



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COLORACIONES TRANSITIVAS: HÉROES EN TORNEOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Matemático

PRESENTA:

Nicolás Benjamín Salas Hazan

DIRECTORA DE TESIS:

Loiret Alejandría Dosal Trujillo

Ciudad Universitaria, CD. MX, 2024





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Salas
Hazan
Nicolás Benjamín
5535001191
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
419004860

2. Datos del tutor

M. en C.
Loiret Alejandría
Dosal
Trujillo

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Juan José
Montellano
Ballesteros

4. Datos del sinodal 2

Dra.
Rita Esther
Zuazua
Vega

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Diego Antonio
González
Moreno

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Ilán Abraham
Goldfeder
Ortiz

7. Datos del trabajo escrito

Coloraciones transitivas: héroes en torneos
112 p.
2024

Índice general

Dedicatorias	5
Introducción	7
1. Teoría de digráficas	11
1.1. Definiciones elementales	11
1.2. Subdigráficas, operaciones, e isomorfismos	15
1.2.1. Subdigráficas	15
1.2.2. Operaciones	16
1.2.3. Isomorfismos	19
1.3. Caminos y conexidad	20
1.3.1. Caminos	20
1.3.2. Conexidad	24
1.4. Familias de digráficas	30
2. Coloraciones y torneos	37
2.1. Coloraciones propias	37
2.2. Torneos	41
2.3. Coloraciones transitivas	46
2.4. Independencia y transitividad	55
3. Héroe en torneos	59
3.1. Héroe y sus componentes fuertes	59
3.2. Héroe fuertes y celebridades	72
3.3. Construcción recursiva de un héroe	75
3.4. Villanos mínimos y celebridades	87
4. Torneos infinitos	93
4.1. Extensiones a digráficas infinitas	93
4.2. Torneos transitivos y COTO	95
4.3. Torneos infinitos y número cromático	100
Conclusiones	107
Bibliografía	109

Dedicatorias

A mi mamá Simone, por transmitirme su amor por las matemáticas desde pequeño.

A mi papá Sergio, por encaminarme a entrar a nuestra querida facultad de ciencias.

A mi hermano Sebas, por acompañarme toda la vida.

A Pierre, por darme la curiosidad de estudiar la teoría de gráficas.

A Dani, por siempre estar ahí para mí y apoyarme, entre tantas cosas, leyendo y escuchando mis ideas y quejas de la tesis.

A mis amigos de la facultad, Nestor, Matías, Jannia, Nathan, Sari, Jirash, Genaro, Rubén, Paulina, Lara, Canek, Edmundo y Paoli, por haber compartido muchos momentos bonitos, dentro y fuera del ámbito matemático.

A Jana, por ser una gran docente en gráficas y por ser mi tutora en esta tesis, la cual disfruté mucho hacer con ella.

A mis demás profesores, Max Neumann, Javier Fernández, Mónica Clapp, Gabriela Campero, Jorge Martínez y Miguel Tecpa, por transmitir con tanta pasión sus conocimientos.

Introducción

A diferencia de otras ramas de las matemáticas, que surgen como herramientas de respuesta a problemas de ciencias exactas o sociales, como el cálculo y la estadística, o bien de la abstracción misma de otras ramas de las matemáticas, como la topología o la teoría de categorías, la *teoría de gráficas* debe su origen a un problema concreto: el famoso problema de los siete puentes de Königsberg, modelado y resuelto por Leonhard Euler, mediante lo que hoy conocemos como *gráfica*. Las gráficas eran, inicialmente, representaciones visuales de ciertos problemas. Aunque la formalización de la teoría de gráficas está cimentada en la teoría de conjuntos, dichas representaciones siguen siendo ampliamente usadas de manera complementaria, pues facilitan de manera significativa la comprensión de la teoría. En correspondencia con su origen, la mayoría de conceptos en gráficas deben su nombre a algún objeto natural o humano al cual se asemejan, cuando menos de manera intuitiva: árboles, puentes, vecindades, etc... Todo lo anterior hace de la teoría de gráficas una rama sumamente divertida e interesante de estudiar y enseñar.

La *teoría de digráficas*, la cual estudiaremos en esta tesis, es una generalización de la de gráficas que nace de manera natural. Usualmente, los libros de texto introducen varios conceptos de gráficas antes de introducir los de digráficas. Aunque puede resultar práctico hacer esto, me parece que las digráficas pueden ser estudiadas sin necesidad de hablar de gráficas. Es por esto que decidí, para esta tesis, hablar únicamente de digráficas; los conceptos que se suelen definir en digráficas por medio de conceptos propios de gráficas, son introducidos y trabajados aquí de forma un tanto distinta, aunque no menos práctica.

Empecemos planteando un problema de la vida cotidiana que pueda ser modelado por medio de una digráfica y permita introducir algunos de los conceptos centrales de esta tesis. Consideremos un torneo de ajedrez, en el cual participan 8 jugadores, j_1, j_2, \dots, j_8 . El torneo consiste en que cada dos jugadores distintos se enfrenten en una sola partida; los jugadores obtienen 3 puntos por partida ganada, 1 punto por partida empatada, y 0 puntos por partida perdida; el ganador del torneo es el jugador que obtenga más puntos. Al finalizar el torneo, los organizadores notan que, a diferencia de la mayoría de torneos, no hubo empates en éste; así, el sistema de puntos queda reducido a que el jugador que haya ganado más partidas es el ganador del torneo.

La siguiente digráfica modela los resultados de los enfrentamientos entre los ocho jugadores: una flecha de j_1 a j_2 indica que j_1 ganó la partida contra j_2 y el número que aparece arriba de j_1 es la cantidad de partidas que ganó, que es llamado el *ex-grado* de j_1 . Este tipo de digráfica se llama, como quizás podrá intuir el lector, un *torneo*. Además, coloreamos los vértices de dos colores distintos. Los vértices azules cumplen lo siguiente: tomando en cuenta únicamente los vértices azules, j_1 le ganó a todos, j_2 a todos menos j_1 , j_3 a todos menos j_1 y j_2 , j_4 sólo le ganó a j_5 y j_5 no le ganó a nadie. De igual manera, tomando en cuenta únicamente los vértices verdes, j_8 le ganó a los otros 2, j_7 sólo a j_6 y j_6 a ninguno. Los conjuntos de vértices como el de los azules o el de los verdes se llaman *transitivos* y llamamos a esta forma de colorear a los vértices de un torneo una *coloración transitiva*.

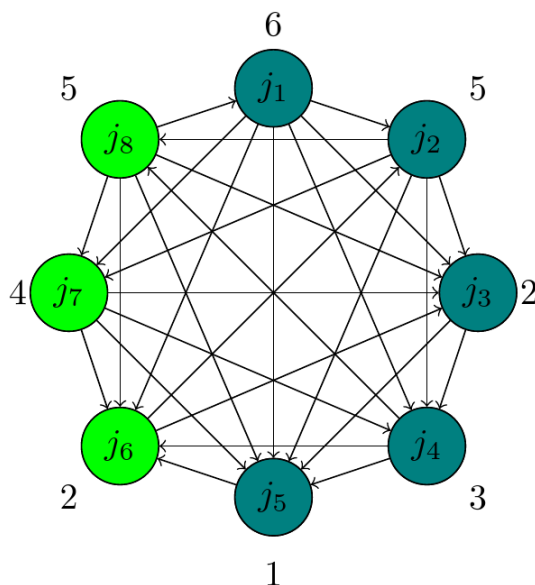


Figura 1: Torneo de ajedrez

Los torneos, junto con este tipo de coloraciones, serán el objeto de estudio de esta tesis.

Hemos hecho énfasis, hasta ahora, en que la teoría de digráficas puede modelar problemas cotidianos y tiene conceptos sumamente intuitivos. Queremos ahora anticipar que, aunque lo que hemos dicho es cierto, la teoría de digráficas tiene vida propia más allá de todo esto: su rigor hace que debemos desprendernos de lo cotidiano, y aunque cierto tipo de intuición visual, propia de la teoría de digráficas, permanece incluso en las pruebas de los teoremas más abstractos, requerimos a veces de un microscopio para poder encontrarla. El concepto de *héroe*, el cual no puede ser introducido de manera intuitiva tan fácilmente como el de torneo o el de coloración transitiva, al igual que las demostraciones del tercer capítulo de esta tesis, serán un claro ejemplo de esto último.

La gran mayoría de resultados presentados en esta tesis no son propios y provienen principalmente de [3] y de [9]. Los que sí lo sean tendrán la letra [N].

Antes de empezar nuestro primer capítulo, quisiera aclarar algo respecto al formato de la tesis. Aunque sea inusual, decidí separar los párrafos del texto mediante tres tipos de espaciados distintos: yendo a la línea, saltando un espacio mediano y saltando un espacio grande; la elección del tipo de espaciado depende únicamente de la relación entre un párrafo y el siguiente: a una mayor diferencia semántica le corresponde un espaciado más amplio.

1 Teoría de digráficas

Dedicaremos el primer capítulo de esta tesis a definir conceptos básicos de la teoría de digráficas, además de demostrar muchos resultados conocidos, de los que haremos uso en los siguientes capítulos.

1.1. Definiciones elementales

Comencemos introduciendo nuestro concepto más primitivo. Por una *digráfica* D , entendemos una pareja ordenada de conjuntos $D = (V(D), A(D))$, ambos finitos y tal que $A(D)$ es una relación irreflexiva en $V(D)$; es decir, $A(D) \subseteq V(D) \times V(D)$, y para todo $v \in V(D)$, se cumple que $(v, v) \notin A(D)$. Los elementos de $V(D)$ son llamados *vértices*, mientras que los de $A(D)$ son llamados *flechas*; usualmente, usaremos una notación simplificada para las flechas: uv denotará a la flecha (u, v) . Dada una flecha uv , decimos lo siguiente: u y v son los *extremos* de uv ; u es la *cola* de uv , mientras que v es su *cabeza* o *punta*; uv *parte* (sale) de u e *incide* en (llega a) v ; u *domina* a v .

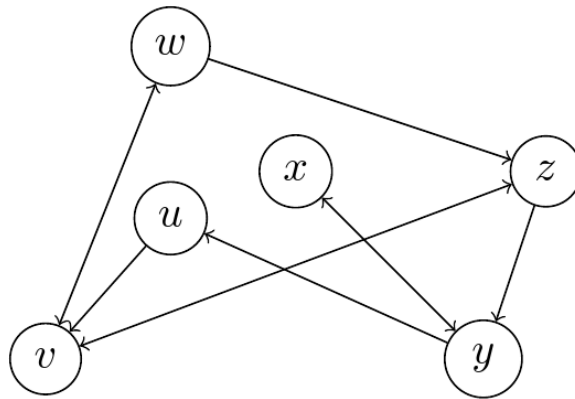


Figura 1.1: Digráfica

Si dos flechas comparten los mismos extremos, pero tienen la cabeza y cola invertidas, éstas son llamadas *flechas simétricas*, y suelen representarse por una única flecha de dos cabezas; en la figura 1.1, las flechas xy y yx son flechas simétricas. Si todas las flechas de una digráfica D son simétricas, decimos que D es *simétrica*. Si la digráfica no tiene flechas simétricas, decimos que es *asimétrica*.

Otros tipos de flechas particulares no aparecen en las digráficas: si dos flechas distintas comparten tanto cola como cabeza, éstas son llamadas *multiflechas* (a no confundir con las flechas simétricas); si una flecha tiene por cabeza y cola a un mismo vértice, es llamada *lazo*; la condición de irreflexividad impuesta en el conjunto de flechas prohíbe lazos en digráficas. Las digráficas que admiten multiflechas son llamadas *multidigráficas*, mientras que las que admiten tanto multiflechas como lazos son llamadas *pseudodigráficas* (véase la figura 1.2).

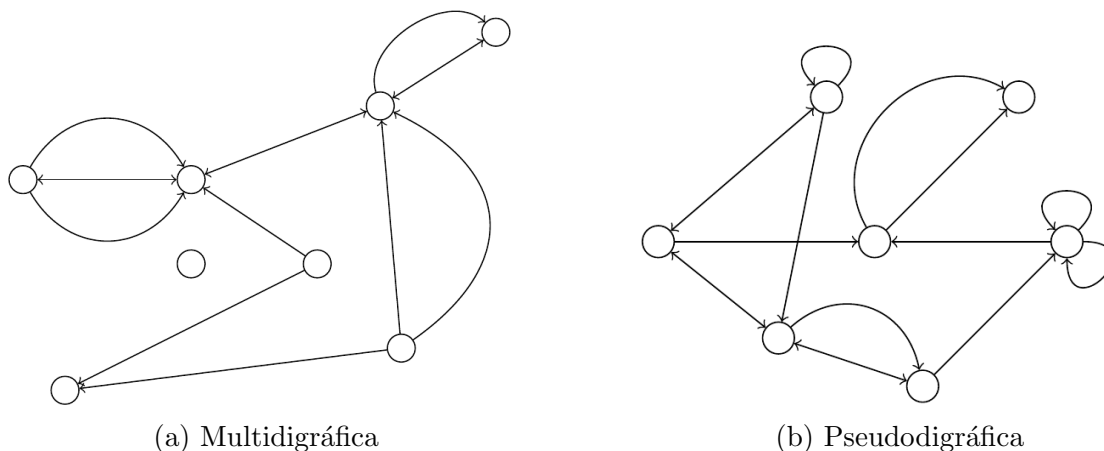


Figura 1.2: Tipos de digráficas

No daremos aquí la definición detallada de estos tipos de digráficas, pues trabajaremos únicamente con digráficas.

Dada una digráfica D , la cardinalidad de $V(D)$ es llamada el *orden* de D , y suele denotarse por la letra n ; la cardinalidad de $A(D)$ es llamada el *tamaño* de D , y suele denotarse por la letra m . Cuando el orden de una digráfica es igual a 0, decimos que es *vacía*; si su orden es mayor a 0, pero su tamaño es igual a 0, decimos que es *trivial*. Las digráficas triviales, al igual que la vacía, no suelen ser de interés, pues carecen del elemento clave que sirve para relacionar a vértices distintos entre sí.

La *exvecindad* de un vértice $v \in V(D)$ es el conjunto $N^+(v) := \{w \in V(D) : vw \in A(D)\}$; los elementos de $N^+(v)$ son llamados *exvecinos* de v . $N^-(v) := \{w \in V(D) : wv \in A(D)\}$ es llamada la *invecindad* de v ; sus elementos son llamados *invecinos* de v . De manera simétrica, $N(v) := N^+(v) \cup N^-(v)$ es llamada la *vecindad* de v ; sus elementos son llamados *vecinos* de v . Los conceptos anteriores se generalizan un poco: dado $S \subseteq V(D)$, se define $N^+(S) := (\bigcup_{v \in S} N^+(v)) \setminus S$; $N^-(S)$ y $N(S)$ se definen de forma análoga.

El *exgrado* de un vértice v es el número de flechas que salen de v , y lo denotamos por $d^+(v)$; el *ingrado* de v es el número de flechas que inciden en v , y lo denotamos por $d^-(v)$. El exgrado y el ingrado de v son llamados conjuntamente los *semigrados* de v . Notemos que $d^+(v) = |N^+(v)|$ y que $d^-(v) = |N^-(v)|$.

En la figura 1.3, los vértices azules son los exvecinos de v , mientras que los rojos son sus invecinos; el vértice verde es tanto invecino como exvecino de v . Puesto que

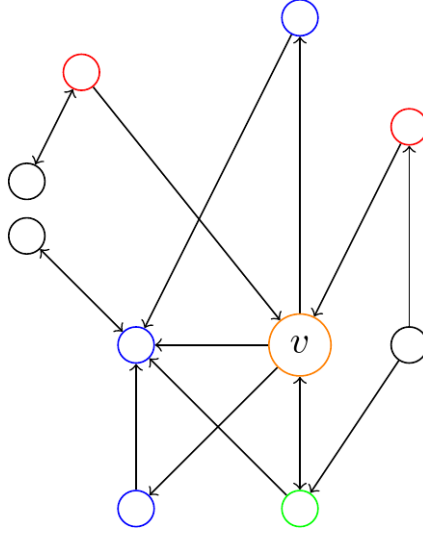


Figura 1.3: Vecinos de un vértice

la cantidad de exvecinos de v corresponde a su exgrado (la de invecinos a su ingrado), se tiene que $d^+(v) = 4$ y $d^-(v) = 3$. Notemos que, en este caso, tanto el ingrado como el exgrado de v son números mayores a 0; esto no tiene por qué suceder para cualquier vértice de una digráfica. Cuando el exgrado de un vértice es igual a 0, decimos que el vértice es un *pozo*; cuando su ingrado es igual a 0, decimos que es una *fuentes*; si el vértice tiene exgrado e ingrado iguales a 0, el vértice es llamado *vértice aislado*.

Presentamos ahora nuestro primer teorema, que es en realidad el primero de la teoría de digráficas. Este resultado, al igual que todos los de los tres primeros capítulos de esta tesis, vienen acompañados de una estrella de color; en este caso es verde, pero encontraremos también estrellas naranjas y rojas. Esta categorización tiene que ver con posibles extensiones a digráficas infinitas, por lo que se explicará al empezar el cuarto capítulo.

Teorema 1.1.1 * Sea D una digráfica de tamaño m . Se cumple que

$$m = \sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v).$$

Prueba

Recordemos que $m = |A(D)|$. Para cada $v \in V(D)$, consideremos $A_v^+(D) := A(D) \cap (\{v\} \times V(D))$, es decir, el conjunto de flechas en D que salen de v , y sea $A_v^-(D) := A(D) \cap (V(D) \times \{v\})$, es decir, el conjunto de flechas en D que inciden en v . Notemos que $A(D) = \bigcup_{v \in V(D)} A_v^+(D) = \bigcup_{v \in V(D)} A_v^-(D)$. Además, dados $v, w \in V(D)$ tales que $v \neq w$, $A_v^+(D) \cap A_w^+(D) = \emptyset$ y $A_v^-(D) \cap A_w^-(D) = \emptyset$. Así, se cumple lo siguiente:

$$|A(D)| = \sum_{v \in V(D)} |A_v^+(D)| = \sum_{v \in V(D)} |A_v^-(D)|.$$

Notemos ahora que dado $v \in V(D)$, se tiene, por definición, que $d^+(v) = |A_v^+(D)|$ y que $d^-(v) = |A_v^-(D)|$. Se sigue que $m = |A(D)| = \sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v)$. ■

Denotamos por $\delta^+(D) := \min\{d^+(v) : v \in V(D)\}$ y por $\Delta^+(D) := \max\{d^+(v) : v \in V(D)\}$ al *mínimo* y *máximo exgrado* de D , respectivamente. De igual manera, denotamos por $\delta^-(D)$ y $\Delta^-(D)$ al *mínimo* y *máximo ingrado* de D , respectivamente. El *mínimo semigrado* de D es simplemente $\delta^0(D) := \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$, mientras que el *máximo semigrado* de D es $\Delta^0(D) := \max\{\Delta^+(D), \Delta^-(D)\}$. Una digráfica D que cumple que $\delta^0(D) = \Delta^0(D)$ es llamada *regular* (véase la figura 1.4); si $\delta^0(D) = \Delta^0(D) = k$, decimos que D es *k-regular*.

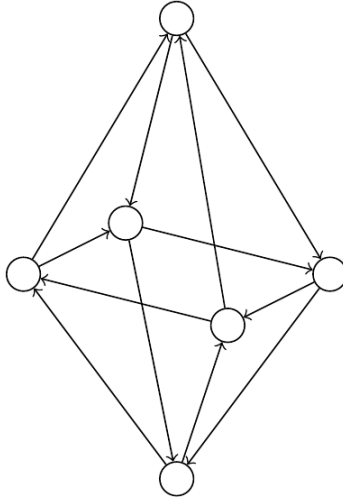


Figura 1.4: Digráfica 2-regular

Proposición 1.1.2 * Si D es una digráfica regular, entonces para todo $v \in V(D)$, se tiene que $d^+(v) = d^-(v) = \delta^0(D)$.

Prueba

Sea $v \in V(D)$. Se cumple, por definición, las dos siguientes cosas:

$$\delta^0(D) \leq \delta^+(D) \leq d^+(v) \leq \Delta^+(D) \leq \Delta^0(D),$$

$$\delta^0(D) \leq \delta^-(D) \leq d^-(v) \leq \Delta^-(D) \leq \Delta^0(D).$$

Lo anterior es cierto para cualquier digráfica. Además, al ser D regular, se cumple que $\delta^0(D) = \Delta^0(D)$. Así, todos los números que aparecen en las desigualdades anteriores son iguales entre sí; en particular, se cumple que $d^+(v) = d^-(v) = \delta^0(v)$. ■

1.2. Subdigráficas, operaciones, e isomorfismos

1.2.1. Subdigráficas

Un concepto importante en matemáticas es el de subestructura. Dadas D, G digráficas, decimos que G es una *subdigráfica* de D si $V(G) \subseteq V(D)$ y $A(G) \subseteq A(D)$ (véase la figura 1.5); lo denotamos por $G \subseteq D$.

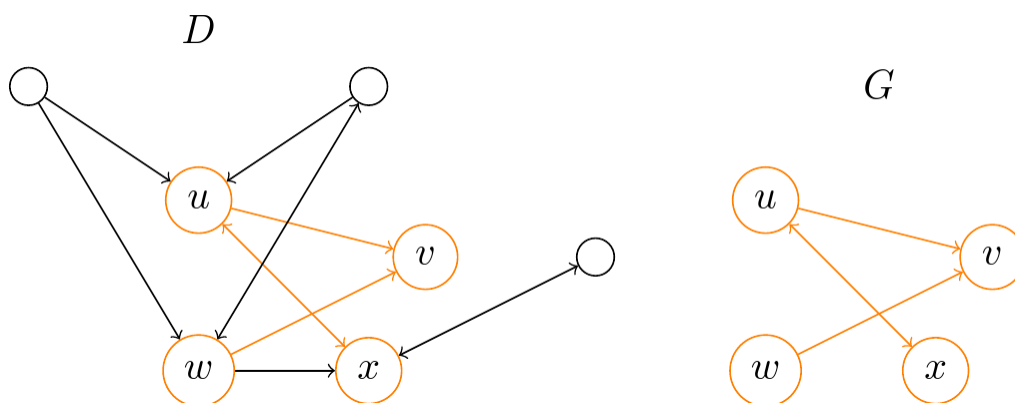


Figura 1.5: Subdigráfica G de una digráfica D

Ciertos tipos de subdigráficas son de particular interés: las generadoras y las inducidas (por vértices o flechas).

Dadas D y G digráficas, decimos que G es una *subdigráfica generadora* de D si es una subdigráfica de D tal que $V(D) = V(G)$.

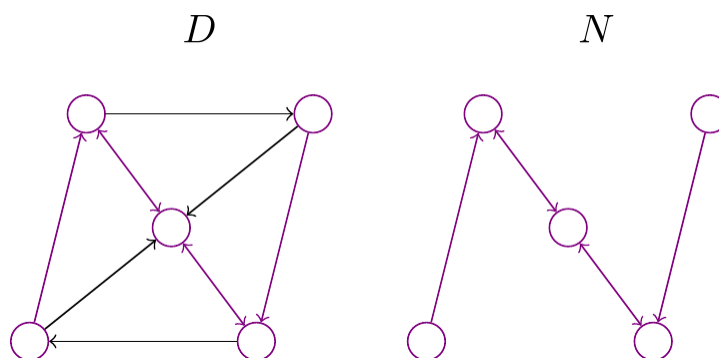


Figura 1.6: Subdigráfica N generadora de D

Dada D una digráfica, $S \subseteq V(D)$ y $T \subseteq A(D)$, denotamos por $D\langle S \rangle$ y $D\langle T \rangle$ a las *subdigráficas inducidas* por S y por T , respectivamente; dichas digráficas son definidas a continuación: $D\langle S \rangle := (S, (S \times S) \cap A(D))$; es decir, $D\langle S \rangle$ es la subdigráfica de D que tiene por conjunto de vértices a S y por conjunto de flechas a todas las flechas de D con ambos extremos en S ; $D\langle T \rangle$ es la subdigráfica de D que tiene por conjunto de flechas a T y por conjunto de vértices a todos los vértices de D que son extremos de alguna flecha en T (véase la figura 1.8).

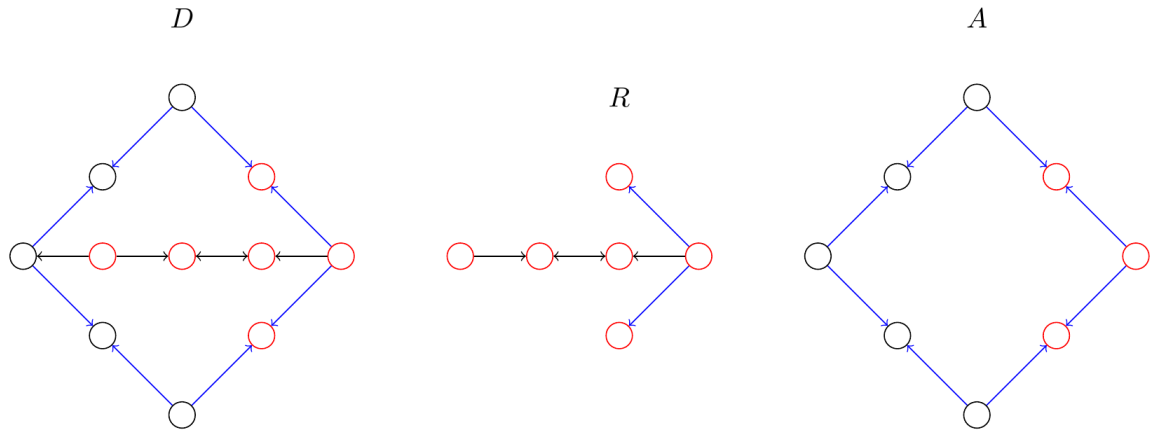


Figura 1.7: Subdigráficas R y A de D , inducidas por vértices rojos y flechas azules

1.2.2. Operaciones

Las subdigráficas inducidas nos permiten definir una operación básica en digráficas: la *resta*, ya sea de un conjunto de vértices, o bien uno de flechas. Dadas D una digráfica, $S \subseteq V(D)$ y $T \subseteq A(D)$, $D - S$ y $D - T$ denotan a las subdigráficas inducidas $D(V(D) \setminus S)$ y $D(A(D) \setminus T)$, respectivamente. Cuando S consta de un único vértice v , lo denotamos simplemente por $D - v$; de igual manera, si T consta de una única flecha uv , lo denotamos por $D - uv$.

Aprovechemos para definir otras operaciones elementales en digráficas.

Sea D una digráfica La *suma* de un conjunto $T \subseteq (D \times D) \setminus A(D)$, es la digráfica denotada por $D + T$, con $V(D + T) = V(D)$ y $A(D + T) = A(D) \cup T$ (véase la figura 1.8). Cuando T consta de una única flecha uv , lo denotamos por $D + uv$.

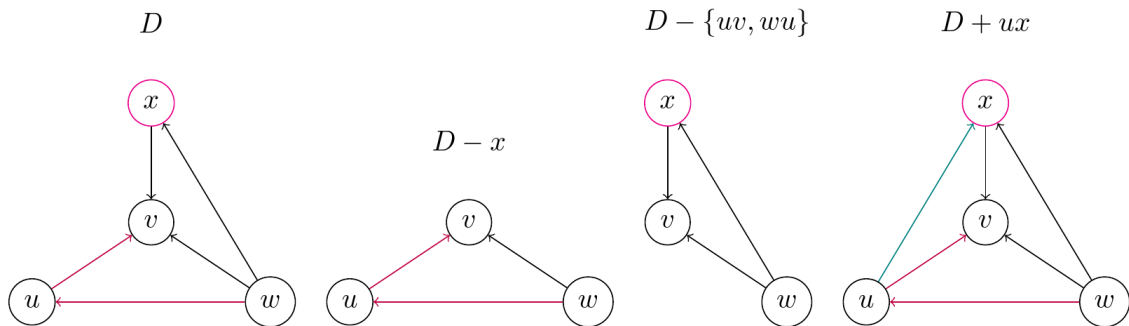


Figura 1.8: Suma y resta en una digráfica

Dadas dos digráficas D y G , $D \cup G$ denota a la digráfica dada por $V(D \cup G) = V(D) \cup V(G)$ y $A(D \cup G) = A(D) \cup A(G)$ (véase la figura 1.9).

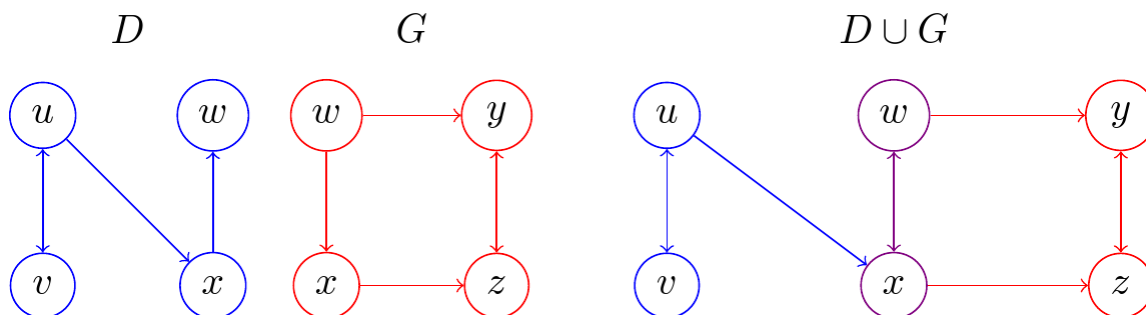


Figura 1.9: Unión de dos digráficas

Dada una digráfica D , llamamos *complemento* de D a la digráfica denotada por \overline{D} , dada como sigue: $V(\overline{D}) = V(D)$ y $A(\overline{D}) = \{uv: u \neq v \text{ y } uv \notin A(D)\}$; es decir, la digráfica que tiene los mismos vértices que D y por conjunto de flechas a todas parejas de distintos vértices que no eran flechas en D (véase la figura 1.10).

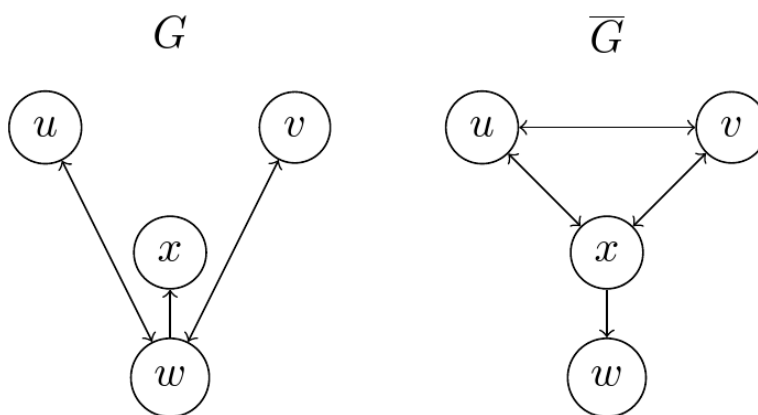


Figura 1.10: Complemento de una digráfica

La *inversión* de una flecha $uv \in A(D)$ es la digráfica E tal que $V(E) = V(D)$ y $A(E) = (A(D) \setminus \{uv\}) \cup \{vu\}$; es decir, la digráfica que resulta de reemplazar la flecha uv por la flecha vu . Dada una digráfica D , denotamos por D^{-1} a la digráfica *inversa* de D , dada como sigue: $V(D^{-1}) = V(D)$ y $A(D^{-1}) = \{vu: uv \in A(D)\}$; es decir, D^{-1} es la digráfica que resulta de invertir todas las flechas de D .

Notemos, de paso, que las flechas simétricas no se modifican en la digráfica inversa, pues son inversas una de la otra; esto puede observarse en la figura 1.11 con las flechas wx y xw .

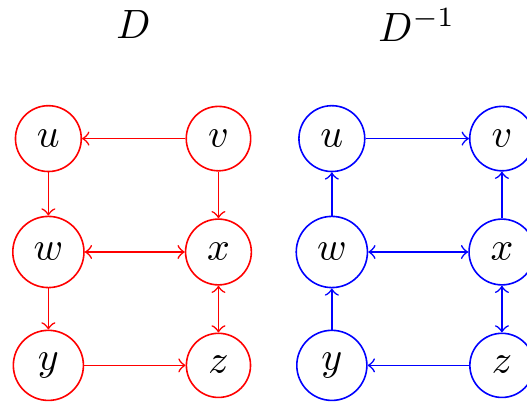
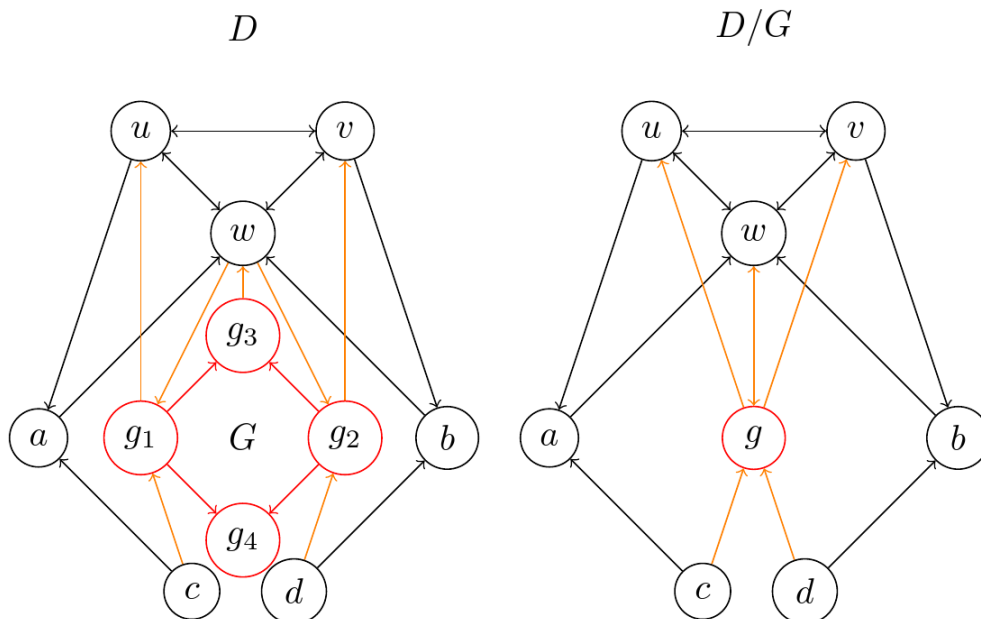


Figura 1.11: Digráfica inversa

Sea G una subdigráfica de una digráfica D . La *contracción* de G en D es la digráfica denotada por D/G , dada como sigue: $V(D/G) = (V(D) \setminus V(G)) \cup \{g\}$, con $g \notin V(D)$, y $A(D/G) = A(D) \cap (V(D/G) \times V(D/G)) \cup \{xg : \text{existe } y \in V(G) \text{ tal que } xy \in A(D)\} \cup \{gx : \text{existe } y \in V(G) \text{ tal que } yx \in A(D)\}$; es decir, D/G es la digráfica que resulta de reemplazar, en D , a los vértices de G , por un único vértice g ; las flechas que existían entre $V(G)$ y $V(D) \setminus V(G)$ son transformadas en flechas entre g y $V(D) \setminus V(G)$.

Tanto los vértices como las flechas que se encuentran sumergidos en G se vuelven irrelevantes en D/G . Lo único que nos interesa al hacer la contracción es ver, de una manera resumida, las flechas que hay entre $V(G)$ y $V(D) \setminus V(G)$.

Figura 1.12: Contracción de G en D

La contracción nos da mucha información cuando se trabaja con multidigráficas; en ese caso, se define de tal forma que la cantidad de flechas que hay entre $V(G)$

y $V(D) \setminus V(G)$, se preserve al hacer la operación. Esta información se pierde al trabajar con digráficas, pues múltiples flechas con cola en $V(G)$ y punta un vértice $v \in V(D) \setminus V(G)$ se traducen, en la contracción, en una única flecha con cola en g y punta en v ; de igual manera, sucede esto con flechas cuya punta está en $V(G)$ y cuya cola es un vértice $v \in V(D) \setminus V(G)$.

En la figura 1.12, las flechas g_1u, g_2v, cg_1, dg_2 en D se transforman, en D/G , en las flechas gu, gv, cg, dg . La flecha g_3w se transforma en la flecha gw , mientras que las flechas wg_1 y wg_2 se transforman ambas en la flecha wg ; las tres flechas se transforman en las flechas simétricas gw, wg .

1.2.3. Isomorfismos

Incluso más importante que el de subestructura, es un concepto que recoja la idea de que dos objetos son esencialmente iguales; para el estudio de las digráficas, dicho concepto es el de isomorfismo (entre digráficas).

Decimos que dos digráficas D y E son *isomorfas* si existe una función $f: V(D) \rightarrow V(E)$ biyectiva, que cumple que, para todo $v, w \in V(D)$, $vw \in A(D)$ si y sólo si $f(v)f(w) \in A(E)$; lo denotamos por $D \cong E$; decimos que f es un *isomorfismo* entre D y E ; para especificar que f es un isomorfismo que testifica que D y E son isomorfas, escribimos $D \cong_f E$. En ocasiones, puede ser de interés hablar de los isomorfismos entre una digráfica D y sí misma; estos son llamados *automorfismos* de D .

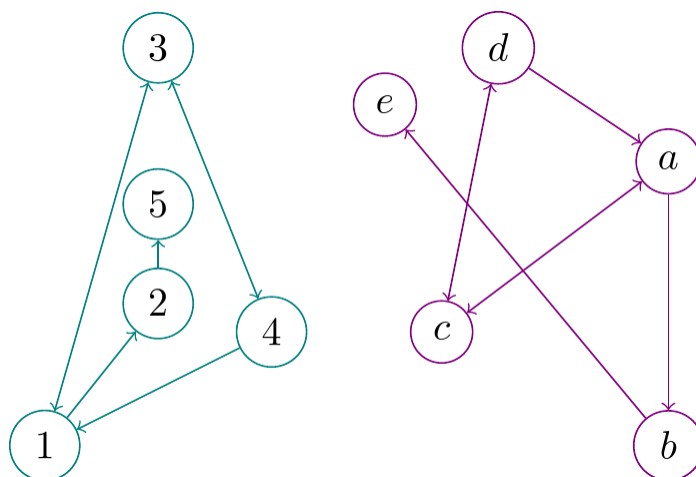


Figura 1.13: Dos digráficas isomorfas

La función $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d), (5, e)\}$ es un isomorfismo entre las digráficas de la figura 1.13; para este par de digráficas, este isomorfismo es único; sin embargo, existen digráficas isomorfas que tienen más de un isomorfismo entre ellas. Notemos además, que el que dos digráficas sean isomorfas no implica que su representación en el plano sea la misma; de hecho, para cualquier digráfica, existen muchas maneras distintas de representarla. Ciertos trabajos de la teoría de digráficas

abordan el tema de las distintas representaciones, como lo son los trabajos sobre digráficas planas; es decir, las que están dibujadas de manera que flechas distintas no se crucen. Por ejemplo, en la figura 1.13, la digráfica azul es plana, mientras que la morada no lo es. Puesto que no tocaremos esos temas, los dibujos de nuestras digráficas serán usados con fines meramente ilustrativos.

Teorema 1.2.1 * *Dos digráficas D, E son isomorfas si y sólo si sus inversas D^{-1}, E^{-1} son isomorfas.*

Prueba

Sean D, E digráficas. Supongamos que $D \cong_f E$. Veamos que $D^{-1} \cong_f E^{-1}$. Puesto que f ya es biyectiva, basta probar la segunda condición que define a un isomorfismo. Sean $u, v \in V(D^{-1}) = V(D)$. Por definición de inversa, se tiene que $uv \in A(D^{-1})$ si y sólo si $vu \in A(D)$. Además, dado que $D \cong_f E$, se tiene que $vu \in A(D)$ si y sólo si $f(v)f(u) \in A(E)$. Usando nuevamente la definición de inversa, se tiene que $f(v)f(u) \in A(E)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in A(E^{-1})$. Podemos así concluir que $uv \in A(D^{-1})$ si y sólo si $f(u)f(v) \in A(E^{-1})$, por lo que $D^{-1} \cong_f E^{-1}$.

El recíproco es análogo; basta notar que $(D^{-1})^{-1} = D$ y $(E^{-1})^{-1} = E$ para poder cambiar de lugar, en la prueba anterior, a las digráficas con sus inversas. ■

1.3. Caminos y conexidad

1.3.1. Caminos

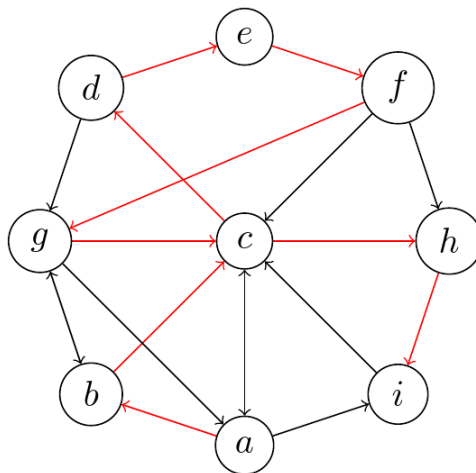


Figura 1.14: Un ai -camino $\mathcal{C} = (a, b, c, d, e, f, g, c, h, i)$ de longitud 9

Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$. Por un uv -camino (dirigido) en D , entendemos una sucesión finita de vértices $\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$, tal que $x_i x_{i+1} \in A(D)$,

con $n \in \mathbb{N}$ (n puede ser 0). En un uv -camino \mathcal{C} , u y v son llamados los vértices *inicial* y *final* de \mathcal{C} , respectivamente; los demás vértices que conforman a \mathcal{C} son llamados vértices *internos* de \mathcal{C} . La *longitud* de \mathcal{C} , denotada por $l(\mathcal{C})$, es el índice n que aparece explícito en el camino \mathcal{C} ; esto es, el número de flechas que conforman a \mathcal{C} , contando repeticiones; si \mathcal{C} consta de un único vértice, entonces $l(\mathcal{C}) = 0$. Notemos que los caminos pueden repetir tanto vértices como flechas.

Dados dos caminos $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n)$ y $\mathcal{D} = (y_0, \dots, y_m)$ tales que $x_n = y_0$, definimos el camino $\mathcal{C} \circ \mathcal{D} := (x_0, \dots, x_n = y_0, \dots, y_m)$; éste es llamado la *concatenación* de \mathcal{C} con \mathcal{D} . Por ejemplo, en la figura 1.14, $(a, b, c, d, e) \circ (e, f, g, c, h, i) = \mathcal{C}$.

Varios tipos de caminos requieren tener su propia definición.

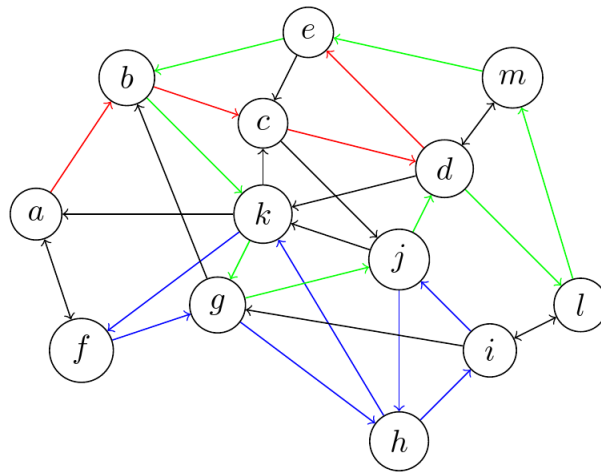


Figura 1.15: Tipos de caminos

- Un *uv-paseo* es un uv -camino sin flechas repetidas; puede repetir vértices. El camino \mathcal{C} de la figura 1.14 es en realidad un paseo.
- Una *uv-trayectoria* es un uv -paseo sin vértices repetidos.
- Un *camino cerrado* es un camino que tiene un mismo vértice inicial y final; es un uu -camino para algún vértice u . El único camino cerrado que no repite vértices es el trivial. Cuando queramos especificar que un camino no es cerrado, diremos que es *abierto*.
- Un *ciclo* es un paseo cerrado sin vértices internos repetidos. Puesto que no consideramos lazos, entonces los ciclos más pequeños son de la forma (u, v, u) ; es decir, corresponden a los vértices de una flecha simétrica.

Notemos de paso, que dado $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n)$ un camino, se tiene que \mathcal{C} es una trayectoria si y sólo si $\mathcal{D} := \mathcal{C} \circ (x_n, x_0)$ es un ciclo. Decimos que una digráfica es *acíclica* si no posee ciclos.

En la figura 1.15 podemos observar una ae -trayectoria $\mathcal{C}_1 = (a, b, c, d, e)$ de longitud 4 (rojo), un ff -camino cerrado $\mathcal{C}_2 = (f, g, h, i, j, h, k, f)$ de longitud 7 (azul), y un bb -ciclo $\mathcal{C}_3 = (b, k, g, j, d, l, m, e, b)$ de longitud 8 (verde).

Teorema 1.3.1 * *Toda digráfica acíclica tiene al menos un pozo y una fuente.*

Prueba

Sea D una digráfica acíclica de orden n . Argumentando por contradicción, supongamos que D no tiene pozos.

Como no tiene pozos, entonces $d^+(v) > 0$ para todo $v \in V(D)$. Sea $x_0 \in V(D)$. Por la observación anterior, existe $x_1 \in V(D) \setminus \{x_0\}$ tal que $x_0x_1 \in A(D)$. Como D es acíclica, se tiene que $x_1x_0 \notin A(D)$. Así, existe $x_2 \in V(D) \setminus \{x_0, x_1\}$ tal que $x_1x_2 \in A(D)$. Recursivamente, podemos construir una trayectoria que pasa por todos los vértices de D , digamos $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Dado que hemos agotado los vértices de D , se sigue que $d^+(x_{n-1}) = 0$, lo cual es una contradicción. Se sigue que D tiene un pozo.

Para ver que D tiene una fuente, consideremos D^{-1} . Como D es acíclica, también lo es D^{-1} . Por lo que acabamos de probar, D^{-1} tiene un pozo, digamos p , por lo que p es una fuente en D . ■

La contrapuesta de este teorema también es interesante: toda digráfica sin pozos o sin fuentes (o ambos), contiene ciclos. Por ejemplo, las digráficas k -regulares, con $k > 0$, no tienen pozos ni fuentes, por lo que contienen ciclos.

Consideremos la siguiente relación entre caminos: dados \mathcal{C} y \mathcal{D} caminos, se dice que \mathcal{C} es un *subcamino* de \mathcal{D} , denotado por $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, si \mathcal{C} es una subsucesión de \mathcal{D} , pensándolos a ambos como sucesiones de flechas. Por ejemplo, en la figura 1.15, el camino (f, g, h, k) es un subcamino del camino cerrado \mathcal{C}_2 ; al ser dicho subcamino una fk -trayectoria, nos muestra que un subcamino de un camino de cierto tipo, no tiene por qué ser de ese mismo tipo. Cuando queramos especificar que un subcamino es una trayectoria, diremos que es una *subtrayectoria*; si es un ciclo, diremos que es un *subciclo*; lo mismo haremos para cualquier otro tipo de camino.

Notemos que la relación \subseteq entre caminos es transitiva.

Dados $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n)$ un camino e $i, j \in \{0, \dots, n\}$, con $i < j$, denotamos por $\mathcal{C}[x_i, x_j]$ al subcamino (x_i, \dots, x_j) de \mathcal{C} . Por ejemplo, en la figura 1.15, $\mathcal{C}_1[b, d] = (b, c, d)$.

Teorema 1.3.2 * *Sean D una digráfica, $u, v \in V(D)$, con $u \neq v$, y \mathcal{C} un uv -camino. Existe entonces \mathcal{C}^* una uv -subtrayectoria de \mathcal{C} .*

Prueba por inducción sobre $l(\mathcal{C})$

Si $l(\mathcal{C}) = 1$, entonces $\mathcal{C} = (u, v)$, por lo que es una trayectoria. Así, tomando $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}$, se cumple que \mathcal{C}^* es una uv -subtrayectoria de \mathcal{C} .

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Supongamos que, para toda $1 \leq k < n$, se cumple que si $l(\mathcal{C}) = k$ entonces existe \mathcal{C}^* una uv -subtrayectoria de \mathcal{C} .

Supongamos que $l(\mathcal{C}) = n$ y que $\mathcal{C} = (u = x_0, \dots, x_n = v)$.

- Si $x_i \neq x_j$ para toda $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i < j$, entonces \mathcal{C} es una trayectoria; basta entonces tomar $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}$ para que \mathcal{C}^* sea una uv -subtrayectoria de \mathcal{C} .
- Si existen $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i < j$, tales que $x_i = x_j$, consideremos $\mathcal{D} := \mathcal{C}[x_0, x_i] \circ \mathcal{C}[x_j, x_n]$. Es claro que \mathcal{D} es un uv -subcamino de \mathcal{C} y que $l(\mathcal{D}) < l(\mathcal{C}) = n$. Se tiene entonces, por hipótesis de inducción, que existe \mathcal{C}^* una uv -subtrayectoria de \mathcal{D} . Como la relación \subseteq entre caminos es transitiva y $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, se sigue que \mathcal{C}^* es una uv -subtrayectoria de \mathcal{C} , que es lo que queríamos probar. ■

Corolario 1.3.3 * Sean D una digráfica, $u \in V(D)$ y \mathcal{C} un uu -camino cerrado. Existe entonces \mathcal{C}^* un uu -subciclo de \mathcal{C} .

Prueba

Supongamos que $\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$, con $n \geq 2$. Puesto que no existen los lazos, se tiene que $x_{n-1} \neq x_n$. Consideremos entonces $\mathcal{D} := \mathcal{C}[x_0, x_{n-1}]$, que es un ux_{n-1} -subcamino de \mathcal{C} . Como $u \neq x_{n-1}$, se tiene, por el teorema 1.3.2, que existe \mathcal{D}^* una ux_{n-1} -subtrayectoria de \mathcal{D} . Por transitividad, se sigue que \mathcal{D}^* es una ux_{n-1} -subtrayectoria de \mathcal{C} . Sea $\mathcal{C}^* := \mathcal{D}^* \circ (x_{n-1}, u)$. Como \mathcal{D}^* es una ux_{n-1} -trayectoria, entonces \mathcal{C}^* es un uu -ciclo. Además, puesto que $\mathcal{D}^* \subseteq \mathcal{C}$ y que $x_{n-1}u$ es la última flecha de \mathcal{C} , se sigue que $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$. Así, \mathcal{C}^* es un uu -subciclo de \mathcal{C} . ■

Otros tipos de caminos más específicos son de particular interés.

- Un *camino hamiltoniano* en D es un camino que pasa por todos los vértices de D . Una *trayectoria hamiltoniana* en D es un camino hamiltoniano que es además una trayectoria, y un *ciclo hamiltoniano* un camino hamiltoniano que es además un ciclo. Decimos que una digráfica es *hamiltoniana*, si posee un ciclo hamiltoniano.
- Un *paseo euleriano* en D es un paseo que pasa por todas las flechas de D . Decimos que una digráfica es *trazable*, si posee un paseo euleriano abierto; si posee un paseo euleriano cerrado, decimos que es *euleriana*. Dado que los paseos eulerianos pasan por todas las flechas, pasan, en particular, por todos los vértices no aislados; esto nos dice que, en una digráfica sin vértices aislados, todo paseo euleriano es un camino hamiltoniano (mas no necesariamente una trayectoria o un ciclo hamiltoniano).

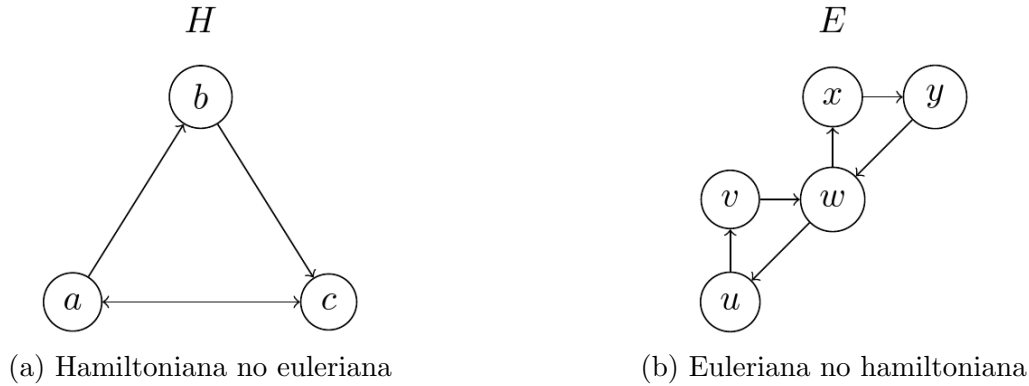


Figura 1.16: Digráficas especiales

Proposición 1.3.4 * *Existen digráficas hamiltonianas que no son eulerianas, al igual que eulerianas que no son hamiltonianas.*

Prueba.

La digráfica H es hamiltoniana, pues (a, b, c, a) es un ciclo hamiltoniano. Sin embargo, a causa de las flechas simétricas ac y ca , H no contiene ningún paseo euleriano cerrado, por lo que no es euleriana (véase la figura 1.16).

La digráfica E es euleriana, pues (u, v, w, x, y, w, u) es un paseo euleriano cerrado. Sin embargo, todo camino hamiltoniano cerrado pasa al menos 2 veces por w (tres veces si es un ww -camino), por lo que E no contiene ciclos hamiltonianos; así, E no es hamiltoniana. ■

1.3.2. Conexidad

Sea D una digráfica y $u, v \in V(D)$. Decimos que v es *alcanzable* desde u si existe un uv -camino en D y lo denotamos por $u \rightarrow v$; dado que podemos concatenar caminos, dicha relación entre caminos es transitiva. Si v no es alcanzable desde u , lo denotamos por $u \nrightarrow v$.

Notemos que si un vértice $u \in V(D)$ es una fuente entonces, para todo $v \in V(D)$, se tiene que $v \nrightarrow u$. Si u es un pozo, entonces, para todo $v \in V(D)$, se tiene que $u \nrightarrow v$.

Decimos que una digráfica D es *unilateral*, si para todo $u, v \in V(D)$, $u \neq v$, se tiene que $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$ (o ambas).

Para ver que la digráfica de la figura 1.17 es unilateral, probemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3.5 * *Una digráfica es unilateral si y sólo si contiene un camino hamiltoniano.*

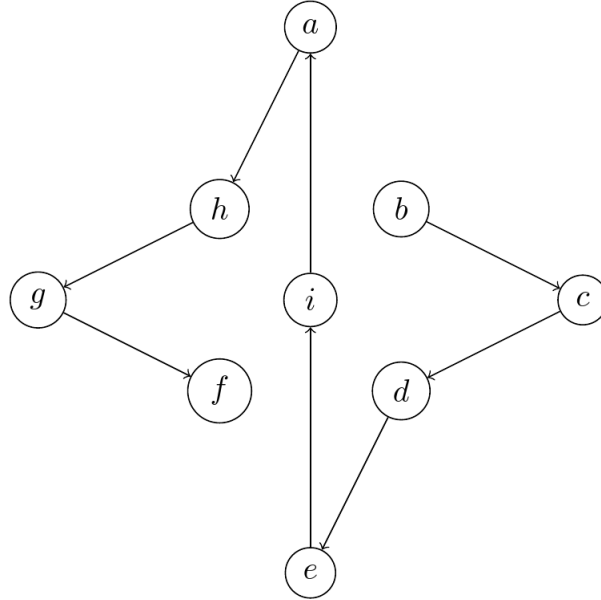


Figura 1.17: Digráfica unilateral

Prueba

Sea D una digráfica unilateral y $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n)$ un camino que pasa por la mayor cantidad de vértices distintos. Argumentando por contradicción, supongamos que \mathcal{C} no es hamiltoniano, es decir, que existe $v \in V(D) \setminus V(\mathcal{C})$. Como D es unilateral, se tiene que para toda $i \in \{0, \dots, n\}$, existe \mathcal{C}_i un vx_i - o x_iv -camino.

- Caso 1. Para toda $i \in \{0, \dots, n\}$, \mathcal{C}_i es un x_iv camino. En este caso se cumple, en particular, que \mathcal{C}_n es un x_nv camino. Así, $\mathcal{C} \circ \mathcal{C}_n$ es un camino que pasa por todos los vértices de \mathcal{C} y por v .
- Caso 2. Existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que \mathcal{C}_i es un vx_i -camino. Sea k el mínimo de las i que cumplen esto. Si $k = 0$, entonces \mathcal{C}_0 es un vx_0 camino; por lo tanto, $\mathcal{C}_0 \circ \mathcal{C}$ es un camino que pasa por todos los vértices de \mathcal{C} y por v . Si $k > 0$, entonces $k - 1 \in \{0, \dots, n\}$; dada la minimalidad de k , se cumple que \mathcal{C}_{k-1} es un $x_{k-1}v$ -camino. Así, $\mathcal{C}[x_0, x_{k-1}] \circ \mathcal{C}_{k-1} \circ \mathcal{C}_k \circ \mathcal{C}[x_k, x_n]$ es un camino que pasa por todos los vértices de \mathcal{C} y por v .

En ambos casos, los caminos encontrados tienen mayor longitud que \mathcal{C} , lo cual contradice la elección de \mathcal{C} . Se sigue que \mathcal{C} sí es hamiltoniano.

Para el recíproco, consideremos D una digráfica y $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n)$ un camino hamiltoniano en D . Sean $u, v \in V(D)$, $u \neq v$. Puesto que \mathcal{C} pasa por todos los vértices de D , pasa, en particular, por u y v . Así, $u = x_i$, $v = x_j$, para algunas $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i \neq j$. Si $i < j$, entonces $\mathcal{C}[x_i, x_j]$ es un uv -camino, lo cual nos dice que $u \rightarrow v$. Si $j < i$, entonces $\mathcal{C}[x_j, x_i]$ es un vu -camino, lo cual nos dice que $v \rightarrow u$. De ambos casos, podemos concluir que D es unilateral. ■

En la digráfica de la figura 1.17, $\mathcal{C} := (b, c, d, e, i, a, h, g, f)$ es un camino hamiltoniano; el teorema 1.3.5 afirma entonces que la digráfica es unilateral.

Decimos que una digráfica D es *fuertemente conexa*, o simplemente *fuerte*, si para todo $u, v \in V(D)$, $u \neq v$, se tiene que $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow u$.

Notemos que, en la figura 1.17, f es un pozo y b es una fuente. Por la observación hecha al inicio de esta subsección, se tiene que, para todo vértice v en la digráfica, $f \rightarrow v$ y $v \rightarrow b$. Esto nos dice, en particular, que la digráfica no es fuerte, lo cual nos proporciona un ejemplo de una digráfica unilateral que no es fuerte.

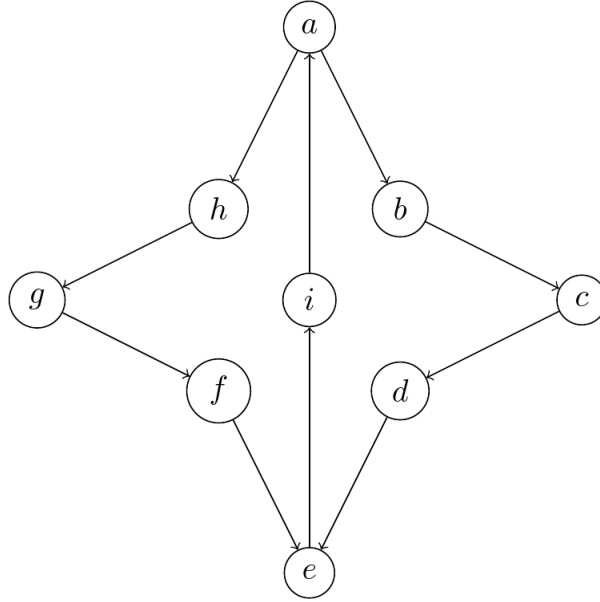


Figura 1.18: Digráfica fuerte

Para ver que la digráfica de la figura 1.18 es fuerte, probemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3.6 * *Una digráfica es fuerte si y sólo si contiene un camino hamiltoniano cerrado.*

Prueba

Sea D una digráfica fuerte, con $V(D) = \{x_0, \dots, x_n\}$. Al ser fuerte, se tiene que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, existe un $x_i x_{i+1}$ -camino, digamos \mathcal{C}_i . Existe también \mathcal{C}_n un $x_n x_0$ -camino. Notemos simplemente que $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \circ \mathcal{C}_1 \circ \dots \circ \mathcal{C}_n$ es un $x_0 x_0$ -camino hamiltoniano cerrado.

Sea D una digráfica que posee un camino hamiltoniano cerrado, digamos $\mathcal{C} = (y_0, \dots, y_m, y_0)$. Sean $u, v \in V(D)$, $u \neq v$. Veamos que $u \rightarrow v$ y que $v \rightarrow u$. Puesto que \mathcal{C} es hamiltoniano, se tiene que $u = y_i$ y $v = y_j$, con $i, j \in \{0, \dots, m\}$, $i \neq j$. Si $i < j$, entonces $\mathcal{C}[y_i, y_j]$ es un uv -camino y $\mathcal{C}[y_j, y_0] \circ \mathcal{C}[y_0, y_i]$ es un vu -camino. Si $j < i$, entonces $\mathcal{C}[y_j, y_i]$ es un vu -camino y $\mathcal{C}[y_i, y_0] \circ \mathcal{C}[y_0, y_j]$ es un uv -camino. De ambos casos, concluimos que $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow u$, por lo que D es fuerte. ■

Corolario 1.3.7 * *Toda digráfica hamiltoniana es fuerte.*

Notemos que, en la digráfica de la figura 1.18, $\mathcal{C} := (a, b, c, d, e, i, a, h, g, f, e, i, a)$ es un camino hamiltoniano cerrado. Por el teorema 1.3.5, se sigue que dicha digráfica es fuerte. Además, ningún camino hamiltoniano cerrado en la digráfica es un ciclo, pues pasan todos al menos dos veces por a (al menos tres si son aa -caminos). Así, tenemos un ejemplo de una digráfica fuerte que no es hamiltoniana, lo cual nos muestra que el recíproco del corolario 1.3.7 no se cumple. De hecho, el siguiente ejemplo muestra que ni siquiera es cierto que toda digráfica fuerte contiene una trayectoria hamiltoniana.

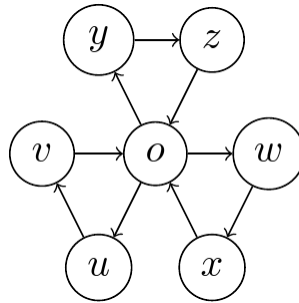


Figura 1.19: Digráfica fuerte sin trayectorias hamiltonianas

En la figura 1.19, $(u, v, o, y, z, o, w, x, o, u)$ es un camino hamiltoniano cerrado. Por el teorema 1.3.5, se tiene que la digráfica es fuerte. Sin embargo, todo camino hamiltoniano en la digráfica pasa al menos dos veces por el vértice o , por lo que ninguno es una trayectoria. Se sigue que la digráfica no tiene trayectorias hamiltonianas.

Decimos que una digráfica D es *débilmente conexa*, o simplemente *débil*, si $D \cup D^{-1}$ es fuerte.

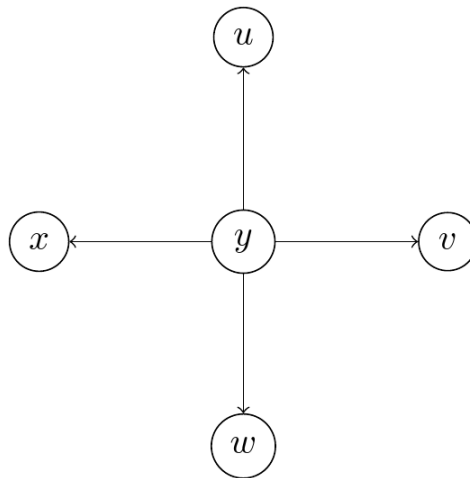


Figura 1.20: Digráfica débil

En la digráfica D de la figura 1.20, notemos que $(y, u, y, v, y, w, y, x, y)$ es un camino hamiltoniano cerrado en $D \cup D^{-1}$. Por el teorema 1.3.5, se tiene que $D \cup D^{-1}$ es fuerte, por lo que D es débil. Además, como $u \nrightarrow v$ y $v \nrightarrow u$, entonces D no es unilateral. Tenemos así un ejemplo de una digráfica débil que no es unilateral, ni fuerte.

Dada una digráfica D , consideremos la siguiente relación entre sus vértices: para todo $u \in V(D)$, $u \sim u$; dados $v, w \in V(D)$, $v \sim w$ si y sólo si $v \rightarrow w$ y $w \rightarrow v$. Se tiene, por definición, que \sim es simétrica y reflexiva; además, como la relación \rightarrow es transitiva, \sim también lo es. Se tiene entonces que \sim es una relación de equivalencia, por lo que separa, en clases ajenas, a los vértices de D .

Sea $v \in V(D)$. La *componente fuerte* de v es la subdigráfica $D_v := D\langle [v]_{\sim} \rangle$ inducida por la clase de equivalencia de v , según la relación \sim . Es claro que, en una digráfica fuerte D , hay una única componente fuerte, la cual contiene a todos los vértices de D .

Observación. Dadas D_0, \dots, D_n todas las componentes fuertes (distintas) de una digráfica D , se cumple que $V(D) = \bigcup_{i=0}^n V(D_i)$; además, para toda $i \in \{0, \dots, n\}$, D_i es una subdigráfica de D , máxima por contención respecto a la propiedad de ser fuerte; por último, dados $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i \neq j$, se cumple que $V(D_i) \cap V(D_j) = \emptyset$ y que $A(D_i) \cap A(D_j) = \emptyset$. No siempre se cumple que $A(D) = \bigcup_{i=0}^n A(D_i)$.

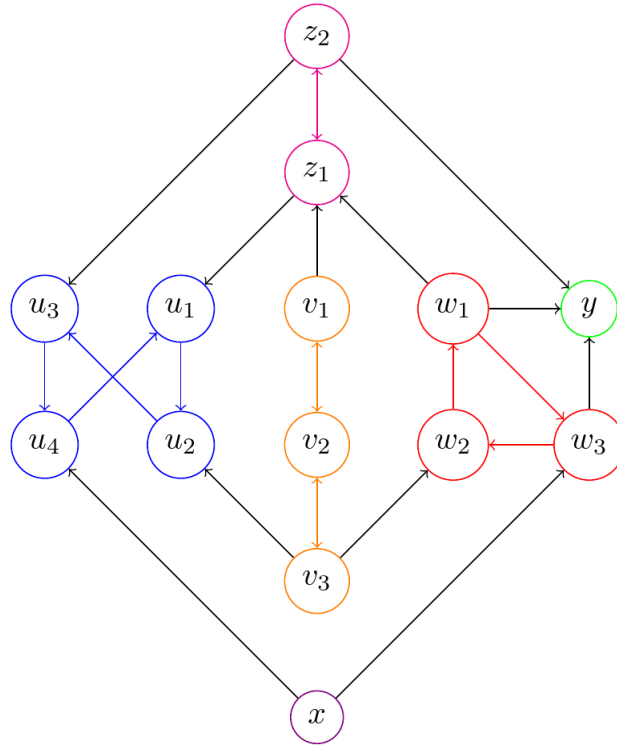


Figura 1.21: Componentes fuertes de una digráfica

Las componentes de la digráfica D de la figura 1.21 son:

- $U := D\langle\{u_1, u_2, u_3, u_4\}\rangle$ (azul), $V := D\langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$ (naranja), $W := D\langle\{w_1, w_2, w_3\}\rangle$ (rojo), $X := D\langle x \rangle$ (morado), $Y := D\langle y \rangle$ (verde) y $Z := D\langle\{z_1, z_2\}\rangle$ (rosa). Es fácil ver que todas son subdigráficas fuertes; veamos que sí son máximas por contención.
- X y Y lo son, pues x es una fuente y y un pozo.
- U lo es, pues no salen flechas de U .
- V lo es, pues no entran flechas a V .
- Z lo es, pues sólo entran dos flechas a Z : v_1z_1 y w_1z_1 ; como no entran flechas a V y no hay caminos de Z a W , se cumple lo que queremos.
- W lo es, pues las componentes son ajenas entre sí y todos los vértices que no están en W , ya forman parte de otra componente.

Decimos que una componente es *inicial* si no hay flechas que salgan de otra componente y entren a ésta; de manera similar, decimos que es *final* si no hay flechas que salgan de ésta y entren a otra componente. En la digráfica de la figura 1.21, V y X son componentes iniciales, mientras que U y Y son componentes finales.

Dadas una digráfica D y D_1, \dots, D_n las componentes fuertes de D , denotamos por $SC(D)$ a la *digráfica de las componentes fuertes* de D , dada como sigue: $V(SC(D)) := \{v_1, \dots, v_n\}$, $A(SC(D)) := \{v_i v_j : i \neq j \text{ y existen } x \in V(D_i), y \in V(D_j) \text{ tales que } xy \in A(D)\}$; es decir, $SC(D)$ es la digráfica que resulta de hacer la contracción de todas las componentes fuertes de D .

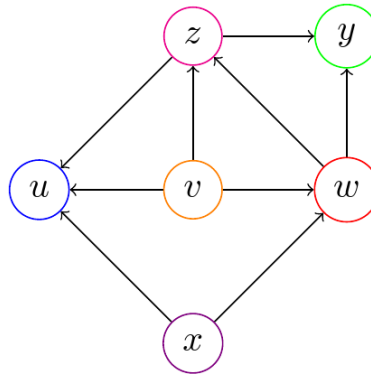


Figura 1.22: Digráfica de las componentes fuertes

La digráfica de la figura 1.22 es $SC(D)$, con D la digráfica de la figura 1.21; los colores y etiquetas de los vértices en $SC(D)$ se corresponden con los de D . El comportamiento entre las distintas componentes fuertes de D queda muy resumido en $SC(D)$. Dadas U, V componentes de una digráfica D y $u, v \in SC(D)$ los vértices asociados a esas componentes, se tiene que: U es una componente inicial en D si y

sólo si u es una fuente en $SC(D)$; V es una componente final en D si y sólo si v es un pozo en $SC(D)$.

Es fácil notar que en la figura 1.22, x, v son fuentes, y u, y son pozos; esto corrobora la información obtenida antes; es decir, que en D , X, V son componentes iniciales y U, V son componentes finales.

Teorema 1.3.8 *Para toda digráfica D , se tiene que $SC(D)$ es acíclica.

Prueba

Sean D una digráfica y $SC(D)$ la digráfica de sus componentes fuertes. Argumentando por contradicción, supongamos que $SC(D)$ tiene un ciclo, digamos (D_0, \dots, D_n, D_0) , $n \geq 1$. Las adyacencias dadas por el ciclo en $SC(D)$ nos dicen que, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, existen $y_i \in V(D_i), x_{i+1} \in V(D_{i+1})$ tales que $y_i x_{i+1} \in A(D)$. Existen también $y_n \in V(D_n), x_0 \in V(D_0)$ tales que $y_n x_0 \in A(D)$. Dada $i \in \{0, \dots, n\}$, D_i es una componente fuerte de D . Así, como $x_i, y_i \in D_i$, existe \mathcal{C}_i un $x_i y_i$ -camino. Notemos que $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \circ (y_0, x_1) \circ \mathcal{C}_1 \circ (y_1, x_2) \circ \dots \circ \mathcal{C}_{n-1} \circ (y_{n-1}, x_n) \circ \mathcal{C}_n \circ (y_n, x_0)$ es un $x_0 x_0$ -camino cerrado en D . Como $\mathcal{C}[x_0, y_n]$ es un $x_0 y_n$ -camino, se tiene que $x_0 \rightarrow y_n$. Además, se tenía ya que $y_n x_0 \in A(D)$, por lo que $y_n \rightarrow x_0$. Se sigue que $x_0 \sim y_n$, por lo que $[x_0]_{\sim} = [y_n]_{\sim}$. Así, $D_0 = D_n$, lo cual es una contradicción. Se sigue que no existe tal ciclo, por lo que $SC(D)$ sí es acíclica. ■

Corolario 1.3.9 * Toda digráfica tiene al menos una componente inicial y una final.

Prueba

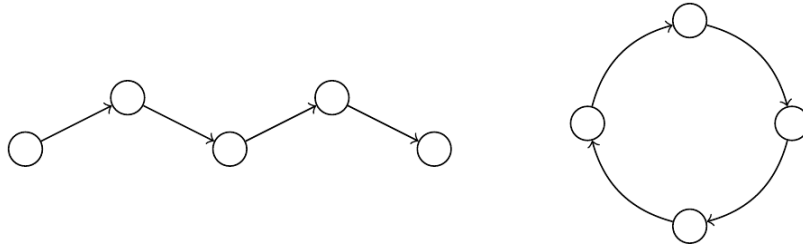
Sea D una digráfica. Por el teorema 1.3.8, se tiene que $SC(D)$ es acíclica. Así, el teorema 1.3.1 nos dice que existen $u, v \in V(SC(D))$ una fuente y un pozo, respectivamente. Se sigue que la componente fuerte correspondiente a u es inicial, y la correspondiente a v es final. ■

La componente inicial es, en algunos casos, la misma que la final; en efecto, en una digráfica fuerte, hay una única componente, por lo que es tanto inicial como final.

1.4. Familias de digráficas

Ya hemos mencionado a algunas familias importantes de digráficas: las acíclicas, las fuertes, las unilaterales, las débiles y las hamiltonianas. Presentamos en esta sección a más familias relacionadas con éstas. Para esto, hablemos primero de las dos familias de digráficas más simples. Para fines prácticos, diremos que una digráfica es la *única* en cumplir alguna propiedad, si lo es salvo isomorfismos.

Una *trayectoria* es una digráfica inducida por las flechas de una uv -trayectoria en alguna digráfica D . Dada $n \in \mathbb{Z}^+$, P_n denota a la única trayectoria de orden n .

Figura 1.23: Trayectoria P_5 y ciclo C_4

Un *ciclo* es una digráfica inducida por las flechas de un uu -ciclo en alguna digráfica D . Dada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, C_n denota al único ciclo de orden n .

Es importante notar que las digráficas fuertes de orden mayor a 1 siempre contienen ciclos; las digráficas unilaterales, al igual que las débiles, pueden ser acíclicas.

Un *bosque* D es una digráfica tal que los únicos ciclos en $D \cup D^{-1}$ son de longitud 2. La definición de bosque en esta tesis varía ligeramente de otras definiciones, pues permite que los bosques tengan ciclos de longitud 2; esto nos servirá para volver más sencillas ciertas demostraciones que hagan uso de este concepto.

Evidentemente, no toda digráfica acíclica es un bosque; además, los bosques son prácticamente acíclicos, pues sólo tienen ciclos de longitud 2. Un bosque es llamado un *árbol* si es débilmente conexo.

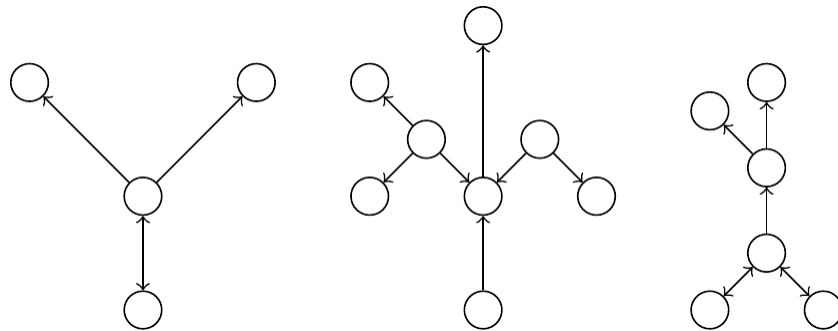


Figura 1.24: Bosque

Decimos que una digráfica D es *semicompleta*, si para todo $u, v \in V(D)$, $u \neq v$, se tiene que $uv \in A(D)$, o $vu \in A(D)$ (o ambos). Es claro que toda digráfica semicompleta es unilateral.

Decimos que una digráfica D es *completa*, si para todo $u, v \in V(D)$, $u \neq v$, se tiene que $uv \in A(D)$ y $vu \in A(D)$; es una digráfica semicompleta simétrica. Dado $n \in \mathbb{N}$, K_n denota a la única digráfica completa de orden n ; es la única digráfica $(n-1)$ -regular de orden n .

Notemos que dada cualquier digráfica D de orden n , se tiene que $K_n \cong D \cup \bar{D}$.

Dada una digráfica D y un árbol T , decimos que T es un *árbol generador* de T , si T es una subdigráfica generadora de D .

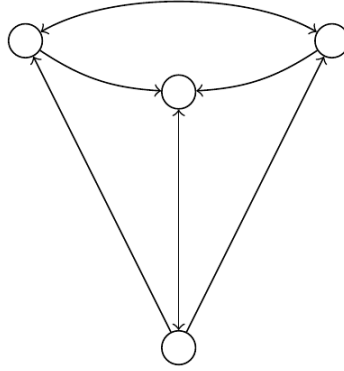
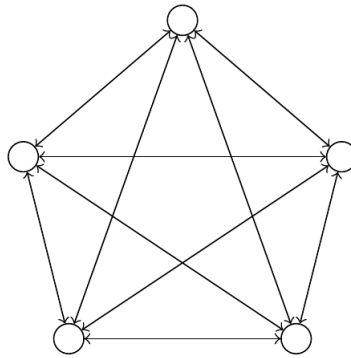


Figura 1.25: Digráfica semicompleta

Figura 1.26: K_5

Teorema 1.4.1 * *Toda digráfica D débilmente conexa tiene al menos un árbol generador.*

Prueba por inducción sobre el tamaño de D

Si D es una digráfica débil de tamaño 1, entonces es P_1 , la cual ya es un árbol. Si D es una digráfica débil de tamaño 2, entonces es K_2 o bien es un árbol de orden 3. En el caso en que es K_2 , P_2 es un árbol generador.

Supongamos que se cumple para todas las digráficas débiles de tamaño m , con $m \geq 2$. Sea D una digráfica débil de tamaño $m + 1$. Si D es un bosque, entonces es también un árbol. Supongamos entonces que D no es un bosque, es decir, que D tiene un ciclo, o que $D \cup D^{-1}$ tiene un ciclo de longitud mayor a 2. En ambos casos, existe \mathcal{C} un ciclo en $D \cup D^{-1}$, digamos (x_0, \dots, x_n, x_0) . consideremos $x_0x_1 \in A(D \cup D^{-1})$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_0x_1 \in A(D)$. Veamos que $E := (D - x_0x_1) \cup (D - x_0x_1)^{-1} = (D \cup D^{-1}) - x_0x_1 - x_1x_0$ es fuerte. Basta ver que para todo $v \in V(E)$, $v \rightarrow x_0$ y $x_0 \rightarrow v$ en E , pues para cualesquiera $u, v \in V(D)$, podemos construir uv y vu -caminos concatenando ux_0, x_0v - y vx_0, x_0u -caminos, respectivamente.

Sea $v \in V(E) = V(D \cup D^{-1})$. Como $D \cup D^{-1}$ es fuerte, se tiene que existen \mathcal{A} una vx_0 -trayectoria y \mathcal{B} una x_0v -trayectoria, respectivamente, ambas en $D \cup D^{-1}$. Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son trayectorias en E , ya acabamos.

Si \mathcal{A} no es una trayectoria en E , se tiene que $x_0x_1 \in A(\mathcal{A})$ o $x_1x_0 \in A(\mathcal{A})$. Como es una trayectoria en D , no repite vértices, por lo que no puede tener ambas flechas; además, al ser una vx_0 trayectoria, no puede tener a x_0x_1 (de lo contrario repite al vértice x_0). Así, tiene a la flecha x_1x_0 y además $\mathcal{A} = (v, \dots, x_1, x_0)$. Como $D \cup D^{-1}$ tiene puras flechas simétricas, entonces $\mathcal{C}^* := (x_0, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$ es un ciclo en $D \cup D^{-1}$. Se sigue que $\mathcal{C}^*[x_1, x_0]$ es una x_1x_0 -trayectoria en E . Así, $\mathcal{A}[v, x_1] \circ \mathcal{C}^*[x_1, x_0]$ es un vx_0 -camino en E , lo cual nos dice que $v \rightarrow x_0$ en E .

Análogamente, si \mathcal{B} no es una trayectoria en E , entonces $x_0x_1 \in A(\mathcal{B})$ o $x_1x_0 \in A(\mathcal{B})$ y no ambas. Como es una x_0v trayectoria, no puede tener a x_1x_0 , por lo que tiene a x_0x_1 y $\mathcal{B} = (x_0, x_1, \dots, v)$. Notemos que $\mathcal{C}^*[x_0, x_1] \circ \mathcal{B}[x_1, v]$ es un x_0v -camino en E , lo cual nos dice que $x_0 \rightarrow v$ en E .

Se sigue que E es fuerte, lo cual nos dice que $D - x_0x_1$ es débil. Como $D - uv$ tiene tamaño m , se tiene, por hipótesis de inducción, que existe T un árbol generador de $D - uv$. Como $D - uv$ tiene el mismo orden que D , entonces T es también un árbol generador de D . ■

Un *clan* de una digráfica D es un subconjunto $S \subseteq V(D)$ tal que $D\langle S \rangle$ es una digráfica completa. El *número de clan* de una digráfica D , denotado por $\omega(D)$, es el máximo $n \in \mathbb{N}$ tal que $V(D)$ tiene por subconjunto a un clan en cardinalidad n . Un *semiclan* de D es un subconjunto $S \subseteq V(D)$ tal que $D\langle S \rangle$ es una digráfica semicompleta. El *número de semiclan* de una digráfica D , denotado por $\omega_s(D)$, es el máximo $n \in \mathbb{N}$ tal que $V(D)$ tiene por subconjunto a un semiclan en cardinalidad n .

Observación. $\omega_s(D) = \omega(D \cup D^{-1})$ y $\omega(D) \leq \omega_s(D)$.

En efecto, $S \subseteq V(D) = V(D \cup D^{-1})$ es un semiclan en D si y sólo si $D\langle S \rangle$ es semicompleta si y sólo si $S\langle D \cup D^{-1} \rangle$ es completa si y sólo si S es un clan en $D \cup D^{-1}$. Así, los semiclans de D coinciden con los clanes de $D \cup D^{-1}$, por lo que $\omega_s(D) = \omega(D \cup D^{-1})$. Además, es claro que $\omega(D) \leq \omega(D \cup D^{-1}) = \omega_s(D)$, por lo que $\omega(D) \leq \omega_s(D)$.

Decimos que una digráfica D es un *torneo*, si para todo $u, v \in V(D)$, $u \neq v$, se tiene que $uv \in A(D)$ o $vu \in A(D)$, y no ambos; los torneos son digráficas semicompletas asimétricas. Esta familia de digráficas será el objeto de estudio de los siguientes capítulos.

Observación. En la figura 1.27, el torneo H es hamiltoniano, pues las flechas que corresponden a las aristas del cuadrado forman un ciclo hamiltoniano. Por otro lado, A es acíclico; en efecto, los torneos no tienen ciclos de longitud 2, pues no tienen flechas simétricas; además, como A tiene una fuente y un pozo, no pueden formar parte de ningún ciclo, por lo que tampoco hay ciclos de longitud mayor a 2.

Dados T_1 y T_2 torneos tales que $T_1 \subseteq T_2$, decimos que T_1 es un *subtorneo* de T_2 y que T_2 es un *supertorneo* de T_1 . Es inmediato que toda subdigráfica de un torneo T , inducida por un conjunto de vértices, es un subtorneo de T .

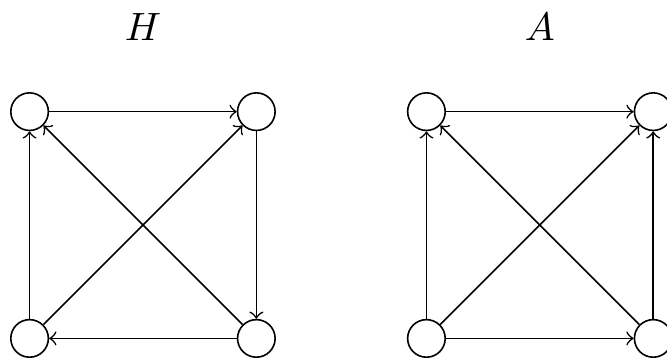


Figura 1.27: Torneos de orden 4

Decimos que una digráfica D es *transitiva*, si para todos $u, v, z \in V(D)$, se tiene que, si $uv, vz \in A(D)$, entonces $uz \in A(D)$.

Proposición 1.4.2 * *Una digráfica D es transitiva si y sólo si, para todo $u, v \in V(D)$, con $u \neq v$, se cumple que si $u \rightarrow v$, entonces $uv \in A(D)$.*

Prueba

Sea D una digráfica transitiva. Probemos que para todo $u, v \in V(D)$, si existe \mathcal{C} una uv -trayectoria, entonces $uv \in A(D)$. Lo haremos por inducción sobre $l(\mathcal{C})$.

Sean $u, v \in V(D)$, tales que $u \rightarrow v$ y \mathcal{C} una uv -trayectoria, con $l(\mathcal{C}) = 1$. Esto nos dice que $\mathcal{C} = (u, v)$, por lo que $uv \in A(D)$.

Supongamos que para todo $u, v \in V(D)$ tales que existe una uv -trayectoria de longitud n , con $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $uv \in A(D)$. Sean $u, v \in V(D)$ y sea \mathcal{C} una uv -trayectoria, con $l(\mathcal{C}) = n + 1$, digamos $\mathcal{C} = (u = x_0, \dots, x_n, x_{n+1} = v)$. Es claro que $\mathcal{C}[x_0, \dots, x_n]$ es una x_0x_n -trayectoria de longitud n . Por hipótesis de inducción, se tiene que $x_0x_n \in A(D)$. Así, como $x_nx_{n+1} \in A(D)$, se tiene por transitividad de D que $x_0x_{n+1} \in A(D)$; es decir, que $uv \in A(D)$.

Para el recíproco, supongamos que D cumple que, para todo $u, v \in V(D)$, con $u \neq v$, si $u \rightarrow v$, entonces $uv \in A(D)$. Veamos que D es transitiva. Sean $x, y, z \in V(D)$ tales que $xy, yz \in A(D)$. Así, (x, y, z) es un xz -camino en D , por lo que $x \rightarrow z$. Se sigue, por hipótesis, que $xz \in A(D)$. ■

La *cerradura transitiva* de una digráfica D es la digráfica $CT(D)$ dada como sigue: $V(CT(D)) = V(D)$, $A(CT(D)) = \{uv : u \neq v \text{ y } u \rightarrow v\}$.

Proposición 1.4.3 * *Dada una digráfica D , se cumple lo siguiente:*

- (i) $CT(D)$ es la digráfica mínima por contención que es transitiva y tiene a D como subdigráfica.
- (ii) D es unilateral si y sólo si $CT(D)$ es semicompleta.

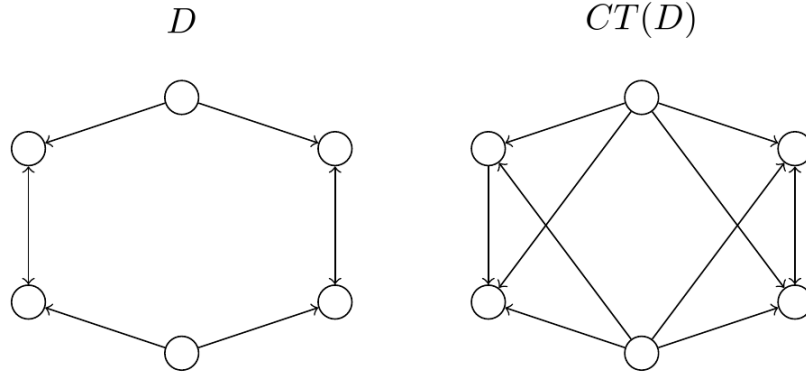


Figura 1.28: Cerradura transitiva

(iii) D es fuerte si y sólo si $CT(D)$ es completa.

Prueba

- (i) Por la proposición 1.4.2, es claro que $CT(D)$ es transitiva. Para ver que es la mínima por contención con esta propiedad, tomemos E una digráfica transitiva que contiene a D ; veamos que contiene también a $CT(D)$. Como $V(CT(D)) = V(D) \subseteq V(E)$, se tiene que $V(CT(D)) \subseteq V(E)$. Sea $uv \in A(CT(D))$. Por definición de $CT(D)$ se tiene que $u \rightarrow v$ en D . Como $u, v \in V(CT(D)) \subseteq V(E)$, entonces $u, v \in V(E)$. Como E contiene a D , entonces $u \rightarrow v$ en E . Como E es transitiva y $u \rightarrow v$ en E , se tiene, por la proposición 1.4.2, que $uv \in A(E)$. Se sigue que $A(CT(D)) \subseteq A(E)$, por lo que E contiene a $CT(D)$.
- (ii) Sabemos ya que D es unilateral si cumple que para todo $u, v \in V(D)$, $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$; $CT(D)$ es semicompleta si cumple que para todo $u, v \in V(CT(D))$, $uv \in A(CT(D))$ o $vu \in A(CT(D))$. Además, se sigue de la definición de $CT(D)$, que dados $u, v \in V(D) = V(CT(D))$, $u \rightarrow v$ en D si y sólo si $uv \in A(CT(D))$. Se sigue que D es unilateral si y sólo si $CT(D)$ es semicompleta.
- (iii) Este inciso se prueba de manera similar al inciso (ii), sustituyendo en la prueba los conceptos *débil* y *semicompleta*, por *fuerte* y *completa*, respectivamente. Se sigue que D es fuerte si y sólo si $CT(D)$ es completa. ■

El inciso (iii) nos dice, en particular, que las únicas digráficas fuertes y transitivas son completas; así, ningún torneo es a su vez transitivo y fuerte (a excepción de K_1). Evidentemente, existen torneos fuertes no transitivos y torneos transitivos no fuertes más complejos; en efecto, en la figura 1.27, tenemos 2 torneos H y A de orden 4, H fuerte y A transitivo.

La digráfica de la figura 1.29 ilustra bien la forma en que se relacionan las distintas familias que hemos visto.

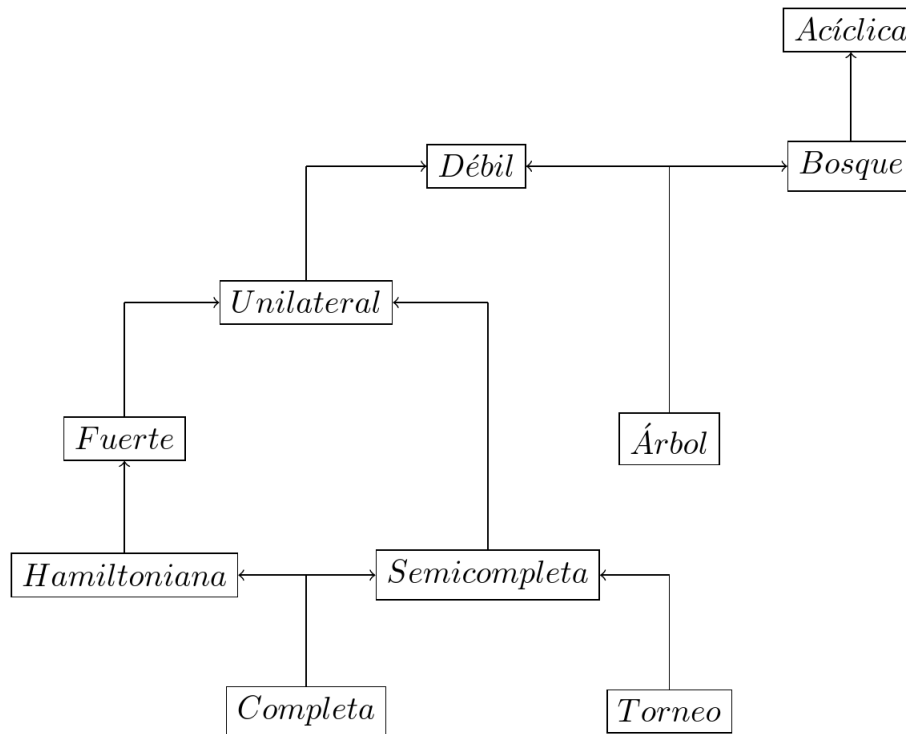


Figura 1.29: Familias de digráficas

Una flecha de un recuadro a otro que se encuentre más arriba implica que el concepto del primer vértice implica al del segundo; por ejemplo, toda digráfica completa es hamiltoniana, que es a su vez fuerte, a su vez unilateral, y a su vez débil. Pusimos la flecha de *bosque* a *acíclica*, pues aunque los bosques pueden tener ciclos de longitud 2, ciertos conceptos se definen omitiendo a éstos últimos como ciclos. No agregamos el concepto *ser transitiva*, pues no implica a ninguno de los otros, y el único concepto de la digráfica que lo implica es *ser completa*.

$\mathbb{N}: D \text{ es } k\text{-coloreable}\}$ es llamado el *número cromático* de D ; si $\chi(D) = k$, decimos que D es *k-cromática*.

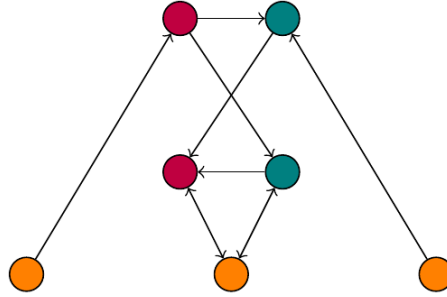


Figura 2.2: Digráfica 3-cromática

$\{N, M, A\}$ es una 3-coloración de la digráfica de la figura 2.2, con N el conjunto de vértices naranjas, M el de magentas, y A el de azules. Además, contiene un C_3 , que tiene número cromático igual a 3. Así, la digráfica no puede ser 2-coloreada, por lo que es 3-cromática.

Determinar el número cromático de cualquier digráfica es un problema muy complejo; sin embargo, es posible determinar el número cromático de ciertas familias de digráficas.

Es claro que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, $\chi(P_n) = 2$, con P_n la trayectoria de orden n ; $\chi(C_{2n}) = 2$ y $\chi(C_{2n+1}) = 3$, con C_{2n} y C_{2n+1} los ciclos de orden $2n$ y $2n + 1$, respectivamente.

Dadas $n \in \mathbb{Z}^+$ y una digráfica D semicompleta de orden n , se tiene que $\chi(D) = n$. En particular, si D es un torneo de orden n y K_n es la digráfica completa de orden n , se tiene que $\chi(D) = \chi(K_n) = n$. El número cromático de las digráficas semicompletas nos proporciona una cota inferior para el número cromático de cualquier digráfica.

Proposición 2.1.2 * Sea D una digráfica con número de semiclan $\omega_s(D) = n$ y número cromático $\chi(D) = m$. Se cumple entonces que $n \leq m$.

Prueba

Sean $\{A_0, \dots, A_m\}$ una m -coloración propia de D y E una subdigráfica semicompleta de D de orden n . Evidentemente, $\{A_0 \cap V(E), \dots, A_m \cap V(E)\}$ es una k -coloración propia de E , con $k \leq m$ ($A_i \cap V(E)$ puede ser igual al vacío para alguna $i \in \{0, \dots, m\}$). Sabemos ya que $\chi(D) = n$, pues S es semicompleta de orden n . Se tiene entonces que $n \leq k$, por lo que $n \leq m$. ■

El siguiente resultado nos da una cota superior para el número cromático de una digráfica, en función de la cantidad de vecinos de los vértices.

Teorema 2.1.3 * Sean G una digráfica y $k \in \mathbb{Z}^+$. Si toda subdigráfica H no vacía de G tiene un vértice v tal que $|N_H(v)| \leq k - 1$, entonces G es k -coloreable.

Prueba

Argumentando por contradicción, supongamos que G no es k -coloreable. Notemos entonces $\mathcal{H} := \{H \subseteq G: H \text{ no es } k\text{-coloreable}\} \neq \emptyset$. Tomemos $H \in \mathcal{H}$ de menor orden posible. Por hipótesis, existe $v \in V(H)$ tal que $|N_H(v)| \leq k - 1$. Por la minimalidad de H , es claro que $H - v$ es k -coloreable; sea $C := \{C_1, \dots, C_k\}$ una k -coloración propia de $H - v$. Como $|N_H(v)| \leq k - 1$, entonces existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que, para todo $w \in N_H(v)$, $w \notin C_i$; supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i = 1$. Se tiene entonces que $\{C_1 \cup \{v\}, \dots, C_k\}$ es una k -coloración propia de H , pues C_1, \dots, C_k son independientes, y como $N_H(V) \cap C_1 = \emptyset$, entonces $C_1 \cup \{v\}$ es también independiente. Así, H es k -coloreable, lo cual es una contradicción. Se sigue que G sí es k -coloreable. ■

Corolario 2.1.4 * Sea G una digráfica con $\Delta^0(G) = k - 1$. Se cumple entonces que G es k -coloreable.

Prueba

Como $\Delta^0(G) = k - 1$, entonces, para todo $v \in V(G)$, $|N_G(v)| \leq k - 1$. Sea $H \subseteq G$ no vacía. Puesto que para todo $v \in V(H)$, $|N_H(v)| \leq |N_G(v)| \leq k - 1$, entonces cualquier vértice de H cumple la hipótesis del teorema 2.1.3; se sigue que G es k -coloreable. ■

Decimos que una digráfica D es k -partita si existe $\{S_1, \dots, S_k\}$ una partición de $V(D)$ tal que, para cada $1 \leq i \leq k$, se tiene que no hay $S_i S_i$ -flechas en D . Si D es una digráfica k -partita, con $k = 2$, decimos que es *bipartita*; en este caso, llamamos *bipartición* a la partición $\{S_1, S_2\}$; si $k = 3$, decimos que es *tripartita*. Es claro que si una digráfica D es k -partita, entonces es k -coloreable.

Teorema 2.1.5 * Una digráfica D fuerte es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.

Prueba

Por contrapositiva, supongamos que D tiene un ciclo de longitud impar, digamos \mathcal{C} . Sabemos ya que $\chi(\mathcal{C}) = 3$ y como $\mathcal{C} \subseteq D$, entonces $\chi(D) \geq 3$, por lo que D no es bipartita.

Para el recíproco, supongamos que D no tiene ciclos de longitud impar. Sea $x \in V(D)$. Puesto que D es fuerte, la distancia de un vértice a otro está bien definida. Consideremos $X := \{v \in V(D): d(x, v) \text{ y } d(v, x) \text{ son pares}\}$ y $Y := \{v \in V(D): d(x, v) \text{ y } d(v, x) \text{ son impares}\}$. X y Y son ajenos, pues la distancia de un vértice a otro es fija. Veamos que $\{X, Y\}$ es una bipartición de $V(D)$; probemos primero que es una partición. Argumentando por contradicción, supongamos que no lo es, es decir, que $V(D) - (X \cup Y) \neq \emptyset$; elijamos a $y \in V(D) - (X \cup Y)$ de forma

que $d(x, y) + d(y, x)$ sea mínima. Evidentemente $y \neq x$, pues $x \in X$. Así, $d(x, y)$ es par y $d(y, x)$ es impar, o viceversa. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que nos encontramos en el primero de estos casos. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} una xy -trayectoria con $l(\mathcal{C}) = d(x, y)$ y una yx -trayectoria con $l(\mathcal{D}) = d(y, x)$, respectivamente. Si $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$ fuera un ciclo, entonces sería un ciclo de longitud impar, lo cual contradice nuestra hipótesis inicial. Puesto que no es un ciclo, existe $z \in V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})$ tal que $x \neq z \neq y$; podemos suponer que z es el primer vértice que aparece en \mathcal{D} y cumple esto. Por la elección de z , se tiene que $\mathcal{C}[z, y] \circ \mathcal{D}[y, z]$ es un ciclo; por nuestra hipótesis inicial, es de longitud par. Como \mathcal{C} es de longitud par y \mathcal{D} de longitud impar, entonces $\mathcal{C}[x, z]$ y $\mathcal{D}[z, x]$ tienen longitud par e impar, respectivamente. Además, como $l(\mathcal{C}) = d(x, y)$ y $l(\mathcal{D}) = d(y, x)$, entonces $l(\mathcal{C}[x, z]) = d(x, z)$ y $l(\mathcal{D}[z, x]) = d(z, x)$, por lo que $z \in V(D - X - Y)$; además, $d(x, z) < d(x, y)$ y $d(z, x) < d(y, x)$, lo cual contradice la elección de y . Se sigue que $\{X, Y\}$ es una partición de $V(D)$.

Falta ver que X y Y son independientes. Argumentando por contradicción, supongamos que X no es independiente; la prueba para Y es análoga. Sean $u, v \in X$ tales que $uv \in A(D)$. Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 una xu -trayectoria y una vx -trayectoria, respectivamente, ambas de longitud mínima. Es claro que $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \circ (u, v) \circ \mathcal{P}_2$ es un camino cerrado de longitud impar, pues $l(\mathcal{P}_1)$ y $l(\mathcal{P}_2)$ tienen la misma paridad. Por lo tanto, no es un ciclo, por lo que existe $z \in V(\mathcal{P}_1) \cap V(\mathcal{P}_2)$ tal que $z \neq x$; podemos suponer que z es el primer vértice que aparece en \mathcal{P}_2 y cumple esto. Por la elección de z , se tiene que $\mathcal{P}_1[z, u] \circ (u, v) \circ \mathcal{P}_2[v, z]$ es un ciclo. Puesto que es de longitud par, entonces $\mathcal{P}_1[z, u]$ y $\mathcal{P}_2[v, z]$ tienen distinta paridad; se sigue que $\mathcal{P}_1[x, z]$ y $\mathcal{P}_2[z, x]$ tienen distinta paridad. Además, como \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 eran de longitud mínima, entonces $\mathcal{P}_1[x, z]$ y $\mathcal{P}_2[z, x]$ también lo son. Por lo tanto, $d(x, z)$ y $d(z, x)$ tienen distinta paridad, por lo que $z \notin X \cup Y$, lo cual contradice que $\{X, Y\}$ sea una partición de $V(D)$. Se sigue que X es independiente. ■

Corolario 2.1.6 * *Una digráfica D es bipartita si y sólo si $D \cup D^{-1}$ no tiene ciclos de longitud impar.*

Prueba

Por contrapositiva, supongamos que $D \cup D^{-1}$ tiene un ciclo de longitud impar, digamos C_{2n+1} , para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sabemos ya que $\chi(C_{2n+1}) = 3$. Así, como $C_{2n+1} \subseteq D \cup D^{-1}$, entonces $\chi(D \cup D^{-1}) \geq 3$. Es claro que $\chi(D) = \chi(D \cup D^{-1})$, pues el sentido de las flechas no juega un papel en la definición de conjunto independiente; por lo tanto, $\chi(D) \geq 3$. Se sigue que D no es 2-coloreable, o lo que es lo mismo, que D no es bipartita.

Para el recíproco, supongamos que $D \cup D^{-1}$ no tiene ciclos de longitud impar. Sean A_1, \dots, A_n las componentes fuertes de $D \cup D^{-1}$, las cuales tampoco tienen ciclos de longitud impar. Por el teorema 2.1.5, se cumple que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, A_i es bipartita; sea $\{P_i, Q_i\}$ una bipartición de A_i . Puesto $D \cup D^{-1}$ es simétrica, entonces las componentes no sólo son ajenas dos a dos por vértices, sino también por flechas.

Sean $P := \bigcup_{i=1}^n P_i$ y $Q := \bigcup_{i=1}^n Q_i$. Se cumple entonces que $\{P, Q\}$ es una bipartición de $D \cup D^{-1}$, y como $V(D) = V(D \cup D^{-1})$ y $A(D) \subseteq A(D \cup D^{-1})$, entonces $\{P, Q\}$ es también una bipartición de D . Se sigue que D es bipartita. ■

Corolario 2.1.7 * *Todo árbol es bipartita. Además, cualquier árbol de orden $n \geq 2$ es 2-cromático.*

Prueba

Sea D un árbol. Como D cumple que los únicos ciclos de $D \cup D^{-1}$ son de longitud 2, se tiene, por el corolario 2.1.6, que D es bipartita. Además, dado D un árbol de orden $n \geq 2$, D tiene al menos una flecha, por lo que D no es 1-coloreable. Se sigue que $\chi(D) = 2$. ■

Sean $n, k \in \mathbb{Z}^+$. consideremos $N := \{x_1, \dots, x_n\}$ y $K := \{y_1, \dots, y_k\}$. Denotamos por $K_{n,k}$ la digráfica *completa bipartita* dada como sigue: $V(K_{n,k}) := N \cup K$ y $A(K_{n,k}) := \{xy : x \in N, y \in K\} \cup \{yx : x \in N, y \in K\}$. Este concepto puede generalizarse a multipartitas. Sean $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^+$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $A_i := \{x_1^i, \dots, x_{k_i}^i\}$. Denotamos por K_{k_1, \dots, k_n} a la digráfica *completa multipartita* dada como sigue: $V(K_{n,k}) := \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A(D) := \{uv : u \in A_i, v \in A_j, i \neq j\}$. Dados los números k_1, \dots, k_n , esta digráfica es única; el orden de los k_i no importa.

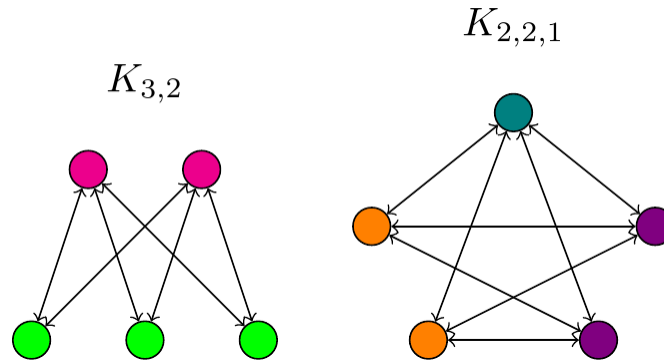


Figura 2.3: Digráficas completas multipartitas

2.2. Torneos

Los torneos cumplen muchas cosas que las digráficas, en general, no cumplen. Probemos algunas de ellas.

La digráfica de la figura 1.19 es un ejemplo de una digráfica fuerte sin trayectorias hamiltonianas. El siguiente teorema prueba que, en torneos, siempre podemos encontrar trayectorias hamiltonianas, incluso sin pedir la condición de ser fuerte.

Teorema 2.2.1 (Rédei) * *Todo torneo contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Prueba

Sea T un torneo y sea $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n)$ una trayectoria de longitud máxima en T . Argumentando por contradicción, supongamos que \mathcal{C} no es hamiltoniana, es decir, que existe $y \in V(T) \setminus V(\mathcal{C})$.

- Caso 1. Para toda $i \in \{0, \dots, n\}$, $x_i y \in A(T)$. En este caso, se cumple, en particular, que $x_n y \in A(T)$, por lo que (x_0, \dots, x_n, y) es una trayectoria que pasa por todos los vértices de \mathcal{C} y por y .
- Caso 2. Existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $y x_i \in A(T)$. Consideremos m el mínimo de las i que lo cumplen. Si $i = 0$, entonces $y x_0 \in A(T)$, por lo que (y, x_0, \dots, x_n) es una trayectoria que pasa por todos los vértices de \mathcal{C} y por y . Si $m > 0$, entonces $m - 1 \in \{0, \dots, n\}$ y es tal que $x_{m-1} y \in A(T)$. Así, $\mathcal{C}[x_0, x_{m-1}] \circ (x_{m-1}, y, x_m) \circ \mathcal{C}[x_m, x_n]$ es una trayectoria que pasa por todos los vértices de \mathcal{C} y por y .

En ambos casos, las trayectorias encontradas tienen longitud mayor a \mathcal{C} , lo cual contradice la elección de \mathcal{C} . Se sigue que \mathcal{C} sí es una trayectoria hamiltoniana. ■

Notemos que la prueba del teorema 1.3.5, el cual nos dice que toda digráfica unilaterial contiene un camino hamiltoniano, es una calca de la del teorema 2.2.1. Esto se debe a que los torneos son digráficas semicompletas, y las propiedades *ser semicompleta* y *ser unilaterial*, son casi idénticas, la primera siendo la versión fuerte de las dos. La relación entre ambas propiedades, idéntica a la que tienen *ser fuerte* y *ser completa*, puede observarse también en la proposición 1.4.3 vista en el capítulo pasado.

Los torneos fuertes cumplen algo aún más interesante: son hamiltonianos. El siguiente teorema prueba, en particular, esta afirmación.

Teorema 2.2.2 (Moon) * *Para todo torneo fuerte T de orden $n \geq 3$, para todo $x \in V(T)$ y cada $k \in \{3, 4, \dots, n\}$, existe un xx -ciclo de longitud k .*

Prueba por inducción sobre k

Sean T un torneo fuerte de orden $n \geq 3$ y $x \in V(T)$. Como T es fuerte, entonces x no es una fuente ni un pozo. Así, $N^+(x) \neq \emptyset \neq N^-(x)$. Además, como T es un torneo, entonces $V(T) = N^+(x) \cup N^-(x) \cup \{x\}$; se tiene también que no hay flechas de $N^+(x)$ a x . Como T es fuerte, entonces para cada $u \in N^+(x)$ y cualquier $v \in N^-(x)$, existe un uv -camino en T . Como no hay flechas de $N^+(x)$ a x y $V(T) = N^+(x) \cup N^-(x) \cup \{x\}$, entonces el camino debe contener una flecha de $N^+(x)$ a $N^-(x)$, digamos $yz \in A(T)$. Así, (x, y, z, x) es un xx -ciclo de longitud 3 en T .

Supongamos que T tiene un xx -ciclo de longitud t , digamos $\mathcal{C} := (x = x_0, x_1, \dots, x_{t-1}, x_t = x)$, para alguna $t \in \{3, \dots, n-1\}$.

Probemos que hay un xx -ciclo de longitud $t+1$. Como T es un torneo, entonces, para cada $y \in V(T) \setminus V(\mathcal{C})$ y para cada $i \in \{0, \dots, t-1\}$, se tiene que $y x_i \in A(T)$ o

$x_i y \in A(T)$. Sean $D := \{y \in V(T) \setminus V(\mathcal{C}) : yx_i \in A(T) \text{ para toda } i \in \{0, \dots, t-1\}\}$ y $S := \{y \in V(T) \setminus V(\mathcal{C}) : x_i y \in A(T) \text{ para toda } i \in \{0, \dots, t-1\}\}$.

- Caso 1. $V(T) = D \cup S \cup V(\mathcal{C})$.

Como T es fuerte y ningún vértice de S domina a ninguno de \mathcal{C} , se cumple, en este caso, que existen $y \in S$ y $z \in D$ tales que $yz \in A(T)$. Además, se tiene que $x_0 y, z x_2 \in A(T)$. Así, $(x_0, y, z, x_2) \circ \mathcal{C}[x_2, x_0]$ es un ciclo de longitud $t+1$ en T .

- Caso 2. Existe $y \in V(T) \setminus (D \cup S \cup V(\mathcal{C}))$.

Dicho y cumple que existen $i, j \in \{0, \dots, t-1\}$ tales que $x_i y, y x_j \in A(T)$. Sea $M = \{i \in \{0, \dots, t-2\} : x_i y, y x_{i+1} \in A(T)\}$. Si $M = \emptyset$, afirmamos que $x_{t-1} y, y x_0 \in A(T)$; en caso contrario, todas las flechas entre \mathcal{C} y y irían en un único sentido. Por lo tanto, $\mathcal{C}[x_0, x_{t-1}] \circ (x_{t-1}, y, x_0)$ es un ciclo de longitud $t+1$. Si $M \neq \emptyset$, tomemos $j \in M$; en este caso, $\mathcal{C}[x_0, x_j] \circ (x_j, y, x_{j+1}) \circ \mathcal{C}[x_{j+1}, x_t]$ es un ciclo de longitud $t+1$.

En ambos casos, pudimos construir un $x_0 x_0$ -ciclo de longitud $t+1$. ■

Corolario 2.2.3 (Camion) * Sea T un torneo de orden $n \geq 2$. T es fuerte si y sólo si es hamiltoniano.

Prueba

Sea T un torneo fuerte de orden $n \geq 2$. Como no hay torneos fuertes de orden 2, podemos suponer que $n \geq 3$. Se tiene entonces, por el teorema 2.2.2, que existe un ciclo de orden n , por lo que dicho ciclo debe ser hamiltoniano.

El recíproco es cierto por el corolario 1.3.7, el cual afirma, más en general, que toda digráfica hamiltoniana es fuerte. ■

Corolario 2.2.4 * Para todo torneo T y para todo $x \in V(T)$, si existe un xx -ciclo de longitud $k \geq 3$, entonces existe un xx -ciclo de longitud l para toda $3 \leq l \leq k$.

Prueba

Sean T un torneo, $x_0 \in V(T)$ y $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_k, x_0)$ un $x_0 x_0$ -ciclo de longitud $k \geq 3$. Sea $S = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$. Como (x_0, \dots, x_k, x_0) es un ciclo hamiltoniano en $T\langle S \rangle$, entonces es un torneo hamiltoniano, por lo que es fuerte; además, $k \geq 3$ es el orden de $T\langle S \rangle$. Se tiene entonces, por el teorema 2.2.2, que $T\langle S \rangle$ tiene un $x_0 x_0$ -ciclo de longitud l para toda $3 \leq l \leq k$. ■

Ser acíclica y ser transitiva son propiedades muy distintas. En efecto, para toda $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, K_n es transitiva y tiene ciclos de longitud k para toda $k \in \{2, \dots, n\}$. Además, dada $n \in \mathbb{Z}^+$, P_n es acíclica y no es transitiva. Sin embargo, en torneos, los conceptos coinciden.

Teorema 2.2.5 * *Un torneo es acíclico si y sólo si es transitivo.*

Prueba

Sean T un torneo acíclico y $x, y, z \in A(D)$ tales que $xy, yz \in A(D)$. Como T es un torneo, se tiene que x, y, z son vértices distintos; se tiene también que $xz \in A(D)$ o $zx \in A(D)$. No puede suceder que $zx \in A(D)$, pues, en ese caso, se tendría que (x, y, z, x) es un ciclo en T ; así, $xz \in A(D)$.

Para el recíproco, sea T un torneo transitivo. Argumentando por contradicción, supongamos que T tiene un ciclo, digamos $\mathcal{C} := (x_0, \dots, x_n, x_0)$. Notemos que $\mathcal{C}[x_0, x_n]$ es una x_0x_n -trayectoria, por lo que $x_0 \rightarrow x_n$; puesto que T es transitiva, se tiene, por la proposición 1.4.2, que $x_0x_n \in A(D)$. Sin embargo, x_nx_0 es una flecha en \mathcal{C} . Esto es una contradicción, pues T es un torneo. ■

De ahora en adelante usaremos indistintamente los conceptos *ser acíclico* y *ser transitivo* en el contexto de torneos.

Vimos ya, en el capítulo pasado, un ejemplo de un torneo transitivo de orden 4. El siguiente teorema afirma la existencia y unicidad de torneos transitivos de todos los órdenes.

Teorema 2.2.6 * *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único torneo T_n transitivo de orden n . Además, podemos enumerar a los vértices de T_n de la siguiente manera: $V(T_n) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ y, para cada $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $d^+(x_k) = k$.*

Prueba por inducción sobre n

Para $n < 3$, esto es trivial, pues hay un único torneo de orden 0, un único de orden 1 y un único de orden 2; además, todos cumplen lo buscado.

Supongamos que para alguna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existe un único torneo transitivo de orden n , digamos T_n ; supongamos además que, $V(T_n) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ y, para cada $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $d^+(x_k) = k$.

Probemos que existe un único torneo de orden $n+1$ que cumple todo lo buscado. Consideremos T_{n+1} dado como sigue: $V(T_{n+1}) = V(T_n) \cup \{y\}$, con $y \notin V(T_n)$; $A(T_{n+1}) = A(T_n) \cup \{yx : x \in V(T_n)\}$. Puesto que T_n es un torneo de orden n , T_{n+1} es un torneo de orden $n+1$. Veamos que sí es transitivo.

Sean $u, v, w \in V(T_{n+1})$ tales que $uv, vw \in A(T_{n+1})$. Veamos que $uw \in A(T_{n+1})$.

Si $u, v, w \in V(T_n)$, se cumple, pues T_n es transitivo. Supongamos entonces que $u = y$ o $v = y$ o $w = y$. Como y es una fuente en T_{n+1} , los dos últimos casos no pueden pasar; así, $u = y$. Por ser y fuente, se tiene también que $uw = yw \in A(T_{n+1})$. Se sigue que T_{n+1} sí es transitivo. Además, si tomamos $x_n := y$, se tiene que $V(T_{n+1}) = \{x_0, \dots, x_n\}$ y, para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, $d^+(x_k) = k$.

Veamos ahora que T_{n+1} es único. Sea D un torneo transitivo de orden $n+1$. Por el teorema 2.2.5, se tiene que D es acíclico. Así, el teorema 1.3.1 afirma que D tiene una fuente, digamos $a \in V(D)$. consideremos $G = D - a$. Es claro que G es un

subtorneo de D de orden n . Los subtorneos de torneos transitivos son también transitivos, por lo que G es un torneo transitivo de orden n . Por hipótesis de inducción, se tiene que $G \cong_f T_n$.

Ahora bien, puesto que a es una fuente en D , se tiene que D es tal que $A(D) = A(G) \cup \{ax : x \in V(G)\}$. De igual manera, se tiene ya que $A(T_{n+1}) = A(T_n) \cup \{yx : x \in V(T_n)\}$. Así, es claro que $f^* := f \cup \{(a, y)\}$ es tal que $D \cong_{f^*} T_{n+1}$. Se sigue que T_{n+1} es único. Además, si tomamos $a_n := a$ y, para cada $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $a_k := f^{-1}(x_k)$, es claro que $V(D) = \{a_0, \dots, a_n\}$ y, para cada $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $d^+(a_k) = k$. ■

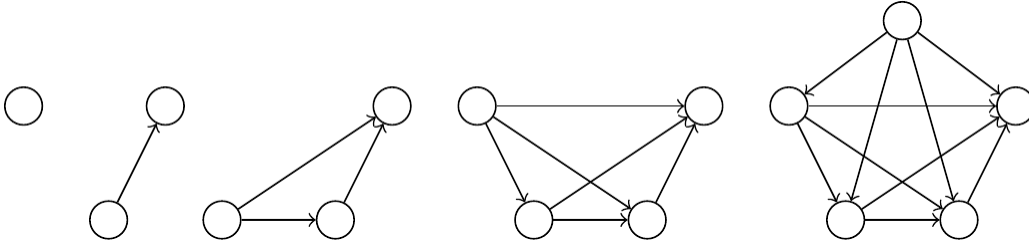


Figura 2.4: Torneos transitivos de varios órdenes

Denotamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, como T_n al único torneo transitivo de orden n .

Observaciones. Dada una digráfica D , se tiene que D es acíclica si y sólo si D^{-1} es acíclica. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n^{-1} = T_n$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n = CT(P_n)$; es decir, T_n es la cerradura transitiva de la trayectoria P_n .

El siguiente teorema concluye esta sección y da la entrada a la siguiente. Nos será de mucha utilidad en el resto del capítulo, al igual que en los capítulos siguientes.

Teorema 2.2.7 (Stearns [10]) * *Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que todo torneo de orden al menos 2^{k-1} contiene un T_k .*

Prueba por inducción sobre k

Para $k = 1$ o $k = 2$, esto es trivial. Supongamos que se cumple para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$. Sea T un torneo de orden al menos 2^k . Veamos que contiene a T_{k+1} . Como T tiene orden al menos 2^k y es un torneo, debe suceder que $|A(T)| \geq \frac{2^k(2^k-1)}{2} = 2^{2k-1} - 2^{k-1}$. Si todos los vértices de T tienen exgrado menor o igual a $2^{k-1} - 1$, entonces

$$|A(T)| = \sum_{v \in V(T)} d^+(v) \leq (2^{k-1} - 1)2^k = 2^{2k-1} - 2^k < 2^{2k-1} - 2^{k-1} \leq |A(T)|.$$

Por lo tanto, $|A(T)| < |A(T)|$, lo cual es una contradicción. Así, existe $v \in V(T)$ tal que $d^+(v) \geq 2^{k-1}$. Si consideramos $W := N^+(v)$, se tiene que $|W| \geq 2^{k-1}$. Así, $T\langle W \rangle$ es un torneo de orden al menos 2^{k-1} . Por hipótesis de inducción, se sigue que $T\langle W \rangle$ contiene un T_k . Como $vw \in A(T)$ para todo $w \in V(T_k)$, se tiene que $T\langle V(T_k) \cup \{v\} \rangle$ es un T_{k+1} que está contenido en T . ■

2.3. Coloraciones transitivas

Vimos ya, al inicio de este capítulo, que el número cromático de un torneo es igual a su orden. Así, las coloraciones propias de torneos no nos dan información nueva sobre ellos. Introducimos entonces otro tipo de coloración, más adecuada para torneos.

Dados T un torneo y $S \subseteq V(T)$, decimos que S es *transitivo* si $T\langle S \rangle$ es un torneo transitivo.

Una k -*coloración transitiva* de un torneo T es una k -coloración de T que consta de conjuntos transitivos; estas coloraciones son también nombradas *acíclicas*, en digráficas en general, aunque para digráficas que no son torneos, son definidas como particiones en conjuntos acíclicos; en torneos, ambas definiciones coinciden.

Dado $k \in \mathbb{Z}^+$, decimos que un torneo T es k -*coloreable-transitivo* si existe una k -coloración transitiva de T , o bien T tiene orden a lo más k . Además, $\chi_t(D) := \min\{k \in \mathbb{N} : D \text{ es } k\text{-coloreable-transitivo}\}$ es llamado el *número cromático transitivo* de D . Si $\chi_t(D) = k$, decimos que D es k -*cromática-transitiva*. Por otro lado, Neumann-Lara definió en [6] el *número dicromático* para toda digráfica D como el mínimo $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que existe una k -coloración de D que consta de conjuntos acíclicos. En general, ambos conceptos no coinciden, aunque son equivalentes en torneos. Evidentemente, si T es un torneo transitivo, entonces $\chi_t(T) = 1$.

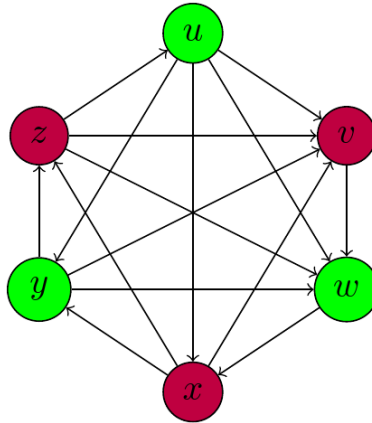


Figura 2.5: Torneo 2-cromático-transitivo

Es claro que $\{V, M\}$ es una 2-coloración transitiva de la digráfica D de la figura 2.5, con V el conjunto de vértices verdes y M el de magentas. Además, (u, v, w, x, y, z, u) es un ciclo en D , por lo que D no es transitiva. Se sigue que $\chi_t(D) = 2$.

Teorema 2.3.1 * Sean T un torneo y T_1, \dots, T_n las componentes fuertes de T . Se cumple que $\chi_t(T) = \max\{\chi_t(T_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Prueba

Sea $M := \max\{\chi_t(T_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$. Notemos que dados S, T torneos, con $S \subseteq T$, se tiene que $\chi_t(S) \leq \chi_t(T)$. Es claro que $\chi_t(T) \geq M$, pues dada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $T_i \subseteq T$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $\{A_1^i, \dots, A_{m_i}^i\}$ una m_i -coloración transitiva de T_i , con $m_i = \chi_t(T_i)$. Además, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $m_i < k \leq M$, sea $A_k^i := \emptyset$. Para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada m_i , $A_{m_i}^i$ es transitivo.

Para cada $1 \leq k \leq M$, consideremos $B_k := \bigcup_{i=1}^n A_k^i$. Notemos que $\{B_1, \dots, B_M\}$ es una partición de $V(T)$. El teorema 1.3.8 afirma que $SC(T)$ es acíclica, lo cual nos dice que cualquier ciclo en T está contenido completamente en una misma componente fuerte. Así, para cada $1 \leq k \leq M - 1$, se tiene que B_k es acíclica (transitiva), pues está compuesto de conjuntos acíclicos, todos de componentes distintas. Así, $\{B_1, \dots, B_M\}$ es una M -coloración transitiva de T . Se sigue que $M \geq \chi_t(T)$, por lo que $\chi(T) = M$. ■

Este teorema nos dice que basta conocer el número cromático transitivo de los torneos fuertes para conocer el de cualquier torneo.

Veamos ahora que el número cromático transitivo es no acotado. Para esto, requerimos introducir conceptos nuevos, que serán de mucha utilidad en el siguiente capítulo.

Sean T un torneo y $X, Y \subseteq V(T)$ ajenos. Si para todos $u \in X, v \in Y$ se tiene que $uv \in A(T)$, escribimos $X \Rightarrow Y$ y decimos que X *domina totalmente* a Y . Podemos generalizar esta idea un poco: si \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son familias de torneos, denotamos por $\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2$ a la familia de torneos tales que $G \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2$ si existen $H_1 \in \mathcal{H}_1, H_2 \in \mathcal{H}_2$ y $A, B \subseteq V(G)$ tales que $\{A, B\}$ es una partición de G , $G\langle A \rangle \cong H_1$ y $G\langle B \rangle \cong H_2$.

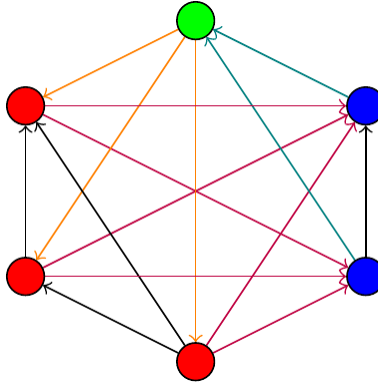


Figura 2.6: Trisección $\Delta(1, 3, 2)$ de un torneo

Dado T un torneo y $\{X, Y, Z\}$ una partición de $V(T)$ tal que $X \Rightarrow Y, Y \Rightarrow Z$ y $Z \Rightarrow X$, decimos que (X, Y, Z) es una *trisección* de T ; además, dados A, B, C torneos, si $A \cong T\langle X \rangle, B \cong T\langle Y \rangle$ y $C \cong T\langle Z \rangle$, denotamos a la trisección por $\Delta(A, B, C)$. Para simplificar la notación, denotaremos por k al único torneo transitivo de orden k en las trisecciones; dado H un torneo, $\Delta(H, 1, 3) = \Delta(H, T_1, T_3)$.

En la figura 2.6, (V, R, A) es una trisección de la digráfica, con V el conjunto que consta del vértice verde, R el conjunto de vértices rojos y A el de azules. Además, los torneos inducidos por V , R y A son T_1 , T_3 y T_2 respectivamente, por lo que este torneo es igual a $\Delta(1, 3, 2)$.

Proposición 2.3.2 ([3]) * Para todo torneo T , $\chi_t(\Delta(T, T, 1)) \geq \chi_t(T) + 1$.

Prueba

Sean T, H torneos tales que (X, Y, Z) es una trisección de H , con $X \cong T$, $Y \cong T$ y $Z = \{z\}$. Consideremos también $k := \chi_t(T)$. Argumentando por contradicción, supongamos que existe $\{C_1, \dots, C_k\}$ una k -coloración de H . Notemos que $C_X := \{C_1 \cap X, \dots, C_k \cap X\}$ es una k -coloración transitiva de X con $l \leq k$. Por hipótesis, $\chi_t(X) = \chi_t(D) = k$, por lo que $l = k$. Usando el mismo razonamiento, podemos concluir también que $C_Y := \{C_1 \cap Y, \dots, C_k \cap Y\}$ es una k -coloración transitiva de Y . Ahora bien, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z \in C_1$. Como C_X y C_Y son k -coloraciones transitivas de X y Y , respectivamente, existen $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $x, y \in C_1$. Sin embargo, puesto que (X, Y, Z) es una trisección, se cumple que (x, y, z, x) es un ciclo en C_1 . Esto es una contradicción, pues C_1 es transitivo. Se sigue que $\chi_t(H) \geq k + 1$. ■

Proposición 2.3.3 ([3]) * Consideremos la siguiente sucesión de torneos: $(S_i)_{i=1}^{\infty}$, $S_1 = T_1$ y para toda $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$, $S_i = \Delta(S_{i-1}, S_{i-1}, 1)$; sea además n_i el orden de S_i . Se cumple que para toda $i \in \mathbb{Z}^+$, $n_i = 2^i - 1$ y $\chi_t(S_i) \geq i$.

Prueba por inducción sobre n

Evidentemente, S_1 tiene orden $2^1 - 1 = 1$ y $\chi_t(S_1) = \chi_t(T_1) = 1 \geq 1$.

Supongamos que se cumple para alguna $i - 1$ con $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$; es decir, que $n_{i-1} = 2^{i-1} - 1$ y que $\chi_t(S_{i-1}) \geq i - 1$. Veamos que ambas cosas se cumplen para i . Es claro que $n_i = 2(n_{i-1}) + 1 = 2(2^{i-1} - 1) + 1 = 2^i - 1$. Además, la proposición 2.3.2 afirma que $\chi_t(S_i) \geq \chi_t(S_{i-1}) + 1 \geq i - 1 + 1 = i$. ■

Corolario 2.3.4 * Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existe T un torneo tal que $\chi_t(T) \geq n$.

Veremos, en el siguiente capítulo, dos familias más que tienen número cromático transitivo no acotado.

Buscaremos determinar, a continuación, el número cromático transitivo de los torneos de orden menor o igual a 14.

Observación. Es fácil notar que un torneo de orden uno o dos es 1-coloreable-transitivo y uno de orden tres, cuatro o cinco es 2-coloreable-transitivo. Veamos que los torneos de orden 6 son también 2-coloreable-transitivos.

Proposición 2.3.5 ([9]) * Todo torneo de orden 6 es 2-coloreable-transitivo.

Prueba

Sea T un torneo de orden 6, $V(T) = \{u, v, w, x, y, z\}$.

Caso 1. T tiene un T_4 .

En este caso, basta colorear a los vértices del T_4 de un mismo color y a los dos restantes de un color distinto.

Caso 2. T tiene un vértice de exgrado o ingrado al menos 4.

Veamos qué pasa cuando T tiene un vértice de exgrado al menos 4; el otro subcaso es análogo. Supongamos que dicho vértice es u . Como $G := T\langle N^+(u) \rangle$ es un torneo de orden al menos 4, se tiene, por el teorema 2.2.7, que G contiene un T_3 . Así, si consideramos el torneo que tiene por vértices a los de dicho T_3 y a u , es un T_4 ; queda entonces reducido al caso 1.

Caso 3. T no tiene vértices de exgrado o ingrado al menos 4 ni tiene ningún T_4 .

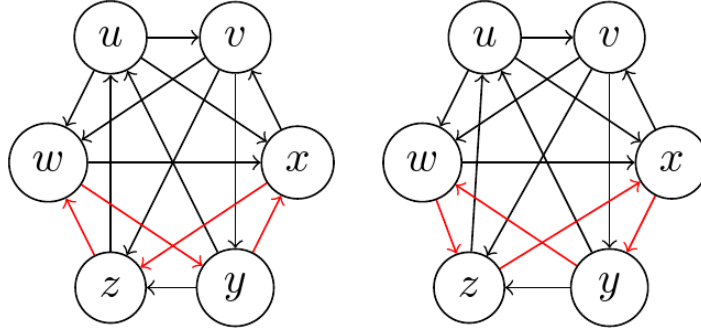


Figura 2.7: Torneos de orden 6, caso 3

En este caso, todos los vértices tienen exgrado 2 o 3. Puesto que $|A(T)| = \sum_{v \in V(T)} d^+(v) = 15$, debe haber exactamente tres vértices de exgrado 2 y tres de exgrado 3. Afirmamos que sólo existen dos torneos no isomorfos que cumplen esta hipótesis. Para esto, construiremos poco a poco ambos torneos, suponiendo a cada paso que una propiedad que cumple alguno de los vértices, lo cumple uno en particular que nombraremos; en caso de suponer que en alguno(s) de estos pasos, un vértice distinto cumple una de estas propiedades, resultaría un torneo isomorfo a alguno de los dos que construiremos.

Dado que hay tres vértices de exgrado 3, podemos suponer que uno de ellos es u ; supongamos también que $N^+(u) = \{v, w, x\}$ y que $N^-(u) = \{y, z\}$. Como T no tiene ningún T_4 y $u \Rightarrow \{v, w, x\}$, entonces los vértices v, w, x forman un ciclo en T ; supongamos que es (v, w, x, v) . Supongamos también que $yz \in A(T)$. Afirmamos que z no tiene exgrado 3; de lo contrario, tendría por exvecinos a dos vértices del conjunto $\{v, w, x\}$, digamos a v y w . Así, $\{u, v, w, z\}$ sería un T_4 en T . Por lo tanto, z tiene exgrado 2. Puesto que hay tres vértices de exgrado 3, se tiene entonces que al menos un vértice de $\{v, w, x\}$ tiene exgrado 3. Supongamos que uno de ellos es v . Así, $vz, vy \in A(T)$. Afirmamos que w ni x tienen exgrado 3; en efecto, si x tiene exgrado 3, entonces $xz, xy \in A(T)$, por lo que v, x, y, z forman un T_4 ; sucede algo análogo si w tiene exgrado 3. Así, y tiene exgrado 3, y w, x, z tienen exgrado 2.

Hasta este paso, hemos construido una única digráfica, ilustrada en ambos torneos de la figura 2.7 por las flechas negras. Tenemos dos subcasos posibles:

- Si $yx \in A(T)$, entonces $xz, zw, wy \in A(T)$. El torneo de la izquierda de la figura 2.7 lo ilustra. En este caso, $\{\{u, v, w\}, \{x, y, z\}\}$ es una 2-coloración transitiva de T .
- Si $yw \in A(T)$, entonces $wz, zx, xy \in A(T)$. El torneo de la derecha de la figura 2.7 lo ilustra. En este caso, $\{\{u, v, x\}, \{w, y, z\}\}$ es una 2-coloración transitiva de T .

Ahora bien, no todos los torneos de orden 7 son 2-coloreable-transitivos, como veremos a continuación. Para esto, introducimos el siguiente concepto: dada G una digráfica, decimos que sus vértices son indistinguibles si para cualesquiera $u, v \in V(H)$, existe φ un automorfismo de H tal que $\varphi(u) = v$; en otras palabras, el que los vértices sean indistinguibles es equivalente a que cumplan todas las mismas propiedades en la digráfica, como por ejemplo, que sus exvecindades son isomorfas entre sí.

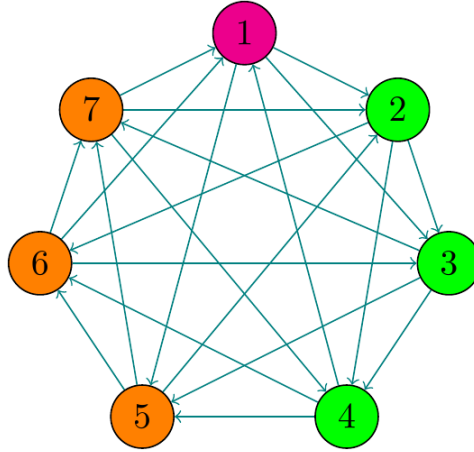
Proposición 2.3.6 ([9]) * *Existen torneos 3-cromáticos transitivos de orden 7.*

Prueba

Consideremos el torneo G_7 dado como sigue: $V(G_7) = \{1, \dots, 7\}$, $A(G_7) = \{i(i+1) \text{ tal que } i \in V(G_7)\} \cup \{i(i+2) \text{ tal que } i \in V(G_7)\} \cup \{i(i+4) \text{ tal que } i \in V(G_7)\}$, leyendo todos los subíndices módulo 7. Notemos que los vértices de G_7 son indistinguibles, pues dado $m, n \in V(G_7)$, $m < n$, $\varphi: V(G_7) \rightarrow V(G_7)$, $\varphi(a) = a + n - m$ es un automorfismo tal que $\varphi(m) = m + n - m = m$. Es también un torneo 3-regular, pues cada vértice domina a tres vértices y es dominado por tres. Veamos que no tiene ningún T_4 . Recordemos que un T_4 tiene exactamente un vértice de exgrado 3. Si el vértice de exgrado 3 es 1, entonces el T_4 posible tendría por vértices a 1, 2, 3 y 5; esto es imposible pues $(2, 3, 5, 2)$ es un ciclo en G_7 . Lo mismo sucede si el vértice de exgrado 3 es cualquier $i \in \{1, \dots, 7\}$, pues los vértices de G_7 son indistinguibles. Así, G_7 no contiene ningún T_4 . Es entonces claro que $\chi_t(G_7) \geq 3$. Además, $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}\}$ es una 3-coloración transitiva de G_7 . Se sigue que $\chi_t(G_7) = 3$.

Neumann-Lara prueba, en [9], que existen únicamente 4 torneos 3-cromáticos-transitivos de orden 7, todos 3-regulares; veremos el segundo de estos en el siguiente capítulo. El torneo G_7 es el único de los 4 torneos 3-cromáticos-transitivos que no contiene ningún T_4 ; en efecto, dado H un torneo 3-regular y T_4 -libre, si existe $v \in V(H)$ tal que $H\langle N^+(v) \rangle$ es un T_3 , entonces v , junto con $N^+(v)$ forman un T_4 ; lo análogo sucede con $N^-(v)$. Así, para todo $v \in V(H)$, $H\langle N^+(v) \rangle \cong C_3 \cong H\langle N^-(v) \rangle$; esta propiedad define unívocamente el torneo G_7 .

Neumann-Lara prueba también que existe un único torneo 4-cromático-transitivo de orden 11. Probaremos únicamente la existencia de dicho torneo, pues no le daremos ningún uso a la parte de unicidad.

Figura 2.8: Torneo T_4 -libre de orden 7

Proposición 2.3.7 ([9]) * *Existe un torneo 4-cromático de orden 11.*

Sea H el torneo dado como sigue: $V(H) = \{1, \dots, 11\}$, $A(H) = \{i(i+j) \text{ tal que } i \in V(G), j \in \{1, 3, 4, 5, 9\}\}$, leyendo todos los subíndices módulo 11. H es 5-regular y todos sus vértices son indistinguibles.

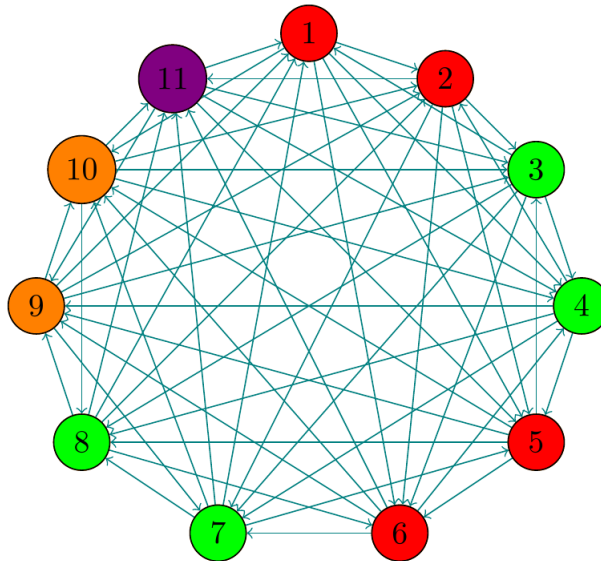


Figura 2.9: Torneo 4-cromático-transitivo de orden 11

Notemos que H no tiene ningún T_5 . En efecto, puesto que un T_5 tiene un vértice de exgrado 4, debería ser el subtorneo inducido por un vértice y sus exvecinos. Como $H\langle\{1\} \cup N^+(1)\rangle$ no es un T_5 y los vértices de H son indistinguibles, se sigue que no hay ningún T_5 . Así, cualquier 3-coloración de H debe de constar de dos T_4 y un T_3 . Veamos que para cualesquiera dos T_4 ajenos que elijamos en H , los 3 vértices restantes forman un C_3 . Puesto que los vértices de H son indistinguibles, podemos suponer que uno de los T_4 elegidos tiene a 1 como vértice de exgrado 3. Ahora bien,

$N^+(1) = \{2, 4, 5, 6, 10\}$ y los únicos T_3 contenidos en $N^+(1)$ son los inducidos por $\{2, 5, 6\}$ y $\{5, 6, 10\}$; por lo tanto, los dos posibles T_4 son $H_1 = \langle \{1, 2, 5, 6\} \rangle$ y $H_2 = \langle \{1, 5, 6, 10\} \rangle$.

- Si elegimos H_1 , los únicos T_4 en $H - H_1$ son los inducidos por $\{3, 4, 7, 8\}$, $\{10, 11, 3, 4\}$ y $\{10, 3, 4, 8\}$. Sin embargo, las digráficas inducidas por $\{9, 10, 11\}$, $\{7, 8, 9\}$ y $\{7, 9, 11\}$ son cada una un C_3 .
- Si elegimos H_2 , los únicos T_4 en $H - H_2$ son los inducidos por $\{3, 4, 7, 8\}$, $\{4, 8, 9, 2\}$ y $\{4, 9, 2, 7\}$. Sin embargo, las digráficas inducidas por $\{2, 9, 11\}$, $\{3, 7, 11\}$ y $\{3, 8, 11\}$ son cada una un C_3 .

Por lo tanto, no hay 3-coloraciones transitivas de H , por lo que $\chi_t(H) > 3$. Por último, es claro que $\{\{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\}, \{9, 10\}, \{11\}\}$ es una 4-coloración transitiva de H . Se sigue que $\chi_t(H) = 4$. ■

La prueba de la siguiente proposición es una calca de la proposición 2.3.3, por lo que no la redactaremos.

Proposición 2.3.8 ([3]) * Consideremos la siguiente sucesión de torneos: $(U_i)_{i=4}^\infty$, U_4 el torneo H de la proposición 2.3.7 y para toda $i \geq 5$, $U_i = \Delta(U_{i-1}, U_{i-1}, 1)$; sea además n_i el orden de U_i . Se cumple que para toda $i \in \mathbb{Z}^+$, $n_i = 3(2^{i-2}) - 1$ y $\chi_t(U_i) \geq i$.

Introduciremos un concepto nuevo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el *número cromático transitivo* de n como sigue: $\chi_t(n) := \max\{\chi_t(T) : T \text{ tiene orden } n\}$.

Observación. Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \leq m$, entonces $\chi_t(n) \leq \chi_t(m)$. Más aún, se cumple que $\chi_t(n + m) \leq \chi_t(n) + \chi_t(m)$. Lo segundo se debe a lo siguiente: dado G un torneo de orden $n + m$, podemos dar una partición $\{A, B\}$ de G con $|A| = n$ y $|B| = m$. Sean $\alpha = \chi_t(n)$ y $\beta = \chi_t(m)$. Por definición de $\chi_t(n)$ y $\chi_t(m)$, podemos tomar $\{A_1, \dots, A_\alpha\}$ una α -coloración transitiva de A y $\{B_{\alpha+1}, \dots, B_{\alpha+\beta}\}$ una β -coloración transitiva de B . Notemos que $\{A_1, \dots, A_\alpha, B_{\alpha+1}, \dots, B_{\alpha+\beta}\}$ es una $(\alpha + \beta)$ -coloración transitiva de G , por lo que $\chi_t(n) + \chi_t(m) \leq \chi_t(G)$. Como G fue un torneo arbitrario de orden $n + m$, se sigue que $\chi_t(n) + \chi_t(m) \leq \chi_t(n + m)$.

La siguiente proposición se desprende de los resultados de Neumann-Lara que acabamos de probar, al igual que del teorema 2.2.7.

Proposición 2.3.9 (Neumann-Lara) * Para cada $n \in \{0, \dots, 14\}$, se puede determinar el número cromático transitivo de n .

Prueba

- Evidentemente, $\chi_t(0) = 0$ y $\chi_t(1) = \chi_t(2) = 1$

- Para toda $i \in \{3, \dots, 6\}$, $\chi_t(i) = 2$. En efecto, es claro que $\chi_t(3) = 2$, pues $\chi_t(C_3) = 2$. Así, $\chi_t(i) \geq 2$ para toda $i \geq 3$. Además, la proposición 2.3.5 asegura que $\chi_t(6) \leq 2$, por lo que $\chi_t(i) \leq 2$ para toda $i \leq 6$.
- Para toda $i \in \{7, \dots, 10\}$, $\chi_t(i) = 3$. La proposición 2.3.6 nos dice, en particular, que $\chi_t(7) \geq 3$. Basta probar que $\chi_t(10) \leq 3$. Sea G un torneo de orden 10. Por el teorema 2.2.7, G tiene un T_4 . Como $G - T_4$ tiene orden 6 y $\chi_t(6) = 2$, entonces $\chi_t(G - T_4) \leq 2$. Como $V(G) = V(G - T_4) \cup V(T_4)$, entonces $\chi_t(G) \leq \chi_t(G - T_4) + \chi_t(T_4) \leq 2 + 1 = 3$. Se sigue que $\chi_t(10) \leq 3$.
- Para toda $i \in \{11, \dots, 14\}$, $\chi_t(i) = 4$. La proposición 2.3.7 nos dice, en particular, que $\chi_t(11) \geq 4$. Basta probar que $\chi_t(14) \leq 4$. Sea G un torneo de orden 14. Por el teorema 2.2.7, G tiene un T_4 . Como $G - T_4$ tiene orden 10 y $\chi_t(10) = 3$, entonces $\chi_t(G - T_4) \leq 3$. Como $V(G) = V(G - T_4) \cup V(T_4)$, entonces $\chi_t(G) \leq \chi_t(G - T_4) + \chi_t(T_4) \leq 3 + 1 = 4$. Se sigue que $\chi_t(14) \leq 4$. ■

Determinar el número cromático transitivo de cualquier natural es un problema complejo; no se ha podido determinar más que para naturales pequeños. Mostramos ahora una cota inferior y una superior del número cromático transitivo para los naturales de la forma 2^n , con $n \in \mathbb{Z}^+$.

Para poder dar la cota superior, requerimos probar primero la siguiente proposición. Aplicaremos, en la prueba de la proposición, el teorema 2.2.7 de manera recursiva; dicho teorema afirma que para toda $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, todo torneo de orden al menos 2^{n-1} tiene un T_n .

Proposición 2.3.10 ([N]) * Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, G un torneo de orden $k > 2^{n-1}$, y $h := \lceil \frac{k-2^{n-1}}{n} \rceil$. Se cumple entonces que existe una partición de $V(G)$ en $h + 1$ conjuntos, $\{A_1, \dots, A_h, B\}$, tal que para toda $i \in \{1, \dots, h\}$, $G\langle A_i \rangle \cong T_n$ y $|B| \leq 2^{n-1}$.

Prueba

El teorema 2.2.7 nos dice, en particular, que todo subtorneo de G que tenga orden al menos 2^{n-1} tiene un T_n . Definimos para cada $i \in \mathbb{N}$, el subconjunto $A_i \subseteq V(G)$ y el subtorneo $G_i \subseteq G$ de manera recursiva: $G_0 := G$ y $A_0 = \emptyset$. Supongamos que tenemos definidos A_i y G_i , para alguna $i \in \mathbb{N}$.

Si $|V(G_i)| \leq 2^{n-1}$, definimos $A_{i+1} := \emptyset$ y $G_{i+1} := G_i$.

Si $|V(G_i)| > 2^{n-1}$, tomamos $A_{i+1} \subseteq V(G_i) \subseteq V(G)$ tal que $G_i\langle A_{i+1} \rangle \cong T_n$ y $G_{i+1} := G_i - A_{i+1}$.

Evidentemente, el segundo caso sólo puede suceder una cantidad finita de veces.

Por lo tanto, podemos tomar $t := \min\{i \in \mathbb{N} : G_i = G_{i+1}\}$. En particular, $|V(G)| = |V(G_0)| = k > 2^{n-1}$, por lo que $G_0 \neq G_1$; se sigue que $t \geq 1$. Notemos que para toda $i \in \{1, \dots, t\}$, $V(G_i) = V(G) \setminus \bigcup_{j=1}^i A_j$. De hecho, se tiene, por cómo definimos los G_i y A_i , que $\{A_1, \dots, A_t, V(G_t)\}$ es una partición de $V(G)$. Esto nos dice también

que dada $i \in \{1, \dots, t\}$, $|V(G_i)| = k - in$, pues cada A_k con $k \in \{1, \dots, t\}$ es tal que $G\langle A_k \rangle \cong T_n$.

Por la minimalidad de t , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |V(G_{t-1})| &= k - (t-1)n > 2^{n-1} \geq k - tn = |V(G_t)|, \text{ entonces} \\ tn &\geq k - 2^{n-1} > (t-1)n, \text{ por lo que} \\ t &\geq \frac{k-2^{n-1}}{n} > t-1. \end{aligned}$$

Además, t es el único natural con esta propiedad.

Por otro lado, como $h = \lceil \frac{k-2^{n-1}}{n} \rceil$, entonces $h \geq \frac{k-2^{n-1}}{n} > h-1$. Se sigue que $h = t$.

Así la partición $\{A_1, \dots, A_t, V(G_t)\}$ cumple lo buscado. ■

Teorema 2.3.11 ([N]) * Para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $n \leq \chi_t(2^n - 1) \leq \chi_t(2^n) \leq \sum_{i=1}^n \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil$. Además, para toda $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $n \leq \chi_t(3(2^{n-2}) - 1)$.

Prueba

Para probar que $n \leq \chi_t(2^n - 1) \leq \chi_t(2^n)$, sólo requerimos usar la proposición 2.3.3. En efecto, dado $n \in \mathbb{Z}^+$, la proposición afirma que el torneo S_n que definimos cumple que $|V(S_n)| = 2^n - 1$ y $\chi_t(S_n) \geq n$. Por lo tanto, $\chi_t(2^n) \geq \chi_t(2^n - 1) \geq n$. De igual manera, para probar que dada $n \geq 4$, $n \leq \chi_t(3(2^{n-2}) - 1)$, basta usar la proposición 2.3.8.

Probemos que $\chi_t(2^n) \leq \sum_{i=1}^n \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil$; lo hacemos por inducción.

Si $n = 1$, entonces $\chi_t(2^1) = \chi_t(2) = 1$ y $\sum_{i=1}^1 \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil = \lceil \frac{2^0}{1} \rceil = 1$.

Supongamos que $\chi_t(2^{n-1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil$, para alguna $n-1 \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Veamos que se cumple para n . Sea G un torneo de orden 2^n . Si tomamos $k = 2^n$, es claro que $k > 2^{n-1}$. La proposición 2.3.10 afirma entonces que podemos tomar una partición $\{A_1, \dots, A_h, B\}$ de $V(G)$, con $h = \lceil \frac{2^n - 2^{n-1}}{n} \rceil = \lceil \frac{2^{n-1}}{n} \rceil$, tal que para toda $i \in \{1, \dots, h\}$, $G\langle A_i \rangle \cong T_n$ y $|B| \leq 2^{n-1}$. Así $\chi_t(G) \leq h + \chi_t(B)$. Además, $\chi_t(B) \leq \chi_t(|B|) \leq \chi_t(2^{n-1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil$, pues $|B| \leq 2^{n-1}$. Se sigue que $\chi_t(G) \leq h + \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil = \lceil \frac{2^{n-1}}{n} \rceil + \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil = \sum_{i=1}^n \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil$.

Puesto que esto se cumple para todo torneo G de orden 2^n , se tiene, por definición de $\chi_t(2^n)$, que $\chi_t(2^n) \leq \sum_{i=1}^n \lceil \frac{2^{i-1}}{i} \rceil$. ■

Observación. Sean $m \in \mathbb{N}^+$ y $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ una sucesión de ceros y unos tales que $m = \sum_{i=0}^\infty \alpha_i 2^i$; es decir, (α_n) es la representación única de m en binario. Se cumple entonces que $\chi_t(m) \leq \sum_{i=1}^\infty \chi_t(\alpha_i 2^i)$. Así, la cota superior de las potencias de 2 nos permite obtener una cota superior del número cromático transitivo de cualquier natural.

2.4. Independencia y transitividad

Comenzamos esta sección comentando un teorema de Erdős que será muy útil en el capítulo siguiente. Para esto, requerimos introducir conceptos nuevos.

Para los fines de este trabajo, el *cuello* de una digráfica G , denotado por $g(G)$, es la longitud de su ciclo más corto, excluyendo ciclos de longitud 2; si la digráfica no tiene ciclos de longitud mayor a 2, su cuello es infinito.

Dados $k, l \in \mathbb{Z}^+$, denotamos por $h(k, l)$ al mínimo natural tal que para toda digráfica simétrica G de orden al menos $h(k, l)$, $g(G) \leq k$ o G contiene un subconjunto independiente de cardinalidad l . Erdős prueba, en el artículo [4], un resultado importante respecto a $h(k, l)$. No mostraremos aquí la prueba de dicho teorema, pues hace uso de argumentos probabilísticos y combinatorios complejos, por lo que se aleja mucho del objeto de estudio de esta tesis.

Teorema 2.4.1 ([4]) * Dada $k \in \mathbb{Z}^+$, existe $l_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $h(k, l) > l^{1+\frac{1}{2k}}$ para toda $l \geq l_0$.

El teorema 2.4.1, nos permite probar el corolario 2.4.2, que se desprende de éste. Dicho corolario nos servirá para probar importantes resultados del siguiente capítulo.

Corolario 2.4.2 * Para toda $n, k \in \mathbb{Z}^+$, existe una digráfica simétrica G_k tal que $g(G_k) > n$ y tal que todo conjunto independiente S en G_k cumple que $|S| < \frac{|V(G_k)|}{2k}$.

Prueba

Sean $n, k \in \mathbb{Z}^+$. Por el teorema 2.4.1, existe $l_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $h(n, l) > l^{1+\frac{1}{2n}}$ para toda $l \geq l_0$. Tomemos $m := \max\{2k, l_0\}$. Como $m \geq l_0$, se tiene que $h(n, m) > m^{1+\frac{1}{2n}}$. Por cómo se define $h(n, m)$, existe una digráfica simétrica G_k de orden $m^{1+\frac{1}{2n}}$ tal que no tiene ciclos de longitud a lo más n , lo cual nos dice que $g(G_k) > n$, y tal que no contiene conjuntos independientes de cardinalidad m , lo cual nos dice que todo conjunto independiente S en G_k cumple que $|S| < m = \frac{m^{1+2n}}{m^{2n}} = \frac{|V(G_k)|}{m^{2n}} < \frac{|V(G_k)|}{2k}$, pues $m^{2n} > m \geq 2k$. Por lo tanto, G_k cumple lo buscado. ■

Mostramos ahora que existe una relación entre los conjuntos independientes y los conjuntos transitivos, que se da por medio del siguiente concepto.

Sea G un torneo y v_1, \dots, v_n una enumeración de sus vértices. Dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$, si $v_j v_i \in A(G)$ e $i < j$, decimos que $v_i v_j$ es una *flecha hacia atrás* de G para la enumeración elegida. Sean D la digráfica tal que $V(D) := V(G)$ y $A(D) := \{v_i v_j : v_i v_j \text{ es una flecha hacia atrás de } G\}$ y $B := D \cup D^{-1}$. Llamamos a B la *digráfica de las flechas hacia atrás* de G bajo la enumeración v_1, \dots, v_n .

Proposición 2.4.3 ([3]) * Sean G un torneo, v_1, \dots, v_n una enumeración de sus vértices, B la digráfica de las flechas hacia atrás de G bajo v_1, \dots, v_n y $X, W \subseteq V(G)$. Se cumple lo siguiente:

- Si $g(B) \geq 4$ y W es transitivo en G , entonces W es la unión de dos conjuntos independientes en B .
- Si X es independiente en B , entonces es transitivo en G .

Prueba

Para la primera parte, supongamos que $g(B) \geq 4$ y que W es transitivo en G . Supongamos además que $W = V(G)$. Podemos hacer esto, pues si $W \subsetneq V(G)$, podemos considerar $D := G\langle W \rangle$ y tomar la enumeración restringida a W ; si tomamos F la digráfica de las flechas hacia atrás de D bajo la enumeración restringida, se tiene que $F \subseteq B$, por lo que $g(F) \geq g(B) \geq 4$. Se cumplen entonces todas las hipótesis del lema para la digráfica D , con $W = V(D)$.

Sean Y el conjunto de vértices de W que no son la cabeza de ninguna flecha hacia atrás de G y Z el conjunto de vértices de W que no son la cola de ninguna flecha hacia atrás de G . Es claro que Y y Z son independientes en B . Argumentando por contradicción, supongamos que existe $v \in W \setminus (Y \cup Z)$. Así, v es la punta de una flecha hacia atrás y la cola de otra; existen entonces $v_i, v_j \in W$ tales que $v_i v$ y vv_j son flechas hacia atrás de G ; esto nos dice, además, que $i > j$. Como W es transitivo en G , se tiene que $v_i v_j \in A(G)$, y como $i > j$, $v_i v_j$ es una flecha hacia atrás, por lo que $v_i v_j, v_j v_i \in A(B)$. Se sigue que (v_i, v, v_j, v_i) es un ciclo de longitud 3 en B , lo cual contradice que $g(B) \geq 4$. Se sigue que $W = Y \cup Z$, por lo que es la unión de dos conjuntos independientes en B .

Para la segunda parte, supongamos que X es independiente en B . Para ver que es transitivo en G , tomemos $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \in X$, con $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}$ tales que $v_{i_1} v_{i_2}, v_{i_2} v_{i_3} \in A(G)$. Como X es independiente en B , $v_{i_1} v_{i_2}, v_{i_2} v_{i_3} \notin A(B)$. Debe entonces suceder que $i_1 < i_2 < i_3$. Así, $v_{i_3} v_{i_1} \notin A(G)$, de lo contrario, como $i_1 < i_3$, entonces $v_{i_3} v_{i_1} \in A(B)$, lo cual contradice que X sea independiente en B . Como $v_{i_3} v_{i_1} \notin A(G)$ y G es un torneo, entonces $v_{i_1} v_{i_3} \in A(G)$. Queda así probado que X es transitivo. ■

Puesto que estamos relacionando conjuntos transitivos en una digráfica G con conjuntos independientes en la digráfica de las flechas hacia atrás de G , es pertinente preguntarse lo siguiente: ¿Será cierto que dada una digráfica simétrica D cualquiera y una enumeración de los vértices de D , existe un torneo G tal que D es la digráfica de las flechas hacia atrás de G bajo la enumeración dada? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y se prueba de manera sencilla.

Proposición 2.4.4 * Sea B una digráfica simétrica, con $V(B) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Existe entonces G un torneo tal que B es la digráfica de las flechas hacia atrás de G bajo la enumeración dada.

Prueba

Definimos G de la siguiente manera: $V(G) = V(B)$ y dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$, si $i < j$ y $v_j v_i \in A(B)$, entonces $v_j v_i \in A(G)$; en caso contrario, $v_i v_j \in A(G)$. Es claro que G es un torneo y que B es la digráfica de las flechas hacia atrás de G bajo la enumeración dada.

Gracias a las dos proposiciones anteriores, podemos probar los siguientes teoremas.

Teorema 2.4.5 ([N]) * *Sea G un torneo y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ todas las distintas enumeraciones de $V(G)$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, denotamos por B_i a la digráfica de las flechas hacia atrás de G bajo la enumeración α_i . Se cumple entonces que $\chi_t(G) \leq m := \min\{\chi(B_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$.*

Prueba

Sea $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\chi(B_i) = m$. Existe entonces $\mathcal{C} := \{C_1, \dots, C_m\}$ una m -coloración de B_i . Sea C_j con $j \in \{1, \dots, m\}$. Puesto que C_j es independiente en B_i , la proposición 2.4.3 afirma que C_j es transitivo en G . Así, \mathcal{C} es una m -coloración transitiva de G . Por lo tanto, G es m -coloreable-transitivo y $\chi_t(G) \leq m$. ■

Teorema 2.4.6 ([N]) * *Sea D una digráfica simétrica tal que $g(D) \geq 4$ y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ todas las distintas enumeraciones de $V(D)$. Por la proposición 2.4.4, existe, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, un torneo G_i tal que D es la digráfica de las flechas hacia atrás de G_i bajo la enumeración α_i . Se cumple entonces que $\chi(D) \leq 2m$, con $m := \min\{\chi_t(G_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$.*

Prueba

Sea $i \in \{1, \dots, k\}$, tal que $\chi_t(G_i) = m$. Existe entonces $\mathcal{C} := \{C_1, \dots, C_m\}$ una m -coloración transitiva de G_i . Sea C_j con $j \in \{1, \dots, m\}$. Puesto que C_j es transitivo en G_i y $g(D) \geq 4$, la proposición 2.4.3 afirma que $C_j = C_j^1 \cup C_j^2$, con C_j^1 y C_j^2 independientes en D . Así, $\mathcal{C}^* := \{C_1^1, C_1^2, \dots, C_k^1, C_k^2\}$ es una $2m$ -coloración de D . Por lo tanto, D es $2m$ -coloreable y $\chi_t(D) \leq 2m$. ■

Observación. El teorema anterior se extiende, de manera natural, a cualquier digráfica D . En efecto, dada D una digráfica, se tiene que $D \cup D^{-1}$ es una digráfica simétrica y que $\chi(D) = \chi(D \cup D^{-1})$. Basta entonces aplicar el teorema a $D \cup D^{-1}$ para poder extender el resultado a D .

3 Héroes en torneos

3.1. Héroes y sus componentes fuertes

Este capítulo constituye la parte central de esta tesis. En él, desarrollamos a detalle los teoremas importantes probados en el artículo [3].

Sean G, D dos digráficas. Decimos que D *contiene* a G si G es isomorfa a una subdigráfica inducida de D . Si D no contiene a G como subdigráfica inducida, decimos que D es G -*libre*. Además, si \mathcal{H} es una familia de torneos, decimos que un torneo T es \mathcal{H} -*libre* si se cumple que para todo $H \in \mathcal{H}$, T es H -libre. Para los fines de este trabajo, modificaremos ligeramente las definiciones anteriores omitiendo la condición de que la digráfica sea inducida. Dado que todo subtorneo H de G es una subdigráfica inducida de G , la definición no difiere de la usual, en ese contexto.

Berger *et al.* introdujeron en [3] el siguiente concepto: un *héroe* es un torneo H tal que existe $c \in \mathbb{N}$ que cumple que todo torneo H -libre tiene número cromático transitivo menor que o igual a c . Dado H un héroe, denotamos por $n(H)$ al *número de héroe* de H ; es decir, al mínimo natural que hace a H un héroe.

Notemos que dado un torneo H , si la familia de torneos H -libres (no isomorfos) es finita, entonces H es un héroe; basta considerar a $c = \max\{\chi_t(T) : T \text{ es } H\text{-libre}\}$. Recordemos que T_1 y T_2 son los únicos torneos de orden 1 y 2, respectivamente; ambos son héroes, pues el único torneo T_1 -libre es el vacío, y los únicos torneos T_2 -libres son el vacío y T_1 . De hecho, para toda $n \in \mathbb{N}$, T_n es un héroe; en efecto, el teorema 2.2.7 afirma, en particular, que dada $n \in \mathbb{N}$, la familia de torneos T_n -libres es finita.

El héroe H de orden más chico que cumple que la familia de torneos H -libres es infinita es C_3 . En efecto, el corolario 2.2.4 nos dice que si un torneo contiene un ciclo de longitud mayor a 3, contiene también el ciclo de longitud 3. Así, todo torneo T que sea C_3 -libre, tampoco contiene a C_n , con $n > 3$, por lo que es acíclico. Es entonces claro que los torneos C_3 -libres son en realidad los torneos acíclicos, que son una familia infinita por el teorema 2.2.6 y que tienen número cromático transitivo igual a 1. Se sigue que C_3 es un héroe tal que $n(C_3) = 1$; es también un torneo fuerte.

Proposición 3.1.1 ([3]) * *Todo subtorneo de un héroe es también un héroe. Además, dados G, H héroes tales que $H \subseteq G$, se cumple que $n(H) \leq n(G)$.*

Nuestro objetivo es caracterizar los torneos que son héroes. El concepto de trisección, introducido en el capítulo anterior, nos ayudará enormemente en esta tarea. En efecto, podemos pensar una trisección como una generalización del ciclo C_3 , el cual vimos ya, es el primer héroe fuerte interesante. Notemos además que $C_3 = \Delta(1, 1, 1)$; así, C_3 es también el primer héroe que tiene una trisección. Veremos, en la siguiente sección, que existe una relación intrínseca entre los héroes fuertes y las trisecciones.

En esta sección, buscaremos caracterizar a los héroes a través de sus componentes fuertes. Para esto, requerimos desarrollar conceptos nuevos, los cuales fueron introducidos en [3].

Sean T un torneo y $uv \in A(T)$. Definimos el conjunto de *cimas* de la flecha uv en T como sigue: $C_T(uv) := \{w \in V(T) : (u, v, w, u) \text{ es un ciclo en } T\}$. Definimos también, para cada $r, s \in \mathbb{Z}^+$, lo que es una r -*montaña*, una flecha r -*pesada* y un (r, s) -*clan*; lo hacemos por recursión.

- Una 1-montaña en T es un subtorneo de T que consta de un solo punto; es un T_1 .
- $uv \in A(T)$ es r -pesada en T si $T\langle C_T(uv) \rangle$ contiene una r -montaña en T .
- Un (r, s) -clan en T es un subconjunto $S \subseteq V(T)$ que cumple que $|S| = s$, y toda flecha de $T\langle S \rangle$ es r -pesada en T .
- Una $(r + 1)$ -montaña en T es un subtorneo M de T , mínimo por contención, que contiene un $(r, r + 1)$ -clan (en M).

Notemos que, dada $r \in \mathbb{Z}^+$, siempre existe T un torneo que tiene una r -montaña; esto se debe a la definición recursiva de los 3 conceptos anteriores, los cuales nos muestran cómo construir una $(r + 1)$ -montaña a partir de una r -montaña. Para entender mejor estos conceptos, veamos cómo son las r -montañas cuando $r = 2$ o $r = 3$.

- Una 2-montaña en T es un subtorneo M de T , mínimo por contención, que contiene un $(1, 2)$ -clan en M .
- Un $(1, 2)$ -clan en M es un subconjunto $S \subseteq V(M)$ que cumple que $|S| = 2$ y toda flecha de $M\langle S \rangle = T\langle S \rangle$ es 1-pesada en M .
- Una flecha $uv \in A(T\langle S \rangle)$ es 1-pesada en M si $M\langle C_M(uv) \rangle$ contiene una 1-montaña; es decir, contiene un T_1 .
- Ahora bien, si M no contiene un C_3 , entonces para toda $uv \in A(T\langle S \rangle)$, $C_M(uv) = \emptyset$, por lo que $T\langle C_M(uv) \rangle$ no contiene 1-montañas. Dado que M sí contiene un C_3 , digamos (x, y, z, x) , entonces $S := \{x, y\}$ es un $(1, 2)$ -clan en M ; en efecto, la flecha xy es 1-pesada en M , pues $z \in C_M(xy)$ y $T\langle z \rangle$ es un T_1 . Así, puesto que M debe ser mínimo por contención, entonces M es C_3 . Por lo tanto, una 2-montaña en T es un $C_3 = \Delta(1, 1, 1)$.

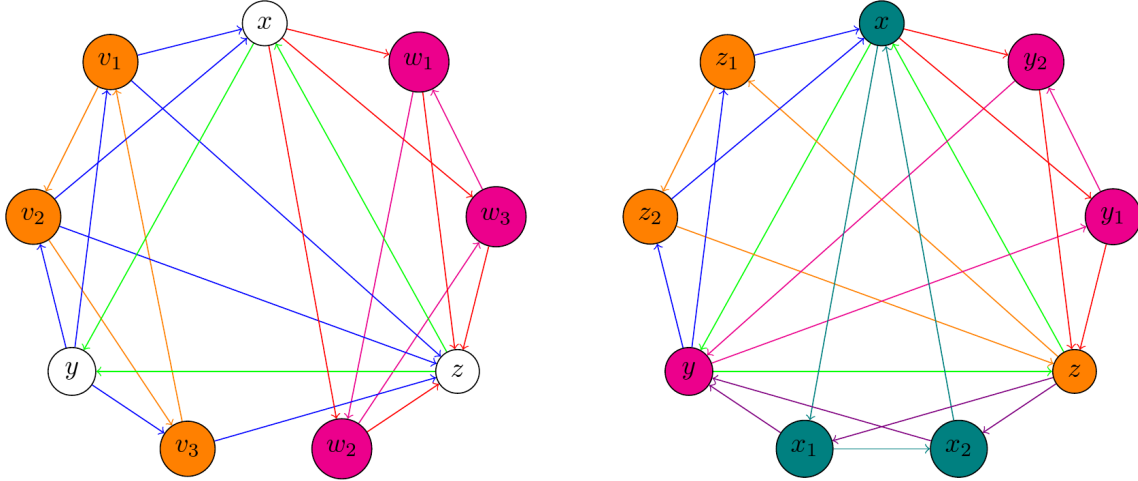


Figura 3.1: 3-montañas

- Una 3-montaña en T es un subtorneo M de T , mínimo por contención, que contiene un $(2, 3)$ -clan en M .
- Un $(2, 3)$ clan en M es un subconjunto $S \subseteq V(M)$ que cumple que $|S| = 3$, y toda flecha de $M\langle S \rangle = T\langle S \rangle$ es 2-pesada en M .
- Una flecha $uv \in A(T\langle S \rangle)$ es 2-pesada en M si $T\langle C_M(uv) \rangle$ contiene una 2-montaña; es decir, contiene un C_3 . Puesto que $|S| = 3$, tenemos dos casos: $T\langle S \rangle$ es T_3 o es C_3 .

En la figura 3.1, el $(2, 3)$ -clan es $S = \{x, y, z\}$ para ambas digráficas; la digráfica de la izquierda corresponde al primer caso, mientras que la de la derecha al segundo. No dibujamos todas las flechas de las 3-montañas, sino únicamente las que son necesarias para que sean 3-montañas; las flechas restantes pueden ir en cualquier sentido.

Caso 1. $T\langle S \rangle$ es T_3 . En este caso, $x \notin C_M(zy)$, $y \notin C_M(zx)$ y $z \notin C_M(xy)$. Así, requerimos tres vértices nuevos para $C_M(zy)$, tres para $C_M(zx)$ y tres para $C_M(xy)$ (no necesariamente distintos), y que cada tripleta de vértices forme un C_3 (2-montaña). Como M es mínimo por contención, no hacen falta más vértices. Notemos primero que $C_M(zx) \cap C_M(xy) = \emptyset$. En efecto, supongamos que existe $w \in C_M(zx) \cap C_M(xy)$. Así, (z, x, w, z) y (x, y, w, x) son ciclos en M . Se tiene, en particular, que $xw, wx \in A(M)$. Esto es una contradicción, pues M es un torneo. Además, las demás intersecciones entre los conjuntos de cimas pueden ser distintas del vacío. Puesto que requerimos de tres vértices en cada uno y $C_M(zx) \cap C_M(xy) = \emptyset$, entonces hay, en M , al menos seis vértices distintos de x, y y z ; son exactamente seis esto en caso de que haya tres vértices en las intersecciones de los conjuntos de cimas. En caso de que todas estas intersecciones sean vacías, tenemos un total de nueve vértices adicionales.

Si hay tres vértices en las intersecciones, puede suceder que $|C_M(zx) \cap C_M(zy)| = 3$, o bien que $|C_M(xy) \cap C_M(zy)| = 3$; el segundo de estos casos es el que tenemos

representado en la digráfica de la figura 3.1. Puede también suceder que $|C_M(zx) \cap C_M(zy)| = 2$ y $|C_M(xy) \cap C_M(zy)| = 1$ (o viceversa). Se tienen casos similares cuando hay uno o dos vértices en las intersecciones.

La primera digráfica de la figura 2.6 representa un subcaso de estos, que cumple lo siguiente: $C_M(xy) = C_M(zy) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $C_M(zx) = \{w_1, w_2, w_3\}$. Además, (v_1, v_2, v_3) (vértices y flechas naranjas) y (w_1, w_2, w_3) (vértices y flechas rosas) son cada uno un C_3 en M ; es decir, cada uno es una 2-montaña en M . Además, en la figura 3.1, las flechas verdes son flechas en $\{x, y, z\}$, las azules entre $\{x, y, z\}$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$ y las rojas entre $\{x, z, z\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Caso 2. $T\langle S \rangle$ es C_3 . En este caso, $x \in C_M(yz)$, $y \in C_M(zx)$ y $z \in C_M(xy)$. Así, requerimos dos vértices nuevos para $C_M(zy)$, dos para $C_M(zx)$ y dos para $C_M(xy)$, y que cada tripleta de vértices (junto con el que ya estaba, ya sea x, y o z) forme un C_3 . Como M es mínima por contención, no hacen falta más vértices.

Notemos primero que $C_M(xy) \cap C_M(yz) = \emptyset$. En efecto, supongamos que existe $w \in C_M(xy) \cap C_M(yz)$. Así, (x, y, w, x) y (y, z, w, y) son ciclos en M . Se tiene, en particular, que $yw, wy \in A(M)$. Esto es una contradicción, pues M es un torneo. Se prueba de manera análoga que $C_M(xy) \cap C_M(zx) = \emptyset$ y $C_M(yz) \cap C_M(zx) = \emptyset$.

Puesto que los conjuntos de cimas son ajenos dos a dos y requerimos que cada uno de esos tres conjuntos tenga tres vértices que formen un C_3 , entonces requerimos de dos a tres vértices nuevos por cada una de las flechas de $T\langle S \rangle$, todos distintos; dos en caso de que el vértice que ya se encuentra en el conjunto de cimas ayude a formar el C_3 , y tres en caso contrario.

La segunda digráfica de la figura 3.1 representa un subcaso de estos, que cumple lo siguiente: x, y y z ayudan cada uno a formar el C_3 en $C_M(yz)$, $C_M(zx)$ y $C_M(xy)$, respectivamente; se tiene que $C_M(xy) = \{z, z_1, z_2\}$, $C_M(yz) = \{x, x_1, x_2\}$, $C_M(zx) = \{y, y_1, y_2\}$ y (z, z_1, z_2, z) (vértices y flechas naranjas), (x, x_1, x_2, x) (vértices y flechas azules oscuro), (y, y_1, y_2, y) (vértices y flechas rosas) son cada uno un C_3 en M ; es decir, cada uno es una 2-montaña en M . Además, en la figura 3.1, las flechas verdes son flechas en $\{x, y, z\}$, las azules entre $\{x, y, z\}$ y $\{z_1, z_2\}$, las moradas entre $\{y, z\}$ y $\{x_1, x_2\}$ y las rojas entre $\{x, z\}$ y $\{y_1, y_2\}$.

Probaremos varios lemas y proposiciones que harán uso de los tres conceptos que acabamos de definir. Todo esto nos permitirá caracterizar a los héroes por medio de sus componentes fuertes.

Sean G un torneo y $X \subseteq V(G)$. Definimos $A(X) := \{u \in V(G) : X \Rightarrow u\}$ y $B(X) := \{u \in V(G) : u \Rightarrow X\}$, llamamos a estos conjuntos *exvecindad total* de X e *invecindad total* de X , respectivamente. Notemos que si $X = \{v\}$, $A(\{v\})$ es la exvecindad de v y $B(\{v\})$ su invecindad.

Denotamos por $\chi_t(X)$ a $\chi_t(G\langle X \rangle)$; es decir, el número cromático transitivo de un subconjunto de vértices es el de la digráfica inducida por dicho conjunto.

Además, dado $v \in V(G)$, denotamos por $N_r(v) := \{x \in N^+(v) : vx \text{ es } r\text{-pesada en } G\} \cup \{x \in N^-(v) : xv \text{ es } r\text{-pesada en } G\}$, a la *vecindad r -pesada* de v es decir, los vecinos de v conectados por una flecha r -pesada en G .

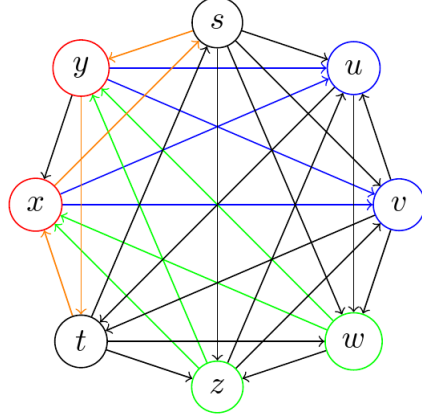


Figura 3.2: Vecindades totales

En la figura 3.2, $A(\{x, y\}) = \{u, v\}$ y $B(\{x, y\}) = \{w, z\}$; s y t no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos.

Proposición 3.1.2 * Sean G un torneo y H un subtorneo propio de G . Si existe $x \in V(G) \setminus V(H)$ tal que $x \Rightarrow V(H)$ o $V(H) \Rightarrow x$, entonces $\chi_t(V(H)) = \chi_t(V(H) \cup \{x\})$.

Prueba

Tomemos $\{C_1, \dots, C_k\}$ una k -coloración transitiva de $V(H)$ con $k = \chi_t(V(H))$ y $x \in V(G) \setminus V(H)$ tal que $x \Rightarrow V(H)$. Se cumple, en particular, que $x \Rightarrow C_1$, por lo que $C_1 \cup \{x\}$ es transitivo. Por lo tanto, $\{C_1 \cup \{x\}, \dots, C_k\}$ es una k -coloración transitiva de $V(H) \cup \{x\}$; se sigue que $\chi_t(V(H)) = k \geq \chi_t(V(H) \cup \{x\})$ y como $V(H) \subseteq V(H) \cup \{x\}$, se cumple también la otra desigualdad. El caso en que $V(H) \Rightarrow x$ es análogo. ■

Lema 3.1.3 ([3]) * Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 familias de torneos, G un torneo y $h, c, p, r, q, s \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 2$. Supongamos lo siguiente:

- (i) G es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre.
- (ii) G no contiene (r, s) -clanes.
- (iii) Todo $T \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene orden a lo más h .
- (iv) Para cada $i \in \{1, 2\}$, todo subtorneo T de G que sea \mathcal{H}_i -libre, cumple que $\chi_t(T) \leq c$.
- (v) Todo subtorneo T de G que no contiene r -montañas cumple que $\chi_t(T) \leq p$.
- (vi) Todo subconjunto $X \subseteq V(G)$ que no contiene $(r, s - 1)$ -clanes cumple que $\chi_t(X) \leq q$.

Se cumple entonces que $\chi_t(G) \leq \max(2c + 2q, ph^2 + c(h + 1))$.

Prueba

Probemos las siguientes afirmaciones.

(1) Para cada $v \in V(G)$, $\chi_t(N_r(v)) \leq q$.

Sea $v \in V(G)$. Por (ii), G no contiene (r, s) -clanes; así, $N_r(v)$ no contiene $(r, s - 1)$ -clanes de G ; de lo contrario, dado S un $(r, s - 1)$ -clan contenido en $N_r(v)$, se tiene que $S \cup \{v\}$ es un (r, s) -clan en G , pues todas las flechas de $T\langle S \cup \{v\} \rangle$ son r -pesadas en G . Se tiene entonces, por (vi), que $\chi_t(N_r(v)) \leq q$.

(2) Para cada $v \in V(G)$, se cumple que $\chi_t(N^+(v)) \leq c + ph$ o que $\chi_t(N^-(v)) \leq c + q$; se cumple también que $\chi(N^+(v)) \leq c + q$ o que $\chi(N^-(v)) \leq c + ph$.

Probemos la primera de las dos afirmaciones. La segunda se prueba de manera simétrica. Sea $v \in V(G)$. Si $\chi_t(N^-(v) \setminus N_r(v)) \leq c$, entonces, dado que $N^-(v) \subseteq (N^-(v) \setminus N_r(v)) \cup N_r(v)$, se cumple que $\chi_t(N^-(v)) \leq \chi_t(N^-(v) \setminus N_r(v)) + \chi_t(N_r(v)) \leq c + q$, por (1), que es lo que queremos probar.

Supongamos entonces que $\chi_t(N^-(v) \setminus N_r(v)) > c$. Por (iv), todo subtorneo T de G que sea \mathcal{H}_1 -libre cumple que $\chi_t(T) \leq c$; se tiene entonces que $G\langle N^-(v) \setminus N_r(v) \rangle$ no es \mathcal{H}_1 -libre. Así, podemos tomar $X \subseteq N^-(v) \setminus N_r(v)$ tal que $G\langle X \rangle$ es isomorfo a un elemento de \mathcal{H}_1 . Por (iii), los torneos en \mathcal{H}_1 tienen orden a lo más h ; al ser $G\langle X \rangle$ isomorfo a uno de esos torneos, tiene también orden a lo más h . Como $X \subseteq N^-(v) \setminus N_r(v)$, entonces para todo $x \in X$, $xv \in A(G)$ y xv no es r -pesada en G . Ahora bien, para cada $x \in X$, consideremos $C_G(xv)$. Como xv no es r -pesada en G , se tiene, por definición, que $G\langle C_G(xv) \rangle$ no contiene r -montañas en G . Se tiene entonces, por (v), que $\chi_t(C_G(xv)) \leq p$.

Sea $C := \bigcup \{C_G(xv) : x, v \in V(G) \text{ y } xv \in A(G)\}$. Como $G\langle X \rangle$ tiene orden a lo más h , entonces hay a lo más h flechas de X a v , por lo que C es la unión de a lo más h conjuntos; así, $\chi_t(C) \leq ph$. Recordemos que $G\langle X \rangle$ es isomorfo a un elemento de \mathcal{H}_1 ; así, como $X \Rightarrow A(X)$ por definición, entonces $A(X)$ es \mathcal{H}_2 -libre, pues se tiene, por (i), que G es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre. Como $A(X)$ es \mathcal{H}_2 -libre, se tiene, por (iv), que $\chi_t(A(X)) \leq c$. Afirmamos que $N^+(v) \setminus C \subseteq A(X)$. En efecto, dado $w \in N^+(v) \setminus C$, se tiene que $wv \in A(G)$. Además, como $X \subseteq N^-(v)$, entonces $xv \in A(G)$ para toda $x \in X$. Por último, si existiera $x \in X$ tal que $wx \in A(G)$, entonces (x, v, w, x) sería un C_3 en G , por lo que $w \in C_G(xv) \subseteq C$, lo cual genera una contradicción; se sigue que no existe tal x , por lo que $X \Rightarrow w$ y $w \in A(X)$. Como $N^+(v) \setminus C \subseteq A(X)$ y $\chi_t(A(X)) \leq c$, entonces $\chi_t(N^+(v) \setminus C) \leq c$. Como $N^+(v) \subseteq (N^+(v) \setminus C) \cup C$, entonces $\chi_t(N^+(v)) \leq \chi_t(N^+(v) \setminus C) + \chi_t(C) \leq c + ph$. Queda así probada la afirmación (2).

Procedamos con la prueba del lema. Sean $P := \{v \in V(G) : \chi_t(N^+(v) \setminus C) \leq c + ph\}$ y $Q := \{v \in V(G) : \chi_t(N^-(v) \setminus C) \leq c + ph\}$. Si $P \cup Q \neq V(G)$, se tiene, por (2), que existe $v \in V(G)$ tal que $\chi_t(N^+(v)) \leq c + q$ y $\chi_t(N^-(v)) \leq c + q$. Además, como $v \Rightarrow N^-(v)$, se tiene, por la proposición 3.1.2, que $\chi_t(N^-(v) \cup \{v\}) = \chi_t(N^-(v))$. Como G es un torneo, entonces $V(G) = N^+(v) \cup (N^-(v) \cup \{v\})$. Por lo tanto, $\chi_t(G) \leq \chi_t(N^+(v)) + \chi_t(N^-(v) \cup \{v\}) \leq 2c + 2q \leq \max\{2c + 2q, ph^2 + c(h + 1)\}$, que es lo que queremos probar. Supongamos entonces que $P \cup Q = V(G)$.

Caso 1. $G\langle P \rangle$ o $G\langle Q \rangle$ no son \mathcal{H}_2 -libres.

Si $G\langle P \rangle$ no es \mathcal{H}_2 -libre, consideremos un subconjunto $X \subseteq P$ tal que $G\langle X \rangle$ es isomorfo a un elemento de \mathcal{H}_2 . Por (iii), los elementos de \mathcal{H}_2 tienen orden a lo más h , lo cual nos dice que $|X| \leq h$.

Afirmamos que para todo $v \in V(G) \setminus X$, $v \in N^+(w)$ para algún $w \in X$ o $v \in B(X)$; en efecto, si $v \notin B(X)$, entonces existe $w \in X$ tal que $vw \in A(G)$, por lo que $v \in N^+(w)$. Notemos entonces que $V(G) = (\bigcup_{w \in X} N^+(w)) \cup B(X) \cup X = (\bigcup_{w \in X} N^+(w) \cup \{w\}) \cup B(X)$. Se sigue que $\chi_t(G) \leq (\sum_{w \in X} \chi_t(N^+(w) \cup \{w\})) + \chi_t(B(X))$.

Dado $w \in X$, $\chi_t(N^+(w)) \leq c + ph$ por (2). Como $w \Rightarrow N^+(w)$, se tiene, por la proposición 3.1.2, que $\chi_t(N^+(w) \cup \{w\}) \leq c + ph$. Además, $B(X)$ es \mathcal{H}_1 -libre, pues X no es \mathcal{H}_2 -libre y G es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre. Se tiene entonces, por (iv), que $\chi_t(B(X)) \leq c$. Así,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{w \in X} \chi_t(N^+(w) \cup \{w\}) \right) + \chi_t(B(X)) &\leq |X|(c + ph) + c \\ &= h(c + ph) + c \\ &= ph^2 + c(h + 1) \end{aligned}$$

Se sigue que $\chi_t(G) \leq ph^2 + c(h + 1)$; si $G\langle Q \rangle$ no es \mathcal{H}_2 -libre, procedemos de la misma manera, por lo que tenemos este mismo resultado.

Caso 2. $G\langle P \rangle$ y $G\langle Q \rangle$ son \mathcal{H}_2 -libres.

En este caso, se tiene, por (iv), que $\chi_t(P) \leq c$ y $\chi_t(Q) \leq c$, por lo que $\chi_t(G) \leq \chi_t(P) + \chi_t(Q) \leq 2c$.

En nuestros dos casos, $\chi_t(G) \leq \max(2c + 2q, ph^2 + c(h + 1))$. Queda así probado el lema. ■

Los siguientes lemas permiten reducir la cantidad de hipótesis y variables que se usan en el lema 3.1.3 por medio de la inducción.

Lema 3.1.4 ([3]) * Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 familias de torneos, G un torneo y $h, c, p, r \in \mathbb{Z}^+$. Supongamos lo siguiente:

- (i) G es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre.
- (ii) G no contiene $(r + 1)$ -montañas
- (iii) Todo $T \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene orden a lo más h .
- (iv) Para cada $i \in \{1, 2\}$, todo subtorneo T de G que sea \mathcal{H}_i -libre cumple que $\chi_t(T) \leq c$.
- (v) Todo subtorneo T de G que no contiene r -montañas cumple que $\chi_t(T) \leq p$.

Se cumple entonces que $\chi_t(G) \leq 2^{r-1}(ph^2 + c(h + 3))$.

Prueba

$$\text{Sea } f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{N}, f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 1, \\ 2^{s-2}(ph^2 + c(h+3)) - 2c & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

Probemos, por inducción sobre s , la siguiente afirmación:

(1) Para todo $1 \leq s \leq r+1$ y todo $X \subseteq V(G)$, si X no contiene (r, s) -clanes, entonces $\chi_t(X) \leq f(s)$.

Si $s = 1$, dado $X \subseteq V(G)$, si X no contiene $(r, 1)$ -clanes, entonces X no contiene vértices, pues los $(r, 1)$ -clanes son conjuntos de un solo vértice; por lo tanto $\chi_t(X) \leq 1$.

Supongamos que se cumple para alguna $s \in \mathbb{Z}^+$; es decir, que para todo $X \subseteq V(G)$, si X no contiene (r, s) -clanes, entonces $\chi_t(X) \leq f(s)$.

Probemos que se cumple para $s^* = s+1$. Sea $X \subseteq V(G)$ tal que no contiene (r, s^*) -clanes. Veamos que se cumplen todas las hipótesis del lema 3.1.3 tomando $G\langle X \rangle$ como G , s^* como s y $f(s)$ como q . Las hipótesis (i), (iii), (iv) y (v) de dicho lema se heredan de las hipótesis (i), (iii), (iv) y (v) del lema que estamos probando ahora, pues $X \subseteq V(G)$. Además, $s^* \geq 2$ y se tiene, por hipótesis, que $G\langle X \rangle$ no contiene (r, s^*) -clanes, lo cual nos da la hipótesis (ii). Por último, como $s = s^* - 1$, tenemos entonces, reescribiendo la hipótesis de inducción, que para todo $X \subseteq V(G)$, si X no contiene $(r, s^* - 1)$ -clanes, entonces $\chi_t(X) \leq f(s^* - 1) = f(s)$; se cumple, en particular, que si $Y \subseteq X$ no contiene $(r, s^* - 1)$ -clanes, entonces $\chi_t(Y) \leq f(s^* - 1)$; esto es la hipótesis (vi). Se tiene entonces, por el lema 3.1.3, lo siguiente:

$$\begin{aligned} \chi_t(X) &\leq \text{máx}(2c + 2q, ph^2 + c(h+1)) \\ &= \text{máx}(2c + 2f(s), ph^2 + c(h+1)) \\ &= \text{máx}(2c + 2[2^{s-2}(ph^2 + c(h+3)) - 2c], ph^2 + c(h+1)) \\ &= \text{máx}(2c + 2^{s-1}(ph^2 + c(h+3)) - 4c, ph^2 + c(h+1)) \\ &= \text{máx}(2^{s-1}(ph^2 + c(h+3)) - 2c, ph^2 + c(h+1)) \\ &= 2^{s-1}(ph^2 + c(h+3)) - 2c \\ &= f(s+1) = f(s^*). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de (1). Procedamos con la prueba del lema. Como G no contiene $(r+1)$ -montañas, (ii) nos dice que tampoco contiene $(r, r+1)$ -clanes. La afirmación (1) nos dice entonces que si tomamos $s = r+1$ y $X = V(G)$, se cumple que $\chi_t(G) \leq f(r+1) = 2^{r-1}(ph^2 + c(h+3)) - 2c \leq 2^{r-1}(ph^2 + c(h+3))$, lo cual concluye la prueba. ■

Lema 3.1.5 ([3]) * Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 familias de torneos, G un torneo y $h, c, r \in \mathbb{Z}^+$. Supongamos lo siguiente:

- (i) G es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre.
- (ii) Todo $T \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene orden a lo más h .

(iii) Para cada $i \in \{1, 2\}$, todo subtorneo T de G que sea \mathcal{H}_i -libre, cumple que $\chi_t(T) \leq c$.

Se cumple que para cada $r \in \mathbb{Z}^+$, si G no contiene $(r + 1)$ -montañas, entonces $\chi_t(G) \leq 2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1}h^{2r-2}c$.

Prueba

Sea $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{N}$, $f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 1, \\ 2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1}h^{2r-2}c - c & \text{si } s > 1. \end{cases}$

Probemos, por inducción sobre r , la siguiente afirmación:

(1) Si G no contiene $(r + 1)$ -montañas, entonces $\chi_t(G) \leq f(r)$.

Si $r = 1$, entonces G no contiene 2-montañas; es decir, no contiene a C_3 , por lo que es transitivo. Se sigue que $\chi_t(G) = 1 \leq 1$.

Supongamos que se cumple para alguna $r \in \mathbb{Z}^+$. Probemos que se cumple para $r^* = r + 1$. Supongamos que G no contiene $(r^* + 1)$ -montañas. Veamos que $\chi_t(G) \leq f(r^*)$. Para esto, notemos que se cumplen todas las hipótesis del lema 3.1.4 tomando r^* como r y $f(r^* - 1) = f(r)$ como p . Las hipótesis (i), (iii) y (iv) corresponden con (i), (iii) y (iv) de este lema; además, (ii) es hipótesis de esta prueba. Por último, la hipótesis de inducción nos dice, en particular, que todo subtorneo T de G que cumpla las hipótesis de este teorema cumple que $\chi_t(T) \leq f(r^* - 1)$; esto nos da (iv). Se tiene entonces, por el lema 3.1.4, lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\chi_t(G) &\leq 2^{r^*-1}(ph^2 + c(h + 3)) \\
&= 2^{r^*-1}[f(r^* - 1)h^2 + c(h + 3)] \\
&= 2^r[f(r)h^2 + c(h + 3)] \\
&= 2^r[(2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1}h^{2r-2}c - c)h^2 + c(h + 3)] \\
&= (2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1+r}h^{2r-2}c - 2^r c)h^2 + 2^r c(h + 3) \\
&= (2^{\frac{1}{2}(r^2-r+2r)+1}h^{2r-2}c - 2^r c)h^2 + 2^r c(h + 3) \\
&= (2^{\frac{1}{2}r(r+1)+1}h^{2r-2}c - 2^r c)h^2 + 2^r c(h + 3) \\
&= 2^{\frac{1}{2}r(r+1)+1}h^{2r}c - 2^r ch^2 + 2^r c(h + 3) \\
&= 2^{\frac{1}{2}r(r+1)+1}h^{2r}c + 2^r c(h + 3 - h^2) \\
&= 2^{\frac{1}{2}r(r+1)+1}h^{2r}c + 2^r c(h + 4 - h^2) - 2^r c \text{ pues } h \geq 3 \\
&< 2^{\frac{1}{2}r(r+1)+1}h^{2r}c - 2^r c \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}r(r+1)+1}h^{2r}c - c.
\end{aligned}$$

Además, $f(r^*) = f(r + 1) = 2^{\frac{1}{2}(r+1)r}h^{2(r+1)-2}c - c = 2^{\frac{1}{2}(r+1)r+1}h^{2r}c - c$.

Se sigue que $\chi_t(G) \leq f(r^*)$, lo cual concluye la prueba de (1).

Como G no contiene $(r + 1)$ -montañas, se tiene por (1), que $\chi_t(G) \leq f(r) < 2^{\frac{1}{2}r(r+1)+1}h^{2r-2}c$.

■

Proposición 3.1.6 ([3]) * Sean T un torneo y M una r -montaña en T de orden n . Se cumple que $n \leq (r!)^2$ y $r \leq \chi_t(M)$.

Prueba por inducción sobre r

Si $r = 1$, esto es trivial, pues una 1-montaña en T es un T_1 , que tiene orden $n = 1$ y cumple que $1 \leq 1 = (1!)^2$ y $1 \leq 1 = \chi_t(T_1)$.

Supongamos que se cumple para alguna $r \in \mathbb{Z}^+$.

Sea M una $(r + 1)$ -montaña en T de orden n . Veamos que $n \leq ((r + 1)!)^2$ y $r + 1 \leq \chi_t(M)$. Por definición, se tiene que M es un subtorneo de T , mínimo por contención, que contiene un $(r, r + 1)$ -clan, digamos $S \subseteq V(M)$. Se cumple que $|S| = r + 1$ y toda flecha de $T\langle S \rangle$ es r -pesada en M , es decir, que dada $uv \in A(T\langle S \rangle)$, se tiene que $T\langle C_M(uv) \rangle$ contiene una r -montaña en M .

Así, para cada $uv \in A(T\langle S \rangle)$, $T\langle C_M(uv) \rangle$ contiene una r -montaña en M , digamos M_{uv} , sea n_{uv} su orden. Si existiera $T_{uv} \subsetneq M_{uv}$, una r -montaña de T , entonces T_{uv} sería una r -montaña de M , lo cual contradice que M_{uv} sea mínima por contención en M . Se sigue que M_{uv} es una r -montaña en T . Para cada $uv \in A(T\langle S \rangle)$, se tiene entonces, por hipótesis de inducción, que $n_{uv} \leq (r!)^2$ y que $r \leq \chi_t(M_{uv})$.

Consideremos $M^* := (\bigcup_{uv \in A(T\langle S \rangle)} M_{uv}) \cup M\langle S \rangle$, sea n^* su orden. Recordemos que $T\langle S \rangle$ tiene orden $r + 1$. Así, tiene tamaño $(r + 1)(r/2)$, pues es un torneo. Además, sabemos ya que para todo $uv \in A(T\langle S \rangle)$, $n_{uv} \leq (r!)^2$. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} n^* &\leq \sum_{uv \in A(T\langle S \rangle)} n_{uv} + (r + 1) \\ &\leq (r + 1)(r/2)(r!)^2 + (r + 1) \\ &= (r + 1)[(r/2)(r!)^2 + 1] \\ &\leq (r + 1)[(r + 1)(r!)^2] \\ &= (r + 1)^2(r!)^2 = ((r + 1)!)^2. \end{aligned}$$

Se sigue que $n^* \leq ((r + 1)!)^2$.

Veamos que M^* contiene un $(r, r + 1)$ -clan. Sabemos ya que S es un $(r, r + 1)$ -clan en M , por lo que $|S| = r + 1$. Como $S \subseteq V(M^*)$, basta ver que S es un $(r, r + 1)$ -clan en M^* . Sea $uv \in A(T\langle S \rangle)$. Dado que $M_{uv} \subseteq M^*$, entonces, como $T\langle C_M(uv) \rangle$ contiene a M_{uv} , entonces $T\langle C_{M^*}(uv) \rangle$ contiene también a M_{uv} . Se sigue que S es un $(r, r + 1)$ -clan en M^* , pues M_{uv} es una r -montaña en $T\langle C_{M^*}(uv) \rangle$. Puesto que M es un subtorneo mínimo por contención que contiene a S , entonces $M \subseteq M^*$. Es inmediato que $n \leq n^*$, por lo que $n \leq ((r + 1)!)^2$.

Supongamos que existe una r -coloración transitiva de M , digamos $\{C_1, \dots, C_r\}$.

Como $S \subseteq M$ y $|S| = r + 1$, entonces existen $i \in \{1, \dots, r\}$ y $x, y \in S$ tales que $x, y \in C_i$. Como M es un torneo, entonces $xy \in A(M)$ o $yx \in A(M)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $xy \in A(M)$. Recordemos que M_{xy} es una r -montaña en M y que $r \leq \chi_t(M_{xy})$. Evidentemente, $\{C_1 \cap M_{xy}, \dots, C_r \cap M_{xy}\}$ es una k -coloración de M_{xy} , con $k \leq r$. Como $r \leq \chi_t(M_{xy})$, entonces $k = r$; se tiene,

en particular, que $C_i \cap M_{xy} \neq \emptyset$. Así, existe w en dicha intersección. Sin embargo, como $M_{xy} \subseteq C_M(xy)$, entonces $w \in C_M(xy)$, por lo que (x, y, w, x) es un ciclo en M . Como $x, y, w \in C_i$, entonces (x, y, w, x) es un ciclo en $T\langle C_i \rangle$, por lo que C_i no es transitivo. Esto es una contradicción, pues $\{C_1, \dots, C_r\}$ es una r -coloración transitiva de M , lo cual nos dice, en particular, que C_i es transitivo. Por lo tanto, no existe una r -coloración transitiva de M , por lo que $r + 1 \leq \chi_t(M)$. ■

Mencionamos ya que existen r -montañas para toda $r \in \mathbb{Z}^+$. Así, esta proposición nos da una segunda prueba de la proposición 2.3.4 del capítulo anterior, que afirma que el número cromático transitivo es no acotado; en efecto, dada $r \in \mathbb{Z}^+$, existe una r -montaña, la cual tiene número cromático transitivo mayor o igual a r .

La proposición 3.1.6, al igual que el lema 3.1.5, serán los únicos resultados que usaremos para probar el teorema 3.1.7, que da una cota para el número cromático transitivo de los torneos $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libres que depende únicamente de un natural c que acota los órdenes de los torneos en $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ y el número cromático de los torneos \mathcal{H}_1 -libres o \mathcal{H}_2 -libres.

Teorema 3.1.7 ([3]) * Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 familias de torneos, G un torneo y $c \in \mathbb{Z}^+$. Supongamos lo siguiente:

- (i) G es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre.
- (ii) Todo $T \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene orden a lo más c .
- (iii) Para cada $i \in \{1, 2\}$, todo subtorneo T de G que sea \mathcal{H}_i -libre, cumple que $\chi_t(T) \leq c$.

Se cumple entonces que $\chi_t(G) \leq (2c)^{4c^2}$.

Prueba

Si G no contiene $(2c+1)$ -montañas, se cumplen las hipótesis del lema 3.1.5 tomando $2c = r$ y $c = h$. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \chi_t(G) &\leq 2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1} h^{2r-2} c \\ &= 2^{\frac{1}{2}2c(2c-1)+1} c^{2(2c)-2} c \\ &= 2^{c(2c-1)+1} c^{4c-1} \\ &= 2^{2c^2-c+1} c^{4c-1} \\ &< 2^{4c^2} c^{4c^2} = (2c)^{4c^2}. \end{aligned}$$

Supongamos entonces que G sí contiene una $(2c+1)$ -montaña, digamos M de orden n . Por la proposición 3.1.6, se tiene que $n \leq ((2c+1)!)^2$ y $2c+1 \leq \chi_t(M)$.

Consideremos $P := \{v \in V(G) \setminus V(M) : G\langle N^+(v) \cap V(M) \rangle \text{ contiene un elemento de } \mathcal{H}_2\}$ y $Q := \{v \in V(G) \setminus V(M) : G\langle N^-(v) \cap V(M) \rangle \text{ contiene un elemento de } \mathcal{H}_1\}$.

Para cada $Y \subseteq V(M)$ tal que $|Y| = c$, definimos $P(Y)$ como $P \cap B(Y)$ si $G\langle Y \rangle$ contiene un elemento de \mathcal{H}_2 ; si no contiene elementos de \mathcal{H}_2 , lo definimos como \emptyset . Probemos las siguientes afirmaciones.

$$(1) V(G) \setminus V(M) = P \cup Q.$$

Argumentando por contradicción, supongamos que existe $v \in V(G) \setminus V(M)$ tal que $v \notin P \cup Q$; como $v \notin P$, se tiene, por (iii), que $\chi_t(N^+(v) \cap V(M)) \leq c$; análogamente, como $v \notin Q$, entonces $\chi_t(N^-(v) \cap V(M)) \leq c$. Sin embargo, $V(M) = (N^+(v) \cap V(M)) \cup (N^-(v) \cap V(M))$, por lo que $\chi_t(M) \leq c + c = 2c$; esto es una contradicción, pues $2c + 1 \leq \chi_t(M)$.

(2) Para todo $Y \subseteq V(M)$ tal que $|Y| = c$, se cumple que $\chi_t(P(Y)) \leq c$. Además, $\chi_t(P(Y) \cup Y) \leq c$.

Sea $Y \subseteq V(M)$ tal que $|Y| = c$. Si $G\langle Y \rangle$ contiene un elemento de \mathcal{H}_2 , entonces $P(Y) = P \cap B(Y)$. En este caso, $G\langle P(Y) \rangle$ es \mathcal{H}_1 -libre. De lo contrario, dado H_1 un elemento tal y H_2 un elemento de \mathcal{H}_2 contenido en $G\langle Y \rangle$, se tiene que $H_1 \Rightarrow H_2$, pues $P(Y) \Rightarrow Y$ (ya que $B(Y) \Rightarrow Y$). Esto es una contradicción, pues se tiene, por (i), que G es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre. Dado que $G\langle P(Y) \rangle$ es \mathcal{H}_1 -libre, se tiene, por (iii), que $\chi_t(P(Y)) \leq c$. Si $G\langle Y \rangle$ no contiene elementos de \mathcal{H}_2 , entonces $P(Y) = \emptyset$ y $\chi_t(\emptyset) \leq c$. Queda así probada la primera parte de la afirmación.

Como $\chi_t(P(Y)) \leq c$, existe $\{C_1, \dots, C_k\}$ una k -coloración transitiva de $P(Y)$ con $k \leq c$. Si $k < c$ entonces para cada $k < i \leq c$, definimos $C_i := \emptyset$. Como $|Y| = c$, podemos suponer que $Y = \{x_1, \dots, x_c\}$. Puesto que $P(Y) \Rightarrow Y$, se tiene que $\{C_1 \cup \{x_1\}, \dots, C_c \cup \{x_c\}\}$ es una c -coloración transitiva de $P(Y) \cup Y$. Se sigue que $\chi_t(P(Y) \cup Y) \leq c$, lo cual concluye la prueba de (2).

(3) Para todo $c \in \mathbb{N}$, con $c \geq 3$, se cumple que $((2c + 1)!)^2 \leq (2c)^{4c-1}$.

Probemos esto por inducción sobre c .

Si $c = 3$, entonces $((2c + 1)!)^2 = (7!)^2 = 705600$ y $(2c)^{4c-1} = 6^{11} = 362797056$.

Supongamos que $((2c + 1)!)^2 \leq (2c)^{4c-1}$ para alguna $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 3$. Veamos que se cumple para $c + 1$.

$$\begin{aligned} ((2(c + 1) + 1)!)^2 &= ((2c + 3)!)^2 \\ &= ((2c + 1)!)^2 ((2c + 2)(2c + 3))^2 \\ &\leq (2c)^{4c-1} ((2c + 2)(2c + 3))^2 \\ &\leq (2c + 3)^{4c-1} (2c + 3)^4 \\ &= (2c + 3)^{4c+3} \\ &= (2(c + 1) + 1)^{4(c+1)-1}. \end{aligned}$$

Se sigue que $((2(c + 1) + 1)!)^2 \leq (2(c + 1) + 1)^{4(c+1)-1}$; queda así probado (3).

Procedamos con la prueba del teorema. Sea $X := \bigcup \{P(Y) \cup Y : Y \subseteq V(M) \text{ y } |Y| = c\}$. Afirmamos que $P \cup V(M) = X$. En efecto, $X \subseteq P \cup V(M)$, pues para cada $Y \subseteq V(M)$, $P(Y) \cup Y \subseteq P \cup V(M)$. Además, dado $x \in P \cup V(M)$, basta tomar $Y \subseteq V(M)$ tal que $|Y| = c$ y $x \in Y$; es claro que $x \in Y \subseteq P(Y) \cup Y \subseteq X$. Ahora bien, es claro que hay a lo más $\binom{n}{c}$ subconjuntos $Y \subseteq M$ de cardinalidad c .

Recordemos que $n \leq ((2c + 1)!)^2$. Además, por (3), se tiene que $((2c + 1)!)^2 \leq (2c)^{4c-1}$. Se sigue que $n \leq (2c)^{4c-1}$. Así, hay a lo más $((2c)^{4c-1})^c = (2c)^{(4c-1)c}$ subconjuntos Y de cardinalidad c . Dado $Y \subseteq V(M)$, con $|Y| = c$, se tiene por (2), que $\chi_t(P(Y) \cup Y) \leq c$. Se tiene entonces que $\chi_t(P \cup V(M)) = \chi_t(X) \leq c(2c)^{(4c-1)c}$.

De manera análoga, podemos probar que $\chi_t(Q \cup V(M)) \leq c(2c)^{(4c-1)c}$ de la siguiente manera: dado $Y \subseteq V(M)$ con $|Y| = c$, definimos $Q(Y) := Q \cap A(Y)$ y probamos que $\chi_t(Q(Y) \cup Y) \leq c$; para acabar, definimos W como la unión de todos los $Q(Y) \cup Y$.

Por (1), tenemos que $V(G) \setminus V(M) = P \cup Q$, por lo que $V(G) = (P \cup V(M)) \cup (Q \cup V(M))$. Se sigue que $\chi_t(G) \leq 2c(2c)^{(4c-1)c} = (2c)^{4c^2-c+1} \leq (2c)^{4c^2}$. ■

El siguiente teorema caracteriza los héroes a través de sus componentes fuertes.

Teorema 3.1.8 ([3]) * *Un torneo es un héroe si y sólo si todas sus componentes fuertes son héroes.*

La prueba de la necesidad es sencilla: si T es un héroe, entonces sus componentes son héroes, puesto que son subtorneos de T . Para probar la suficiencia, usaremos únicamente el teorema. 3.1.7.

Prueba por inducción sobre el número de componentes

Si tomamos un torneo con una única componente fuerte, el resultado es trivial.

Supongamos que todos los torneos con n componentes fuertes lo cumplen, para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$.

Sea H un torneo con $n + 1$ componentes fuertes, donde cada componentes es un héroe. Por el corolario 1.3.9, H tiene una componente fuerte inicial, digamos I .

Dado que H es un torneo e I es inicial, se tiene que $V(I) \Rightarrow (V(H) \setminus V(I))$. Notemos además que $H - V(I)$ es un torneo con exactamente n componentes fuertes y cada una es un héroe. Se tiene entonces, por hipótesis de inducción, que $H - V(I)$ es un héroe; además, sabemos también que I es un héroe. Sean $c_1 := \max\{|V(I)|, |V(H) \setminus V(I)|\}$, $c_2 := \max\{n(I), n(H - V(I))\}$ y $c := \max\{c_1, c_2\}$. Consideremos también $\mathcal{H}_1 := \{I\}$ y $\mathcal{H}_2 := \{H - V(I)\}$. Por último, tomemos $c^* := (2c)^{4c^2}$.

Para ver que H es un héroe, veamos que todo torneo H -libre tiene número cromático transitivo a lo más c^* .

Sea G un torneo H -libre. Veamos que cumple las hipótesis del teorema 3.1.7. Como G es H -libre, es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre, pues ambos conceptos coinciden; esto nos da (i). Como $c \geq c_1$, tenemos (ii). Además, dado que $c \geq c_2$ y $n(I)$ es tal que todo torneo I -libre tiene número cromático transitivo a lo más $n(I)$ y, análogamente para $n(H - V(I))$, se cumple (iii). El teorema 3.1.7 afirma entonces que $\chi_t(G) \leq c^*$. Se sigue que H es un héroe y $n(H) \leq c^*$. ■

Esto concluye la prueba de nuestra primera caracterización de los héroes. Podemos entonces continuar con nuestra búsqueda de héroes, limitándonos ahora a torneos fuertes.

3.2. Héroes fuertes y celebridades

Daremos, en esta sección y la siguiente, una caracterización recursiva de los héroes fuertes. Para esto, empecemos probando el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 ([3]) * *Si H es un héroe fuerte de orden al menos 2, entonces $H = \Delta(P, Q, 1)$ para algunos P, Q héroes no vacíos.*

Prueba

Sea H un héroe fuerte de orden al menos 2. Al ser H un héroe, cumple, en particular, que la familia de torneos H -libres tiene número cromático acotado por $n(H)$. Por la proposición 2.3.3 del capítulo anterior, la familia de torneos $\{S_i : i \in \mathbb{Z}^+\}$ tiene número cromático transitivo no acotado; se sigue que dicha familia no es H -libre. Tomemos $i \in \mathbb{Z}^+$ el mínimo entero positivo tal que S_i contiene a H . Como H tiene orden al menos dos, $i > 1$. Sabemos entonces que $S_i = \Delta(X, Y, Z)$ con $S_i \langle X \rangle$, $S_i \langle Y \rangle$ ambos isomorfos a S_{i-1} y $Z = \{z\}$. Puesto que S_i contiene a H , podemos tomar $W \subseteq V(S_i)$ tal que $S_i \langle W \rangle$ es isomorfo a H . Por la minimalidad de i , se tiene que S_{i-1} no contiene a H ; así, $W \not\subseteq X$ y $W \not\subseteq Y$. Como H tiene orden al menos 2, entonces $|W| \geq 2$. Debe entonces suceder que al menos dos de las intersecciones $X \cap W$, $Y \cap W$ y $Z \cap W$ son no vacías; puesto que $X \Rightarrow Y$, $Y \Rightarrow Z$ y $Z \Rightarrow X$, las 3 intersecciones son no vacías, ya que $H \cong S_i \langle W \rangle$ y H es fuerte. Notemos entonces que $W = \Delta(X \cap W, Y \cap W, Z \cap W)$. Además, como $X \cap W \subseteq W$, $Y \cap W \subseteq W$ y $S_i \langle W \rangle$ es un héroe, entonces $P = S_i \langle X \cap W \rangle$ y $Q = S_i \langle Y \cap W \rangle$ son ambos héroes, pues todo subtorneo de un héroe es también un héroe. Por último, como $Z = \{z\}$, entonces $Z \cap W = \{z\}$. Se sigue que $S_i \langle W \rangle = \Delta(P, Q, 1)$, por lo que $H = \Delta(P, Q, 1)$. ■

Para fortalecer este teorema, requerimos de conceptos nuevos. Decimos que un torneo H es una *celebridad* si existe $c \in (0, 1]$ tal que todo torneo T que sea H -libre, tiene un subtorneo transitivo de cardinalidad al menos $c|V(T)|$. Si $c = 1$, debe suceder que todo torneo H -libre es transitivo; obsérvese que C_3 es una celebridad que cumple esto. El concepto de celebridad es estudiado a profundidad en el artículo [3], donde se prueba un resultado muy fuerte: un torneo es un héroe si y sólo si es una celebridad. Por ahora, requerimos probar únicamente la necesidad de dicho teorema. La prueba de la suficiencia se verá al final del capítulo.

Proposición 3.2.2 ([3]) * *Todo héroe es una celebridad.*

Prueba

Sea H un héroe y $n(H)$ su número de héroe. Sean $c = \frac{1}{n(H)}$ y G un torneo H -libre. Sabemos ya que $\chi_t(G) \leq n(H)$. Esto nos dice que G tiene un subtorneo transitivo de cardinalidad al menos $c|V(G)|$, de lo contrario, no habría k -coloraciones transitivas de G para toda $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n(H)$, lo cual contradice que $\chi_t(G) \leq n(H)$. ■

Lema 3.2.3 ([3]) * *Si H es una celebridad, entonces hay una enumeración de sus vértices tal que la digráfica de las flechas hacia atrás de H bajo dicha enumeración es un bosque.*

Prueba

Sea H una celebridad. El corolario 2.4.2 del capítulo anterior afirma que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, existe una digráfica simétrica G_k tal que todo conjunto independiente S en G_k cumple que $|S| < \frac{|V(G_k)|}{2^k}$ y tal que $g(H) > \max\{|V(H)|, 3\}$, tomando $n = \max\{|V(H)|, 3\}$ en dicho corolario.

Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, tomemos una enumeración v_1, \dots, v_{n_k} cualquiera de los vértices de G_k , con $n_k = |V(G_k)|$. Consideremos el torneo R_k tal que $V(R_k) = V(G_k)$ y tal que su conjunto de flechas está dado como sigue: dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j v_i \in A(R_k)$ si $i < j$ y $v_j v_i, v_i v_j \in A(G_k)$; en caso contrario, $v_i v_j \in A(R_k)$. Por cómo definimos R_k , es claro que G_k es la digráfica de las flechas hacia atrás de R_k bajo la enumeración dada. Puesto que $g(G_k) > 4$, se cumple, por el lema 2.4.3 del capítulo anterior, que dado $W \subseteq V(R_k)$ transitivo, W es la unión de dos conjuntos independientes en G_k . Ahora bien, sea $\alpha(R_k) := \max\{m \in \mathbb{Z}^+ : R_k \text{ tiene un conjunto transitivo de cardinalidad } m\}$. Probemos la siguiente afirmación:

$$(1) \alpha(R_k) < \frac{|V(R_k)|}{k}.$$

Sea $W \subseteq V(R_k)$ transitivo en R_k . Sabemos ya que $W = X \cup Y$, con X, Y independientes en G_k . Además, tanto X como Y tienen cardinalidad menor a $|S| < \frac{|V(G)|}{2^k}$, por cómo elegimos G_k . Por lo tanto, $|W| < \frac{|V(G)|}{k}$. Se sigue que $\alpha(R_k) < \frac{|V(R_k)|}{k}$.

Procedamos con la prueba del lema. Como H es una celebridad, existe $c \in (0, 1]$ tal que todos los torneos G que son H -libres tienen un subtorneo transitivo de cardinalidad al menos $c|V(G)|$. Como $c > 0$, se tiene, por la propiedad arquimediana, que existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{k} < c$. Así, $\frac{|V(R_k)|}{k} < c|V(R_k)|$; además, se tiene, por (1), que $\alpha(R_k) < \frac{|V(R_k)|}{k}$. Por lo tanto, $\alpha(R_k) < c|V(R_k)|$; se sigue que R_k contiene a H , de lo contrario, $\alpha(R_k) \geq c|V(R_k)|$. Sea $X \subseteq V(R_k)$ tal que $R_k \langle X \rangle$ es isomorfo a H y sea $f: X \rightarrow V(H)$ dicho isomorfismo. Como $|X| = |V(H)|$ y $g(G_k) > |V(H)|$, entonces los únicos ciclos de $G_k \langle X \rangle$ son de longitud 2. Además, todas las flechas de $G_k \langle X \rangle$ son simétricas; así, $G_k \langle X \rangle \cup (G_k \langle X \rangle)^{-1} = G_k \langle X \rangle$. Se sigue que $G_k \langle X \rangle$ es un bosque. Puesto que $X \subseteq V(R_k)$, tomemos w_1, \dots, w_m la enumeración de X , con $w_1 = v_{i_1}$ con $i_1 := \min\{i : v_i \in X\}$; es decir, w_1 es el v_i con índice más pequeño que aparece en X . De igual manera, w_2 corresponde al segundo más pequeño, y así sucesivamente. Es entonces claro que $G_k \langle X \rangle$ es la digráfica de las flechas hacia atrás de $R_k \langle X \rangle$ bajo la enumeración w_1, \dots, w_m . Para cada $w_i \in X$, sea $z_i := f(v_i)$. Notemos que z_1, \dots, z_m es una enumeración de $V(H)$ que cumple que la digráfica F de las flechas hacia atrás de H es un bosque; en efecto, ya que $R_k \langle X \rangle \cong_f H$ y tomamos la misma enumeración, según el isomorfismo f , entonces $G_k \langle X \rangle \cong_f F$; como $G_k \langle X \rangle$ es un bosque, F también lo es. ■

Teorema 3.2.4 ([3]) * *Toda celebridad es 2-coloreable-transitiva.*

Prueba

Sea H una celebridad. Por el lema 3.2.3, existe v_1, \dots, v_n una enumeración de sus vértices tal que B , la digráfica de las flechas hacia atrás de H bajo la enumeración, es un bosque. El corolario 2.1.7 nos dice que todo árbol es 2-coloreable (en el sentido de coloraciones propias). Puesto que B es un bosque, es la unión de árboles ajenos por flechas, por lo que también es 2-coloreable. Así, existe $\{X, Y\}$ una partición de $V(B)$, con X, Y independientes en B . Por la proposición 2.4.3 del capítulo anterior, se tiene que X, Y son transitivos en H . Así, $\{X, Y\}$ es una 2-coloración transitiva de H , por lo que H es 2-coloreable-transitivo. ■

El siguiente torneo es nuestro primer ejemplo de un torneo que no es un héroe. Nos será de mucha utilidad.

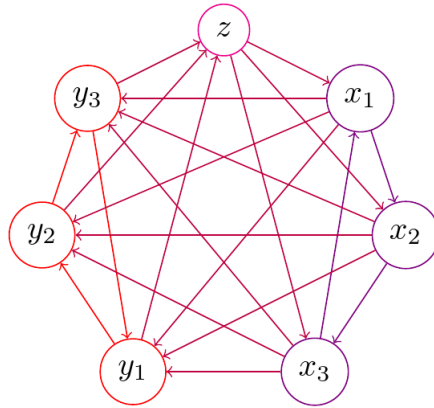


Figura 3.3: $\Delta(C_3, C_3, 1)$

Proposición 3.2.5 ([3]) * *El torneo $\Delta(C_3, C_3, 1)$ no es un héroe.*

Prueba

Probemos primero la siguiente afirmación:

(1) $D := \Delta(C_3, C_3, 1)$ es 3-cromático-transitivo.

Argumentando por contradicción, supongamos que existe $\{A, B\}$ una 2-coloración transitiva de D . Supongamos que $D = \Delta(X, Y, Z)$, con $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ los conjuntos de vértices del primer y segundo C_3 , respectivamente, y $Z = \{z\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z \in A$. Sabemos ya que $\chi_t(X) = \chi_t(Y) = 2$; así, se cumple que $X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B$ y lo análogo para Y . Supongamos que $x_1, y_1 \in A$ y que $x_2, y_2 \in B$. Puesto que $X \Rightarrow Y, Y \Rightarrow Z$ y $Z \Rightarrow X$, se tiene que (x_1, y_1, z, x_1) es un ciclo en D , lo cual es una contradicción, pues A es transitivo. Se sigue que no hay 2-coloraciones transitivas de D . Además, la proposición 2.3.9 nos dice, en particular, que $\chi_t(7) = 3$, lo cual es equivalente a decir que todo torneo de orden 7 es 3-coloreable-transitivo. Se sigue que $\chi_t(D) = 3$. Queda así probada la afirmación (1).

Por el teorema 3.2.4, sabemos que toda celebridad es 2-coloreable-transitiva; se tiene entonces, por (1), que D no es una celebridad. Además, la proposición 3.2.2 afirma que todo héroe es una celebridad. Se sigue que D no es un héroe. ■

Vimos ya, en la proposición 2.3.6, un primer ejemplo de un torneo de orden 7 que es 3-cromático-transitivo, al igual que el torneo de la proposición 3.2.5. Usando el mismo argumento que en la segunda de estas proposiciones, dicho primer ejemplo tampoco es un héroe; se prueba de manera análoga. Nuestro nuevo ejemplo, $\Delta(C_3, C_3, 1)$, nos proporciona algo adicional: permite mejorar la conclusión del teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.6 ([3]) * *Si H es un héroe fuerte de orden al menos 2, entonces $H = \Delta(P, k, 1)$ o $H = \Delta(P, 1, k)$ para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$ y algún héroe P .*

Prueba

Sea H un héroe fuerte de orden al menos 2. Por el teorema 3.2.1, existen P, Q héroes tales que $H = (P, Q, 1)$. Como todo subtorneo de un héroe es un héroe y sabemos, por la proposición 3.2.5 que $\Delta(C_3, C_3, 1)$ no es un héroe, entonces $\Delta(C_3, C_3, 1)$ no es un subtorneo de H . Así, P es C_3 -libre o Q es C_3 -libre, lo cual es equivalente a decir que P es transitivo o Q lo es. Se sigue que $P = T_k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$ o lo análogo para Q . Por lo tanto, $H = \Delta(P, k, 1)$ si $Q = T_k$ y $H = \Delta(Q, 1, k) = (k, Q, 1)$ si $P = T_k$. ■

Este teorema concluye la primera mitad de nuestra caracterización de los héroes fuertes.

3.3. Construcción recursiva de un héroe

Buscaremos ahora probar el recíproco del teorema 3.2.6. Para esto, requerimos enlazar varios lemas.

Lema 3.3.1 ([3]) * *Sean G un torneo, $\{X_1, \dots, X_n\}$ una partición de $V(G)$, con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $d \in \mathbb{Z}^+$. Supongamos lo siguiente:*

- *Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\chi_t(X_i) \leq d$.*
- *Para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, si existe una flecha uv en G tal que $u \in X_j$ y $v \in X_i$, entonces $\chi_t(X_{i+1} \cup \dots \cup X_j) \leq d$.*

Se cumple entonces que $\chi_t(G) \leq 2d$.

Prueba

Definimos, de manera recursiva, k_i para toda $i \in \mathbb{Z}^+$:

- $k_1 := 1$.

Si tenemos definido k_s , para alguna $s \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

- si existe $j \in \mathbb{Z}^+$, $k_s < j \leq n$ tal que $\chi_t(\bigcup_{k_s \leq i \leq j} X_i) > d$, definimos k_{s+1} como el mínimo j que lo cumple.
- si no existe tal j , $k_{s+1} := k_s$.

Evidentemente, el primer caso sólo sucederá una cantidad finita de veces, pues $j \leq n$; así, podemos tomar a k_t con $t := \min\{s \in \mathbb{Z}^+ : k_s = k_{s+1}\}$. Para cada $s \in \mathbb{Z}^+$, con $1 \leq s < t$, definimos $Y_s := \bigcup_{k_s \leq i < k_{s+1}} X_i$; definimos también $Y_t := \bigcup_{k_t \leq i \leq n} X_i$. Puesto que $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una partición de $V(G)$, y dada la forma en que definimos los Y_s , se tiene que $\{Y_1, \dots, Y_t\}$ es también una partición de $V(G)$. Probemos la siguiente afirmación:

(1) Para cada $s \in \mathbb{Z}^+$, con $1 \leq s \leq t$, se cumple que $\chi_t(Y_s) \leq d$; además, si $2 \leq s \leq t-1$, entonces no hay flechas de $Y_{s+1} \cup \dots \cup Y_t$ hacia $Y_1 \cup \dots \cup Y_{s-1}$.

Sea $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $1 \leq s \leq t$. Por hipótesis, sabemos que $\chi_t(X_{k_s}) \leq d$. Si $s < t$, entonces k_{s+1} es el mínimo entero positivo tal que $k_s < k_{s+1} \leq n$ y $\chi_t(\bigcup_{k_s \leq i \leq k_{s+1}} X_i) > d$. Si $k_{s+1} = k_s + 1$, entonces $Y_s = X_{k_s}$, por lo que $\chi_t(Y_s) = \chi_t(X_{k_s}) \leq d$. Si $k_{s+1} > k_s + 1$, entonces $k_s \leq k_{s+1} - 1 < k_{s+1} < n$. Así, dado que $Y_s = \bigcup_{k_s \leq i < k_{s+1}} X_i = \bigcup_{k_s \leq i \leq k_{s+1}-1} X_i$, se tiene, por la minimalidad de k_{s+1} , que $\chi_t(Y_s) \leq d$. Si $s = t$, entonces no existe j tal que $k_s < j \leq n$ y $\chi_t(\bigcup_{k_s \leq i \leq j} X_i) > d$. Si $k_s = n$, entonces $Y_s = X_{k_s} = X_n$, por lo que $\chi_t(Y_s) \leq d$. Si $k_s < n$, se tiene también que $\chi_t(Y_t) \leq d$, pues $Y_t = \bigcup_{k_t \leq i \leq n} X_i$ y $k_s < n \leq n$. Esto prueba la primera parte de la afirmación.

Supongamos ahora que $2 \leq s \leq t-1$. Argumentando por contradicción, supongamos que existe una flecha uv con $u \in Y_{s+1} \cup \dots \cup Y_t$ y $v \in Y_1 \cup \dots \cup Y_{s-1}$; se cumple, en particular, que $u \in X_j$ para alguna $j \geq k_{s+1}$ y $v \in X_i$ para alguna $i < k_s$. Se tiene entonces, por nuestra segunda hipótesis, que $\chi_t(X_{i+1} \cup \dots \cup X_k) \leq d$. Sin embargo, como $i < k_s$ y $j \geq k_{s+1}$, se tiene que $\chi_t(X_{i+1} \cup \dots \cup X_j) \geq \chi_t(\bigcup_{k_s \leq i \leq k_{s+1}} X_i) > d$, por cómo elegimos k_{s+1} . Esto es una contradicción. Queda así probada la afirmación.

Procedamos con la prueba del lema. Sea $t_1 := t$ si t es par y $t_1 := t-1$ si t es impar. De igual manera, sea $t_2 := t$ si t es impar y $t_2 := t-1$ si t es par. Ahora bien, sean $Y_{par} := Y_0 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_{t_1}$ y $Y_{impar} := Y_1 \cup Y_3 \cup \dots \cup Y_{t_2}$ las uniones de los Y_i con índice par e impar, respectivamente. Evidentemente $\{Y_{par}, Y_{impar}\}$ es una partición de $V(G)$, pues $\{Y_1, \dots, Y_t\}$ lo es. Afirmamos que $\chi_t(Y_{par}) \leq d$ y $\chi_t(Y_{impar}) \leq d$. Probémoslo para Y_{par} ; se prueba de manera análoga para Y_{impar} .

Por la primera parte de la afirmación (1), se tiene que Y_0, Y_2, \dots, Y_{k_1} tienen, cada uno, número cromático a lo más d . Para cada i tal que $2i \in \{0, \dots, t_1\}$, sea C_{2i} una d -coloración transitiva de Y_{2i} , $C_{2i} := \{C_1^{2i}, C_2^{2i}, \dots, C_d^{2i}\}$. Para cada $k \in \{1, \dots, d\}$, sea $C_k := C_j^0 \cup C_j^2 \cup \dots \cup C_j^{t_1}$; es claro que C_k es la unión de conjuntos transitivos. Afirmamos que para todo $k \in \{1, \dots, d\}$, C_k es transitivo. Sea $k \in \{1, \dots, d\}$. Usando la segunda parte de la afirmación (1), tenemos, en particular, que dados i, j con $2i, 2j \in \{0, \dots, t_1\}$ y $2i < 2j$, no hay flechas de Y_{2j} a Y_{2i} . En particular, no hay flechas de C_{2j}^k a C_{2i}^k . Así, C_k es la unión de conjuntos transitivos que, bajo la enumeración dada, mandan flechas únicamente en un sentido. Se sigue que C_k es

transitivo. Por lo tanto, $\{C_1, \dots, C_d\}$ es una d -coloración transitiva de Y_{par} , por lo que $\chi_t(Y_{par}) \leq d$. Puesto que $\chi_t(Y_{par}) \leq d$, $\chi_t(Y_{impar}) \leq d$ y $V(G) = Y_{par} \cup Y_{impar}$, entonces $\chi_t(G) \leq 2d$. ■

Sean G un torneo y X_1, \dots, X_n una sucesión de subconjuntos de $V(G)$, ajenos por pares. Decimos que uv es una flecha hacia atrás de G bajo esta enumeración de conjuntos si $u \in X_j$, $v \in X_i$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$ y $uv \in A(G)$. La digráfica de las flechas hacia atrás de G bajo dicha enumeración se define como sigue: $V(G) = X_1 \cup \dots \cup X_n$ y dados $u, v \in V(G)$, $uv, vu \in A(G)$ si uv o vu son flechas hacia atrás de G bajo la enumeración.

Lema 3.3.2 ([3]) * Sean $k, c \in \mathbb{Z}^+$, H un héroe, G un torneo $\Delta(H, 1, k)$ -libre y $\{X_1, \dots, X_n\}$ una partición de $V(G)$. Supongamos lo siguiente:

(i) Todo subtorneo de G que sea H -libre tiene número cromático transitivo a lo más c .

(ii) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\chi_t(X_i) \leq c$.

(iii) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y todo $v \in X_i$, $\chi_t(N^+(v) \cap (X_1 \cup \dots \cup X_{i-1})) \leq c$ y $\chi_t(N^-(v) \cap (X_{i+1} \cup \dots \cup X_n)) \leq c$.

Se cumple entonces que $\chi_t(G) \leq c(k+3)2^k$.

Prueba

Para cada $uv \in A(G)$, con $u \in X_j$ y $v \in X_i$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por $\alpha(uv) = j - i$ a la *amplitud* de uv .

Definimos, para cada $u \in V(G)$, F_u de la siguiente manera: si la cardinalidad del conjunto de flechas hacia atrás de G bajo la enumeración dada, cuya cola es u , es menor que o igual a $2^{k-1} - 2$, tomamos F_u igual a dicho conjunto; en caso contrario, elegimos F_u como un conjunto de flechas hacia atrás con cola en u de cardinalidad $2^{k-1} - 1$, de tal manera que las amplitudes de las flechas sean lo más grandes posible.

Definimos además $F := \bigcup_{u \in V(G)} F_u$. Probemos la siguiente afirmación:

(1) Para cada flecha hacia atrás uv tal que $u \in X_j$, $v \in X_h$, con $h, j \in \{1, \dots, n\}$, $h < j$ y tal que $uv \notin F$, se cumple que $\chi_t(W) \leq c(k+3)$, con $W := \bigcup_{h < i \leq j} X_i$.

Sea uv una flecha tal. Puesto que $uv \notin F$, estamos en el caso en que $|F_u| = 2^{k-1} - 1$. Así, si tomamos $C := \{x \in V(G) : ux \in F_u \text{ o } x = v\}$, es claro que $|C| = 2^{k-1}$.

Puesto que $v \in X_h$ y las flechas hacia atrás en F_u fueron elegidas de tal forma que sus amplitudes sean lo más grandes posible y uv no fue elegida, entonces dada una flecha $ux \in F_u$, debe cumplirse que $\alpha(uv) \leq \alpha(ux)$, por lo que $x \in X_i$ con $i \leq h$. Así, $C \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_h$. Además, como $|C| = 2^{k-1}$, se tiene, por el teorema 2.2.7, que $G\langle C \rangle$ contiene un T_k ; sea $Y \subseteq C$ el conjunto de vértices de dicho T_k . Como $Y \subseteq C$, entonces $Y \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_h$.

Buscaremos descomponer a W en 3 conjuntos y acotar el número cromático transitivo de cada uno por separado.

Sean $P_1 := \{w \in W \setminus X_j : wy \in A(G) \text{ para algún } y \in Y\}$, $P_2 := \{w \in W \setminus X_j : uw \in A(G)\}$ y $P := P_1 \cup P_2$. consideremos además $Q := W \setminus (P \cup X_j)$. Evidentemente, $W = P \cup Q \cup X_j$. Por (ii), sabemos que $\chi_t(X_j) \leq c$. Veamos, además, que $\chi_t(P) \leq c(k+1)$ y que $\chi_t(Q) \leq c$.

Empecemos viendo que $\chi_t(P) \leq c(|Y| + 1) = c(k+1)$. Para cada $y \in Y$, sea $P_y := \{p \in P_1 : p \text{ domina a } y\}$. Sea $y \in Y$, $y \in X_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, h\}$. Por (iii), $\chi_t(N^-(y) \cap (X_{i+1} \cup \dots \cup X_n)) \leq c$. Y como $P_y \subseteq P_1 \subseteq W \subseteq \bigcup_{h < i < j} X_i$ y $P_y \subseteq N^-(y)$, entonces $\chi_t(P_y) \leq c$. Además, es claro que $P_1 = \bigcup_{y \in Y} P_y$, por lo que $\chi_t(P_1) \leq c|Y|$. Por (iii), sabemos también que $\chi_t(N^+(u) \cap (X_1 \cup \dots \cup X_{j-1})) \leq c$. Dado que $P_2 \subseteq P \subseteq (W \setminus X_j) \subseteq \bigcup_{h < i < j} X_i$ y $P_2 \subseteq N^+(u)$, entonces $\chi_t(P_2) \leq c$. Así, como $P = P_1 \cup P_2$, se tiene que $\chi_t(P) \leq c|Y| + c = c(|Y| + 1)$. Recordemos además que $|Y| = k$, pues $G\langle Y \rangle$ es un T_k . Se sigue que $\chi_t(P) \leq c(k+1)$.

Veamos ahora que $\chi_t(Q) \leq c$. Dado $q \in Q$, se tiene que $q \notin P$, por lo que $q \notin P_2$. Así, $uq \notin A(G)$, y como G es un torneo, se sigue que $qu \in A(G)$. Puesto que esto es cierto para toda $q \in Q$, se sigue que $Q \Rightarrow u$. Además, como $Y \subseteq C = \{x : ux \in F_u \text{ o } x = v\}$, se sigue que $u \Rightarrow Y$. Por último, dado $q \in Q$, se tiene que $q \notin P_1$, por lo que $qy \notin A(G)$ para toda $y \in Y$; al ser G un torneo, se cumple que $yg \in A(G)$. Puesto que esto es cierto para toda $q \in Q$, se sigue que $Y \Rightarrow Q$. Así, $(Q, \{u\}, Y)$ forma una trisección. Afirmamos que Q es H -libre. Argumentando por contradicción, supongamos que existe $A \subseteq Q$ tal que $G\langle A \rangle \cong H$. Como $(Q, \{u\}, Y)$ es una trisección y $A \subseteq Q$, entonces $(A, \{u\}, Y)$ es también una trisección. Sabemos que $G\langle Y \rangle \cong T_k$, pues así nos tomamos Y ; además, es claro que $G\langle u \rangle \cong T_1$. Así, la trisección puede escribirse como $\Delta(H, 1, k)$, lo cual es una contradicción, pues G es $\Delta(H, 1, k)$ -libre por hipótesis. Como Q es H -libre, se sigue, por (i), que $\chi_t(Q) \leq c$.

Ahora bien, como $\chi_t(X_j), \chi_t(Q) \leq c$, $\chi_t(P) \leq c(k+1)$ y $W = P \cup Q \cup X_j$, entonces $\chi_t(W) \leq c(k+1) + c + c = c(k+3)$. Queda así probada la afirmación (1).

Procedamos con la prueba del lema. Sea B la digráfica tal que $V(B) = V(G)$ y tal que $uv, vu \in A(B)$ si y sólo si $uv \in F$ o $vu \in F$. Afirmamos que toda subdigráfica no vacía H de B tiene un vértice v tal que $|N_H(v)| \leq 2^{k-1} - 1$. En efecto, como $V(B) = V(G) = X_1 \cup \dots \cup X_n$, entonces dada $H \subseteq B$ no vacía, podemos tomar $i_m := \max\{i \in \{1, \dots, n\} : V(H) \cap X_i \neq \emptyset\}$. Si tomamos $u \in V(H) \cap X_{i_m}$, entonces $N_H(u) = \{v \in V(H) : uv \in F \text{ o } vu \in F\} = \{v \in V(H) : uv \in F\} = \{v \in V(H) : uv \in F_u\}$, pues como $u \in X_{i_m}$, no hay flechas en H con punta en u . Además, por cómo definimos F_u , se sigue que $|F_u| \leq 2^{k-1} - 1$. Por lo tanto, $|N_H(u)| \leq 2^{k-1} - 1$, lo cual prueba nuestra afirmación. El teorema 2.1.3 nos dice entonces que B es (2^{k-1}) -coloreable (en el sentido usual); es decir, existe $\{Z_1, \dots, Z_{2^{k-1}}\}$ una partición de $V(B)$ que consta de 2^{k-1} conjuntos independientes en B . Para cada $i \in \{1, \dots, 2^{k-1}\}$, consideremos $Z_i^X := \{X_1 \cap Z_i, \dots, X_n \cap Z_i\}$, que es una partición de Z_i . Tomemos $i \in \{1, \dots, 2^{k-1}\}$. Veamos que se cumplen las hipótesis del lema 3.3.1 tomando $G\langle Z_i \rangle$ como G , Z_i^X como la partición de los vértices y $c(k+3)$ como d . En efecto, tenemos por (ii), que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$,

$\chi_t(X_j) \leq c$, por lo que $\chi_t(X_j \cap Z_i) \leq c \leq c(k+3)$; se cumple entonces la primera condición del lema.

Ahora bien, dados $h, j \in \{1, \dots, n\}$, $h < j$, supongamos que existe una flecha $uv \in A(G)$ tal que $u \in X_j \cap Z_i$ y $v \in X_h \cap Z_i$. Como Z_i es independiente en B , entonces $uv, vu \notin A(B)$; se sigue que $uv, vu \notin F$. Como $uv \notin F$ y es una flecha hacia atrás de G , se tiene, por (1), que $\chi_t(W) \leq c(k+3)$, con $W = \bigcup_{h < \alpha \leq j} X_\alpha$, por lo que $\chi_t(\bigcup_{h < \alpha \leq j} X_\alpha \cap Z_i) \leq c(k+3)$. Se cumple entonces la segunda condición del lema. Así, el lema 3.3.1 afirma que $\chi_t(Z_i) \leq 2d = 2c(k+3)$; esto se cumple para toda $i \in \{1, \dots, 2^{k-1}\}$. Puesto que $\{Z_1, \dots, Z_{2^{k-1}}\}$ es una partición de $V(G)$, se sigue que $\chi_t(G) \leq 2^{k-1}(2c(k+3)) = c(k+3)2^k$. ■

Requerimos introducir un último concepto, al igual que un lema que hace uso de éste, antes de poder probar el recíproco del teorema 3.2.6.

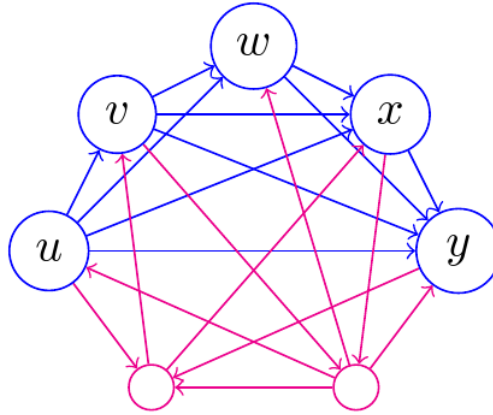


Figura 3.4: $(5, T_3, T_3)$ -joya

Sean H, K, G torneos y $a \in \mathbb{Z}^+$. Una (a, H, K) -joya de G es un subconjunto $X \subseteq V(G)$ tal que $|X| = a$ y dada cualquier partición $\{A, B\}$ de X , $G\langle A \rangle$ contiene a H o $G\langle B \rangle$ contiene a K .

En la digráfica G de la figura 3.4, el conjunto $X = \{u, v, w, x, y\}$ es una $(5, T_3, T_3)$ -joya. En efecto, $|X| = 5$ y dada cualquier partición $\{A, B\}$ de X , A o B contienen a T_3 , pues X es transitivo.

Un (a, H, K) -collar de G de longitud t es una sucesión (Y_1, Y_2, \dots, Y_t) de (a, H, K) -joyas de G , ajenas por pares, tales que $Y_i \Rightarrow Y_{i+1}$ para toda $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

Lema 3.3.3 ([3]) * Sean H, K, G torneos, con K transitivo y $k = |V(K)|$. Tomemos también a $c_1, c_2, a \in \mathbb{Z}^+$. Supongamos lo siguiente:

- (i) G es $\Delta(H, 1, K)$ -libre.
- (ii) c_1 es tal que todo subtorneo de G que sea H -libre o K -libre tiene número cromático a lo más c_1 .

(iii) c_2 es tal que todo subtorneo de G que no contiene (a, H, K) -collares de G de longitud 4 tiene número cromático a lo más c_2 .

Se cumple entonces que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ tales que G tiene número cromático a lo más $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$.

Prueba La prueba de este lema es compleja y muy extensa, por lo que es conveniente dar un esquema de ella antes de empezar. Dividiremos la prueba en tres partes. En la primera, probaremos tres afirmaciones que nos permitirán proponer una partición de $V(G)$ con la cual aplicaremos el lema 3.3.2. En la segunda parte, probaremos tres afirmaciones más que servirán para ver que nuestra partición satisface todas las hipótesis de dicho lema. Finalmente, aplicaremos, en la tercera parte, el lema en cuestión, con lo cual probaremos este nuevo lema.

Parte 1

Podemos suponer que G contiene (a, H, K) -collares de longitud 4, pues, de lo contrario, (iii) afirma que $\chi_t(G) \leq c_2$, por lo que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$ satisfacen el teorema. Sean $k := \max\{|V(H)|, |V(K)|\}$ y $b := 2a^{k+1}$. Probaremos que $\lambda_1 := (3bk + 2b + 1)(k + 3)2^k$ y $\lambda_2 := (k + 1)(k + 3)2^k$ satisfacen el teorema. Consideremos X_1, \dots, X_n un (a, H, K) -collar de longitud máxima. Por nuestra suposición, $n \geq 4$. Sean $X := X_1 \cup \dots \cup X_n$ y $W := V(G) \setminus X$. Probemos las primeras tres afirmaciones de esta prueba.

(1) Sea $i \in \{2, \dots, n\}$ y $v \in X_i$. Para cualesquiera $h, j \in \{1, \dots, n\}$, $h < i < j$ y $v \in X_i$, se cumple que $G\langle N^-(v) \cap X_h \rangle$ contiene a H y $G\langle N^+(v) \cap X_j \rangle$ contiene a K .

Argumentando por contradicción, supongamos que existe $h \in \{1, \dots, n\}$, $h < i$, tal que $G\langle N^-(v) \cap X_h \rangle$ es H -libre. Como $v \notin X_h$ y G es un torneo, entonces $\{N^-(v) \cap X_h, N^+(v) \cap X_h\}$ es una partición de X_h . Puesto que X_h es una (a, H, K) joya y $G\langle N^-(v) \cap X_h \rangle$ es H -libre, entonces $G\langle N^+(v) \cap X_h \rangle$ contiene a K . Supongamos que h es el máximo natural que cumple todo esto. Como $X_{i-1} \Rightarrow X_i$ y $v \in X_i$, no puede pasar que $h = i - 1$, de lo contrario, $N^+(v) \cap X_h = N^+(v) \cap X_{i-1} = \emptyset$, por lo que no puede contener a K . Así, $h + 1 < i$. Por la elección de h , $G\langle N^+(v) \cap X_{h+1} \rangle$ es K -libre. Como X_{h+1} es una (a, H, K) -joya, entonces $G\langle N^-(v) \cap X_{h+1} \rangle$ contiene a H . Tenemos entonces una copia de K en $N^+(v) \cap X_h$, digamos K^* y una copia de H en $N^-(v) \cap X_{h+1}$, digamos H^* . Notemos entonces que $H^* \Rightarrow v \Rightarrow K^* \Rightarrow H^*$, por lo que G contiene a $\Delta(H, 1, K)$. Esto contradice (i). Análogamente, si suponemos que existe $j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, tal que $G\langle N^+(v) \cap X_j \rangle$ es K -libre, llegamos a la misma contradicción. Queda así probado (1).

(2) Para cada $v \in W$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ que cumple lo siguiente: para cualesquiera $h, j \in \{1, \dots, n\}$, $h < i < j$, se cumple que $G\langle N^+(v) \cap X_h \rangle$ es K -libre, por lo que $G\langle N^-(v) \cap X_h \rangle$ contiene a H ; se cumple también que $G\langle N^-(v) \cap X_j \rangle$ es H -libre, por lo que $G\langle N^+(v) \cap X_j \rangle$ contiene a K .

Sea $v \in W$. Consideremos $P := \{i \in \{1, \dots, n\} : G\langle N^-(v) \cap X_i \rangle \text{ contiene a } H\}$ y $P := \{i \in \{1, \dots, n\} : G\langle N^+(v) \cap X_i \rangle \text{ contiene a } K\}$. Como cada X_i , con $i \in \{1, \dots, n\}$,

es una (a, H, K) -joya, es claro que $P \cup Q = \{1, \dots, n\}$. Argumentando por contradicción, supongamos que existen $h \in Q, j \in P$ tales que $h < j$; elijámoslos de tal manera que la diferencia $j - h$ sea mínima; dada esta elección, se tiene que si $j > h + 1$, entonces $h + 1 \notin Q$ y $h + 1 \notin P$, lo cual contradice que $P \cup Q = \{1, \dots, n\}$. Se sigue que $j = h + 1$. Por lo tanto, $X_h \Rightarrow X_j$. Ahora bien, como $j \in P$ e $i \in Q$, entonces $N^-(v) \cap X_j$ tiene una copia de H , digamos H^* y $N^+(v) \cap X_i$ tiene una copia de K , digamos K^* . Notemos entonces que $H^* \Rightarrow v \Rightarrow K^* \Rightarrow H^*$, por lo que G contiene a $\Delta(H, 1, K)$. Esto contradice (i). Se sigue que no existen $h, j \in \{1, \dots, n\}$, con $h < j$ y $h \in Q, j \in P$. Existe entonces $i \in \{1, \dots, n\}$ que satisface (2).

Para cada $v \in W$, elegimos $c(v)$ entre las i que existen por (2), según el siguiente orden de prioridad: $c(v)$ tiene al menos un exvecino y un invecino en $X_{c(v)}$; $c(v)$ tiene al menos un invecino en $X_{c(v)}$; $c(v)$ tiene al menos un exvecino en $X_{c(v)}$; $c(v)$ no tiene exvecinos ni invecinos en $X_{c(v)}$. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, definimos W_i como el conjunto de todos los $v \in W$ tales que $c(v) = i$.

Notemos que (2) prueba algo idéntico a (1), pero para los $v \in W_i$ en lugar de los $v \in X_i$.

(3) Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $i > 1, v \in W_i$ y $v \Rightarrow X_i$, entonces $X_{i-1} \Rightarrow v$. Si $i < n, v \in W_i$ y $X_i \Rightarrow v$, entonces $v \Rightarrow X_{i+1}$.

Supongamos que $i > 1, v \in W_i$ y $v \Rightarrow X_i$. Dado que $v \in W_i$, entonces $c(v) = i$. Se tiene entonces que para cualesquiera $h, j \in \{1, \dots, n\}, h < i < j$, se cumple que $G\langle N^-(v) \cap X_h \rangle$ contiene a H y $G\langle N^+(v) \cap X_j \rangle$ contiene a K . Ahora bien, como $v \Rightarrow X_i$, entonces $N^-(v) \cap X_i = \emptyset$, por lo que $G\langle N^-(v) \cap X_i \rangle$ es H -libre. Se sigue que $G\langle N^+(v) \cap X_i \rangle$ contiene a K , pues X_i es una (a, H, K) -joya. Como $i > 1$, entonces $i - 1 \geq 1$. Se sigue que $i - 1$ es otra posible elección para $c(v)$. Notemos que i fue elegido como $c(v)$, mientras que $i - 1$ no lo fue; por lo tanto, no puede pasar que $i - 1$ esté un estrato más arriba en el orden de prioridad de elección de $c(v)$. Como v no tiene invecinos en X_i , entonces v no puede tener exvecinos en X_{i-1} , o lo que es lo mismo, $X_{i-1} \Rightarrow v$.

De manera simétrica al caso $i > 1$, si suponemos que $i < n, v \in W_i$ y $X_i \Rightarrow v$, entonces $G\langle N^+(v) \cap X_i \rangle$ es K -libre, por lo que $G\langle N^-(v) \cap X_i \rangle$ contiene a H . Como $i + 1 \leq n$, entonces $i + 1$ es otra posible elección para $c(v)$, pero i fue elegido como $c(v)$, mientras que $i + 1$ no lo fue; por lo tanto, como v no tiene exvecinos en X_i , entonces v no puede tener tanto exvecinos como invecinos en X_{i+1} . Además, como $i + 1 > i$ e $v \in W_i$, se tiene, por (2), que $N^+(v) \cap X_{i+1}$ contiene a K ; esto nos dice, en particular, que v sí tiene exvecinos en X_{i+1} . Se sigue que v no tiene invecinos en X_{i+1} , o lo que es lo mismo, $v \Rightarrow X_{i+1}$. Queda así probado (3).

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos $Z_i := X_i \cup W_i$. Puesto que $\{X, W\}$ es una partición de $V(G)$, $X = X_1 \cup \dots \cup X_n, W = W_1 \cup \dots \cup W_n$ y los X_i , al igual que los W_i , son ajenos por pares, se tiene entonces que $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ es también una partición de $V(G)$. Buscaremos aplicar el lema 3.3.1 a esta nueva partición.

Parte 2

(4) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple que $\chi_t(Z_i) \leq 2bc_1 + c_2$.

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Definimos, a continuación, varios conjuntos. Si $i \geq 3$, $P := \{v \in Z_i : N^+(v) \cap X_{i-2} \neq \emptyset\}$; si $i \leq 2$, $P := \emptyset$. Si $i \leq n-2$, $Q := \{v \in Z_i : N^-(v) \cap X_{i+2} \neq \emptyset\}$; si $i \geq n-1$, $Q := \emptyset$. Por último, $R := \{v \in Z_i : i \leq 2 \text{ o } X_{i-2} \Rightarrow v \text{ y además } i \geq n-1 \text{ o } v \Rightarrow X_{i+2}\}$. Afirmamos que $Z_i = P \cup Q \cup R$. Sea $v \in Z_i \setminus (P \cup Q)$. Veamos que $v \in R$. En efecto, como $n \geq 4$, entonces $i \geq 3$ o $i \leq n-2$.

- Si $3 \leq i \leq n-2$, entonces $N^+(v) \cap X_{i-2} = \emptyset = N^-(v) \cap X_{i+2}$, por lo que $X_{i-2} \Rightarrow v \Rightarrow X_{i+2}$; se sigue que $v \in R$.
- Si $i \geq n-1 \geq 3$, entonces $N^+(v) \cap X_{i-2} = \emptyset$, por lo que $X_{i-2} \Rightarrow v$; se sigue que $v \in R$.
- Si $i \leq 2 \leq n-2$, entonces $N^-(v) \cap X_{i+2} = \emptyset$, por lo que $v \Rightarrow X_{i+2}$; se sigue que $v \in R$.

Para probar que $\chi_t(Z_i) \leq 2bc_1 + c_2$, veremos que $\chi_t(P) \leq bc_1$, $\chi_t(Q) \leq bc_1$ y $\chi_t(R) \leq c_2$.

Veamos primero que $\chi_t(P) \leq bc_1$. Para esto, definimos $P_1 := \{v \in P : G\langle N^-(v) \cap X_{i-1} \rangle \text{ contiene a } K\}$ y $P_2 := P \setminus P_1$.

Empecemos viendo que $\chi_t(P_1) \leq a^k c_1$. Dado $Y \subseteq V(G)$ y $x \in V(G)$, denotamos por $P_{x,Y} := \{p \in P_1 : Y \Rightarrow p \Rightarrow x \Rightarrow Y\}$. Es claro que $Y \Rightarrow P_{x,Y} \Rightarrow x \Rightarrow Y$. Consideremos también $M_1 := \{P_{x,Y} : Y \subseteq X_{i-1}, |Y| = |V(K)|, x \in X_{i-2} \text{ y } \chi_t(P_{x,Y}) \leq c_1\}$. Dado $v \in P_1$, sabemos que $G\langle N^-(v) \cap X_{i-1} \rangle$ contiene a K ; podemos entonces tomar $Y_v \subseteq N^-(v) \cap X_{i-1}$ tal que $G\langle Y_v \rangle \cong K$. Como $Y_v \subseteq N^-(v)$, es claro que $Y_v \Rightarrow v$. Como $v \in P_1 \subseteq P$, entonces existe $x_v \in N^+(v) \cap X_{i-2}$. Además, puesto que $X_{i-2} \Rightarrow X_{i-1}$, entonces $x_v \Rightarrow Y_v$. Por lo tanto, se tiene que $Y_v \Rightarrow v \Rightarrow x_v \Rightarrow Y_v$. Por lo tanto, $v \in P_{x_v, Y_v}$. Puesto que esto se cumple para $v \in P_1$ arbitraria, se tiene que $P_1 \subseteq \bigcup_{v \in P_1} P_{x_v, Y_v}$.

Ahora bien, veamos que dado $v \in P_1$, $\chi_t(P_{x_v, Y_v}) \leq c_1$. Argumentando por contradicción, supongamos que P_{x_v, Y_v} contiene a H . Sabemos ya que $Y_v \Rightarrow P_{x_v, Y_v} \Rightarrow x_v \Rightarrow Y_v$; como $G\langle Y_v \rangle \cong K$ y P_{x_v, Y_v} contiene a H , entonces tenemos un $\Delta(K, H, 1) = \Delta(H, 1, K)$ en G , lo cual contradice (i). Se sigue que P_{x_v, Y_v} es H -libre; por lo tanto, (ii) afirma que $\chi_t(P_{x_v, Y_v}) \leq c_1$. Así, dado $v \in P_1$, $Y_v \subseteq X_{i-1}$, $|Y_v| = |V(K)|$, $x_v \in X_{i-2}$ y $\chi_t(P_{x_v, Y_v}) \leq c_1$; se sigue que $P_{x_v, Y_v} \in M_1$. Puesto que esto se cumple para toda $v \in P_1$, se sigue que $\bigcup_{v \in P_1} P_{x_v, Y_v} \subseteq \bigcup M_1$. Por lo tanto, $\chi_t(P_1) \leq \chi_t(\bigcup_{v \in P_1} P_{x_v, Y_v}) \leq \chi_t(\bigcup M_1)$. Veamos entonces que $\chi_t(\bigcup M_1) \leq a^k c_1$, lo cual prueba a su vez que $\chi_t(P_1) \leq a^k c_1$.

Dado $P_{x,Y} \in M_1$, se tiene que $|Y| = |V(K)|$ y $Y \subseteq X_{i-1}$. Así, para formar un elemento de M_1 , hay $\binom{a}{|V(K)|} \leq a^{|V(K)|}$ elecciones posibles de Y ; como $k = \max\{|V(H)|, |V(K)|\}$, entonces $k \geq |V(K)|$, por lo que $a^k \geq a^{|V(K)|}$. Se sigue que hay a lo más a^k elecciones posibles de Y . Además, $|X_{i-2}| = a$, por lo que hay a lo más a elecciones posibles de x . Así, $|M_1| \leq a^{k+1}$. Ahora bien, dado $P_{x,Y} \in M$, se tiene que $\chi_t(P_{x,Y}) \leq c_1$. Se sigue que $\chi_t(\bigcup M_1) \leq |M|c_1 \leq a^k c_1$.

Veamos ahora que $\chi_t(P_2) \leq a^k c_1$. Se probará de forma similar a como hicimos con P_1 . Dado $Y \subseteq V(G)$ y $x \in V(G)$, denotamos por $P_{Y,x} := \{p \in P_2 : Y \Rightarrow x \Rightarrow p \Rightarrow Y\}$. Es claro que $Y \Rightarrow x \Rightarrow P_{Y,x} \Rightarrow Y$. Consideremos $M_2 := \{P_{Y,x} : Y \subseteq X_{i-1}, |Y| = |V(K)|, x \in X_i \text{ y } \chi_t(P_{Y,x}) \leq c_1\}$. Dado $v \in P_2$, se tiene que $v \notin P_1$, por lo que $G\langle N^-(v) \cap X_{i-1} \rangle$ es K -libre; se tiene entonces que $G\langle N^+(v) \cap X_{i-1} \rangle$ contiene a H ; podemos entonces tomar $Y_v \subseteq N^+(v) \cap X_{i-1}$ tal que $G\langle Y_v \rangle \cong H$. Como $Y_v \subseteq N^+(v)$, es claro que $v \Rightarrow Y_v$. Como $v \in P_2 \subseteq P \subseteq Z_i = W_i \cup X_i$, entonces $v \in X_i$ o $v \in W_i$. No puede suceder que $v \in X_i$, pues $v \Rightarrow Y_v$, $Y_v \subseteq X_{i-1}$ y $X_{i-1} \Rightarrow X_i$; se sigue que $v \in W_i$. Además, como $Y_v \subseteq N^+(v) \cap X_{i-1}$, entonces $X_{i-1} \not\Rightarrow v$. Notemos que en este caso, $i \geq 3 > 1$, pues $P \neq \emptyset$, ya que $v \in P_2 \subseteq P$. Se sigue entonces, por la contrapuesta de la primera parte de (3), que $v \not\Rightarrow X_i$, o lo que es lo mismo, que existe $x_v \in X_i$ tal que x_v domina a v .

Como $X_{i-1} \Rightarrow X_i$, entonces $Y_v \Rightarrow x_v \Rightarrow v \Rightarrow Y_v$, lo cual nos dice que $v \in P_{Y_v, x_v}$. Puesto que esto se cumple para $v \in P_2$ arbitrario, entonces $P_2 \subseteq \bigcup_{v \in P_2} P_{Y_v, x_v}$. Ahora bien, debe suceder que P_{Y_v, x_v} es K -libre, de lo contrario, puesto que $Y_v \Rightarrow x_v \Rightarrow P_{Y_v, x_v} \Rightarrow Y_v$, $Y_v \cong H$ y P_{Y_v, x_v} contiene a H , entonces tendríamos un $\Delta(H, 1, K)$ en G , lo cual contradice (i). Se tiene entonces, por (ii), que $\chi_t(P_{Y_v, x_v}) \leq c_1$.

Así, dado $v \in P_2$, $Y_v \subseteq X_{i-1}$, $|Y_v| = |V(K)|$, $x_v \in X_i$ y $\chi_t(P_{Y_v, x_v}) \leq c_1$; se sigue que $P_{Y_v, x_v} \in M_2$. Puesto que esto se cumple para toda $v \in P_2$, se sigue que $\bigcup_{v \in P_2} P_{Y_v, x_v} \subseteq \bigcup M_2$. Por lo tanto, $\chi_t(P_2) \leq \chi_t(\bigcup_{v \in P_2} P_{Y_v, x_v}) \leq \chi_t(\bigcup M_2)$. El mismo razonamiento que dimos para probar que $\chi_t(\bigcup M_1) \leq a^k c_1$ nos sirve para probar que $\chi_t(\bigcup M_2) \leq a^k c_1$; esto prueba, a su vez, que $\chi_t(P_2) \leq a^k c_1$.

Puesto que $P = P_1 \cup P_2$ y $\chi_t(P_1) \leq c_1 a^{k+1}$ y $\chi_t(P_2) \leq c_1 a^{k+1}$, entonces $\chi_t(P) \leq 2c_1 a^{k+1} = bc_1$.

Se prueba, de manera simétrica a como hicimos con P , que $\chi_t(Q) \leq bc_1$.

Veamos ahora que $\chi_t(R) \leq c_2$. Sea $v \in R$.

- Si $i \leq n - 2$, se cumple que $i \not\leq n - 1$, por lo que $v \Rightarrow X_{i+2}$. Se sigue que $R \Rightarrow X_{i+2}$.
- Si $i \geq 3$, entonces $i \not\leq 2$, por lo que $X_{i-2} \Rightarrow v$. Se sigue que $X_{i-2} \Rightarrow R$.

Argumentando por contradicción, supongamos que $G\langle R \rangle$ contiene un (a, H, K) -collar de longitud 4, digamos Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 . Sabemos ya que $i \geq 3$ o $i \leq n - 2$. Tenemos entonces, los tres siguientes casos.

- Caso 1. $3 \leq i \leq n - 2$.
En este caso, $X_{i-2} \Rightarrow R \Rightarrow X_{i+2}$. Se tiene, en particular, que $X_{i-2} \Rightarrow Y_1$ y que $Y_4 \Rightarrow X_{i+2}$. Así, $X_1, \dots, X_{i-2}, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, X_{i+2}, \dots, X_n$ es un (a, H, K) -collar de longitud $n + 1$.
- Caso 2. $i \geq n - 1 \geq 3$.
En este caso, $i - 2 \geq n - 3$. Además, sabemos que $X_{i-2} \Rightarrow R$, por lo que se tiene, en particular, que $X_{i-2} \Rightarrow Y_1$. Así, $X_1, \dots, X_{i-2}, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ es un (a, H, K) -collar de longitud al menos $n + 1$, pues $i - 2 \geq n - 3$.

- Caso 3. $i \leq 2 \leq n - 2$.

En este caso, $i + 2 \leq 4$. Además, sabemos que $R \Rightarrow X_{i+2}$, por lo que se tiene, en particular, que $Y_4 \Rightarrow X_{i+2}$. Así, $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, X_{i+2}, \dots, X_n$ es un (a, H, K) -collar de longitud al menos $n + 1$, pues $i + 2 \leq 4$.

En los tres casos, encontramos un (a, H, K) -collar de longitud al menos $n + 1$, lo cual contradice la maximalidad de X_1, \dots, X_n . Se sigue que $G\langle R \rangle$ no contiene (a, H, K) -collares de longitud 4. Por lo tanto, (iii) afirma que $\chi_t(R) \leq c_2$.

Ahora bien, como $Z_i = P \cup Q \cup R$, entonces $\chi_t(Z_i) \leq \chi_t(P) + \chi_t(Q) + \chi_t(R) \leq 2bc_1 + c_2$, lo cual concluye la prueba de (4).

(5) Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $v \in X_i$, $\chi_t(N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-1})) \leq 3bc_1 + c_2$ y $\chi_t(N^-(v) \cap (Z_{i+1} \cup \dots \cup Z_n)) \leq 3bc_1 + c_2$.

Puesto que ambas afirmaciones se prueban de manera simétrica, basta probar la primera. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ y $v \in X_i$. Si $i = 1$, entonces esto es trivial. Supongamos entonces que $i \geq 2$. Sea $P := N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-2})$. Veamos que $\chi_t(P) \leq bc_1$. consideremos además $P_1 := \{w \in P : G\langle N^+(w) \cap X_{i-1} \rangle \text{ contiene a } H\}$ y $P_2 := P \setminus P_1$. Afirmamos que $\chi_t(P_1) \leq a^k c_1$; en efecto, basta usar un argumento simétrico al que usamos para ver que $\chi_t(P_1) \leq a^k c_1$ en la afirmación (4).

Veamos ahora que $\chi_t(P_2) \leq a^{k+1} c_1$. Para cada $w \in P_2$, $w \notin P_1$, por lo que $G\langle N^+(w) \cap X_{i-1} \rangle$ no contiene a H ; se sigue que $N^-(w) \cap X_{i-1}$ contiene a K . Sea $Y_w \subseteq N^-(w) \cap X_{i-1}$ tal que $G\langle Y_w \rangle \cong K$. Se cumple además que $Y_w \Rightarrow w$. Además, como $w \in P_2 \subseteq P$, se tiene que $P \neq \emptyset$; por cómo definimos P , esto implica que $i \geq 3$. Veamos que $X_{i-2} \not\Rightarrow w$. Sabemos que $w \in P_1 \subseteq P \subseteq Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-2}$.

- Caso 1. $w \in Z_h$, con $h < i - 2$.

En este caso, $w \in X_h$ o $w \in W_h$. Si $w \in X_h$, se tiene, por (1), que $G\langle N^+(w) \cap X_{i-2} \rangle$ contiene a K , pues $h < i - 2$. En particular, $N^+(w) \cap X_{i-2} \neq \emptyset$. Si $w \in W_h$, entonces $c(w) = h$. Puesto que $h < i - 2$, se tiene, por (2), que $G\langle N^+(w) \cap X_{i-2} \rangle$ contiene a H , por lo que, en particular, $N^+(w) \cap X_{i-2} \neq \emptyset$.

- Caso 2. $w \in Z_{i-2}$.

En este caso, no puede suceder que $w \in X_{i-2}$, pues $X_{i-2} \Rightarrow X_{i-1}$, pero $Y_w \Rightarrow w$ y $Y \subseteq X_{i-1}$; se sigue que $w \in W_{i-2}$. Ahora bien, $Y_w \subseteq N^-(w) \cap X_{i-1}$, por lo que $N^-(w) \cap X_{i-1} \neq \emptyset$. Se sigue que $w \not\Rightarrow X_{i-1}$. Usando la contrapuesta de la segunda parte de (3), se sigue que $X_{i-2} \not\Rightarrow w$.

De los dos casos, podemos concluir que existe $x_w \in N^+(w) \cap X_{i-2}$. Notemos entonces que $Y_w \Rightarrow w \Rightarrow x_w \Rightarrow Y_w$, pues $x_w \in X_{i-2}$ y $Y_w \subseteq X_i$. Se sigue que $w \in P_{Y_w, x_w} := \{p \in P_2 : Y_w \Rightarrow p \Rightarrow x_w \Rightarrow Y_w\}$. Nuevamente, para probar que $\chi_t(P_2) \leq a^k c_1$, basta usar un argumento análogo al que usamos en (4).

Como $P = P_1 \cup P_2$, entonces $\chi_t(P) \leq \chi_t(P_1) + \chi_t(P_2) \leq a^k c_1 + a^{k+1} c_1 \leq 2a^{k+1} c_1 = bc_1$.

Además, $P \cup N^+(v) \cap Z_{i-1} = N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-1})$. Sabemos ya, por (4), que $\chi_t(N^+(v) \cap Z_{i-1}) \leq 2bc_1 + c_2$. Se sigue que $\chi_t(N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-1})) \leq bc_1 + 2bc_1 + c_2 = 3bc_1 + c_2$, lo cual concluye la prueba de (5).

(6) Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $v \in W_i$, $\chi_t(N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-1})) \leq 3bc_1 + c_2$ y $\chi_t(N^-(v) \cap (Z_{i+1} \cup \dots \cup Z_n)) \leq 3bc_1 + c_2$.

Nuevamente, ambas afirmaciones se prueban de manera simétrica; probaremos la primera. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ y $v \in W_i$. Si $i = 1$, esto es trivial. Supongamos entonces que $i \geq 2$. Como $v \in W_i$, entonces $c(v) = i$. Así, dado que $i - 1 < i$, se tiene, por (2), que $G\langle N^-(v) \cap X_{i-1} \rangle$ contiene a H . Sea $Y_v \subseteq X_{i-1}$ tal que $Y_v \cong H$ y $Y_v \Rightarrow v$. Consideremos también $P := N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-2})$. Evidentemente, dado $p \in P$, se cumple que $v \Rightarrow p$. Notemos que $P_v := \{p \in P : p \Rightarrow Y_v\}$ es K -libre, de lo contrario, se cumple que $P_v \Rightarrow Y_v \Rightarrow v \Rightarrow P_v$, y como $G\langle Y_v \rangle \cong H$ y P_v contiene a K , entonces tendríamos un $\Delta(K, H, 1) = \Delta(H, 1, K)$, lo cual contradice (i). Se tiene entonces, por (ii), que $\chi_t(P_v) \leq c_1$.

Por otro lado, dado $y \in Y_v$, se tiene que $P_y := \{p \in P : p \in N^+(y)\} \subseteq N^+(y) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-2})$, por cómo definimos P . Como $y \in Y_v \subseteq X_{i-1}$, se tiene entonces, por (5), que $\chi_t(N^+(y) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-2})) \leq 3bc_1 + c_2$. Por lo tanto, $\chi_t(P_y) \leq 3bc_1 + c_2$.

Notemos simplemente que $P = P_v \cup (\bigcup_{y \in Y_v} P_y)$. Se sigue que $\chi_t(P) \leq c_1 + |Y_v|(3bc_1 + c_2) = c_1 + |V(H)|(3bc_1 + c_2) \leq c_1 + k(3bc_1 + c_2)$, pues $k = \max\{|V(H)|, |V(K)|\}$. Ahora bien, $N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-1}) = P \cup N^+(v) \cap Z_{i-1}$. Por (4), se cumple que $\chi_t(Z_{i-1}) \leq 2bc_1 + c_2$. Así, $\chi_t(N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-1})) \leq c_1 + k(3bc_1 + c_2) + 2bc_1 + c_2 = (3bk + 2b + 1)c_1 + (k + 1)c_2$, lo cual concluye la prueba de (6).

Parte 3

Procedamos, ahora sí, con la prueba del lema. Recordemos que $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ es una partición de $V(G)$. Sea $c := (3bk + 2b + 1)c_1 + (k + 1)c_2$. Por (ii), se tiene que todo subtorneo de G que sea H -libre tiene número cromático a lo más $c_1 \leq c$. Tenemos además, por (4), que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\chi_t(Z_i) \leq 2bc_1 + c_2 \leq c$. Dada $i \in \{1, \dots, n\}$, sabemos que $Z_i = X_i \cup W_i$. Sea $v \in Z_i$. Si $v \in X_i$, entonces (5) afirma lo siguiente:

- $\chi_t(N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-1})) \leq 3bc_1 + c_2 \leq c$,
- $\chi_t(N^-(v) \cap (Z_{i+1} \cup \dots \cup Z_n)) \leq 3bc_1 + c_2 \leq c$.

Si $v \in W_i$, entonces (6) afirma lo siguiente:

- $\chi_t(N^+(v) \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_{i-1})) \leq c$,
- $\chi_t(N^-(v) \cap (Z_{i+1} \cup \dots \cup Z_n)) \leq c$.

Por último, tenemos ya, por hipótesis, que G es $\Delta(H, 1, K)$ -libre. Como K es transitivo y $|V(K)| = k$, entonces G es $\Delta(H, 1, k)$ -libre.

Así, se cumplen todas las hipótesis del lema 3.3.2, tomando $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ como la partición de dicho lema y c como lo acabamos de definir. Se sigue que $\chi_t(G) \leq$

$c(k+3)2^k = (k+3)2^k[(3bk+2b+1)c_1 + (k+1)c_2]$. Así, $\lambda_1 = (k+3)2^k(3bk+2b+1)$ y $\lambda_2 = (k+3)2^k(k+1)$ cumplen lo buscado. ■

Este lema nos permite probar el siguiente teorema, el cual completa la caracterización de los héroes fuertes.

Teorema 3.3.4 ([3]) * *Si H es un héroe y K es un torneo transitivo, entonces $\Delta(H, 1, K)$ y $\Delta(K, 1, H)$ son héroes.*

Prueba

Sean $k := |V(K)|$ y $c_1 := \max\{n(H), 2^k\}$. Como K es transitivo, se tiene, por el teorema 2.2.7, que los torneos K -libres tienen número cromático a lo más c_1 . Sea $a := |V(H)|2^k$. Probemos la siguiente afirmación.

(1) Todo torneo que no contiene (a, H, K) -joyas tiene número cromático a lo más $a + c_1$.

Sea G un torneo que no contiene (a, H, K) -joyas. Consideremos subtorneos H_1, \dots, H_n de G , ajenos dos a dos por vértices, de tal modo que cada H_i es isomorfo a H y n es máximo. Sea $W := V(H_1) \cup \dots \cup V(H_n)$. Argumentando por contradicción, supongamos que $n \geq 2^k$. Consideremos $W_0 := V(H_1) \cup \dots \cup V(H_{2^k})$. Es claro que $|W| = a = |V(H)|2^k$. Además, si tomamos una partición $\{A, B\}$ de W_0 , se cumple lo siguiente: si A es H -libre, entonces para cada $i \in \{1, \dots, 2^k\}$, existe al menos un vértice de H_i que no está en A . Como $B = W_0 \setminus A$, se sigue que $|B| \geq 2^k$; el teorema 2.2.7 afirma entonces que $G\langle B \rangle$ contiene un $T_K \cong K$. Es entonces claro que W_0 es una (a, H, K) -joya, lo cual es una contradicción. Se sigue que $n < 2^k$. Así, $\chi_t(W) \leq |W| \leq 2^k|V(H)|$. Además, se tiene, por la maximalidad de n , que $G - W$ es H -libre. Como $c_1 \geq n(H)$, se sigue que $\chi_t(G - W) \leq c_1$. Por lo tanto, $\chi_t(G) \leq \chi_t(W) + \chi_t(G - W) \leq 2^k|V(H)| + c_1 = a + c_1$, lo cual concluye la prueba de (1).

Procedamos con la prueba del lema. Tomemos $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ el conjunto de todas las (a, H, K) -joyas y $c := a + c_1$. Sabemos que todo $T \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene orden $a < c$. Además, (1) afirma que los torneos \mathcal{H}_1 -libres (y \mathcal{H}_2 -libres) tienen número cromático a lo más c . El teorema 3.1.7 de la primera sección de este capítulo afirma entonces que dado G un torneo $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre, $\chi_t(G) \leq (2c)^{4c^2}$. Notemos que un torneo $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$ -libre es en realidad un torneo que no contiene (a, H, K) -collares de longitud 2. Así, los torneos que no contienen (a, H, K) -collares de longitud 2 tienen número cromático a lo más $(2c)^{4c^2}$. Tomando ahora $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_4$ el conjunto de los (a, H, K) -collares de longitud 2, podemos notar que los torneos libres de (a, H, K) -collares de longitud 4 son $(\mathcal{H}_3 \Rightarrow \mathcal{H}_4)$ -libres. Así, usando el mismo teorema, podemos concluir que existe $c_2 \in \mathbb{N}$ tal que los torneos que no contienen (a, H, K) -collares de longitud 4 tienen número cromático a lo más c_2 . Ahora bien, sea G un torneo $\Delta(H, 1, K)$ -libre. Notemos que c_1 y c_2 cumplen todas las hipótesis del lema 3.3.3. Existen entonces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ tales que G tiene número cromático a lo más $c_3 := \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$. Por lo tanto, $\Delta(H, 1, K)$ es un héroe y $n(\Delta(H, 1, K)) \leq c_3$. Se puede probar, de manera simétrica, que $\Delta(H, K, 1)$ es un héroe.



El siguiente teorema resume los teoremas 3.1.8 y 3.2.6 de las secciones anteriores, además del teorema 3.3.4 de esta sección; esto concluye la caracterización de los héroes.

Teorema 3.3.5 ([3]) *

Sea H un torneo. Se cumple lo siguiente:

- H es un héroe si y sólo si todas sus componentes fuertes son héroes.
- Si H es fuerte y tiene orden al menos 2, entonces H es un héroe si y sólo si $H = \Delta(P, k, 1)$ o $H = \Delta(P, 1, k)$, para algún héroe P y alguna $k \in \mathbb{Z}^+$.

3.4. Villanos mínimos y celebridades

En esta última sección, daremos dos caracterizaciones más de los héroes, las cuales se deducen gracias al teorema 3.3.5. Para la primera de éstas, requerimos definir el siguiente concepto. Un *villano* es un torneo que no es un héroe. Como todo subtorneo de un héroe es un héroe, entonces todo supratorneo de un villano es también un villano. Podemos entonces preguntarnos si existe una lista finita de villanos mínimos; es decir, tales que cumplen que cualquier otro villano es un supratorneo de alguno de ellos.

Para este punto, debe ser evidente que todo torneo de orden menor o igual a 3 es un héroe. Por el teorema 3.3.5, los únicos torneos de orden 4 que podrían ser villanos son torneos fuertes. Sin embargo, el único torneo fuerte de orden 4 es $\Delta(2, 1, 1)$, por lo que admite una trisección como en el teorema 3.3.5; se sigue que es un héroe. Así, todo torneo de orden menor o igual a 4 es un héroe. Describimos a continuación a los únicos tres torneos de orden 5 que son villanos. Además de estos tres, otros dos torneos formarán parte de nuestra lista de villanos mínimos: $\Delta(2, 2, 2)$ y $\Delta(C_3, C_3, 1)$.

- Sea H_1 dado como sigue: $V(H_1) := \{v_1, \dots, v_5\}$ y $A(H_1) := \{v_i v_{i+1} : i \in \{1, \dots, 5\}\} \cup \{v_i v_{i+2} : i \in \{1, \dots, 5\}\}$, leyendo los subíndices módulo 5.
- Sea $H_2 := H_1 - v_5 v_1 + v_1 v_5$.
- Sea H_3 dado como sigue: $V(H_3) := \{v_1, \dots, v_5\}$ y $A(H_3) := \{v_i v_j : 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{v_2 v_5, v_4 v_5, v_5 v_1, v_5 v_3\}$.
- Sea $H_4 := \Delta(2, 2, 2)$.
- Sea $H_5 := \Delta(C_3, C_3, 1)$.

Proposición 3.4.1 * *Los torneos H_1, \dots, H_5 son villanos.*

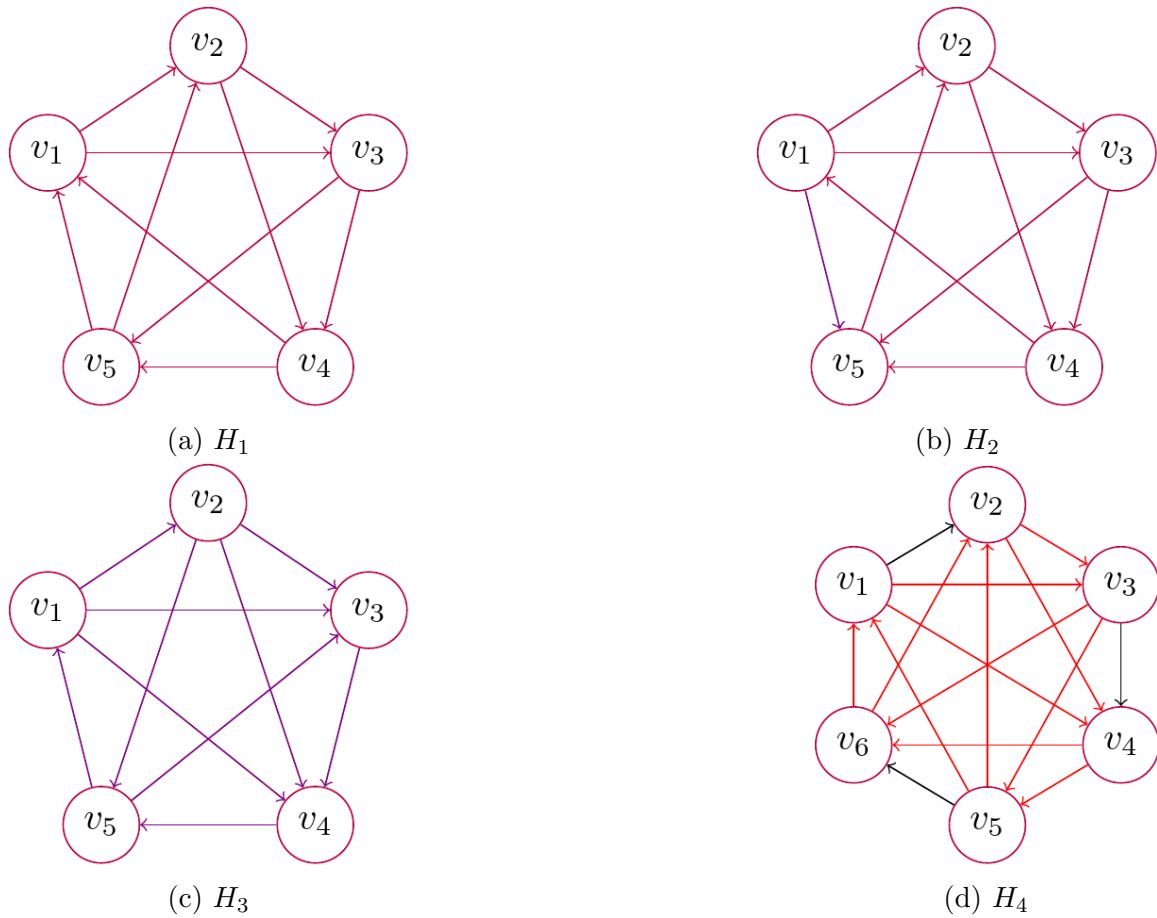


Figura 3.5: Villanos mínimos

Prueba

Probamos ya que H_5 es un villano en la proposición 3.2.5. Por otro lado, notemos que H_1, \dots, H_4 son torneos fuertes. Veamos que ninguno admite una trisección como en el teorema 3.3.5. Supongamos, para cada uno de estos torneos, que sí existe una trisección $\Delta(P, k, 1)$ con P un héroe y $k \in \mathbb{Z}^+$. Notemos primero que el conjunto correspondiente a P debe ser igual a la exvecindad del vértice correspondiente a T_1 , y el correspondiente a T_k a su invecindad. Por lo tanto, los vértices de cada parte de la trisección están determinados por el vértice correspondiente a T_1 .

- H_1

Como los vértices de H_1 son indistinguibles, podemos suponer que el vértice correspondiente a T_1 es v_5 . Así, la partición sería $(\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5\})$; sin embargo, $v_1v_4 \notin A(H_1)$, por lo que no es una trisección.

- H_2

Si el vértice correspondiente a T_1 es v_1 , entonces la partición sería

$(\{v_2, v_3, v_5\}, \{v_4\}, \{v_1\})$; sin embargo, $v_5v_4 \notin A(H_2)$. Si es v_2 , entonces la partición sería $(\{v_3, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2\})$; sin embargo, $v_3v_1 \notin A(H_2)$. Si es v_3 , entonces la partición sería $(\{v_4, v_5\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3\})$; sin embargo, $v_5v_1 \notin A(H_2)$. Si es v_4 , entonces la partición sería $(\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4\})$; sin embargo, $v_5v_3 \notin A(H_2)$. Si es v_5 , entonces la partición sería $(\{v_2\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_5\})$; sin embargo, $v_2v_1 \notin A(H_2)$. En todos los casos, la posible partición no es una trisección, pues el conjunto correspondiente a P no domina totalmente al correspondiente a T_k .

- H_3

Si el vértice correspondiente a T_1 es v_1 , entonces la partición sería $(\{v_2, v_3, v_4\}, \{v_5\}, \{v_1\})$; sin embargo, $v_3v_5 \notin A(H_3)$. Si es v_2 , entonces la partición sería $(\{v_4, v_5\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2\})$; sin embargo, $v_4v_1 \notin A(H_3)$. Si es v_3 , entonces la partición sería $(\{v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}, \{v_3\})$; sin embargo, $v_4v_2 \notin A(H_3)$. Si es v_4 , entonces la partición sería $(\{v_5\}, \{v_1v_2, v_3\}, \{v_4\})$; sin embargo, $v_5v_2 \notin A(H_3)$. Si es v_5 , entonces la partición sería $(\{v_1, v_3\}, \{v_2v_4\}, \{v_5\})$; sin embargo, $v_3v_2 \notin A(H_3)$. En todos los casos, la posible partición no es una trisección.

- H_4

En H_4 , sólo hay dos tipos distintos de vértices. Los indistinguibles de v_1 y los indistinguibles de v_2 . Si el vértice correspondiente a T_1 es v_1 , entonces la partición es $(\{v_2, v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1\})$; sin embargo, $v_2v_6 \notin A(H_4)$. Si es v_2 , entonces la partición sería $(\{v_3, v_4\}, \{v_1, v_5, v_6\}, \{v_2\})$; sin embargo, $v_4v_1 \notin A(H_4)$. En ambos casos, la posible partición no es una trisección. ■

Teorema 3.4.2 ([6]) * *Todo torneo fuerte G con al menos 2 vértices que no contiene a H_1 , H_2 ni H_3 admite una trisección.*

Prueba por inducción fuerte sobre el orden de T

Sea T un torneo fuerte de orden $n \geq 2$. T no puede tener orden 2, pues es fuerte. Si T tiene orden 3, entonces es $C_3 = \Delta(1, 1, 1)$, por lo que admite una trisección.

Supongamos que el resultado es cierto si G tiene orden $k \in \mathbb{Z}^+$, con $2 \leq k < n$, para alguna $n \geq 4$. Supongamos que G tiene orden n . Argumentando por contradicción, supongamos que G no admite una trisección.

Decimos que $X \subseteq V(G)$ es un conjunto *homogéneo* si $1 < |X| < |V(G)|$ y para todo $v \in V(G) \setminus X$, $v \Rightarrow X$ o $X \Rightarrow v$. Probemos la siguiente afirmación.

(1) Podemos suponer que G no tiene conjuntos homogéneos.

Supongamos que G sí tiene un conjunto homogéneo X y sea $x \in X$. Sean $W := ((V(G) \setminus X) \cup \{x\})$ y $H := G\langle W \rangle$. Evidentemente, $H \subseteq G$; además, como $|X| > 1$, entonces el orden k de H es tal que $2 \leq k < n$. Además, como G es fuerte y X es homogéneo, H es también fuerte. Se cumple entonces, por hipótesis de inducción,

que H admite una trisección, digamos (A, B, C) . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \in C$. Notemos que $B \Rightarrow x$ y $x \Rightarrow A$. Como $x \in X$ y X es homogéneo, se sigue que $B \Rightarrow X$ y $X \Rightarrow A$. Por lo tanto, $(A, B, C \cup X)$ es una trisección de G . Queda así probado (1).

Procedamos con la prueba. Por (1), podemos suponer que G no tiene conjuntos homogéneos. Hay un único torneo fuerte de orden 4, que es $\Delta(1, 1, 2)$, que sí tiene conjuntos homogéneos. Se sigue que G no tiene orden 4, por lo que $n \geq 5$.

Como G es fuerte, se tiene, por el teorema 2.2.2, que G tiene un ciclo de orden $n - 1$. Así, podemos tomar H la subgráfica inducida por los vértices de dicho ciclo; $H \subseteq G$ es un torneo fuerte de orden $n - 1$. Por hipótesis de inducción, H admite una trisección, digamos (P, Q, R) . Puesto que H tiene orden $n - 1$, entonces $V(G) \setminus V(H) = \{v\}$. Como $V(H)$ no es un conjunto homogéneo, entonces $N^+(v) \cap V(H) \neq \emptyset$ y $N^-(v) \cap V(H) \neq \emptyset$. Como $\{P, Q, R\}$ es una partición de $V(H)$ y $N^+(v) \cup N^-(v) = V(H)$, debe suceder que $N^-(v) \cap P, N^+(v) \cap Q \neq \emptyset$ (posiblemente permutando, de manera cíclica, las letras P, Q, R). Sean $p \in N^-(v) \cap P$ y $q \in N^+(v) \cap Q$. Consideremos los dos siguientes casos.

- Caso 1. Existen $r \in N^-(v) \cap R$ y $r' \in N^+(v) \cap R$. En este caso, tomando $r = v_1, p = v_2, v = v_3, q = v_4, r' = v_5$, se tiene lo siguiente: si $r'r \in A(D)$, entonces $D := G\langle\{v, p, q, r, r'\}\rangle$ es H_1 y si $rr' \in A(D)$, entonces D es H_2 . En ambos casos, esto genera una contradicción.
- Caso 2. $N^-(v) \cap R = \emptyset$ o $N^+(v) \cap R = \emptyset$ (y no ambas cosas pues $R \neq \emptyset$).

Supongamos que $N^+(v) \cap R = \emptyset$ y que $N^-(v) \cap R \neq \emptyset$; el otro caso es simétrico. Sea $r \in N^-(v) \cap R$. Como $P \cup \{v\}$ no es homogéneo, entonces existe $q' \in Q \cup R = V(G) \setminus (P \cup \{v\})$ tal que q' es dominado por un vértice de $P \cup \{v\}$ y domina a otro vértice del mismo conjunto. No puede suceder que $q' \in R$, pues $R \Rightarrow P$ y $N^+(v) \cap R = \emptyset$, por lo que q' no sería dominado por un vértice de $P \cup \{x\}$. Así, $q' \in Q$ y como $P \Rightarrow Q$ y q' domina a un vértice de $P \cup \{v\}$, q' domina a v . Se sigue que $q' \in N^-(v) \cap Q$. Así, si $qq' \in A(G)$, entonces, tomando $p = v_1, q = v_2, q' = v_3, r = v_4, v = v_5$, se tiene que $D_1 := G\langle\{p, q, q', r, v\}\rangle$ es H_2 ; si $q'q \in A(G)$, entonces, tomando $p = v_1, q' = v_2, v = v_3, q = v_4, r = v_5$, se tiene que $D_2 := G\langle\{p, q, q', r, v\}\rangle$ es H_3 . En ambos casos, llegamos a una contradicción. Podemos entonces concluir que G sí admite una trisección. ■

Teorema 3.4.3 ([3]) * *Un torneo es un héroe si y sólo si no contiene a H_1, \dots, H_4 , ni a H_5 .*

Prueba

Sea G un torneo. Si G es un héroe, entonces todos sus subtorneos son héroes. La proposición 3.4.1 afirma que H_1, \dots, H_5 son villanos. Así, se sigue que G no contiene a ninguno de ellos.

Para el regreso, supongamos que G no contiene a H_1, \dots, H_4 , ni a H_5 . Probemos, por inducción sobre el orden n , que G es un héroe. Si G tiene orden $1 \leq n \leq 3$, G es un héroe, pues todos los torneos de orden menor o igual a 3 son héroes.

Supongamos que se cumple si G tiene orden k , con $1 \leq k < n$, para alguna $n \geq 4$. Supongamos que G tiene orden n . Podemos además suponer que G es fuerte, pues de lo contrario, la hipótesis de inducción nos dice que sus componentes fuertes son héroes, y el teorema 3.3.5 afirma entonces que G es un héroe.

Como G es fuerte y no contiene a H_1, H_2 ni H_3 , se tiene, por el teorema 3.4.2, que G admite una trisección, digamos (A, B, C) . Si $|A|, |B|, |C| > 1$, entonces G contiene a $H_4 = \Delta(2, 2, 2)$, lo cual sería una contradicción. Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad, que $|C| = 1$. Si $G\langle A \rangle$ y $G\langle B \rangle$ contienen a C_3 , entonces G contiene a $H_5 = \Delta(C_3, C_3, 1)$. Podemos suponer entonces que $G\langle B \rangle$ es C_3 -libre; es decir, que es transitivo, por lo que $G\langle B \rangle = T_k$, para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$. El caso en que A es transitivo se hace de manera simétrica.

Tenemos entonces que $G = \Delta(G\langle A \rangle, k, 1)$; además, $G\langle A \rangle$ es un héroe, por hipótesis de inducción. Así, G es fuerte y admite una trisección como en el teorema 3.3.5. Se sigue que G es un héroe. ■

Corolario 3.4.4 * *Un torneo es un villano si y sólo si contiene a H_1, \dots, H_4 o a H_5 .*

Concluimos este capítulo con la última caracterización de los héroes. Probamos ya, en la segunda sección de este capítulo, que todo héroe es una celebridad. Para probar el recíproco, requerimos de la siguiente proposición, cuya prueba puede consultarse en el artículo [3]. El enunciado de esta proposición es sencillo; no obstante, su prueba, al igual que la del teorema 2.4.1 de Erdős, mencionado en el capítulo pasado, hace uso de argumentos probabilísticos y combinatorios complejos, por lo que no la detallaremos aquí.

Proposición 3.4.5 ([3]) * *El torneo $\Delta(2, 2, 2)$ no es una celebridad.*

Teorema 3.4.6 ([3]) * *Un torneo es una celebridad si y sólo si es un héroe.*

Prueba por inducción fuerte sobre el orden del torneo

Sea H una celebridad. Si el orden de H es a lo más 4, sabemos que es un héroe, pues todo torneo de orden menor a 5 lo es.

Supongamos que toda celebridad de orden $n < k$, es un héroe, para alguna $k > 4$. Probemos que si H tiene orden k , entonces también es un héroe. Todo subtorneo de una celebridad es a su vez una celebridad. Así, si H no es fuerte, se tiene, por hipótesis de inducción, que sus componentes fuertes son héroes. El teorema 3.3.5 afirma entonces que H es un héroe. Supongamos entonces que H es fuerte.

Definimos, para toda $i \in \mathbb{N}$ de manera recursiva, la siguiente sucesión de torneos:

$D_0 = T_1$ y para toda $i \geq 1$, $D_i = \Delta(D_{i-1}, D_{i-1}, D_{i-1})$. Probemos la siguiente afirmación.

(1) Para toda $i \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha(D_i) \leq 2^i$, con $\alpha(D_i)$ la cardinalidad del subconjunto transitivo más grande de G .

Lo probamos por inducción. $D_1 = C_3$, por lo que $\alpha(D_1) = 2 = 2^1$. Supongamos que se cumple para alguna $i \in \mathbb{N}$. Veamos que se cumple para $i + 1$. Como $D_i = \Delta(D_{i-1}, D_{i-1}, D_{i-1})$, podemos tomar (X, Y, Z) una trisección de D_i , con $D_1\langle X \rangle, D_1\langle Y \rangle, D_1\langle Z \rangle \cong D_{i-1}$. Dado $W \subseteq V(D_i)$ transitivo, no puede suceder que $W \cap X = \emptyset, W \cap Y = \emptyset$ y $W \cap Z = \emptyset$, pues por ser (X, Y, Z) una trisección, W tendría un ciclo. Así, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $W \subseteq X \cup Y$. Como $W \cap X$ y $W \cap Y$ son subconjuntos transitivos de D_{i-1} , se tiene, por hipótesis de inducción, que $|W \cap X|, |W \cap Y| \leq 2^{i-1}$, por lo que $|W| \leq 2^i$. Queda así probada la afirmación.

Ahora bien, notemos que dada $i \in \mathbb{N}$, D_i tiene orden 3^i . Es claro que la sucesión

$(\frac{2^i}{3^i})_{i=1}^{\infty} = ((\frac{2}{3})^i)_{i=1}^{\infty}$ converge a 0. Por lo tanto, dado que H es una celebridad, (1) implica que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que D_j contiene a H ; supongamos que es el mínimo natural que lo cumple. Como H tiene orden $k > 4$, entonces $j \geq 2$, por lo que $D_j = \Delta(D_{j-1}, D_{j-1}, D_{j-1})$. Tomemos (X, Y, Z) una trisección de D_j , con $D_1\langle X \rangle \cong D_{j-1}, D_1\langle Y \rangle \cong D_{j-1}$ y $D_1\langle Z \rangle \cong D_{j-1}$. Puesto que D_j contiene a H , podemos tomar a $W \subseteq V(H)$ tal que $D_j\langle W \rangle \cong H$. Por la minimalidad de j , D_{j-1} no contiene a H , por lo que W no está contenido en X, Y o Z ; así, dado que H es fuerte, debe suceder que $W \cap X, W \cap Y, W \cap Z \neq \emptyset$. Notemos entonces que $(H \cap X, H \cap Y, H \cap Z)$ es una trisección de H . Veamos que dicha trisección es de la forma $\Delta(P, k, 1)$ o $\Delta(P, 1, k)$, con P un héroe y $k \in \mathbb{Z}^+$.

Por un lado, la proposición 3.4.5 nos dice que $\Delta(2, 2, 2)$ no es una celebridad; como todo subtorneo de una celebridad es una celebridad, se sigue que W no contiene a $\Delta(2, 2, 2)$; por lo tanto $W \cap X, W \cap Y$ o $W \cap Z$ consta de únicamente un vértice; supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|W \cap Z| = 1$.

Por el otro, la proposición 3.2.5 nos dice, en particular, que $\Delta(C_3, C_3, 1)$ no es una celebridad, por lo que W no lo contiene. Así $W \cap X$ o $W \cap Y$ debe ser transitivos. Por lo tanto, $H = \Delta(P, k, 1)$ o $H = \Delta(P, 1, k)$, para algún torneo $P \subseteq D_{i-1}$ y alguna $k \in \mathbb{Z}^+$. Sabemos, por hipótesis de inducción, que D_{i-1} es un héroe, y como $P \subseteq D_{i-1}$, P es también un héroe. Se tiene entonces, por el teorema 3.3.5, que H es un héroe. ■

4 Torneos infinitos

El concepto de gráfica infinita fue introducido por Kőnig en 1936. Entendemos por una digráfica infinita, una digráfica de orden κ , para algún cardinal infinito κ . Se hace referencia a este tipo de digráficas por primera vez en [5] y se describen explícitamente en [1]. Una digráfica finita es una digráfica de orden finito. En esta sección, entendemos por una digráfica a secas, una digráfica finita o infinita.

4.1. Extensiones a digráficas infinitas

Hagamos primero algunas adaptaciones de las definiciones que dimos para digráficas finitas.

Tenemos ahora dos tipos de caminos: los finitos y los numerables. Los finitos serán los uv -caminos, definidos de la misma manera que para digráficas finitas.

Definimos un *camino numerable* en una digráfica D de la siguiente manera: es una sucesión (numerable) de vértices $\mathcal{C}: \mathbb{N} \rightarrow V(D)$ que cumple una de las dos siguientes propiedades:

- $\mathcal{C}(i)\mathcal{C}(i+1) \in A(D)$ para toda $i \in \mathbb{N}$; en este caso, decimos que \mathcal{C} es un camino exterior; además, si $\mathcal{C}(0) = u$, decimos que \mathcal{C} es un (u, \dots) -camino.
- $\mathcal{C}(i+1)\mathcal{C}(i) \in A(D)$ para toda $i \in \mathbb{N}$; en este caso, decimos que \mathcal{C} es un camino interior; además, si $\mathcal{C}(0) = u$, decimos que \mathcal{C} es un (\dots, u) -camino.

Podemos ahora tener una κ -coloración de un torneo, con κ cualquier cardinal. Los números cromáticos usual y transitivo se definen de la misma manera, pues todo conjunto no vacío de cardinales tiene mínimo.

En este capítulo, un héroe H es un torneo finito tal que existe $c \in \mathbb{N}$ tal que todo torneo finito H -libre tiene número cromático transitivo a lo más c . Denotamos por $n(H)$ al número de héroe de H ; es decir, al mínimo $c \in \mathbb{N}$ que hace a H un héroe.

Agregamos la siguiente definición: un torneo H es un *superhéroe* si existe $c \in \mathbb{N}$ que cumple que todo torneo H -libre tiene número cromático transitivo a lo más c . Puesto que hay familias de torneos finitos con número cromático transitivo no acotado, es inmediato que ningún torneo infinito es un superhéroe. Denotamos por $s(H)$ al *número de superhéroe* de H ; es decir, al mínimo $c \in \mathbb{N}$ que hace a H un

superhéroe. Por ejemplo, C_3 es un superhéroe, pues todo torneo, finito o infinito, que no lo contiene, es transitivo. Se sigue que $n(H) = s(H) = 1$. Es claro que todo superhéroe es un héroe y que dado un superhéroe, $n(H) \leq s(H)$. El concepto de celebridad no puede generalizarse.

El lector habrá notado que los teoremas, corolarios, lemas y proposiciones de esta tesis vienen siempre acompañados de una estrella de color, ya sea verde, roja o naranja. Las verdes indican que el enunciado y su prueba se extienden, con pocos o nulos cambios, a digráficas infinitas. Las naranjas indican que es quizás posible extender el resultado a digráficas infinitas, aunque dicho resultado requeriría una prueba distinta. Las rojas indican que no se puede extender el resultado a digráficas infinitas.

En esta primera sección, comentaremos los resultados con estrella roja de toda la tesis, al igual que el único resultado con estrella naranja del capítulo 1.

Los teoremas 1.3.1, 1.3.5, 1.3.6, el corolario 1.3.9, el teorema 2.2.1 y el corolario 2.2.3 son los únicos resultados que tienen estrella roja en toda esta tesis. Probemos por qué no son válidos, definiendo a nuestro primer torneo infinito, que será también de utilidad adelante.

Sea $T_{\mathbb{Q}}$ el torneo definido como sigue: $V(T_{\mathbb{Q}}) := \mathbb{Q}$ y $A(T_{\mathbb{Q}}) := \{qr : q, r \in \mathbb{Q} \text{ y } q <_{\mathbb{Q}} r\}$, con $<_{\mathbb{Q}}$ el orden usual de \mathbb{Q} .

Notemos que $T_{\mathbb{Q}}$ es un torneo transitivo, por lo que es acíclico; sin embargo, no tiene pozos ni fuentes. Además, sus componentes fuertes constan cada una de un vértice; así, al no tener pozos ni fuentes, no tiene componentes iniciales ni finales. Por lo tanto, los teoremas 1.3.1 y 1.3.9 no se cumplen en digráficas de orden infinito, ni siquiera si el orden es numerable.

Además, como $T_{\mathbb{Q}}$ es transitivo, es en particular unilateral. Afirmamos que no tiene caminos hamiltonianos. Argumentando por contradicción, supongamos que existe \mathcal{C} un camino hamiltoniano en $T_{\mathbb{Q}}$. Puesto que el orden de $T_{\mathbb{Q}}$ es numerable, \mathcal{C} debe ser un camino numerable, por lo que es un (u, \dots) - o un (\dots, u) -camino. En ambos casos, se produce una contradicción, pues \mathbb{Q} no tiene extremos.

Así, los teoremas 1.3.5, 2.2.1 y el teorema 1.3.6 tampoco se cumplen en digráficas de orden infinito, ni siquiera si el orden es numerable.

Además, puesto que no existen ciclos de longitud infinita, el teorema 1.3.6 y el corolario 2.2.3 no se cumplen en digráficas de orden infinito, ni siquiera si el orden es numerable.

El único resultado del capítulo 1 que tiene estrella naranja es el teorema 1.4.1, que afirma que toda digráfica débilmente conexa tiene un árbol generador. Lo probamos a continuación para digráficas infinitas.

Dados G una digráfica fuerte y $u, v \in V(G)$, definimos la *distancia* de u a v como $d(u, v) := \min\{l(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \text{ es un } uv\text{-camino}\}$. Puesto que todos los uv -caminos son

finitos, la distancia sí está bien definida, pues la definición de digráfica fuerte sigue siendo la misma. Además, no podemos asegurar que $d(u, v) = d(v, u)$ para toda $u, v \in V(G)$, a no ser que G sea simétrica. Este concepto nos permitirá probar el teorema.

Teorema 4.1.1 *Toda digráfica débilmente conexa tiene un árbol generador.*

Prueba

Sea G una digráfica débilmente conexa. Se tiene que $G^* := G \cup G^{-1}$ es fuerte. Sea $v \in V(G^*)$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $N_n(v) := \{w \in V(G^*) : d(v, w) = n\}$. Notemos que $N_1(v) = N_G(v) = N_{G^*}(v)$. Además, $\{N_n(v) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es una partición de $V(G)$. Probemos la siguiente afirmación.

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, existe un árbol generador B_n de $G(\{v\} \cup N_1(v) \cup \dots \cup N_n(v))$ y se cumple que para toda $i, j \in \mathbb{Z}^+$, $i < j$, que $B_i \subseteq B_j$.

Probémosla por inducción. Como $N_1(v) = N_G(v)$, definimos B_1 de la siguiente manera: $V(B_1) = N(v) \cup \{v\}$ y $A(B_1) = \{uv : uv \in A(G)\} \cup \{vu : vu \in A(G)\}$. Evidentemente, B_1 es débilmente conexa y acíclica, por lo que es un árbol. Además, sus vértices son exactamente $\{v\} \cup N_1(v)$, por lo que es generador.

Supongamos que se cumple para alguna $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $N_{n+1}(v) \subseteq N(N_n(v))$. Así, basta tomar B_{n+1} tal que $V(B_{n+1}) = V(B_n) \cup N_{n+1}(v)$ y $A(B_{n+1}) = A(B_n) \cup \{xy \in A(G) : x \in N_{n+1}(v), y \in N_n(v)\} \cup \{yx \in A(G) : x \in N_{n+1}(v), y \in N_n(v)\}$. Puesto que B_n es débilmente conexa y acíclica, es claro que B_{n+1} lo es también. Además, los vértices de B_{n+1} son exactamente $\{v\} \cup N_1(v) \cup \dots \cup N_n(v) \cup N_{n+1}(v)$, por lo que es generador. Queda así probada la afirmación.

Ahora bien, basta considerar $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Puesto que para toda $i, j \in \mathbb{Z}^+$, $i < j$, se cumple que $B_i \subseteq B_j$, entonces B es un árbol, pues cada B_i lo es. Además, como $\{N_n(v) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es una partición de $V(G)$, entonces B es generador. ■

4.2. Torneos transitivos y COTO

Dedicamos esta sección a los dos últimos resultados de la sección 3.2, los cuales presentan estrella naranja. Son los teoremas 2.2.6 y 2.2.7, que giran en torneo a los torneos transitivos.

Para esto, requerimos de resultados de la teoría de conjuntos; dichos resultados y sus pruebas pueden consultarse en [7]. Repasemos primero las definiciones de ciertos tipos de relación, particularmente las de orden. Sean X un conjunto y R una relación binaria en X .

Decimos que R es:

- *irreflexiva* si cumple que para todo $x \in X$, $(x, x) \notin R$.

- *asimétrica* si cumple que para todo $x, y \in X$, $(x, y) \in R$ implica que $(y, x) \notin R$.
- *total* si cumple que para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, se tiene que $(x, y) \in R$ o $(y, x) \in R$.
- *transitiva* si cumple que para todo $x, y, z \in X$, $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ implican que $(x, z) \in R$.

Notemos que R es irreflexiva si y sólo si (X, R) es una digráfica. Además, si R es irreflexiva, entonces

- R es asimétrica si y sólo si (X, R) es una digráfica asimétrica.
- R es total si y sólo (X, R) es una digráfica semicompleta.
- R es transitiva si y sólo si (X, R) es una digráfica transitiva.

R es un *orden parcial irreflexivo* si R es irreflexiva, asimétrica y transitiva. En este caso, (X, R) es llamado un *conjunto parcialmente ordenado irreflexivo*; abreviaremos diciendo que X es un COPOI.

R es un *orden total* si R es un orden parcial que es irreflexivo y total. En este caso, (X, R) es llamado un *conjunto totalmente ordenado*; abreviaremos diciendo que X es un COTO.

R es un *buen orden* si es un orden parcial tal que todo subconjunto $S \subseteq X$ no vacío tiene mínimo. En este caso, (X, R) es llamado un *conjunto bien ordenado*; abreviaremos diciendo que es un COBO. Decimos que un torneo T es *bueno* si es un COBO.

Se cumple lo siguiente:

- X es un COPOI si y sólo si es una digráfica transitiva y asimétrica.
- X es un COTO si y sólo si es un torneo transitivo.
- X es un COBO si y sólo si es un torneo bueno.

Dados $(X, <_X)$ y $(Y, <_Y)$ COPOI, decimos que X es *isomorfo* a Y en el sentido de orden si existe $f: X \rightarrow Y$ biyectiva tal que para todo $x_1, x_2 \in X$, se cumple que $x_1 <_X x_2$ si y sólo si $f(x_1) <_Y f(x_2)$, f es llamado un *isomorfismo de orden*. Si X es isomorfo a Y , escribimos $X \sim Y$; en caso de que queramos especificar que f es un isomorfismo de orden entre X y Y , escribimos $X \sim_f Y$. Además, un *encaje* de X en Y es un isomorfismo entre $(X, <_X)$ y $(S, <_S)$ para algún $S \subseteq Y$, con $<_S$ la relación $<_Y$ restringida a S .

Notemos que $X \sim Y$ como COPOI si y sólo si $(X, <_X) \cong (Y, <_Y)$ como digráficas.

Por último, requerimos introducir la noción de número ordinal y la número cardinal. Decimos que una colección de conjuntos es una *clase propia* si dicha colección no es un conjunto. Un *ordinal* α es un conjunto transitivo, es decir, tal que si

$x \in \alpha$, entonces $x \subseteq \alpha$, y tal que (x, \in) , con \in la relación usual de pertenencia, es un COBO. Denotamos por OR a la clase propia de los ordinales. La pareja (OR, \in) puede pensarse como un COBO, aunque estrictamente no lo es, pues OR no es un conjunto. Un *cardinal* κ es un ordinal tal que para todo ordinal α que cumple que $\alpha \in \kappa$, κ no es equipotente a α , es decir, no existe una función biyectiva entre α y κ . Dado $\kappa \in \text{CAR}$, denotamos por κ^+ al cardinal sucesor de κ , es decir, el cardinal más chico tal que $\kappa \in \kappa^+$. CAR es una subclase propia de OR. Un *funcional* es una clase propia definida por una fórmula de la forma $\varphi(x, y)$, la cual se comporta como función; es decir, dados x, y, z conjuntos tales que se cumple $\varphi(x, y)$ y $\varphi(x, z)$, entonces $y = z$.

Usaremos la misma notación para las clases propias OR y CAR que para conjuntos; escribiremos, por ejemplo: $\alpha \in \text{OR}$, $f: \text{OR} \rightarrow \text{OR}$, con f es un funcional, etc.

Con la herramienta conjuntista que hemos introducido, al igual que la relación entre torneos transitivos y COTO, estamos listos para comentar los dos resultados que giran en torno a los torneos transitivos.

El teorema 2.2.6 afirma la existencia y unicidad de torneos transitivos de cualquier orden $n \in \mathbb{N}$. Generalizamos este resultado. Para cada $\alpha \in \text{OR}$, denotamos por T_α al torneo bueno (α, \in) , que tiene orden $|\alpha|$.

El siguiente teorema nos da la existencia y unicidad de los COBO.

Teorema 4.2.1 ([7]) *Dados $\alpha, \beta \in \text{OR}$, se cumple que $(\alpha, \in) \sim (\beta, \in) \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Además, dado X un COBO existe un único $\alpha \in \text{OR}$ tal que $X \sim \alpha$.*

Corolario 4.2.2 *Los únicos torneos buenos, salvo isomorfismos, son los T_α , con $\alpha \in \text{OR}$.*

Además, el siguiente teorema nos da la cantidad exacta de ordinales de cada cardinalidad.

Teorema 4.2.3 ([7]) *Para cada $\kappa \in \text{CAR}$ infinito, hay exactamente κ^+ ordinales de cardinalidad κ .*

Corolario 4.2.4 *Para cada $\kappa \in \text{CAR}$ infinito, hay exactamente κ^+ torneos buenos de orden κ no isomorfos.*

Proposición 4.2.5 *Para cada $\kappa \in \text{CAR}$ infinito, hay a lo más 2^κ torneos no isomorfos de orden κ .*

Prueba

Sea X un conjunto de cardinalidad κ . Veamos primero que existen a lo más 2^κ torneos que tienen por conjunto de vértices a X . Sea $P_2(X) = \{S \subseteq X : |S| = 2\}$. Notemos que $|P_2(X)| \leq |X \times X| = \kappa \times \kappa = \kappa$. Para construir un torneo que tenga por conjunto de vértices a X , tenemos, para cada pareja $\{u, v\} \in P_2(X)$, la opción de incluir la flecha uv o bien la flecha vu . Por lo tanto, hay $2^{|P_2(X)|} \leq 2^\kappa$ torneos así.

Ahora bien, sea T un torneo de orden κ . Puesto que X y $V(T)$ tienen la misma cardinalidad, entonces existe $f: V(T) \rightarrow X$ biyectiva. Notemos que el torneo $(X, \{f(u)f(v): uv \in A(T)\})$ tiene por conjunto de vértices a X y es isomorfo a T . Se sigue que hay a lo más 2^κ torneos no isomorfos de orden κ . ■

Si asumimos la hipótesis generalizada del continuo, la cual nos dice que para todo $\kappa \in \text{CAR}$ infinito, $2^\kappa = \kappa^+$, entonces el corolario 4.2.4 afirma que hay al menos 2^κ torneos buenos no isomorfos de orden κ y la proposición 4.2.5 afirma que hay a lo más 2^κ torneos no isomorfos de orden κ . Además, la familia de torneos buenos es una subfamilia de la de los torneos transitivos. Asumiendo dicha hipótesis, podemos afirmar que hay la misma cantidad de torneos no isomorfos de orden κ que de torneos transitivos de orden κ y de torneos buenos de orden κ y dicha cantidad es 2^κ .

Ahora bien, recordemos que, dada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, hay muchos torneos fuertes de orden n , mientras que sólo hay un torneo transitivo del mismo orden. Esto sugiere que para cada $\kappa \in \text{CAR}$ infinito, debe haber al menos tanto torneos fuertes de orden κ como torneos transitivos de orden κ . Probamos un resultado un poco más débil a continuación.

Teorema 4.2.6 ([N]) *Para todo $\kappa \in \text{CAR}$ infinito, hay al menos κ^+ torneos fuertes de orden κ no isomorfos.*

Prueba

Sean $\alpha \in \text{OR}$ tal que $|\alpha| = \kappa$ y el torneo bueno T_α . Sea $B := V(T_\alpha) \setminus \{0, 1\}$. consideremos T_α^* dado como sigue: $V(T_\alpha^*) := V(T_\alpha)$ y $A(T_\alpha^*) := A(T_\alpha) \setminus \{0v: v \in B\} \cup \{v0: v \in B\}$. Basta ver que T_α^* es fuerte.

Sean $u, v \in V(T_\alpha^*)$, $u \neq v$. Puesto que T_α^* es un torneo, $uv \in A(T_\alpha^*)$ o $vu \in A(T_\alpha^*)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $uv \in A(T_\alpha^*)$. Basta entonces encontrar un vu -camino en T_α^* .

Caso 1. $u, v \in B$. En este caso, $(v, 0, 1, u)$ es un vu -camino.

Caso 2. $u \in B, v \notin B$. En este caso, $v = 0$, pues $uv \in A(T_\alpha^*)$. Así, $(0, 1, u)$ es un vu -camino.

Caso 3. $u \notin B, v \in B$. En este caso, $u = 1$. Así, $(v, 0, 1)$ es un vu -camino.

Se sigue que T_α^* es fuerte. Ahora bien, es claro que el funcional $F: \text{OR} \rightarrow \text{OR}$, $F(T_\alpha) = T_\alpha^*$ es biyectivo. Afirmamos que dados $\alpha, \beta \in \text{OR}$, tales que $\alpha \neq \beta$, se tiene que T_α^* no es isomorfo a T_β^* . Para probar esto, tomemos $\alpha, \beta \in \text{OR}$ tales que $T_\alpha^* \cong_f T_\beta^*$; probemos que $\alpha = \beta$. Podemos suponer que α, β son infinitos, pues el teorema 2.2.6 afirma que hay un único torneo transitivo T_n de orden n .

Probemos la siguiente afirmación: $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

Como f es un isomorfismo, entonces $N^+(f(0)) = f[N^+(0)] = f[\{1\}] = \{f(1)\}$. De igual manera, $N^-(f(1)) = \{f(0)\}$. Los únicos dos vértices $u, v \in V(T_\beta^*)$ que cumplen que $N^+(u) = \{v\}$ y $N^-(v) = \{u\}$ son 0 y 1, respectivamente. Se sigue que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

Consideremos $G_\alpha^* := T_\alpha^* - \{0, 1\}$ y $G_\beta^* := T_\beta^* - \{0, 1\}$. Dada la afirmación anterior, se tiene que $f^* := f|_{V(G_\alpha^*)}$ es tal que $G_\alpha^* \cong_{f^*} G_\beta^*$. Ahora bien, es claro que $T_\alpha \cong G_\alpha^*$; la función $g: T_\alpha \rightarrow G_\alpha^*$ es un isomorfismo, donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < \omega, \\ x & \text{si } x \geq \omega. \end{cases}$$

Análogamente, se tiene que $T_\beta \cong G_\beta^*$. Se sigue que $T_\alpha \cong T_\beta$, por lo que $\alpha = \beta$.

Así, los T_α^* son no isomorfos. Como hay una biyección entre los T_α^* y los T_α , y los T_α^* son fuertes, se sigue que hay al menos tantos torneos fuertes de cada orden como torneos buenos del mismo orden y por el corolario 4.2.4, queda probado este teorema. ■

Nuevamente, si asumimos la hipótesis generalizada del continuo, tendríamos también que hay exactamente 2^κ torneos fuertes de orden κ .

Hasta ahora, nuestro acercamiento a los torneos transitivos ha sido únicamente a través de los torneos buenos. Sin embargo, es claro que hay muchos torneos transitivos que no son buenos. El siguiente teorema es esencial en el estudio de tipos de orden. Su prueba puede consultarse en [5]. Nos servirá para caracterizar a los torneos transitivos numerables.

Teorema 4.2.7 (Cantor) *Todo COTO finito o numerable puede encajarse en $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$.*

Corolario 4.2.8 *Sea G un torneo finito o numerable. Se cumple que G es transitivo si y sólo si es un subtorneo de $T_{\mathbb{Q}}$, con $T_{\mathbb{Q}}$ el torneo transitivo definido en la sección anterior.*

Comentemos ahora el teorema 2.2.7; éste afirma que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, todo torneo de orden al menos 2^{k-1} contiene un T_k . Esto nos dice, en particular, que todo torneo infinito contiene a T_k para toda $k \in \mathbb{Z}^+$. Ésta es una manera sencilla de extender este teorema a digráficas infinitas; podemos plantearnos otras formas más interesantes y complicadas de generalizar este teorema. Para plantear estas generalizaciones, probemos primero la siguiente proposición.

Proposición 4.2.9 *Sea G un torneo infinito. Existe una sucesión $(v_n)_{n=1}^\infty$, con $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$, tal que para toda $i \in \mathbb{Z}^+$, v_i tiene exgrado infinito en $G\langle N^+(v_1) \cap \dots \cap N^+(v_{i-1}) \rangle$ y $v_i \in N^+(v_1) \cap \dots \cap N^+(v_{i-1})$.*

Prueba por inducción sobre n

Como G es infinito, podemos tomar $v_1 \in V(G)$ un vértice de exgrado infinito; como v_1 tiene exgrado infinito, entonces $G\langle N^+(v_1) \rangle$ es infinita, por lo que podemos tomar $v_2 \in N^+(v_1)$ tal que v_2 tiene exgrado infinito en $G\langle N^+(v_1) \rangle$.

Supongamos existe una sucesión finita (v_1, \dots, v_k) tal que para toda $i \in \{1, \dots, k\}$, v_i tiene exgrado infinito en $G \langle N^+(v_1) \cap \dots \cap N^+(v_{i-1}) \rangle$ y $v_i \in N^+(v_1) \cap \dots \cap N^+(v_{i-1})$. Como v_k tiene exgrado infinito en $G_1 := G \langle N^+(v_1) \cap \dots \cap N^+(v_{k-1}) \rangle$, tiene también exgrado infinito en $G_1 - \{v_1, \dots, v_k\}$. Así, el torneo H tal que $V(H) = V(G_1 - \{v_1, \dots, v_k\}) \cap N^+(v_k)$ es infinito. Se sigue que existe $v_{k+1} \in V(H)$ tal que el exgrado de v_{k+1} en H es infinito. Como $V(H) \subseteq N^+(v_1) \cap \dots \cap N^+(v_k)$, entonces v_k cumple lo buscado. ■

Corolario 4.2.10 *Todo torneo infinito G contiene un subtorneo transitivo numerable.*

Prueba

Como G es infinito, existe $(v_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión como en la proposición 4.2.9. Es claro que $G \langle \{v_i : i \in \mathbb{Z}^+\} \rangle$ es un subtorneo transitivo numerable. ■

Pregunta abierta ¿Será cierto que todo torneo de orden κ , con κ un cardinal infinito contiene un subtorneo transitivo de orden κ ? Responderemos parcialmente a esta pregunta en la siguiente sección.

4.3. Torneos infinitos y número cromático

En esta sección, empezaremos comentando ciertas cosas respecto a los torneos infinitos con número cromático transitivo finito.

Proposición 4.3.1 *Sea G un torneo de orden κ , con $\kappa \in \text{CAR}$ infinito. Se cumple lo siguiente:*

- *Si $\chi_t(G) = n$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces G contiene un subtorneo transitivo de orden κ . Además, G puede contener subtorneos transitivos de orden κ y ser tal que $\chi_t(G) \geq \aleph_0$; el torneo de la proposición 4.3.2 lo cumple.*
- *Si toda componente fuerte de G es de finita, entonces $\chi_t(G) \leq \aleph_0$. Esto se debe a que $\chi_t(G) = \sup\{\chi_t(H) : H \text{ es una componente fuerte de } G\}$. Además, G puede ser tal que $\chi_t(G) \leq \aleph_0$ y ser fuerte; en efecto, para cada $\alpha \in \text{OR}$, el torneo T_α^* del teorema 4.2.6 es fuerte y es 2-cromático-transitivo.*

Comentemos ahora la adaptación del corolario 2.3.4, el cual nos dice que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, existe un torneo T tal que $\chi_t(T) \geq n$. Probamos que sí existen torneos con número cromático transitivo numerable.

Proposición 4.3.2 *Existe un torneo de orden \aleph_0 que es \aleph_0 -cromático-transitivo.*

Prueba

El corolario 2.3.4 afirma que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existe G_n un torneo con número cromático transitivo al menos n . Supongamos que para toda $i, j \in \mathbb{Z}^+$, $i \neq j$, se cumple que $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$. Sean $T_\infty := \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ y $U := \{v_i v_j : v_i \in G_i, v_j \in G_j, i, j \in \mathbb{Z}^+, i < j\}$. consideremos $G_\infty := T_\infty + U$; este tipo de construcción se conoce como *suma de Zykov*. G_∞ es un torneo de orden \aleph_0 tal que para toda $i \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $G_i \subseteq G_\infty$, por lo que $\chi_t(G_\infty) \geq \chi_t(G_i)$. Como $\chi_t(G_i) \geq i$, se sigue que $\chi_t(G_\infty) \geq i$. Puesto que esto es cierto para toda $i \in \mathbb{Z}^+$, se sigue que $\chi_t(G_\infty) \geq \aleph_0$. Además, puesto que G_∞ tiene orden \aleph_0 , se sigue que $\chi_t(G_\infty) = \aleph_0$. ■

Pregunta abierta ¿Existen torneos κ -cromáticos-transitivos con $\kappa > \aleph_0$?

Fijemos ahora nuestra atención en intentar generalizar resultados de nuestro tercer capítulo. Empecemos enunciando la siguiente proposición, que no requiere prueba.

Proposición 4.3.3 *Sea G un torneo. Se cumple que si $\chi_t(G) \geq \aleph_0$, entonces G contiene a H para todo superhéroe H .*

Notemos ahora que nuestras tres caracterizaciones de los héroes no son directamente adaptables a los superhéroes. En efecto, los teoremas 3.3.5 y 3.4.3, requieren del lema 3.3.3 para probarse y la prueba de dicho lema usa inducción sobre un cierto máximo, que no necesariamente existe en torneos infinitos. Así, de ser cierto este lema, requeriría una prueba distinta para torneos infinitos. Además, el teorema 3.4.6 no puede adaptarse a superhéroes, pues el concepto mismo de celebridad es un concepto únicamente aplicable a torneos finitos. La única caracterización de los héroes que se extiende a superhéroes es el teorema 3.1.8, pues no usa la finitud de los torneos en su prueba; así, podemos afirmar que un torneo es un superhéroe si y sólo si sus componentes fuertes son superhéroes.

Pregunta abierta. Dado G un torneo, será cierto que G es un héroe si y sólo si es un superhéroe? Además, dado G un superhéroe, ¿se cumplirá que $n(H) = s(H)$?

Dado que no podemos adaptar las caracterizaciones de los héroes fuertes a superhéroes, buscaremos responder esta pregunta mediante otro acercamiento.

Sabemos ya que C_3 es un superhéroe y que $s(C_3) = n(C_3) = 1$. Además, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, T_n es también un superhéroe, pues la familia de torneos T_n -libres es finita. Además, como todo torneo infinito contiene a T_n , se sigue que $s(T_n) = n(T_n)$, y por el teorema 2.2.7, es claro que $s(T_n) \leq \chi_t(2^{n-1} - 1)$. Ahora bien, para encontrar más superhéroes, generalicemos el concepto de héroe y el de superhéroe.

Decimos que una digráfica H es un d -héroe si existe $c \in \mathbb{N}$ que cumple que todo torneo finito H -libre tiene número cromático transitivo menor o igual a c ; el *número de d -héroe* $n(H)$ se define de la misma manera que antes. La definición de d -superhéroe se extiende a cualquier digráfica de la misma manera. Evidentemente,

los d-héroes son digráficas de orden finito sin flechas simétricas. Notemos que la proposición 3.1.1 se cumple para d-héroes y d-superhéroes: toda subdigráfica de un d-superhéroe es un d-superhéroe; lo análogo se cumple para d-héroes.

Pregunta abierta. ¿Será cierto que todo d-héroe de orden n es una subdigráfica de un héroe de orden n ? ¿Se cumplirá esto mismo para d-superhéroes? Respondéremos parcialmente a la primera pregunta más adelante.

Podemos empezar por preguntarnos si las familias de digráficas más sencillas son d-héroes, y más aún, d-superhéroes. La familia de digráficas más sencilla que conocemos es la de las trayectorias. Es claro que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, la trayectoria P_n es un d-superhéroe; en efecto, el teorema 2.2.1 afirma que todo torneo finito contiene una trayectoria hamiltoniana. Así, un torneo es P_n -libre si y sólo si su orden es menor a n . Esto nos dice también que $n(P_n) = s(P_n) = \chi_t(n - 1)$.

Sin embargo, esta familia, al igual que la familia de los torneos transitivos T_n , no es tan interesante para el concepto de d-superhéroe, pues para cada una de estas digráficas, hay una cantidad finita de torneos no isomorfos que no la contienen.

Fijemos nuestra atención en la segunda familia de digráficas más sencilla, que es mucho más interesante. Sabemos ya que C_3 es un superhéroe tal que $s(C_3) = 1$, pues la familia de torneos C_3 -libres es la familia de torneos transitivos, que es en realidad una clase propia. Podemos entonces preguntarnos si para toda $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, C_n es un d-héroe, y más aún, un d-superhéroe. Notemos primero que un torneo G es C_n libre si y sólo si no contiene ningún torneo fuerte de orden n , pues los torneos fuertes finitos son hamiltonianos. Así, se tiene que si existe un torneo fuerte de orden n que es un héroe, entonces C_n es también un héroe; el recíproco no es necesariamente cierto. Notemos que, para toda $n \geq 3$, sí existe dicho torneo, pues $\Delta(1, n - 2, 1)$ es un héroe por el teorema 3.3.5 y es fuerte. Así, todos los ciclos son d-héroes.

Probamos, a continuación, que los ciclos no sólo son d-héroes, sino d-superhéroes. Además, damos el número de d-superhéroe de cada ciclo, en términos del número cromático transitivo de un natural.

Teorema 4.3.4 ([N]) *Para toda $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, C_n es un d-superhéroe tal que $n(C_n) = s(C_n) = \chi_t(n - 1)$.*

Prueba

Sea G un torneo C_n -libre. Por el corolario 2.2.4, se tiene que G no tiene ciclos de longitud n o mayor. Por el teorema 2.2.3, esto es equivalente a decir que G no contiene subtorneos fuertes de orden n o mayor; en particular, las componentes fuertes de G son todas de orden menor a n . Por lo tanto, el teorema 2.3.1 afirma que $\chi_t(G) = \max\{\chi_t(H) : H \text{ es una componente fuerte de } G\} \leq \chi_t(n - 1)$. Se sigue que $s(C_n) \leq \chi_t(n - 1)$. Además, $P_n \subseteq C_n$, por lo que $n(P_n) \leq n(C_n)$. Dado que $\chi_t(n - 1) = n(P_n) \leq n(C_n) \leq s(C_n) \leq \chi_t(n - 1)$, entonces $n(C_n) = s(C_n) = \chi_t(n - 1)$. ■

Corolario 4.3.5 *Sea G un torneo. Si $\chi_t(G) \geq \aleph_0$, entonces G contiene a C_n para toda $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.*

El regreso de este corolario no es cierto. En efecto, para cada $\alpha \in \text{OR}$, el torneo T_α^* de la sección anterior es fuerte, por lo que tiene ciclos de todos los órdenes. Sin embargo, es fácil ver que es 2-cromático-transitivo.

Para resumir la información que tenemos sobre los d -superhéroes, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3.6 ([N]) *Se cumple lo siguiente:*

- *Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, P_n y T_n son d -superhéroes. Además, $n(P_n) = s(P_n) = \chi_t(n-1)$ y $n(T_n) = s(T_n) \leq \chi_t(2^{n-1} - 1)$.*
- *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, C_n es un d -superhéroe y $n(C_n) = s(C_n) = \chi_t(n-1)$.*

Para concluir este capítulo, recordemos que tenemos una lista de cinco villanos mínimos. Podemos entonces preguntarnos si existe una lista tal de d -villanos mínimos, donde un d -villano es una digráfica que no es un d -héroe. Proponemos tres d -villanos de orden 5, uno de orden 6 y uno de orden 7, los cuales son buenos candidatos a ser d -villanos mínimos; estos son subdigráficas de los cinco villanos mínimos H_1, \dots, H_5 , introducidos en la figura 3.4. Sean $J_1 := H_1 - \{v_5v_1, v_2v_3\}$, $J_2 := H_2 - v_2v_4$, $J_3 := H_3 - \{v_1v_4\}$, $J_4 = H_4 - \{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5\}$ y $J_5 := H_5$. Veremos únicamente que sí son d -villanos. Para esto, probemos primero la siguiente proposición, que responde parcialmente a la última pregunta abierta.

Proposición 4.3.7 ([N]) *Toda digráfica fuerte de orden 5 o 6 que no es una subdigráfica de ningún héroe del mismo orden es un d -villano.*

Prueba

Sea H una digráfica fuerte de orden 5 o 6 que no es una subdigráfica de ningún héroe de mismo orden. Para probar que H es un d -villano, basta probar que existe una familia de torneos H -libres con número cromático transitivo no acotado. Sea S_i la familia de torneos previamente definida: $S_1 = T_1$ y dado $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$, $S_i = \Delta(S_{i-1}, S_{i-1}, 1)$. Probemos, por inducción, que para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, S_i es H -libre.

Es claro que S_1 y S_2 son H -libres, pues tienen orden 1 y 3, respectivamente.

Supongamos que S_{i-1} es H -libre. Argumentando por contradicción, supongamos que S_i contiene a H . Como $S_i = \Delta(S_{i-1}, S_{i-1}, 1)$, sean $X, Y, Z \subseteq S_i$ tales que $S_i \langle X \rangle \cong S_{i-1} \cong S_i \langle Y \rangle$, $Z = \{z\}$ y (X, Y, Z) es una trisección de S_i . Como S_i contiene a H y S_{i-1} es H -libre, entonces H no está contenido en X ni en Y . Además, como H es fuerte, se tiene que $V(H) \cap X \neq \emptyset$, $V(H) \cap Y \neq \emptyset$ y $V(H) \cap Z \neq \emptyset$, pues no hay caminos cerrados que pasen por sólo 2 de los 3 conjuntos X, Y, Z . Además, $|V(J_1) \cap Z| = 1$.

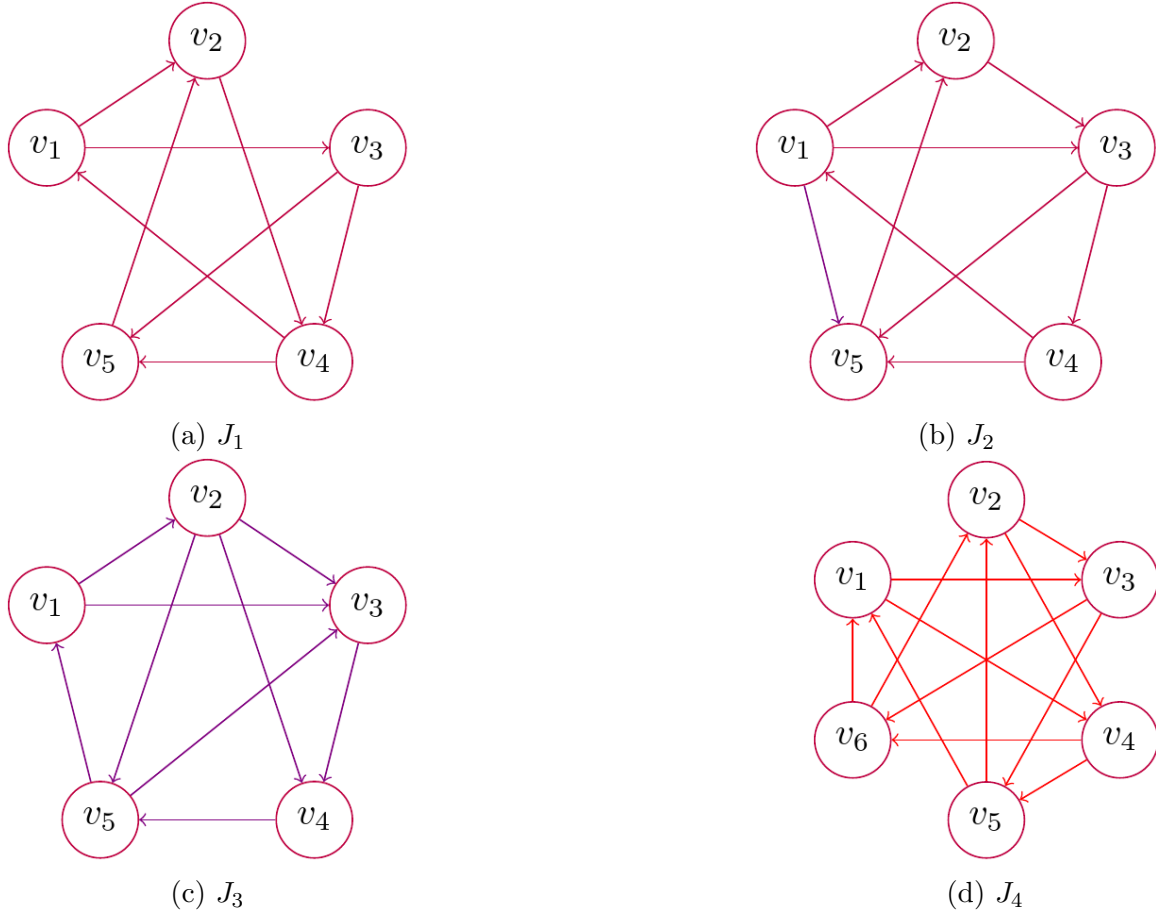


Figura 4.1: d-villanos de orden 5 y 6

- Si H tiene orden 5, entonces $|V(H) \cap X| = 1$ y $|V(H) \cap Y| = 3$, o $|V(H) \cap X| = 2$ y $|V(H) \cap Y| = 2$, o $|V(H) \cap X| = 3$ y $|V(H) \cap Y| = 1$. Puesto que (X, Y, Z) es una trisección, entonces H está contenido en una trisección de la forma $\Delta(2, 2, 1)$, $\Delta(3, 1, 1)$, o $\Delta(C_3, 1, 1)$ que son héroes.
- Si H tiene orden 6, entonces $|V(H) \cap X| = 1$ y $|V(H) \cap Y| = 4$, o $|V(H) \cap X| = 2$ y $|V(H) \cap Y| = 3$, o $|V(H) \cap X| = 3$ y $|V(H) \cap Y| = 2$, o $|V(H) \cap X| = 4$ y $|V(H) \cap Y| = 2$. Puesto que todo torneo de orden 4 es un héroe, entonces H está contenido en una trisección de la forma $\Delta(H, k, 1)$ o $\Delta(H, 1, k)$, con H un héroe y $k \in \mathbb{Z}^+$, que son héroes por el teorema 3.3.5.

De ambos casos, se sigue que H es una subdigráfica de un héroe de mismo orden, lo cual es una contradicción. Se sigue que S_i no contiene a H .

Así, la familia de torneos S_i es H -libre. Puesto que probamos ya que dicha familia tiene número cromático transitivo no acotado, se sigue que H es un d-villano. ■

Corolario 4.3.8 *Las digráficas J_1, J_2, J_3, J_4 y J_5 de la figura 4.1 son d-villanos.*

Prueba

Sabemos ya que $J_5 = H_5$ es un villano, por lo que es un d-villano. Veamos que J_1 , J_2 , J_3 no son subdigráficas de ningún héroe de orden 5 y que J_4 no es subdigráfica de ningún héroe de orden 6. Probemos las siguientes afirmaciones:

(1) Dado G un torneo de orden 5, se cumple lo siguiente:

- G contiene a J_1 si y sólo si G es alguno de los 3 villanos de orden 5: H_1 , H_2 o H_3 . En efecto, $J_1 + \{v_5v_1, v_2v_3\}$ es H_1 , $J_1 + \{v_5v_1, v_3v_2\}$ y $J_1 + \{v_1v_5, v_2v_3\}$ son ambas H_2 y $J_1 + \{v_1v_5, v_3v_2\}$ es H_3 .
- G contiene a J_2 si y sólo si es H_2 o H_3 ; en efecto, $J_2 + v_2v_4$ es H_2 y $J_2 + v_4v_2$ es H_3 .
- G contiene a J_3 si y sólo si es H_2 o H_3 ; en efecto, $J_3 + v_1v_4$ es H_3 y $J_3 + v_4v_1$ es H_2 .

(2) Dado G un torneo de orden 6, G contiene a J_4 si y sólo si es H_4 ; en efecto, todos los supratorneos de J_4 son isomorfos a H_4 .

Por lo tanto, (1) y (2) nos dicen, en particular, que todo héroe fuerte de orden 5 no contiene a J_1 , J_2 , ni a J_3 y todo héroe fuerte de orden 6 no contiene a J_4 . Puesto que J_1, \dots, J_4 son fuertes, podemos concluir que todo héroe de orden 5 no contiene a J_1 , J_2 , ni J_3 y todo héroe de orden 6 no contiene a J_4 . Por la proposición 4.3.7, se sigue que J_1 , J_2 , J_3 y J_4 son d-villanos. ■

Observaciones. Los cinco d-villanos J_1 , J_2 , J_3 , J_4 y J_5 no se contienen entre sí, por lo que sí es relevante considerarlos a todos como candidatos a ser mínimos.

Como todo torneo no fuerte de orden 5 es un héroe, entonces toda digráfica no fuerte de orden 5 es un d-héroe, pues es una subdigráfica de algún torneo no fuerte de mismo orden. Por lo tanto, todo d-villano de orden 5 es fuerte. Para ver que J_1 , J_2 y J_3 son mínimos, bastaría entonces ver que dada una subdigráfica de H_1 , H_2 o H_3 , es un d-héroe o contiene a J_1 , J_2 o J_3 .

No es claro que J_4 sea mínimo, pero es un buen candidato a serlo, pues está propiamente contenido en H_4 , que es un villano mínimo. En caso de ser mínimo, no es necesariamente el único de orden 6 que lo es; lo mismo sucede para J_1 , J_2 y J_3 . Además, podría quizás haber d-villanos mínimos no fuertes de orden 6.

La prueba de la proposición 4.3.7 nos dice, en particular, que todas las subdigráficas fuertes de $J_5 = S_3$ de orden menor son d-héroes. Esto nos dice que debe haber al menos un d-villano mínimo de orden 7, quizás J_5 .

Puesto que un torneo de orden 5 contiene a J_1 si y sólo si es H_1 , H_2 o H_3 , entonces un torneo G de cualquier orden contiene a J_1 si y sólo si contiene a H_1 , H_2 o H_3 . Así, un torneo no contiene a H_1 , H_2 , ni a H_3 si y sólo si es J_1 -libre. Además, un torneo es H_4 -libre si y sólo si es J_4 -libre. Por lo tanto, el teorema 3.4.3 puede mejorarse un poco: un torneo H es un héroe si y sólo si no contiene a J_1 , J_4 , ni a J_5 .

Concluimos nuestro capítulo final con un último planteamiento.

Conjetura. Las digráficas J_1 , J_2 y J_3 son los únicos d-villanos mínimos de orden 5; es decir, dado H un d-villano de orden 5, se tiene que $J_1 \subseteq H$, $J_2 \subseteq H$ o $J_3 \subseteq H$. Además, J_4 y J_5 son d-villano mínimos, no necesariamente únicos.

Pregunta abierta. ¿Existirá una lista finita de d-villanos D_1, \dots, D_n tales que una digráfica H es un héroe si y sólo si H es D_i -libre para toda $i \in \{1, \dots, n\}$? En caso de que exista tal lista, ¿constará de 5 o más digráficas? Si es cierta la conjetura anterior, es claro que J_1 , J_2 , J_3 , J_4 y J_5 formarían parte de dicha lista.

Conclusiones

En esta tesis, desarrollamos resultados importantes respecto al número cromático transitivo de un torneo. Definimos el número cromático transitivo de un natural y lo determinamos para $n \leq 14$, apoyándonos en resultados del artículo [7]; además, dimos una cota inferior y una superior del número cromático transitivo de 2^n para todo entero n . Vimos también que existe una relación entre los conjuntos independientes y los transitivos de un torneo, que se da por medio de la digráfica de las flechas hacia atrás.

Trabajamos principalmente detallando los resultados y demostraciones del artículo [3], que abarca el concepto de héroe. Caracterizamos a los héroes a través de sus componentes fuertes y a los héroes fuertes mediante la trisección entre un héroe, un torneo transitivo y un vértice. La prueba del lema 3.3.3, resultado esencial en la prueba de este teorema, fue particularmente difícil de entender y redactar, debido a su complejidad y extensión. Con esta caracterización, pudimos demostrar dos más: la primera caracteriza a los héroes en función de cinco villanos mínimos que no contienen, mientras que la segunda determina que el concepto de héroe es equivalente al de celebridad, aunque el segundo de estos parecía más débil.

Finalmente, extendimos ciertos resultados a digráficas infinitas. Acotamos primero la cantidad de torneos transitivos y fuertes de cualquier orden. Luego, definimos los d -héroes y d -superhéroes; probamos que todo ciclo es un d -superhéroe y determinamos su número de superhéroe en función de su orden. Además, probamos que si una digráfica de orden cinco o seis no está contenida en un héroe de mismo orden, entonces es un d -villano; esto nos permitió probar que cinco digráficas particulares son d -villanos y propusimos a éstas como posibles d -villanos mínimos. Planteamos, en la parte final de esta tesis, varias preguntas abiertas respecto a estas extensiones, las cuales podrán quizás responderse en algún trabajo subsecuente.

Bibliografía

- [1] Babai, L. (1978). Infinite digraphs with given regular automorphism groups. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 25(1), 26-46.
- [2] Bang-Jensen, J., & Gutin, G. Z. (2009). *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer Publishing.
- [3] Berger, E., Choromanski, K., Chudnovsky, M., Fox, J., Loebel, M., Scott, A., Seymour, P., & Thomassé, S. (2013). Tournaments and colouring. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 103(1), 1-20.
- [4] Erdős, P. (1959). Graph Theory and Probability. *Canadian Journal of Mathematics*, 11, 34-38.
- [5] Erdős, P. & Rado, R. (1956). A partition calculus in set theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 62(5), 427-489.
- [6] Liu, G. (2011). Digraphs constructed by iterated substitution from a base set. *Junior Paper*, Princeton University.
- [7] Miranda Perea, F., Campero Arena, G. & Amor Montaña, J. A. (2014). *Teoría de conjuntos. Curso intermedio*. Las prensas de ciencias.
- [8] Neumann-Lara, V. (1982). The dichromatic number of a digraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 33(3), 265-270.
- [9] Neumann-Lara, V. (1994). The 3 and 4-dichromatic tournaments of minimum order. *Discrete Mathematics*, 135(1-3), 233-243.
- [10] Stearns, R. E. (1959). The Voting Problem. *American Mathematical Monthly*, 66(9), 761-763.

Glosario

(a, H, K) -joya y (a, H, K) -collar	79
Bosque y árbol	30
Camino hamiltoniano	22
Caminos numerables, exterior e interior	93
Celebridad	72
Cerradura transitiva de D , $CT(D)$	34
Clan, número de clan $\omega(D)$, semiclán y número de semiclán $\omega_s(D)$	33
Clase propias: OR y CAR	97
Concatenación del camino \mathcal{C} con el camino \mathcal{D} , $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$	20
Conjunto de cimas de uv , $C_T(uv)$, r -montaña, flecha r -pesada y (r, s) -clán	60
Conjunto homogéneo	89
Conjunto independiente	37
Conjunto transitivo	46
Conjuntos de vértices y flechas de D , $V(D)$ y $A(D)$	11
Contracción de G en D , D/G	18
Complemento de D , \overline{D}	17
Componente fuerte	28
Cuello de G , $g(G)$ y $h(k, l)$	55
$D - S$, $D + S$ y $D \cup G$	16
Digráfica unilateral	24
Digráfica acíclica	21
Digráfica completa K_n	31
Digráfica completa multipartita K_{k_1, \dots, k_n}	39
Digráfica de las componentes fuertes de D , $SC(D)$	29
Digráfica débilmente conexa	27
Digráfica fuertemente conexa o fuerte	26
Digráfica inversa de D , D^{-1}	17
Digráfica k -partita	39
Digráfica k -regular	14
Digráfica semicompleta	30
Digráfica transitiva	33
Digráficas isomorfas, $D \cong E$	19
Distancia de u a v , $d(u, v)$	94
d-héroe, número de d-héroe, d-superhéroe y número de d-superhéroe	101
d-villano	103

$\delta^+(D)$ y $\Delta^+(D)$: mínimo y máximo exgrado de D	14
$\delta^-(D)$ y $\Delta^-(D)$: mínimo y máximo ingrado de D	14
$\delta^0(D)$ y $\Delta^0(D)$: mínimo y máximo semigrado de D	14
Encaje	96
Exgrado e ingrado de v , $d^+(v)$, $d^-(v)$	12
Exvecindad e invecindad total de S , $A(S)$ y $B(S)$	62
Flecha hacia atrás y digráfica de las flechas hacia atrás	55
Flechas simétricas, digráfica simétrica y asimétrica	11
Fuente, pozo y vértice aislado	13
Funcional	97
Héroe y número de héroe $n(H)$	59
Isomorfismo entre COPOI, $X \sim Y$	96
k -coloración	37
k -coloración propia, digráfica k -coloreable y número cromático de D , $\chi(D)$	37
k -coloración transitiva, torneo k -coloreable-transitivo	46
Multidigráfica y pseudodigráfica	12
Número cromático transitivo de D , $\chi_t(D)$	46
Número cromático transitivo de n , $\chi_t(n)$	52
$N^+(S)$, $N^-(S)$ y $N(S)$: tipos de vecindades de S	12
$N^+(v)$, $N^-(v)$ y $N(v)$: tipos de vecindades de v	12
Orden parcial irreflexivo, COPOI, orden total, COTO y COBO	96
Paseo euleriano	23
Relaciones irreflexivas, asimétricas, totales y transitivas	96
S domina totalmente a T , $S \Rightarrow T$	47
Subcamino	22
Subcamino $\mathcal{C}[x_i, x_j]$ de \mathcal{C}	22
Subdigráficas de D , generadora e inducida por S , $D\langle S \rangle$	15
Superhéroe y número de superhéroe $s(H)$	93
Torneo	33
Torneo bueno	96
Torneo bueno T_α	97
Torneo fuerte T_α^*	98
Torneo transitivo T_n	45
Torneo transitivo $T_{\mathbb{Q}}$	94
Trayectoria P_n y ciclo C_n	30
Trisección $\Delta(A, B, C)$ de un torneo	47
$u \rightarrow v$	23
$u \sim v$	28
uv -camino \mathcal{C} y longitud de \mathcal{C} , $l(\mathcal{C})$	20
uv -paseo, uv -trayectoria, uv -camino cerrado y uv -ciclo	21
Vecindad r -pesada de v , $N_r(v)$	62
Villano	87