



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN

MODELADO MATEMÁTICO Y COMPUTACIONAL  
DE UN FLUIDO A TRAVÉS DE UN CANAL CON  
CONVECCIÓN Y FLUJO FORZADO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER POR EL GRADO DE:  
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

PRESENTA:

**Gonzalez Zamudio Edgar Alejandro**

TUTOR:

Dr. Aldo Gómez López



Cuautitlán Izcalli, Estado de México, 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi madre y padre, Mónica y German, quienes me han apoyado todo este tiempo, y  
sin los cuales no podría haber llegado hasta aquí.*

*A mis amigos, Axel, Emmanuel, Jehrek y Maira, con quienes me reí cientos de veces  
en los pasillos, a quienes les deseo mucho éxito.*

*Y a mi profesor, el Dr. Aldo, quien me guio e inspiro para poder completar este  
trabajo y adentrarme en este tema.*

*Tambien agradezco a los proyectos PE103923 y CI2270 de la Universidad Nacional  
Autónoma de México, por su apoyo.*





# Resumen

---

El presente trabajo tuvo como objetivo el desarrollo de un modelado matemático y computacional capaz de describir el comportamiento de la capa límite térmica y dinámica de un fluido siendo conducido a través de un canal cerrado, con presencia de fuerzas de flotación debido a diferencias de temperatura, esto a través del método matemático de diferencias finitas y siendo el código fuente configurado para cada fluido de interés a través del tiempo y los números adimensionales: Reynolds, Prandtl y Richardson. Para lograr este cometido se manejaron las ecuaciones de Navier-Stokes, así como la ecuación de conservación de la energía térmica. Se ajustan las mismas tomando en cuenta las características particulares del sistema y añadiendo el término de la aproximación de Boussinesq para contemplar los efectos de flotabilidad, desarrollando así las ecuaciones gobernantes del mismo. De la misma manera, se realizó un análisis de 5 fluidos, siendo estos: Sodio-potasio, aire, vapor de agua, agua y aceite. En este análisis se puede observar como al aumentar el número de Prandtl y Reynolds y disminuir el número de Richardson se empiezan a perder los efectos de flotabilidad y difusión del calor.

# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Presentación . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	1
1.3. Justificación de la propuesta . . . . .	4
1.4. Objetivos . . . . .	5
1.4.1. Objetivo general . . . . .	5
1.4.2. Objetivos particulares . . . . .	5
1.5. Metodología . . . . .	5
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Ecuación de conservación de la masa . . . . .	7
2.2. Ecuación de conservación del movimiento . . . . .	9
2.3. Ecuación de conservación de la energía . . . . .	10
2.4. Aproximación de Boussinesq . . . . .	12
<b>3. Sistema</b>	<b>13</b>
3.1. Descripción del sistema . . . . .	13
3.2. Deducción de las ecuaciones que describan el comportamiento . . . . .	15
3.2.1. Ecuación de conservación de la masa . . . . .	15
3.2.2. Ecuación de conservación del movimiento . . . . .	16
3.2.3. Ecuación de conservación de la energía . . . . .	16
<b>4. Adimensionalización y discretización de ecuaciones</b>	<b>17</b>
4.1. Ecuaciones adimensionales . . . . .	17
4.1.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	18
4.1.2. Ecuación de conservación de la energía . . . . .	19
4.1.3. Números adimensionales . . . . .	20
4.2. Discretización de las ecuaciones . . . . .	22
4.2.1. Discretización de la ecuación de movimiento en el eje x . . . . .	22
4.2.2. Discretización de la ecuación de movimiento en el eje y . . . . .	24
4.2.3. Discretización de la ecuación de energía . . . . .	25

<b>5. Resultados</b>	<b>27</b>
5.1. Código fuente . . . . .	27
5.1.1. Condiciones para la simulación . . . . .	30
5.2. Graficos para diferentes condiciones y fluidos . . . . .	31
5.2.1. Sodio-Potasio . . . . .	32
5.2.2. Aire . . . . .	36
5.2.3. Vapor de agua . . . . .	37
5.2.4. Agua . . . . .	41
5.2.5. Aceite . . . . .	45
5.2.6. Análisis general . . . . .	49
<b>6. Conclusiones</b>	<b>54</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>



# Índice de figuras

---

1.1. Capa limite térmica. Bejan, Adrián (1993) . . . . .	3
1.2. Capa limite dinámica. Bejan, Adrián (1993) . . . . .	3
2.1. Conservación de la masa en dos dimensiones. Bejan, Adrián (2022) . . . . .	8
2.2. Volumen de control mostrando el flujo de calor y viscosidad-trabajo en dirección x. White, Frank (2013) . . . . .	11
3.1. Diagrama de referencia . . . . .	15
5.1. Capas limites térmicas para $Pr=0.02102$ . . . . .	34
5.2. Capas limites dinámicas para $Pr=0.02102$ . . . . .	35
5.3. Capas limites térmicas para $Pr=0.7$ . . . . .	38
5.4. Capas limites dinámicas para $Pr=0.7$ . . . . .	39
5.5. Capas limites térmicas para $Pr=1.00$ . . . . .	42
5.6. Capas limites dinámicas para $Pr=1.00$ . . . . .	43
5.7. Capas limites térmicas para $Pr=7$ . . . . .	46
5.8. Capas limites dinámicas para $Pr=7$ . . . . .	47
5.9. Capas limites térmicas para $Pr=2962$ . . . . .	50
5.10. Capas limites dinámicas para $Pr=2962$ . . . . .	51

# Introducción

---

## 1.1. Presentación

Dentro del presente trabajo se desarrolla el modelado matemático y la simulación del flujo de un fluido newtoniano dentro de un canal cerrado y recto, sometido a un gradiente de presión constante y un campo de temperaturas constante; describiendo con las ecuaciones obtenidas el comportamiento de la capa límite térmica y la capa límite de cantidad de movimiento (capa límite dinámica).

Al hablar de fluidos newtonianos se entiende como aquel fluido, líquido o gaseoso, que mantiene particularmente su viscosidad (resistencia interna de un fluido a fluir) independientemente de la fuerza que se aplique en él. Por otra parte al hacer referencia de un canal cerrado y recto se puede entender una geométrica típica de una tubería rectangular.

Para este modelo, se desarrollan las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones, con un régimen de flujo laminar ( $Re$  menor a 2300), incompresible, desde el estado transitorio hasta el estacionario, con convección natural y forzada. El código fuente que sirve para realizar el modelo computacional se desarrolló en lenguaje Python, dentro del ambiente Jupyter Notebook, obteniendo gráficamente campos de velocidad y de temperaturas para diferentes fluidos con números de Reynolds, Prandtl y Richardson distintos.

## 1.2. Antecedentes

El modelado matemático es un mecanismo en el cual a través de expresiones matemáticas (ecuaciones) se busca predecir el comportamiento de distintos sistemas, particularmente en un sistema donde circula un fluido este debe de responder a las características específicas del mismo, al igual que a su diseño siendo ambos determinantes

## 1. INTRODUCCIÓN

---

para poder estudiar al fluido y su comportamiento. Un ejemplo de esto se encuentra el artículo Computational simulation of heat transfer in a dip shrink tank using two different arrangements of electrical resistances (1) donde a través de un modelado matemático se obtuvieron las ecuaciones que rigen al sistema y se realizó la simulación computacional de un tanque de retracción no comercial, cambiando el arreglo de las resistencias en el mismo para así observar cual es más eficiente, es este mismo artículo se menciona que para resolver computacionalmente un sistema, es importante establecer condiciones de frontera.

Otro ejemplo de modelado matemático está en Fenómeno conjugado de conducción convección natural y producción de entropía en una cavidad rectangular con paredes de espesor finito (2) donde a través del método de volúmenes finitos y distintos algoritmos se realizó un código computacional capaz de simular el comportamiento de un fluido para así observar los efectos de flotación y producción de entropía en una cavidad vertical y rectangular, a fin de poder entender mejor esos efectos se configuraron diferentes condiciones iniciales, y particularmente el autor vario el número adimensional de Rayleigh del fluido en su estudio.

Las ecuaciones que frecuentemente se usan para poder realizar el modelado matemático de fluidos son las de Navier-Stokes, estas son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales y no lineales que describen el movimiento de fluidos, se desarrollaron independientemente por Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes, en 1827 y 1845 respectivamente (3), estas ecuaciones hoy en día no tienen una solución general, esto significa que no existe una expresión matemática de estas que sirva para describir el comportamiento del flujo de fluidos para todas las situaciones posibles, sin embargo, debido a esta falta de solución general a lo largo de los años se han encontrado diferentes soluciones particulares, las cuales dependen de las características de cada sistema para el cual son desarrolladas.

Por otra parte, para entender el comportamiento de un fluido se debe contemplar el concepto de capa limite, este fue por primera vez propuesto en 1904 por Ludwig Prandtl, describiendo la formación de una zona donde se presentan variaciones de velocidad y temperatura, cerca de superficies expuestas a flujo de fluidos, como se muestra en la figura (1.1) y en la figura (1.2), donde se observan la capa limite térmica y la capa límite de cantidad de movimiento, respectivamente, para un flujo exterior y confinado. En otras palabras la capa limite describe la región cerca de una superficie sólida donde hay variaciones significativas en la velocidad y la temperatura del fluido

Se observa que al interior de la capa limite, tanto dinámica como térmica, la velocidad y la temperatura son funciones tanto de la geometría (posición con respecto a la superficie) como de las propiedades del fluido y sus condiciones de flujo (viscosidad, densidad, conductividad térmica, velocidad, etc.), mientras que al exterior de la capa limite, la velocidad y temperatura del fluido son constantes e independientes

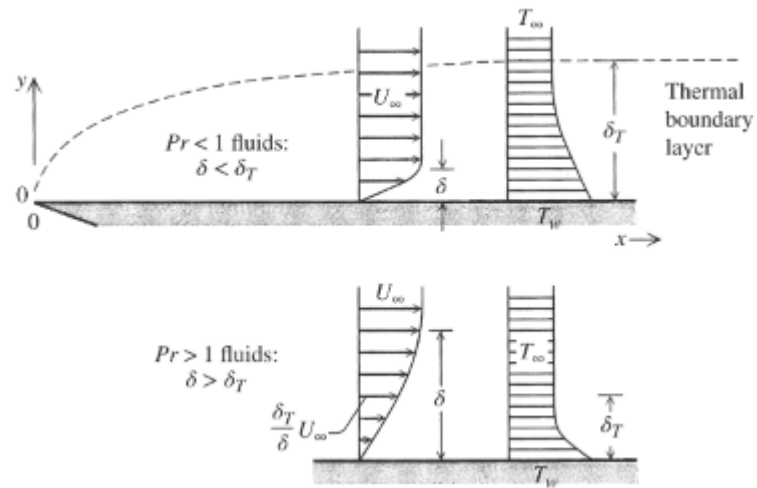


Figura 1.1: Capa limite térmica. Bejan, Adrián (1993)

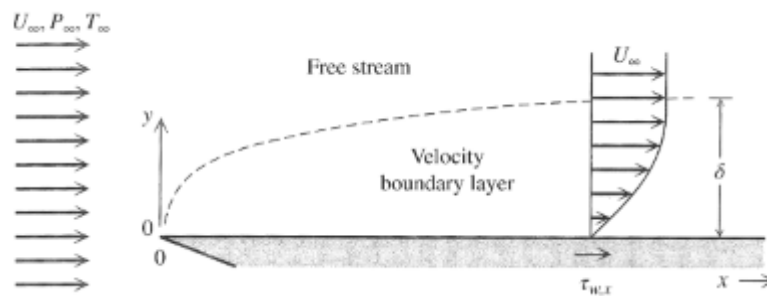


Figura 1.2: Capa limite dinámica. Bejan, Adrián (1993)

## 1. INTRODUCCIÓN

---

de la superficie. Dentro del estudio de fluidos han surgido diversos números adimensionales (número que relaciona 2 o más propiedades sin ocupar dimensiones como kg, m, etc.), particularmente para las condiciones y propiedades de un fluido que afectan directamente la capa límite térmica y dinámica típicamente se ocupan los números adimensionales de Reynolds (4) y Prandtl (5), definidos matemáticamente como;

$$Re = \frac{\rho HV}{\mu}$$

y

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k}$$

Donde  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $C_p$ ,  $H$ ,  $V$  y  $k$  representan a la viscosidad, densidad, calor específico, longitud característica, velocidad característica y conductividad térmica, respectivamente.

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones diferenciales que sirven para describir condiciones de flujo mediante un balance de masa y de cantidad de movimiento. A lo largo de los años estas ecuaciones han demostrado ser realmente complejas analíticamente, es por ello que ha nacido un campo de estudio llamado Dinámica de Fluidos Computacional (por sus siglas en inglés CFD) (6), que consiste en la simulación computacional de dinámica de fluidos, teniendo como objetivo encontrar aproximaciones numéricas para diferentes casos, esto a través de métodos como diferencias finitas, elementos finitos y volumen finito. Debido a la ausencia de una solución general de las mencionadas ecuaciones es que la resolución de aproximaciones a través de la simulación computacional de dinámica de fluidos cobra tanta importancia para poder describir el comportamiento de un fluido en diferentes situaciones.

### 1.3. Justificación de la propuesta

Una de las aproximaciones teóricas al comportamiento de la capa límite fue propuesto por Heinrich Blasius, el cual estudio el comportamiento de esta en una placa semi infinita, sin embargo, este estudio proporciono una solución del comportamiento de la capa límite para placas planas con un flujo paralelo solo en estado estacionario. Por otra parte, el estudio de la capa límite en fluidos transitorios actualmente no tiene una solución general, sin embargo, se tienen diferentes soluciones particulares, por lo que la creación de un modelo matemático y código fuente que pueda contribuir a esta área de estudio y sea capaz de proporcionar como resultado la solución que abarque el estado transitorio de la capa límite en un canal cerrado resulta una gran contribución.

El código fuente y las ecuaciones obtenidas podrán servir para diferentes aplicaciones, siendo estas capaces de predecir cual será el comportamiento de la temperatura en un fluido en movimiento. Cotidianamente se pueden observar sistemas donde diferentes

fluidos se ven sometidos a calor, sin embargo, un ejemplo particular donde se tienen sistemas con estas características es en la generación de energía por termoeléctricas, siendo de gran utilidad para esta industria un código fuente capaz de predecir el comportamiento de fluidos.

El tema elegido y el objetivo final es un reflejo de los diferentes conocimientos que se fueron adquiriendo a lo largo de la licenciatura, entre los que destacan, conocimientos en mecánica de fluidos, transferencia de calor, ecuaciones diferenciales y programación. Siendo la creación de un código fuente capaz de mostrar gráficamente el comportamiento de un fluido bajo condiciones puntuales la culminación de este conjunto de conocimientos.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Desarrollar un código computacional de dinámica de fluidos que permita estudiar y analizar el comportamiento de los mismos al ser sometidos a flujo por diferencial de presión y sujetos a convección.

### 1.4.2. Objetivos particulares

- Obtener las ecuaciones que describen el comportamiento de la temperatura y de la velocidad de un fluido sometido a convección y conducido a través de flujo por gradiente de presión.
- Adimensionar el sistema de ecuaciones para desarrollar un modelo numérico a partir de las ecuaciones de conservación mediante el método de diferencias finitas.
- Desarrollar el código computacional en lenguaje Python para resolver el modelo numérico, analizando el comportamiento de las capas límite a diferentes condiciones.

## 1.5. Metodología

Se tiene como objetivo principal el desarrollo de un código computacional que muestre el comportamiento de diferentes fluidos a través de un canal cerrado, para ello se planea partir de la ecuación de Navier-Stokes la cual describe el movimiento de un fluido viscoso, de la misma forma se planea partir de la ecuación de conservación de la energía para así poder describir la transferencia de calor, con estas dos ecuaciones, y

## 1. INTRODUCCIÓN

---

contemplando los efectos de flotabilidad que pueda tener el fluido debido a los efectos de la temperatura utilizando la aproximación de Boussinesq, se desarrollaran las ecuaciones para poder modelar el comportamiento del fluido.

En el proceso, se van a adimensionar las ecuaciones obtenidas, para posteriormente discretizarlas, así obteniendo una ecuación que describa el comportamiento de la temperatura y de la velocidad a través del tiempo, estableciendo en el proceso condiciones de frontera en el sistema para así finalmente desarrollar el código fuente en Python que nos brinde la gráfica y los cálculos de la evolución del sistema y su capa limite a través del tiempo, posteriormente se modificaran las condiciones de entrada en el código computacional para poder analizar los diferentes fluidos.

# Preliminares

---

Para poder desarrollar un modelo matemático que sea capaz de predecir el flujo de un fluido se deben partir de ciertas ecuaciones que nos describan cómo se comporta su masa, su movimiento y su temperatura. A continuación se presentan las ecuaciones necesarias para ello.

## 2.1. Ecuación de conservación de la masa

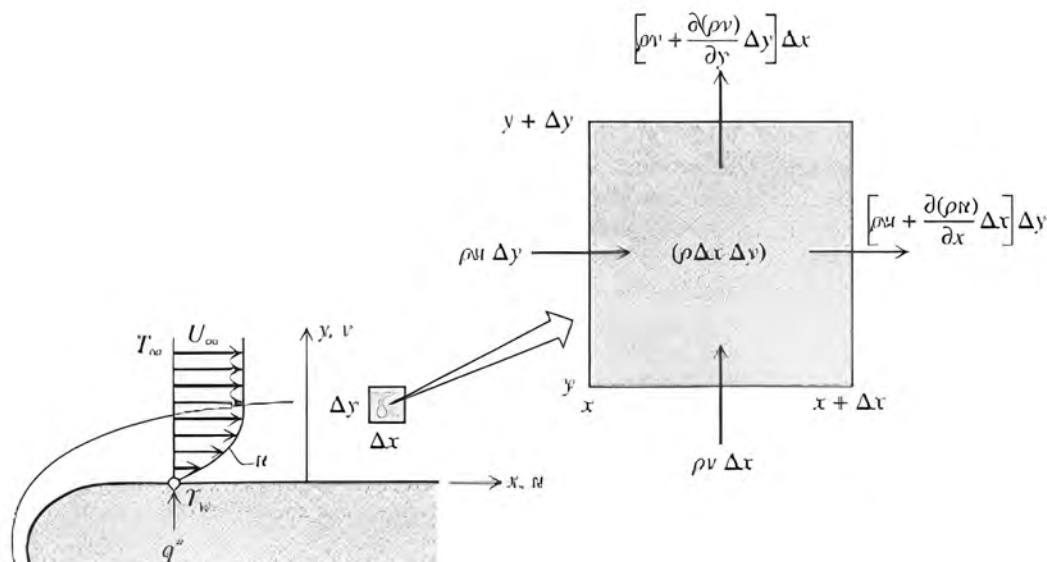
La ecuación de conservación de la masa, para un fluido en dos dimensiones, tiene 3 componentes vitales las cuales describen el movimiento del fluido, siendo estas:  $u$  (para la velocidad en  $x$ ),  $v$  (para la velocidad en  $y$ ) y  $t$  (para el tiempo). En el capítulo 5.2 del libro Heat Transfer de Adrián Bejan (3) este hace una deducción de las ecuaciones basado en la figura (2.1), resumiendo esta deducción se parte de la ecuación:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \sum_{\text{entradas}} \dot{m} + \sum_{\text{salidas}} \dot{m}$$

Definiendo a  $m$  como la masa,  $t$  como el tiempo y  $\dot{m}$  como el flujo masico, la ecuación expresa que los cambios en la masa con respecto al tiempo en el sistema serán iguales la sumatoria de las entradas de flujo masico (medida de la cantidad de masa que atraviesa una sección transversal de un sistema o un conducto por unidad de tiempo) mas las sumatoria de las salidas de este.

Para detallar como es que fluye la masa se considera un área cuadrangular del fluido en movimiento, como en la figura (2.1), a esto se le llama control infinitesimal del volumen (concepto que consiste en considerar un pequeño volumen diferencial para poder analizar el comportamiento de un flujo en un punto específico) definido en tamaño como  $\Delta x \Delta y$ . A partir de este control infinitesimal del volumen es que se define a la parte inferior así como a la parte izquierda del mismo como puntos de entrada, y se define a la parte derecha y superior de la figura como puntos de salida, observándose





**Figura 2.1:** Conservación de la masa en dos dimensiones. Bejan, Adrián (2022)

en la figura (2.1).

Ahora para aplicar este control infinitesimal a la ecuación primero se considera en el eje  $x$  una velocidad del fluido  $u$ , mientras que en el  $y$  una velocidad  $v$ , también se considera que el fluido cuenta con una densidad  $\rho$ , por lo que la masa se podría definir como  $\rho\Delta x\Delta y$  (nótese que se excluye a  $z$  puesto que se considera el análisis en dos dimensiones), al mismo tiempo que la entrada por el eje  $x$  se vería dada por  $\rho u\Delta y$  y la entrada del eje  $y$  como  $\rho v\Delta x$ .

Por otra parte, a la salida se tendría por el eje  $x$  a la expresión  $\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y$  y para el eje  $y$  a la expresión  $\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right]\Delta x$ , las derivadas parciales dentro de estas expresiones de salida se deben a los posibles cambios de velocidad que puede tener el fluido al pasar a través del control infinitesimal de volumen.

Al unificar estos terminos se llega a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Delta x\Delta y) = \rho u\Delta y + \rho v\Delta x - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right]\Delta x$$

Buscando simplificar la ecuación puede se puede dividir entre el tamaño  $\Delta x\Delta y$  obteniendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

La cual representa la ecuación de conservación de la masa en volumen de control, para un fluido newtoniano, en 2 dimensiones y en coordenadas cartesianas.

## 2.2. Ecuación de conservación del movimiento

Esta ecuación se basa en el principio de conservación del momento, para fluidos se suele definir como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mv_n) = \sum F_n + \sum_{\text{entradas}} \dot{m}v_n - \sum_{\text{salidas}} \dot{m}v_n$$

Siendo  $n$  la dirección del fluido,  $v_n$  y  $F_n$  las proyecciones de las velocidades y fuerzas del fluido. Es de notarse en esta ecuación que la masa juega un papel importante en la conservación del movimiento. Esta primera ecuación se puede interpretar como la representación para un volumen infinitesimal controlado de la segunda ley de Newton. A través de un desarrollo matemático en el cual se considera un fluido incompresible y newtoniano, Adrián Bejan en el capítulo 5.2.2 de Heat Transfer (3) muestra cómo se puede llegar a la ecuación:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + f$$

Representando  $P$  la presión ejercida en el fluido,  $f$  las fuerzas externas (como gravitacionales),  $\vec{V}$  el vector de velocidades,  $\mu$  la viscosidad dinámica y  $\rho$  la densidad del fluido cabe aclarar que  $\nabla$  y  $\nabla^2$  hacen referencia a primeras y segundas derivadas, respectivamente.

En la ecuación anterior el lado izquierdo de la igualdad hace referencia a la aceleración que sufre el fluido, mientras que el lado derecho hace referencia a la fuerza que actúan sobre el mismo. De forma particular el término  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  expresa los cambios de velocidad respecto al tiempo,  $\vec{V} \nabla \vec{V}$  expresa la velocidad y dirección con la que se mueve el fluido, del otro lado de la igualdad el término  $-\nabla P$  expresa la fuerza que ejerce el gradiente de presión sobre el fluido, el término  $\mu \nabla^2 \vec{V}$  expresa las fuerzas de tensión internas del mismo fluido y finalmente  $f$  representa cualquier fuerza externa.

Estas ecuaciones para el flujo de fluidos también se les conoce como las ecuaciones de Navier-Stokes, presentadas por primera vez en 1822 y publicadas (7) en 1827 por el ingeniero Frances Claude Louis Marie Henrie Stokes (1785-1836), más tarde incluso siendo especificada para un fluido en eje  $x$  por Ludwig Prandtl en 1904 (5). Originalmente fueron desarrolladas pensando en fluidos newtonianos e incompresibles. A la par, Frank M. White en el capítulo 4.3 de su libro Mecánica de fluidos (5) menciona que las ecuaciones de Navier-Stokes son inicialmente válidas para cualquier tipo de fluido que

cumpla las condiciones dichas.

La ecuación anterior está diseñada para fluido newtoniano e incompresible en un volumen de control con movimiento en el eje x, al ajustar la ecuación anterior a un canal cerrado en dos dimensiones, x y y, descartando los términos que incluyan una dimensión z así como el termino de fuerzas externas, se puede obtener la ecuación que describa el movimiento en cada eje.

La ecuación que representa el movimiento en el eje x, donde la variable u representa la velocidad del fluido en ese eje, es:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Y para el eje y, donde v representa la velocidad del fluido en ese eje, es:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

### 2.3. Ecuación de conservación de la energía

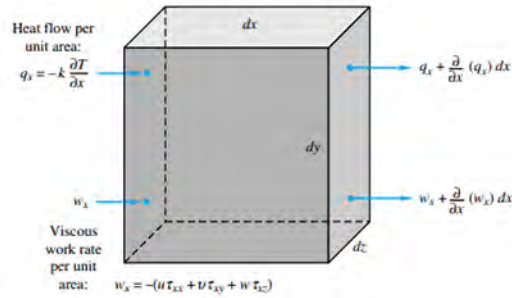
La ecuación tiene como base a la primera ley de la termodinámica la cual dice que la energía total de un sistema aislado se mantiene constante (la energía no se crea ni se destruye, se transforma), para el caso de estudio donde el fluido a través de un canal cerrado está siendo movido por un gradiente de presión, se puede establecer que el cambio de la energía de un sistema es igual al calor suministrado menos el trabajo realizado (5):

$$\Delta U = Q - W$$

El análisis de esta ecuación y su derivación a diferentes formas es un análisis extenso, sin embargo, se busca que esta ecuación represente la energía un fluido en movimiento en un canal cerrado, para ello se considera un volumen controlado, donde la masa y la energía sean dependientes del tiempo, estableciendo puntos de entrada y salida en el sistema, teniendo en cuenta transferencia de calor así como el trabajo. Adrián Bejan muestra en el capítulo 5.2.3 de Heat Transfer (3) al tener en cuenta estas condiciones la ecuación se necesita representar como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(me) = \sum_{\text{entradas}} \dot{m}e - \sum_{\text{salidas}} \dot{m}e + \sum_i q_i + \sum_j w_j$$

En esta ecuación se desprecian las energía cinéticas y potencial gravitacional en el fluido. El lado izquierdo representa la acumulación de la energía dentro del volumen de control, siendo e la energía interna, y en el lado derecho representado las primeras dos sumas los cambios de energía debidos al movimiento del fluido, mientras que el tercer termino representa la tasa de transferencia de calor y finalmente el cuarto termino



**Figura 2.2:** Volumen de control mostrando el flujo de calor y viscosidad-trabajo en dirección x. White, Frank (2013)

representando la tasa de trabajo.

En contraparte, Frank M. White en el capítulo 4.5 de su libro Mecánica de fluidos (5), hace una deducción de las ecuaciones a partir de un balance de energía y considerando un volumen de control elemental (o control infinitesimal de volumen) en coordenadas cartesianas sometido a flujo de calor y a trabajo viscoso en la dirección x, como se muestra en la figura (2.2). Así pues, al desarrollar la ecuación teniendo con base la figura llega a la ecuación que representa la conservación de la energía para un fluido sometido a conducción y convección, en estado transitorio, siendo:

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \Phi$$

En esta ecuación el lado izquierdo de la igualdad representa la variación de energía interna en el fluido con respecto al movimiento y el tiempo, mientras que el lado derecho de la igualdad representa la transferencia de energía dentro del fluido debida a la conducción térmica del mismo, así como cualquier absorción o generación que pueda haber. Esta ecuación es válida para un fluido newtoniano (con viscosidad constante), conductividad térmica constante, incompresible (densidad constante), calor específico constante y conductor de calor, exceptuando la transferencia de calor por radiación y las fuentes internas de calor que podrían ocurrir durante una reacción química o nuclear.

De forma particular la expresión  $\frac{\partial T}{\partial t}$  representa el cambio de energía respecto al tiempo,  $V \nabla T$  el cambio de energía respecto al movimiento,  $k \nabla^2 T$  a la conducción de calor y  $\Phi$  la disipación o generación de calor (principalmente por fricción).

Para que represente a un fluido newtoniano e incompresible en un volumen de control de 2 coordenadas, x y y, se hace un ajuste, igualmente para tener en cuenta que el fluido sea conducido por gradiente de presión y este sometido a convección, se considera que la disipación viscosa (generación o disipación de calor por fricción) que representa el termino  $\Phi$  es despreciado al igual que los términos correspondientes

al eje  $z$ , y el  $C_v$  pasa a considerarse  $C_p$ , pues en la ecuación de energía en fluidos incompresibles es el uso correcto (3). Al tomar estas condiciones en cuenta la ecuación pasa a ser finalmente:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Siendo  $C_p$  el calor específico,  $T$  la temperatura,  $k$  el coeficiente de conducción de calor,  $\rho$  la densidad del fluido,  $u$  y  $v$  las velocidades en el eje  $x$  y  $y$ , respectivamente.

## 2.4. Aproximación de Boussinesq

Introducida por Joseph Boussinesq, profesor de la facultad de ciencias de París, y por A. Oberbeck, en su estudio “Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen” de 1879 (8), la aproximación de Boussinesq es un concepto utilizado en dinámica de fluidos para simplificar las ecuaciones que describen el flujo de fluidos sometidos a convección. Esta simplificación matemática sirve para describir la flotabilidad de un fluido debido a un cambio de temperatura de este, ya que considera constante la densidad de este excepto para los términos asociados con la gravedad y la flotabilidad (cambio de densidad debido al aumento de temperatura). Por ende, la aproximación funciona bajo las condiciones de un fluido incompresible, y newtoniano, así mismo, fue desarrollada principalmente para fluidos laminares aunque también sirve en turbulentos, por ende, esta aproximación es útil en rangos muy variados de velocidad y temperatura, pero cuenta con una mayor precisión a bajas diferencias de temperaturas (3).

Ha sido ampliamente ocupada en la modelación computacional de fluidos, pues al suponer que la variación en la densidad del fluido solo es significativa en los términos que dependen de la gravedad y la temperatura se vuelve una herramienta poderosa para la simulación computacional de fluidos sometidos a convección. Bejan Adrián en el capítulo 7.2.1 de su libro Heat Transfer (3) deduce en un fluido dentro de un volumen controlado, sometido a convección en una pared (que no sea la pared superior del sistema), la incorporación matemática de la aproximación para las ecuaciones de Navier Stokes, de tal manera que a la ecuación de continuidad en el eje  $y$  se le ve incorporando un término que engloba los efectos de la gravedad y cambios de densidad, obteniendo la ecuación:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta(T - T_0)g$$

siendo  $g$  la gravedad,  $\beta$  el coeficiente de expansión térmica volumétrica,  $T_1$  y  $T_0$  las temperaturas.

### 3.1. Descripción del sistema

Como se ha mencionado con anterioridad, es importante establecer condiciones del sistema, así como dejar de forma clara su geometría. Por ello, se hace la aclaración que el sistema para el cual se desarrolla el código y las respectivas ecuaciones consiste en un canal cerrado y recto a través del cual se conducirá al fluido debido a un gradiente de presión constante, el fluido se considerara newtoniano, incompresible y el flujo laminar, al mismo tiempo el canal cerrado se considera rectangular, en una situación donde es liso en sus paredes (sin irregularidades significativas) y contará con calentamiento uniforme en la parte inferior del mismo, se desprecia el espesor de las paredes pues las temperaturas serán consideradas en la superficie interna de las paredes, la altura del canal se considera igual a su longitud, así considerando un volumen de control. Se considera la condición de no deslizamiento, y por ende, la velocidad mayor se verá presente en el centro del canal cerrado. El flujo dentro del sistema se considera con una entrada constante por el lado izquierdo y una salida por el lado derecho.

El modelado matemático del sistema se considera bajo condiciones en las que el fluido se mantenga newtoniano (con una viscosidad constante), por ende, el rango de temperaturas y velocidad en la que el fluido se mantenga así dependerá de cada caso. Normalmente el rango de temperaturas donde un fluido se suele considerar newtoniano se encuentra entre sus cambios de fase a presión atmosférica. Si se manejan temperaturas o velocidades donde el fluido se pueda considerar con un comportamiento no newtoniano (deje de mantener una viscosidad constante), entonces el modelo hecho puede perder precisión.

Las variables del sistema se representarán con una letra:

A la velocidad en  $x$  se le llamara inicialmente  $u$ .

A la velocidad en  $y$  se le llamara inicialmente  $v$ .

### 3. SISTEMA

---

A la presión se le llamara inicialmente P.

A la temperatura se le llamara inicialmente T.

Al largo del sistema se le llamara inicialmente x.

Al alto del sistema se le llamara inicialmente y.

Para una mayor versatilidad los valores de estas variables estarán en el rango de 0 a 1 adimensional, siendo 0 el mínimo valor presentado en el sistema dimensional por cada variable, y 1 el máximo valor presente en el sistema dimensional por cada variable, por ejemplo, si el sistema tuviera un temperatura máxima de 800 k y una mínima de 400 k, el valor de  $T=0$  correspondería a la temperatura de 400 k, y el valor  $T=1$  correspondería a 800 k, a su vez puede haber una temperatura intermedia, por ejemplo, 600 k que se representarían con  $T=0.5$ . Una mejor referencia a esto se puede observar en la figura 3.1.

Las condiciones de frontera (condiciones constantes para las variables en puntos que se encuentran al borde del sistema) propuestas debido a la geometría y flujo que se busca analizar son:

Para la velocidad u, en la entrada del sistema (0, y) se considerará a la velocidad adimensional con valor 1, exceptuando el borde superior (x, 1) e inferior (x, 0) del sistema donde a lo largo del mismo la velocidad u en dichos bordes será de 0 dimensional y adimensional. Para la velocidad v en la entrada del sistema (0, y) se considerará de 0 dimensional y adimensional al igual que en los bordes superior (x, 1) e inferior (x, 0) a lo largo del sistema. Por otra parte la temperatura T se considera de 0 adimensional en la entrada del sistema (0, y) al igual que a lo largo del borde superior (x, 1) y se considerara de 1 a lo largo del borde inferior (x, 0). Finalmente el cambio de u, v y T con respecto a x en la salida del sistema (1, y) se despreciará. Todas estas condiciones por las cuales se rige el sistema se pueden expresar de forma concisa como:

$$u(x, 1) = 0$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$u(0, y) = 1$$

$$v(x, 1) = 0$$

$$v(x, 0) = 0$$

$$v(0, y) = 0$$

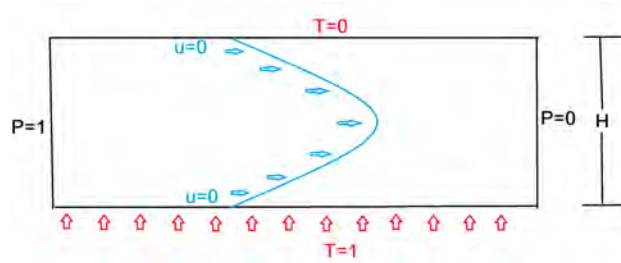


Figura 3.1: Diagrama de referencia

$$T(x, 1) = 0$$

$$T(x, 0) = 1$$

$$T(0, y) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(1, y) = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(1, y) = 0$$

$$\frac{dT}{dx}(1, y) = 0$$

## 3.2. Deducción de las ecuaciones que describan el comportamiento

Una vez que ya se definió cuáles son las condiciones geométricas del sistema, se ocuparan las ecuaciones plasmadas en el capítulo 2 para así poder ajustarlas al mismo.

### 3.2.1. Ecuación de conservación de la masa

La ecuación general de la conservación de la masa, en dos dimensiones del espacio cartesiano, para fluidos se puede representar de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$



### 3. SISTEMA

---

Para este sistema se considera un fluido newtoniano, igualmente debido a que no hay un cambio de la presión con el tiempo y la densidad se puede considerar constante entonces se termina con la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots (1)$$

#### 3.2.2. Ecuación de conservación del movimiento

Como se mencionó anteriormente, la ecuación que describe el movimiento en un fluido proviene de las ecuaciones establecidas por Navier y Stokes, en el capítulo 2 se hicieron ajustes a esta ecuación para obtener su forma para dos dimensiones, obteniendo 1 ecuación para representar el cambio del movimiento en el eje x y otra para representar el cambio en el eje y. El flujo del sistema se considera laminar, por ende, estas ecuaciones sirven para las condiciones impuestas (pues de ser turbulento se verían modificadas (3)). Recordando la ecuación que representa el movimiento en el eje x es:

$$x : \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots (2.1)$$

Y para el eje y:

$$y : \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Debido a que el fluido se verá sometido a convección sobre el eje x, forzando un movimiento del fluido en el eje y, se añade el término de la aproximación de Boussinesq para poder tomar en cuenta los efectos de flotabilidad, derivando así la ecuación para el eje y en:

$$y : \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta(T - T_0)g \quad \dots (2.2)$$

#### 3.2.3. Ecuación de conservación de la energía

Su forma general, de la que se habla con mayor detalle en el capítulo 2 es:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Debido a las condiciones del sistema, particularmente que la velocidad inicial v será de 0 dimensional, esta se reduce a

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \dots (3)$$

# Adimensionalización y discretización de ecuaciones

---

## 4.1. Ecuaciones adimensionales

Para poder adimensionar las ecuaciones que describen al sistema, primero se establecen las variables adimensionales, si bien en el capítulo anterior se trataron las variables de forma adimensional con valores del 0 al 1, esto solo se hizo para simplificar la descripción del sistema, por lo que no se llevó a cabo propiamente una adimensionalización de las mismas. Para poder hacerlo se deben proponer y definir variables adimensionales, que serán reemplazadas dentro de las ecuaciones para volverlas adimensionales. Estas variables adimensionales suelen representarse con letras griegas y se definen en función a las características del sistema buscando que desaparezca todo término dimensional en las ecuaciones que se desean adimensionalizar.

Las definiciones propuestas (estando despejadas directamente las variables dimensionales para facilitar su posterior reemplazo por las variables adimensionales en las ecuaciones) son:

$$y = H\psi$$

$$x = H\chi$$

$$u = u_m\omega$$

$$v = u_m\nu$$

$$t = \frac{H}{u_m}\tau$$

$$P = \mu \frac{u_m}{H} \kappa$$

$$T = \theta(T_1 - T_0) + -T_0$$

Donde  $\chi$  es la longitud adimensional en la dirección  $x$ ,  $\psi$  es la longitud adimensional en la dirección  $y$ ,  $\omega$  es la velocidad adimensional en la dirección  $x$ ,  $\nu$  es la velocidad adimensional en  $y$ ,  $\tau$  es el tiempo adimensional,  $\kappa$  es la presión adimensional y  $\theta$  es la temperatura adimensional.

Obsérvese que debido a la naturaleza de las definiciones propuestas para las variables adimensionales, todas ellas irán de valores de 0 a 1, a excepción del tiempo que podrá tomar valores mayores a 1.

#### 4.1.1. Ecuaciones de movimiento

Establecidas las variables adimensionales, se reemplazarán en las ecuaciones descritas en el capítulo anterior (ecuaciones 2.1 y 2.2).

##### 4.1.1.1. Ecuación del movimiento en $x$

$$x : \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots (2.1)$$

Al reemplazar directamente las variables adimensionales

$$x : \rho \left( \frac{u_m^2}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \omega \frac{u_m^2}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \chi} + \nu \frac{u_m^2}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right) = -\mu \frac{u_m}{H^2} \frac{\partial \kappa}{\partial \chi} + \mu \frac{u_m}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} \right)$$

Al simplificar factorizando

$$x : \rho \frac{u_m^2}{H} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial \chi} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right) = \mu \frac{u_m}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \kappa}{\partial \chi} \right)$$

Dividiendo la ecuación entre  $\mu \frac{u_m}{H^2}$  se reduce a

$$x : \rho H \frac{u_m}{\mu} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial \chi} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \kappa}{\partial \chi} \right)$$

Recordando que

$$Re = \frac{\rho H u_m}{\mu}$$

Finalmente llegamos a la ecuación adimensional que describe el movimiento en el eje  $x$

$$Re \left( \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial \chi} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \kappa}{\partial \chi} \right) \quad \dots (4.1)$$

#### 4.1.1.2. Ecuación del movimiento en y

De la ecuación

$$y : \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta(T - T_0)g \quad \dots (2.2)$$

Se reemplazan las variables adimensionales, establecidas con anterioridad, siendo estas las mismas que para el eje x

$$y : \frac{u_m^2}{H} \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \omega \frac{u_m^2}{H} \frac{\partial \nu}{\partial \chi} + \nu \frac{u_m^2}{H} \frac{\partial \nu}{\partial \psi} = -\frac{\mu u_m}{\rho H^2} \frac{\partial \kappa}{\partial \psi} + \frac{\mu u_m}{\rho H^2} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \psi^2} \right) + \beta\theta(T_1 - T_0)g$$

Simplificando y multiplicando por  $\frac{H}{u_m^2}$  la ecuación se vuelve

$$y : \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \nu}{\partial \chi} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial \psi} = -\frac{\mu}{\rho H u_m} \frac{\partial \kappa}{\partial \psi} + \frac{\mu}{\rho H u_m} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \psi^2} \right) + \frac{H}{u_m^2} \beta\theta(T_1 - T_0)g$$

Al recordar que

$$\text{Numero de Richardson} = \frac{gL\beta(T_1 - T_0)}{u_m^2}$$

$$\text{Numero de Reynolds} = Re = \frac{\rho H u_m}{\mu}$$

Finalmente se llega a la ecuación

$$y : \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \nu}{\partial \chi} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial \psi} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \kappa}{\partial \psi} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \psi^2} \right) + Ri\theta \quad \dots (4.2)$$

#### 4.1.2. Ecuación de conservación de la energía

Recordando la ecuación (3)

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \dots (3)$$

Al reemplazar directamente con los números adimensionales definidos al principio del capítulo se obtiene

$$\frac{\rho C_p H u_m}{k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} \right)$$

Al añadir la viscosidad dinámica a la ecuación buscando reducirla

$$\left( \frac{\mu}{\mu} \right) \frac{\rho C_p H u_m}{k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} \right)$$

Reordenando

$$\left(\frac{\mu C_p}{k}\right)\left(\frac{\rho H u_m}{\mu}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \chi}\right) = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2}\right)$$

Recordando que

$$\text{Numero de Prandtl} = Pr = \frac{\mu C_p}{k}$$

$$\text{NumerodeReynolds} = Re = \frac{\rho H u_m}{\mu}$$

La ecuación final es

$$Re \cdot Pr \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \chi}\right) = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2}\right) \dots (5)$$

### 4.1.3. Números adimensionales

Como ya se mencionó, los números adimensionales sirven para poder relacionar diferentes características de un objeto, teniendo una aplicación en diferentes áreas de la ciencia. En este caso los números usados son para fluidos, así representando en un solo valor y de manera sencilla una relación entre diferentes propiedades del fluido.

#### 4.1.3.1. Numero de Richardson

Es un numero adimensional nombrado en honor a Lewis F. Richardson, este término expresa la relación entre la energía cinética y potencial de un fluido y, como mencionan Shing y Sharif (9), también suele definir los distintos regímenes de convección. Para convección forzada Ri suele ser mucho menor a 1, para convección natural Ri suele ser mucho mayor a 1 y para la convección mixta Ri es de aproximadamente 1. Gómez, Aldo, et al. lo definen para un fluido en un canal cerrado, newtoniano, incompresible y sometido a convección en (10) como

$$Ri = \frac{gL\beta(T_1 - T_0)}{u_m^2}$$

siendo g la gravedad, L la longitud característica,  $T_1$  y  $T_0$  las temperaturas,  $\beta$  el coeficiente de expansión térmica volumétrica y  $u_m$  la velocidad.

Otra forma más sencilla de interpretarlo es como un indicador sobre si el flujo de un fluido será estable o si se volverá mas turbulento debido a las diferencias de densidad existentes en el mismo (diferencias dadas debido al calentamiento al que se ve sometida el fluido). Si el numero de Richardson es bajo indica que las diferencias de densidades no generaran movimientos considerables, sin embargo entre mayor sea habrá mayor movimiento debido a esa diferencia de densidad. Este numero suele rondar en valores

de 0.25 para muchos fluidos en estado natural por lo que raramente alcanzara valores de, por ejemplo, 10.

La decisión de ocupar el numero adimensional de Richardson en el presente trabajo se debe a que es un numero que se suele ocupar en sistemas con convección mixta, como en el presente trabajo. Adicionalmente, es un numero común de utilizar cuando se habla de fluidos incompresibles donde hay pequeñas fuerzas de flotación (aproximación de Boussinesq), mostrando la relación entre la energía cinética y potencial, esta característica hace que sea útil para observar los comportamientos de la capa limite.

#### 4.1.3.2. Numero de Reynolds

El número de Reynolds, nombrado por Osborne Reynolds quien publico sus investigaciones al respecto por primera vez en 1883, es un valor adimensional que nos sirve para representar la competencia entre fuerzas inerciales sobre fuerzas viscosa en un fluido, siendo el cociente de las primeras sobre las segundas, hay más de una forma de expresar el cálculo de este número, sin embargo, las fuerzas inerciales suelen ser representadas a través del producto de la velocidad de un fluido, su densidad y el diámetro a través del cual fluye, y las fuerzas viscosas soliendo ser representadas por la viscosidad dinámica del fluido, su definición matemática se encuentra en el capítulo 1.

A un valor grande los efectos viscosos se harán menos importantes y se notarán más las fuerzas inerciales, mientras a un valor pequeño estos tendrán mayor importancia dominando sobre las fuerzas inerciales, siendo para los casos donde  $Re$  es mayor a 2300 el flujo deja de considerarse laminar y pasa a ser turbulento. La definición dadas y el parámetro ocupado funciona bajo las consideraciones de un flujo en una canal cerrado, cilíndrico y no cilíndrico, siendo para un canal cerrado cilíndrico la longitud característica su diámetro ( $D$ ), y para una canal cerrado no cilíndrico siendo su diámetro hidráulico ( $D_h$ ). A su vez, con la consideración de ser para fluidos incompresibles y newtonianos. En otras palabras, el número de Reynolds es una herramienta que sirve para comprender como es el fluir de un fluido, diciéndonos si es calmado y ordenado (laminar) o si es más caótico (turbulento).

#### 4.1.3.3. Numero de Prandtl

El número de Prandtl es un número adimensional característico de cada fluido, fue por primera vez introducido por el ingeniero alemán Ludwig Prandtl y este nos da la relación entre la difusión viscosa y la difusión térmica en un fluido. Como ejemplo, el número de Prandtl del agua en condiciones normales y constantes es de 7, un número mayor al que tendría el aire en las mismas condiciones, siendo de 0.7. Al igual que con el numero de Reynolds el numero de Prandtl puede ser representado de distintas maneras, sin embargo, la forma más común de hacerlo es el cociente del producto de la viscosidad dinámica del fluido y su calor específico, sobre su conductividad térmica.

El producto de la viscosidad dinámica y el calor específico representa a la velocidad de difusión de la cantidad de movimiento, por otra parte, la conductividad térmica representa la velocidad de difusión del calor.

Su definición matemática se encuentra en el capítulo 1. Esta definición es dada tanto para fluidos compresibles como incompresibles por lo que ocupa el término  $C_p$ , la definición dada sirve en fluidos newtonianos en estado de flujo laminar. Su significado se puede resumir como una herramienta que nos dice que tan rápido se difunde el calor en comparación a que tan rápido se mueve un fluido. Entre menor sea el número más rápido se difundirá el calor en comparación del movimiento, por el contrario si es alto indicara que la cantidad de movimiento supera a la difusión del calor.

## 4.2. Discretización de las ecuaciones

La discretización es un proceso matemático el cual tiene como objetivo pasar de funciones continuas, variables y modelos a sus homólogos discretos, reemplazando las derivadas parciales con su contraparte como diferencia finita. Esta conversión es pertinente para poder obtener una aproximación numérica y así poder simular un sistema. Basándose este método en la expansión de las series de Taylor.

John D. Anderson en *Computational Fluid Dynamics* (11) desarrolla ecuaciones discretas para resoluciones hechas a través del método de diferencias finitas de las derivadas parciales de interés, siendo recopiladas en la siguiente sección.

### 4.2.1. Discretización de la ecuación de movimiento en el eje x

Primero se establecen las contrapartes discretas de las derivadas, que serán

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial \tau} &= \frac{\omega^n(i, j) - \omega(i, j)}{\Delta \tau} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \chi} &= \frac{\omega(i, j) - \omega(i - 1, j)}{\Delta \chi} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \psi} &= \frac{\omega(i, j) - \omega(i, j - 1)}{\Delta \psi} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \chi^2} &= \frac{\omega(i + 1, j) - 2\omega(i, j) + \omega(i - 1, j)}{\Delta \chi^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} &= \frac{\omega(i, j + 1) - 2\omega(i, j) + \omega(i, j - 1)}{\Delta \psi^2} \\ \frac{\partial \kappa}{\partial \chi} &= \frac{\kappa(i, j) - \kappa(i - 1, j)}{\Delta \chi}\end{aligned}$$

Así la ecuación (4.1) pasa de

$$Re \left( \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial \chi} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \kappa}{\partial \chi} \dots (4.1)$$

A

$$\begin{aligned} Re \left( \frac{\omega^n(i, j) - \omega(i, j)}{\Delta \tau} + \omega(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i-1, j)}{\Delta \chi} + \nu(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i, j-1)}{\Delta \psi} \right) \\ = \frac{\omega(i+1, j) - 2\omega(i, j) + \omega(i-1, j)}{\Delta \chi^2} + \frac{\omega(i, j+1) - 2\omega(i, j) + \omega(i, j-1)}{\Delta \psi^2} \\ - \frac{\kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{\Delta \chi} \end{aligned}$$

Nuestra variable de interés es la evolución de la velocidad en el eje x adimensional a través del tiempo, por lo que se busca despejar  $\omega^n(i, j)$  Dejando la ecuación de interés del lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned} Re \frac{\omega^n(i, j) - \omega(i, j)}{\Delta \tau} &= \frac{\omega(i+1, j) - 2\omega(i, j) + \omega(i-1, j)}{\Delta \chi^2} \\ &+ \frac{\omega(i, j+1) - 2\omega(i, j) + \omega(i, j-1)}{\Delta \psi^2} - \frac{\kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{\Delta \chi} \\ - Re \omega(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i-1, j)}{\Delta \chi} &- Re \nu(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i, j-1)}{\Delta \psi} \end{aligned}$$

Factorizando

$$\begin{aligned} \frac{\omega^n(i, j) - \omega(i, j)}{\Delta \tau} &= -\frac{1}{Re} \left( \frac{\kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{\Delta \chi} \right) \\ \frac{1}{Re} \left( \frac{\omega(i+1, j) - 2\omega(i, j) + \omega(i-1, j)}{\Delta \chi^2} + \frac{\omega(i, j+1) - 2\omega(i, j) + \omega(i, j-1)}{\Delta \psi^2} \right) \\ - \omega(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i-1, j)}{\Delta \chi} &- \nu(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i, j-1)}{\Delta \psi} \end{aligned}$$

Dejando la variable de interés en el lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned} \omega^n(i, j) &= \Delta \tau \left( -\omega(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i-1, j)}{\Delta \chi} - \nu(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i, j-1)}{\Delta \psi} \right) \\ + \Delta \tau \frac{1}{Re} \left( \frac{\omega(i+1, j) - 2\omega(i, j) + \omega(i-1, j)}{\Delta \chi^2} + \frac{\omega(i, j+1) - 2\omega(i, j) + \omega(i, j-1)}{\Delta \psi^2} \right) \\ - \Delta \tau \frac{1}{Re} \left( \frac{\kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{\Delta \chi} + \omega(i, j) \right) \end{aligned}$$



Reagrupando y factorizando, la ecuación final a que se llega es

$$\begin{aligned} \omega^n(i, j) = & \Delta\tau \left( \frac{1}{Re} \frac{\omega(i+1, j) - 2\omega(i, j) + \omega(i-1, j)}{\Delta\chi^2} - \omega(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i-1, j)}{\Delta\chi} \right) \\ & + \Delta\tau \left( \frac{1}{Re} \frac{\omega(i, j+1) - 2\omega(i, j) + \omega(i, j-1)}{\Delta\psi^2} - \nu(i, j) \frac{\omega(i, j) - \omega(i, j-1)}{\Delta\psi} \right) - \\ & \frac{\Delta\tau}{Re} \frac{\kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{\Delta\chi} + \omega(i, j) \end{aligned}$$

Esta ecuación representa la evolución de la velocidad adimensional en x respecto al tiempo y se ocupará en el código para resolver por diferencias finitas el sistema.

#### 4.2.2. Discretización de la ecuación de movimiento en el eje y

Las contrapartes discretas serán

$$\begin{aligned} \frac{\partial\nu}{\partial\tau} &= \frac{\nu^n(i, j) - \nu(i, j)}{\Delta\tau} \\ \frac{\partial\nu}{\partial\chi} &= \frac{\nu(i, j) - \nu(i-1, j)}{\Delta\chi} \\ \frac{\partial\nu}{\partial\psi} &= \frac{\nu(i, j) - \nu(i, j-1)}{\Delta\psi} \\ \frac{\partial^2\nu}{\partial\chi^2} &= \frac{\nu(i+1, j) - 2\nu(i, j) + \nu(i-1, j)}{\Delta\chi^2} \\ \frac{\partial^2\nu}{\partial\psi^2} &= \frac{\nu(i, j+1) - 2\nu(i, j) + \nu(i, j-1)}{\Delta\psi^2} \\ \frac{\partial\kappa}{\partial\chi} &= \frac{\kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{\Delta\psi} \end{aligned}$$

Así la ecuación (4.2)

$$y : \frac{\partial\nu}{\partial\tau} + \omega \frac{\partial\nu}{\partial\chi} + \nu \frac{\partial\nu}{\partial\psi} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial\kappa}{\partial\psi} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2\nu}{\partial\chi^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial\psi^2} \right) + Ri\theta \dots (4.2)$$

Se vuelve

$$\begin{aligned} & \frac{\nu^n(i, j) - \nu(i, j)}{\Delta\tau} + \omega(i, j) \frac{\nu(i, j) - \nu(i-1, j)}{\Delta\chi} + \nu(i, j) \frac{\nu(i, j) - \nu(i, j-1)}{\Delta\psi} \\ = & \frac{1}{Re} \frac{\nu(i+1, j) - 2\nu(i, j) + \nu(i-1, j)}{\Delta\chi^2} + \frac{1}{Re} \frac{\nu(i, j+1) - 2\nu(i, j) + \nu(i, j-1)}{\Delta\psi^2} + Ri\theta(i, j) \\ & - \frac{1}{Re} \frac{\kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{\Delta\psi} \end{aligned}$$

Al despejar  $\nu^n(i, j)$  se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} \nu^n(i, j) = & \frac{\Delta\tau}{Re} \left( \frac{\nu(i+1, j) - 2\nu(i, j) + \nu(i-1, j)}{\Delta\chi^2} + \frac{\nu(i, j+1) - 2\nu(i, j) + \nu(i, j-1)}{\Delta\psi^2} \right) - \\ & \Delta\tau \omega(i, j) \frac{\nu(i, j) - \nu(i-1, j)}{\Delta\chi} - \Delta\tau \nu(i, j) \frac{\nu(i, j) - \nu(i, j-1)}{\Delta\psi} + \nu(i, j) + \Delta\tau Ri\theta(i, j) \\ & - \frac{\Delta\tau \kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{Re \Delta\psi} \end{aligned}$$

Y al reagrupar y factorizar se termina con la ecuación

$$\begin{aligned} \nu^n(i, j) = & \Delta\tau \left( \frac{1}{Re} \frac{\nu(i+1, j) - 2\nu(i, j) + \nu(i-1, j)}{\Delta\chi^2} - \omega(i, j) \frac{\nu(i, j) - \nu(i-1, j)}{\Delta\chi} \right) \\ & + \Delta\tau \left( \frac{1}{Re} \frac{\nu(i, j+1) - 2\nu(i, j) + \nu(i, j-1)}{\Delta\psi^2} - \nu(i, j) \frac{\nu(i, j) - \nu(i, j-1)}{\Delta\psi} \right) + \nu(i, j) \\ & + \nu(i, j) + \Delta\tau Ri\theta(i, j) - \frac{\Delta\tau \kappa(i, j) - \kappa(i-1, j)}{Re \Delta\psi} \end{aligned}$$

Esta ecuación representa la evolución de la velocidad adimensional en y respecto al tiempo y se ocupará en el código para resolver por diferencias finitas el sistema.

### 4.2.3. Discretización de la ecuación de energía

Las contrapartes discretas establecidas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\tau} &= \frac{\theta^n(i, j) - \theta(i, j)}{\Delta\tau} \\ \frac{\partial\theta}{\partial\chi} &= \frac{(\theta(i, j) - \theta(i-1, j))}{\Delta\chi} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} &= \frac{\theta(i+1, j) - 2\theta(i, j) + \theta(i-1, j)}{\Delta\chi^2} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2} &= \frac{\theta(i, j+1) - 2\theta(i, j) + \theta(i, j-1)}{\Delta\psi^2} \end{aligned}$$

Así para la ecuación 5

$$Re \cdot Pr \left( \frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \omega \frac{\partial\theta}{\partial\chi} \right) = \left( \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2} \right) \dots (5)$$

Se vera convertida a su contraparte discreta

$$\begin{aligned} & Re * Pr \left( \frac{(\theta^n(i, j) - \theta(i, j))}{\Delta\tau} + \omega(i, j) \frac{(\theta(i, j) - \theta(i-1, j))}{\Delta\chi} \right) \\ & = \left( \frac{(\theta(i+1, j) - 2\theta(i, j) + \theta(i-1, j))}{\Delta\chi^2} + \frac{(\theta(i, j+1) - 2\theta(i, j) + \theta(i, j-1))}{\Delta\psi^2} \right) \end{aligned}$$

#### 4. ADIMENSIONALIZACIÓN Y DISCRETIZACIÓN DE ECUACIONES

---

Primero se despeja la ecuación de interés (que contiene a la variable de la temperatura respecto al tiempo)

$$\frac{\theta^n(i, j) - \theta(i, j)}{\Delta\tau} = -\omega(i, j) \frac{\theta(i, j) - \theta(i-1, j)}{\Delta\chi}$$

$$\frac{1}{Re \cdot Pr} \left( \frac{\theta(i+1, j) - 2\theta(i, j) + \theta(i-1, j)}{\Delta\chi^2} + \frac{\theta(i, j+1) - 2\theta(i, j) + \theta(i, j-1)}{\Delta\psi^2} \right)$$

Después, se despeja la variable de interés  $\theta^n(i, j)$

$$\theta^n(i, j) = \theta(i, j) - \Delta\tau\omega(i, j) \frac{\theta(i, j) - \theta(i-1, j)}{\Delta\chi}$$

$$\frac{\Delta\tau}{Re \cdot Pr} \left( \frac{\theta(i+1, j) - 2\theta(i, j) + \theta(i-1, j)}{\Delta\chi^2} + \frac{\theta(i, j+1) - 2\theta(i, j) + \theta(i, j-1)}{\Delta\psi^2} \right)$$

Al reagrupar y factorizar se llega a la ecuación final

$$\theta^n(i, j) = \theta(i, j) + \Delta\tau \frac{1}{Re \cdot Pr} \frac{\theta(i+1, j) - 2\theta(i, j) + \theta(i-1, j)}{\Delta\chi^2}$$

$$- \Delta\tau \left( \omega(i, j) \frac{\theta(i, j) - \theta(i-1, j)}{\Delta\chi} \right) + \frac{\Delta\tau}{Re \cdot Pr} \frac{\theta(i, j+1) - 2\theta(i, j) + \theta(i, j-1)}{\Delta\psi^2}$$

Esta ecuación representa la evolución de la temperatura adimensional respecto al tiempo y se ocupará en el código para resolver por diferencias finitas el sistema.

# Resultados

---

## 5.1. Código fuente

La elaboración del código fuente se llevó a cabo en Python a través del entorno Jupyter Notebook, para ello se tomó de referencia una malla de 40x40 debido a que con este tamaño se puede observar de manera clara la capa límite térmica y dinámica, al elegir una de mayor tamaño las limitaciones del hardware en el que se llevó a cabo el estudio se hacían presentes. En el código fuente se insertan los valores de  $Re$ ,  $Pr$  y  $Ri$ , así como el número de saltos en el tiempo ( $nt$ ). Siendo el código:

```
#Declaración de librerías
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
%matplotlib notebook
import logging
logger = logging.getLogger('matplotlib')
logger.setLevel(logging.INFO)

#Declaración de variables
glx = 1 #tamaño de x
gly = 1 #tamaño de y
nx=41 #saltos en x
ny=41 #saltos en y
nt= #saltos en el tiempo
dx = glx / (nx - 1)
dy = gly / (ny - 1)
Re=
Ri=
dt = 0.00001
```

## 5. RESULTADOS

---

Pr=

```
# Creacion de los array
x = np.linspace(0, 1, nx)
y = np.linspace(0, 1, ny)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
u = np.zeros((nx, ny))
v = np.zeros((nx, ny))
un = np.zeros((nx, ny))
vn = np.zeros((nx, ny))
o = np.zeros((nx, ny))
on = np.zeros((nx, ny))
k = np.zeros((nx, ny))
kn = np.zeros((nx, ny))

#Condiciones iniciales
o[0, :] = 1 #T=1 en (x,0)
u[:, 0] = 1 #u=1 en (0,y)

#Distribución de la presión adimensional
dk=(1/(nx-1))
for l in range(nx): #inicio de ciclo for k[:,l]=dk*l #fin de ciclo for
k[:, :-1]=k
k[:, 0] = 1 #u=1 en (1,y)
k[:, -1] = 0 #u=1 en (1,y)
kn = k.copy()

#Ecuaciones
for n in range(nt): #inicio de ciclo for un = u.copy()
vn = v.copy()
on=o.copy()

o[1:-1, 1:-1]= (on[1:-1,1:-1]
+(((dt/(Re*Pr*(dx**2))))*(on[1:-1,2:] -2*on[1:-1,1:-1]
+on[1:-1,0:-2]))- (((dt*un[1:-1,1:-1])/dx)*(on[1:-1,1:-1]
-on[1:-1,0:-2]))+ ((dt/(Re*Pr*(dy**2))))*(on[2:,1:-1]
-(2*on[1:-1,1:-1])+on[0:-2,1:-1])) )

u[1:-1, 1:-1]= (((dt/(Re*dx**2))*(un[1:-1,2:] -2*un[1:-1, 1:-1]+un[ 1:-1,0:-2]))-
((dt/dx)*un[1:-1, 1:-1]*(un[1:-1, 1:-1]-un[1:-1,0:-2 ]))+
((dt/(Re*dy**2))*(un[2:, 1:-1]-(2*un[1:-1, 1:-1])+un[ 0:-2,1:-1]))-
((dt/dy)*vn[1:-1, 1:-1]*(un[1:-1, 1:-1]-un[0:-2,1:-1 ]))+ un[1:-1, 1:-1]-
```

```

((dt/(Re*dx))*(kn[ 1:-1, 1:-1 ]-kn[ 1:-1, 0:-2])))

v[1:-1,1:-1]= ((dt/(Re*dx**2))*(vn[1:-1, 2:]-2*vn[1:-1,1:-1]+vn[1:-1,0:-2])-
((dt/dx)*un[1:-1,1:-1]*(vn[1:-1,1:-1]-vn[1:-1,0:-2]))+
((dt/(Re*dy**2))*(vn[2:,1:-1]-(2*vn[1:-1,1:-1])+vn[0:-2,1:-1]))-
((dt/dy)*vn[1:-1,1:-1]*(vn[1:-1,1:-1]-vn[0:-2,1:-1]))+vn[1:-1,1:-1]
+((dt*Ri)*(on[1:-1,1:-1])))

#Condiciones repetitivas
u[:, 0] = 1 #u=1 en (0,y)
u[0, :] = 0 #u=0 en (x,1)
u[40, :] = 0 #u=0 en (x,0)
u[:, 40]= u[:, 39] #du/dx(1,y)=0
v[0, :] = 0 #v=0 en (x,1)
v[40, :] = 0 #v=0 en (x,0)
v[:, 0] = 0 #v=0 en (0,y)
v[:, 40]= v[:, 39] #dv/dx(1,y)=0
o[0, :] = 1 #T=1 en (x,0)
o[:, 40] = o[:, 39] #do/dx(1,y)=0

#fin de ciclo for
#Grafica de la capa limite térmica print (.'", o)
fig = plt.figure(figsize=(11,7), dpi=100)
plt.contourf(X,Y,o,alpha= 0.5, cmap=cm.viridis)
plt.colorbar()
plt.contour(X,Y,o, cmap=cm.viridis)
skip = 1
plt.quiver(X[:,1, ::1], Y[:,1, ::1], u[:,1, ::1], v[:,1, ::1]) plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y');
plt.title(' ');
plt.tight_layout()
plt.show()

#Grafica de la capa limite dinámica
print (ü", u)
fig = plt.figure(figsize=(11,7), dpi=100)
plt.contourf(X,Y,u,alpha= 0.5, cmap=cm.viridis)
plt.colorbar()
plt.contour(X,Y,u, cmap=cm.viridis)
skip = 1
plt.quiver(X[:,1, ::1], Y[:,1, ::1], u[:,1, ::1], v[:,1, ::1])
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y');

```

```
plt.title(' ');  
plt.tight_layout()  
plt.show()
```

### 5.1.1. Condiciones para la simulación

Como se ha mencionado anteriormente, este código computacional proporcionado es capaz de simular el comportamiento de la capa límite térmica y dinámica de diferentes fluidos, cada uno de estos fluidos son ingresados al sistema por sus números de Richardson, Prandtl y Reynolds en cada situación particular.

Para las condiciones del flujo, el código considera la condición de no deslizamiento en un canal cerrado, recto, horizontal, con diámetro hidráulico igual al largo (al cual solo se le llamara diámetro para simplificar), con entrada de flujo uniforme y constante, rectangular, con paredes lisas y sometido a convección.

En cuanto al perfil de velocidades, se contempló de manera transversal, pensando en un corte a la mitad el ancho del canal, a modo que el calentamiento del canal cerrado siempre quede en lado inferior del corte, en otras palabras, el perfil de velocidades se pensó a manera que el eje  $y$  sea perpendicular a la pared inferior del canal cerrado, y el eje  $x$  este sobre de esta, se puede decir que el eje  $x$  es paralelo al suelo, teniendo el calentamiento en este eje.

Respecto al fluido, el código computacional y las ecuaciones antes desarrolladas fueron siempre pensadas para fluidos newtonianos, considerando una viscosidad dinámica constante, al mismo tiempo, para fluidos incompresibles, exceptuando en los términos donde se considera el calentamiento del fluido. El fluido se ve conducido a través de gradientes de presiones.

Para que un fluido se mantenga newtoniano e incompresible dependerá de su velocidad y temperatura, por lo que, para que el código pueda proporcionar un gráfico y valores exactos se deben tomar en cuenta donde las diferencias de viscosidad y densidad se pueden considerar despreciables. Los líquidos se suelen considerar incompresibles y con viscosidad constante, mientras que los gases suelen ser compresibles a temperaturas o presiones muy altas, del orden en magnitud de cientos o miles, esto también afectando su viscosidad (12). A pesar de ello, el rango de temperaturas y velocidades dependerá siempre de cada fluido.

En resumen, para que el presente código computacional pueda representar gráficamente la capa límite dinámica y térmica de manera adecuada, el fluido debe de ser incompresible, newtoniano y estar fluyendo por gradiente de presión de manera laminar por un canal cerrado, rectangular y recto donde se considere la condición de no deslizamiento. Si el fluido y el flujo no cumple estas condiciones entonces los gráficos y

valores obtenidos no serán precisos.

Aunque el código computacional solo sirva en fluidos antes descritos, este y las ecuaciones obtenidas pueden ser modificadas y servir como base para un código computacional que simule fluidos en otras condiciones.

Finalmente, el hecho de haber optado por controlar el código a través de números adimensionales se debe a que más allá las condiciones experimentales, los fluidos se comportaran de la manera que describa el código computacional mientras se mantengan incompresibles, newtonianos y mantengan esos números adimensionales.

## 5.2. Graficos para diferentes condiciones y fluidos

Antes de presentar los gráficos generados a partir del código, hay que aclarar que existen diversos estudios que demuestran que los resultados obtenidos de simulaciones computacionales contra los de modelos experimentales son lo suficientemente similares para considerar fiables a las simulaciones, un ejemplo a destacar es el de Harumi Ortíz en Estudio experimental y numérico de la capa límite térmica e hidrodinámica en un canal vertical de placas planas paralelas con calentamiento asimétrico (13) la cual hace una comparación entre un modelo experimental y uno computacional de un fluido en conducción vertical con convección natural, encontrando que las discrepancias en la capa limite entre el modelo experimental y computacional son insignificantes.

Para poder observar el funcionamiento del código se ocuparon 5 diferentes fluidos, alternando sus números de Reynolds en 20, 200 y 2000, a la vez que se fueron alternando sus número de Richardson en 0, 0.1, 1, 10. A su vez, las pruebas se hicieron con el número de Prandtl para cada fluido según su temperatura (la cual se propuso). Las propiedades ocupadas como viscosidad dinámica, densidad, numero de Prandtl y coeficiente de expansión volumétrica se contemplaron a 1 atmosfera y se extrajeron de el apendice 1 del libro Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Application (12). Los 5 fluidos elegidos, y sus números de Prandtl fueron:

Sodio potasio (a 100°C) con numero de Prandtl de 0.02102.

Aire (a 20°C) con numero de Prandtl de 0.7.

Vapor de agua (a 100°C) con numero de Prandtl de 1.00.

Agua(a 20°C) con numero de Prandtl de 7.

Aceite(a 40°C) con numero de Prandtl de 2962.



## 5. RESULTADOS

---

El diámetro dimensional propuesto para el canal cerrado es de 0.2 m. Por otra parte, la simulación se llevó a cabo con un propuesto de  $nt=500000$ , pues con ese número de saltos en el tiempo el flujo se encuentra desarrollado, igualmente se propuso un  $dt$ (diferencial del tiempo) de 0.00001, pues de esa manera se puede apreciar mejor la evolución del flujo, con estas dos condiciones el análisis se lleva a cabo en un tiempo adimensional  $\tau = 5$  para todos los fluidos analizados. Otra forma de interpretarlo es que entre cada punto en el tiempo ( $nt$ ) a analizar pasan 0.00001 partes de tiempo adimensional ( $\tau$ ). Matemáticamente se puede expresar como:

$$\tau = nt * dt = 500000 * 0.00001 = 5$$

### 5.2.1. Sodio-Potasio

El Sodio-Potasio ( $^{22}\text{Na}$ - $^{78}\text{K}$ ) es un metal líquido a temperatura ambiente que cuenta con una temperatura de fusión de  $-11^{\circ}\text{C}$ , este metal suele usarse como refrigerante en reactores rápidos de neutrones. A una temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$ , cuenta con un número de Prandtl de 0.02102 lo cual es útil para observar la relación entre la difusividad térmica contra la dinámica.

A partir de las simulaciones hechas en este fluido se pudieron obtener las gráficas mostradas en la figura 5.1 y 5.2, siendo que la primera muestra cómo se comporta la capa límite térmica del fluido al variar los parámetros y la segunda refleja el comportamiento de la capa límite dinámica.

En la figura 5.1 se puede observar que la capa límite térmica del Sodio-Potasio, zona donde la temperatura se ve difundida, esta empieza en el borde inferior que es donde se está calentado el canal, la capa límite térmica alcanza a extenderse bastante, al aumentar el valor del número de Reynolds el alcance de la capa se ve reducido aunque manteniéndose bastante extendida incluso  $Re=2000$  (donde se interpreta que las fuerzas inerciales, o de movimiento, son altas), esta capa límite extendida se debe al número de Prandtl el cual tiene un valor pequeño por lo que la difusividad térmica es alta en este fluido. Por otro lado, al añadir y aumentar el número de Richardson se observan los efectos de flotación del fluido debido al calentamiento de este, expandiendo la capa límite térmica, esto se puede interpretar como que a mayor  $Ri$  habrá mayor energía potencial (la cual está relacionada con la velocidad en  $y$  en este caso), y al mismo tiempo aumentar la difusividad térmica.

Por otra parte, en la figura 5.2 podemos observar la capa límite dinámica del Sodio-Potasio respecto a la velocidad en  $x$ . Esta capa se puede observar, a partir de un  $Re=200$ , extendido a través de la mayor parte del canal, de similar manera en las gráficas se observa como la capa límite empieza en el borde izquierdo del canal que es donde se encuentra la entrada de este, a su vez la velocidad va disminuyendo entre más cerca de encuentre el fluido de los bordes, pero extendiéndose menos en el borde inferior a partir de un  $Ri=0.1$ . Respecto a la velocidad en  $y$  se puede observar un ligero cambio o aumento entre el  $Ri=0$  y el  $Ri=0.1$ , esto gracias a que los efectos de flotación se empiezan

a ver involucrados por el calentamiento del canal en el borde inferior, al aumentar el  $Re$  la capa limite dinámica se verá más extendida, por otra parte, entre más se aumente el  $Ri$  será mayor el incremento de la velocidad en  $y$ , siendo muy marcado este aumento en  $Ri=1$  al punto de que la velocidad en  $y$  empieza a opacar a la velocidad en  $x$ , sin embargo, para efectos del  $Richardson=10$  la velocidad en el eje  $y$  supera la del eje  $x$  bajo la capa limite dinámica.

Para continuar el análisis se va a obtener el gradiente de temperatura del sistema de forma dimensional, en donde fluye una aleación de Sodio-Potasio que cuenta con un numero de Richardson de 10, para ello primero se debe calcular la velocidad máxima del líquido, para ello se ocupara la definición del número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho HV}{\mu}$$

Al despejar la velocidad del fluido ( $V$ , o  $u_m$  debido a que se está calculando la velocidad máxima en el eje  $x$ ) en la ecuación se obtiene

$$V = \frac{Re\mu}{\rho H}$$

La viscosidad dinámica ( $\mu$ ) del este fluido es de  $0.0005707 \frac{kg}{m.s}$  y su densidad ( $\rho$ ) de  $847.3 \frac{kg}{m^3}$ , al reemplazar estos valores junto con el del diámetro ( $H$ ) y un numero de Reynolds de 2000.

$$V = \frac{2000 * 0.0005707 \frac{kg}{m.s}}{0.2m * 847.3 \frac{kg}{m^3}}$$

Resultando en que la velocidad del fluido para mantener un Reynolds de 2000 bajo esas condiciones es de  $0.00674 \frac{m}{s}$ , la velocidad del fluido es baja puesto que para mantener ese numero de Reynolds la ecuación de este debe buscar esa relación entre las fuerzas dinámica y las viscosas.

A partir de la definición del tiempo adimensional,  $\tau = 5$  se calcula el tiempo dimensional con la definición de tiempo propuesta en el capítulo anterior, reemplazando en la formula, el diámetro, la velocidad, y  $\tau$

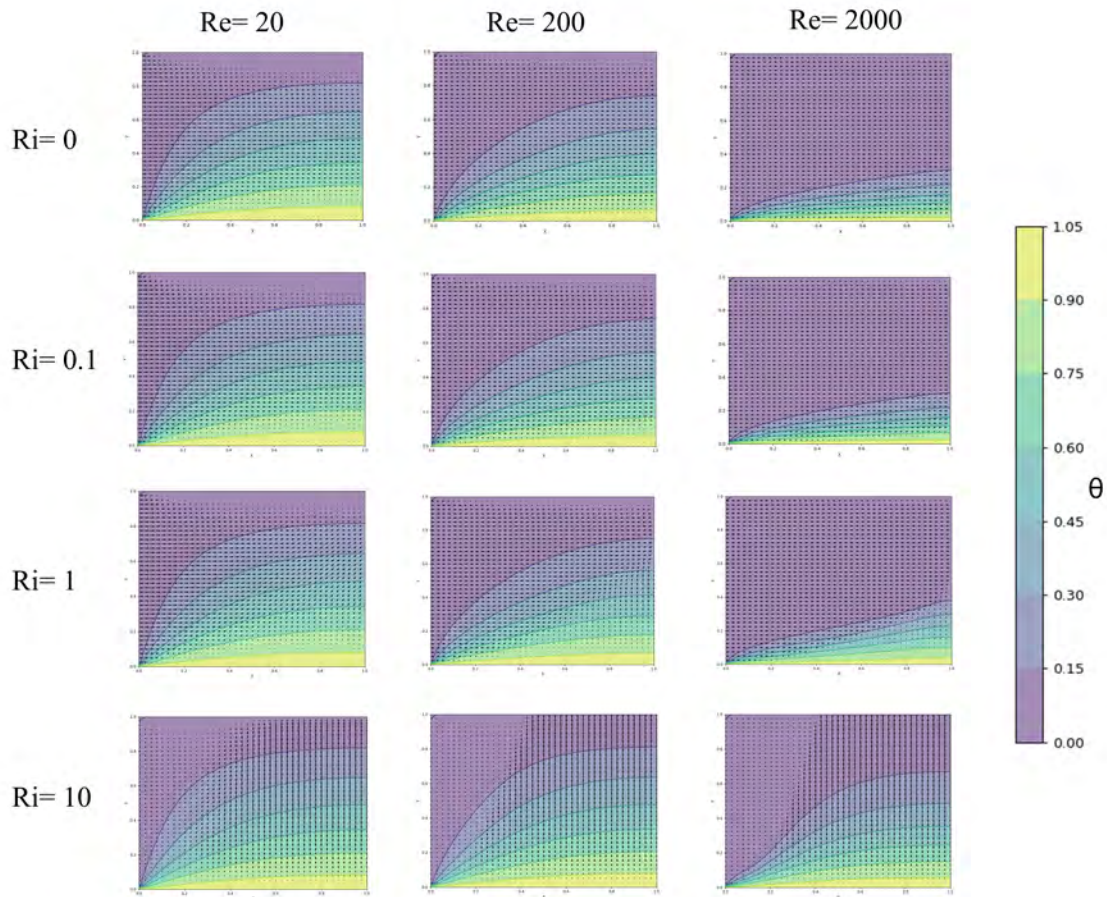
$$t = \frac{H}{u_m} \tau = \frac{0.2m}{0.00674 \frac{m}{s}} * 5 = 148s$$

Por lo que las gráficas presentadas para este fluido se presentan a los 148 segundos de flujo.

Para calcular el gradiente de temperaturas se contemplará una aceleración por gravedad de  $9.8066 \frac{m}{s^2}$  y un coeficiente de expansión térmica volumétrica de  $0.0002418 \frac{1}{K}$ . Partiendo de la definición del número de Richardson:

$$Ri = \frac{gL\beta(T_1 - T_0)}{u_m^2}$$

## 5. RESULTADOS



**Figura 5.1:** Capas limites térmicas para  $Pr=0.02102$

Despejando  $(T_1 - T_0)$  y reemplazándole por  $\Delta T$  la ecuación es:

$$\Delta T = \frac{Ri * u_m^2}{g * L * \beta}$$

Al reemplazar los valores antes dados:

$$\Delta T = \frac{10 * (0.00674 \frac{m}{s})^2}{9.8066 \frac{m}{s^2} * 0.0002418 \frac{1}{K} * 0.2m}$$

Dando como resultado que para obtener un numero de Richardson de 10 para ese fluido en esas condiciones se necesitaría una gradiente de temperatura de 1 K, un gradiente bajo, pero que se debe al numero de Prandtl tan bajo que tiene el fluido aunado a la velocidad tan pequeña que presenta.

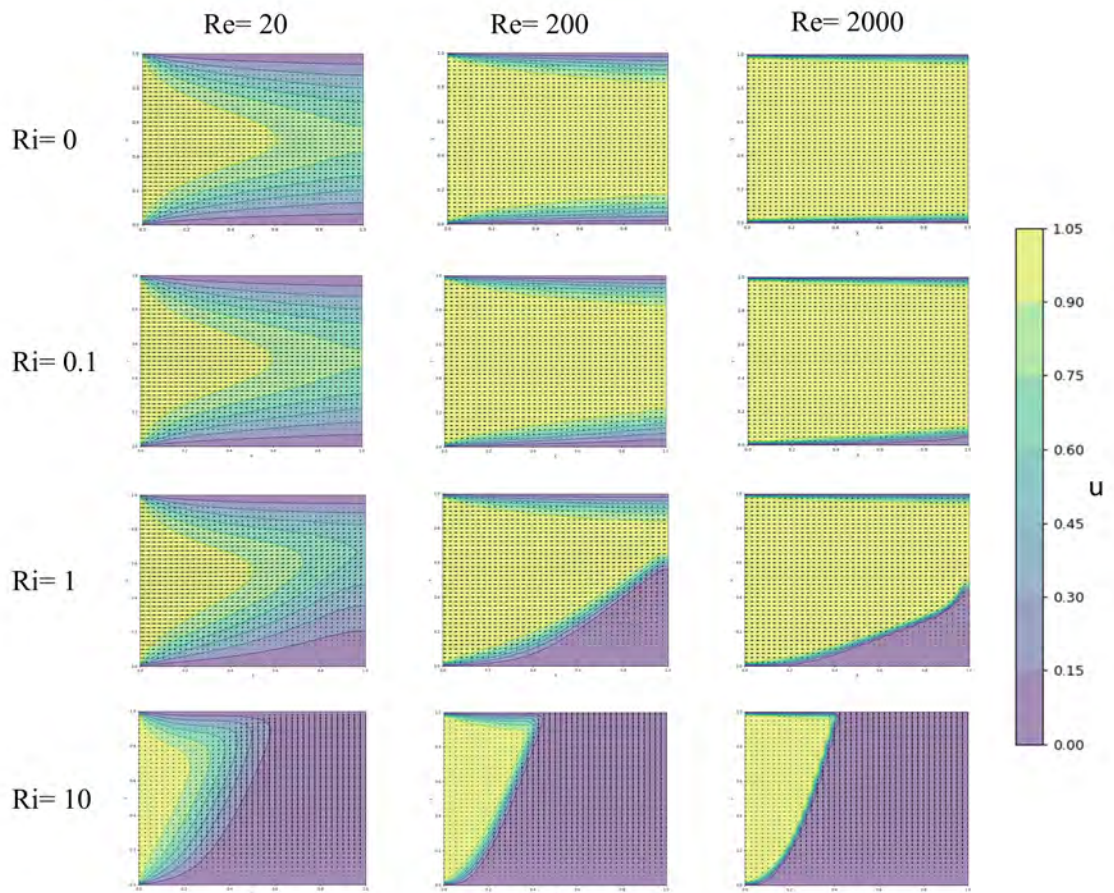


Figura 5.2: Capas limites dinámicas para  $Pr=0.02102$

### 5.2.2. Aire

El aire a 20°C es un gas que se considera una mezcla y cuenta con número de Prandtl de 0.7, como se pudo observar con el fluido anterior, los números de Prandtl pequeños en fluidos indican que la transferencia de calor se da de forma más rápida de lo que se difunde la velocidad.

En la figura 5.3 se pueden observar las capa límite térmica del aire a diferentes condiciones, en estas capas se puede denotar que al encontrarse el fluido bajo efectos de un número de Reynolds pequeño la capa se ve extendida, sin embargo, esta se observa de menor extensión que la del fluido analizado anteriormente (Sodio-Potasio), esto ya que el número de Prandtl que relaciona la difusión movimiento respecto a la difusión de térmica es mayor, hecho que se debe a las propiedades de cada fluido, al ir aumentando el número de Reynolds estas capas se ven reducidas, en contraparte, al aumentar el número de Richardson se puede observar la flotabilidad del fluido, debido a ello el fluido aumenta la extensión de la capa límite térmica, la cual entre un  $Ri=0$ ,  $Ri=0.1$  y  $Ri=1$  a simple vista no se nota una diferencia significativa, cosa que cambia al ocupar un  $Ri=10$  donde la extensión de la capa límite térmica incrementa considerablemente pues aquí los efectos potenciales dados por el incremento en la velocidad en y se hacen notar.

En la figura 5.4 se tienen las capa límite dinámica con respecto a la velocidad del aire en el eje x para diferentes condiciones, en ellas se observa cómo entre mayor sea el número de Reynolds esta capa límite se verá ampliamente extendida, pues las fuerzas dinámicas del fluido son mayores que las viscosas, algo muy común para gases a altos  $Re$ . Por otra parte, al aumentar el número de Richardson se observan los efectos de flotabilidad debidos al calentamiento, teniendo como consecuencia un aumento de velocidad en el eje y, estos efectos particularmente notorios cuando se ocupa un  $Ri=10$ , pues debajo de la capa límite la velocidad del fluido en el eje y supera a la velocidad en el eje x.

Para detallar el análisis del fluido, se obtendrá el gradiente de temperatura que debe tener el aire en este canal cerrado para poder tener un número de Richardson de 10 a la vez que un número de Reynolds de 2000. Para ello primero se calculará la velocidad del aire con la fórmula de  $Re$

$$Re = \frac{\rho HV}{\mu}$$

Al despejar la velocidad del fluido ( $V$ , que en este caso es  $u_m$  debido a que se está calculando la velocidad máxima en el eje x) en la ecuación se obtiene

$$V = \frac{Re\mu}{\rho H}$$

La viscosidad dinámica ( $\mu$ ) del este fluido es de  $0.0000185 \frac{kg}{ms}$  y su densidad ( $\rho$ ) de  $1.204 \frac{kg}{m^3}$ , al reemplazar estos valores junto con el del diámetro ( $H$ ) y un número de

Reynolds de 2000.

$$V = \frac{2000 * 0.0000185 \frac{kg}{ms}}{0.2m * 1.204 \frac{kg}{m^3}}$$

Resultando en que la velocidad del fluido para mantener un Reynolds de 2000 bajo esas condiciones es de  $0.154 \frac{m}{s}$ .

A partir de la definición del tiempo adimensional,  $\tau = 5$  se calcula el tiempo dimensional con la definición de tiempo propuesta en el capítulo anterior, reemplazando en la formula, el diámetro, la velocidad, y  $\tau$

$$t = \frac{H}{u_m} \tau = \frac{0.2m}{0.154 \frac{m}{s}} * 5 = 6.5s$$

Por lo que las gráficas presentadas para este fluido se presentan a los 6.5 segundos de flujo, como se puede ver es un mucho menor tiempo que con el Sodio-Potasio, esto se debe a que el aire tiene una menor viscosidad cinemática y una mucho menor densidad.

Para calcular el gradiente de temperaturas se contemplará una aceleración por gravedad de  $9.8066 \frac{m}{s^2}$  y un coeficiente de expansión térmica volumétrica de  $0.00343 \frac{1}{K}$ . A través de la definición del número de Richardson, ocupando la formula obtenida al analizar el fluido anterior :

$$\Delta T = \frac{Ri * u_m^2}{g * L * \beta}$$

Al reemplazar los valores antes dados:

$$\Delta T = \frac{10 * (0.154 \frac{m}{s})^2}{9.8066 \frac{m}{s^2} * 0.00343 \frac{1}{K} * 0.2m}$$

Dando como resultado que para obtener un numero de Richardson de 10 para este fluido en esas condiciones se necesitaría una gradiente de temperatura de 35 K.

En relación con el gradiente obtenido para el Sodio-Potasio, el del aire es mayor ya que es un gas, el que este en estado gaseoso provoca que las moléculas de este estén menos compactadas por lo que el intercambio de energía de una a otra sea menor y por consiguiente se necesite un mayor gradiente.

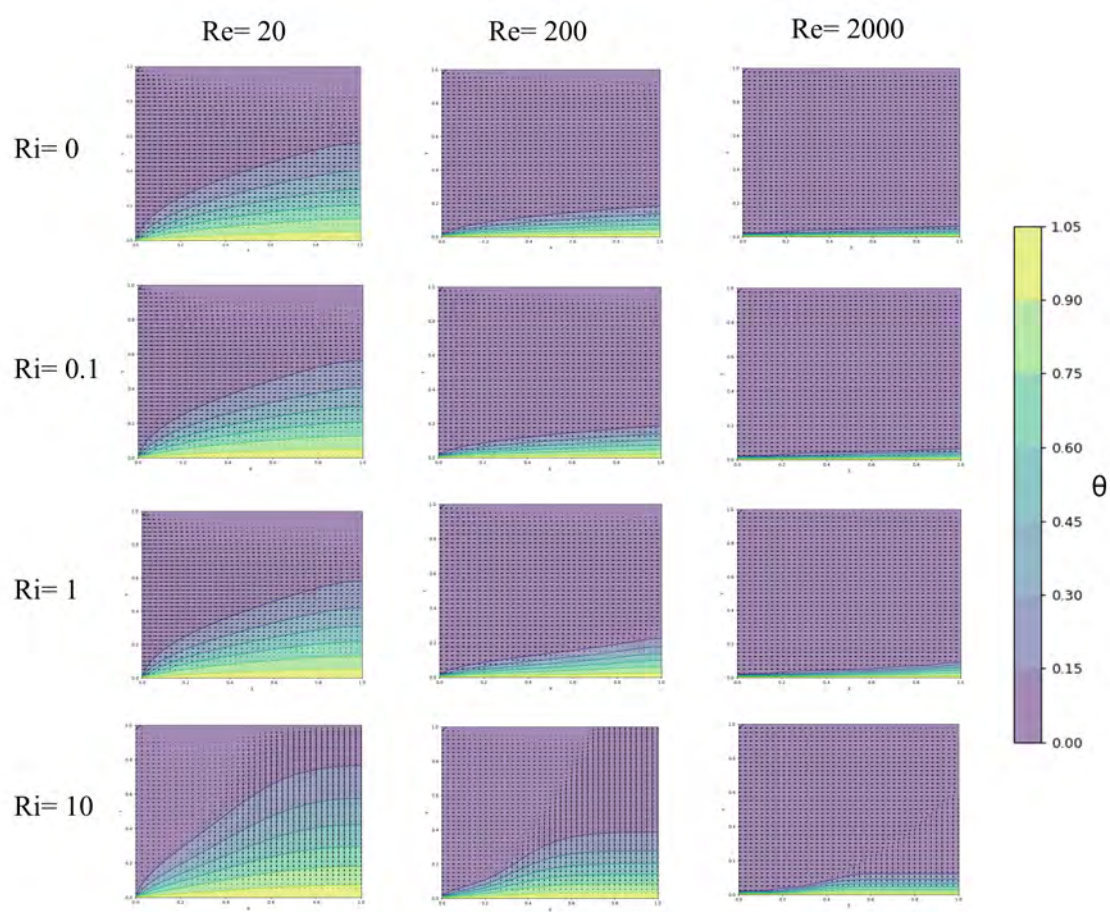
### 5.2.3. Vapor de agua

El vapor de agua saturado se puede encontrar en diversas aplicaciones, siendo un elemento muy importante de controlar en la generación de energía a través de termoelectricas. Para poder estudiar el comportamiento se tomó de referencia el vapor a  $100^\circ C$ , teniendo un numero de Prandtl de 1.00.

La figura 5.5 muestra diversas capa limite térmica del vapor de agua a  $100^\circ C$  sometido a diferentes condiciones. De forma general la capa limite se ve extendida de manera

## 5. RESULTADOS

---



**Figura 5.3:** Capas limites térmicas para  $Pr=0.7$

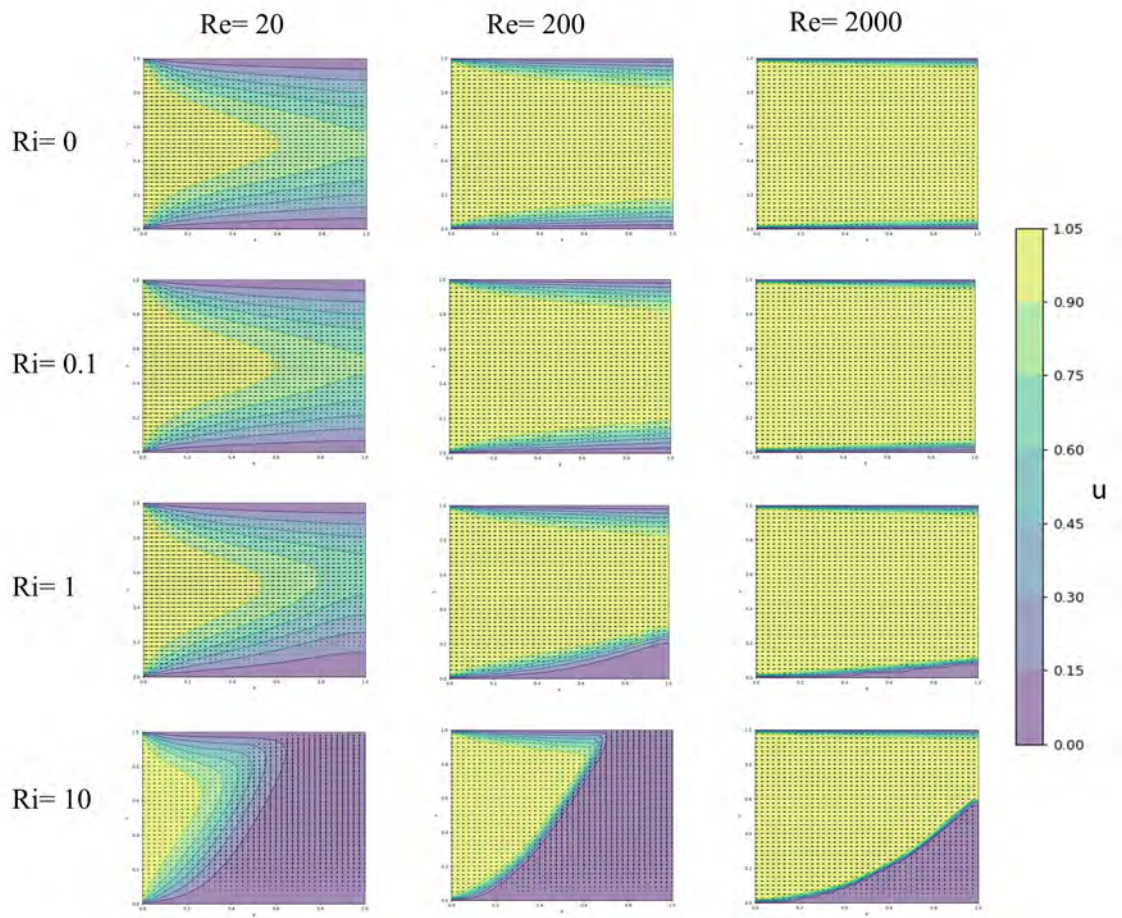


Figura 5.4: Capas limites dinámicas para  $Pr=0.7$



## 5. RESULTADOS

---

moderada. Al igual que con los fluidos anteriores se puede observar como al aumentar el número de Reynolds la capa límite térmica disminuye ya que los efectos de difusión de movimiento aumentan superando a los de difusión de calor. Por otra parte al igual que sucedía con el aire al variar el número de Richardson en 0, 0.1 y 1 no se observa una diferencia tan significativa en la extensión de la capa límite, cosa que cambia al aumentar el Richardson hasta 10 al igual que sucedía con el aire.

En la figura 5.6 se pueden observar diversas capa límite dinámica del vapor de agua a diferentes condiciones. Se nota como a mayor Reynolds la capa límite se ve mayormente extendida, particularmente en  $Ri=0$  y  $Re=2000$  se observa como en la mayor parte del canal el fluido tiene una velocidad adimensional cercana 1, excepto cerca de los bordes donde se ve disminuida la velocidad hasta que en el borde es de 0. Por otra parte, al igual que el aire, a mayor Richardson la capa límite dinámica se ve disminuida, puesto que esta capa grafica las velocidades en el eje x, sin embargo a mayor Richardson empieza a haber velocidades en el eje y que disminuyen las del eje x gráficamente. En realidad las velocidades se suman vectorialmente al ejecutar el código pero gráficamente solo se observa el vector en eje x.

Gráficamente, el aire y el vapor de agua comparten un comportamiento muy parecido, esto se debe a que sus números de Prandtl son muy cercanos y al ser este número adimensional un valor que relaciona variables propias del fluido sin necesariamente ser las mismas permite analizar el comportamiento de estos más allá de sus propiedades dimensionales.

Para detallar el análisis del fluido, se obtendrá el gradiente de temperatura que debe tener el vapor de agua en este canal cerrado para poder tener un número de Richardson de 10 a la vez que un número de Reynolds de 2000. Primero se calculará la velocidad,  $u_m$  con la fórmula que se obtuvo de la definición del número de Reynolds.

$$V = \frac{Re\mu}{\rho H}$$

La viscosidad dinámica ( $\mu$ ) del este fluido es de  $0.00001265 \frac{kg}{ms}$  y su densidad ( $\rho$ ) de  $0.5854 \frac{kg}{m^3}$ , al reemplazar estos valores junto con el del diámetro (H) y un número de Reynolds de 2000.

$$V = \frac{2000 * 0.00001265 \frac{kg}{ms}}{0.2m * 0.5854 \frac{kg}{m^3}}$$

Resultando en que la velocidad del fluido para mantener un Reynolds de 2000 bajo esas condiciones es de  $0.216 \frac{m}{s}$ .

A partir de la definición del tiempo adimensional,  $\tau = 5$  se calcula el tiempo dimensional con la definición del mismo propuesta en el capítulo anterior, reemplazando en la fórmula, el diámetro, la velocidad, y  $\tau$

$$t = \frac{H}{u_m} \tau = \frac{0.2m}{0.216 \frac{m}{s}} * 5 = 4.6s$$

Por lo que las gráficas presentadas para este fluido se presentan a los 4.6 segundos de flujo, un tiempo bastante parecido al del aire, esto se debe a que la geometría del canal es la misma y sus propiedades, de forma englobada en los números de Prandtl respectivos, presentan cierto parentesco.

Para calcular el gradiente de temperaturas se contemplará una aceleración por gravedad de  $9.8066 \frac{m}{s^2}$  y un coeficiente de expansión térmica volumétrica de  $0.0029 \frac{1}{K}$ . A través de la definición del número de Richardson, y con la formula que se ha ocupado:

$$\Delta T = \frac{Ri * u_m^2}{g * L * \beta}$$

Al reemplazar los valores antes dados:

$$\Delta T = \frac{10 * (0.216 \frac{m}{s})^2}{9.8066 \frac{m}{s^2} * 0.0029 \frac{1}{K} * 0.2m}$$

Dando como resultado que para obtener un numero de Richardson de 10 para este fluido en esas condiciones se necesitaría una gradiente de temperatura de 82 K.

Hasta ahora en los fluidos analizados se puede observar que la temperatura necesaria para alcanzar un  $Ri=10$  es menor en líquidos que en gases, esto puede estar directamente relacionado con el estado de la materia, pues en gases sus partículas tienen mas grados de libertad se alejan unas de las otras con mayor facilidad y por consiguiente requieren más energía. Igualmente se puede observar que fluidos con números de Prandtl semejantes tienden a presentar propiedades con valores cercanos entre sí, sin embargo, no siempre es así con todos los número adimensionales ya que dependen también de la geometría(o forma) por donde fluyan, el numero de Prandtl particularmente depende más de las propiedades de los fluidos que de la forma del canal pero estas propiedades pueden ser afectadas por condiciones de estos.

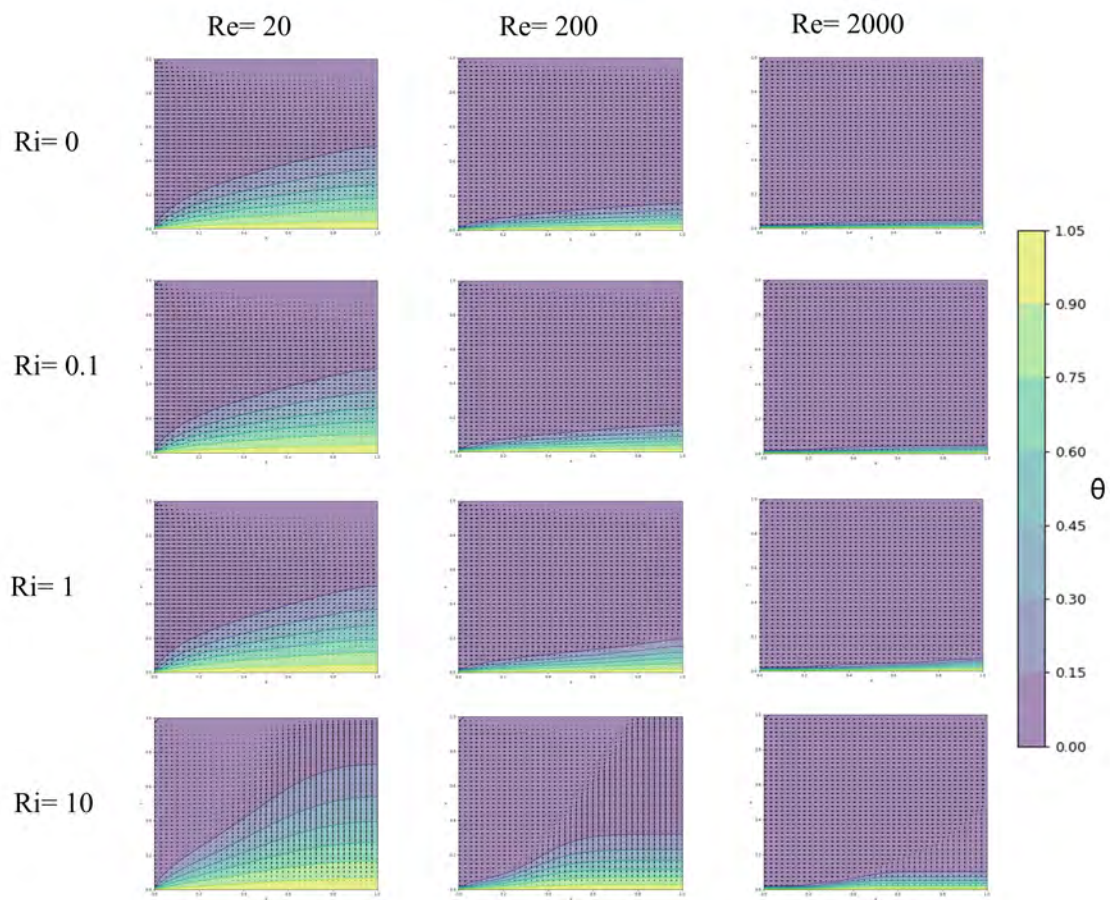
#### 5.2.4. Agua

El agua es un líquido de químicamente representado como  $H_2O$ , y es la sustancia más abundante en la tierra, la referencia que se tomó para el agua fueron sus características a  $20^\circ C$ , esto por ser la temperatura ambiental y teniendo un numero de Prandtl de 7.

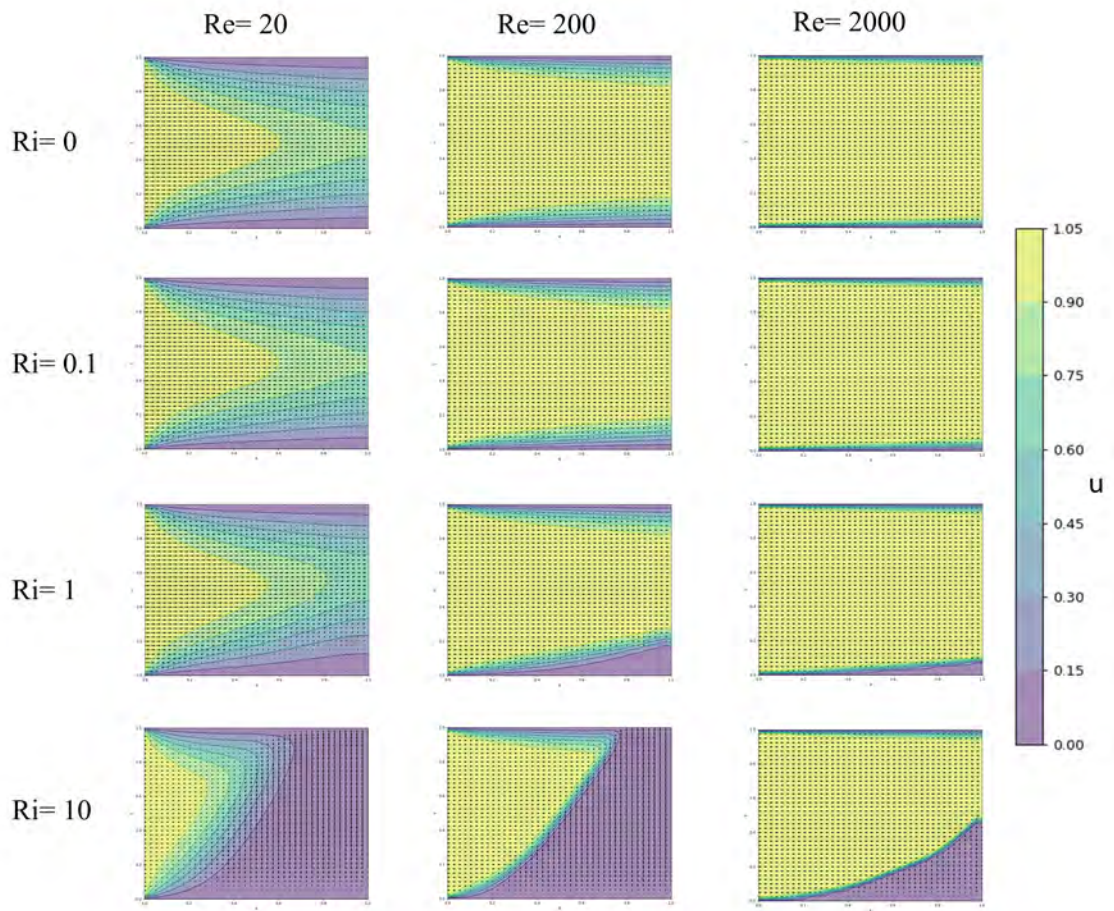
En la figura 5.7 se pueden observar las gráficas de la capa limite térmica del agua para diferentes condiciones. A diferencia de los fluidos anteriores se puede notar visualmente que la capa limite no se ve muy extendida, teniendo que para el numero de Reynolds de 20 es menor que la correspondiente en anteriores fluidos y para el numero

## 5. RESULTADOS

---



**Figura 5.5:** Capas limites térmicas para  $Pr=1.00$



**Figura 5.6:** Capas limites dinámicas para  $Pr=1.00$

## 5. RESULTADOS

---

de Reynolds de 2000 esta se ve sumamente contraída hacia el borde inferior. Esta falta de expansión se debe en parte a la viscosidad del agua, y en general de los líquidos, puesto que esta provoca que la movilidad de las partículas cercas de los bordes se vea limitada y por ende, también la transferencia de calor y extensión de la capa limite. Al aumentar el numero de Richardson la extensión de la capa limite aumenta, sin embargo, esto se observa mejor visualmente hasta que se ocupa un  $Ri=10$ , por lo que se puede decir que la difusividad dinámica se presenta a mayor escala que la difusividad térmica siguiendo el comportamiento esperado de un fluido con un numero de Prandtl más elevado que los anteriores.

La figura 5.8 presenta las capa limite dinámica para el agua bajo diferentes condiciones. En estas graficas también se puede observar como la capa limite dinámica se ve extendida en la mayor parte del canal a partir de un  $Re=200$ , manteniéndose similar para valores de  $Ri=0, 0.1$  y  $1$ , pero teniendo un visualmente cambio en  $Ri=10$  en donde se hacen muy presentes las fuerzas debidas a la flotación provocando por debajo de la capa limite una considerable velocidad en el eje y.

Como se ha hecho con los fluidos anteriores se obtendrá el gradiente de temperatura que debe tener el agua en este canal cerrado para poder tener un numero de Richardson de 10 a la vez que un numero de Reynolds de 2000. Primero se calculará la velocidad,  $u_m$  con la fórmula que se obtuvo de la definición del número de Reynolds.

$$u_m = \frac{Re\mu}{\rho H}$$

La viscosidad dinámica ( $\mu$ ) del este fluido es de  $0.001002 \frac{kg}{ms}$  y su densidad ( $\rho$ ) de  $998 \frac{kg}{m^3}$ , al reemplazar estos valores junto con el del diámetro ( $H$ ) y un numero de Reynolds de 2000.

$$u_m = \frac{2000 * 0.001002 \frac{kg}{ms}}{0.2m * 998 \frac{kg}{m^3}}$$

Resultando en que la velocidad del fluido para mantener un Reynolds de 2000 bajo esas condiciones es de  $0.010 \frac{m}{s}$ .

A partir de la definición del tiempo adimensional,  $\tau = 5$  se calcula el tiempo dimensional con la definición del mismo propuesta en el capítulo anterior, reemplazando en la formula, el diámetro, la velocidad, y  $\tau$

$$t = \frac{H}{u_m} \tau = \frac{0.2m}{0.010 \frac{m}{s}} * 5 = 100s$$

Por lo que las gráficas presentadas para este fluido se presentan a los 100 segundos de flujo, un tiempo elevado en comparación con los gases analizados, esto es debido a la viscosidad dinámica mayor que tiene el agua y en general los líquidos.

Para calcular el gradiente de temperaturas se contemplará una aceleración por gravedad de  $9.8066 \frac{m}{s^2}$  y un coeficiente de expansión térmica volumétrica de  $0.000207 \frac{1}{K}$ . A través de la definición del número de Richardson, y con la fórmula que se ha ocupado:

$$\Delta T = \frac{Ri * u_m^2}{g * L * \beta}$$

Al reemplazar los valores antes dados:

$$\Delta T = \frac{10 * (0.010 \frac{m}{s})^2}{9.8066 \frac{m}{s^2} * 0.000207 \frac{1}{K} * 0.2m}$$

Dando como resultado que para obtener un numero de Richardson de 10 para este fluido en esas condiciones se necesitaría una gradiente de temperatura de 2.5 K.

El gradiente de temperatura es mayor que el del Sodio-Potasio y menor que el del aire y vapor de agua, esto se puede relacionar a la viscosidad dinámica de este fluido, pero mayormente, por la velocidad que presenta.

### 5.2.5. Aceite

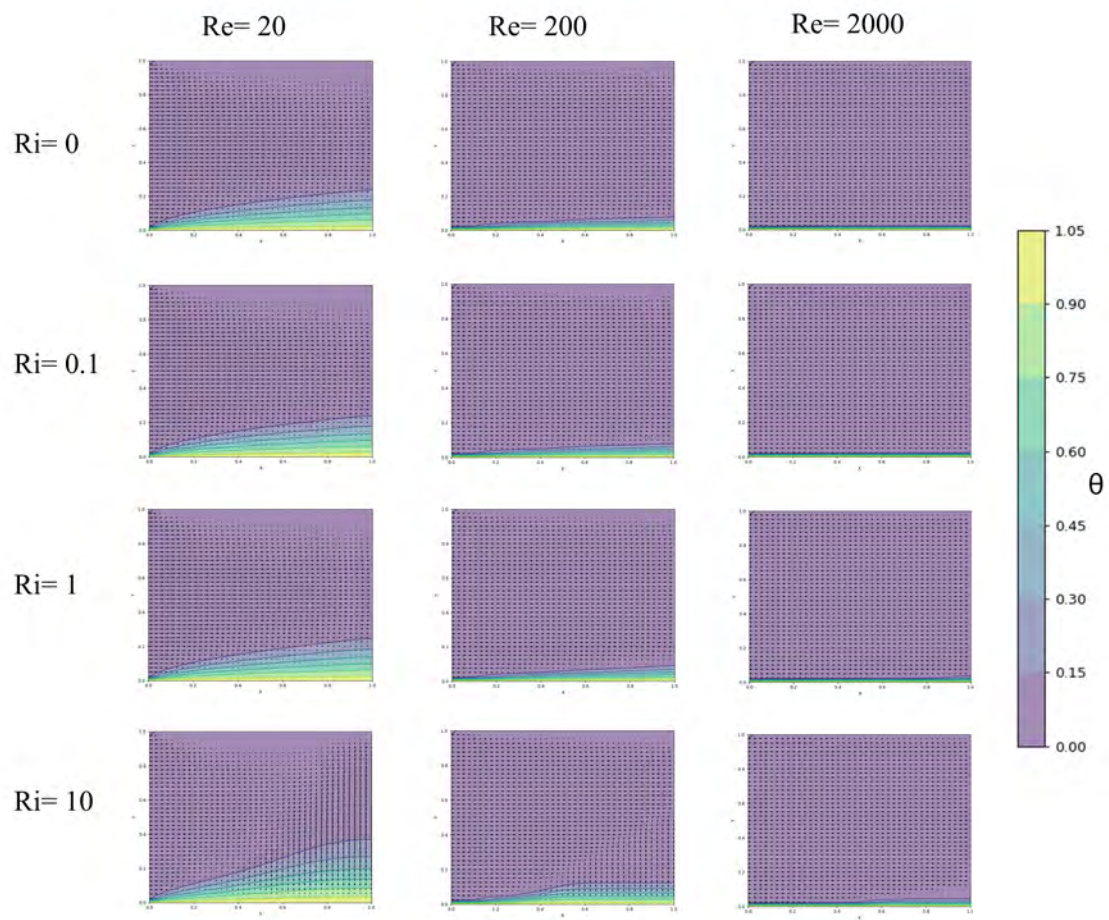
El aceite de referencia tomado fue el aceite de motor sin usar, un fluido bastante común en aplicaciones industriales, a  $40^\circ C$  este tiene un numero de Prandtl de 2962.

Las gráficas de la capa limite térmica del aceite se observan en la figura 5.9, estas visualmente muestran una capa muy poco extendida, incluso teniendo un numero de Reynolds bajo (20) no se presenta de forma notable, e incluso al añadir el efecto de la flotabilidad a través de un número de Richardson alto (10), esta sigue sin extenderse notablemente, aun así cabe aclarar que esta si esta presenta simplemente se ve ampliamente extendida. Esto se debe al número de Prandtl del fluido, el cual es cientos de veces más grande que el de los fluidos anteriores, esto significa que las fuerzas de difusión de movimiento son muchísimo mayores que las de difusión de calor para este fluido.

Por otra parte, las capa limite dinámica del aceite se puede observar en la figura 5.10, a comparación de la térmica, se puede notar extendida y afectada por el número de Reynolds, siendo que cuando este es menor la capa se ve más contraída hacia el borde de izquierdo o de entrada, por otra parte, se extiende visualmente por casi todo el canal cerrado al aumentar el número de Reynolds, independientemente del número de Richardson a pesar de ello, la existencia de los efectos de la flotabilidad y transferencia de calor en la pared inferior siguen estando presentes, lo que genera una velocidad en el eje y aunque esta sea mínima. Como se dijo anteriormente esto se relaciona al tener un numero de Prandtl elevado pues los efectos por difusividad de calor se ven opacados por los efectos de la difusividad dinámica, dicho de otra manera, el fluido se mueve mucho más rápido de lo que se calienta.

## 5. RESULTADOS

---



**Figura 5.7:** Capas limites térmicas para  $Pr=7$

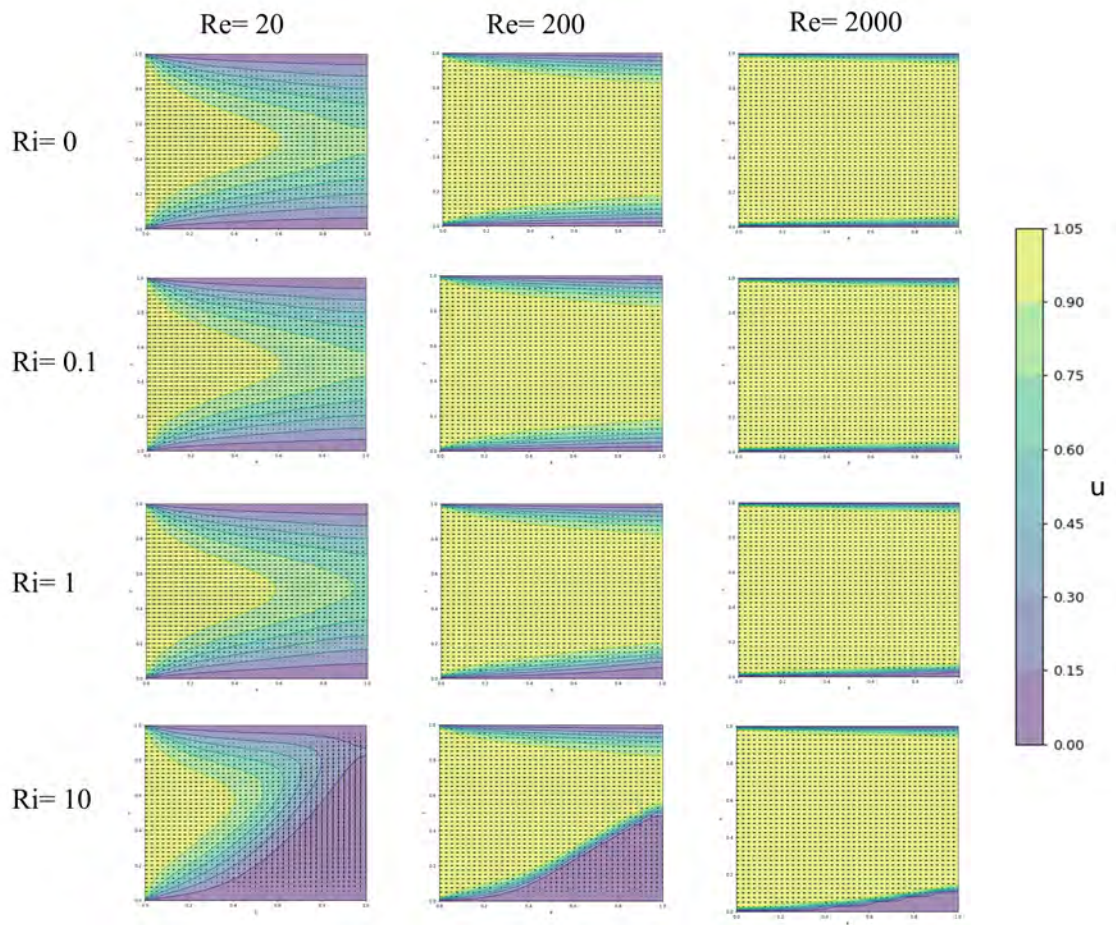


Figura 5.8: Capas limites dinámicas para  $Pr=7$



## 5. RESULTADOS

---

Como se ha hecho con los fluidos anteriores se obtendrá el gradiente de temperatura que debe tener el aceite en este canal cerrado para poder tener un numero de Richardson de 10 a la vez que un numero de Reynolds de 2000. Primero se calculará la velocidad,  $u_m$  con la fórmula que se obtuvo de la definición del número de Reynolds.

$$u_m = \frac{Re\mu}{\rho H}$$

La viscosidad dinámica ( $\mu$ ) del este fluido es de  $0.2177 \frac{kg}{ms}$  y su densidad ( $\rho$ ) de  $876 \frac{kg}{m^3}$ , al reemplazar estos valores junto con el del diámetro ( $H$ ) y un numero de Reynolds de 2000.

$$u_m = \frac{2000 * 0.2177 \frac{kg}{ms}}{0.2m * 876 \frac{kg}{m^3}}$$

Resultando en que la velocidad del fluido para mantener un Reynolds de 2000 bajo esas condiciones es de  $2.49 \frac{m}{s}$ .

A partir de la definición del tiempo adimensional,  $\tau = 5$  se calcula el tiempo dimensional con la definición del mismo propuesta en el capítulo anterior, reemplazando en la formula, el diámetro, la velocidad, y  $\tau$

$$t = \frac{H}{u_m} \tau = \frac{0.2m}{2.49 \frac{m}{s}} * 5 = 0.4s$$

Por lo que las gráficas presentadas para este fluido se presentan a los 0.4 segundos de flujo, un tiempo muy pequeño en comparación con los anteriores analizados, esto se debe a su composición química la cual le permite tener menor resistencia al corte, permitiéndole fluir fácilmente.

Para calcular el gradiente de temperaturas se contemplará una aceleración por gravedad de  $9.8066 \frac{m}{s^2}$  y un coeficiente de expansión térmica volumétrica de  $0.0007 \frac{1}{K}$ . A través de la definición del número de Richardson, y con la fórmula que se ha ocupado:

$$\Delta T = \frac{Ri * u_m^2}{g * L * \beta}$$

Al reemplazar los valores antes dados:

$$\Delta T = \frac{10 * (2.49 \frac{m}{s})^2}{9.8066 \frac{m}{s^2} * 0.0007 \frac{1}{K} * 0.2m}$$

Dando como resultado que para obtener un numero de Richardson de 10 para este fluido en esas condiciones se necesitaría una gradiente de temperatura de 45159 K.

Este gradiente es enorme, al punto que el aceite liquido se vería evaporado mucho antes de si quiera alcanzar una diferencia de temperaturas así, este gradiente se debe al numero de Prandtl tan alto que tiene el cual provoca que las fuerzas dinámicas se

vean miles de veces más presentes que las de difusión de calor, esto se ve reflejado en la velocidad que necesitaría presentar el fluido para seguir siendo laminar en el canal cerrado descrito, la cual fue de  $2.9 \frac{m}{s}$ , siendo el fluido que presenta mayor velocidad de los estudiados. Se puede decir que si bien el código computacional es capaz de simular estas condiciones en la práctica serían extremadamente difíciles de conseguir, además de que para esta temperatura se perdería el comportamiento newtoniano por lo que el código computacional perdería precisión. Sin embargo, si se buscara tener un número de Richardson más bajo, por ejemplo con  $Ri=0.1$  el gradiente sería de 450 k, uno mucho más práctico, a la vez que al reducir la velocidad del fluido también se podría reducir el gradiente necesario aunque se vería afectado el número de Reynolds. Igualmente, que en este fluido las condiciones de temperatura fueran demasiado elevadas se debe en buena medida por el diámetro propuesto, de variar el mismo se tendrían diferentes temperaturas (mayores o menores dependiendo del caso) donde los números adimensionales se mantengan.

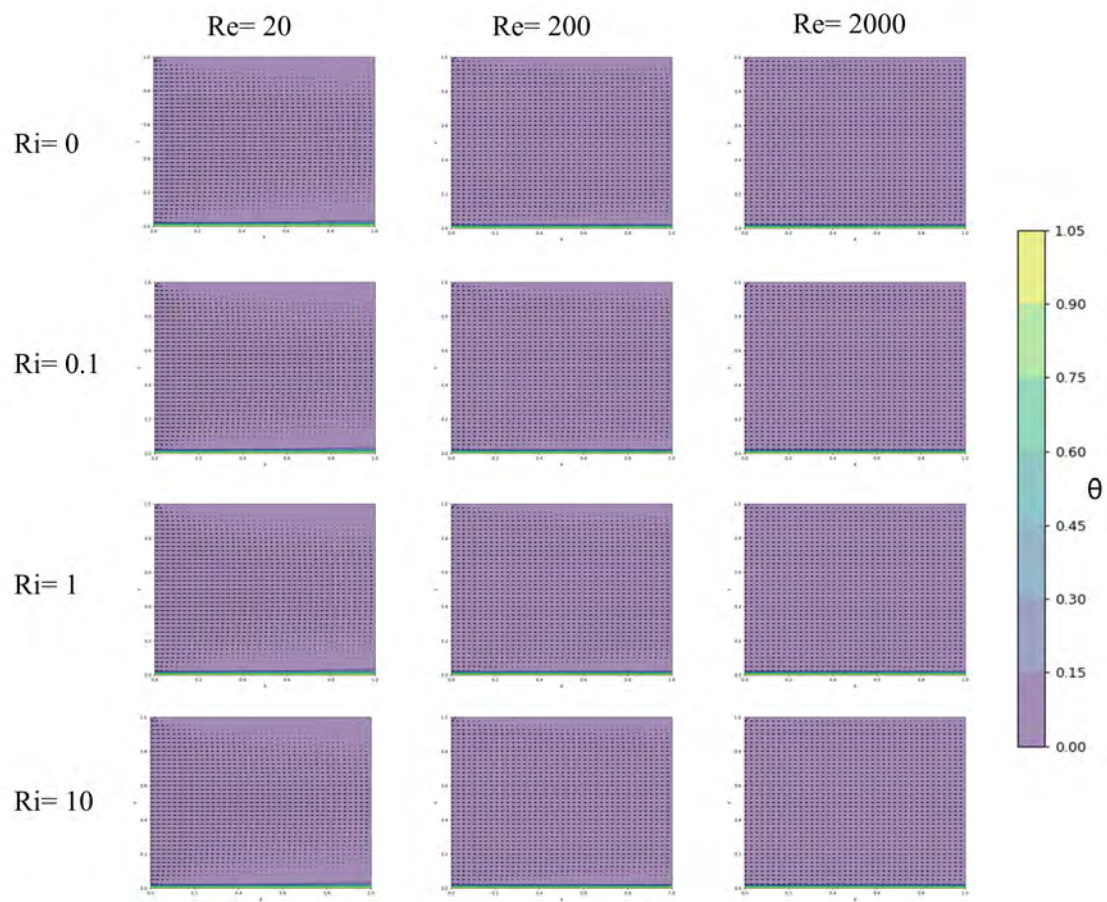
Otra cosa que destacar con este resultado es que si bien para las condiciones propuestas en la práctica serían imposibles de alcanzarlas, con tan solo modificar el diámetro a 1 m, la diferencia final de temperaturas sería de 350 k, manteniendo el número de Richardson de 10 y de Reynolds de 2000. Con ello se denota que si bien en un principio el código computacional parecía modelar una situación irreal, en realidad no es así puesto que si hay condiciones físicas donde el fluido elegido pueda presentar estos números adimensionales, y por ende, tener el comportamiento descrito gráficamente.

### 5.2.6. Análisis general

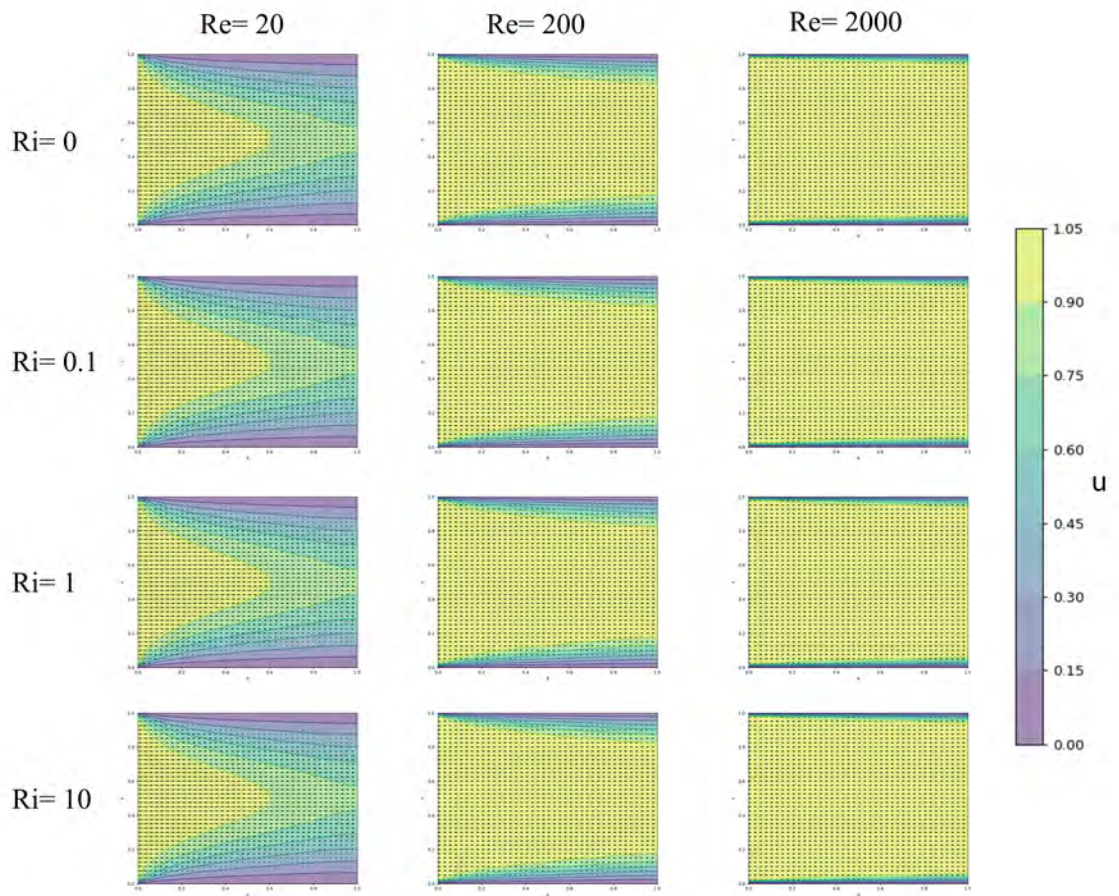
En términos generales, las graficas presentadas muestran las extensiones de la capa límite térmica y dinámica de diferentes fluidos a partir de sus números adimensionales Reynolds, Richardson y Prandtl, en los fluidos simulados podemos ver como tenemos el máximo valor de la temperatura cuando el valor  $\theta$  llega a 1, lo cual gráficamente se denota con un color amarillo, mientras que el menor valor se tiene en 0 y se denota con un color azul, lo mismo sucede con el valor  $u$  que representa la velocidad en  $x$ , hay que recordar que estos valores son adimensionales y por ende representan la mayor y menor magnitud presentada, esto no quiere decir que la magnitud de la temperatura sea un valor de 0 o sea nulas, sin embargo, para la velocidad en un el valor 0 se tiene una magnitud de  $0 \frac{m}{s}$ . A su vez, gráficamente los valores de la velocidad se representaron con flechas que indicaban también la dirección, esto se puede notar particularmente en los primeros gráficos generados (que tuvieron un valor de  $Pr$  menor) al tener una mayor flotabilidad debida a los efectos convectivos y por ende al tener una velocidad en  $y$  bastante presente, viéndose las flechas con una inclinación hacia la parte superior. A pesar de ello, la capa límite dinámica la cual representa las velocidades en  $x$  se vio desarrollada de manera similar en casi todos los fluidos una vez que estos llegaron a un estado estacionario.

## 5. RESULTADOS

---



**Figura 5.9:** Capas limites térmicas para  $Pr=2962$



**Figura 5.10:** Capas limites dinámicas para  $Pr=2962$

## 5. RESULTADOS

---

Ahondando en la capa límite dinámica, se puede observar como la mayor velocidad se tiene en el centro del canal cerrado, reduciéndose esta mientras más cerca se está a las paredes, esto debido a la condición de no deslizamiento en las mismas, lo que provoca la formación de la capa límite dinámica, en los gráficos se podrían considerar 2 capas límites dinámicas, una en la parte superior solo afectada por la condición de no deslizamiento, y otra en la parte inferior afectada por la condición de no deslizamiento y por los efectos de flotabilidad. Respecto a la capa límite superior esta muestra una zona dentro donde la velocidad disminuye gradualmente hasta ser nula y fuera de la misma se encuentra una zona con velocidad uniforme, respecto a la capa límite inferior también se puede observar una zona fuera de la misma donde hay velocidad uniforme, y otra zona dentro donde la velocidad disminuye de forma más acelerada comparada con la del límite superior, esta disminución es debida a los efectos de flotabilidad, mismos que provocan que la capa límite inferior se vea mucho más desplazada hacia el centro del canal pero que a su vez hace que la velocidad en  $x$  se vea muy reducida incluso estando lejos del borde ya que el fluido alcanza mayor velocidad en  $y$  que provoca un desplazamiento en la misma dirección.

En otras palabras, los gráficos de la capa límite dinámica muestran una capa límite en la parte superior donde la velocidad se reduce de forma gradual hasta ser nula, y en la parte inferior hay una capa límite donde la velocidad se ve reducida de forma más abrupta gracias a que los efectos de flotabilidad los cuales provocan que dentro de la capa límite dinámica inferior el fluido tenga un movimiento hacia en dirección  $y$ . Estos efectos al ser muy grandes en algunos casos provocan la fusión de las dos capas, esto principalmente se da a velocidades o diámetros muy bajos.

En la capa límite térmica se puede observar como debajo del borde la temperatura tiene va gradualmente aumentando hasta llegar a la pared inferior, englobándose en 2 zonas el fluido, una dentro de la capa límite donde existe un aumento de temperatura gradual y otra fuera de la capa límite donde el fluido mantiene la misma temperatura uniformemente. En todos los casos la capa límite térmica difícilmente se extiende hasta la mitad del conducto, solo haciéndolo a números de Prandtl, y Reynolds muy pequeños, o de Richardson muy altos. Esta extensión experimentalmente dependería principalmente de la capacidad de convección y conducción del fluido, a mayor la capa límite se extenderá más, igualmente a menor diámetro o menor velocidad también lo hará.

Dimensionalmente hablando, a través de los cálculos hechos, se puede denotar como la variable que más influencia tiene respecto a las diferencias de temperaturas necesarias para que se desarrolle la capa límite es el diámetro del canal cerrado, pues al variarlo la diferencia de temperaturas necesarias se reduce considerablemente, esto es gracias a que el diámetro influye directamente en la velocidad necesaria para mantener un flujo laminar, a mayor diámetro se requiere menor velocidad y esto a su vez permite que la transferencia de calor se de con mayor facilidad.

El código computacional demostró ser capaz de simular el comportamiento de diversos fluidos, mostrando sus capa límite térmica y dinámica, siempre guiándose por números adimensionales, lo cual extiende su alcance a todas las condiciones experimentales en las que se tengan estos números y un flujo bajo las condiciones previamente descritas.

A su vez, el código computacional nos puede servir para conocer a que magnitudes físicas es posible tener valores adimensionales deseados y cuales son estas, a la vez que permite saber a qué magnitudes físicas serian imposibles de obtener, esto a través de análisis dimensionales.

# Conclusiones

---

Este trabajo de investigación culminó en la creación de un modelo matemático y código fuente que logra simular el comportamiento de diversos fluidos en un ambiente específico, cumpliendo el objetivo que fue planteado en un inicio, esto a través del método matemático de diferencias finitas.

A lo largo de esta investigación se pudo comprobar y experimentar con dicho código, observando el comportamiento de fluidos tanto cotidianos como menos convencionales, por ende, la simulación de ellos es de gran importancia no solo para el área de la ingeniería, pues al ser estos fluidos utilizados comúnmente en distintas aplicaciones su comportamiento puede ser de interés para diversas áreas de la ciencia.

Los fluidos estudiados fueron el aire, el agua, el vapor de agua, líquido sodio-potasio y el aceite de motor, cada uno ellos tuvieron un comportamiento diferente, algunos al tener características adimensionales aproximadas (como el número de Prandtl) presentaron comportamientos similares (como el aire y el vapor), por el otro lado, los fluidos con características más alejadas presentaron comportamientos significativamente diferentes (como el aceite de motor).

Los comportamientos diferentes de los fluidos, desde el punto de vista de transferencia de calor, se pueden explicar gracias al número de Prandtl, pues los fluidos donde el número era pequeño (menor a 1) la difusión térmica se dio de manera más rápida que la dinámica. Por otra parte en los fluidos de número de Prandtl altos (mayor a 1) esta difusión térmica se vio reducida por la difusión dinámica, incluso teniendo efectos mínimos al tener números mucho mayores (2962). Aun así, si bien el número de Prandtl influye mucho en el comportamiento de las capas límites, tanto dinámicas como térmicas, los parámetros dimensionales como la velocidad y el diámetro también tienen efectos muy grandes siendo el parámetro dimensional más importante el diámetro, pues este se puede relacionar directamente con la temperatura necesaria para tener los comportamientos deseados.

---

El ocupar números adimensionales para el código provoca que sea muy sencillo simular a diferentes fluidos en diferentes condiciones, sin embargo, también puede provocar que se pierdan de vista las dimensiones experimentales.

Si bien el código computacional desarrollado a lo largo de este trabajo tiene sus limitaciones, como funcionar principalmente para canales cerrados rectangulares, o perder precisión si el fluido a simular está sometido a gradientes de temperatura extremos donde el hecho de tener una viscosidad constante sigue siendo un código bastante sólido y efectivo capaz de simular una amplia variedad de situaciones con una gran precisión.

Finalmente, se puede decir que las ecuaciones obtenidas, así como el código fuente al que condujeron, mostraron su efectividad y precisión al poder mostrar el comportamiento de diferentes fluidos, siendo esto de gran utilidad para diferentes sectores, por ejemplo, el de producción de energía eléctrica, igualmente el presente trabajo de investigación puede fungir como base para el desarrollo de otros códigos computacionales que simulen fluidos en condiciones alternas a las propuestas.



## Bibliografía

---

- [1] VELÁZQUEZ ORTEGA, JOSÉ L. Y GÓMEZ LÓPEZ, ALDO, 2013, *Computational simulation of heat transfer in a dip shrink tank using two different arrangements of electrical resistances*, IPN, Grant No. 167474, SIP-IPN 20131675.F. 2
- [2] MALDONADO PASTRANA, DANIEL, 2012, *Fenómeno conjugado de conducción convección natural y producción de entropía en una cavidad rectangular con paredes de espesor finito*, UNAM Facultad de Ciencias. 2
- [3] BEJAN, ADRIAN, 2022, *Heat Transfer Evolution, Design and Performance*, Wiley. 2, 7, 9, 10, 12, 16
- [4] PRITCHARD, PHILIP P., 2011, *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics*, 6th ed., John Wiley & Sons. 4
- [5] WHITE, FRANK M., 2013, *Fluid Mechanics*, 4th ed., McGraw Hill. 4, 9, 10, 11
- [6] HALL, NANCY, 2021, *Navier-Stokes Equations 3-Dimensional Unsteady*, Nasa, Artículo recuperado el 9 de diciembre del 2023 de <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/nseqs.html>. 4
- [7] NAVIER, M., 1827, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France. 9
- [8] BOUSSINESQ, J., 1903, *Théorie Analytique de la Chaleur*, vol. 2. Paris: Gauthier-Villars. 12
- [9] SINGH, S. Y SHARIF, M. A. R., 2003, *Mixed convective cooling of a rectangular cavity with inlet and exit openings on differentially heated side walls*, Numerical Heat Transfer Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology, 44(3), 233-253. 20
- [10] GÓMEZ LÓPEZ, ALDO ET AL., 2015, *Mixed Convection in a Rectangular Enclosure with Temperature-Dependent Viscosity and Viscous Dissipations*, IPN, Grant No. 167474, SIP-IPN 20131675.F. 20

- [11] ANDERSON, D. JOHN, 1995, *Computational Fluid Dynamics The Basics With Applications*, McGraw-Hill. [22](#)
- [12] CENGEL, Y. A., Y GHAJAR, A. J., 2018, *Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications*, 6th ed., McGraw-Hill Education. [30](#), [31](#)
- [13] ORTÍNEZ GUTIÉRREZ, HARUMI ANAID., 2022, *Estudio experimental y numérico de la capa límite térmica e hidrodinámica en un canal vertical de placas planas paralelas con calentamiento asimétrico*, UNAM Programa de posgrado en Ingeniería. [31](#)