Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Ingeniería Civil

La geometría y trigonometría y su relación con la estática

Actividad de apoyo a la docencia

Que para obtener el título de Ingeniero Civil

PRESENTA:

José Pablo Salazar Pérez

Agradecimientos

A Dios por permitirme estar vivo y poder acompañarme en todo momento a lo largo de mi vida.

A mis padres Arturo y Rosa María por el apoyo, paciencia y comprensión que me brindaron durante toda mi formación académica. Por sus consejos y enseñanzas, los cuales han sido una gran motivación en mi vida, pero sobre todo por la confianza que me han brindado a lo largo de todos estos años.

A mis hermanos Keith y Alejandra por ser parte de mi inspiración y ser mi ejemplo de lucha, constancia y perseverancia.

A mis abuelos, tíos, primos y amigos por su cariño y motivación que siempre me han brindado a lo largo de mi vida.

A mi tutor principal Omar Ulises Morales Dávila por ayudarme en todo momento y brindarme siempre el apoyo que necesite para la realización de este trabajo.

A mis sínodos Dr. Raúl Pineda Olmedo, Mtro. Francisco Mejía Meza, Ing. Alan Kristoffer Benítez Angeles, Lic. Hagman Ramírez Reyes, por su buena voluntad, tiempo y dedicación para la realización óptima de este trabajo.

¡Muchas gracias!

Índice

Resumen:

En este trabajo de “actividad de apoyo a la docencia” se ha hecho una crítica y propuesta al programa de la asignatura “estática”; ya que estadísticamente es una asignatura con más alto índice de reprobación en la Universidad Nacional Autónoma de México, específicamente en la FES Acatlán, es importante precisar que ésta es la base de contenidos relacionados con otras asignaturas posteriores a lo largo de la licenciatura como: estructuras isostáticas, mecánica de materiales y/o análisis estructural, por lo que es fundamental atender las problemáticas que presenta al ser estudiada, ya que la complejidad de sus contenidos muchas veces no son comprendidos por los estudiantes, ello se refleja en la aplicación de problemas o ejercicios, por lo que también, se realizó un refuerzo con material didáctico, que integra apuntes y una serie de ejercicios, que exponen su procedimiento de resolución paso a paso, considerando las bases que tienen las asignaturas como geometría y trigonometría en problemas de aplicación en la asignatura analizada (estática), los estudiantes podrán observar la relación que hay entre la geometría y trigonometría y su aplicación en la estática, para que puedan relacionar los contenidos de las asignaturas ya estudiadas y su relación o aplicación que llega a reconocerse en la vida diaria a través de la resolución de problemas. El trabajo se integra de una introducción general y cuatro capítulos que consisten en:

Introducción. Presentación de la temática y relevancia. Se aborda la importancia de las matemáticas y lo indispensable que son en la vida diaria.

Capítulo I. Problemática general en la enseñanza de las matemáticas. Se aborda la problemática general en la enseñanza de las matemáticas, datos estadísticos del bajo rendimiento en materias como geometría euclidiana y trigonometría en el colegio de bachilleres plantel 5, y en la materia de estática en la FES Acatlán, así como las consideraciones para la mejora de éstas en la UNAM.

Capítulo II. Propuestas de estrategias didácticas. Se aborda el tema de las propuestas y/o estratégicas didácticas, consideraciones personales, así como los argumentos en los cuales parte el diseño de la estrategia didáctica, para un mejor aprendizaje para los estudiantes en la rama de las matemáticas.

Capítulo III. Algunas aplicaciones de la geometría y trigonometría en mi experiencia laboral. Se aborda la importancia de la geometría y trigonometría, así como algunas aplicaciones en mi experiencia laboral.

Capítulo IV. Material didáctico de apuntes de trigonometría y geometría, así como algunas de sus aplicaciones a la estática. Se presenta un material didáctico “apuntes” recopilando los temas más importantes en la geometría y trigonometría en una serie de ejercicios, y algunas aplicaciones en la materia de “estática”.

En los capítulos se expone el aprendizaje de las matemáticas de lo general a lo particular, ya que se ha estudiado en asignaturas previas, con la intención de poder aplicar lo aprendido en asignaturas con mayor complejidad, como lo es “la estática”; se considera como eje de la investigación el contexto áulico, porque éste determina las propuestas y estrategias didácticas para mejorar la enseñanza de las matemáticas en la geometría y trigonometría y en el último capítulo se retoman temas de la asignatura de trigonometría y geometría a través de una serie de apuntes y ejercicios para fortalecer el aprendizaje.

Objetivo:

Realizar una propuesta didáctica con base en una crítica personal, para mejorar la enseñanza de la estática, y así evitar altos índices de reprobación y bajo rendimiento de algunos estudiantes, a través de material didáctico que facilite su aprendizaje en asignaturas base y puedan aplicar lo aprendido en asignaturas posteriores a ésta, como estructuras isostáticas y/o mecánica de materiales.

Introducción:

Presentación de la temática y relevancia

En el presente trabajo se muestra el interés por mejorar los esquemas y estándares actuales de enseñanza y aprendizaje para ofrecer una visión generalizada de la educación matemática, especialmente en el enfoque de la geometría y trigonometría, por lo que es importante considerar la actualización de contenidos, tales como planes y programas de estudio con el enfoque académico y administrativo para poder cubrir las necesidades del desarrollo en la educación de los estudiantes; centrándose en temas relacionados con la geometría euclidiana, analítica y trigonometría, a través de sus aplicaciones en la ingeniería por lo que se presenta en cuatro capítulos cada uno de ellos se complementa para hacerlo más comprensible.

A lo largo de nuestra vida, los padres de familia nos han inculcado el valor de la educación en las matemáticas, ya que es una de las herramientas más importantes en nuestro futuro inmediato no sólo en la vida cotidiana sino en la académica, sin embargo, no siempre se ha tenido una formación de calidad en algunas instituciones de enseñanza, primordialmente en secundaria y medio superior, por mencionar algunos ejemplos, los altos índices de rechazados en los exámenes de ingreso a las universidades públicas, por lo que surge la necesidad de abordar el tema e identificar los puntos críticos sobre el valor de la educación en nuestro país, para poder mejorar la formación y educación en matemáticas, sin omitir la importancia que tiene ésta en la vida cotidiana, en el hogar y de forma general en la familia para proporcionar los principios y hábitos de estudio de los padres a sus hijos con la intención de inculcarlos desde la niñez al hábito del estudio no sólo de las matemáticas sino de cualquier otra asignatura, para fortalecer la educación escolar.

En la actualidad muchos estudiantes presentan dificultades para estudiar y comprender los contenidos que se desarrollan en las asignaturas relacionadas con las matemáticas así como su aplicación, por lo que ejercitarla se complica aún más; considero que el factor determinante es porque no se le ha dado el enfoque adecuado que requiere esta ciencia así como una educación de calidad con base en el compromiso de los docentes que la imparten al comprender lo que se enseñará y la profundización de los contenidos para una mejor enseñanza de esta ciencia. El impacto que tiene el estudio y aplicación de las matemáticas en la vida diaria de los seres humanos es fundamental, por lo que es necesario analizar y adecuar su aprendizaje a través de la mejora de los esquemas de enseñanza y aprendizaje desde niveles básicos hasta superiores, mediante técnicas y estrategias para fortalecer el desarrollo de los individuos en una sociedad competitiva, por lo que en este trabajo se presenta una propuesta para mejorar la enseñanza de las matemáticas mediante estrategias didácticas que faciliten la mejora del aprendizaje, la calidad y pertinencia de la formación de los estudiantes que aspiren a la educación superior especialmente con los estudiantes de área 1 (Físico-Matemáticas).

1. Capítulo I. Problemática general en la enseñanza de las matemáticas

En mi experiencia como docente en una institución incorporada a la SEP, el Colegio de Bachilleres Plantel 5 “Satélite”; así como profesor particular de matemáticas y en el ámbito empresarial como capacitador, y experiencias con colegas que han compartido conmigo, a partir de muchas anécdotas a lo largo de su profesión como docentes, pude identificar la falta de interés en la mayoría de los estudiantes al querer aprender matemáticas, ya que la mayoría no le dan la importancia que requiere una de las disciplinas eje en su desarrollo académico, y que será de utilidad no sólo en su vida académica sino también laboral e incluso personal, este desinterés probablemente se deba a la forma en cómo se está enseñando la disciplina, no logran significar el conocimiento, ya que parece no se les enseña de forma práctica, didáctica o lúdica, lo que propicia que la mayoría de los estudiantes conciban a las matemáticas como la asignatura más difícil de comprender por lo que se concentran en las otras asignaturas que según ellos son más fáciles de comprender.

Quiero retomar dos frases muy significativas que merecen ser mencionadas, ya que permiten reconocer la importancia del estudio y de las matemáticas no sólo en nuestra vida académica: *“Nunca consideres al estudio como una obligación sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber” (Albert Einstein) “Para aquellos que no conocen las matemáticas, es difícil sentir la belleza, la profunda belleza de la naturaleza… Si quieres aprender sobre la naturaleza, es necesario aprender el lenguaje en el que habla” (Richard Feynman, 1965).*

Los estudiantes que aspiran ingresar a una licenciatura, deben considerar que el enfoque de las matemáticas es más práctico que hace años, lo que ha propiciado que la significatividad en su estudio por lo que deben poseer los conocimientos primordiales como base para continuar su aprendizaje, desafortunadamente a lo largo de los años se han ido modificando y paulatinamente olvidando, esta base sólida en el aprendizaje de las matemáticas es fundamental y de vital importancia para evitar futuros problemas en el aprendizaje de todas las asignaturas que integran la ciencia de las matemáticas superiores o universitarias. Ellos deben reconocer que los conocimientos básicos son fundamentales para continuar sus estudios, y éstos no volverán a ser enseñados, ya que se considera los poseen y son la base para continuar su estudio.

Es importante precisar que para estudiar una licenciatura o ingeniería, obviamente que implica el estudio de las matemáticas, se deben poseer ciertas habilidades que permitan entender, plantear y resolver problemas en situaciones de toda índole así como de hechos que pueden ser concretos o abstractos; lo que implica ejercitar las habilidades intelectuales, ya que se deben plantear y resolver problemas de diferentes tipos, tales como: aritméticos, series numéricas, secuencias lógicas, etcétera, a través de aprender a observar detalladamente se podrán reconocer si existen otras rutas de solución y no sólo una, de igual forma la reflexión sobre los problemas y operaciones a resolver debe promover el planteamiento de nuevas hipótesis para acercarse a nuevos conocimientos que favorezcan el desarrollo del aprendizaje, habilidades y competencias intelectuales; atendiendo estas recomendaciones se podría promover una enseñanza efectiva de las matemáticas, con base en el razonamiento de los conocimientos previos para poder adquirir, asimilar y ejercitar los nuevos a partir de la experiencia no sólo en el aula. El razonamiento es una habilidad que se desarrolla para la resolución de problemas apoyándose en herramientas matemáticas; en la vida cotidiana continuamente se presentan problemáticas en las que se debe: aprender, razonar y reflexionar para la solución de éstas por lo que es fundamental adquirir y poseer conocimientos académicos, y trasladarlos a contextos diferentes para atender lo que la sociedad requiere.

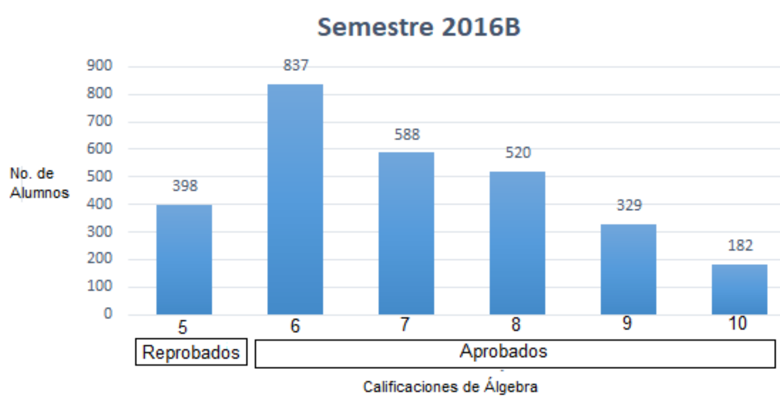
1.1 Argumentación basada en estadísticas

Con base en lo expuesto realice una investigación con estudiantes de nivel medio superior, en el Colegio de Bachilleres plantel 5 "Satélite"; enfocada al rendimiento de asignaturas básicas que se imparten en la institución e integran la ciencia de las matemáticas, como lo son: álgebra, geometría analítica y posteriormente un enfoque en la geometría euclidiana, trigonometría y cálculo; se expone información que los estudiantes han obtenido en el estudio de dichas asignaturas durante los semestres que integran los años: 2016, 2017 y 2018 así como el comparativo con los años mediante gráficas, para reconocer la problemática que se presenta en la enseñanza de las matemáticas y el rendimiento de los estudiantes.

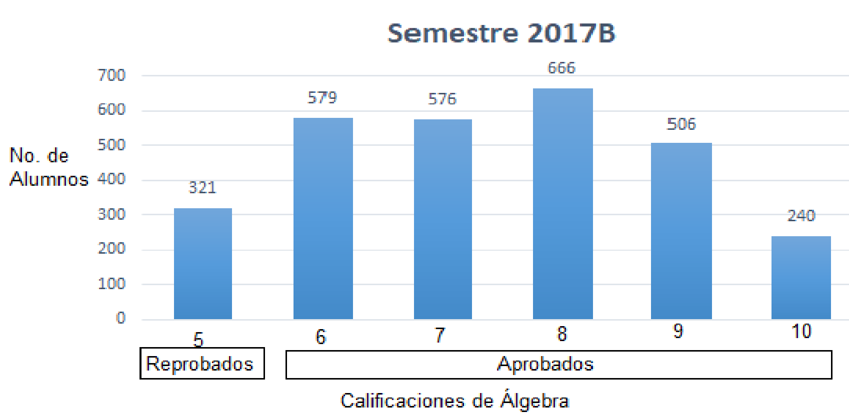
La información que presentan las gráficas, me permitió reflexionar sobre las necesidades y áreas de oportunidad que se deben atender, primordialmente, a través, de: mejorar la calidad de enseñanza en las matemáticas, actualizar planes de estudio, crear cursos de regularización o talleres en los que se atiendan y resuelvan las dudas de los estudiantes, ya que como se observa en los datos duros, una tercera parte del total de los estudiantes muestra, está reprobada o tiene calificación de 6 en las asignaturas analizadas, para ello se exponen algunas gráficas que muestran lo ya citado.

Calificaciones de la asignatura de Álgebra.

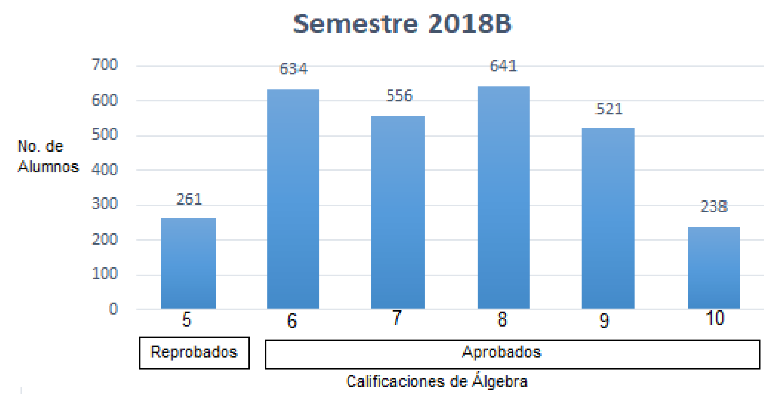
De 2854 estudiantes del semestre 2016B, 398 estudiantes reprobaron y 837 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 43% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.



De 2888 estudiantes del semestre 2017B, 321 estudiantes reprobaron y 579 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 31% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.

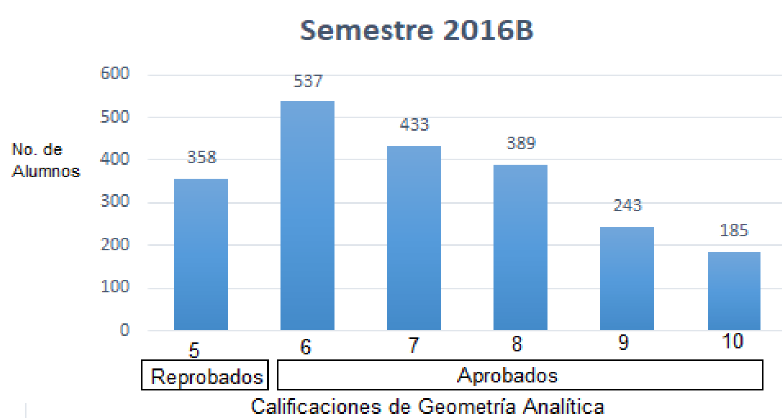


De 2851 estudiantes del semestre 2018B, 261 estudiantes reprobaron y 634 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 31% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.

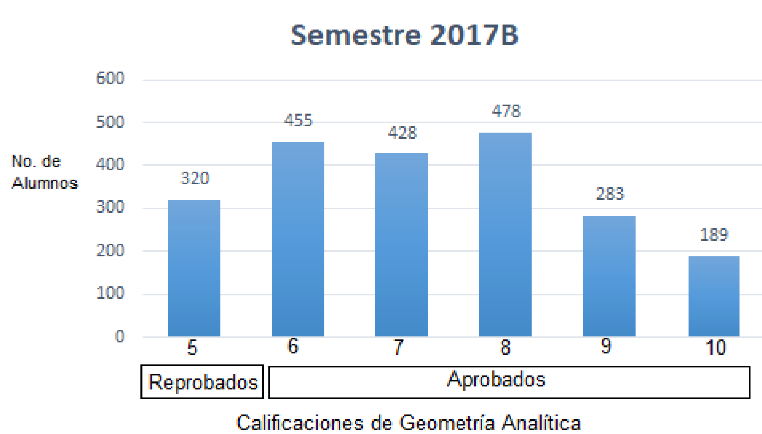


Calificaciones de la asignatura de Geometría Analítica.

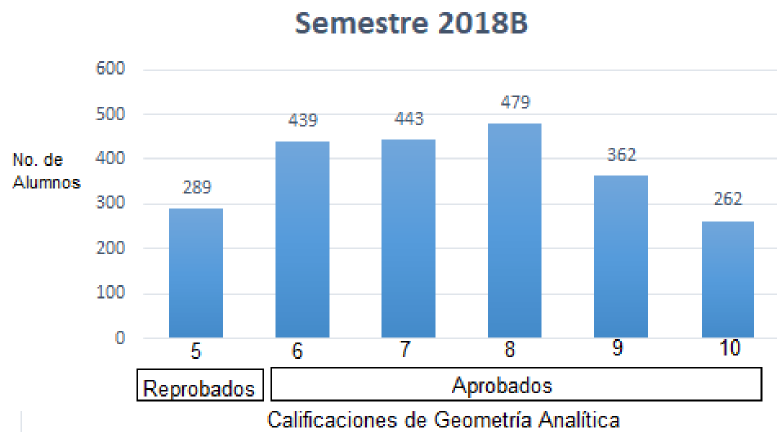
De 2145 estudiantes del semestre 2016B, 358 estudiantes reprobaron y 537 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 42% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.



De 2153 estudiantes del semestre 2017B, 320 estudiantes reprobaron y 455 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 36% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.

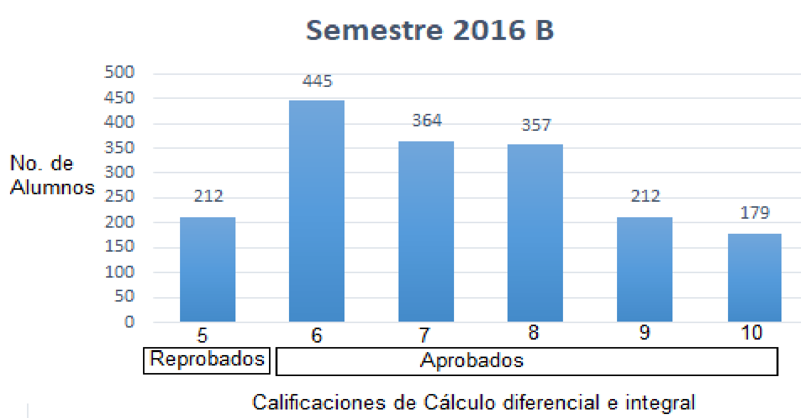


De 2274 estudiantes del semestre 2018B, 289 estudiantes reprobaron y 439 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 32% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.

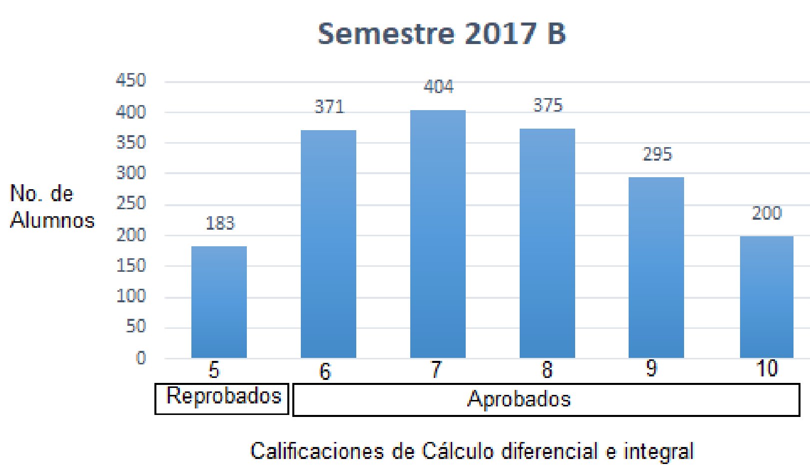


Calificaciones de la materia de Cálculo diferencial e integral.

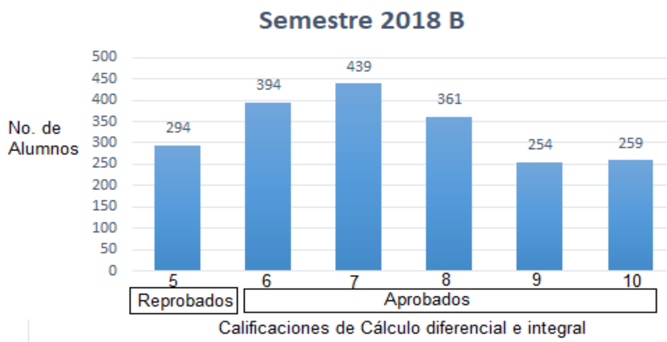
De 1769 estudiantes del semestre 2016B, 212 estudiantes reprobaron y 445 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 37% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.



De 1828 estudiantes del semestre 2017B, 183 estudiantes reprobaron y 371 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 30% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.



De 2001 estudiantes del semestre 2018B, 294 estudiantes reprobaron y 394 obtuvieron 6 de calificación esto equivale al 35% del total de estudiantes que tienen calificación reprobatoria o 6 de calificación.



A continuación, se muestran algunos temas de las asignaturas antes citadas:

Eje	Componente	Contenido central
Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.	Patrones, simbolización y generalización: Elementos del Álgebra básica.	-Uso de las variables y las expresiones algebraicas. -Usos de los números y sus propiedades. -Conceptos básicos del lenguaje algebraico. -De los patrones numéricos a la simbolización algebraica. -Sucesiones y series numéricas. -Variación lineal como introducción a la relación funcional. -Variación proporcional. -Tratamiento de lo lineal y lo no lineal (normalmente cuadrático). -El trabajo simbólico. -Representación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
Del tratamiento del espacio, la forma y la medida, a los pensamientos geométrico y trigonométrico.	Estructura y transformación: Elementos básicos de Geometría.	-Conceptos fundamentales del espacio y la forma, "lo geométrico". -El estudio de las figuras geométricas y sus propiedades. -Tratamiento de las fórmulas geométricas para áreas y volúmenes. -Tratamiento visual de las propiedades geométricas, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.
	Trazado y *angularidad*: Elementos de la Trigonometría plana.	-Conceptos básicos de lo trigonométrico. -Usos y funciones de las relaciones trigonométricas en el triángulo. -Funciones trigonométricas y sus propiedades. -Medidas de ángulos y relaciones trigonométricas. -Del círculo unitario al plano cartesiano. Una introducción de las razones de magnitudes a las funciones reales.
Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico	Sistema de referencia y localización: Elementos de Geometría analítica	-La Geometría analítica como método algebraico para la resolución de tareas geométricas. El tratamiento en diversos sistemas de coordenadas. -Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano. El papel del origen de coordenadas en los sistemas de referencia. -Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos: recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. -Tratamiento visual y representaciones múltiples de los lugares geométricos: coordenadas rectangulares y paramétricas, puntos singulares, raíces y comportamiento asintótico.
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: Elementos del Cálculo.	-Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición. -Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales. -Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales. -Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites. -Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales. -Graficación de funciones por diversos métodos. -Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función.

Eje	Componente	Contenido central
		-Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y acumulación: Elementos del Cálculo integral.	-Aproximación y cálculo del "área bajo la curva" por métodos elementales (método de los rectángulos y métodos de los trapecios). -Antiderivada de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).

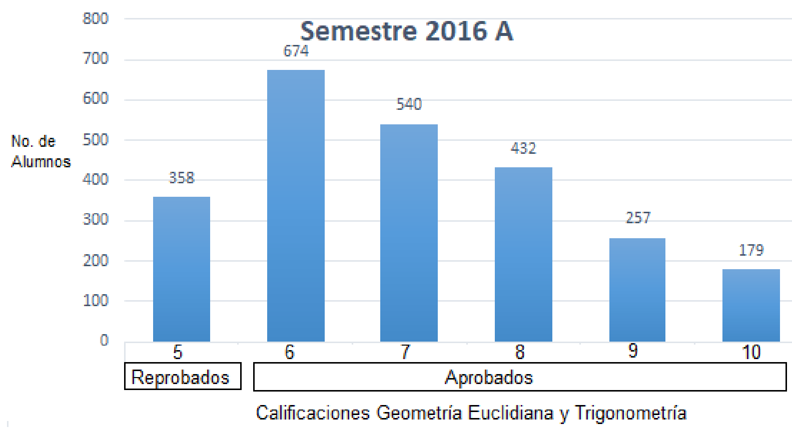
https://cbgobmx.cbachilleres.edu.mx/que-hacemos/Programas_de_estudio_vigentes/1er_semestre/Basica/04_Matematicas_I.pdf

1.2 Problemática en la enseñanza y enfoque a la geometría y trigonometría.

Con base en mi experiencia como docente, la mayoría de los estudiantes no entendían bien las matemáticas y no necesariamente porque se les dificultará, sino porque algunas veces el profesor no les motivaba, o no le da la debida importancia a lo que realmente se llega a utilizar o a aplicar en la vida profesional o laboral, el profesor en algunos casos no despierta el interés del alumno para promover el razonamiento de cada tema que integran los programas de estudio, ni mucho menos se les da una demostración más práctica de su uso y relación con las demás disciplinas que se estudian en este nivel y no logran trasladarlo a su vida cotidiana; para poder reconocerlo se expone una muestra del porcentaje de los estudiantes y su rendimiento, específicamente en las asignaturas de: geometría y trigonometría durante los últimos años de estudio y en los que se puede apreciar los altibajos en cuanto a su desempeño escolar.

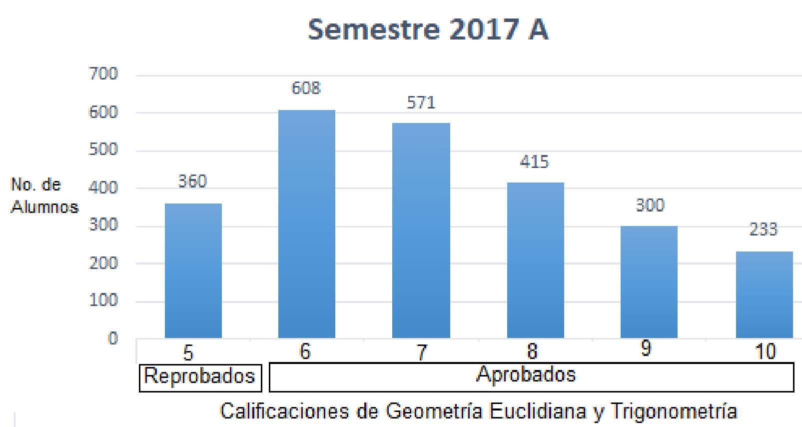
De 2440 estudiantes del semestre 2016-A

358 reprobaron
674 obtuvieron 6 de calificación
540 obtuvieron 7 de calificación
432 obtuvieron 8 de calificación
257 obtuvieron 9 de calificación
179 obtuvieron 10 de calificación
43% del total están reprobados o tienen 6 de calificación.



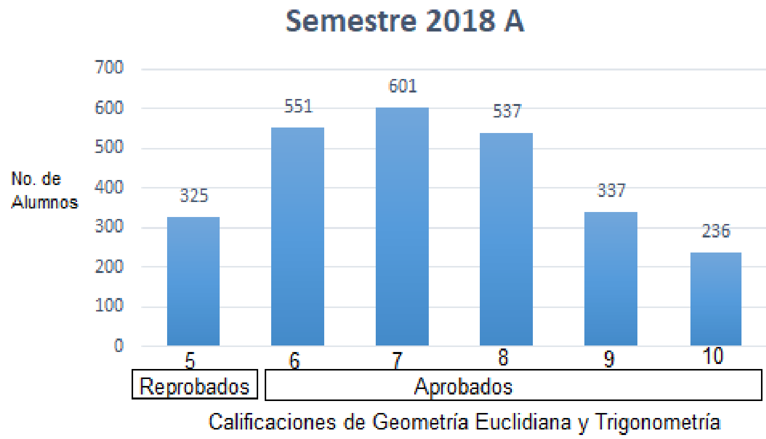
De 2487 estudiantes del semestre 2017-A

360 reprobaron
608 obtuvieron 6 de calificación
571 obtuvieron 7 de calificación
415 obtuvieron 8 de calificación
300 obtuvieron 9 de calificación
233 obtuvieron 10 de calificación
39% del total están reprobados o tienen 6 de calificación.



De 2587 estudiantes del semestre 2018-A

325 reprobaron
551 obtuvieron 6 de calificación
601 obtuvieron 7 de calificación
537 obtuvieron 8 de calificación
337 obtuvieron 9 de calificación
236 obtuvieron 10 de calificación
34% del total están reprobados o tienen 6 de calificación.



En mi experiencia como docente o profesor adjunto en una Institución incorporada a la SEP, pude darme cuenta que la mayoría de los estudiantes tenían problemas desde temas básicos como la aritmética o álgebra, por lo que la mayoría de los profesores se ven en la necesidad de trabajar más, en cuanto a la revisión de temas primordiales básicos como es el caso álgebra o aritmética, así como la comprensión y desarrollo de esas asignaturas para poder seguir con temas posteriores como: geometría, geometría analítica, funciones, cálculo, etcétera. Ello afecta a largo plazo tanto a los estudiantes como a los docentes, ya que la mayoría de los docentes dan por hecho y consideran que los estudiantes poseen los conocimientos básicos sobre la ciencia de las matemáticas, desafortunadamente no siempre es así, por lo que continuamente impacta en la reprobación de las asignaturas, pues no poseen las bases sólidas para orientarse en materas posteriores, y por qué los docentes no se enfocan en reconocer que los estudiantes tienen fallas en temas primordiales y básicos de las matemáticas como lo es el álgebra o la geometría para poder continuar con la enseñanza de las asignaturas que se están cursando, pude apreciar también que muchos estudiantes no le daban la importancia que merecían y su desinterés era mayúsculo, por lo que me asigne la tarea de motivarlos a través de ejercicios atractivos y significativos, que me permitieron inculcarles el hábito del estudio, ya que con base en éstos logré despertar su interés en el estudio de las asignaturas.

Considero que un factor determinante que ya he citado previamente, el cual es promover en los estudiantes el interés o motivación para que ellos despierten su dedicación y comprendan adecuadamente los nuevos conocimientos a través de su dedicación, práctica continua, inversión de tiempo al estudio no sólo de las matemáticas sino de todas las asignaturas para fortalecer su aprendizaje y lograr sus objetivos. Como dato adicional muchos de los alumnos de nuevo ingreso a nivel licenciatura en la UNAM provienen de otras instituciones que no pertenecen a esta, como Colegio de Bachilleres, CETIS, etc , por lo que es importante tomar en cuenta su nivel académico desde el nivel medio superior, así como centralizar en temas o asignaturas cuyas instituciones no impartieron en la formación del alumno para su educación superior.

A continuación, se observan una serie de graficas de la materia de estática, partiendo de algunos semestres consecutivos y cuyos datos estadísticos fueron investigados y proporcionados en la coordinación del área de ingeniería civil de la FES Acatlán y donde nos muestran algunas de las deficiencias y altos índices de reprobación de dicha asignatura a lo largo de 8 semestres, lo que demuestra estadísticamente, los altos índices de reprobación y deserción en la materia de estática a nivel licenciatura:

1.3 Datos estadísticos del bajo rendimiento en la materia de estática

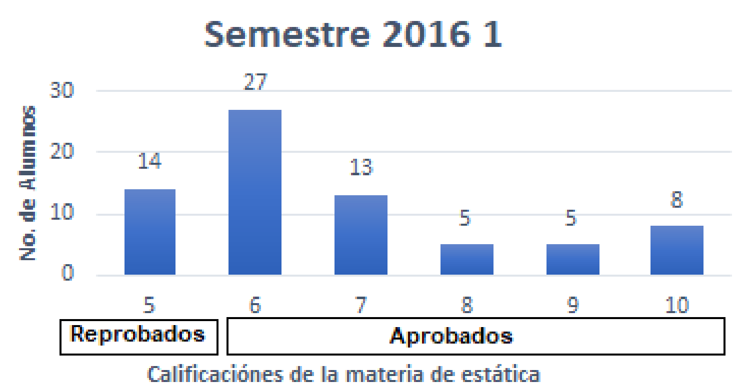
MATERIA		TOTALES							
Cve	Nombre	Inscritos	10	9	8	7	6	5	NP
1218	ESTATICA	83	8	5	5	13	27	14	11

De 83 estudiantes inscritos en el semestre 2016-1

14 reprobaron
27 obtuvieron 6 de calificación
13 obtuvieron 7 de calificación
5 obtuvieron 8 de calificación
5 obtuvieron 9 de calificación
8 obtuvieron 10 de calificación
11 no se presentaron
62% del total están reprobados, tienen 6 de calificación, o no se presentaron más a la materia.

Aprobados: 70%

Reprobados: 30%



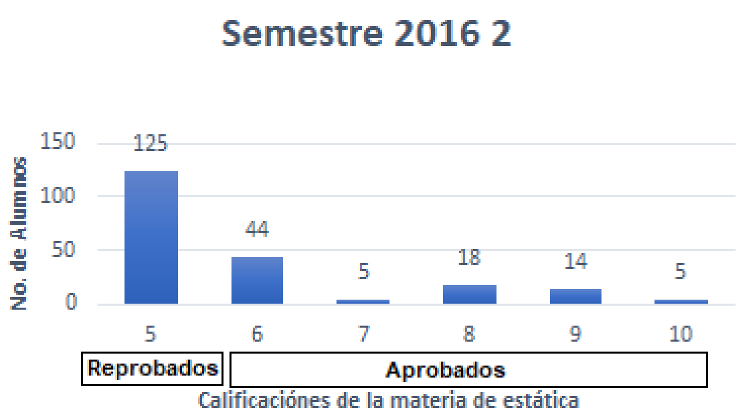
MATERIA		TOTALES							
Cve	Nombre	Inscritos	10	9	8	7	6	5	NP
1218	ESTATICA	257	5	14	18	5	44	125	46

De 257 estudiantes inscritos en el semestre 2016-2

125 reprobaron
44 obtuvieron 6 de calificación
5 obtuvieron 7 de calificación
18 obtuvieron 8 de calificación
14 obtuvieron 9 de calificación
5 obtuvieron 10 de calificación
46 no se presentaron
84% del total están reprobados, tienen 6 de calificación, o no se presentaron más a la materia.

Aprobados: 33%

Reprobados: 67%



MATERIA		TOTALES							
Cve	Nombre	Inscritos	10	9	8	7	6	5	NP
1218	ESTATICA	89	3	8	14	17	22	19	6

De 89 estudiantes inscritos en el semestre 2017-1

19 reprobaron
22 obtuvieron 6 de calificación
17 obtuvieron 7 de calificación
14 obtuvieron 8 de calificación
8 obtuvieron 9 de calificación
3 obtuvieron 10 de calificación
6 no se presentaron

53% del total están reprobados, tienen 6 de calificación, o no se presentaron más a la materia.

Aprobados: 72%

Reprobados: 28%

MATERIA		TOTALES							
Cve	Nombre	Inscritos	10	9	8	7	6	5	NP
1218	ESTATICA	280	10	13	12	23	41	139	42

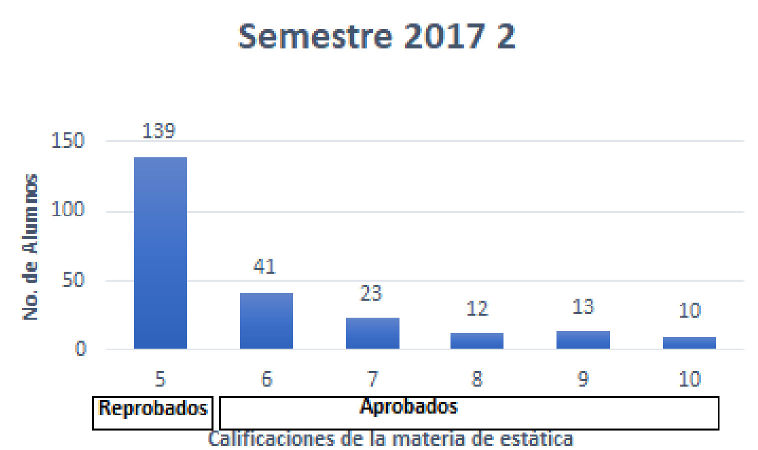
De 280 estudiantes inscritos en el semestre 2017-2

139 reprobaron
41 obtuvieron 6 de calificación
23 obtuvieron 7 de calificación
12 obtuvieron 8 de calificación
13 obtuvieron 9 de calificación
10 obtuvieron 10 de calificación
42 no se presentaron

79% del total están reprobados, tienen 6 de calificación, o no se presentaron más a la materia.

Aprobados: 35%

Reprobados: 65%



M A T E R I A		T O T A L E S							
Cve	N o m b r e	Inscritos	10	9	8	7	6	5	NP
1218	ESTATICA	107	0	3	9	22	31	37	5

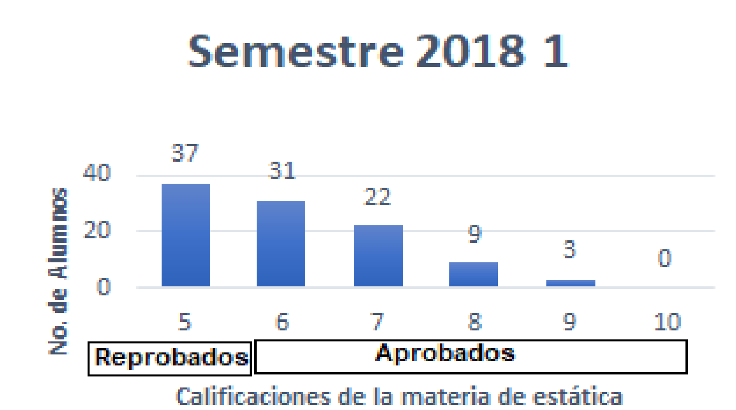
De 107 estudiantes inscritos en el semestre 2018-1

37 reprobaron
31 obtuvieron 6 de calificación
22 obtuvieron 7 de calificación
9 obtuvieron 8 de calificación
3 obtuvieron 9 de calificación
0 obtuvieron 10 de calificación
5 no se presentaron

68% del total están reprobados, tienen 6 de calificación, o no se presentaron más a la materia.

Aprobados: 61%

Reprobados: 39%



M A T E R I A		T O T A L E S							
Cve	N o m b r e	Inscritos	10	9	8	7	6	5	NP
1218	ESTATICA	263	5	8	19	22	28	128	53

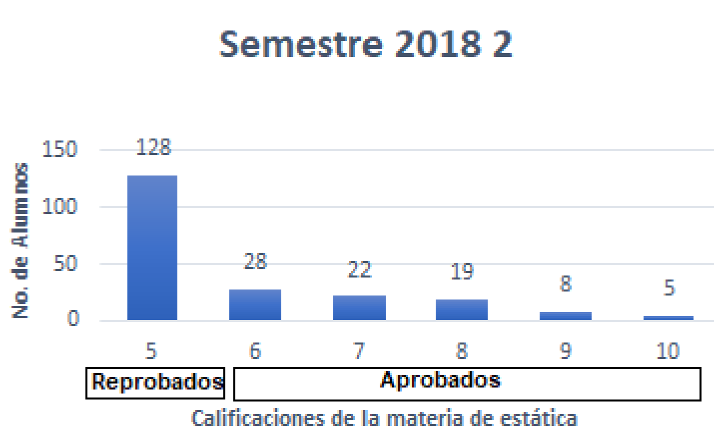
De 263 estudiantes inscritos en el semestre 2018-2

128 reprobaron
28 obtuvieron 6 de calificación
22 obtuvieron 7 de calificación
19 obtuvieron 8 de calificación
8 obtuvieron 9 de calificación
5 obtuvieron 10 de calificación
53 no se presentaron

79% del total están reprobados, tienen 6 de calificación, o no se presentaron más a la materia.

Aprobados: 31%

Reprobados: 69%



1.4 Consideraciones para mejorar la calidad de enseñanza de las matemáticas en la UNAM.

La Universidad Nacional Autónoma de México es una Universidad Pública y como su nombre lo indica es autónoma, y considerada una de las mejores universidades de América Latina debido al trabajo académico que se realiza; es la universidad más grande del país y con uno de los campus más grandes del mundo, ha sido considerada una de las más activas en materia artística y tecnológica. La construcción de su campus principal se encuentra al sur de la Ciudad de México, mejor conocido como Ciudad Universitaria (CU) y en 2007, su campus central fue declarado Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO, tiene como objetivo:

> *"Consolidar un óptimo manejo de la información, dentro de la Administración Escolar de la UNAM, que vaya de acuerdo con la tecnología de vanguardia para lograr un conjunto de información confiable y consistente, producto de la coordinación de todos los elementos de la organización, además de una simplificación y unificación de procesos para apoyar las necesidades y evolución académica de la población estudiantil y de la Universidad a partir del marco legal vigente que establece la Legislación Universitaria"* ((https://www.dgae-siae.unam.mx/acerca/objetivo.html (DGAE-SIAE UNAM, s.f.)

Uno de los objetivos principales de este trabajo es promover y ejercitar en los estudiantes el desarrollo de sus habilidades y competencias en la ciencia de las matemáticas a través de la geometría y trigonometría con base en material didáctico que permita razonar y comprender sus contenidos en el nivel medio superior y superior a los estudiantes que deseen cursar alguna ingeniería, que requiera de conocimientos relacionados con la Mecánica Vectorial, ya que ésta requiere de conocimientos y estudios básicos en asignaturas como la geometría y trigonometría para reforzar los nuevos aprendizajes y facilitar la comprensión de contenidos más complejos en asignaturas como la estática. Es fundamental precisar que en la enseñanza de las matemáticas se debe promover el desarrollo del razonamiento, deducción y demostración, para solucionar problemas de la vida académica y cotidiana, por lo que los estudiantes deben comprometerse a reconocer que en el estudio y formación de las asignaturas que integran esta ciencia deberán reconocer, ejercitar y fortalecer sus: habilidades, destrezas, competencias para adquirir y apropiarse de los conocimientos con base en sus capacidades, perseverancia e inventiva.

El bachillerato que se cursa en la UNAM promueve en sus estudiantes aspectos fundamentales para comprender el contenido de sus programas en las diferentes asignaturas que integran la ciencia de las matemáticas y que se cursan no sólo en el nivel medio superior sino también en el superior, de igual forma promueve la cultura de las matemáticas, no sólo para su formación sino para otras asignaturas y situaciones en las que se requiera del conocimiento matemático.

Algunos aspectos fundamentales que se consideran en la cultura matemática son:

- *El desarrollo del pensamiento matemático del razonamiento lógico-deductivo.*
- *La comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales (aritméticos, algebraicos, geométricos. Probabilísticos y de cálculo).*
- *Reconocimiento de los factores que inciden en el desarrollo de las matemáticas.*
- *El desarrollo de habilidades para la resolución de problemas dentro y fuera del ámbito matemático.*

- *Destreza en el uso de las herramientas tecnológicas para facilitar la resolución de problemas y la adquisición de conocimiento.*
- *Fomento de valores (como responsabilidad, respeto, tolerancia, cooperación y solidaridad) que apoyen el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática.* (Abreu León, Benitez Pérez, Bracho Carpizo, Bracho Carpizo, & Canabal Cáceres, 2014, pág. 33)

Para lograr una mejora en la cultura matemática es importante considerar los siguientes aspectos:

- La determinación del aprendizaje y consecución de las técnicas en relación con la práctica e invención. El aprendizaje responsabiliza una modificación de actitudes como el interés mismo y nexo con la meta del conocimiento.
- Proyectar con base en el estudio y educación del desarrollo de aprendizaje de los estudiantes para orientarlos a un objetivo definido.
- Prestar la debida atención a los estudiantes en su aprendizaje y adquisición de conocimientos previos, para poder conocer los puntos más destacables a considerar en ellos y poder reforzarlos de manera adecuada por parte del docente.
- Tener un amplio panorama para poder identificar problemas de la vida diaria y así poder solucionarlos en el aula.
- Favorecer y apoyar el trabajo en conjunto para poder promover las habilidades, argumentar una mejor formación por parte de los estudiantes tanto en el aula, como fuera de ella.
- Incluir el uso de materiales o dispositivos tecnológicos que beneficien el proceso de aprendizaje y la demostración de aspectos matemáticos mediante algún software.
- Estimar la evaluación al docente y al estudiante para determinar los estándares en los procesos de enseñanza y obtener los datos necesarios que den certidumbre, seguridad para realimentar el aprendizaje individual a lo largo de su formación académica.

Para lograr este objetivo, se sugiere que los docentes adquieran una visión de enseñanza de las matemáticas que contemple los siguientes aspectos:

- Clases y pequeños grupos de estudios en comunidades matemáticas.
- Comprobación lógica y matemática de los resultados frente a la visión del docente.
- El razonamiento matemático, por encima de los métodos de memorización.
- La invención y resolución de problemas matemáticos, así como sus aplicaciones en la vida cotidiana.
- El acoplamiento de ideas matemáticas y sus aplicaciones no como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

Objetivos y plan de acción del apoyo tutorial (Ramírez, 2019)**.**

Objetivos	**Plan de acción**	**Orientación**
Inducir al alumno a la vida universitaria.	1.- Organización del tiempo. 2.- Hábitos de estudio. 3.- Orientación e información a los alumnos sobre programas de apoyo en la facultad.	Impartir platicas a los alumnos sobre los hábitos de estudio, estrategias, etc, impartición de fuentes de información, libros, etc.
Identificar perfil de ingreso del alumno.	1.- Exámenes de conocimiento para detectar deficiencias en los alumnos. 2.- Identificar los temas	Realización de encuestas a los alumnos para saber los temas que más se les dificultan, partiendo de exámenes diagnósticos para identificar sus áreas de oportunidad.
Atender deficiencias académicas del alumnado.	1.- Impartir asesorías durante cada semestre. 2.- Fomentar un equipo de tutores que estén disponibles para los alumnos.	Solicitar a la coordinación de la carrera de ingeniería una relación con los nombres de los profesores, horarios lugar y materia en las que den asesorías.
Fortalecer habilidades de los alumnos.	1.- Estrategias de aprendizaje. 2.- Hábitos de estudio.	Armar grupos de estudios entre los alumnos, fomentarlos al estudio diario.
Brindar apoyo a los alumnos para complementar su formación integral.	1.- Actividades extracurriculares. 2.- Servicio social dentro de la facultad o en alguna empresa para adentrarlos al mundo laboral.	Brindar capacitación para la elaboración de un curriculum vitae, entrevista de trabajo y búsqueda de ofertas laborales.

2. Capítulo II. Propuestas de estrategias didácticas.

2.1 Enfoque para la geometría y trigonometría

Al realizar las actividades correspondientes de la investigación y propuestas, éstas se centran en comprender y entender los conceptos teóricos y demostraciones prácticas a través de los ejercicios correspondientes, para reconocer y definir las habilidades básicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la geometría, por lo que nos enfocaremos en las siguientes:

- Habilidades de visualización
- Habilidades de razonamiento
- Habilidades de aplicación

Para desarrollar las **habilidades de visualización**, debemos considerar que la geometría euclidiana y la trigonometría es una asignatura que primordialmente se aprende de forma visual, ya que la mayoría de los conceptos geométricos son comprendidos a través de esquemas o figuras, ejemplo de ello: los triángulos, líneas rectas, ángulos de todo tipo, etcétera, la identificación y reconocimiento de éstas permite que los estudiantes perciban de una manera más significativa a través de la vista conceptos más claros y fáciles de relacionar para ellos.

Es preciso señalar que los estudiantes deben enfrentar y resolver diferentes situaciones en las que el entendimiento y sus habilidades de razonamiento adquieren un sentido más amplio para ellos, lo que propicia el desarrollo de sus capacidades para analizar y utilizar estrategias metodológicas que promuevan un enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias.

En el desarrollo de las **habilidades de razonamiento,** se debe enfatizar que para aprender la ciencia de las matemáticas se debe apelar el desarrollo de razonamientos, los estudiantes deben aprender a razonar, a través de:

- La idealización de características o propiedades de conceptos geométricos.
- La realización de hipótesis sobre teoremas, así como su debida demostración.
- La demostración de la inexactitud de algunas hipótesis.
- La importancia de saber cuándo es lógico o no un razonamiento matemático.
- Redactar conclusiones lógicas.

De igual forma deben reconocer que las demostraciones de la geometría son deductivas, ya que la mayoría de las propiedades se demuestran en torno a otras ya establecidas, para ser demostradas como verdaderas; por lo que se debe plantear y reforzar la parte del razonamiento lógico–matemático en distintas ramas del pensamiento matemático, no solamente en la geometría, con base en ese ejercicio los estudiantes tendrán un panorama más general en cuanto a su visión y desarrollo de competencias matemáticas.

Con relación al desarrollo de las **habilidades de aplicación**, es fundamental precisar que el objetivo de éstas es que los estudiantes puedan aplicar lo aprendido a la resolución de problemas de geometría, así como el análisis y modelos de situaciones del mundo físico, esto es muy común en los estudios superiores, porque los estudiantes tienen que aprender a relacionar y razonar los nuevos conocimientos adquiridos, en las todos las asignaturas, como: aritmética, álgebra, geometría y cálculo para aplicarlos a problemas de la vida real. Se puede reconocer que la mayoría de las veces que los estudiantes comprenden los contenidos de la geometría y logran aplicarlos a problemas más complejos, estarán fortaleciendo su aprendizaje; de igual forma cuando transmiten sus conocimientos previos sobre geometría a un problema no matemático, estarán razonando el conocimiento previamente aprendido en otros ámbitos de su vida académica.

En referencia al sistema educativo mexicano, se requiere de la implementación de estrategias acorde a las necesidades de una sociedad plural y en incesante cambio que exige día a día una educación de mayor calidad, de tal manera que estas estrategias se ajusten y sean en beneficio de los estudiantes; éstos generalmente demandan atención para poder corresponder de la misma manera, en la UNAM, la población estudiantil que la integra conforma una gran diversidad de usos, costumbres, religiones, posibilidades económicas, lo que propicia el planteamiento de estrategias didácticas transigentes que permitan un mejor enfoque y adaptación a las circunstancias, puesto que el triunfo de su aplicación pretende renovar de un grupo a otro, de un periodo a otro o de un turno a otro, aunque se trate del mismo plantel.

En la actualidad, es muy importante que los estudiantes de todos los niveles académicos desarrollen aptitudes que les permitan aprender a observar, analizar, destacar, estructurar, coordinar, razonar, emitir un juicio, tomar decisiones o argumentar una conclusión para poder aplicarlo de forma útil y pertinente en situaciones de su vida cotidiana, acrecentando así las oportunidades de alcanzar una mejor calidad de vida y comunicar activamente en la construcción de un ambiente sano, contribuyendo a formar ciudadanos responsables con su entorno, pero primordialmente en la educación media superior y superior. Ya que se puede observar que existen muchas limitaciones en los estudiantes para poder entender la importancia de la geometría, considero que es a causa del tipo de enseñanza que han tenido en sus cursos previamente; ya que el método de enseñanza al que han estado expuestos depende del juicio que el docente tiene sobre la geometría, del saber cómo se aprende y el significado del porqué se enseña y porque es tan importante aprenderla, por lo que considero fundamental reflexionar sobre las razones para enseñar geometría y no enfocarse solamente en conocer figuras o definir conceptos geométricos, reduciendo las clases a una forma monótona, repetitiva, sin razonamiento alguno, por lo que considero se debe reconocer y promover en los estudiantes su capacidad de razonamiento a problemas aplicados en los que identifique la importancia de geometría, para que puedan relacionar lo aprendido con nuevos contenidos; ejemplo de ello es que la puedan reconocer a través de su entorno, ya que al poder observar su alrededor, encontraran infinidad de conceptos geométricos como rectas, ángulos, polígonos, triángulos y figuras geométricas de cualquier tipo, así como la congruencia y semejanza de algunos objetos, lo que propiciará que al comprender la esencia de la geometría podrán relacionar lo aprendido a la solución de problemas en la vida diaria. Para lograrlo es primordial que los estudiantes tengan conocimiento sobre los conceptos básicos de la geometría y sepan determinar los puntos y rectas notables de los triángulos, como: el baricentro, circuncentro, ortocentro, incentro, y puntos de intersección de medianas; mediatrices, alturas y bisectrices; las razones trigonométricas; el Teorema de Pitágoras, identidades trigonométricas así como el uso que se les puede dar en algunos, problemas de ingeniería ocupando dos de los teoremas más importantes de la geometría, los que se reconocen como: la ley de los senos y la ley de los cosenos, cuya aplicación en el ámbito de la mecánica vectorial, es de suma importancia, debido a que es uno de los temas más aplicados en los primeros temas de la estática (algunos ejemplos de su aplicación se pueden observar en el capítulo IV, en el cual observaremos la relación de estas leyes con algunas de sus aplicaciones).

Elementos básicos de geometría euclidiana en dos dimensiones.

- *Conocer las propiedades básicas de la geometría de rectas y ángulos, planos y polígonos, en particular el teorema de Tales, congruencia y semejanza de polígonos y su relación con las transformaciones de traslación, rotación y reflexión y dilatación; ser capaz de aplicar estos conocimientos para plantear y resolver problemas.*
- *Ser capaz de realizar las construcciones básicas con regla y compas como la bisectriz de un segmento, la tangente a una circunferencia desde un punto exterior, la circunferencia circunscrita a un triángulo, incluyendo construcciones geométricas.*

El triángulo y su geometría.

- *Conocer el baricentro el circuncentro, el ortocentro y el incentro como puntos de intersección de las medianas, las mediatrices, las alturas y las bisectrices, respectivamente*.
- *Conocer las propiedades de triángulos rectángulos, en particular el Teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas, las identidades pitagóricas y su uso en el planteamiento y la resolución de problemas. Conocer y utilizar las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas.*
- *Ser capaz de aplicar los criterios de congruencia y semejanza en triángulos y la desigualdad del triángulo en la resolución de problemas.*

Geométrica del circulo.

- *Conocer las propiedades geométricas del circulo: rectas y segmentos notables, ángulos internos y externos y segmentos de arco.*
- *Ser capaz de utilizar el conocimiento de la geometría del circulo para plantear y justificar conjeturas y para planear y resolver problemas.*

Elementos básicos de geometría tridimensional.

- *Conocer y describir los cuerpos en tres dimensiones como el cubo, los prismas, las pirámides, los cilindros los conos, la esfera.*
- *Ser capaz de identificar sus proyecciones ortogonales a los planos, identificar sus componentes, calcular sus superficies, plantear el problema y calcular su volumen mediante aproximaciones.*

Las cónicas y sus representaciones.

- *Conocer la representación de puntos en el plano cartesiano y en coordenadas polares.*
- *Conocer las cónicas en sus diversas caracterizaciones.*
- *Conocer la relación entre las ecuaciones lineales y cuadráticas en dos variables con la recta y las cónicas.*
- *Ser capaz de resolver problemas geométricos que involucren cónicas y lugares geométricos.*

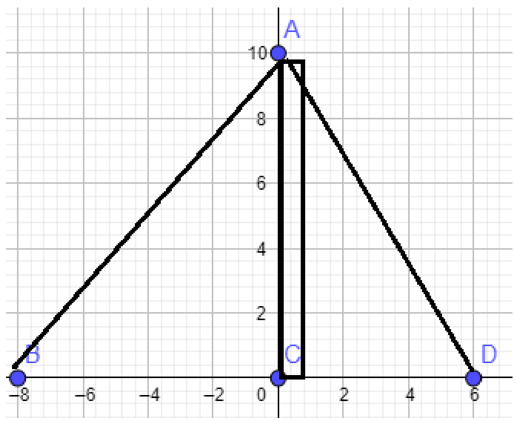
Proyecciones y perspectivas.

- *Conocer y aplicar los principios básicos de proyecciones y perspectivas, resaltando su uso en diferentes ramas del conocimiento como en arquitectura, pintura, ingeniería, fotografía, geografía.*

Los vectores y su aplicación.

- *Conocer los vectores en el plano y la interpretación geométrica de sus operaciones. Los vectores en el espacio y la interpretación geométrica de sus operaciones; incluyendo el producto escalar y el producto vectorial.*
- *Ser capaz de utilizar vectores en el planteamiento la solución de problemas en dos y tres dimensiones* (Abreu León, Benitez Pérez, Bracho Carpizo, Bracho Carpizo, & Canabal Cáceres, 2014).

Con relación a los vectores, es crucial que los estudiantes reconozcan que son una de las más importantes aplicaciones para el estudio de la trigonometría y la geometría, éstos pueden ser apreciados tanto en dos como en tres dimensiones. Los vectores en el espacio son una indispensable herramienta para enfocarse a la Mecánica Vectorial para Ingenieros, ya que de ellos se derivan muchos problemas de aplicación, que solicitan el razonamiento de los estudiantes al relacionar el contenido de algunas de las materias básicas como: la trigonometría, la geometría euclidiana y la geometría analítica en tres dimensiones.



El estudiante observa el problema e identifica si se trata de un problema de dos o tres dimensiones (en este caso 2D).

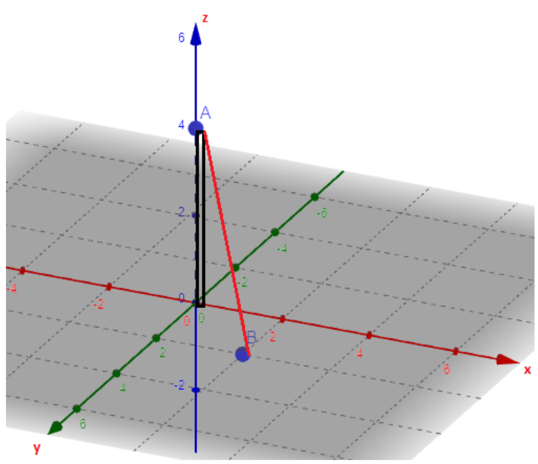
El estudiante observa triángulos, ya tiene conocimiento previo de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180 grados y que el poste indica que hay ángulos de 90 grados.

El estudiante observa que existen fuerzas en las tensiones de las cuerdas que asemejan los lados de los triángulos.

El estudiante observa que puede determinar ángulos mediante las razones trigonométricas.

El estudiante observa que puede proponer un sistema de coordenadas (sistema de referencia) preferentemente en donde se inician todas las fuerzas (Punto A).

El estudiante observa que puede descomponer las fuerzas en componentes aplicando el seno y el coseno.



El estudiante observa el problema e identifica si se trata de un problema de dos o tres dimensiones (en este caso 3D).

El estudiante al ver que se trata de un problema en 3D automáticamente debe asociarlo con vectores en 3D o geometría analítica en el espacio.

El estudiante debe interpretar de manera correcta lo que se le pide calcular en el problema por lo que es importante leer cuidadosamente lo que se indica en el problema.

El estudiante debe entender que existen fuerzas actuando en el sistema en este caso una fuerza que va del punto A al punto B.

El estudiante debe determinar las coordenadas de los puntos A y B partiendo de un sistema de referencia como origen (0,0,0).

El estudiante asocia inmediatamente que por ser un problema en 3D debe aplicar vectores de posición y vectores unitarios para su solución.

El estudiante asocia ecuaciones de vectores:

$$\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$

$$\lambda_F = \frac{F_{xi}}{|R|}\ ,\quad \lambda_F \frac{F_{yj}}{|R|},\quad \lambda_F = \frac{F_{zk}}{|R|}$$

2.2 Argumentos que hacen pertinente el diseño de la estrategia didáctica.

Actualmente la educación en México presenta altibajos en cuanto a la mejora educativa, nos encontramos en una etapa de continuos avances tecnológicos y científicos en los que la sociedad asume su rol para su desarrollo, lo que propicia que como docentes y estudiantes debemos ser conscientes poder tener un mejor futuro, que aporte nuevas propuestas de cambio y significatividad en las distintas áreas de la ciencia, ya sea del ámbito industrial o de la ingeniería. Considero que los sistemas educativos de todo el mundo deben responder a las exigencias del desarrollo, y con el uso de herramientas como la tecnología, se puede mejorar la enseñanza y fortalecer los contenidos de cualquier asignatura, ello lo podemos reconocer en el impacto que ha tenido ésta en los niños y jóvenes, que la utilizan como una importante herramienta de consulta y trabajo, sin embargo, no toda la responsabilidad debe recaer en ella, pues la sociedad, a través de las instituciones educativas y docentes debe afrontar decisiones más complejas, primordialmente en la equidad y calidad.

Es fundamental que la educación en sus diferentes niveles desarrolle y aplique mejoras en la forma de impartir los conocimientos, para tener una educación de calidad, con el objetivo de que los estudiantes puedan adquirir y aprovechar los nuevos contenidos a través de potenciar sus capacidades, destrezas y competencias para el éxito escolar, la excelencia y el aprendizaje, dentro de cualquier institución educativa, sea aquello que hace cada docente, cada día, con cada estudiante en el salón de clase. Pero ese acto deberá estar condicionado por un número importante de variables que, interactuando entre ellas, produzcan un resultado final que no puede, ni debe, valorarse sólo desde los resultados académicos de los estudiantes en aspectos cognitivos, basadas en el “saber” incluso en el “saber hacer”, olvidando por completo aspectos esenciales relacionados con el “ser” y el “sentir”, tales como el desarrollo emocional, los sentimientos o los valores que los estudiantes cultivan y aprenden en su actividad y convivencia escolar diaria.

Los docentes son el factor principal para que un aprendizaje matemático de calidad sea posible en la escuela, son los protagonistas y gestores centrales en las acciones y hechos dados en el aula escolar; por lo que se debe promover el aprendizaje reflexivo en la formación del profesorado a través de las teorías socioculturales del aprendizaje humano, y fortalecer el conocimiento creado por el mismo profesor en formación y no un conocimiento ya creado que simplemente se transmite en los cursos de formación, con la intención de enfatizar la importancia de atender de manera integrada, factores cognitivos, metacognitivos, motivacionales, sociales e individuales de los estudiantes para conseguir un adecuado aprendizaje.

Actualmente se recomienda entender el conocimiento matemático como una práctica social, que involucra no sólo el conocimiento matemático escolarizado, sino también algunas de las prácticas y estrategias utilizadas por los matemáticos puros a la hora de hacer matemática. Desde esta perspectiva, el conocimiento matemático debe incorporar, además de elementos explícitos (demostraciones, procedimientos, gráficos), otros elementos que por su naturaleza son meramente tácitos; es decir, conocimientos construidos en la experiencia o acciones, y que no pueden ser descritos con reglas o palabras. Por ejemplo, conocimiento del lenguaje matemático y su simbología, la metamatemática de las demostraciones y definiciones, conocimientos sobre el alcance y estructura de la matemática como un todo.

2.3 Procesos de enseñanza y aprendizaje efectivos

Recientemente la tecnología ha desarrollado un avance a través del software para mejorar la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, GeoGebra, wólfram Alpha, Matlab, por mencionar algunos programas, el Internet como medio de comunicación también cumple su función, facilita a la mayoría de los estudiantes encontrar de forma rápida y sencilla algún tema que no entiendan o que quieran aprender, a través de libros descargados en línea, tutoriales, guías, ejercicios resueltos paso a paso, etcétera. Cabe mencionar que no toda la información es verídica, por lo que es necesario identificar los sitios web confiables o que sean de una institución confiable. De igual forma las plataformas como blogs, o YouTube por mencionar algunas, los estudiantes tienen la oportunidad de acercarse de manera más sencilla a los contenidos que se imparten en las asignaturas relacionadas con las matemáticas, lo que a veces se nos complica como docentes frente a grupo, ya que les permite utilizar este medio como una herramienta para poder entender variedad de temas que los docentes virtuales o estudiantes imparten de manera gratuita para apoyar un tema en específico con base en la interactividad que este medio permita para poder resolver sus dudas y atender las necesidades de las nuevas generaciones.

El proceso de enseñanza-aprendizaje escolarizado es muy complejo e inciden en su desarrollo una serie de componentes que deben interrelacionarse para que los resultados sean óptimos. No es posible lograr la optimización del proceso si estos componentes no se desarrollan de manera óptima. En éste, el docente debe cumple una función primordial, ya que debe comunicar y transmitir sus conocimientos de una forma clara y con ejemplos pertinentes para que puedan comprenderlos los estudiantes, así como dotar de fuentes de información idóneas que le auxilien correctamente en la realización de sus investigaciones, de igual forma apoyarse en la tecnología de la información y la comunicación para el desarrollo de su preparación, enseñanza y práctica en las ciencias de las matemáticas; también debe poseer la capacidad de resolución frente a las posibilidades que se presenten durante el proceso de aprendizaje, utilizando las técnicas y recursos pedagógicos y académicos con los que cuenta para fomentar y promover el aprendizaje significativo en los estudiantes considerando sus características y contexto socio cultural.

El mismo en primera instancia debe considerar cómo lograr que los estudiantes participen de manera activa en el trabajo de la clase, es decir, que generen un estado de motivación para aprender; por otra parte debe pensar en cómo desarrollar en los estudiantes la cualidad de estar motivados para aprender de modo que sean capaces de educarse a sí mismos a lo largo de su vida, es decir, ser autónomos y que participen cognoscitivamente, en otras palabras, que piensen a fondo acerca de qué quieren estudiar.

Otro factor determinante en el desarrollo del aprendizaje efectivo en los estudiantes es promover en el aula el desarrollo de sus habilidades a partir de ejemplos en su vida cotidiana, así podrán asimilar los nuevos aprendizajes, y al relacionarlos con sucesos ordinarios, podrán reconocer que las matemáticas son una ciencia con la que interactuamos día a día en nuestra sociedad, y que los conocimientos adquiridos tienen sentido en su vida académica y permiten comprender todo lo estudiado y aprendido, para ello recomiendo que el docente continuamente este desarrollando dichas habilidades en los estudiantes, así como la revisión continua y pertinente de las actividades y ejercicios que se realicen en continuamente en el aula.

2.4 Planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias.

Atributos:

- Identificar los conocimientos previos y necesidades de formación de los estudiantes.
- Fomentar estrategias para avanzar a partir de ellas, se deben diseñar planes de trabajo basados en ideas, proyectos e investigaciones disciplinarios e interdisciplinarios conducido al desarrollo de competencias.
- Contextualizar los contenidos de un plan de estudios en la vida diaria de los estudiantes y la realidad social de la agrupación a la que pertenecen.
- Construcción de ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
- Beneficiar entre los estudiantes el autoconocimiento y la valoración de sí mismos, así como el favorecimiento en el deseo de aprender y otorgar herramientas para el avance en sus procesos de construcción de conocimiento, así como promover el pensamiento creativo, crítico y reflexivo a partir de contenidos educativos bien establecidos.
- Motivar a los estudiantes tanto en lo individual y como en lo grupal para así promover sus perspectivas de progreso y avance en su desarrollo.
- Fomentar la consulta de libros para su aprendizaje diario por medio de bibliografías u otros medios.
- Fomentar hábitos para el estudio diario y continuo.

Durante el desarrollo de las habilidades en los estudiantes, se puede reconocer la importancia que tienen las cualidades y habilidades del pensamiento, las primeras (cualidades) primordialmente de carácter básico, que requieren ser identificadas, reconocidas, organizadas y utilizadas con base en la información idónea; así como el desarrollo de las habilidades de razonamiento indispensables para la solución de problemas convergentes y divergentes por ejemplo la fluidez que se refiere a la aptitud de una persona para producir un gran número de ideas, la elaboración que se refiere a la aptitud de una persona para desarrollar, ampliar y mejorar las ideas, también se incluye aquellas que nos ayudan a mejorar los procesos de aprendizaje, lo que propicia que los estudiantes desarrollen una forma apropiada y deseable de competencias, por lo que es recomendable adaptar, dirigir y practicar una serie de estrategias didácticas, que permitan a los estudiantes incrementar su capacidad de observación, análisis y reflexión.

La educación media superior y superior primordialmente tiene entre sus objetivos la formación de profesionales altamente comprometidos con las demandas que la sociedad les plantea, sobre bases científicas, humanísticas y de altos valores ideológicos. En este rubro la propuesta considera fundamental el desarrollo del trabajo colaborativo a partir de la implementación de estrategias didácticas que fortalezcan el aprendizaje significativo, a través de las siguientes consideraciones:

- El docente por medio de una serie de preguntas realiza una revisión rápida de los conocimientos previos
- El docente establece el plan de trabajo a lo largo del curso, así como la evaluación y temario de la asignatura
- El docente resalta la importancia de contar con un procedimiento para la resolución de cualquier problema, para llevar una secuencia lógica.

- El docente guía, apoya y motiva a los estudiantes durante el desarrollo de la materia.

Los problemas que pude reconocer que poseen la mayoría de los estudiantes es que no comprenden los contenidos porque no los practican, ni los ejercitan, por lo que olvidan las cosas rápidamente al no haber ningún tipo de interés de su parte, y al no repasar o estudiar temas que vieron previamente en sus cursos pasados, como tampoco ejercitar el razonamiento lógico, lo que propicia que los estudiantes teman al estudio de las matemáticas, ya que la consideran una ciencia difícil de comprender debido a que no se les ha motivado o despertado el interés por acercarse a ella y conocer sus contenidos.

Una estrategia para estudiantes que desean estudiar alguna ingeniería en la UNAM o alguna licenciatura relacionada con las matemáticas, es tener practicar continuamente el repaso general de los contenidos aprendidos como el álgebra y/o geometría, ya que estas son indispensables para un buen desarrollo en los primeros semestres de la licenciatura, lo que comúnmente denominamos "tronco común", esto no debe llevar mucho tiempo, ya que se debe cubrir con un programa establecido por parte de la institución que determina cierto número de horas para cada tema, por lo que se debe dosificar la enseñanza de los contenidos para poder abarcar todos los temas propuestos, para ello se propone que al inicio de cada curso de los primeros semestres de ingeniería se considere por parte de todos los docentes, realizar un examen diagnóstico, que evalúe a los conocimientos previos que poseen los estudiantes y reconocer cuáles son las áreas de oportunidad que poseen los estudiantes y atender las necesidades identificadas en el aula.

En la elaboración del examen diagnóstico se debe considerar los planes de estudio propuestos por la institución así como los temas principales que los docentes consideren fundamentales para poder abordar los nuevos contenidos y que favorezcan el aprendizaje de la asignatura que se vaya a cursar; como ya se citó en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán en la licenciatura de ingeniería civil, la asignatura con mayor índice de reprobación es: estática, primordialmente a la complejidad de sus contenidos y porque no se tienen los conocimientos básicos y previos de materias antecesoras a ésta, por lo que se propone que los docentes atiendan esta problemática con estrategias didácticas adecuadas con base en los resultados del diagnóstico para para evitar que estos altos índices de reprobación en los estudiantes y deje de ser un problema a futuro. El examen diagnóstico elaborado por los docentes, deberá enfocarse en las necesidades de las asignaturas, para identificar las áreas de oportunidad y las necesidades de los estudiantes para ser atendidos oportunamente por parte de los docentes, y establecer un vínculo de trabajo, en el que los docentes se enfoquen y repasen los contenidos que hayan obtenido un resultado bajo en el examen diagnóstico. Se propone como estrategia didáctica que el docente clasifique a los estudiantes con base en los resultados de la evaluación diagnóstica y los agrupe por áreas de oportunidad para favorecer la ayuda entre iguales y proporcionarles el material específico que les ayude a comprender los temas primordiales que deben aprender con relación a la teoría y la aplicación en problemas prácticos, con la intención de entender y razonar lo que el docente les enseñó, se trata de que los estudiantes comprendan mejor los objetivos de cada tema en específico, saber qué y por qué deben estudiar los temas con base en el objetivo de aprendizaje para fortalecer su estudio.

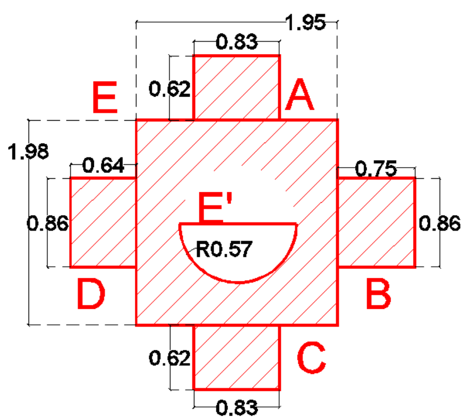
3. Capítulo III. Algunas aplicaciones de la geometría y trigonometría en mi experiencia laboral.

En mi experiencia en mi vida laboral pude percatarme lo útil e importante que es la geometría en el ámbito de la construcción, y a continuación presento alguna de las muchas aplicaciones que se puede llegar a tener en el ámbito laboral.

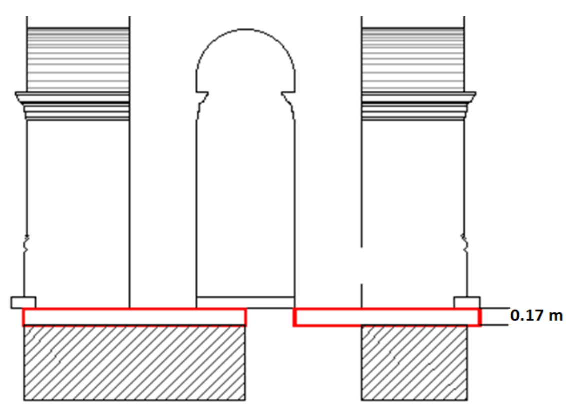
Debido al sismo ocurrido dentro de la placa oceánica de cocos del 19 de septiembre del 2017 cuya magnitud fue de 7.1, muchas edificaciones y monumentos históricos se dañaron a tal punto que muchos por ser patrimonio de la nación y tener más de 200 años de antigüedad han tenido que ser restaurados hasta lograr una correcto funcionamiento y estética en estos. En el proyecto que participé fue en la restauración de un templo en la Ciudad de México llamado Proyecto de conservación del conjunto de San Lorenzo Diácono y Mártir, cuyo fin era restaurarlo debido a los graves daños que sufrió en el sismo, para esta labor de restauración, él equipo se conformó de trabajadores, ingenieros y arquitectos que en conjunto pudieron reconstruir ciertas partes dañadas del templo, y en algunos casos reconstruir ciertas partes completamente dañadas por el sismo. Cabe resaltar que muchas veces ciertos monumentos históricos ya sean iglesias, templos, capillas, etc no tienen una forma regular, puesto que su arquitectura es muy antigua y nada común, para ello, nos vimos a la tarea de estudiar las formas del templo y poder así tener la cantidad de material que se necesitaba para restaurar ciertas partes de la estructura del templo.

3.1 Ejemplo 1: Firme de concreto en base de campanario del templo:

Para la liberación de un firme de concreto dañado por el sismo en la base del campanario se obtuvo el volumen total de concreto a utilizar y cuya base del campanario era una figura irregular.



Vista en planta del campanario



Alzado del campanario

$$A = (0.83m)(0.62m)(0.17m) = 0.087\ m^3$$

$$B = (0.75m)(0.86m)(0.17m) = 0.109\ m^3$$

$$C = (0.83m)(0.62m)(0.17m) = 0.087\ m^3$$

$$D = (0.64m)(0.86m)(0.17m) = 0.093\ m^3$$

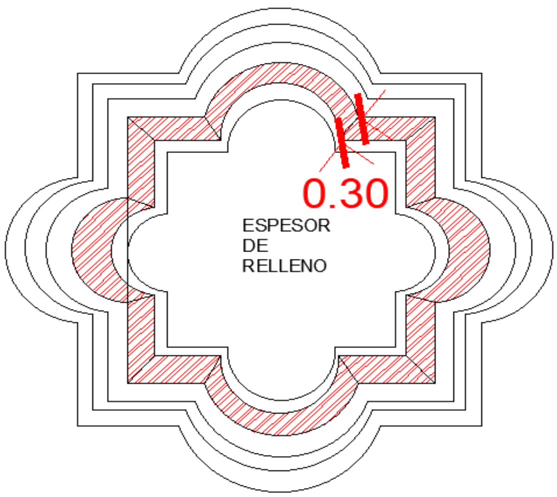
$$E = (1.95m)(1.98m)(0.17m) = 0.65\ m^3 (se\ resta\ area\ de\ medio\ circulo)$$

$$E' = \frac{\pi\ (r)^2}{2} h = \frac{\pi\ (0.57)^2}{2}(0.17) = -0.086m^3$$

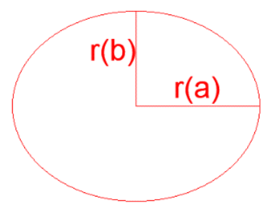
$$\boldsymbol{Total = 0.95m^3}$$

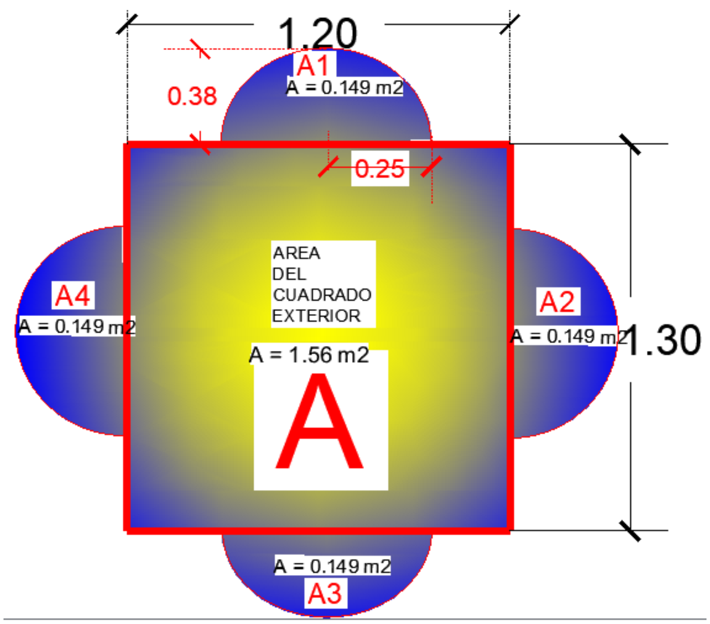
3.2 Ejemplo 2: Relleno de mezcla mortero arena para relleno de óculos en templo:

En el siguiente ejemplo se requirió de hacer un relleno con mortero de un óculo ojo de buey, ya que este había sido dañado por el sismo, y se reemplazó por otro, para esto se tiene una figura irregular que corresponde al óculo, conformado por figuras como media elipse y rectángulos.



Considerando el área de la media elipse es $A = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2}$ donde:





Área exterior del óculo:

$$\boldsymbol{Area\ de\ media\ elipse}$$

$$A1 = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2} = \frac{\pi * 0.25 * 0.38}{2}$$
$$= 0.149\, m^2$$

$$A2 = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2} = \frac{\pi * 0.25 * 0.38}{2}$$
$$= 0.149\, m^2$$

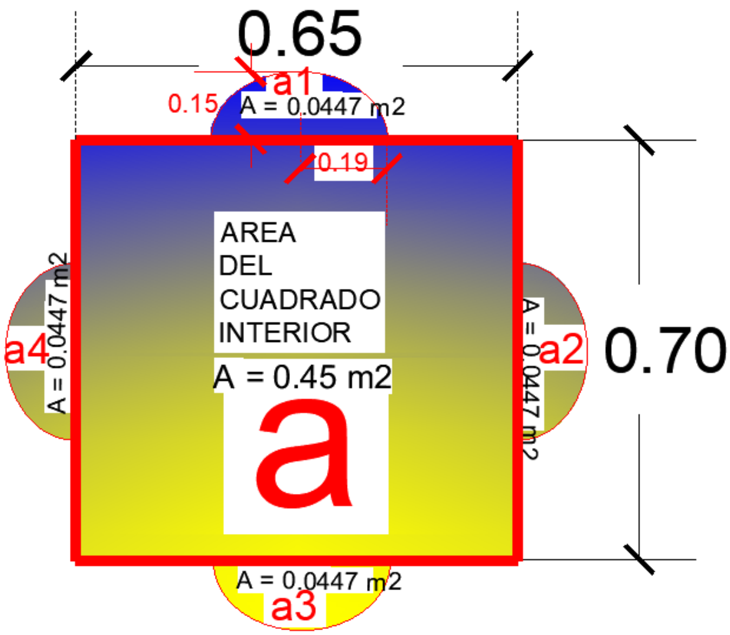
$$A3 = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2} = \frac{\pi * 0.25 * 0.38}{2}$$
$$= 0.149\, m^2$$

$$A4 = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2} = \frac{\pi * 0.25 * 0.38}{2}$$
$$= 0.149\, m^2$$

$$\boldsymbol{Area\ del\ cuadrado\ exterior}$$

$$A1 = lxl = (1.20)(1.30) = 1.56\, m^2$$

$$ATOTAL = 2.156\, m^2$$



Área interior del óculo (vacío):

$$\boldsymbol{Area\ de\ media\ elipse}\ (\boldsymbol{vacio})$$

$$A1 = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2} = \frac{\pi * 0.19 * 0.15}{2} = 0.0447\ m^2$$

$$A2 = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2} = \frac{\pi * 0.19 * 0.15}{2} = 0.0447\ m^2$$

$$A3 = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2} = \frac{\pi * 0.19 * 0.15}{2} = 0.0447\ m^2$$

$$A4 = \frac{\pi * r(a) * r(b)}{2} = \frac{\pi * 0.19 * 0.15}{2} = 0.0447\ m^2$$

$$\boldsymbol{Area\ del\ cuadrado\ interior}(\boldsymbol{vacio})$$

$$A1 = lxl = (0.65)(0.70) = 0.455\ m^2$$

$$AVacío = 0.633\ m^2$$

Por último, al tener el área mayor del óculo le restamos el área del vacío del óculo quedándonos:

$$ATOTAL = 2.156\ m^2 - 0.633\ m^2$$

$$ATOTAL = 1.523\ m^2$$

Se multiplica el área del óculo por el espesor del mismo el cual es de 0.30 m

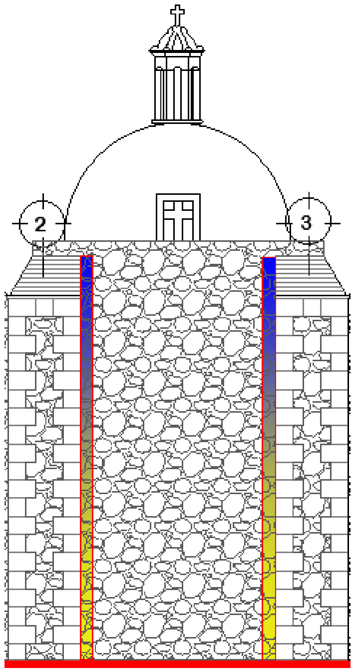
$$ATOTAL = 1.523m^2\ x\ 0.30\ m$$

$$\boldsymbol{ATOTAL = 0.45\ m^3}$$

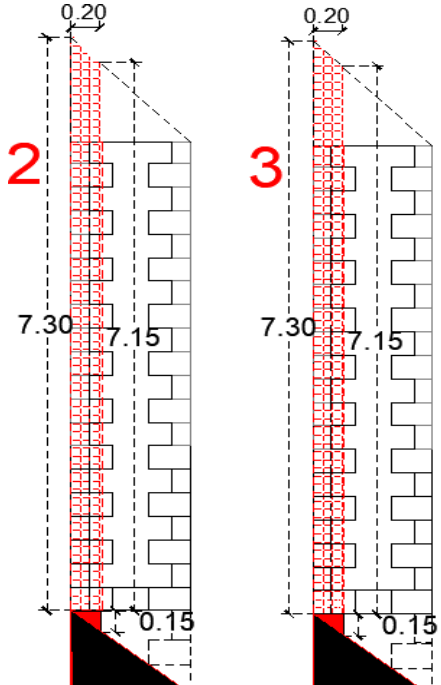
Por lo cual se tuvo que ocupar un volumen de 0.45 m3 de mezcla con mortero para poder rellenar el óculo multiplicado por el número de óculos que tenía el templo, considerando que todos los óculos tienen las mismas dimensiones.

Así como los dos ejemplos anteriormente mencionados, la geometría tuvo un papel importante para la resolución de los problemas, así como muchos otros para la restauración del templo de San Lorenzo Diácono y Mártir.

3.3 Ejemplo 3: Rejuntado de piezas de mampostería en laterales de contrafuertes para evitar filtraciones con la lluvia.



VISTA FRONTAL



Acotaciones en metros

VISTA LATERAL

Las áreas sombreadas con rojo de la "vista lateral" que corresponden a las áreas laterales de la primera figura frontal serán rejuntadas debido a filtraciones que hubo en las esquinas de los contrafuertes, por lo que se tendrán que considerar los metros cuadrados a rejuntar, para ello tenemos 2 figuras a contemplar las cuales son el trapecio y el triángulo.

Área del trapecio figura 2:

$$\boldsymbol{A = \frac{h\,(B+b)}{2} = \frac{(0.2)\,(7.3+7.15)}{2} = 1.445\,m^2}$$

Área del Trapecio figura 3:

$$\boldsymbol{A = \frac{h\,(B+b)}{2} = \frac{(0.2)\,(7.3+7.15)}{2} = 1.445\,m^2}$$

Área del triángulo rojo pequeño figura 2:

$$\boldsymbol{A = \frac{(B*h)}{2} = \frac{(0.15*0.20)}{2} = 0.015\,m^2}$$

Área del triángulo rojo pequeño figura 3:

$$\boldsymbol{A = \frac{(B*h)}{2} = \frac{(0.15*0.20)}{2} = 0.015\,m^2}$$

$$\boldsymbol{TOTAL = 2.92\,m^2}$$

4. Capítulo IV. Material didáctico de apuntes de trigonometría y geometría, así como sus aplicaciones

Información general de este material didáctico.

Este documento es un manual de apoyo al docente y al alumno para fortalecer los aprendizajes matemáticos a los estudiantes de educación media superior y superior con base en los planes establecidos por los programas y jefatura del área de matemáticas e ingeniería. En este trabajo se pretende abordar temas principales relacionados con el área de las matemáticas especialmente (geometría euclidiana y analítica – trigonometría) por lo que se han expuesto conceptos fundamentales de la Geometría básica y de la trigonometría, con el fin de tener una mejor representación y desarrollo de los temas en el material para posteriormente aplicarlos en otras materias más complejas que requieren de estos conocimientos previos tal como la Mecánica Vectorial "estatica".

Es importante precisar que la elaboración del material didáctico no tiene fines de lucro y sólo pretende exponer conocimientos estudiados previamente en asignaturas, así como algunas aplicaciones. Se pretende que los estudiantes al resolverlo desarrollen y ejerciten aspectos fundamentales de las matemáticas que les permitan desempeñarse de manera satisfactoria en sus estudios de educación media superior como superior, además de proporcionales conocimientos básicos para aplicarlos en las asignaturas relacionadas a las matemáticas básicas y situaciones cotidianas. Se pretende que los estudiantes tengan la capacidad para analizar y resolver problemas a través de ejercicios con ejemplos resueltos paso a paso de esta guía, que les facilite su comprensión, y puedan solucionar los problemas que posteriormente se presentan, ya sean en tareas o exámenes, por lo que es recomendable dedicarle parte al estudio de este material y aclarar las dudas que surjan.

El trabajo está integrado por conceptos básicos relacionados a la trigonometría y a la geometría en dos y tres dimensiones, muchos de los ejemplos y ejercicios aquí mostrados, son ejercicios realizados por mí en la parte de trigonometría y geometría euclidiana y en el apartado de estática vienen ejercicios de libros más comunes entre los estudiantes como lo son, "Mecánica Vectorial para Ingenieros" Beer & Jhonston y "Estática" R.C Hibbeler, donde muestran algunas de sus aplicaciones y ejemplos resueltos paso a paso para la solución de los problemas, con el objetivo de guiar y ayudar a los estudiantes a comprender mejor los conceptos.

Aprendizajes.

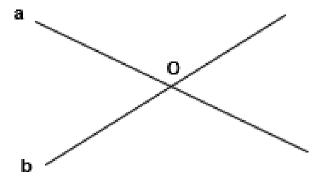
- Aplicar y entender los conceptos de geometría y sus conceptos básicos.
- Entender la definición de punto, línea recta, semirrecta, segmento, figura geométrica, curva, y ángulo.
- Entender la clasificación de los ángulos de acuerdo con:
  - -Su magnitud o medida: nulos, convexos, rectos, obtusos, llanos, cóncavos, completos.
  - -Su posición: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice
  - -Su característica: complementarios, suplementarios y conjugados.
- Entender la diferencia entre ángulos complementarios, suplementarios y conjugados.
- Poder resolver ejercicios y problemas aplicando los conocimientos anteriores mencionados.

4.1 Geometría y trigonometría

La geometría es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades, las formas y las dimensiones de figuras y cuerpos geométricos (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

Punto

Según Euclides: "Punto es lo que no tiene partes" (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).



La recta **a** intersección con la recta **b** determinan el punto **O.**

Línea recta

Es una sucesión infinita de puntos, se clasifican básicamente en: recta, poligonal y curva (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

Semirrecta

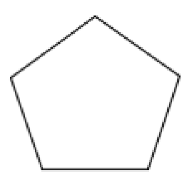
Si se fija un punto C en una recta, al conjunto de puntos que le siguen o proceden se les llama semirecta (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

Segmento:

Porción de recta limitada por 2 puntos no coincidentes (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

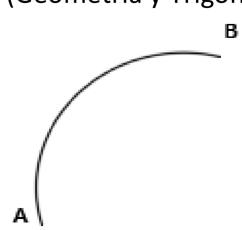
Figura geométrica:

Extensión limitada por puntos, líneas y superficies (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).



Curva

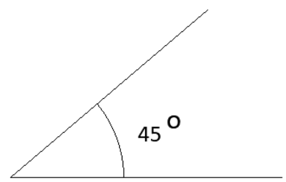
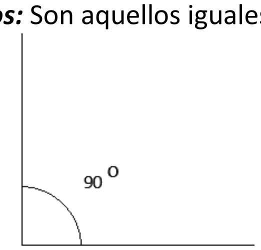
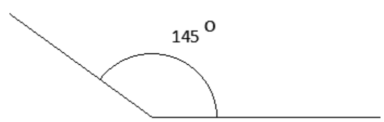
Es aquella línea que no tiene partes rectas (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

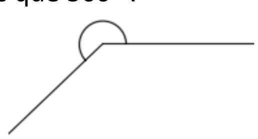
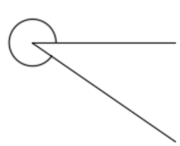
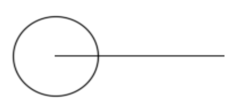


4.1.1 Ángulo

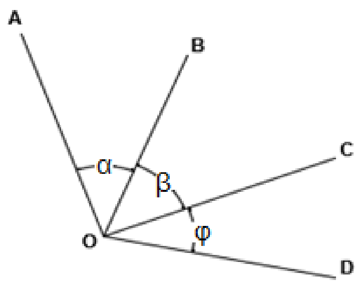
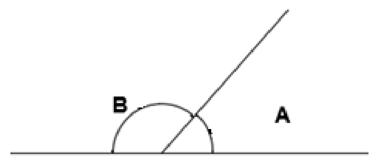
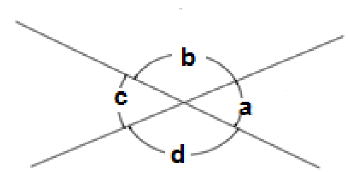
Es la abertura comprendida entre dos semirectas que tienen un punto en común, llamado vértice (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

Clases de ángulos (Según su magnitud) (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009)**.**

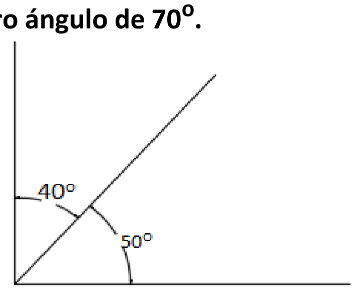
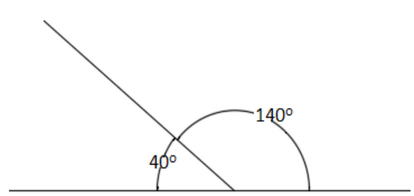
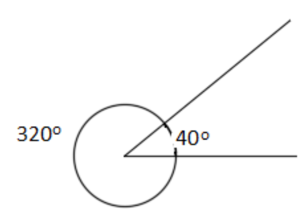
1.- Ángulos Nulos: Son aquellos iguales a 0°.	**2.- Ángulos Convexos**: Son aquellos mayores que 0°, pero menores que 180 °. ***Ángulos agudos:*** Son aquellos menores de 90 °  ***Ángulos rectos:*** Son aquellos iguales a 90°.  ***Ángulos Obtusos****:* Son aquellos mayores que 90 ° y menores a 180 °. 	**3.- Ángulos llanos**: Son aquellos iguales a 180 °. Sus lados son dos rayos opuestos. 

4.- Ángulos Cóncavos: Son aquellos mayores que 180 ° y menores que 360 °.  *Ángulo Entrante:* Son aquellos mayores de 270 ° y menor a 360 °. 	**5.- Ángulos de una Vuelta o Completos:** Son aquellos que valen 360 °. 

Clases de ángulos (Según su posición) (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009)**.**

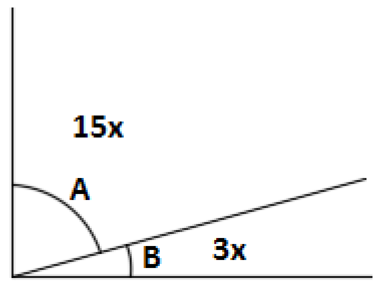
1.- Ángulos consecutivos: Son aquellos que, teniendo el mismo vértice y un lado común, se encuentran a uno y otro lado del lado común, los ángulos consecutivos tienen en común un vértice y un lado.  **Angulo AOB (α) Y BOC (β) son consecutivos y Angulo BOC (β) Y COD (ϕ) son consecutivos**	**2.- Ángulos adyacente**s: Son dos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes son rayos opuestos (los lados no comunes en la misma recta) como se aprecia en la siguiente figura.  **El ángulo A es el suplemento del ángulo B**	**3.- Ángulos opuestos por el vértice**: Son aquellos cuyos lados de uno son las prolongaciones en sentido contrario de los lados del otro, tienen un vértice común y sus lados están sobre las mismas rectas.  **a = c y b = d**

Clases de ángulos (Según sus características) (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009)**.**

1.- Ángulos complementarios: Son 2 ángulos que sumados dan 90 °. El complemento de un ángulo es lo que le falta para medir 90 °. Ejemplos: **El complemento del ángulo de 40° es otro ángulo de 50°.** **El complemento del ángulo de 20° es otro ángulo de 70°.**  	**2.-Ángulos Suplementarios:** Son 2 ángulos que sumados dan 180 °. El suplemento de un ángulo es lo que le falta para medir 180 °. Ejemplos: **El suplemento del ángulo de 140° es otro ángulo de 40°.** **El suplemento del ángulo de 120° es otro ángulo de 60°.**  	**3.-Ángulos conjugados:** Son 2 ángulos que sumados dan 360 °. **El conjugado del ángulo de 320° es otro ángulo de 40°.** **El conjugado del ángulo de 300° es otro ángulo de 60°.** 

Ejemplos:

1.- Hallar el valor de"x" que satisface el valor de cada ángulo.



Solución:

Como Sabemos tenemos un ángulo complementario porque sumados dan 90 º, por lo que ya sabemos que la suma del ángulo A + el ángulo B serán 90 º quedándonos la siguiente igualdad.

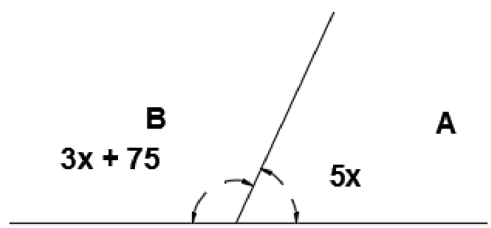
$15x + 3x = 90^o$ (por lo que se despeja el valor de x)

$18x = 90^o$ (por ser términos semejantes se suman $15x\ y\ 3x$ dándonos $18x$)

$x = \frac{90}{18}$ (pasamos el 18 que está multiplicando a la x, del otro lado de la igualdad, pero dividiendo).

$$\boldsymbol{x = 5}$$

2.- Hallar el valor de "x" que satisface el valor de cada ángulo.



Solución:

Como Sabemos tenemos un ángulo suplementario porque sumados dan 180 º, por lo que ya sabemos que la suma del ángulo A + el ángulo B serán 180 º quedándonos la siguiente igualdad.

$5x + 3x + 75 = 180$ (por lo que se despeja el valor de x)

$8x + 75 = 180$ (por ser términos semejantes se suman $5x\ y\ 3x$ dándonos $8x$)

$8x = 180 - 75$ (el 75 que está sumando pasa del otro lado de la igualdad, pero ahora restándolo -75)

$8x = 105$

$x = \frac{105}{8}$ (pasamos el 8 que está multiplicando a la x, del otro lado de la igualdad, pero dividiendo)

$$\boldsymbol{x = 13.125}$$

Para comprobar el resultado sustituimos en la ecuación:

$$A = 5x = 5(13.125) = 65.625$$

$$8x + 75 = 3(13.12) + 75 = 114.375$$

Sumando $65.125\ y\ 114.375\ queda\ 180^o$

3.- Hallar dos ángulos complementarios tales que su diferencia sea 30°.

Solución:

Sabemos que la suma de 2 ángulos complementarios es de **90°** por lo que tenemos que plantear una ecuación tal que la resta de esos dos mismos ángulos sea **30°** por lo que nos queda la siguiente ecuación:

$$x + y = 90$$
$$\underline{x - y = 30}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones ocuparemos el método de suma y resta el cual nos dice que multipliquemos las dos ecuaciones por el mismo coeficiente (en este caso es 1 el coeficiente, pero no se escribe porque ya se da a entender que x tiene coeficiente 1) pero uno de ellos con el signo negativo, por lo que nos queda de la siguiente forma:

$$-1\,(x + y = 90) - - - ec.1$$
$$\underline{1(x - y = 30) - - - ec.2}$$

Al multiplicarse nos quedaría de la siguiente forma recordando las leyes de los signos en la multiplicación:

$$(+)(+) = +$$

$$(+)(-) = -$$

$$(-)(-) = +$$

$$(-)(+) = -$$

Los términos $-x$ y x se cancelan dándonos 0 y al sumar los 2 términos de y negativos nos da $-2y$ lo mismo pasa con $-90 + 30$ nos da -60 como se observa a continuación.

$$-\cancel{x} - y = -90$$
$$\underline{\cancel{x} - y = 30}$$
$$\underline{-2y = \ -60}$$

Finalmente procedemos a despejar la variable "y" pasando el -2 que está multiplicando, del otro lado de la igualdad, pero ahora dividiendo quedándonos así:

$$y = \frac{-60}{-2}$$

$$\boldsymbol{y = 30}$$

Por último, para hallar el valor de "x" sustituimos el valor de "y" en la primera ecuación.

$$x + 30 = 90$$
$$x = 90 - 30$$
$$x = 60$$

Hallar dos ángulos suplementarios tales que el primero sea 40^{o} mayor que el otro.

Solución:

Sabemos que la suma de 2 ángulos suplementarios es de **180^{o}** por lo que tenemos que plantear una ecuación tal que el primer ángulo (ósea "x") sea **40^{o}** mayor al otro ósea "y" por lo que nos queda la siguiente ecuación:

$$x + y = 180 - - - ec1$$
$$\underline{x = y + 40 - - - ec2}$$

En este caso ya nos dicen que el segundo ángulo debe ser 40 veces mayor al primero por lo que sustituiremos el valor de x de la segunda ecuación en la primera ecuación quedándonos:

$$(y + 40) + y = 180$$

Y Se hace la multiplicación respetando las leyes de los signos de la suma.

$$(2y + 40) = 180$$

Finalmente despejamos el valor de "y" pasando el 40 del otro lado de la igualdad, pero son su signo contrario, ósea restando.

$$2y = 180 - 40$$
$$\underline{2y = 140}$$

Posteriormente el coeficiente de la variable "y" que está multiplicando pasa del otro lado de la igualdad, pero dividiendo, quedándonos:

$$y = \frac{140}{2}$$

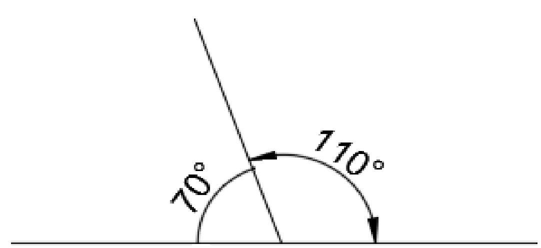
$$y = 70^{o}$$

Por último, para hallar el valor de "x" sustituimos el valor de "y" en la primera ecuación. Y despejamos la variable x como en el ejercicio pasado.

$$x + 70 = 180$$

$$x = 180 - 70$$

$$x = 110^{o}$$



Aprendizajes.

- Entender el sistema sexagesimal realizando sumas restas en este sistema.
- Estimar valores de ángulos.
- Entender el sistema cíclico o circular y los conceptos de grados y radianes como forma de medición de los ángulos.
- Entender la equivalencia principal de grados y radianes en la circunferencia.
- Comprender la diferencia entre grados y radianes, así como conversión de unidades de estas (grados a radianes) y (radianes a grados).
- Aplicar el concepto de grado y radian en ejercicios y problemas.
- Sepan utilizar la calculadora para verificar la validez de las estimaciones.
- Poder resolver ejercicios y problemas aplicando los conocimientos anteriores mencionados.

Sistema sexagesimal

El sistema sexagesimal es un sistema de numeración en el que cada unidad se divide en 60 unidades de orden inferior, por lo que este sistema de numeración tiene esta referenciado en base 60. Se aplica en la actualidad a la medida del tiempo y a la de la amplitud de los ángulos.

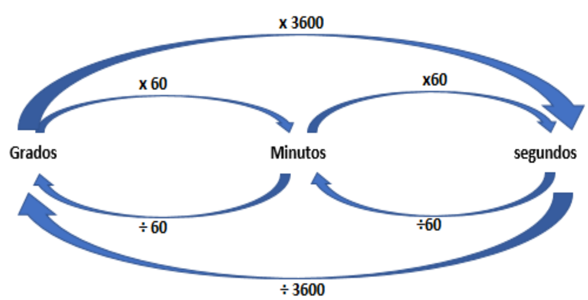
Cada grado se subdivide, en sesenta minutos y cada minuto en 60 segundos:

$$\textbf{1 grado sexagesimal} = \frac{\boldsymbol{angulo\ recto}}{\mathbf{90}};\ \mathbf{1}\ (\boldsymbol{angulo\ recto}) = \ \mathbf{90^{o}}$$

$$\textbf{1 minuto} = \frac{\mathbf{1}\ \boldsymbol{grado}}{\mathbf{60}};\ \boldsymbol{grado} = \ \mathbf{60}^{\prime}$$

$$\textbf{1 segundo} = \frac{\mathbf{1}\ \boldsymbol{minuto}}{\mathbf{60}};\ \mathbf{1}\ \boldsymbol{minuto} = \ \mathbf{60}^{\prime\prime}$$

Tabla de conversiones existente entre grados, minutos y segundos.



Uso de la calculadora científica en el sistema sexagesimal

En la calculadora se tienen 3 modos de medidas angulares, por lo que, para trabajar en el sistema sexagesimal, se debe colocar en el modo DEG.

La tecla para colocar grados, minutos y segundos sexagesimales es: ° ´ “

Por ejemplo, para ingresar el siguiente valor 28^{o} 36´16´´ se deberá expresar en la calculadora como:

28 ° ´ “ 36 ° ´ “ 16 ° ´ “

Ejemplo:

1.- Convertir $20^{o}45´\,18´´$ a grados.

Solución:

Los minutos se dividen entre 60 los segundos entre 3600:

$20^{o}45´\,18´´$

= $20^{o} + \left(\frac{45}{60}\right)\left(\frac{18}{3600}\right)$

= $20^{o} + 0.75^{o} + 0.005^{o}$= 20.755^{o}

Ya se vio uno de los ejemplos más sencillos que es convertir a grados, una vez comprendido hacemos un pequeño cambio en los datos y ahora convertiremos a minutos así se va aumentando la dificultad en los ejercicios.

2.- Convertir
$30^{o}13´\,18´´$ a minutos.

Solución:

Los grados se multiplican por 60 y los segundos se dividen entre 60:

$30^{o}13´\,18´´$

$= (30)(60)´ + 13´\left(\frac{18}{60}\right)$

$= 1800´ + 13´ + 0.3´ = 1813.3´$

Ya se vio otro ejemplo ahora convirtiendo a minutos, por último, veremos el siguiente ejemplo que es un poco más complejo que los anteriores para poder entender por completo la conversión de unidades en grados minutos y segundos.

3.- Convertir 55.0421 a grados, minutos y segundos.

Solución:

Como primer paso tenemos el entero que vienen siendo los grados ósea 55^{o} y solo la parte decimal será multiplicada por 60.

$0.0421\ x\ 60 = 2.526´\ (y\ solo\ la\ parte\ entera\ vienen\ siendo\ los\ minutos)$

Y la misma parte decimal que dio de la operación anterior se multiplica por 60.

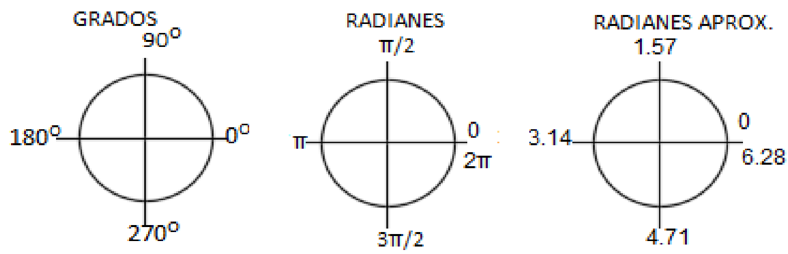
$0.526\ x\ 60 = 31.56\ ´´\ (\ y\ vienen\ siendo\ los\ segundos\ tanto\ la\ parte\ entera\ como\ la\ decimal)$

Por lo que ya tenemos la conversión de unidades quedándonos el siguiente resultado de las operaciones:

$$\mathbf{55^{o}\,2´\,31.56´´}$$

4.1.2 Equivalencia entre grados y radianes.

Los grados y los radianes son dos diferentes sistemas para medir ángulos. Un ángulo de 360^{o} equivale a 2π radianes; un ángulo de 180^{o} equivale a π radianes (recordemos que el número **π = 3.141592653…)**. Las equivalencias entre los cinco principales ángulos se muestran en las siguientes tres figuras:



Para pasar de Grados a Rad se usa la fórmula**: (Grados)** $\left(\frac{\pi}{180}\right)$

Ejemplos:

Convertir de 38 Grados a Radianes:

1.- $38^{o} = (\boldsymbol{grados})\left(\frac{\pi}{180}\right) = \left(\frac{38}{1}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right) = \left(\frac{38\pi}{180}\right) = \left(\frac{19\pi}{90}\boldsymbol{rad}\right) = \mathbf{0.6632}$

El primer paso es poner como fracción los grados que queremos convertir a radianes ocupando la fórmula:

$$(\boldsymbol{grados})\left(\frac{\pi}{180}\right) = \left(\frac{38}{1}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

Posteriormente se hace una multiplicación de fracciones (recordando que el numerador multiplica al numerados y el denominador multiplica al denominador), quedándonos:

$$\left(\frac{38}{1}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right) = \left(\frac{38\pi}{180}\right)$$

Posteriormente reducimos las fracciones de tal forma que nos queden enteros en este caso se sacó mitad del numerados y del denominador, la mitad de 38 son 19 y la mitad de 180 son 90, por último, se puede resolver la división de 19 entre 90 quedándonos 0.2111 y después multiplicarlo por el valor de π = 3.1416 dándonos como resultado final 0.6632 rad.

$$\left(\frac{19\pi}{90}\boldsymbol{rad}\right) = \mathbf{0.6632}\ \boldsymbol{rad}$$

Para pasar de Grados a Rad se usa la fórmula**: (Radianes)** $\left(\frac{180}{\pi}\right)$

Convertir de 2.4 Radianes a Grados:

1.- $\mathbf{2.4}\ \boldsymbol{rad} = (\boldsymbol{radianes})\left(\frac{180}{\pi}\right) = \left(\frac{2.4}{1}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = \left(\frac{432}{\pi}\right) = \mathbf{137.5}^{\boldsymbol{o}}$

El primer paso es poner como fracción los radianes que queremos convertir a grados ocupando la fórmula mostrada, posteriormente se hace una multiplicación de fracciones quedándonos:

$$\left(\frac{2.4}{1}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = \left(\frac{432}{\pi}\right) = \mathbf{137.5}^{\boldsymbol{o}}$$

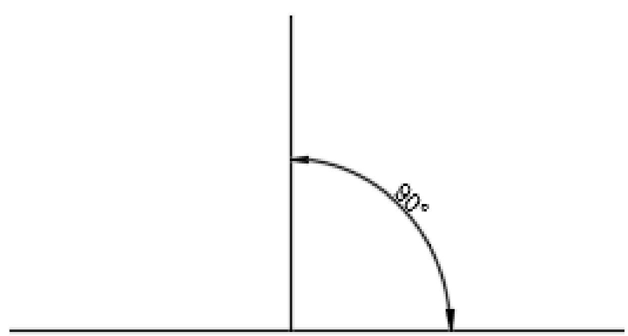
Aprendizajes.

- Entender los conceptos básicos de paralelismo y perpendicularidad.
- Entender la diferencia entre línea paralela y línea perpendicular en base a la definición de ambas.
- Comprender y entender los ángulos formados por 2 rectas paralelas y una transversal o secante entre ellas y cuando se forman cada uno de los ángulos:
    - -Cuando son ángulos opuestos por el vértice.
    - -Cuando son ángulos correspondientes.
    - -Cuando son ángulos alternos internos.
    - -Cuando son ángulos alternos externos.
    - -Cuando son ángulos conjugados internos.
    - -Cuando son ángulos conjugados externos.
- Entender que ángulos se pueden llegar a formar en un problema de aplicación de nivel básico o nivel ingeniería.
- Poder resolver ejercicios y problemas aplicando los conocimientos anteriores mencionados.

4.1.3 Paralelismo y perpendicularidad

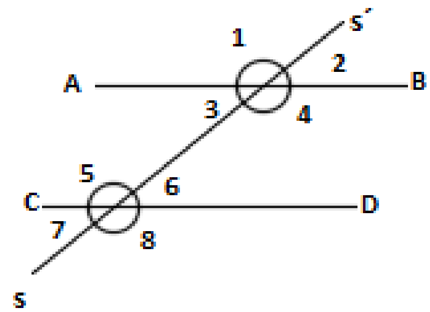
Líneas paralelas: Dos líneas son paralelas si siempre están a la misma distancia (se llaman "equidistantes"), y no se van a encontrar nunca. (También apuntan en la misma dirección). (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

Líneas perpendiculares: Son líneas rectas que forman ángulos de 90 grados (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).



4.1.4 Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante.

En la siguiente figura se muestran las líneas paralelas AB y CD y una transversal o secante que atraviesa a dichas líneas paralelas y son nombradas S Y S´ (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).



$\angle 1 = \angle 4$

$\angle 3 = \angle 2$

$\angle 5 = \angle 8$

$\angle 6 = \angle 7$

Ángulos opuestos por el vértice: Son ángulos opuestos por el vértice cuando los lados de uno son semi rectas contrarias a los lados del otro. Los ángulos opuestos al vértice tienen como propiedad que “todos los ángulos opuestos por el vértice son iguales”.

$\angle 1 = \angle 5$

$\angle 2 = \angle 6$

$\angle 3 = \angle 7$

$\angle 4 = \angle 8$

Ángulos correspondientes: Son dos ángulos no adyacentes situados en el mismo lado de la secante como se muestra a continuación, dichos ángulos tienen la misma magnitud.

$\angle 3 = \angle 6$

$\angle 5 = \angle 4$

Ángulos alternos internos: Son ángulos internos no adyacentes situados en distinto lado de la secante y por lo tanto tienen la misma magnitud.

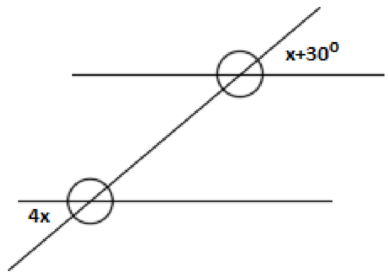
$\angle 1 = \angle 8$

$\angle 2 = \angle 7$

Ángulos alternos externos: Son ángulos externos no adyacentes situados en distinto lado de la secante y por lo tanto tienen la misma magnitud.

Ejemplos:

1.- Hallar el valor de "x" que satisface el valor de los ángulos.



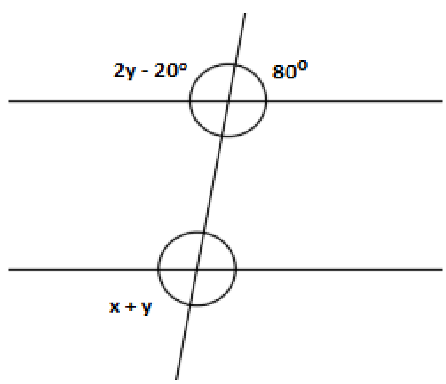
Solución:

Como se observa se tienen ángulos correspondientes y a su vez opuestos por el vértice como los ángulos de abajo cuyos ángulos tienen en común un vértice por lo tanto tienen el mismo valor, sabiendo eso se tiene la siguiente igualdad:

$$4x = x + 30$$
$$4x - x = 30$$
$$3x = 30$$
$$x = \frac{30}{3}$$
$$x = 10$$

Sustituyendo valores nos queda $\mathbf{4x = 4(10) = 40^o, x + 30 = 10 + 30 = 40^o}$ por lo que son ángulos de 40°

2.- Hallar el valor de "x" que satisface el valor de los ángulos.



Solución:

Como se observa los ángulos de la parte superior son suplementarios por lo que sus sumas son 180° por lo que se cumple la ecuación:

$2y - 20^o + 80^o = 180^o$ (De la cual se despeja el valor de "y")

$2y = 180^o + 20^o - 80^o$ (Pasando los términos independientes al otro lado de la igualdad)

$2y = 120^o$

$y = \frac{120}{2}$

$y = 60^o$

Por lo que teniendo el valor de "y" podemos sustituirlo en la ecuación restante pero la cual ira igualada a 80^o por ser ángulos alternos externos el ángulo $x + y$, y el de 80^o, la cual queda:

$$x + y = 80^o$$

$$x + 60^o = 80^o$$

$$x = 80^o - 60^o$$

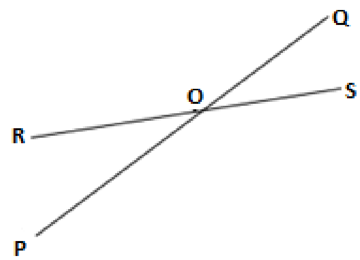
$$x = 20^o$$

Sustituyendo valores nos queda:

$$x + y = 80^o$$

$$20^o + 60^o = 80^o, 2y - 20^o = 2(60) - 20^o = 100^o$$

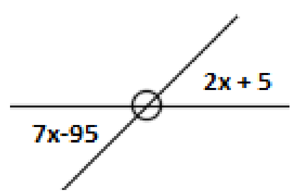
3.- En la figura, ¿Cuál de los siguientes ángulos representan ser “opuestos por el vértice”?



Solución:

∠ROP Y ∠QOS son opuestos por el vértice ya que tienen como vértice en común el punto O.

4.- Hallar el valor de "x" de la siguiente figura:



Solución

Como se observa los ángulos son *opuestos por el vértice* por lo que tienen la misma magnitud ambos y la ecuación que ayuda a la solución del problema es:

$$7x - 95^o = 2x + 5^o \ (de\ la\ cual\ se\ despeja\ en\ valor\ de\ \mathrm{x})$$

$$7x - 2x = 5^o + 95^o$$

$$5x = 100^o$$

$$x = \frac{100^O}{5}$$

$$x = 20^o$$

Aprendizajes.

- Entender los conceptos básicos de las Razones y proporciones.
- Entender la diferencia entre razón y proporción.
- Comprender la clasificación de las proporciones:
  - -Ordinaria
  - -Continua
- Establecer las propiedades de las proporciones a partir de ejemplos con literales para cada propiedad.
- Aplicar el concepto de proporción en un problema relacionado a la vida diaria.
- Aplicar la regla de 3 simple y la regla de 3 inversa a problemas de la vida diaria.
- Entender los conceptos de triángulos semejantes mediante las proporciones.
- Poder resolver ejercicios de cualquier tipo aplicando teoremas de triángulos semejantes.
- Entender los conceptos de triángulos congruentes mediante las proporciones.
- Poder resolver ejercicios de cualquier tipo aplicando teoremas de triángulos congruentes.
  - -Teorema LAL (Lado, Angulo, Lado)
  - -Teorema ALA (Angulo, Lado, Angulo)
  - -Teorema LLL (Lado, Lado, Lado)
- Saber obtener ecuaciones por medio de proporciones para ejercicios del Teorema de Thales de Mileto.
- Entender y Aplicar el Teorema General de Thales de Mileto y su aplicación inversa y el Teorema General de Thales de Mileto para triángulos.
- Poder resolver ejercicios y problemas aplicando los conocimientos anteriores mencionados.

4.1.3 Razones y proporciones numéricas.

Razón

Dados dos números en un cierto orden, distintos de cero, se llama razón al cociente entre ellos.

Una razón entre dos cantidades es una "comparación" entre las cantidades que se realiza mediante un cociente **a: b** y se lee **"a es a b".**

Si $\boldsymbol{a : b = c : d}$

$$\textbf{Si } \frac{a}{b} = m$$

$$\textbf{Si } \frac{c}{d} = m$$

Entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textbf{ Proporción}$$

Proporción

Se le denomina proporción a la igualdad de dos razones ejemplo:

$$\begin{array}{lcr} \text{extremo} & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \text{medio} \\ \text{medio} & & \text{extremo} \end{array}$$

De la primera proporción se le denomina antecedente al numerador **a** y **c** y consecuente al denominador **b** y **d**

Clasificación:

1) **Ordinaria:**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{7}{8}=\frac{14}{16}$$

2) **Continua:**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$$

Se dice que una proporción es continua cuando sus medios son iguales.

4.1.6 Propiedades de las proporciones

Propiedades de las proporciones: (PRECEPTOR ENCICLOPEDIA TEMATICA ESTUDIANTIL, s.f.)

1.-En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};a*d=b*c$$

$$\frac{6}{4}=\frac{3}{2};6*2=4*3;12=12$$

2.-En toda proporción, la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

3.-En toda proporción, la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

4.-En toda proporción, la diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente como la diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$$

5.- En toda proporción, la diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

6.-La suma de antecedente y consecuente de la primera razón es a su diferencia como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón a su diferencia.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

7.-La diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón es a su suma como la diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su suma.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{d+d}$$

Ejemplo:

1.-Encuentra el valor de "x" en la proporción:

$$\frac{x}{25}=\frac{3}{5}$$

Solución:

Como sabemos la división de fracciones igualadas se puede resolver multiplicado diagonalmente el numerador con el denominador y el denominador con el numerador, por lo que la x multiplica al 5 y el 25 multiplica al 3 como se ve a continuación:

$$\frac{x}{25}=\frac{3}{5}$$

$$5x=(25)(3)$$

$$x=\frac{(25)(3)}{5}$$

$$x=15$$

4.1.7 Regla de tres simple:

Una de las más importantes aplicaciones de las proporciones está en la resolución de los problemas de regla de tres simple y compuesta. La regla de 3 simple es una operación que nos ayuda a resolver rápidamente problemas de proporcionalidad, tanto directa como inversa.

Para hacer una regla de 3 simple necesitamos de 3 datos; dos magnitudes proporcionales entre si y una tercera magnitud. A partir de estos, averiguaremos al cuarto término de la proporcionalidad.

a -----> b

c -----> x

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{b * c}{a}}$$

2.- Si cinco libros de texto costaron $210 ¿Cuál es el precio de la docena de libros?

Solución:

$$\mathbf{5 -- \rightarrow \$210\ \textit{euros}}$$

$$\mathbf{12 -- \rightarrow \textit{x euros}}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{210}{x}$$

$$5x = (210)(12)$$

$$x = \frac{(210)(12)}{5}$$

$$x = 504$$

4.1.8 Regla de tres simple inversa:

Ahora vamos a ver cómo aplicar la regla de 3 simple en casos de proporcionalidad inversa, se colocan los 3 datos y la incógnita ahora con una distinta formula a la anterior:

a -----> b

c -----> x

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{a * b}{c}}$$

Ejemplos:

1.-Una alberca se llena en 6 horas con 2 mangueras abiertas. ¿Cuánto tardará en llenarse la misma alberca con 5 mangueras abiertas?

$$\mathbf{2\ \textit{mangueras} -- \rightarrow 6\ \textit{hrs}}$$

$$\mathbf{5\ \textit{mangueras} -- \rightarrow \textit{x hrs}}$$

$$x = \frac{(2)(6)}{5}$$

$$x = \frac{12}{5}$$

$$\mathbf{x = 2.4\ \textit{hrs}}$$

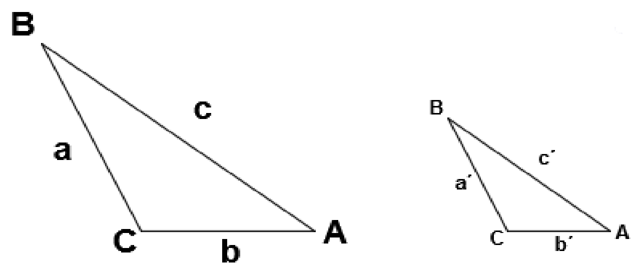
4.1.9 Triángulos semejantes

Los triángulos ABC Y A´B´C´ son semejantes si tienen la misma forma, pero no él mismo tamaño.

Lados homólogos

Son aquellos cuyos ángulos adyacentes son iguales.

a con a´, b con b´, c con c´



Par hay que indicar que dos triángulos son semejantes se escribe ΔABC ∼A´B´C´ donde el símbolo ∼ significa que es semejante.

Propiedades fundamentales.

1.-Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales o proporcionales.

2.-Dos triángulos son semejantes si la razón de cada par de lados homólogos es constante, es decir si sus lados son respectivamente proporcionales.

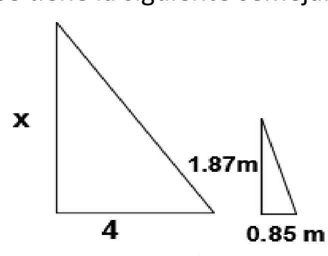
$$\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} = \frac{c}{c´}$$

Ejemplo:

1.- Determinar la altura de un poste sabiendo que a medio día proyecta una sombra de 4 m y una persona que mide 1,87 m tiene, en ese mismo instante una sombra de 0.85 m.

Solución

Sabiendo que x es la altura de la casa se tiene la siguiente semejanza de triángulos



$$\frac{x}{1.87} = \frac{4}{0.85}$$

$$0.85x = (1.87)(4)$$

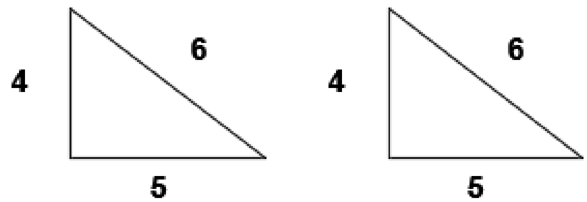
$$x = \frac{(1.87)(4)}{0.85}$$

$$x = 8.8\,m$$

4.1.10 Triángulos congruentes

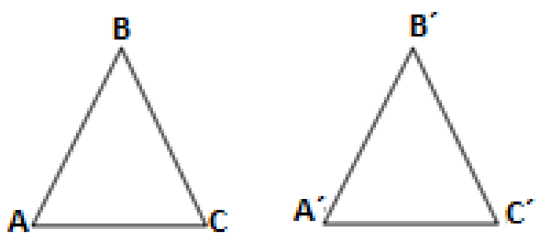
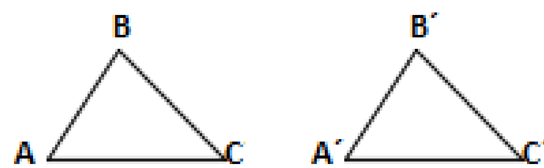
Son aquellos que tienen misma forma y tamaño, si 2 triángulos son congruentes entonces:

Sus lados homólogos son iguales
Sus ángulos homólogos son iguales

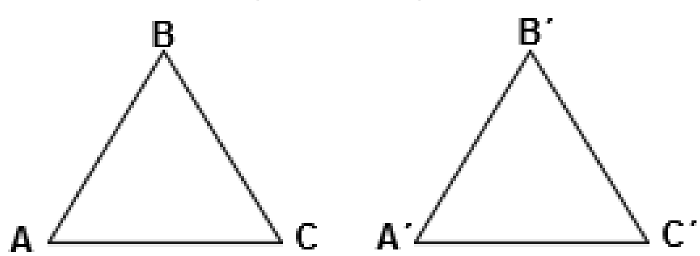


Los triángulos mostrados son congruentes porque son iguales sus lados y sus ángulos, es decir, existe igualdad entre los 3 pares de lados y los 3 pares de ángulos.

Teoremas de Congruencia (Aguilar Márquez, Bravo Vázquez, Gallegos Ruíz, Cerón Villegas, & Reyes, 2009)**.**

Teorema LAL (Lado, Angulo, Lado) - Dos triángulos son congruentes, si tienen 2 lados iguales y el ángulo que forman dichos lados, también son iguales.  **BA = B´A´, $\angle$A = $\angle$A´, AC = A´C´**	**Teorema ALA (Angulo, Lado, Angulo) -** Dos triángulos son congruentes, si tienen 2 ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente iguales.  **$\angle$A = $\angle$A´, AC = A´C´, $\angle$C = $\angle$C´**

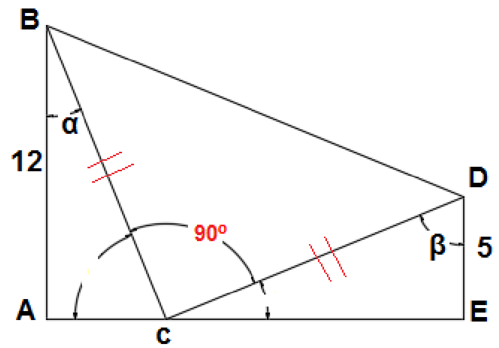
Teorema LLL (Lado, Lado, Lado) - Dos triángulos son congruentes, si tienen sus 3 lados iguales.

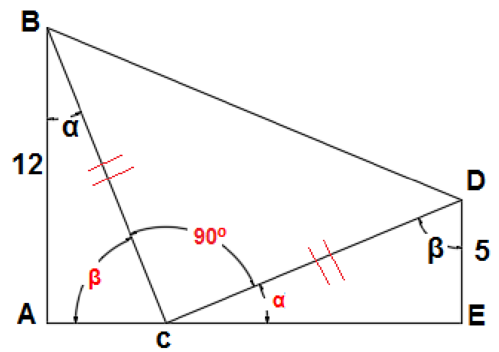


BA = B´A´, AC = A´C´, BC = B´C´

Ejemplo:

1.- En la figura BCD se muestra un triángulo rectángulo isósceles. Si AB=12cm y DE= 5cm, hallar la distancia o el valor de AE.





Solución:

Empecemos nombrando los ángulos faltantes con cualquier literal en este caso usaremos β y α

Observamos primero que $\beta + 90^{o} + \alpha = 180^{o}$ por lo que son suplementarios

Observamos que $\boldsymbol{\beta} + \alpha = 90^{o}$ y $\boldsymbol{\alpha} + \beta = 90^{o}$ del triángulo CDE porque el ángulo **E** es de 90^{o} (ya que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180^{o})

Observemos que $\beta + \boldsymbol{\alpha} = 90^{o}$ del triángulo ABC porque el ángulo **A** es de 90^{o} (ya que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180^{o}) por lo que el triángulo **ABC Y CDE son congruentes.**

Por lo que tenemos el caso **ALA (Angulo, Lado, Angulo)**

En conclusión:

El segmento CE mide lo mismo que el segmento AB ósea **CE=12**

El segmento DE mide lo mismo que el segmento AC ósea **DE=5**

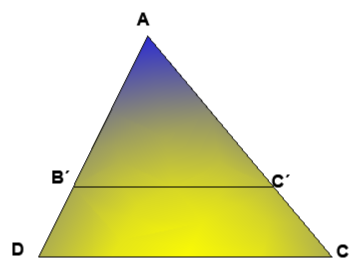
Por lo que la distancia AE = 17 cm

4.1.11 Teorema de Thales de Mileto.

Para entender el enunciado del problema es necesario primero establecer que dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales y sus lados son proporcionales entre sí. El primer teorema de Tales recoge uno de los postulados más básicos de la geometría, a saber, que: ***"Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes proporcionales."*** (Briseño Aguirre & Verdugo Díaz, 2006)

Entonces, veamos el primer Teorema de Tales en un triángulo:

Dado un **triángulo ABC**, si se traza un **segmento paralelo, B'C',** a uno de los **lados** del triángulo, se obtiene otro **triángulo AB'C'** , cuyos **lados** son **proporcionales** a los del **triángulo ABC**



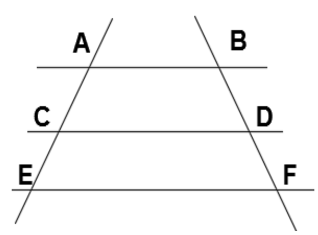
Lo que se traduce en la fórmula:

$$\left(\frac{AB}{AB'}\right) = \left(\frac{AC}{AC'}\right) = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)$$

Nota: // significa que son líneas paralelas.

Teorema general de Thales

"Si varias paralelas son cortadas por dos secantes, los segmentos determinados en una secante son proporcionales a los determinados en la otra." (Briseño Aguirre & Verdugo Díaz, 2006)



AB // CD //EF

Del teorema general de Thales, se pueden obtener también las siguientes proporciones.

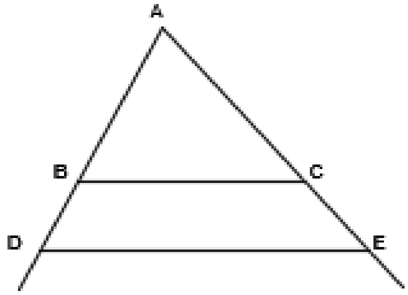
$$\left(\frac{AC}{CE}\right) = \left(\frac{BD}{DF}\right)$$

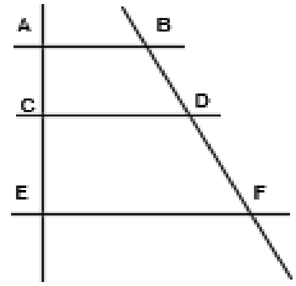
$$\left(\frac{AC}{AE}\right) = \left(\frac{BD}{BF}\right)$$

$$\left(\frac{AE}{CE}\right) = \left(\frac{BF}{DF}\right)$$

4.1.12 Teorema recíproco de Thales

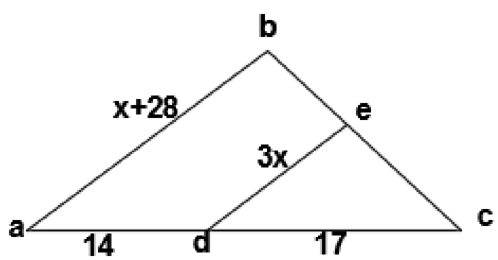
Si dos o más rectas determinan segmentos proporcionales sobre dos transversales, entonces las rectas son paralelas entre sí. Es decir, es el inverso a los Teoremas de Thales.





Si cumple que: $$\left(\frac{AB}{BD}\right)=\left(\frac{AC}{CE}\right)$$ **Entonces** **BC // DE**	**Si cumple que:** $$\left(\frac{AC}{CE}\right)=\left(\frac{BD}{DF}\right)$$ **Entonces** **AB // CD // EF**

Ejemplo:
1.- Calcula el valor de "x" en las siguientes figuras:
Dado el segmento de // ab



Solución:

Se establece la proporción de los segmentos de los dos triángulos quedándonos de la siguiente forma y expresando que el lado mayor o el segmento ab es al lado menor o segmento de (ya que es son paralelas) y el lado mayor o segmento ac es al lado menor o segmento ad.

$$\frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{de}}=\frac{\boldsymbol{ac}}{\boldsymbol{dc}}$$

$$\frac{x+28}{3x}=\frac{14+17}{17}$$

Como sabemos la igualdad de dos razones o proporción se puede resolver multiplicando extremos con extremos y medios con medios quedándonos de la siguiente forma:

$$17\ (x + 28) = 31(3x)$$

Multiplicamos cada término del paréntesis y nos queda:

$$17x + 476 = 93x$$

Colocamos las x de un lado y los números del otro aplicando la operación contraria

$$17x - 93x = -476$$

Se reducen términos semejantes en este caso el termino semejante es x y se procede a despejarla como el -76 está multiplicando pasa del otro lado de la igualdad dividiendo y dándonos el resultado final el cual es x = 6.26

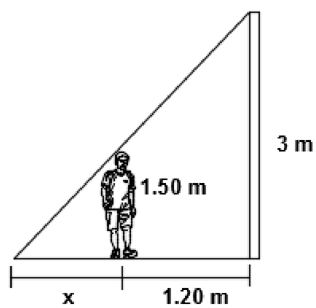
$$-76x = -476$$

$$x = \frac{-476}{-76}$$

$$x = 6.26$$

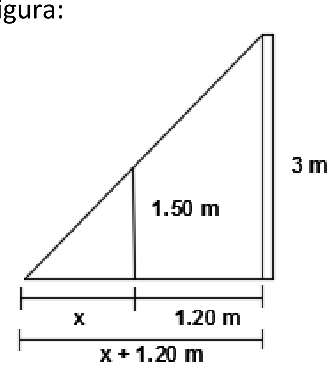
Ejemplo:

2.-Un niño mide de estatura 1.5 m, esté se encuentra a 1.20 m de un poste de luz cuya altura es de 3 m ¿Cuál es el largo de la sombra que proyecta esa persona?



Solución:

Como se observa en la figura se tienen 2 paralelas en un triángulo y se conocen sus distancias de 1,5 m y de 3 m como se observa en la siguiente figura:



Teniendo eso se hace la siguiente relación aplicando el teorema de Thales x es a la longitud total del triángulo (x+1.2 m) , como la altura del niño de 1.5 es a la altura del poste de luz de 3 m.

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x + 1.2}}\right) = \left(\frac{\mathbf{1.5}}{\mathbf{3}}\right)$$

Por tratarse de una división de fracciones se multiplicarán en forma de cruz quedando así.

$$3x = 1.5\ (x + 1.2)$$

$$3x = 1.5x + 1.8$$

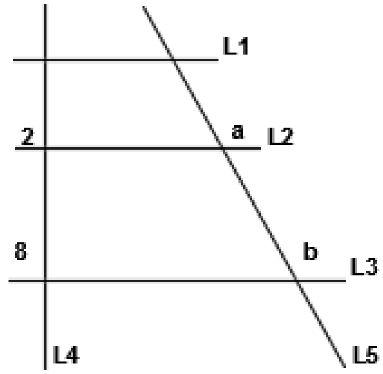
$$1.5x = 1.8$$

$$x = \frac{1.8}{1.5}$$

$$x = 1.2$$

Ejemplo:

3.-Si L1 // L2 // L3, calcula a y b, si se sabe que a + b =15



Solución:

El primer paso es determinar la proporción para poder calcular el valor de b:

$$\left(\frac{\mathbf{8+2}}{\mathbf{8}}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{b}}\right)$$

Al igual que en el problema pasado por ser división de fracciones se multiplican cruzados

$$\left(\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{8}}\right)=\left(\frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{b}}\right)$$

$$\left(\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{8}}\right)=\left(\frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{b}}\right)$$

$$\mathbf{10}\,\boldsymbol{b}=\mathbf{120}$$

Finalmente se despeja el valor de **b** como el 10 está multiplicando a **b** pasa del otro lado de la igualdad dividiendo.

$$\boldsymbol{b}=\frac{\mathbf{120}}{\mathbf{10}}$$

$$\boldsymbol{b}=\mathbf{12}$$

Ahora como $a+b=15$ reemplazamos b y obtenemos el valor de a

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{15}$$
$$\boldsymbol{a}+\mathbf{12}=\mathbf{15}$$
$$\boldsymbol{a}=\mathbf{15}-\mathbf{12}$$
$$\boldsymbol{a}=\mathbf{3}$$

Aprendizajes.

- Entender los conceptos básicos, propiedades y características de los polígonos.
- Entender la diferencia entre los polígonos regulares e irregulares, convexo y cóncavo.
- Identificar el tipo de polígono de acuerdo con el número de lados que tenga.
- Establecer las propiedades y elementos que conforman a los polígonos regulares e irregulares tales como
  - -Vértice
  - -Angulo interior y exterior
  - -Diagonal
- Establecer el número de diagonales que puede tener un polígono, así como la magnitud de sus ángulos conforme a fórmulas establecidas.
- Identificar el número de diagonales que puede tener cierto polígono de n lados.
- Poder resolver ejercicios y problemas aplicando los conocimientos anteriores mencionados.

4.1.13 Polígonos

Los polígonos son formas bidimensionales cuyas líneas rectas están conectadas entre si y su forma es cerrada.

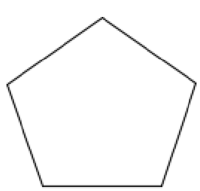
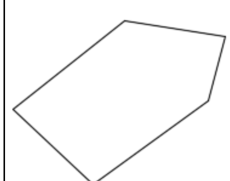
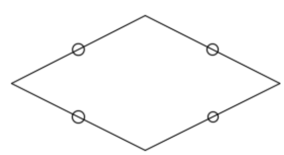
La palabra polígono está formada por dos voces de origen griego: polys (mucho) y gonia (ángulo).

Cada polígono recibe un nombre de acuerdo con el número de lados que lo conforman; para saber cómo se llama un polígono.

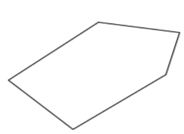
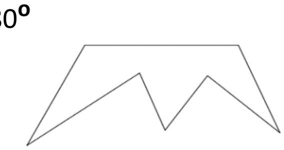
Clasificación:

Los polígonos se clasifican de acuerdo con sus lados o la magnitud de sus ángulos interiores.

1-. Por la igualdad de sus lados y ángulos

Regulares. Tienen todos sus lados iguales.	**Irregulares.** Tienen la medida de sus ángulos distintos.	**Equilátero.** Tiene todos sus lados iguales.	**Equiángulo.** Tiene todos sus ángulos iguales.
			

2.-Por sus Ángulos

Convexo: Los ángulos interiores son todos menores a 180^{o}	**Cóncavo:** Uno de sus ángulos interiores es mayor que 180^{o}
	

3.- Por su número de lados

Nombre	Lados	Nombre	Lados
Triángulo	**3**	**Decágono**	**10**
Cuadrilátero	**4**	**Undecágono**	**11**
Pentágono	**5**	**Dodecágono**	**12**
Hexágono	**6**	**Tridecágono**	**13**
Heptágono	**7**	**Tetradecágono**	**14**
Octágono	**8**	**Pentadecágono**	**15**
Nonágono	**9**	**Hexadecágono**	**16**

Elementos

Vértice. - *Es el punto donde concurren dos lados.*

Angulo interior. - *Es el que se forma con 2 lados adyacentes de un polígono.*

Angulo exterior. - *Es aquel que se forma entre la prolongación de uno de los lados y su lado adyacente.*

Diagonal. - *Es el segmento de recta que une 2 vértices no adyacentes* (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

4.1.14 Número de diagonales y ángulos de un polígono

Las diagonales de un polígono son segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

El número de diagonales **D** de un polígono convexo (sea o no regular) viene determinado por el número de lados N que tiene el polígono. Su fórmula es:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde:
n es el número de lados del polígono.
D diagonales totales del polígono

Ejemplo:
1.- Calcula el número de diagonales totales de un cuadrado y de un hexágono.

Solución:

Para el cuadrado:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Como el cuadrado tiene 4 lados sustituimos 4 en el valor de n y resolvemos operaciones:

$$D = \frac{4(4-3)}{2} \quad D = \frac{4(1)}{2} \quad D = \frac{4}{2} \quad D = 2$$

Para el hexágono:

$$\boldsymbol{D = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Como el hexágono tiene 6 lados sustituimos 6 en el valor de n y resolvemos operaciones:

$$\boldsymbol{D = \frac{6(6-3)}{2} \quad D = \frac{6(3)}{2} \quad D = \frac{18}{2} \quad D = 9}$$

Ángulos de un polígono

Para obtener la magnitud de los ángulos de un polígono se utilizan las siguientes formulas:

Suma de ángulos internos de cualquier polígono	Angulo interior de un polígono regular
$\boldsymbol{si = 180^o(n-2)}$	$\boldsymbol{i = \frac{180\,(n-2)}{n}}$
Suma de ángulos exteriores de cualquier polígono	**Angulo exterior de un polígono regular**
$\boldsymbol{Se = 360^o}$	$\boldsymbol{e = \frac{360}{n}}$

1.- ¿Cuál es el polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1080^{o}?

Solución:

Debemos ocupar la fórmula de los ángulos interiores de cualquier polígono y como ya conocemos ese dato que es 1080 nuestra incógnita es la "n" ósea el número de lados para determinar de qué polígono se está hablando por lo que se despejara de la formula.

$$si = 180^o(n-2)$$

$$1080^o = 180^o(n-2)$$

$$\frac{1080^o}{180^o} = n-2$$

$$6 = n-2$$

$$6+2 = n$$

$$8 = n\ (octágono)$$

2.- En un polígono, la suma de las medidas de los ángulos exteriores e interiores es 1980^{O}. Calcule el total de diagonales de dicho polígono.

Solución:

Del enunciado podemos determinar la siguiente ecuación

$$Se + Si = 1980$$

Y se reemplazan los datos que ya conocemos como la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono que es de 360^{O} por lo que la ecuación queda de la siguiente forma:

$$360^o + 180^o(n-2) = 1980^o$$

$$360^o + \ 180^o n - 360 = \ 1980^o \ (se\ restan\ 360^o - \ 360^o = 0)$$

$$180^o n = 1980^o$$

$$n = \frac{1980}{180}$$

$$n = 11\ lados$$

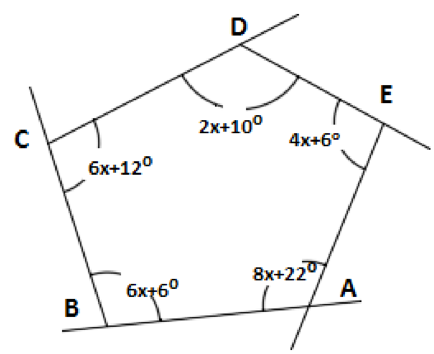
Ahora ocupamos la fórmula del número de diagonales y queda de la siguiente forma:

$\boldsymbol{D = \frac{n(n-3)}{2}} \quad \boldsymbol{D = \frac{11(11-3)}{2}} \quad \boldsymbol{D = \frac{11(8)}{2}} \quad \boldsymbol{D = \frac{88}{2}}$

$\boldsymbol{D = 44\ diagonales}$

Ejemplo:

1.- Determina los ángulos interiores del siguiente polígono.



Solución:

$$\boldsymbol{si = 180\ (n-2) = 180\ (5-2) = 540^o}$$

Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un pentágono es de 540 por lo que la ecuación a considerar es:

$$8x + \ 22^o + 6x + 6^o + 6x + 12^o + 2x + 10^o + 4x + 6^o = 540^o$$

Agrupamos los términos independientes del otro lado de la igualdad con signo contrario quedando:

$$8x + 6x + 6x + 2x + 4x = 540 - 22 - 6 - 12 - 10 - 6$$

$$26x = 484$$

$$x = \frac{484}{26}$$

$$x = 18.615$$

Sustituyendo en las ecuaciones de cada ángulo nos queda:

$$\angle A = 8x + 22 = 8(18.615) + 22 = 170.92^{o}$$
$$\angle B = 6x + 6 = 6(18.615) + 6 = 117.7^{o}$$
$$\angle C = 6x + 12 = 6(18.615) + 12 = 123.69^{o}$$
$$\angle D = 2x + 10 = 2(18.615) + 10 = 47.23^{o}$$
$$\angle E = 4x + 6 = 4(18.615) + 6 = 80.46^{o}$$

Haciendo la suma de todos los ángulos nos queda:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^{o}$$

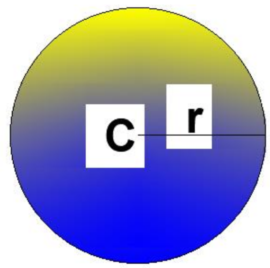
Aprendizajes.

- Entender el concepto de circunferencia y su diferencia con los demás polígonos.
- Identificar a simple vista los elementos que componen a la circunferencia como puntos y rectas notables:
  - -Radio
  - -Diámetro
  - -Cuerda
  - -Secante
  - -Tangente
  - -Arco
- Identificar los ángulos notables y arcos de la circunferencia, así como las fórmulas que componen cada ángulo para poder determinar la medida de dichos ángulos, los cuales son:
  - -Angulo central
  - -Angulo inscrito
  - -Angulo Semi inscrito
  - -Angulo interior
  - -Angulo exterior
- Identificar de qué tipo de ángulo se trata cada problema y poder identificar que ecuación ayuda a su solución.
- Poder resolver ejercicios y problemas aplicando los conocimientos anteriores mencionados.

La circunferencia es uno de los elementos más importantes de la geometría y cuyo estudio es muy importante ya que esta se encuentra normalmente en la vida diaria, y esta figura geométrica ha sido utilizada y estudiada desde la antigüedad y ha sido una importante herramienta para un sin número de casos. En la prehistoria con la invención de la rueda se dio inicio a un gran número de inventos y aplicaciones de la circunferencia ya que esta se encuentra en todas partes, un ejemplo sería en la utilización de las ruedas como la de la bicicleta, o en la fabricación de relojes que normalmente tienen forma de circunferencia y son divididos en 12 partes iguales entre muchos otros inventos.

4.1.15 Circunferencia

La circunferencia es una figura plana determinada por el conjunto de puntos que equidistan de un punto llamado centro, la distancia que hay del centro a cualquier punto del perímetro de la circunferencia, es el radio, y este a su vez forma el diámetro al sumar los dos segmentos del radio. La circunferencia al igual que el triángulo es la figura geométrica que más se utiliza en matemáticas.



C = centro

r = radio

Rectas notables.

Radio: Segmento de recta determinado por el centro de la circunferencia y un punto cualquiera que pertenezca a la circunferencia.

Diámetro: Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia y tiene una magnitud que es igual al doble del radio.

Cuerda: Es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.

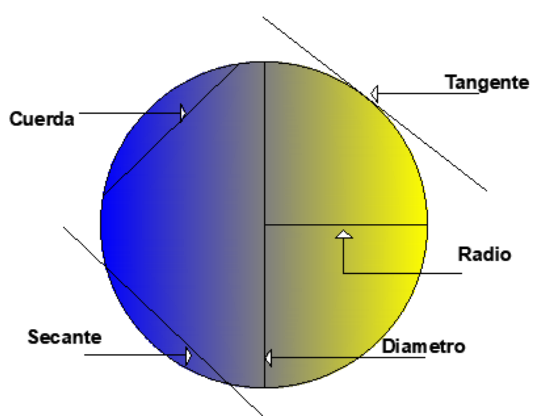
Secante: Es la recta que intercepta o corta a una circunferencia en dos puntos.

Tangente: Es la recta que toca un solo punto de la circunferencia y este punto de contacto con la circunferencia se le llama punto tangencia y se dice que la recta y la circunferencia son tangentes.

Arco: Es una porción de la circunferencia.

Semicircunferencia: Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

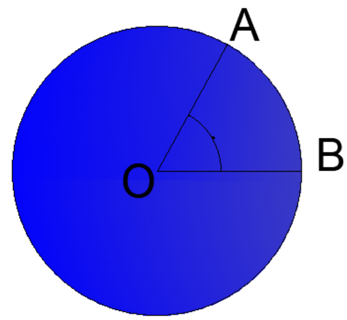
Semicírculo: Es la porción del plano comprendida entre un diámetro y la semicircunferencia correspondiente.



4.1.16 Ángulos y arcos de la circunferencia

Angulo central: *Es aquel cuyo vértice está en el centro y sus lados son dos radios.*

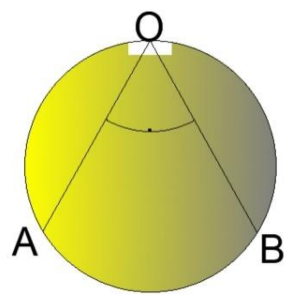
La magnitud del ángulo central es igual a la magnitud del arco determinado por los lados del ángulo (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).



AOB = AB

Angulo inscrito: *Es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.*

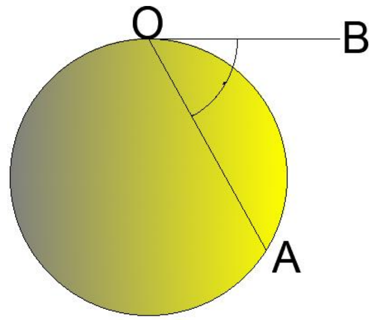
La medida de un ángulo inscrito de una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).



AOB = $\frac{1}{2}$ AB

Angulo semi inscrito: *Es aquel que está formado por una recta tangente y una cuerda.*

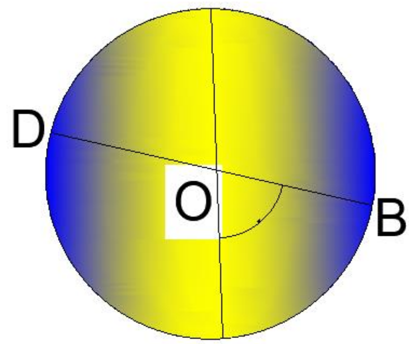
Su magnitud es la mitad del arco formado por la intercepción de la cuerda con la circunferencia (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).



AOB = $\frac{1}{2}$ AB

Angulo interior: *Es aquel que tiene su vértice dentro de la circunferencia y lo forman dos cuerdas que se cortan.*

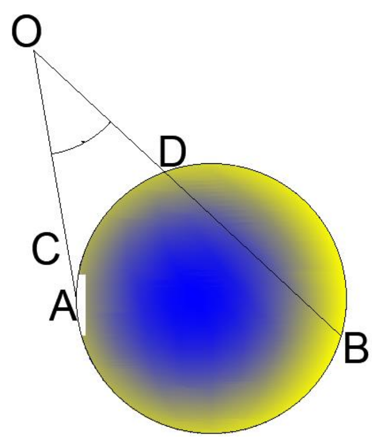
La magnitud de un ángulo central es igual a la semi suma de los arcos que determinan los lados de dichos ángulos (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).



$AOB = \frac{1}{2}\ (AB + CD)$

Angulo exterior*: Es aquel que tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados pueden ser, dos secantes o una secante y una tangente o dos tangentes, como se muestra a continuación* (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

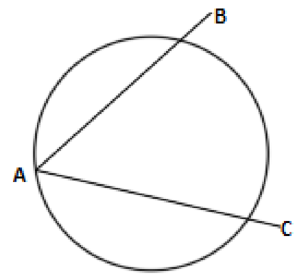
La magnitud de un ángulo exterior es igual a la diferencia de os arcos que determinan sus lados entre dos:



$AOB = \frac{1}{2}\ (AB - CD)$

Ejemplos:

1.-Determina el valor del arco determinado por los lados del ángulo $\angle \boldsymbol{ABC} = \mathbf{54^{o}}$



Solución:

El ángulo $\angle ABC$ es un ángulo inscrito y su magnitud es igual a la mitad del arco entonces:

$$\angle \boldsymbol{ABC} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\mathbf{2}}$$

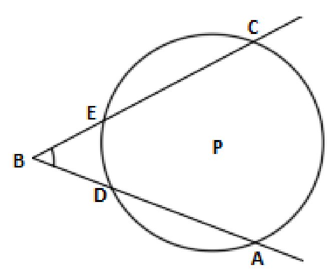
(Despejando al arco BC)

$$2\angle ABC = BC$$

$$BC = 2(54^{o})$$

$$BC = 108^{O}$$

2.-Encuentra el valor del ángulo $\angle \boldsymbol{ABC}$ formado por las secantes si el arco AC = $\mathbf{62^{o}}$ y el arco DE = $\mathbf{28^{o}}$



Solución:

El ángulo $\angle ABC$ es exterior, entonces:

$$\angle \boldsymbol{ABC} = \frac{\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{DE}}{\mathbf{2}}$$

Sustituyendo los valores de AC = 62^{o} Y DE = 28^{o} se obtiene:

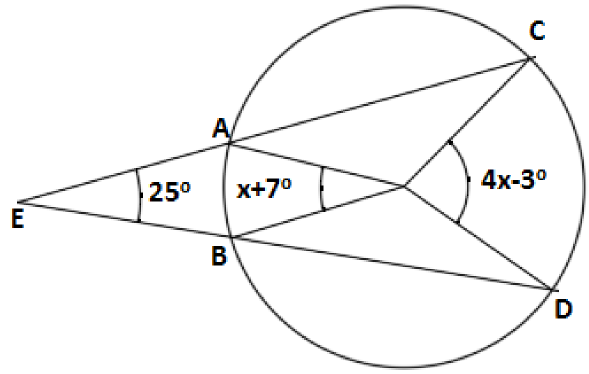
$$\angle ABC = \frac{62 - 28}{2}$$

$$\angle ABC = \frac{34}{2}$$

$$\angle ABC = 17^{O}$$

A diferencia de los casos anteriores se tiene un ejercicio un poco más elaborado y complejo que los pasados, ya que se tiene que plantear la ecuación, pero esta está en términos de x por lo que habrá que hacer más pasos, como es resolver la ecuación y hallar el valor de x, pero una vez comprendido los ejercicios anteriores y el concepto general es más fácil razonar el problema y poder llegar a su solución.

2.-Encuentra el valor de "x" que satisface la circunferencia.



Solución:

Se tiene el valor de 25° que es el ángulo $\angle CDE$ y cuyo ángulo es externo por lo que ya sabemos que ecuación ocupar, pero a diferencia de los casos anteriores se tiene un valor en términos de x por lo que tenemos que despejar dicho valor.

$$\angle \boldsymbol{CDE} = \frac{\boldsymbol{CD - AB}}{\boldsymbol{2}}$$

Sustituyendo valores:

$$\boldsymbol{25^{O}} = \frac{\boldsymbol{(4x-3)-(x+7)}}{\boldsymbol{2}}$$

Despejamos el valor de x para llegar al resultado de la ecuación separando términos semejantes:

$$(2)(50) = (4X - 3) - (X + 7)$$

$$50 = 4x - 3 - x - 7$$

$$50 = 3x - 10$$

$$50 + 10 = 3x$$

$$60 = 3x$$

$$\frac{60}{3} = x$$

$$\boldsymbol{20 = x}$$

Aprendizajes.

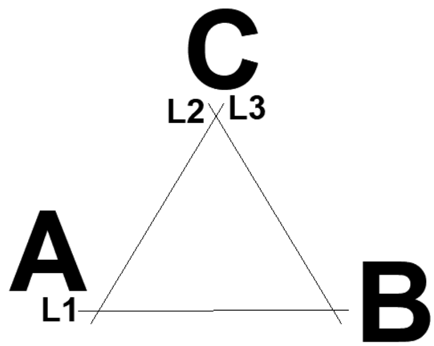
- Entender el concepto de triángulo y su diferencia con los demás polígonos.
- Identificar la clasificación de los triángulos de acuerdo con sus lados:
  -Triángulo equilátero
  -Triángulo isósceles
  -Triángulo escaleno
- Identificar la clasificación de los triángulos de acuerdo con sus ángulos:
  -Triángulo rectángulo
  -Triángulo acutángulo
  -Triángulo obtusángulo
- Identificar los Puntos notables del triángulo.
  -Circuncentro
  -Incentro
  -Baricentro
  -Ortocentro
- Identificar las Rectas notables del triángulo.
  -Mediatriz
  -Bisectriz
  -Mediana
  -Altura
- Entender y razonar los teoremas más importantes sobre triángulos en 2 dimensiones
- Identificar los triángulos rectángulos, teorema de Pitágoras, así como usar las razones trigonométricas para resolver ejercicios aplicados de trigonometría.
- Identificar las Identidades trigonométricas y sus inversas, así como la demostración de estas.
- Entender la manera de resolver ecuaciones trigonométricas y el razonamiento de estas.
- Entender y comprender las leyes de senos y cosenos, así como sus aplicaciones en la vida diaria y uso en la ingeniería.
- Poder resolver ejercicios y problemas aplicando los conocimientos anteriores mencionados.

4.1.17 Trigonometría.

Triangulo:

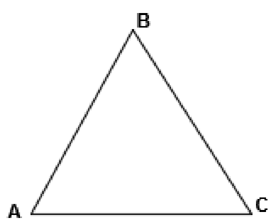
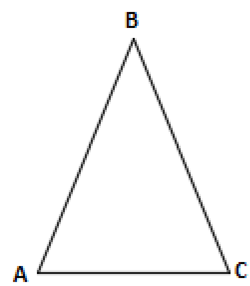
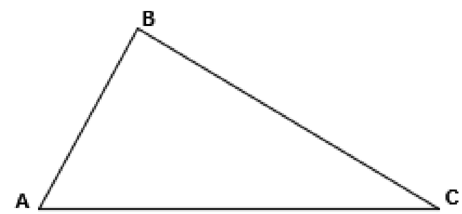
Un triángulo es el polígono o figura geométrica de 3 lados y 3 ángulos, que resulta de unir 3 puntos con líneas rectas, esta porción del plano está limitada por 3 rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices y cabe aclarar que es importante su estudio ya que esta figura está presente en la vida diaria como en estructuras de puentes. El triángulo es muy estudiado en las estructuras porque es la única figura que no se puede deformar.

Los triángulos son una forma de representación de fuerzas esto debido a la gran resistencia y estabilidad que brindan a las estructuras donde se encuentran, esto ha dado gran importancia a los triángulos en las estructuras ya que distribuyen los pesos y las fuerzas aplicadas, lo que hace este tipo de estructuras triangulares más resistentes y firmes, por lo que se aplica para ayudar a una mejor seguridad en las construcciones, edificaciones y viviendas ya que de esta manera son más seguras y pueden perdurar más tiempo.

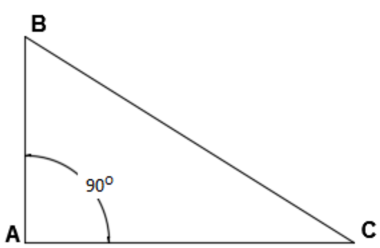
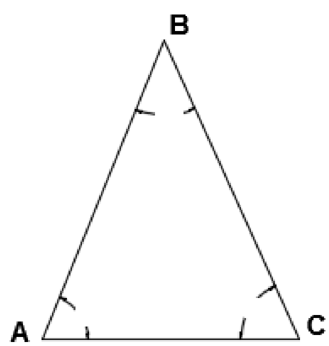
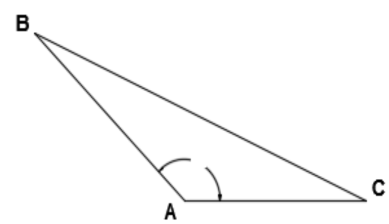


A, B y C; vértices AB BC Y AC; lados

Clasificación de triángulos de acuerdo con sus Lados:

Triángulo equilátero: Sus lados son iguales	**Triángulo isósceles:** Tiene 2 lados iguales	**Triángulo escaleno** Sus lados son diferentes
 **AB = AC = BC**	 **AB = BC ≠AC**	 **AB ≠ BC ≠ AC**

Clasificación de triángulos de acuerdo con sus ángulos :

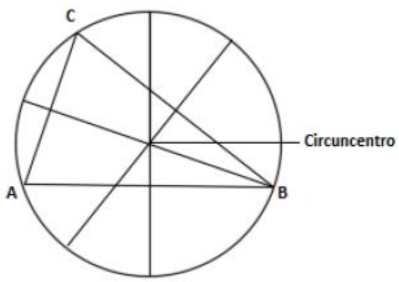
Triángulo rectángulo Tiene un ángulo recto	**Triángulo acutángulo** Sus 3 ángulos son agudos	**Triángulo obtusángulo** Es aquel que tiene un ángulo obtuso
 **$\angle$A = 90 º**	 **$\angle$A < 90 º,$\angle$B < 90 º y$\angle$C < 90º**	**$\angle$A > 90 º** 

4.1.18 Puntos y rectas notables del triángulo

Los puntos notables del triángulo son: circuncentro, incentro baricentro y ortocentro (Aguilar Márquez, Bravo Vázquez, Gallegos Ruíz, Cerón Villegas, & Reyes, 2009).

Circuncentro:

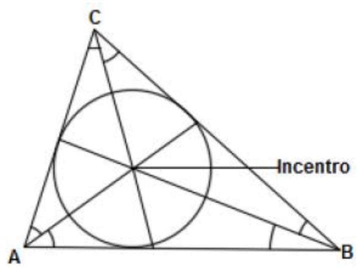
"Es el punto donde se intersecan las mediatrices".



Mediatriz. -Es el segmento de recta, perpendicular que pasa por el punto de uno de sus lados, entonces hay 3 mediatrices en un triángulo. Al punto de intersección de las mediatrices recibe el nombre de **circuncentro.**

Incentro:

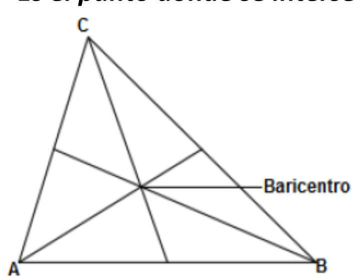
"Es el punto donde se intersecan las bisectrices".



Bisectriz. -Es el segmento de recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales, en un triángulo hay 3 bisectrices y el punto de intersección es el **incentro.**

Baricentro:

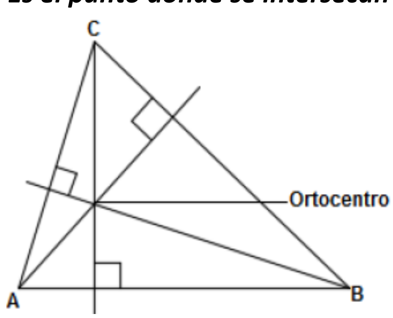
"Es el punto donde se intersecan las medianas".



Mediana. -Es el segmento de recta, que va desde un vértice y llega al punto medio del lado opuesto en un triángulo como tiene 3 vértices, entonces tiene 3 medianas. Al punto de intersección de las medianas recibe el nombre de **baricentro.**

Ortocentro:

"Es el punto donde se intersecan las alturas".



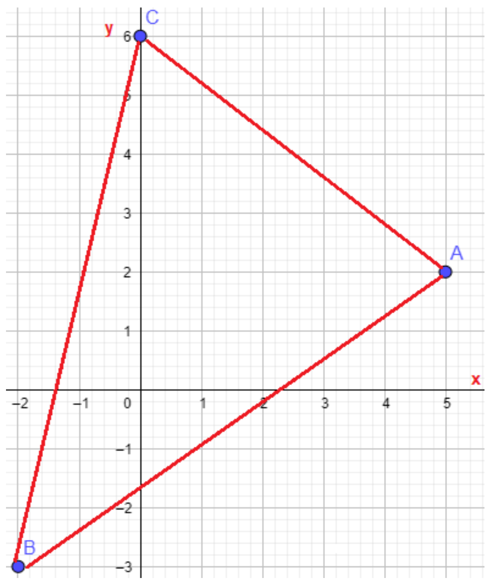
Altura. -Es el segmento de recta que pasa por uno de los vértices y es perpendicular al lado opuesto. En un triángulo existen 3 alturas y al punto de intersección se le llama **ortocentro.**

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la mediana que pasa por el vértice A en el triángulo cuyos vértices son A (5,2) B (-2,-3) C (0,6).

Solución:

Lo primero que determinamos son los puntos de cada vértice que nos da el ejercicio en el plano cartesiano y unirlos para formar el triángulo



Ecuaciones que utilizar:

Punto Medio

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}}$$

Ecuación de la recta

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Pendiente

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2-y_1}{x_{2\,-}\,x_1}}$$

Primero determinamos el punto medio tanto en “x” como en “y” con las coordenadas de B y C

B (-2,-3) C (0,6) lo que sería B (x_1,y_1) C (x_2,x_2)

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{-2+0}{2} = -1$$

$$\boldsymbol{y = \frac{y_1+y_2}{2}} == \frac{-3+6}{2} = 1.5$$

El punto medio sería **Pm (-1, 1.5)** lo que sería Pm (x_2,y_2) y para el punto **A (5,2)** lo que sería ($x_1 y_1$)

Proseguimos a utilizar la fórmula de la ecuación de la recta

$$\boldsymbol{y - y_1 = \left(\frac{y_2-y_1}{x_{2\,-}\,x_1}\right)\ (x - x_1)}$$

$$y - y_1 = \left(\frac{1.5-2}{-1-5}\right)(x-5)$$

$$y - 2 = \left(\frac{-0.5}{-6}\right)(x-5)$$

$$y - 2 = 0.08\ (x-5)$$

$$y - 2 = 0.08x - 0.4$$

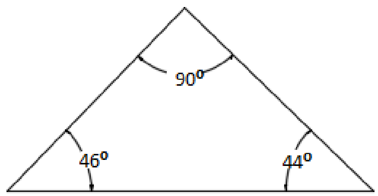
$$y = 0.08x - 0.4 + 2$$

$$y = 0.08x + 1.6\ o\ tambien\ puede\ expresarse\ como\ 0 = 0.08x - y + 1.6\ Ec.general$$

4.1.19 Teoremas importantes sobre triángulos:

A continuación, se mencionan algunos teoremas importantes sobre triángulos. (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

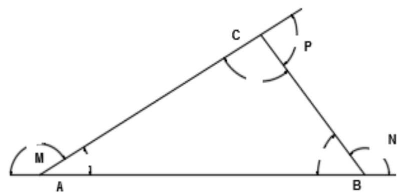
Teorema 1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



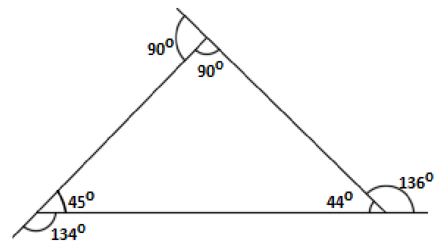
46° + 90°+ 44° = 180°

Teorema 2. Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los 2 interiores no adyacentes a él.

∠ M = ∠B + ∠C
∠ P = ∠A +∠B
∠ N = ∠A + ∠C

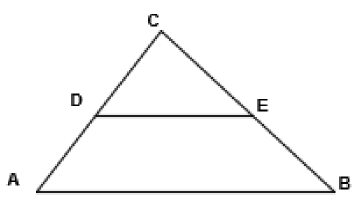


Teorema 3. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360°.



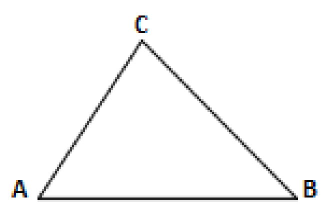
136°+90°+134° = 360°

Teorema 4. En todo triángulo la longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados es igual y también paralela a un medio de la longitud del lado restante.



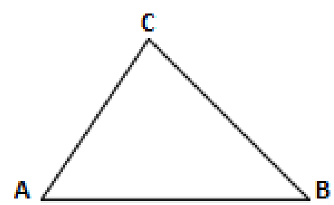
DE // AB, DE = 0.5AB

Teorema 5. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el lado restante, mientras que su diferencia es menor.



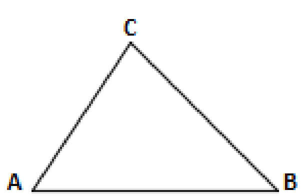
AB < AC + BC

Teorema 6. Si 2 lados de un triángulo son distintos, al lado mayor se opone mayor ángulo.



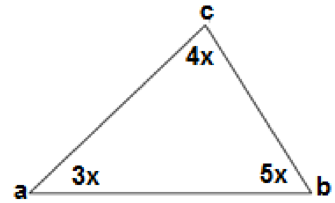
Si BC > AC entonces ∠A > ∠B

Teorema 7. Para 2 ángulos distintos de un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.



Si ∠A > ∠B entonces BC > AC

Ejemplo 1:
Hallar el valor de los ángulos internos del siguiente triángulo



Solución:

Como se vio en la teoría la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre 180$^{\mathbf{o}}$ por lo que de eso podemos deducir que:

$\angle$ **A**+$\angle$**B**+$\angle$**C** $= \mathbf{180^o}$

$\boldsymbol{3x+5x+4x=180^o}$

$\boldsymbol{12x=180^o}$

$\boldsymbol{12x=180^o}$$(\boldsymbol{se\ despeja\ el\ valor\ de\ x}\ )$

$\boldsymbol{x=\frac{180}{12}}$

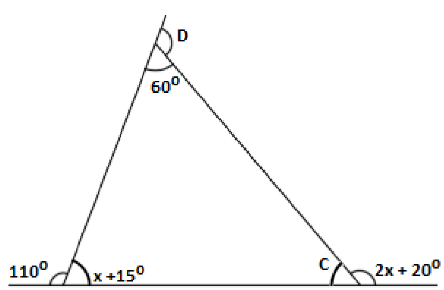
$\boldsymbol{x=15}$

Por último, sustituimos el valor de x en el valor de cada ángulo quedándonos:

$$3x = 3(15) = 45, 4x = 4(15) = 60, 5x = 5(15) = 75$$

sumando los ángulos $45^o + 60^o + 75^o = \ 180^o$

Ejemplo 2:
Encontrar el valor de "$\boldsymbol{x}$" y de los ángulos $\angle$C y $\angle$D



Solución:

Como se vio en la teoría la suma de los ángulos externos de un triángulo es siempre 360$^{\mathbf{o}}$ por lo que de eso podemos deducir que:

$\angle\boldsymbol{110^o}+\angle\boldsymbol{D}+\angle\ \boldsymbol{2x+\ 20^o}$ **=** $\boldsymbol{360^o}$

Tenemos un ángulo suplementario ya que conocemos el 110^o y podemos despejar "x" como lo siguiente:

$x + 15^o + 110^o = 180^o$
$x = 180^o - 15^o - 110^o$
$x = 55^o$

Tenemos el ángulo de la parte posterior que igual es suplementario porque forma 180^o y planteamos la ecuación siguiente:

$$60 + D = 180^o$$
$$D = 180^o - 60^o$$
$$D = 120^o$$

Por último, sustituimos el x en la ecuación de $2x + 20$.

$2x + 20.$

$2(55) + 20 = 130^o.$

Por último, para comprobar que estén bien nuestros resultados hacemos la suma de los ángulos exteriores del triángulo y nos queda:

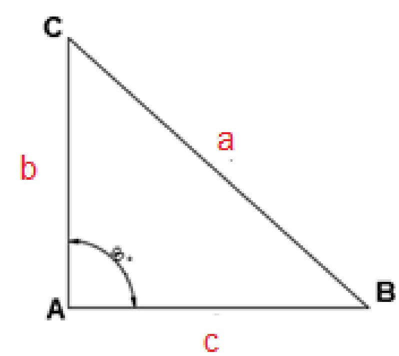
$$110^o + 120^o + 130^o = 360^o$$

lo cual nos indica que los resultados están bien ya que la suma de los ángulos exteriores debe ser 360^o

4.1.20 Teorema de Pitágoras y razones trigonométricas.

Recordemos que el triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto, es decir un ángulo de 90 grados, la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

"La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa." (Briseño Aguirre & Verdugo Díaz, 2006)

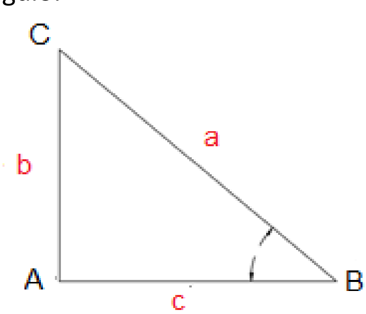


Sea el Δ ABC

En donde a es la hipotenusa, b y c son los catetos, A es el ángulo recto, entonces tomando en cuenta lo anterior tenemos:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$$

En un triángulo rectángulo se llama cateto opuesto al cateto opuesto al ángulo al cual se refiere y cateto adyacente al cateto que forma dicho ángulo.



Con respecto al ángulo B tenemos que:

c es el cateto adyacente

b es el cateto opuesto

a es la hipotenusa

$sen\ B = \left(\frac{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}{\boldsymbol{hipotenusa}}\right) = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ $cscB = \left(\frac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}\right) = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$

$\cos B = \left(\frac{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}{\boldsymbol{hipotenusa}}\right) = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$ $secB = \left(\frac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}\right) = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$

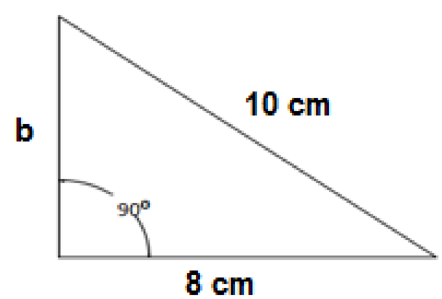
$\tan B = \left(\frac{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}\right) = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$ $\cot B = \left(\frac{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}\right) = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$

Funciones trigonométricas y sus reciprocas

La función trigonométrica de un ángulo depende de la medida de este y no de la magnitud de sus lados, por eso existen tablas de valores naturales de ángulos, ya que mediante ellas podemos conocer el valor de la función trigonométrica de estos sin conocer la medido de los lados y viceversa.

Ejemplos:

1.- Calcula la longitud del lado b del siguiente triángulo con el teorema de Pitágoras:



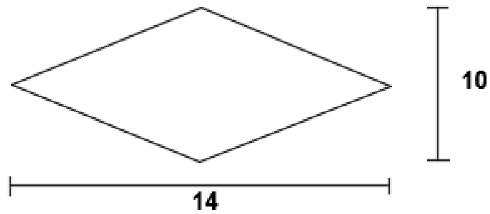
Solución:

Como se observa la figura conocemos 2 lados del triángulo y el ángulo recto por lo que tendríamos la fórmula del teorema de Pitágoras de la siguiente forma despejando el valor de b:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$b = \sqrt{10^2 - 8^2}$$
$$b = \sqrt{100 - 64}$$
$$b = \sqrt{36}$$
$$\boldsymbol{b = 6\ \mathrm{cm}}$$

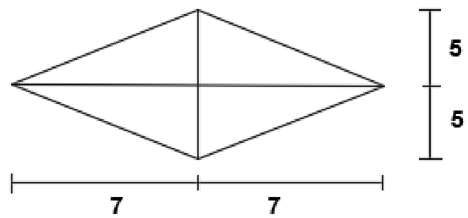
Ejemplo:

2.- Calcular el perímetro del siguiente rombo:



Solución:

Podemos dividir el rombo en cuatro triángulos rectángulos (determinados por sus diagonales):



Recordando que en los rombos todos los lados miden lo mismo, con lo que se puede trabajar con cualquiera de los triángulos obtenidos.

Además, como se ha realizado una división simétrica, sabemos que los catetos miden 7 y 5 en cada triángulo.

Calculamos ahora si con el teorema de Pitágoras conocemos los catetos, pero no la hipotenusa:

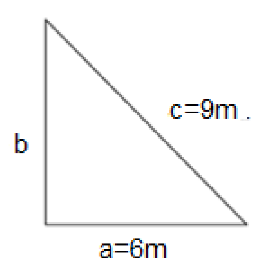
$$h^2 = 7^2 + 5^2$$
$$h = \sqrt{49 + 25}$$
$$h = \sqrt{74}$$
$$h = 8.6023$$

Por lo tanto, cada hipotenusa del rombo mide 8.602, por lo que el perímetro sería la suma de todos los lados o hipotenusas, por lo que solo multiplicamos por 4 ya que todos miden lo mismo.

$$8.6023 * 4 = 34.4092\ u$$

Ejemplo:

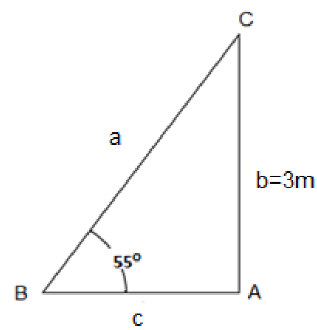
3.- Calcula la longitud del lado b del siguiente triángulo rectángulo (déjese el resultado en raíz).



Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$b = \sqrt{9^2 - 6^2}$$
$$b = \sqrt{81 - 36}$$
$$b = \sqrt{45}m = 6.7082\, m$$

4.-De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3m y B = 55^{o}. Resolver el triángulo encontrando los ángulos y lados que faltan.



Solución:

Como se desconoce el ángulo C pero se conocen los ángulos $B = 55^o$ y $A = 90^o$ lo determinamos partiendo de que la suma de los ángulos interiores debe ser 180**º** quedándonos:

$$C = 180^o - 55^o - 90^o = 35^o$$

Para el valor de c ocupamos la tangente ya que solo desconoceríamos 1 incógnita la cual es C

$\boldsymbol{tan\, B = \frac{b}{c} \quad tan(55^o) = \frac{3}{c}}$

(despejamos el valor de c que está dividiendo pasa multiplicando al otro lado de la igualdad quedándonos)

$\boldsymbol{C\, tan(55^o) = 3}$

(y ahora la $\tan(55^o)$ que está multiplicando pasa del otro lado dividiendo y resolvemos c)

$$\boldsymbol{c = \frac{3}{tan\,(55)}}$$

$\boldsymbol{C = 2.1006\, m}$

Para el valor de a ocupamos el seno ya que solo desconoceríamos 1 incógnita la cual es a

$\boldsymbol{Sen\, B = \frac{b}{a} \quad , Sen\,(55^o) = \frac{3}{a}}$

(despejamos el valor de a que está dividiendo pasa multiplicando al otro lado de la igualdad quedándonos)

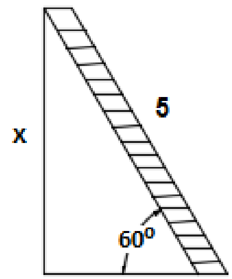
$$a\, sen\,(55^o) = 3$$

(y ahora el $Sen\,(55^o)$ que está multiplicando pasa del otro lado dividiendo y resolvemos a)

$$\boldsymbol{a = \frac{3}{sen\,(55)}}$$

$\boldsymbol{a = 3.6623\, m}$

5.- Una escalera de 5 m de longitud está apoyada en una pared. ¿Qué altura alcanza si forma con el suelo un ángulo de 60^o?



Solución:

Como se desconoce el cateto opuesto del ángulo y se conocer la hipotenusa, la función a aplicar es la del seno, quedando de la siguiente forma:

$\boldsymbol{Sen\ (60^o) = \frac{x}{5m}}$

(por lo tanto, se despeja el valor de x pasando el 5 del otro lado de la igualdad multiplicando al $Sen\ (60^o)$

Buscando el $Sen\ (60^o)$ en tablas del seno o resolviendo con la calculadora nos queda:

$x = (5m)(sen60^o)$

$= (0.866)(5)$

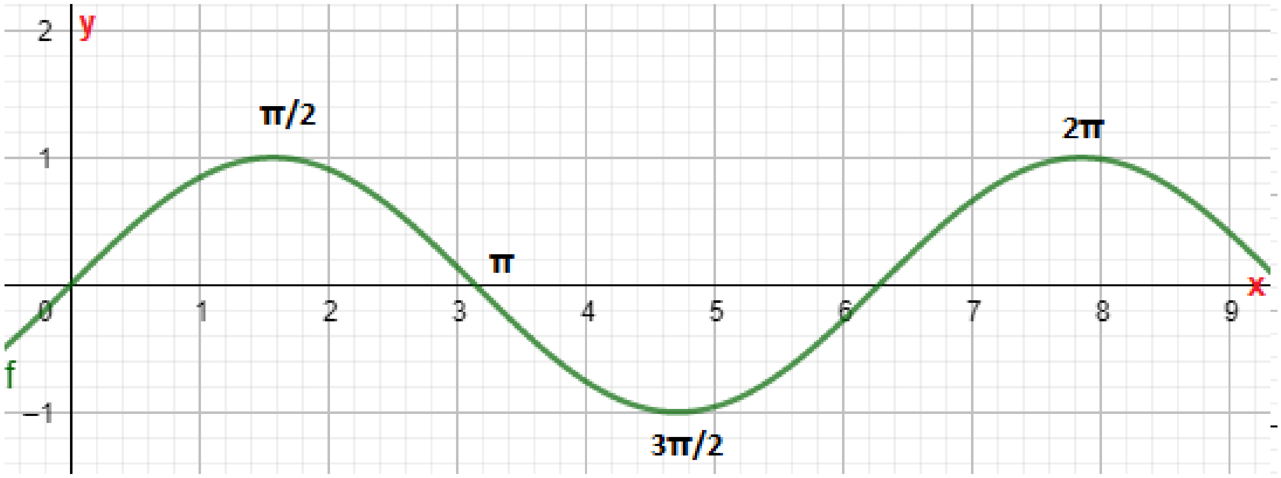
$= \boldsymbol{4.33\ m}$

Razones trigonométricas de ángulos notables 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º, 270º.

	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$

Gráfica de la función

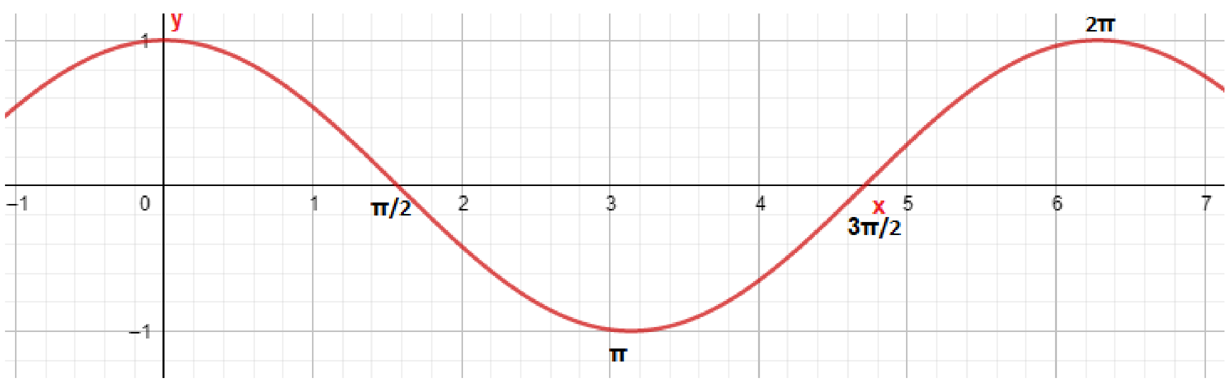
$y = senx$



- La función seno tiene periodo igual a 2 π rad (360 º)
- La función es creciente en el primero y cuarto cuadrantes
- La función interseca al eje horizontal en múltiplos impares de **π**

Gráfica de la función

$y = cosx$



- La función coseno tiene periodo igual a 2 π rad (360 º).
- La función decrece en el primero y segundo cuadrantes
- La función interseca al eje horizontal en múltiplos impares de π/2

4.1.21 Identidades trigonométricas y sus inversas:

$$Sen\ \alpha = \frac{1}{csc\ \alpha} \qquad Csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{1}{sec\ \alpha} \qquad Sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{1}{cot\ \alpha} \qquad Cot\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{1}{tan\ \alpha}$$

Pitagóricas:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

$$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$$

$$1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha$$

Ejemplo: Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

1.- $1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$

Solución:

El primer paso es convertir todo lo que no sea seno y coseno en seno y coseno.
En este caso la tangente puede ser expresada de otra forma por las identidades trigonométricas:

$$1 + \left(\frac{sen\alpha}{cos\alpha}\right)^2 = sec^2\alpha$$

Al convertir la tangente en términos de seno y coseno aplicamos el cuadrado tanto al numerados como al denominador

$$1 + \left(\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}\right) = sec^2\alpha$$

Posteriormente convertimos el 1 en fracción para resolver las operaciones con fracciones:

$$\frac{1}{1} + \left(\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}\right) = sec^2\alpha$$

Colocamos como común denominador al $cos^2\alpha$ y resolvemos la suma de fracciones

$$\frac{\boldsymbol{cos^2\alpha+sen^2\alpha}}{\boldsymbol{cos^2\alpha}} = \boldsymbol{sec^2\alpha}$$

Como se observa en la expresión anterior en el numerador tenemos una identidad trigonométrica la cual es

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

por lo que colocamos el 1 en el numerador quedando:

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos^2\alpha}} = \boldsymbol{sec^2\alpha}$$

Por último, colocamos a la secante en términos de la función trigonométrica la cual es

$$\boldsymbol{sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}}$$

pero elevada al cuadrado:

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos^2\alpha}} = \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos\ \alpha}}\right)^{\boldsymbol{2}}$$

Y resolviendo el cuadrado en la segunda fracción demostramos la identidad trigonométrica:

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos^2\alpha}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos^2\alpha}}$$

2.- $\boldsymbol{sec\ \alpha\ \ (1 - sen^2\alpha\ ) = cos\ \alpha}$

El primer paso es convertir todo lo que no sea seno y coseno en seno y coseno.

En este caso la Secante puede ser expresada de otra forma por las identidades trigonométricas y también el

$\boldsymbol{(\ 1 - sen^2\alpha\ )}$

puede ser expresada como el coseno:

$$\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos\ \alpha}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{cos^2\alpha}}{\boldsymbol{1}}\right) = \boldsymbol{cos\ \alpha}$$

Por lo que resolviendo la multiplicación de fracciones (de manera horizontal) numerador con numerador y denominador con denominador nos queda:

$$\left(\frac{\boldsymbol{cos^2\alpha}}{\boldsymbol{cos\ \alpha}}\right) = \boldsymbol{cos\ \alpha}$$

Como tenemos cos α abajo en el denominador y $cos^2\alpha$ en el numerador se cancelan quedando únicamente el coseno de α solo por lo que queda demostrada la identidad trigonométrica:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \cos \boldsymbol{\alpha}$$

4.1.22 Ecuaciones trigonométricas.

Para resolver una ecuación trigonométrica se deben seguir los siguientes pasos:

1.- Desarrollar expresiones, hasta obtener una sola expresión trigonométrica igualada a un número, mediante:

Identidades trigonométricas fundamentales:

$$sen\ \alpha = \frac{1}{csc\ \alpha} \qquad csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$cos\ \alpha = \frac{1}{sec\ \alpha} \qquad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{1}{cot\ \alpha} \qquad cot\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

$$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$1 + Tan^2\alpha = sec^2\alpha$$

$$1 + Cot^2\alpha = csc^2\alpha$$

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos:

$$sen\ (\alpha \pm \beta) = sen\ \alpha * cos\beta \pm cos\ \alpha * sen\ \beta$$

$$cos\ (\alpha \pm \beta) = cos\ \alpha * cos\beta \pm sen\ \alpha * sen\ \beta$$

$$tan\ (\alpha \pm \beta) = (tan\ \alpha + tan\ \beta)\ /\ 1 - tan\ \alpha * tan\ \beta$$

$$tan\ (\alpha - \beta) = (tan\ \alpha - tan\ \beta)/\ 1 + tan\ \alpha * tan\ \beta$$

Razones trigonométricas del ángulo doble:

$$sen2\alpha = 2sen\ \alpha * cos\alpha$$

$$cos2\alpha = cos\ 2\alpha - sen2\alpha$$

$$tan2\alpha = (2tan\alpha)/(1 - tan2\alpha)$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad:

$$\frac{sen\alpha}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{1-cos\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{cos\alpha}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{1+cos\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{tan\alpha}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}\right)}$$

Transformaciones de sumas en productos:

$$\boldsymbol{sen\alpha + sen\,\beta = 2\,sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) * cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{sen\alpha - sen\,\beta = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) * sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha + cos\,\beta = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) * cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha - cos\,\beta = -2\,sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) * sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Ejemplo:

Hallar la solución o soluciones de x de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

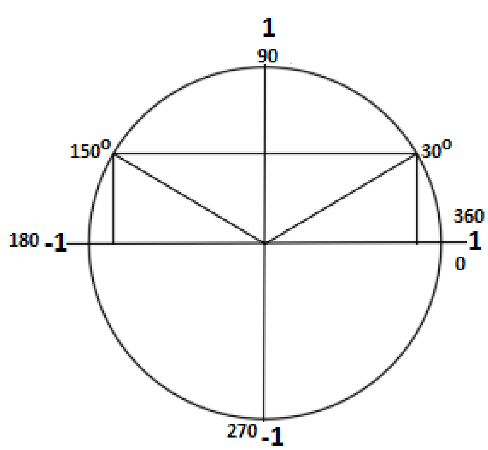
$\mathbf{1.-2\,\boldsymbol{sen\,x} = 1} \qquad 0 \le \mathbf{x} \le \mathbf{360}$

$sen\,x = \frac{1}{2}\,(despejamos\ x)$

$x = arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$

$\underline{\boldsymbol{x_1 = 30^o}}$

$\underline{\boldsymbol{x_2 = 150^o}}$



En este caso se tienen dos soluciones x1 y x2 ya que si proyectamos en el **círculo unitario** el ½ que equivalen los 30º del otro lado del eje positivo nos da que la proyección en línea recta es de 150º por lo que las dos soluciones son 30º y 150º.

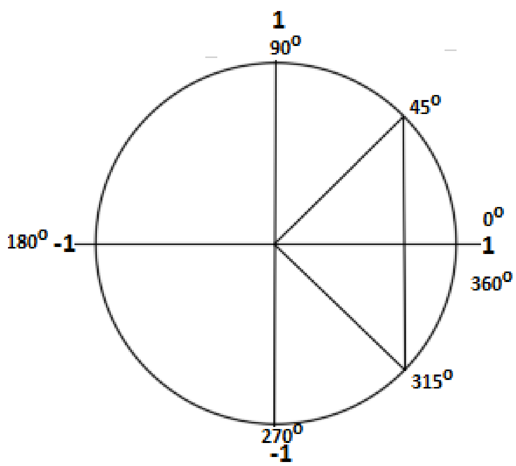
$\mathbf{2.-2\ cos\ x = \sqrt{2}} \qquad 0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{360}$

$cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (despejamos\ x)$

$x = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\underline{\boldsymbol{x_1 = 45^o}}$

$\underline{\boldsymbol{x_2 = 315^o}}$



En este caso se tienen dos soluciones x1 y x2 ya que si proyectamos en el **círculo unitario** el $\frac{\sqrt{2}}{2}$ que equivalen los $45^{\mathbf{o}}$ del otro lado del eje positivo nos da que la proyección en línea recta es de $315^{\mathbf{o}}$ por lo que las dos soluciones son $45^{\mathbf{o}}$ y $315^{\mathbf{o}}$.

$\mathbf{3.-cos^2x - 1 = 0(despejamos\ x)}$

$\boldsymbol{cos^2x = 1}$

$\boldsymbol{cosx = \sqrt{1}}$

$\boldsymbol{cosx = \pm 1}$

$\boldsymbol{x = arccos\ (1)}$

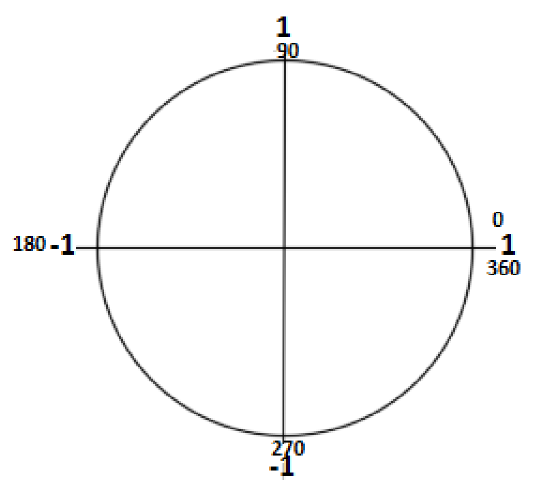
$\underline{\boldsymbol{x_1 = 0^o}}$

$\underline{\boldsymbol{x_2 = 360^o}}$

$\boldsymbol{cosx = -1(despejamos\ x)}$

$\boldsymbol{x = arccos(-1)}$

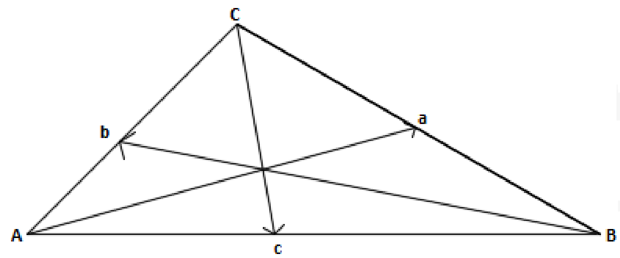
$\underline{\boldsymbol{x_1 = 180^o}}$



4.1.23 Ley de los senos.

En trigonometría el Teorema de los Senos o Ley de los Senos es una relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de sus respectivos ángulos opuestos, se ocupa para triángulos oblicuángulos:

Un triángulo es oblicuángulo cuando sus tres ángulos son oblicuos, es decir, no tienen un ángulo recto (Geometría y Trigonometría CONAMAT, 2009).

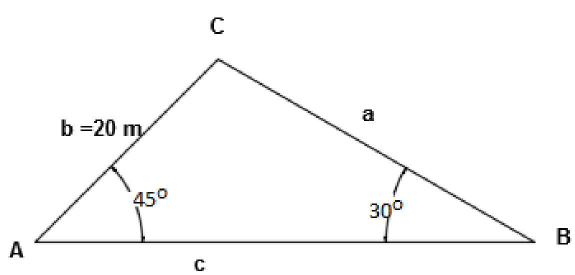


"La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado, es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes." (CONAMAT, 2016)

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

El teorema de los senos es utilizado para resolver problemas en los que se conocen dos ángulos del triángulo y un lado opuesto a uno de ellos. También se usa cuando conocemos dos lados del triángulo y un ángulo opuesto a uno de ellos.

Ejemplo:
1.- Hallar los valores de a y c



Solución:

Se tiene un triángulo con diferentes ángulos se conoce el ángulo $A = 45^o$ y el ángulo $B = 30^o$ y un solo lado el cual es $b = 20m$ por lo cual se puede ocupar el Teorema del Seno.

Podemos conocer el ángulo $\boldsymbol{C}$ ya que sabemos cómo lo anteriormente dicho que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180^o por lo que deducimos que:

$$180^o = 45^o + 30^o + C$$

$$180^o = 75^o + C$$
$$180^o - 75^o = C$$
$$\underline{\boldsymbol{C = 105^o}}$$

Por lo que se conocen ya los 3 ángulos para ocupar la formula tenemos que hacer que nos quede una sola incógnita en la ecuación:

$$\cancel{\frac{a}{\text{sen } A}} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Se tachó ese término porque conocemos los valores de b, el Sen de B, y el Sen de C = 105 ^{o}, por último, nos queda la siguiente expresión que es una división de fracciones y que se resuelve multiplicando numerador por denominado y denominador por numerador:

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

$$b * sen\ C = sen\ B * c$$

Reemplazando valores nos queda:

$$20sen\ 105^{o} = sen\ 30^{o} * c$$

Despejando el valor de **c** la cual es la incógnita del problema nos quedaría que Sen 30^{o}pasaria del otro lado de la igualdad dividiendo ya que es la operación contraria a la multiplicación y así nos quedaría el valor de la incógnita c sola para poder resolverse la operación.

$$\boldsymbol{\frac{20sen\ 105^{o}}{sen\ 30^{o}} = c}$$

El valor del Senos de los ángulos puede ser calculado por medio de la calculadora, o por tablas de función Seno las cuales ya dan los valores numéricos de los senos de los ángulos, por ejemplo:

$\underline{sen(30^{o}) = 0.5}$ $\underline{sen(105^{o}) = 0.965926}$ $\underline{sen(45^{o}) = 0.707107}$

$$\boldsymbol{\frac{20(0.965)}{(0.5)} = c}$$

$$\boldsymbol{38.6 = c}$$

Hacemos lo mismo para hallar el valor de **a** sustituyendo los valores que conocemos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \cancel{\frac{c}{\text{sen } C}}$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

$$a * sen\ B = sen\ A * b$$

$$a * sen\ (30^{o}) = sen\ (45^{o}) * (20)$$

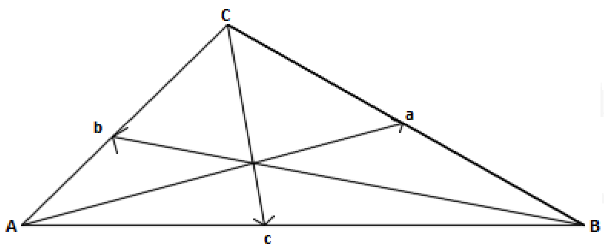
$$\boldsymbol{a = \frac{20\ sen\ 45}{sen\ 30}}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{20\ (0.707)}{(0.5)}}$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 28.28\ m}}$$

4.1.24 Ley de los cosenos.

En trigonometría el teorema de los cosenos o ley de los cosenos es una generalización del teorema de Pitágoras, pero es aplicado igual que la ley de los Senos para triángulos oblicuángulos.



El teorema relaciona un lado de un triángulo cualquiera con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados:

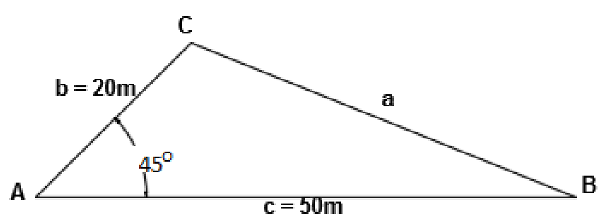
"El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado." (CONAMAT, 2016)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

El teorema de los cosenos es utilizado para resolver problemas en los que se conocen dos lados del triángulo y el ángulo de esos 2 lados.

Ejemplo:

1.- Hallar el valor de a



Solución:

Se tiene un triángulo oblicuángulo del cual conocemos el valor de los lados **b** y **c,** con su respectivo ángulo de ambos el cual tiene el valor de **45°** por lo cual podemos aplicar la ley de cosenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Sustituyendo valores en la ecuación nos queda (Recordando que el valor de cos 45° se sacó de tablas de función coseno y desarrollando jerárquicamente potencias, multiplicaciones y luego sumas):

$$a^2 = 20^2 + 50^2 - 2(20)(50) \cos 45$$
$$a^2 = 400 + 2500 - 2000 \cos 45$$
$$a^2 = 2900 - 2000\ (0.707)$$
$$a^2 = 2900 - 1414$$
$$a^2 = 1486$$
$$a = \sqrt{1486}$$
$$a = 38.54\ m$$

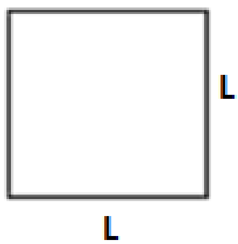
Áreas y perímetros de figuras geométricas.

Área: El área es la medida de la región o superficie encerrada por una figura geométrica.

Perímetro: Es la cantidad de unidades lineales que suma el contorno de una figura geométrica.

4.1.25 Fórmulas para calcular áreas y perímetros de figuras geométricas.

Cuadrado: El cuadrado es un polígono de cuatro lados, y cuyos lados son todos de igual medida, sus cuatro ángulos que forman son de 90° cada uno.



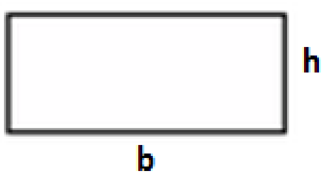
Área

$$A = L * L$$

Perímetro

$$P = L + L + L + L$$

Rectángulo: El rectángulo es un polígono de cuatro lados, iguales dos a dos, sus cuatro ángulos son de 90° cada uno**.**



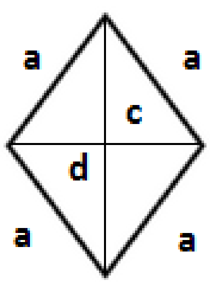
Área

$$a = b * h$$

Perímetro

$$P = b + b + h + h$$

Rombo: El rombo es un polígono de cuatro lados iguales, pero sus cuatro ángulos son distintos de 90°.



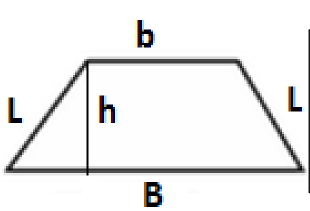
Área

$$A = \frac{d * c}{2}$$

Perímetro

$$P = a + a + a + a$$

Trapecio: Es una figura de cuatro lados que tiene dos lados paralelos y otros dos que no lo son, los lados paralelos se llaman bases del trapecio y la distancia entre ellos altura. Un cuadrilátero sin lados paralelos recibe el nombre de trapezoide.



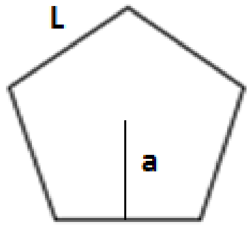
Área

$$A = \frac{h\,(B+b)}{2}$$

Perímetro

$$P = B + b + L + L$$

Pentágono: El pentágono regular es un polígono de cinco lados iguales y cinco ángulos iguales.



Área

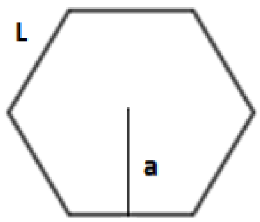
$$A = \frac{P * a}{2}$$

$a = apotema$

Perímetro

$$P = 5 * L$$

Hexágono: El hexágono regular es un polígono de seis lados iguales y seis ángulos iguales. Los triángulos formados, al unir el centro con todos los vértices, son equiláteros.



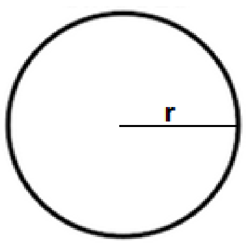
Área

$$A = \frac{P * a}{2}$$

Perímetro

$$P = 6 * L$$

Circulo: El circulo es la región delimitada por una circunferencia, siendo esta el lugar geométrico de los puntos que equidistan del centro.



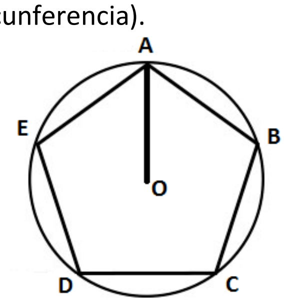
Área

$$A = \pi * r^2$$

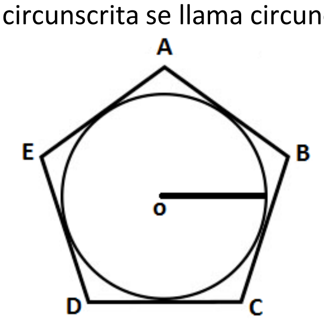
Perímetro

$$P = \pi * D$$

Polígono inscrito: Es un polígono que se halla (en su región interior) de otra figura geométrica. Por ejemplo, un pentágono ABCDE inscrito en una circunferencia de centro O y radio OA (significa que el pentágono está contenido dentro de la circunferencia).



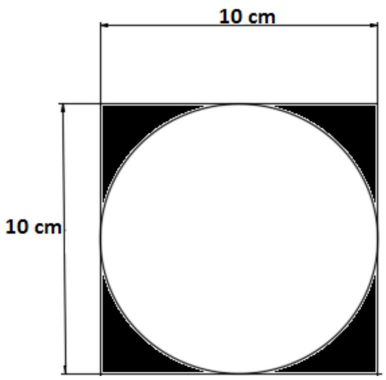
Polígono circunscrito: Es un polígono que contiene en su interior a otra figura en este caso a un pentágono. El centro de la circunferencia circunscrita se llama circuncentro y su radio circunradio.



4.1.26 Áreas de figuras combinadas

Para determinar las áreas de figuras combinadas o áreas sombreadas basta con sacar las áreas por separado de cada una de las figuras tanto la sombreada como la que no está sombreada y posteriormente restarlas realizando sus debidas operaciones con las fórmulas vistas anteriormente.

Calcular el área sombreada de las siguientes figuras:



área cuadrada

$A = L^2$

$A = 10^2$

$A = 100cm^2$

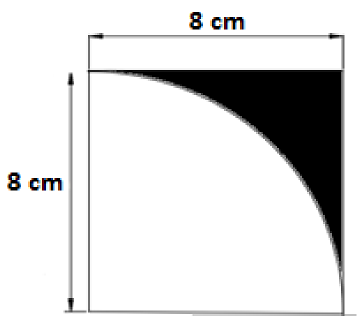
área circular

$A = \pi r^2$

$A = \pi(5)^2$

$A = 78.53\ cm^2$

área sombreada = área cuadrada – área circular =$100\ cm^2 - 78.53\ cm^2 = 21.47\ cm^2$



área cuadrada

$A = L^2$

$A = 8^2$

$A = 64\ cm2$

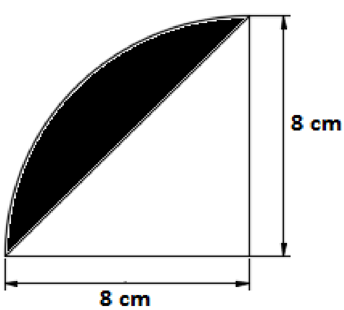
área $\frac{1}{4}$ de circulo

$A = \frac{1}{4}\pi\, r^2$

$A = \frac{1}{4}\pi\ (8)^2$

$A = 50.26\ cm^2$

área sombreada = área cuadrada – área $\frac{1}{4}$ de circulo = $64\ cm^2 - 50.26\ cm^2 = 13.74\ cm^2$



área $\frac{1}{4}$ de circulo

$A = \frac{1}{4}\pi\, r^2$

$A = \frac{1}{4}\pi\ (8)^2$

$A = 50.2\ cm^2$

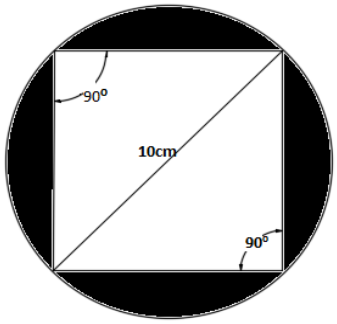
área Triangular

$A = \frac{b*h}{2}$

$A = \frac{(8)(8)}{2}$

$A = 32cm^2$

área sombreada = área $\frac{1}{4}$ de circulo – área Triangular = $50.2\ cm^2 - 32\ cm^2 = 18.2\ cm^2$



área circular

$A = \pi\, r^2$

$A = \pi(5)^2$

$A = 78.53\ cm^2$

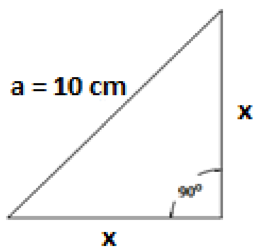
área cuadrada

$A = L^2$

$A = 7.07106^2$

$\boldsymbol{A = 50cm^2}$

Como podemos observar en la figura principal no se conocen los lados del triángulo unicamente se conoce la hipotenusa por lo cual un metodo para saber los lados del triángulo es por medio del teorema de pitagoras el cual recordamos como $a^2 = b^2 + c^2$



$10^2 = x^2 + x^2$

$100 = 2x^2$

$\frac{100}{2} = x^2$

$\sqrt{50} = x$

$7.07106\ cm = x$

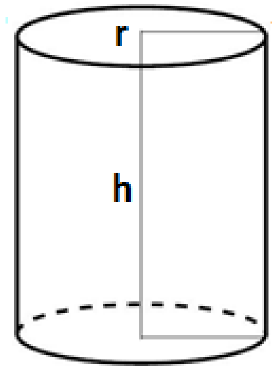
Por último, para conocer el área sombreada basta con restar al área circular el área del cuadrado

área Sombreada = área circular– área cuadrada = $78.53\ cm^2 - 50\ cm^2 = 28.53\ cm^2$

Nota: Podemos observar que se tuvo que aplicar uno de los teoremas antes vistos para poder resolver este ejercicio, por lo que es importante tener bien asimilados los conocimientos anteriormente mostrados.

4.1.27 Fórmulas para calcular volúmenes y áreas de cuerpos geométricos.

Cilindro: Cuerpo geométrico formado por una superficie lateral curva y cerrada y dos planos paralelos que forman sus bases; en especial el cilindro circular.



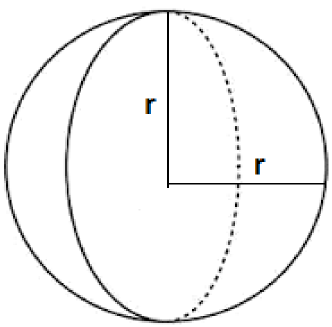
Área

$$A_{Total} = 2\pi\, r(h + r)$$

Volúmen

$$V = \pi r^2 * h$$

Esfera: Es una superficie de revolución formada por el conjunto de los puntos del espacio que equidistan de un punto llamado *centro*.



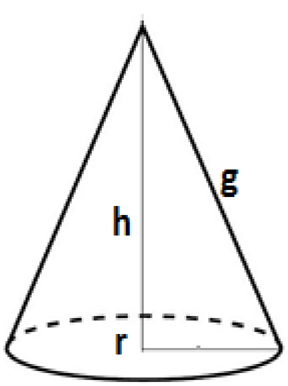
Área

$$A_{Total} = 4\pi r^2$$

Volúmen

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Cono: Es un sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina base y al punto donde confluyen las generatrices se llama vértice o cúspide.



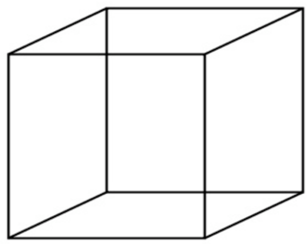
Área

$$A_{Total} = \pi r^2 + \pi r g$$

Volúmen

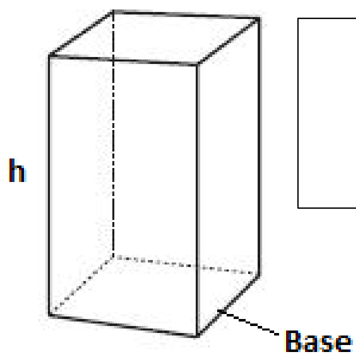
$$V = \frac{\pi\, r^2 h}{3}$$

Cubo: Es un cuerpo formado por seis caras que son cuadradas. La particularidad de estos cuerpos es que todas las caras son congruentes, están dispuestas de forma paralela y de a pares, y tienen cuatro lados.



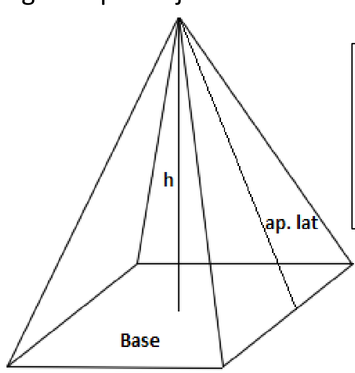
Área	Volúmen
$\boldsymbol{A_{Total} = 6a^2}$	$\boldsymbol{V = a^3}$

Prisma: Cuerpo geométrico formado por dos caras planas poligonales, paralelas e iguales, que se llaman bases, y tantas caras rectangulares como lados tiene cada base.



Área	Volúmen
$\boldsymbol{A_{Total} = (Perimetro.base * h) + 2\,(area\ base)}$	$V = Area\ base * h$

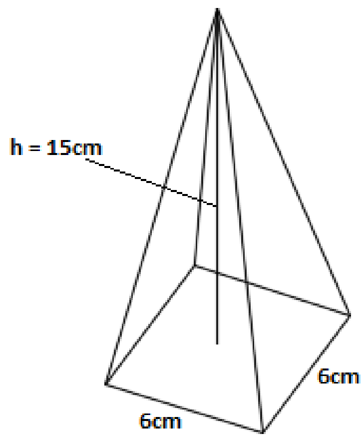
Pirámide: Cuerpo geométrico que tiene como base un polígono cualquiera, y sus caras laterales son triángulos que se juntan en un vértice común.



Área	Volúmen
$\boldsymbol{A_{Total} = \frac{Perim.base * ap.lat}{2} + area\ base}$	$\boldsymbol{V = \frac{area\ base * h}{3}}$

Ejercicios para determinar el volumen de las siguientes figuras geométricas:

Pirámide cuadrangular



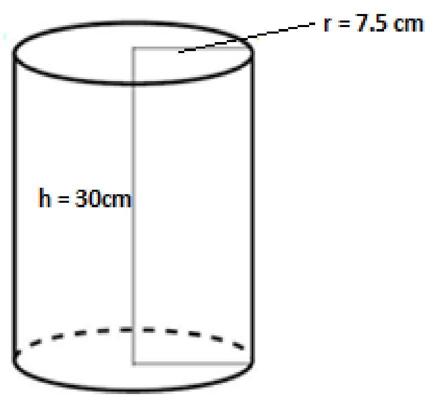
$$V = \frac{area\ base * h}{3}$$

$$V = \frac{(6)^2 * 15}{3}$$

$$V = \frac{36*15}{3}$$

$$V = 180\ cm^3$$

Cilindro



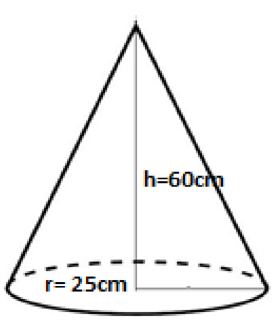
$$V = \pi r^2 * h$$

$$V = \pi(7.5)^2 * 30$$

$$V = \pi\ (56.25) * 30$$

$$V = 5301.43\ cm^3$$

Cono



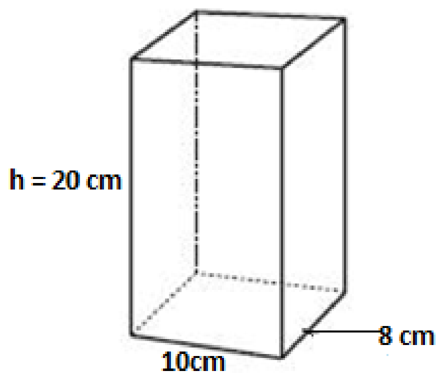
$$V = \frac{\pi\, r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi\ (25)^2 (60)}{3}$$

$$V = \frac{\pi\ (\ 625)(60)}{3}$$

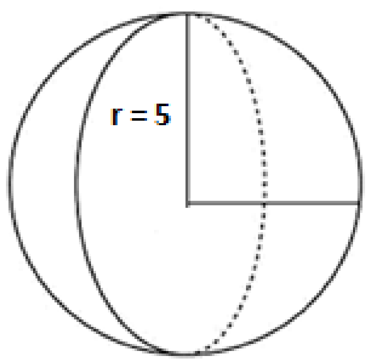
$$V = 39{,}269.90\ cm^3$$

Prisma rectangular



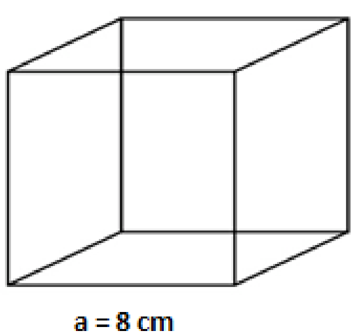
$$V = \text{área } base * h$$
$$V = a * b * h$$
$$V = 10 * 8 * 20$$
$$V = 80 * 20$$
$$V = 1600\ cm^3$$

Esfera



$$V = \frac{4}{3}\ \pi r^3$$
$$V = \frac{4}{3}\pi(5)^3$$
$$V = \frac{4}{3}\pi(125)$$
$$V = \frac{500\pi}{3}$$
$$V = 523.59\ cm^3$$

Cubo

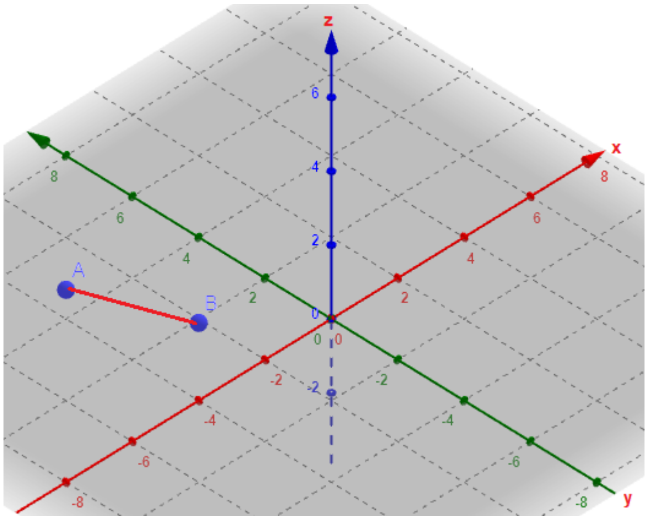


$$V = a^3$$
$$V = 8^3$$
$$V = 8 * 8 * 8$$
$$V = 512\ cm^3$$

4.1 Geometría Analítica en el espacio

Segmento dirigido

"Se llama segmento dirigido a un segmento de recta en el que se ha asignado un punto de origen y un punto extremo." (Puga, 2006)



El segmento dirigido en forma gráfica se representa mediante una flecha donde el punto de origen es A y el punto extremo es B.

Vector de posición

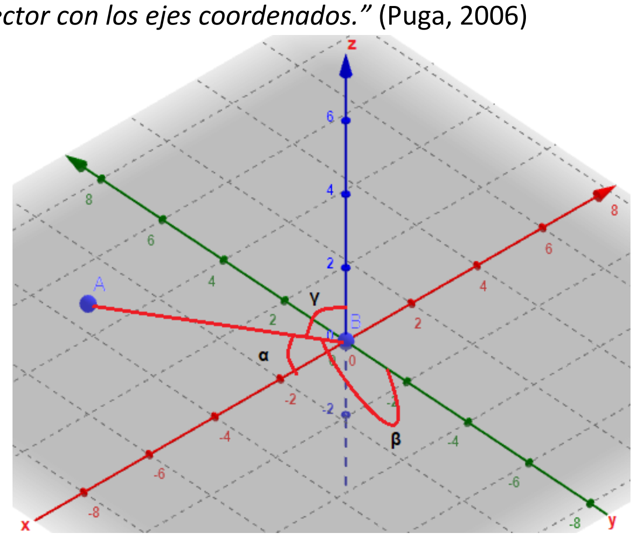
"Se llama vector de posición de un punto P (p_1, p_2, p_3) aquel que tiene su punto de origen en el origen de coordenadas y su punto extremo en el punto P." (Puga, 2006)

Vector unitario

"Un vector es unitario si su modulo es igual a la unidad" (Puga, 2006)

Ángulos directores

"Los ángulos directores de un vector son los que forma un segmento dirigido que representa a dicho vector con los ejes coordenados." (Puga, 2006)



En la figura se observan los ángulos directores del vector $\bar{\mathbf{v}}$ que son **α β** y **γ** donde:

α = ángulo que forma el segmento dirigido con el eje de las abscisas siendo **x = r cos α**

β = ángulo que forma el segmento dirigido con el eje de las ordenadas **y = r cos β**

γ = ángulo que forma con el eje de las cotas **z = r cos γ**

Elevando al cuadrado cada equivalencia obtenemos:

$$x^2+y^2+z^2=r^2=r^2cos^2\alpha+r^2cos^2\beta+r^2cos^2\gamma$$
$$1=cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma$$

Cosenos directores

Los cosenos directores de un vector son los cosenos de sus ángulos directores

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{x}{r} \quad \cos\gamma = \frac{x}{r}$$

Distancia entre dos puntos $p_{1(}x_1, y_1, z_1)$ **y** $p_{2(}x_2, y_2, z_2)$

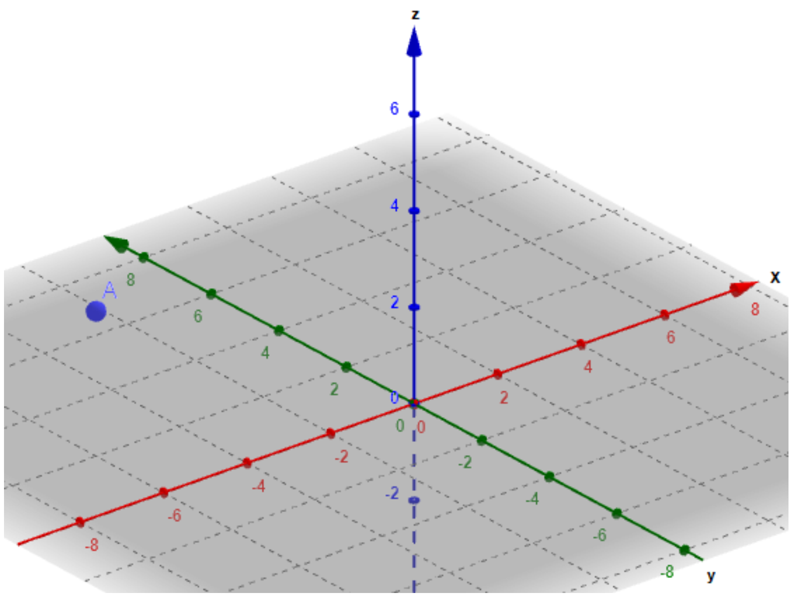
d $=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

en este caso los cosenos directores serán:

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{r} \quad \cos\alpha = \frac{y_2-y_1}{r} \quad \cos\alpha = \frac{z_2-z_1}{r}$$

Ejemplo:

1.-Calcular los cosenos directores y los ángulos de dirección del origen y el punto A (-6,2,3)



$d = \sqrt{(-6)^2+(2)^2+(3)^2}$

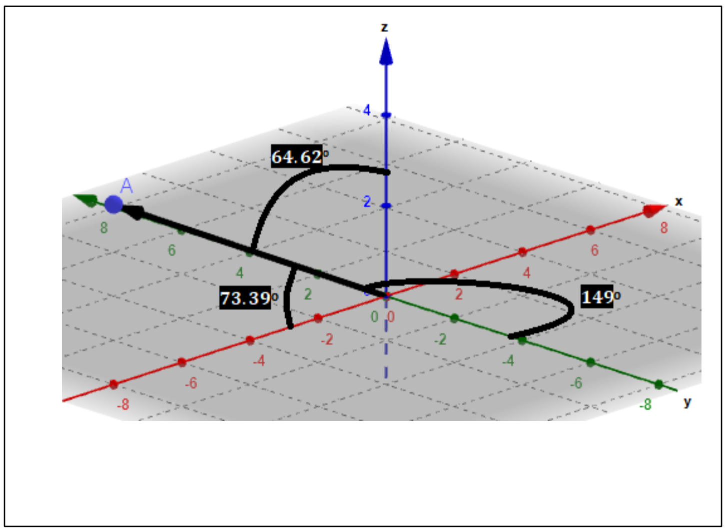
$d = 7$

$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{x}{r} \quad \cos\gamma = \frac{x}{r}$

$\cos\alpha = \frac{-6}{7} \quad \cos\beta = \frac{2}{7} \quad \cos\gamma = \frac{3}{7}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{7}\right) \; \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) \; \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$

$\alpha = 149^o \; \beta = 73.39^o \; \gamma = 64.62^o$



4.2.1 Aplicaciones de la geometría - trigonometría a problemas de Mecánica Vectorial.

Ya se han visto algunos conceptos importantes de la geometría euclidiana – trigonometría y geometría analítica en el espacio, por lo que ahora veremos algunas de sus muchas aplicaciones importantes en la ingeniería y en la cual podemos aplicar los conceptos antes mencionados. Las diversas estructuras que los ingenieros construyen se encuentran sujetas a la acción de fuerzas tales como, el viento, el sismo, el peso propio, carga muerta, carga viva, carga accidental, empujes, etc. Estas fuerzas producen tendencias tanto al girar como a desplazar las estructuras y por lo tanto deben ser evaluadas para conocer los efectos que produzcan en ciertas estructuras y determinar acciones que permitan evitar su fallo una vez construidas. En primer lugar, debemos tener en cuenta uno de los conceptos más importantes que es aplicado tanto en matemáticas como en física, la cual denominamos fuerzas (vectores) y el cual se ocupa en una de las ramas de la física la cual es la estática.

Estática

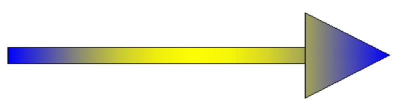
Es el estudio de los cuerpos que están en reposo o que se mueven con velocidad constante.

Fuerzas

Es toda causa capaz de modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo, o de producir una deformación en el mismo.

4.2.2 Vectores y sus tipos

Es un segmento de recta orientado sobre una recta en un espacio 2D o 3D y que posee un origen, modulo, dirección y sentido y es mayormente representado por una flecha, los vectores pueden ser representados de forma gráfica o de forma escrita.



En coordenadas cartesianas, los vectores unitarios se representan por las letras **i, j, k** paralelos a los ejes de coordenadas **x, y, z** positivos.

Tipos de vectores:

Vector de posición – *Un vector de posición r se define como un vector fijo que ubica un punto en el espacio en relación con otro punto. La forma más fácil de formular las componentes de un vector de posición es determinar la distancia y dirección que debe recorrerse a lo largo de las direcciones x, y, z desde la cola hasta la cabeza del vector* (HIBBELER, 2010).

Vectores unitarios – Son aquellos vectores que tienen una longitud igual a la unidad.

Magnitud

Es toda propiedad medible en un objeto y existen 2 tipos de magnitudes las cuales son:

1. **Magnitud escalar -** Quedan definidas por su valor y la unidad en que se mida. Un ejemplo es:

El tiempo: 20 min, 1 hora, 50 segundos etc.

Superficie: 20 cm^2*, 40* cm^2*, 5* km^2 *etc.*

Volumen: 10 cm^3*, 20* cm^2*, etc.*

2. **Magnitud vectorial -** Quedan definidas por cuatro principales características las cuales son:

- **Dirección –** Se obtiene por la línea de acción de la fuerza y se caracteriza por su ángulo.
- **Sentido –** Se define por la orientación que hay de un origen al extremo del vector.
- **Modulo –** Longitud del vector proporcional a su valor numérico (es siempre positivo o 0).
- **Origen –** Es el lugar donde inicia el vector.

Algunos ejemplos son: *fuerza (peso)*, *desplazamiento*, *velocidad, aceleración.*

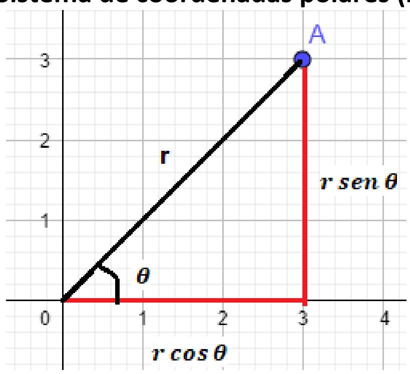
Una magnitud vectorial se representa con una letra y una flecha encima **F̅.**

4.2.3 Fuerzas en el plano

Marco de referencia:

La dirección de una fuerza se mide con respecto a ejes de referencia denominados “coordenadas cartesianas” en dos dimensiones.

- **Sistema de coordenadas polares (r, θ)**

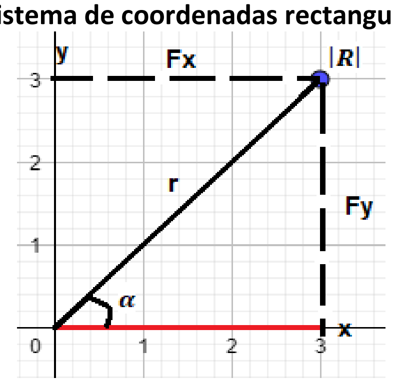


Conversión de coordenadas polares a cartesianas

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,sen\,\theta$$

- **Sistema de coordenadas rectangulares (x, y)**



Conversión de coordenadas cartesianas a polares

$$Tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Magnitud:	Dirección:	Distancia entre dos puntos:
$\lvert R\rvert = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$	$\tan\alpha = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$	$dAB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Suma de vectores: existen 2 principales métodos para poder sumar vectores los cuales son:

1. **Método del paralelogramo**
2. **Método de las componentes rectangulares**

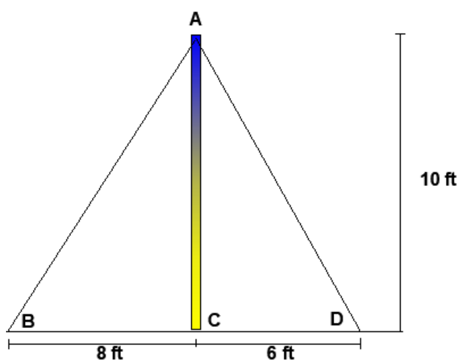
4.2.4 Método del paralelogramo (deriva también la ley del triángulo)

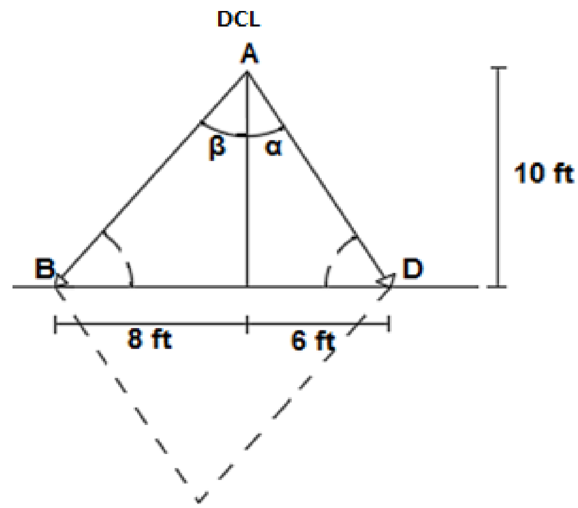
Ejemplo:

En el primer problema de aplicación usaremos el método del paralelogramo y una solución que implica a determinar la resultante mediante la trigonometría (ley del triángulo).

"Ejercicio 2.15 del libro Beer and Jhonston, 10^{a} *edición"* (Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición).

Los tirantes de cable AB Y AD ayudan a sostener el poste AC. Si se sabe que la tensión es de 120 lb en AB y 40 lb en AD Determine gráficamente la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los tirantes en A mediante a) La ley del paralelogramo b) La regla del triángulo (Beer & Jhonston).





Solución:

Como se observa el primer paso es realizar el Diagrama de Cuerpo Libre para saber las fuerzas que actúan en el sistema, después se hace una descomposición de la recta AD y se desplaza paralelamente sobre la recta AB hasta llegar al final del segmento AB, del mismo modo la recta AB se desplaza paralelamente sobre la recta AD hasta llegar al final del segmento AD (Se aprecia mejor porque las líneas punteadas representan dichos vectores), ahora desconocemos los valores de los ángulos α y β por lo que tendremos que calcularlos con alguna de las razones trigonométricas en este caso aplicaríamos la tangente porque conocemos el cateto opuesto de α que es 6 y el cateto adyacente de α que es 10.

$tan\,\alpha = \frac{6}{10}$ despejando a α tenemos $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{6}{10}\right)$

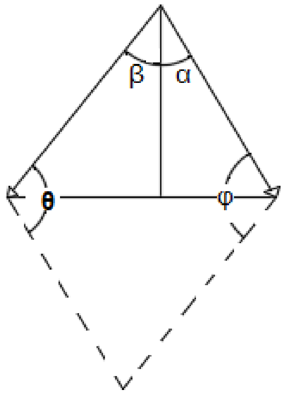
$\alpha = 31^{o}$

$tan\,\beta\ = \frac{8}{10}$ despejando a α tenemos $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{10}\right)$

$\beta = 38.7^{o}$

Sumando ambos ángulos α y β tenemos que la suma de esos dos vectores es 69.7^{o}

Ahora calcularemos el ángulo θ el cual está ubicado como se ve a continuación:



Como la suma de los ángulos internos de un paralelogramo es 360° pero α y β están 2 veces se plantea la siguiente ecuación y despejamos el valor de θ:

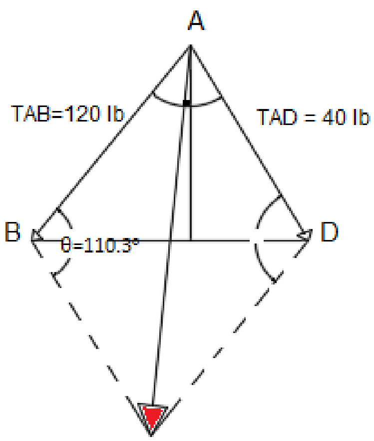
α + β + θ + ϕ= 360

$360 - 2(69.7^o) = 2\theta$

$220.6^o = 2\theta$

$110.3^o = \theta$

La resultante $|R|$ de las 2 fuerzas TAB Y TAD está representada por la flecha roja que va desde el punto A hasta el otro vértice opuesto



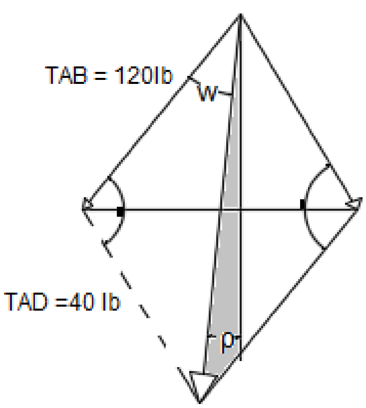
Aplicando la ley del Coseno, pero colocando esta vez en términos de Tensiones para la **resultante** nos queda:

$$|R|^2 = \boldsymbol{TAB^2 + TAD^2 - 2(TAB)(TAD)\ cos}\theta$$

$$|R|^2 = \mathbf{(120)^2 + (40)^2 - 2(120)(40)}\ \boldsymbol{cos}\mathbf{(110.3^o)}$$

$$|R| = \sqrt{\mathbf{19,330.5}}$$

$$|R| = \mathbf{139.03}\ \boldsymbol{lb}$$



Aplicando la ley del Seno para saber la **dirección** de la resultante y representado por el ángulo ρ de color gris queda:

$$\frac{\mathbf{40}}{\boldsymbol{sen\ w}} = \frac{\mathbf{139.03}}{\boldsymbol{sen}\ \mathbf{(110.3)}}$$

$$\mathbf{40}\boldsymbol{sen}\ \mathbf{(110.3^o)} = \mathbf{139.03}\ \boldsymbol{sen\ w}$$

$$\boldsymbol{w = arcsen} = \frac{\mathbf{37.51}}{\mathbf{139.03}}$$

$$\boldsymbol{w} = \mathbf{15.7^o}$$

ρ = β – w

ρ = 38.7 – 15.**7**

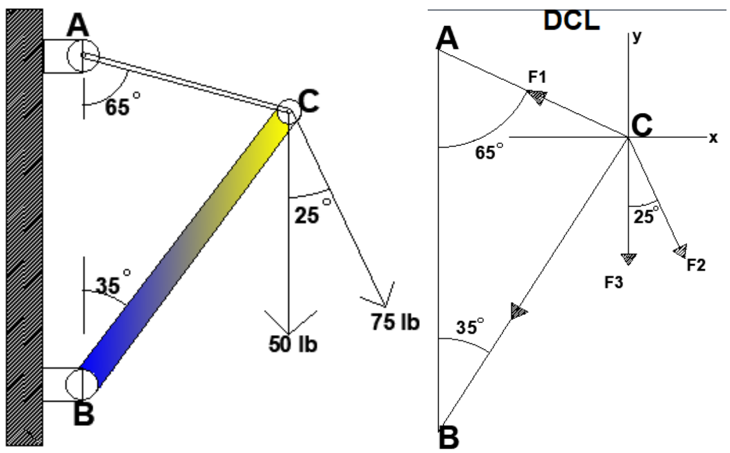
ρ = 23°

4.2.5 Método de las componentes rectangulares

En el segundo problema de aplicación usaremos el método de las componentes rectangulares.

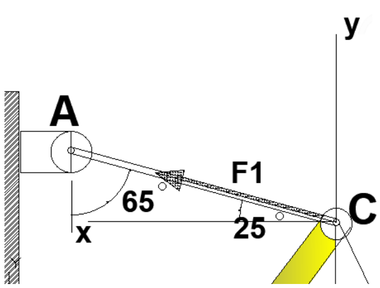
"Ejercicio 2.41 del libro Beer and Jhonston, 9^a edición" (Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición).

Determine a) la tensión requerida en el cable AC, si se sabe que la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto C del aguillon BC debe estar dirigida a lo largo de BC b) la magnitud correspondiente de la resultante (Beer & Jhonston).



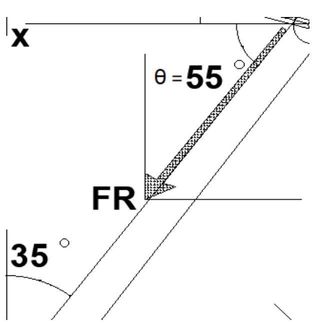
Solución:

Como se observa el primer paso es realizar el Diagrama de Cuerpo Libre el cual nos ayudara a tener una visión de las fuerzas que actúan en el sistema, posteriormente se coloca un sistema de coordenadas cartesiano en el punto C ya que el problema nos lo dice y es donde inician todas las fuerzas como se muestra en la figura de la derecha, colocamos el eje de las abscisas y eje de las ordenadas para posteriormente descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares ya que al final la suma de todas las fuerzas nos va a dar la fuerza Resultante.



Descomponiendo la F1 nos queda formado un triángulo y como sabemos que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo debe ser 180**°** por lo que el ángulo que nos falta es de 25**°** por lo que procedemos a descomponer

$$-F_{1x}Cos\,25^o + F_{1y}Sen\,25^o = -\mathbf{0.9063}\,\boldsymbol{F_1\,i} + \mathbf{0.4226}\,\boldsymbol{F_1J}$$

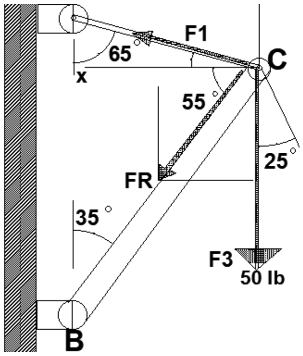


Descomponiendo la fuerza Resultante F$|R|$ nos queda formado un triángulo (El ángulo de θ sale del triángulo *ACB* de la primera figura aplicando el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo es 180**°** se aplica la ecuación

$$180^o - 65^o - 35^o - 25^o = \theta$$

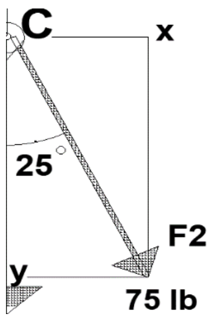
$$\theta = 55^o$$

$$-FR_xCos\,55^o + FR_xSen55^o = -\mathbf{0.5735}\boldsymbol{R_I} - \mathbf{0.8191}\,\boldsymbol{R_j}$$



Descomponiendo la F3 que está totalmente vertical o en el eje y no habría que descomponerla, y no tendría componente en x por lo que quedaría

$$\mathbf{0\ lb\ i - 50\ lb\ j}$$



Descomponiendo la F2 nos queda formado un triángulo y como sabemos que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo debe ser 180$^{\mathbf{o}}$ por lo que el ángulo que nos falta es de 25$^{\mathbf{o}}$ por lo que procedemos a descomponer

$$F_{2x} Sen\ 25^o - F_{2y} Cos\ 25^o$$
$$75\ Sen\ 25^o - 75\ Cos\ 25^o = \mathbf{31.69\ lb\ i - 67.97\ lb\ j}$$

Aplicando la ecuación de inicio que dice que $\boldsymbol{F|R| = F1 + F2 + F3}$ colocamos la igualdad, pero en las componentes de los vectores representadas por las letras en negritas:

$$\boldsymbol{-0.5735Ri - 0.8191Rj = -0.9063\ F_1 i + 0.4226\ F_1 j + 31.69\ i - 67.97\ j + 0i - 50\ j}$$

Y Aplicando el teorema de dos vectores son iguales si sus componentes en “i” y “j” son iguales realizamos un sistema de ecuaciones que nos queda de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{-0.5735Ri = -0.9063F_1 + 31.69 ------ec.1}$$

$$\boldsymbol{-0.8191Rj = 0.4226F_1 - 67.97 - 50 ------ec.2}$$

Sumando los términos independientes de la ec 2 nos queda:

$$\boldsymbol{-0.5735Ri = -0.9063F_1 + 31.69 ------ec.1}$$

$$\boldsymbol{-0.8191Rj = 0.4226F_1 - 117.97 ------ec.2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por cualquier método nos queda que la resultante F|$\boldsymbol{R}$| es:

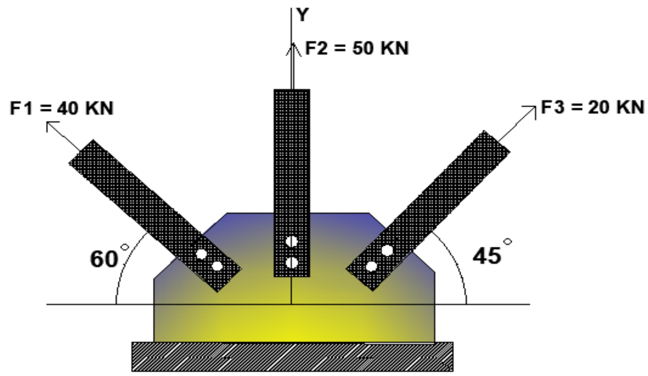
$\boldsymbol{F|R| = 95\ lb}$

$\boldsymbol{F_1 = -25.41\ lb}$

Sistema de tres fuerzas

"Ejercicio tipo F2-12 del libro Russel-Hibbeler, 12^{a} edición" (HIBBELER, 2010).

Determinar la resultante magnitud, dirección y sentido del siguiente sistema de fuerzas.



Solución:

Como se observa en la figura se tiene un sistema de 3 fuerzas F1 F2 Y F3 respectivamente por lo que tenemos que descomponer cada una de las fuerzas respecto a sus ejes cartesianos para posteriormente realizar la $\sum Fx$ y $\sum Fy$.

$$\sum Fx = -40\cos 60^{o} i + 20\ cos45^{o} i$$

$$\sum Fx = -5.85\ i$$

$$\sum Fy = 40\cos 60^{o} j + 50 + 20\ sen45^{o} j$$

$$\sum Fy = 98.7\ j$$

Magnitud

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(\sum \boldsymbol{F_x})^2 + (\sum \boldsymbol{F_y})^2}$$

$$|R| = \sqrt{(-5.85)^2 + (98.7)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(34.222) + (9741.69)}$$

$$|R| = \sqrt{9775.91}$$

$$\boldsymbol{|R| = 98.9\ kN}$$

Dirección

Despejando el ángulo β

$$\boldsymbol{tan\ \beta} = \frac{\boldsymbol{\sum Fx}}{\boldsymbol{\sum Fy}} \quad \beta = Tan^{-1}\frac{98.7}{-5.85}$$

$$\beta = -86.6^{o} + 180^{o}$$

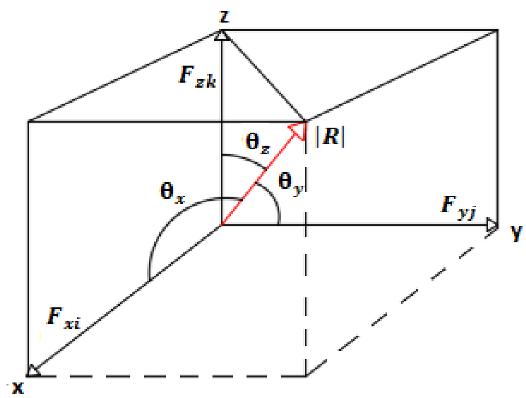
$$\beta = 93.4^{o}$$

4.2.6 Fuerzas en el espacio.

Componentes rectangulares

Marco de referencia:

La dirección de una fuerza se mide con respecto a ejes de referencia denominados "coordenadas cartesianas" en este caso en tres dimensiones $\boldsymbol{F_{xi}}, \boldsymbol{F_{yj}}, \boldsymbol{F_{zk}}$.



Magnitud de vectores

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(\boldsymbol{F_{xi}})^2 + (\boldsymbol{F_{yj}})^2 + (\boldsymbol{F_{zk}})^2}$$

Dirección de vectores

- **Cosenos directores**

$\mathbf{Cos}\ \theta_x = \left(\frac{F_{xi}}{|R|}\right)$, $Cos\theta_y = \left(\frac{F_{yj}}{|R|}\right)$, $Cos\theta_z = \left(\frac{F_{zk}}{|R|}\right)$ **(Se miden en la parte positiva del eje)**

$$Cos^2\ \theta_x + Cos^2\ \theta_y + Cos^2\ \theta_z = 1$$

Vector cartesiano de posición

$$\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$

Vector unitario

$$\lambda_F = \frac{F_{xi}}{|R|}\ ,\ \lambda_F \frac{F_{yj}}{|R|},\quad \lambda_F = \frac{F_{zk}}{|R|}$$

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

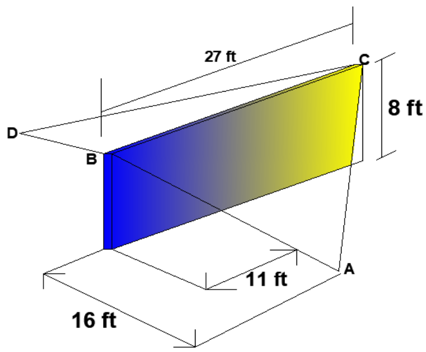
Momento de una fuerza

M = F * d (Fuerza por brazo de palanca)

$$M_o = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

"Problema Resuelto 2.8 del libro Beer and Jhonston, 9^{a} edición" (Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición).

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 1200 lb en el cable AC Determine a) La magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB Y AC sobre la estaca A (Beer & Jhonston).



Coordenadas

A (16,0,-11)

B (0,8,0)

C (0,8,-27)

Vectores de Posición

$$\boldsymbol{rAB} = (\mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{0}) - (\mathbf{16}, \mathbf{0}, \mathbf{-11}) = \mathbf{-16}\boldsymbol{i} + \mathbf{8}\boldsymbol{j} + \mathbf{11}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{rAC} = (\mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{-27}) - (\mathbf{16}, \mathbf{0}, \mathbf{-11}) = \mathbf{-16}\boldsymbol{i} + \mathbf{8}\boldsymbol{j} - \mathbf{16}\boldsymbol{k}$$

Solución:

Como se muestra en la figura se tiene un problema de tensiones, pero esta vez no en dos dimensiones si no en 3 dimensiones por lo que en este caso debemos obtener las coordenadas de los puntos A, B, C, para posteriormente determinar los vectores posición de los segmentos y a su vez los vectores unitarios

Magnitud de los vectores de posición

$$|\mathbf{rAB}| = \sqrt{(\mathbf{-16})^2 + (\mathbf{8})^2 + (\mathbf{11})^2} = \mathbf{21}$$

$$|\mathbf{rAC}| = \sqrt{(\mathbf{-16})^2 + (\mathbf{8})^2 + (\mathbf{-16})^2} = \mathbf{24}$$

Vectores Unitarios

$$\boldsymbol{\lambda AB} = \frac{\boldsymbol{rAB}}{|\boldsymbol{rAB}|} = \mathbf{-0.762}\ \boldsymbol{i} + \mathbf{0.381}\ \boldsymbol{j} + \mathbf{0.524}\ \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda AC} = \frac{\boldsymbol{rAC}}{|\boldsymbol{rAC}|} = \mathbf{-0.666}\ \boldsymbol{i} - \mathbf{0.333}\ \boldsymbol{j} - \mathbf{0.666}\ \boldsymbol{k}$$

Teniendo los vectores unitarios se multiplican por las fuerzas de tensión de AB = 840 lb y de AC = 1200 lb

$$FAB = (840\ lb)(-0.762\ i + 0.381\ j + 0.524k)$$

$$FAB = (-640\ i + 320\ j + 440\ k)$$

$$FAC = (1200lb)(-0.666\ i - 0.333\ j - 0.666\ k)$$

$$FAC = (-800\ i + 400\ j - 800\ k)$$

Haciendo las operaciones de esos vectores nos queda

$$-640\ i + 320\ j + 440\ k - 800\ i + 400\ j - 800k = -1440i + 720\ j - 360\ k$$

Magnitud de la resultante y Dirección mediante Cosenos directores

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(\mathbf{-1440})^2 + (\mathbf{720})^2 + (\mathbf{-360})^2} = \mathbf{1650}\ \boldsymbol{lb}$$

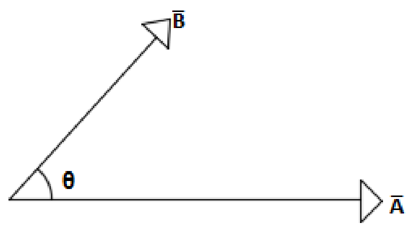
$$\boldsymbol{Cos\theta_x} = \left(\frac{\boldsymbol{F_{xi}}}{|\boldsymbol{R}|}\right) = \theta_x = Cos^{-1}\left(\frac{-1440}{1650}\right) = 150.8^{o}$$

$$\boldsymbol{Cos\theta_y} = \left(\frac{\boldsymbol{F_{yj}}}{|\boldsymbol{R}|}\right) = \theta_y = Cos^{-1}\left(\frac{720}{1650}\right) = 64.12^{o}$$

$$\boldsymbol{Cos\theta_z} = \left(\frac{\boldsymbol{F_{zk}}}{|\boldsymbol{R}|}\right) = \theta_z = Cos^{-1}\left(\frac{-360}{1650}\right) = 102.6^{o}$$

4.2.7 Producto punto y producto cruz

Producto punto de vectores (Producto escalar)



Si $A < a_1, b_1, c_1 > y\ B < a_2, b_2, c_2 >$

El producto escalar entre A y B en función de sus componentes está dado por:

$$\boxed{A \cdot B = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}$$

Para los vectores unitarios *i, j, k*

$$i \cdot i = 1 \quad j \cdot j = 1 \quad k \cdot k = 1$$
$$i \cdot j = 0 \quad i \cdot k = 0 \quad j \cdot k = 0$$

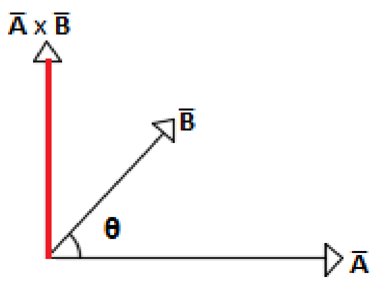
Hallar el producto punto de los vectores $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{2i} + \mathbf{5j} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{4i} + \mathbf{13j}$

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{2} * \mathbf{4}) + (\mathbf{5} * -\mathbf{13})$$

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{8} - \mathbf{65})$$

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = -\mathbf{57}\ (\textbf{el producto escalar es un escalar})$$

Producto cruz de vectores (Producto vectorial)



$$Si\ \vec{A} = a_1 i + b_1 j + c_1 k\ \text{ y }\ \vec{B} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = (b_1 c_2 - b_2 c_1) i - (a_1 c_2 - a_2 c_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k}$$

Para los vectores unitarios *i, j, k*

$$i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0$$
$$i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$$
$$j \times i = -k \quad k \times j = -i \quad i \times k = -j$$

Hallar el producto cruz de los vectores $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{3i} + \mathbf{5j} - \mathbf{6k} \text{ x } \bar{\mathbf{B}} = -\mathbf{3i} - \mathbf{4j} + \mathbf{3k}$

Solución:

Al hacer el producto cruz vamos a obtener un vector perpendicular u ortogonal a esos 2 vectores

$$\bar{\mathbf{A}} \text{ x } \bar{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & -\mathbf{6} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & -\mathbf{6} \\ -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \mathbf{3} & -\mathbf{6} \\ -\mathbf{3} & \mathbf{3} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{4} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\bar{\mathbf{A}} \text{ x } \bar{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & -\mathbf{6} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = [(\mathbf{5})(\mathbf{3}) - (-\mathbf{4})(-\mathbf{6})]\mathbf{i} - [(\mathbf{3})(\mathbf{3}) - (-\mathbf{3})(-\mathbf{6})]\boldsymbol{j} + [(\mathbf{3})(-\mathbf{4}) - (-\mathbf{3})(\mathbf{5})]\mathbf{k}$$

$$\bar{\mathbf{A}} \text{ x } \bar{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & -\mathbf{6} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = (\mathbf{15} - \mathbf{24})\boldsymbol{i} - (\mathbf{9} - \mathbf{18})\boldsymbol{j} + (-\mathbf{12} + \mathbf{15})\boldsymbol{k}$$

$$\bar{\mathbf{A}} \text{x } \bar{\mathbf{B}} = -\mathbf{9}\boldsymbol{i} + \mathbf{9}\boldsymbol{j} + \mathbf{3}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{el\ producto\ vectorial\ es\ otro\ vector\ y\ este\ no\ es\ conmutativo})$$

4.2.8 Momento o torque:

Es la tendencia al giro a la que puede tender una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, para que este tiende a rotar en torno a un eje.

Momento con respecto a puntos y ejes

Momento con respecto a un punto[1]

“Se denomina momento de una fuerza a un punto, al producto vectorial del vector posición $\bar{r}$ *de la fuerza por el vector fuerza* $\bar{F}$*.”*

Aplica cuando una sola fuerza es perpendicular al objeto que tiende a girar y el momento se calcula:

$$M_o = \bar{\mathbf{r}} \text{ x } \mathbf{F}$$

Donde:

M_o**= Momento o torque** $[N - m]$

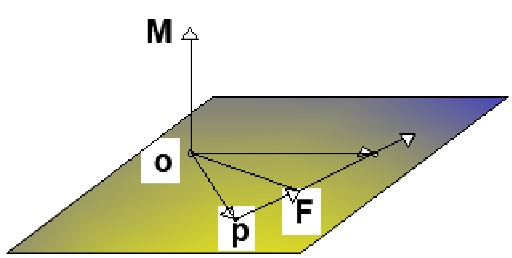
$\bar{F}$ **= Fuerza aplicada al cuerpo** $[N]$

$\bar{r}$ **= Brazo de palanca** $[m]$

- Cuando sobre un cuerpo actúan fuerzas que no tienen una línea de acción común, quizá no se mueva ni a la derecha ni a la izquierda, tampoco hacia arriba i hacia abajo, pero puede seguir girando.
- La línea de acción de una fuerza es una línea imaginaria, cuando las líneas de acción de las fuerzas no se intersecan en un mismo punto, puede haber rotación respecto a un punto llamado eje de rotación.
- La distancia perpendicular del eje de rotación a la línea de la fuerza se llama brazo de palanca de la fuerza, el cual determina la eficacia de una fuerza dada para provocar el movimiento rotacional.

Momento con respecto a un eje[2]

“El momento de una fuerza aplicada en un punto P con respecto de un punto O viene dado por el producto vectorial del vector por el vector fuerza:”



M_o**= OP x F=** $\bar{r}$ **x** $\bar{F}$

Donde:

r = Vector de posición que va desde O a P

---

[1] (http://www.academia.edu/7298732/MOMENTO_DE_UNA_FUERZA_RESPECTO_A_UN_PUNTO, s.f.)
[2] (http://www.academia.edu/7298732/MOMENTO_DE_UNA_FUERZA_RESPECTO_A_UN_PUNTO, s.f.)

Por la propia definición del producto vectorial, el momento M es un vector perpendicular al plano determinado por los vectores F y r.

Dado que las fuerzas tienen carácter de vectores deslizantes, el momento de una fuerza es independiente de su punto de aplicación sobre su recta de acción o directriz.

La definición de momento se aplica a otras magnitudes vectoriales. Así, por ejemplo, el momento de la cantidad de movimiento o momento lineal, P, es el momento cinético o momento angular, L, definido como:

$$L_o = \mathbf{OP} \times \mathbf{F} = \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}$$

El momento de fuerza conduce a los conceptos de par, par de fuerzas, par motor, etc.

Pares

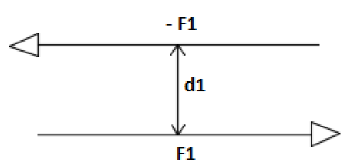
Dos fuerzas que tienen igual magnitud direcciones opuestas y líneas de acción diferentes se denominan fuerzas pares.

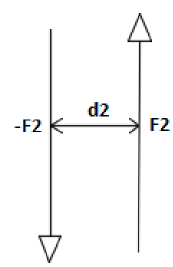
Un par tiende a generar rotaciones aun cuando a suma vectorial de las fuerzas sea nula y tiene la notable propiedad de que el momento que ejerce es el mismo respecto a cualquier punto.

Dos pares tendrán momentos iguales si:

- Los dos pares se encuentran en planos paralelos o en el mismo plano
- Los dos pares tienen el mismo sentido a hacer girar el cuerpo en la misma dirección

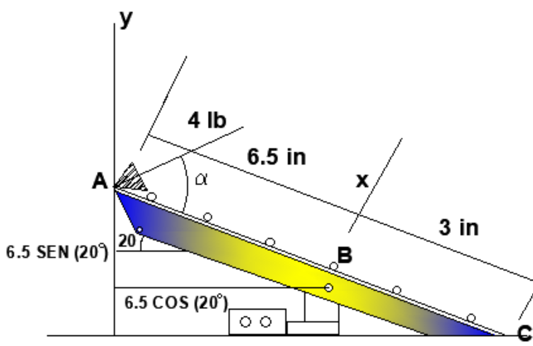
$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

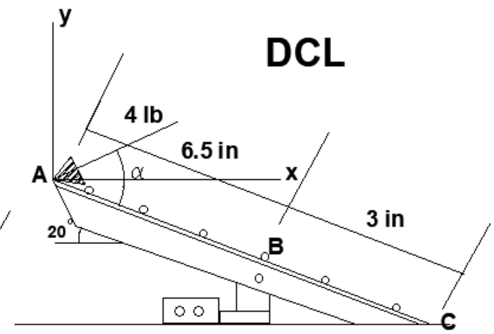




"Ejercicio 3.2 del libro Beer and Jhonston, 9^a *edición"* (Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición).

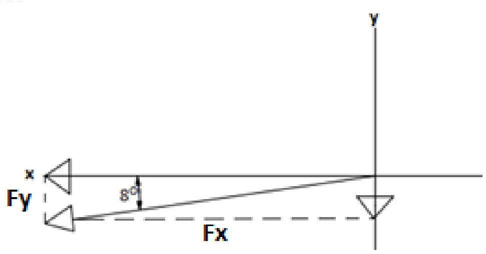
El pedal para un sistema neumático se articula en B. Se sabe que α = 28^{o}, determine el momento de la fuerza de 4 lb con respecto al punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes horizontal y vertical a lo largo de ABC y en dirección perpendicular a ABC. (Beer & Jhonston).





Solución:

Como se observa el primer paso es realizar el Diagrama de Cuerpo Libre el cual nos ayudara a tener una visión de las fuerzas que actúan en el sistema, (en este caso solo es una fuerza) posteriormente se coloca un sistema de coordenadas cartesiano en el punto A, para posteriormente descomponer la fuerza en sus componentes rectangulares, tenemos ángulos alternos internos (vistos previamente) , el ángulo α = 28^{o} se le resta el ángulo de 20^{o} para que nos del ángulo de la fuerza al eje x quedándonos que el valor del ángulo es de 8^{o}.

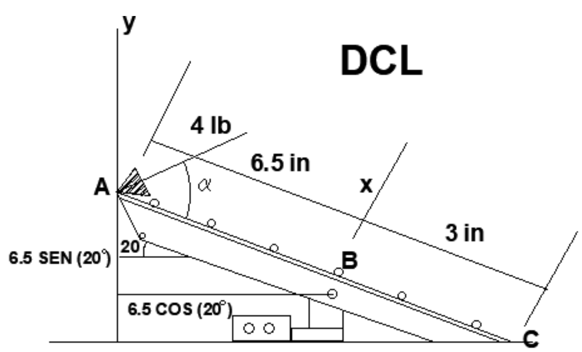


$$F_x = 4\cos(8^o)$$

$$\boldsymbol{F_x = 3.961\ \mathrm{lb}}$$

$$F_y = 4\ \mathrm{sen}\ (8^o)$$

$$\boldsymbol{F_y = 0.557\ \mathrm{lb}}$$



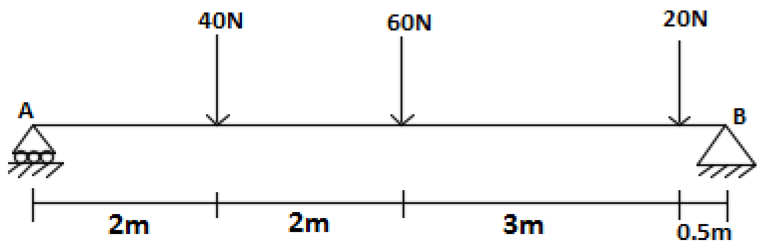
$\sum \boldsymbol{M_B} = \mathbf{Fx\ dx} + \mathbf{fy\ dy}$ (Fuerza por su brazo de palanca)

$$\sum M_B = (3.961)\ (6.5\ \mathrm{sen}\ 20^o) + (0.557)\ (6.5\cos 20^o)$$

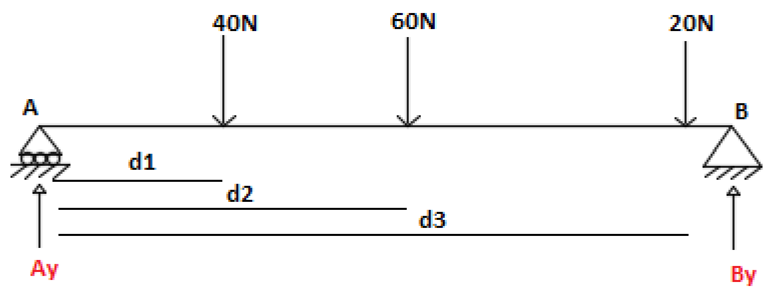
$$\sum \boldsymbol{M_B = 12.207\ lb - in}$$

Dada la siguiente viga mostrada con sus respectivas fuerzas, determinar:

a) Las reacciones de la viga “Ay” y “By”



DCL



Solución:

En este problema se determinan las reacciones mediante la suma de momentos con respecto a un punto en este caso el punto A para determinar la reacción en By y suma de momentos en el punto B para determinar la reacción en Ay, esto se hace multiplicando la fuerza por su respectivo brazo de palanca hacia el apoyo según sea el caso.

$$\sum M_A = 0 -$$

$$-40(2) - 60(4) - 20(7) + \text{By}\,(7.5) = 0$$

$$By = \frac{40(2) + 60(4) + 20(7)}{7.5}$$

$$\textit{Reacción}\ \text{By} = 61.3\ \text{N}$$

$$\sum M_B = 0 -$$

20(0.5) + 60(3.5) + 40(5.5) – Ay (7.5) = 0

$$Ay = \frac{-20(0.5) - 60(3.5) - 40(5.5)}{-7.5}$$

$$\textit{Reacción}\ \text{Ay} = 58.7\ \text{N}$$

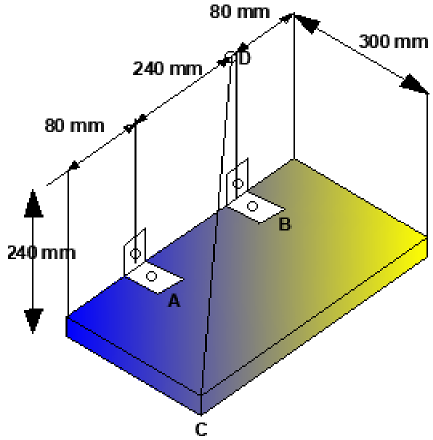
$$\sum Fy = 0 +$$

$$-40 - 60 - 20 + 61.3 + 58.7 = 0$$

Haciendo las operaciones se cumple la condición de equilibrio ya que el resultado de todas las fuerzas nos da 0.

"Ejercicio 3.4 del libro Beer and Jhonston, 9^{a} edición" (Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición).

Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en A y B y por un alambre CD. Se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine a) El momento con respecto a A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C. b) La distancia perpendicular desde el punto A hasta el cable CD (Beer & Jhonston).



Coordenadas

A (0,0,320)

B (300,0,400)

C (0,240,80)

Vectores de Posición

$rAC = (0{,}240{,}80) - (0{,}0{,}320)$

$= \mathbf{300i + 0j + 80k}$

$rCD = (0{,}240{,}80) - (300{,}0{,}400)$

$= \mathbf{-300i + 240j - 320k}$

Solución:

Como se muestra en la figura se tiene un problema de momento con respecto a un punto en tres dimensiones, por lo que en este caso debemos obtener las coordenadas de los puntos A, B, C, para posteriormente determinar los vectores posición de los segmentos y a su vez los vectores unitarios

Magnitud de los vectores de posición

$$|\mathbf{rAC}| = \sqrt{(\mathbf{300})^2 + (\mathbf{0})^2 + (\mathbf{80})^2} = \mathbf{310.4}$$

$$|\mathbf{rCD}| = \sqrt{(\mathbf{-300})^2 + (\mathbf{240})^2 + (\mathbf{-320})^2} = \mathbf{500}$$

Vectores Unitarios

$$\boldsymbol{\lambda AC} = \frac{\boldsymbol{rAC}}{|rAC|} = \mathbf{0.96\,i + 0\,j + 0.25\,k}$$

$$\boldsymbol{\lambda CD} = \frac{\boldsymbol{rAD}}{|rAD|} = \mathbf{-0.6\,i + 0.48\,j - 0.64\,k}$$

Fuerza de Tensión por Vectores Unitarios

$$\boldsymbol{FCD} = (200\text{ N})\,(-0.6\text{ i} + 0.48\text{ j} - 0.64\text{ k})$$

$$\boldsymbol{FCD} = -120\text{ i} + 96\text{ j} - 128\text{ k}$$

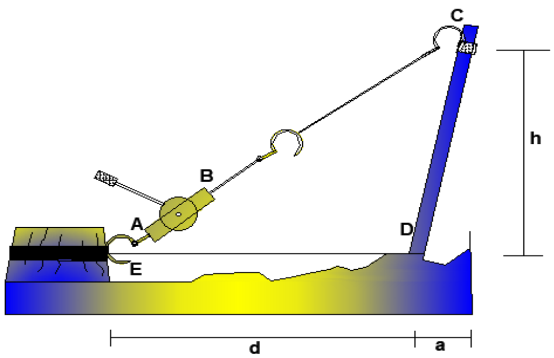
$$\boldsymbol{M_{r\,x\,F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{300} & \mathbf{0} & \mathbf{80} \\ \mathbf{-120} & \mathbf{96} & \mathbf{-128} \end{vmatrix} = 7{,}680\text{ i} + 28{,}800\text{ j} + 28{,}800\text{ K (N} - \text{mm)}$$

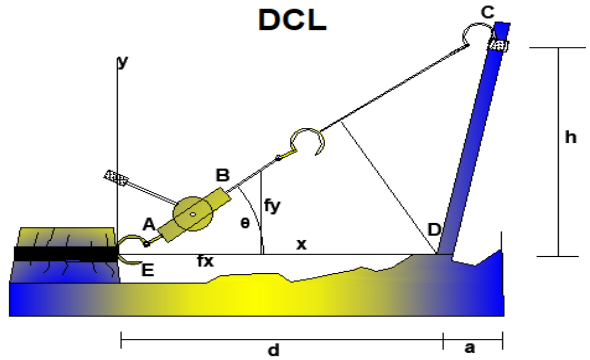
$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(\mathbf{7680})^2 + (\mathbf{28800})^2 + (\mathbf{28800})^2}$$

$$|\mathbf{R}| = \mathbf{41{,}448\ N - mm}$$

"Ejercicio 3.10 del libro Beer and Jhonston, 9^{a} edición" (Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición).

Se sabe que es necesario aplicar una fuerza que produzca un momento de 7,840 lb-in (960N-m) respecto a D para tensar el cable al poste CD. Si a = 8 in (0.2m), b = 35 in (0.875m) y d = 112 in (2.8 m), determine la tensión que debe desarrollarse en el cable del malacate AB para crear el momento requerido respecto al punto D (Beer & Jhonston).





Solución:

Como se muestra en la figura se tiene un problema de momento con respecto a un punto por lo que tendríamos que aplicar el **producto cruz**, por lo que en este caso no debemos obtener las coordenadas de ningún punto, formamos un triángulo rectángulo y descompondremos las fuerzas como se muestra en el DCL posteriormente determinamos el producto cruz.

Aplicando Pitágoras:

$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$ ó también $\boldsymbol{c^2 = (d+a)^2 + b^2}$

$c^2 = (3)^2 + (0.875)^2$

$c = \sqrt{9 + 0.765}$

$\boldsymbol{c = 3.125\ \mathrm{m}}$

$sen\theta = \frac{0.875}{3.125} = 0.28$

$cos\theta = \frac{3}{3.125} = 0.96$

Componentes:

$\boldsymbol{F_x = FCE\ cos\ \theta\ =\ 0.96FCE}$

$\boldsymbol{F_y = FCE\ sen\ \theta\ =\ 0.28FCE}$

Expresado en Vectores Unitarios

$\boldsymbol{FCE = -\,0.96\mathrm{FCE}\,\mathrm{i}\ -\ 0.28\mathrm{FCE}\,\mathrm{j}\ \ \mathrm{y}\ \ \ \bar{\mathrm{r}}\ =\ -2.8\ \mathrm{m}}$

$\boldsymbol{M_D = \bar{\mathrm{r}}\ \mathrm{x}\ \mathrm{F}\ =\ -2.8\ \mathrm{i}\ \mathrm{x}\ (-0.96\mathrm{FCE}\ \mathrm{i} - 0.28\ \mathrm{FCE}\ \mathrm{j})}$ $(Negativo\ en\ el\ sentido\ Horario)$

$\boldsymbol{M_D = \bar{\mathrm{r}}\ \mathrm{x}\ \mathrm{F}\ =\ 2.688\ \mathrm{FCE}\ (0)\ +\ 0.78\ \mathrm{FCE}\ \mathrm{k}}$

$\boldsymbol{M_D = \bar{\mathrm{r}}\ \mathrm{x}\ \mathrm{F}\ =\ 0.78\ \mathrm{FCE}\ \mathrm{k}}$

$\boldsymbol{960k = 0.78\ FCE\ K}$

$\frac{960}{0.78} = \boldsymbol{FCE}$

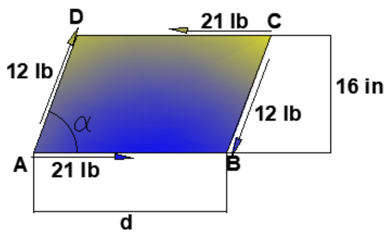
$1230\ N = \boldsymbol{FCE}$

Productos cruz de Vectores Unitarios

$i \times i = 0$	$j \times j = 0$	$k \times k = 0$
$i \times j = k$	$j \times k = i$	$k \times i = j$

"Ejercicio 3.71 del libro Beer and Jhonston, 9^{a} edición" (Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición).

Una placa en forma de paralelogramo se somete a la acción de dos pares. Determine a) el momento del par formado por las dos fuerzas de 21 lb b) la distancia perpendicular entre las fuerzas de 12 lb si el par resultante de los dos es cero c) el valor α si d es igual a 42 in. y el par resultante es de 72 lb -in. en el sentido de las manecillas del reloj (Beer & Jhonston).



Solución:

Como se observa en la figura se tienen dos pares de fuerzas y sabemos que para determinar el momento se tiene que M = F x d en este caso determinaremos el momento en c ya que la fuerza es perpendicular a la distancia.

Para el inciso a)

$$\boldsymbol{M = F\ x\ d}$$

$$\boldsymbol{M_c = (21\ lb)j\ x\ (-16in)j}$$

$$\boldsymbol{M_c = 336\ lb\ k}$$

Para el inciso b)

Conociendo el momento ahora se despeja la distancia de la ecuación, pero esta vez para la fuerza de 12 lb ya que el par resultante de los dos pares es cero:

$$\boldsymbol{M = F\ x\ d}$$

$$\boldsymbol{336\ lb = 12\ x\ d}$$

$$\boldsymbol{\frac{336}{12} = d}$$

$$\boldsymbol{d = 28\ in}$$

Para el inciso c)

Usando la razón trigonométrica de la tangente para hallar el ángulo α nos queda:

$$tan\alpha = \frac{16}{28}$$

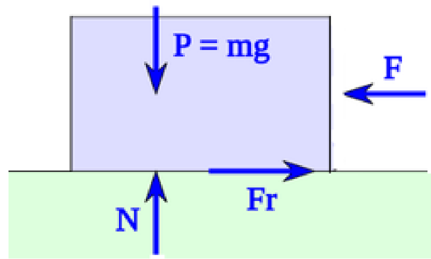
$$\alpha = tan^{-1}\frac{16}{28}$$

$\alpha = 29.74^{o}$

Fuerza de fricción

Es una fuerza que se opone al movimiento relativo entre dos superficies en contacto, no hay fricción cuando las superficies de contacto son lisas o cuando no hay tendencia al movimiento.

En la siguiente figura la fuerza de fricción Fr, se opone al movimiento de la fuerza P



La fricción se clasifica en 2 tipos:

- **Fricción de Coulomb. -** Cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de superficies.
- **Fricción de fluidos. -** Entre capas que e mueven a diferentes velocidades.

Existen dos coeficientes de fricción:

- **Coeficiente de fricción estático μ_s**
  Es la que se opone al movimiento relativo entre dos superficies de contacto
  $F_r = \mu_s N$

- **Coeficiente de fricción cinético μ_k**
  Es la que se opone al movimiento ya existente de la superficie de contacto
  $F_r = \mu_k N$

Angulo de fricción

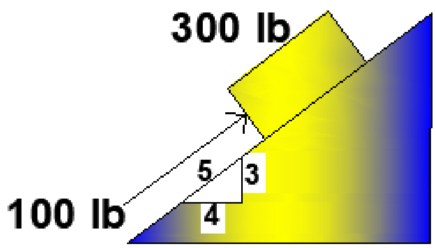
Es el que forman las direcciones de la reacción total y la presión normal cuando el movimiento está a punto de empezar. Cuando se reemplaza la fuerza normal N y la fuerza de fricción F por su resultante se formará un ángulo ϕ con la normal a la superficie.

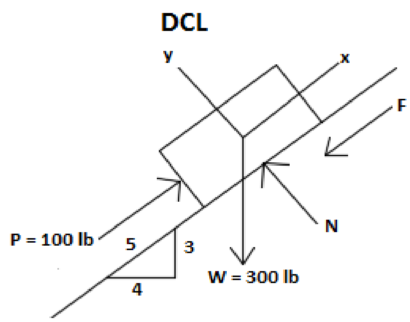
Tan ϕ = $\frac{Fm}{N}$

Tan ϕ = μ_s

"Problema 8.1 del libro Beer and Jhonston, 9^{a} edición" (Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición).

Una fuerza de 100 lb actúa sobre un bloque de 300 lb que está colocado en un plano inclinado. Los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine si el bloque está en equilibrio y encuentre el valor de la fuerza de fricción (Beer & Jhonston).





Solución:

Tenemos un problema de fricción por lo que debemos realizar el Diagrama de Cuerpo Libre de la figura para saber las fuerzas que están actuando en el sistema para posteriormente hacer ∑Fx y ∑Fy.

$$tan\theta = \frac{3}{4}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\theta = 36.86^{o}$$

$$\sum \mathrm{Fx} = 100 - \mathrm{F} - 300 \text{ sen } 36.86^{o} = 0$$

$$\sum \mathrm{Fx} = 100 - \mathrm{F} - 180 = 0$$

$$\sum \mathrm{Fx} = 100 - 180 = \mathrm{F}$$

$$F = -80\ lb$$

$$\sum \mathrm{Fy} = -300 \cos 36.86^{o} + \mathrm{N} = 0$$

$$\sum \mathrm{Fy} = -240 + \mathrm{N} = 0$$

$$\boldsymbol{N = 240\ lb}$$

$$\boldsymbol{F_r = \mu_s N}$$

$$\mathrm{F_r} = (0.25)\,(240\ \mathrm{lb}) = \mathbf{60\ lb}$$

$$\boldsymbol{F_r = \mu_k N}$$

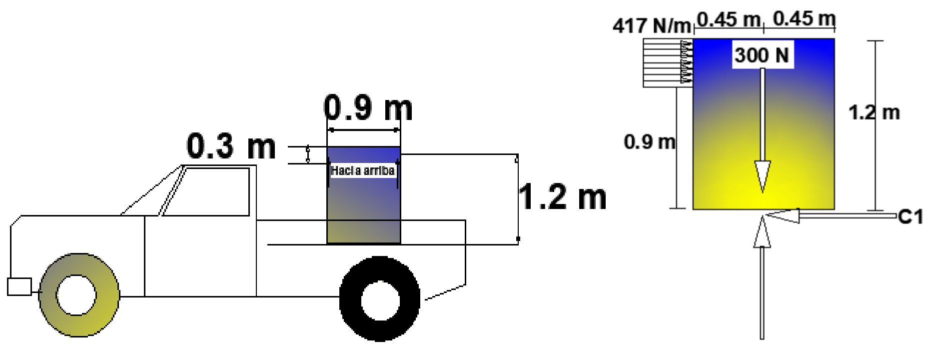
$$\mathrm{F_r} = (0.20)\,(240\ \mathrm{lb}) = \mathbf{48\ lb}$$

Conclusión:

El bloque se desliza hacia abajo del plano

"Problema 9.5 del libro Ingeniería Mecánica Estática". (William F. Riley, 2008)

Una furgoneta se mueve con una velocidad constante de 80 km /h transportando una caja de peso de 300N. Esta sobresale 30 cm por encima de la cabina de la furgoneta. La resistencia aerodinámica de la caja puede considerarse que es una fuerza de 417 N/m distribuida uniformemente sobre el borde de la caja expuesto al viento. Calcular el mínimo coeficiente de rozamiento necesario para impedir el deslizamiento de la caja en la furgoneta y decir si vuelca o no.



Solución:

Tenemos un problema de fricción por lo que debemos realizar el Diagrama de Cuerpo Libre de la figura para saber las fuerzas que están actuando en el sistema para posteriormente hacer ∑Fx y ∑Fy.

Para la fuerza puntual multiplicamos la fuerza uniformemente repartida por la longitud en la que se encuentra.

$$P = \left(417\frac{N}{m}\right)(0.30) = \mathbf{125.1\ N}$$

$$\sum Fx = 125.1\ N - F_r = 0$$

$$F_r = \mathbf{-125.1\ N}$$

$$\sum Fy = -300 + N = 0$$

$$\boldsymbol{N = 300\ N}$$

$$\boldsymbol{\mu_s} = \frac{\boldsymbol{F'}}{\boldsymbol{N}} = \frac{125.1}{300} = 0.416$$

$$\sum M_A = 125.1\ (1.05) + 300(0.45) - 300\ (0.45) - 300(\mathrm{x}) = 0$$

$$-131.25 + 135 - 300\ (x) = 0$$

$$\frac{\mathbf{3.75}}{\mathbf{300}} = \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{0.013}\ \boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{F_r = \mu_s N}$$

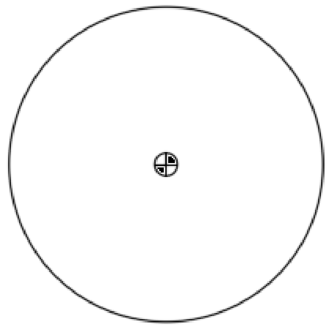
$$F_r = (0.416)(300N)$$

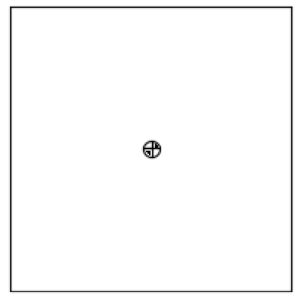
$$F_r = 124.8\ (Coeficiente\ mínimo\ necesario)$$

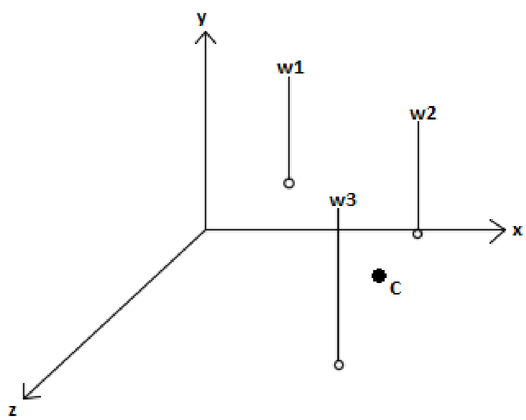
4.2.9 Centro de primer orden o centroide.

(Centro) de Área

Es el punto donde se localiza el centro geométrico de un objeto en figuras geométricas, podemos localizar la posición del centroide en la parte media de estas, por ejemplo:







Centro de gravedad de tres partículas dispersas en 3 dimensiones.

El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo el cual coincide con el centro de gravedad o con el centro de masa, si el material fuese homogéneo.

Si fuera peso:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}w}{\sum w}\ ;\ \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}w}{\sum w}\ \ ;\ \bar{z} = \frac{\sum \bar{z}w}{\sum w}$$

Si fuera masa:

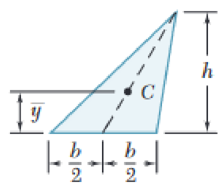
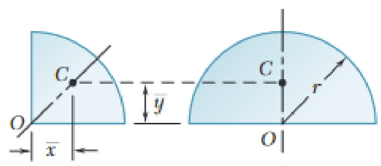
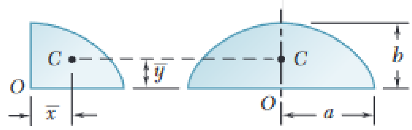
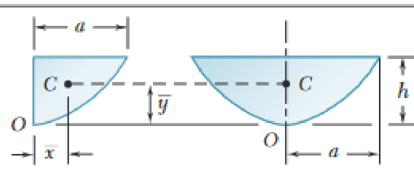
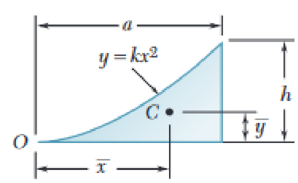
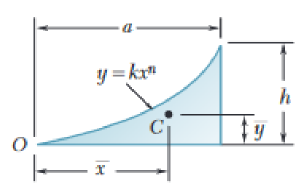
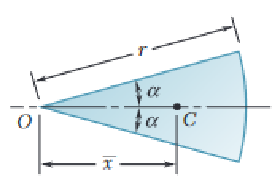
$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}m}{\sum m}\ ;\ \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}m}{\sum m}\ \ ;\ \bar{z} = \frac{\sum \bar{z}m}{m}$$

Si fuera volumen:

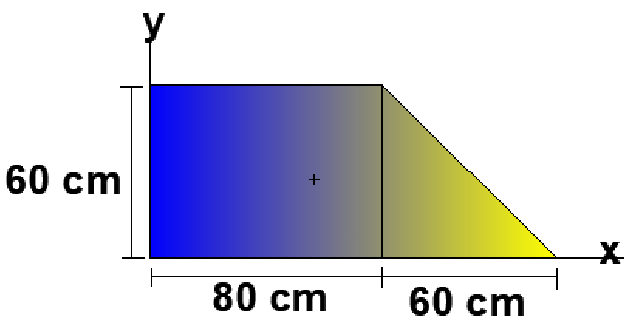
$$\bar{x} = \frac{\int v\ \bar{x}dv}{\int v\ dv}\ ;\ \bar{y} = \frac{\int v\ \bar{y}dv}{\int v\ dv}\ ;\ \bar{z} = \frac{\int v\ \bar{z}dv}{\int v\ dv}$$

A continuación, se representa una tabla para determinar los centroides de figuras planas más comunes, la cual será de gran ayuda para posteriores cálculos como los momentos de inercia.

Centroides de formas comunes de áreas y de líneas

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Determinar los centroides de área de las siguientes figuras.



Solución:

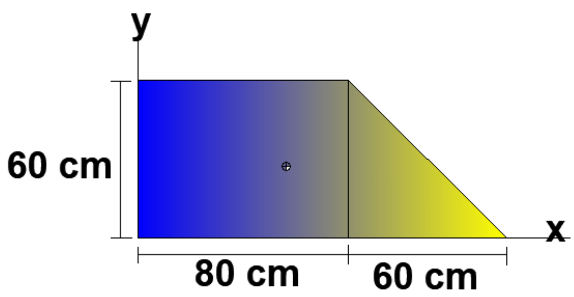
Para este tipo de casos de determinación de centroides, la mayoría de las veces se hace una tabla en donde se incorporan diferentes datos como, la figura, el área, distancia hacia el eje "x", distancia hacia el eje "y" y el producto del área por la distancia en "x" y el producto del área por la distancia en "y" quedándonos de la siguiente manera (para la figura del triángulo se observa en las tablas de centroides que es a 1/3 de la altura y se le suma la distancia hacia el eje y).

Figura	Área	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A $\bar{x}$	A $\bar{y}$
Rectángulo	$A = B\ x\ h$ $A = (60)(80)$ $A = 4800$	40	30	192,000	144,000
Triángulo	$A = \frac{B\ X\ H}{2}$ $A = \frac{60x60}{2}$ $A = 1800$	100 $\frac{1}{3}b = \frac{1}{3}(60) =$ $20 + 80 = 100$	20 $\frac{1}{3}b = \frac{1}{3}(60)$ $= 20$	180,000	36,000
Sumas	$A_T = 6600$			372,000	180,000

$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\boldsymbol{Ax}}{\boldsymbol{A_T}} = \frac{372{,}000}{6{,}600} = 56.36\ cm$

$\bar{\mathbf{y}} = \frac{\boldsymbol{Ay}}{\boldsymbol{A_T}} = \frac{180{,}000}{6{,}600} = 27.27\ cm$

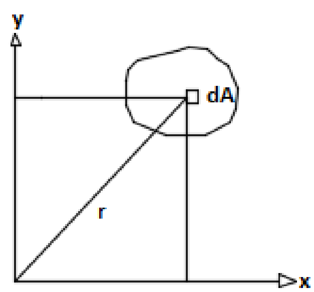
Quedando el centroide en la siguiente parte de la figura:



4.2.10 Momentos de inercia o segundo momento de área

Los momentos de inercia son una medida de inercia rotacional de un cuerpo éste gira en torno a uno de los ejes principales de inercia.

Los momentos de inercia de una sección plana con respecto a los ejes “x” y “y”, respectivamente están definidos por la integral mostrada:



$I_x = \int y^2 \, \mathrm{dA}$

$I_y = \int x^2 \, \mathrm{dA}$

Donde “x” y “y” son las coordenadas del elemento diferencial del área dA debido a que el elemento dA es multiplicado por el cuadrado de la distancia del eje de referencia, los momentos de inercia son también llamados segundo momento de área y estos serán siempre positivos.

Radio de Giro de un Área

El radio de giro de un área tiene unidades de longitud y es usado a menudo en diseño estructural para el análisis de columnas.

Si se conocen las áreas y los momentos de inercia, los radios de giro son denominados a partir de las siguientes formulas:

Radio de giro en “x” y “y”

$k_x = \sqrt{\frac{Ix}{\sum A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{Iy}{\sum A}}$

Teorema de los Ejes Paralelos o Teorema de Steiner

El momento de inercia de cualquier objeto con respecto a cualquier eje paralelo a un eje que pasa por el centro de masa es igual al momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia entre los dos y está dado por:

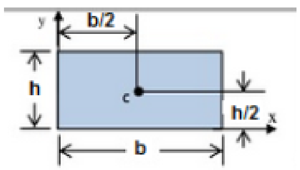
$I_x = I'_x + \mathrm{A}\ \mathbf{dy}^2$ **(I_x = centro de masa + M $\mathbf{dy}^2$)**

$I_y = I'_y + \mathrm{A}\ \mathbf{dx}^2$ **(I_y = centro de masa + M $\mathbf{dx}^2$)**

Momentos de inercia con respecto a su eje centroidal.

4.2.11 Momentos de inercia de figuras planas más comunes.

Rectángulo

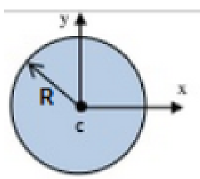


$$\overline{I_x} = \frac{bh^3}{12} \qquad I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$\overline{I_y} = \frac{b^3h}{12} \qquad I_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$\overline{I_{xy}} = 0 \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

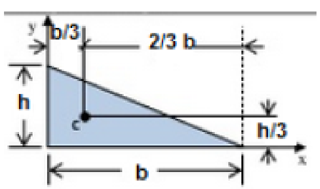
Circulo



$$I_x = I_y \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

Triangulo Rectángulo

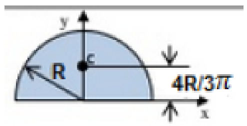


$$\overline{I_x} = \frac{bh^3}{36} \qquad I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$\overline{I_y} = \frac{b^3h}{36} \qquad I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$\overline{I_{xy}} = -\frac{b^2h^2}{72} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$

Semicírculo



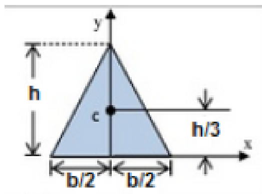
$$\bar{I}_x = 0.1098R^4$$

$$I_x = I_y = \bar{I}_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$\bar{I}_{xy} = 0$$

$$I_{xy} = 0$$

Triángulo Isósceles



$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$$

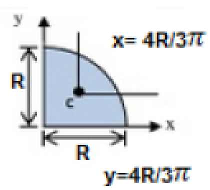
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$\bar{I}_y = \frac{b^3h}{48}$$

$$\bar{I}_{xy} = 0$$

$$I_{xy} = 0$$

Cuarto de Circulo



$$I_x = I_y = 0.05488R^4$$

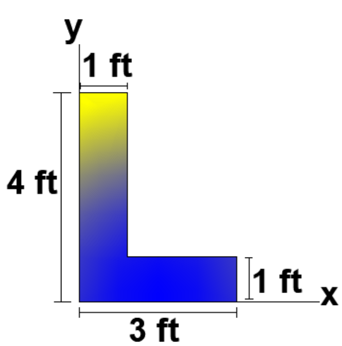
$$\bar{I}_{xy} = -0.01647R^4$$

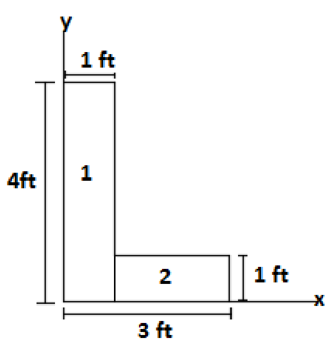
$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_{xy} = \frac{R^4}{8}$$

Determine los momentos de inercia I_x e I_y así como k_X y k_Y y el producto de inercia para el área de la figura con respecto a los ejes cartesianos.

Por ser una figura compuesta formada por dos rectángulos utilizaremos el teorema de los ejes paralelos y sacaremos el momento de inercia del rectángulo 1 y el rectángulo 2.





Respecto a "x"

Figura 1

$$I_x = \frac{1}{12}\mathbf{bh^3} + \mathbf{Ad^2}$$

$$I_x = \frac{1}{12}(1)(4)^3 + (4)(1)(2)^2 = \mathbf{21.33\ ft^4}$$

Figura 2

$$I_x = \frac{1}{12}\mathbf{bh^3} + \mathbf{Ad^2}$$

Respecto a "y"

Figura 1

$$I_y = \frac{1}{12}\mathbf{hb^3} + \mathbf{Ad^2}$$

$$I_y = \frac{1}{12}(4)(1)^3 + (4)(1)(0.5)^2 = \mathbf{1.33\ ft^4}$$

Figura 2

$$I_y = \frac{1}{12}\mathbf{hb^3} + \mathbf{Ad^2}$$

1

Producto de Inercia

$$I_{x'y'} = Ixy + A\,dx\,dy$$

Figura 1 + figura 2

$$I_{x'y'} = 0 + (4)(1)(2)(0.5) = 4$$

$$I_{x'y'} = 0 + (2)(1)(0.5)(2) = 2$$

$$I_{x'y'} = 6$$

Conclusiones:

En este documento se abordaron algunas estrategias para la enseñanza y aprendizaje de materias básicas para posteriormente adentrarse a materias más complejas, vistas a nivel superior como lo es la estática, para ello se incluyó un material didáctico con diversos ejemplos desde ejercicios más básicos hasta los más complejos, para que el lector pueda comprender de una mejor manera los procesos de enseñanza y a su vez tener una visión más amplia de los ejercicios de aplicación que se muestran en este documento partiendo desde los conceptos básicos.

La necesidad de la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar se debe a la importancia de la geometría en el entorno en el que vivimos, en la vida diaria se presentan problemas de todo tipo, y éste trabajo se enfocó especialmente en la geometría y trigonometría, así como la base de la geometría analítica en tres dimensiones, para orientar a quienes consulten esté trabajo en las materias que cursaran a futuro como los vectores en el espacio (física) y su relación con otros temas de vital importancia en las matemáticas como figuras geométricas, formas, distancias, ángulos, etc.

En el presente trabajo se aprecian las diferentes estrategias de enseñanza y aprendizaje, que brinden apoyo a los estudiantes de nivel medio superior y superior, también para aquellos que tienen deficiencias o que necesitan reforzar o retroalimentar sus conocimientos vistos anteriormente, para que recuerden aquellos temas esenciales y tengan un apoyo en el cual puedan consultar sus dudas.

En dicho material didáctico se abordaron temas básicos de geometría y trigonometría así como de geometría en tres dimensiones, como ayuda o apoyo a estudiantes de nivel medio superior que estén por estudiar alguna ingeniería que involucre temas complejos como la Mecánica Vectorial, y nivel superior que tengan deficiencias desde temas básicos y a su vez puedan adentrarse progresivamente a temas de aplicación como la estática, con los debidos conocimientos de la trigonometría y geometría, para ayudar con el estudio de los estudiantes y puedan reforzar los conocimientos básicos e importantes con las estrategias, técnicas y herramientas necesarias para temas más complejos, para facilitar el entendimiento de temas como la estática y tengan las herramientas sólidas con las cuales puedan estudiar y repasar los temas más importantes como los vistos en él presente material.

Bibliografía

(s.f.). Obtenido de https://www.dgae-siae.unam.mx/acerca/objetivo.html (DGAE-SIAE UNAM, s.f.)

(s.f.). Obtenido de https://www.dgae-siae.unam.mx/acerca/objetivo.html (DGAE-SIAE UNAM, s.f.)

(https://www.dgae-siae.unam.mx/acerca/objetivo.html (DGAE-SIAE UNAM, s. (s.f.).

Abreu León, J. L., Benitez Pérez, H., Bracho Carpizo, F., Bracho Carpizo, J., & Canabal Cáceres. (2014). Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM. Distrito Federal, México : SUMEM.

Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F. V., Gallegos Ruíz, H. A., Cerón Villegas, M., & Reyes, F. R. (2009). *Matemáticas Simplificadas.* México: PEARSON.

Beer & Jhonston, M. E. (s.f.). *Mecánica Vectorial para Ingenieros "Estática" Novena Edición.* Mc Graw Hill.

Briseño Aguirre , L. A., & Verdugo Díaz, J. d. (2006). *Matematicas 3.* México, D.F: Santillana.

CONAMAT. (2016). *Guía practica para el examen de ingreso a la Universidad.* México D.F: PEARSON .

Geometría y Trigonometría CONAMAT. (2009). *Geometría.* Ciudad de México: PEARSON.

HIBBELER, R. (2010). *Ingeniería Mecánica "Estática" Desimosegunda Edición.* PEARSON EDUCACIÓN.

http://www.academia.edu/7298732/MOMENTO_DE_UNA_FUERZA_RESPECTO_A_UN_PUNTO. (s.f.).

PRECEPTOR ENCICLOPEDIA TEMATICA ESTUDIANTIL, 1. (s.f.).

Puga, E. C. (2006). *Geometría Analítica en el Espacio.* México: UNAM, Facultad de Ingeniería.

Ramírez, M. T. (Agosto de 2019). *Tutorias Plan de Acción Matematicas Aplicadas y Computación.* Obtenido de https://tutoria.unam.mx/sites/default/files/archivos/documentos/pdf/lic/MAC%202020.pdf

William F. Riley, L. D. (2008). Ingenieria Mecánica. En L. D. William F. Riley, *"Estatica".* Reverté S.A.

http://www.prepa5.unam.mx/wwwP5/profesor/publicacionMate/07IV.pdf