



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ZARAGOZA

ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE MAXWELL-CATTANEO
EN SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO

P R E S E N T A:

MARÍA DE LOS ÁNGELES CAMACHO JARAMILO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES:

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

M. EN C. LUIS ANTONIO TORRES RAMIREZ

CIUDAD DE MÉXICO, 2024.





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE**

Comunico usted que el alumno María de los Ángeles Camacho Jaramillo con número de cuenta 316262574 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes de enero del 2024 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez
Suplente:	M. en C. e I. M. Luis Antonio Ramírez Torres

El título de la tesis que se presenta es: “Estudio de la ecuación de Maxwell-Cattaneo en sistemas dinámicos lineales”

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M. en C. en I. M. Luis Antonio Ramírez Torres

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> << Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- A la Unidad de Bio-Ingeniería UI-FESZ-110323
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LUI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LUI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sinfín de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde puede adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo personal.

DEDICATORIAS

Este trabajo, así como todos los logros que he tenido, van dedicados principalmente a mi madre, Beatriz Jaramillo López, y a mí hermano, José Porfirio Camacho Jaramillo. Ustedes son la razón por la cual soy una persona con grandes valores, trabajadora, pero sobre todo muy feliz.

Es necesario agradecer a mis hermanos: Gloria, Benigno, Margarita y José. Por todo su apoyo e interés en mi progreso académico.

Con gran cariño, quiero agradecer a mis amigos: Dani, Joss, Aguirre, Carlitos, Ale y Román. Con ustedes compartí desde los desvelos y estrés de los trabajos en equipo hasta las risas del día a día. Sé que con ustedes forme una amistad que va a trascender a lo largo de los años, fuera de la FESZ.

Y por supuesto, no puede pasar por alto mi infinita gratitud a mi tutor, Edtson Emilio Herrera Valencia. Jamás me voy a cansar de escuchar sus historias y sus discursos motivacionales, todas las palabras que me ha dedicado me las llevo en el corazón. Confirmé la teoría que escuché en sexto semestre: Si sales de la FESZ sin haber tomado clases con Edtson, definitivamente NO estudiaste en la FESZ.

Si somos el promedio de las personas con las que convivimos entonces no cabe duda de que seré una persona maravillosa. Todos ustedes me impulsan a encontrar mi mejor versión. No tienen idea de lo importantes que son para mí.

ÍNDICE

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	8
1.1 ANTECEDENTES	9
1.2 HIPÓTESIS	12
1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	12
1.4 DISTRIBUCIÓN DEL MATERIAL	12
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	13
2.1 Ecuación de balance mecánico de energía	14
2.2 Ecuación de balance energético	15
2.3 Ecuación de Maxwell	17
2.4 Número de Deborah	18
3.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN UN CAPILAR.....	20
3.1.1 Diagrama del proceso: Capilar	20
3.1.2 Perfil de temperaturas.....	25
3.1.3 Números adimensionales.....	28
3.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN UNA CORONA CIRCULAR ..	30
3.2.1 Diagrama del proceso: Corona circular.....	30
3.2.2 Temperatura promedio	33
3.2.3 Números adimensionales.....	38
CAPÍTULO IV: SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	39
4.1 TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN UN CAPILAR	40
4.2 TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN UNA CORONA CIRCULAR	43
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES.....	48
5.1 Simulaciones	50
6 TRABAJO FUTURO.....	51
BIBLIOGRAFÍA.....	52

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Capilar de radio $r = a$ y longitud axial $z = L$	20
Figura 2. Corona circular de radios $r = R_2$ y $r = R_1$ y longitud $z = L$	30
Figura 3. Ilustra la función de transferencia real vs frecuencia del modelo de Maxwell-Cattaneo para diferentes valores del número de Fourier.	40
Figura 4. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número de Fourier.	41
Figura 5. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja vs la frecuencia para diferentes valores del número de Fourier.....	42
Figura 6. Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia a un Fourier igual a 1 a diferentes valores de R	43
Figura 7. Ilustra la parte real de la función de transferencia vs la frecuencia a R igual a 0.01 y diferentes valores del número de Fourier.	44
Figura 8. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs la frecuencia a diferentes valores de R con un Fourier igual a 1.....	45
Figura 9. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia vs la frecuencia a diferentes valores de número de Fourier y R igual a 0.01.	46
Figura 10. Ilustra la norma de la función de transferencia vs la frecuencia a diferentes valores de R con un Fourier igual a 1.....	46
Figura 11. Ilustra la norma de la función de transferencia vs la frecuencia a diferentes valores de Fourier con una R igual a 0.01.	47

RESUMEN

En este trabajo se analiza la transferencia de energía irreversible en un sistema en donde los mecanismos transitorios, de relajación, moleculares y asociados a una fuente de energía (láser) dependen del tiempo. La ecuación constitutiva que se emplea para describir el flux de calor y el gradiente de temperatura es la de Maxwell-Cattaneo. Las geometrías utilizadas en este trabajo son: (i) capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ y (ii) corona circular de radios R_1 y R_2 , con $R_1 < R_2$. Para el modelo del capilar se asume que el sistema se encuentra en estado no estacionario, temperatura dependiente solo de la coordenada radial r , simetría cilíndrica, i.e., que no depende la geometría angular, invarianza axial, i.e., que la longitud característica L es mucho mayor que la longitud característica R . Además, para el modelo de la corona circular se considera la existencia de mecanismos de relajación por efecto de la perfusión de la sangre en órganos del cuerpo humano, que el proceso es no isotérmico, i.e. la temperatura no es constante y es necesario el balance de energía, la disipación viscosa es depreciable y que el aumento de temperatura se debe a una fuente de energía que depende del tiempo y de la frecuencia. Para adquirir el perfil de temperaturas se aplica el formalismo de Fourier y suponiendo la contribución homogénea se obtiene una ecuación de Bessel compleja modificada. La solución de esta queda de las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero. La parte no homogénea es calculada por el método de coeficientes indeterminados. Integrando el perfil de temperaturas con respecto a una sección transversal y dividido por el área de interés se calcula la temperatura promedio, para posteriormente construir la función de transferencia compleja. Partiendo de esto, se analiza las contribuciones real e imaginaria de la temperatura promedio. El mérito de esta investigación original es deducir las condiciones óptimas para obtener la máxima respuesta entre la temperatura (variables de salida) y el láser (variable de entrada).

PALABRAS CLAVE

Modelo de Maxwell- Cattaneo, modelo de Maxwell, termodinámica irreversible, función de transferencia compleja, funciones de Bessel, frecuencia, respuesta dinámica, resonancias, antiresonancias, tiempo característico.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

El estudio de sistemas basados en termodinámica irreversible, es decir, la termodinámica que depende del tiempo y de la posición a través de los gradientes y los flujos es un tema que permanece abierto en la frontera de la termodinámica (Bird et. al. 2002).

Una de las primeras aproximaciones para representar modelos más realistas que capturen la física de sistemas de muchas partículas y la viscoelasticidad de los materiales, es el modelo de Maxwell (Bird et. al. 1977, 2002). Este modelo combina los modelos disipativos (viscosidad) y de almacenamiento de energía (elasticidad) (Bird et. al 1977, 2002).

Este modelo ha sido empleado para describir una infinidad de materiales complejos y su versatilidad radica en que es un modelo lineal que no depende de la posición, es decir, es isotrópico (Mascoko 1978). Así mismo, es empleado en la descripción de polímeros, sistemas micelares, dispersión de cristales líquidos, fluidos biológicos: (i) sangre humana con hipercolesterolemia, (ii) cirrosis hepática, (iii) células ciliadas externas (motores biológicos que amplifican el sonido), etc. (Herrera Valencia et. al. 2012, 2014, 2018, 2020, 2021, 2022, 2023). Sin embargo, el modelo de Maxwell ha sido inspiración para estudiar un concepto muy importante en los sistemas dinámicos lineales, el cual, es conocido como permeabilidad (del Rio et. al. 1988). Esta herramienta de carácter organizacional nos permite cuantificar la resistencia que presenta un fluido a ser deformado continua e irreversiblemente en un sistema (medio) (del Rio et. al 1988; Herrera Valencia et. al 2023). Esta permeabilidad se clasifica en intrínseca que depende de la geometría y real que depende de la geometría y del fluido (Colleparado-Guevara y Corvera-Poire 2002). Este concepto fue modificado por Herrera Valencia et. al. 2023 mediante la función de transferencia compleja, la cual, es una extensión de la fluidez tomando en cuenta la naturaleza entre una variable de entrada y salida (Herrera Valencia y Rey 2014). Este objeto matemático es de vital importancia para extender estos sistemas irreversibles a cualquier fluido viscoelástico lineal, es decir, que estos desarrollos solamente pueden ser cuantificados en el régimen de bajas deformaciones ya que, a altas deformaciones estamos en el régimen de viscoelasticidad no lineal (Mascoko 1978; Bird et. al 1977; 2002).

El modelo de Maxwell es la inspiración de este trabajo debido a que se pretende extender y entender como puede ser aplicado en sistemas en donde la transferencia de energía y masa dependen del tiempo y de la posición (García Colín 1988). Este concepto ya ha sido analizado por el físico italiano Cattaneo el cual desarrollo una ecuación similar a la de Maxwell, pero para el flux de energía (García Colín 1988). Este trabajo ha sido aplicado a sistemas de bioingeniería para estudiar los procesos de perfusión

en los órganos por efecto de la sangre. Nótese, que la perfusión es la difusión de un líquido en un sólido y esto conlleva un gasto de tipo energético, es por eso, que se utiliza una ecuación que mejora lo propuesto por Fourier tomando en cuenta la resistencia que presenta el medio a ser difundido en un sólido (Bird et. al 1977, 2012, Welty et. al 2002). La resistencia que presenta un medio a ser difundido se ve en un curso elemental de transferencia de masa y se conoce como la teoría de la doble resistencia, es decir, la resistencia que representa el gas o el líquido a la transferencia de masa. Sin embargo y a pesar de todos los intentos por describir la difusión y la perfusión en sistemas biológicos todavía existen dudas de cómo se lleva a cabo estos procesos físicos. Para esto, se proponen la siguiente investigación a nivel licenciatura con el fin de entender el modelo de Maxwell-Cattaneo y su aplicación en la perfusión de órganos del cuerpo humano. De esta manera, se determinó estudiar el modelo de Maxwell en transferencia de momento en un capilar y obtener la función de transferencia compleja mediante el formalismo de Fourier. En este sistema, la variable de entrada sería el gradiente de presión transitorio y la variable de salida el flujo volumétrico. El cociente entre estas dos cantidades físicas nos daría información acerca de la respuesta lineal del sistema a través, de las curvas resonantes.

Una vez entendido esto se mimetizará para los modelos en donde la termodinámica clásica tiene sus límites y lo extenderemos a la termodinámica de Cattaneo y su aplicación en la perfusión de órganos.

José M. Mazón estudia el problema de la velocidad de propagación infinita en las ecuaciones de difusión a través del análisis de los diferentes modelos de difusión en su artículo nombrado “El problema de la velocidad de propagación infinita en las ecuaciones de difusión”. La ley de Fourier predice una respuesta instantánea de la temperatura al gradiente de flujo de calor, lo que lleva a una ecuación de difusión parabólica para el campo de temperatura (Hughes et. al 2021). La suposición de una respuesta instantánea no puede ser correcta ya que implica una velocidad de propagación de calor infinita lo cual es una contradicción física. A pesar de la contradicción física anterior son utilizadas bajo la justificación de que, cuantitativamente, las soluciones, aunque positivas, son muy pequeñas fuera de un compacto. Desde el punto de vista cualitativo, como la concentración se está recibiendo continuamente, su acumulación en tiempo puede ser significativa (Mazón 2014).

El físico italiano Carlo Cattaneo fue uno de los primeros en construir una teoría matemática explícita para corregir la velocidad de propagación infinita de la teoría de la difusión de calor de Fourier (Mazón 2014). Cattaneo en su estudio de la teoría cinética de gases propone una ecuación modificada en donde incorpora un tiempo de relajación finito (Hughes et. al 2021). La introducción de un tiempo de

relajación finito cambia la naturaleza fundamental de la ecuación de calor parabólico de velocidad de propagación infinita, a una ecuación de calor hiperbólica con una solución en forma de onda de calor que se propaga con velocidad finita (Hughes et. al 2021).

M. B Rubín demostró que el modelo hiperbólico de conducción del calor de Cattaneo contradice la segunda ley de a termodinámica ya que predice que el calor puede fluir de regiones frías a regiones calientes durante un periodo de tiempo finito, es decir, bajo ciertas circunstancias la entropía puede asumir valores negativos. A consecuencia de ello este modelo cayó en desuso en física y sólo es usado en algunos modelos bio matemáticos (Mazón 2014).

Falcón Nelson y Medina Alejandro incorporan la corrección tipo Cattaneo en la ley de Fick en su artículo llamado “Consideraciones de causalidad en el transporte de partículas por difusión”. La ley de Fick afirma que el flujo de la partícula se produce al mismo tiempo que se active el gradiente de concentración como si la transmisión de la información ocurriese a velocidad infinita. En este artículo se utiliza el mismo procedimiento empleado por Cattaneo para preservar la causalidad en la ley de Maxwell-Fourier o de la propagación de calor en la aproximación de difusión. Al realizar esta corrección se logra describir el régimen transitorio (antes de la relajación térmica) donde las partículas se difunden en una oscilación amortiguada (ondas de densidad) debido a que las partículas se mueven tanto en la dirección del gradiente de concentración, así como en la dirección contraria (Falcón & Medina; 2012)

Para debatir nuestras premisas planteamos la siguiente hipótesis.

1.2 HIPÓTESIS

Si el efecto de introducir una componente oscilatoria en la fuente de energía modifica la temperatura promedio, entonces esta será cuantificada a través de la función de transferencia compleja y los mecanismos de transporte molecular y de relajación.

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

General

Estudiar la respuesta dinámica entre una fuente de energía y la temperatura promedio para los dos sistemas.

Particular

P.1 Obtener expresiones analíticas para la temperatura promedio y la función de transferencia en función de las propiedades materiales del sistema.

P.2 Analizar la función de transferencia en el espacio de Fourier en función de la frecuencia y las propiedades del sistema.

P.3. Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.

1.4 DISTRIBUCIÓN DEL MATERIAL

Este documento está organizado de la siguiente manera:

Sección 1: Introducción al problema y los antecedentes de la termodinámica irreversible lineal.

Sección 2: Marco teórico en donde se ven los elementos básicos de la ecuación de Maxwell-Cattaneo esenciales para entender esta investigación: (i) Temperatura promedio en un tubo y (ii) Temperatura promedio en una corona circular.

Sección 3: Modelado matemático y se obtiene la función de transferencia del sistema de estudio.

Sección 4: Simulaciones y análisis de resultados.

Sección 5: Conclusiones y trabajo futuro.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En esta sección desarrollaremos los fundamentos de este protocolo de investigación nivel de licenciatura.

2.1 Ecuación de balance mecánico de energía

$$\frac{d}{dt} \iiint_v u dv = - \oint_s q \cdot ds + \iiint_v E_t dv \quad (1)$$

Aplicando la siguiente propiedad:

$$\int_v \nabla \cdot F dv = \oint_s F \cdot ds \quad (2)$$

Resulta:

$$\iiint_v \frac{\partial u}{\partial t} dv = - \int_v \nabla \cdot q dv + \iiint_v \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} dv \quad (3)$$

$$\iiint_v \frac{\partial u}{\partial t} dv + \int_v \nabla \cdot q dv - \iiint_v \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} dv = 0 \quad (4)$$

$$\iiint_v \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot q - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \right] dv = 0 \quad (5)$$

Como $v \neq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot q - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} = 0 \quad (6)$$

Como el fluido se está moviendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{Du}{Dt} \quad (7)$$

$$\frac{Du}{Dt} + \nabla \cdot q - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \quad (9)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + \sum_{n=1}^{\infty} E_i \quad (10)$$

2.2 Ecuación de balance energético

La ecuación de balance energético se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible y continuo de una sustancia pura, en donde el tiempo sí es una variable importante, en contraste con el punto de vista clásico donde no es tomada en cuenta (Herrera et al 2022).

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma: D}} \quad (11)$$

Por medio de las transformaciones de Legendre, la Ec. (11) puede expresarse en términos de la entalpia de la siguiente manera:

$$H = u + PV \quad (12)$$

$$u = H - PV \quad (13)$$

$$\frac{D(H - PV)}{Dt} = -\nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma: D}} \quad (14)$$

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{D(PV)}{Dt} - \nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma: D}} \quad (15)$$

Suponiendo que el volumen puede expresarse mediante el volumen específico, se obtiene:

$$V = \frac{1}{\rho} \quad (16)$$

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma: D}} \quad (17)$$

Desarrollando $\frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right)$ de la siguiente manera:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{\rho \frac{DP}{Dt} - P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\rho^2} \quad (18)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{\rho \frac{DP}{Dt} - P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\rho^2} \quad (19)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (20)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{\rho \frac{DP}{Dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}}{\rho^2} \quad (21)$$

Como se considera un flujo incompresible:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\nabla \cdot v) = 0 \quad (22)$$

Como es a presión constante, resulta:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{DP}{\rho} = 0 \quad (23)$$

Por lo que,

$$\frac{DH}{Dt} = -\nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma: D}} \quad (24)$$

Como la entalpia es una función de estado, se puede expresar en términos de las variables intensivas $H = H(T, P)$ por lo que, se tiene lo siguiente:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP \quad (25)$$

La derivada de la entalpia con respecto la temperatura se conoce como capacidad calorífica a presión constante:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = Cp \quad (26)$$

Si suponemos que el proceso se da a presión constante, la entalpía puede expresarse como:

$$H = H_0 + \int_{T_0}^T \rho Cp d\bar{T} = H_0 + \rho Cp (T - T_0) \quad (27)$$

Sustituyendo y simplificando se obtiene:

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{D}{Dt} (H_0 + \rho C_p (T - T_0)) = \rho C_p \frac{DT}{Dt} \quad (28)$$

Por lo que,

$$C_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \quad (29)$$

2.3 Ecuación de Maxwell

El modelo de Maxwell se puede describir como la suma de una contribución viscosa y otra elástica que está asociada con la recuperación:

$$\gamma = \gamma_{Newton} + \gamma_{Hooke} \quad (30)$$

Derivando la deformación total con respecto el tiempo, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{Newton} + \dot{\gamma}_{Hooke} \quad (31)$$

La contribución de newton y de Hooke se sustituye y en la expresión anterior:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{Newton} + \dot{\gamma}_{Hooke} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\eta_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{G_0} \right) = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\eta_0} + \frac{1}{G_0} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} \quad (32)$$

Multiplicando la ecuación por la viscosidad a baja rapidez de deformación se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta_0 \dot{\gamma} = \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} = \left(1 + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{\underline{\sigma}} \quad (33)$$

Si se define el tiempo de relajación de Maxwell como $\lambda_0 = \frac{\eta_0}{G_0}$, la expresión anterior toma la forma:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{\underline{\sigma}} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (34)$$

Finalmente, si el tensor que describe la evolución de la deformación $\dot{\gamma}$ se expresa en términos del tensor rapidez de deformación, i.e, $\left(\frac{\partial}{\partial t} \gamma = 2D \right)$, se tiene el modelo tensorial reológico de Maxwell.

$$\underline{\underline{\sigma}} + \lambda_0 \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} = 2\eta_0 D \quad (35)$$

El modelo de maxwell predice que el esfuerzo decaerá exponencialmente con el tiempo en, por ejemplo, un polímero sometido de formación constante lo cual se ajusta bastante bien a lo observado

experimentalmente para muchos polímeros líquidos. Sin embargo, una limitación importante es que no predice el comportamiento de flujo lento de muchos polímeros ya que en este caso predice un aumento lineal de la deformación con el tiempo si el esfuerzo es constante, sin embargo, la mayor parte de los polímeros muestran una tasa de deformación decreciente con el tiempo. Por otra parte, esta ecuación está limitada solamente a deformaciones bajas, mientras que los procesos industriales trabajan a deformaciones moderadas y altas, respectivamente, por lo que se necesitan ecuaciones diferentes al modelo explicado por la Ec. (35) (Herrera et al 2023)

Ecuación de Maxwell-Cattaneo

Cattaneo propuso la siguiente corrección a la ecuación de Fourier:

$$q + \lambda_q \frac{\partial q}{\partial t} = -k \nabla T \quad (36)$$

en el que λ_q es el tiempo de relajación. La importancia del término de relajación térmica se expresa típicamente a través del coeficiente Maxwell-Cattaneo adimensional (CT), que se define como la relación entre el tiempo de relajación térmica y el doble del tiempo de difusión térmica; es decir:

$$C_T = \frac{\lambda_q k}{2 \rho C_p d^2} \quad (37)$$

Dónde ρ es la densidad, C_p el calor específico a presión constante, d una escala de longitud representativa y k la difusividad térmica. Así, la ley clásica de Fourier tiene $C_T = 0$.

La introducción de un tiempo de relajación finito cambia la naturaleza fundamental de la ecuación de calor parabólico de los fluidos de Fourier, en el que el calor se difunde con velocidad infinita, a una ecuación de calor hiperbólica con una solución en forma de onda de calor que se propaga con velocidad finita (Hughes, D., Proctor, M., & Eltayeb, I; 2021).

2.4 Número de Deborah

El número de Deborah es la relación entre el tiempo de relajación del fluido y el tiempo característico del flujo. Este número representa la naturaleza transitoria del flujo en relación con la escala de tiempo del fluido. Si la escala de tiempo de observación es grande (número De pequeño), el material responde como un fluido, y si es pequeña (número De grande), tenemos una respuesta similar a un sólido. Desde este punto de vista, no existe una diferencia fundamental entre sólidos y líquidos; es sólo una cuestión de escala de tiempo de observación. En el límite, cuando $De = 0$ se tiene un fluido newtoniano, y cuándo $De = \infty$, un sólido elástico (Nhan, P.T., & Nam, M.D. 2017).

CAPÍTULO III

MODELO MATEMÁTICO

3.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN UN CAPILAR

3.1.1 Diagrama del proceso: Capilar

En la Fig. (1) se presenta el esquema del proceso que se estudiará en esta tesis de licenciatura. El proceso ilustrado corresponde al cambio de temperatura en un sistema en donde existe un flujo de energía radial inducido por un láser.

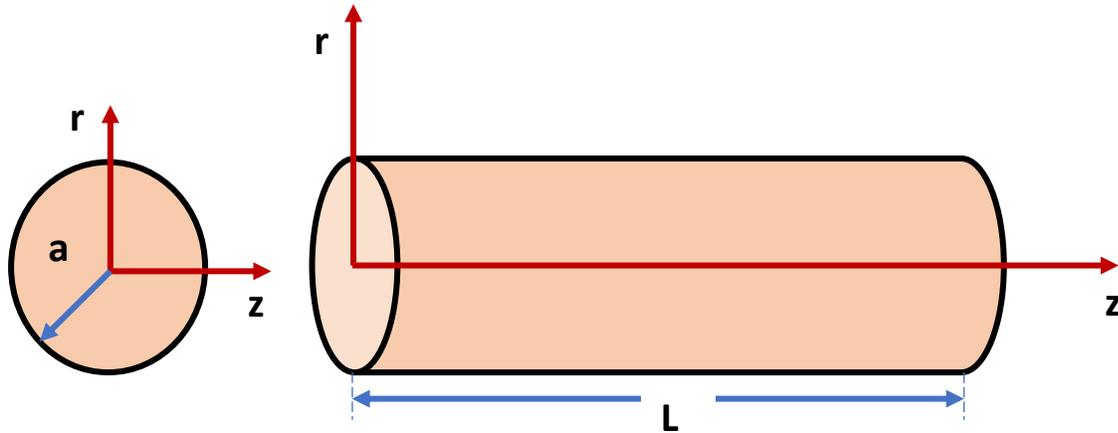


Figura 1. Capilar de radio $r = a$ y longitud axial $z = L$.

Análisis del proceso

Las restricciones físicas propuestas para realizar el modelo matemático de la transferencia de energía irreversible donde se manifiestan mecanismos transitorios, de relajación, moleculares y asociados a una fuente de energía dependen del tiempo.

- El sistema geométrico se expresará en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)
- La transferencia de energía es representada por el modelo de Maxwell-Cattaneo el cual es una generalización del modelo de Fourier y que matemáticamente evita las inconsistencias, es decir, evita temperaturas infinitas permitiendo las temperaturas acotadas.
- El sistema se establece en estado no estacionario, es decir, los atributos y características del sistema dependen de la variable temporal t .
- La temperatura depende de la coordenada radial r y del tiempo. Esta condición se logra cuando existe invarianza axial, i.e., el sistema de transferencia de energía es muy grande en las dimensiones axiales en comparación de las dimensiones radiales.
- Simetría cilíndrica, i.e., que no depende la geometría angular

- f) El proceso es no isotérmico, i.e. la temperatura no es constante y es necesario el balance de energía
- g) La disipación viscosa es depreciable, es decir, no hay fluido como tal. La disipación viscosa está asociado al fluido del trabajo.
- h) El aumento de temperatura se debe a una fuente de energía, depende del tiempo y de la frecuencia. Es una fuente de tipo luz y que tiene que ser añadida a la ecuación de balance mecánico.
- i) Existen mecanismos de relajación por efecto de la perfusión de la sangre con órganos del cuerpo humano.
- j) No hay reacción química

Ecuación de balance de energía y ecuación constitutiva de Maxwell-Cattaneo

Partiendo del balance de energía mecánica en un sistema irreversible se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot q + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + S_l(t) \quad (38)$$

Teniendo en cuenta que la energía interna se define como:

$$U = H + PV \quad (39)$$

Y que a su vez la Entalpia se determina a partir de la siguiente ecuación:

$$H = \rho C_p(T - T_0) \quad (40)$$

La ecuación de Maxwell-Cattaneo se define como:

$$q + \lambda_q \frac{\partial q}{\partial t} = -k \nabla T \quad (41)$$

La ecuación de Maxwell-Cattaneo es una mejora del modelo de Fourier porque toma en cuenta la relajación de los procesos de energía asociados al transporte molecular de calor. Esta ecuación es análoga a la ecuación de Maxwell que describe los procesos viscoelásticos en un material. Una de las premisas de este trabajo de investigación es comparar los resultados que se obtienen en el flujo de Poiseuille y los obtenidos en el balance de energía en un sistema que tiene una fuente y procesos de relajación. Nótese que el tiempo λ_q es el tiempo de relación de los procesos de transporte molecular (conducción).

$$\left(1 + \lambda_q \frac{\partial}{\partial t}\right) q = -k \nabla T \quad (42)$$

Factorizando la Ec. (42) se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$q = \frac{k}{\left(1 + \lambda_q \frac{\partial}{\partial t}\right)} - \nabla T \quad (43)$$

$$\frac{k}{\left(1 + \lambda_q \frac{\partial}{\partial t}\right)} = O_k(Dt) \quad (44)$$

$$q = O_k(Dt) - \nabla T \quad (45)$$

La Ec. (45) es la extensión del modelo de Fourier presentada por el físico italiano Cattaneo en simetría de las ecuaciones viscoelásticas de Maxwell. En las siguientes deducciones presentaremos dos puntos importantes:

- a) El efecto del tiempo de relación en la transferencia de energía y la temperatura.
- b) La función de transferencia asociada a la fuente y a la temperatura promedio.

Por lo tanto, la Ec. (38) se puede transcribir a:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = O_k(Dt) \nabla^2 T + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + S_l(t) \quad (46)$$

Como no existe fluido, el tensor de rapidez de deformación ($\underline{\underline{\sigma}}$) y el tensor rapidez de deformación que es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad ($\underline{\underline{D}}$) se desprecian, resultando:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{O_k(Dt)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S_l(t) \quad (47)$$

Multiplicando todo por el recíproco de $O_k(i\omega)$ y -1 resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\rho C_p}{O_k(Dt)} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{O_k(Dt)} S_l(t) \quad (48)$$

Como $i^2 = -1$, el segundo término de la primera igualdad de la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{i^2 \rho C p}{O_k(Dt)} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{1}{O_k(Dt)} S_l(t) \quad (49)$$

Aplicando la transformada de Fourier con el término izquierdo de la Ec. (49), que es la variable de frecuencia, da como resultado la Ec. (52)

$$F \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{i^2 \rho C p}{O_k(Dt)} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right\} \quad (50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega = \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (51)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{i^2 \rho C p}{O_k(i\omega)} (i\omega) T = - \frac{1}{O_k(i\omega)} S_l(\omega) \quad (52)$$

Determinando a O_k de la siguiente manera:

$$F \left\{ O_k(Dt) = \frac{k}{1 + \lambda_q \frac{\partial}{\partial t}} \right\} \quad (53)$$

$$O_k(i\omega) = \frac{k}{1 + \lambda_q i\omega} \quad (54)$$

Aplicando el siguiente cambio de variable de la Ec. (55) y la Ec. (54) se reescribe como la Ec. (56)

$$\beta^2 = \frac{i^3 \omega \rho C p}{O_k(i\omega)} \quad (55)$$

Es importante resaltar, que la Ec. (55) es el inverso de una longitud característica, asociada a los procesos transitorios, energía interna del material y los procesos de conducción y relajación del operador de conductividad. Nótese, que sin este parámetro no se obtienen las funciones de Bessel las cuales nos dan las oscilaciones y posibles resonancias en el sistema.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \beta^2 T = - \frac{1}{O_k(i\omega)} S_l(\omega) \quad (56)$$

Para resolver la Ec. (56) se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea y particular (Herrera et al 2022)

$$T(r, \omega) = T_H(r, \omega) + T_p(r, \omega) \quad (57)$$

La parte homogénea de la Ec. (56) se determina como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \beta^2 T = 0 \quad (58)$$

Realizando la derivada señalada en la Ec. (58) y multiplicando todo por r^2 se obtiene:

$$r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + r \frac{\partial T}{\partial r} + \beta^2 r^2 T = 0 \quad (59)$$

Si se multiplica el primer término por $\frac{\beta^2}{\beta^2}$ y el segundo término por $\frac{\beta}{\beta}$ resulta:

$$r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \left(\frac{\beta^2}{\beta^2} \right) + r \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\beta}{\beta} \right) + \beta^2 r^2 T = 0 \quad (60)$$

Aplicando el cambio de variable de la Ec. (61) se logra la Ec. (62)

$$x = r\beta \quad (61)$$

$$x^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x \frac{\partial T}{\partial x} + (x^2 - 0^2) T = 0 \quad (62)$$

La Ec. (62) tiene la forma de la ecuación de Bessel de orden cero que es:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 0^2) y = 0 \quad (63)$$

Por lo tanto, la solución homogénea de la ecuación diferencial queda en términos de las funciones especiales de Bessel de primera y segunda especie de orden cero:

$$T(r, \omega) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \quad (64)$$

La solución particular es igual a una constante A donde:

$$\beta^2 A = -\frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)} \quad (65)$$

$$A = -\frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (66)$$

Dando como resultado la siguiente solución general:

$$T(r, \omega) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) - \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (67)$$

Recordando que $x = r\beta$, se obtiene:

$$T(r, \omega) = C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) - \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (68)$$

3.1.2 Perfil de temperaturas

Para la identificación de las constantes C_1 y C_2 se aplican las siguientes condiciones a la frontera:

C.F.1: $r=0 \quad T=T_{\max}$

$$T_{\max} = C_1 J_0(0\beta) + C_2 Y_0(0\beta) - \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (69)$$

C.F.2: $r=a \quad T=T_a$

$$T_a = C_1 J_0(a\beta) + C_2 Y_0(a\beta) - \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (70)$$

De la Ec. (69) se tiene el conocimiento que el resultado de evaluar $J_0(0)$ y $Y_0(0)$ es:

$$J_0(0) = 1$$

$$Y_0(0) = -\infty$$

Como no es posible la existencia de temperaturas negativas $C_2=0$ y la Ec. (70) es igual a:

$$T_a = C_1 J_0(a\beta) - \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (71)$$

Despejando la constante C_1 de la Ec. (71), obtiene la siguiente expresión matemática:

$$C_1 = \frac{T_a + \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2}}{J_0(a\beta)} \quad (72)$$

Sustituyendo el resultado de la Ec. (72) en la solución general Ec. (68) y simplificando el perfil de temperaturas tiene la siguiente forma:

$$T(r, \omega) = \frac{T_a J_0(r\beta)}{J_0(a\beta)} + \frac{1}{O_k(i\omega)\beta^2} \left[1 - \frac{J_0(r\beta)}{J_0(a\beta)} \right] [-S_l(\omega)] \quad (73)$$

A partir de la Ec. (69) se obtiene la temperatura máxima:

$$T_{max} = \frac{T_a J_0(0\beta)}{J_0(a\beta)} + \frac{1}{O_k(i\omega)\beta^2} \left[1 - \frac{J_0(0\beta)}{J_0(a\beta)} \right] [-S_l(\omega)] \quad (74)$$

Por lo que,

$$T_{max} = \frac{T_a}{J_0(a\beta)} + \frac{1}{O_k(i\omega)\beta^2} \left[1 - \frac{1}{J_0(a\beta)} \right] [-S_l(\omega)] \quad (75)$$

La Ec. (73) representa una analogía con transferencia de cantidad de movimiento, en donde el fluido es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión. Es claro que la Ec. (73) nos da información local de cómo cambia la temperatura de cómo cambia la temperatura con respecto a la posición radial. Para una mejor interpretación física calcularemos la temperatura promedio del sistema. Esto es equivalente a calcular el flujo volumétrico dividido por el área en transferencia de momento.

Temperatura promedio y función de transferencia

La temperatura promedio se define como:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a T r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta} \quad (76)$$

Escalando la Ec. (109), se tiene la siguiente expresión simplificada para la temperatura promedio:

$$\langle T \rangle = \frac{\frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a T r dr d\theta}{\frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a T \frac{r}{a} \frac{dr}{a} d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r}{a} \frac{dr}{a} d\theta} \quad (77)$$

Aplicando el cambio de variable $u = \frac{r}{a}$ se obtiene:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 T u du d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u du d\theta} \quad (78)$$

Integrando el numerador y el denominador de la Ec. (78) con respecto a la variable angular θ obtenemos:

$$\langle T \rangle = \frac{2\pi \int_0^1 T u du}{\frac{2\pi}{2}} \quad (79)$$

Por lo que,

$$\langle T \rangle = 2 \int_0^1 T u du \quad (80)$$

Finalmente

$$\frac{\langle T \rangle}{2} = \int_0^1 T u du \quad (81)$$

Transformando mediante variables adimensionales el perfil de temperaturas, Ec. (73) se tiene la siguiente expresión:

$$T(u, \omega) = \frac{T_a J_0\left(\frac{r}{a} \cdot a\beta\right)}{J_0(a\beta)} - \frac{a^2 S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2 a^2} \left[1 - \frac{J_0\left(\frac{r}{a} \cdot a\beta\right)}{J_0(a\beta)} \right] \quad (82)$$

Considerando que $\beta^* = a\beta$ y que $u = \frac{r}{a}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$T(u, \omega) = \frac{T_a J_0(u\beta^*)}{J_0(\beta^*)} - \frac{a^2 S_l(\omega)}{O_k(i\omega)(\beta^*)^2} \left[1 - \frac{J_0(u\beta^*)}{J_0(\beta^*)} \right] \quad (83)$$

Sustituyendo la Ec. (83) en la Ec. (81) resulta:

$$\frac{\langle T \rangle}{2} = \int_0^1 \left[\frac{T_a J_0(u\beta^*)}{J_0(\beta^*)} - \frac{a^2 S_l(\omega)}{O_k(i\omega)(\beta^*)^2} \left[1 - \frac{J_0(u\beta^*)}{J_0(\beta^*)} \right] \right] u du \quad (84)$$

Por linealidad de la integral de Riemann se tiene,

$$\frac{\langle T \rangle}{2} = \int_0^1 \frac{T_a J_0(u\beta^*)}{J_0(\beta^*)} u du - \int_0^1 \frac{a^2 S_l(\omega)}{O_k(i\omega)(\beta^*)^2} \left[1 - \frac{J_0(u\beta^*)}{J_0(\beta^*)} \right] u du \quad (85)$$

Operando las propiedades de linealidad de la Ec. (85) obtenemos:

$$\frac{\langle T \rangle}{2} = \frac{T_a}{J_0(\beta^*)} \int_0^1 J_0(u\beta^*) u du - \frac{a^2 S_l(\omega)}{O_k(i\omega)(\beta^*)^2} \int_0^1 \left[1 - \frac{J_0(u\beta^*)}{J_0(\beta^*)} \right] u du \quad (86)$$

Escalando la Ec. (86), i.e., multiplicando las integrales que contiene el termino $J_0(u\beta^*)$ por $\frac{\beta^{*2}}{\beta^{*2}}$ se obtiene:

$$\frac{\langle T \rangle}{2} = \frac{T_a}{J_0(\beta^*)\beta^{*2}} \int_0^{\beta^*} J_0(u\beta^*)u\beta^* du\beta^* - \frac{\alpha^2 S_l(\omega)}{O_k(i\omega)(\beta^*)^2} \left[\int_0^1 udu - \frac{1}{J_0(\beta^*)\beta^{*2}} \int_0^{\beta^*} J_0(u\beta^*)u\beta^* du\beta^* \right] \quad (87)$$

Mediante el siguiente cambio de variable $x = u\beta^*$ se obtiene la siguiente expresión analítica, Ec.(88)

$$\frac{\langle T \rangle}{2} = \frac{T_a}{J_0(\beta^*)\beta^{*2}} \int_0^{\beta^*} J_0(x)x dx - \frac{\alpha^2 S_l(\omega)}{O_k(i\omega)(\beta^*)^2} \left[\int_0^1 udu - \frac{1}{J_0(\beta^*)\beta^{*2}} \int_0^{\beta^*} J_0(x)x dx \right] \quad (88)$$

Utilizando una de las propiedades de las funciones de Bessel y realizando algunas manipulaciones matemáticas, se obtiene la temperatura promedio:

$$J_0(x)x = \frac{d}{dx} [J_1(x)x] \quad (89)$$

$$\frac{\langle T \rangle}{2} = \frac{T_a}{J_0(\beta^*)\beta^*} J_1(\beta^*) - \frac{\alpha^2 S_l(\omega)}{2O_k(i\omega)(\beta^*)^2} \left[1 - \frac{2}{J_0(\beta^*)\beta^*} J_1(\beta^*) \right] \quad (90)$$

Por lo tanto, la temperatura promedio para este sistema de estudio tiene dos contribuciones. La primera de ellas representa las oscilaciones de la temperatura en la superficie y la función de transferencia en el sistema análogo, a el flujo volumétrico y al gradiente de presión en el estudio de transferencia de momento de un líquido viscoelástico fluyendo en una geometría capilar.

La Ec. (90) será reescalada de la siguiente manera:

$$\frac{\langle T \rangle}{T_a} = \frac{2J_1(\beta^*)}{J_0(\beta^*)\beta^*} + S_0^* \frac{1}{O_k^*(i\omega^*)(\beta^*)^2} \left[1 - \frac{2J_1(\beta^*)}{J_0(\beta^*)\beta^*} \right] [-S_l^*] \quad (91)$$

3.1.3 Números adimensionales

Donde O_k^* es expresada de la siguiente forma:

$$O_k^*(i\omega^*) = \frac{O_k(i\omega)}{k} = \frac{k}{\left[1 + \frac{\lambda_q}{t_c} t_c (i\omega)\right] k} \quad (92)$$

Por lo que;

$$F_0 = \frac{\lambda_q}{t_c} \quad (93)$$

Obteniendo

$$O_k^*(i\omega^*) = \frac{O_k(i\omega)}{k} = \frac{1}{[1 + F_0(i\omega^*)]} \quad (94)$$

En donde el número adimensional S_0^* se define como:

$$S_0^* = \frac{S_0}{\frac{T_a k}{a^2}} \quad (95)$$

El parámetro β definido en la Ec. (55)

$$\beta^{*2} = (\alpha\beta)^2 = \frac{a^2 i^3 \frac{t_c}{t_c} \omega \rho Cp}{\frac{O_k(i\omega) k}{k}} = \frac{i^3 \frac{1}{t_c} \omega^* \rho a^2 Cp}{O_k^*(i\omega^*) k} = \frac{i^3 \omega^*}{O_k^*(i\omega^*)} \frac{\rho a^2 Cp}{k t_c} \quad (96)$$

En donde el número de Fourier se define como:

$$F_0 = \frac{\rho a^2 Cp}{k t_c} \quad (97)$$

Entonces el parámetro β es definido como:

$$\beta^{*2} = \frac{i^3 \omega^*}{O_k^*(i\omega^*)} F_0 \quad (98)$$

Si $F_0 = \frac{\rho a^2 Cp}{k t_c} = 1$, el tiempo característico t_c es igual a:

$$t_c = \frac{\rho a^2 Cp}{k} \quad (99)$$

3.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN UNA CORONA CIRCULAR

3.2.1 Diagrama del proceso: Corona circular

La Fig. 2 representa el esquema del proceso de transferencia de energía inducido por un láser a través de la geometría de corona circular.

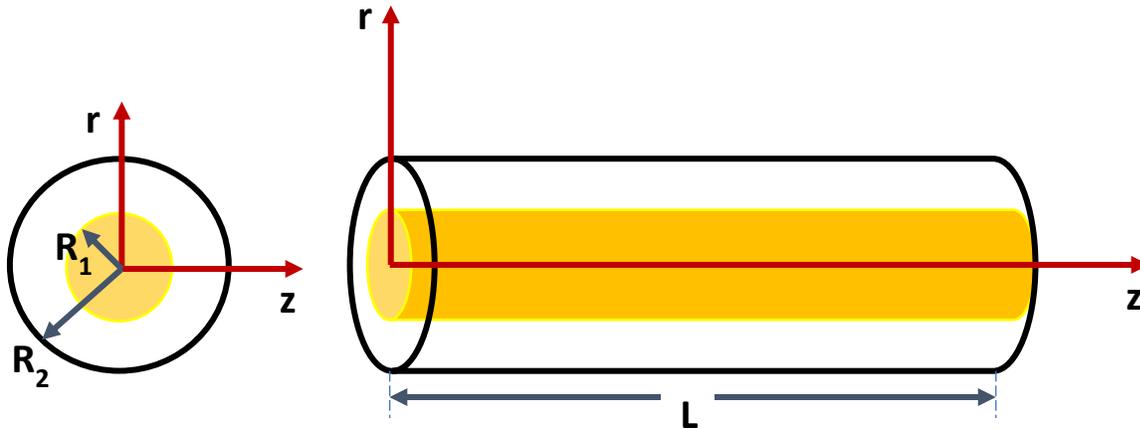


Figura 2. Corona circular de radios $r = R_2$ y $r = R_1$ y longitud $z = L$.

Análisis del proceso

- El sistema geométrico se expresará en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)
- La transferencia de energía es representada por el modelo de Maxwell-Cattaneo el cual es una generalización del modelo de Fourier y que matemáticamente evita las inconsistencias, es decir, evita temperaturas infinitas permitiendo las temperaturas acotadas.
- El sistema se establece en estado no estacionario, es decir, los atributos y características del sistema dependen de la variable temporal t .
- La temperatura depende de la coordenada radial r y del tiempo. Esta condición se logra cuando existe invarianza axial, i.e., el sistema de transferencia de energía es muy grande en las dimensiones axiales en comparación de las dimensiones radiales.
- Simetría cilíndrica, i.e., que no depende la geometría angular
- El proceso es no isotérmico, i.e. la temperatura no es constante y es necesario el balance de energía
- La disipación viscosa es depreciable, es decir, no hay fluido como tal. La disipación viscosa está asociado al fluido del trabajo.

- h) El aumento de temperatura se debe a una fuente de energía, depende del tiempo y de la frecuencia. Es una fuente de tipo luz y que tiene que ser añadida a la ecuación de balance mecánico.
- i) Existen mecanismos de relajación por efecto de la perfusión de la sangre con órganos del cuerpo humano.
- j) No hay reacción química

Solución general

Partiendo de la solución general, Ec. (68):

$$T(r, \omega) = C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) - \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (68)$$

Perfil de temperaturas

Se aplican las siguientes condiciones de frontera, se deducen las constantes C_1 y C_2 en términos de las funciones de Bessel y la fuente.

$$\text{C.F.1:} \quad r=R_1 \quad T=T_1$$

$$T_1 = C_1 J_0(R_1\beta) + C_2 Y_0(R_1\beta) - \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (100)$$

$$\text{C.F.2:} \quad r=R_2 \quad T=T_2$$

$$T_2 = C_1 J_0(R_2\beta) + C_2 Y_0(R_2\beta) - \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (101)$$

Definiendo los siguientes términos como:

$$T_3 = \frac{S_l(\omega)}{O_k(i\omega)\beta^2} \quad (102)$$

$$\bar{T}_1 = T_1 + T_3 \quad (103)$$

$$\bar{T}_2 = T_2 + T_3 \quad (104)$$

Considerando que:

$$\bar{\beta} = R_2\beta \quad (105)$$

$$R = \frac{R_1}{R_2} \quad (106)$$

Las Ecs. (100) y (101) se pueden reescribir como:

$$\bar{T}_1 = C_1 J_0(R\bar{\beta}) + C_2 Y_0(R\bar{\beta}) \quad (107)$$

$$\bar{T}_2 = C_1 J_0(\bar{\beta}) + C_2 Y_0(\bar{\beta}) \quad (108)$$

Escribiendo las Ecs. (107) y (108) como una matriz resulta:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0(R\bar{\beta}) & Y_0(R\bar{\beta}) \\ J_0(\bar{\beta}) & Y_0(\bar{\beta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (109)$$

Resolviendo, obtenemos lo siguiente:

$$\Delta = \begin{pmatrix} J_0(R\bar{\beta}) & Y_0(R\bar{\beta}) \\ J_0(\bar{\beta}) & Y_0(\bar{\beta}) \end{pmatrix} = J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta}) \quad (110)$$

$$C_1 = \frac{\Delta C_1}{\Delta} = \frac{\begin{pmatrix} \bar{T}_1 & Y_0(R\bar{\beta}) \\ \bar{T}_2 & Y_0(\bar{\beta}) \end{pmatrix}}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} = \frac{\bar{T}_1 Y_0(\bar{\beta}) - \bar{T}_2 Y_0(R\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \quad (111)$$

$$C_2 = \frac{\Delta C_2}{\Delta} = \frac{\begin{pmatrix} J_0(R\bar{\beta}) & \bar{T}_1 \\ J_0(\bar{\beta}) & \bar{T}_2 \end{pmatrix}}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} = \frac{\bar{T}_2 J_0(R\bar{\beta}) - \bar{T}_1 J_0(\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \quad (112)$$

Finalmente, la solución particular esta expresada mediante la solución general (Ec. (68)) y las constantes C_1 y C_2 , Ec. (111) y Ec. (112).

$$T(r, \omega) = \left(\frac{\bar{T}_1 Y_0(\beta) - \bar{T}_2 Y_0(R\beta)}{J_0(R\beta) Y_0(\beta) - J_0(\beta) Y_0(R\beta)} \right) J_0(r\beta) + \left(\frac{\bar{T}_2 J_0(R\beta) - \bar{T}_1 J_0(\beta)}{J_0(R\beta) Y_0(\beta) - J_0(\beta) Y_0(R\beta)} \right) Y_0(r\beta) - T_3 \quad (113)$$

3.2.2 Temperatura promedio

La temperatura promedio para la corona circular se define como:

$$\langle T(r, \omega) \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} T r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r dr d\theta} \quad (114)$$

Resolviendo se obtiene:

$$\langle T(r, \omega) \rangle = \frac{\int_{R_1}^{R_2} T r dr}{\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2)} \quad (115)$$

Sustituyendo la ecuación del perfil de temperaturas, multiplicando por $\frac{\beta}{\beta}$ en los términos donde exista r y escalando los límites de integración se llega a:

$$\langle T(r, \omega) \rangle = \frac{\int_{R_1\beta}^{R_2\beta} (C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) - T_3) r \frac{\beta}{\beta} dr \frac{\beta}{\beta}}{\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2)} \quad (116)$$

Simplificando:

$$\langle T(r, \omega) \rangle = \frac{\int_{R_1\beta}^{R_2\beta} (C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) - T_3) r \frac{\beta}{\beta} dr \frac{\beta}{\beta}}{\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2)} \quad (117)$$

Por linealidad de la integral de Riemann se tiene y definiendo $x = r\beta$ se obtiene:

$$\langle T(r, \omega) \rangle = \frac{\frac{1}{\beta^2} \left(C_1 \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} J_0(x) x dx + C_2 \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} Y_0(x) x dx - T_3 \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} x dx \right)}{\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2)} \quad (118)$$

Utilizando una de las propiedades de las funciones de Bessel y realizando algunas manipulaciones matemáticas, se tiene lo siguiente:

$$J_0(x)x = \frac{d}{dx} [J_1(x)x] \quad (119)$$

$$Y_0(x)x = \frac{d}{dx} [Y_1(x)x] \quad (120)$$

Resolviendo las integrales y simplificando se llega a:

$$\begin{aligned} < T(r, \omega) > \\ &= \frac{\frac{1}{\beta^2} \left(C_1 (J_1(R_2\beta)R_2\beta - J_1(R_1\beta)R_1\beta) + C_2 (Y_1(R_2\beta)R_2\beta - Y_1(R_1\beta)R_1\beta) - \frac{T_3 [(R_2\beta)^2 - (R_1\beta)^2]}{2} \right)}{\frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2)} \end{aligned} \quad (121)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} < T(r, \omega) > \\ &= \frac{\frac{1}{\beta^2} \left(C_1 (J_1(R_2\beta)R_2\beta - J_1(R_1\beta)R_1\beta) + C_2 (Y_1(R_2\beta)R_2\beta - Y_1(R_1\beta)R_1\beta) - \frac{T_3 [(R_2\beta)^2 - (R_1\beta)^2]}{2} \right)}{\frac{1}{2} R_2^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)} \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} < T(r, \omega) > \\ &= \frac{\frac{2}{\bar{\beta}^2} \left(C_1 (J_1(\bar{\beta})\bar{\beta} - J_1(R\bar{\beta})R\bar{\beta}) + C_2 (Y_1(\bar{\beta})\bar{\beta} - Y_1(R\bar{\beta})R\bar{\beta}) - \frac{T_3 (\bar{\beta}^2 - R^2\bar{\beta}^2)}{2} \right)}{(1 - R^2)} \end{aligned} \quad (123)$$

Si:

$$\bar{J} = J_1(\bar{\beta})\bar{\beta} - J_1(R\bar{\beta})R\bar{\beta} \quad (124)$$

$$\bar{Y} = Y_1(\bar{\beta})\bar{\beta} - Y_1(R\bar{\beta})R\bar{\beta} \quad (125)$$

Entonces;

$$< T(r, \omega) > = \frac{2}{(1 - R^2)\bar{\beta}^2} \left(C_1 \bar{J} + C_2 \bar{Y} - \frac{T_3 (\bar{\beta}^2 - R^2\bar{\beta}^2)}{2} \right) \quad (126)$$

$$\begin{aligned}
\langle T(r, \omega) \rangle = & \frac{2}{(1-R^2)\bar{\beta}^2} \left[\left(\frac{\bar{T}_1 Y_0(\bar{\beta}) - \bar{T}_2 Y_0(R\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{J} \right. \\
& \left. + \left(\frac{\bar{T}_2 J_0(R\bar{\beta}) - \bar{T}_1 J_0(\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{Y} - \frac{T_3(\bar{\beta}^2 - R^2\bar{\beta}^2)}{2} \right]
\end{aligned} \tag{127}$$

Para adimensionar la Ec. (127) se define lo siguiente:

$$T_3 = \frac{S_l(\omega)R_2^2}{O_k(i\omega)\bar{\beta}^2} = \frac{\frac{S_l(\omega)S_0}{S_0}R_2^2}{\frac{k O_k(i\omega)\bar{\beta}^2}{k}} = \frac{S_l^*(\omega^*)S_0R_2^2}{k O_k^*(i\omega)\bar{\beta}^2} \tag{128}$$

$$T_s = \frac{S_0R_2^2}{k} \tag{129}$$

$$T_3 = T_s \frac{S_l^*(\omega^*)}{O_k^*(i\omega)\bar{\beta}^2} \tag{130}$$

$$\frac{T_3}{T_s} = \frac{S_l^*(\omega^*)}{O_k^*(i\omega)\bar{\beta}^2} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\langle T(r, \omega) \rangle}{T_s} = & \frac{2}{(1-R^2)\bar{\beta}^2 T_s} \left[\left(\frac{\bar{T}_1 Y_0(\bar{\beta}) - \bar{T}_2 Y_0(R\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{J} \right. \\
& \left. + \left(\frac{\bar{T}_2 J_0(R\bar{\beta}) - \bar{T}_1 J_0(\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{Y} - \frac{T_3(\bar{\beta}^2 - R^2\bar{\beta}^2)}{2} \right]
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\langle T^*(r^*, \omega^*) \rangle$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{2}{(1-R^2)\bar{\beta}^2} \left[\left(\frac{\bar{T}_1^* Y_0(\bar{\beta}) - \bar{T}_2^* Y_0(R\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{J} \right. \\
& + \left(\frac{\bar{T}_2^* J_0(R\bar{\beta}) - \bar{T}_1^* J_0(\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{Y} - \frac{S_l^*(\omega^*)}{O_k^*(i\omega)\bar{\beta}^2} \\
& \left. \cdot \frac{(\bar{\beta}^2 - R^2\bar{\beta}^2)}{2} \right]
\end{aligned} \tag{133}$$

Recordando que:

$$\bar{T}_1^* = \frac{\bar{T}_1}{T_s} = \frac{T_1}{T_s} + \frac{T_3}{T_s} = \frac{T_1}{T_s} \quad (134)$$

$$\bar{T}_2^* = \frac{\bar{T}_2}{T_s} = \frac{T_2}{T_s} + \frac{T_3}{T_s} = \frac{T_2}{T_s} \quad (135)$$

Si $\frac{T_1}{T_s} \ll 1$ y $\frac{T_2}{T_s} \ll 1$

$$\bar{T}_1^* = \frac{\bar{T}_1}{T_s} = \frac{T_1}{T_s} + \frac{T_3}{T_s} = \frac{T_3}{T_s} \quad (136)$$

$$\bar{T}_2^* = \frac{\bar{T}_2}{T_s} = \frac{T_2}{T_s} + \frac{T_3}{T_s} = \frac{T_3}{T_s} \quad (137)$$

$$\bar{T}_1^* = \bar{T}_2^* = \frac{T_3}{T_s} = \frac{S_l^*(\omega^*)}{O_k^*(i\omega)\bar{\beta}^2} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} & \langle T^*(r^*, \omega^*) \rangle \\ &= \frac{2S_l^*(\omega^*)}{(1-R^2)O_k^*(i\omega)\bar{\beta}^4} \left[\left(\frac{Y_0(\bar{\beta}) - Y_0(R\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{J} \right. \\ & \left. + \left(\frac{J_0(R\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{Y} - \frac{\bar{\beta}^2 - R^2\bar{\beta}^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (139)$$

$$\begin{aligned} & \langle T^*(r^*, \omega^*) \rangle \\ &= [O_\rho^*(i\omega^*)] \frac{2}{(1-R^2)\bar{\beta}^4} \left[\left(\frac{Y_0(\bar{\beta}) - Y_0(R\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{J} \right. \\ & \left. + \left(\frac{J_0(R\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{Y} - \frac{\bar{\beta}^2 - R^2\bar{\beta}^2}{2} \right] [S_l^*(\omega^*)] \end{aligned} \quad (140)$$

La Ec. (140) puede ser expresada en términos de una función de transferencia compleja asociada al sistema geométrico.

$$\langle T^*(r^*, \omega^*) \rangle = R(\omega^*, R, \bar{\beta}) S_l^*(\omega^*) \quad (141)$$

Para la Ec. (141), la respuesta del sistema dinámico se ha definido de la siguiente manera:

$$R(\omega^*) = O_\rho^*(i\omega^*) f(R, \bar{\beta}) \quad (142)$$

En donde la función $f(R, \bar{\beta})$ representa la dispersión del sistema asociada al parámetro $\bar{\beta}$ y a la razón geométrica del sistema de estudio.

$$f(R, \bar{\beta}) = \frac{2}{(1 - R^2)\bar{\beta}^4} \left(\left(\frac{Y_0(\bar{\beta}) - Y_0(R\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{J} + \left(\frac{J_0(R\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})}{J_0(R\bar{\beta})Y_0(\bar{\beta}) - J_0(\bar{\beta})Y_0(R\bar{\beta})} \right) \bar{Y} - \frac{\bar{\beta}^2 - R^2\bar{\beta}^2}{2} \right) \quad (143)$$

La temperatura promedio de la corona circular contiene información de las funciones de Bessel de primera y segunda especie de ordenes cero y primero las cuales son inducidas por el efecto de la geometría. Nótese, que esta solución contiene un término adicional al del estudio del flujo pulsátil de u liquido viscoelástico deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil (oscilatorio). Es claro, que estas ecuaciones que involucran una fuente y una respuesta están íntimamente relacionados a los procesos dinámicos en el régimen de termodinámica irreversible lineal.

3.2.3 Números adimensionales

Para realizar las simulaciones es necesario primero definir las variables adimensionales de la siguiente manera:

$$\bar{\beta}^* = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{t_c \omega}{O_k^*(i\omega^*)}} = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\omega^* O_{\rho}^*(i\omega^*)} \quad (144)$$

Por lo tanto:

$$t_c = \frac{R_2^2 \rho C p}{k} \quad (145)$$

$$O_{\rho}^*(i\omega^*) = 1 + F_0 i \omega^* \quad (146)$$

$$F_0 = \frac{\Lambda_q}{t_c} \quad (147)$$

Si

$$\frac{1}{\alpha_M} = \frac{\rho C p}{k} \quad (148)$$

$$F_0 = \frac{\Lambda_q}{R_2^2 \frac{1}{\alpha_M}} = \frac{\alpha_M}{\frac{R_2^2}{\Lambda_q}} = \frac{\alpha_M}{\alpha_r} \quad (149)$$

El número de Fourier (F_0) relaciona los mecanismos de difusión de energía molecular y la difusión de energía asociados al tiempo de relajación, esto se presenta a través de los coeficientes α_M y α_r .

En la siguiente sección se presentará las predicciones o bondades teóricas de estos sistemas, es decir, las consecuencias de las ecuaciones constitutivas tipo Maxwell-Cattaneo.

CAPÍTULO IV

SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN UN CAPILAR

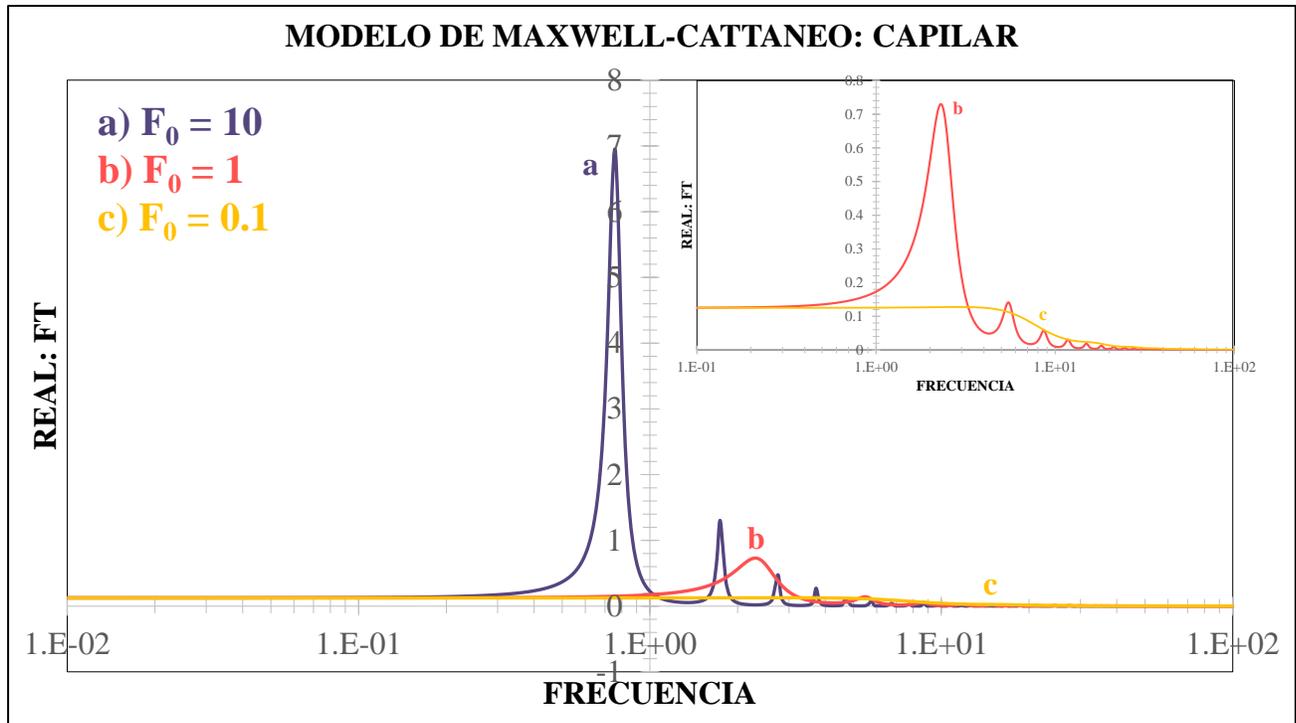


Figura 3. Ilustra la función de transferencia real vs frecuencia del modelo de Maxwell-Cattaneo para diferentes valores del número de Fourier.

En la figura 1 se observa la respuesta dinámica lineal del sistema en función de las características viscosas y elásticas del material para el modelo de Maxwell-Cattaneo. Es claro, que a frecuencias bajas el sistema muestra un comportamiento constante e independiente de la frecuencia. A un valor crítico de esta, la respuesta dinámica muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo resonante, en este máximo se observa un acoplamiento entre dos mecanismos asociados a la característica del sistema termodinámico irreversible que se estudia. Para valores mayores de la frecuencia, se observa un tren de picos secundarios asociados a los diferentes tiempos característicos del material y las propiedades matemáticas de las funciones de Bessel. Es importante notar que nuestras funciones de transferencia se presentan cocientes entre estas funciones especiales de la física matemática y, por lo tanto, existirán resonancias asociadas a sus propias matemáticas debido a que son funciones oscilatorias. Nótese, que el máximo resonante es asociado al mayor valor del número de Fourier. Esto significa que uno de los tiempos característicos domina sobre el otro y esto representa que toda la dinámica de estos sistemas está caracterizada por tiempos que describen la naturaleza física de estos sistemas.

Desde un punto de vista físico-biológico este tipo de materiales se pueden encontrar en la naturaleza donde existe una respuesta matemática entre una entrada y una salida de un sistema dinámico. Desde el punto de vista médico-biológico el corazón sería la fuerza motriz (variable de entrada) y la respuesta sería el flujo pulsátil sanguíneo a través del sistema circulatorio humano.

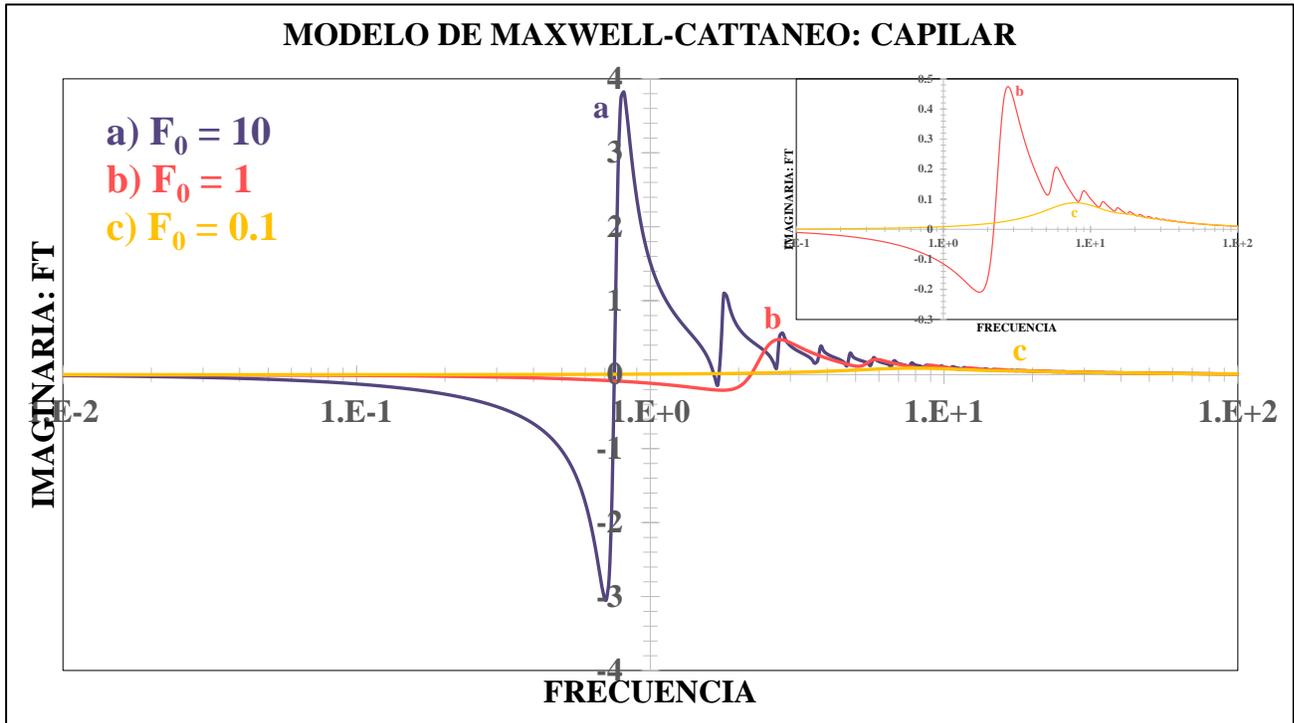


Figura 4. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número de Fourier.

En la figura 2 se ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs la frecuencia en función del número de Fourier. A frecuencias bajas la respuesta dinámica del sistema es constante. A una frecuencia crítica la respuesta de FTC es monótona creciente hasta un valor máximo resonante. A un valor mayor al de la frecuencia resonante se observa un comportamiento monótono decreciente hasta un valor mínimo antiresonante. Esta transición se puede describir matemáticamente por medio de una discontinuidad de salto, estas discontinuidades de salto son muy comunes en los fenómenos donde existen resistencias a la transferencia de momento, energía o masa. Para una segunda frecuencia crítica existe un tren de resonancias secundarias que se van disipando conforme a frecuencia de proceso aumenta. Obsérvese, que el efecto del número de Fourier es la de disminuir la respuesta imaginaria y la respuesta real en el sistema de estudio. En pocas palabras, se necesita la viscoelasticidad en estos sistemas para que se presente el fenómeno de resonancia inducido por las

componentes viscosas (disipativas y las elásticas asociadas a la parte de almacenamiento de energía). Es importante resaltar que un fluido viscoso no presenta esa respuesta elástica mientras que un fluido viscoelástico si presenta curvas resonantes. La resonancia es un fenómeno que se observa en los sistemas en donde existe una vibración y es típico de materiales en donde las frecuencias de proceso coinciden con las frecuencias naturales del material. Esto se observa cuando se sintoniza un radio, cuando se ajusta una frecuencia esta coincide con la frecuencia del radio y se percibe la señal de las diferentes estaciones. Este trabajo versa en encontrar las condiciones materiales que afectan esas resonancias a través de la termodinámica irreversible desde el formalismo de Maxwell-Cattaneo.

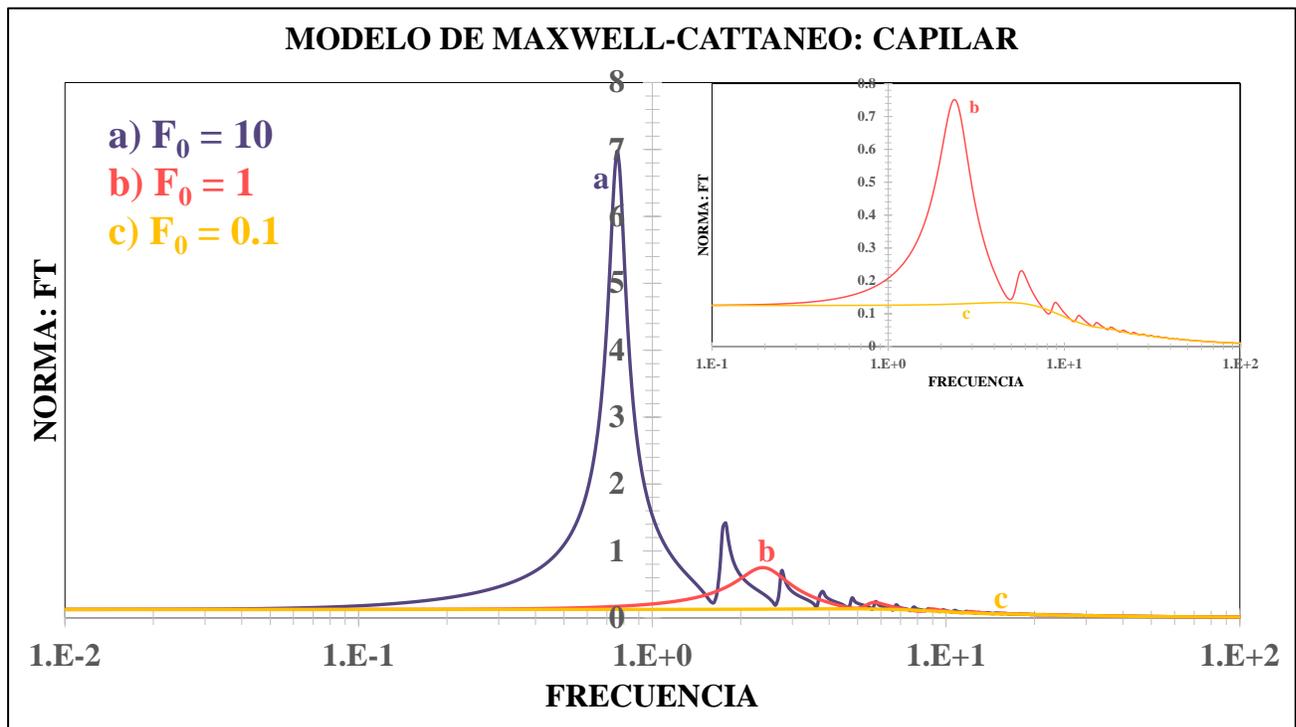


Figura 5. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja vs la frecuencia para diferentes valores del número de Fourier.

En figura 3 se muestra la respuesta de la norma de la FTC vs la frecuencia a diferentes valores de número de Fourier. Para un valor de 10 del número de Fourier se presenta lo siguiente: a frecuencias bajas existe un comportamiento constante proseguido de un comportamiento monótono constante hasta un valor máximo resonante, después de esta frecuencia máxima se presenta un tren de picos secundarios. Nótese que, a frecuencias bajas moderadas domina la contribución de parte real y a frecuencias altas domina la contribución de la parte imaginaria, del mismo modo, la contribución de la parte real de la FTC domina las curvas que representan a números de Fourier de 0.1 y 1.

4.2 TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN UNA CORONA CIRCULAR

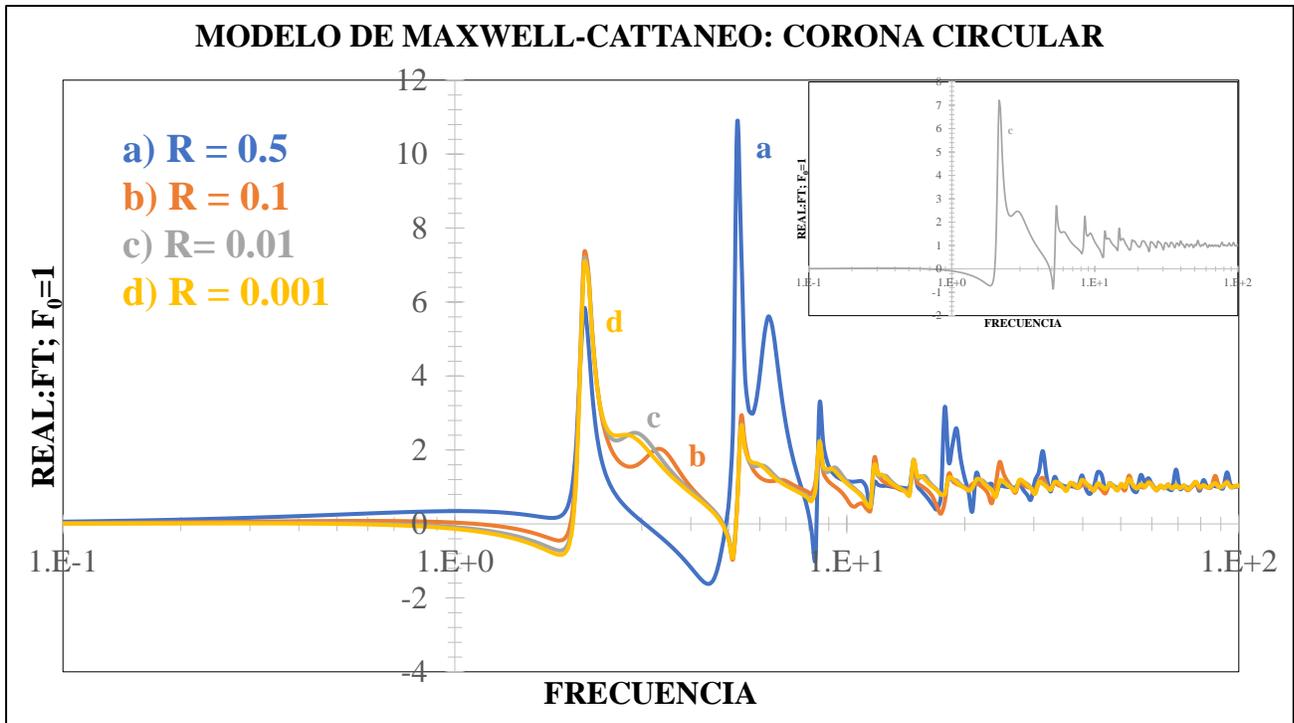


Figura 6. Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia a un Fourier igual a 1 a diferentes valores de R.

En la Fig. (6) se muestra el comportamiento de la parte real de la función de transferencia compleja vs la frecuencia para diferentes valores de R con un valor fijo del número de Fourier igual a 1. A frecuencias bajas, la respuesta del sistema es constante. A una frecuencia crítica el comportamiento de todas las resonancias es monótona y decreciente hasta un valor mínimo. A una segunda frecuencia crítica se observa una discontinuidad de salto hasta un valor máximo. Como en los casos anteriores el máximo es un acoplamiento de todas las fuerzas macroscópicas del sistema. A una frecuencia mayor a la resonante el sistema muestra patrones resonantes que se repiten conforme la frecuencia aumenta. Es claro, que estas simulaciones son producto esencialmente de la curvatura del sistema asociadas a las funciones especiales de Bessel de primera y segunda especie de orden 1. Evidentemente, esta grafica es una representación más adecuada de los procesos de conducción y relajación del sistema por efecto de la competencia entre la fuente y la temperatura promedio.

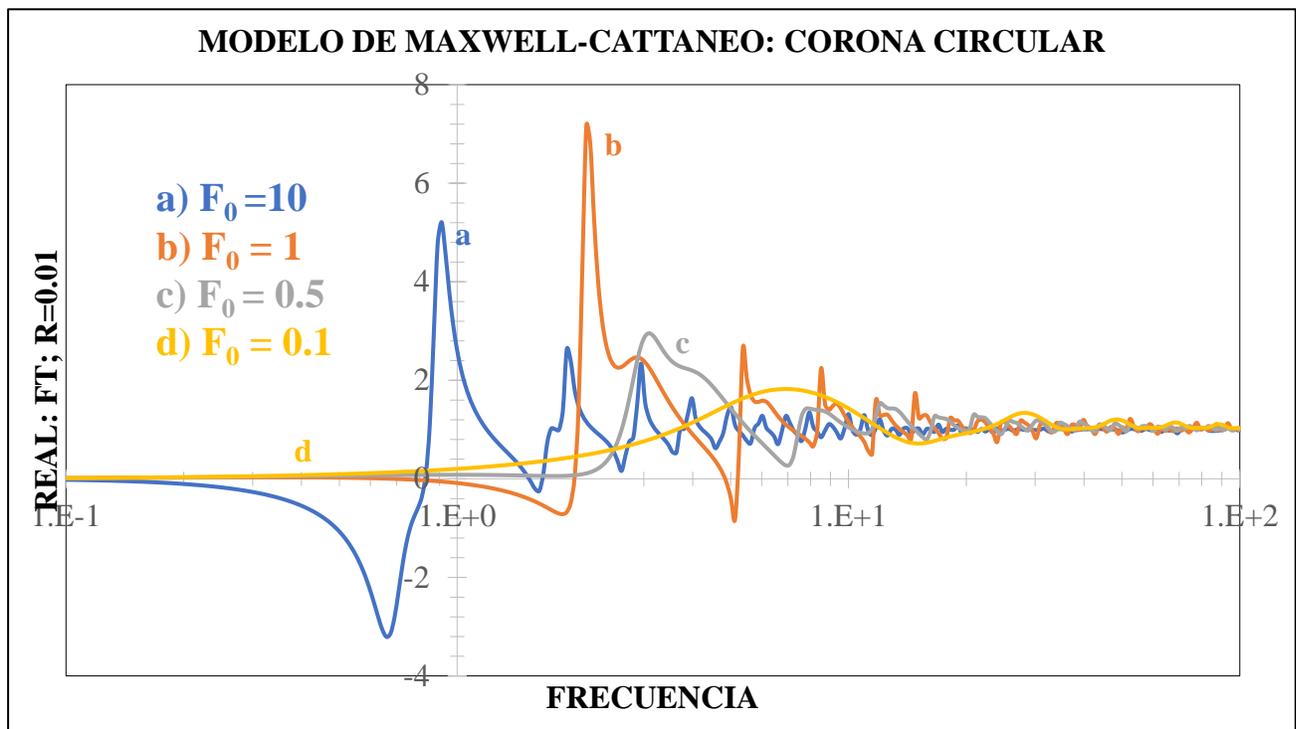


Figura 7. Ilustra la parte real de la función de transferencia vs la frecuencia a R igual a 0.01 y diferentes valores del número de Fourier.

En la Fig. (7) se muestra el comportamiento de la parte real de la FTC vs la frecuencia a diversos valores del número de Fourier con un valor de R igual a 0.01. A frecuencias bajas, la respuesta del sistema es constante hasta un cierto valor crítico en donde decrece monotonamente hasta un valor mínimo. Es evidente que existe una discontinuidad del valor mínimo al máximo por efecto de las propiedades matemáticas de las funciones de Bessel. Los valores mínimo y máximo están determinados por un acoplamiento entre las propiedades transitorias moleculares y de relajación en el sistema de estudio. A un valor de frecuencia crítico mayor al resonante se observa que la FTC sigue un comportamiento monótono decreciente seguido de un tren de curvas resonantes secundarias que se desvanecen cuando la frecuencia aumenta. Las antiresonancias son más evidentes a valores altos del número de Fourier y estas pueden ser causadas por dos razones:

- i) matemáticamente se puede inducir a la contribución de la función de Bessel de segunda especie
- ii) físicamente puede ser debido a un contraflujo de energía.

La máxima resonancia se da cuando el número de Fourier es igual a 1. Cuando el $F_0 = 1$ hay una competencia entre el coeficiente de difusión de energía molecular y el coeficiente de relajación, esta última es debido al implementar el efecto Maxwell-Cattaneo.

A altas frecuencias todos los casos tienden a un valor de 1, eso quiere decir que hay un empate entre la energía proporcionada por el medio (láser) y la temperatura promedio del sistema.

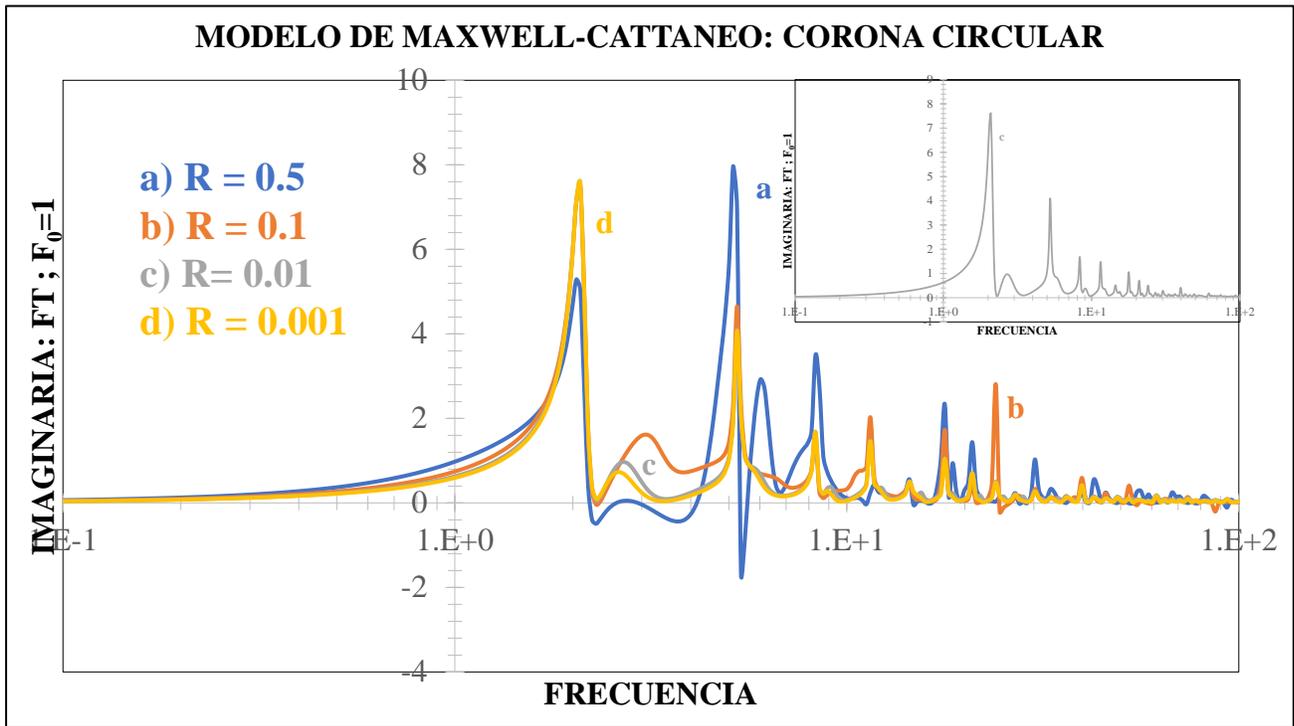


Figura 8. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs la frecuencia a diferentes valores de R con un Fourier igual a 1.

En la Fig. (8) se presenta el comportamiento de la parte imaginaria de la FTC en funciones de R. La Fig. (8) tiene un comportamiento similar al de la Fig. (6) por lo que, las conclusiones matemáticas y físicas se preservan. A continuación, mencionaremos las cualidades de la Fig. (8)

- i) A mayor valor de la razón geométrica R, se observa que las curvas se desplazan a valores mayores en la frecuencia.
- ii) Es importante notar que, a diferencia del estudio de fluidos viscoelásticos, la mayor respuesta se obtiene cuando el sistema es R = 0.5. Es decir, cuando existe una disminución en el área de transferencia de energía molecular

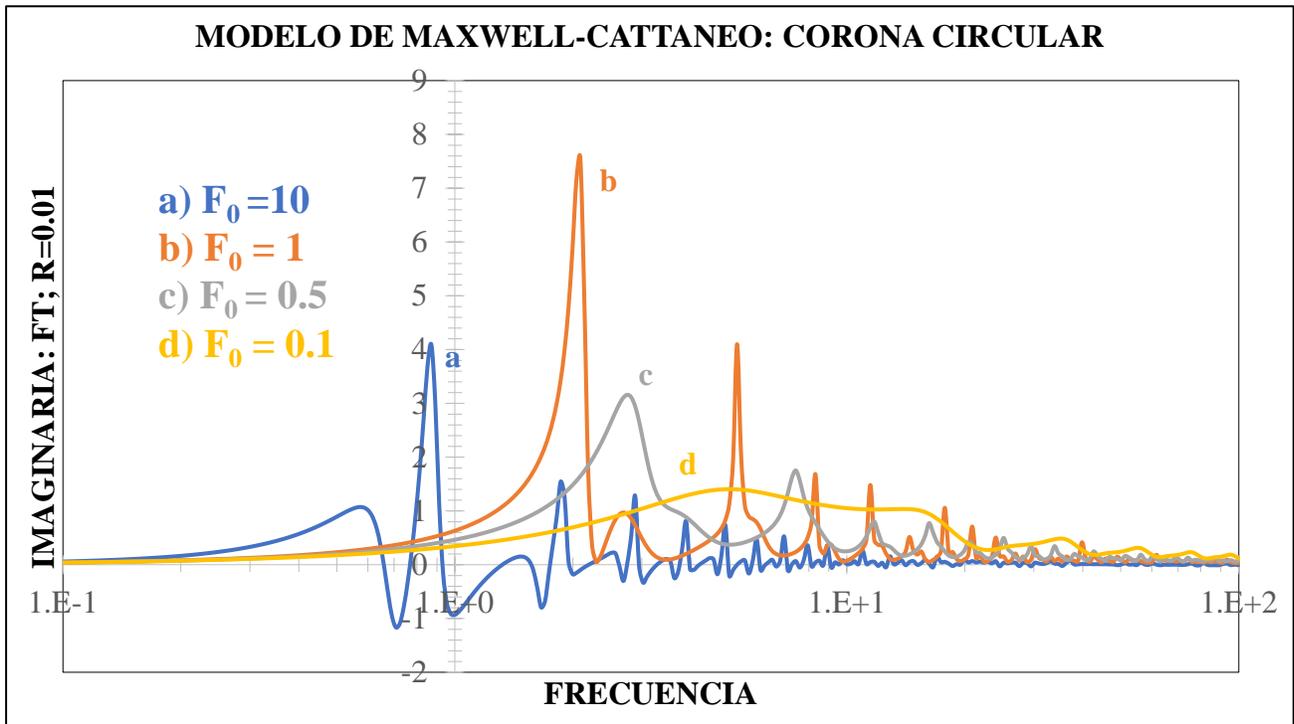


Figura 9. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia vs la frecuencia a diferentes valores de número de Fourier y R igual a 0.01.

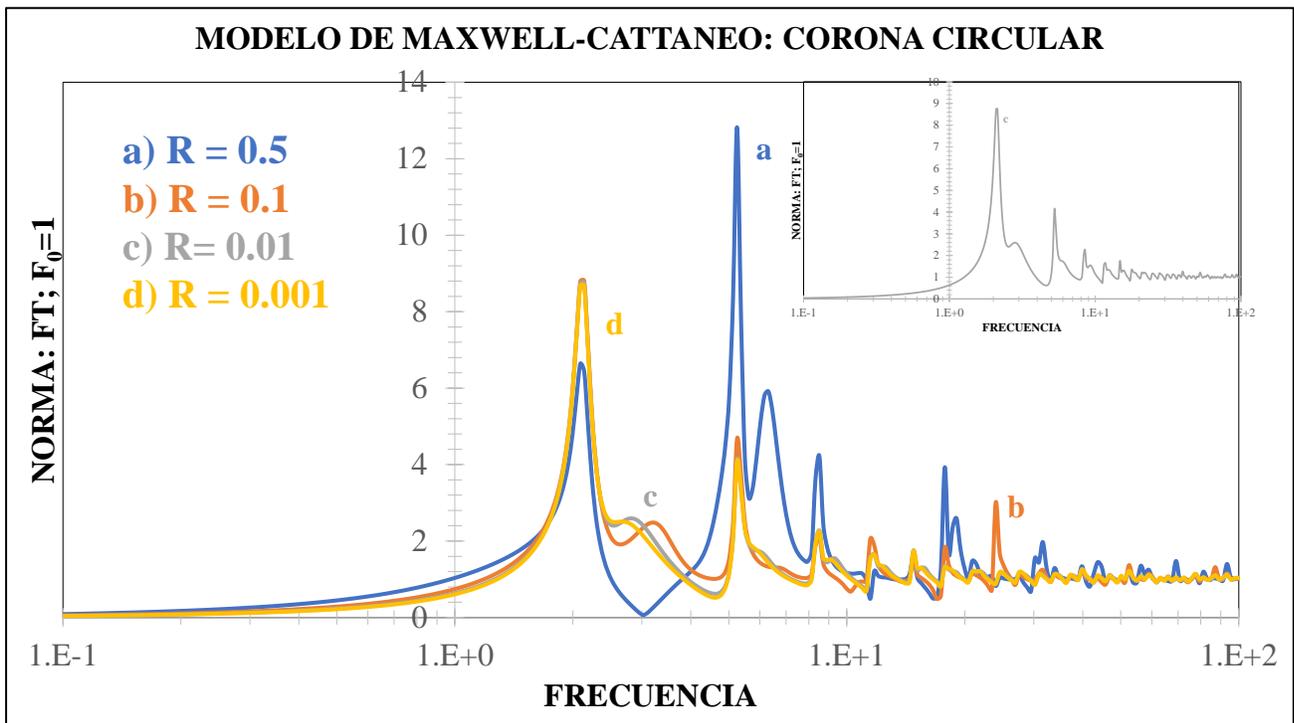


Figura 10. Ilustra la norma de la función de transferencia vs la frecuencia a diferentes valores de R con un Fourier igual a 1.

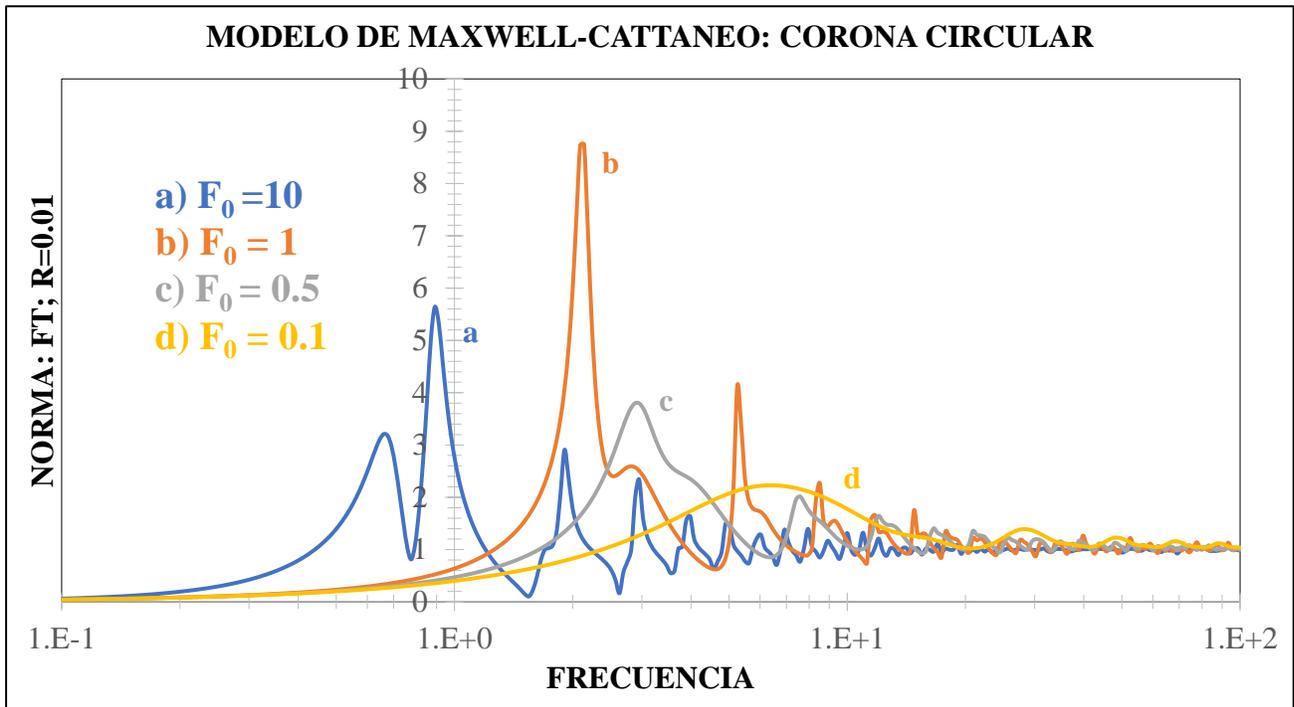


Figura 11. Ilustra la norma de la función de transferencia vs la frecuencia a diferentes valores de Fourier con una R igual a 0.01.

En la Fig. (9) se demuestra el comportamiento de la parte imaginaria de la FTC vs la frecuencia a diversos valores del número de Fourier. La Fig. (7) y Fig. (9) son muy similares. En la Fig. (10) se muestra la norma de la FTC vs la frecuencia diferentes valores de R. Es evidente que la norma tiene una respuesta similar a la parte real y a la parte imaginaria, es decir, es la combinación perfecta de ambos mundos. En la Fig. (11) se muestra la norma de la FTC vs la frecuencia diferentes valores del número de Fourier. La norma tiene un comportamiento similar a la parte real que, a la parte imaginaria, por lo que, contribución de la parte real domina la respuesta del sistema.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la transferencia de energía irreversible en un sistema en donde los mecanismos transitorios, de relajación, moleculares y asociados a una fuente de energía (láser) dependen del tiempo. La ecuación constitutiva que se utilizó para describir el flux de calor y gradiente de temperatura es la de Maxwell-Cattaneo.

Las geometrías que se emplearon en este trabajo son: (i) capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ y (ii) corona circular de radios R_1 y R_2 , con $R_1 < R_2$. Las condiciones de frontera en el capilar fueron: (i) $r = 0$, $T = T_{\max}$, (ii) $r = a$, temperatura conocida ($T = T_a$). En la corona circular: (i) $r = R_1$, $T = T_1$ y (ii) $r = R_2$, $T = T_2$. Para el modelo del capilar se postularon las siguientes restricciones físicas: (i) sistema en estado no estacionario, (ii) la temperatura solo depende de la coordenada radial r , (iii) simetría cilíndrica, i.e., que no depende la geometría angular, (iv) se supone invarianza axial, i.e., que la longitud característica L es mucho mayor que la longitud característica R . Además, para el modelo de la corona circular se consideró lo siguiente: (i) se introducen mecanismos de relajación por efecto de la perfusión de la sangre con órganos del cuerpo humano, (ii) el proceso es no isotérmico, i.e. la temperatura no es constante y es necesario el balance de energía, (iii) la disipación viscosa es depreciable, el aumento de temperatura se debe a una fuente de energía, depende del tiempo y de la frecuencia.

Al acoplar la ecuación de conservación de energía y la ecuación de Maxwell-Cattaneo se adquirió una ecuación diferencial parcial lineal que describe el cambio de temperatura debido a la capacidad del material para conducir calor, densidad, calor específico C_p , inducidos por la transferencia de energía proveniente del láser.

Bajo las restricciones físicas y suponiendo una contribución homogénea, se aplicó el formalismo de Fourier para obtener una ecuación de Bessel compleja modificada, la cual, su solución está en las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero. La parte no homogénea se calculó por el método de coeficientes indeterminados. Con base en esto, se obtuvieron las expresiones analíticas para el perfil de temperaturas, temperatura promedio y la función de transferencia que relaciona la variable de entrada (láser) con la variable de salida (temperatura promedio), las cuales dependen de los números adimensionales β^* y $O_k^*(i\omega^*)$ para el capilar y $\bar{\beta}^*$ y $O_\rho^*(i\omega^*)$ para la corona circular. Cabe resaltar que β^* y $\bar{\beta}^*$ son asociadas a los procesos transitorios, energía interna y los procesos de conducción y relajación del operador conductividad. El operador de conductividad O_k^* está definido mediante el número de Fourier (F_0) y la conductividad del material k .

Después de concluir las simulaciones, se realizó un análisis de las contribuciones real e imaginaria, así como la norma de la FTC de las cuales se concluye lo siguiente:

5.1 Simulaciones

De la contribución de conocimiento a esta investigación de licenciatura original es que a frecuencias selectas existe un mecanismo resonante asociado al empate entre las frecuencias naturales y las frecuencias de proceso. Estas frecuencias de proceso dependen exclusivamente de las propiedades materiales del sistema es decir de los tiempos de relajación. Por otra parte, existe un tren secundario de picos asociados a las resonancias del sistema. Estas resonancias son una consecuencia matemática del cociente de funciones de Bessel, las cuales, contienen la información de las raíces reales y complejas en el sistema de estudio.

Se presenta un fenómeno físico conocido como resonancia y antiresonancia asociado a una discontinuidad matemática seguido de un tren de picos secundarios que se desvanecen al aumentar la frecuencia. Estos picos son una consecuencia de las frecuencias naturales del sistema y la razón matemática de dos funciones de Bessel de primera especie de orden 0 y 1. La antiresonancia puede ser causado por dos motivos: i) físicamente se puede interpretar como un contraflujo de energía en el sistema y ii) matemáticamente se puede asociar a la contribución de las funciones de Bessel.

A frecuencias bajas la respuesta es constante mientras que para una frecuencia crítica la parte real domina sobre la parte imaginaria mientras que, el tren de picos secundarios es una manifestación de la parte imaginaria. Es evidente que la norma combina lo mejor de dos mundos.

Es claro que el efecto del número de Fourier es el de modificar la anchura de la señal y el pico resonante. El número de Fourier relaciona el coeficiente de difusión de energía molecular y el coeficiente de relajación, este último es por efecto de la ecuación de Maxwell-Cattaneo. Cuando el $F_0 = 1$ hay una competencia entre los dos coeficientes, por lo cual fue elegido para realizar las simulaciones a diferentes valores de R para la corona circular.

Existe una gran diferencia entre el comportamiento de la FTC para el capilar y para la corona circular debido a la geometría. La corona circular se describe como dos tubos concéntricos, el efecto de la curvatura del tubo interno causa la aparición de la función de Bessel de primera y segunda especie de orden 0 y 1, mientras que en el capilar solo aparece la función de Bessel de primera especie de orden 0 y 1.

6 TRABAJO FUTURO

Una continuación natural de este trabajo es contrastar las predicciones teóricas y numéricas desarrolladas en este trabajo de investigación a nivel licenciatura con resultados de tipo experimental. Esto incluiría aplicaciones a fenómenos de transporte como son: (i) transferencia de momento, (ii) transferencia de energía y (iii) transferencia de masa. Es importante destacar que estos problemas se han desarrollado con las condiciones más simples posibles e involucran termodinámica fuera del equilibrio, es decir, que localmente las propiedades de la termodinámica clásica se mantienen, pero dependen del tiempo. Otro aspecto importante es desarrollar ecuaciones más avanzadas que la de Maxwell-Cattaneo con el fin de describir fenómenos acoplados mucho más realistas. En un segundo punto se podrían reestructurar los experimentos para encontrar la resonancia en sistemas que involucran una frecuencia característica. Un ejemplo de la aplicación de este trabajo sería la frecuencia de la tos en las personas que fueron infectadas con el virus de COVID-19. El virus de COVID-19 produce malestar generalizado y una tos frecuente, esta puede ser relacionada con la frecuencia en la cual el sistema presenta la máxima resonancia asociada a la expectoración. Finalmente, este trabajo y las contribuciones de este representan una luz en el camino de entender sistemas que utilizan la termodinámica irreversible y los fenómenos de transporte como punto de partida para sistemas basados en la bioingeniería y, por lo tanto, son vitales para entender aplicaciones en la transferencia de masa y la biología dinámica.

BIBLIOGRAFÍA

Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.

Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Cuevas, S & Del Rio, J.A. 2001 Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. *Phys. Rev. E.* 64, 016313/1-7.

Del Rio J.A., De Haro, M.L. & Castrejón-Pita J.R. 1998 Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Phys. Rev. E.* 58 (5) 6323.

Herrera-Valencia E.E. & Rey, A.D. 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 372: 20130369/1-28.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. & Mena, B. 2009 Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonia*

Hughes, D., Proctor, M., & Eltayeb, I. (2021). Maxwell–Cattaneo double-diffusive convection: Limiting cases. *Journal of Fluid Mechanics*, 927, A13. doi:10.1017/jfm.2021.721

Mazón, J.M. (2014). El problema de la velocidad de propagación infinita en las ecuaciones de difusión. *La gaceta de la RSME*. Vol. 17 Pags. 273-298.

Falcón N, Medina A. (2012). Consideraciones de causalidad en el transporte de partículas por difusión. *Bistua*.2012.10(2):22-27.

Macosko, C.W., *Rheology: Principles, measurements and applications*. 1994, Weinheim: Wiley-VCH.

Herrera, E.E., Sanchez, M.L, Calderas, F., Ramirez, L.A., Ortiz, D., Soriano, C., Núñez, D.M., Medina, L., & Hernandez, V.J. (2022). Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: Flujo pulsátil de sangre humana. UNAM.

Herrera, E.E., Sanchez, M.L, Calderas, F., Ramirez, L.A., Ortiz, D., Soriano, C., Núñez, D.M., Medina, L., & Hernandez, V.J. (2023). Fenómenos de transporte y reología de fluidos estructurados. UNAM.

Nhan, P.T., & Nam, M.D. (2017). Understanding viscoelasticity: An introduction to rheology. Springer.