



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
ARAGÓN**

**Temas Selectos de Dinámica  
Estructural e Ingeniería Sísmica**

**T E S I S**

Que para obtener el título de  
**INGENIERO CIVIL**

**P R E S E N T A**

**MARIANA VALDEZ MARTÍNEZ**

**DIRECTOR DE TESIS**

**ING. MARCOS MOLINA ELVIRA**



Ciudad Nezahualcóyotl, Estado de México, 2024.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# AGRADECIMIENTOS

## **A Dolores Martínez Pérez:**

A ti mamá: por la comprensión, amor y motivación que me brindaste desde el primer día de mi existencia. Por todos los sacrificios, nunca terminaré de agradecer por cada segundo de ti que me has dado. ¡Te amo!

## **A Sergio Valdez Vázquez:**

Mi más grande protector en vida, porque sin ti, nada de esto sería posible, ¡Gracias por todo el apoyo brindado!

## **A Alin Valdez Martínez:**

Por los buenos y malos momentos que hemos compartido a lo largo de nuestra vida. Por siempre protegerme y no soltar mi mano jamás. ¡Gracias hermanita!

## **A Ian Jaziel Vega Valdez:**

Por iluminarme cada día con tu sonrisa, siempre agradeceré al universo por mandarte en el momento correcto para hacerme un mejor ser humano. Te sostendré y guiaré toda tu vida.



## ÍNDICE

Introducción .....	8
Marco teórico .....	9
Ecuación de Equilibrio Dinámico .....	9
Respuesta de Sistemas de 1GDL .....	10
Vibración Límite sin Amortiguamiento.....	10
Amortiguamiento en Sistemas Dinámicos.....	10
Análisis Dinámico Modal Espectral .....	10
Ecuación de equilibrio dinámico.....	11
Respuesta de sistemas de un grado de libertad.....	11
Vibración límite sin amortiguamiento.....	13
EJEMPLO 1:.....	17
Vibración libre con y sin amortiguamiento.....	18
Vibración límite con amortiguamiento.....	18
“ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO PARA SISTEMAS AMORTIGUADOS” .....	18
CASO I – $\xi = 100\%$ (Amortiguamiento crítico).....	19
EJEMPLO: CASO I.....	20
CASO II – $\xi < 1$ (Estructuras sub - amortiguadas).....	21
EJEMPLO: CASO II.....	23
Porcentaje de amortiguamiento crítico. ....	24
Respuesta ante excitaciones armónicas sin y con amortiguamiento. ....	26
Respuesta de sistema de 1GDL sin amortiguamiento sometidos a excitaciones armónicas. ....	26
EJEMPLO: .....	29
Respuesta de sistemas de 1GDL con amortiguamiento sometidos a excitaciones armónicas. ....	30
EJEMPLO: .....	34
Amplificación dinámica. ....	35
EJEMPLO: .....	35
Respuesta ante excitaciones periódicas sin y con amortiguamiento. ....	36

Respuesta de sistemas de 1GDL sin amortiguamiento sometidos a una carga armónica “ $\Omega = \omega$ ”.	36
EJEMPLO:	38
Respuesta de sistemas de 1GDL con amortiguamiento sometidos a una carga armónica “ $\Omega = \omega$ ”.	39
EJEMPLO:	40
Análisis dinámico modal espectral aplicado a un edificio de 8 niveles y 3 sótanos.	41
Especificaciones	41
Diseño Estructural	42
Materiales para elementos estructurales	42
Concreto	42
Acero	42
Materiales para elementos no estructurales	43
Mampostería	43
Diseño Arquitectónico	43
Sistema de cimentación	50
Diseño Sísmico	52
Criterios de estructuración	52
Cargas Gravitacionales NTC – Edificaciones 2017.	52
Análisis de Cargas RCCDMX – NTC 2017	53
Espectros de diseño para modelo de análisis	53
Condiciones de regularidad estructural.	54
Método de diseño.	56
Acciones por sismo.	58
Diagramas de deformaciones.	67
Registros sísmicos.	74
Resultados	80
Periodos	80
Desplazamientos y distorsiones de entrepiso	82
Estados finales del Análisis Dinámico No Lineal Paso a Paso	84
Curvas de histéresis de los disipadores de energía	87

Conclusiones .....	90
Referencias .....	92



# **Introducción**

La dinámica estructural, esencial tanto en el diseño sísmico como en el análisis estructural convencional, constituye el núcleo central de este trabajo de tesis. Al sumergirnos en el estudio de la vibración de sistemas de un grado de libertad (1GDL), se pone especial énfasis en la ecuación de equilibrio dinámico. Este enfoque nos permitirá explorar las respuestas ante vibraciones libres y forzadas, considerando la presencia o ausencia de amortiguamiento, y analizar en profundidad cómo estos factores influyen en el comportamiento estructural. Así, desde una perspectiva teórica, el trabajo se expandirá hacia aplicaciones prácticas, culminando en un análisis dinámico modal espectral de un edificio de múltiples niveles, proporcionando una visión completa del impacto de la dinámica estructural en el diseño y comportamiento de las edificaciones.

## **Parte I. Capítulos Teóricos: Dinámica de Sistemas 1GDL**

Los primeros capítulos se centran en el análisis de la vibración de sistemas de un grado de libertad, examinando la vibración límite sin amortiguamiento y abordando casos más complejos que involucran amortiguamiento. Se desarrolla la "Ecuación de Equilibrio Dinámico para Sistemas Amortiguados", explorando casos críticos de amortiguamiento y estructuras sub-amortiguadas. Estos capítulos establecen la base teórica para comprender la respuesta de sistemas 1GDL ante excitaciones armónicas y periódicas.

## **Parte II. Aplicaciones Prácticas: Análisis de un Edificio Multinivel de 8 niveles y 3 sótanos.**

El trabajo se extiende a aplicaciones prácticas en el diseño sísmico de un edificio de 8 niveles y 3 sótanos. Se abordan aspectos esenciales del diseño estructural, desde materiales hasta especificaciones de cimentación, considerando criterios de estructuración y cargas gravitacionales. El análisis de cargas sísmicas y la aplicación de métodos de diseño proporcionan una visión detallada de la respuesta estructural ante sismos.

# **Marco teórico**

## **Dinámica Estructural**

La dinámica estructural es una rama de la ingeniería civil que se ocupa del estudio del comportamiento dinámico de las estructuras frente a fuerzas externas, como las generadas por cargas sísmicas o por otros tipos de excitaciones dinámicas. Este campo de investigación se centra en comprender cómo las estructuras, como edificaciones o puentes, responden y se comportan ante vibraciones, movimientos oscilatorios y otras formas de carga dinámica.

En términos más específicos, la dinámica estructural aborda fenómenos como la vibración libre y forzada de sistemas estructurales, considerando la influencia de factores como la masa, rigidez y amortiguamiento. El objetivo es predecir y controlar las respuestas de las estructuras bajo condiciones dinámicas, lo cual es crucial para el diseño sísmico y la evaluación de la seguridad estructural. (Chopra, 2017).

## **Ingeniería Sísmica**

La Ingeniería Sísmica es una disciplina de la ingeniería civil que se dedica al estudio, diseño y análisis de estructuras y sistemas constructivos con el objetivo de minimizar los efectos de los terremotos en las edificaciones. Esta rama de la ingeniería se enfoca en comprender y mitigar los impactos sísmicos, considerando factores como la dinámica estructural, las propiedades de los suelos y la aplicación de técnicas de diseño sísmico. El ingeniero sísmico busca desarrollar estructuras capaces de resistir las fuerzas generadas por movimientos telúricos, garantizando la seguridad de las personas y la integridad de las edificaciones (Kramer, 1996).

## **Ecuación de Equilibrio Dinámico**

La ecuación de equilibrio dinámico es fundamental en el análisis de sistemas estructurales sujetos a fuerzas dinámicas. Definida por la segunda ley de Newton, describe la relación entre las fuerzas aplicadas y las respuestas estructurales bajo condiciones dinámicas (Chopra, 2012).

## **Respuesta de Sistemas de 1GDL**

La respuesta de sistemas de un grado de libertad (1GDL) a vibraciones es esencial para comprender el comportamiento estructural ante excitaciones dinámicas (Chopra, 2017). Este concepto servirá como base para analizar casos específicos de vibración con y sin amortiguamiento.

### **Vibración Límite sin Amortiguamiento**

La vibración límite sin amortiguamiento se refiere al movimiento perpetuo de un sistema vibratorio en ausencia de disipación de energía. Este fenómeno es fundamental para entender el comportamiento de sistemas estructurales ideales bajo vibración constante (Den Hartog, 1985).

### **Amortiguamiento en Sistemas Dinámicos**

El amortiguamiento juega un papel crucial en la respuesta estructural ante cargas dinámicas. Se explorarán diferentes niveles de amortiguamiento, desde crítico hasta sub-amortiguado, utilizando ejemplos concretos para ilustrar sus efectos (Chopra, 2017).

### **Análisis Dinámico Modal Espectral**

El análisis modal espectral proporciona una herramienta poderosa para comprender la respuesta sísmica de estructuras complejas. Este método se aplicará al estudio de un edificio de 8 niveles y 3 sótanos, ofreciendo una visión detallada de su comportamiento dinámico bajo condiciones de carga sísmica (Chopra, 2012).

Este marco teórico sentará las bases para abordar los aspectos específicos de diseño estructural, materiales utilizados, condiciones sísmicas y análisis de resultados que se explorarán en las secciones subsiguientes de este trabajo de tesis.

## Ecuación de equilibrio dinámico.

*Respuesta de sistemas de un grado de libertad.*

¿Qué son los grados de libertad?

Número mínimo de coordenadas generalizadas que permiten describir la configuración desplazada de un sistema estructural.

**\*UNA ESTRUCTURA TIENE INFINITOS GRADOS DE LIBERTAD.**

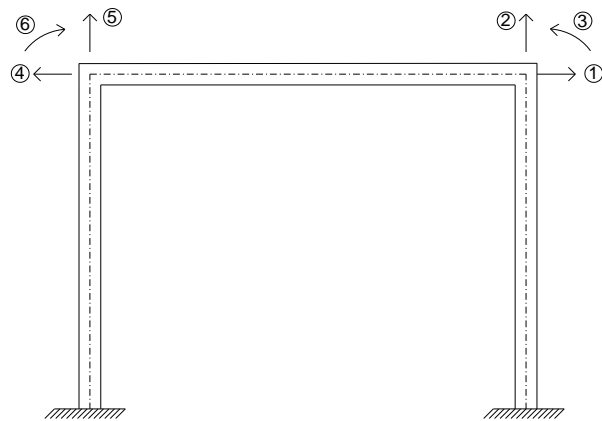


Fig. 01. Estructura con múltiples grados de libertad.

**Caso 01.** Si la losa/trabe es infinitamente rígida a flexión: **se eliminan los desplazamientos angulares.**

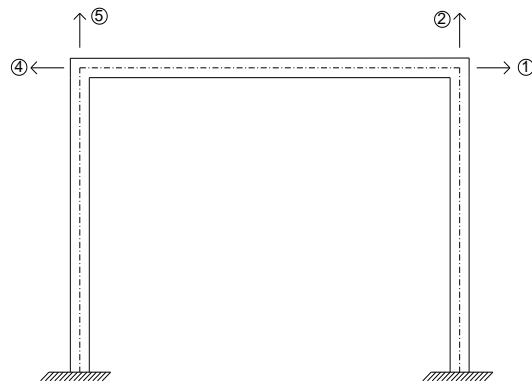


Fig. 02. Estructura sin desplazamientos angulares.

**Caso 02.** Si las columnas son infinitamente rígidas en su dirección axial: **se eliminan los desplazamientos verticales.**



Fig. 03. Estructura sin desplazamientos verticales.

**Caso 03.** Si la losa/trabe es infinitamente rígida en su dirección axial: **se puede eliminar un desplazamiento horizontal.**

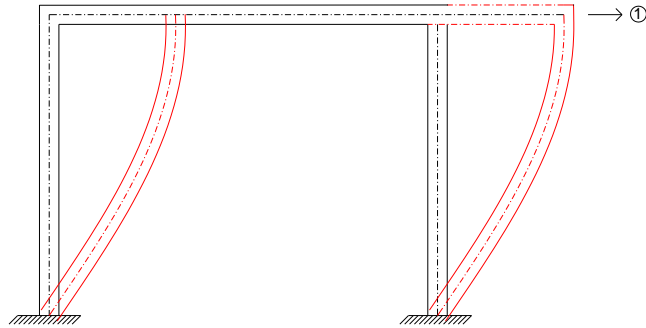


Fig. 04. Estructura con un grado de libertad.

El sistema anterior se puede idealizar de las siguientes formas:

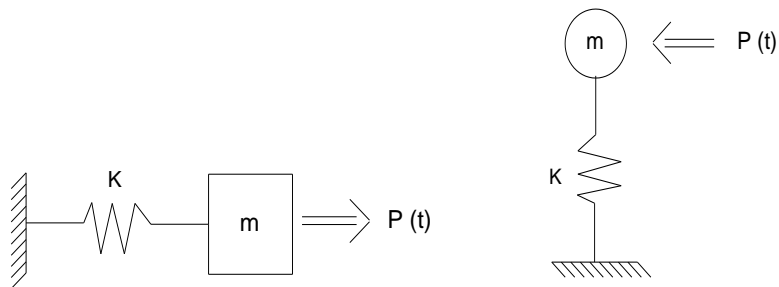


Fig. 05. Oscilador de un grado de libertad.

La rigidez de la columna es:

$$K = \frac{12EI}{L^3} \times \text{columna}$$

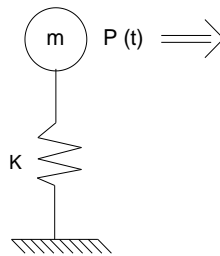
**\*LA RIGIDEZ LATERAL ES LA CAPACIDAD AL DESPLAZAMIENTO LATERAL QUE TIENE LA COLUMNA.**

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{61} & \dots & \dots & \dots & K_{61} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ \Delta \end{Bmatrix}$$

Fig. 6. Matriz de rigideces.

También se puede representar:  $\begin{Bmatrix} M \\ P \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{\Delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \Delta \end{Bmatrix}$

## Vibración límite sin amortiguamiento



Ecuación general para sistemas sin amortiguamiento:

$$m\ddot{y} + ky = P(t) \tag{1}$$

Si  $P(t) = 0$ ; la solución es trivial, puesto que no hay una excitación que produzca desplazamiento en la estructura.

Para que lo anterior no suceda se deben proponer dos condiciones iniciales. La primera;  $y(0) = y_0$  (desplazamiento), y la segunda;  $\dot{y}(0) = v_0$  (velocidad).

También se debe proponer una solución;  $y = \lambda e^{\lambda t}$  (2)

Derivando dos veces (2) para obtener la velocidad y la aceleración

$$\dot{y} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t} \tag{3}$$

Sustituyendo (3) y (2) en (1)

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0 \quad (4)$$

Agrupando términos:

$$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0 \quad (5)$$

De (5) se sabe que:

$$e^{\lambda t} \neq 0$$

$$m\lambda^2 + k = 0$$

Por tal motivo:

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}; \text{ llamando } w^2 = \lambda^2 \therefore \lambda^2 = -w^2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{-w^2}; \lambda = \sqrt{-1}\sqrt{w^2}$$

En consecuencia:

$$\lambda = \pm iw \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (2)

$$y = e^{\pm iwt} \quad (7)$$

Se propone una solución total para la respuesta del sistema:

$$y = C_1 e^{iwt} + C_2 e^{-iwt} \quad (8)$$

Derivando (8)

$$\dot{y} = iwC_1 e^{iwt} - iwC_2 e^{-iwt} \quad (9)$$

Sustituyendo condiciones iniciales en (8) y (9)

$$y_0 = C_1 + C_2 \quad (10)$$

$$V_0 = iwC_1 - iwC_2 \quad (11)$$

De (10) se despeja a  $C_1$  y se sustituye en (11)

$$V_0 = iw(y_0 - C_2) - iwC_2$$

$$V_0 = iwy_0 - iwC_2 - iwC_2$$

$$V_0 = iwy_0 - 2iwC_2$$

$$C_2 = \frac{V_0 - iwy_0}{-2iw} \quad (12)$$

Ahora (12) se multiplica y divide (i/i), con la finalidad de eliminar el número complejo del denominador

$$C_2 = \frac{iV_0 + wy_0}{2w} \quad (13)$$

Agrupando términos

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{iV_0}{w} + y_0 \right) \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (10)

$$\begin{aligned} C_1 &= y_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{iV_0}{w} + y_0 \right) \\ C_1 &= y_0 - \frac{y_0}{2} - \frac{iV_0}{2w} \\ C_1 &= \frac{y_0}{2} - \frac{iV_0}{2w} \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$C_1 = \frac{1}{2} \left( y_0 - \frac{iV_0}{w} \right) \quad (15)$$

Por tanto, se puede ver que  $C_1$  es el conjugado complejo de  $C_2$

Sustituyendo (14) y (15) en (8)

$$y = \frac{1}{2} \left( y_0 - \frac{iV_0}{w} \right) e^{iwt} + \frac{1}{2} \left( \frac{iV_0}{w} + y_0 \right) e^{-iwt} \quad (16)$$

Sustituyendo las Relaciones De Euler en (16)

$$e^{\pm iwt} = \cos wt \pm i \sin wt \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{2} \left( y_0 - \frac{iV_0}{w} \right) \cos wt + i \sin wt + \frac{1}{2} \left( \frac{iV_0}{w} + y_0 \right) \cos wt - i \sin wt \quad (18)$$

$$y = \frac{y_0}{2} \cos wt - \frac{iV_0}{2w} \cos wt + \frac{y_0}{2} i \sin wt + \frac{y_0}{2w} \sin wt + \frac{iV_0}{2w} \cos wt + \frac{y_0}{2} \cos wt + \frac{V_0}{2w} \sin wt - \frac{y_0}{2} i \sin wt$$



$$y = y_0 \cos wt + \frac{V_0}{w} \sin wt \quad (19)$$

**\*SI LA RIGÍDEZ ES MUY GRANDE, EL PERIODO TIENDE A “CERO”**

**\*SI LA RIGÍDEZ ES MUY PEQUEÑA, EL PERIODO TIENDE A “INFINITO”**

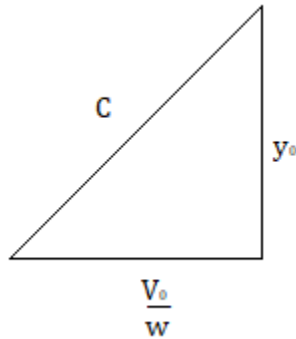
La ecuación (19) se puede representar mediante una identidad trigonométrica:

$$y = C \cdot \text{sen}(wt + \alpha) \quad (20)$$

También

$$y = C \cdot \text{sen } wt \cdot \cos \alpha + C \cdot \cos wt \cdot \text{sen } \alpha \quad (21)$$

La ecuación (21) se deduce de la siguiente manera:



$$\text{sen } \alpha = \frac{y_0}{C} \quad \therefore C \cdot \text{sen } \alpha = y_0$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{V_0}{C} \quad \therefore C \cdot \text{cos } \alpha = \frac{V_0}{w}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores, en (21)

$$y = \frac{V_0}{w} \text{sen } wt + y_0 \cos wt \quad (22)$$

El desplazamiento máximo de la estructura esta dado por la siguiente ecuación:

$$y_{\text{máx}} = C$$

$$y_{\text{máx}} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{V_0}{w}\right)^2} \quad (23)$$

## EJEMPLO 1:

### %VIBRACIÓN LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO

```
Y0 = 2;      %Desplazamiento inicial
V0 = 2;      %Velocidad inicial
K = 10;      %Rigidez
T = 2;       %Periodo
w = 2*pi/T;  %Frecuencia Natural Del Sistema
m = K/w^2;   %Masa
t = 0:0.1:10; %Tiempo
alfa = atan(w*Y0/V0) %Angulo
y = Y0*cos(w.*t)+V0/w*sin(w.*t);
ymax = max(y)
C = sqrt(Y0^2+(V0/w)^2)
YY = C*sin(w.*t+alfa);
YYmax= max(YY)
```

```
whitebg
plot(t,y,'r--')
title('Vibración Libre Sin Amortiguamiento');
xlabel('t');
ylabel('y');
```

### RESULTADO:

ymax = 2.0988

C = 2.0989

YYmax = 2.0988

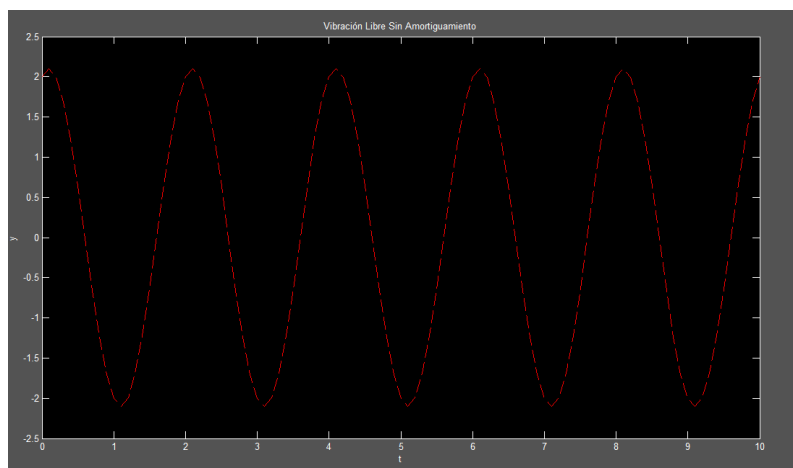
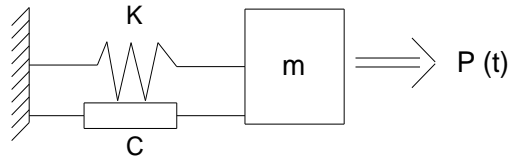


Fig. 07. Gráfica de vibración libre sin amortiguamiento

## Vibración libre con y sin amortiguamiento.

### *Vibración límite con amortiguamiento.*

Se introduce una fuerza de amortiguamiento viscoso, la cual actúa en sentido contrario al desplazamiento de la estructura.



Considerando que el desplazamiento es positivo en la dirección de la aplicación de la carga:

$$\Sigma F = 0$$

$$P(t) - ky - cy' - m\ddot{y} = 0$$

Despejando a  $P(t)$

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = p(t) \quad (1)$$

### *“ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO PARA SISTEMAS AMORTIGUADOS”*

De igual manera que en la derivación anterior, se deben proponer dos condiciones iniciales para que la solución no sea trivial. También se propone una solución para el sistema. Sin embargo, ahora la incógnita más importante será el valor de la fuerza de amortiguamiento viscoso.

$$y = e^{\lambda t} \quad \dot{y} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + C\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$$

Agrupando términos

$$(m\lambda^2 + C\lambda + k)e^{\lambda t} = 0 \quad (3)$$

De (3) se sabe que

$$e^{\lambda t} \neq 0$$

$$m\lambda^2 + C\lambda + k = 0$$

Por tal motivo:

$$\lambda = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\lambda = -\frac{C}{2m} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4m^2} - \frac{4mk}{4m^2}}$$

$$\lambda = -\frac{C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - w^2} \quad (4)$$

Para el caso específico que la parte derecha de (4) sea igual a cero. Es decir:

$$\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - w^2 = 0$$

$$C^2 = 2m^2 w^2$$

$$C = 2mw \quad (5)$$

Introduciendo una nueva variable

$$C = \xi \cdot CR \quad (6)$$

Donde:

$\xi$  = Porcentaje de amortiguamiento crítico

$C_R$  = Coeficiente de amortiguamiento crítico

Existen tres casos para el porcentaje de amortiguamiento crítico; el primero:

**CASO I –  $\xi = 100\%$  (Amortiguamiento crítico)**

Sustituyendo (6) y (5) en (4)

$$\lambda = -\frac{2\xi mw}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{2\xi mw}{2m}\right)^2 - w^2}$$

$$\lambda = -\xi\omega \pm \sqrt{\frac{4m^2\omega^2}{4m^2} - \omega^2}$$

$$\lambda = -\xi\omega \quad (7)$$

Ahora se propone una solución:

$$y = C_1 e^{-\xi\omega t} + C_2 t e^{-\xi\omega t} \quad (8)$$

Derivando (8)

$$\dot{y} = -\xi\omega C_1 e^{-\xi\omega t} - \xi\omega C_2 t e^{-\xi\omega t} + C_2 e^{-\xi\omega t} \quad (9)$$

Sustituyendo condiciones iniciales en (8) y (9)

$$y_0 = C_1 \quad (10)$$

$$V_0 = -\xi\omega C_1 + C_2 \quad (11)$$

Despejando  $C_2$  de (11) y sustituyendo  $C_1$

$$C_2 = V_0 + \xi\omega y_0 \quad (12)$$

Sustituyendo (10) y (12) en (8)

$$y = y_0 e^{-\xi\omega t} + (V_0 + \xi\omega y_0)t e^{-\xi\omega t}$$

$$y = [y_0 + (V_0 + \xi\omega y_0)t] e^{-\xi\omega t} \quad (13)$$

### EJEMPLO: CASO I.

#### %VIBRACIÓN LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO - CASO I

```

Y0 = 1;      %Desplazamiento inicial
V0 = 1;      %Velocidad inicial
T = 2;       %Periodo
w = 2*pi/T;  %Frecuencia Natural Del Sistema
si = 0.05;   %Porcentaje de amortiguamiento
t = 0:0.1:90; %Tiempo

```

```

y = (Y0+(V0+si*w*Y0).*t).*exp(-si*w.*t);
ymax = max(y)

```

```

whitebg
plot(t,y,'r--')
title('Vibración Libre Con Amortiguamiento - Caso I');
xlabel('t');
ylabel('y');

```

## RESULTADO:

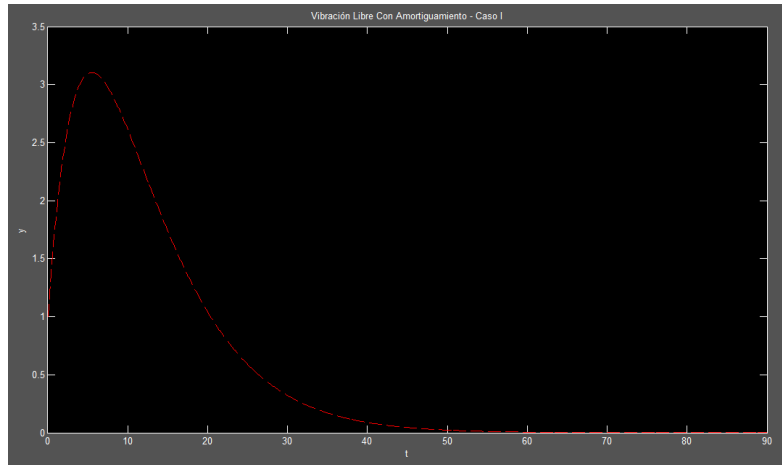


Fig. 08. Gráfica de vibración libre con amortiguamiento, caso I.

**\*EL SISTEMA INTENTA VIBRAR, PERO CAE ABRUPTAMENTE**

**CASO II –  $\xi < 1$  (Estructuras sub - amortiguadas)**

De la ecuación (4) sabemos que:

$$\lambda = -\frac{2\xi m w}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{2\xi m w}{2m}\right)^2 - w^2}$$

$$\lambda = -\xi w \pm \sqrt{\xi^2 w^2 - w^2}$$

$$\lambda = -\xi w \pm \sqrt{w^2(\xi^2 - 1)}$$

$$\lambda = -\xi w \pm iw\sqrt{1-\xi^2} \quad (14)$$

Si la frecuencia amortiguada es igual a:

$$w_D = w\sqrt{1-\xi^2} \quad (15)$$

Sustituyendo (15) en (14)

$$\lambda = -\xi w \pm iw_D \quad (16)$$

Sustituyendo (16) en (8)

$$\mathbf{y} = C_1 e^{(-\xi w + iw_D)t} + C_2 t e^{(-\xi w - iw_D)t} \quad (17)$$

Agrupando términos

$$\mathbf{y} = e^{-\xi w t} (C_1 e^{iw_D t} + C_2 t e^{-iw_D t}) \quad (18)$$

Derivando (18)

$$\dot{\mathbf{y}} = e^{-\xi w t} (iw_D C_1 e^{iw_D t} - iw_D C_2 t e^{-iw_D t}) - \xi w e^{-\xi w t} (C_1 e^{iw_D t} + C_2 t e^{-iw_D t}) \quad (19)$$

Sustituyendo condiciones iniciales

$$\mathbf{y}_0 = C_1 + C_2 \quad (20)$$

Por tanto,  $C_1$  es igual a:

$$C_1 = \mathbf{y}_0 - C_2 \quad (21)$$

$$V_0 = (iw_D C_1 - iw_D C_2) - \xi w (C_1 + C_2)$$

$$V_0 = iw_D (C_1 - C_2) - \xi w (C_1 + C_2)$$

$$V_0 = iw_D (C_1 - C_2) - y_0 \xi w$$

Se puede deducir que:

$$C_1 - C_2 = y_0 - 2C_2$$

Por tanto:

$$V_0 = iw_D (y_0 - 2C_2) - y_0 \xi w \quad (22)$$

Por tanto,  $C_2$  es igual a:

$$C_2 = \frac{V_0 - y_0 iw_D + y_0 \xi w}{-2iw_D} \quad (23)$$

Multiplicando y dividiendo (23)  $\frac{i}{i}$ ,

$$C_2 = \frac{iV_0 + y_0 w_D + iy_0 \xi w}{2w_D}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( y_0 + i \left( \frac{V_0 + y_0 \xi w}{w_D} \right) \right) \quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (21)

$$C_1 = y_0 - \frac{y_0}{2} - i \left( \frac{V_0 + y_0 \xi w}{w_D} \right)$$

$$C_1 = \frac{y_0}{2} - i \left( \frac{V_0 + y_0 \xi w}{w_D} \right) \quad (25)$$

Por tanto, se puede observar que  $C_1$  es el conjugado complejo de  $C_2$

Sustituyendo (24) y (25) en (18) y además de aplicar las relaciones de Euler, se obtiene:

$$y = e^{-\xi w t} [(C_1 + C_2) \cos w_D t + i(C_1 - C_2) \sen w_D t] \quad (26)$$

Se sabe que:

$$C_1 + C_2 = y_0$$

$$C_1 - C_2 = -i \left( \frac{V_0 + y_0 \xi w}{w_D} \right) \quad (27)$$

Sustituyendo (27) en (26)

$$y = e^{-\xi w t} \left[ y_0 \cos w_D t + \frac{V_0 + y_0 \xi w}{w_D} \sen w_D t \right] \quad (28)$$

De igual manera que en la derivación anterior, la respuesta del sistema se puede expresar mediante una identidad trigonométrica:

$$y = A \cdot e^{-\xi w t} \sen(w_D t + \alpha) \quad (29)$$

Donde  $A$  equivale a:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left( \frac{V_0 + y_0 \xi w}{w_D} \right)^2} \quad (30)$$

## EJEMPLO: CASO II.

%VIBRACIÓN LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO - CASO II

```

Y0 = 1;           %Desplazamiento inicial
V0 = 1;           %Velocidad inicial
T = 2;            %Periodo
w = 2*pi/T;       %Frecuencia Natural Del Sistema

```



```

si = 0.05;           %Porcentaje de amortiguamiento
wd = w*sqrt(1-si^2) %Frecuencia amortiguada
t = 0:0.1:20;       %Tiempo

y = exp(-
si*w.*t).*(Y0*cos(wd.*t)+((V0+si*w*Y0)/wd)*sin(wd.*t))
ymax = max(y)
A = sqrt(Y0^2+((V0+si*w*Y0)/wd)^2)

whitebg
plot(t,y,'r--')
title('Vibración Libre Con Amortiguamiento - Caso II');
xlabel('t');
ylabel('y');

```

**RESULTADO:**

ymax = 1.0484

A = 1.0658

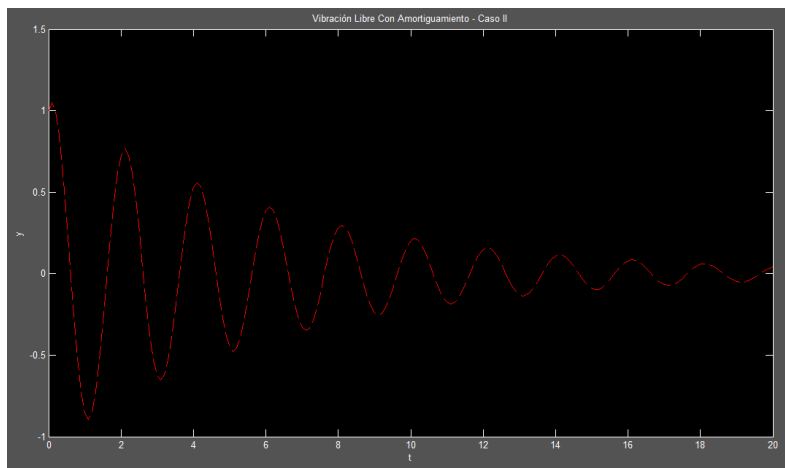


Fig. 09. Gráfica de vibración libre con amortiguamiento, caso II.

**Porcentaje de amortiguamiento crítico.**

Utilizando dos puntos de la gráfica anterior; es decir:

$$y_1, y_2$$

A cada uno de estos desplazamientos le corresponde un valor de t.

$$t_2 - t_1 = T_D \quad (31)$$

Utilizando la ecuación de “Respuesta de sistemas amortiguados”; es decir, (29)

$$y = A \cdot e^{-\xi w t} \text{sen}(w_D t + \alpha)$$

Sustituyendo  $y_2, y_1$  en (29) y dividiéndolas, se obtiene:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{A \cdot e^{-\xi w t_2} \text{sen}(w_D t_2 + \alpha)}{A \cdot e^{-\xi w t_1} \text{sen}(w_D t_1 + \alpha)}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{-\xi w t_2}}{e^{-\xi w t_1}}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{-\xi w t_2} \cdot e^{\xi w t_1}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{-\xi w (t_2 - t_1)} \quad (32)$$

Sustituyendo (31) en (32)

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{-\xi w (T_D)} \quad (33)$$

Recordando que:

$$T_D = \frac{2\pi}{w_D} \quad (34)$$

Sustituyendo (34) en (33)

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{-\xi w \left(\frac{2\pi}{w_D}\right)} \quad (35)$$

Recordando que

$$w_D = w \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\ln(y_2 - y_1) = \frac{-\xi w 2\pi}{w \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (36)$$

Para valores muy pequeños de  $\xi$ , se considera:

$$w\sqrt{1-\xi^2} = w \quad (37)$$

Sustituyendo (37) en (36)

$$\ln(y_2 - y_1) = \frac{-\xi w 2\pi}{w}$$

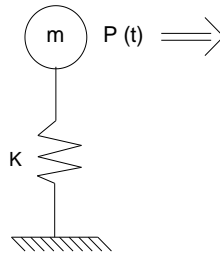
$$\ln(y_2 - y_1) = -\xi w 2\pi$$

$$\xi = -\frac{\ln(y_2 - y_1)}{2\pi} \quad (38)$$

**“Decremento Logarítmico para estimar los valores de amortiguamiento.”**

## Respuesta ante excitaciones armónicas sin y con amortiguamiento.

*Respuesta de sistema de 1GDL sin amortiguamiento sometidos a excitaciones armónicas.*



Utilizando la ecuación general para sistemas sin amortiguamiento:

$$m\ddot{y} + ky = p(t)$$

$$m\ddot{y} + ky = p_0 \cdot \text{sen } \Omega t \quad (1)$$

Se propone una solución total la cual está comprendida por la suma de una solución complementaria más una solución particular, es decir:

$$y = y_c + y_p \quad (2)$$

Donde:

$$y_c = A \cdot \text{sen} \omega t + B \cdot \text{cos} \omega t \quad (3)$$

$$y_p = C \cdot \text{sen} \Omega t \quad (4)$$

Derivando la solución particular

$$\dot{y}_p = \Omega C \cdot \text{cos} \Omega t$$

$$\ddot{y}_p = -\Omega^2 C \cdot \text{sen} \Omega t \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (1)

$$-m \Omega^2 C \cdot \text{sen} \Omega t + k C \cdot \text{sen} \Omega t = p_0 \cdot \text{sen} \Omega t$$

Agrupando términos

$$(k - m \Omega^2) C \cdot \text{sen} \Omega t = p_0 \cdot \text{sen} \Omega t$$

$$C = \frac{p_0}{(k - m \Omega^2)} \cdot \frac{\text{sen} \Omega t}{\text{sen} \Omega t}$$

$$C = \frac{p_0}{(k - m \Omega^2)} \quad (6)$$

Si (6) se multiplica y divide “k/k”

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{k}{(k - m \Omega^2)}$$

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\frac{(k - m \Omega^2)}{k}} \quad (7)$$

Se puede observar que

$$\frac{k - m \Omega^2}{k} = \frac{k}{k} - \frac{m \Omega^2}{k}$$

Donde:

$$\frac{m}{k} = \frac{1}{\omega^2}$$

$$\frac{k - m \Omega^2}{k} = 1 - \frac{\Omega^2}{w^2}$$

Se sabe que la relación de frecuencias equivale a:

$$r = \frac{\Omega}{w} \quad (8)$$

$$\frac{k - m \Omega^2}{k} = 1 - r^2 \quad (9)$$

Además, el **Desplazamiento Estático** se expresa de la siguiente manera:

$$\mu_0 = \frac{p_0}{k} \quad (10)$$

Sustituyendo (10) y (9) en (7)

$$C = \mu_0 \frac{1}{1 - r^2} \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en (4)

$$y_p = \mu_0 \frac{1}{1 - r^2} \cdot \text{sen}\Omega t \quad (12)$$

Sustituyendo (3) y (12) en (2)

$$y = A \cdot \text{sen}wt + B \cdot \text{cos}wt + \mu_0 \frac{1}{1 - r^2} \cdot \text{sen}\Omega t \quad (13)$$

Derivando (13)

$$\dot{y} = Aw \cdot \text{cos}wt - Bw \cdot \text{sen}wt + \Omega \mu_0 \frac{1}{1 - r^2} \cdot \text{cos}\Omega t \quad (14)$$

Sustituyendo condiciones iniciales

$$y_0 = B \quad (15)$$

$$V_0 = Aw + \Omega \mu_0 \frac{1}{1 - r^2} \quad (16)$$

$$A = \frac{V_0}{w} - \frac{\Omega \mu_0}{w} \frac{1}{1 - r^2} \quad (17)$$

Sustituyendo (15) y (17) en (13)

$$y = \frac{V_0}{w} - \frac{\Omega \mu_0}{w(1 - r^2)} \cdot \text{sen}wt + y_0 \cdot \text{cos}wt + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \cdot \text{sen}\Omega t \quad (18)$$

**\*SI LA RELACIÓN DE FRECUENCIAS ES IGUAL A LA UNIDAD, EL SISTEMA CAE. EN ESTE CASO SE PRESENTA EL FENÓMENO DENOMINADO “RESONANCIA” LO**

**CUAL EN LA REALIDAD NO EXISTE, PUESTO QUE NO HAY SISTEMAS “NO AMORTIGUADOS”**

**\*EL SISTEMA VIBRA CON LA FRECUENCIA DE LA EXCITACIÓN**

**EJEMPLO:**

```
%Sistemas De 1GDL Sin Amortiguamiento Sometidos A Excitaciones Armónicas
```

```
Y0 = 1;           %Desplazamiento inicial
V0 = 1;           %Velocidad inicial
T = 2;            %Periodo
w = 2*pi/T;       %Frecuencia Natural Del Sistema
omega= 2;         %Frecuencia de la excitación
K = 10;           %Rigidez
P0 = 15;          %Excitación
Mu = P0/K;        %Desplazamiento Estático
r = omega/w        %Relación de frecuencias
t = 0:0.1:30;     %Tiempo
```

```
y = ((V0/w) - (omega*Mu) / (w*(1-r^2))) * sin(w.*t) + Y0*cos(w.*t) + (Mu/(1-r^2)) * sin(omega.*t);
```

```
whitebg
plot(t,y,'r--')
title('Sist 1GDL S/Amor Sometidos A Excitaciones Armonicas');
xlabel('t');
ylabel('y');
```

**RESULTADOS:**

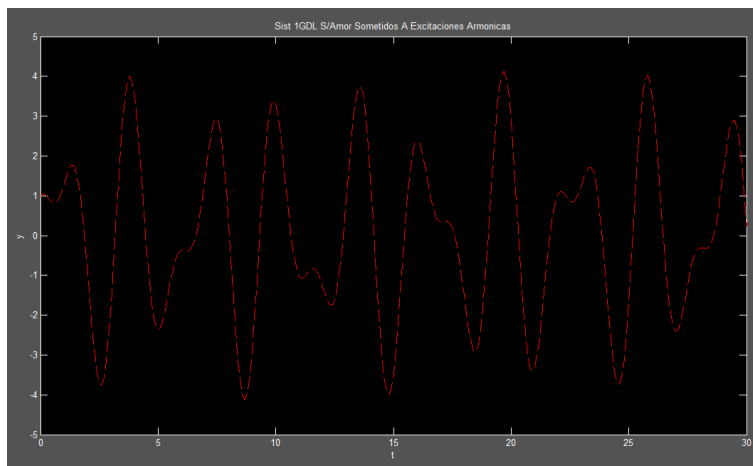


Fig. 10. Gráfica de vibración libre sin amortiguamiento sometido a excitaciones armónicas.

*Respuesta de sistemas de IGDL con amortiguamiento sometidos a excitaciones armónicas.*

Ecuación general para sistemas amortiguados

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = p(t) \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = p_0 \cdot \text{sen } \Omega t \quad (2)$$

Dividiendo (2) entre “m”

$$\ddot{y} + \frac{C}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{p_0}{m} \cdot \text{sen } \Omega t \quad (3)$$

Recordando que:

$$C = 2\xi\omega m$$

$$\frac{C}{m} = 2\xi\omega \quad (4)$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (5)$$

$$\frac{p_0}{m} = \frac{1}{m} \cdot p_0$$

$$\frac{1}{m} = \frac{\omega^2}{k}$$

$$\frac{p_0}{k} \cdot \omega^2 = \mu_0 \cdot \omega^2 \quad (6)$$

Sustituyendo (4), (5) y (6) en (3)

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2y = \mu_0 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \Omega t \quad (7)$$

Se propone una solución total, cuyo resultado es la suma de una solución complementaria más una solución particular:

$$y = y_c + y_p \quad (8)$$

Donde:

$$y_c = e^{-\xi\omega t}(A \cdot \cos\omega t + B \cdot \text{sen}\omega t) \quad (9)$$

$$y_p = C_1 \cdot \cos \Omega t + C_2 \cdot \sen \Omega t \quad (10)$$

Derivando (10)

$$\dot{y}_p = -\Omega C_1 \cdot \sen \Omega t + \Omega C_2 \cdot \cos \Omega t \quad (11)$$

$$\ddot{y}_p = -\Omega^2 C_1 \cdot \cos \Omega t - \Omega^2 C_2 \cdot \sen \Omega t \quad (12)$$

Sustituyendo (12), (11) y (10) en (7)

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 C_1 \cdot \cos \Omega t - \Omega^2 C_2 \cdot \sen \Omega t \\ & + 2\xi w (-\Omega C_1 \cdot \sen \Omega t + \Omega C_2 \cdot \cos \Omega t) + w^2 (C_1 \cdot \cos \Omega t + C_2 \\ & \cdot \sen \Omega t) = \mu_0 \cdot w^2 \cdot \sen \Omega t \end{aligned} \quad (13)$$

Agrupando términos para obtener un sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$-\Omega^2 C_2 - 2\xi w \Omega C_1 + w^2 C_2 = \mu_0 \cdot w^2 \quad (14)$$

$$-\Omega^2 C_1 + 2\xi w \Omega C_2 + w^2 C_1 = 0 \quad (15)$$

Agrupando términos en (14) y (15)

$$(w^2 - \Omega^2) C_2 - 2\xi w \Omega C_1 = \mu_0 \cdot w^2 \quad (16)$$

$$(w^2 - \Omega^2) C_1 + 2\xi w \Omega C_2 = 0 \quad (17)$$

Despejando  $C_1$  de (17)

$$C_1 = -\frac{2\xi w \Omega C_2}{(w^2 - \Omega^2)} \quad (18)$$

Sustituyendo (18) en (16)

$$(w^2 - \Omega^2) C_2 - 2\xi w \Omega \left( -\frac{2\xi w \Omega C_2}{(w^2 - \Omega^2)} \right) = \mu_0 \cdot w^2$$

$$C_2 (w^2 - \Omega^2) + \frac{C_2 (2\xi w \Omega)^2}{(w^2 - \Omega^2)} = \mu_0 \cdot w^2$$

$$C_2 \frac{[(w^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi w \Omega)^2]}{(w^2 - \Omega^2)} = \mu_0 \cdot w^2$$



$$C_2 = \frac{\mu_0 \cdot w^2 (w^2 - \Omega^2)}{(w^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi w \Omega)^2} \quad (19)$$

Recordando que:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Omega}{w} \\ \Omega &= rw \end{aligned} \quad (20)$$

Sustituyendo (20) en (19)

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\mu_0 \cdot w^2 \cdot (w^2 - r^2 w^2)}{(w^2 - r^2 w^2)^2 + (2\xi w^2 r)^2} \\ C_2 &= \mu_0 \cdot \frac{w^4 \cdot (1 - r^2)}{w^4 - 2r^2 w^4 + r^4 w^4 + w^4 (2\xi r)^2} \\ C_2 &= \mu_0 \cdot \frac{w^4 \cdot (1 - r^2)}{w^4 (1 - 2r^2 + r^4) + w^4 (2\xi r)^2} \end{aligned}$$

Se observa que:

$$\begin{aligned} (1 - 2r^2 + r^4) &= (1 - r^2)^2 \\ C_2 &= \mu_0 \cdot \frac{w^4 \cdot (1 - r^2)}{w^4 (1 - r^2)^2 + w^4 (2\xi r)^2} \\ C_2 &= \mu_0 \cdot \frac{(1 - r^2)}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Sustituyendo (20) y (21) en (18)

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2\xi w^2 r}{(w^2 - r^2 w^2)} \cdot \mu_0 \cdot \frac{(1 - r^2)}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\ C_1 &= -\frac{2\xi w^2 r}{w^2 (1 - r^2)} \cdot \mu_0 \cdot \frac{(1 - r^2)}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\ C_1 &= -\mu_0 \cdot \frac{2\xi r}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \end{aligned} \quad (22)$$

Sustituyendo (21) y (22) en (10)

$$y_p = -\mu_0 \cdot \frac{2\xi r}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \cdot \cos \Omega t + \mu_0 \cdot \frac{(1 - r^2)}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \cdot \sen \Omega t$$

$$y_p = \frac{\mu_0}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} [-2\xi r \cdot \cos\Omega t + (1 - r^2) \cdot \sen\Omega t] \quad (23)$$

La magnitud de  $y_p$  está dada por la siguiente expresión:

$$y_p = C \cdot \sen(\Omega t + \alpha) \quad (24)$$

Donde  $C$  equivale a:

$$C = \sqrt{C_1 + C_2}$$

$$C = \mu_0 \sqrt{\frac{(2\xi r)^2 + (1 - r^2)^2}{((1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2)^2}}$$

$$C = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (25)$$

El ángulo alfa ( $\alpha$ ) equivale a:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right) \quad (25)$$

Llamando Factor de Amplificación Dinámica a:

$$D = \frac{C}{\mu_0}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (27)$$

**\*ESTA ECUACIÓN DETERMINA EL DESPLAZAMIENTO MÁXIMO DE LA ESTRUCTURA, CUANDO LAS FRECUENCIAS NO SON IGUALES.**

La solución total será:

$$y = e^{-\xi w t}(A \cdot \cos w t + B \cdot \sen w t) + C_1 \cdot \cos\Omega t + C_2 \cdot \sen\Omega t \quad (28)$$

Derivando (27)

$$\dot{y} = e^{-\xi w t}(-Aw \cdot \sen w t + Bw \cdot \cos w t) - \xi w \cdot e^{-\xi w t}(A \cdot \cos w t + B \cdot \sen w t) - \Omega C_1 \cdot \sen\Omega t + \Omega C_2 \cdot \cos\Omega t \quad (29)$$

Sustituyendo condiciones iniciales en (27) y (28)

$$y_0 = A + C_1$$

$$A = y_0 - C_1 \quad (30)$$

$$V_0 = Bw - \xi w A + \Omega C_2$$

$$B = \frac{V_0 + \xi w(y_0 - C_1) + \Omega C_2}{w_D} \quad (31)$$

Sustituyendo (23), (29) y (30) en (27)

$$y = e^{-\xi w t} \left[ (y_0 - C_1) \cdot \cos w t + \left( \frac{V_0 + \xi w(y_0 - C_1) + \Omega C_2}{w_D} \right) \cdot \sin w t \right] + \frac{\mu_0}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} [-2\xi r \cdot \cos \Omega t + (1 - r^2) \cdot \sin \Omega t] \quad (32)$$

### EJEMPLO:

%Sistemas De 1GDL Con Amortiguamiento Sometidos A Excitaciones Armónicas

```

Y0 = 1; %Desplazamiento inicial
V0 = 1; %Velocidad inicial
T = 2; %Periodo
w = 2*pi/T; %Frecuencia Natural Del Sistema
omega= 2; %Frecuencia de la excitación
si = 0.05; %Porcentaje de amortiguamiento
wd = w*sqrt(1-si^2); %Frecuencia amortiguada
K = 10; %Rigidez
P0 = 15; %Excitación
Mu = P0/K; %Desplazamiento Estático
r = omega/w %Relación de frecuencias
alfa = atan(2*si*r/(1-r^2)); %Angulo
t = 0:0.1:60; %Tiempo

C1 = -Mu*(2*si*r/(1-r^2)^2+(2*si*r)^2);
C2 = Mu*((1-r^2)/((1-r^2)^2+(2*si*r)^2));
C = Mu/sqrt((1-r^2)^2+(2*si*r)^2);

yp = C*sin(omega.*t+alfa); %Solución Particular

```

```

y      = exp(-si*w.*t) .* ((Y0-C1)*cos(w.*t) + ((V0+si*w*(Y0-
C1))/wd)*sin(w.*t)) + (C1*cos(omega.*t) + C2*sin(omega.*t));
ymax = max(y)
ypmax= max(yp)

whitebg
hold on
plot(t,y,'r--',t,yp,'b--')
title('Sist 1GDL C/Amor Sometidos A Excitaciones Armonicas');
xlabel('t');
ylabel('y');

```

## RESULTADO:

ymax = 3.1880

ypmax = 2.5079

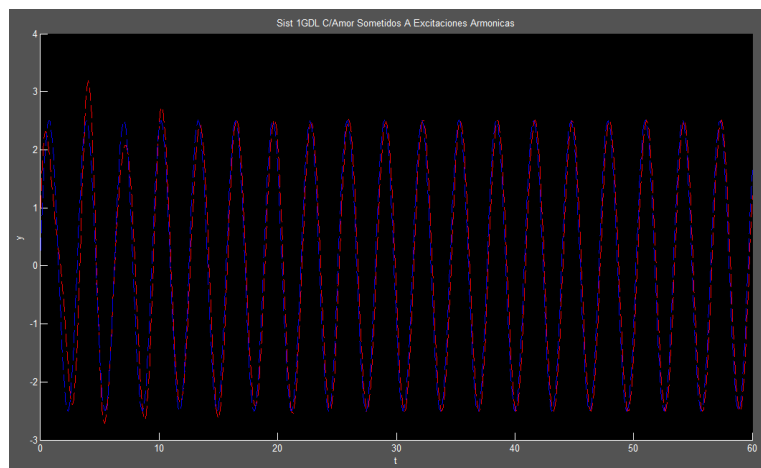


Fig. 11. Gráfica de sistema con amortiguamiento sometido a excitaciones armónicas

**\*SI EL ANGULO ES IGUAL A CERO, QUIERE DECIR QUE LA FRECUENCIA DEL SISTEMA Y LA EXCITACIÓN, VAN A LA PAR.**

## Amplificación dinámica.

### EJEMPLO:

```
%Factor De Amplificación Dinámica
```

```
r = 0:0.02:2; %Relación De Frecuencias
```

```

for i=0:0.2:1
    D = 1./sqrt(((1-r.^2).^2)+(2*i*r).^2) %Factor

    hold on
    plot(r,D,'--b')
end

whitebg
xlabel('RELACION DE FRECUENCIAS');
ylabel('FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA');

```

### RESULTADO:

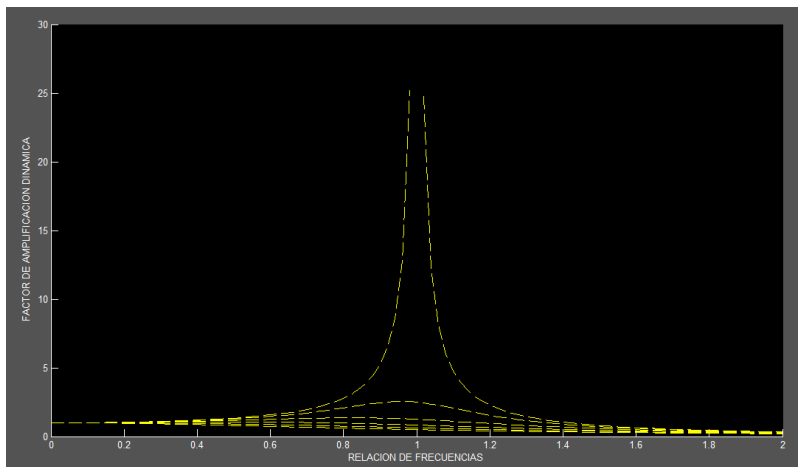


Fig. 12. Gráfica de amplificación dinámica

### Respuesta ante excitaciones periódicas sin y con amortiguamiento.

*Respuesta de sistemas de 1GDL sin amortiguamiento sometidos a una carga armónica “ $\Omega = \omega$ ”.*

La ecuación general para sistemas no amortiguados

$$m\ddot{y} + ky = p(t)$$

$$m\ddot{y} + ky = p_0 \cdot \text{sen } \omega t \quad (1)$$

La solución total del sistema

$$y = y_C + y_P \quad (2)$$

Donde:

$$y_C = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t \quad (3)$$

$$y_P = At \cdot \cos \omega t \quad (4)$$

Derivando (4)

$$\dot{y}_P = -At\omega \cdot \sin \omega t + A \cdot \cos \omega t$$

$$\ddot{y}_P = -At\omega^2 \cdot \cos \omega t - A\omega \cdot \sin \omega t - A\omega \cdot \sin \omega t$$

$$\ddot{y}_P = -At\omega^2 \cdot \cos \omega t - 2A\omega \cdot \sin \omega t \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1)

$$m(-At\omega^2 \cdot \cos \omega t - 2A\omega \cdot \sin \omega t) + k(At \cdot \cos \omega t) = p_0 \cdot \sin \omega t$$

$$-2Am\omega = p_0$$

$$A = \frac{p_0}{-2m\omega}$$

$$A = -\frac{\mu_0 \omega}{2} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (4)

$$y_P = -\frac{\mu_0 \omega}{2} t \cdot \cos \omega t \quad (7)$$

Sustituyendo (3) y (7) en (2)

$$y = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \cdot \cos \omega t \quad (8)$$

Derivando (8)

$$\dot{y} = -\omega C_1 \cdot \sin \omega t + \omega C_2 \cdot \cos \omega t + \frac{\mu_0 \omega^2}{2} t \cdot \sin \omega t - \frac{\mu_0 \omega}{2} \cdot \cos \omega t \quad (9)$$

Sustituyendo condiciones iniciales en (8) y (9)

$$y_0 = C_1 \quad (10)$$

$$V_0 = \omega C_2 - \frac{\mu_0 \omega}{2}$$

$$C_2 = \frac{2V_0 + w\mu_0}{2w} \quad (11)$$

Sustituyendo (10) y (11) en (8)

$$y = y_0 \cdot \cos wt + \frac{2V_0 + w\mu_0}{2w} \cdot \text{sen} wt - \frac{\mu_0 w}{2} t \cdot \cos wt$$

$$y = \left( y_0 - \frac{\mu_0 w}{2} t \right) \cdot \cos wt + \left( \frac{2V_0 + w\mu_0}{2w} \right) \cdot \text{sen} wt \quad (12)$$

### EJEMPLO:

%Sistemas De 1GDL Sin Amortiguamiento Sometidos A Una Carga Armonica

```

Y0 = 1;           %Desplazamiento inicial
V0 = 1;           %Velocidad inicial
T = 2;           %Periodo
w = 2*pi/T;      %Frecuencia Natural Del Sistema
K = 10;           %Rigidez
P0 = 15;         %Excitación
Mu = P0/K;       %Desplazamiento Estático
t = 0:0.1:30;    %Tiempo

```

$$y = (Y0 - (Mu * w / 2) * t) * \cos(w * t) + (2 * V0 + w * Mu / 2 * w) * \sin(w * t)$$

```

whitebg
plot(t,y,'b--')
title('Sist 1GDL S/Amor Sometidos A Una Carga Armonica');
xlabel('t');
ylabel('y');

```

### RESULTADO:

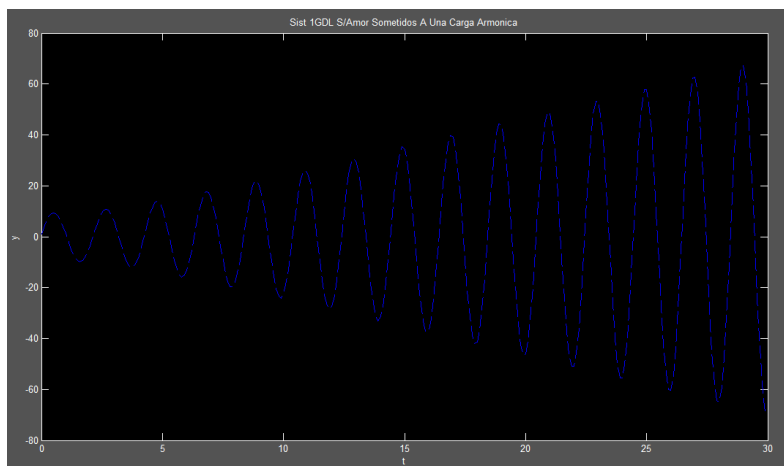


Fig. 13. Gráfica de sistema sin amortiguamiento sometido a una carga armónica.

*Respuesta de sistemas de IGDL con amortiguamiento sometidos a una carga armónica “ $\Omega = \omega$ ”.*

Retomando la solución total para sistemas amortiguados sometidos a una excitación armónica:

$$y = e^{-\xi\omega t} \left[ (y_0 - C_1) \cdot \cos\omega t + \left( \frac{V_0 + \xi\omega(y_0 - C_1) + \Omega C_2}{\omega_D} \right) \cdot \text{sen}\omega t \right] + \frac{\mu_0}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} [-2\xi r \cdot \cos\omega t + (1 - r^2) \cdot \text{sen}\omega t] \quad (1)$$

Ya que la frecuencia del sistema y de la excitación son iguales; es decir  $r = 1$ , entonces:

$$C_1 = -\frac{\mu_0}{2\xi} \quad (2)$$

$$C_2 = 0 \quad (3)$$

Para amortiguamientos pequeños:

$$\omega_D = \omega$$

Si la velocidad y el desplazamiento iniciales son iguales a “cero”

$$y = e^{-\xi\omega t} \left[ (-C_1) \cdot \cos\omega t + \left( \frac{\xi\omega(-C_1) + \Omega C_2}{\omega} \right) \cdot \text{sen}\omega t \right] + \frac{\mu_0}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} [-2\xi r \cdot \cos\omega t + (1 - r^2) \cdot \text{sen}\omega t] \quad (4)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (4)

$$y = e^{-\xi\omega t} \left[ \left( \frac{\mu_0}{2\xi} \right) \cdot \cos\omega t + \left( \frac{\xi\omega \left( \frac{\mu_0}{2\xi} \right)}{\omega} \right) \cdot \text{sen}\omega t \right] - \frac{\mu_0}{2\xi} \cdot \cos\omega t \quad (5)$$

Agrupando términos

$$y = \frac{\mu_0}{2\xi} [ e^{-\xi\omega t} (\cos\omega t + \text{sen}\omega t) - \cos\omega t ]$$

$\text{Sen}(\omega t)$  se desprecia porque la amplitud es muy pequeña

$$y = \frac{\mu_0}{2\xi} [ e^{-\xi\omega t} (\cos\omega t) - \cos\omega t ]$$

Agrupando términos

$$y = \frac{\mu_0}{2\xi} [ \cos\omega t ( e^{-\xi\omega t} - 1 ) ] \quad (6)$$



El desplazamiento máximo que sufre la estructura cuando está en fase es:

$$y_{\max} = \frac{\mu_0}{2\xi} \quad (7)$$

**\*FASE SIGNIFICA QUE TANTO LA FRECUENCIA DE LA ESTRUCTURA COMO LA DEL SUELO SON IGUALES**

El pico de la gráfica corresponde a:

$$D = \frac{1}{2\xi} \quad (8)$$

### EJEMPLO:

**%Sistemas De 1GDL Con Amortiguamiento Sometidos A Una Carga Armónica**

```
Y0 = 1;           %Desplazamiento inicial
V0 = 1;           %Velocidad inicial
T = 2;            %Periodo
w = 2*pi/T;       %Frecuencia Natural Del Sistema
K = 10;           %Rigidez
P0 = 15;          %Excitación
Mu = P0/K;        %Desplazamiento Estático
t = 0:0.1:60;     %Tiempo
```

```
y = Mu/2*si*((exp(-si*w.*t)-1).*cos(w.*t));
ymax = max(y)
ymaxx= Mu/2*si
D = 1/(2*si)
```

whitebg

```
plot(t,y,'b--')
title('Sist 1GDL C/Amor Sometidos A Una Carga Armonica');
xlabel('t');
ylabel('y');
```

### RESULTADO:

ymax = 0.0375

ymaxx = 0.0375

D = 10

## **Análisis dinámico modal espectral aplicado a un edificio de 8 niveles y 3 sótanos.**

El edificio comprende de 8 niveles y 3 sótanos ubicado en calle Manuel Navarrete No.65, Colonia Algarín, Alcaldía Cuauhtémoc, C.P. 06880 Ciudad de México, México, está estructurado en los sótanos con un sistema dual a base de pórticos resistentes a momento de concreto en dos direcciones y muros de rigidez de concreto reforzado y un sistema de piso a base de losas macizas. La superestructura se compone de un sistema dual a base de pórticos resistentes a momento de acero en dos direcciones y muros de rigidez de concreto reforzado con contravientos restringidos al pandeo (BRB) y un sistema de piso de losa-acero.

### *Especificaciones*

En cuanto a las especificaciones requeridos en el proyecto, se atienden los parámetros señalados en el Reglamento de Construcciones de la Ciudad de México (RCCDMX, 2017), algunos códigos empleados en este proyecto serán:

- Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo con comentarios (NTCDS, 2020)
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto con comentarios (NTCDCEC, 2021)
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Acero con comentarios (NTCDCEA, 2020)
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones (NTCDCC, 2017)
- Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones (NTCCADEE, 2017)
- American Institute of Steel Construction – ANSI 2010 (AISC, 2010)
- American Institute of Steel Construction LRFD – 93 (ASIC, 1993)

## Diseño Estructural

### Materiales para elementos estructurales

Para el diseño estructural del proyecto se emplearán los materiales y características:

#### Concreto

- Concreto clase I con una  $f'c = 350 \frac{kgf}{cm^2}$

#### Acero

- Acero de refuerzo G60 con una fluencia  $f_y = 4,200 \frac{kgf}{cm^2}$ , módulo de elasticidad  $E_s = 2,040,000 \frac{kgf}{cm^2}$
- Acero de refuerzo A36 con una fluencia  $f_y = 2,530 \frac{kgf}{cm^2}$ , módulo de elasticidad  $E_s = 2,000,000 \frac{kg}{cm^2}$
- Acero de refuerzo A500Gr50 con una fluencia  $f_y = 3,515 \frac{kgf}{cm^2}$ , módulo de elasticidad  $E_s = 2,000,000 \frac{kgf}{cm^2}$

<i>Propiedades de los materiales</i>		
Concreto Clase I	250.00 $f_c$ (kg/cm <sup>2</sup> )	261,917.00 $E_c$ (kg/cm <sup>2</sup> )
Acero de refuerzo G-60	2,400.00 $f_y$ (kg/cm <sup>2</sup> )	2,040,000.00 $E_s$ (kg/cm <sup>2</sup> )
Alambrón de refuerzo A-37	2,531.00 $f_y$ (kg/cm <sup>2</sup> )	2,040,001.00 $E_s$ (kg/cm <sup>2</sup> )
Alambrón de refuerzo A-36	2,530.00 $f_y$ (kg/cm <sup>2</sup> )	2,000,000.00 $E_s$ (kg/cm <sup>2</sup> )
Acero estructural A500Gr50	3,515.00 $f_y$ (kg/cm <sup>2</sup> )	2,000,000.00 $E_s$ (kg/cm <sup>2</sup> )
Soldadura con electrodo E70xx	4,900.00 $F_e$ (kg/cm <sup>2</sup> )	

Tabla 01. Propiedades de los materiales para elementos estructurales

## *Materiales para elementos no estructurales*

### **Mampostería**

- Tabique rojo recocido con una resistencia a la compresión simple  $f_m = 15.00 \frac{kgf}{cm^2}$ , una resistencia al corte de  $v^* = 2.00 \frac{kgf}{cm^2}$ , un módulo elástico de  $E_m = 9,000 \frac{kg}{cm^2}$  y un módulo de elasticidad de  $G_m = 1,800 \frac{kgf}{cm^2}$

**NOTA IMPORTANTE:** Los muros de mampostería se considerarán como elementos no estructurales ya que serán únicamente de uso divisorio, sin embargo, se considerarán como masa en el análisis de carga (densidad de muros), por lo tanto, no aportarán rigidez a la estructura.

### *Diseño Arquitectónico*

Se proyectará en una superficie de 30.39 m de largo y 8.42 m de ancho, con una altura absoluta de 33.05 m. considerada a partir del sótano número 3 a la azotea.

Se asume que los entresijos son asimétricos, por lo tanto, se considerará una altura de 2.75 m para el sótano 1 y 2, y 3.1 m para los niveles y sótanos restantes.

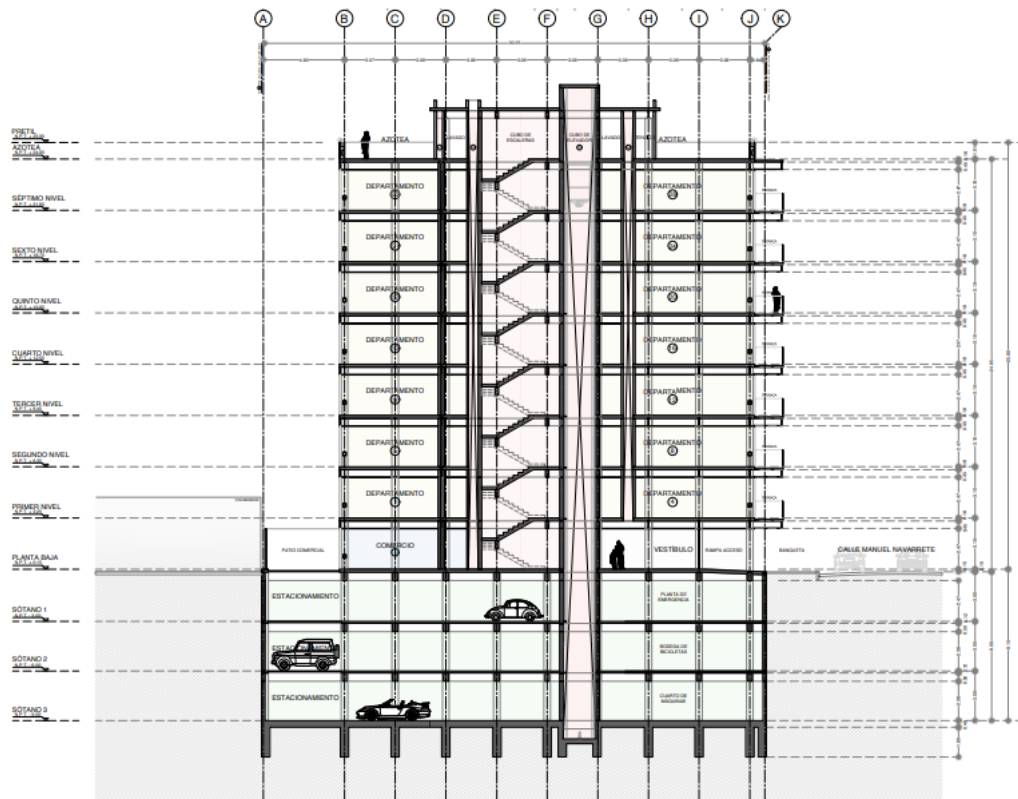


Fig. 14. Corte longitudinal del edificio de 8 niveles y 3 sótanos.

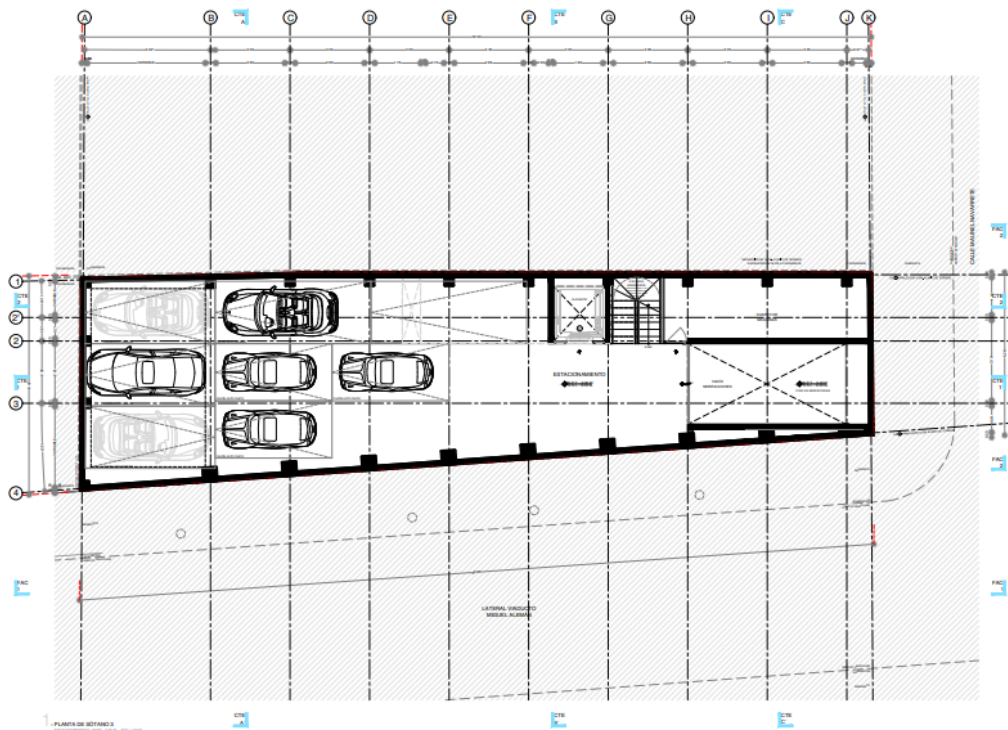


Fig. 15. Vista en planta del sótano 3.

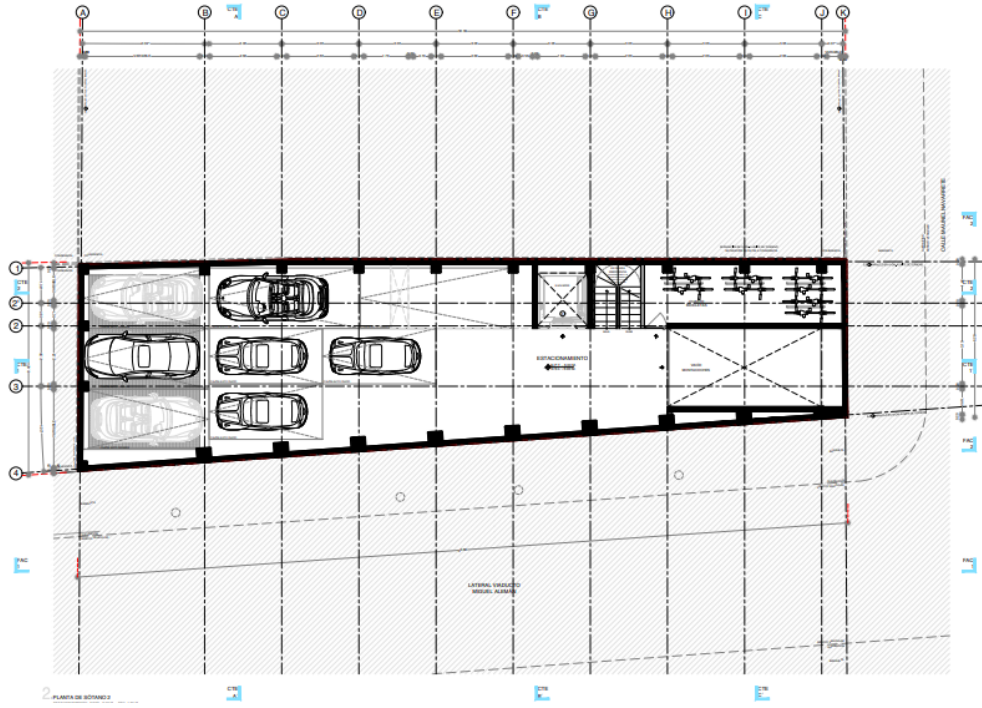


Fig. 16. Vista en planta del sótano 2.

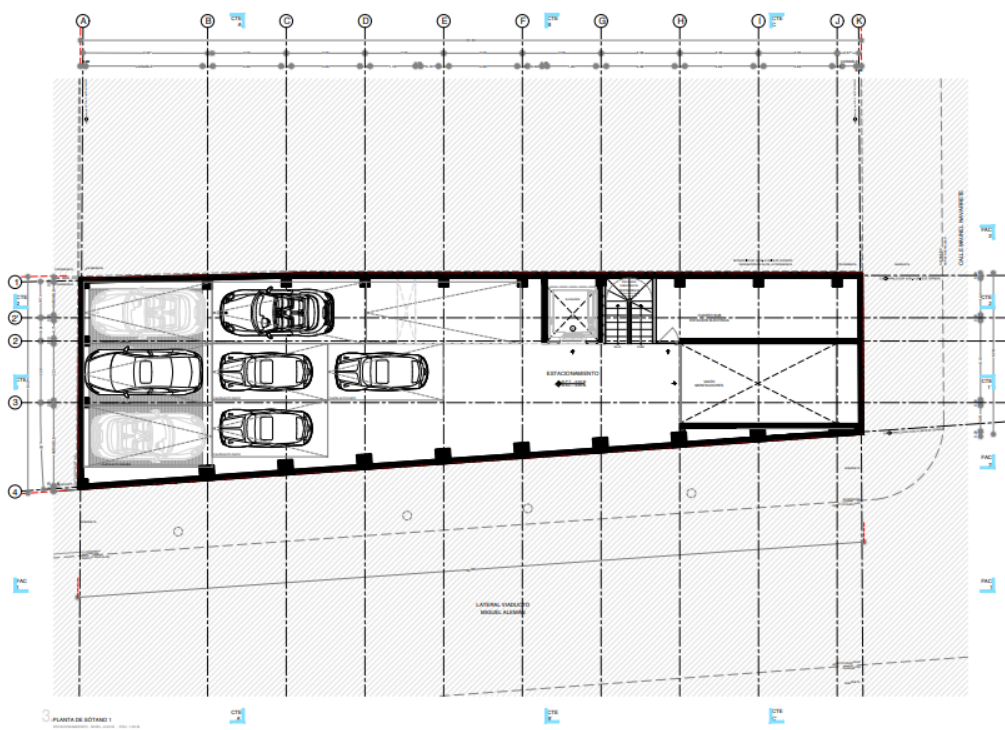


Fig. 17. Vista en planta del sótano 1.

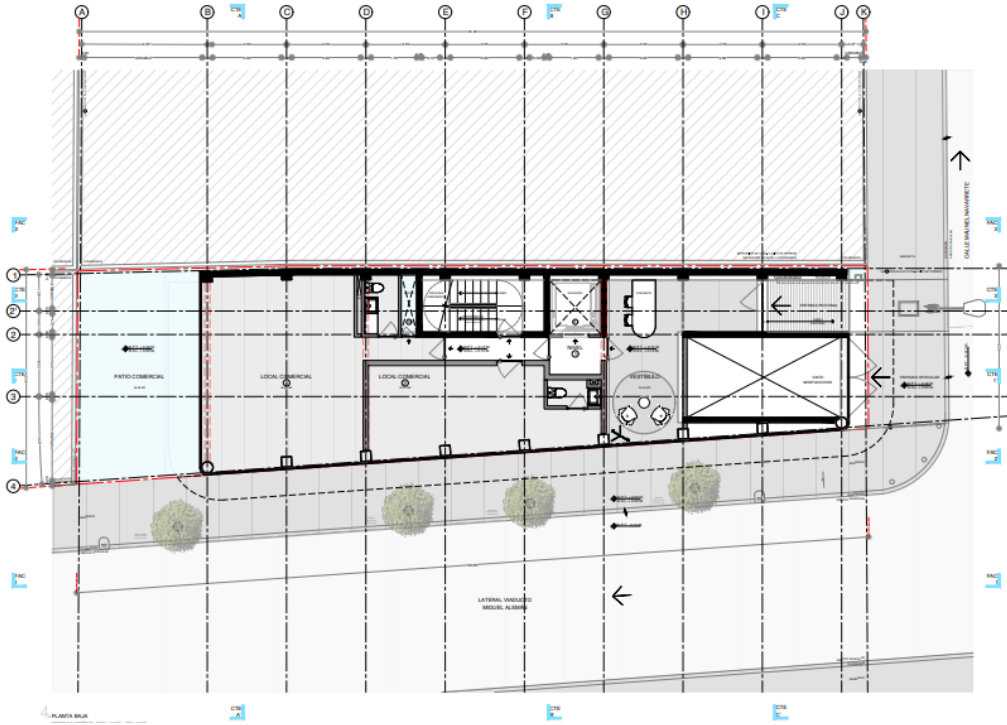


Fig. 18. Vista en planta de planta baja.

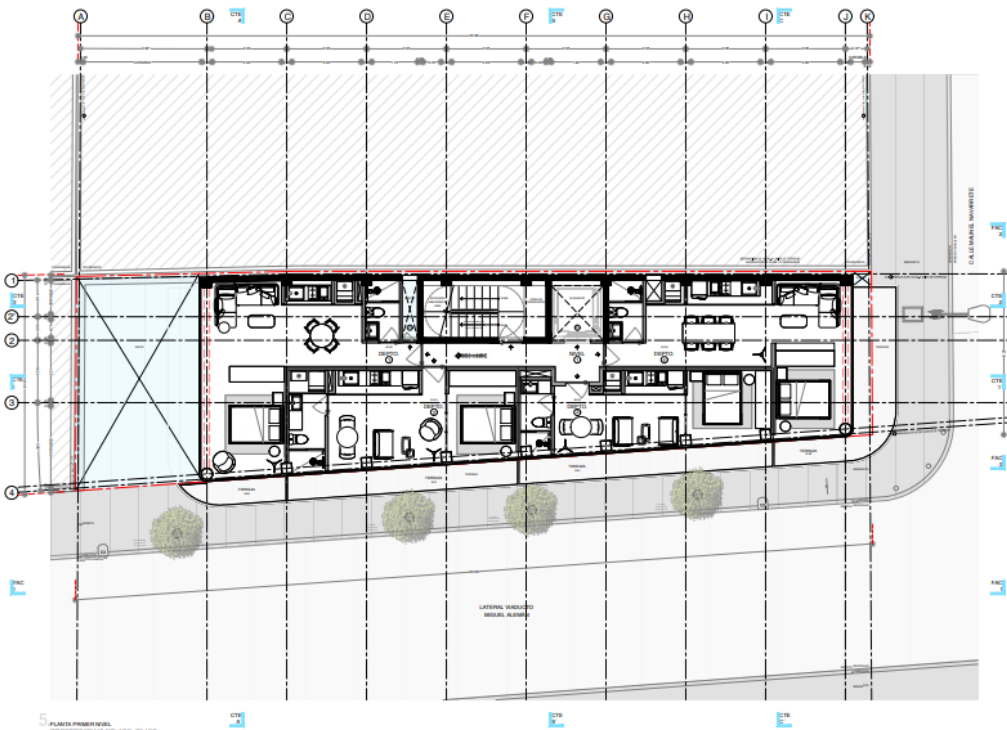


Fig. 19. Vista en planta primer nivel.



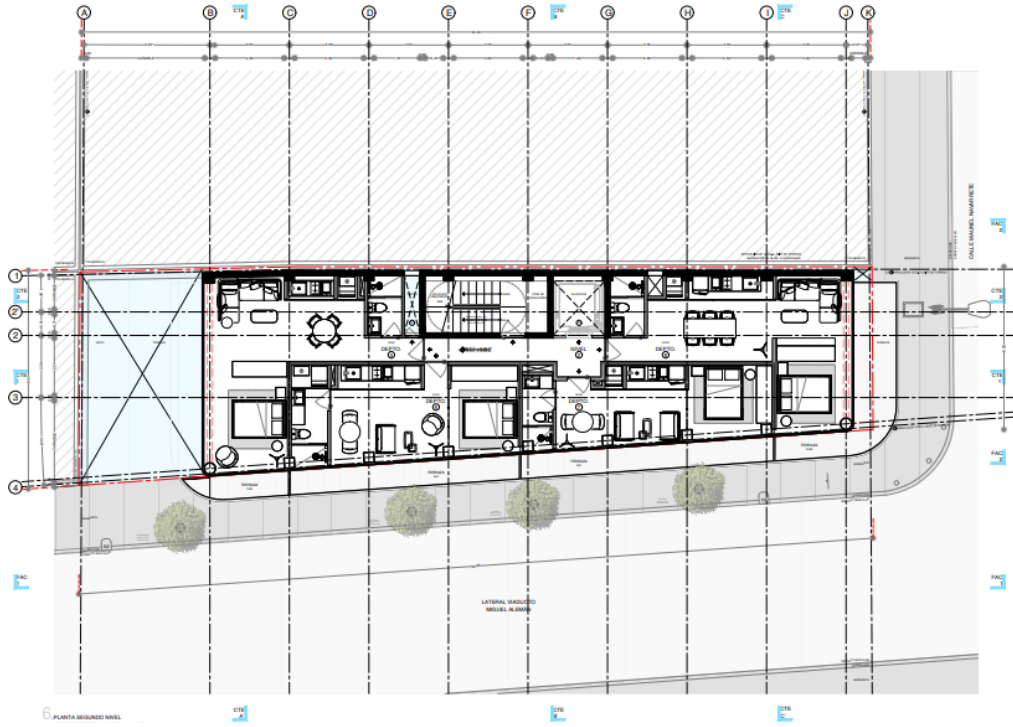


Fig. 20. Vista en planta segundo nivel.

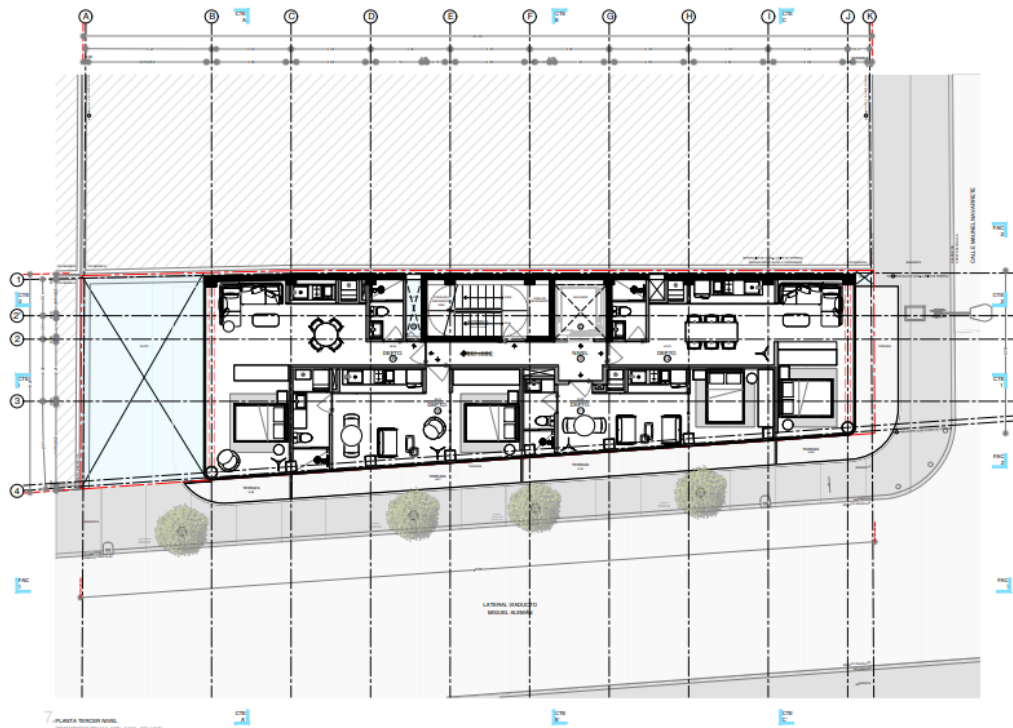


Fig. 21. Vista en planta tercer nivel.



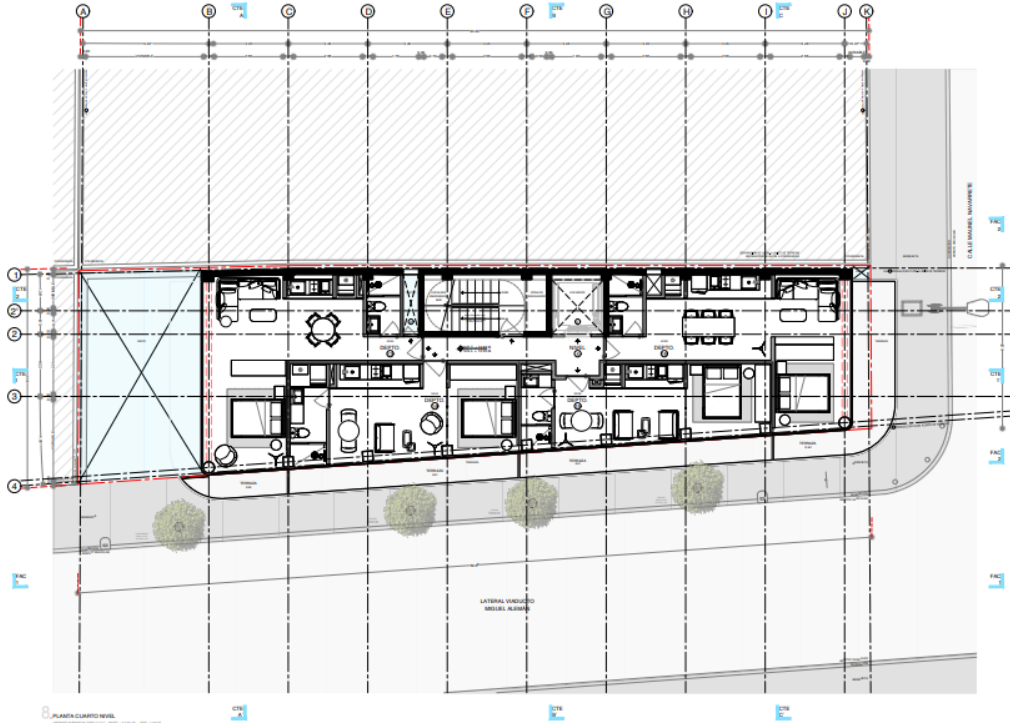


Fig. 22. Vista en planta cuarto nivel.

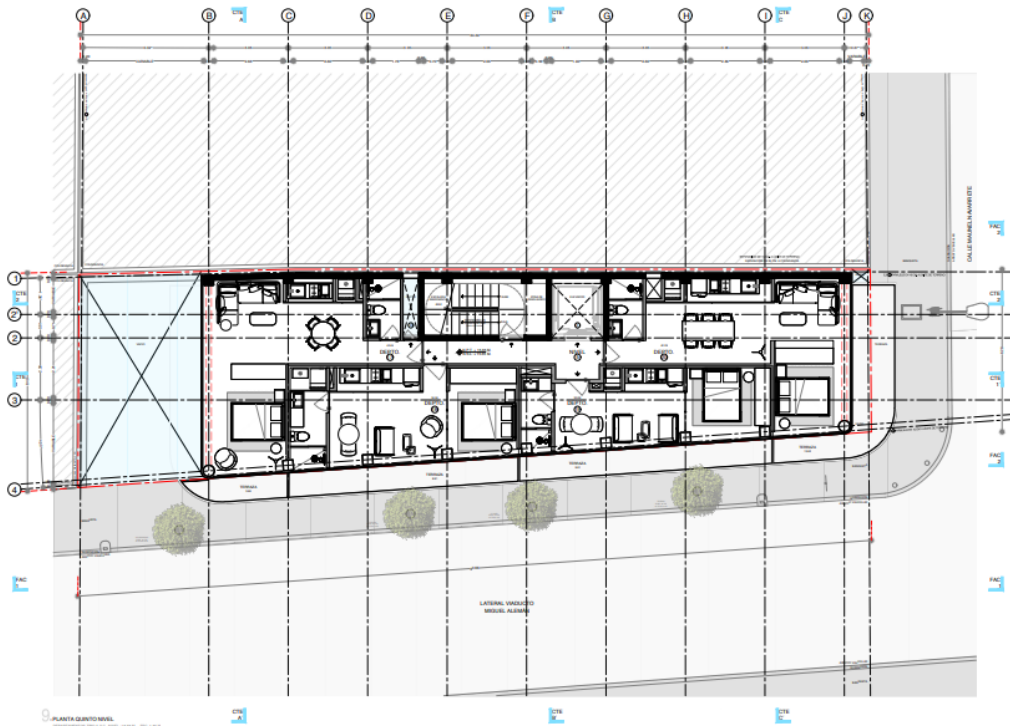


Fig. 23. Vista en planta quinto nivel.

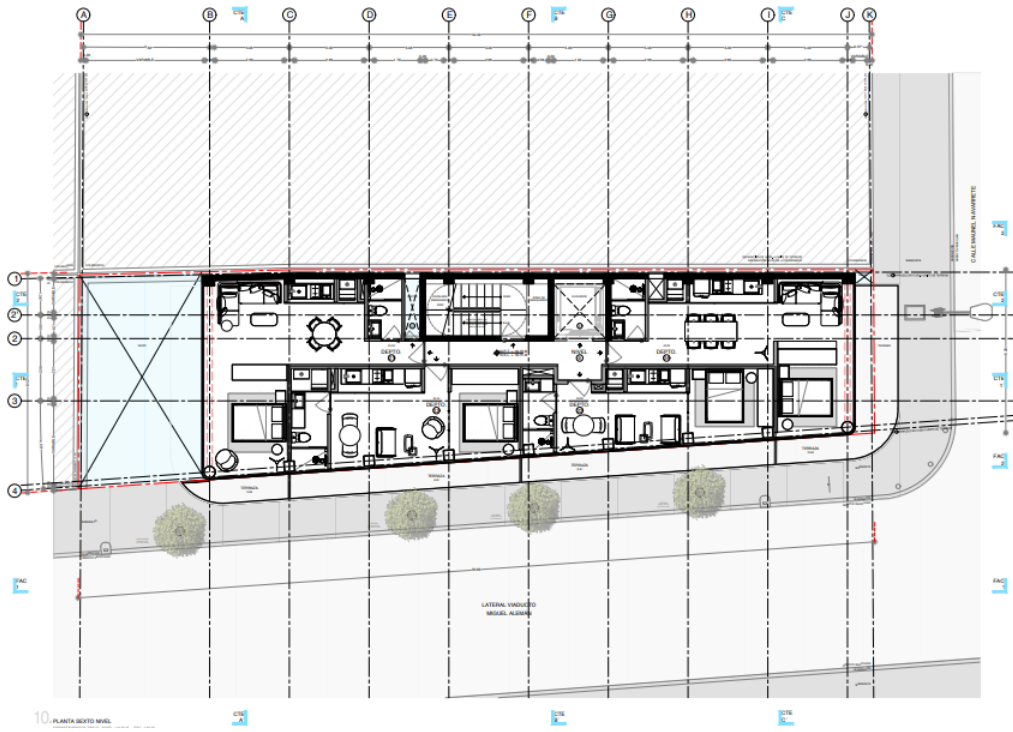


Fig. 24. Vista en planta sexto nivel.

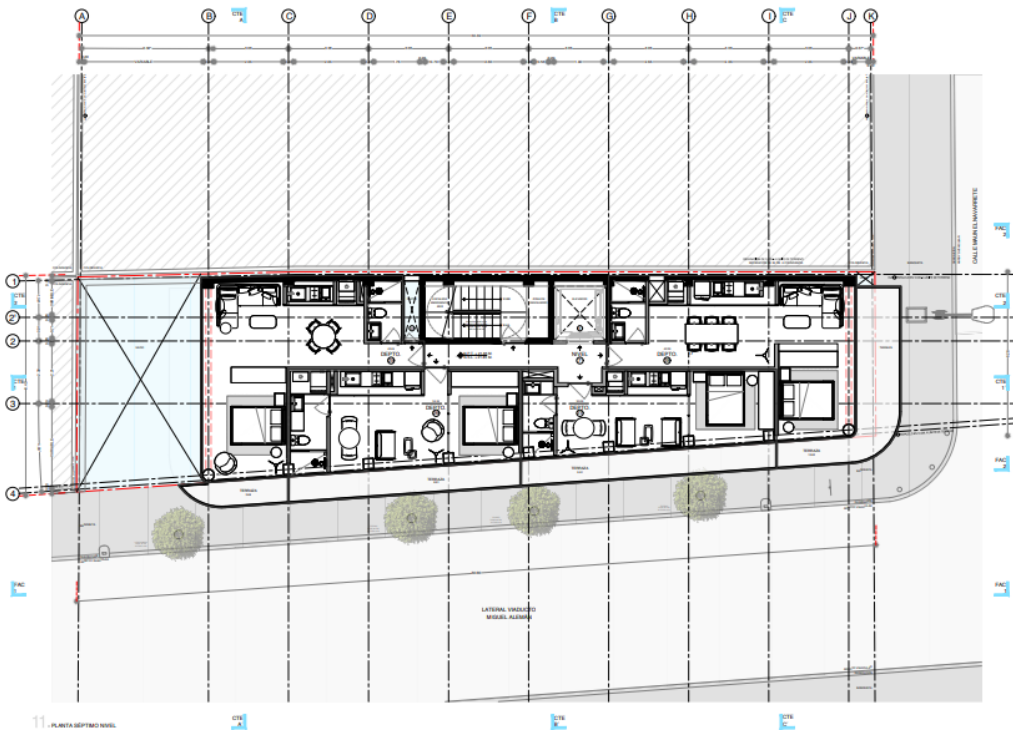


Fig. 24. Vista en planta séptimo nivel.

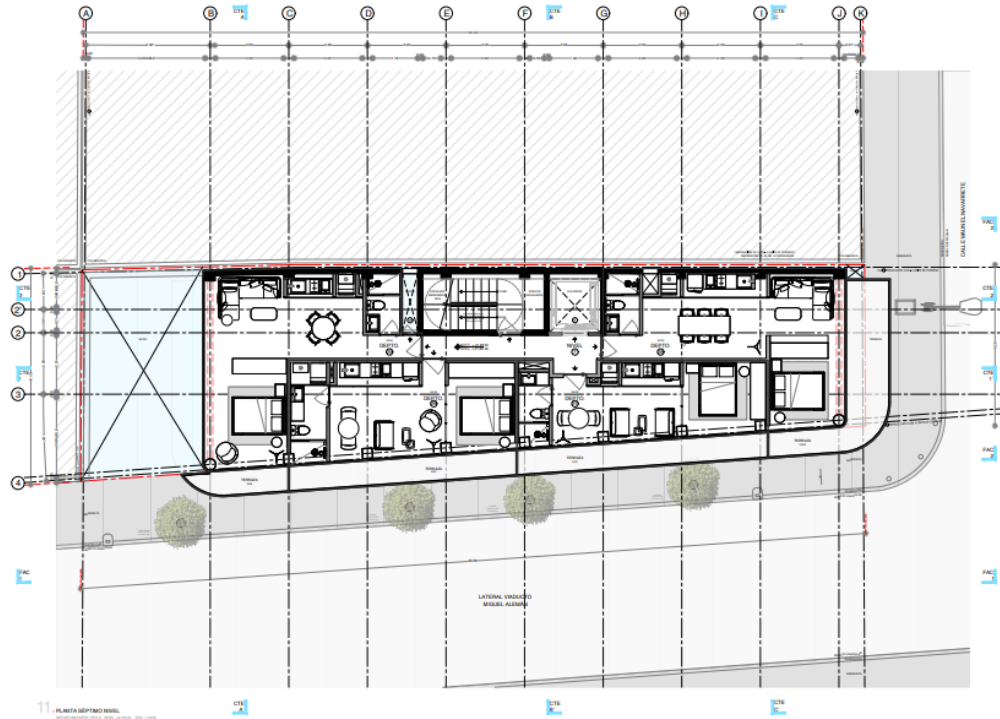


Fig. 25. Vista en planta octavo nivel.

### *Sistema de cimentación*

De acuerdo con los requerimientos que presenta el proyecto, para los 3 sótanos se considera un nivel de piso terminado a -9.30 m referente a nivel de banquetta, así como, presenta colindancias en sus puntos cardinales: tanto en el norte como en el poniente se colinda con estructuras de un nivel, en el sur colinda con la lateral de Viaducto P. Miguel Alemán, en el oriente colinda con calle Manuel Navarrete.

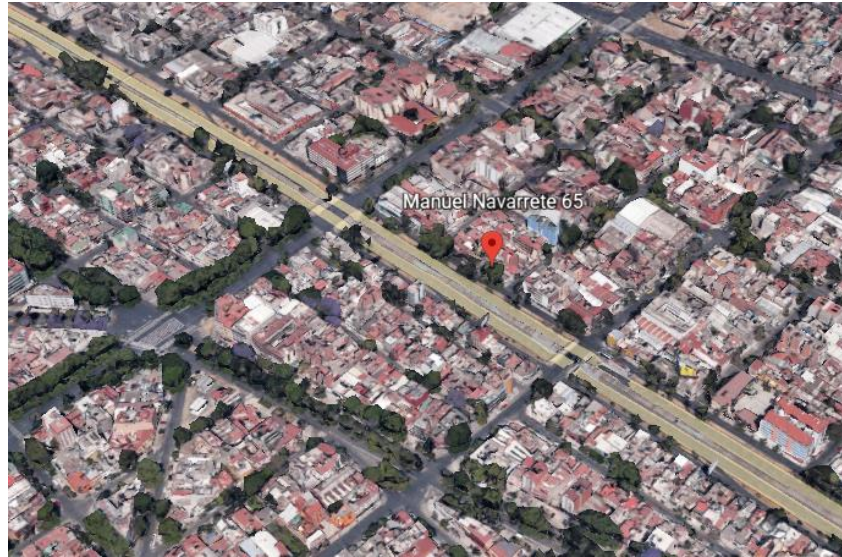


Fig. 26. Localización del sitio en estudio, Google Earth.

De acuerdo con los requerimientos en el diseño, se define un cajón de cimentación de concreto reforzado, desplantado a 9.70 m de profundidad y con un espesor de 0.40 m, conformado y rigidizado por contratrabes. Mediante un análisis de las fuerzas máximas, tanto estáticas como dinámicas de la estructura se establece una descarga total de 2,593 tonf. en el predio.

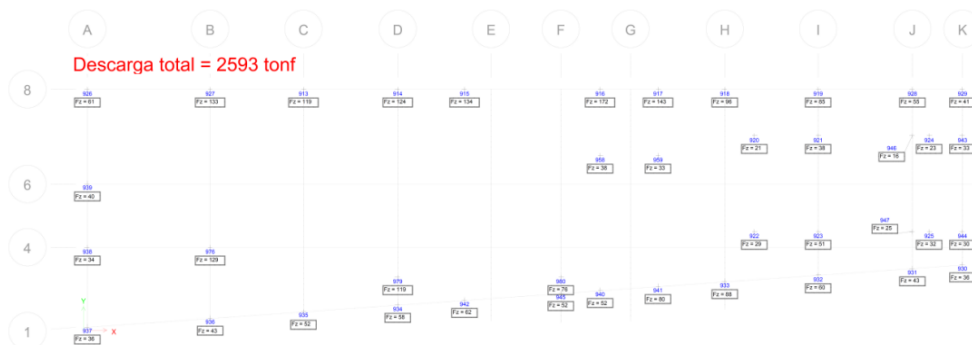


Fig. 27. Cargas máximas estáticas en compresión sin considerar factores de carga

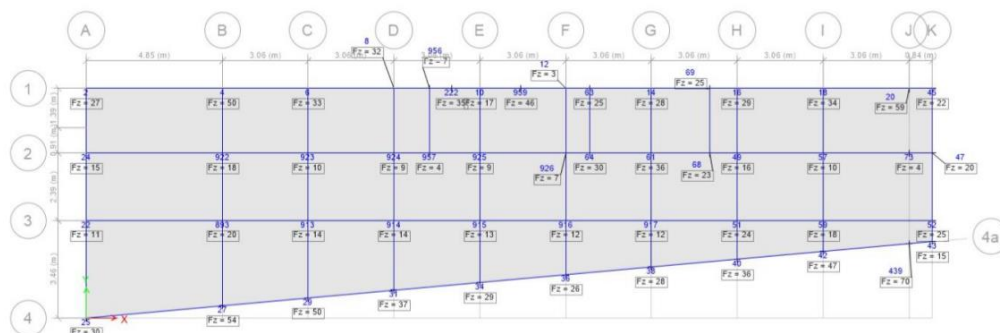


Fig. 28. Cargas máximas sísmicas en compresión sin considerar factores de carga

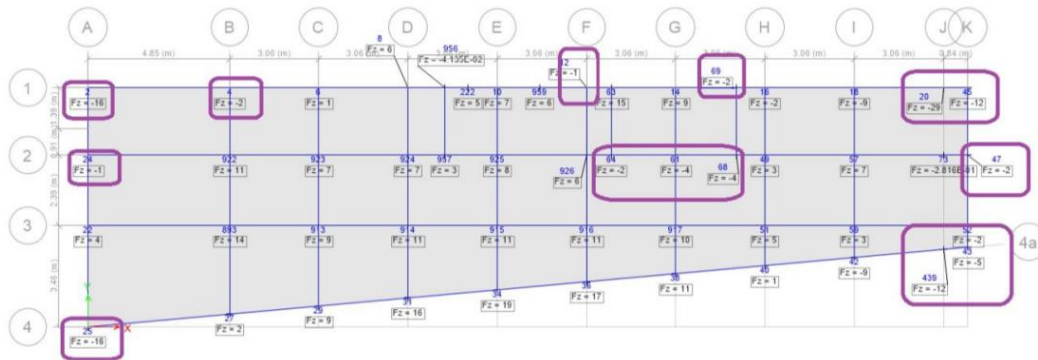


Fig. 29. Cargas máximas sísmicas en tensión sin considerar factores de carga

Al conocer dicho resultado, se realiza un análisis por capacidad de carga que arroja un resultado apropiado para el cajón de cimentación.

## Diseño Sísmico

### Criterios de estructuración

Sistema dual a base de pórticos resistentes a momentos en dos direcciones de concreto y muros de rigidez de concreto reforzado en los sótanos.

Sistema dual a base de pórticos de acero resistentes a momento en dos direcciones y muros de rigidez de concreto reforzado con contravientos restringidos al pandeo en la superestructura.

Sistema de piso a base de losas macizas en sótanos volados y losa acero en la super estructura.

### Cargas Gravitacionales NTC – Edificaciones 2017

#### Peso propio de elementos estructurales (PP)

Elementos de concreto reforzado  $2,400.00 \frac{kg}{m^3}$

Elementos de Acero  $7,850.00 \frac{kg}{m^3}$



## Análisis de Cargas RCCDMX – NTC 2017

<i>Cargas Muertas</i>	<i>Sótanos</i>		<i>PB. Local comercial</i>		<i>Entrepisos</i>		<i>Roof Garden</i>	
Sobrecarga RCCDMX	40.00	kg/m <sup>2</sup>	40.00	kg/m <sup>2</sup>	40	kg/m <sup>2</sup>	40.00	kg/m <sup>2</sup>
Relleno e impermeabilización	0.00	kg/m <sup>2</sup>	0.00	kg/m <sup>2</sup>	0	kg/m <sup>2</sup>	310.00	kg/m <sup>2</sup>
Plafón e instalaciones	60.00	kg/m <sup>2</sup>	50.00	kg/m <sup>2</sup>	40	kg/m <sup>2</sup>	0.00	kg/m <sup>2</sup>
Acabado de piso	0.00	kg/m <sup>2</sup>	60.00	kg/m <sup>2</sup>	25	kg/m <sup>2</sup>	0.00	kg/m <sup>2</sup>
Densidad de muros no estructurales	0.00	kg/m <sup>2</sup>	100.00	kg/m <sup>2</sup>	100	kg/m <sup>2</sup>	0.00	kg/m <sup>2</sup>
<b>Carga Muerta impuesta</b>	<b>100.00</b>	<b>kg/m<sup>2</sup></b>	<b>250.00</b>	<b>kg/m<sup>2</sup></b>	<b>205.00</b>	<b>kg/m<sup>2</sup></b>	<b>350.00</b>	<b>kg/m<sup>2</sup></b>

<i>Cargas Vivas</i>	<i>Sótanos</i>		<i>PB. Local comercial</i>		<i>Entrepisos</i>		<i>Roof Garden</i>	
C. Viva Máxima	250.00	kg/m <sup>2</sup>	350.00	kg/m <sup>2</sup>	250.00	kg/m <sup>2</sup>	350.00	kg/m <sup>2</sup>
C. Viva Accidental	100.00	kg/m <sup>2</sup>	315.00	kg/m <sup>2</sup>	180.00	kg/m <sup>2</sup>	250.00	kg/m <sup>2</sup>
C. Viva Media	40.00	kg/m <sup>2</sup>	280.00	kg/m <sup>2</sup>	100.00	kg/m <sup>2</sup>	40.00	kg/m <sup>2</sup>

Tabla 02. Análisis de cargas conforme al Reglamento de Construcciones de la Ciudad de México

Nota 01: El software ETABS v.19.1 considera el peso propio de la estructura en función del peso volumétrico del material.

$W_m$  Análisis con carga viva máxima

$W_a$  Análisis con carga viva accidental

$W$  Análisis con carga viva media

### Espectros de diseño para modelo de análisis

Se harán consideraciones de factores sísmicos para la estructura de tipo B (uso habitacional), que estará ubicada en la Zonificación Geotécnica de la Ciudad de México definida como tipo III, con dirección en Manuel Navarrete No.65, Colonia Algarín, Alcaldía Cuauhtémoc, C.P. 06880 Ciudad de México, los cuales serán:

Periodo fundamental de la estructura  $T = 0.678s$

Aceleración máxima espectral con un valor de  $1,600 \frac{cm}{s^2}$

Factor de irregularidad = 0.70

Factor de hiperasticidad  $k_1 = 1.25$

Factor de comportamiento sísmico =2.00

Nota 01: se anexa reporte de espectro de diseño obtenido en SASID.

Método de análisis sísmico: Análisis dinámico modal espectral, Análisis dinámico paso a paso

Método de análisis no lineal: Análisis estático no lineal (Pushover) y análisis dinámico no lineal paso a paso.

Tipo de cimentación: Cajón de cimentación con losa fondo rigidizada con contratraves

Capacidad de carga admisible de losa fondo de cimentación:

$$\text{Condiciones estáticas} = 11 \frac{\text{tonf}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Condiciones dinámicas} = 16.5 \frac{\text{tonf}}{\text{m}^2}$$

**Condiciones de regularidad estructural.**

I. Los diferentes muros, marcos y demás sistemas sismo-resistentes verticales son sensiblemente paralelos a los ejes ortogonales principales del edificio. Se considera que un plano o elemento sismo-resistente es sensiblemente paralelo a uno de los ejes ortogonales cuándo el ángulo que forma en planta con respecto a dicho eje no excede 15° grados.

CUMPLE

II. La relación de su altura a la dimensión menor de su base no es mayor que cuatro.

CUMPLE

III. La relación entre largo y ancho de la base no es mayor a cuatro.

CUMPLE

IV. En planta no tiene entrantes ni salientes de dimensiones mayores que 20% de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección en que se considera entrante o saliente.

CUMPLE

V. Cada nivel tiene un sistema de piso cuya rigidez y resistencia en su plano satisfacen lo especificado para un diafragma rígido.

CUMPLE

VI. El sistema de piso no tiene aberturas que excedan 20% de su área en planta en dicho nivel, y las áreas huecas no difieran en posición de un piso a otro. Se exime de este requisito la azotea de la construcción.

NO CUMPLE

VII. El peso de cada nivel incluyendo la carga viva que debe considerarse para diseño sísmico no es mayor que 120% del correspondiente al piso inmediato inferior.

CUMPLE

VIII. En cada dirección, ningún piso tiene una dimensión en planta mayor que el 110% de la del piso inmediato inferior. Además, ningún piso tiene una dimensión en planta mayor que 125% de la menor de las dimensiones de los pisos inferiores en la misma dirección.

CUMPLE

IX. En todas las columnas están restringidas en todos los pisos en las dos direcciones de análisis por diafragmas horizontales o por vigas. Por consiguiente, ninguna columna pasa a través de un piso sin estar ligada con él.

CUMPLE



X. Todas las columnas de cada entrepiso tienen la misma altura, aunque esta pueda variar de un piso a otro. Se exime de este requisito al último entrepiso de la construcción.

CUMPLE

XI. La rigidez lateral de ningún entrepiso difiere en más de 20% de la del entrepiso inmediatamente inferior, el último entrepiso queda excluido de este requisito.

NO CUMPLE

XII. En ningún entrepiso el desplazamiento lateral de ningún punto de la planta excede en más de 20% el desplazamiento lateral promedio de los extremos de esta misma.

CUMPLE

XIII. En sistemas diseñados para  $Q=4$ , en ningún entrepiso el cociente de la capacidad resistente a carga lateral entre la acción de diseño debe ser menor que el 85% del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos. En sistemas diseñados para  $Q \leq 3$ , en ningún entrepiso el cociente antes indicado debe ser menor que 75% del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos. Para verificar el cumplimiento de este requisito, se calculará la capacidad resistente de cada entrepiso teniendo en cuenta todos los elementos que puedan contribuir apreciablemente a ella. Queda excluido de este requisito el último entrepiso.

CUMPLE

De acuerdo a lo anterior, se puede observar que no se cumplen los VI y XI por lo que, según el inciso 5.3 de las NTC – SISMO – 2017, se le considerará como una estructuras *muy irregular*, lo que conlleva considerar un factor de irregularidad de 0.75.

### **Método de diseño.**

Se considerará como normativa Reglamento de Construcciones de la Ciudad de México y sus Normas Técnicas Complementarias 2017 (Edificaciones, Concreto, Sismo).

La estructura se modeló con elementos tipo *Frame* para las columnas, vigas y contratabes; elementos tipo *Deck* para las losas de entrepisos, y elementos tipos *Shell* para la losa de cimentación y las losas de estacionamiento, esta con una malla de elemento finito discretizada de 50x50 cm.

Se consideró el efecto del agrietamiento en los elementos estructurales según la Tabla 3.2.1 Momentos de Inercia para cálculo de rigideces de las NTC – Concreto 2017.

**Tabla 3.2.1 Momentos de inercia para cálculo de rigideces**

Elemento	Momento de inercia
Vigas y muros agrietados <sup>1</sup>	0.5I <sub>g</sub>
Columnas agrietadas	0.7I <sub>g</sub>
Columnas y muros no agrietados	I <sub>g</sub>

<sup>1</sup> En vigas T se deberán incluir los anchos de patín especificados en el inciso 5.1.1.2.

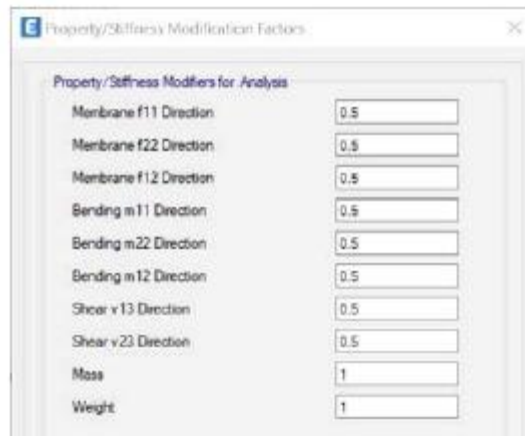
Para columnas:



Para vigas:



Para muros:



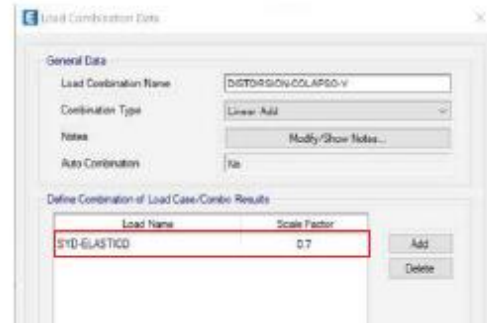
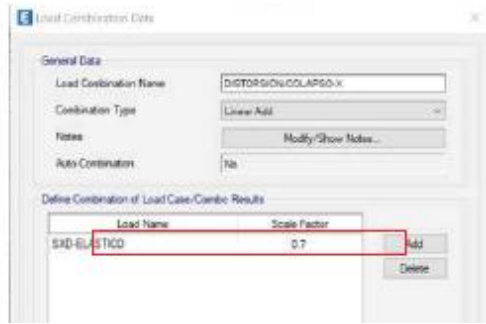
### Acciones por sismo.

Se realizó un análisis sísmico dinámico modal espectral asistido por computadora con el programa ETABS V.19.1.0. Se consideraron las aceleraciones en dirección X, en dirección Y y la rotación en dirección Z al 100%, tomando en cuenta 24 modos de vibrar.

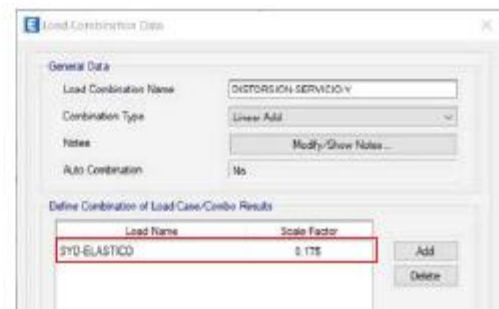


Se utilizó el espectro elástico (obtenido en el SASID) para dos casos:

1. Revisión de prevención de colapso, multiplicado por el factor de irregularidad.



2. Revisión por servicio, multiplicado por el factor de irregularidad 0.7 y por el factor  $k_s = 0.25$



**Condiciones de carga consideradas para el diseño y revisión de elementos estructurales.**

PP	Peso propio de la estructura (ETABS considera el peso propio de la estructura)
CM	Carga muerta impuesta
CVX	Carga viva máxima
CVA	Carga viva instantánea
CVM	Carga viva media
SXD	Sismo en dirección X dinámico
SYD	Sismo en dirección Y dinámico

Tabla 03. Condiciones de carga para el diseño de elementos estructurales

**Combinaciones de carga consideradas.**

Combinación	PP	CM	CVX	CVA	CVM	CVC	SXD	SYD
COMB-GRAV	1.30	1.30	1.50					
COMB01D	1.10	1.10		1.10			1.10	0.33
COMB02D	1.10	1.10		1.10			-1.10	0.33
COMB03D	1.10	1.10		1.10			1.10	-0.33
COMB04D	1.10	1.10		1.10			-1.10	-0.33
COMB05D	1.10	1.10		1.10			0.33	1.10
COMB06D	1.10	1.10		1.10			-0.33	1.10
COMB07D	1.10	1.10		1.10			0.33	-1.10
COMB08D	1.10	1.10		1.10			-0.33	-1.10
COMB09D	1.10	1.10		1.10			1.10	
COMB10D	1.10	1.10		1.10			-1.10	
COMB11D	1.10	1.10		1.10				1.10
COMB12D	1.10	1.10		1.10				-1.10
ENVOLV-D	E envolvente de COMB-GRAV y COMB01D al COMB12D							
DEFLX	1.00	1.00	1.00					
ASENT	1.00	1.00			1.00			

Tabla 04. Combinaciones de carga para el modelo analítico tridimensional

### Excentricidad accidental $e_a$

De acuerdo al punto 2.2 Efecto de torsión: Cuando las fuerzas sísmicas se aplican de manera concurrente en 2 direcciones ortogonales, la excentricidad accidental no necesita ser considerada de manera simultánea en ambas direcciones, pero debe ser aplicada en la dirección que produce el mayor efecto (NTC-Sismo, 2017).

### Excentricidad torsional y accidental $e_a$

Story	Nivel	Diaphragm	XCCM	YCCM	XCR	YCR	esx	esy
1er. Nivel	1	D1	16.54	5.11	16.34	5.51	0.2	-0.4
2do. Nivel	2	D2	16.66	5.18	16.25	5.91	0.41	-0.73
3er. Nivel	3	D3	16.65	5.30	16.17	6.17	0.48	-0.87
4to. Nivel	4	D4	16.65	5.30	16.05	6.34	0.6	-1.04
5to. Nivel	5	D5	16.65	5.30	15.93	6.46	0.72	-1.17
6to. Nivel	6	D6	16.65	5.30	15.83	6.56	0.82	-1.27
7mo. Nivel	7	D7	16.65	5.30	15.73	6.66	0.92	-1.37
Azotea	8	D8	16.51	4.77	15.62	6.79	0.89	-2.02

Nivel	Piso	eax	eay	1.5esx+eax	1.5esy+eay	esx-eax	esy-eay	1.5esx	1.5esy	ex	ey
1er. Nivel	2	1.38	0.41	1.68	-0.20	-1.18	-0.81	0.30	-0.61	1.68	0.81
2do. Nivel	3	1.58	0.47	2.20	-0.63	-1.16	-1.2	0.62	-1.09	2.20	1.20
3er. Nivel	4	1.77	0.52	2.50	-0.78	-1.29	-1.4	0.72	-1.31	2.50	1.40
4to. Nivel	5	1.97	0.58	2.87	-0.98	-1.37	-1.62	0.90	-1.56	2.87	1.62
5to. Nivel	6	2.17	0.64	3.24	-1.11	-1.45	-1.81	1.07	-1.75	3.24	1.81
6to. Nivel	7	2.37	0.70	3.59	-1.2	-1.55	-1.96	1.23	-1.9	3.59	1.96
7mo. Nivel	8	2.56	0.76	3.95	-1.29	-1.64	-2.12	1.38	-2.05	3.95	2.12
Azotea	9	2.76	0.82	4.10	-2.22	-1.87	-2.84	1.34	-3.04	4.10	3.04

Tabla 05. Excentricidades torsionales y accidentales a las que se expone el modelo analítico tridimensional

Story	Diaphragm	Eccentricity (e)
Acotera	D8	4.1
7mo Nivel	D7	3.55
8to Nivel	D6	3.59
5to Nivel	D5	3.24
4to Nivel	D4	2.87
3er Nivel	D3	2.5
2do Nivel	D2	2.2
Primer Nivel	D1	1.88

Factores de excentricidad por nivel para el sismo en dirección X.

Story	Diaphragm	Eccentricity (e)
Acotera	D8	3.04
7mo Nivel	D7	2.12
8to Nivel	D6	1.96
5to Nivel	D5	1.81
4to Nivel	D4	1.62
3er Nivel	D3	1.4
2do Nivel	D2	1.2
Primer Nivel	D1	0.81

Factores de excentricidad por nivel para el sismo en dirección Y

**Resultados del análisis.**

<b>Cortante basal por sismo.</b>				
<b>Nivel</b>	<b>Load Case/Combo</b>	<b>Location</b>	<b>VX (tonf)</b>	<b>VY (tonf)</b>
BASE	SXD Max	Bottom	266.00	44.00
BASE	SYD Max	Bottom	36.00	353.00

Tabla 06. Resultados arrojados a someter a un análisis al modelo analítico tridimensional

Peso total del edificio= 2593.00 tonf

Ts= 2.3 s (periodo dominante del suelo)

A min = 0.05

V min = 66.20 tonf

VXD = 266.00 tonf > 66.20 tonf

NO se incrementan las fuerzas sísmicas dinámicas en la dirección X

VYD = 353.00 tonf > 66.20

NO se incrementan las fuerzas sísmicas dinámicas en la dirección Y

<b>Desplazamientos máximos</b>			
<b>Story</b>	<b>Load Case/Combo</b>	<b>UX*QR (mm)</b>	<b>UY*QR (mm)</b>
Azotea	SXD	34.82	31.28
Azotea	SYD	4.82	134.15
7mo. nivel	SXD	30.44	28.31
7mo. nivel	SYD	4.14	119.98
6to. nivel	SXD	25.74	24.86
6to. nivel	SYD	3.43	104.61
5to. nivel	SXD	20.79	20.97
5to. nivel	SYD	2.72	88.17
4to. nivel	SXD	15.52	16.91
4to. nivel	SYD	2.02	71.15
3er. nivel	SXD	10.99	12.70
3er. nivel	SYD	1.37	53.89
2do. nivel	SXD	6.61	8.51
2do. nivel	SYD	37.07	0.87
1er. nivel	SXD	2.99	4.49
1er. nivel	SYD	0.70	21.407

Tabla 07. Desplazamientos máximos que se presentan en el modelo analítico tridimensional

### Separación de colindancias

<b>Separación en la dirección X</b>							
<b>Story</b>	<b>Diaphragm</b>	<b>He (m)</b>	<b>Zi (m)</b>	<b>Desp*QRp (mm)</b>	<b>Incr (mm)</b>	<b>Separación (cm)</b>	
Azotea	D7	1.10	20.30	46.80	0.00	4.68	12.00
7mo. nivel	D6	0.80	19.20	41.57	0.00	4.16	12.00
6to. nivel	D5	3.30	18.40	35.78	0.00	3.58	5.00
5to. nivel	D4	3.20	15.65	29.53	0.00	2.95	5.00
4to. nivel	D3	4.00	12.90	22.95	0.00	2.30	5.00
3er. nivel	D2	4.20	10.15	16.80	0.00	1.68	5.00
2do. nivel	D1	3.15	7.40	10.77	0.00	1.08	5.00
1er. nivel	D0	2.75	3.25	5.39	0.00	0.54	5.00

Tabla 08. Separación de colindancias que se presentan en el eje X del modelo analítico tridimensional

*NOTA:* Al tomarse en cuenta los efectos de torsión conforme a las NTC-SISMO-2017 (Inciso 2.2) NO se incrementan las separaciones a las colindancias y únicamente rigen los desplazamientos máximos dinámicos teóricos.

<b>Separación en la dirección Y</b>							
<b>Story</b>	<b>Diaphragm</b>	<b>He (m)</b>	<b>Zi (m)</b>	<b>Desp*QRp (mm)</b>	<b>Incr (mm)</b>	<b>Separación (cm)</b>	
Azotea	D7	1.10	20.30	134.23	0.00	13.42	14.00
7mo. nivel	D6	0.80	19.20	120.05	0.00	12.00	13.00
6to. nivel	D5	3.30	18.40	104.67	0.00	10.47	11.00
5to. nivel	D4	3.20	15.65	88.21	0.00	8.82	9.00
4to. nivel	D3	4.00	12.90	71.18	0.00	7.12	8.00
3er. nivel	D2	4.20	10.15	53.91	0.00	5.39	6.00
2do. nivel	D1	3.15	7.40	37.08	0.00	3.71	5.00
1er. nivel	D0	2.75	3.25	21.42	0.00	2.14	5.00

Tabla 09. Separación de colindancias que se presentan en el eje Y del modelo analítico tridimensional

*NOTA:* Al tomarse en cuenta los efectos de torsión conforme a las NTC-SISMO-2017 (Inciso 2.2) NO se incrementan las separaciones a las colindancias y únicamente rigen los desplazamientos máximos dinámicos teóricos.

#### **Distorsión máxima para prevención a colapso.**

<b>Distorsión máxima en dirección X</b>						
<b>Nivel</b>	<b>Elevación (m)</b>	<b>X- Dir</b>	<b>Y-Dir</b>	<b>Resultante</b>	<b>Distorsión <math>Q^*R</math></b>	<b>Límite</b>
Azotea	24.95	0.000648	0.000616	0.000894	0.00492	0.010
7mo. nivel	21.85	0.000693	0.000713	0.000994	0.00547	0.010
6to. nivel	18.75	0.000725	0.000794	0.001075	0.00591	0.010
5to. nivel	15.65	0.000726	0.000823	0.001097	0.00604	0.010
4to. nivel	12.55	0.000702	0.000841	0.001095	0.00603	0.010
3er. nivel	9.45	0.000637	0.000817	0.001036	0.00570	0.010
2do. nivel	6.35	0.000527	0.000759	0.000924	0.00508	0.010
1er. nivel	3.25	0.000361	0.000621	0.000718	0.00395	0.010

Tabla 10. Distorsiones máximas que se presentan en el eje X del modelo analítico tridimensional



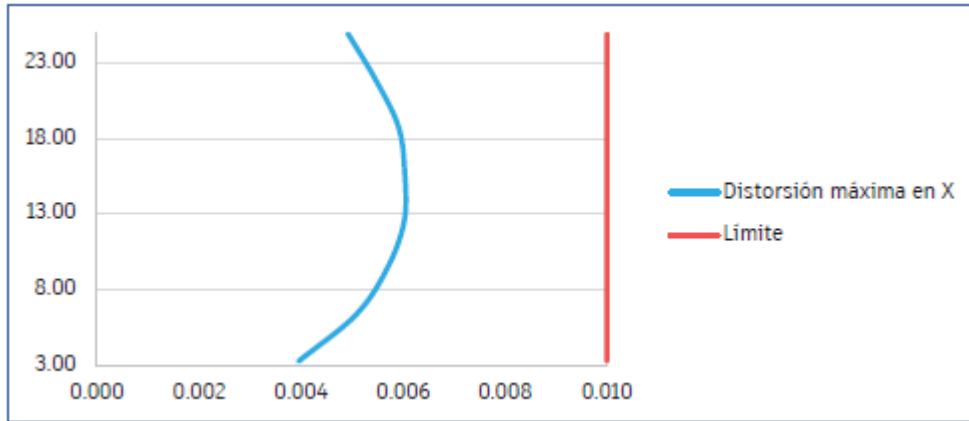


Fig. 30. Gráfica de distorsión máxima para prevención de colapso en dirección X.

<b>Distorsión máxima en dirección Y</b>						
<b>Nivel</b>	<b>Elevación (m)</b>	<b>X- Dir</b>	<b>Y-Dir</b>	<b>Resultante</b>	<b>Distorsión <math>Q^*R</math></b>	<b>Límite</b>
Azotea	24.95	0.000148	0.000970	0.000981	0.005398	0.010
7mo. nivel	21.85	0.000161	0.001047	0.001059	0.005826	0.010
6to. nivel	18.75	0.000170	0.001112	0.001125	0.006186	0.010
5to. nivel	15.65	0.000173	0.001144	0.001157	0.006361	0.010
4to. nivel	12.55	0.000168	0.001154	0.001166	0.006413	0.010
3er. nivel	9.45	0.000152	0.001119	0.001129	0.006211	0.010
2do. nivel	6.35	0.000124	0.001040	0.001047	0.005759	0.010
1er. nivel	3.25	0.000092	0.001085	0.001089	0.005991	0.010

Tabla 11. Distorsiones máximas que se presentan en el eje Y del modelo analítico tridimensional

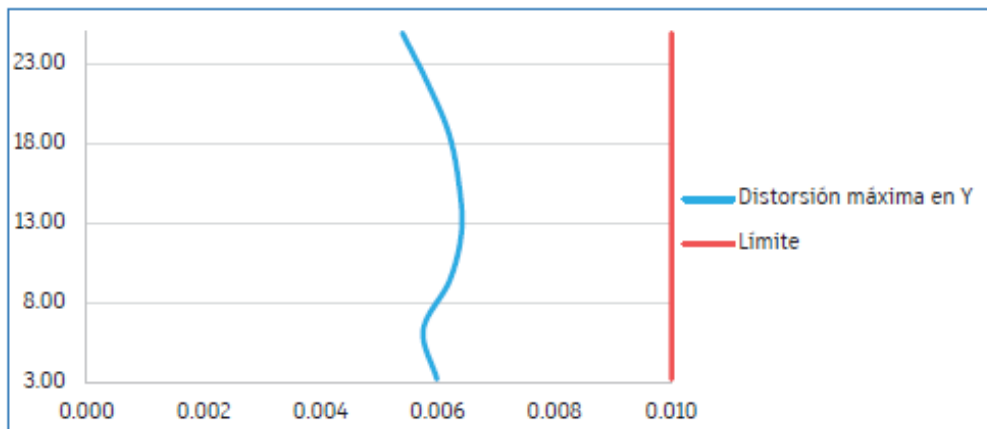


Fig. 31. Gráfica de distorsión máxima para prevención de colapso en dirección Y.

### **Distorsión máxima para la limitación de daños.**

<b>Distorsión máxima en dirección X</b>						
<b>Nivel</b>	<b>Elevación (m)</b>	<b>X- Dir</b>	<b>Y-Dir</b>	<b>Resultante</b>	<b>Distorsión <i>Q'Rks</i></b>	<b>Límite</b>
Azotea	24.95	0.000648	0.000616	0.000894	0.000861	0.002
7mo. nivel	21.85	0.000693	0.000713	0.000994	0.000957	0.002
6to. nivel	18.75	0.000725	0.000794	0.001075	0.001035	0.002
5to. nivel	15.65	0.000726	0.000823	0.001097	0.001056	0.002
4to. nivel	12.55	0.000702	0.000841	0.001095	0.001054	0.002
3er. nivel	9.45	0.000637	0.000817	0.001036	0.000997	0.002
2do. nivel	6.35	0.000527	0.000759	0.000924	0.000889	0.002
1er. nivel	3.25	0.000361	0.000621	0.000718	0.000691	0.002

Tabla 12. Distorsiones máximas para limitación de daños que se presentan en el eje X del modelo analítico tridimensional

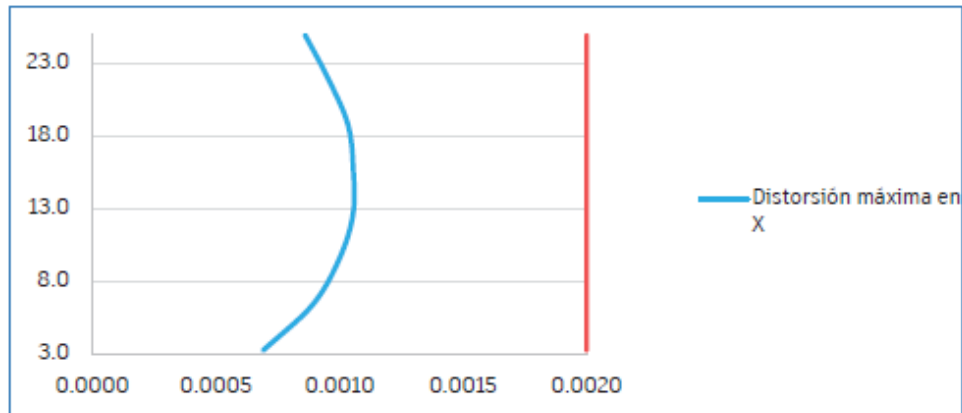


Fig. 32. Gráfica de distorsión máxima para limitación de daños en dirección X.

<b>Distorsión máxima en dirección Y</b>						
<b>Nivel</b>	<b>Elevación (m)</b>	<b>X- Dir</b>	<b>Y-Dir</b>	<b>Resultante</b>	<b>Distorsión <i>Q'Rks</i></b>	<b>Límite</b>
Azotea	24.95	0.000148	0.000970	0.000981	0.001325	0.002
7mo. nivel	21.85	0.000161	0.001047	0.001059	0.001430	0.002
6to. nivel	18.75	0.000170	0.001112	0.001125	0.001518	0.002
5to. nivel	15.65	0.000173	0.001144	0.001157	0.001561	0.002
4to. nivel	12.55	0.000168	0.001154	0.001166	0.001574	0.002
3er. nivel	9.45	0.000152	0.001119	0.001129	0.001524	0.002
2do. nivel	6.35	0.000124	0.001040	0.001047	0.001414	0.002
1er. nivel	3.25	0.000092	0.001085	0.001089	0.001471	0.002

Tabla 13. Distorsiones máximas para limitación de daños que se presentan en el eje Y del modelo analítico tridimensional

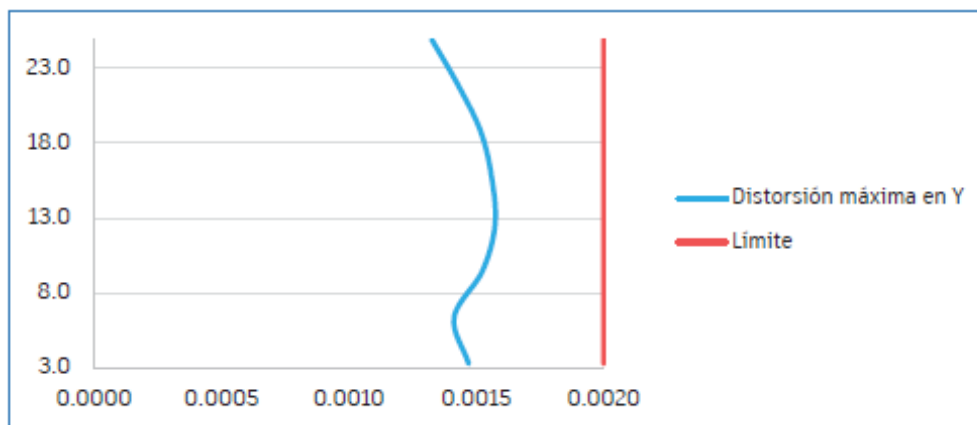


Fig. 33. Gráfica de distorsión máxima para limitación de daños en dirección Y.

Case	Mode	Periodo (s)	Sum UX	Sum UY	SUM RZ
Modal	1	0.678	0.0041	0.4656	0.0396
Modal	2	0.465	0.0924	0.4939	0.3203
Modal	3	0.385	0.3412	0.5043	0.4779
Modal	4	0.180	0.4418	0.608	0.4798
Modal	5	0.152	0.5212	0.6419	0.5020
Modal	6	0.090	0.5233	0.6667	0.5254
Modal	7	0.082	0.5242	0.7391	0.5460
Modal	8	0.061	0.5528	0.7398	0.6189
Modal	9	0.058	0.7001	0.7403	0.6206
Modal	10	0.057	0.7022	0.8065	0.6242
Modal	11	0.048	0.7167	0.8110	0.7306
Modal	12	0.043	0.7190	0.8309	0.7485
Modal	13	0.042	0.7193	0.8542	0.7836
Modal	14	0.035	0.7275	0.8677	0.7962
Modal	15	0.034	0.7887	0.8770	0.7991
Modal	16	0.033	0.8343	0.8840	0.8043
Modal	17	0.028	0.8344	0.8847	0.8644
Modal	18	0.026	0.8557	0.8885	0.8644
Modal	19	0.024	0.8616	0.9056	0.8645
Modal	20	0.019	0.8616	0.9057	0.8937
Modal	21	0.017	0.8939	0.9058	0.8941
Modal	22	0.009	0.8992	0.9299	0.8946
Modal	23	0.008	0.9281	0.9308	0.9035
Modal	24	0.007	0.9337	0.9383	0.9494

Tabla 14. Modos de vibración que se presentan en el modelo analítico tridimensional

## Diagramas de deformaciones.

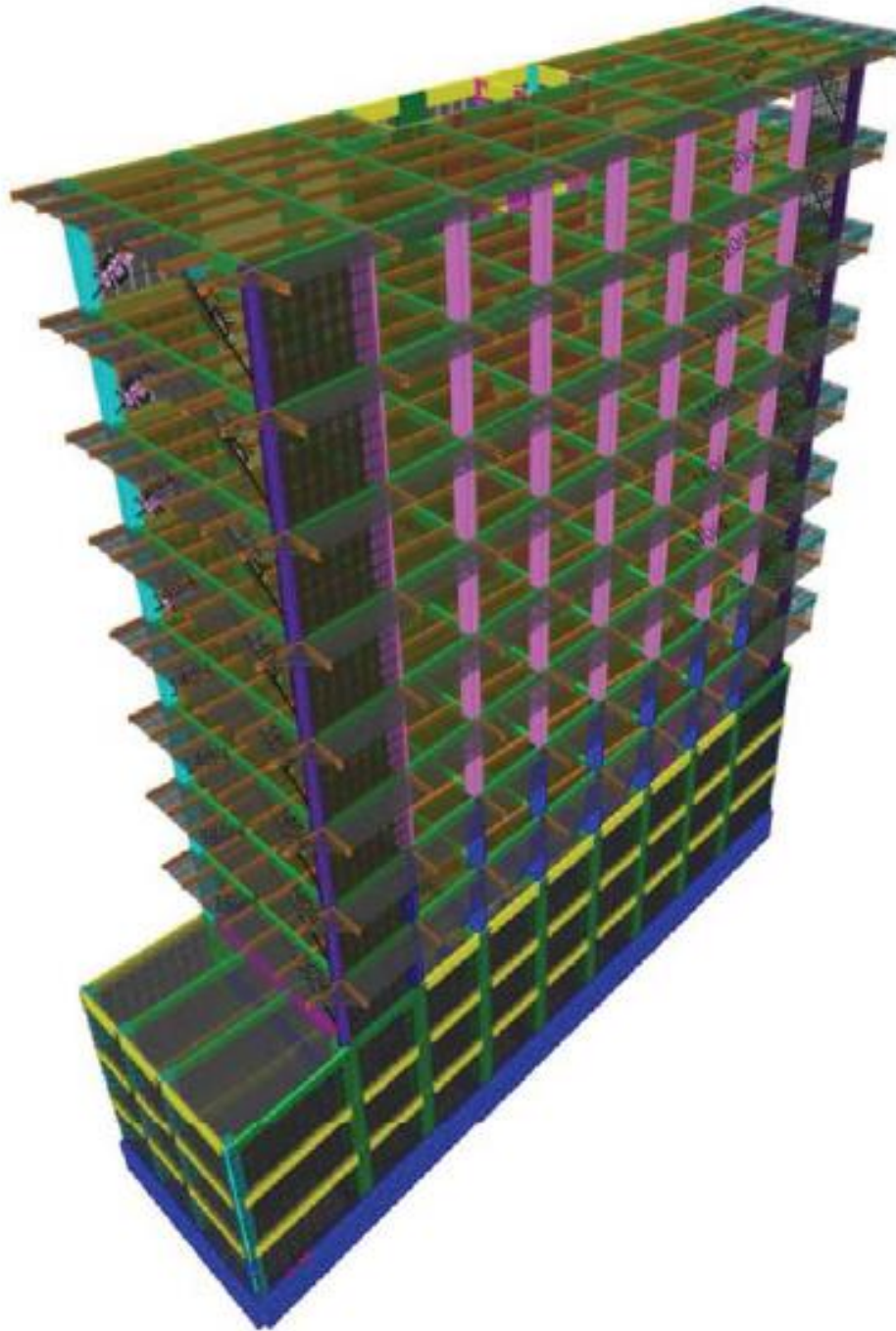


Fig. 34. Modelo analítico tridimensional, ETABS v.19.1.0

**8.45 mm < 26.87 mm ∴ se admite**

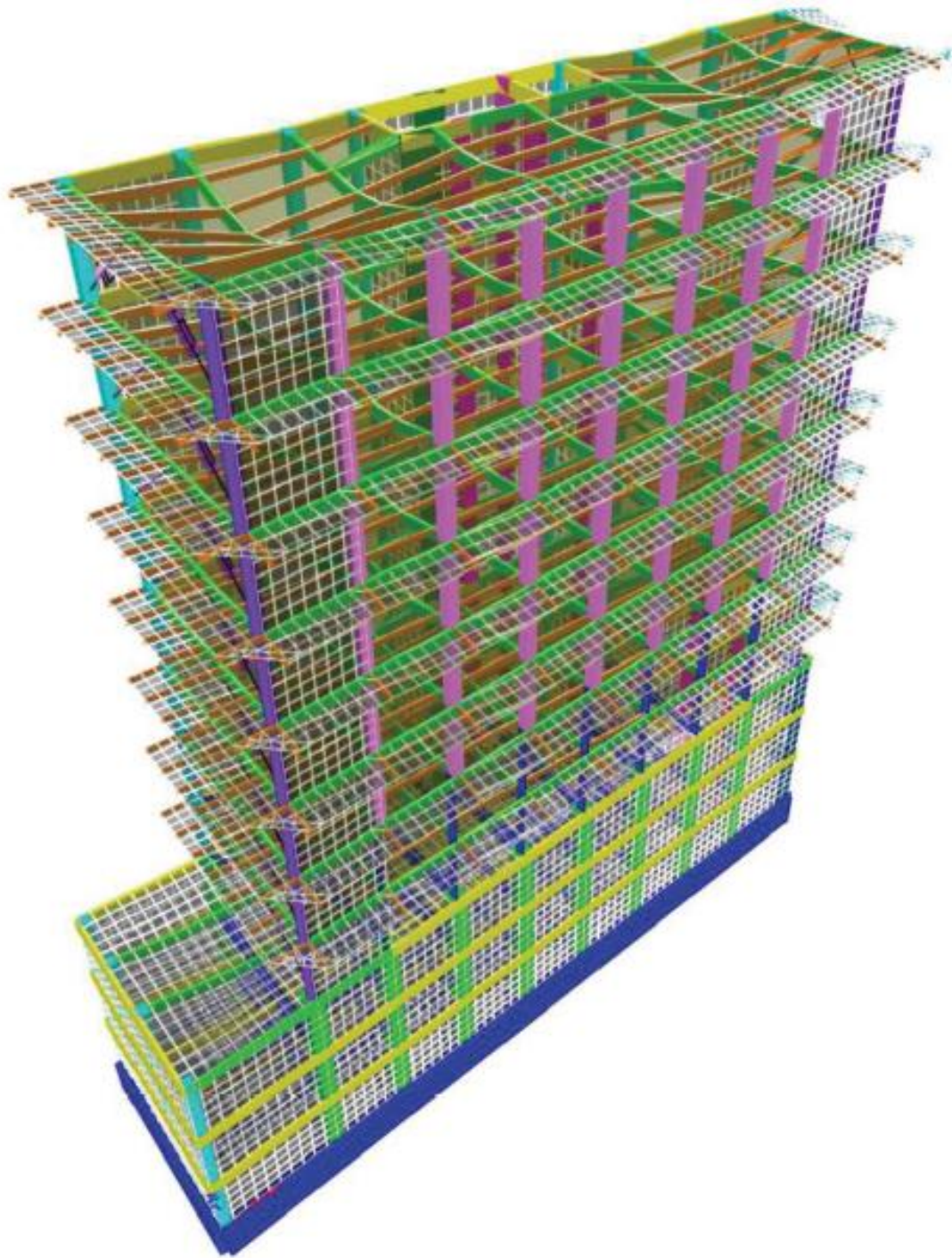


Fig. 35. Modelo analítico tridimensional con deformación gravitacional



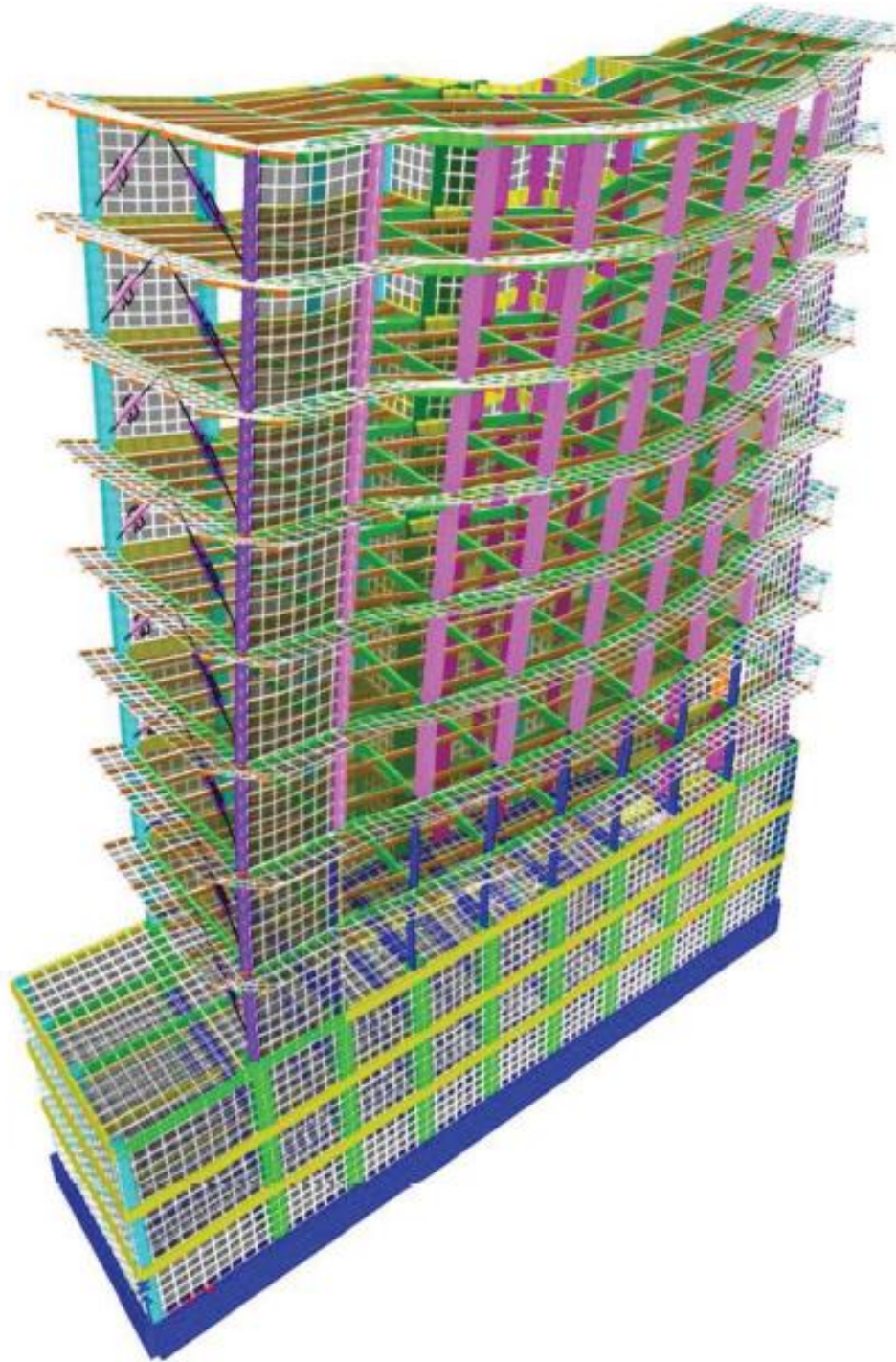


Fig. 36. Modelo analítico tridimensional con deformación por sismo en dirección X= 34.82 mm (afectado por Q=2 y R=1.4)

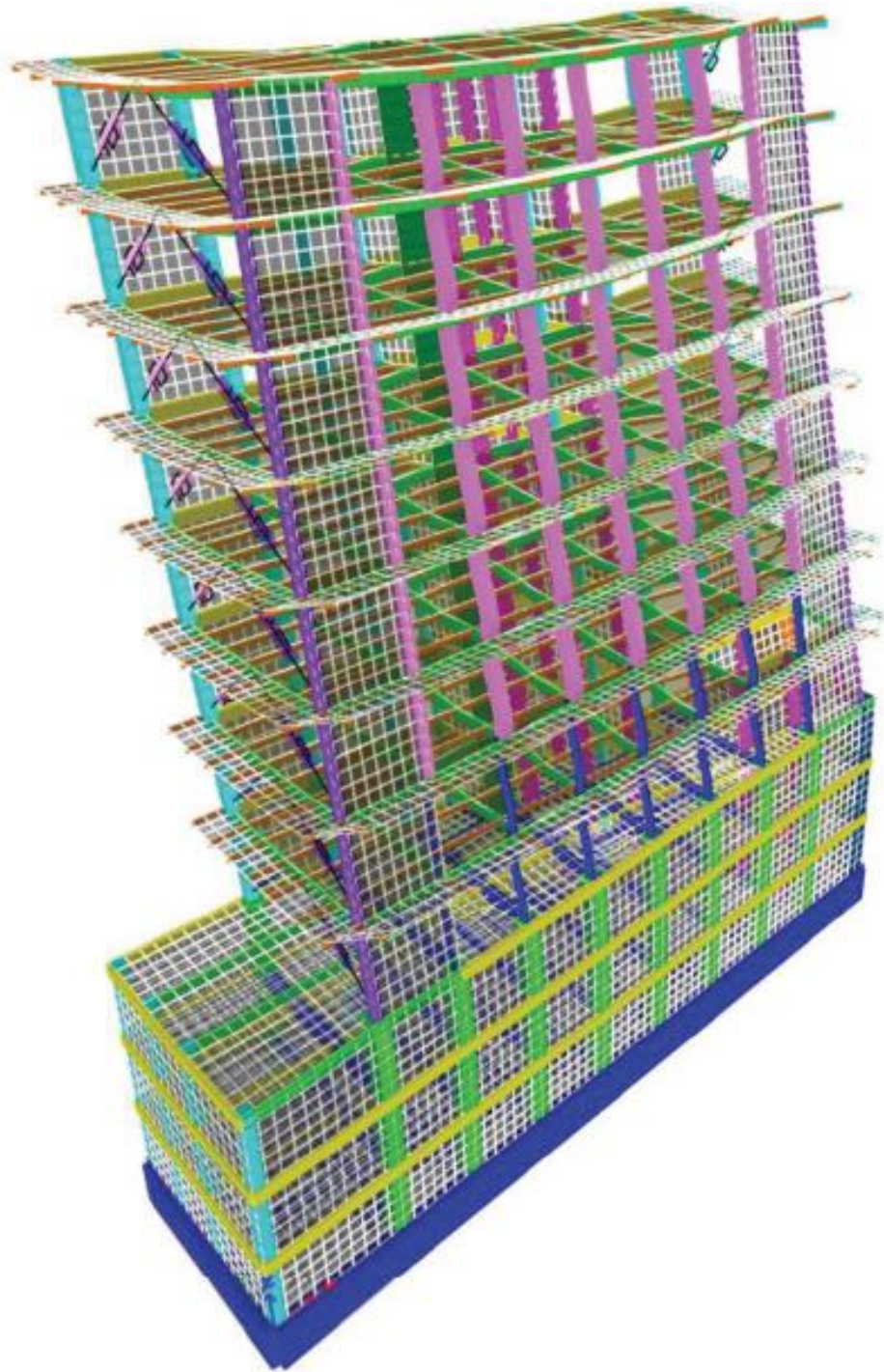


Fig. 37. Modelo analítico tridimensional con deformación por sismo en dirección  $Y = 134.15$  mm (afectado por Q y R)



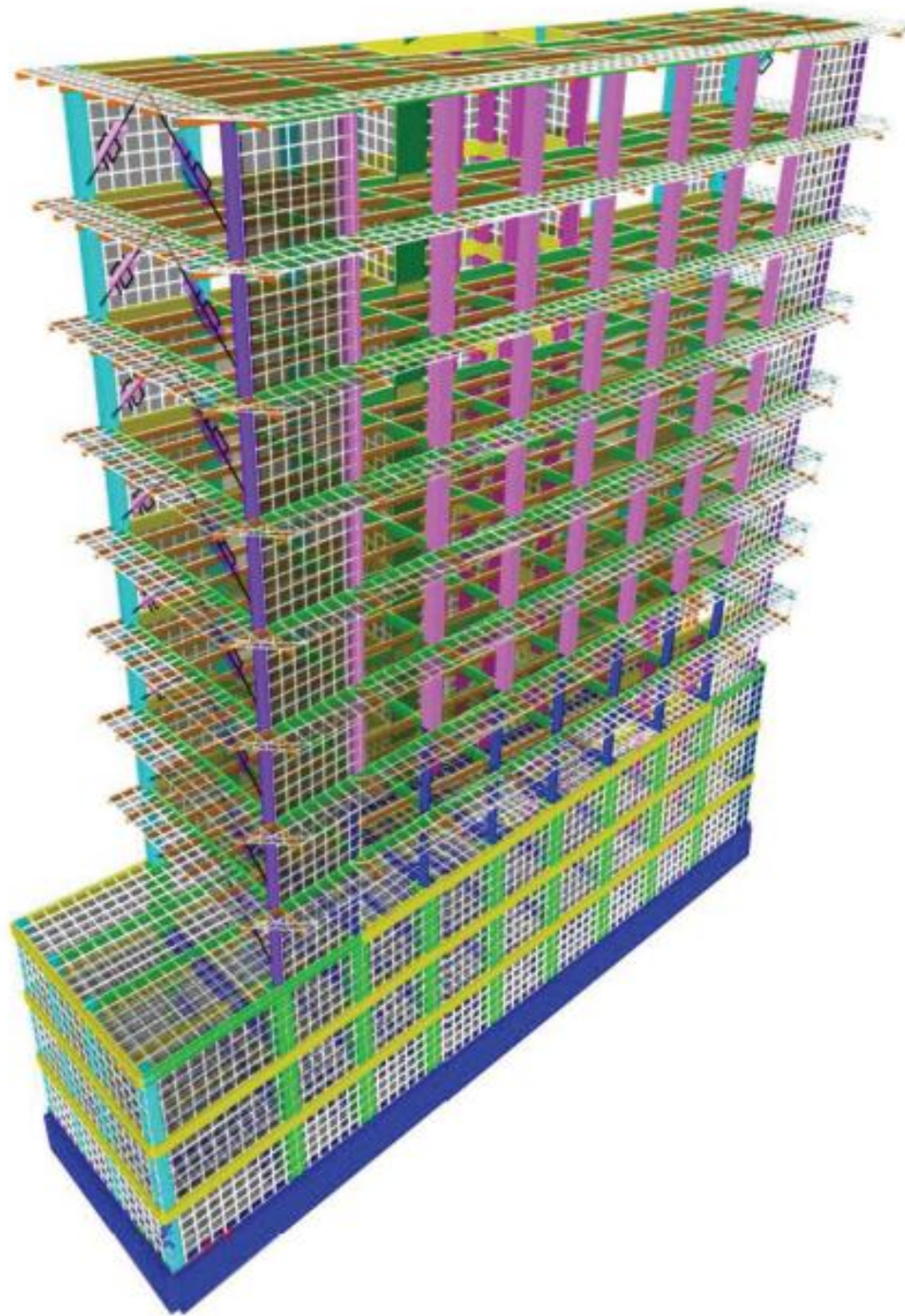


Fig. 38. Modelo analítico tridimensional presentando el primer modo de vibración.

$$T_x = 0.678 \text{ s}$$



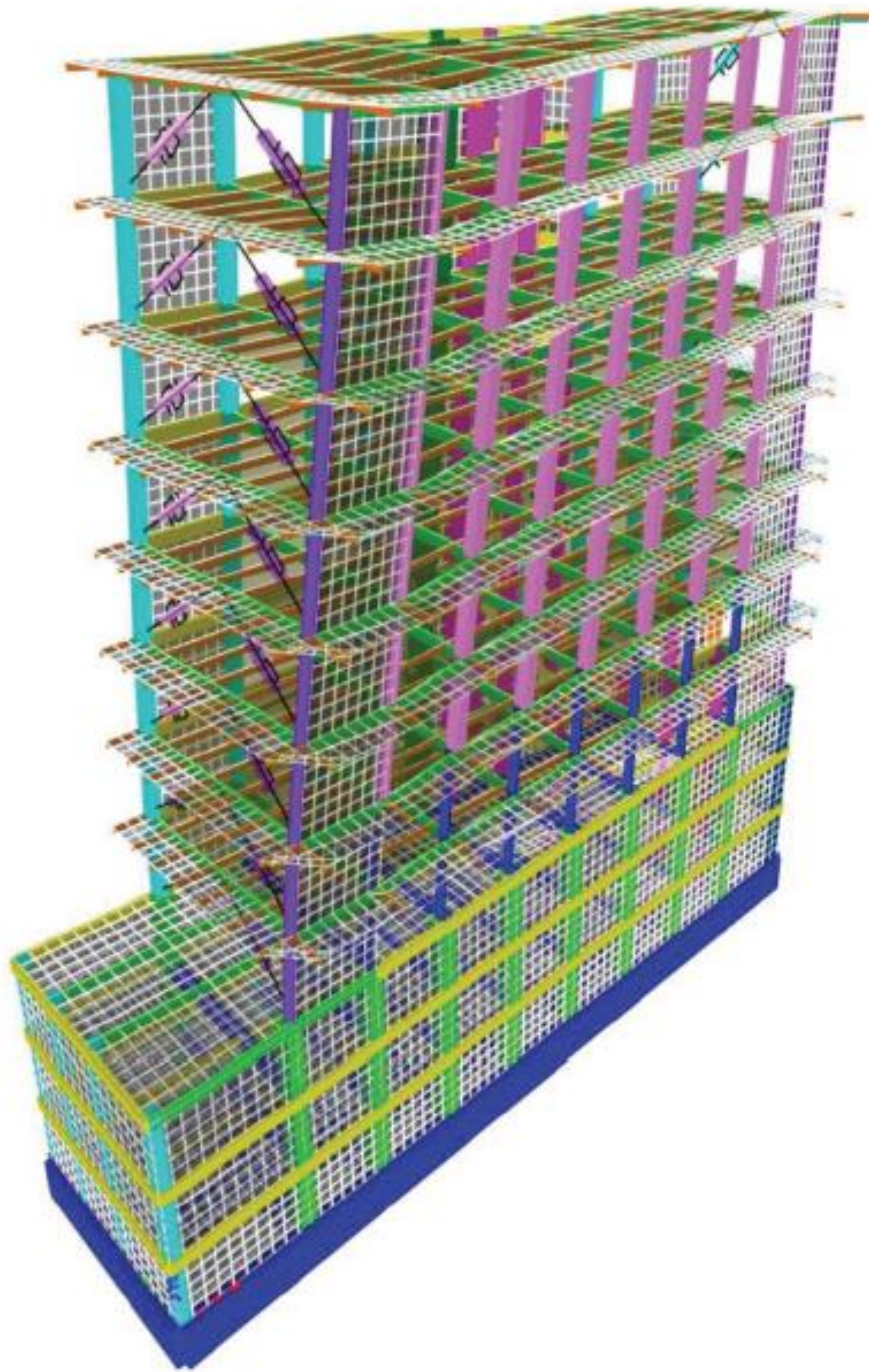


Fig. 39. Modelo analítico tridimensional presentando el segundo modo de vibración.

**$T_y = 0.465$  s**

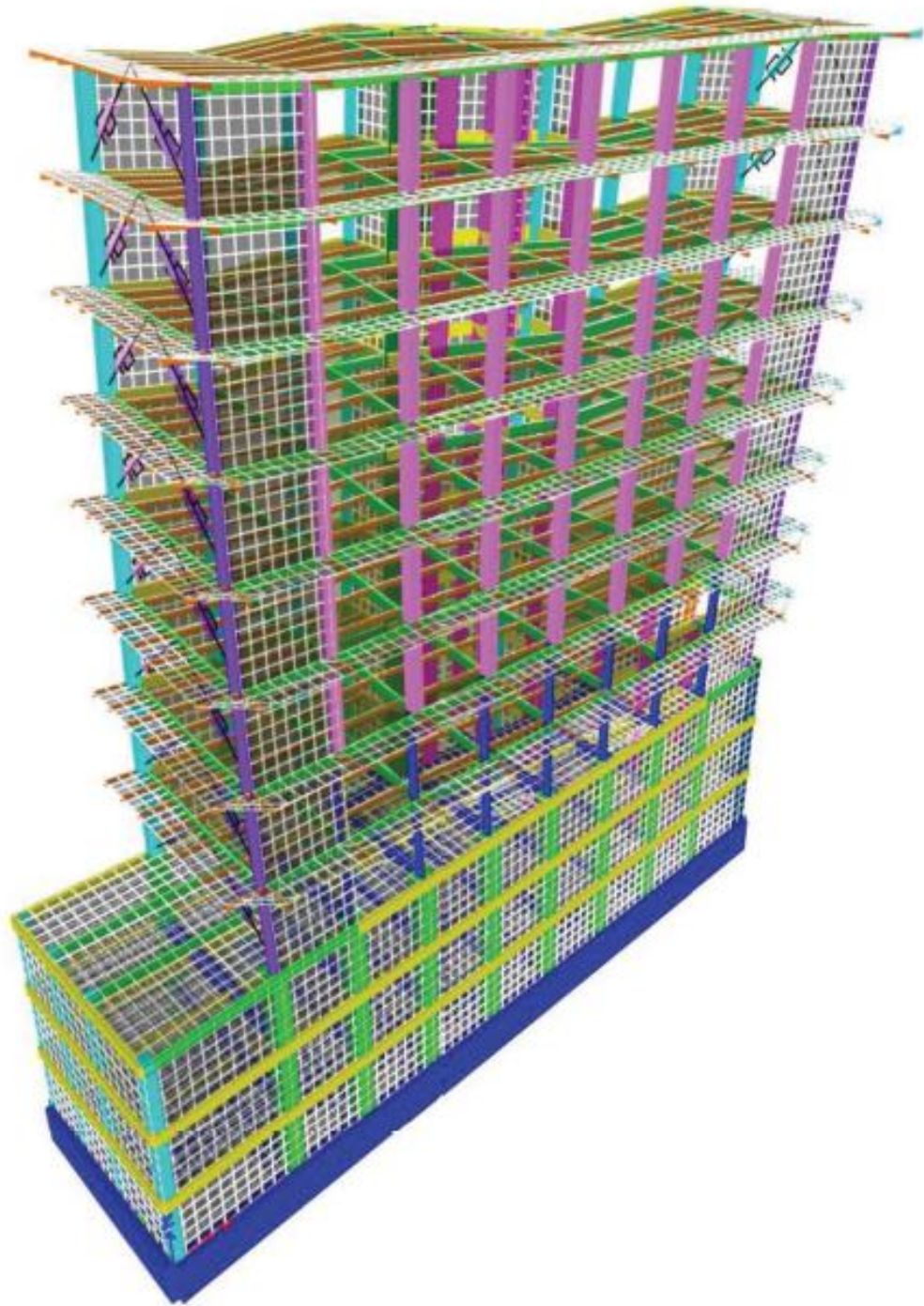


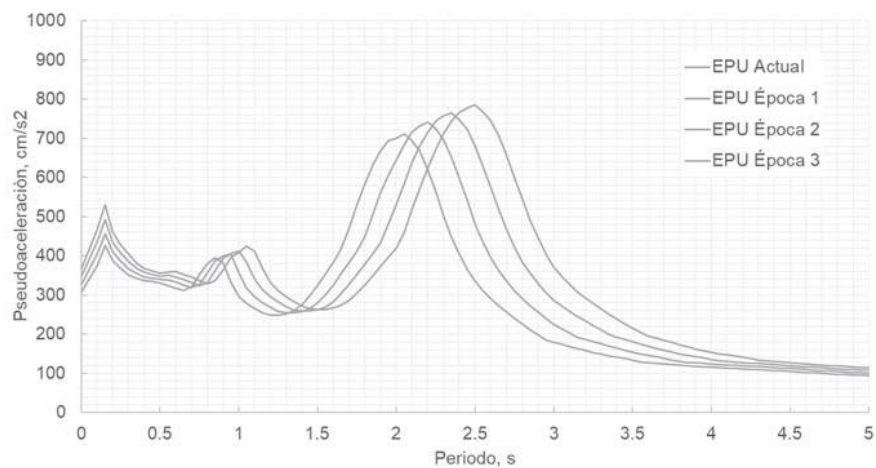
Fig. 40. Modelo analítico tridimensional presentando el tercer modo de vibración.

**Rz = 0.385 s**

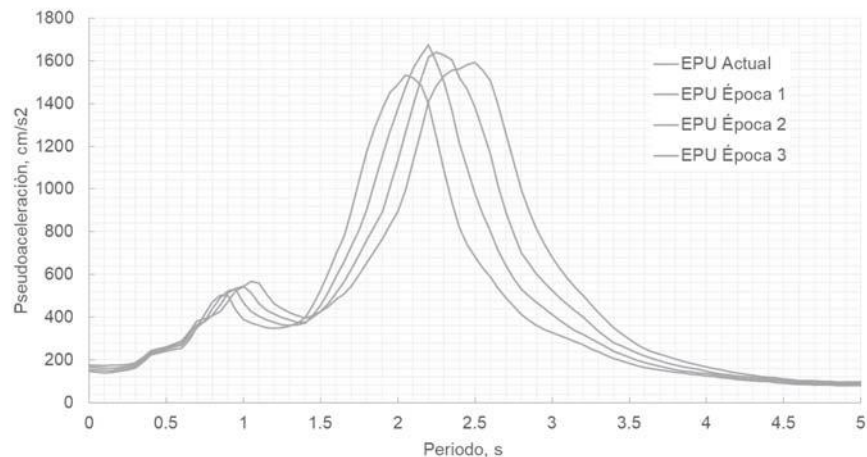
## Registros sísmicos.

Una vez que se cuenta con los espectros de referencia, la herramienta SASID (SASID, 2020) brinda los espectros de peligro uniforme y los acelerogramas sintéticos con los cuales se realiza el Análisis Dinámico No Lineal Paso a Paso.

Los espectros de peligro uniforme (EPU) se muestran en la Figura 41. Se puede observar que se clasifican de acuerdo con la fuente sísmica: subducción y profundidad intermedia. Para cada fuente sísmica se tienen cuatro espectros de peligro uniforme de cuatro diferentes épocas, esto debido a la rigidización del suelo de la Ciudad de México como consecuencia de la extracción de agua subterránea.



a) Profundidad intermedia





b) Subducción

Fig. 41. Espectros de peligro uniforme para ambas fuentes.

Los acelerogramas sintéticos al igual que los EPU están clasificados de acuerdo con la fuente sísmica, para los acelerogramas de subducción se tienen 8 parejas, mientras que para los acelerogramas de profundidad intermedia se tienen 4 parejas. A los acelerogramas sintéticos, se les realizó primero una corrección de línea base normal. Después un filtro tipo pasa-banda para un intervalo de frecuencias entre 0.1 y 20 Hz (considerando un número de polos igual a 8). Y, finalmente, se aplica un táper cosenoidal del 5% a la señal. En la Tabla 15 se muestra la información de los acelerogramas sintéticos.

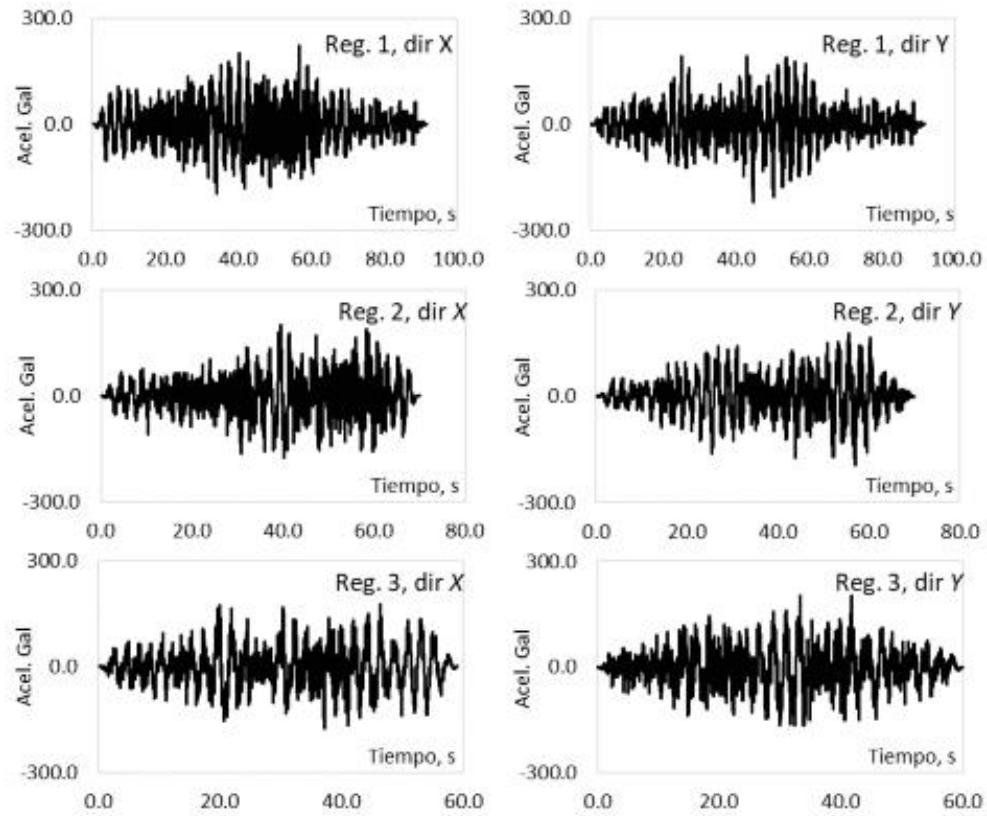
Tabla 15. Acelerogramas sintéticos, SASID (2020)

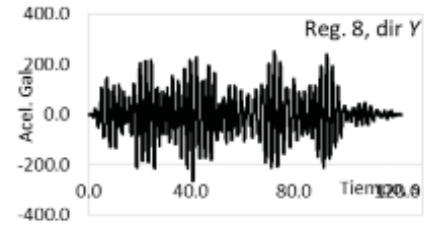
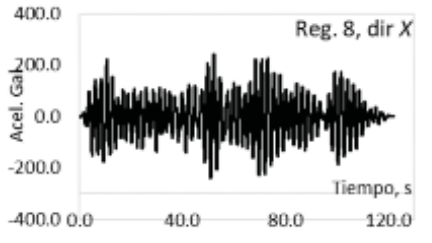
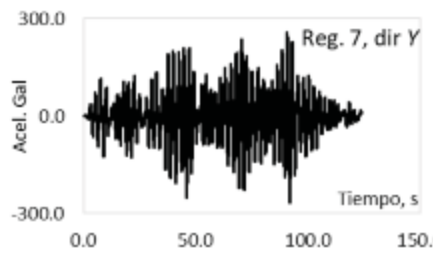
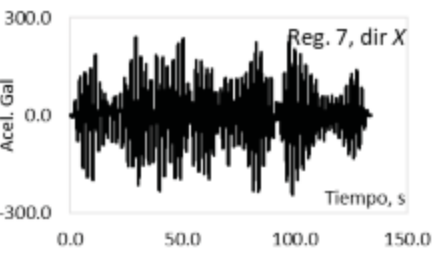
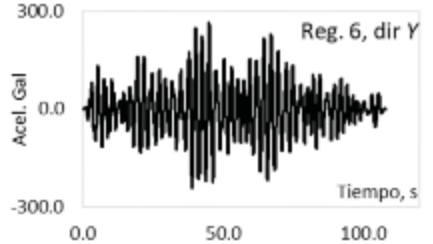
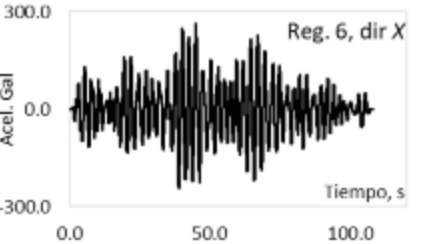
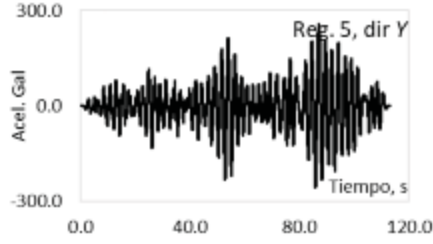
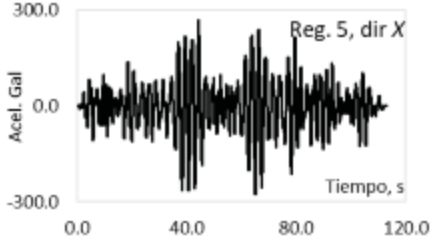
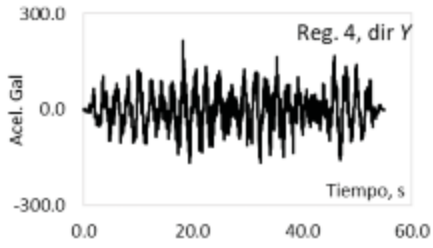
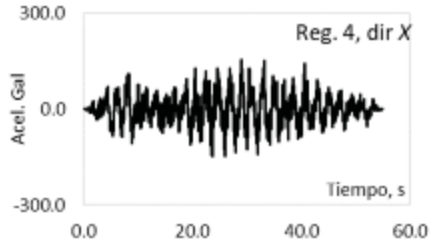
<b>Acelerogramas</b>	<b>Fuente</b>	<b># de puntos</b>	<b><math>\Delta t</math>, s</b>
1	Profundidad intermedia	4,574	0.02
2	Profundidad intermedia	3,501	0.02
3	Profundidad intermedia	2,951	0.02
4	Profundidad intermedia	2,750	0.02
5	Subducción	5,651	0.02
6	Subducción	5,401	0.02
7	Subducción	6,701	0.02
8	Subducción	6,101	0.02
9	Subducción	5,652	0.02
10	Subducción	5,251	0.02
11	Subducción	5,351	0.02
12	Subducción	5,251	0.02

Mientras que la tabla muestra los registros seleccionados, la siguiente figura muestra sus espectros de pseudo-aceleración en línea continua color gris para cada fuente sísmica. El promedio de ellos se presenta en línea negra.

De acuerdo con los requerimientos de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (NTCDS, 2020), el promedio de los espectros de pseudo-aceleración, deben ser similares a la envolvente de los cuatro espectros de peligro uniforme (EPU) para un intervalo de 0.1 y 1.5 veces el periodo de vibrar de la estructura.

Posteriormente se muestra la comparación entre los EPU de cada época, el promedio de los espectros de pseudo-aceleración con un factor de escala de 1.15 y la envolvente de cada EPU, se puede observar que para el intervalo de interés los espectros son similares.





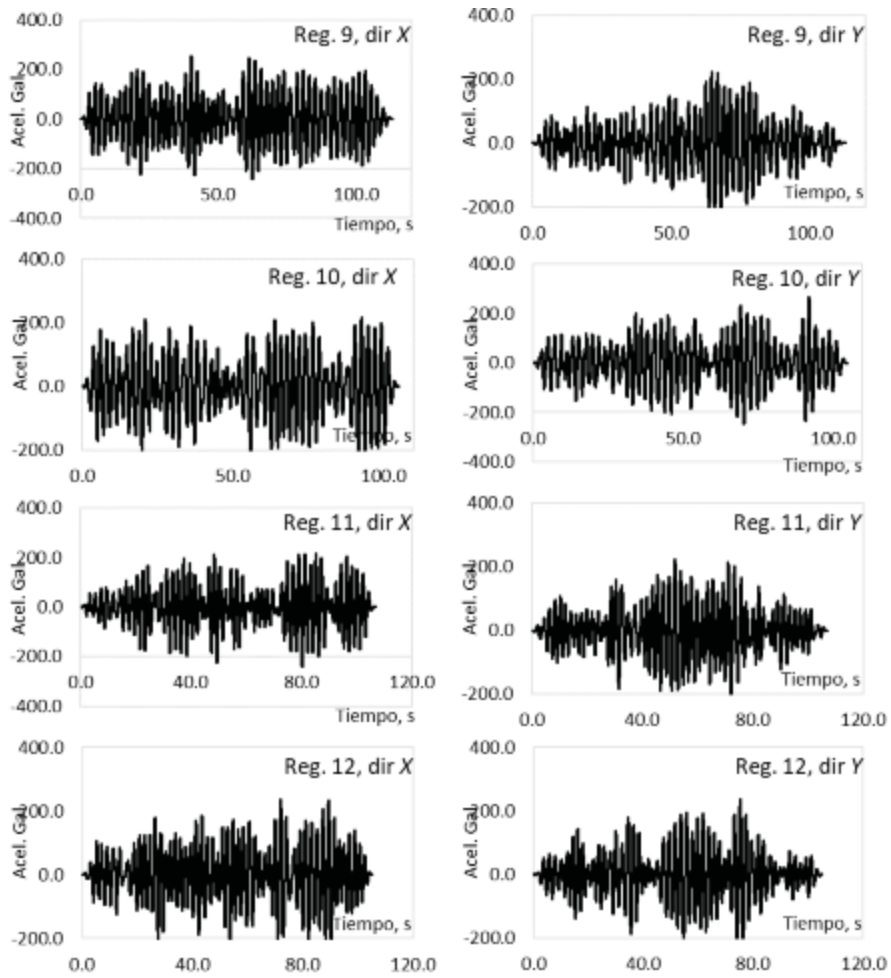
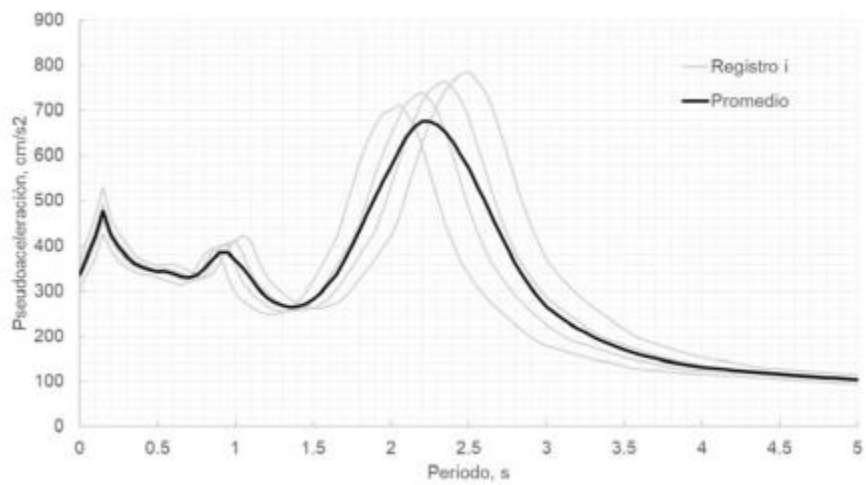
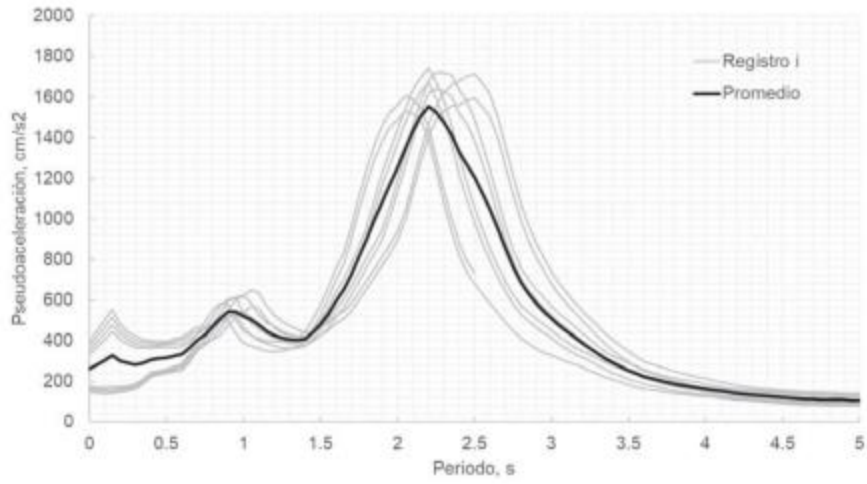


Fig. 42. Acelerogramas sintéticos (SASID, 2020)

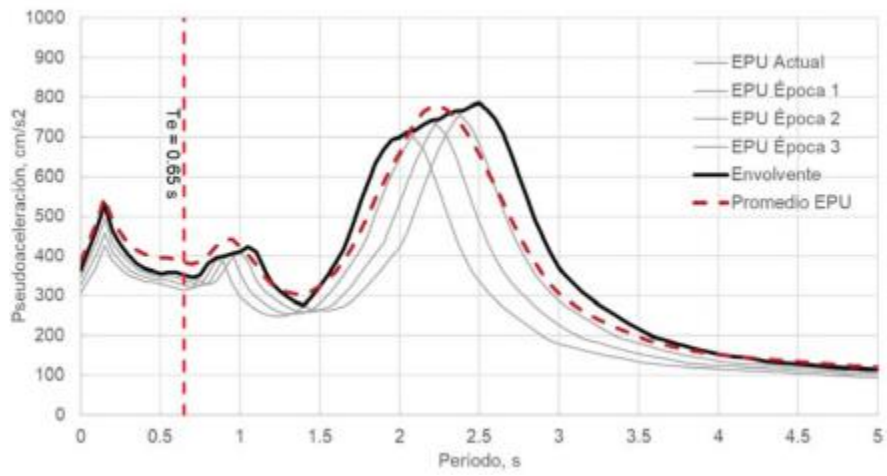


a) Profundidad intermedia

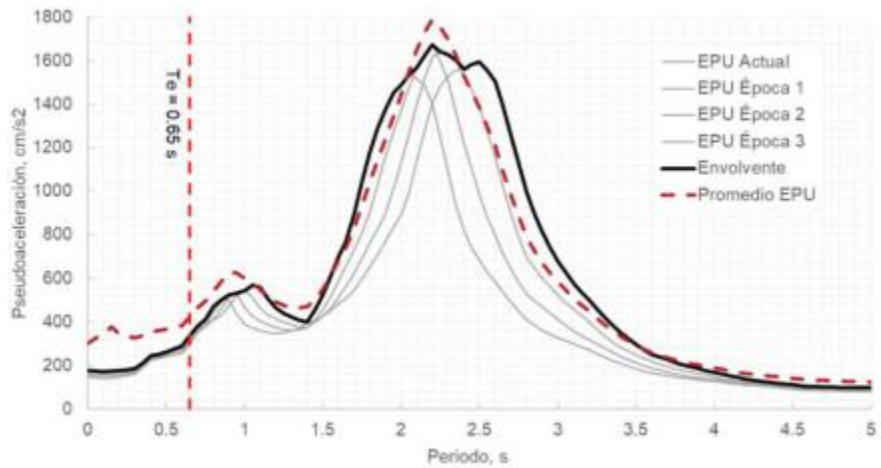


b) Subducción

Fig. 43. Espectros de pseudo-aceleración para acelerogramas sintéticos.



a) Profundidad intermedia





b) Subducción

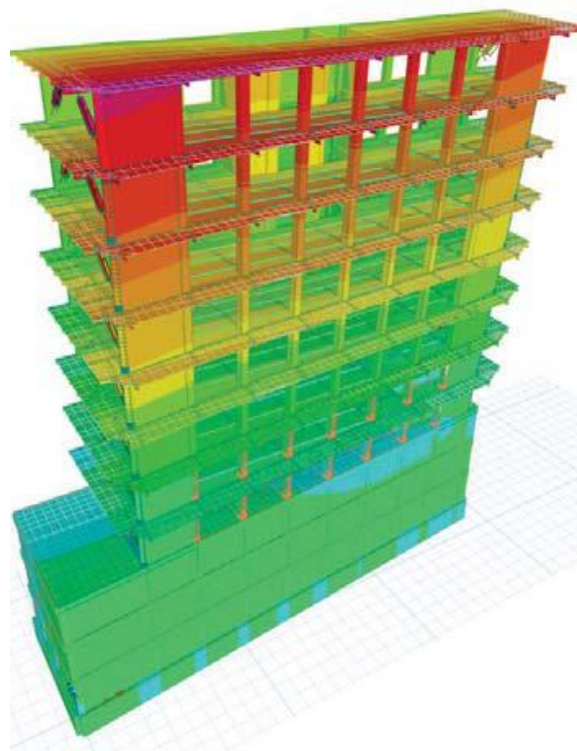
Fig. 44. Comparación de EPU y espectros de pseudo-aceleración promedio.

## Resultados

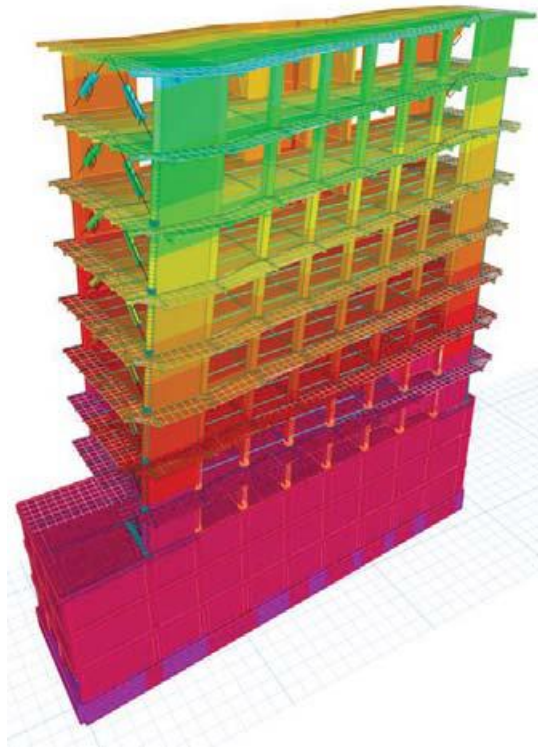
Los resultados mostrados en esta sección fueron obtenidos al realizar el Análisis Dinámico No Lineal Paso a Paso para los acelerogramas sintéticos obtenidos de SASID (2020).

### *Periodos*

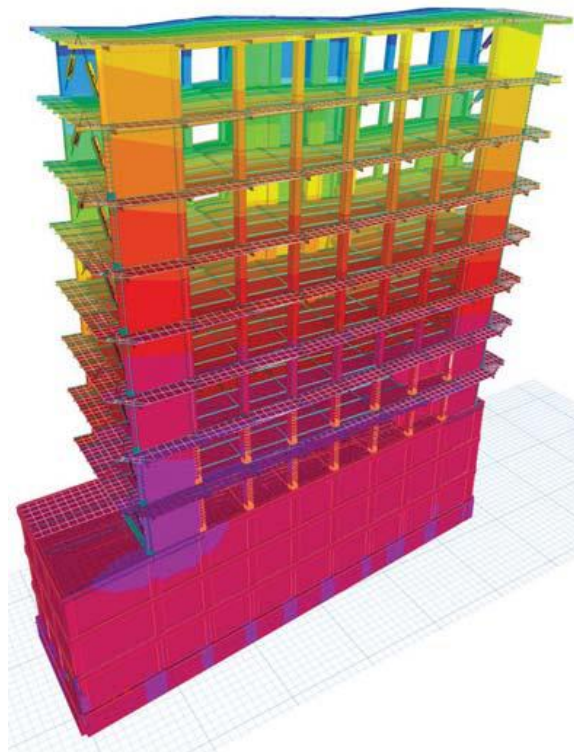
Del modelo se obtuvieron los periodos de vibrar del edificio. La Tabla 14 muestra los valores de los primeros periodos de vibrar de la estructura. El primero y tercer modo de vibrar de la estructura son de traslación mientras que el segundo de rotación. En la Figura 45 se muestran los primeros tres modos de vibrar de la estructura.



a) Primer modo "Y",  $T_e = 0.66s$



b) Segundo modo "Z",  $T_e = 0.46$  s



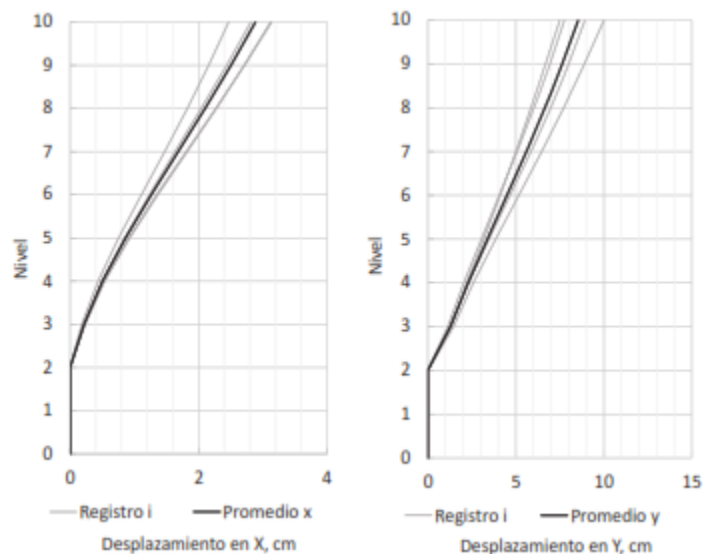
c) Segundo modo "Torsión",  $T_e = 0.37$  s

Fig. 45. Modos de vibrar de la estructura, ETABS v.19.1.0

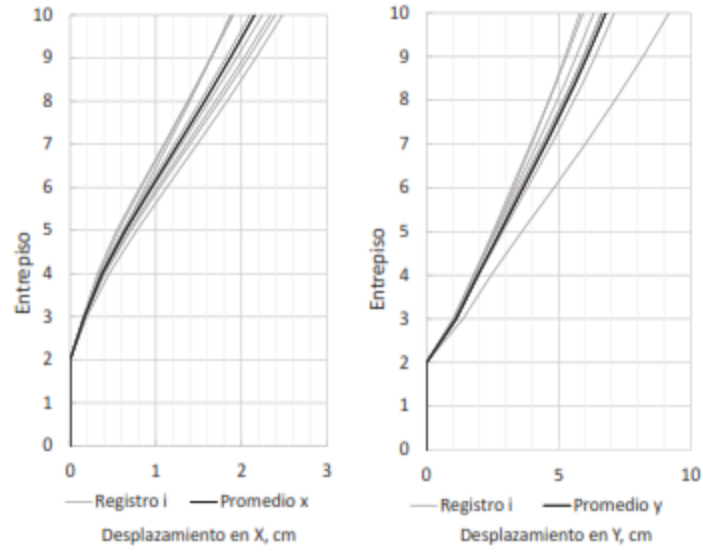
## Desplazamientos y distorsiones de entrepiso

La Figura 46 muestra las demandas máximas absolutas de desplazamientos laterales en la altura del edificio, obtenidas del Análisis Dinámico No Lineal Paso a Paso para cada fuente sísmica considerada. Para sismos de profundidad intermedia, se logra apreciar que el promedio de los desplazamientos máximos tiene un valor de 0.03 m y de 0.09 m en la azotea, en los sentidos “X” y “Y”, respectivamente. Por su parte, para los sismos de subducción, se tienen desplazamientos promedio máximos de 0.02 m y de 0.07 m en la azotea, en los sentidos “X” y “Y”, respectivamente.

La Figura 44 muestra los perfiles de demandas de distorsión máxima de entrepiso, obtenidas de los análisis. Se puede apreciar que el promedio de las demandas de distorsión de entrepiso es bajo, con valores inferiores a 0.4% en dirección Y e incluso menores en dirección X. Adicionalmente, se muestra el límite de distorsión máxima permitida, el cual no es superado en ningún momento.

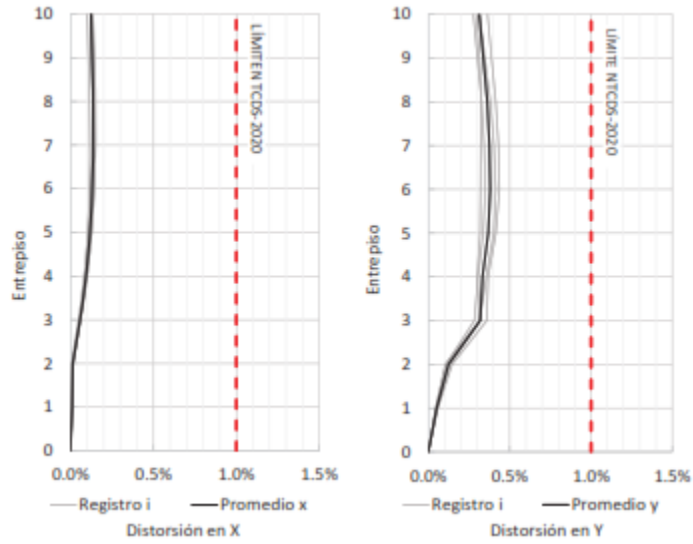


a) Profundidad intermedia

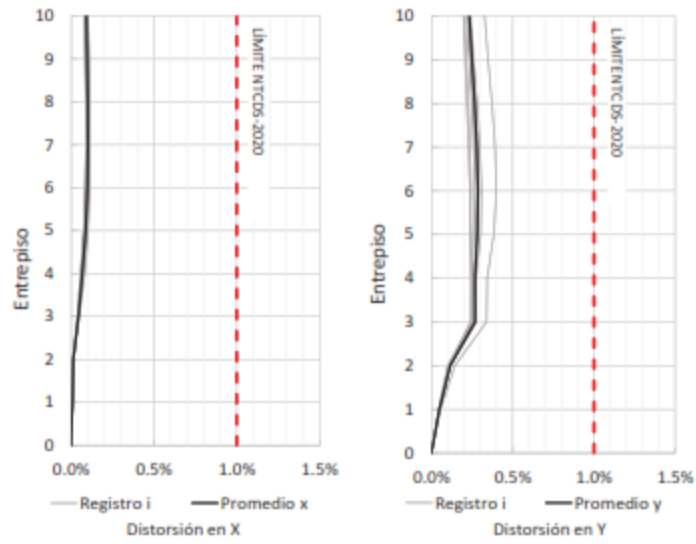


b) Subducción

Fig. 46. Demandas de desplazamientos para el edificio de 8 niveles y 3 sótanos.



a) Profundidad intermedia

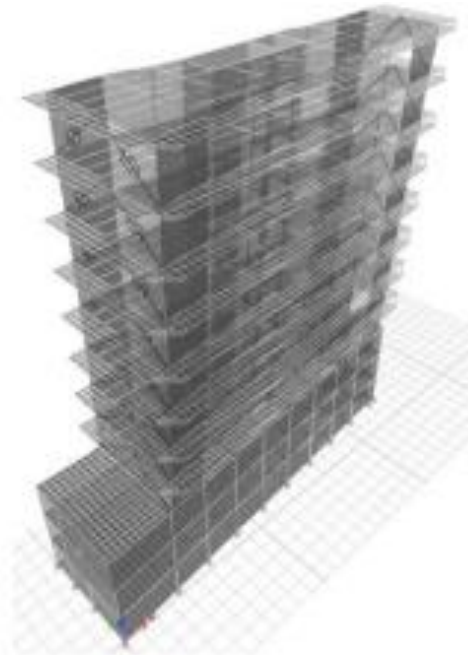


b) Subducción

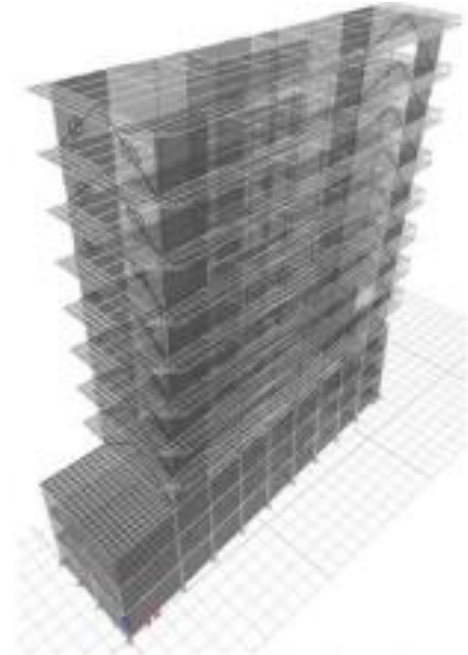
Fig. 47. Demandas límite de desplazamientos para el edificio de 8 niveles y 3 sótanos.

### *Estados finales del Análisis Dinámico No Lineal Paso a Paso*

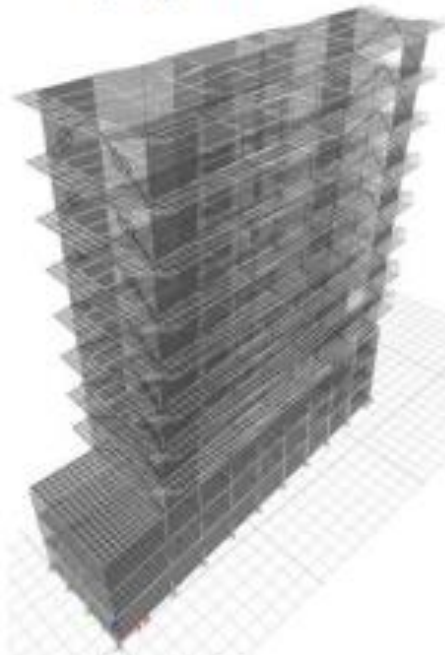
En la Figura 48 se muestran los estados finales de la estructura para cada registro sísmico simulado, se puede observar que no se presentan daños en los elementos estructurales.



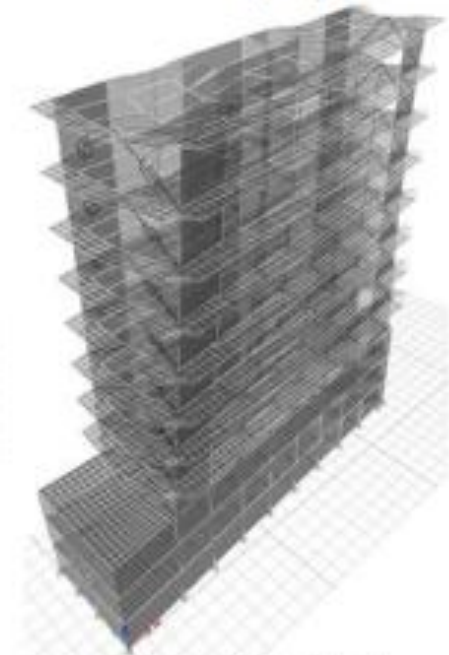
a) Registro 1



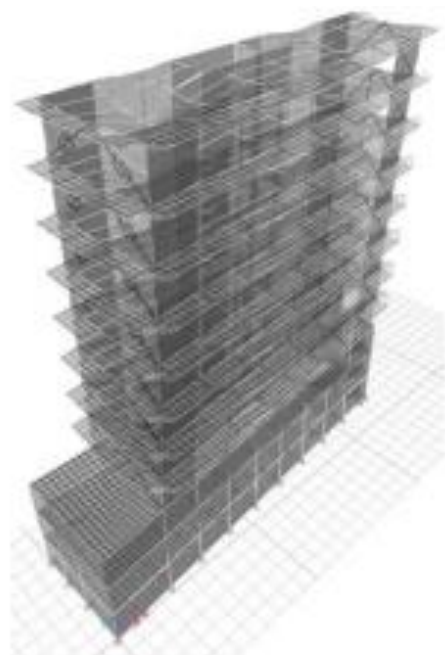
b) Registro 2



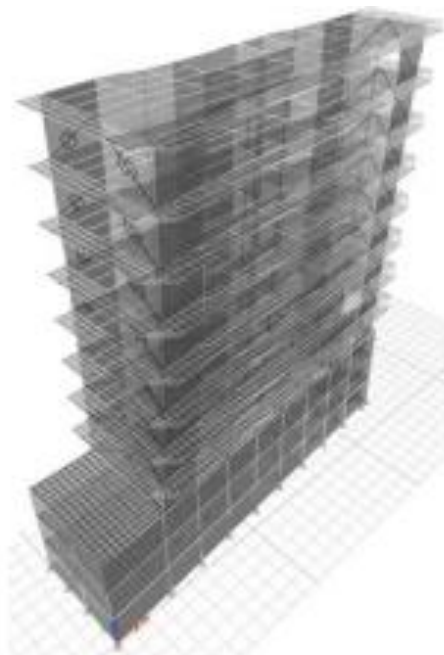
c) Registro 3



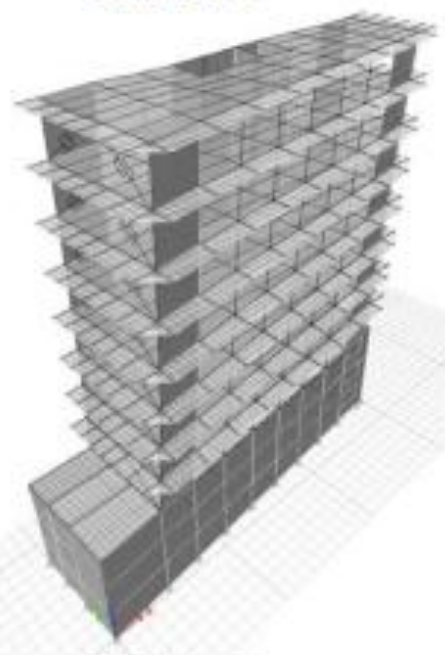
d) Registro 4



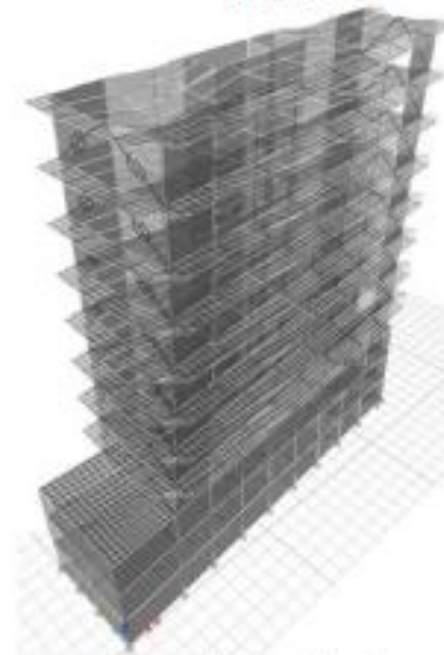
e) Registro 5



f) Registro 6

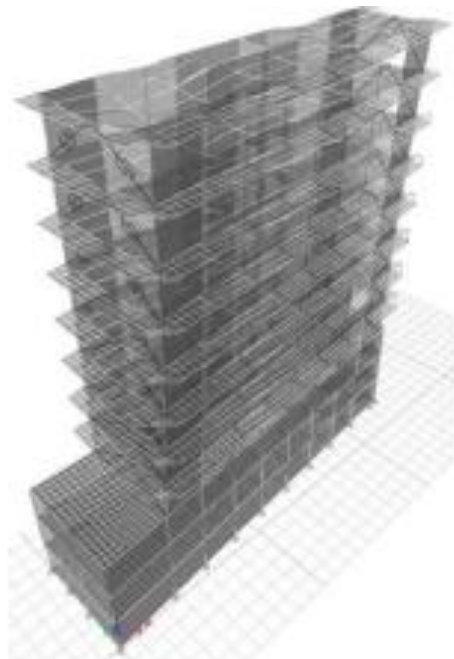


g) Registro 7

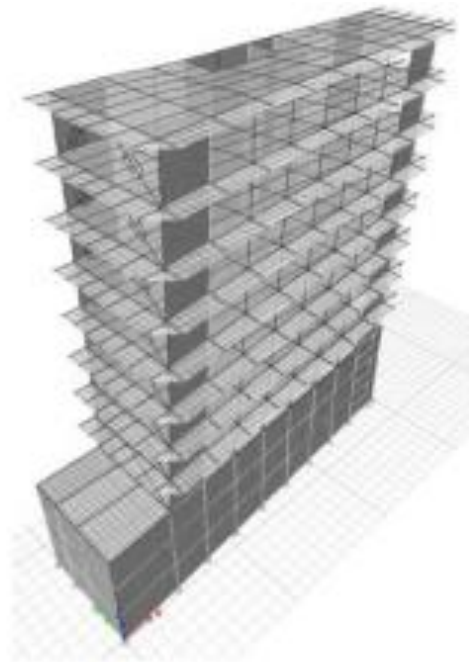


h) Registro 8

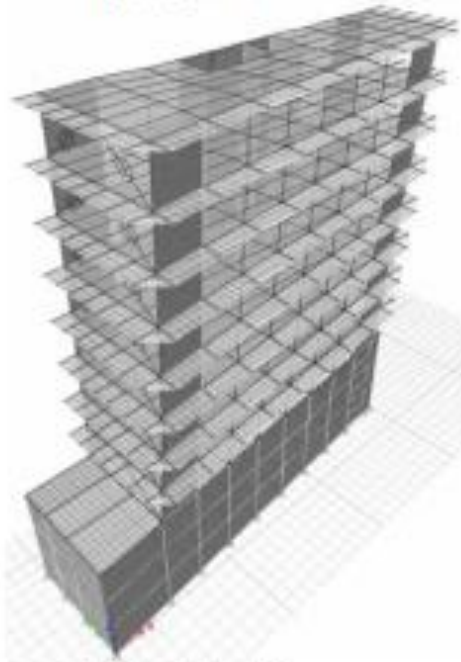




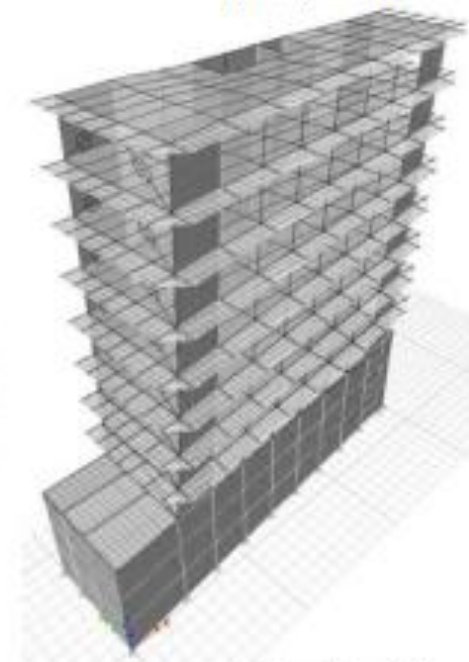
i) Registro 9



i) Registro 10



k) Registro 11



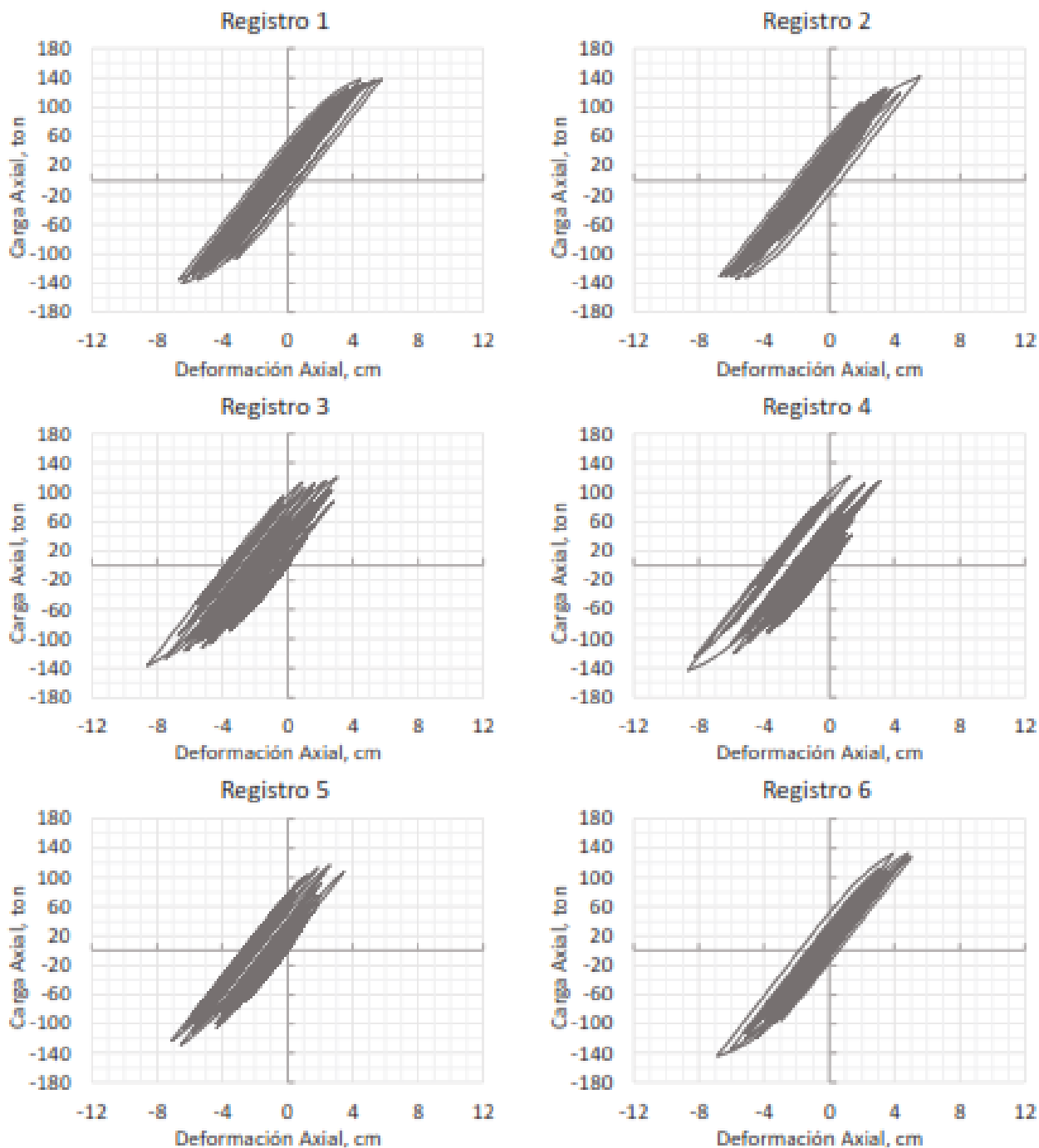
l) Registro 12

Fig. 48. Estado final de la estructura para cada registro sísmico seleccionado

*Curvas de histéresis de los disipadores de energía*



En la Figura 49 se muestran las curvas de histéresis para el dissipador tipo 14/04 ubicado en el eje B entre nivel 4 y 5 (Link K2).



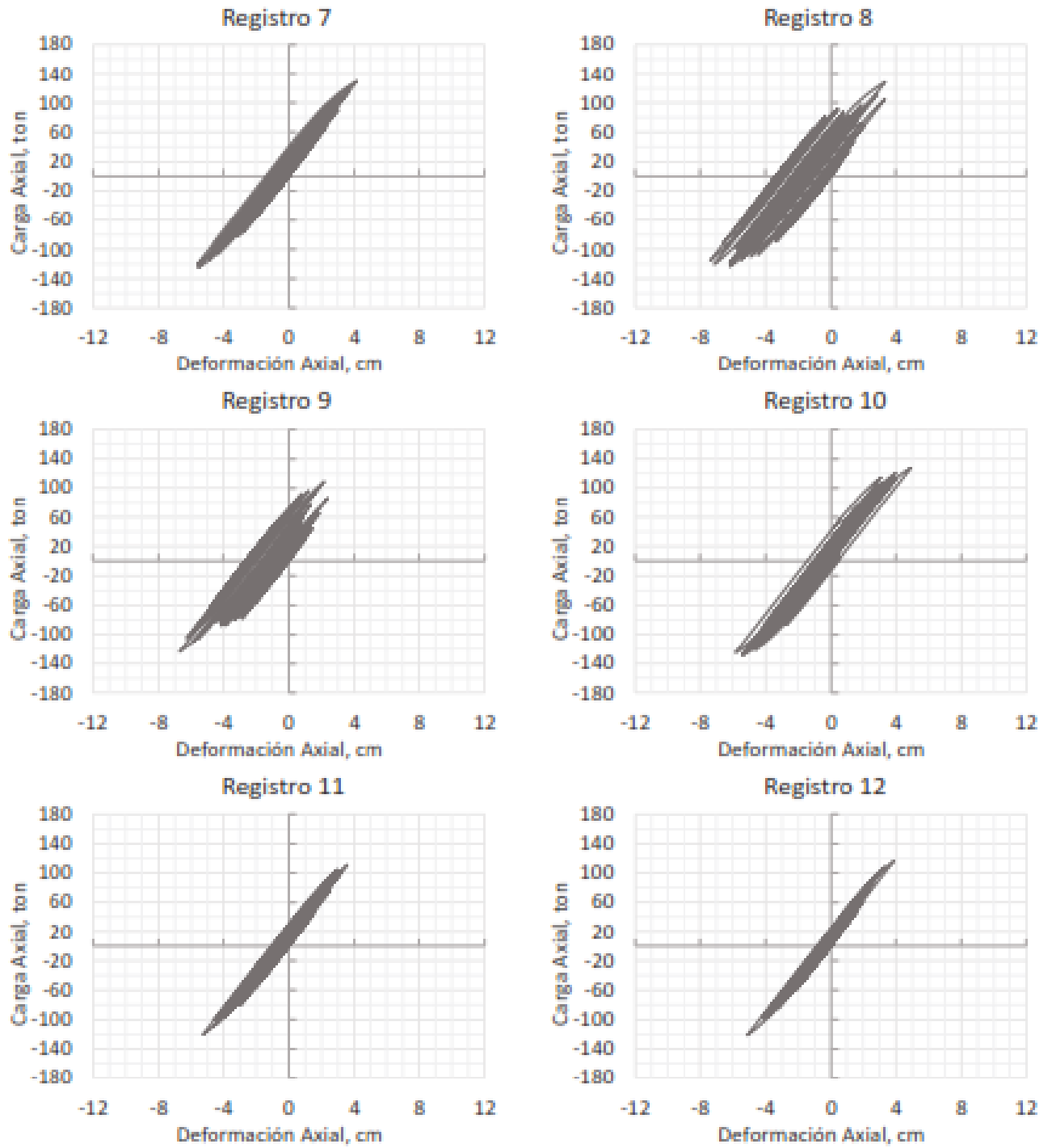


Fig. 49. Curvas de histéresis de los disipadores histéreticos

## Conclusiones

Se ha examinado detalladamente la ecuación de equilibrio dinámico y la respuesta de sistemas de un grado de libertad, junto con el concepto de grados de libertad en estructuras. Se han presentado casos ilustrativos en los que ciertos desplazamientos son eliminados debido a la rigidez de los elementos estructurales, demostrando que una estructura puede tener infinitos grados de libertad. Además, se ha abordado la vibración libre sin amortiguamiento, derivando una ecuación general para describir su respuesta, y se ha proporcionado un ejemplo numérico con una graficación correspondiente. En este contexto, se discuten las implicaciones del periodo de vibración en función de la rigidez del sistema, lo que resulta esencial para el análisis y comprensión del comportamiento dinámico de las estructuras en diversas condiciones.

El análisis de la vibración libre con y sin amortiguamiento proporciona una comprensión profunda del comportamiento dinámico de sistemas estructurales. Se ha examinado la introducción de una fuerza de amortiguamiento viscoso en la ecuación de equilibrio dinámico, que actúa en sentido contrario al desplazamiento de la estructura.

La derivación de la ecuación de equilibrio dinámico para sistemas amortiguados ha permitido explorar diferentes casos, desde el amortiguamiento crítico hasta las estructuras sub-amortiguadas. Se han propuesto soluciones para la respuesta del sistema en función del porcentaje de amortiguamiento crítico y se han proporcionado ejemplos prácticos para ilustrar estos conceptos.

Además, se ha presentado el concepto de decremento logarítmico como una medida para estimar los valores de amortiguamiento, lo que ofrece una herramienta valiosa para analizar y diseñar sistemas estructurales sujetos a vibración. Este análisis es fundamental para comprender y predecir el comportamiento dinámico de las estructuras en diversas condiciones, lo que contribuye significativamente al campo de la ingeniería estructural y al diseño de sistemas eficientes.

Los sistemas de un grado de libertad (1GDL) presentan respuestas distintas ante excitaciones armónicas dependiendo de si están sujetos a amortiguamiento o no. En el caso de sistemas sin amortiguamiento, se observa que el fenómeno de resonancia ocurre cuando la relación de frecuencias entre la excitación y la frecuencia natural del sistema es igual a la unidad, lo que provoca una vibración con la frecuencia de la excitación. Por otro lado, para sistemas con amortiguamiento,

la respuesta se ve afectada por el factor de amortiguamiento, lo que resulta en un desplazamiento máximo que puede ser calculado mediante una solución particular. Estas diferencias son evidenciadas y analizadas a través de ecuaciones y ejemplos numéricos, destacando la importancia del amortiguamiento en el comportamiento dinámico de los sistemas. Además, se subraya que el ángulo de fase entre la frecuencia del sistema y la de la excitación es crucial para comprender cómo interactúan y afectan la respuesta del sistema.

La amplificación dinámica es un fenómeno crucial en la respuesta de sistemas estructurales sujetos a excitaciones periódicas, tanto con amortiguamiento como sin él. Se observa que, para sistemas sin amortiguamiento, la respuesta está determinada por la relación de frecuencias entre la excitación y la frecuencia natural del sistema, lo que resulta en un desplazamiento máximo cuando estas frecuencias son iguales. Por otro lado, en sistemas con amortiguamiento, la amplificación dinámica se ve influenciada por el factor de amortiguamiento, donde se destaca que la respuesta máxima se produce cuando la estructura y la excitación están en fase. Esta conclusión se apoya en análisis teóricos y ejemplos numéricos que ilustran claramente cómo el amortiguamiento y la relación de frecuencias afectan la respuesta dinámica de los sistemas estructurales. Además, se muestra que el factor de amplificación dinámica es inversamente proporcional al factor de amortiguamiento, lo que resalta la importancia de considerar el efecto del amortiguamiento en el diseño y análisis de estructuras para asegurar su comportamiento óptimo bajo cargas cíclicas.

Se llevó a cabo una evaluación del comportamiento sísmico del edificio de 8 niveles y 3 sótanos con disipadores de energía tipo históricos situado en Navarrete No. 65, Colonia Algarín, Alcaldía Cuauhtémoc, C.P. 06880 Ciudad de México, México. De este análisis se deduce lo siguiente:

- Las demandas de deformación de entrepisos se encuentran por debajo del límite establecido por el reglamento, con valores para sismos de profundidad intermedia de 0.14% y 0.38% en las direcciones X y Y, respectivamente. En el caso de subducción, los valores son de 0.10% y 0.29% en las mismas direcciones. Con estas cifras de deformación de entrepisos, se anticipa que habrá daños mínimos en los elementos estructurales durante el sismo de diseño.

- Basándonos en los resultados expuestos, podemos inferir que la estructura exhibe un comportamiento satisfactorio ante el sismo de diseño.

## Referencias

**RCCDMX (2017).** Reglamento de Construcciones de la Ciudad de México. Gobierno de la Ciudad de México. México.

**NTCDS (2020).** Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo. Reglamento de Construcciones de la Ciudad de México. Gobierno de la Ciudad de México. México.

**NTCDEC (2021).** Normas Técnicas Complementarias para Diseño de Estructuras de Concreto. Reglamento de Construcciones de la Ciudad de México. Gobierno de la Ciudad de México. México.

**NTCDEA (2020).** Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Acero. Reglamento de Construcciones de la Ciudad de México. Gobierno de la Ciudad de México. México.

**ETABS (2020).** Integrated Building Design Software. Version 19.1.0. Computers and Structures Inc., California, EUA.

**SASID (2020).** Sistema de Acciones Sísmicas de Diseño. Versión 4.0.2.0. Gobierno de la Ciudad de México.

**Kramer, S. L. (1996).** Geotechnical Earthquake Engineering. Prentice Hall.

**Den Hartog, J. P. (1985).** "Mechanical Vibrations." Dover Publications.

**Chopra, A. K. (2012).** Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. Pearson.

**Chopra, A. K. (2017).** Earthquake Engineering with Computer Applications. Prentice Hall.

**Apuntes de la clase de Dinámica Estructural (2022).** Molina Elvira Marcos. Facultad de Estudios Superiores Aragón, UNAM.

