



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Solución analítica y caracterización de modelo con retroalimentación negativa basado en umbrales para sistemas con agentes dependientes de factores externos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ANGEL YAIR GARCÍA PÉREZ

TUTOR:

DR. JUAN VALENTÍN ESCOBAR SOTOMAYOR



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre y a mi padre por todo el apoyo que me brindaron a lo largo de mi vida como estudiante.

Agradezco a mi familia por las experiencias y el aprendizaje que obtuve con ellos. Todos sus recuerdos siempre los llevo conmigo.

Agradezco a la UNAM por haberme brindado los espacios donde conocí a mis amigos y donde obtuve gran parte del conocimiento que tengo ahora.

Agradezco a mis profesores por transmitirme todo su conocimiento y por haber resuelto todas mis dudas.

Agradezco a las personas que conocí y a todos los amigos que hice a lo largo de mi vida como estudiante. Ya que cada persona me convirtió en lo que soy ahora.

Resumen

Desde hace tiempo, diversos acontecimientos tanto en sistemas naturales como sociales han tenido efectos catastróficos en nuestra sociedad, por ejemplo: los terremotos han causado daños y derrumbes de viviendas, los incendios forestales han desequilibrado cadenas alimenticias, los derrumbes de los mercados financieros han tenido repercusiones económicas a nivel mundial, etc. Un buen entendimiento de estos sistemas puede ayudar a disminuir las posibles consecuencias negativas generadas. Para llegar a un entendimiento general del comportamiento de los sistemas se puede dar un primer paso estudiando un caso específico de los mismos. Por ello en este trabajo se presenta un modelo de retroalimentación negativa basado en umbrales para contribuir al entendimiento de sistemas complejos que presenten avalanchas de actividad e intermitencia. Específicamente, el modelo se utiliza para reproducir en un periodo de tiempo la dinámica del precio de la acción de Shell. El trabajo se centra en desarrollar una solución analítica del modelo y en la caracterización mediante un diagrama de fases. Para la caracterización se hace una definición formal de los distintos regímenes existentes del modelo y se utilizan simulaciones de este. También se utiliza la solución analítica para encontrar propiedades que permitan encontrar las fronteras de los distintos regímenes existentes. Al final se presenta como posible trabajo futuro aplicar el modelo al sistema específico de las formaciones de hielo de la Antártida para dar una posible explicación para las drásticas disminuciones que ha tenido a lo largo de los años.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
1. Introducción y objetivos	1
1.1. Características de los sistemas complejos	1
1.2. Avalanchas de actividad en sistemas con retroalimentación negativa .	7
1.3. Retroalimentación negativa en sistemas sociales y naturales	11
2. Un nuevo modelo de retroalimentación negativa con umbrales	17
2.1. Modelo con retroalimentación negativa	17
2.1.1. Definición de los distintos regímenes en el sistema	23
2.2. Simulaciones: Reproduciendo los resultados del artículo	25
2.3. Un nuevo modelo y una posible aplicación	26
2.3.1. El modelo de manera general	30
3. Validación y solución analítica	33
3.1. Simulación del nuevo modelo	33
3.2. Solución analítica	34
3.3. Validación de la solución analítica con simulaciones microscópicas . .	43
4. Caracterización del modelo	49
4.1. Definición de los distintos regímenes existentes	50

4.2. Fronteras de los regímenes de la simulación microscópica y teórica	55
4.3. Propiedades de la solución analítica	61
4.3.1. Duración total de las simulaciones	61
4.3.2. Colapso de las distintas curvas	63
4.4. Caracterización del sistema mediante simulaciones teóricas	68
5. Explorando aplicar el modelo para explicar las variaciones de masa de la Antártida	73
6. Conclusiones	77
Referencias	81
A. Código utilizado	85

Índice de figuras

1.1. Dinámica del número de salas de cine que presentan una determinada película. Datos tomados de www.boxofficemojo.com	7
1.2. Proceso de retroalimentación negativa.	9
1.3. Diagrama de un gobernador centrífugo. Tomado de <i>Estimación del margen de reserva y contingencia para el control de frecuencia en redes eléctricas con mix de generación</i> , por A. J. Umaña, 2019. . . .	10
1.4. Proceso de retroalimentación negativa para el gobernador centrífugo.	11
1.5. Proceso de retroalimentación negativa para las extinciones de especies.	12
1.6. Proceso de retroalimentación negativa para las salas de cines.	12
1.7. Proceso de retroalimentación negativa para el mercado de acciones.	13
1.8. Dinámica del precio de la acción Shell en un periodo de tiempo del año 2014. En el eje x se muestran los días desde el 20 de junio del 2014.	14
2.1. Adaptado de "Intermittent dynamics in complex systems driven to depletion."(p. 3), por Escobar, J.V. y Pérez Castillo I, 2018, Scientific Reports 8 , 4825. https://doi.org/10.1038/s41598-018-23033-x	19
2.2. Adaptado de "Intermittent dynamics in complex systems driven to depletion."(p. 4), por Escobar, J.V. y Pérez Castillo I, 2018, Scientific Reports 8 , 4825. https://doi.org/10.1038/s41598-018-23033-x	24
2.3. Gráficas para la película Harry Potter 7	25
2.4. Gráficas para la película Beautiful Mind	26
2.5. Diagrama de retroalimentación negativa para la acción de Shell. . . .	28

2.6. Distribución de los accionistas sobre los umbrales siguiendo una distribución normal. La distribución se encuentra alrededor del valor $q(3)\beta = 113$	29
3.1. Simulación del nuevo modelo. Como parámetros de la distribución normal se utilizó a $\mu = 32$ y $\sigma = 4.2$	34
3.2. Primera comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.	44
3.3. Segunda comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.	45
3.4. Tercera comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.	46
3.5. Cuarta comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.	47
4.1. Gráfica de simulación teórica y señal externa en el régimen continuo y sincrónico.	50
4.2. Gráfica de simulación teórica en el régimen de inactividad de 1 iteración.	52
4.3. Gráfica de simulación teórica en el régimen de inactividad de 2 iteraciones.	52
4.4. Gráfica de simulación teórica en el régimen intermitente 1.	53
4.5. Gráfica de simulación teórica en el régimen intermitente 2.	53
4.6. Comparación de mapa de densidad de la simulación microscópica con la frontera de simulación teórica. Duración de 25 iteraciones, frontera de inactividad de 1 iteración.	56
4.7. Comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.	58
4.8. Comparación de la frontera de la simulación microscópica con la frontera de la simulación teórica. Duración total de 1000 iteraciones, frontera de régimen intermitente 2. El mapa de calor se obtuvo con la simulación de 100 fronteras.	60

4.9. Duración total de iteraciones como función de gamma γ . Las simulaciones se realizaron con los parámetros $\mu = 40$, $P_{t_i} = 100$ y $\sigma = 20$. . .	62
4.10. Comparación de la frontera donde comienza el régimen continuo y asincrónico para distintos valores iniciales de la variable del sistema.	64
4.11. Comparación de la frontera donde comienza el régimen de inactividad de 2 iteraciones para distintos valores iniciales de la variable del sistema.	65
4.12. Comparación de fronteras donde comienza el régimen intermitente 2 para distintos valores iniciales de la variable del sistema.	65
4.13. Comparación de la frontera donde comienza el régimen de inactividad de 1 iteración con la frontera donde comienza el régimen continuo y asincrónico.	66
4.14. Superposición de la frontera donde comienza el régimen intermitente 1 con la frontera donde comienza el régimen intermitente 2.	67
4.15. Caracterización del modelo en el espacio de los parámetros γ y σ para $\mu = 0$	69
4.16. Caracterización del modelo en el espacio de los parámetros γ y σ para $\mu = 40$	69
4.17. Caracterización del modelo en el espacio de los parámetros γ y σ para $\mu = 80$	70
4.18. Caracterización del modelo en 3 dimensiones.	71
5.1. Variación de masa de la Antártida desde el año 2002 hasta el año 2023.	73
5.2. Proceso del sistema con el cual sería posible aplicar el modelo. . . .	74
5.3. Aplicación del modelo a los datos de la disminución de masa de la Antártida. Como parámetros de la distribución normal se utilizó a $\mu = -150$ y $\sigma = 280$	76

Capítulo 1

Introducción y objetivos

En este trabajo se estudian sistemas complejos que dependen de algún factor externo, mediante bucles de retroalimentación negativa y avalanchas de actividad generadas a partir del factor externo. Este primer capítulo comienza con el estudio de las principales características de los sistemas complejos, estas características y componentes distintivos de dichos sistemas son: retroalimentación, interdependencia de sus variables, comportamiento caótico, geometría fractal, criticalidad autoorganizada, existencia de estados metaestables y actividad cuya distribución sigue una ley de potencia.

1.1. Características de los sistemas complejos

Un circuito de retroalimentación es un mecanismo por el cual el cambio en una variable resulta en una amplificación (retroalimentación positiva) o una amortiguación (retroalimentación negativa) de ese cambio (Ormand, 2023).

Un ejemplo sencillo de retroalimentación negativa es un termostato que regula la temperatura del aire dentro de un edificio. En invierno, un aumento de la temperatura encima del nivel deseado le indica al termostato que apague el horno, amortiguando de esta manera el aumento de temperatura.

Otra característica de los sistemas complejos son sus variables fuertemente interdependientes. En efecto, el gran número de variables en un sistema complejo junto con su interdependencia hace complicado analizar las entradas que contribuyen a una salida observada y el alcance de las aportaciones de cada factor se vuelve difícil de predecir.

Ya que las variables en un sistema complejo dependen en gran parte unas de otras, las alteraciones en las entradas del sistema pueden llevar a consecuencias no esperadas. Debido a esto la predicción precisa del comportamiento de los sistemas complejos se vuelve difícil (Ormand, 2023), incluso pudiendo presentar el llamado "Caos".

La primera persona en notar la posibilidad del caos fue Henri Poincaré. Él notó que un sistema determinista puede presentar un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, con lo que la predicción a largo plazo se convierte en algo prácticamente imposible (Strogatz, 2015, p. 2).

Parte de la motivación de Poincaré provenía del problema de las orbitas de tres cuerpos celestes que experimenta atracción gravitacional mutua. En lugar de centrarse en orbitas individuales utilizó el comportamiento de las orbitas que surgen de conjuntos de puntos iniciales, con ello Poincaré pudo demostrar que eran posibles orbitas muy complicadas, orbitas ahora llamadas caóticas (Ott, 2002, p. 1).

Agregando a lo anterior, cuando James Clerk Maxwell estudió el movimiento de las moléculas de gas, en la década de 1860, sabía que pequeños cambios en el movimiento inicial de las partículas darían lugar a cambios gigantescos en las trayectorias de las moléculas. Probablemente también sabía que un sistema compuesto por dos partículas de gas en colisión en una caja no tendría movimiento de tipo estado estable ni de oscilación periódica o cuasi periódica, como estaban acostumbrados

en esa época, y que el comportamiento a largo plazo de los movimientos no sería predecible para todo fin práctico (Alligood et al., 1997, pp. vi-vii).

Algunos sistemas complejos dan lugar a estructuras llamadas "fractales". De manera general los fractales se definen como formas geométricas complejas con una estructura fina en escalas arbitrariamente pequeñas. Estas pueden tener algún grado de autosimilitud. Es decir, al acercarnos a una pequeña parte de un fractal veremos características muy similares a el fractal entero. Esta similitud puede ser exacta o solo aproximada (Strogatz, 2015, p. 405).

Una manera de obtener estructuras fractales o auto semejantes es llevar al punto crítico a un sistema termodinámico ajustando la temperatura.

Por ejemplo, el tamaño de las islas o dominios de spins en el modelo de Ising sigue una distribución libre de escala en $T = T_0$ (donde T_0 es la temperatura crítica). Pero existen sistemas no térmicos que presentan características similares a aquellos del punto crítico, sin necesidad de ajustar un parámetro externo, es decir, de manera autoorganizada.

La criticalidad autoorganizada es una forma diferente de estudiar la naturaleza. La idea principal es que derivado únicamente de la interacción sencilla de sus partes, el sistema evoluciona a un estado crítico (Bak, 1996, p. xi).

La ciencia de la criticalidad autoorganizada tiene por objetivo ayudar a comprender cómo es que la naturaleza puede presentar un comportamiento complejo emergente partiendo de leyes sencillas de sus partes constitutivas.

El punto crítico de la dinámica de los sistemas estudiados aquí funciona como un atractor que es alcanzado desde un estado de equilibrio, de esta manera los sistemas dinámicos evolucionan naturalmente hacia un estado crítico.

Aunado a esto, la criticalidad autoorganizada explica unos cuantos patrones ubicuos existentes en la naturaleza que consideramos como compleja. La estructura fractal y los eventos catastróficos están entre esas regularidades (Bak, 1996, p. xi).

Es importante destacar que un sistema complejo puede ser observado en un estado de equilibrio débilmente estable, un estado donde un pequeño cambio en las condiciones puede provocar un cambio mayor en el sistema (Ormand, 2023).

Un ejemplo paradigmático de lo anterior es el de los terremotos: es posible que a lo largo de meses o incluso años se presentan terremotos de magnitud relativamente pequeña muchas veces al día. Podría pensarse que el sistema geológico se encuentra en una especie de equilibrio donde se disipa cuasi-continuamente la energía que se acumula en las fallas. Pero de vez en cuando y sin previo aviso puede haber terremotos de gran magnitud con consecuencias devastadoras.

En efecto, algunos sistemas grandes con un gran número de componentes evolucionan hacia un estado fuera de equilibrio donde pequeñas perturbaciones pueden conducir a eventos denominados como avalanchas (Bak, 1996, pp. 1-2). Cabe señalar que las avalanchas surgen cuando un sistema responde a condiciones externas cambiantes mediante eventos discretos e impulsivos que abarcan una amplia gama de tamaños.

Un ejemplo de sistemas que presentan avalanchas es el caso de los materiales magnéticos bajo el efecto de un campo magnético externo cambiante. En este ejemplo cada partícula del material tiene su spin orientado aleatoriamente, confor-

me aumente el campo magnético externo algunas partículas cambiaran su spin. El hecho de que algunas partículas cambien su spin puede desencadenar que un gran número de partículas también cambien su spin provocando que estas partículas alineen su orientación, obteniendo de esta manera una avalancha (Sethna et al., 1993).

Los ejemplos de sistemas que presentan avalanchas son diversos, se han encontrado avalanchas en: dinámica de superconductores (Field et al., 1995) y superfluidos (Lilly et al., 1996), sonido emitido durante las transiciones de fase martensítica (Ortín et al., 1995), fluctuaciones en el mercado de valores (Bak et al., 1997), erupciones solares (Lu et al., 1993), fallas en cascada en las redes eléctricas (Carreras et al., 2000), fallas en sistemas diseñados para un rendimiento óptimo (Carlson y Doyle, 1999), toma de decisiones en grupo (Galam, 1997) y fractura en materiales desordenados (Petri et al., 1994).

Al mismo tiempo, los sistemas complejos se componen de grupos de agentes relacionados. Por ejemplo, las avalanchas de nieve no son una gran cantidad de copos de nieve que por coincidencia se mueven en una sola dirección, sino que la masa de nieve es un sistema acoplado con fuertes relaciones, lo que lleva frecuentemente en forma de una ley de potencia a eventos muy grandes. A diferencia de las leyes de potencia, las distribuciones Gaussiana, Uniforme, Exponencial y Poisson pueden surgir de la independencia o falta de relación de objetos o eventos (Fieguth, 2017, p. 212).

En tal sentido, los sistemas no lineales desafían las suposiciones respecto a la superposición, así como las distribuciones conocidas como leyes de potencia desafían las suposiciones con respecto a promedios y al aprendizaje de la experiencia (Fieguth, 2017, p. 212).

Una vez presentadas las características de los sistemas complejos es momento de abordar en esta tesis el concepto de "intermitencia" en la dinámica de la variable de un sistema, el cual será un concepto clave en el resto del trabajo.

El concepto de intermitencia fue propuesto por primera vez por Pomeau y Manneville (1980) cuando estudiaron sistemas dinámicos disipativos simples que exhibían una transición de un comportamiento periódico estable a un comportamiento caótico. En el trabajo descubrieron que la intermitencia era una ruta al caos que involucraba una alternancia entre una dinámica regular y una caótica, los autores describieron 3 tipos de intermitencia dependiendo del tipo de bifurcación que tenía un parámetro de bifurcación (Guan et al., 2020).

En esta tesis se propone que algunos sistemas sociales y naturales presentan un comportamiento intermitente con transiciones entre un estado con dinámica con cambios relativamente suaves y un estado con cambios abruptos provocados por el cambio continuo de un factor externo. En la siguiente sección de este capítulo se presenta el sistema de salas de cine como ejemplo específico de sistema social con la intermitencia mencionada, también se realiza un análisis utilizando la dependencia de una condición externa cambiante y utilizando el proceso de retroalimentación negativa.

1.2. Avalanchas de actividad en sistemas con retroalimentación negativa

El sistema social de salas de cine se conforma por el número de personas que asisten en cada semana a ver una película específica y por el número de salas de cine que presentan esta misma película específica. Escobar y Castillo (2018) encontraron que la dinámica del número de salas de cine como función del tiempo se podía reproducir si se conoce la dinámica del número de personas como función del tiempo. Debido a que existe un número diferente de personas que asisten a ver una determinada película, la dinámica del número de salas de cine en función del tiempo es diferente para distintas películas.

En la Figura 1.1 se presenta la dinámica del número de salas de cine que presentan la película específica: Harry Potter 7, la dinámica se presenta desde la semana que el número de salas alcanzó su audiencia máxima (semana 0). En este sistema social cada sala de cine representa a los elementos sistema y el número de personas que asisten a ver la película representa la condición externa a la que responde el sistema.

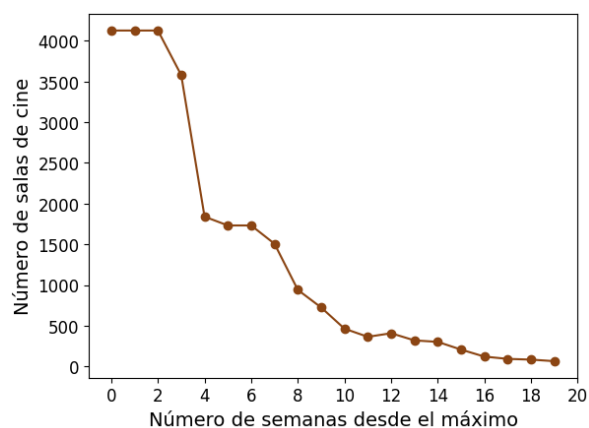


Figura 1.1: Dinámica del número de salas de cine que presentan una determinada película. Datos tomados de www.boxofficemojo.com.

En la figura es posible notar que en el periodo 0 a 3 y 4 a 7 la dinámica del número de salas de cine mantiene una dinámica de cambios relativamente suaves, mientras que en las semanas 3 a 4 y 7 a 10 se presenta una disminución en el número de salas para después regresar a una dinámica de cambios relativamente suaves en las semanas 10 a 19. En esta dinámica se considera que ocurre intermitencia con una transición entre cambios relativamente suaves y un estado con cambios en la dinámica de los elementos sistema.

Para reproducir la dinámica del número de salas de cine como función del tiempo Escobar y Castillo (2018) propusieron un modelo en donde consideraron que el número de personas que asistía a ver una determinada película funcionaba como un factor externo al cual respondía el número de salas de cine.

La dinámica intermitente del sistema se puede explicar considerando que conforme el número de personas se agota, el número de salas disminuye debido a que cada sala necesita un número mínimo de personas para obtener ganancias. Si una determinada sala recibe menos gente de la esperada se pueden presentar pérdidas para las cadenas de cine, por lo que la mejor opción sería cerrar el número de salas.

La tranquilidad relativa seguida por una disminución es explicada por Escobar y Castillo por un proceso de retroalimentación negativa. El sistema cuenta con retroalimentación negativa debido a que, al cerrar una determinada cantidad de salas de cine, el número de personas por cantidad de sala aumentaría, haciendo de esta manera rentables a las demás salas y con ello menos probable que se cierran más salas de cine. El sistema de salas de cine es un ejemplo específico de un sistema con el proceso de retroalimentación negativa. Este proceso es de gran importancia para exponer el modelo que se estudia en esta tesis, por lo que a continuación se explica con más detalle.

De manera general el proceso de retroalimentación negativa es el siguiente:

Primero, el sistema se encuentra en un estado de tranquilidad relativa, es decir, en un estado con cambios relativamente pequeños en la variable del sistema. Después surge un efecto del factor externo (independiente al sistema) que provoca un cambio en la variable interna del sistema. El cambio en la variable interna provoca una oposición indirecta al efecto externo, que a su vez impide un mayor cambio en la variable del sistema. Debido a la oposición del factor externo, el sistema regresa a un estado de tranquilidad relativa. Si continúa el efecto del factor externo sobre el sistema, entonces provocará un cambio en la variable interna del sistema hasta llegar de nuevo al estado de equilibrio.

El proceso de retroalimentación negativa se muestra en el siguiente diagrama. Ver Figura 1.2.

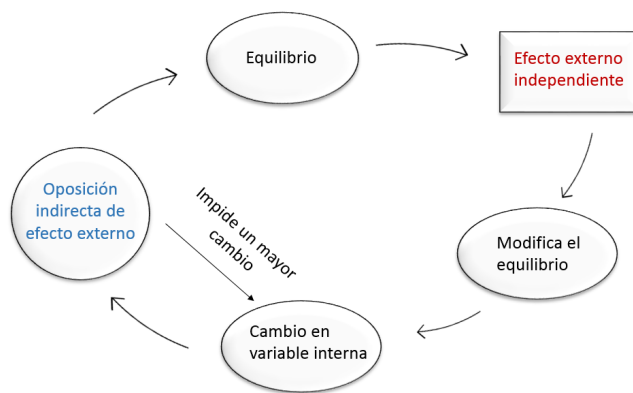


Figura 1.2: Proceso de retroalimentación negativa.

Para explicar mejor a los procesos de retroalimentación negativa, conviene repasar el funcionamiento del llamado "governador centrífugo". Un gobernador es una parte de una máquina por medio de la cual la velocidad de la máquina se mantiene casi uniforme, a pesar de las variaciones en la potencia motriz o la resistencia. La mayoría de los gobernadores dependen de la fuerza centrífuga de una pieza conectada con un eje de la máquina (Maxwell, 1867).

En la Figura 1.3 se muestra el diagrama sobre el gobernador centrífugo.

El mecanismo del gobernador centrífugo es el siguiente: cuando la velocidad de una máquina aumenta sobre un valor deseado, las esferas comienzan a separarse debido a un aumento de la fuerza centrífuga provocado por la velocidad de la máquina. La separación de las esferas provoca el cierre de la válvula, esto disminuye el flujo del fluido de trabajo que alimenta una turbina y hace disminuir la velocidad de la máquina. De otro modo, cuando la velocidad de la máquina decae, las esferas comienzan a descender. Esto ocasiona la apertura de las válvulas y con ello un aumento en la velocidad de la máquina (Umaña, 2019).

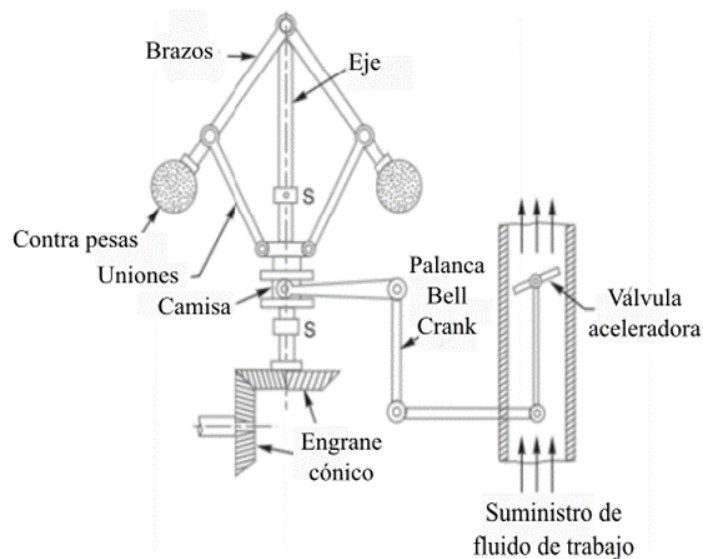


Figura 1.3: Diagrama de un gobernador centrífugo. Tomado de *Estimación del margen de reserva y contingencia para el control de frecuencia en redes eléctricas con mix de generación*, por A. J. Umaña, 2019.

Los pasos del diagrama de la Figura 1.2 se pueden aplicar al ejemplo del gobernador centrífugo, donde el regulador tiene la función de factor externo independiente y el vapor es la oposición indirecta del efecto externo. Ver Figura 1.4.

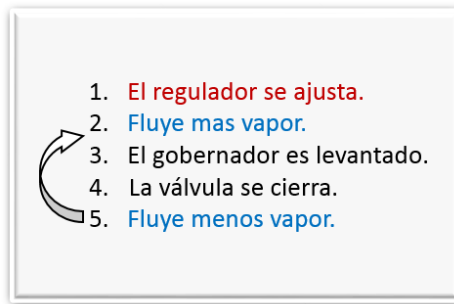


Figura 1.4: Proceso de retroalimentación negativa para el gobernador centrífugo.

El gobernador centrífugo no explica avalanchas ni intermitencia, se presenta para generar un mayor entendimiento del proceso de retroalimentación negativa. Este proceso se puede aplicar a diversos sistemas sociales y naturales, como es el caso de las extinciones en masa de especies. En la siguiente sección se presenta este ejemplo específico junto con ejemplos diversos de sistemas sociales y naturales.

1.3. Retroalimentación negativa en sistemas sociales y naturales

Para el caso del sistema de las extinciones en masa de especies, un meteorito puede tener el rol de factor externo y la muerte de animales debido al hambre es la oposición indirecta a este efecto externo.

Para este sistema existe una analogía muy adecuada entre el gobernador centrífugo y los procesos evolutivos:

La acción de este principio es exactamente igual a la del gobernador centrífugo de la máquina de vapor, que verifica y corrige cualquier irregularidad casi antes de que sea evidente; y de la misma manera, ninguna deficiencia desequilibrada en el reino animal puede alcanzar una magnitud conspicua, porque se haría sentir en el primer paso, al hacer que la existencia sea difícil y que la extinción sea casi segura. (Wallace, 1858)

Los pasos del diagrama de la Figura 1.2 aplicados al ejemplo de los procesos evolutivos se muestra en la Figura 1.5.

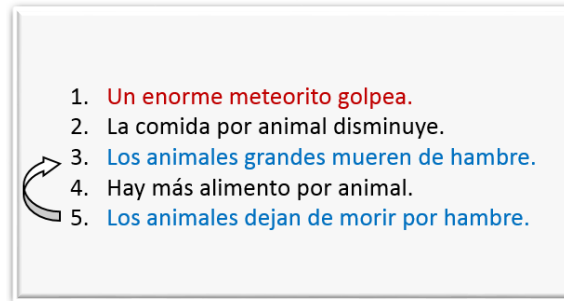


Figura 1.5: Proceso de retroalimentación negativa para las extinciones de especies.

La flecha en el diagrama muestra el paso donde la variable del sistema comienza a disminuir de nuevo debido a que después de un tiempo los efectos del factor externo continúan afectando al sistema.

Para el caso de suministro de salas de cine, la asistencia semanal disminuyente sirve como factor externo y que los cines dejen de presentar la película es la oposición indirecta del efecto externo, se tiene el diagrama de la Figura 1.6.

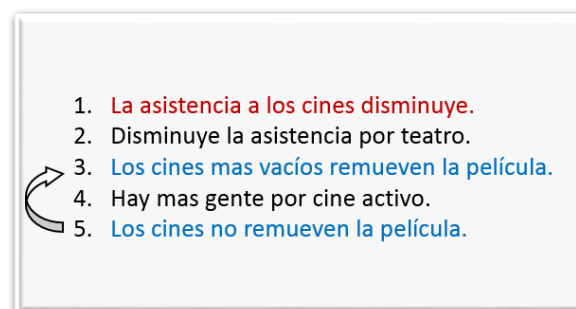


Figura 1.6: Proceso de retroalimentación negativa para las salas de cines.

Por otro lado, el proceso de retroalimentación negativa también se encuentra en el mercado de acciones. Este proceso se encuentra en el precio de acciones de empresas directamente relacionadas con el precio del petróleo. El precio del petróleo

ejerce la función de factor externo y el precio de la acción de la empresa directamente relacionada con el petróleo es la oposición indirecta del efecto externo. Se tiene el siguiente diagrama. Ver Figura 1.7.

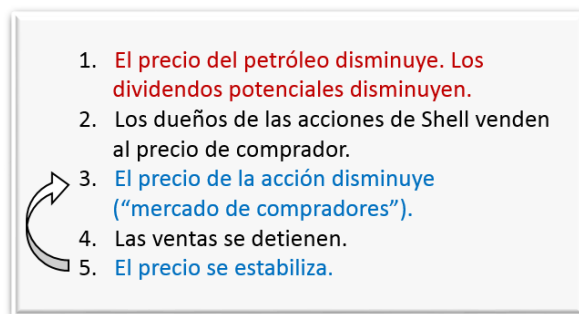


Figura 1.7: Proceso de retroalimentación negativa para el mercado de acciones.

Aunque los sistemas cuentan con un proceso de retroalimentación negativa, la disminución de su variable no se detiene por completo debido a que el factor externo continúa disminuyendo provocando cambios en el sistema que generan más disminuciones.

Para aplicar los conceptos de retroalimentación negativa y dinámica intermitente en sistemas se muestra a continuación un ejemplo de este último caso presentado.

En la Figura 1.8 se presenta el precio de la acción de Shell como función del tiempo. En esta tesis se considera que la dinámica del precio presenta una dinámica intermitente, con cambios relativamente suaves y cambios abruptos. En base a esto se da una posible explicación del proceso.

La dinámica intermitente se intenta explicar considerando al precio del petróleo como factor externo y utilizando el hecho que el precio del petróleo disminuyó en el mismo periodo de tiempo que se presenta la dinámica.

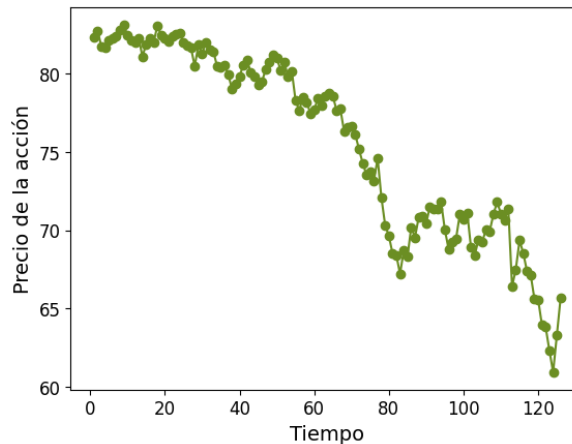


Figura 1.8: Dinámica del precio de la acción Shell en un periodo de tiempo del año 2014. En el eje x se muestran los días desde el 20 de junio del 2014.

Para explicar la dinámica intermitente se supone que los accionistas colocan diferentes umbrales sobre el precio del petróleo. Conforme este disminuya y alcance el precio de la acción los umbrales de los accionistas serán superados. Con cada umbral superado los accionistas venderán las acciones para no tener pérdidas considerables en el futuro.

En este sistema se tiene un proceso de retroalimentación negativa, ya que vender acciones hace que el precio de la acción disminuya y provoca que no sea atractivo vender a un precio inferior al que se compraron las acciones. Al detenerse las ventas se obtiene por momentos una dinámica con tranquilidad relativa, si el precio del petróleo continúa disminuyendo las ventas ocurrirán de nuevo y el proceso se repetirá.

El objetivo de esta tesis es crear un modelo para analizar sistemas con avalanchas de actividad e intermitencia, utilizando umbrales con distintos significados y utilizando factores externos que determinen la dinámica observada.

De manera general se propondrá un modelo de retroalimentación negativa basado en umbrales para contribuir al entendimiento de sistemas complejos que presentan procesos de avalanchas de actividad e intermitencia. Se desarrollará una solución analítica del modelo y se buscará caracterizar al mismo mediante un diagrama de fase. En particular el modelo se utiliza para reproducir las disminuciones que ha tenido el precio de la acción de Shell en función del tiempo en un periodo de tiempo específico.

Con la caracterización del modelo se espera poder distinguir a los distintos regímenes existentes, se espera identificar de manera fácil y rápida al régimen que pertenece un sistema solo conociendo el valor de sus parámetros.

Los objetivos de la tesis se desarrollarán en los siguientes 5 capítulos. Al inicio del capítulo 2 se presenta el modelo propuesto por Escobar y Castillo de retroalimentación negativa para sistemas que dependen de un factor externo en agotamiento, al igual que se presenta la aplicación y la caracterización de ese modelo. Al final del capítulo se presenta el modelo que se desarrolla en esta tesis. El modelo de la tesis se basa en el modelo de Escobar y Castillo, por lo que una comprensión de su modelo ayudará a entender los cambios hechos al mismo.

El capítulo 3 comienza con simulaciones del modelo para reproducir datos de sistemas reales. Después, se presenta un tratamiento analítico del modelo y se presenta la evolución temporal de la variable del sistema como función del factor externo y como función de los parámetros del modelo. En ese mismo capítulo se comparan las simulaciones microscópicas del modelo con simulaciones de la solución analítica y se presentan los diversos regímenes existentes.

En el capítulo 4 se define formalmente a los distintos regímenes, se presenta un método para obtener las fronteras en el espacio de los parámetros donde comienzan los regímenes y se comparan las fronteras obtenidas con simulaciones microscópicas con las fronteras obtenidas con simulaciones teóricas. Después se utiliza la solución analítica para encontrar distintas propiedades que ayuden a fijar una duración total para las simulaciones y para encontrar a las fronteras de una manera rápida. Al final del capítulo se presenta la caracterización del modelo mediante las simulaciones teóricas.

En el capítulo 5 se explora la posibilidad de aplicar el modelo para explicar las variaciones de masa que ha tenido la Antártida desde el año 2002 hasta el año 2023, quedando esto como posible trabajo futuro.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Un nuevo modelo de retroalimentación negativa con umbrales

El modelo que se presenta en esta tesis se basa en el artículo Intermittent dynamics in complex systems driven to depletion (Escobar y Castillo, 2018), en el artículo se presenta un modelo basado en retroalimentación negativa con el objetivo de explicar el comportamiento de sistemas con elementos no interactuantes y dependientes de factores externos en agotamiento. Se le harán cambios al modelo presentado en el artículo para predecir la dinámica de diferentes sistemas naturales. Primero se explicará en que consiste el modelo del artículo, después se presentaran los cambios en el modelo y se presentara una posible aplicación del modelo.

2.1. Modelo con retroalimentación negativa

Para explicar la dinámica de las variables del sistema, el modelo de los autores empieza asignando umbrales de energía a cada agente y distribuyendo un factor externo $q(t)$ entre cada uno de ellos.

Para asignar los umbrales de energía el modelo toma valores al azar de una distribución normal con valor medio μ y varianza σ^2 , estos umbrales se consideran constantes en el tiempo y como propiedades intrínsecas de los elementos. Los umbrales independientes del tiempo se designan como $x_i > 0$ para cada uno de los elementos constituyentes $i = 1, \dots, N$.

Ahora, se define a $q(t)$ como el factor externo que decae conforme pasa el tiempo, esta función representa la energía disponible total generalizada y se distribuye de manera aleatoria entre los $N(t)$ elementos activos en el tiempo t . Debido a que los umbrales son tomados aleatoriamente de una distribución normal, la dinámica de $N(t)$ es estocástica. Si en el tiempo $t+1$ la cantidad total de energía de un elemento está por debajo de ese umbral, dicho elemento es eliminado por completo del sistema. La cantidad de energía que tiene cada elemento no se considera acumulable, en cada iteración cada elemento pierde la energía anterior y le es asignado una nueva cantidad.

Se define a $\sigma_i(t)$ como el estado del elemento i , con $\sigma_i(t) = 0$ para el elemento inactivo (eliminado) o el valor 1 para el elemento activo. Con esto $N(t) = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t)$ devuelve el número de elementos activos en el tiempo t , por lo que la dinámica del sistema sigue la siguiente regla microscópica:

$$\sigma_i(t+1) = \sigma_i(t)\Theta(T_i(t) - x_i) \quad (2.1)$$

Donde $\Theta(x)$ representa la función escalón de Heaviside y $T_i(t)$ es una porción de la señal externa, matemáticamente se tiene que cumplir la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{N(t)} T_i(t) = q(t) \quad (2.2)$$

Ya que la porción de la señal entrante está distribuida uniformemente sobre los elementos activos i , esta debe de tener el valor esperado:

$$T(t) \equiv E[T_i] = \frac{q(t)}{N(t)} \quad (2.3)$$

Debido al agotamiento de los factores los sistemas adquieren una dinámica que puede cambiar de manera intermitente entre comportamientos con gran actividad y comportamientos con tranquilidad relativa, es decir, con cambios relativamente suaves en el sistema.

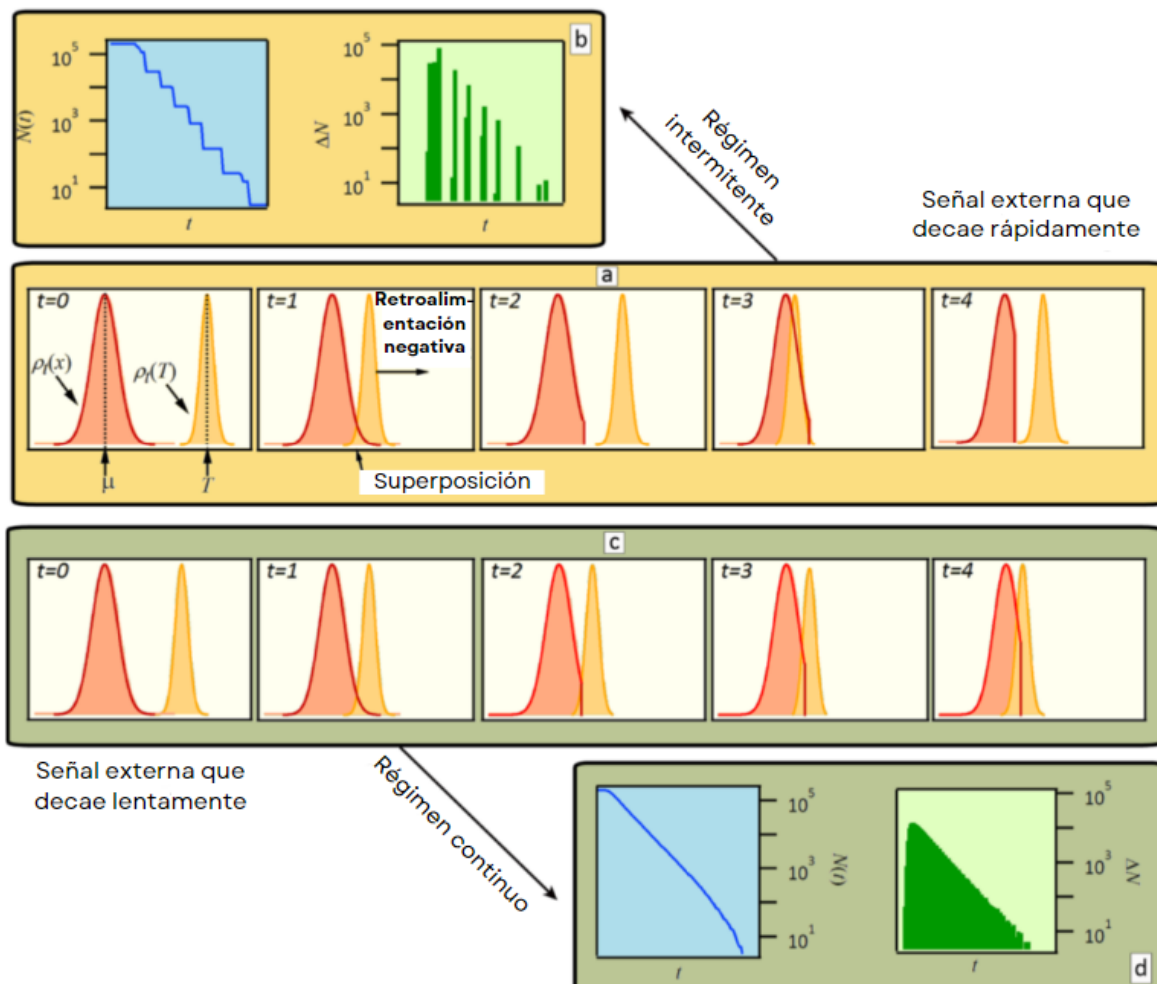


Figura 2.1: Adaptado de "Intermittent dynamics in complex systems driven to depletion."(p. 3), por Escobar, J.V. y Pérez Castillo I, 2018, Scientific Reports **8**, 4825. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-23033-x>

De manera natural el modelo conduce a una retroalimentación negativa que permite reproducir los cambios suaves y los cambios grandes que se producen a medida que el factor externo se va agotando.

Para entender la dinámica que pueden tener los sistemas se presenta en la Figura 2.1 la evolución temporal de la densidad de los umbrales activos y la densidad de las ocupaciones, denotados por $\rho_t(x)$ y $\rho_t(T)$ respectivamente. En la Figura 2.1a se muestra una evolución de ambas densidades para una señal que decae rápidamente, se muestra que en el tiempo $t = 0$ ambas densidades no se superponen. En el siguiente paso de tiempo ($t = 1$) las densidades se superponen, lo que provoca que la fracción superpuesta de umbrales activos se conviertan en inactivos. La disminución de umbrales activos aumentará la ocupación promedio $T(t)$ y hará que la distribución $\rho_t(T)$ vuelva a valores altos. En el tiempo $t = 2$ no habrá superposición alguna, ningún elemento del sistema será eliminado y no habrá actividad en el sistema. Conforme la señal externa siga decayendo el proceso se repetirá, esto se muestra en el tiempo $t = 3$ y $t = 4$. La secuencia de eventos llega a su fin cuando todos los elementos del sistema se conviertan en elementos inactivos. Debido a que en este proceso el sistema paso por momentos de inactividad se denomina que el sistema se encuentra en un régimen intermitente.

En la Figura 2.1c se muestra el proceso cuando la señal externa decae de manera relativamente lenta, en este caso ambas distribuciones se acercan de manera que solo una pequeña porción de $\rho_t(x)$ es removida en cada iteración. Debido a que siempre hay actividad en el sistema se denomina que el sistema está en un régimen continuo. El comportamiento de los sistemas en sus respectivos regímenes se muestra en la Figura 2b y 2d.

En el artículo se probó el modelo en un ejemplo específico comparando simulaciones del modelo con datos reales del número de salas cines que exhiben una película dada como función del tiempo. La idea central es que cada sala de cine necesita un umbral para lograr una ganancia por cada película reproducida. Con el umbral no superado se producirían pérdidas en la cadena de los cines, lo cual no sería conveniente para los dueños de las cadenas.

En la simulación se reprodujo la dinámica de salas de cines de grupos de cines que mostraron una película específica con audiencia semanal disminuyente. Estos datos son empíricos.

Se consideró como factor externo el número de personas $q(t)$ que llenan los $N(t)$ cines en una determinada semana t . Después de la semana $t + 1$ se remueven los cines si la asistencia a cada cine fue menor que su umbral asignado.

Se asumió que la distribución de las salas de cine respecto a los umbrales sigue una distribución normal y se usó el hecho de que la asistencia a los cines es en general muy bien descrita por una exponencial decreciente. También se usó la aproximación de primer orden de ignorar las restricciones geográficas y se distribuyó de manera aleatoria a la cantidad de personas $q(t)$ entre la cantidad de cines disponibles.

Es importante notar que el incremento y la disminución del valor esperado de $T(t)$ es el proceso que da lugar a la retroalimentación negativa. Que haya menos cines provoca que la ocupación por cine aumente, disminuyendo la probabilidad de que los cines estén por debajo de su umbral en la siguiente iteración.

Respecto al factor externo, se optó por una exponencial decayente como señal externa $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, el parámetro τ fue importante debido a que controla la veloci-

dad a la que el factor externo decae. Otro parámetro relevante fue el coeficiente de variación inicial $\kappa \equiv \frac{\sigma}{\mu}$ ya que el cociente permite realizar un diagrama de fase para clasificar los distintos regímenes donde puede estar el sistema.

Una vez definido el factor externo, se realizaron simulaciones en las que se encontraron que el modelo es capaz de reproducir la dinámica de las salas de cines notablemente bien, además se encontró evidencia de que el sistema de los cines está caracterizado por una sola distribución de salas, con lo cual a cada película diferente le corresponden unos mismos umbrales.

Esto implica que basta dar el número inicial de cines $N(0)$ para reproducir toda la serie temporal de las salas de cines $N(t)$ usando como entrada una serie temporal específica para $q(t)$. Por lo que las avalanchas de actividad se pueden predecir a pesar de la naturaleza estocástica de $N(t)$.

Con relación al tratamiento analítico del modelo, se encontró que para una señal externa que decae exponencialmente este está muy bien descrito por la ecuación dinámica de campo medio:

$$N(t+1) = \frac{N(t)}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\mu - T(t)}{\sqrt{2(\sigma^2 + T(t))}} \right) \quad (2.4)$$

Con esta ecuación se encontraron expresiones analíticas para las líneas de transición de un diagrama de fase dinámico correspondiente a la dinámica microscópica del sistema. Las líneas se compararon con un diagrama de fase obtenido con simulaciones Monte Carlo de la misma dinámica microscópica.

2.1.1. Definición de los distintos regímenes en el sistema

En el diagrama de fase dinámico se logró identificar a cuatro regímenes distintos en el espacio de los parámetros $(\kappa, \frac{1}{\tau})$. A continuación, se definen a estos distintos regímenes:

1. El régimen intermitente se denomina a el lugar donde el sistema no es capaz de sincronizar con la señal externa dando como resultado avalanchas de actividad.
2. En el régimen continuo y asíncrono I los parámetros imposibilitan al sistema sincronizar con la señal externa, pero ninguna avalancha se genera si no que suceden cambios de manera suave.
3. En el régimen continuo y síncrono ocurren cambios de manera suave y el sistema es capaz de seguir la señal externa.
4. En el régimen continuo y asíncrono II el sistema no es capaz de sincronizar con la señal externa, pero esta vez debido a restricciones en las condiciones iniciales $T(t) > 0$.

En la Figura 2.2a se muestra el diagrama de fase para el modelo de campo medio, en la Figura 2.2b y 2.2c se muestra el diagrama de fases de intermitencia para el modelo microscópico y para el de campo medio respectivamente. Los cuatro regímenes mencionados en los que se puede encontrar el sistema se muestran en la Figura 2.2a.

Para cuantificar la intermitencia se utilizó el tiempo acumulado normalizado de inactividad, el cual es calculado sumando los intervalos Δt en los que la actividad se mantiene sin cambios. Esta cantidad es 0 cuando el sistema se encuentra en el régimen continuo y no cero cuando se encuentra en el régimen intermitente. Además de este parámetro, se definió el parámetro $z(t) \equiv \frac{\mu - T(t)}{\sqrt{2(\sigma^2 + T(t))}}$ que caracteriza la

habilidad del sistema para seguir el factor externo. Iterando la ecuación dinámica del campo medio (2.4) y siguiendo el valor de los 2 parametros se identificaron los cuatro regimenes en el espacio de los parametros $(\kappa, 1/\tau)$ mostrado en la Figura 2.2a.

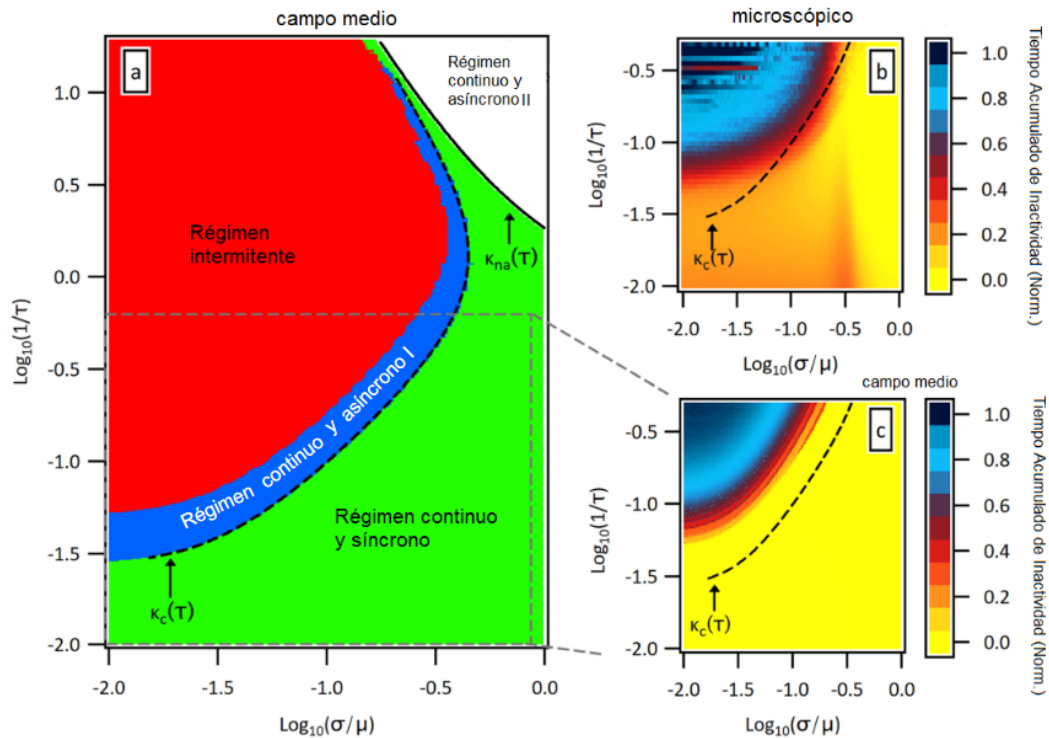


Figura 2.2: Adaptado de "Intermittent dynamics in complex systems driven to depletion."(p. 4), por Escobar, J.V. y Pérez Castillo I, 2018, Scientific Reports **8**, 4825. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-23033-x>

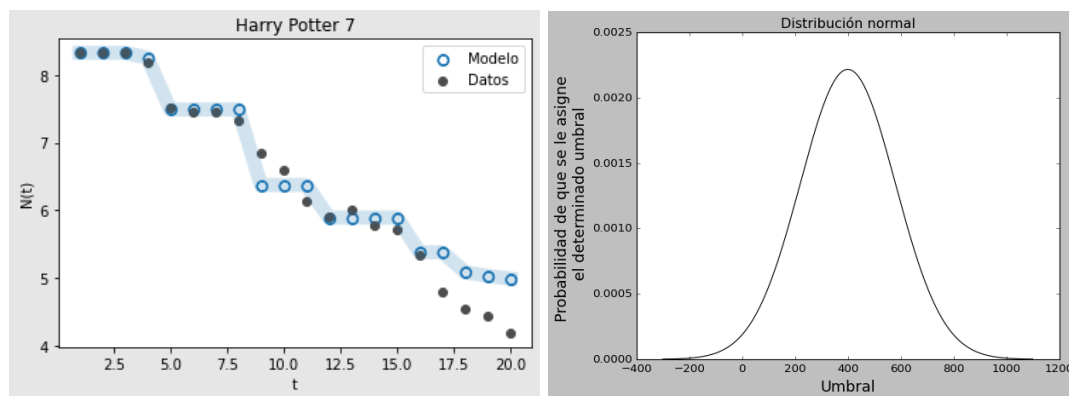
En la Figura 2.2b y 2.2c se muestra el tiempo acumulado de inactividad calculado con el campo medio y con el modelo microscopico en la cual es posible hacer una comparacion entre ambos. Cabe resaltar que en la aproximacion de campo medio se muestra una linea de bifurcacion $\kappa_{na}(\tau)$ que separa el regimen sincrono del asincrono *II* y en todas las gráficas se muestra una linea de bifurcacion $\kappa_c(\tau)$ que separa el regimen asincrono del regimen sincrono.

La obtencion de la lineas de bifurcacion no se profundiza debido a que no toman un papel relevante para el modelo de la tesis (presentado en la seccion 4 de este

capítulo). En esta sección se busca dar una noción sobre los regímenes en donde puede estar un sistema, ya que en el capítulo 4 se buscará el diagrama de fases para el modelo de la tesis mediante un método diferente.

2.2. Simulaciones: Reproduciendo los resultados del artículo

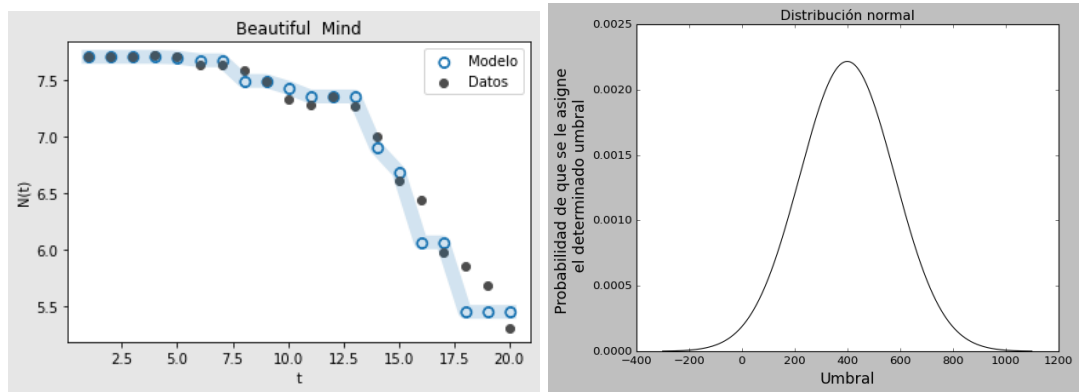
Como un ejercicio sobre este modelo, se llevaron a cabo simulaciones con los mismos parámetros utilizados en el artículo ($\mu = 400$, $\sigma = 0.45\mu$). Se siguieron los mismos pasos con las mismas suposiciones para reproducir los resultados de 2 de las 4 películas presentadas como ejemplo. Estas 2 películas fueron Harry Potter 7 y Beautiful Mind. Las gráficas se muestran a continuación:



(a) Gráfica de los datos reales y del modelo con escala logarítmica en el eje Y. (b) Distribución normal utilizada para tomar los umbrales del modelo.

Figura 2.3: Gráficas para la película Harry Potter 7

En la Figura 2.3 se muestran las gráficas para la película Harry Potter 7 y en la Figura 2.4 las gráficas para la película Beautiful Mind. En Figura 2.3a y Figura 2.4a se muestran el número de salas $N(t)$ contra el tiempo t , en estas se compara a los datos reales y al modelo. En Figura 2.3b y Figura 2.4b se muestra la gráfica de la distribución normal utilizada para tomar los umbrales del modelo. Se logró reproducir los resultados obtenidos en el artículo con buena exactitud.



(a) Gráfica de los datos reales y del modelo con escala logarítmica en el eje Y. (b) Distribución normal utilizada para tomar los umbrales del modelo.

Figura 2.4: Gráficas para la película Beautiful Mind

2.3. Un nuevo modelo y una posible aplicación

El modelo de la tesis se presenta con un ejemplo y después se presenta de manera general, la posible aplicación del modelo es explicar los comportamientos de los precios de acciones correspondientes a empresas de petróleo. Como se mostró en la introducción, los precios de dichas acciones tienen en algunos momentos drásticas caídas donde es posible observar las mismas avalanchas de actividad que se presentaron en el artículo anterior, pero las cuales no son posibles de explicar con el modelo original.

Para el modelo de la tesis se usará la notación P_t para la variable del sistema estudiada (el precio de la acción en el ejemplo anterior) y q_t para el factor externo, la notación se usará para distinguir el modelo de la tesis del modelo de Escobar y Castillo.

Para aplicar el modelo se puede suponer que los inversionistas siguen la estrategia de colocar umbrales en ciertos precios de la acción de manera que si el precio de la acción baja de su umbral establecido entonces venderán todas sus acciones en posesión. El momento para vender las acciones depende del precio actual de

la acción, pero también de los dividendos que deja la acción. Es decir, hay un balance entre lo que ganarán por los dividendos y lo que ganarían por vender la acción.

Para el caso de las acciones de las empresas directamente relacionados con petróleo como Shell, el precio del petróleo nos sirve como factor externo con el que los accionistas determinan umbrales sobre los precios, debido a que el precio del petróleo afecta de manera directa a este tipo de empresas.

Se puede suponer que los accionistas que compran las acciones vendidas se quedan con ellas por tiempo indefinido. Debido a que los umbrales dependen del factor externo, estos dependerán del tiempo y no serán fijos, aunque todos los umbrales se moverán juntos manteniendo la distancia entre ellos constante en el tiempo.

En la Figura 2.5 se muestra una simulación del modelo para 2 pasos de tiempo. En este ejemplo se tomó como valor inicial del precio de la acción a $P_0 = 100$. Para realizar la simulación primero se tomaron aleatoriamente $N = 100000$ valores de una distribución normal con valor medio $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 16$, después a cada valor se les añadió el factor externo $q_t\beta = q_0\beta e^{-t/\gamma}$ donde $\beta = 1.5$, $q_0 = 85$ y $\gamma = 25$. Añadiendo el factor externo se tiene una distribución normal con valor medio $\mu = 127.5$ y la misma varianza que la original. Nótese que se utilizó a γ en la exponencial decaiente para distinguir el modelo de la tesis del modelo de Escobar y Castillo.

Conforme avance el número de iteraciones el factor externo disminuirá debido a que es una exponencial decreciente, después de 4 iteraciones una cantidad de la distribución de umbrales toma un valor menor que el precio de la acción, por lo que estos umbrales se eliminan y se le resta al precio de la acción la cantidad $n_4\Delta P$, en donde n_4 es la cantidad de umbrales que se eliminan y ΔP es el valor inicial del precio de la acción dividido por la cantidad total de umbrales N . El número 4 en la variable n_4 hace referencia a la iteración 4 en la que se encuentra la simulación. En la

Figura 2.5a se muestra el precio de la acción y la distribución de umbrales después de este proceso, en la Figura 2.5b y 2.5c se muestra el proceso detallado de lo que ocurre en la iteración 5.

En la Figura 2.5b se muestra el precio de la acción y la distribución de umbrales antes de que los umbrales sean eliminados. En la Figura 2.5c se muestra la distribución de umbrales en la iteración 5 después de que los umbrales con valor menor que el valor del precio de la acción sean eliminados, también se muestra el precio de la acción después de que se le restara la cantidad $n_5 \Delta P$, donde n_5 es el número de umbrales eliminados. Debido a que en esta iteración el precio de la acción y la distribución de umbrales se separan, el precio de la acción se estabiliza por un momento. Conforme continúen las iteraciones la distribución de umbrales seguirá interactuando con P_t , el precio de la acción al instante t , y el proceso se repetirá.

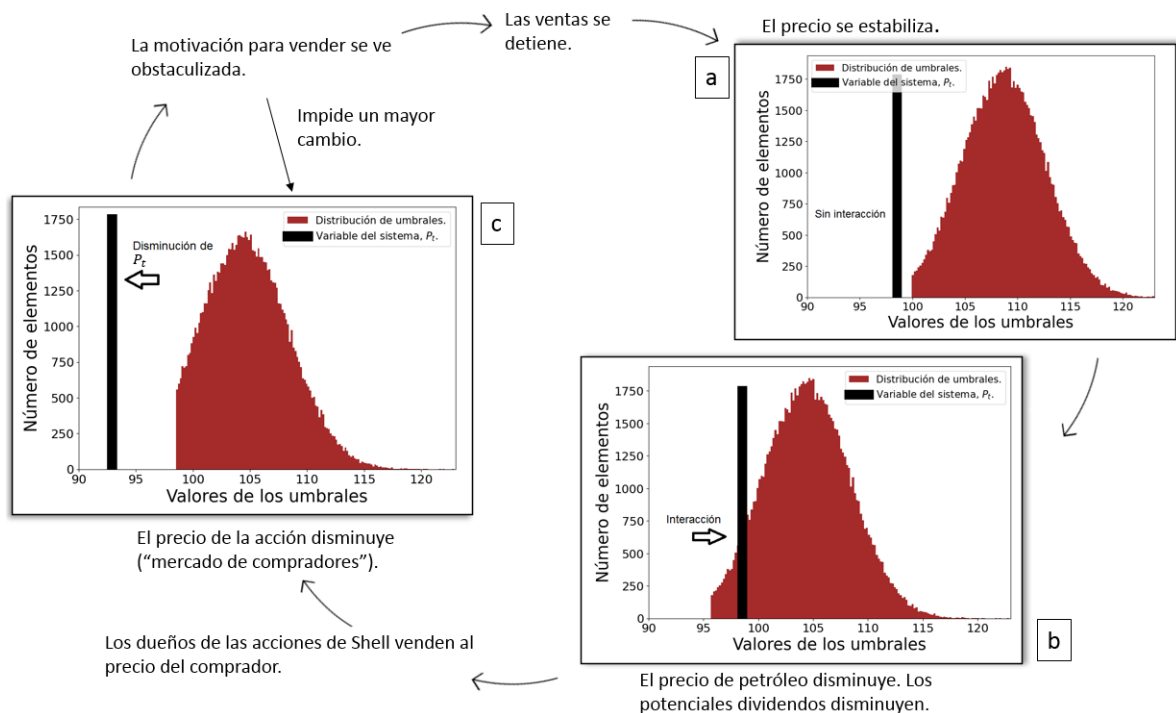


Figura 2.5: Diagrama de retroalimentación negativa para la acción de Shell.

Una diferencia que tiene el modelo de esta tesis con el modelo de Escobar y Castillo es que en este último los umbrales eran constantes en el tiempo debido a que se distribuía el factor externo sobre las salas de cine. En este modelo no se distribuye el factor externo, si no que los umbrales de los agentes se colocan sobre él, esto hace que los umbrales no sean constantes en el tiempo.

En los siguientes capítulos se mostrará que el parámetro μ , σ y el valor inicial de la variable del sistema P_0 determinan el valor final de la variable del sistema. Esta variable depende del sistema en cuestión, en este ejemplo la variable del sistema que se estudia es el precio de la acción como función del tiempo. Esta es otra diferencia que tiene este modelo con el anterior, donde el valor de la variable siempre llegaba a cero.

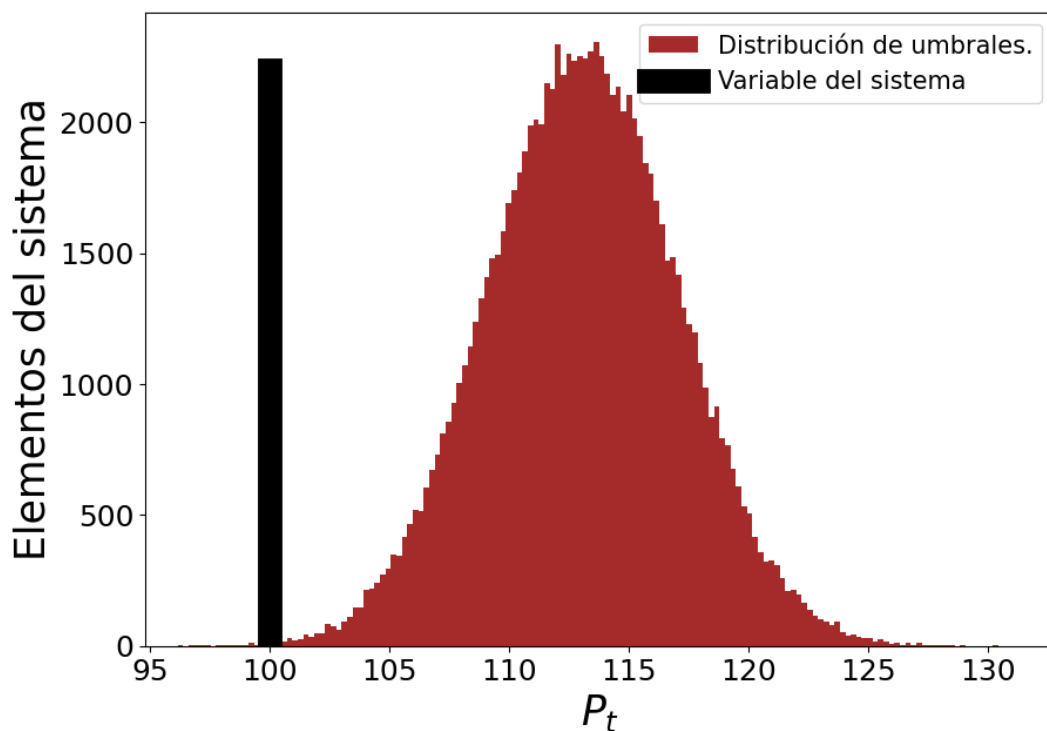


Figura 2.6: Distribución de los accionistas sobre los umbrales siguiendo una distribución normal. La distribución se encuentra alrededor del valor $q(3)\beta = 113$.

Se puede rescatar del caso anterior la suposición de que la distribución de los agentes respecto a los umbrales sigue una distribución normal y que es un sistema de retroalimentación negativa asociado a una variable que decrece monótonamente con el tiempo. Ver Figura 2.6

En la introducción se mencionó que este sistema presenta la característica de retroalimentación negativa. Esto debido a que la venta de acciones disminuye el precio, con lo que disminuye la tendencia de que se sigan vendiendo acciones. El proceso se puede resumir de la siguiente manera:

1. Hay un precio del petróleo q_t y un precio de la acción.
2. Los accionistas determinan su umbral.
3. Venden aquellos que quedan por debajo del precio de la acción.
4. El precio de la acción disminuye.

El factor externo (precio de petróleo) no disminuye de manera indefinida, llega un momento en el que el precio alcanza un mínimo. En ese momento es cuando el modelo finaliza.

2.3.1. El modelo de manera general

En esta subsección se presenta al modelo de la tesis de manera general con el objetivo de explicar la dinámica de diferentes sistemas naturales y sociales que el modelo de Escobar y Castillo no puede explicar.

El modelo se construye para sistemas con agentes que tomen umbrales de una distribución normal que depende de un factor externo. Conforme el valor del factor externo cambie en el tiempo, la distribución de los umbrales se moverá con él. Si el

factor externo es monótonamente decreciente entonces llegará un punto en el tiempo en el cual una fracción de la distribución de umbrales tendrá un valor menor que la variable P_t . Para que el modelo sea aplicable a un sistema entonces cada que un umbral tenga un valor menor que la variable P_t los agentes del sistema deben provocar una actividad que disminuya el valor de la variable del sistema estudiada y con ello desapareciendo en el proceso. En el ejemplo anterior esta actividad corresponde al momento en el que los accionistas venden sus acciones con umbral menor que el valor del precio de la acción.

Para explicar la dinámica de la variable del sistema, primero, el modelo define a N como el número total de agentes que tiene un determinado sistema, después el modelo asigna umbrales a los agentes de manera que la distribución de agentes sobre los umbrales siga una distribución gaussiana con valor medio μ y varianza σ^2 .

A la distribución gaussiana se le añade en cada iteración t el factor $q_t\beta$, de manera que se obtiene una distribución de umbrales con valor medio $\mu + q_t\beta$ y varianza σ^2 . Esto nos da la dependencia de los umbrales con el tiempo, el factor β es el encargado de reducir o incrementar el impacto del factor externo en los umbrales.

El modelo toma en cuenta que, con el factor externo en agotamiento, los umbrales de la distribución disminuirán mientras pase el tiempo. Esto debido a que en una siguiente iteración $t + 1$ se añadirá a la distribución (con valor medio μ) el factor $q_{t+1}\beta$ el cual es menor que el factor $q_t\beta$. Por lo que en la iteración $t + 1$ la distribución de umbrales tendrá valor medio $\mu + q_{t+1}\beta$ y varianza σ^2 . Llegará un punto donde la distribución de umbrales alcance a la variable del sistema y después de una iteración el valor de esta será mayor que el valor de una parte de la distribución. Cada agente va a provocar una actividad si el valor de su umbral es menor que el valor P_t .

Es importante mencionar que el valor que se agrega a la distribución de umbrales con el factor $q_t\beta$ puede alejar demasiado a la variable P_t de la distribución de umbrales, de manera que necesitan pasar más de 10 iteraciones para que ambos interactúen. Es por esto por lo que se define a t_i como la iteración en la cual en la siguiente iteración $t_i + 1$ la variable P_t será mayor que el valor mínimo de la distribución de umbrales.

Ahora, la actividad de los agentes provocará una disminución sobre la variable del sistema de valor ΔP por cada umbral de agente superado por la variable P_t . Para obtener el nuevo valor de la variable del sistema, a esta se resta el número de umbrales superados n_{t_i+1} multiplicado por la cantidad ΔP :

$$P_{t_i+1} = P_{t_i} - n_{t_i+1}\Delta P \quad (2.5)$$

Donde el valor t_i , es el tiempo inicial de las iteraciones.

El valor de ΔP se toma de manera que cumpla con la relación $\Delta P N = P_{t_i}$. El uso de esta relación implica que el momento cuando todos los umbrales sean superados por P_t será el momento cuando el valor de P_t sea 0.

En este momento cabe resaltar que la suposición de que una vez superado el umbral de un agente este no tiene un papel en el resto de la simulación provoca que la variable P_t obtenida con el modelo sea una función monótonamente decreciente, por lo que el modelo no toma en cuenta los posibles aumentos que pueda tener P_t .

Después de cierto tiempo los umbrales volverán a disminuir hasta alcanzar al nuevo valor de la variable del sistema y el proceso se repetirá de nuevo. El proceso se dejará de repetir hasta que el factor externo haya alcanzado su mínimo, en ese momento es cuando la simulación finaliza.

Capítulo 3

Validación y solución analítica

En este capítulo se presenta la prueba del modelo mediante la simulación de la posible aplicación mostrada al final del capítulo anterior. En la sección 3.2 se presenta los pasos para obtener una solución analítica del modelo y en la sección 3.3 se presenta la validación de la solución analítica con simulaciones microscópicas.

3.1. Simulación del nuevo modelo

Para la simulación del nuevo modelo se utilizaron datos del precio del petróleo del año 2014, con esto se logró reproducir para el mismo periodo de tiempo a datos del precio de la acción Shell. Ver Figura 3.1

Los valores de los umbrales se obtuvieron de manera que su distribución fuera una distribución normal con parámetros $\mu = 32$ y $\sigma = 4.2$. El número de los accionistas en el sistema se eligió de manera arbitraria como $N = 20000$.

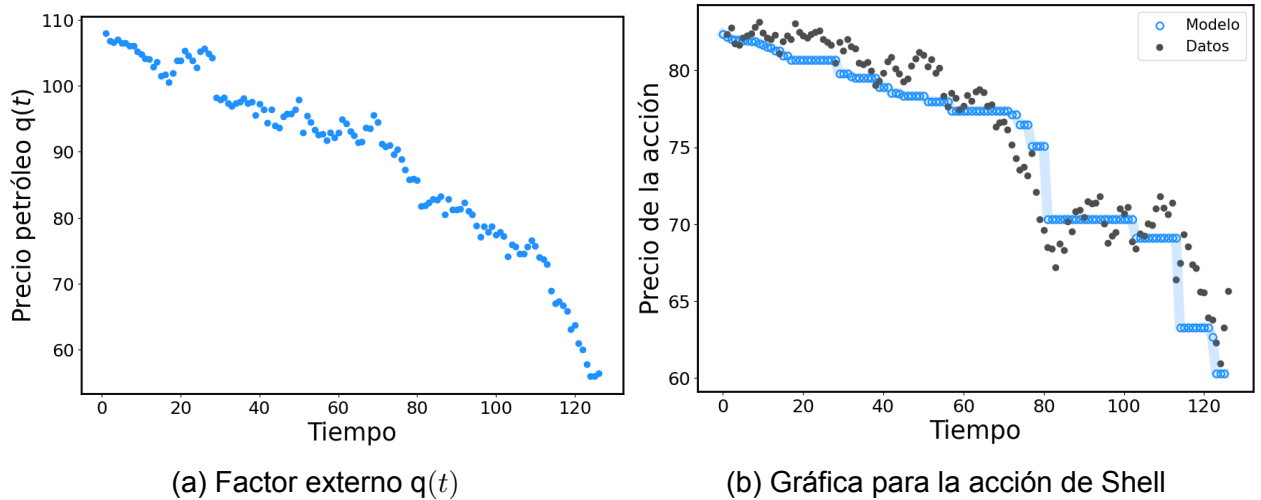


Figura 3.1: Simulación del nuevo modelo. Como parámetros de la distribución normal se utilizó a $\mu = 32$ y $\sigma = 4.2$.

En la anterior figura es posible notar que el modelo relaciona a ambas funciones de manera que se puede reproducir el precio de la acción solo con el factor externo. Se puede observar una dinámica intermitente en la simulación del modelo, con momentos de drásticas caídas y momentos de inactividad. El modelo es capaz de explicar la dinámica intermitente del precio de la acción debido a el proceso de retroalimentación negativa que presenta.

3.2. Solución analítica

Después de comparar al modelo propuesto con datos reales se le dio un tratamiento analítico al modelo y se encontró la evolución temporal de la variable del sistema como función del factor externo q_t , el parámetro σ y el parámetro μ .

Para esto, primero se definió a N como el número total de umbrales que existen en un determinado sistema, así mismo se definió a α como los valores de los umbrales que cada agente toma al azar de una distribución normal con valor medio μ y varianza σ^2 .

En la distribución normal se supuso que el valor mínimo del dominio era el valor medio menos 4 veces la desviación estándar, por lo que el valor mínimo de los umbrales tomados de esta distribución se define por α' , el cual está dado por la aproximación:

$$\alpha' \approx \mu - 4\sigma \quad (3.1)$$

Una aproximación válida para N grande.

Sumando al umbral el factor externo q_t multiplicado por β se aproximó el valor mínimo de los umbrales que dependen del tiempo, este valor se define por u'_t y su valor toma la siguiente aproximación:

$$u'_t \approx \alpha' + q_t\beta \quad (3.2)$$

Se define a P_{t_i} como el valor de la variable del sistema en el tiempo inicial t_i . El tiempo inicial t_i se define como la iteración en la cual en la siguiente iteración $t_i + 1$ la variable P_t es mayor que el valor mínimo de la distribución de umbrales. Para obtener el tiempo t_i se igualó a u'_t (la aproximación del valor mínimo de los umbrales que dependen del tiempo) con el valor inicial P_{t_i} :

$$\alpha' + q_{t_i}\beta = P_{t_i} \quad (3.3)$$

Para resolver la ecuación anterior, se supuso que el factor externo es una exponencial decreciente $q_{t_i} = Ce^{-t_i/\gamma}$. Se obtuvo la siguiente igualdad:

$$\alpha' + C\beta e^{-t_i/\gamma} = P_{t_i} \quad (3.4)$$

Se está suponiendo que el factor externo decrece muy rápidamente y que el sistema se ajusta a esos cambios, a veces lo hace de manera "suave" y a veces lo hace de

manera abrupta. Esto es lo que precisamente da lugar a la intermitencia.

Resolviendo la ecuación (3.4) para el tiempo t_i , se encontró el tiempo donde la variable del sistema es igual al valor mínimo de los umbrales:

$$\Leftrightarrow C\beta e^{-t_i/\gamma} = P_{t_i} - \alpha' \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow e^{-t_i/\gamma} = \frac{P_{t_i} - \alpha'}{C\beta} \quad (3.6)$$

$$\Leftrightarrow t_i = -\gamma \ln \frac{P_{t_i} - \alpha'}{C\beta} \quad (3.7)$$

Este tiempo se tomó como el tiempo inicial, debido a que en la siguiente iteración el valor mínimo de los umbrales será superado.

Cada agente con umbral superado por el valor P_{t_i} le restará a la variable del sistema la cantidad ΔP y los umbrales superados se eliminan de la distribución de umbrales. Para obtener el nuevo valor de la variable del sistema, se le resta el número de umbrales superados n_{t_i+1} multiplicado por la cantidad ΔP :

$$P_{t_i+1} = P_{t_i+0} - n_{t_i+1}\Delta P \quad (3.8)$$

Este número de umbrales superados se puede aproximar con la multiplicación del número total de umbrales N por el valor de la integral de la función de densidad de la distribución gaussiana. Ver Figura 2.6.

$$n_{t_i+1} \approx N \int_{u'_{t_i+1}}^{P_{t_i}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu-q_{t_i+1}\beta)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.9)$$

En la integral anterior se integra sobre los valores que pueden tomar los umbrales, desde el valor mínimo de los umbrales dependientes del tiempo u' en el tiempo $t_i + 1$ hasta el valor donde llega la variable del sistema en el tiempo t_i .

El valor de u'_{t_i+1} se obtiene sustituyendo el tiempo $t_i + 1$ en la aproximación (3.2):

$$u'_{t_i+1} \approx \mu - 4\sigma + q_{t_i+1}\beta \quad (3.10)$$

Sustituyendo la aproximación anterior en la aproximación de n_{t_i+1} se obtuvo:

$$n_{t_i+1} \approx N \int_{\mu-4\sigma+q_{t_i+1}\beta}^{P_{t_i}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu-q_{t_i+1}\beta)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.11)$$

Con el cambio de variable $w = x - \mu - q_{t_i+1}\beta$ la integral tomó la siguiente forma:

$$n_{t_i+1} \approx N \int_{-4\sigma}^{P_{t_i}-\mu-q_{t_i+1}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.12)$$

Nótese que cuando se eliminan los umbrales, el nuevo valor mínimo de los umbrales es igual a P_{t_i} en el tiempo $t_i + 1$, este nuevo valor mínimo de los umbrales se define por u''_{t_i+1} :

$$u''_{t_i+1} = P_{t_i} \quad (3.13)$$

Y debido al agotamiento del factor externo en $t_i + 2$ se tiene:

$$u''_{t_i+2} = P_{t_i} - q_{t_i+1}\beta + q_{t_i+2}\beta < P_{t_i} \quad (3.14)$$

En el tiempo $t_i + 2$ se eliminarán los umbrales superados y la variable del sistema tomara el siguiente valor:

$$P_{t_i+2} = P_{t_i+1} - n_{t_i+2}\Delta P \quad (3.15)$$

Donde n_{t_i+2} esta dado por:

$$n_{t_i+2} \approx N \int_{u''_{t_i+2}}^{P_{t_i+1}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu-q_2\beta)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.16)$$

Se sustituyó a u''_{t_i+2} en la aproximación anterior:

$$n_{t_i+2} \approx N \int_{P_{t_i}-q_{t_i+1}\beta+q_{t_i+2}\beta}^{P_{t_i+1}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu-q_{t_i+2}\beta)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.17)$$

Y se hizo el cambio de variable $w = x - \mu - q_{t_i+2}\beta$:

$$n_{t_i+2} \approx N \int_{P_{t_i}-\mu-q_{t_i+1}\beta}^{P_{t_i+1}-\mu-q_{t_i+2}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.18)$$

Se notó que el nuevo valor mínimo de los umbrales era:

$$u'''_{t_i+2} = P_{t_i+1} \quad (3.19)$$

Y que en $t_i + 3$ este nuevo valor mínimo disminuye conforme la siguiente relación:

$$u'''_{t_i+3} = P_{t_i+1} - q_{t_i+2}\beta + q_{t_i+3}\beta < P_{t_i+1} \quad (3.20)$$

Por lo que en ese tiempo el precio de la acción toma el siguiente valor:

$$P_{t_i+3} = P_{t_i+2} - n_{t_i+3}\Delta P \quad (3.21)$$

Donde se cumple la siguiente aproximación para n_{t_i+3} :

$$n_{t_i+3} \approx N \int_{u'''_{t_i+3}}^{P_{t_i+2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu-q_{t_i+3}\beta)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.22)$$

Sustituyendo la relación (3.20) en la aproximación (3.22) y con el cambio de variable $w = x - \mu - q_{t_i+3}\beta$ se obtuvo:

$$n_{t_i+3} \approx N \int_{P_{t_i+1}-\mu-q_{t_i+2}\beta}^{P_{t_i+2}-\mu-q_{t_i+3}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.23)$$

Es posible observar que de manera general para $t \geq 1$ se tiene:

$$P_{t_i+t} = P_{t_i+t-1} - n_{t_i+t} \Delta P \quad (3.24)$$

Por lo que la variable del sistema depende del valor de su anterior iteración, de la cantidad que cada agente del sistema le resta a la variable y de la cantidad de umbrales que son superados.

Para $t \geq 2$, esta cantidad de umbrales superados es aproximadamente:

$$n_{t_i+t} \approx N \int_{P_{t_i+t-2}-\mu-q_{t_i+t-1}\beta}^{P_{t_i+t-1}-\mu-q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.25)$$

Con la siguiente aproximación para $t = 1$:

$$n_{t_i+1} \approx N \int_{-4\sigma}^{P_{t_i}-\mu-q_{t_i+1}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.26)$$

Con esto se tienen de manera general:

$$P_{t_i+t} \approx P_{t_i+t-1} - \Delta P N \int_{P_{t_i+t-2}-\mu-q_{t_i+t-1}\beta}^{P_{t_i+t-1}-\mu-q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.27)$$

La aproximación general se puede simplificar utilizando el hecho de que es una ecuación de tipo recursiva y utilizando propiedades de las integrales.

Para esto nótese que la aproximación (3.27) puede tomar la forma:

$$P_{t_i+t-1} \approx P_{t_i+t-2} - \Delta P N \int_{P_{t_i+t-3}-\mu-q_{t_i+t-2}\beta}^{P_{t_i+t-2}-\mu-q_{t_i+t-1}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.28)$$

Si se sustituye en la misma aproximación (3.27) se obtiene:

$$P_{t_i+t} \approx P_{t_i+t-2} - \Delta P N \int_{P_{t_i+t-3}-\mu-q_{t_i+t-2}\beta}^{P_{t_i+t-2}-\mu-q_{t_i+t-1}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw - \Delta P N \int_{P_{t_i+t-2}-\mu-q_{t_i+t-1}\beta}^{P_{t_i+t-1}-\mu-q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw$$

$$\begin{aligned}
&\approx P_{t_i+t-2} - \Delta PN \left(\int_{P_{t_i+t-3} - \mu - q_{t_i+t-2}\beta}^{P_{t_i+t-2} - \mu - q_{t_i+t-1}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw + \int_{P_{t_i+t-2} - \mu - q_{t_i+t-1}\beta}^{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \right) \\
&\approx P_{t_i+t-2} - \Delta PN \int_{P_{t_i+t-3} - \mu - q_{t_i+t-2}\beta}^{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso se llega a:

$$P_{t_i+t} \approx P_{t_i} - \Delta PN \int_{-4\sigma}^{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw \quad (3.30)$$

Ya que el factor ΔPN tiene que ser una constante se hizo la suposición $\Delta PN = P_{t_i}$, con esto el termino común P_{t_i} se puede factorizar:

$$P_{t_i+t} \approx P_{t_i} - P_{t_i} \int_{-4\sigma}^{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \quad (3.31)$$

$$\Leftrightarrow P_{t_i+t} \approx P_{t_i} \left(1 - \int_{-4\sigma}^{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \right) \quad (3.32)$$

La igualdad $\Delta PN = P_{t_i}$ supone que todos los agentes del sistema siguen la estrategia de colocar umbrales en los valores que puede tomar la variable del sistema. Además, si se superan los umbrales de todos los agentes el valor de la variable del sistema llegara a cero.

En los sistemas reales no es necesario que todos los agentes cumplan con la condición de tener umbrales, bastaría que solo una gran cantidad de agentes la cumplan para lograr predecir la dinámica del sistema con el modelo aquí planteado.

Ahora, nótese que en la aproximación (3.32) se puede cambiar el límite inferior de la integral y seguir teniendo la misma aproximación:

$$P_{t_i+t} \approx P_{t_i} \left(1 - \int_{-\infty}^{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \right) \quad (3.33)$$

La integral anterior es igual a la integral de la identidad:

$$\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^q e^{-cx^2} dx = \frac{1}{2}(\operatorname{erf}(q\sqrt{c}) + 1) \quad (3.34)$$

Por lo que la integral de (3.33) se puede reescribir utilizando las propiedades de las integrales, obteniendo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{P_{t_i+t-1}-\mu-q_{t_i+t}\beta} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}} \right) + 1 \right) \quad (3.35)$$

Se sustituyó la relación (3.35) en la aproximación (3.33) y se obtuvo lo siguiente:

$$P_{t_i+t} \approx P_{t_i} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) + 1 \right) \right) \quad (3.36)$$

Simplificando el lado derecho se tiene:

$$\begin{aligned} P_{t_i+t} &\approx P_{t_i} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx \frac{P_{t_i}}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Con la propiedad de la función error:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad (3.38)$$

Se llegó a la siguiente forma simplificada:

$$P_{t_i+t} \approx \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] \quad (3.39)$$

Es posible notar que la evolución temporal de la variable del sistema es una ecuación de tipo recursiva. En el modelo de Escobar y Castillo (2018) se obtuvo una ecuación similar, solo que en ella la variable recursiva se encontraba fuera de la función error complementaria, lo que permitió encontrar de manera analítica las condiciones para que el modelo se sincronice con una señal externa de la forma $Ce^{-t/\tau}$.

En nuestro caso la variable recursiva se encuentra dentro de la función error complementaria, lo cual provoca que no se pueda encontrar de la misma manera las condiciones para que el modelo se sincronice con la señal externa.

Esta diferencia provoca que no se pueda desarrollar la caracterización del modelo siguiendo el mismo método. La caracterización de este modelo se abarca a profundidad en la sección 4.4.

Para considerar que los agentes son eliminados después de haber sido superado su umbral falta agregar la condición de que (en la iteración $t_i + t$) el término $\frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - qt_i\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right]$ sea menor que el valor de la variable del sistema de la iteración anterior, cuando no ocurra se deberá tomar este valor anterior de la variable del sistema como el valor de la siguiente iteración. Con esto la ecuación toma la forma:

$$P_{t_i+t} = \begin{cases} \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - qt_i\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] & \text{si } P_{t_i+t-1} > \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - qt_i\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] \\ P_{t_i+t-1} & \text{si } P_{t_i+t-1} \leq \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - qt_i\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] \end{cases} \quad (3.40)$$

Con esta condición la variable del sistema se convierte en una función decreciente. Ya que este modelo no toma en cuenta los posibles aumentos que puedan ocurrir en la dinámica.

3.3. Validación de la solución analítica con simulaciones microscópicas

Una vez obtenida la solución analítica que describe el comportamiento del modelo, se seleccionaron diversos valores de los parámetros y se realizaron simulaciones utilizando la solución analítica. Estas simulaciones teóricas se compararon con simulaciones microscópicas del sistema.

En las simulaciones microscópicas se simuló paso por paso el proceso descrito del modelo. Para ambas simulaciones se fijó el parámetro β de manera que las simulaciones comenzaban en el tiempo t_i , ya que en este tiempo la distribución de umbrales comienza a interactuar con la variable del sistema.

La comparación de ambas simulaciones se hizo con el fin de observar si ambas concordaban. Además, con las simulaciones que se obtuvo una idea general de los distintos regímenes que existen en el modelo.

Se realizaron 4 comparaciones en las que se asignaron diferentes valores específicos a los parámetros del sistema. Se buscó que los valores de los parámetros estuvieran dispersos sobre el espacio de parámetros para ver si en las diferentes condiciones ambas simulaciones concordaban, para ello se buscó que en ambas simulaciones se presentaran los mismos cambios relativamente suaves y los cambios abruptos.

En cada simulación se consideró un factor externo $q_t = q_0 e^{-\frac{t}{\gamma}}$, ya que se espera que una señal monótonamente decreciente presente en ocasiones cambios abruptos en la dinámica del sistema. Se utilizó a γ en la exponencial decadente para distinguir el modelo de la tesis del modelo de Escobar y Castillo. Se encontró 2 regímenes

generales en los que podía estar el sistema. Estos regímenes se definen como: régimen continuo y régimen intermitente. En el siguiente capítulo, el régimen continuo se clasifica en 2, el régimen continuo y sincrónico y el régimen continuo y asincrónico.

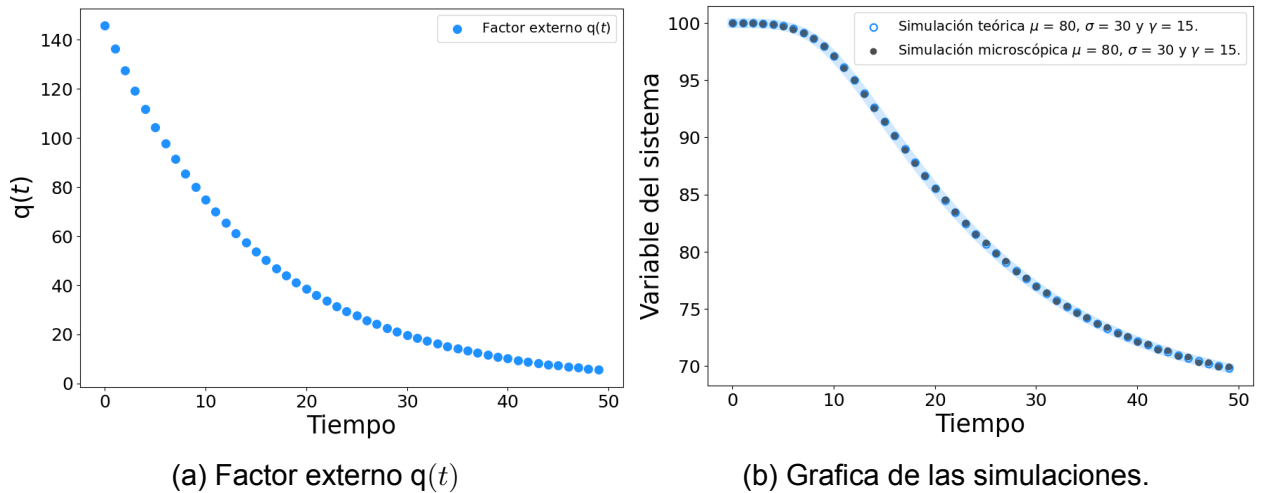


Figura 3.2: Primera comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.

La comparación de las simulaciones comienza en el régimen continuo. En la Figura 3.2, se presenta a la izquierda la gráfica del factor externo utilizado. A la derecha se presenta tanto la simulación teórica como la microscópica obtenida con dicho factor externo. Debido a que la dinámica de la variable obtenida con las simulaciones no presenta cambios abruptos, se identificó que las simulaciones estaban en el régimen continuo. Los parámetros utilizados en las simulaciones fueron $\sigma = 30$ y $\gamma = 15$.

Utilizando diferentes valores de los parámetros en las simulaciones, se observó que para valores mayores de sigma y gamma ($\sigma > 30$ y $\gamma > 15$) el sistema se encuentra en un régimen continuo o suave. Para estos parámetros del sistema, se observó que la solución analítica se ajusta de manera perfecta a la simulación.

Se observó que si el valor de σ se disminuye desde 30 la ecuación seguirá ajustando a las simulaciones con buena exactitud, pero empezará a transitar hacia el

régimen donde el sistema presenta inactividades de 1 iteración. Ver Figura 3.3.

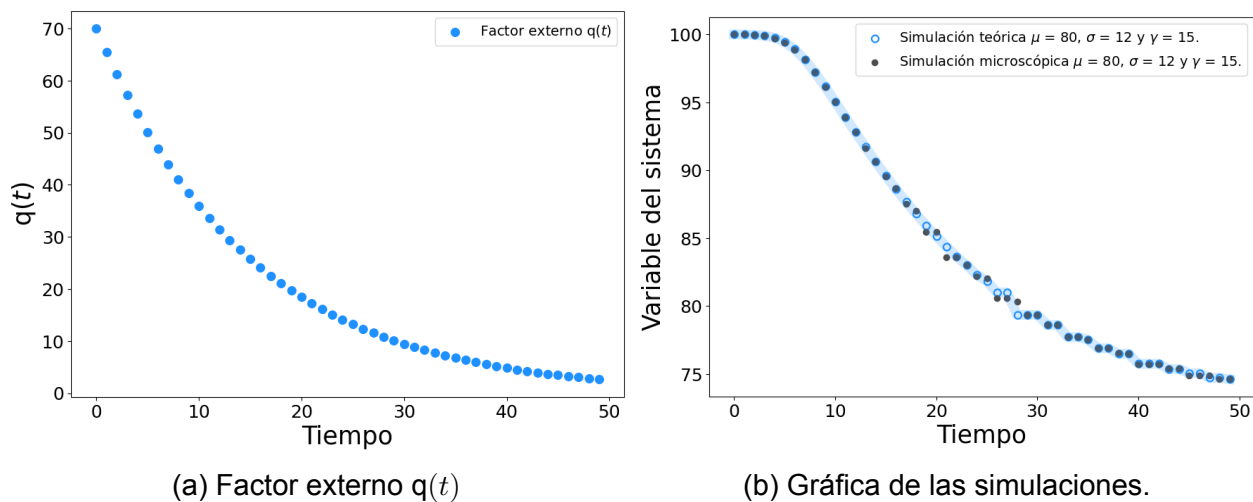


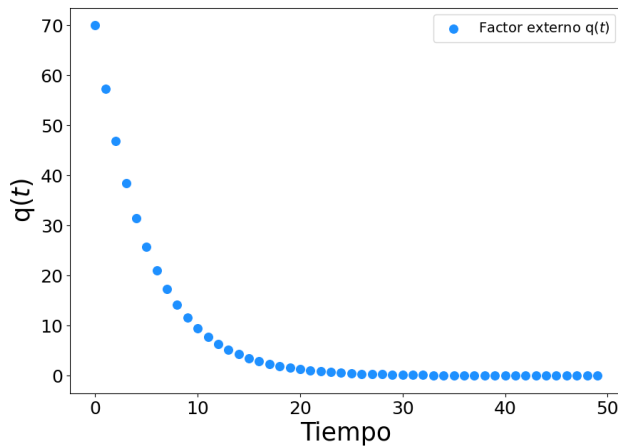
Figura 3.3: Segunda comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.

En el siguiente capítulo se denomina a este régimen como el régimen continuo y asincrónico, debido a que la dinámica de la variable estudiada no es capaz de sincronizarse con el factor externo.

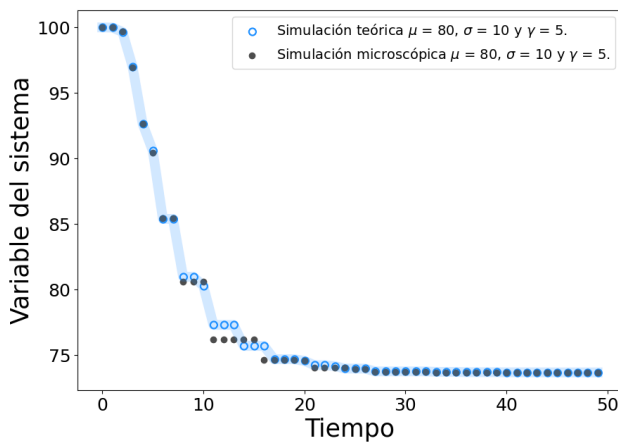
Para valores menores de $\gamma = 15$ se hace notable un cambio hacia un régimen con cambios abruptos en la variable del sistema, este régimen se denomina régimen intermitente. Para valores de γ menores que 15, la señal externa desciende de manera más rápida. Esto permite observar cambios abruptos en la dinámica de la variable del sistema estudiada. La gráfica de la variable del sistema con estos cambios se muestra en la Figura 3.4.

En la Figura 3.4 se observan cambios abruptos superiores al 2% del valor de la variable del sistema. Para definir al régimen intermitente interesa únicamente los cambios abruptos acompañados de momentos de inactividad en la variable. Esto porque un cambio del 2% de la variable no acompañado de ninguna inactividad implicaría que el cambio se produce únicamente debido a la velocidad a la que cae el

factor externo. Por el contrario, un cambio abrupto del 2% junto con inactividad en el sistema implica que el sistema ha disminuido drásticamente hasta el punto de alcanzar el proceso de retroalimentación negativa. Proceso que da lugar a momentos de tranquilidad relativa.



(a) Factor externo $q(t)$



(b) Gráfica de las simulaciones.

Figura 3.4: Tercera comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.

Cuando se tienen valores de sigma aproximadamente de 2.8 ($\sigma \approx 2.8$) el sistema se encuentra en el régimen intermitente para todos los valores de γ . En este régimen la dinámica de la variable del sistema obtenida con la simulación teórica se ajusta a la simulación microscópica, pero la diferencia entre ambas crece hasta un 4% del

valor inicial de la variable del sistema (P_t). En la Figura 3.5 se muestra esta diferencia entre el tiempo 10 y 20.

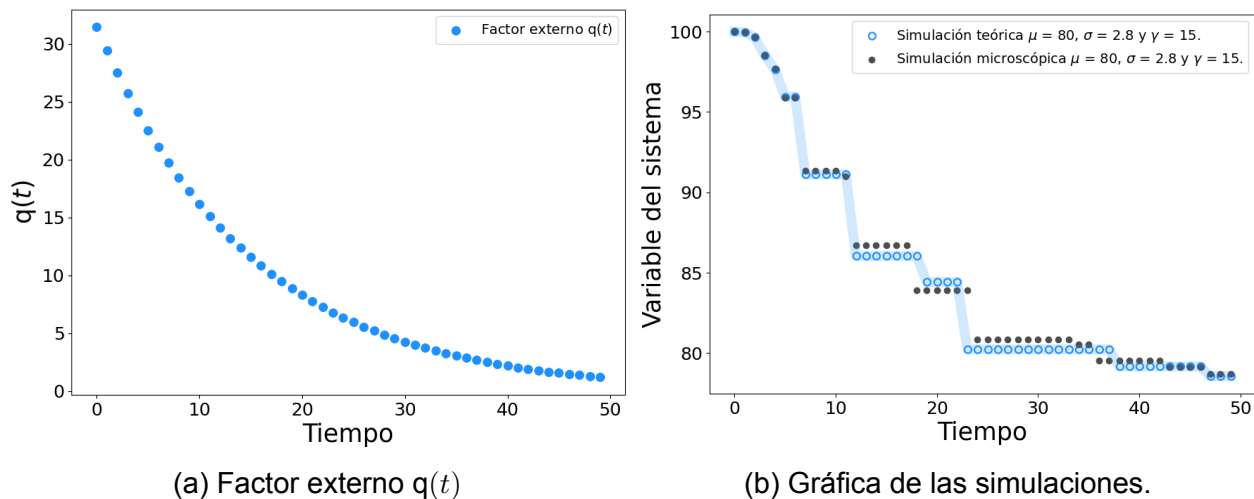


Figura 3.5: Cuarta comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.

En la anterior figura se puede observar que los grandes saltos en el valor de la variable del sistema tienen como resultado los momentos de tranquilidad relativa que se buscaba. Estos saltos junto con la tranquilidad relativa es lo que denominamos anteriormente como intermitencia.

Cabe destacar que, en este proceso, se tienen momentos de inactividad para después tener grandes momentos de caída sin algún previo aviso. Comparando la gráfica del factor externo junto con la gráfica de las simulaciones es posible observar que un factor externo con pequeños cambios puede provocar súbitas caídas. Por lo que, en un sistema real, podría provocar una catástrofe sin previo aviso.

En el siguiente capítulo se dan las definiciones exactas sobre los distintos regímenes existentes en el modelo. También se analiza si las pequeñas diferencias entre las simulaciones teóricas y microscópicas tienen algún efecto al momento de obtener las fronteras de los distintos regímenes existentes.

Capítulo 4

Caracterización del modelo

En el capítulo anterior se comparó las simulaciones teóricas obtenidas a partir de la solución analítica del modelo con simulaciones microscópicas, también se presentaron los diversos regímenes donde el sistema puede encontrarse dependiendo del valor de sus parámetros.

En la primera sección de este capítulo se presenta una definición formal de los distintos regímenes existentes, dependiendo de las propiedades que la variable del sistema tiene en cada uno de ellos.

En la siguiente sección se muestra el método para encontrar las fronteras donde terminan los distintos regímenes, en el espacio de los parámetros γ y σ . Nótese que se utilizó la notación de γ para distinguir el modelo de la tesis del modelo de Escobar y Castillo (2018). También se comparan las fronteras obtenidas de la simulación microscópica con las obtenidas de la simulación teórica.

En la sección 4.3 se utiliza la solución analítica para encontrar distintas propiedades que ayuden a fijar una duración total para las simulaciones y para encontrar a las fronteras de una manera rápida. Al final del capítulo se presenta la caracterización

del modelo.

4.1. Definición de los distintos regímenes existentes

La definición de los distintos regímenes existentes comienza con el régimen continuo y sincrónico, el cual cubre la mayor zona en el espacio de parámetros. En este régimen se notó que la variable estudiada del sistema se sincroniza con una función de la señal externa, esta función es:

$$f_t = Ce^{-t/\gamma} + P_f \quad (4.1)$$

Donde P_f es el valor final de la variable del sistema.

Se notó que en este régimen la dinámica de la variable del sistema comienza con cambios pequeños. Hay poca actividad al inicio de las iteraciones debido a que solo pocos umbrales son superados, por lo que el valor de la variable del sistema es prácticamente constante. Debido a esto la variable del sistema solo se sincroniza con la función de la señal externa para iteraciones posteriores, en las cuales la variable del sistema tiene disminuciones considerables. Ver Figura 4.1.

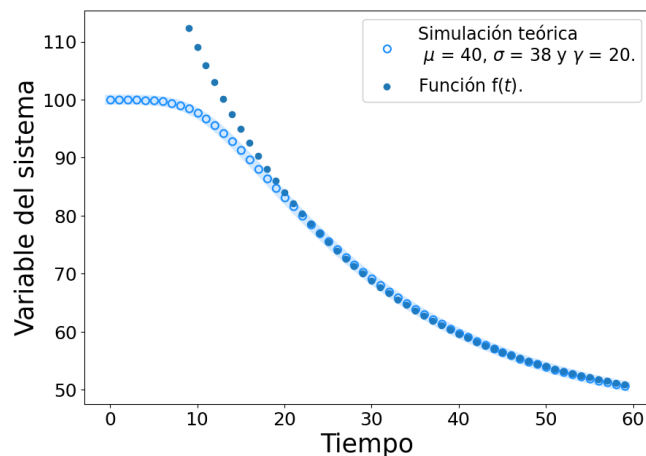


Figura 4.1: Gráfica de simulación teórica y señal externa en el régimen continuo y sincrónico.

Para comparar la variable del sistema con la función de la señal externa se usó la siguiente diferencia:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{t_i+j+1} - f_{t_i+j}}{f_{t_i+j+1} - P_f} &= \frac{Ce^{-(t_i+j+1)/\gamma} + P_f - (Ce^{-(t_i+j)/\gamma} + P_f)}{Ce^{-(t_i+j+1)/\gamma} + P_f - P_f} \\
 &= \frac{Ce^{-(t_i+j)/\gamma}(e^{-1/\gamma} - 1)}{Ce^{-(t_i+j)/\gamma}e^{-1/\gamma}} \\
 &= \frac{(e^{-1/\gamma} - 1)}{e^{-1/\gamma}} \\
 &= (1 - e^{1/\gamma})
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Al solo depender del parámetro γ , la diferencia permite verificar si la función de la señal externa decae a la misma velocidad que la variable del sistema. Con esto, el régimen continuo y sincrónico se define como los valores en el espacio de los parámetros que cumplen con la siguiente condición:

$$\sum_j^{t_f-2} \left(\frac{P_{t_i+j+1} - P_{t_i+j}}{P_{t_i+j+1} - P_f} - \frac{f_{t_i+j+1} - f_{t_i+j}}{f_{t_i+j+1} - P_f} \right) < 0.003 \tag{4.3}$$

Para valores de j con valores de la variable del sistema tal que $P_{t_i+j} < 80\%P_{t_i}$, y con t_f un tiempo final.

Se eligió el valor 0.003 debido a que le da a la frontera del régimen continuo y sincrónico la característica de superponerse con la frontera del régimen con inactividad de 1 iteración. Con esto el régimen continuo y sincrónico terminaría cuando comience el régimen de inactividad de 1 iteración, esto se muestra con más detalle en la sección 4.3.

Después del régimen continuo sincrónico se tiene al régimen continuo y asincrónico, este se divide en el régimen de inactividad de 1 iteración y de 2 iteraciones. El régimen continuo y asincrónico se caracteriza porque la variable del sistema deja de

parecerse a la señal externa de acuerdo con la ecuación anterior, aunque esta sigue presentando cambios relativamente suaves. Ver Figura 4.2.

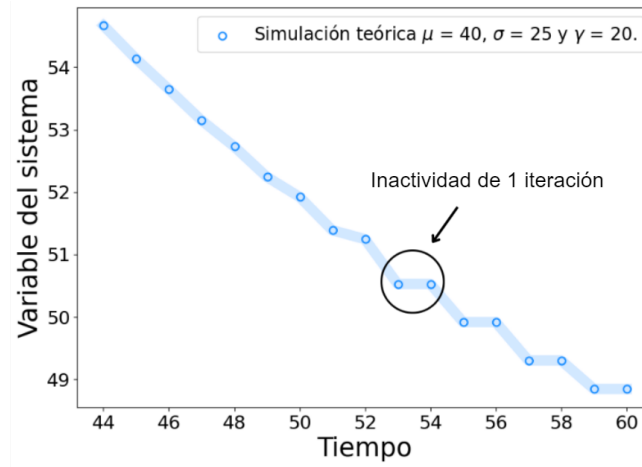


Figura 4.2: Gráfica de simulación teórica en el régimen de inactividad de 1 iteración.

Debido a que se presentan inactividades de 1 iteración y de 2 iteraciones en este régimen la variable del sistema deja de decrecer monótonamente. El régimen de inactividad de 2 iteraciones se muestra en la Figura 4.3.

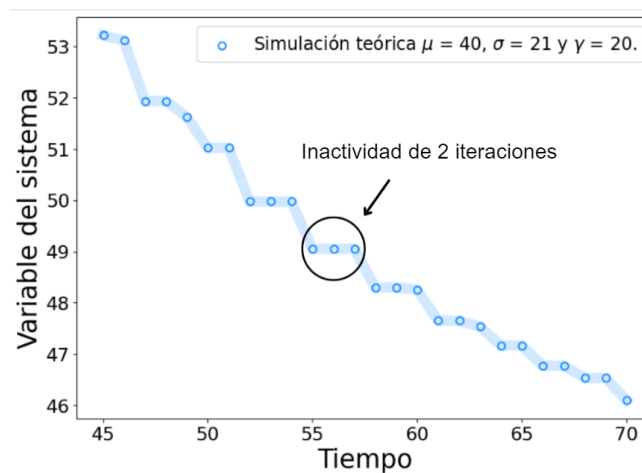


Figura 4.3: Gráfica de simulación teórica en el régimen de inactividad de 2 iteraciones.

Después de definir a estos regímenes se procedió a definir al régimen intermitente 1. El régimen se define como el conjunto de valores en el espacio de los parámetros donde la variable del sistema estudiada presenta inactividad de 1 iteración

después de una caída de al menos 2 % del valor inicial de la variable del sistema, es decir, $(2\%) \cdot P_{t_i}$. Ver Figura 4.4.

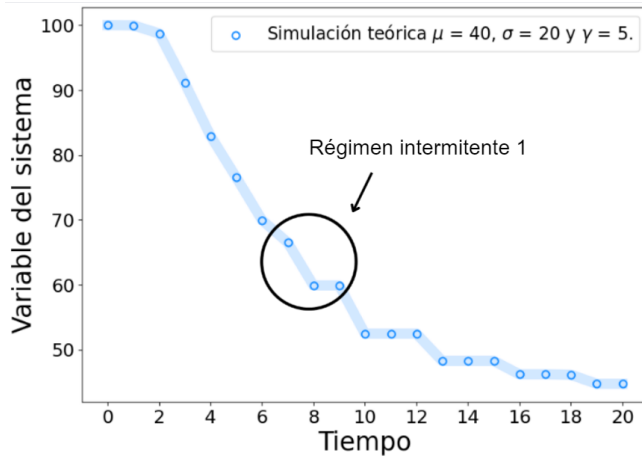


Figura 4.4: Gráfica de simulación teórica en el régimen intermitente 1.

El régimen intermitente de 2 iteraciones se define de manera similar. Este régimen se define como el lugar en el espacio de los parámetros donde la variable del sistema estudiada presenta inactividad de 2 iteraciones después de una caída de al menos 2 % del valor inicial de la variable del sistema. Ver Figura 4.5.

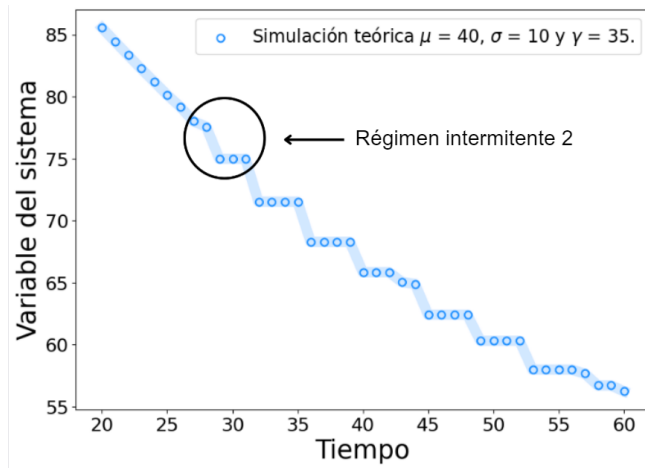


Figura 4.5: Gráfica de simulación teórica en el régimen intermitente 2.

En estos 2 últimos regímenes es donde se presenta intermitencia junto con sus cambios abruptos en la variable del sistema estudiada. Al final de capítulo se muestra que el régimen intermitente 1 y el régimen intermitente 2 son similares, por lo que se elige al régimen intermitente 2 para definir a un único régimen intermitente.

Cabe señalar que los sistemas a los que se aplica el modelo pueden cambiar entre los distintos regímenes mediante el cambio de los parámetros del sistema. Para tener una idea clara del lugar donde ocurre el cambio entre estos regímenes, en la siguiente sección se muestran los pasos para obtener con las simulaciones microscópicas y teóricas a las fronteras de dichos regímenes. Además, se grafican las fronteras en el espacio de los parámetros γ y σ , y se comparan las fronteras de las simulaciones microscópicas con las fronteras obtenidas de las simulaciones teóricas.

4.2. Fronteras de los regímenes de la simulación microscópica y teórica

Para identificar las fronteras donde comienzan los distintos regímenes en el espacio de los parámetros σ y γ , se ejecutaron para distintos valores de estos parámetros distintas simulaciones donde se buscó que se cumplieran las condiciones de los regímenes presentados en la sección anterior.

Para recorrer de una manera óptima el espacio de los parámetros se fijó el parámetro γ y se disminuyó el valor del parámetro σ en pasos de $\Delta\sigma = 1$ desde el valor arbitrario $\sigma = 50$.

Para cada valor del parámetro σ se buscó la condición del régimen requerido; cuando se cumplió la condición, se guardó el valor de σ y γ para cada punto de la frontera de la última simulación que no cumplía con la condición buscada. Luego, el valor de γ se incrementó en pasos de $\Delta\gamma = 1$ y se redujo nuevamente el valor de σ en pasos de $\Delta\sigma = 1$ desde el valor arbitrario $\sigma = 50$. Todo el recorrido se hizo para un valor fijo del parámetro μ .

Este método para encontrar a las fronteras supone que las fronteras se encuentran en valores menores del valor arbitrario de $\sigma = 50$. También se supone que la frontera se extiende a lo largo del parámetro γ , debido a que este parámetro se mantiene fijo mientras se disminuye el valor de σ .

Se utilizó este método para encontrar la frontera donde comenzaba el régimen de inactividad de 1 iteración. Debido a que los valores de los umbrales del modelo son tomados aleatoriamente de una distribución normal, se espera que para diferentes simulaciones microscópicas los puntos que conforman la frontera difieran un poco.

Por esta razón, para las simulaciones microscópicas el proceso se repitió 100 veces y se representó a la frontera mediante un mapa de calor. Por otra parte, la frontera utilizando simulaciones teóricas solo se realizó una vez.

El resultado de las simulaciones se muestra en la Figura 4.6.

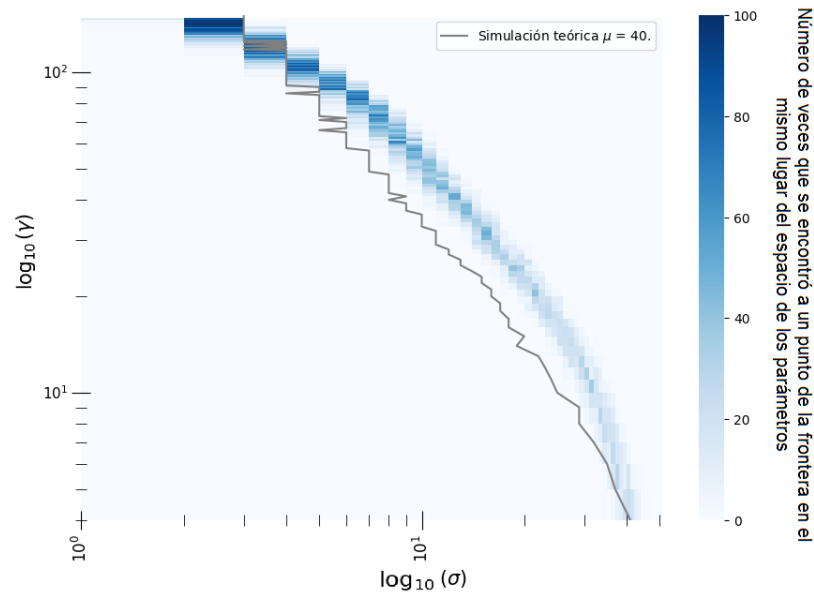


Figura 4.6: Comparación de mapa de densidad de la simulación microscópica con la frontera de simulación teórica. Duración de 25 iteraciones, frontera de inactividad de 1 iteración.

La frontera se encontró para simulaciones con duración total de 25 iteraciones, en las simulaciones microscópicas se utilizó un valor de $N = 10000$ para el número total de umbrales. Este mapa muestra las zonas de la frontera donde los puntos que la componen se encuentran más o menos dispersos debido a la toma de valores aleatorios de la distribución normal.

Según el código de colores presentado a la derecha de la figura anterior, los puntos más oscuros representan puntos que se encontraron más veces en el mismo lugar cuando se ejecutó cada simulación para buscar a la frontera, mientras que los

puntos más claros representan puntos de la frontera que se repitieron pocas veces cuando se ejecutaron las simulaciones.

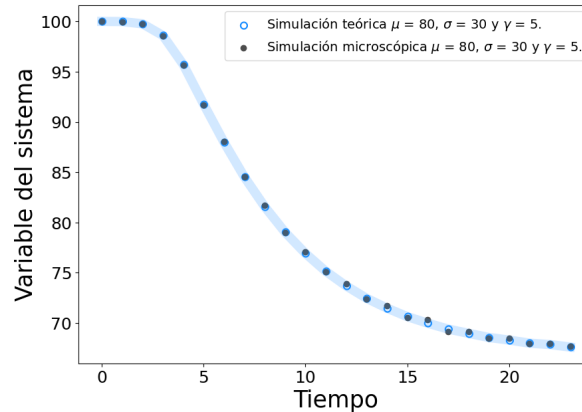
A diferencia del modelo del artículo de Escobar y Castillo (2018) no se graficó a los regímenes en el espacio $\frac{\sigma}{\mu}$, ya que en este modelo se encontró que las fronteras eran independiente unas de otras al cambiar el valor del parámetro μ . En la sección 4.3 se hace un análisis más detallado de las fronteras y se presenta el caso de fronteras que dependen unas de otras al cambiar el valor del parámetro P_{t_i} .

Después de obtener el mapa de calor, se compararon más fronteras de la simulación microscópica con las teóricas para un número mayor de iteraciones totales. Se encontró que, para un número mayor a 100 de iteraciones totales en las simulaciones, la frontera del régimen obtenido con las simulaciones teóricas y microscopias dejan de coincidir (no se muestra).

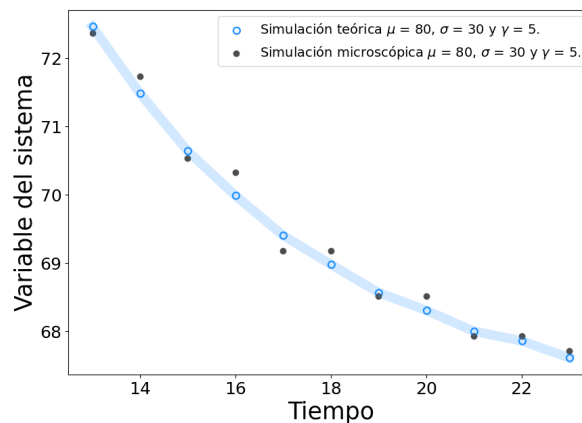
Esto se puede explicar tomando en cuenta el efecto aleatorio que tiene el modelo debido a que los umbrales toman de manera aleatoria sus valores de una distribución normal. También se puede explicar debido a la poca sensibilidad que puede detectar las simulaciones microscópicas en comparación de la sensibilidad de las simulaciones teóricas.

Para un valor inicial de la variable del sistema de $P_{t_i} = 100$ en las simulaciones teóricas, se notó que fácilmente se puede alcanzar un cambio de $\Delta P = 1.25 \times 10^{-5}$ de acuerdo con la relación $\Delta PN = P_{t_i}$. Si se quisiera alcanzar lo mismo con las simulaciones microscópicas se necesitaría que el número total de umbrales fuera de $N = 8,000,000$. Esta gran cantidad de umbrales requeriría una gran cantidad de poder computacional para realizar las simulaciones microscópicas.

Sin embargo, las simulaciones teóricas describen con buena exactitud a las simulaciones microscópicas. En la Figura 4.7 se presenta una comparación de ambas simulaciones.



(a) Comparación de la simulación microscópica contra la simulación teórica para $\mu = 80$, $\gamma = 5$ y $\sigma = 30$.



(b) Comparación de las simulaciones en el rango de tiempo [13, 23].

Figura 4.7: Comparación de la simulación teórica contra la simulación microscópica.

A primera vista en la Figura 4.7a casi no se puede apreciar ninguna diferencia entre ambas simulaciones, pero al acercarnos se pueden ver pequeñas discrepancias. Ver Figura 4.7b.

En la Figura 4.7b se puede ver que la simulación microscópica presenta inactividades de 1 iteración, aunque la simulación teórica no la presente para el mismo valor de los parámetros μ , σ y γ . Esto provoca que las fronteras encontradas con las simulaciones teóricas y microscópicas no colapsen en un solo lugar.

La simulación teórica disminuye en menor medida y de manera consistente. Estrictamente la simulación teórica nunca tiene inactividad, mientras que la microscópica si va a presentar inactividad siempre que la distribución de umbrales no decrezca lo suficiente como para encontrarse con el valor de la variable del sistema. La simulación microscópica tiene momentos de completa inactividad, pero en general va a la par que la simulación teórica.

Esta diferencia fundamental explica la discrepancia entre las fronteras presentadas con cada tipo de simulación en la Figura 4.6.

Esto pasa para los regímenes de 1 inactividad, 2 inactividades, régimen continuo sincrónico y asincrónico. Solo cuando se define el régimen intermitente 1 es cuando ambas fronteras vuelven a acercarse y con el régimen intermitente 2 ambas fronteras vuelven a coincidir para una duración total mayor a 100 iteraciones. Ver Figura 4.8.

Esta frontera donde inicia el régimen intermitente 2 se encontró para simulaciones con duración total de 1000 iteraciones, en las simulaciones microscópicas se utilizó un valor de $N = 10000$ para el número total de umbrales.

En la Figura 4.8 es posible notar que la condición de la caída del 2% de la variable del sistema en el régimen intermitente 2 es suficiente para eliminar los efectos del azar que se tienen al tomar valores aleatorios de una distribución normal.

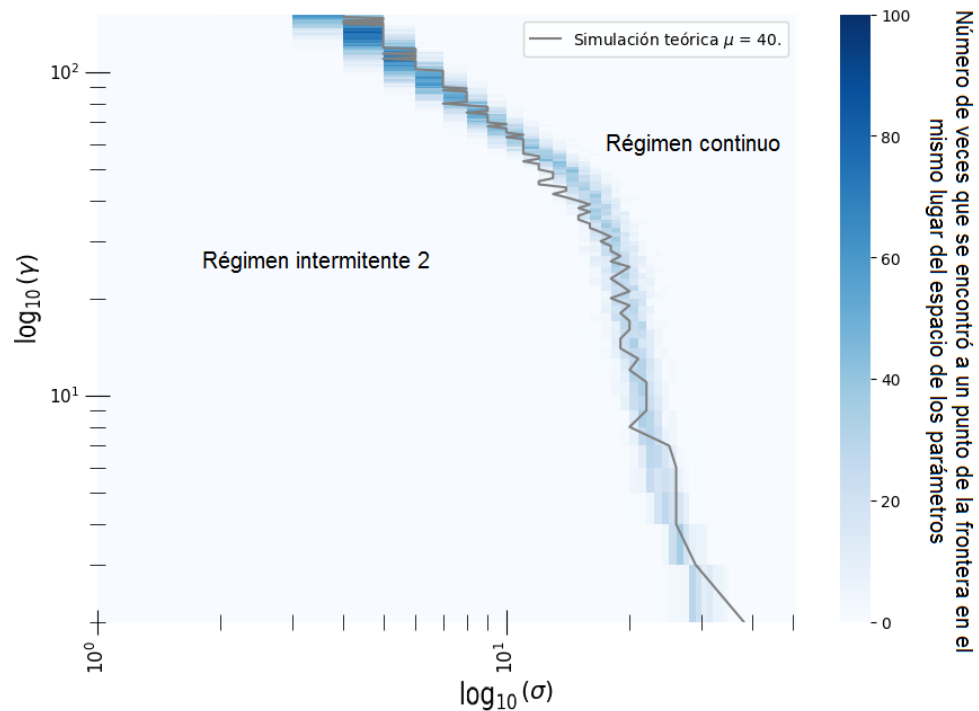


Figura 4.8: Comparación de la frontera de la simulación microscópica con la frontera de la simulación teórica. Duración total de 1000 iteraciones, frontera de régimen intermitente 2. El mapa de calor se obtuvo con la simulación de 100 fronteras.

Con esto se muestra que si se ignoran los efectos que se tienen al tomar valores aleatorios de una distribución normal, entonces las fronteras de las simulaciones teóricas concuerdan de buena manera con las fronteras de las simulaciones microscópicas. Esto que permite hacer uso solo de la simulación teórica para encontrar fronteras con un mayor número de duración total de iteraciones, utilizando así una menor cantidad de recursos computacionales.

En la siguiente sección se utiliza la solución analítica encontrada para definir una duración total para cada simulación como función de los parámetros μ , σ y γ . Con esto se define el momento exacto donde no hay más actividad por parte de los umbrales provocando la nula actividad en la variable del sistema. Una vez definida la duración total, en la sección 4.4 se realiza la caracterización general del modelo aquí presentado.

4.3. Propiedades de la solución analítica

4.3.1. Duración total de las simulaciones

En los anteriores capítulos se estudió el modelo utilizando valores arbitrarios para la duración total de las simulaciones. Para realizar la caracterización del modelo, se fijó una duración total de las simulaciones mediante una función que depende de los parámetros: P_{t_i} , μ , σ y γ .

Para seleccionar la cantidad total de iteraciones en las simulaciones se utilizó a la solución analítica del modelo:

$$P_{t_i+t} = \begin{cases} \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] & \text{si } P_{t_i+t-1} > \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] \\ P_{t_i+t-1} & \text{si } P_{t_i+t-1} \leq \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] \end{cases} \quad (4.4)$$

La cantidad total de iteraciones se fijó utilizando el tiempo en el que la variable del sistema llega a su valor final. Esto ocurre cuando el factor externo es aproximadamente cero, si se supone que ocurre en el tiempo t_f se tiene:

$$q_{t_i+t_f}\beta \approx 0 \quad (4.5)$$

Sustituyendo en la solución analítica del modelo se llega a:

$$P_{t_i+t_f} \approx \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t_f-1} - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] \quad (4.6)$$

En este tiempo la variable del sistema es prácticamente constante $P_{t_i+t_f} \approx P_{t_i+t_f-1}$ por lo que la aproximación anterior toma la siguiente forma:

$$P_{t_i+t_f} \approx \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t_f} - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] \quad (4.7)$$

En esta ecuación se conoce el valor inicial de la variable P_{t_i} , μ y σ , y se quiere conocer el valor de final de la variable $P_{t_i+t_f}$.

La ecuación (4.7) no puede resolverse de manera analítica, pero se puede resolver mediante métodos numéricos. La grafica que se obtiene al resolver de manera numérica la ecuación para un caso específico se muestra en la Figura 4.9.

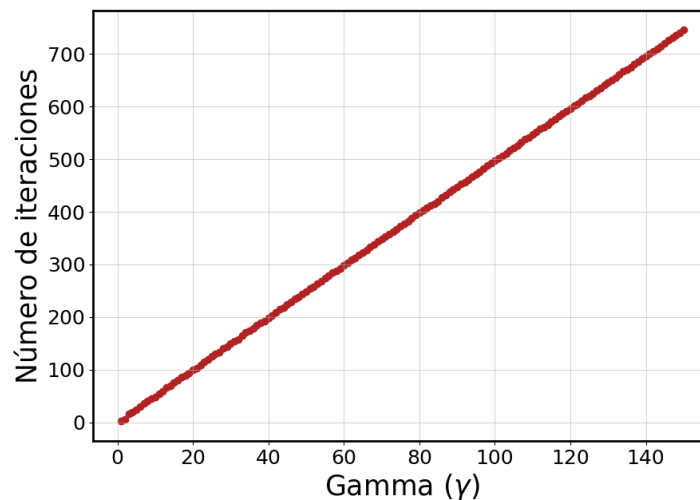


Figura 4.9: Duración total de iteraciones como función de gamma γ . Las simulaciones se realizaron con los parámetros $\mu = 40$, $P_{t_i} = 100$ y $\sigma = 20$.

En la gráfica se muestra la duración total de iteraciones como función del parámetro gamma que debe tener la simulación para llegar al valor final de la variable del sistema. La grafica corresponde a los valores de los parámetros $\mu = 40$, $P_{t_i} = 100$ y $\sigma = 20$.

En la ecuación (4.7) se observa que el valor final de la variable solo depende de los parámetros P_{t_i} , μ , σ , y no depende del parámetro γ . Aunque no depende de gamma, la duración total de la simulación si depende del parámetro. Debido a que el tiempo en el que la variable del sistema llega a su valor final depende de la velocidad a la que disminuya el factor externo.

4.3.2. Colapso de las distintas curvas

En los capítulos anteriores solo se utilizó el valor específico de $P_{t_i} = 100$ para encontrar a las fronteras de los distintos regímenes, en esta sección se cambió el valor del parámetro P_{t_i} y se encontró que las fronteras dependen linealmente del parámetro.

Para entender esto veamos que en la solución analítica:

$$P_{t_i+t} \approx \frac{P_{t_i}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{\sqrt{2}\sigma^2} \right) \right]$$

Es posible cambiar el valor del parámetro P_{t_i} , si se multiplica por su inverso a μ , σ y $q_{t_i+t}\beta$:

$$\begin{aligned} \frac{P_{t_i+t}}{P_{t_i}} &\approx \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\frac{P_{t_i+t-1} - \mu - q_{t_i+t}\beta}{P_{t_i}}}{\frac{\sqrt{2}\sigma^2}{P_{t_i}}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\frac{P_{t_i+t-1}}{P_{t_i}} - \frac{\mu}{P_{t_i}} - \frac{q_{t_i+t}\beta}{P_{t_i}}}{\sqrt{2} \left(\frac{\sigma}{P_{t_i}} \right)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Para comprobar esta propiedad en las fronteras, se buscó una frontera para un valor arbitrario del parámetro P_{t_i} . Después se cambió el valor del parámetro y se buscó la frontera para este respectivo valor. Luego, ambas fronteras se graficaron en el espacio de los parámetros σ y γ . Al final se dividieron los valores σ de cada frontera por los 2 respectivos valores iniciales de la variable P_{t_i} y se encontró que ambas fronteras se superponen en una única frontera general, por lo que ambas fronteras dependen linealmente del valor inicial de la variable del sistema.

Que dependan linealmente del parámetro muestra que la función de la frontera donde comienza un régimen tiene la forma:

$$\sigma(P_0, \gamma, \mu) = P_0 \cdot h(\gamma, \mu) \quad (4.8)$$

Para este tipo de régimen, se puede utilizar la propiedad anterior para obtener la frontera de un valor específico de P_{t_i} sin necesidad de realizar ninguna simulación. Para obtener a la frontera basta con multiplicar los valores de σ de la frontera general por el valor P_{t_i} de la frontera buscada.

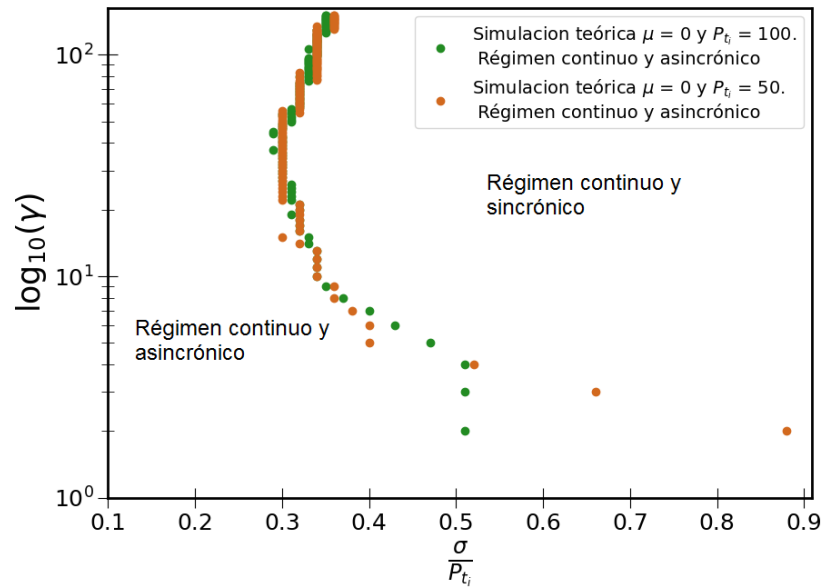


Figura 4.10: Comparación de la frontera donde comienza el régimen continuo y asincrónico para distintos valores iniciales de la variable del sistema.

En la Figura 4.10 se muestran las fronteras donde empieza el régimen continuo y asincrónico correspondiente al valor de parámetro $\mu = 0$. La leyenda en la figura muestra los valores iniciales de la variable del sistema $P_{t_i} = 100$ y $P_{t_i} = 50$ que se utilizaron para realizar las simulaciones teóricas. Nótese que en la figura se muestra a el eje x como sigma dividido por el respectivo valor inicial de la variable $\frac{\sigma}{P_{t_i}}$.

Para la frontera donde comienza la inactividad de 2 iteraciones se comprobó esta misma propiedad, esto se muestra en la Figura 4.11.

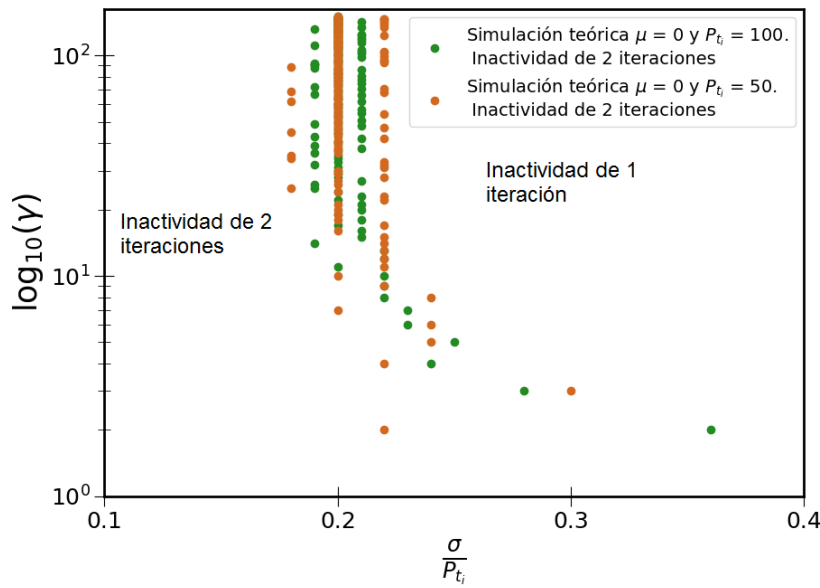


Figura 4.11: Comparación de la frontera donde comienza el régimen de inactividad de 2 iteraciones para distintos valores iniciales de la variable del sistema.

Para la frontera del régimen intermitente 2 también se comprobó la misma propiedad. Ver Figura 4.12.

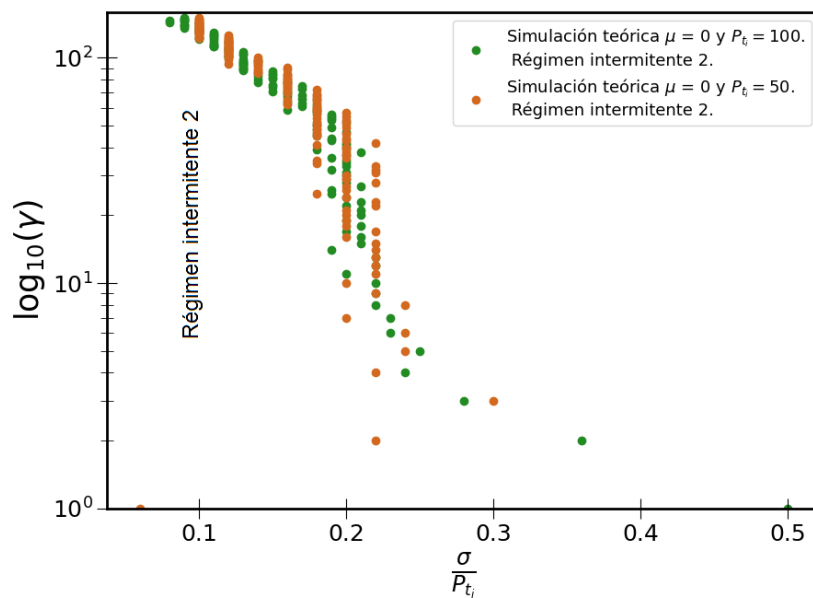


Figura 4.12: Comparación de fronteras donde comienza el régimen intermitente 2 para distintos valores iniciales de la variable del sistema.

Después de comprobar la propiedad se buscó la frontera donde comienza el régimen de inactividad de 1 iteración y se comparó la frontera donde comienza el régimen continuo y asincrónico. Ver Figura 4.13.

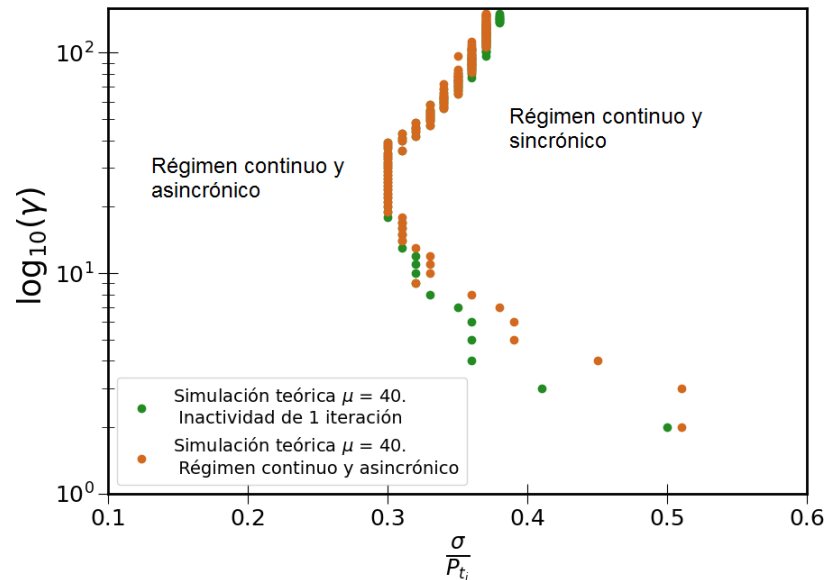


Figura 4.13: Comparación de la frontera donde comienza el régimen de inactividad de 1 iteración con la frontera donde comienza el régimen continuo y asincrónico.

En la figura anterior la leyenda muestra el valor de μ usado y el régimen que se utilizó para encontrar a la frontera. Es posible observar como la frontera donde comienza el régimen de inactividad de 1 iteración se superpone con la frontera donde comienza el régimen continuo y asincrónico. Esto demuestra que la variable del sistema deja de estar en sincronía con el factor externo a la vez que se presentan inactividades de 1 iteración en su dinámica.

Por último, la Figura 4.14 muestra como la frontera donde comienza el régimen intermitente 1 se superpone con la frontera donde comienza el régimen intermitente 2. Ambas fronteras difieren para valores de $\log_{10}(\gamma) < 11$, pero ambas fronteras se toman como equivalentes. Debido a esto, en este trabajo se toma a la definición del régimen intermitente 2 como un único régimen intermitente.

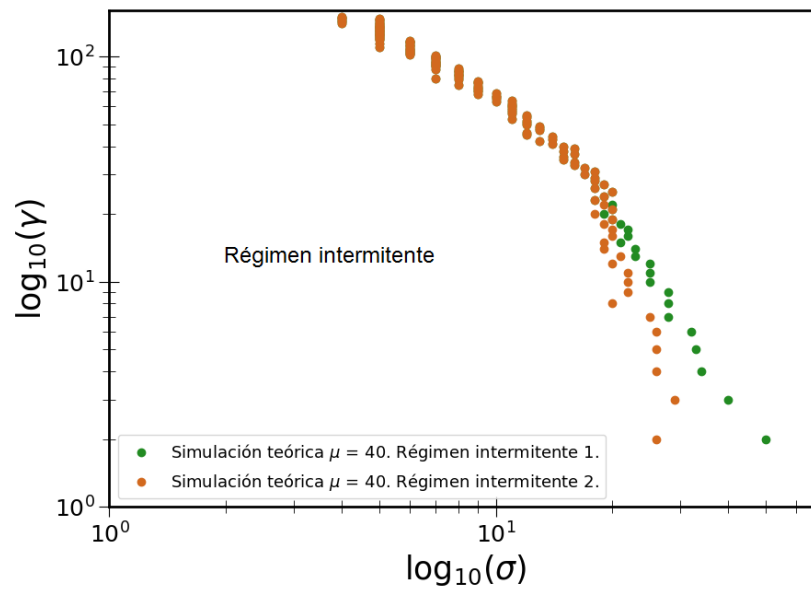


Figura 4.14: Superposición de la frontera donde comienza el régimen intermitente 1 con la frontera donde comienza el régimen intermitente 2.

4.4. Caracterización del sistema mediante simulaciones teóricas

Para caracterizar al modelo se realizó un diagrama de fases donde se distinguió a un régimen intermitente, el régimen continuo y asincrónico y el régimen continuo y sincrónico. La caracterización se hizo con las respectivas fronteras de los regímenes y se hizo para tres valores diferentes del parámetro μ . Se utilizaron simulaciones teóricas para la caracterización del modelo debido a que requerían menor poder computacional.

Se buscó las fronteras donde comienza el régimen intermitente y el régimen continuo y asincrónico. Las fronteras se buscaron utilizando las definiciones de los regímenes de la sección 4.1 y siguiendo los pasos explicados de la sección 4.2.

Para encontrar una frontera más exacta de los regímenes, el recorrido se hizo disminuyendo con cambios de $\Delta\sigma = 0.1$ a sigma desde el valor $\sigma = 80$ y se aumentó con cambios de $\Delta\gamma = 0.1$ a gamma desde el valor $\gamma = 1$. Con esto se caracterizó al sistema como función de μ en el espacio de los parámetros σ y γ .

Las figuras 4.15, 4.16 y 4.17 muestran la caracterización del modelo mediante un diagrama de fases, en el eje y se grafica a $\log_{10}(\gamma)$ y en el eje x se muestra a $\frac{\sigma}{P_{ti}}$. Nótese que combinando a las fronteras mediante un eje de $\frac{\mu}{P_{ti}}$ se puede obtener una caracterización en 3 dimensiones. Ver Figura 4.18.

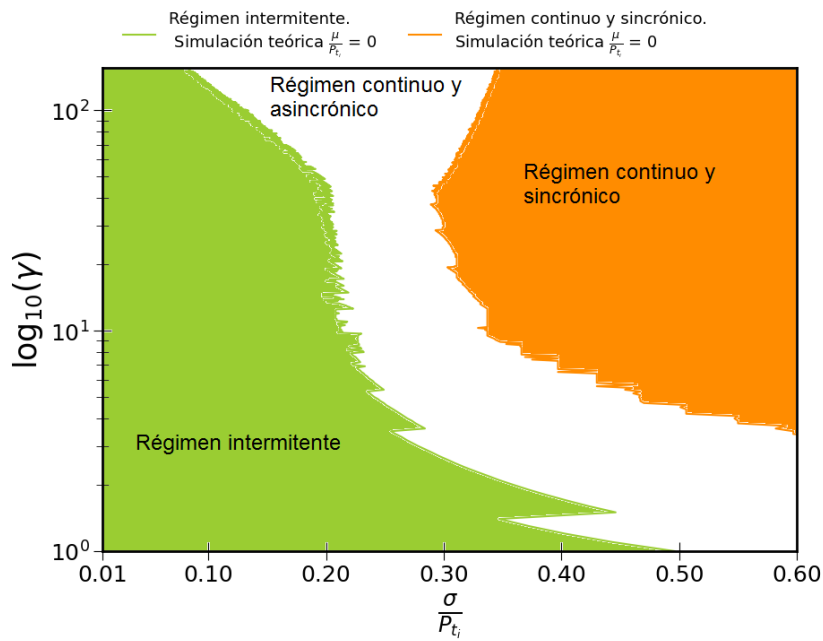


Figura 4.15: Caracterización del modelo en el espacio de los parámetros γ y σ para $\mu = 0$.

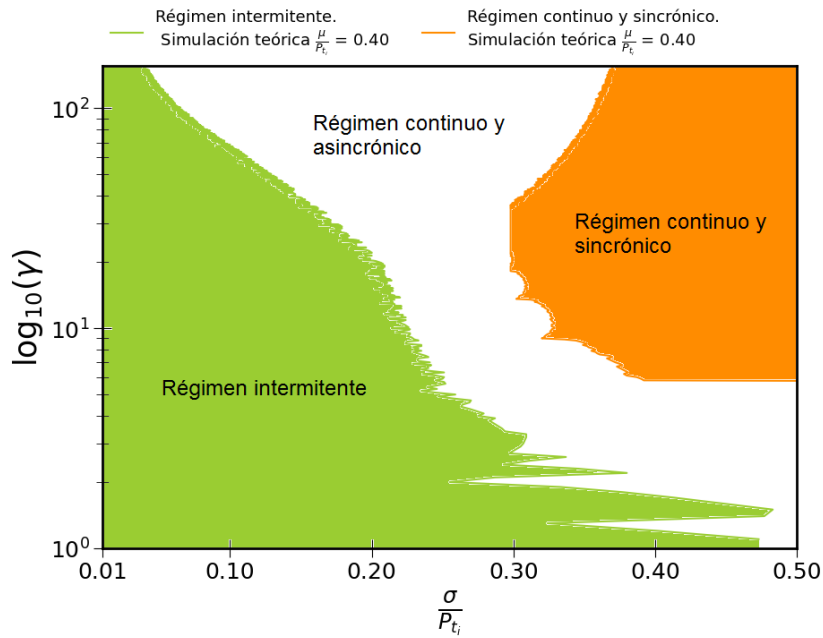


Figura 4.16: Caracterización del modelo en el espacio de los parámetros γ y σ para $\mu = 40$.

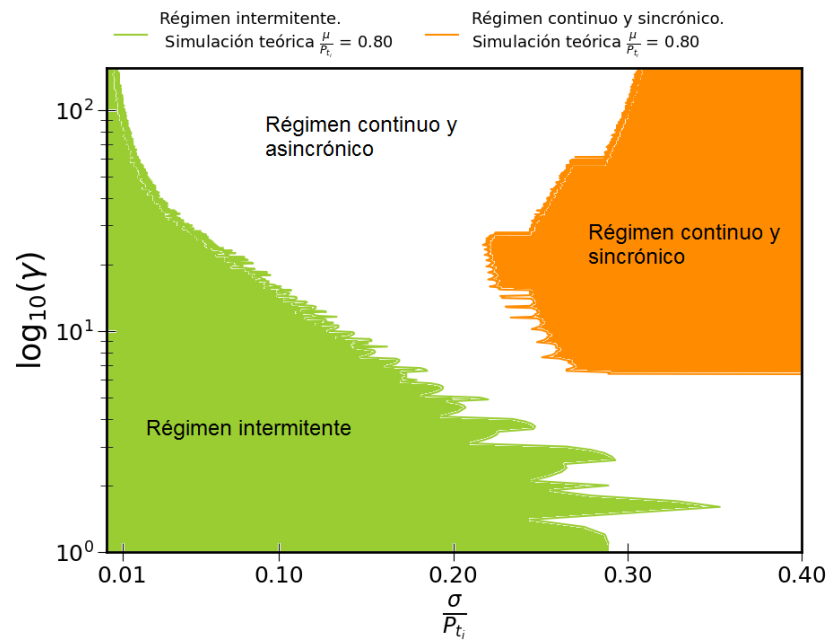
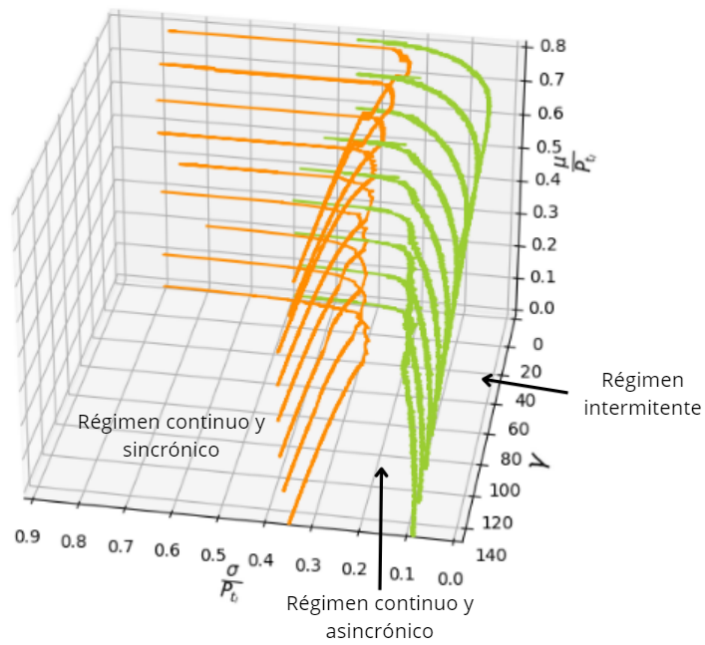
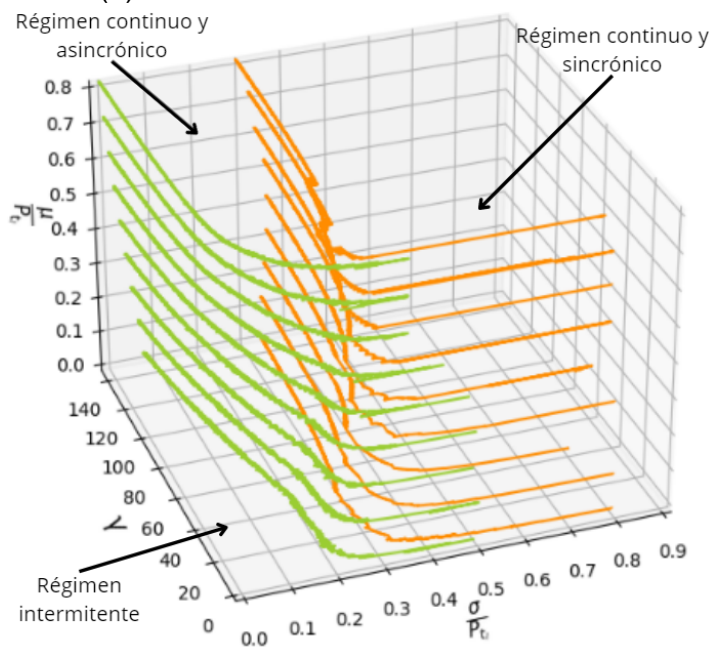


Figura 4.17: Caracterización del modelo en el espacio de los parámetros γ y σ para $\mu = 80$.



(a) Caracterización con rotación de 100°.



(b) Caracterización con rotación de 250°.

Figura 4.18: Caracterización del modelo en 3 dimensiones.

Capítulo 5

Explorando aplicar el modelo para explicar las variaciones de masa de la Antártida

Por último, se explora brevemente la posibilidad de una dinámica intermitente en la variación de masa que ha tenido la Antártida desde el año 2002 hasta el año 2023 según datos de la NASA (Global Climate Change: Vital Signs, 2023). Ver Figura 5.1.

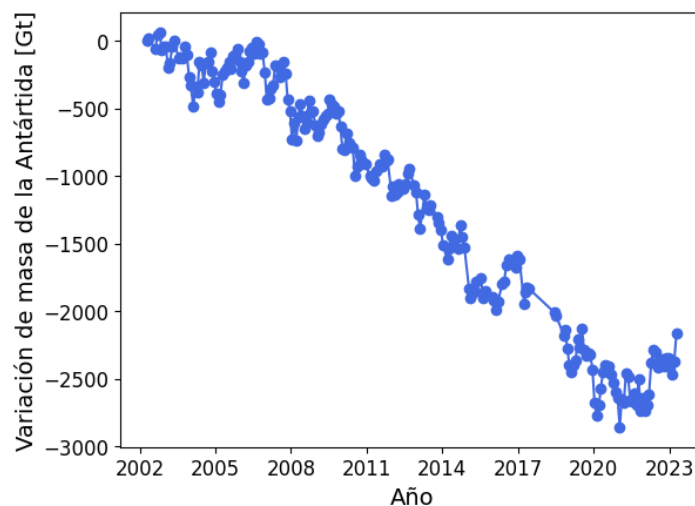


Figura 5.1: Variación de masa de la Antártida desde el año 2002 hasta el año 2023.

En la figura anterior se puede notar que en los periodos (2002, 2007), (2015, 2017) y (2020, 2022) ha habido un periodo de inactividad, mientras que en los periodos (2010, 2014) y (2017, 2019) ha habido una reducción drástica en la variable.

Debido a la posibilidad de una dinámica intermitente se consideró que el modelo puede aplicarse para explicar de manera parcial las variaciones en la masa de la Antártida. Se puede hacer una versión del sistema en la que el modelo podría ser aplicado, para esto se toma como único factor externo a la temperatura promedio global y el derretimiento de las formaciones de hielo como una oposición de este efecto externo. Ver Figura 5.2.

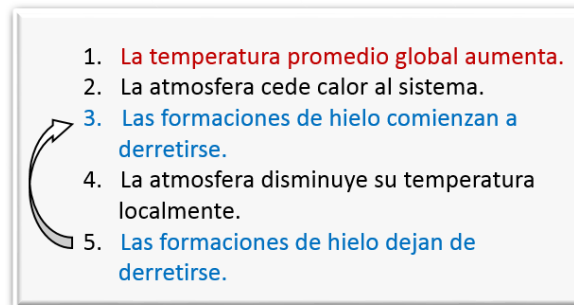


Figura 5.2: Proceso del sistema con el cual sería posible aplicar el modelo.

La flecha muestra el paso donde la variable del sistema comienza a disminuir de nuevo debido a que el factor externo continúa afectando al sistema después de un tiempo.

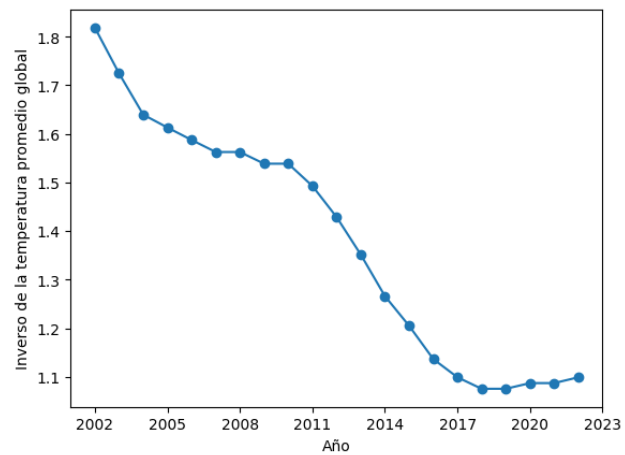
Al ceder calor la atmosfera para derretir al hielo provoca que en cierta medida el hielo deje de derretirse. A su vez, el derretimiento de la masa de la Antártida provocaría la liberación de carbono y una disminución del efecto albedo. Esto provocaría un aumento en la temperatura promedio global, generando de esta manera un proceso de retroalimentación positiva.

Como trabajo futuro queda pendiente verificar si la absorción de calor del hielo es significativa como para aplicar el modelo. También se espera que el modelo pueda modificarse o pueda ser usado junto con otros modelos que tomen en cuenta otros factores que afecten al sistema además de la temperatura promedio global. Un ejemplo de estos factores puede ser la temperatura del océano circundante a la Antártida.

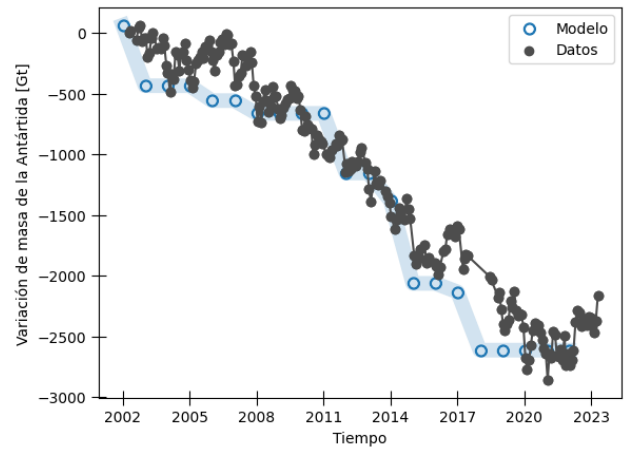
Un problema por arreglar en el modelo es que, de ser aplicable, requeriría que la temperatura promedio global (factor externo) aumentara continuamente para provocar más disminuciones en la masa de la Antártida. Si la temperatura es alta y se mantiene constante el modelo no predeciría ninguna variación a lo largo del tiempo, lo cual parece no tener sentido.

Como ejercicio el modelo se aplicó para reproducir los datos reales. Para la simulación se supuso que los umbrales de las formaciones de hielo derretidas desde el año 2002 hasta el año 2022 siguieron una distribución normal. Se utilizó como factor externo a una función de la temperatura promedio global $(-1g_t + 1) \cdot 7760$, donde g_t es el inverso de la temperatura promedio global. Ver Figura 5.3a. En este caso se usó a $\beta = 7760$ para que el factor externo y la variable del sistema fueran del mismo orden de magnitud. Se utilizó como valor total de los umbrales a $N = 20588$ y una $\Delta P = 0.15$.

En la Figura 5.3 se muestra la comparación de la dinámica obtenida con el modelo y la dinámica de los datos reales. En la figura se observa que fue posible ajustar el modelo a los datos reales, de manera que el modelo predice las avalanchas de actividad con un error de una iteración, esto es la discrepancia entre ambas dinámicas entre el año 2017 y el 2020. Esto indica que el modelo tiene una cantidad suficiente de parámetros para ajustarse a una gran cantidad de funciones, por lo que es importante verificar si el modelo es aplicable a un sistema antes de realizar cualquier ajuste.



(a) Inverso de la temperatura promedio global (g_t)



(b) Ajuste del modelo

Figura 5.3: Aplicación del modelo a los datos de la disminución de masa de la Antártida. Como parámetros de la distribución normal se utilizó a $\mu = -150$ y $\sigma = 280$.

Capítulo 6

Conclusiones

A partir de una señal externa, se propuso un modelo de retroalimentación negativa basado en umbrales para reproducir las avalanchas de actividad y la intermitencia que pueden ocurrir en algunos sistemas complejos. Específicamente, el modelo se utilizó para reproducir en un periodo de tiempo la dinámica del precio de la acción de Shell.

Además, se encontró una solución analítica para el modelo y se encontró la evolución temporal de la variable del sistema como función del factor externo q_t y tres parámetros: σ , μ y P_{t_i} . Se comparó las simulaciones de la solución analítica con simulaciones microscópicas y se encontró que ambas concordaban. Además, se compararon las fronteras de los regímenes obtenidas con cada simulación y se encontró que ambas concordaban. Así mismo, se encontró que la solución analítica es capaz de reducir el poder computacional requerido para realizar simulaciones en comparación con el poder computacional requerido por las simulaciones microscópicas.

Por otra parte, se identificaron a los distintos regímenes existentes en el modelo y se hizo una definición formal de los mismos, se encontró un régimen intermitente en el que se presentan avalanchas de actividad. Se comenzó el modelo intentando explicar la dinámica intermitente de variables de algunos sistemas. Sin embargo, también se encontró un régimen continuo y síncrono en el que el sistema se sincroniza con la señal externa, por lo que el modelo puede explicar también la dinámica de variables con únicamente cambios relativamente suaves.

Utilizando la solución analítica se encontró que se podía cambiar el valor del parámetro P_{t_i} si se cambiaba el valor de μ , σ y $q_{t_i+t}\beta$. Con esto se encontró que las fronteras de los distintos regímenes del modelo dependen linealmente de P_{t_i} . Utilizando esta propiedad junto con la frontera del régimen intermitente y régimen continuo y sincrónico, se logró hacer una caracterización del modelo para el caso específico de un factor externo que decae exponencialmente. La caracterización se hizo mediante un diagrama de fases, con ella se espera identificar de una manera rápida y precisa el régimen en el que se encuentra un determinado sistema dependiendo de los valores de sus parámetros.

El modelo de la tesis se basó en el modelo de Escobar y Castillo (2018), la diferencia entre ambos modelos es que en el modelo presentado en este trabajo no distribuye el factor externo entre agentes de un sistema, si no que los umbrales de los agentes se colocan sobre el factor externo lo cual hace que los umbrales no sean constantes en el tiempo. Esto último le permite al modelo del trabajo explicar una dinámica de una variable donde su valor no necesariamente llegue a ser cero, en comparación con el modelo de Escobar y Catillo donde el valor de la variable siempre llegaba a cero. Debido a esta propiedad del modelo presentado en este trabajo se puede modelar sistemas como el sistema del precio de la acción de Shell, donde el precio no necesariamente llega a cero.

Se tiene que destacar que para utilizar el modelo es necesario verificar que se cumplan con las condiciones que se utilizaron para desarrollar el modelo. Ya que para desarrollar el modelo se supuso que la dinámica del sistema depende del factor externo y se supuso que todos los agentes del sistema tienen umbrales, los cuales al ser superados provocan que los agentes disminuyen a la variable del sistema.

Por último, se exploró la posibilidad de aplicar el modelo a las disminuciones que ha tenido la masa de la Antártida desde el año 2002 hasta el año 2023. Se espera que el modelo sea capaz de explicar de manera parcial las variaciones que se han tenido, debido a que la atmosfera cede calor a las formaciones de hielo y puede que detenga en cierta medida más deshielo. Como trabajo futuro falta verificar si el calor que cede es significativo como para aplicar el modelo, al igual que se tiene que encontrar el factor externo a usar en el modelo.

Con esto falta descubrir una manera de verificar cuando se cumplen las condiciones del modelo para poder ser aplicado, además de una manera de dar los umbrales de los agentes para los sistemas. De igual manera, falta validar al modelo probándolo con más datos de sistemas reales.

Referencias

- Alligood, K.T., Sauer, T.D. y Yorke, J.A. (1997). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Bak, P. (1996). *How Nature Works* (Copernicus, New York).
- Bak, P., Paczuski, M. y Shubik, M. (1997). *Price variations in a stock market with many agents*. *Physica A* 246, 430–453.
- Carlson, J. M. y Doyle, J. (1999). *Highly optimized tolerance: a mechanism for power laws in designed systems*. *Phys. Rev. E* 60, 1412–1427.
- Carreras, B. A., Newman, D. E., Dobson, I. y Poole, A. B. (2000). *Initial evidence for self-organized criticality in electrical power system blackouts*. In Proc. 33rd Hawaii Int. Conf. Syst. Sci.(ed. Sprague, R. H. Jr) (IEEE Comp. Soc., Los Alamitos, CA).
- Escobar, J.V. y Pérez Castillo, I. (2018). *Intermittent dynamics in complex systems driven to depletion*. *Sci Rep* 8, 4825. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-23033-x>
- Fieguth, P. (2017). *An Introduction to Complex Systems*, Springer.
- Field, S., Witt, J. y Nori, F. y Ling, X. (1995). *Superconducting vortex avalanches*. *Phys. Rev. Lett.* 74, 1206–1209.

- Galam, S. (1997). *Rational group decision making: a random field Ising model at $T=0$* . Physica A 238, 66–80.
- Global Climate Change: Vital Signs. (2023). Recuperado el 05 de agosto de 2023. Disponible en <https://climate.nasa.gov/vital-signs/ice-sheets/>
- Guan, Y., Gupta, V., y Li, L. K. (2020). *Intermittency route to self-excited chaotic thermoacoustic oscillations*. Journal of Fluid Mechanics, 894, R3.
- Lilly, M. P., Wootters, A. H. y Hallock, R. B. (1996) *Spatially extended avalanches in a hysteretic capillary condensation system: superfluid He-4 in nuclepore*. Phys. Rev. Lett. 77, 4222–4225.
- Lu, E. T., Hamilton, R. J., McTiernan, J. M. y Bromond, K. R. (1993). *Solar flares and avalanches in driven dissipative systems*. Astrophys. J. 412, 841–852.
- Maxwell, J. C. (1867). *On Governors*. Proceedings of the Royal Society of London, 16, 270–283. <http://www.jstor.org/stable/112510>
- Ormand, C. (2023). *What Constitutes a Complex System?*. Recuperado el 11 de julio de 2023 de: <https://serc.carleton.edu/NAGTWorkshops/complexsystems/introduction.html#chaotic>
- Ortín, J. et al. (1995). *Experiments and models of avalanches in martensites*. J. Phys. IV (Paris) 5, 209–214.
- Ott, E. (2002). *Chaos in Dynamical Systems* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511803260
- Petri, A., Paparo, G., Vespignani, A., Alippi, A. y Costantini, M. (1994). *Experimental evidence for critical dynamics in microfracturing processes*. Phys. Rev. Lett. 73, 3423–3426.

-
- Pomeau, Y., & Manneville, P. (1980). *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*. *Communications in Mathematical Physics*, 74, 189-197.
- Sethna, J. P., Dahmen, K., Kartha, S., Krumhansl, J. A., Roberts, B. W., y Shore, J. D. (1993). *Hysteresis and hierarchies: Dynamics of disorder-driven first-order phase transformations*. *Physical review letters*, 70(21), 3347-3350.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.3347>
- Strogatz, S.H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2nd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780429492563>
- Umaña, A. J. (2019). *Estimación del margen de reserva y contingencia para el control de frecuencia en redes electricas con mix de generación*. Tesis de maestría. UANL. 10.13140/RG.2.2.33479.24482. <http://eprints.uanl.mx/id/eprint/18838>
- Wallace, A. R. (1858). *On the Tendency of Varieties to Depart Indefinitely From the Original Type* (2009). Alfred Russel Wallace Classic Writings. Paper 1.
https://digitalcommons.wku.edu/dlps_fac_arw/1

Apéndice A

Código utilizado

Código utilizado (lenguaje de programación Python).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import random
import pandas as pd
import seaborn as sns

#Se cargan los datos para la película Beautiful Mind
BMx, BMn = np.loadtxt(
    '/content/drive/MyDrive/Datos/Beautiful Mind Time Series.txt',
    skiprows = 1, usecols = [0,1], unpack = True )

BMq = np.loadtxt(
    '/content/drive/MyDrive/Datos/Beautiful Mind Time Series.txt',
    skiprows = 1, usecols = [2], unpack = True )

#Se cargan los datos para la película Harry Potter 7
HPx, HPn = np.loadtxt(
    '/content/drive/MyDrive/Datos/Harry Potter 7 Time Series.txt',
```

```
skiprows = 1, usecols = [0,1], unpack = True )

HPq = np.loadtxt(
    '/content/drive/MyDrive/Datos/Harry Potter 7 Time Series.txt',
    skiprows = 1, usecols = [2], unpack = True )

#Se define a la media y a la desviación estándar
mean1=400
sigma1 =0.45*mean1

#Se define el tamaño de las figuras
plt.rcParams["figure.figsize"] = (10, 7)

#Se crea la distribución de los cines para la película Harry Potter 7
y1 = np.random.normal(mean1, sigma1, 4125)
#Se crea un histograma con la distribución
count, bins, ignored = plt.hist(y1, 250)

#Se le da título a la figura
plt.title("Distribución de las salas de cine")

#Se le añaden etiquetas a los ejes
plt.xlabel("Umbral")
plt.ylabel("Cantidad de salas de cine con ese umbral")

#Se muestra la figura
plt.show()

#Se define la cantidad inicial de cines para la película Harry Potter 7
N0 = 4125

#Se define la cantidad inicial de personas para la película
q0 = 21542336
```

```
#Se crean dos listas para guardar los datos de la simulación
Lista = []
Ejex =[]

#Se crea un ciclo for para obtener los datos de la simulación
for i in range(0,20):

    #Número de personas en la iteración i
    n = math.ceil(HPq[i])

    #Se distribuye la cantidad de personas entre el número de cines
    Array = np.arange(NO)
    Array = np.full_like(Array, n/NO)

    #Se agregan a la lista el número de cines en la iteración i
    Lista.append(NO)

    #Se crea una copia del número actual de cines
    NA = NO

    #Si la cantidad de personas en el cine es menor que el umbral
    #entonces se elimina la película del cine
    for j in range(0, NA):
        if Array[j] < y1[j]:
            #Al final NO nos da la cantidad de cines restantes
            #que siguen mostrando con la película
            NO = NO-1

#Se borra el umbral de los cines eliminados
for k in range(0, NA-NO):
    numero = y1.tolist().index(max(y1))
    y1 = np.delete(y1,[numero])
```

```
#Se guarda el número de la iteración mas uno
    Ejex.append(i+1)

#Se grafican los datos con el eje Y en escala logarítmica
plt.plot(Ejex, np.log(Lista), linewidth=10, alpha = 0.2)

plt.scatter(Ejex, np.log(Lista), label = 'Modelo',
            marker = r"$ \bigcirc $" , s = 70, alpha = 1)

plt.scatter(HPx, np.log(HPn), label = 'Datos', marker = r"o", color = "0.3")

#Se le añade título a la figura
plt.title("Harry Potter 7")

#Se muestran las etiquetas de los datos
plt.legend()

#Se les añaden etiquetas a los ejes
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('N(t)')

#Se muestra la figura
plt.show()

#Se crea la distribución de los cines para la película Beautiful Mind
y1 = np.random.normal(mean1, sigma1, 2222)

#Se crea un histograma con la distribución
count, bins, ignored = plt.hist(y1, 250)

#Se le da título a la figura
plt.title("Distribución de las salas de cine")
```

```
#Se le añaden etiquetas a los ejes
plt.xlabel("Umbral")
plt.ylabel("Cantidad de salas de cine con ese umbral")

#Se muestra la figura
plt.show()

#Se define la cantidad inicial de cines para la película Beautiful Mind
NO = 2222

#Se define la cantidad inicial de personas para la película
q0 = 3884556 #Cantidad inicial de personas

#Se crean dos nuevas listas para guardar los datos de la simulación
Lista = []
Ejex = []

#Se crea un ciclo for para obtener los datos de la simulación
for i in range(0,20):

    #Número de personas en la iteración i
    n = math.ceil(BMq[i])

    #Se distribuye la cantidad de personas entre el número de cines
    Array = np.arange(NO)
    Array = np.full_like(Array, n/NO)

    #Se agregan a la lista el número de cines en la iteración i
    Lista.append(NO)

    #Se crea una copia del numero actual de cines
    NA = NO
```

```
#Si la cantidad de personas en el cine es menor que el umbral
#entonces se elimina la película del cine
    for j in range(0, NA):
        if Array[j] < y1[j]:
#Al final NO nos da la cantidad de cines restantes
#que siguen mostrando con la película
        NO = NO-1

#Se borra el umbral de los cines eliminados
    for k in range(0, NA-NO):
        numero = y1.tolist().index(max(y1))
        y1 = np.delete(y1,[numero])

#Se guarda el número de la iteración mas uno
    Ejex.append(i+1)

#Se grafican los datos con el eje Y en escala logarítmica
plt.plot(Ejex, np.log(Lista), linewidth=10, alpha = 0.2)

plt.scatter(Ejex, np.log(Lista), label = 'Modelo',
            marker = r"$ \bigcirc $" , s = 70, alpha = 1)

plt.scatter(BMx, np.log(BMn), label = 'Datos', marker = r"o", color = "0.3")

#Se le añade título a la figura
plt.title("Beautiful Mind")

#Se muestran las etiquetas de los datos
plt.legend()

#Se les añaden etiquetas a los ejes
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('N(t)')
```

```
#Se muestra la figura
plt.show()

#Código del modelo para los precios de empresas
#relacionadas con el petróleo

#Se define al factor externo
def q(t, q0, gamma):
    return q0*np.exp(-t/gamma)

#Se cargan los datos de la acción de Shell del año 2014
#xR es el tiempo en semanas
#PR es el precio de la acción en cada semana
xR, PR = np.loadtxt('/content/drive/MyDrive/Datos/Datos1.txt',
                    skiprows = 1, usecols = [0,1], unpack = True )

#QR es el precio del petróleo en cada semana
QR = np.loadtxt('/content/drive/MyDrive/Datos/Datos1.txt',
                skiprows = 1, usecols = [2], unpack = True )

#Se definen los valores de los parámetros
sigma1 = 4.2
mean1 = 32
t =0

#Se define un número de acciones
N = 20588

#Se define al precio inicial
P0=82.35
P=82.35
```



```
#Se define la disminucion por cada accion vendida
DeltaP = P0/N
Beta = 0.57

#Se crean dos nuevas listas para guardar los datos de la simulación
Lista = []
Ejex = []

#Se crea la distribución de los inversionistas sobre los umbrales
alpha = np.random.normal(mean1,sigma1, N)
alpha = alpha.tolist()
alpha.sort()

#Se crea un ciclo for para obtener los datos de la simulación
for i in range(0, 126):

    #Se agrega a la lista el valor del precio de la acción en la iteración i
    Lista.append(P)

    #Se agrega a la lista el valor de la iteración i
    Ejex.append(i)

    #Se calculan los umbrales dependientes del tiempo
    u = alpha+QR[i]*Beta
    u = u.tolist()

    #Si el precio de la acción ha superado a un umbral de un inversionista
    #entonces se venderan las acciones correspondientes
    for j in range(0, N):

        if u[j]<P0:

# Se le resta al precio de la acción el valor DeltaP por cada acción vendida
```

```
P -= DeltaP
#Se elimina al valor mínimo de los umbrales
    alpha.pop(0)

else:
    break

#Se actualiza el valor del precio de la acción
    P0 = P

#Se le añade título a la figura
plt.title("Precio vs Tiempo" )

#Se le añaden etiquetas a los ejes
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('Precio de la acción')

#Se grafican los datos
plt.scatter(Ejex, Lista, label = 'Modelo',
            marker = r"$ \bigcirc $" , s = 70, alpha = 1)

plt.plot(Ejex, Lista, linewidth=10, alpha = 0.2)

plt.scatter(xR, PR, label = 'Datos', marker = r"o", c = "0.3")

#Se muestran las etiquetas de los datos
plt.legend()

#Se muestra la figura
plt.show()

#Comparación de la simulación microscópica con la simulación teórica
```

```
mean1=80
sigma1 =12

q0 = 85
gamma = 15
N = 100000
P0=100
P=100
DeltaP = P/N
Beta = 1.5

Lista = []
Ejex = []
Valorqt = []

t =math.floor(-gamma*np.log((P0-mean1+4*sigma1)/(q0*Beta)))

alpha = np.random.normal(mean1,sigma1, N)
alpha = alpha.tolist()
alpha.sort()
Lista.append(P0)
Ejex.append(t-t)
Valorqt.append(q(t,q0,gamma)*Beta)

for i in range(t+1, t+50):

    Ejex.append(i-t) #Se agrega a la lista el valor i
    u = alpha+q(i,q0,gamma)*Beta #Se calculan las u's
    Valorqt.append(q(i,q0,gamma)*Beta)

for j in range(0, N):
```

```
if u[j]<P0:
    P -= DeltaP
    alpha.pop(0) #= np.delete(alpha, [indice]) #Se elimina al valor minimo
    #de las alpha's

else:
    break
Lista.append(P)

P0 = P

mean1= 80
sigma1 = 12

P0=100
q0 = 85
gamma = 15

Beta = 1.5
t0 =math.floor(-gamma*np.log((P0-mean1+4*sigma1)/(q0*Beta)))

ccc = 0.99

ListaPrecios = []
ListaPrecios.append(P0)
Experimento = []
Ejex1 = []
Ejex1.append(t0-t0)

for m in range(1, 50):

    Ejex1.append(t0+m-t0)
```

```

if 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1-q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta)/
  (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1)  )) ) < ListaPrecios[-1]:
  ListaPrecios.append( 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
    -q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta)/
      (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1)  )) ) )
else:
  ListaPrecios.append(ListaPrecios[-1])
  Experimento.append(ListaPrecios[-1]-mean1-q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta+100)

print("mu:", mean1,", sigma:", sigma1,", gamma:", gamma, "t0:", t0)

plt.rcParams["figure.figsize"] = (10, 7)

limitesuperior = 50
limiteinferior = 0

plt.scatter(Ejex1[limiteinferior:limitesuperior],
            ListaPrecios[limiteinferior:limitesuperior],
            label = 'Simulación teórica  $\mu = 80$ ,  $\sigma = 12$  y  $\gamma = 15$ .',
            marker = r"$ \bigcirc $", s = 70, alpha = 1, c = "dodgerblue")
plt.plot(Ejex1[limiteinferior: limitesuperior],
         ListaPrecios[limiteinferior: limitesuperior], linewidth=10,
         alpha = 0.2, c = "dodgerblue")
plt.scatter(Ejex[limiteinferior:limitesuperior],
            Lista[limiteinferior:limitesuperior],
            label = 'Simulación microscópica  $\mu = 80$ ,  $\sigma = 12$  y  $\gamma = 15$ .',
            marker = r"o", c = "0.3")

plt.xlabel('Tiempo', size = 25)
plt.ylabel('Variable del sistema', size = 25)

plt.xticks(size = 18)
plt.yticks(size = 18)

```

```
plt.legend(fontsize = 14, loc = 0)

plt.show()

#Comparación de la frontera del régimen de inactividad de 1 iteración
#obtenida con la simulación teórica y microscópica

LimiteSigma40 = []
LimiteGamma40 = []

for k in range(0, 150):
    for ñ in range(0, 50):
        mean1= 40
        sigma1 = 50-ñ
        if k >= 50:
            if 17-ñ > 0:
                sigma1 = 17-ñ
        q0 = 85
        gamma = 1+1*k

        P0=100

        Beta = 1.5
        t0 =math.floor(-gamma*np.log((P0-mean1+4*sigma1)/(q0*Beta)))

        t = t0+1

        ccc = 0.99

        ListaPrecios = []
```

```

ListaPrecios.append(P0)
Experimento = []
Ejex1 = []
Ejex1.append(t0)
bandera = 0

for m in range(1, 26):

    if bandera == 1:
        break

    if 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
                        -q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta )/
                        (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1)      )) ) ) < ListaPrecios[-1]:
        ListaPrecios.append( 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
                        -q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta)/
                        (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1)      )) )      )      )
    else:

        LimiteSigma40.append(sigma1+1)
        LimiteGamma40.append(gamma)
        bandera = 1
        ListaPrecios.append(ListaPrecios[-1])
        Ejex1.append(t0+m)

    if bandera == 1:
        break

#Simulacion microscopica

LimiteSigma40S = []
LimiteGamma40S = []

```

```
for m in range(0, 150):
    for ñ in range(0, 50):
        mean1= 40
        sigma1 = 50-ñ
        P0 = 100

        q0 = 85
        gamma = 1 + m
        N = 10000

        P=100
        DeltaP = P/N
        Beta = 1.5

        Lista = []
        Ejex = []
        k = 0
        v = 0

        t =math.floor(-gamma*np.log((P0-mean1+4*sigma1)/(q0*Beta)))

        alpha = np.random.normal(mean1,sigma1, N)
        alpha = alpha.tolist()
        alpha.sort()
        Lista.append(P0)
        Ejex.append(t)

        for i in range(t+1, t+26):

            Ejex.append(i) #Se agrega a la lista el valor i
            u = alpha+q(i,q0,gamma)*Beta #Se calculan las u's
            for j in range(0, N):
```



```
    if u[j]<P0:
        k = k+1
        P -= DeltaP
        alpha.pop(0)#Se elimina al valor minimo de las alpha's

    else:
        break
Lista.append(P)
if Lista[-1] < 95:
    if k == 0:

        v = 1
        break
k = 0

P0 = P

if v == 1:
    LimiteSigma40S.append(sigma1+1)
    LimiteGamma40S.append(gamma)
    break

#Grafica de las fronteras

fig, ax = plt.subplots(facecolor = 'white')

ax.spines['bottom'].set_linewidth(2)
ax.spines['left'].set_linewidth(2)
ax.spines['top'].set_linewidth(2)
ax.spines['right'].set_linewidth(2)

ax.set_facecolor('white')
```

```
plt.rcParams["figure.figsize"] = (10, 7)

plt.plot(LimiteSigma40, LimiteGamma40, label = "Simulacion teórica  $\mu = 40$ ",
         color = "dimgray")
plt.scatter(LimiteSigma40S, LimiteGamma40S, label =
           "Simulacion microscópica  $\mu = 40$ ", color = "dodgerblue")

plt.axis([1, 51, 4, 151])

plt.xlabel(r' $\log_{10}(\sigma)$ ', size = 15)
plt.ylabel(r' $\log_{10}(\gamma)$ ', size = 15)

plt.xticks(size = 12)
plt.yticks(size = 11)

plt.xscale("log")
plt.yscale("log")

plt.tick_params(length=14, direction = "inout")
plt.tick_params(axis='both', direction = "inout", which='minor', length=8)

plt.legend(fontsize = 13, loc = 3)

plt.show()

#Código para encontrar el número de iteraciones
#de las simulaciones como función de gamma y sigma.

Valores_de_m = []
Valores_de_gamma = []
```

```
for k in range(0, 150):
    for ñ in range(0, 1):
        mean1= 40
        sigma1 = 20-ñ
        P0=100

        h3 = np.vectorize(math.erfc)

        for x in range(0, 101):
            x = 101-x
            if 0 < x - ( (P0/2)*h3( (x-mean1)/
                                math.sqrt(2* math.pow( sigma1, 2) ) ) ) < 4:
                precio_limite = x
                break

        q0 = 85
        gamma = 1+1*k

        Beta = 1.5
        t0 =math.floor(-gamma*np.log((P0-mean1+4*sigma1)/(q0*Beta)))

        t = t0+1

        ccc = 0.99

        ListaPrecios = []
        ListaPrecios.append(P0)
        Experimento = []
        Ejex1 = []
        Ejex1.append(t0)
```

```

bandera2 = 0
for m in range(1, 1000):

    if bandera2 == 1:
        break
    if 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
                        -q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta )/
                    (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1) )) ) ) < ListaPrecios[-1]:
        ListaPrecios.append( 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
                        -q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta)/
                    (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1) )) ) ) )
    else:
        ListaPrecios.append(ListaPrecios[-1])
    Ejex1.append(t0+m)

    if ListaPrecios[-1] < precio_limite:
        bandera2 = 1
        Valores_de_m.append(m)
        Valores_de_gamma.append(gamma)
        break

fig, ax = plt.subplots(facecolor = 'white')
ax.grid(1, linestyle="solid", linewidth=0.4)

ax.spines['bottom'].set_linewidth(2)
ax.spines['left'].set_linewidth(2)
ax.spines['top'].set_linewidth(2)
ax.spines['right'].set_linewidth(2)

ax.set_facecolor('white')

plt.rcParams["figure.figsize"] = (10, 7)

```

```
rango = 200
inf = 0

plt.scatter(Valores_de_gamma[inf:rango], Valores_de_m[inf:rango]
            , c = "firebrick")

plt.ylabel(r'Número de iteraciones', size = 25)
plt.xlabel(r'Gamma ( $\gamma$ )', size = 25)

plt.xticks(size = 18)
plt.yticks(size = 18)

plt.show()

#Código para la caracterización

def normal_distribution(x, mean, sigma):
    return np.exp(-1*((x-mean)**2)/(2*(sigma**2)))/(math.sqrt(2*np.pi) * sigma)

def q(t, q0, gamma):
    return q0*np.exp(-t/gamma)

#Frontera del régimen continuo y sincrónico

from scipy.optimize import curve_fit

LimiteSigmaORC = []
LimiteGammaORC = []
```

```
for k in range(0, 1500):
    for ñ in range(0, 800):
        mean1 = 0
        sigma1 = 80-0.1*ñ
        P0=100
        numero = 0.8 * P0

        q0 = 85
        gamma = 2+0.1*k

        if gamma > 10:
            if 40-0.1*ñ > 0:
                sigma1 = 40-0.1*ñ

        h3 = np.vectorize(math.erfc)

        for x in range(0, 101):
            x = 101-x
            if 0 < x - ( (P0/2)*h3( (x-mean1)/
                                math.sqrt(2* math.pow( sigma1, 2) ) ) ) < 4:
                precio_limite = x
                break

        Beta = 1.5
        t0 =math.floor(-gamma*np.log((P0-mean1+4*sigma1)/(q0*Beta)))

        ccc = 0.99

        ListaPrecios = []
        ListaPrecios.append(P0)
        Experimento = []
        Ejex1 = []
        Ejex1.append(t0)
```

```
bandera2 = 0
quitar = 0
quitarn = 0

for m in range(1, 1000):

    if bandera2 == 1:
        break

    Ejex1.append(t0+m)
    if 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
-q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta)/
    (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1)    )) )    ) < ListaPrecios[-1]:
        ListaPrecios.append( 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
-q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta)/
        (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1)    )) )    )    )
    else:
        ListaPrecios.append(ListaPrecios[-1])

    if ListaPrecios[-1] < numero:
        quitar = m
        numero = -100

    if ListaPrecios[-1] < precio_limite:
        bandera2 = 1
        quitarn = m
        break

def q1(t, C1, b):
    return C1*np.exp(-t/gamma)+b

popt, pcov = curve_fit(q1, Ejex1[quitar:], ListaPrecios[quitar:])
```

```
a = 0
limitea = 0.003

for j in range(quitar, quitarn):

    a = a + ( (ListaPrecios[j+1]-ListaPrecios[j])/
    (ListaPrecios[j+1] -popt[1] ) - ( q1(j+1, popt[0], popt[1])
    -q1(j, popt[0], popt[1]) )/ (q1(j+1, popt[0], popt[1])-popt[1] ) )**2

    if a > limitea:
        LimiteSigmaORC.append(sigma1+0.1)
        LimiteGammaORC.append(gamma)
        break

if a > limitea:
    break

#Frontera del régimen intermitente

LimiteSigmaOI2NuevaDefinicion = []
LimiteGammaOI2NuevaDefinicion = []

for k in range(0, 1500):
    for ñ in range(0, 800):
        mean1= 0
        sigma1 =80-0.1*ñ
        P0=100

        q0 = 85
        gamma = 1+0.1*k
```



```
if gamma >10:
    if 30-0.1*n>0:
        sigma1 = 30-0.1*n

h3 = np.vectorize(math.erfc)

for x in range(0, 101):
    x = 101-x
    if 0 < x - ( (P0/2)*h3( (x-mean1)/
                    math.sqrt(2* math.pow( sigma1, 2) ) ) ) < 4:
        precio_limite = x
        break

N = 10000

DeltaP = P0/N
Beta = 1.5
t0 =math.floor(-gamma*np.log((P0-mean1+4*sigma1)/(q0*Beta)))
t = t0+1

ccc = 0.99

ListaPrecios = []
ListaPrecios.append(P0)
Experimento = []
Ejex1 = []
Ejex1.append(t0)
kk = 0

bandera = 0
bandera2 = 0

for m in range(1, 1000): #1, 81
```

```

if bandera == 1:
    break
if bandera2 == 1:
    break

if 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
-q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta)/
    (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1
    )) )
    ) < ListaPrecios[-1]:
ListaPrecios.append( 0.5*P0*( math.erfc( (ListaPrecios[-1]-mean1
-q(t0+m+ccc-1,q0,gamma)*Beta)/
    (math.sqrt(2*( sigma1*sigma1
    )) )
    )
    )
kk = 0
else:
ListaPrecios.append(ListaPrecios[-1])
if kk == 1:
    if ListaPrecios[-4]-ListaPrecios[-3] > 0.02*P0:
        LimiteSigmaOI2NuevaDefinicion.append(sigma1+0.1)
        LimiteGammaOI2NuevaDefinicion.append(gamma)
        bandera = 1

kk = kk+1

Ejex1.append(t0+m)

if ListaPrecios[-1] < precio_limite:
    bandera2 = 1
    break

if bandera == 1:
    break

```

#Código para graficar la caracterización

```
mean1 = 0

fig, ax = plt.subplots(facecolor = 'white')

ax.spines['bottom'].set_linewidth(2)
ax.spines['left'].set_linewidth(2)
ax.spines['top'].set_linewidth(2)
ax.spines['right'].set_linewidth(2)

ax.set_facecolor('white')

plt.rcParams["figure.figsize"] = (10, 7)

plt.plot(LimiteSigmaOI2NuevaDefinicion[:]/np.array(100),
LimiteGammaOI2NuevaDefinicion[:], label =
f"Régimen intermitente.\n+r" Simulación teórica  $\frac{\mu}{P_{t_i}} = 0$ ",
        color = "yellowgreen")
plt.plot(LimiteSigmaORC[:]/np.array(100), LimiteGammaORC[:], label =
f"Régimen continuo y sincrónico.\n"
+r"Simulación teórica  $\frac{\mu}{P_{t_i}} = 0$  ", color = "darkorange")

plt.yscale("log")

plt.xlim(0.01, 0.6)
plt.ylim(1, 156)

plt.xlabel(r' $\frac{\sigma}{P_{t_i}}$ ', size = 25)
plt.ylabel(r' $\log_{10}(\gamma)$ ', size = 25)

plt.xticks(size = 18)
plt.yticks(size = 18)

plt.tick_params(length=14, direction = "inout")
```

```
plt.tick_params(axis='both', direction = "inout", which='minor', length=10)

plt.legend(fontsize = 13, framealpha=0, loc = 9, labelspaceing = 0,
           bbox_to_anchor=(0.45, 1.15), ncol = 2)

plt.xticks([0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6])

plt.show()

#Código para aplicar el modelo
#a los datos de la disminución de masa de la Antártida

dfaño = pd.read_csv("/content/Datosantartica.txt", header =None)
dfaño = dfaño.rename(columns={0:"Datos"})

año = []
Dato = []
Incertidumbre = []

for i in range(dfaño.shape[0]):
    a, b, c = dfaño.loc[i][0].split()
    año.append(float(a))
    Dato.append(float(b))
    Incertidumbre.append(float(c))

dfT = pd.read_csv("/content/T.txt", header = 0)

añoT = []
DatoT1 = []
```

```
DatoT2 = []

for i in range(1, dfT.shape[0]):
    a, b, c = dfT.loc[i][0].split()
    añoT.append(float(a))
    DatoT1.append(float(b))
    DatoT2.append(float(c))

sigma1 = 280

mean1 = -150
t = 0
N = 20588

P0=3062.29
P=3062.29

DeltaP = P0/N
Beta = (P0-mean1+1*sigma1)/(-1*DatoT2[122]+1)

Lista = []
Ejex = []

alpha = np.random.normal(mean1,sigma1, N)
alpha = alpha.tolist()
alpha.sort()

for i in range(0, 21):
    Lista.append(P)
    Ejex.append(i) #Se agrega a la lista el valor i
    u = alpha+(-1*np.array(DatoT2[i+122])+1)*Beta
    u = u.tolist()
```

```
for j in range(0, N):
    if u[j]<P0:
        P -= DeltaP
        alpha.pop(0) #Se elimina al valor minimo de las alpha's

    else:
        break
P0 = P

plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('Variación de masa de la Antártida [Gt]')

plt.scatter(Ejex+np.array(2002), Lista - np.array(3000), label = 'Modelo',
            marker = r"$ \bigcirc $" , s = 70, alpha = 1)
plt.plot(Ejex+np.array(2002), Lista - np.array(3000), linewidth=10,
         alpha = 0.2)

plt.scatter(año, np.array(Dato), label = 'Datos', marker = r"o", c = "0.3")
plt.plot(año, np.array(Dato), marker = r"o", c = "0.3")

plt.legend()

plt.tick_params(axis='both', labelrotation = 0, direction = "inout",
               which='both', length=10)
plt.xticks(np.linspace(2002, 2023, 8))

plt.show()
```