2.12)$$

en donde

$$K^\pm = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \alpha \frac{d\phi_{n\pm 1}}{d\xi} \frac{d\phi_n^*}{d\xi} + \phi_{n\pm 1} V \phi_n^* \right] d\xi , \quad (2.13)$$

$$\epsilon_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \alpha \left( \frac{d\phi_n}{d\xi} \right)^2 + V |\phi_n|^2 \right] d\xi , \quad (2.14)$$

$$U_n = \int_{-\infty}^{\infty} g |\phi_n|^4 d\xi . \quad (2.15)$$

Las primeras dos cantidades tienen una interpretación física muy sencilla. Por un lado,  $K^\pm$  corresponde a la *tasa de transición* del estado  $\phi_n$  al  $\phi_{n\pm 1}$  y dependiendo de si  $K^+ = K^-$  o si  $K^+ \neq K^-$  se dirá que el sistema es *homogéneo* o *inhomogéneo*, respectivamente. Por otro lado,  $\epsilon_n$  se asocia a la energía del sistema en el  $n$ -ésimo estado, por ejemplo, tratándose de condensados de Bose-Einstein sometidos a la acción de potenciales periódicos  $\epsilon_n$  correspondería a la energía del sistema concentrada en el  $n$ -ésimo pozo del potencial. La cantidad  $U_n$  es considerada como un coeficiente que cuantifica la "intensidad" de la no-linealidad en el estado  $n$  y suele ser tomada como una constante.

En este trabajo se estudiarán los tipos de soluciones para los sistemas istrópicos descritos por el modelo

$$\boxed{i \frac{dc_n}{d\tau} = -K (c_{n+1} + c_{n-1}) + (\epsilon_n + U_n |c_n|^2) c_n} , \quad (2.16)$$

en el cual se ha tomado  $K^+ = K = K^-$  de tal manera que

$$K = - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \alpha \frac{d\phi_{n+1}}{d\xi} \frac{d\phi_n^*}{d\xi} + \phi_{n+1} V \phi_n^* \right) d\xi . \quad (2.17)$$

Otra deducción del modelo consiste en aproximar las derivadas respecto de las variables transversales mediante *diferencias finitas*

$$\frac{\partial \Psi(\tau, \xi)}{\partial \xi} \approx \frac{\Psi(\tau, \xi + \delta) - \Psi(\tau, \xi)}{\delta} , \quad \frac{\partial \Psi(\tau, \xi)}{\partial \xi} \approx \frac{\Psi(\tau, \xi) - \Psi(\tau, \xi - \delta)}{\delta} , \quad (2.18)$$

de tal manera que

$$\frac{\partial^2 \Psi(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} \approx \frac{\Psi(\tau, \xi + \delta) - 2\Psi(\tau, \xi) + \Psi(\tau, \xi - \delta)}{\delta^2}, \quad (2.19)$$

haciendo  $\epsilon = \delta^{-2}$  y sustituyendo (2.19) en (2.1), con  $V = 0$ , restringiendo los valores de  $\xi$  a puntos igualmente espaciados dados por  $n\delta$ , con  $\Psi_n(\tau) = \Psi(\tau, n\delta)$ , se obtiene la **ecuación no-lineal de Shcrödinger discreta** en su forma **estándar**

$$\boxed{i \frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau} = \epsilon [\Psi_{n+1}(\tau) - 2\Psi_n(\tau) + \Psi_{n-1}(\tau)] + g |\Psi_n(\tau)|^2 \Psi_n(\tau)}. \quad (2.20)$$

Si bien (2.20) corresponde a un caso especial de (2.12) sus deducciones son esencialmente diferentes y cada procedimiento motiva diversas interpretaciones del modelo DNLS que, en última instancia, resultan provechosas al complementarse mutuamente. Por un lado, la deducción del modelo (2.12) no solo permite una interpretación física más precisa de los elementos involucrados en esta ecuación, sino que también permite extender los tratamientos variacionales de la ecuación NLS al estudio de sistemas discretos cuya dinámica es gobernada por la ecuación DNLS, mientras que la aproximación de diferencias finitas con la que se deduce el modelo (2.20) inspira una perspectiva alternativa al permitir que las funciones de onda  $\Psi$ , cuya dinámica es descrita por la ecuación DNLS, puedan ser vistas como funciones continuas en las variables  $\tau$  y  $\xi$  sin perder los efectos de interacción discreta. Como se verá más adelante, el tratamiento "continuo" de la ecuación DNLS resulta ventajoso al momento de caracterizar sus soluciones de forma general mediante los tratamientos variacionales análogos al modelo NLS sin que se pierdan las propiedades discretas representativas de la ecuación DNLS.

Como se verá en capítulos posteriores, la sinergia de la perspectivas físicas y matemáticas de los modelos (2.12) y (2.20) inspiran una aproximación *interpolativa* con resultados mas generales y concretos que los tratamientos variacionales discretos usualmente desarrollados en el estudio de los sistemas discretos gobernados por el modelo DNLS y sus generalizaciones.



## 2.2. Método variacional de Anderson

D. Anderson y M. Bonnedal (1979) introdujeron un novedoso tratamiento de los sistemas no-lineales mientras investigaban la dinámica de haces de luz emitidos por un láser propagados a través de plasmas (Anderson y Bonnedal, 1979). Fue tal el éxito de su aproximación que en 1983 Anderson aplicó el método variacional a una ecuación que para ese momento ya gozaba de una fama inmensa en el ámbito de los sistemas no-lineales, sobre todo por su papel fundamental en la revolución de las fibras ópticas; la ecuación no-lineal de Schrödinger (Anderson, 1983). Siendo que la ecuación NLS ya había sido resuelta de forma explícita mediante el método de *inverse-scattering* resultó contundente el hecho de que este nuevo tratamiento podía predecir, de forma muy precisa, la dinámica de las soluciones que un sistema no-lineal podría tener. Si bien ambos artículos muestran de manera bastante clara el procedimiento variacional, no fue hasta el 2001 que el mismo Anderson, junto con los investigadores M. Lisak y A. Berntson, presentaron una generalización del tratamiento para poder ser aplicado a una amplia gama de modelos no-lineales continuos (Anderson *et al.*, 2001).

A continuación se introduce el método variacional de Anderson siguiendo la línea de investigación de Anderson, Lisak y Berntson.

Se parte de un modelo de la forma

$$\Psi = \Psi(\tau, \xi) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = P \left[ \Psi, \{D_j[\Psi]\}_{j=1}^n, \Psi^*, \{D_j[\Psi^*]\}_{j=1}^n \right], \quad (2.21)$$

donde  $\Psi$  es una función compleja que depende de una *variable de evolución*, denotada por  $\tau \in \mathbb{R}$ , y el vector  $\xi \in \mathbb{R}^r$  cuyas entradas son conocidas como *variables transversales*. En este modelo  $P$  es un operador no-lineal de evolución que depende tanto de  $\Psi$  como del conjunto de operadores diferenciales  $\{D_j\}_{j=1}^n$ , cada uno de grado  $j$  en las variables de evolución, aplicados a  $\Psi$ , al igual que de los complejos conjugados de dichas dependencias.

El método variacional requiere que el modelo (2.21) pueda ser deducido de una *densidad La-*

grangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \{D_j[\Psi]\}_{j=1}^n, \Psi^*, \frac{\partial \Psi^*}{\partial \tau}, \{D_j[\Psi^*]\}_{j=1}^n \right) \quad (2.22)$$

a través de un operador  $T$  que generaliza las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales, tal que

$$T \left[ \mathcal{L} \left( \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \{D_m[\Psi]\}_{j=1}^n, c.c. \right) \right] = 0 \iff \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = P \left[ \Psi, \{D_j[\Psi]\}_{j=1}^n, c.c. \right] \quad (2.23)$$

con *c.c.* los complejos conjugados de las dependencias explícitas.

Si bien el operador  $T$  puede ser determinado al minimizar la acción

$$S = \iint \mathcal{L} \left( \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \{D_j[\Psi]\}_{j=1}^n, c.c. \right) d\xi d\tau, \quad (2.24)$$

no hay un procedimiento estándar para deducir la forma explícita de la densidad Lagrangiana (2.22).

Con el fin de minimizar la acción (2.24) es importante notar que ésta debe de ser real ya que para maximizar o minimizar una función se hace uso de la propiedad de ordenamiento de los números reales y siendo que el conjunto de número complejos  $\mathbb{C}$  no posee un orden total lo más que se podría hacer al tener una acción compleja  $S = S_1 + iS_2$  es minimizar por separado  $S_1$  y  $S_2$  las cuales resultan ser reales, volviendo así al problema inicial de solamente tomar en cuenta acciones en  $\mathbb{R}$ . Dicho esto, considerando que  $\tau \in \mathbb{R}$  y  $\xi \in \mathbb{R}^r$ , la densidad Lagrangiana en (2.24) deberá de ser real.

Habiendo determinado la forma de  $\mathcal{L}$  se propone una *función de prueba* (o *ansatz*) localizada de la forma

$$\Psi(\tau, \xi) = F(\xi, p_1(\tau), p_2(\tau), \dots, p_s(\tau)), \quad (2.25)$$

con  $p_j$  parámetros (reales) cruciales para caracterizar de forma completa a los pulsos, por ejemplo, tratándose de un *ansatz* Gaussiano, los parámetros pueden corresponder a la amplitud, ancho espacial o fase del pulso.

Sustituyendo (2.25) en (2.24) el problema se convierte en la minimización de

$$S = \int L d\tau \quad (2.26)$$

$$\text{con } L = \int \mathcal{L} \left( F, \frac{\partial F}{\partial \tau}, \{D_j [F]\}_{j=1}^n, c.c. \right) d\xi. \quad (2.27)$$

Una vez realizada la integral (2.27) se obtiene una Lagrangiana (también referida como Lagrangiana promedio o efectiva) con dependencias de la forma  $L = L \left( \{p_j\}_{j=1}^s, \{\partial_\tau p_j\}_{j=1}^s, c.c. \right)$  de tal manera que la minimización de (2.26) se cumpla mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales

$$\frac{\partial L}{\partial p_j} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\tau p_j)} \right) \quad \text{para } j = 1, \dots, s, \quad (2.28)$$

lo que generará un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado para el conjunto de parámetros  $p_j$  (usualmente acoplado) cuya solución presentará un comportamiento muy cercano al de las soluciones reales del modelo (2.21).

Aunque no siempre es posible encontrar una densidad Lagrangiana de la forma (2.22) en muchos de éstos casos el operador  $P$  se puede separar como la suma de dos términos, uno que pueda ser deducido de alguna densidad Lagrangian y otro que no. Tal separación terminará agregando un término "disipativo" en la ecuación (2.28) permitiendo que el método variacional pueda ser aplicado a una extensa variedad de modelos, sin embargo, tal extensión no es de interés para este trabajo.

Es importante notar que si bien el método variacional fue desarrollado, en primer instancia, para el análisis de sistemas continuos, lo que se busca es poder encontrar una Lagrangiana efectiva que minimice la acción (2.26) mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.28) al ser evaluada en una función de prueba adecuada y dicha Lagrangiana puede ser la integral de un conjunto de variables de evolución o una suma discreta como en la ecuación (1.5) asociada al modelo DST desarrollada en (Eilbeck *et al.*, 1985). Gracias a esta posibilidad es como se logran realizar diversos tratamientos variacionales de la ecuación DNLS, los cuales serán discutidos a continuación.

## 2.3. Tratamiento variacional discreto del modelo DNLS

A diferencia de los modelos KdV y NLS, la ecuación DNLS resulta ser no-integrable, es decir, sus soluciones explícitas no pueden ser determinadas mediante el método de *inverse-scattering* (Levi *et al.*, 2008) por lo que se han buscado alternativas para describir, al menos de manera aproximada, la dinámica de sus soluciones.

El hecho de que éste modelo sea una discretización directa de la ecuación no-lineal de Schrödinger ha inspirado tratamientos variacionales que adaptan el método variacional de Anderson al notar que, esencialmente, solo se requiere de una Lagrangiana efectiva  $L$  cuyas dependencias permitan minimizar la acción  $S = \int L d\tau$  mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.28). En el caso de la ecuación DNLS, dicha Lagrangiana puede ser obtenida mediante dos procedimientos diferentes. Por un lado, de forma análoga al procedimiento con el que se dedujo la ecuación DNLS en el Capítulo 2.1, se puede utilizar la densidad Lagrangiana de la ecuación NLS expandiendo el campo  $\Psi$  como la superposición de ondas localizadas  $\phi_n$  para subsecuentemente promediar el resultado integrando respecto de la variable transversal  $\xi$  en todo  $\mathbb{R}$  deduciendo así un prospecto de Lagrangiana efectiva para la ecuación DNLS. Por otro lado, se puede partir no de la ecuación NLS sino del mismo modelo DNLS (Rasmussen *et al.*, 1998) al buscar un *Hamiltoniano efectivo* (real)  $H$  tal que las ecuaciones

$$i \frac{dc_n}{d\tau} = \frac{\delta H}{\delta c_n^*}, \quad (2.29)$$

den como resultado la ecuación DNLS, obteniendo la Lagrangiana efectiva mediante

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} i \left( c_n^* \frac{dc_n}{d\tau} - c_n \frac{dc_n^*}{d\tau} \right) - H. \quad (2.30)$$

En esta formulación no solo se toma en cuenta el producto de las variables conjugadas  $ic_n^*$  y  $(dc_n/d\tau)$ , sino que también su complejo conjugado de tal manera que la Lagrangiana resultante sea real.

La deducción de una Lagrangiana efectiva para el modelo DNLS es el paso más importante de

los tratamientos variacionales ya que de ello depende el que se pueda o no aplicar el método variacional de Anderson para poder predecir la evolución de las soluciones localizadas sin la necesidad de resolver el modelo en cuestión. Es por ello que a continuación se deducen las Lagrangianas de los dos métodos mencionados con el fin de identificar sus alcances y limitaciones para encontrar una solución general a éste problema.

### 2.3.1. Primer deducción de la Lagrangiana efectiva para el modelo DNLS

En ausencia de potenciales externos  $V = 0$  el modelo (2.1) se reduce a la ecuación

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + g |\Psi|^2 \Psi . \quad (2.31)$$

Se ha demostrado (Anderson, 1983) que esta ecuación puede ser obtenida mediante la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[ \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \tau} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right] + \alpha \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4 \quad (2.32)$$

al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange extendida dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\xi \Psi)} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\tau \Psi)} \right) . \quad (2.33)$$

El método variacional de Anderson requiere conocer la Lagrangiana efectiva (2.27) que en este caso corresponde a la integral, respecto de  $\xi$ , de la densidad (2.32). Para deducir la Lagrangiana efectiva del modelo DNLS se sustituye la expansión (2.2) en (2.32), el resultado se integra respecto de  $\xi$  de  $-\infty$  a  $\infty$  haciendo uso de las condiciones de ortonormalidad y de confinamiento estrecho de las funciones  $\phi_n(\xi)$  (véase el Capítulo 2.1). El resultado de tal aproximación es (Gligoric *et al.*,

2008)

$$L_{DNLS} = \frac{i}{2} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left[ c_n \frac{dc_m^*}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \phi_m^* d\xi - c_m^* \frac{dc_n}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \phi_m d\xi \right] \quad (2.34)$$

$$+ \alpha \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_n c_m^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_n}{d\xi} \frac{d\phi_m^*}{d\xi} d\xi \quad (2.35)$$

$$+ \frac{g}{2} \sum_{n,m,n',m'=-\infty}^{\infty} c_{m'} c_{n'}^* c_m c_n^* U_{m'n'mn} d\xi, \quad (2.36)$$

con  $U_{m'n'mn}$  la matriz de interacción dada por (2.5). Aplicando (2.3), (2.8) y (2.11) a (2.34), (2.35) y (2.36), respectivamente, bajo la condición de homogeneidad  $K^+ = K = K^-$ , se obtiene la Lagrangiana efectiva del modelo DNLS (2.12) en ausencia de potenciales externos

$$L_{DNLS}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \left[ c_n \frac{dc_n^*}{d\tau} - c_n^* \frac{dc_n}{d\tau} \right] - K [c_{n+1}^* + c_{n-1}^*] c_n + \epsilon_n |c_n|^2 + \frac{1}{2} U_n c_n^2 (c_n^*)^2 \right) \quad (2.37)$$

con  $\epsilon_n$ ,  $U_n$  y  $K$  dados por (2.14), (2.15) y (2.17), respectivamente, al tomar  $V = 0$ . La aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L_{DNLS}}{\partial c_n} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L_{DNLS}}{\partial (dc_n/d\tau)} \right) \quad (2.38)$$

da como resultado la ecuación (2.12) sin importar que  $V$  sea igual o distinta de cero por lo que (2.37) puede ser considerada como la Lagrangiana efectiva del modelo DNLS para el caso general en el que se incluye  $V \neq 0$ .

Si bien la deducción de esta Lagrangiana sigue el mismo desarrollo con el que se dedujo el modelo DNLS en el Capítulo 2.1, es importante resaltar una restricción muy importante que se le debe de imponer a las amplitudes  $c_n$  para que  $L_{DNLS}^{(1)}$  pueda ser utilizada en el método variacional

de Anderson. Observese que el término

$$\kappa_n = K [c_{n+1}^* + c_{n-1}^*] c_n \quad (2.39)$$

en general, podría no ser real, de tal forma que  $L_{DNLS}^{(1)}$  podría tomar valores complejos. Tal problemática puede ser resuelta al establecer la condición de que  $\kappa_n \in \mathbb{R}$  la cual se cumple si y solo si

$$\text{Im} \{c_{n+1}^* c_n\} = -\text{Im} \{c_{n-1}^* c_n\} . \quad (2.40)$$

Por otro lado, la suma que involucra al término  $\kappa_n$  podría ser reordenada de la siguiente manera

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K [c_{n+1}^* + c_{n-1}^*] c_n = K \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+1}^* c_n + K \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-1}^* c_n \quad (2.41)$$

$$= K \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+1}^* c_n + K \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* c_{n+1} \quad (2.42)$$

$$= K \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{n+1}^* c_n + c_{n+1} c_n^*) , \quad (2.43)$$

siendo que en el paso de (2.41) a (2.42) se realizó el cambio de variable  $n \rightarrow n + 1$  en la suma que involucra al término  $c_{n-1}^* c_n$ . Como se puede ver (2.43) es real, así que al sustituir éste término en  $L_{DNLS}^{(1)}$  se obtendrá una Lagrangiana real de la forma

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \left( c_n \frac{dc_n^*}{d\tau} - c_n^* \frac{dc_n}{d\tau} \right) - K (c_{n+1}^* c_n + c_{n+1} c_n^*) + \right. \\ \left. + \epsilon_n |c_n|^2 + \frac{1}{2} U_n c_n^2 (c_n^*)^2 \right) . \quad (2.44)$$

Esta expresión es muy recurrente en los estudios que involucran al modelo DNLS (Trombettoni y Smerzi, 2001; Gligoric *et al.*, 2008; Kaup, 2005), sin embargo, el reordenamiento de las sumas infinitas podría dar como resultado una suma no-convergente por lo que éste proceder no resuelve la problemática de forma satisfactoria.

### 2.3.2. Segunda deducción de la Lagrangiana efectiva del modelo DNLS

En esta segunda deducción se puede ver que al sustituir

$$H_{DNLS} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( -\text{Re} \{K [c_{n+1} + c_{n-1}] c_n^*\} + \epsilon_n |c_n|^2 + \frac{1}{2} U_n |c_n|^4 \right) \quad (2.45)$$

en (2.29) se obtiene (2.12) de tal manera que la Lagrangiana efectiva será

$$L_{DNLS}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( -\frac{i}{2} \left( c_n \frac{dc_n^*}{d\tau} - c_n^* \frac{dc_n}{d\tau} \right) + \text{Re} \{K [c_{n+1} + c_{n-1}] c_n^*\} - \epsilon_n |c_n|^2 - \frac{1}{2} U_n |c_n|^4 \right). \quad (2.46)$$

Si  $\kappa_n$ , dado por (2.39), es real entonces  $L_{DNLS}^{(2)} = -L_{DNLS}^{(1)}$ , es decir, la Lagrangiana (2.46) generaliza a la Lagrangiana (2.37) admitiendo un conjunto de funciones  $c_n$  mucho más grande y versátil para describir a las soluciones del modelo DNLS de forma más completa.

En el siguiente capítulo se desarrollará una perspectiva diferente con la cual se justificará de manera formal y sin ambigüedades la obtención, no solo de una densidad Lagrangiana para el modelo DNLS homogéneo (2.16), sino también, de las ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas asociadas a ésta ecuación con las cuales se deducirán las cantidades conservadas del sistema y se estudiarán las evoluciones de las soluciones localizadas mediante el método variacional de Anderson aplicado en su forma original esquematizada en el Capítulo 2.2.



# Capítulo 3

## Tratamiento variacional interpolativo del modelo DNLS homogéneo

### 3.1. Representación interpolativa

A continuación se introduce la representación interpolativa del modelo DNLS con la que se planea desarrollar un tratamiento variacional más apropiado en comparación a los realizados tradicionalmente.

En primer lugar, obsérvese que el modelo (2.16) es equivalente a

$$i \frac{\partial c_n}{\partial t} + (c_{n+1} + c_{n-1}) + (\Gamma + \Lambda |c_n|^2) c_n = 0 \quad (3.1)$$

al tomar

$$t = \tau \cdot K, \quad \Gamma = -\frac{\epsilon_n}{K}, \quad \Lambda = -\frac{U_n}{K}. \quad (3.2)$$

Partiendo de éste modelo equivalente, se propone  $u : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  de clase  $C^2$  (sus segundas derivadas existen y son continuas) tal que  $u(n\delta, t) = c_n(t)$  con  $\delta \in \mathbb{R}$  una constante. De

esta manera la ecuación (3.1) se verá como

$$i \frac{\partial u(n\delta, t)}{\partial t} + [u((n+1)\delta, t) + u((n-1)\delta, t)] + [\Gamma + \Lambda |u(n\delta, t)|^2] u(n\delta, t) = 0. \quad (3.3)$$

Ahora, se define el operador de traslación

$$T_N[u](x, t) = u(x + N\delta, t), \quad (3.4)$$

por lo que el modelo (3.3) se convierte en

$$i \frac{\partial T_n[u](0, t)}{\partial t} + [T_{n+1}[u](0, t) + T_{n-1}[u](0, t)] + [\Gamma + \Lambda |T_n[u](0, t)|^2] T_n[u](0, t) = 0. \quad (3.5)$$

Obsérvese que la red puede ser recorrida variando a  $x$  en lugar de  $n$  en un proceso de *interpolación* de las amplitudes  $c_n$  como el mostrado en la figura 3.1.

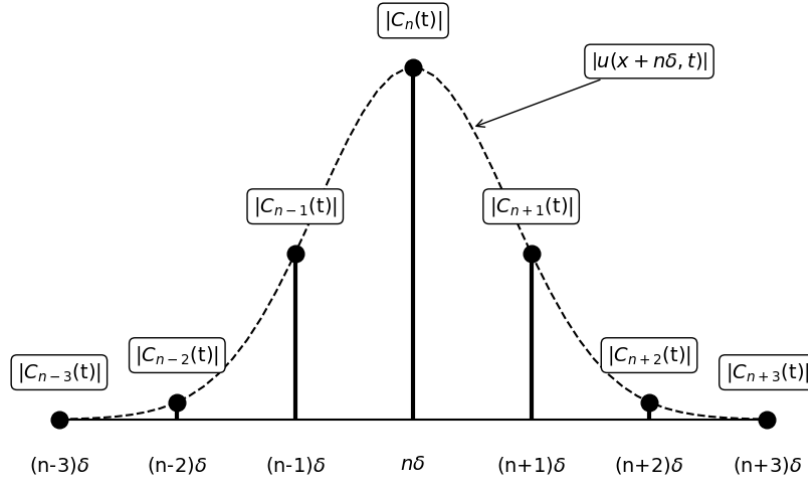


Figura 3.1: Esquema de la aproximación interpolativa del modelo DNLS.

Así  $n$  se mantendrá fijo mientras que  $x$  tomará valores en todo  $\mathbb{R}$  de forma continua. Introduciendo la notación  $u_n(x, t) = T_n[u](x, t)$  y tomando en cuenta que  $T_{m+n}[u](x, t) = u(x + (n + m)\delta, t) = T_m[u](x + n\delta, t) = T_m[T_n[u]](x, t) = T_m[u_n](x, t)$ , el modelo (3.3) será equivalente a

$$i \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} + [T_1[u_n](x, t) + T_{-1}[u_n](x, t)] + [\Gamma + \Lambda |u_n(x, t)|^2] u_n(x, t) = 0. \quad (3.6)$$

## 3.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas

Si el modelo (3.6) puede ser deducido de una densidad Lagrangiana ésta debe de contar con las siguientes dependencias

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_n, u_{n,t}, T_1[u_n], T_{-1}[u_n], c.c.) \quad (3.7)$$

con  $u_{n,t}$  la derivada de  $u_n$  respecto de  $t$  y con  $c.c.$  representado las mismas dependencias descritas explícitamente pero tomando el complejo conjugado de  $u_n$  (denotado por  $u_n^*$ ) en lugar de la misma  $u_n$ . A demás, se supone que las soluciones se anulan en el infinito, es decir,  $u_n(x \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0$  para todo  $t$ .

Para determinar la forma de esta densidad se requiere encontrar la ecuación de Euler-Lagrange extendida del modelo DNLS mediante la minimización de la acción

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(u_n, u_{n,t}, T_1[u_n], T_{-1}[u_n], c.c.) dt dx . \quad (3.8)$$

Se define

$$q_n(x, t, \alpha) = u_n(x, t) + \alpha \cdot \eta_n(x, t) \quad (3.9)$$

con  $\eta_n(x \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0$  de tal manera que la acción

$$S(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(q_n(x, t, \alpha), q_{n,t}(x, t, \alpha), T_1[q_n](x, t, \alpha), T_{-1}[q_n](x, t, \alpha), c.c.) dt dx \quad (3.10)$$

alcance su mínimo en  $\alpha = 0$ , es decir

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 . \quad (3.11)$$

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \frac{\partial q_{n,t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_1[q_n]} \frac{\partial T_1[q_n]}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{-1}[q_n]} \frac{\partial T_{-1}[q_n]}{\partial \alpha} \right) dt dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} (c.c.) dt dx , \end{aligned} \quad (3.12)$$

lo que se reduce a (Apéndice A.1)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_1[q_n]} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{-1}[q_n]} \right] \right) \eta_n dt dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c.c.) \eta_n^* dt dx . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Evaluando  $\alpha = 0$  y aplicando la independencia lineal de los conjugados complejos ( $a_1 \eta_n + a_2 \eta_n^* = 0 \Rightarrow a_1 = 0 = a_2$ ) se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange extendida del modelo DNLS (3.6)

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_n} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u_n)} \right) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (T_1[u_n])} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (T_{-1}[u_n])} \right] = 0 .} \quad (3.14)$$

Antes de buscar la forma explícita de la densidad Lagrangiana generadora de la ecuación (3.6) a través de (3.14) se pueden estudiar las propiedades conservadas de los sistemas cuyas densidades Lagrangianas posean las dependencias (3.7).

### 3.3. Hamiltoniano y conservación del momento

Por simplicidad, se introduce la notación  $u_{n+m} = T_m[u_n]$  y  $u_{n,p} = \partial_p(u_n)$  para  $p = x, t$  y mediante la regla de la cadena

$$\frac{d\mathcal{L}}{dp} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} \frac{\partial u_{n,t}}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n+1}} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial p} + c.c. , \quad (3.15)$$

en donde  $c.c.$  indica el mismo conjunto de términos explícitos del lado derecho de la igualdad pero tomando  $u_n^*$  en lugar de  $u_n$ .

Sustituyendo  $\partial\mathcal{L}/\partial u_n$  de (3.14)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dp} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} \right) - T_{-1} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{n+1}} \right] - T_1 \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{n-1}} \right] \right) \frac{\partial u_n}{\partial p} \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} \frac{\partial u_{n,t}}{\partial p} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{n+1}} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial p} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial p} . \end{aligned} \quad (3.16)$$

+ c.c.

Por un lado

$$T_{-N} [T_N [u_n]] = u_n = T_N [T_{-N} [u_n]] , \quad (3.17)$$

mientras que, dadas  $f$  y  $g$  funciones de  $(x, t)$

$$T_N [f \cdot g] (x, t) = T_N [f] (x, t) \cdot T_N [g] (x, t) , \quad (3.18)$$

$$T_N [f + g] (x, t) = T_N [f] (x, t) + T_N [g] (x, t) , \quad (3.19)$$

al ser  $u_n$  de clase  $C^2$ , las parciales cruzadas serán iguales  $\partial_t (\partial_x u_n) = \partial_x (\partial_t u_n)$  así que en general  $\partial_t (\partial_p u_n) = \partial_p (\partial_t u_n)$ , además

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_N [u_n] (x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u_n (x + N\delta, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_n (x + N\delta, t)}{\partial (x + N\delta)} \frac{\partial (x + N\delta)}{\partial x} \\ &= \left. \frac{\partial u_n (x, t)}{\partial x} \right|_{x=x+N\delta} \\ &= T_N \left[ \frac{\partial u_n (x, t)}{\partial x} \right] , \end{aligned} \quad (3.20)$$

que junto con el hecho de que  $T_N [\partial_t (u_n)] = \partial_\tau (T_N [u_n])$ , ya que el operador  $T_N$  solo actúa sobre la coordenada  $x$ , se obtiene

$$T_N \left[ \frac{\partial u_n}{\partial p} \right] = \frac{\partial}{\partial p} (T_N [u_n]) . \quad (3.21)$$

Aplicando (3.17)-(3.21) a (3.16) se llega a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dp} = & \frac{\partial}{\partial t} \left( u_{n,p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} + u_{n,p}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}^*} \right) - T_{-1} \left[ u_{n+1,p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n+1}} + u_{n+1,p}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n+1}^*} \right] \\ & - T_1 \left[ u_{n-1,p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n-1}} + u_{n-1,p}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n-1}^*} \right] + \left( u_{n+1,p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n+1}} + u_{n+1,p}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n+1}^*} \right) \\ & + \left( u_{n-1,p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n-1}} + u_{n-1,p}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n-1}^*} \right) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Definiendo

$$k_p^\pm = u_{n\pm 1,p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n\pm 1}} + u_{n\pm 1,p}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n\pm 1}^*} , \quad (3.23)$$

$$k_p = u_{n,p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} + u_{n,p}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}^*} , \quad (3.24)$$

entonces, la ecuación (3.22) se convierte en

$$\frac{\partial k_p}{\partial t} - \frac{d\mathcal{L}}{dp} = (T_{-1} [k_p^+] - k_p^+) + (T_1 [k_p^-] - k_p^-) . \quad (3.25)$$

Integrando respecto de  $x$  desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  el lado derecho se anula ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_{\pm 1} [k_p^\mp] (x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} k_p^\mp (x \pm \delta, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} k_p^\mp (x', t) dx' , \quad (3.26)$$

con  $x' = x \pm \delta$ , resultando en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial k_p}{\partial t} - \frac{d\mathcal{L}}{dp} dx = 0 . \quad (3.27)$$

Cada variable genera una cantidad conservada diferente. Por un lado,  $p = t$  corresponde a la conservación del Hamiltoniano del sistema

$$\boxed{H = \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_{n,t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} + u_{n,t}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}^*} - \mathcal{L} \right) dx} \quad (3.28)$$

mientras que  $p = x$  resulta en la conservación del momento

$$M = - \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_{n,x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} + u_{n,x}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}^*} \right) dx , \quad (3.29)$$

en donde se ha aplicado el hecho de que todos los campos considerados  $u_n$ , así como sus derivadas, se anulan en  $x \rightarrow \pm\infty$  y en consecuencia las densidades Lagrangianas que dependan de ellas también lo hará.

Las cantidades H y M se conservan sin importar la forma de  $\mathcal{L}$  siempre y cuando los modelos que describan sean obtenidos mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas dadas por (3.14). El resto de cantidades conservadas en el sistema están asociadas a las simetrías de la acción (3.8) mediante el *Teorema de Noether* el cual se desarrolla a continuación.

### 3.4. Teorema de Noether

En el siguiente desarrollo se siguen los mismos pasos que el estudio del Teorema de Noether aplicado al modelo NLS presentado en (Sulem y Sulem, 1999).

Por simplicidad se hará uso de la convención de suma para los índices repetidos con  $i = 1, 2$  y  $\mu = 0, 1$ , y se utilizará la notación  $\mathbf{u}_n = (\mathbf{u}_{n,1}, \mathbf{u}_{n,2}) = (u_n, u_n^*)$ ,  $\chi = (\chi_0, \chi_1) = (t, x)$  y  $\partial = (\partial_0, \partial_1) = (\partial_t, \partial_x)$  de tal manera que la acción (3.8) se verá como

$$S \{ \mathbf{u}_n \} = \iint_{\mathcal{D}} \mathcal{L} (\mathbf{u}_n, \partial_0 (\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_{n-1}) d\chi \quad (3.30)$$

con  $\mathcal{D}$  el dominio de integración.

Ahora bien, se tomará en cuenta el grupo de transformaciones  $T^\epsilon$  dado por

$$\chi \mapsto \tilde{\chi} (\chi, \mathbf{u}_n, \epsilon) , \quad \mathbf{u}_n \mapsto \tilde{\mathbf{u}}_n (\chi, \mathbf{u}_n, \epsilon) , \quad (3.31)$$

en donde se supondrá que tanto  $\tilde{\chi}$  como  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  son diferenciables respecto de  $\epsilon$ . Además, si  $\epsilon = 0$  la

transformación corresponderá a la identidad y si  $\epsilon$  es infinitesimal

$$\tilde{\chi} = \chi + \delta\chi, \quad \tilde{\mathbf{u}}_n = \mathbf{u}_n + \delta\mathbf{u}_n, \quad (3.32)$$

con  $\delta\chi$  y  $\delta\mathbf{u}_n$  proporcionales a  $\epsilon$ . Bajo la transformación (3.31) el dominio de integración  $\mathcal{D}$  cambia a  $\tilde{\mathcal{D}}$ ,  $\mathbf{u}_n(\chi)$  se transforma en  $\tilde{\mathbf{u}}_n(\tilde{\chi})$ , y  $\partial$  se convertirá en  $\tilde{\partial}$  correspondiente al operador de derivadas parciales asociadas a las componentes de  $\tilde{\chi}$ . Es así como la acción (3.30) se transformará en

$$\tilde{S}\{\tilde{\mathbf{u}}_n\} = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\partial}_0(\tilde{\mathbf{u}}_n), \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n-1}) d\tilde{\chi}. \quad (3.33)$$

Cuando  $\epsilon$  es infinitesimal el Jacobiano de la transformación (3.31) puede ser aproximado a los términos de primer orden de la siguiente manera

$$\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\chi} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial\delta\chi_0}{\partial\chi_0} & \frac{\partial\delta\chi_0}{\partial\chi_1} \\ \frac{\partial\delta\chi_1}{\partial\chi_0} & 1 + \frac{\partial\delta\chi_1}{\partial\chi_1} \end{pmatrix} \approx 1 + \frac{\partial\delta\chi_0}{\partial\chi_0} + \frac{\partial\delta\chi_1}{\partial\chi_1}, \quad (3.34)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \tilde{S}\{\tilde{\mathbf{u}}_n\} &= \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\partial}_0(\tilde{\mathbf{u}}_n), \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n-1}) d\tilde{\chi} \\ &+ \iint_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\partial}_0(\tilde{\mathbf{u}}_n), \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n-1}) \frac{\partial\delta\chi_\mu}{\partial\chi_\mu} d\chi. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ahora bien, se define la variación de la acción

$$\delta S = \tilde{S}\{\tilde{\mathbf{u}}_n\} - S\{\mathbf{u}_n\} \quad (3.36)$$



la cual, en el régimen infinitesimal, se puede ver como

$$\begin{aligned} \delta S = & \iint_{\mathcal{D}} \left[ \mathcal{L} \left( \tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\partial}_0 (\tilde{\mathbf{u}}_n), \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n-1} \right) - \mathcal{L} \left( \mathbf{u}_n, \partial_0 (\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_{n-1} \right) \right] d\chi \\ & + \iint_{\mathcal{D}} \mathcal{L} \left( \tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\partial}_0 (\tilde{\mathbf{u}}_n), \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n-1} \right) \frac{\partial \delta \chi_\mu}{\partial \chi_\mu} d\chi . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Hasta términos de primer orden se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} = & \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n,i}} (\tilde{\mathbf{u}}_{n,i} - \mathbf{u}_{n,i}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n+1,i}} (\tilde{\mathbf{u}}_{n+1,i} - \mathbf{u}_{n+1,i}) \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n-1,i}} (\tilde{\mathbf{u}}_{n-1,i} - \mathbf{u}_{n-1,i}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \left( \tilde{\partial}_0 (\tilde{\mathbf{u}}_{n,i}) - \partial_0 (\mathbf{u}_{n,i}) \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

con  $\mathcal{L}$  la densidad Lagrangiana evaluada en  $(\mathbf{u}_n, \chi)$  y  $\tilde{\mathcal{L}}$  la densidad Lagrangiana evaluada en la transformación (3.31). De la misma manera, haciendo uso de la definición (3.32) se procede a expandir  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  hasta términos de primer orden de la siguiente manera

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n,i} = \mathbf{u}_{n,i} + \partial_\mu (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_\mu + \delta \mathbf{u}_{n,i} , \quad (3.39)$$

con lo cual

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i} \equiv \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} - \mathbf{u}_{n,i} = \partial_\mu (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_\mu + \delta \mathbf{u}_{n,i} . \quad (3.40)$$

Obsérvese que en general  $\delta \hat{\mathbf{u}}_{n\pm 1,i} \neq T_{\pm 1} [\delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}]$  ya que

$$T_{\mp 1} [\delta \hat{\mathbf{u}}_{n\pm 1,i}] = T_{\mp 1} [\partial_\mu (\mathbf{u}_{n\pm 1,i}) \delta \chi_\mu + \delta \mathbf{u}_{n\pm 1,i}] = \partial_\mu (\mathbf{u}_{n,i}) T_{\mp 1} [\delta \chi_\mu] + \delta \mathbf{u}_{n,i} . \quad (3.41)$$

Por otro lado

$$\partial_0 = \frac{\partial \tilde{\chi}_\mu}{\partial \chi_0} \tilde{\partial}_\mu = \left( \delta_{0\mu} + \frac{\partial \delta \chi_\mu}{\partial \chi_0} \right) \tilde{\partial}_\mu , \quad (3.42)$$

habiendo hecho uso de (3.32) en la segunda igualdad, de esta manera

$$\tilde{\partial}_0 - \partial_0 = -\frac{\partial \delta \chi_\mu}{\partial \chi_0} \tilde{\partial}_\mu , \quad (3.43)$$

así que

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_0 \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} - \partial_0 \mathbf{u}_{n,i} &= (\tilde{\partial}_0 - \partial_0) \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} + \partial_0 (\tilde{\mathbf{u}}_{n,i} - \mathbf{u}_{n,i}) \\ &= -\frac{\partial \delta \chi_\mu}{\partial \chi_0} \tilde{\partial}_\mu (\tilde{\mathbf{u}}_{n,i}) + \partial_0 (\delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}) .\end{aligned}\quad (3.44)$$

Sustuyendo (3.40) y (3.44), así como las propiedades (3.17)-(3.21), en (3.38) se obtiene

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n,i}} \delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i} + T_1 \left[ T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n+1,i}} \right] T_{-1} [\delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}] \right] + T_{-1} \left[ T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n-1,i}} \right] T_1 [\delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}] \right] \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \left( -\frac{\partial \delta \chi_\mu}{\partial \chi_0} \tilde{\partial}_\mu (\tilde{\mathbf{u}}_{n,i}) + \partial_0 (\delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}) \right)\end{aligned}\quad (3.45)$$

con  $\delta \mathcal{L} \equiv \tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L}$ .

Sustituyendo  $\tilde{\mathcal{L}} \mapsto \mathcal{L}$  en la segunda integral de (3.37) y (3.45) en la primer integral, tomando en cuenta que las traslaciones espaciales no afectan la evaluación de las integrales, se obtiene

$$\begin{aligned}\delta S &= \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n,i}} \delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i} + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n+1,i}} \right] T_{-1} [\delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1,i}] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n-1,i}} \right] T_1 [\delta \hat{\mathbf{u}}_{n-1,i}] \right) d\chi \\ &\quad + \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \left( -\frac{\partial \delta \chi_\mu}{\partial \chi_0} \tilde{\partial}_\mu (\tilde{\mathbf{u}}_{n,i}) + \partial_0 (\delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}) \right) d\chi \\ &\quad + \iint_{\mathcal{D}} \mathcal{L} \frac{\partial \delta \chi_\mu}{\partial \chi_\mu} d\chi .\end{aligned}\quad (3.46)$$

En la segunda integral, mediante (3.40), se puede realizar la aproximación

$$-\frac{\partial \delta \chi_\mu}{\partial \chi_0} \tilde{\partial}_\mu (\tilde{\mathbf{u}}_{n,i}) + \partial_0 (\delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}) \approx \partial_{\mu 0}^2 (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_\mu + \partial_0 (\delta \mathbf{u}_{n,i}) \quad (3.47)$$

con lo cual, aplicando (3.41)

$$\begin{aligned}
 \delta S = \iint_{\mathcal{D}} d\chi \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n,i}} (\partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_{\mu} + \delta \mathbf{u}_{n,i}) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n+1,i}} \right] (\partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n,i}) T_{-1} [\delta \chi_{\mu}] + \delta \mathbf{u}_{n,i}) \right. \\
 + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n-1,i}} \right] (\partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n,i}) T_1 [\delta \chi_{\mu}] + \delta \mathbf{u}_{n,i}) \\
 \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} (\partial_{\mu 0}^2 (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_{\mu} + \partial_0 (\delta \mathbf{u}_{n,i})) + \mathcal{L} \frac{\partial \delta \chi_{\mu}}{\partial \chi_{\mu}} \right). \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Por las reglas de la cadena y el producto

$$\begin{aligned}
 \partial_{\mu} (\mathcal{L} \delta \chi_{\mu}) = \mathcal{L} \frac{\partial \delta \chi_{\mu}}{\partial \chi_{\mu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \partial_{\mu 0}^2 (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n,i}} \partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_{\mu} \\
 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n+1,i}} \partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n+1,i}) \delta \chi_{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n-1,i}} \partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n-1,i}) \delta \chi_{\mu}. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones (3.17)-(3.21) y tomando en cuenta que las traslaciones espaciales no afectan la forma de la integración, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathcal{D}} \partial_{\mu} (\mathcal{L} \delta \chi_{\mu}) d\chi = \iint_{\mathcal{D}} d\chi \left( \mathcal{L} \frac{\partial \delta \chi_{\mu}}{\partial \chi_{\mu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \partial_{\mu 0}^2 (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n,i}} \partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_{\mu} \right. \\
 + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n+1,i}} \right] T_{-1} [\delta \chi_{\mu}] \partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n,i}) \\
 \left. + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n-1,i}} \right] T_1 [\delta \chi_{\mu}] \partial_{\mu} (\mathbf{u}_{n,i}) \right). \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.48)

$$\begin{aligned}
 \delta S = \iint_{\mathcal{D}} d\chi \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n,i}} + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n+1,i}} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{n-1,i}} \right] \right) \delta \mathbf{u}_{n,i} \right. \\
 \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \partial_0 (\delta \mathbf{u}_{n,i}) + \partial_{\mu} (\mathcal{L} \delta \chi_{\mu}) \right]. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

El primer término de la integral se puede sustituir por  $\partial_0 (\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i}))$  mediante las ecuacio-

nes de Euler-Lagrange (3.14) así que  $\delta S$  se verá como

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \partial_0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \delta \mathbf{u}_{n,i} + \mathcal{L} \delta \chi_0 \right) + \partial_1 (\mathcal{L} \delta \chi_1) \right] d\chi_1 d\chi_0 . \quad (3.52)$$

Finalmente, por (3.40)  $\delta \mathbf{u}_{n,i} = \delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i} - \partial_\mu (\mathbf{u}_{n,i}) \delta \chi_\mu$  y como se busca estudiar soluciones tales que  $\mathcal{L}$  se anule en  $\chi_1 \rightarrow \pm\infty$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_1 (\mathcal{L} \delta \chi_1) d\chi_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \delta \chi_1|_{-s}^s = 0 , \quad (3.53)$$

y así

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\chi_0} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \left( \delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i} - \frac{\partial \mathbf{u}_{n,i}}{\partial \chi_\mu} \delta \chi_\mu \right) + \mathcal{L} \delta \chi_0 \right] d\chi_1 \right) d\chi_0 , \quad (3.54)$$

de tal manera que si la acción (3.30) se mantiene invariante bajo la transformación infinitesimal (3.32) entonces  $\delta S$  en (3.54) será igual a cero y como  $t_0$  y  $t_1$  son arbitrarios entonces la siguiente cantidad deberá de ser conservada respecto de  $t$

$$\boxed{Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \mathbf{u}_{n,i})} \left( \delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i} - \frac{\partial \mathbf{u}_{n,i}}{\partial \chi_\mu} \delta \chi_\mu \right) + \mathcal{L} \delta \chi_0 \right] d\chi_1 .} \quad (3.55)$$

Para conocer qué cantidades se conservan es necesario contar con la forma explícita de  $\mathcal{L}$ , la cual será presentada a continuación.

### 3.5. Densidad Lagrangiana explícita

Como es bien sabido, no existe un procedimiento general para la obtención de las densidades Lagrangianas, sin embargo, si en (2.46) se aplican las definiciones de (3.2) se obtiene

$$L_{DNLS}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K \left( \frac{i}{2} \left( c_n^* \frac{dc_n}{dt} - c_n \frac{dc_n^*}{dt} \right) + \frac{1}{2} (c_{n+1}c_n^* + c_{n+1}^*c_n) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (c_{n-1}c_n^* + c_{n-1}^*c_n) + \Gamma |c_n|^2 + \frac{1}{2} \Lambda c_n^2 (c_n^*)^2 \right), \quad (3.56)$$

y es un procedimiento directo el ver que la sustitución del término entre paréntesis en las ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas (3.14) da como resultado el modelo (3.6) por lo que la densidad Lagrangiana buscada es

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (u_n^* u_{n,t} - u_n u_{n,t}^*) + \frac{1}{2} (u_n^* u_{n+1} + u_n u_{n+1}^*) + \frac{1}{2} (u_n^* u_{n-1} + u_n u_{n-1}^*) + \\ + \Gamma u_n u_n^* + \frac{1}{2} \Lambda u_n^2 (u_n^*)^2. \quad (3.57)$$

Sustituyendo (3.57) en (3.28) y (3.29) se obtiene que las siguientes cantidades son constantes respecto de  $t$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( -\frac{1}{2} (u_n^* u_{n+1} + u_n u_{n+1}^*) - \frac{1}{2} (u_n^* u_{n-1} + u_n u_{n-1}^*) \right. \\ \left. - \Gamma u_n u_n^* - \frac{\Lambda}{2} (u_n u_n^*)^2 \right), \quad (3.58)$$

$$M = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_{n,x}^* u_n - u_n u_{n,x}^*) dx. \quad (3.59)$$

Como se mencionó anteriormente,  $H$  y  $M$  se deben de conservar debido a las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.14) sin importar la forma de  $\mathcal{L}$ , sin embargo, gracias al Teorema de Noether, es posible relacionar estas y otras cantidades con ciertas simetrías de la ecuación (3.57) como se muestra a continuación.

■ **Invarianza transversal**

$\mathcal{L}$  se mantiene invariante ante la transformación

$$t \mapsto t' = t, \quad x \mapsto x' = x - \delta x, \quad u_n \mapsto u'_n(x, t) = u_n(x, t), \quad (3.60)$$

de tal manera que  $\delta t = 0 = \delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}$  con lo cual la cantidad conservada correspondiente a esta invarianza será

$$Q = \delta x \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_{n,x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} + u_{n,x}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}^*} \right) dx = \delta x \cdot M \quad (3.61)$$

lo que se reduce a la conservación del momento  $M$  definido en (3.29).

■ **Invarianza de evolución**

La densidad Lagrangiana (3.57) también es invariante bajo una traslación infinitesimal de la variable de evolución  $t$  dada por

$$t \mapsto t' = t - \delta t, \quad x \mapsto x' = x, \quad (3.62)$$

$$u_n(x, t) \mapsto u'_n(x, t) = u_n(x, t), \quad (3.63)$$

así  $\delta x = 0 = \delta \hat{\mathbf{u}}_{n,i}$  de tal manera que la cantidad conservada asociada a esta invarianza será

$$Q = \delta t \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_{n,t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} + u_{n,t}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}^*} - \mathcal{L} \right) dx = \delta t \cdot H \quad (3.64)$$

lo que corresponde a la conservación del Hamiltoniano  $H$  dado por (3.28).

■ **Invarianza de norma**

La densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  es invariante bajo cambios infinitesimales de la fase en  $u_n$  dados

por

$$t \mapsto t' = t, \quad x \mapsto x' = x, \quad (3.65)$$

$$u_n(x, t) \mapsto u'_n(x, t) = e^{-i\epsilon} u_n(x, t). \quad (3.66)$$

En este caso  $\delta t = 0 = \delta x$  y siendo  $\epsilon$  infinitesimal se tendrá  $\delta \hat{\mathbf{u}}_n = -i\epsilon (u_n, -u_n^*)$  por lo que la cantidad conservada asociada a esta invarianza será la norma

$$\boxed{\mathcal{N}_u = \int_{-\infty}^{\infty} |u_n|^2 dx.} \quad (3.67)$$

### 3.6. Método variacional de Anderson en el modelo interpolati-

#### VO

Habiendo determinado la forma de la densidad Lagrangiana del modelo DNLS (3.6) se propone una función de prueba con la cual estudiar la estabilidad de sus soluciones.

Se utilizará un ansatz de la forma

$$u_n(x, t) = u(x_n, t) = g(x_n + z(t), t) \exp \{i\phi(x_n + z(t), t)\} \quad (3.68)$$

$$g(x, t) = A(t) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2a^2(t)} \right\} \quad (3.69)$$

$$\phi(x, t) = b(t)x^2 + p(t)x + h(t) \quad (3.70)$$

$$x_n = x + n\delta \quad (3.71)$$

el cual corresponde a un pulso Gaussiano de amplitud  $A$  y ancho  $a$  (dependientes de  $t$ ) y una fase  $\phi$  polinomial de segundo grado en  $x$  cuyos coeficientes  $b$ ,  $p$  y  $h$  dependen de  $t$ .

Cuando un pulso se propaga a través de una fibra óptica puede ser comprimido o ensanchado debido a las interacciones no-lineales con el material (Agrawal, 2012). La fase, bajo estas trans-

formaciones, puede variar de diversas maneras de las cuales la variación lineal es la más simple de modelar.

Dado que un pulso puede ser visto como la superposición de ondas senoidales de la forma

$$y(x, t) = \sin \{ \phi(x, t) \} \quad (3.72)$$

se tiene que la fase de cada una de estas funciones corresponde a

$$f(x, t) \propto \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) . \quad (3.73)$$

Suponiendo que  $f$  se comporta de forma lineal respecto de  $t$  entonces

$$f(x, t) = b(x)t + p(x) \quad (3.74)$$

y así

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) \propto b(x)t + p(x) . \quad (3.75)$$

Integrando esta ecuación resulta que la fase varía como

$$\phi(x, t) = b(x)t^2 + p(x)t + h(x) \quad (3.76)$$

en donde  $b$ ,  $p$  y  $h$  han absorbido la constante de proporcionalidad en (3.75) ( $b$  también absorbió una constante de integración) y  $h(x) = \phi(x, t = 0)$ .

En la ecuación (3.74) el coeficiente  $b$  es conocido como *chirp* y su función es controlar la compresión o expansión del pulso.

En este caso se ha supuesto que el pulso viaja a través de una fibra óptica cuya dinámica es gobernada por la ecuación NLS siendo  $x$  la variable de evolución y  $t$  la variable transversal, sin embargo, en la ecuación DNLS (3.6) los papeles se invierten siendo  $x$  la variable transversal y  $t$  la variable de evolución. Es por ello que se ha utilizado un pulso Gaussiano con una fase polinomial



cuadrática en  $x$  cuyos coeficientes son dependientes de  $t$ .

Para el análisis de la evolución de las soluciones se supondrá que tanto  $\Gamma$  como  $\Lambda$  son constantes.

Con esta función de prueba se tiene que

$$\mathcal{N}_u = \int_{-\infty}^{\infty} |u_n|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x_n + z(t), t) dx = \sqrt{\pi} A^2 a . \quad (3.77)$$

Sustituyendo (3.68)-(3.71) en (3.57) e integrando respecto de  $x$  desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ , se obtiene la Lagrangiana (Apéndice A.2)

$$L = \sqrt{\pi} A^2 a \left( - \left( h' + pz' + \frac{a^2 b'}{2} \right) + 2 \exp \left\{ - \frac{\delta^2}{4a^2} (1 + 4a^4 b^2) \right\} \cos \{ \delta p \} + \frac{\Lambda}{2\sqrt{2}} A^2 + \Gamma \right) . \quad (3.78)$$

Siendo que  $L$  no depende explícitamente de  $t$  es una funcional independiente de las derivadas de orden mayor a 2 se le pueden aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_t f)} \right) = 0 , \quad f = A, a, b, h, z, p , \quad (3.79)$$

dando como resultado el sistema

$$a' = 4\delta^2 b a \exp \left\{ - \frac{\delta^2 (1 + 4a^4 b^2)}{4a^2} \right\} \cos \{ \delta p \} , \quad (3.80)$$

$$b' = \exp \left\{ - \frac{\delta^2 (1 + 4a^4 b^2)}{4a^2} \right\} \frac{\delta^2 (1 - 4a^4 b^2)}{a^4} \cos \{ \delta p \} - \frac{\Lambda \mathcal{N}}{2\sqrt{2} a^3} , \quad (3.81)$$

$$z' = -2\delta \exp \left\{ - \frac{\delta^2 (1 + 4a^4 b^2)}{4a^2} \right\} \sin \{ \delta p \} , \quad (3.82)$$

$$h' = \Gamma + \exp \left\{ - \frac{\delta^2 (1 + 4a^4 b^2)}{4a^2} \right\} \left( 2 - \frac{\delta^2 (1 - 4a^4 b^2)}{2a^2} \right) \cos \{ \delta p \} + \frac{5\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2} a} - pz' , \quad (3.83)$$

$$A^2 a = \frac{\mathcal{N}_u}{\sqrt{\pi}} = \mathcal{N} , \quad (3.84)$$

$$p \text{ constante} . \quad (3.85)$$

Como se puede ver, el sistema formado por las ecuaciones (3.80) y (3.81) es cerrado, es decir,

el comportamiento de  $a$  y  $b$  es lo único que hace falta estudiar para conocer la evolución del pulso.

En lo consecutivo, siendo  $X = A, a, b, h, z, p$ , se utilizará la notación  $X_0 = X(t = 0)$  para indicar el valor de dichas variables en  $t = 0$ .

Considerando que  $\delta > 0$  es constante, entonces

$$|z'| = 2\delta \exp \left\{ -\frac{\delta^2 (1 + 4a^4 b^2)}{4a^2} \right\} |\sin \{\delta p\}| < 2\delta \quad (3.86)$$

es decir, los pulsos no se podrán desplazar a lo largo del arreglo con una "velocidad" mayor a  $2\delta$ .

El sistema debe satisfacer la conservación, respecto de  $t$ , de las cantidades  $H$  y  $M$  dadas por las ecuaciones (3.58) y (3.59). Realizando estas integrales con  $u_n$  dada por la función de prueba (3.68) se obtiene

$$M = (\sqrt{\pi} A^2 a) p = \mathcal{N}_u \cdot p, \quad (3.87)$$

lo cual, junto con la ecuación (3.84), resultan en la conservación de  $p$  como ya se había obtenido mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, mientras que

$$H = -\sqrt{\pi} A^2 a \left( 2 \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} (1 + 4a^4 b^2) \right\} \cos \{\delta p\} + \Gamma + \frac{\Lambda}{2\sqrt{2}} A^2 \right). \quad (3.88)$$

Aplicando (3.84) y despejando todo lo que es constante se llega a que la cantidad

$$\boxed{U = \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} (1 + 4a^4 b^2) \right\} \cos \{\delta p\} + \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}a}} \quad (3.89)$$

se conserva.

Mediante la conservación de  $U$  se pueden deducir muchas propiedades importantes de las soluciones. En primer lugar, se establece una relación entre  $b^2$  y  $a$  de la siguiente manera

$$\boxed{b^2 = -\frac{1}{4a^4} \left( 1 + \frac{4a^2}{\delta^2} \ln \left\{ \frac{U - \Lambda \mathcal{N}/4\sqrt{2}a}{\cos \{\delta p\}} \right\} \right)} \quad \text{con} \quad \cos \{\delta p\} \neq 0. \quad (3.90)$$

Como se verá mas adelante, si  $\Lambda \cos \{\delta p\} < 0$  los pulsos evolucionarán de forma difusiva. En

este caso se distinguirá entre estados de *decoherencia negativa* si  $\Lambda < 0$  y de *decoherencia positiva* si  $\Lambda > 0$ . A continuación se estudia con detalle la evolución de los pulsos en ambos regímenes.

### 3.6.1. Decoherencia negativa

El caso  $\cos \{\delta p\} > 0$  se cumple cuando

$$p \in \left( \frac{(4w-1)\pi}{2\delta}, \frac{(4w+1)\pi}{2\delta} \right) \quad \text{con } w \in \mathbb{Z}. \quad (3.91)$$

En este régimen la constante  $U$  dada por (3.89) será siempre positiva, además

$$U - \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}a} = \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} (1 + 4a^4 b^2) \right\} \cos \{\delta p\} > 0, \quad (3.92)$$

lo que da como resultado la desigualdad  $a > a_{inf} > 0$  con

$$\boxed{a_{inf} = \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}U}}, \quad (3.93)$$

es decir, el ancho del pulso  $a$  se encuentra acotado inferiormente por un valor positivo y dado que  $A^2 = \mathcal{N}/a$  entonces la amplitud del pulso estará acotada superiormente por  $A_{sup} = \sqrt{\mathcal{N}/a_{inf}}$ .

Mediante (3.89) y (3.93) la ecuación (3.82) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$z' = -\frac{\Lambda \mathcal{N} \delta}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{a_{inf}} - \frac{1}{a} \right) \tan \{\delta p\}. \quad (3.94)$$

Como  $a > a_{inf} > 0$  entonces  $1/a_{inf} - 1/a > 0$  de tal manera que

$$\text{sgn} \{z'\} = -\text{sgn} \{\tan \{\delta p\}\}, \quad (3.95)$$

y como tanto  $\delta$  como  $p$  son constantes entonces  $z'$  nunca cambia de signo, así que  $z$  solamente puede crecer, mantenerse constante o disminuir, pero nunca oscilar.

Mediante (3.80) se observa que  $a'$  se anula cuando  $b = 0$  siendo los valores extremos de  $a$

raíces reales de la función

$$G(a) = U - \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \cos \{ \delta p \} - \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}a} . \quad (3.96)$$

Siendo que  $\exp \{-x\}$  es decreciente para todo  $x \geq 0$  se tiene la desigualdad

$$\exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \geq \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} (1 + 4a^4 b^2) \right\} \quad (3.97)$$

para todo  $b$ . Multiplicando (3.97) por  $\cos \{ \delta p \}$  y sumando a ambos lados el término  $\Lambda \mathcal{N}/4\sqrt{2}a$  se llega a que

$$\exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \cos \{ \delta p \} + \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}a} \geq U , \quad (3.98)$$

y en consecuencia  $G(a) \leq 0$ . Si  $a^{ext} > a_0$  ( $a^{ext} < a_0$ ) es tal que  $G(a^{ext}) = 0$  y  $G(a^{ext} + \epsilon) > 0$  ( $G(a^{ext} - \epsilon) > 0$ ) para todo  $1 \gg \epsilon > 0$  entonces  $a^{ext}$  será un valor máximo (mínimo) del ancho del pulso, sin embargo, cuando  $G(a^{ext} \pm \epsilon) < 0$  para todo  $1 \gg \epsilon > 0$  la naturaleza del valor extremo  $a^{ext}$  podría ser de cualquier tipo (máximo, mínimo o punto silla).

Si  $b_0 \ll 1$  entonces

$$G(a) \approx \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a_0^2} \right\} \cos \{ \delta p \} + \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}a_0} - \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \cos \{ \delta p \} - \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}a} , \quad (3.99)$$

de tal forma que  $a_0$  será una buena aproximación de un valor extremo para  $a$ .

Definiendo

$$\Lambda_G^0(a) = \frac{4\sqrt{2}}{A_0^2} \frac{a}{a - a_0} \left( \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a_0^2} (1 + 4a_0^4 b_0^2) \right\} \right) \cos \{ \delta p \} \quad (3.100)$$

resulta que  $\Lambda$ ,  $G$  y  $\Lambda_G^0$  se relacionan de la siguiente manera

$$\Lambda = \Lambda_G^0(a) + \frac{4\sqrt{2}}{A_0^2} \frac{a}{a - a_0} G(a) . \quad (3.101)$$

Se puede ver que, para  $a \neq 0$

$$G(a^{ext}) = 0 \iff \Lambda_G^0(a^{ext}) = \Lambda, \quad (3.102)$$

por lo que se pueden determinar los valores extremos  $a^{ext}$  mediante la igualdad  $\Lambda_G^0(a^{ext}) = \Lambda$

Como  $G(a) \leq 0$  siempre, si  $a < a_0$  entonces  $\Lambda \geq \Lambda_G^0(a)$  así que  $a$  solo podrá tomar valores para los cuales  $\Lambda_G^0(a)$  sea menor o igual que  $\Lambda$ , mientras que si  $a > a_0$  entonces  $\Lambda \leq \Lambda_G^0(a)$  y en consecuencia  $a$  solo podrá tomar valores tales que  $\Lambda_G^0(a)$  sea mayor que  $\Lambda$ . Es así que la curva  $\Lambda_G^0$  delimita las regiones en las que el ancho del pulso puede moverse y por ello es útil estudiar sus propiedades.

En (3.100) existe una discontinuidad para  $a = a_0$  ya que

$$\Lambda_G^0(a^+ \rightarrow a_0) \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \Lambda_G^0(a^- \rightarrow a_0) \rightarrow -\infty \quad (3.103)$$

Cuando  $a > a_0$  la función  $\Lambda_G^0$  se comporta de manera decreciente (figura 3.2b) y  $\Lambda_G^0(a \rightarrow \infty) \rightarrow \Lambda_c$  donde

$$\Lambda_c = \frac{4\sqrt{2}}{A_0^2} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a_0^2} (1 + 4a_0^4 b_0^2) \right\} \right) \cos \{ \delta p \} . \quad (3.104)$$

Si  $a$  se encuentra entre 0 y  $a_0$  (figura 3.2a) la función  $\Lambda_G^0$  se anula en  $a = \alpha$  dado por

$$\alpha = \frac{a_0}{\sqrt{1 + 4a_0^4 b_0^2}} \quad (3.105)$$

y tiende a 0 cuando  $a$  tiende a 0. Se puede demostrar que  $\Lambda_G^0$  posee un único máximo (Apéndice A.3) en el intervalo  $0 < a \leq \alpha$  el cual será denotado por  $\Lambda_b$ . El valor de  $\Lambda_b$  no puede ser determinado analíticamente por lo que se deben utilizar métodos numéricos (en este trabajo se utiliza el método del *gradiente descendiente* implementado en el Apéndice B.2).

A continuación se examinan los diferentes comportamientos de la soluciones del sistema (3.80)-

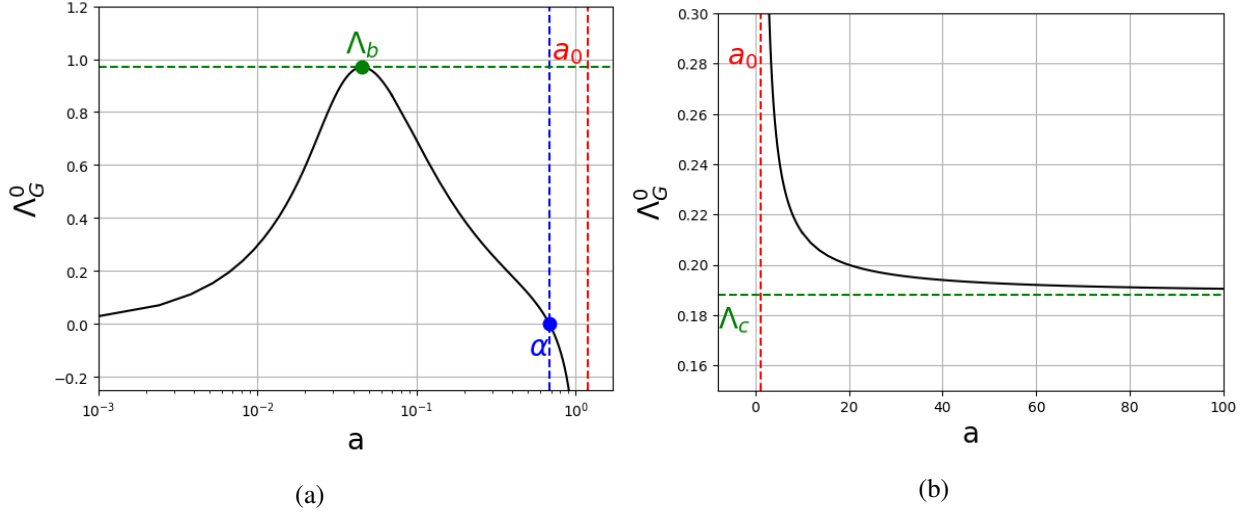


Figura 3.2: Esquema de la función  $\Lambda_G^0$  para  $\cos\{\delta p\} > 0$ . (a) Comportamiento de  $\Lambda_G^0$  para  $a$  entre 0 y  $a_0$ . En  $a = \alpha$  la función se anula. Cuando  $a$  tiende a cero  $\Lambda_G^0$  también lo hace. Entre 0 y  $\alpha$  existe un único valor máximo definido como  $\Lambda_b$ . (b) Comportamiento de  $\Lambda_G^0$  para  $a > a_0$ . La función tiene una cota inferior denotada por  $\Lambda_c$  a la cual se aproxima de manera asintótica cuando  $a$  tiende al infinito.

(3.81) en dos situaciones diferentes. En el primer escenario  $\Lambda_b$  será mayor que  $\Lambda_c$  lo que resultará en una caracterización de las soluciones totalmente definida por la posición de  $\Lambda$  respecto éstos dos umbrales, mientras que en el segundo escenario  $\Lambda_c$  será mayor que  $\Lambda_b$  en cuyo caso el valor de  $\Lambda$  resultará insuficiente para la determinación de la evolución de los pulsos de prueba. Cada escenario será ejemplificado mediante la integración numérica de  $a'(t)$  y  $b'(t)$  haciendo uso de un procedimiento adaptativo del método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden desarrollado en el Apéndice B.1.

### Primer escenario: $\Lambda_b > \Lambda_c$

En este caso (figura 3.3) se pueden obtener tres tipos de soluciones diferentes dependiendo del valor asignado a  $\Lambda$ .

### Pulsos difusivos: $\Lambda \leq \Lambda_c$

Por definición de  $\Lambda_c$ , no existirá un valor  $a^M > a_0$  tal que  $\Lambda = \Lambda_G^0(a^M)$ , es decir, no habrá un máximo para el ancho del pulso. Como se puede ver en (3.104) el valor de  $\Lambda_c$  es el mismo sin

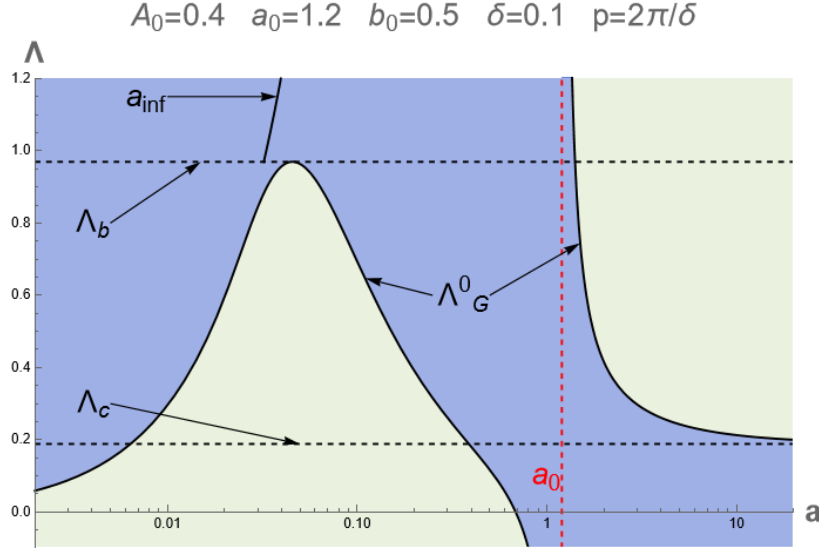


Figura 3.3: Regiones permitidas para la evolución de  $a$  delimitadas por la curva  $\Lambda_G^0(a)$  en el caso  $\Lambda_b > \Lambda_c$ . Es posible que el ancho del pulso evoluciones de tres maneras diferentes: puede crecer de manera indefinida ( $\Lambda \leq \Lambda_c$ ), puede oscilar ( $\Lambda_c < \Lambda < \Lambda_b$ ) o puede tender de manera asintótica a un valor ínfimo ( $\Lambda \geq \Lambda_b$ ). Estos posibles comportamientos están totalmente definidos por la posición de  $\Lambda$  respecto de  $\Lambda_c$  y  $\Lambda_b$ .

importar el signo de  $b_0$ , sin embargo, el comportamiento de las soluciones difusivas difiere. Si  $b_0 > 0$  la tendencia inicial de  $a$  será crecer (ecuación (3.80)) y al no haber un valor máximo éste tenderá al infinito causando que el pulso se ensanche sin límite. Por otro lado, si  $b_0 < 0$  la tendencia inicial de  $a$  será disminuir y como  $\Lambda_G^0(a)$  tiende a  $-\infty$  cuando  $a$  tiende a  $a_0$  por la izquierda siempre habrá un  $a^m < a_0$  tal que  $\Lambda_G^0(a^m) = \Lambda$ , es decir, siempre habrá un mínimo de  $a$  a partir del cual crecerá hasta el infinito causando la difusión del pulso.

En caso de que  $|b_0| \ll 1$ , por (3.99),  $a_0$  será una buena aproximación del mínimo alcanzado cuando  $b_0 < 0$  por lo que las soluciones para  $b_0 > 0$  y  $b_0 < 0$  serán prácticamente indistinguibles. Aún más,  $\Lambda_c$  podrá ser aproximado mediante

$$\Lambda_c \approx \frac{4\sqrt{2}}{A_0^2} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a_0^2} \right\} \right) \cos \{ \delta p \} , \quad (3.106)$$

en cuyo caso  $\Lambda_c$  se vuelve independiente de  $b_0$  y se aproxima a cero cuando  $a_0$  y  $A_0$  crecen, es decir, la intensidad de los efectos no-lineales, cuantificada por  $\Lambda$ , tendría que ser casi nula para que los pulsos altos y anchos evolucionen de forma difusiva.

Es importante notar que, aún cuando  $|b_0|$  no es tan pequeño, el valor crítico  $\Lambda_c$  se vuelve irrelevante para valores de  $p$  aproximados a  $p_{lim} = (2w + 1)\pi/(2\delta)$  con  $w \in \mathbb{Z}$ , es decir, la no-linealidad del sistema permite que los pulsos no se ensanchen sin límite tan fácilmente cuando se desplazan a lo largo del arreglo con un momento cercano a  $p_{lim}$ , de hecho, como se verá al final de este capítulo, cuando  $p = p_{lim}$  los pulsos se propagan con una estabilidad máxima. Como se puede ver en la figura 3.4 cuando  $p$  es nulo los efectos difusivos extinguen a los pulsos rápidamente (figura 3.4a) pero cuando  $p = 0.6\pi/2\delta$  los pulsos, aún difusivos, evolucionan con mayor estabilidad (figura 3.4b).

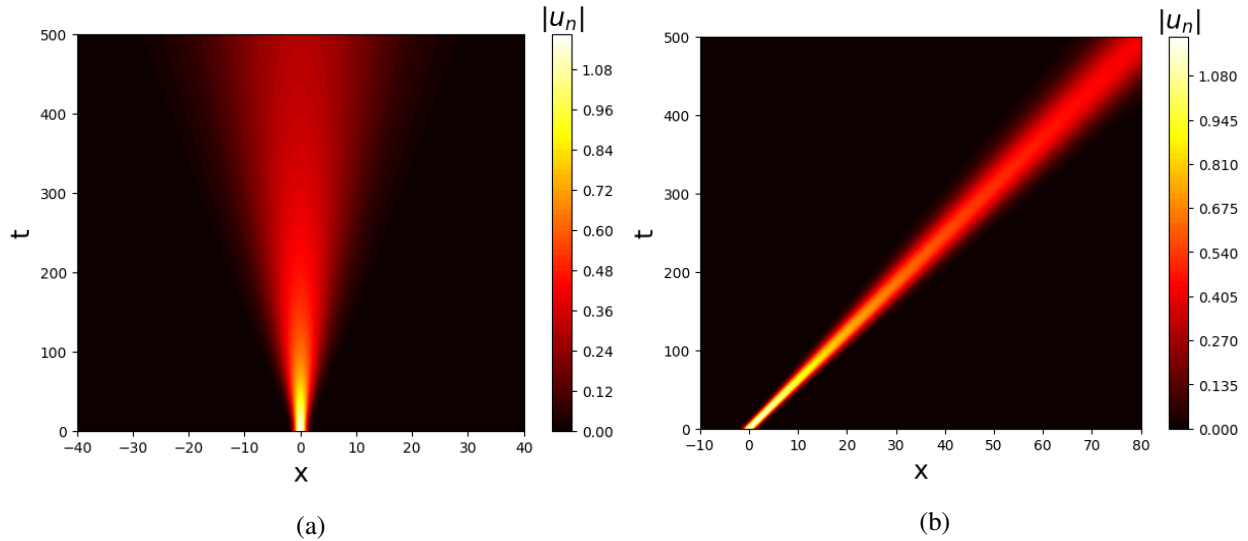


Figura 3.4: Comparativa entre dos pulsos difusivos con (a)  $p = 0$  y (b)  $p = 0.6\pi/2\delta$ . En ambos casos  $a_0 = 0.7$ ,  $A_0 = 1.2$ ,  $b_0 = 0.005$ ,  $\delta = 0.1$  y  $\Lambda = 0.008$ .

En la figura 3.5 se muestran las curvas de  $a$  integradas numéricamente para diferentes valores de  $b_0$  con  $\Lambda = \Lambda_c$ . Se observa que cuando  $b_0$  es grande (figuras 3.5a y 3.5b) los comportamientos para  $b_0 < 0$  y  $b_0 > 0$  son inicialmente diferentes ya que uno tiende a un mínimo antes de crecer al infinito mientras que el otro crece desde el comienzo, pero cuando  $b_0$  es pequeño (figuras 3.5c y 3.5d) las curvas con condiciones iniciales  $b_0 < 0$  y  $b_0 > 0$  se comienzan a juntar hasta volverse prácticamente indistinguibles la una de la otra.



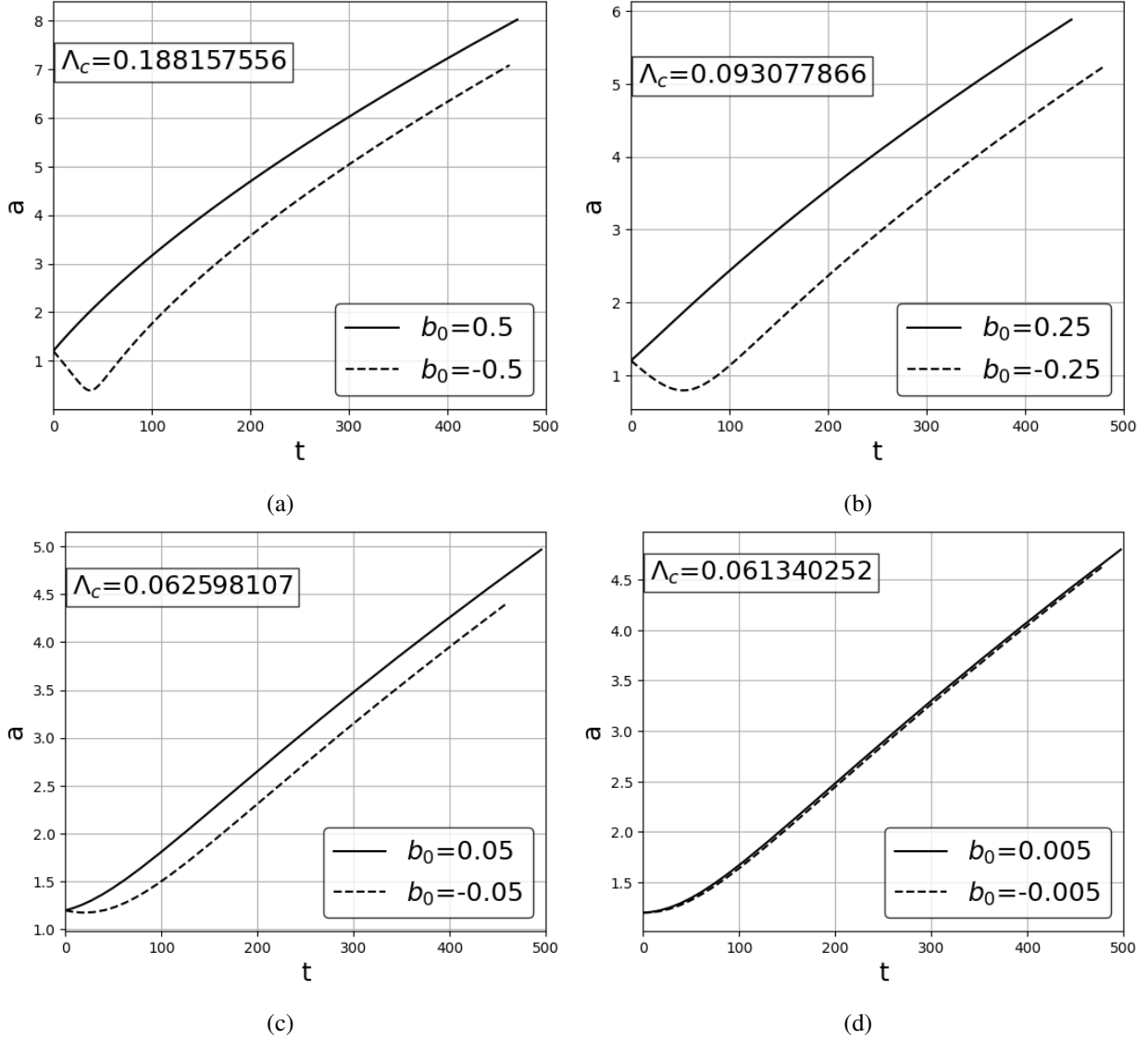


Figura 3.5: Comparación de la evolución del ancho de los pulsos cuando  $\Lambda = \Lambda_c$  (con  $\Lambda_c$  dado por (3.104)),  $a_0 = 1.2$ ,  $A_0 = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $p = 0$  y  $b_0 = \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.05, \pm 0.005$ .

**Breathers:**  $\Lambda_c < \Lambda < \Lambda_b$

Si  $\Lambda$  se encuentra en el intervalo  $(\Lambda_c, \Lambda_b)$  las soluciones siempre tendrán un valor máximo, ya que para todo  $\Lambda > \Lambda_c$  existe un  $a^M > a_0$  tal que  $\Lambda_G^0(a^M) = \Lambda$ , mientras que al ser  $\Lambda < \Lambda_b$  siempre habrá un valor  $a^m < a_0$  tal que  $\Lambda_G^0(a^m) = \Lambda$  por lo que  $a$  alcanzará un mínimo. Este tipo de comportamiento oscilante es conocido como evolución de tipo *breather* ya que el pulso se ensancha y se contrae de manera periódica simulando un proceso de inspiración y exhalación. Como en el caso anterior, si  $b_0 > 0$  o  $b_0 < 0$  la tendencia inicial del ancho del pulso será crecer o disminuir,

### 3.6. MÉTODO VARIACIONAL DE ANDERSON EN EL MODELO INTERPOLATIVO

respectivamente, mientras que si  $|b_0| \ll 1$  ambos comportamientos serán indistinguibles entre ellos.

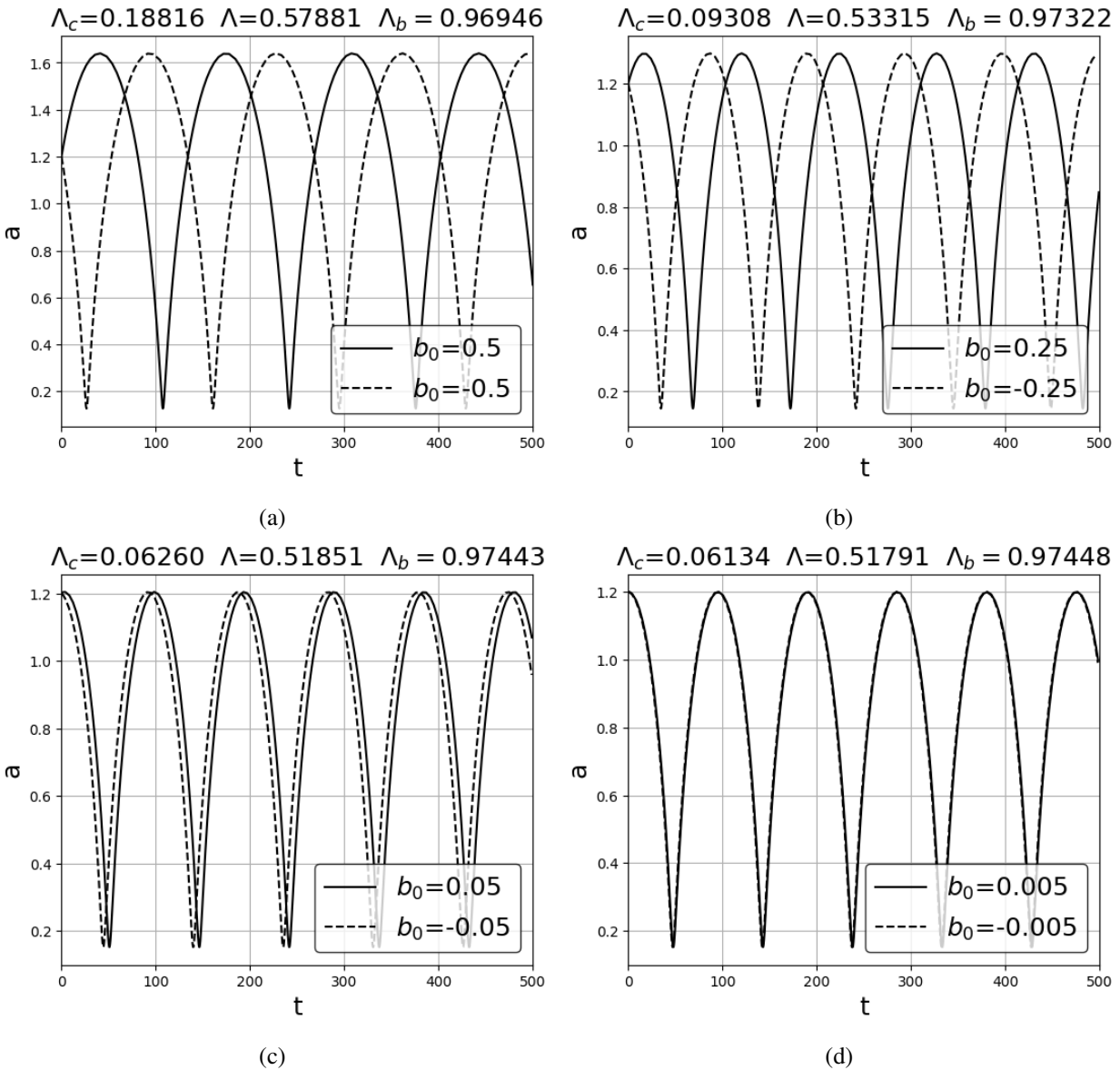


Figura 3.6: Comparación de la evolución de  $a$  con  $\Lambda = (\Lambda_c + \Lambda_b)/2$ ,  $a_0 = 1.2$ ,  $A_0 = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $p = 0$  y  $b_0 = \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.05, \pm 0.005$ .

En la figura 3.6 se pueden observar los comportamientos de  $a$  cuando  $\Lambda = (\Lambda_c + \Lambda_b)/2$  con diferentes valores de  $b_0$ . Dado que  $b_0$  cambia en cada integración de  $a'$  y  $b'$  los valores de  $\Lambda_c$  (ecuación (3.104)) y de  $\Lambda_b$  también cambiarán. En las figuras 3.6a y 3.6b se distinguen claramente las tendencias iniciales de  $a$  dependiendo del signo de  $b_0$ , mientras que en las figuras 3.6c y 3.6d

las curvas de  $a$  se enciman hasta volverse prácticamente indistinguibles.

Es posible determinar el periodo de las oscilaciones de la siguiente manera. Siendo  $t_1$  y  $t_3$  los tiempos correspondientes a dos mínimos de  $a$  consecutivos y  $t_2$  el tiempo al que ocurre el máximo entre ellos tales que  $t_1 < t_2 < t_3$ , por definición  $t_3 - t_1 = T$  con  $T$  el periodo de las oscilaciones.

Mediante (3.89) la ecuación (3.80) se puede ver como

$$a' = \frac{4\delta^2}{\cos\{\delta p\}} b(a) a \left( U - \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}a} \right) \quad (3.107)$$

considerando a  $b$  como una función de  $a$  dada por la ecuación (3.90). Pasando todos los términos del lado derecho de la igualdad al lado izquierdo e integrando respecto del tiempo desde  $t_1$  a  $t_3$  se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_3} \frac{a' \cos\{\delta p\}}{4\delta^2 b(a) a \left( U - \Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a \right)} dt = T . \quad (3.108)$$

La integral del lado izquierdo puede ser expresada como la suma de dos integrales

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{a' \cos\{\delta p\}}{4\delta^2 b(a) a \left( U - \Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a \right)} dt + \int_{t_2}^{t_3} \frac{a' \cos\{\delta p\}}{4\delta^2 b(a) a \left( U - \Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a \right)} dt = T . \quad (3.109)$$

En la primer integral de  $t_1$  a  $t_2$  el ancho  $a$  es creciente por lo que  $b(A) > 0$  así que al tomar la raíz cuadrada de (3.90) se debe tomar el signo positivo mientras que en la segunda integral de  $t_2$  a  $t_3$  el ancho es decreciente y con ello  $b(a) < 0$ , resultando en

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left[ -\frac{1}{4}a^{-4} \left( 1 + 4a^2\delta^{-2} \ln \left\{ \frac{U - \Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a}{\cos\{\delta p\}} \right\} \right) \right]^{-1/2}}{4\delta^2 a \left( U - \Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a \right)} a' \cos\{\delta p\} dt \\ & - \int_{t_2}^{t_3} \frac{\left[ -\frac{1}{4}a^{-4} \left( 1 + 4a^2\delta^{-2} \ln \left\{ \frac{U - \Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a}{\cos\{\delta p\}} \right\} \right) \right]^{-1/2}}{4\delta^2 a \left( U - \Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a \right)} a' \cos\{\delta p\} dt = T . \end{aligned} \quad (3.110)$$

Realizando el cambio de variable  $u \rightarrow a(t)$ , por un lado la integración se llevará a cabo desde  $u_1 = a(t_1) = a_{min}$  hasta  $u_2 = a(t_2) = a_{max}$ , mientras que por el otro la integración será desde

$u_1 = a(t_2) = a_{max}$  hasta  $u_2 = a(t_3) = a_{min}$  dando como resultado final

$$T = \int_{a_{min}}^{a_{max}} \frac{\left(-1 - 4a^2\delta^{-2} \ln \left\{ \frac{U - \Lambda\mathcal{N}/4\sqrt{2}u}{\cos\{\delta p\}} \right\}\right)^{-1/2}}{\delta^2 u (U - \Lambda\mathcal{N}/4\sqrt{2}u)} u \cos\{\delta p\} du . \quad (3.111)$$

Como  $G(a)$  y  $T$  depende de  $b_0^2$  el signo de  $b_0$  no importa al momento de determinar los valores  $a_{max}$  y  $a_{min}$  (raíces de  $G(a)$ ) ni en la evaluación de la integral (3.111) lo que significa que el cambio en el signo de  $b_0$  corresponde a un cambio de fase.

**Solitones asintóticos:**  $\Lambda_b \leq \Lambda$

Finalmente, cuando  $\Lambda$  es mayor que  $\Lambda_b$  siempre habrá un  $a^M$  tal que  $\Lambda_G^0(a^M) = \Lambda$ , es decir,  $a$  tendrá un máximo. Algo muy curioso que ocurre en esta situación es que, si bien  $a$  no tiene un valor mínimo mayor que cero, existe una cota inferior dada por (3.93) a la que tenderá de manera asintótica. Como se puede deducir de (3.93) cuando  $\Lambda$  crece ésta cota inferior tiende a  $a_0$  de manera asintótica por lo que, cuanto más intensos son los efectos no-lineales, los pulsos tienden a estabilizarse en valores cada vez más parecidos a los de las condiciones iniciales.

En este caso, si  $b_0 > 0$  la tendencia inicial de  $a$  será crecer hasta alcanzar un valor máximo a partir del cual disminuirá de forma asintótica hacia  $a_{inf}$ , pero si  $b_0 < 0$  el pulso comenzará a contraerse desde un comienzo.

A diferencia de los casos anteriores, cuando  $\Lambda = \Lambda_b$  existen dos valores extremos de  $a$ , un valor máximo y un valor ambiguo  $a^s$  entre 0 y  $a_0$  tal que  $\Lambda_G^0(a^s) = \Lambda_b$ . Las integraciones numéricas sugieren que dicho valor extremo corresponde a un punto silla, sin embargo, su naturaleza no resulta de gran interés ya que sea un mínimo o no  $\Lambda_b$  sigue siendo un umbral que separa a las soluciones del tipo breather con los del tipo solitón asintótico.

En las figuras 3.7a y 3.7b se puede observar el crecimiento de  $a$  para  $b_0 > 0$  y  $b_0 < 0$  cuando  $|b_0|$  no es tan pequeño, en cuyo caso el pulso con chirp inicial negativo se estabilizará antes que el pulso con chirp inicial positivo. Por otro lado, cuando la magnitud de  $b_0$  disminuye las diferencias en la evolución del ancho del pulso para  $b_0$  positivo y negativo se vuelven menos evidentes dando

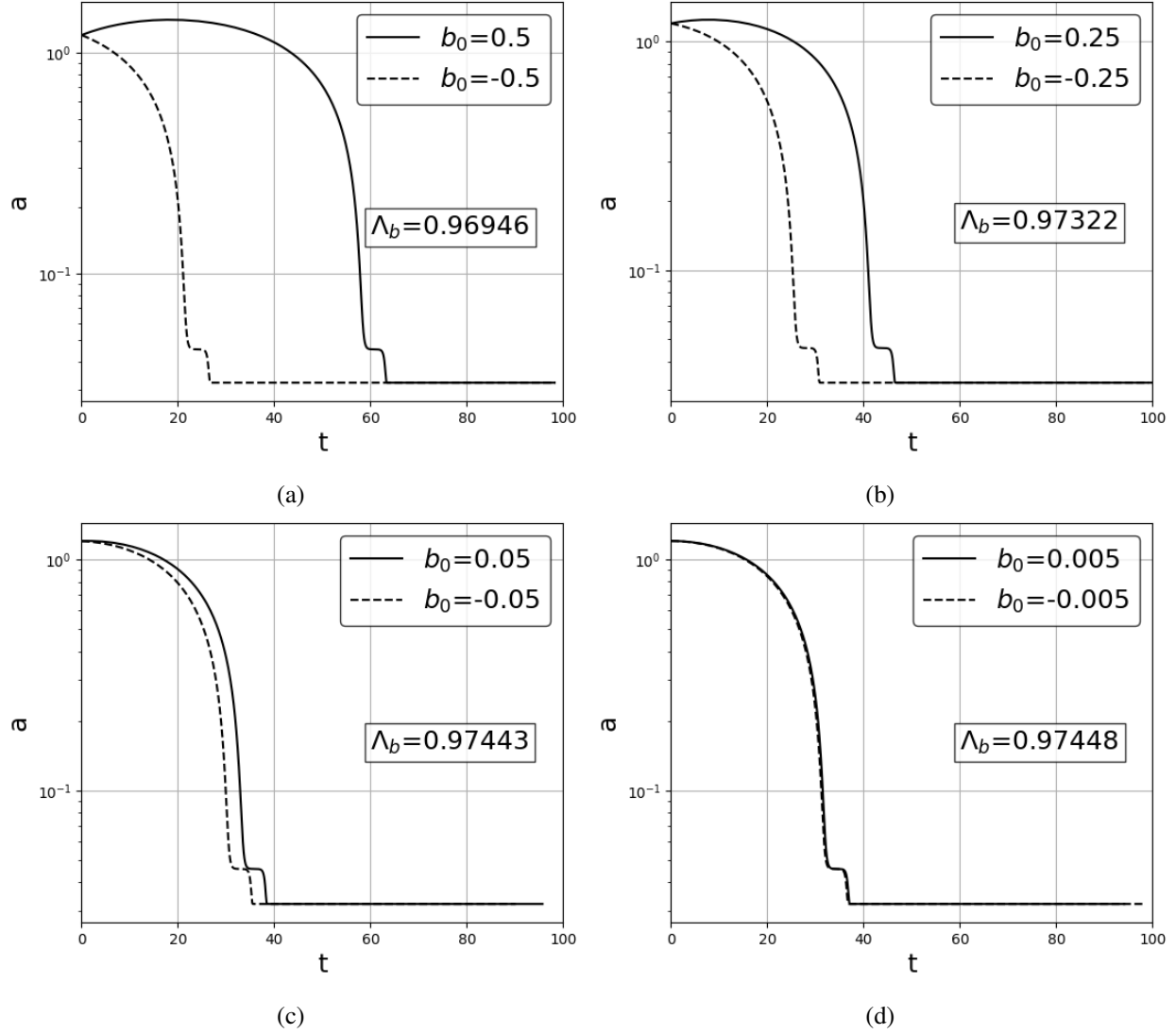


Figura 3.7: Comparación de la evolución de  $a$  con  $\Lambda = \Lambda_b$  (determinado de forma numérica mediante el método del gradiente descendente implementado en el Apéndice B.15),  $a_0 = 1.2$ ,  $A_0 = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $p = 0$  y  $b_0 = \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.05, \pm 0.005$ .

como resultado comportamientos prácticamente iguales (figuras 3.7c y 3.7d).

La ecuación (3.81), junto con las ecuaciones (3.89) y (3.93), se puede convertir en

$$b' = \frac{\Lambda \mathcal{N} \delta^2 (1 - 4a^4 b^2)}{4\sqrt{2}a^4} \left( \frac{1}{a_{inf}} - \frac{1}{a} \right) - \frac{\Lambda \mathcal{N}}{2\sqrt{2}a^3} \quad (3.112)$$

cuando  $t$  es suficientemente grande

$$a(t) \approx a_{inf}, \quad (3.113)$$

con lo cual

$$b'(t) \approx -\frac{\Lambda\mathcal{N}}{2\sqrt{2}a_{inf}^3}, \quad (3.114)$$

por lo que  $b$  se comportará de forma lineal

$$\boxed{b(t) \approx -\frac{\Lambda\mathcal{N}}{2\sqrt{2}a_{inf}^3}t + b_0.} \quad (3.115)$$

Sustituyendo (3.115) y (3.113) en (3.82) se obtiene

$$z'(t) \approx -2\delta \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4a_{inf}^2}\right\} \exp\left\{-\left(\frac{\delta\Lambda\mathcal{N}}{2\sqrt{2}a_{inf}^2}t - \delta a_{inf}b_0\right)^2\right\} \sin\{\delta p\}. \quad (3.116)$$

Esta ecuación puede ser integrada desde  $t = t_1$  hasta  $t > t_1$  arbitrario lo suficientemente grandes como para satisfacer la aproximación (3.113), dando como resultado

$$\boxed{z(t) \approx -\frac{2\sqrt{2\pi}a_{inf}^2 \sin\{\delta p\}}{\Lambda\mathcal{N}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4a_{inf}^2}\right\} \times} \\ \times \left[ \phi\left(\frac{\delta\Lambda\mathcal{N}}{2\sqrt{2}a_{inf}^2}t - \delta a_{inf}b_0\right) + \operatorname{sgn}\{B(t_1)\} \phi(|B(t_1)|) \right] \quad (3.117)$$

con

$$B(t) = \delta a_{inf}b_0 - \frac{\delta\Lambda\mathcal{N}}{2\sqrt{2}a_{inf}^2}t \quad (3.118)$$

y  $\phi$  la función de error definida como

$$\phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\{-\tau^2\} d\tau. \quad (3.119)$$

Dado que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 1$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_{lim} , \quad (3.120)$$

$$z_{lim} = -\frac{2\sqrt{2\pi}a_{inf}^2 \sin\{\delta p\}}{\Lambda\mathcal{N}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4a_{inf}^2}\right\} [1 + \operatorname{sgn}\{B(t_1)\} \phi(|B(t_1)|)] , \quad (3.121)$$

lo que significa que el pulso tenderá a posicionarse a una distancia  $x = z_{lim}$  del  $n$ -ésimo elemento del arreglo, sin embargo, si  $p = w\pi/\delta$  con  $w \in \mathbb{Z}$  entonces  $z'(t) = 0$  para todo  $t$  por lo que el pulso no se desplazará a lo largo del arreglo.

En los tres casos anteriores, si bien el signo de  $b_0$  altera la evolución del pulso, la naturaleza de cada uno de los diferentes tipos de comportamientos se mantiene igual sin importar que  $b_0$  sea positivo o negativo, es decir, los pulsos difusivos, que oscilen o que se comporten como solitones asintóticos para  $b_0 > 0$  se comportarán de la misma manera cualitativa para  $b_0 < 0$ . Es por ello que la posición de  $\Lambda$  respecto de  $\Lambda_b$  y  $\Lambda_c$  es suficiente para la predicción de la evolución de los pulsos.

### Segundo escenario: $\Lambda_c \geq \Lambda_b$

En este caso solamente hay dos tipos de soluciones siendo imposible la evolución de  $a$  como un breather (figura 3.8). A diferencia del primer escenario, cuando  $\Lambda_c$  es estrictamente mayor que  $\Lambda_b$ , las soluciones asociadas a  $\Lambda$  en el intervalo cerrado  $[\Lambda_b, \Lambda_c]$  serán solitones asintóticos o difusivos dependiendo del signo de  $b_0$ .

### Pulsos difusivos: $\Lambda < \Lambda_b$

Si  $\Lambda$  es menor que  $\Lambda_b$  siempre habrá un valor  $a^m < a_0$  tal que  $\Lambda_G^0(a^m) = \Lambda$  pero nunca habrá un valor  $a^M > a_0$  tal que  $\Lambda_G^0(a^M) = \Lambda$  ya que  $\Lambda_G^0(a) > \Lambda_c > \Lambda_b > \Lambda$  para todo  $a > a_0$ , por lo que el pulso será difusivo ya sea que  $b_0 > 0$  (en cuyo caso  $a$  crecerá sin límite desde un comienzo) o que  $b_0 < 0$  (con  $a$  disminuyendo hasta un  $a^m$  mínimo a partir del cual crecerá hacia el infinito, figura 3.9a).

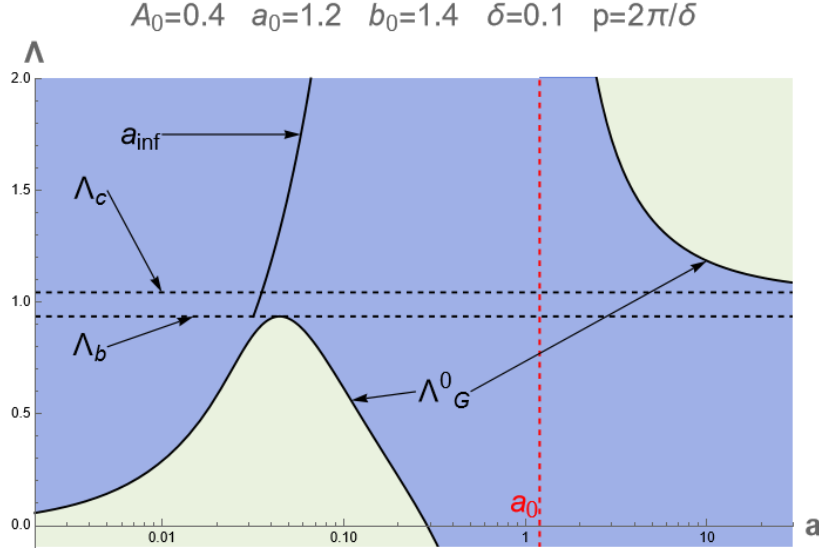


Figura 3.8: Regiones permitidas para la evolución de  $a$  delimitadas por la curva  $\Lambda_G^0(a)$  cuando  $\Lambda_c$  es mayor que  $\Lambda_b$ . En este caso no habrá manera de obtener pulsos oscilantes así que la solución se comportará como un solitón asintótico para  $\Lambda \geq \Lambda_b$  si  $b_0 < 0$  o  $\Lambda \geq \Lambda_c$  si  $b_0 > 0$ , mientras que el pulso será difusivo si  $\Lambda \leq \Lambda_b$  con  $b_0 < 0$  o  $\Lambda \leq \Lambda_c$  con  $b_0 > 0$ .

#### Solitones asintóticos: $\Lambda > \Lambda_c$

Si  $\Lambda$  es mayor que  $\Lambda_c$  eso significa que siempre habrá un  $a^M > a_0$  tal que  $\Lambda_G^0(a^M) = \Lambda$ , es decir,  $a$  tendrá un valor máximo, sin embargo, dado que  $\Lambda_b \leq \Lambda_c < \Lambda$  entonces  $\Lambda_G^0(a) < \Lambda$  para todo  $a < a_0$  por lo que el ancho no tendrá un valor mínimo provocando que  $a$  tienda de forma asintótica hacia  $a_{inf}$  desde un comienzo si  $b_0 < 0$  o bien primero creciendo hasta un valor máximo para después disminuir hacia  $a_{inf}$  si  $b_0 > 0$  (figura 3.9b).

#### Evolución dependiente de la tendencia inicial de $a$ : $\Lambda_b < \Lambda < \Lambda_c$

En este caso, dado que  $\Lambda > \Lambda_b$  entonces no existirá un valor  $0 < a^m < a_0$  tal que  $\Lambda = \Lambda_G^0(a^m)$  lo que significa que  $a$  estará delimitado inferiormente por  $a_{inf}$ . Por otro lado, como  $\Lambda < \Lambda_c$  entonces no existirá un valor  $a^M > a_0$  tal que  $\Lambda = \Lambda_G^0(a^M)$ , en otras palabras, no habrá un valor máximo para  $a$ . En consecuencia, si  $b_0 > 0$  la tendencia inicial de  $a$  será crecer hacia el infinito, mientras que si  $b < 0$  entonces la tendencia inicial de  $a$  será disminuir de manera asintótica hacia su cota inferior  $a_{inf}$  dada por (3.93).

En la figura 3.10 se puede ver que cuando  $b_0 < 0$  el pulso se comporta como un solitón



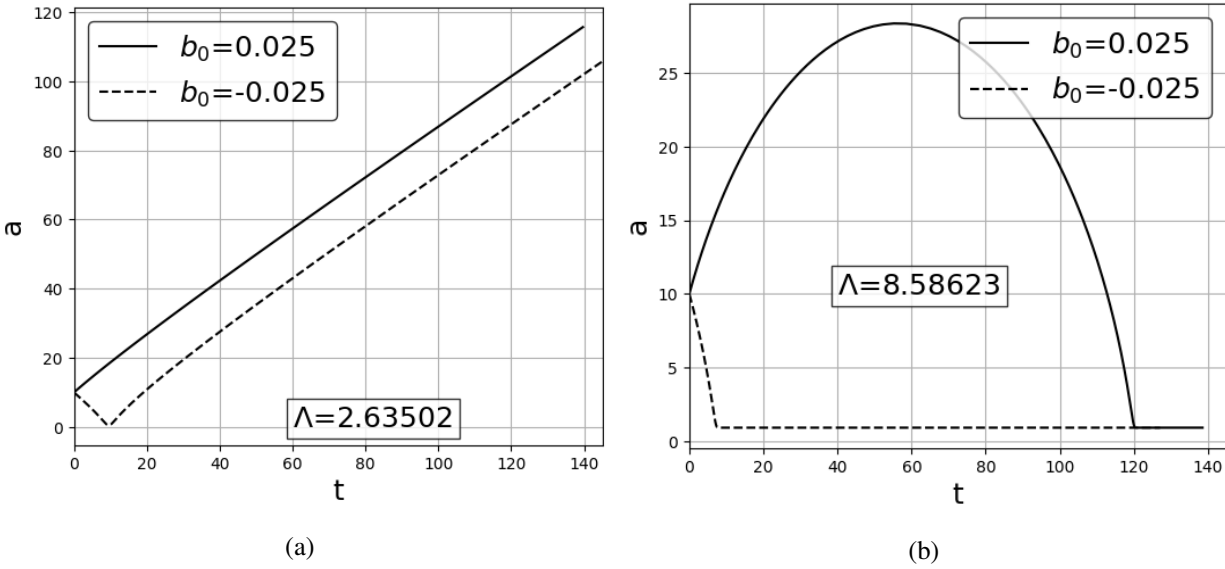


Figura 3.9: Evolución de  $a$  cuando  $\Lambda_c \geq \Lambda_b$ . Como condiciones iniciales se tiene  $a_0 = 10$ ,  $A_0 = 0.25$ ,  $\delta = 0.99$ ,  $p = 0$  y  $b_0 = \pm 0.025$ , valores que resultan en  $\Lambda_c = 5.58623$  y  $\Lambda_b = 2.73502$ . En la gráfica (a) se muestra un pulso difusivo para  $\Lambda < \Lambda_b$  mientras que en el gráfico (b) se muestran pulsos que evolucionan como solitones asintóticos cuando  $\Lambda > \Lambda_c$ .

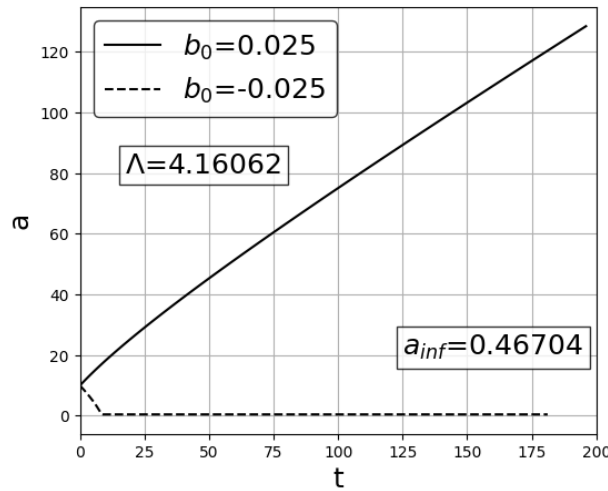


Figura 3.10: Integración numérica de  $a$  para  $\Lambda$  entre  $\Lambda_c = 5.58623$  y  $\Lambda_b = 2.73502$  con condiciones iniciales  $a_0 = 10$ ,  $A_0 = 0.25$ ,  $\delta = 0.99$  y  $b_0 = \pm 0.025$ .

asintótico mientras que si  $b_0 > 0$  el pulso se expande a lo largo del arreglo sin límite alguno ( $a$  tiende al infinito).

Sin importar que  $\Lambda_c > \Lambda_b$  o que  $\Lambda_b > \Lambda_c$  ambos umbrales son positivos por lo que toda  $\Lambda < 0$  siempre será menor que  $\Lambda_b$  y  $\Lambda_c$ . En éste caso los pulsos siempre serán difusivos, de ahí que éste escenario, en donde  $\cos \{ \delta p \} > 0$ , sea identificado como un estado de decoherencia negativa.

### 3.6.2. Decoherencia positiva

La condición de decoherencia positiva  $\cos \{\delta p\} < 0$  se satisface cuando

$$p \in \left( \frac{(4w+1)\pi}{2\delta}, \frac{(4w+3)\pi}{2\delta} \right) \quad \text{con } w \in \mathbb{Z}. \quad (3.122)$$

Las soluciones de este estado son un caso dual al anterior. Por un lado,  $G(a)$  (ecuación (3.96)) será mayor o igual que cero ya que cumpliéndose la desigualdad (3.97) ésta se invierte al multiplicarla por  $\cos \{\delta p\}$  dando lugar a que

$$\exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \cos \{\delta p\} \leq \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} (1 + 4a^4 b^2) \right\} \cos \{\delta p\}. \quad (3.123)$$

Sumando de ambos lados  $\Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a$  se obtiene

$$\exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \cos \{\delta p\} + \frac{\Lambda \mathcal{N}}{4\sqrt{2}a} \leq U \quad (3.124)$$

llegando a la conclusión de que  $G(a) \geq 0$ .

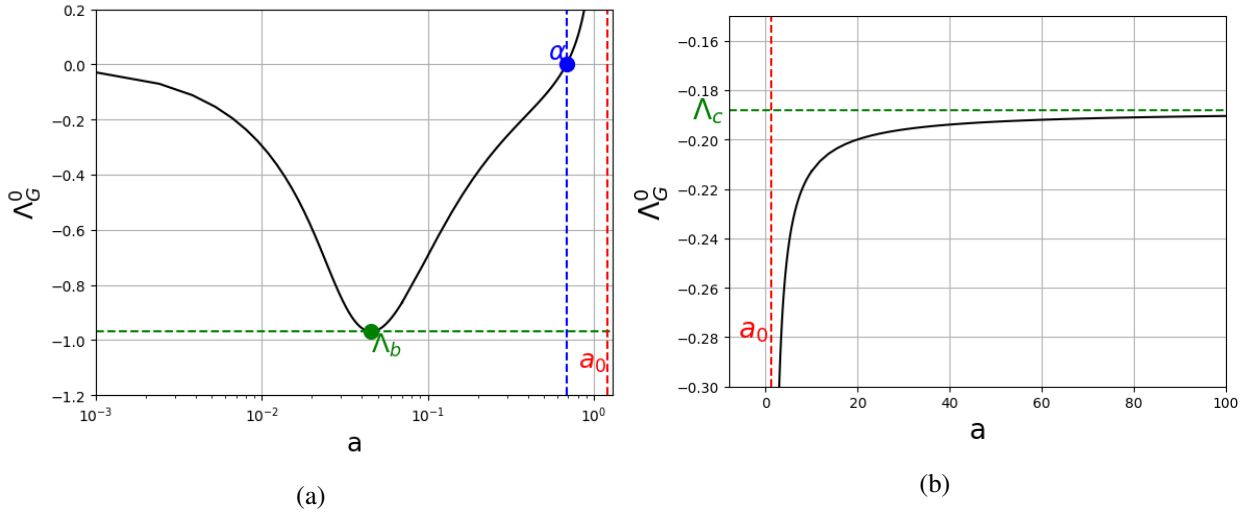


Figura 3.11: Esquema de la función  $\Lambda_G^0$  para  $\cos \{\delta p\} < 0$ . (a) Comportamiento de  $\Lambda_G^0$  para  $a$  entre 0 y  $a_0$ . En  $a = \alpha$  la función se anula. Cuando  $a$  tiende a cero  $\Lambda_G^0$  también lo hace. Entre 0 y  $\alpha$  existe un único valor mínimo definido como  $\Lambda_b$ . (b) Comportamiento de  $\Lambda_G^0$  para  $a > a_0$ . La función tiene una cota superior denotada por  $\Lambda_c < 0$  a la cual se aproxima de manera asintótica cuando  $a$  tiende al infinito.

Al igual que en la decoherencia negativa, la función  $\Lambda_G^0$  delimita los valores que el ancho del pulso pueda tomar. En este caso el cambio de signo en  $\cos\{\delta p\}$  hace que  $\Lambda_G^0$  se vea como una reflexión respecto del eje  $x$  por lo que sus nuevas propiedades son de fácil inferencia.

Por un lado,  $\Lambda_G^0$  continúa teniendo una discontinuidad en  $a = a_0$  ya que

$$\Lambda_G^0(a^+ \rightarrow a_0) \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad \Lambda_G^0(a^- \rightarrow a_0) \rightarrow \infty . \quad (3.125)$$

Cuando  $a > a_0$  la función se comporta de manera creciente con un límite superior en  $\Lambda_c < 0$  dado por (3.104) al que tiende de manera asintótica (figura 3.11b) mientras que si  $a < a_0$  la función será negativa en el intervalo  $(0, \alpha)$ , con  $\alpha$  dado por (3.105), alcanzando un único mínimo en el dicho intervalo y volviéndose positiva en  $[\alpha, a_0)$  creciendo hasta el infinito cuando  $a$  se aproxima a  $a_0$  (figura 3.11a).

Al ser  $G(a) \geq 0$ , por la ecuación (3.101), si  $a < a_0$  entonces  $\Lambda \leq \Lambda_G^0(a)$  así que  $a$  solo podrá tomar valores para los cuales  $\Lambda_G^0(a)$  sea mayor o igual que  $\Lambda$ , mientras que si  $a > a_0$  entonces  $\Lambda \geq \Lambda_G^0(a)$  y en consecuencia  $a$  solo podrá tomar valores tales que  $\Lambda_G^0(a)$  sea menor que  $\Lambda$ .

Es importante notar que para  $\Lambda < 0$  la constante  $U$  también será negativa, así que por (3.89)  $U < \Lambda \mathcal{N} / 4\sqrt{2}a$ , al multiplicar la desigualdad por  $a/U$  ésta se invierte llegando a que  $a > a_{inf} > 0$  con  $a_{inf}$  dado por (3.93), así que el ancho del pulso se mantiene acotado inferiormente imposibilitado de volverse cero. Como consecuencia de este acotamiento inferior de  $a$  se sigue cumpliendo con la ecuación (3.94) la cual describe el comportamiento de  $z'$ ; recuérdese que gracias a esta expresión  $z(t)$  solamente puede crecer, ya sea en la dirección positiva o en la negativa, sin presentar oscilaciones, o bien podría ser constante.

Nuevamente, las posibles evoluciones del pulso y las condiciones bajo las cuales se dan dependerá de si  $\Lambda_c > \Lambda_b$  o si  $\Lambda_b > \Lambda_c$ .

De la ecuación (3.80) se puede ver que si  $b_0 < 0$  la tendencia inicial de  $a$  será crecer mientras que si  $b_0 > 0$  en los primeros instantes el ancho del pulso disminuirá. Si  $\Lambda_b < \Lambda_c$  (figura 3.12a)

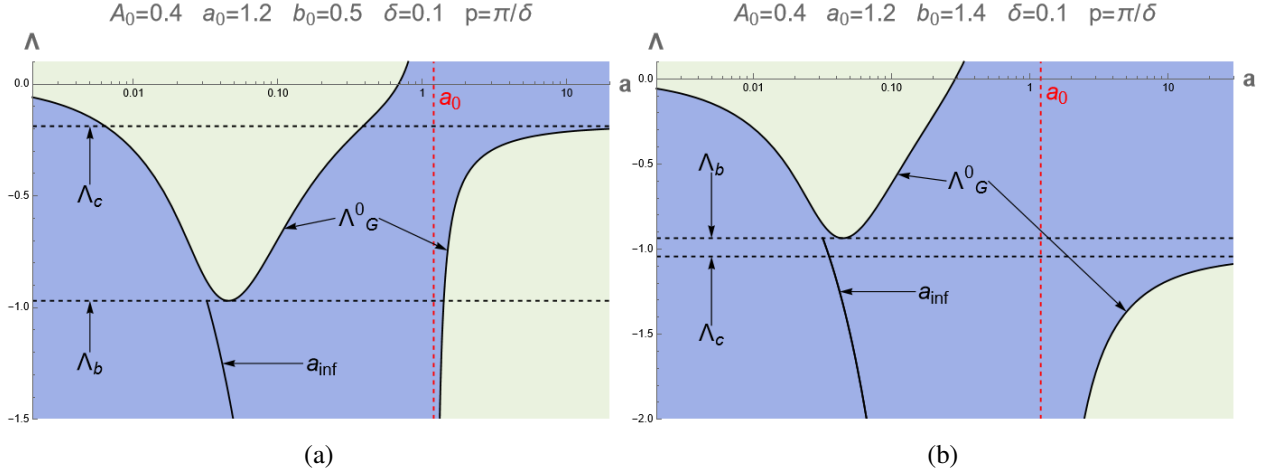


Figura 3.12: Esquema de  $\Lambda_G^0$  en la decoherencia positiva cuando (a)  $\Lambda_c > \Lambda_b$  y cuando (b)  $\Lambda_c < \Lambda_b$ .

los pulsos evolucionarán como solitones asintóticos cuando  $\Lambda < \Lambda_b$ , como breathers cuando  $\Lambda_b < \Lambda < \Lambda_c$  y serán difusivos cuando  $\Lambda \geq \Lambda_c$  (figuras 3.13a y 3.13b). Por otro lado, si  $\Lambda_c < \Lambda_b$  (figura 3.12b) los pulsos serán difusivos cuando  $\Lambda > \Lambda_b$ , evolucionarán como solitones asintóticos cuando  $\Lambda < \Lambda_c$  y si  $\Lambda_c < \Lambda < \Lambda_b$  los pulsos serán difusivos para  $b_0 < 0$  o se comportarán como solitones asintóticos cuando  $b_0 > 0$  (figuras 3.13c y 3.13d). En cualquiera de los casos tanto  $\Lambda_b$  como  $\Lambda_c$  son negativos por lo que para todo  $\Lambda > 0$  los pulsos siempre serán difusivos.

El periodo de los breathers sigue siendo determinado por (3.111) y los comportamientos asintóticos de  $b$  y  $z$  en el caso de los solitones asintóticos siguen correspondiendo a las ecuaciones (3.115) y (3.117), respectivamente, aún cuando dichas expresiones fueron determinadas para el caso de decoherencia negativa, ya que solo se utilizó la forma del sistema (3.80)-(3.82) así como la cantidad conservada  $U$  en (3.89) las cuales no cambian si  $\cos\{\delta p\}$  es mayor o menor que cero.

### 3.6.3. Solitones variacionales

El sistema (3.80)-(3.81) admite soluciones estacionarias, conocidas como *solitones variacionales* de dos maneras.

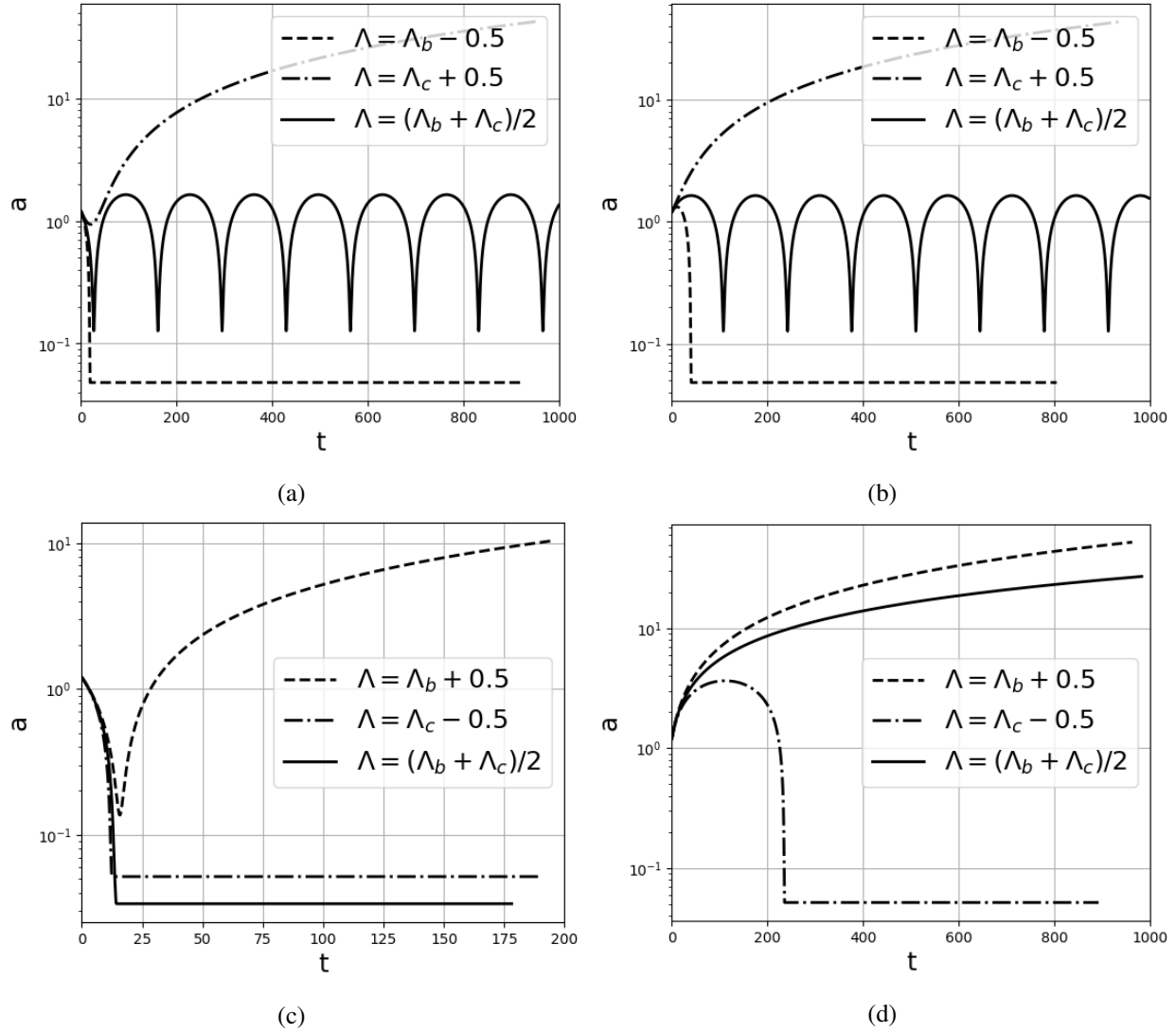


Figura 3.13: Evolución del ancho del pulso en la decoherencia positiva para diferentes valores de  $\Lambda$ . En los cuatro gráficos se utilizaron las condiciones iniciales  $a_0 = 1.2$ ,  $A_0 = 0.4$ ,  $\delta = 0.1$  y  $p = \pi/\delta$ . En (a)  $b_0 = 0.5$  mientras que en (b)  $b_0 = -0.5$ . Por otro lado, en (c)  $b_0 = 1.4$  mientras que en (d)  $b_0 = -1.4$ . En (a) y en (b) los valores críticos de  $\Lambda$  están dados por  $\Lambda_b = -0.96946$  y  $\Lambda_c = -0.18816$  por lo que  $\Lambda_c > \Lambda_b$ , mientras que en (c) y (d) se tiene  $\Lambda_c = -1.04354$  y  $\Lambda_b = -0.93613$  con lo cual  $\Lambda_c < \Lambda_b$ .

### Solitones bi-estables

Por un lado, suponiendo que  $\cos\{\delta p\} \neq 0$ , si  $b = 0$  para todo  $t$  entonces  $a' = 0$  siempre y en consecuencia (ecuación (3.84))  $A$  será constante. Bajo esta condición la ecuación (3.81) propor-

ciona una relación entre la amplitud y el ancho del pulso de la siguiente manera

$$A_0^2 = 2\sqrt{2} \frac{\delta^2}{a_0^2} \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a_0^2} \right\} \frac{\cos \{\delta p\}}{\Lambda}. \quad (3.126)$$

Esta solución puede darse siempre y cuando  $\cos \{\delta p\} / \Lambda > 0$ .

Obsérvese que

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0^+} A_0^2(a_0) = 0 = \lim_{a_0 \rightarrow \infty} A_0^2(a_0), \quad (3.127)$$

es decir, la amplitud de éstas soluciones disminuye cuanto más grande o pequeño sea el ancho de los pulsos.

Obsérvese que

$$\frac{dA_0^2}{da_0} = \left( \sqrt{2} \frac{\cos \{\delta p\}}{\Lambda} \right) \left( \frac{\delta}{a_0} - 2 \right) \left( \frac{\delta}{a_0} + 2 \right) \left( \frac{\delta^2}{a_0^3} \right) \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a_0^2} \right\}, \quad (3.128)$$

de lo cual se puede ver que  $A_0^2$  tiene un único valor extremo en  $a_0 = \delta/2$  dado por

$$A_{max}^2 = \left( \frac{8\sqrt{2}}{e} \right) \frac{\cos \{\delta p\}}{\Lambda} \approx 4.16 \frac{\cos \{\delta p\}}{\Lambda}, \quad (3.129)$$

así que cuanto mayor es  $|\Lambda|$  la máxima amplitud que éstos solitones variacionales podrán alcanzar disminuirá. Es importante notar que si  $a_0 < \delta/2$  entonces  $dA_0^2/da_0 > 0$  por lo que  $A_0^2$  crece de forma monótona en el intervalo  $(0, \delta/2)$  desde 0 hasta  $A_{max}^2$ , mientras que si  $a_0 > \delta/2$  entonces  $dA_0^2/da_0 < 0$ , es decir,  $A_0^2$  disminuye de forma monótona en el intervalo  $(\delta/2, \infty)$  desde  $A_{max}^2$  hasta 0. De esta manera se infiere que siempre se pueden encontrar dos valores diferentes para  $a_0$  que generen el mismo valor  $A_0^2 < A_{max}^2$  (figura 3.14).

Las soluciones que presentan este tipo de comportamiento son conocidas como *bi-estables*. En la figura 3.15 se pueden observar dos integraciones numéricas del sistema (3.80)-(3.81) correspondientes a solitones variacionales con la misma amplitud pero diferentes valores de  $a_0$ .

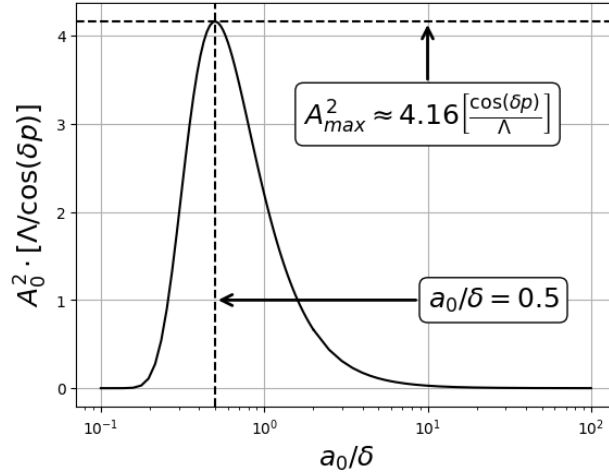
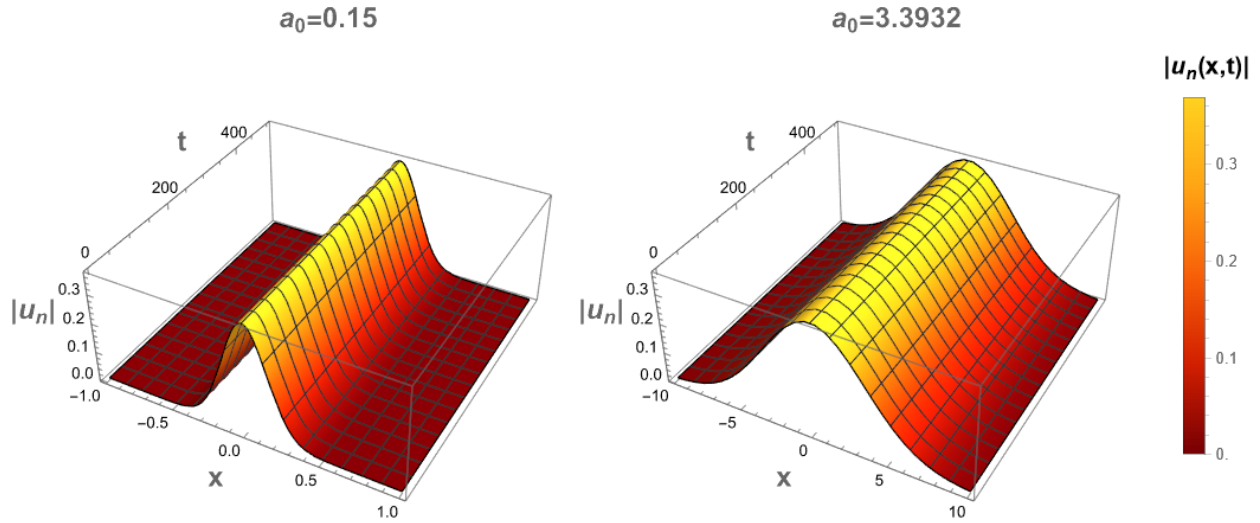


Figura 3.14: Amplitud de los solitones variacionales bi-estables como función del ancho de los pulsos.


 Figura 3.15: Solitones variacionales bi-estables obtenidos mediante la integración numérica del sistema (3.80)-(3.81) con los valores  $\delta = 0.75$ ,  $p = 0$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $A_0 = 0.3694$  (obtenido mediante (3.126)),  $a_0 = 0.15$  en el gráfico izquierdo y  $a_0 = 3.3932$  en el gráfico derecho.

En este caso

$$z' = -2\delta \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4a_0^2}\right\} \sin\{\delta p\}, \quad (3.130)$$

por lo que el centro del pulso se mantendrá posicionado en  $z_0 = z(t=0)$  si  $p = w\pi/\delta$  con  $w \in \mathbb{Z}$  o se trasladará con una "velocidad" constante si  $\sin\{\delta p\} \neq 0$ . En este segundo caso, cuanto más ancho es el pulso más "lento" se moverá a lo largo del arreglo, sin embargo, debido a que para un solo valor de  $A$  pueden existir dos solitones con anchuras diferentes, en este arreglo los solitones

que posean las mismas amplitudes podrían desplazarse a velocidades diferentes.

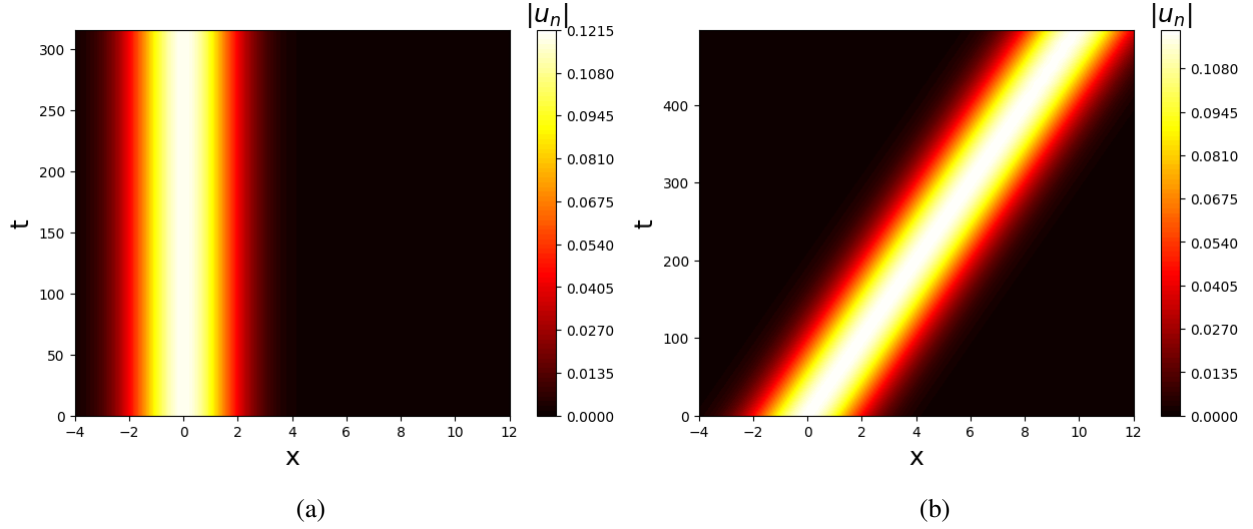


Figura 3.16: Integración del sistema (3.80)-(3.82) con  $a = 1.4$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $b_0 = 0$ ,  $\Lambda = 1$  y  $A_0 = 0.11975$  (dado por (3.126)) en ambos gráficos. En (a)  $p = 0$  por lo que el pulso se mantiene centrado en  $x = 0$ , mientras que en (b)  $p = 1$  de tal manera que el pulso se moverá a lo largo del arreglo.

En la figura 3.16 se muestra la integración del sistema (3.80)-(3.82) bajo las condiciones que generan soluciones estacionarias cuando  $\cos\{\delta p\} \neq 0$ . En la figura 3.16a se toma  $p = 0$  por lo que el pulso no se desplaza a lo largo del arreglo, mientras que en 3.16b el momento es distinto de cero generando pulsos cuyo centro se desplaza a lo largo del arreglo en una sola dirección.

### Solitones con chirp

Por otro lado, es posible obtener soluciones estables para el sistema (3.80)-(3.81) si

$$p = \frac{(2w + 1)\pi}{2\delta} \quad \text{con} \quad w \in \mathbb{Z} \quad (3.131)$$

ya que de esta forma  $a' = 0$  para todo  $t$  (ecuación (3.80)) y con ello

$$a_{sol}(t) = a_0 \cdot \quad (3.132)$$



En este caso la ecuación (3.81) se convierte en

$$b' = -\frac{\Lambda A_0^2}{2\sqrt{2}a_0^2}, \quad (3.133)$$

así que  $b$  disminuirá hacia  $-\infty$  con una "velocidad" constante, a demás, a diferencia del caso anterior, éstos pulsos podrán tener cualquier amplitud  $A_0$  y cualquier ancho  $a_0$ . Es posible integrar (3.133) de tal manera que

$$b_{sol}(t) = -\frac{\Lambda A_0^2}{2\sqrt{2}a_0^2}t + b_0. \quad (3.134)$$

Sustituyendo (3.134) y  $a = a_0$  en (3.82) se obtiene

$$z'(t) = -(-1)^w 2\delta \exp \left\{ -\left( \frac{\delta \Lambda A_0^2}{2\sqrt{2}a_0}t - \delta a_0 b_0 \right)^2 \right\}. \quad (3.135)$$

Dado que el interés yace en la evolución de los pulsos para valores de  $t$  grandes, se puede suponer que  $t > 2\sqrt{2}a_0^2|b_0|/\Lambda A_0^2$  con lo cual la integración de  $z'(t)$  desde  $t = 0$  hasta un  $t$  arbitrario será

$$z_{sol}(t) = (-1)^{w+1} \frac{2\sqrt{2\pi}a_0}{\Lambda A_0^2} \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a_0^2} \right\} \times \left[ \phi \left( \frac{\delta \Lambda A_0^2}{2\sqrt{2}a_0}t - \delta a_0 b_0 \right) + \text{sgn} \{b_0\} \phi(\delta a_0 |b_0|) \right] \quad (3.136)$$

con  $z_0 = 0$  de tal manera que los pulsos se encuentren centrados en el  $n$ -ésimo elemento del arreglo cuando  $t = 0$  y con  $\phi$  dado la función de error definida en (3.119). Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 1$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_{sol}(t) = z_{lim}^{sol}, \quad (3.137)$$

$$z_{lim}^{sol} = (-1)^{w+1} \frac{2\sqrt{2\pi}a_0}{\Lambda A_0^2} \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a_0^2} \right\} [1 + \text{sgn} \{b_0\} \phi(\delta a_0 |b_0|)], \quad (3.138)$$

es decir, el solitón tenderá a posicionarse a una distancia  $x = z_{lim}^{sol}$  del  $n$ -ésimo elemento del arreglo.

Obsérvese que los comportamientos asintóticos de  $a$ ,  $b$  y  $z$  en (3.113), (3.115) y (3.117), respectivamente, para el caso de los solitones asintóticos en los estados de decoherencia positiva y negativa, tienen las mismas formas que los parámetros  $a_{sol}$ ,  $b_{sol}$  y  $z_{sol}$  en (3.132), (3.134) y (3.136), respectivamente, los cuales describen de forma exacta el comportamiento de los solitones variacionales admitidos por el sistema (3.80)-(3.82) cuando  $\cos\{\delta p\} = 0$ .

Cuando  $|\Lambda|$  es lo suficientemente grande entonces  $U \approx \Lambda \mathcal{N}/4\sqrt{2}a_0$  (ecuación (3.89)) por lo que  $a_{inf} \approx a_0$  (ecuación (3.93)), siendo que  $a(t)$  tiende de manera asintótica a  $a_{inf}$ , en este régimen  $z(t) \approx \sin\{\delta p\} z_{sol}(t)$ , con  $w = 0$  en  $z_{sol}$  y  $z(t)$  dada por (3.117), al tomar  $t_1 = 0$  en (3.118), reforzando la designación de *solitones asintóticos* a este tipo de soluciones.

En la figura 3.17 se muestra una comparativa entre la evolución de un solitón asintótico cuyo centro se aleja de la posición inicial (figura 3.17b) y un solitón analítico (figura 3.17a), ambos obtenidos mediante la integración numérica del sistema (3.80)-(3.82).

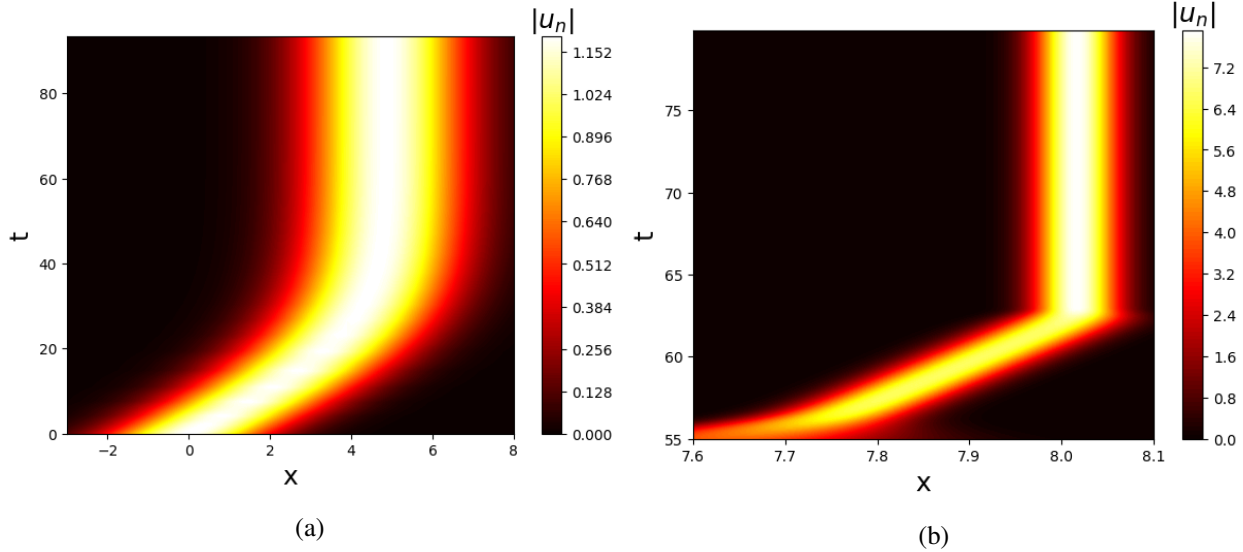


Figura 3.17: Norma de  $u_n$ , con el pulso inicialmente centrado en el elemento  $n = 0$  del arreglo, para (a) un solitón con chirp y (b) un solitón asintótico. En ambos casos se utilizaron los valores  $a_0 = 1.4$ ,  $A_0 = 1.2$ ,  $b_0 = 0.001$  y  $\delta = 0.1$ . Para la integración de la solución en (a) se tomaron en cuenta los valores  $p = \pi/2\delta$  y  $\Lambda = 1$  mientras que en (b) se hizo uso de  $p = \pi/4\delta$  y  $\Lambda = 0.0653$ .

Si bien los *solitones con chirp* pueden tener cualquier altura y ancho no permanecerán centrados en la posición inicial ya que no hay manera de que  $z_{sol}(t)$  sea cero para toda  $t$ . Por otro lado, los *solitones bi-estables* no pueden tener cualquier amplitud ya que ésta es definida por el

ancho del pulso y se alcanza un valor máximo cuando  $a_0$  es la mitad del espaciado  $\delta$  entre los elementos del arreglo, sin embargo, a diferencia de los solitones con chirp, éste tipo de soluciones estacionarias pueden permanecer centrados en su posición inicial o bien, pueden desplazarse a lo largo todo el arreglo, siempre en una sola dirección y nunca a una "velocidad" mayor que  $2\delta$ .

### 3.7. Reducción del modelo DNLS al NLS

Dado que el modelo DNLS es una discretización directa del modelo NLS, cuanto menor es la "intensidad" de los efectos discretos en el primero más se deberían de parecer sus soluciones a las del segundo, sin embargo, los tratamientos usuales no permiten medir qué tan alejado está el modelo DNLS del NLS ya que desde sus perspectivas uno es meramente discreto en su variable transversal mientras que el otro es completamente continuo, rompiendo así un enlace muy importante entre ambas ecuaciones.

Mediante el tratamiento interpolativo, desarrollado en el capítulo anterior, se puede recuperar la conexión entre las ecuaciones DNLS y NLS midiendo la intensidad de los efectos discretos a través del parámetro  $\delta$ . Cuanto más grande es  $\delta$  mayor es la relevancia de los efectos discretos mientras que si  $\delta$  tiende a cero el modelo DNLS tiende a convertirse en el modelo NLS (como se vio en la deducción de la ecuación DNLS mediante el método de diferencias finitas en el Capítulo 2.1).

La ecuación NLS general, dada por (2.1), puede ser deducida mediante la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left( \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \tau} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right) + \alpha \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right|^2 + \frac{1}{2} g |\Psi|^4 + V |\Psi|^2 \quad (3.139)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas definidas en (2.33).

La sustitución del ansatz

$$u(\xi, \tau) = A(\tau) \exp \left\{ -\frac{(\xi + z(\tau))^2}{2a^2(\tau)} \right\} e^{i[b(\tau)(\xi+z(\tau))^2 + p(\xi+z(\tau)) + h(\tau)]} \quad (3.140)$$

en (3.139) dan como resultado la Lagrangiana efectiva

$$L_{NLS} = -k\sqrt{\pi}A^2a \left( - \left( h' + pz' + \frac{a^2b'}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + 4b^2a^2 \right) - p^2 + \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}A^2 + \gamma \right) \quad (3.141)$$

en donde se ha tomado el cambio de variable  $\tau = t/k$  con

$$k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\xi^2} d\xi, \quad \lambda = \frac{-1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g e^{-\xi^2} d\xi, \quad \gamma = \frac{-1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V e^{-\xi^2} d\xi. \quad (3.142)$$

Recuérdese que la Lagrangiana efectiva del modelo DNLS obtenida mediante el ansatz (3.140) con  $\tau = t/K$  y el cambio de variable  $\xi \rightarrow x + n\delta$  corresponde a

$$L_{DNLS} = \sqrt{\pi}A^2a \left( - \left( h' + pz' + \frac{a^2b'}{2} \right) + 2 \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} (1 + 4a^4b^2) \right\} \cos \{ \delta p \} + \frac{\Lambda}{2\sqrt{2}}A^2 + \Gamma \right). \quad (3.143)$$

Por un lado, si  $\delta$  es pequeño entonces

$$\exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + 4a^2b^2 \right) \right\} \approx 1 - \frac{\delta^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + 4a^2b^2 \right), \quad (3.144)$$

$$\cos \{ \delta p \} \approx 1 - \frac{1}{2} \delta^2 p^2, \quad (3.145)$$

de tal manera que

$$\exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + 4a^2b^2 \right) \right\} \cos \{ \delta p \} \approx \left( 1 - \frac{\delta^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + 4a^2b^2 \right) \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \delta^2 p^2 \right) \quad (3.146)$$

$$\approx 1 - \frac{\delta^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + 4a^2b^2 \right) - \frac{1}{2} \delta^2 p^2, \quad (3.147)$$

en donde se ha despreciado el término  $\delta^4$ .

Sustituyendo la aproximación (3.147) en (3.143) se obtiene

$$L_{DNLS} \approx \sqrt{\pi}A^2a \left( - \left( h' + pz' + \frac{a^2b'}{2} \right) - \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{1}{a^2} + 4b^2a^2 \right) - \delta^2 p^2 + \frac{\Lambda}{2\sqrt{2}}A^2 + \Gamma + 2 \right). \quad (3.148)$$

Tomando el cambio de variable  $t \rightarrow t/\delta^2$  junto con  $\lambda = \Lambda/\delta^2$  y  $\gamma = (\Gamma + 2)/\delta^2$  se llega a

$$L_{DNLS} \approx \delta^2 \sqrt{\pi} A^2 a \left( - \left( h' + pz' + \frac{a^2 b'}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + 4b^2 a^2 \right) - p^2 + \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} A^2 + \gamma \right) . \quad (3.149)$$

Como las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales permiten despreciar constantes que multiplican a toda la Lagrangiana es posible eliminar el término  $-k$  en  $L_{NLS}$  y  $\delta^2$  en  $L_{DNLS}$  resultando en

$$L_{DNLS} \approx L_{NLS} . \quad (3.150)$$

Cuanto mas pequeño sea  $\delta$  (aún presente en las constantes  $\lambda$  y  $\gamma$  de (3.149)) mejor será la aproximación entre las formas de  $L_{DNLS}$  y  $L_{NLS}$  así que cuando  $\delta \rightarrow 0$  las evoluciones de los pulsos descritos por la Lagrangiana  $L_{DNLS}$  serán las mismas que las descritas por la Lagrangiana  $L_{NLS}$ .

De esta manera el modelo DNLS se aproxima al modelo NLS cuando los efectos discretos, medidos por la magnitud de  $\delta$ , se vuelven irrelevantes.

# Capítulo 4

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha estudiado la evolución de pulsos (o funciones de onda) localizados generados en arreglos gobernados por el modelo No-lineal de Schrödinger Discreto homogéneo mediante lo que se ha denominado como una "representación interpolativa" de dicha ecuación. Para ello se introdujo una única función de onda  $u_n$  dependiente de una variable transversal  $x$  y una variable de evolución  $t$  de tal manera que las funciones de onda  $c_n$  en la representación original encajaran con las primeras cuando  $x$  fuera igual a  $n\delta$  con  $\delta > 0$  una constante con la cual se cuantificaron los efectos discretos en el modelo. Gracias a ello fue posible no solo la obtención de una densidad Lagrangiana con la cual aplicar el método variacional de Anderson en su forma original, sino que también se dedujeron las ecuaciones de Euler-Lagrange extendidas asociadas al modelo DNLS interpolativo así como la forma del Teorema de Noether para la obtención de las cantidades conservadas del sistema a través de sus simetrías.

Mediante la aplicación del AVM con una función de prueba Gaussiana se dedujeron propiedades muy interesantes respecto a la evolución de los pulsos, las cuales se presentan a continuación.

- El centro de los pulsos no puede desplazarse a lo largo del arreglo con una "velocidad" mayor o igual que el doble de  $\delta$ . Cuando  $\delta$  se aproxima a cero los efectos discretos se vuelven irrelevantes y los pulsos solo evolucionan de tal forma que su centro se mantenga estático.
- Ya sea un caso de decoherencia negativa o positiva, el ancho del pulso siempre se mantiene

acotado inferiormente y en consecuencia su amplitud posee una cota superior. Gracias a ello el sistema no admite soluciones del tipo *blowup* cuya amplitud se vuelve infinita en un  $t < \infty$ .

- Los pulsos solo podrán desplazarse en una sola dirección ya que el signo de  $z'(t)$  será contrario a  $\tan \{M\delta/\mathcal{N}_u\}$  término que se mantiene constante respecto de  $t$ .
- Los pulsos de prueba evolucionan de maneras drásticamente diferentes cuando su momento toma valores en dos intervalos diferentes

$$M \in \left( \frac{(4w-1)\pi\mathcal{N}_u}{2\delta}, \frac{(4w+1)\pi\mathcal{N}_u}{2\delta} \right) \quad \text{y} \quad M \in \left( \frac{(4w+1)\pi\mathcal{N}_u}{2\delta}, \frac{(4w+3)\pi\mathcal{N}_u}{2\delta} \right)$$

con  $w \in \mathbb{Z}$ . Resulta que los pulsos son difusivos si  $\Lambda < 0$  (decoherencia negativa) y si  $\Lambda > 0$  (decoherencia positiva), respectivamente.

- En ambos casos, la posición relativa de  $\Lambda$  respecto de  $\Lambda_c$  y  $\Lambda_b$  determinará la evolución del pulso como se resume en las Tablas 4.1 y 4.2.

	$\Lambda_b > \Lambda_c$	
Decoherencia	Positiva	Negativa
$\Lambda > \Lambda_b$	sol. asin.	dis.
$\Lambda_b > \Lambda > \Lambda_c$	breather	dis. si $b_0 > 0$
		sol. asin. si $b_0 < 0$
$\Lambda_c > \Lambda$	dis.	sol. asin.

Tabla 4.1

	$\Lambda_c > \Lambda_b$	
Decoherencia	Positiva	Negativa
$\Lambda > \Lambda_c$	sol. asin.	dis.
$\Lambda_c > \Lambda > \Lambda_b$	dis. si $b_0 > 0$	breather
	sol. asin. si $b_0 < 0$	
$\Lambda_b > \Lambda$	dis.	sol. asin.

Tabla 4.2

Si bien tanto  $\Lambda_c$  como  $\Lambda_b$  dependen de las condiciones iniciales del sistema sus valores son

---

los mismos si  $b_0$  es mayor o menor que cero, sin embargo, la evolución de los pulsos depende de la tendencia inicial de su ancho cuando  $\Lambda_c > \Lambda > \Lambda_b$  en la decoherencia positiva y cuando  $\Lambda_b > \Lambda > \Lambda_c$  en la decoherencia negativa.

- En general los máximos y mínimos alcanzados por el ancho del pulso (los cuales son raíces reales de  $G$  en (3.96)) no dependen del signo de  $b_0$  por lo que cuando la evolución de los pulsos es independiente de si esta condición inicial es mayor o menor que cero el resultado de tal diferencia será un corrimiento de la fase de la onda y cuando  $|b_0| \ll 1$  ambos casos serán prácticamente indistinguibles.
- Las integraciones numéricas de  $a'$  y  $b'$ , en los casos difusivos, revelan que la estabilidad de los pulsos es mayor cuando su momento se aproxima a  $(2w + 1) \pi \mathcal{N}_u / (2\delta)$  con  $w \in \mathbb{Z}$ .
- El método variacional revela que el sistema acepta dos tipos de soluciones estacionarias, a saber, solitones variacionales sin chirp (bi-estables) y con chirp.
- Cuando  $b = 0$  y  $\cos \{\delta M / \mathcal{N}_u\} / \Lambda > 0$  los pulsos evolucionan de forma estable, su perfil se mantiene igual en todo momento y pueden desplazarse a lo largo del arreglo, sin embargo, aún cuando éstos pueden tener cualquier ancho su amplitud se encuentra acotada superiormente alcanzando un valor máximo aproximado a  $\sqrt{4.16 \cos \{\delta M / \mathcal{N}_u\} / \Lambda}$  cuando el ancho del pulso es igual a  $\delta/2$ . Para cada valor de la amplitud existen dos valores diferentes del ancho que generan pulsos estacionarios por lo que las soluciones son bi-estables.

En el modelo FPU, cuanto mayor es la amplitud de los pulsos mayor es la velocidad a la que se desplazan en la cadena de osciladores. En el modelo DNLS, si dos solitones bi-estables poseen la misma amplitud pero uno es mas ancho que el otro, el pulso más angosto se moverá con una velocidad mayor a lo largo del arreglo; en general cuanto menor sea el ancho del pulso mayor será su velocidad.

- Cuando el momento del pulso es igual a  $(2w + 1) \pi \mathcal{N}_u / (2\delta)$ , con  $w \in \mathbb{Z}$ , su perfil se mantendrá igual para todo valor de  $t$  mientras que su centro se desplazará hasta posicionarse



---

en  $x = z_{lim}^{sol}$  de forma asintótica con  $b$  evolucionando de forma lineal. A diferencia de las soluciones bi-estables éste tipo de pulsos pueden tener cualquier amplitud y ancho pero no son capaces de desplazarse a lo largo de todo el arreglo.

- Cuando  $|\Lambda| > \max \{|\Lambda_c|, |\Lambda_b|\}$  el ancho de los pulsos tenderá a un valor ínfimo de forma asintótica provocando que el chirp  $b$  se comporte como una función lineal. Si  $\sin \{\delta M / \mathcal{N}_u\} \neq 0$  su centro se moverá de la misma manera que el centro de los solitones analíticos, pero si  $\sin \{\delta M / \mathcal{N}_u\} = 0$  el centro del pulso se mantendrá estático.
- Cuando  $|b_0| \ll 1$  y  $a_0$  es lo suficientemente grande  $\Lambda_c$  se aproxima a su valor máximo dado por  $4\sqrt{2} \cos \{\delta M / \mathcal{N}_u\} / A_0^2$  el cual se vuelve relevante para pulsos con amplitudes iniciales pequeñas. En general, para pulsos anchos y altos el valor máximo al que  $\Lambda_c$  tiende es prácticamente nulo por lo que los efectos no-lineales tendrían que desaparecer para que los pulsos evolucionen de forma difusiva dando como resultado soluciones altamente estables del tipo breather, solitón asintótico o solitón variacional (con o sin chirp).
- Finalmente, cuando  $\delta$  tiende a cero los efectos discretos se vuelven irrelevantes y la evolución de los pulsos Gaussianos puede ser descrita mediante el modelo NLS.

Si bien las evoluciones de los pulsos del tratamiento variacional no corresponden a soluciones exactas del modelo DNLS proporcionan información muy valiosa respecto al tipo de comportamientos que se espera encontrar. El método variacional interpolativo presentado en este trabajo permite estudiar la estabilidad con que los pulsos se propagan a través de los arreglos gobernados por el modelo DNLS de formas muy detalladas, por lo que tal método podría ser aprovechado en el estudio de la ecuación DNLS con parámetros  $\Lambda$  y  $\Gamma$  variables así como en todo tipo de modelos que involucren la acción de efectos tanto discretos como continuos, al menos si lo que se desea es estudiarlos mediante tratamientos variacionales. Finalmente, la representación interpolativa del modelo DNLS no solo permitió relacionar su forma estándar con el modelo NLS, sino que también se pudo reducir la forma general (homogénea) de la ecuación DNLS a la de la ecuación NLS general (ecuación de Gross-Pitaevskii) al disminuir los efectos discretos en la primera, manteniendo

---

así una conexión importante entre ambos modelos, la cual se desvanece al considerar variables transversales discretas como es el caso de los tratamiento variacionales usuales de la ecuación DNLS.

# Apéndice A

## Complementos del tratamiento variacional interpolativo

### A.1. Ecuación de Euler-Lagrange extendida en la aproximación interpolativa del modelo DNLS

A continuación se muestra de manera explícita todo el procedimiento para la obtención de la ecuación (3.14).

Definimos  $q_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$q_n(x, t, \alpha) = u_n(x, t) + \alpha \eta_n(x, t) \quad (\text{A.1})$$

con  $u_n$  la función que minimiza a la acción  $S$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\eta_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  una función suave tal que

$$\eta_n(x \rightarrow \pm\infty, t \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0. \quad (\text{A.2})$$

A.1. ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE EXTENDIDA EN LA APROXIMACIÓN  
INTERPOLATIVA DEL MODELO DNLS

---

Con esta definición, la acción dada por

$$S(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(q_n(x, t, \alpha), q_{n,t}(x, t, \alpha), T_1[q_n](x, t, \alpha), T_{-1}[q_n](x, t, \alpha), c.c.) dt dx \quad (\text{A.3})$$

alcanza su mínimo en  $q_n(x, t, \alpha = 0)$ , es decir

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 . \quad (\text{A.4})$$

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \frac{\partial q_{n,t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_1[q_n]} \frac{\partial T_1[q_n]}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{-1}[q_n]} \frac{\partial T_{-1}[q_n]}{\partial \alpha} \right) dt dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n^*} \frac{\partial q_n^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}^*} \frac{\partial q_{n,t}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_1[q_n^*]} \frac{\partial T_1[q_n^*]}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{-1}[q_n^*]} \frac{\partial T_{-1}[q_n^*]}{\partial \alpha} \right) dt dx , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ecuación que es resumida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \frac{\partial q_{n,t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n+1}} \frac{\partial q_{n+1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n-1}} \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \alpha} \right) dt dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} (c.c.) dt dx \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde  $q_{n+1} = T_1[q_n]$  y  $q_{n-1} = T_{-1}[q_n]$ .

Analizando los términos de la primer integral.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \frac{\partial q_{n,t}}{\partial \alpha} dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} \right) dt dx \quad (\text{A.7})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} \right) dx \quad (\text{A.8})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \eta \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} \right) dx \quad (\text{A.9})$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} dt dx . \quad (\text{A.10})$$

Por otro lado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n\pm 1}}(x, t) \frac{\partial q_{n\pm 1}}{\partial \alpha}(x, t, \alpha) dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n\pm 1}}(x, t) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}(x \pm \delta, t, \alpha) dt dx \quad (\text{A.11})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n\pm 1}}(x, t) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}(x \pm \delta, t, \alpha) dx dt .$$

(A.12)

Aplicando el cambio de variable  $x \rightarrow x \mp \delta$  se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n\pm 1}}(x, t) \frac{\partial q_{n\pm 1}}{\partial \alpha}(x, t, \alpha) dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n\pm 1}}(x \mp \Delta x, t) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}(x, t, \alpha) dx dt$$

(A.13)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mp 1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n\pm 1}} \right] (x, t) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}(x, t, \alpha) dx dt$$

(A.14)

con lo cual se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n+1}} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n-1}} \right] \right) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} dt dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c.c.) dt dx \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

siendo la segunda integral la misma que la primera pero con  $q_n^*$  en lugar de  $q_n$ .

Dado que  $\partial_{\alpha}(q_n) = \eta_n$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n+1}} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n-1}} \right] \right) \eta_n dt dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c.c.) \eta_n^* dt dx \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

por lo que al evaluar en  $\alpha = 0$  se llega a

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n+1}} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n-1}} \right] \right) \Big|_{\alpha=0} \eta_n dt dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c.c.) \Big|_{\alpha=0} \eta_n^* dt dx \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$= 0 \quad (\text{A.18})$$

pero como  $\eta_n$  puede ser cualquier función que cumpla las condiciones impuestas, entonces

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n+1}} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n-1}} \right] \right) \Big|_{\alpha=0} \eta_n + (c.c.) \Big|_{\alpha=0} \eta_n^* = 0 . \quad (\text{A.19})$$

Ahora bien, dado que  $\eta_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  y como  $\alpha z + \beta z^* = 0$  implica  $\alpha = 0 = \beta$  para todo  $z \in \mathbb{C}$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n,t}} \right) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n+1}} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n-1}} \right] \right) \Big|_{\alpha=0} = 0 . \quad (\text{A.20})$$

Finalmente, como  $q_n(x, t, \alpha = 0) = u_n(x, t)$  se obtiene la ecuación (3.14)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n,t}} \right) + T_{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n+1}} \right] + T_1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{n-1}} \right] = 0 . \quad (\text{A.21})$$

## A.2. Integración explícita de $\mathcal{L}$ con un ansatz Gaussiano

Para realizar la integración de la densidad lagrangiana (3.57) conviene establecer algunas propiedades de la función (3.68).

Definiendo

$$y_n(x, t) = x + n\delta + z(t) . \quad (\text{A.22})$$

Por un lado, respecto a la función  $g$  definida en (3.69)

$$g(y_{n\pm 1}(x, t), t) = A(t) \exp \left\{ -\frac{y_{n\pm 1}^2(x, t)}{2a^2(t)} \right\} \quad (\text{A.23})$$

$$= A(t) \exp \left\{ -\frac{(x + (n \pm 1) \delta + z(t))^2}{2a^2(t)} \right\} \quad (\text{A.24})$$

$$= A(t) \exp \left\{ -\frac{(y_n(x, t) \pm \delta)^2}{2a^2(t)} \right\} \quad (\text{A.25})$$

$$= A(t) \exp \left\{ -\frac{y_n(x, t)^2}{2a^2(t)} \right\} \exp \left\{ -\frac{\delta^2 \pm 2y_n(x, t)\delta}{2a^2(t)} \right\} \quad (\text{A.26})$$

$$= g(y_n(x, t), t) \exp \left\{ -\frac{\delta^2 \pm 2y_n(x, t)\delta}{2a^2(t)} \right\}, \quad (\text{A.27})$$

mientras que para la función  $\phi$ , definida en (3.70), se tiene que

$$\phi(y_{n\pm 1}(x, t), t) = b(t)y_{n\pm 1}^2(x, t) + p(t)y_{n\pm 1}(x, t) + h(t) \quad (\text{A.28})$$

$$= b(t)(x + (n \pm 1) \delta + z(t))^2 + p(t)(x + (n \pm 1) \delta + z(t)) + h(t) \quad (\text{A.29})$$

$$= (b(t)y_n^2(x, t) + p(t)y_n(x, t) + h(t)) + b(t) (\delta^2 \pm 2y_n(x, t)\delta) \pm \delta p(t) \quad (\text{A.30})$$

$$= \phi(y_n(x, t), t) + b(t) (\delta^2 \pm 2y_n(x, t)\delta) \pm \delta p(t) \quad (\text{A.31})$$

y así

$$u_{n\pm 1}(x, t) = g(y_{n\pm 1}(x, t), t) \exp \{i\phi(y_{n\pm 1}(x, t), t)\} \quad (\text{A.32})$$

$$= u_n(x, t) \exp \left\{ -\frac{\delta^2 \pm 2y_n(x, t)\delta}{2a^2(t)} \right\} \exp \{i [b(t) (\delta^2 \pm 2y_n(x, t)\delta) \pm \delta p(t)]\} . \quad (\text{A.33})$$

Siendo

$$j_n^\pm(x, t) = u_n^*(x, t)u_{n\pm 1}(x, t) + u_n(x, t)u_{n\pm 1}^*(x, t) \quad (\text{A.34})$$

resulta que

$$j_n^\pm = |u_n|^2 \exp \left\{ -\frac{\delta^2 \pm 2y_n \delta}{2a^2} \right\} \left( e^{i[b(\delta^2 \pm 2y_n \delta) \pm \delta p]} + e^{-i[b(\delta^2 \pm 2y_n \delta) \pm \delta p]} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$= 2A^2 \exp \left\{ -\frac{y_n^2 + \delta^2/4 \pm 2y_n(\delta/2)}{a^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \cos \{ b(\delta^2 \pm 2y_n \delta) \pm \delta p \} \quad (\text{A.36})$$

$$= 2A^2 \exp \left\{ -\frac{(y_n \pm (\delta/2))^2}{a^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \cos \left\{ 2b\delta \left( y_n \pm \frac{\delta}{2} \right) + \delta p \right\} . \quad (\text{A.37})$$

Por otro lado

$$u_{n,t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( g(y_n(x, t), t) e^{i\phi(y_n(x, t), t)} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$= e^{i\phi(y_n(x, t), t)} \left( \frac{\partial g}{\partial t}(y_n(x, t), t) + ig(y_n(x, t), t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(y_n(x, t), t) \right) \quad (\text{A.39})$$

entonces

$$u_n^*(x, t) u_{n,t}(x, t) = g(y_n(x, t), t) \left( \frac{\partial g}{\partial t}(y_n(x, t), t) + ig(y_n(x, t), t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(y_n(x, t), t) \right) \quad (\text{A.40})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial g^2}{\partial t}(y_n(x, t), t) + ig^2(y_n(x, t), t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(y_n(x, t), t) . \quad (\text{A.41})$$

Como  $g$  y  $\phi$  son funciones reales y  $u_n^* u_{n,t} - u_n u_{n,t}^* = 2i \text{Im}(u_n^* u_{n,t})$  entonces

$$u_n^*(x, t) u_{n,t}(x, t) - u_n(x, t) u_{n,t}^*(x, t) = 2ig^2(y_n(x, t), t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(y_n(x, t), t) \quad (\text{A.42})$$

y finalmente

$$\frac{i}{2} (u_n^* u_{n,t} - u_n u_{n,t}^*) = -A^2 \exp \left\{ -\frac{y_n^2}{a^2} \right\} (b'y_n^2 + 2by_n z' + pz' + p'y_n + h') \quad (\text{A.43})$$

siendo  $b'$ ,  $p'$ ,  $z'$  y  $h'$  las derivadas temporales de  $b$ ,  $p$ ,  $z$  y  $h$  respectivamente.

Ahora se procede a sustituir (A.34)-(A.43) en (3.57) integrando el resultado respecto de  $x$  de



la siguiente manera

$$L = -A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y_n^2}{a^2} \right\} (b'y_n^2 + (2bz' + p')y_n + pz' + h') dx \quad (\text{A.44})$$

$$+ A^2 \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(y_n + (\delta/2))^2}{a^2} \right\} \cos \left\{ 2b\delta \left( y_n + \frac{\delta}{2} \right) + \delta p \right\} dx \quad (\text{A.45})$$

$$+ A^2 \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(y_n - (\delta/2))^2}{a^2} \right\} \cos \left\{ 2b\delta \left( y_n - \frac{\delta}{2} \right) + \delta p \right\} dx \quad (\text{A.46})$$

$$+ \Gamma A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y_n^2}{a^2} \right\} dx \quad (\text{A.47})$$

$$+ \frac{\Lambda}{2} A^4 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -2\frac{y_n^2}{a^2} \right\} dx \quad (\text{A.48})$$

siendo  $x$  y  $t$  variables independientes, en (A.44), (A.47) y (A.48) se realizará el cambio de variable  $x \rightarrow y_n$  con lo cual

$$dy_n = \frac{dy_n}{dx} dx = \frac{d(x + n\delta + z_n(t))}{dx} dx = dx \quad (\text{A.49})$$

mientras que en (A.45) y (A.46) se tomarán los cambios de variable  $x \rightarrow y_n + (\delta/2)$  y  $x \rightarrow y_n - (\delta/2)$  respectivamente, con

$$dy_n = \frac{dy_n}{dx} dx = \frac{d(x + n\delta + z(t) \pm \delta/2)}{dx} dx = dx \quad (\text{A.50})$$

obteniendo

$$L = -A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y_n^2}{a^2} \right\} (b'y_n^2 + (2bz' + p')y_n + pz' + h') dy_n \quad (\text{A.51})$$

$$+ A^2 \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y_n^2}{a^2} \right\} \cos \{ 2b\delta y_n + \delta p \} dy_n \quad (\text{A.52})$$

$$+ A^2 \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y_n^2}{a^2} \right\} \cos \{ 2b\delta y_n + \delta p \} dy_n \quad (\text{A.53})$$

$$+ \Gamma A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y_n^2}{a^2} \right\} dy_n \quad (\text{A.54})$$

$$+ \frac{\Lambda}{2} A^4 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -2\frac{y_n^2}{a^2} \right\} dy_n \quad (\text{A.55})$$

dando como resultado

$$L = \sqrt{\pi}A^2a \left( - \left( h' + pz' + \frac{a^2b'}{2} \right) + 2 \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} (1 + 4a^4b^2) \right\} \cos \{ \delta p \} + \right. \\ \left. + \Gamma + \frac{\Lambda}{2\sqrt{2}}A^2 \right). \quad (\text{A.56})$$

### A.3. $\Lambda_G^0$ posee un único máximo entre 0 y $\alpha$ en la decoherencia negativa

Antes de demostrar la existencia y unicidad del máximo de  $\Lambda_G^0$  entre 0 y  $\alpha$  se debe demostrar la existencia de al menos un valor extremo en dicho intervalo.

Definiendo

$$\lambda_G^0(a) = \begin{cases} \Lambda_G^0(a) & \alpha \geq a > 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.57})$$

con  $\alpha = a_0 / \sqrt{1 + 4a_0^4b_0^2}$  de tal manera que

$$\lim_{a \rightarrow s} \lambda_G^0(a) = \lim_{a \rightarrow s} \Lambda_G^0(a) = \Lambda_G^0(s) = \lambda_G^0(s) \quad \text{con } s > 0, \quad (\text{A.58})$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \lambda_G^0(a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \Lambda_G^0(a) = 0 = \lambda_G^0(0). \quad (\text{A.59})$$

La ecuación (A.58) se debe a la continuidad de  $\Lambda_G^0$ . Resulta que  $\lambda_G^0$  es continua en el intervalo  $[0, \alpha]$  y diferenciable en  $(0, \alpha)$  (ya que  $\Lambda_G^0$  es un función diferenciable en dicho intervalo). Como  $\lambda_G^0(0) = 0 = \lambda_G^0(\alpha)$  por el *teorema del valor intermedio* existe un  $c \in (0, \alpha)$  tal que  $d\lambda_G^0(a)/da|_{a=c} = 0$  y por definición de dicha función resulta que  $d\Lambda_G^0(a)/da|_{a=c} = 0$  para algún valor  $c$  entre 0 y  $\alpha$ .

Ahora bien, definiendo

$$\Delta_0 = \frac{4\sqrt{2}}{A_0^2} \cos \{ \delta p \} \quad (\text{A.60})$$

### A.3. $\Lambda_G^0$ POSEE UN ÚNICO MÁXIMO ENTRE 0 Y $\alpha$ EN LA DECOHERENCIA NEGATIVA

la ecuación (3.100) se ve como

$$\Lambda_G^0(a) = \frac{\Delta_0}{1 - (a_0/a)} \left( \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4\alpha^2} \right\} \right). \quad (\text{A.61})$$

Obsérvese que al ser  $0 < a < \alpha$  entonces  $\delta^2/4a^2 < \delta^2/4\alpha^2$  y al ser  $\exp\{-x\}$  una función monótonamente decreciente para  $x > 0$  entonces el término en (A.61) que está encerrado entre paréntesis será positivo y como  $0 < a < \alpha < a_0$  entonces  $1 - a_0/a > 0$ , esto junto con la definición (A.60) resulta en que  $\Lambda_G^0(a)$  es no-negativa en  $(0, \alpha]$ .

Siendo la primer derivada de  $\Lambda_G^0$

$$\frac{d\Lambda_G^0(a)}{da} = \frac{\Delta_0 a_0}{(a - a_0)^2} \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{4a^2} \right\} (g_1(a) - g_2(a)) \quad (\text{A.62})$$

con

$$g_1(a) = \exp \left\{ \frac{\delta^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right\} - 1, \quad (\text{A.63})$$

$$g_2(a) = \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0 a} \right), \quad (\text{A.64})$$

entonces  $\Lambda_G^0$  alcanza sus valores extremos en los  $c$  tales que  $g_1(c) = g_2(c)$ .

Por un lado

$$\frac{dg_1(a)}{da} = -\frac{\delta^2}{2a^3} \exp \left\{ \frac{\delta^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right\}, \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{dg_2(a)}{da} = -\frac{\delta^2(2a_0 - a)}{2a^3 a_0}. \quad (\text{A.66})$$

Estas funciones pueden ser reescritas de la siguiente manera

$$g_1'(a) = -\frac{\delta^2}{2a^3} [g_1(a) + 1], \quad (\text{A.67})$$

$$g_2'(a) = -\frac{\delta^2}{2a^3} \left[ \frac{2a^2}{\delta^2} g_2(a) + 1 \right]. \quad (\text{A.68})$$

### A.3. $\Lambda_G^0$ POSEE UN ÚNICO MÁXIMO ENTRE 0 Y $\alpha$ EN LA DECOHERENCIA NEGATIVA

Se sabe que existe al menos un  $c \in (0, \alpha)$  tal que  $g_1(c) = g_2(c)$  así que por A.67 y A.68

$$g_1'(c) - g_2'(c) = -\frac{\delta^2}{2a^3} \left(1 - \frac{2c^2}{\delta^2}\right) g_1(c) . \quad (\text{A.69})$$

La segunda derivada de  $\Lambda_G^0$  está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Lambda_G^0(a)}{da^2} = & \Delta_0 a_0 \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4a^2}\right\} \left(\frac{\delta^2}{2a^3(a-a_0)^2} - \frac{2}{(a-a_0)^3}\right) (g_1(a) - g_2(a)) \\ & + \frac{\Delta_0 a_0}{(a-a_0)^2} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4a^2}\right\} (g_1'(a) - g_2'(a)) \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

dando como resultado

$$\left.\frac{d^2\Lambda_G^0(a)}{da^2}\right|_{a=c} = -\frac{\delta^2\Delta_0 a_0}{2(c-a_0)^2 c^3} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4c^2}\right\} \left(1 - \frac{2c^2}{\delta^2}\right) g_1(c) . \quad (\text{A.71})$$

Como  $0 < a < \alpha$  entonces  $1/a^2 - 1/\alpha^2 > 0$  así que  $g_1(a) > 0$  y al ser  $c > 0$  se pueden dar tres casos

$$c < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \implies \left.\frac{d^2\Lambda_G^0(a)}{da^2}\right|_{a=c} < 0 , \quad (\text{A.72})$$

$$c = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \implies \left.\frac{d^2\Lambda_G^0(a)}{da^2}\right|_{a=c} = 0 , \quad (\text{A.73})$$

$$c > \frac{\delta}{\sqrt{2}} \implies \left.\frac{d^2\Lambda_G^0(a)}{da^2}\right|_{a=c} > 0 , \quad (\text{A.74})$$

de tal manera que todo  $c < \delta/\sqrt{2}$  corresponde a un máximo y solo puede haber uno ya que, siendo  $\Lambda_G^0$  continua en  $(0, \alpha]$ , no pueden existir dos máximos consecutivos. Por otro lado, todos los  $c > \delta/\sqrt{2}$  corresponden a mínimos y si bien en principio solo puede haber uno ya que, como anteriormente, no pueden haber mínimos consecutivos, en realidad tampoco puede haber un solo mínimo porque de lo contrario  $\Lambda_G^0(a) > \Lambda_G^0(c)$  para todo  $\alpha > a > c$ , pero  $\Lambda_G^0(\alpha) = 0$  por lo que  $\Lambda_G^0(c) < 0$  contradiciendo el hecho de que  $\Lambda_G^0(a) > 0$  para todo  $a \in (0, \alpha]$ . Finalmente, si existe un valor extremo en  $c = \delta/\sqrt{2}$  éste deberá de ser un punto silla en caso de que exista un máximo

### A.3. $\Lambda_G^0$ POSEE UN ÚNICO MÁXIMO ENTRE 0 Y $\alpha$ EN LA DECOHERENCIA NEGATIVA

en  $c' < \delta/\sqrt{2}$ , ya que no pueden haber máximos consecutivos, pero si  $c'$  no existe  $\Lambda_G^0(c)$  deberá de ser un máximo ya que de lo contrario, si es un punto silla la función no dejará de crecer haciendo que  $\Lambda_G^0(\alpha) > 0$ , a demás nunca podría ser un mínimo porque de ser así  $\Lambda_G^0(a) > \Lambda_G^0(c)$  para todo  $\alpha > a > c$  y como se acaba de mostrar  $\Lambda_G^0(c)$  deberá de ser negativo llegando a una contradicción. En cualquier caso siempre debe de haber un único máximo entre 0 y  $\delta/\sqrt{2} < \alpha$ .

# Apéndice B

## Métodos numéricos

### B.1. Integración numérica RK4 adaptativa

A continuación se deriva el un método adaptativo de integración numérica para el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante el uso del método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden (RK4).

Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (\text{B.1})$$

sujeta a la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , el método RK4 está dado por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) , \quad (\text{B.2})$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (\text{B.3})$$

con

$$k_1 = f(x_n, t_n) , \quad (\text{B.4})$$

$$k_2 = f\left(x_n + h\frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) , \quad (\text{B.5})$$

$$k_3 = f\left(x_n + h\frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) , \quad (\text{B.6})$$

$$k_4 = f(x_n + hk_3, t_n + h) . \quad (\text{B.7})$$

El error local  $\epsilon$  entre  $x_{n+1}$  (determinado mediante el método RK4) y  $x(t_{n+1})$  (el valor real de  $x$  en  $t_{n+1}$ ) es de orden  $h^5$ , es decir

$$\epsilon = ch^5 , \quad (\text{B.8})$$

con  $c > 0$  una constante desconocida.

Siendo  $x_{t+2h}$  el valor real de  $x$  en  $t + 2h$ , por un lado,  $x_{h+h}$  corresponderá al resultado de aplicar dos veces el método RK4 con un avance igual a  $h$  de tal manera que  $|x_{t+2h} - x_{h+h}| = 2\epsilon = 2ch^5$  (como el método RK4 se aplica dos veces el error B.8 se duplicará) mientras que  $x_{2h}$  corresponderá al resultado de aplicar una vez RK4 con un avance igual a  $2h$  dando como resultado  $|x_{t+2h} - x_{2h}| = c(2h)^5 = 32ch^5$  ya que en B.8 se debe reemplazar  $h$  por  $2h$  siendo que éste ultimo es el avance actual.

De esta manera

$$x = x_{h+h} + 2ch^5 , \quad (\text{B.9})$$

$$x = x_{2h} + 32ch^5 . \quad (\text{B.10})$$

Igualando ambas expresiones y despejando  $\epsilon = ch^5$  se obtiene

$$\epsilon = \frac{1}{30} |x_{h+h} - x_{2h}| , \quad (\text{B.11})$$

tomando el valor absoluto para que  $\epsilon$  sea no-negativo.

Ahora bien, definiendo le *error de integración*  $q$  tal que

$$\epsilon' = qh' \tag{B.12}$$

con  $\epsilon'$  el error de la integración numérica esperado (especificado de manera arbitraria) y  $h'$  el avance requerido (definido por los valores de  $\epsilon'$  y  $q$ ).

Dividiendo (B.12) entre  $\epsilon$  y sustituyendo (B.8)

$$\frac{h'\delta}{\epsilon} = \frac{c(h')^5}{ch^5} \cdot \tag{B.13}$$

Cancelando las  $c$  del lado derecho y despejando  $h'$  se obtiene

$$h' = h\rho^{1/4} \quad \rho = \frac{hq}{\epsilon} \tag{B.14}$$

con  $\epsilon$  dado por (B.11).

Si  $\rho \geq 1$  significa que el paso de integración debe crecer por lo que la iteración actual se realizará con el  $h$  original ya que es más pequeño y por ello el resultado será más preciso, pero en la siguiente iteración se utilizará como paso de integración a  $h'$  ya que la función parece no variar tan drásticamente. También podría ocurrir que  $|x_{h+h} - x_{2h}| \approx 0$  por lo que  $\rho$  será sumamente grande y en consecuencia  $h'$  crecerá de forma exagerada, en cuyo caso, la modificación del paso de integración será limitada a duplicarse, es decir, se tomará  $h \rightarrow 2h$  en la siguiente iteración.

Si  $\rho < 1$  significa que el paso de integración debe ser reducido por lo que se sustituirá  $h$  por  $h'$  y se volverá a calcular  $\rho$  en esta misma iteración con el nuevo paso. Este proceso se repetirá en bucle contrayendo  $h$  hasta que  $\rho \geq 1$  en cuyo caso se mantendrá el último valor de  $h$  y la evaluación de RK4 será en dicho paso de integración actualizándolo mediante (B.14) para la siguiente iteración.

En cualquier caso surge la cuestión de si mantener a  $x_{h+h}$  o a  $x_{2h}$  para la evaluación del método RK4. En general es mejor mantener a  $x_{h+h}$  como el nuevo valor de  $x$  ya que éste resulta más preciso (ecuaciones (B.9) y (B.10)) mientras que  $t$  será actualizado mediante  $t \rightarrow t + 2h$  en consistencia



con el hecho de que el nuevo valor de  $x$  corresponde al de una doble integración mediante RK4 cada una con un avance igual a  $h$ .

Si  $x$  es un vector de dimensión  $n$  cuyas componentes son funciones de  $t$  entonces  $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y así  $k_i \in \mathbb{R}^n$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . En este caso el método adaptativo se puede generalizar reemplazando en (B.11) el valor absoluto de  $x_{h+h} - x_{2h}$  por la norma del vector resultante de dicha diferencia.

A continuación se presenta la implementación de éste algoritmo adaptativo en Python.

```

1 #####
2 # IMPORTACIÓN DE PAQUETES #
3 #####
4 import numpy as np
5 import matplotlib.pyplot as plt
6
7 #####
8 # DEFINICIÓN DEL MÉTODO RK4 #
9 #####
10
11 def RungeKutta(func, values, t, h):
12     v1 = values if type(values) == np.ndarray else np.array(values)
13     k1 = func(v1, t)
14
15     v2 = v1 + k1*h/2
16     k2 = func(v2, t+h/2)
17
18     v3 = v1 + k2*h/2
19     k3 = func(v3, t+h/2)
20
21     v4 = v1 + h*k3
22     k4 = func(v4, t+h)
23
24     next_v = v1 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*h/6

```

```
25
26     return next_v
27
28 #####
29 # IMPLEMENTACIÓN DEL PROCEDIMIENTO ADAPTATIVO #
30 #####
31
32 '''
33 La función adaptive_RK4 realiza una integración numérica de un sistema de
34 ecuaciones diferenciales adaptando la magnitud del paso de integración en
35 cada iteración. El sistema cuenta con un total de "n" variables dependientes
36 de "t".
37
38 Parámetros:
39     ODESystem: objeto
40         Corresponde a una función de  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 
41         correspondiente a la derivada de "x" respecto de "t" tomando en
42         cuenta que cada una de sus entradas depende explícitamente solo
43         de "t".
44
45     x0: lista de puntos flotantes
46         Corresponde a un vector con las condiciones iniciales de cada
47         variable.
48
49     t0: punto flotante, por default 0.0
50         Valor inicial del tiempo.
51
52     q: punto flotante, por default 1e-8
53         Error de integración correspondiente a la relación entre el
54         error local (diferencia entre el valor calculado por el método
55         de integración numérica y el valor real de la función) y el paso
56         de integración.
57
```

```
58     h: punto flotante, por default 1e-6
59         Paso de integración inicialmente pequeño para asegurar que la
60         primer iteración será lo suficientemente precisa.
61
62     tmax: punto flotante, por default 300.0
63         Valor máximo de "t".
64
65 Regresa:
66     x_values: ndarray con "n" columnas y un número variable de filas.
67         La i-ésima columna es la integración numérica de la i-ésima
68         entrada de x. El total de filas es variable siendo que el
69         método adaptativo cubre el intervalo de t0 a tmax con una
70         división irregular para cada conjunto de valores iniciales
71         y parámetros del sistema.
72
73     t_values: lista
74         Corresponde a los valores de "t" en los que se evalúa el método
75         RK4.
76 '''
77
78 def adaptive_RK4(ODESystem, x0, t0=0.0, q=1e-8, h=1e-6, tmax=300.0):
79     t_values = []
80     x_values = []
81
82     t = t0
83     x = x0
84
85     while t < tmax:
86         t_values.append(t)
87         x_values.append(x)
88
89         rho=0
90         while rho < 1:
```

```
91     dt = 2*h
92
93     #Aplicando RK4 dos veces con un paso igual a h
94     two_one_steps = RungeKutta(ODESystem, x, t, h)
95     two_one_steps = RungeKutta(ODESystem, two_one_steps, t+h, h)
96
97     #Aplicando RK4 una vez con un paso igual a 2h
98     one_two_step = RungeKutta(ODESystem, x, t, 2*h)
99
100    #Erro local de la integración
101    epsilon = np.linalg.norm( two_one_steps - one_two_step ) / 30
102
103    #Actualizando a rho
104    '''
105    Si epsilon es efectivamente cero rho será igualado a 1
106    ya que en este caso el paso de integración
107    h es lo suficientemente bueno
108    '''
109    rho = h*q / epsilon if epsilon != 0. else 1
110
111    #Actualización de h
112    '''
113    Se tomará el mínimo entre h' (paso de integración sugerido por rho)
114    y 2h de tal manera que la actualización de h no exceda el doble de esta
115    cantida
116    '''
117    h = min( h*rho**(1/4), 2*h)
118
119    #Actualizando x y t
120    x = two_one_steps
121    t += dt
122
123    return t_values, np.array(x_values)
```

```
124
125 #####
126 # SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES #
127 #####
128
129 '''
130 La clase F contiene a la función dSystem correspondiente al sistema de
131 ecuacione diferenciales dx/dt = dSystem(x, t).
132
133 Parámetros de la clase F:
134     b0, a0, A0, z0: puntos flotantes, por default 0.001, 1.2, 0.3 y 0.0
135     respectivamente.
136     Condiciones iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales.
137
138     p: punto flotante, por default 0.0.
139     Momento del pulso.
140
141     delta, Lambda: puntos flotantes, por default 0.1, y 1.0,
142     respectivamente.
143     Constantes involucradas en el sistema de ecuaciones
144     diferenciales.
145
146 Procedimientos en la clase:
147     dSystem: sistema de ecuaciones diferenciales.
148     Parámetros:
149         vect: lista de puntos flotantes.
150             Correspondiente al vector "x".
151         t: punto flotante.
152             Correspondiente al "tiempo".
153
154     Regresa:
155         dvect: numpy.ndarray.
156             Vector correspondiente a dx/dt en el instante "t".
```

```

157 '''
158
159 class F:
160     def __init__(self, delta=0.1, b0=0.001, a0=1.2, A0=0.3, z0=0.0, Lambda
161     =1.0, p=0.0):
162         self.delta = delta
163         self.b0 = b0
164         self.a0 = a0
165         self.A0 = A0
166         self.Lambda = Lambda
167         self.p = p
168
169         self.N = a0*A0**2
170
171     def dSystem(self, vect, t):
172         a, b, z = vect[0], vect[1], vect[2]
173
174         exp_term = np.exp( -self.delta**2 * (1 + 4*a**4*b**2)/ (4*a**2) )
175
176         da = 4 * b * a * self.delta**2 * exp_term * np.cos(self.delta * self.p)
177
178         db = np.cos(self.delta * self.p) * exp_term * self.delta**2 * (1 - 4*a
179         **4*b**2) / a**4 - self.Lambda*self.N / (2*np.sqrt(2)*a**3)
180
181         dz = -2*self.delta*exp_term * np.sin(self.delta * self.p)
182
183         dvect = np.array([da, db, dz])
184
185         return dvect
186
187 #####
188 # EJEMPLO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA ADAPTATIVA #
189 #####

```

```

188
189 #Definición del sistema de ecuaciones diferenciales
190 func = F(Lambda=0.920717)
191 ODESystem = func.dSystem
192
193 #Integración numérica
194 t, x = adaptive_RK4(ODESystem, x0=[func.a0, func.b0, func.z0])
195
196 #Gráfica de la integración
197 plt.rcParams.update({"font.size": 16})
198
199 fig = plt.figure( figsize = (10,5) )
200 plt.title("RK4 adaptativo")
201 plt.stem(t, x[:,0])
202 plt.xlabel("t")
203 plt.ylabel("a(t)")
204 plt.show()

```

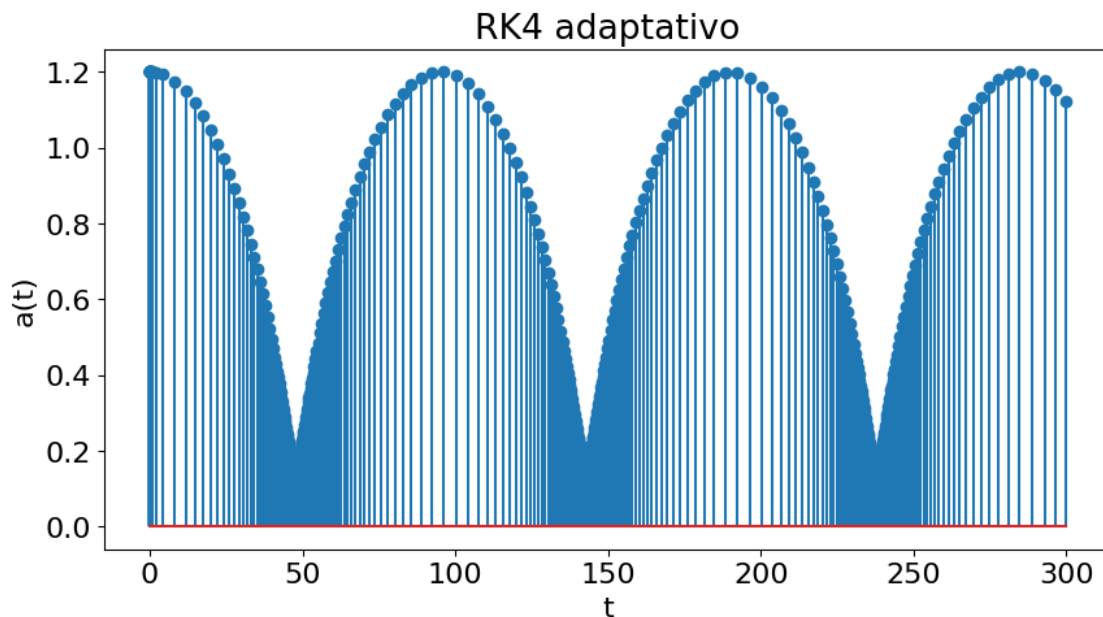


Figura B.1: Integración numérica del sistema (3.80)-(3.81) mediante un procedimiento adaptativo del método RK4 con las condiciones iniciales  $a_0 = 1.2$ ,  $b_0 = 0.001$ ,  $A_0 = 0.3$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $p = 0$  y  $\Lambda = 0.920717$

Como se puede ver en la figura B.1 el paso de integración se reduce en las partes de la función que varían de forma muy rápida y se hace más grande cuando la función parece no cambiar tan drásticamente.

## B.2. Gradiente descendiente

Como se demostró en el Apéndice A.3 la función  $\Lambda_G^0$  posee un máximo o un mínimo entre  $a = 0$  y  $a = \delta/\sqrt{2}$  dependiendo de si se trata del estado de decoherencia negativa o positiva respectivamente, sin embargo, el valor extremo alcanzado en  $a = \delta/\sqrt{2}$  solo puede ser un punto silla, por lo que el máximo (o mínimo) se debe encontrar en el intervalo  $(0, \delta/\sqrt{2})$ . Dado que en dicho intervalo se garantiza la existencia de un único valor extremo el método del gradiente descendiente resulta apropiado.

Dada una función convexa  $f(x)$  el algoritmo corresponde a calcular la serie

$$x_{n+1} = x_n - \eta \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n} \quad (\text{B.15})$$

siendo  $\eta$  la *taza de aprendizaje*. El total de iteraciones y el valor de  $\eta$  determinarán la precisión con que se calcula el valor mínimo. Si  $\eta$  es muy grande (figura B.2a) o muy pequeño (figura B.2c) y el número de iteraciones no es suficientemente grande entonces la posición del valor mínimo estará lejos del valor real.

El valor de  $\eta$  apropiado cambia dependiendo la forma de la curva, sin embargo, puede implementarse un método adaptativo en el cual  $\eta$  cambia en cada iteración según el método de Barzilai-Borwein (Barzilai y Borwein, 1988) que en una dimensión se reduce a

$$\eta_n = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{f'(x_n) - f'(x_{n-1})} \right|, \quad f'(x_n) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n}, \quad (\text{B.16})$$

en cuyo caso solo hará falta establecer el valor inicial  $x_0$  así como  $\eta_0$  y  $\eta_1$  determinando la posición  $x_1$  mediante (B.15).



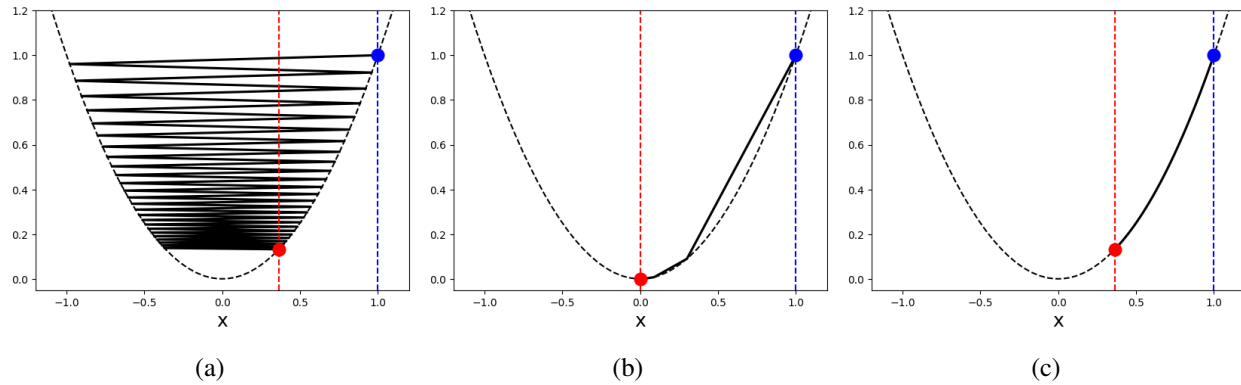


Figura B.2: Determinación del mínimo valor mínimo de una función (curva punteada) para tres valores diferentes para  $\eta$ . a)  $\eta = 0.99$ , b)  $\eta = 0.35$  y c)  $\eta = 0.01$ . El punto azul corresponde al valor inicial mientras que el punto rojo es la posición final luego de 50 iteraciones.

A continuación se muestra la implementación del algoritmo del gradiente descendiente.

```

1 #####
2 # IMPORTACIÓN DE PAQUETES #
3 #####
4 import numpy as np
5
6 #####
7 # GRADIENTE DESCENDIENTE #
8 #####
9 '''
10 Implementación del método del gradiente descendiente con tasa de aprendizaje
11 variable.
12
13 Parámetros:
14     dfunct: objeto.
15         Derivada de la función cuyo mínimo se busca calcular.
16
17     x0: punto flotante.
18         Punto inicial del algoritmo.
19
20     eta0: punto flotante, por default 1e-2
21         Valor inicial de la tasa de aprendizaje.

```

```
22
23     eta1: punto flotante, por default 1e-2
24         Valor de la tasa de aprendizaje en la primer iteración.
25
26     total_ite: valor entero, por default 200.
27         Número total de iteraciones.
28
29     tol: punto flotante, por default 1e-5.
30         Tolerancia permitida entre dos puntos consecutivos de la serie.
31
32 Regresa:
33     x_min: punto flotante.
34         Mejor estimación de la posición del valor mínimo.
35 '''
36 def Adaptive_GradientDescent(dfunct, x0, eta0=1e-2, eta1=1e-2, total_iter=200,
37     tol=1e-5):
38
39     eta_list = [eta0, eta1]
40
41     x1 = x0 - eta0*dfunct(x0)
42     x_list = [x0, x1]
43
44     for i in range(total_iter):
45         xn1 = x_list[-1]
46         xn2 = x_list[-2]
47
48         Ddf = dfunct(xn2) - dfunct(xn1)
49
50         #Si la diferencia en las derivadas es cero
51         #se mantiene el último valor de eta
52         eta_n = abs( (xn2 - xn1) / Ddf ) if Ddf != 0. else eta_list[-1]
53
54         diff = eta_n*dfunct(xn2)
```

```

54
55     #Si la diferencia entre x_n y x_{n+1} es menor que una tolerancia dada
56     #se concidera que se ha alcanzado una posición aceptable
57     #y se detienen los cálculos
58     if np.abs(diff) < tol:
59         print('Total de iteraciones:',i)
60         break
61
62     #Siguiete posición determinada
63     xn = xn2 - diff
64
65     x_list.append(xn)
66     eta_list.append(eta_n)
67
68     if i == total_iter - 1: print('Total de iteracioens:', total_iter)
69
70     print(r"Taza de aprendizaje final:", eta_list[-1])
71
72     #Mejor estimación de la posición del valor mínimo
73     x_min = x_list[-1]
74
75     return x_min

```

Dado que la curva  $\Lambda_G^0$  puede poseer un máximo o un mínimo en el intervalo  $(0, \delta/\sqrt{2})$  dependiendo de si  $\cos\{\delta p\}$  es mayor o menor que cero se tomará en cuenta la curva  $-\text{sgn}\{\cos\{\delta p\}\}\Lambda_G^0$  la cual poseerá un único mínimo ya sea que el estado de decoherencia sea positivo o negativo.

Para el cálculo de  $\Lambda_b$  mediante el algoritmo del gradiente descendiente se requiere multiplicar la derivada de  $\Lambda_G^0$  (ecuaciones (A.62)-(A.64)) por  $-\text{sgn}\{\cos\{\delta p\}\}$ . Para ello se implementa el siguiente código

```

1 #####
2 # DETERMINACIÓN DE Lambda_b #
3 #####

```

```

4
5 class LambdaG0:
6     def __init__(self, a0, A0, b0, delta, p):
7         self.a0 = a0
8         self.A0 = A0
9         self.b0 = b0
10        self.delta = delta
11        self.p = p
12
13        self.Delta0 = 4*np.sqrt(2) * np.cos(delta*p) / A0**2
14
15        self.alpha = a0 / np.sqrt( 1+4*a0**4*b0**2 )
16
17    def convex_dLambdaG0(self, a):
18
19        g1 = np.exp( self.delta**2*(1/a**2 - 1/self.alpha**2) / 4 ) - 1
20        g2 = delta**2*(1/a**2 - 1/(a*self.a0))/2
21
22        dLambdaG0 = self.Delta0 * self.a0 * np.exp( -self.delta**2/(4*a**2) )
23        * (g1 - g2 ) / (a - self.a0)**2
24
25        return -np.sign( np.cos(self.delta * p) ) * dLambdaG0
26
27    def __call__(self, a):
28
29        return self.Delta0*a* ( np.exp( -self.delta**2 / (4*a**2) ) - np.exp(
30            -self.delta**2 * (1 + 4*self.a0**4*self.b0**2) / (4*self.a0**2) ) ) * np.
31            cos(self.delta*p) / (a-self.a0)
32
33 #Valores iniciales
34 a0 = 1.2
35 A0 = 0.4
36 b0 = 0.5
37 delta = 0.1

```

```

34 p = 0.0
35
36 #Inicializando la función LambdaG0
37 funct = LambdaG0(a0, A0, b0, delta, p)
38
39 #Definiendo el negativo de la derivada de LambdaG0
40 dfunct = funct.convex_dLambdaG0
41
42 #Punto inicial de la iteración
43 x0 = delta / np.sqrt(2)
44
45 #Posición de Lambda_b
46 a_min = Adaptive_GradientDescent(dfunct, x0)
47
48 #Lambda_b
49 Lambda_b = funct(a_min)

```

El resultado de esta evaluación corresponde a un  $\Lambda_b = 0.96946$  para una tolerancia igual a  $10^{-5}$ , valor alcanzado con un total de 8 iteraciones y una tasa de aprendizaje final  $\eta = 0.00146$  (figura B.3).

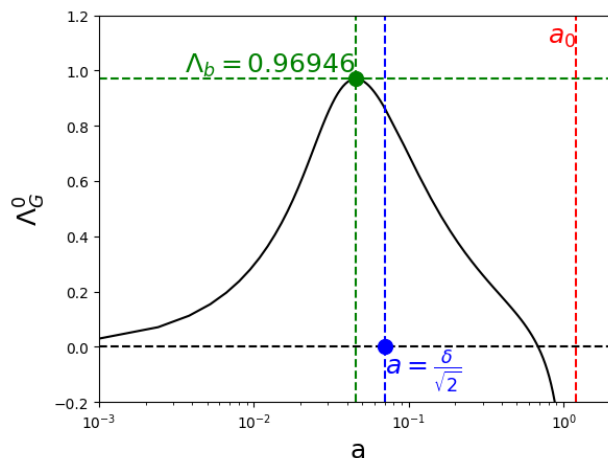


Figura B.3: Valor de  $\Lambda_b$  determinado mediante el método del gradiente descendiente con una tasa de integración adaptativa utilizando las condiciones iniciales  $a_0 = 1.2$ ,  $A_0 = 0.4$ ,  $b_0 = 0.5$ ,  $\delta = 0.1$  y  $p = 0$ .

# Referencias

- Aceves, A. B., De Angelis, C., Peschel, T., Muschall, R., Lederer, F., Trillo, S., y Wabnitz, S. (1996). Discrete self-trapping, soliton interactions, and beam steering in nonlinear waveguide arrays. *Physical Review E*, 53(1), 1172–1189.
- Agrawal, G. P. (2012). Chapter 4. Self-phase modulation. En *Nonlinear fiber optics* (pp. 85–127). Academic Press.
- Anderson, D. (1983). Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Physical Review A*, 27(6), 3135–3145.
- Anderson, D., y Bonnedal, M. (1979). Variational approach to nonlinear selffocusing of Gaussian laser beams. *Physics of Fluids*, 22(1), 105-109.
- Anderson, D., Lisak, M., y Berntson, A. (2001). A variational approach to nonlinear evolution equations in optics. *Pramana - Journal of Physics*, 57, 917—936.
- Barzilai, J., y Borwein, J. M. (1988). Two-point step size gradient methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 8(1), 141-148.
- Borlenghi, S., Boman, M., y Delin, A. (2018). Modelling reservoir computing with the discrete nonlinear schrödinger equation. *Phys. Rev. E*, 98(5).
- Chiao, R. Y., Garmire, E., y Townes, C. H. (1964). Self-trapping of optical beams. *Phys. Rev. Lett.*, 13(15).
- Christodoulides, D. N., y Joseph, R. I. (1988). Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides. *Optics Letters*, 13(9).
- Davydov, A. S. (1979). Solitons, bioenergetics, and the mechanism of muscle contraction. *Inter-*

- 
- national Journal of Quantum Chemistry*, 16(1), 5--17.
- Davydov, A. S., y Kislukha, N. I. (1973). Solitary excitons in one-dimensional molecular chains. *Physica Status Solidi (b)*, 59(2), 465--470.
- Eilbeck, J. C., Lomdahl, P. S., y Scott, A. C. (1984). Soliton structure in crystalline acetanilide. *Physical Review B*, 30(8), 4703--4712.
- Eilbeck, J. C., Lomdahl, P. S., y Scott, A. C. (1985). The discrete self-trapping equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 318--338.
- Eisenberg, H. S., Silberberg, Y., Morandotti, R., Boyd, A. R., y Aitchison, J. S. (1998). Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 81(16), 3383-3386.
- Fermi, E., Pasta, J., y Ulam, S. (1955). *Studies of nonlinear problem* (Inf. Téc.). Los Alamos National Laboratory (LANL), Los Alamos, NM (United States).
- Fried, B. D., y Ichikawa, Y. H. (1973). On the nonlinear Schrödinger equation for Langmuir waves. *Journal of the Physical Society of Japan*, 34(4), 1073--1082.
- Gligoric, G., Maluckov, A., Hadzievski, L., y Malomed, B. A. (2008). Bright solitons in the one-dimensional discrete Gross-Pitaevskii equation with dipole-dipole interactions. *Physical Review A*, 78.
- Gross, E. P. (1961). Structure of a quantized vortex in boron systems. *Il Nuovo Cimento*, 20(3).
- Hasegawa, A., y Tappert, F. (1973). Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23(142).
- Holstein, T. (1959). Studies of polaron motion. *Annals of Physics*, 8, 325-342.
- Jensen, S. M. (1982). The nonlinear coherent coupler. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 30(10), 1568--1571.
- Kartono, A., Fatmawati, V. W., y Wahyudi, S. T. (2020). Numerical solution of nonlinear Schrödinger approaches using the fourth-order Runge-Kutta method for predicting stock pricing. *Journal of Physics: Conference Series*, 1491(1).
- Kaup, D. J. (2005). Variational solutions for the discrete nonlinear Schrödinger equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 69(3-4), 322-333.
-

- 
- Kondoh, S., Teramoto, R., y Yoshida, Z. (2000).  
*Physical Review E*, 61(5), 5710–5716.
- Korteweg, D., y de Vries, G. (1895). XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240), 422-443. doi: 10.1080/14786449508620739
- Kruskal, J. B., y Zabusky, N. J. (1963). Progress on the Fermi-Pasta-Ulam non-linear string problem. *Princeton Plasma Physics Laboratory Annual Rept*, 301-308.
- Kruskal, J. B., y Zabusky, N. J. (1965). Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15(6), 240–243.
- Kuen, K. C., y Hockham, G. A. (1966). Dielectric-fibre surface waveguides for optical frequencies. *Proc IEE*, 113(7), 1151-1158.
- Lax, P. D. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Commun. Pure Appl. Math.*, 21, 467-490.
- Levi, D., Petrerá, M., y Scimiterna, C. (2008). On the integrability of the discrete nonlinear Schrödinger equation. *Europhysics Letters*, 84(1).
- Marquie, P., Bilbault, J. M., y Remoissenet, M. (1995). Observation of nonlinear localized modes in an electrical lattice. *Phys. Rev. E*, 51(6), 6127-6133.
- Marzari, N., Mostof, A. A., Yates, J. R., Souza, I., y Vanderbilt, D. (2012). Maximally localized wannier functions: Theory and applications. *Reviews of Modern Physics*, 84(4), 1419–1475.
- Miya, T., Terunuma, Y., Hosaka, T., y Miyoshita, T. (1979). Ultimate low-loss single-mode fibre at 1.55  $\mu\text{m}$ . *Electron. Lett.*, 15(4).
- Mollenaur, L. F., Stolen, R. H., y Gordon, J. P. (1980). Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 45(13), 1095-1098.
- Okaly, J. B., Mvogo, A., Woulaché, R. L., y Kofané, T. C. (2018). Nonlinear dynamics of DNA systems with inhomogeneity effects. *Chinese Journal of Physics*, 56(5), 2613-2626.
- Pitaevskii, L. P. (1961). Vortex lines in an imperfect bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13(2).
-



- 
- Rasmussen, K., Christiansen, P. L., Johansson, M., Gaididei, Y. B., y Mingaleev, S. F. (1998). Localized excitations in discrete nonlinear schrodinger systems: " Effects of nonlocal dispersive interactions and noise. *Physica D*, 134—151.
- Scott Russell, J. (1855). Report on waves. *Rept. Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 311–390 + 57 plates.
- Sulem, C., y Sulem, P. L. (1999). Structural properties. En *The nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collapse* (pp. 27–41). Springer New York.
- Trombettoni, A., y Smerzi, A. (2001). Variational dynamics of Bose-Einstein condensates in deep optical lattices. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 34(4711).
- Zakharov, V. E., y Shabat, A. B. (1972). Exact theory of two-dimensional self-focusing and onedimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34(1).