



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

# Sombra de una estrella en colapso en un espacio-tiempo regular

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

DANIEL NÚÑEZ TRIGUEROS

TUTOR: DR. JUAN CARLOS DEGOLLADO DAZA

ICF

DR. NÉSTOR ENRIQUE ORTIZ MADRIGAL

ICN

DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA

ICN

CIUDAD UNIVERSITARIA CD. MX.

DICIEMBRE 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y  
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL  
(Graduación con trabajo escrito)**

De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la Institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado:

Sombra de una estrella en colapso en un espacio-tiempo regular

que presenté para obtener el grado de ~~Maestría~~  es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi programa de posgrado, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de graduación.

**Atentamente**

Daniel Núñez Trigueros 314125233

**(Nombre, firma y Número de cuenta de la persona alumna)**

*DEDICATORIA*

A las personas que miran el cielo buscando respuestas.



# Agradecimientos

Agradezco al programa de posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México y al programa de becas de CONACYT por permitirme seguir con mis estudios en el área de física y darme el apoyo requerido. También quiero agradecer a mi tutor Juan Carlos por instruirme durante los dos años de maestría cursados y brindarme sus conocimientos, su apoyo y su amistad en esta travesía. Quiero agradecer al Dr. Néstor Ortiz y al Dr. Miguel Alcubierre por darme sus comentarios sobre mi trabajo como miembros de mi comité tutorial y ofrecerme su apoyo. Así mismo quisiera agradecer a mi compañero de clase Fabián Nieto y al profesor Miguel Socolovsky por sus consejos y su amistad en estos últimos años. También agradecer a la Dra. Margarita Rosado por instruirme en el área de la investigación desde el servicio social de la licenciatura y continuar en contacto conmigo. También quisiera mostrar mi gratitud a mis padres, mi hermano y su esposa, cuya compañía y palabras de aliento me impulsaron a seguir adelante y buscar cumplir mis sueños, dándome lo que estuviera a su alcance para conseguirlo. Al igual que a ellos, dar las gracias a los amigos que han estado a mi lado desde que los conozco hasta esta última etapa de mi vida, han sido de mucha ayuda y siempre estaré agradecido por su amistad y cariño.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	1
<b>2. Agujeros Negros</b>	5
2.1. Las ecuaciones de campo	5
2.2. La métrica de Schwarzschild	7
2.2.1. Coordenadas de Lemaître	11
2.2.2. Coordenadas de Painlevé–Gullstrand	13
2.3. Sombra del agujero negro	14
<b>3. Colapso gravitacional</b>	17
3.1. El tensor de energía-momento	17
3.1.1. Fluido perfecto	18
3.1.2. Tensor de energía-momento electromagnético	19
3.1.3. Campo escalar	21
3.1.4. Condiciones de energía	21
3.2. Condiciones de juntura	22
3.2.1. Primera condición de juntura	24
3.2.2. Segunda condición de juntura	24
3.3. Colapso esférico de polvo	26
3.3.1. Interior (FRW)	27
3.3.2. Exterior (Schwarzschild)	28
3.4. Superficies atrapadas	30
3.4.1. Horizontes	32
3.4.2. Singularidades	35

<b>4. Agujeros negros regulares</b>	<b>37</b>
4.1. Agujero negro de Bardeen	37
4.2. Agujero Negro de Hayward	38
4.3. Electrodinámica no-lineal	44
<b>5. Colapso regular</b>	<b>47</b>
5.1. El colapso esférico	48
5.1.1. Condiciones de juntura en colapso	51
5.2. Colapso de polvo	54
5.3. Colapso semi-clásico	58
5.4. Superficies atrapadas y horizontes	65
<b>6. Sombra de una estrella en colapso</b>	<b>69</b>
6.1. Geodésicas	70
6.2. Sombra	75
6.3. Observador estático	77
6.3.1. Observador en $r_o > r_i$	79
6.3.2. Observador en $r_s^{(2)} < r_o < r_i$	81
6.3.3. Observador en $r_h < r_o \leq r_s^{(2)}$	86
6.4. Observador en caída libre radial	89
<b>7. Conclusiones</b>	<b>95</b>
<b>A. Agujeros negros regulares y NLED</b>	<b>99</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En la última década se han logrado grandes descubrimientos en la ciencia, siendo algunos de los más notables en el área de la física: el descubrimiento del bosón de Higgs, la detección de ondas gravitacionales y, uno que emocionó hasta a los menos interesados en el tema, la primer imagen del horizonte de eventos de un agujero negro (todos premios nobel). Estos acontecimientos despiertan y renuevan la curiosidad del ser humano por conocer, descubrir y explorar el Universo que nos rodea; entender las razones de los fenómenos que se observan y predecirlos es la meta de la investigación.

Cada descubrimiento hecho a lo largo de la historia no sólo contesta algunas dudas, sino que genera nuevas preguntas que requieren respuesta. El caso de la observación del agujero negro en M87 nos dio un primer vistazo a una predicción de la teoría de la relatividad general, una teoría de hace más de 100 años.

La teoría de la relatividad general fue desarrollada en 1915 por uno de los físicos más famosos de la historia: Albert Einstein. Dicha teoría establece que la gravedad puede ser estudiada como curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de masa o energía. Esta teoría se basa en dos principios fundamentales:

- Principio de relatividad: No existe ningún marco de referencia preferencial, i.e., las leyes de la física son las mismas para todos los observadores en movimiento relativo uniforme entre sí.

- Principio de equivalencia: La fuerza de la gravedad es equivalente a la aceleración, en un sistema de referencia en caída libre se anulan los efectos de la gravedad y la física medida empata con la que se mide usando relatividad especial.

Gracias a la teoría de la relatividad general, se tuvo un nuevo entendimiento de la física en general y particularmente un nuevo enfoque sobre la naturaleza de la luz y cómo era afectada por la gravedad de los objetos. La idea de un objeto lo suficientemente masivo para evitar el escape de la luz fue propuesto desde el siglo XVIII por John Michell [1], sin embargo, fue hasta la década de 1930 que los físicos Subrahmanyan Chandrasekhar [2] y Robert Oppenheimer [3] usando la teoría de la relatividad general demostraron que una estrella lo suficientemente masiva que agota su combustible y colapsa bajo la acción de la gravedad puede formar un objeto extremadamente denso y compacto, un agujero negro.

Los agujeros negros son cuerpos masivos cuya característica principal es que la luz no puede escapar una vez que cruza una superficie conocida como el horizonte de eventos. Es natural pensar que si un objeto esférico colapsara a un punto, su centro, tendrá una densidad infinita y un volumen nulo. A ese punto se le conoce como la singularidad y en él las leyes de la física actuales dejan de ser válidas.

Existe un tipo de agujero negro conocido como agujero negro regular, cuya característica principal es que no presenta esta singularidad física. En el trabajo presente se realizará un estudio sobre la evolución de la sombra que proyecta un agujero negro regular, a partir del estudio de geodésicas en el espacio-tiempo de Hayward. Lo que se busca es entender la evolución de un agujero negro por colapso gravitacional con un modelo que no termine en la singularidad física, siendo un objeto con estas características un buen candidato para modelar agujeros negros. Esto se logrará a partir del análisis del ángulo de la sombra que proyecta el objeto compacto en el cielo del observador, el cual para la métrica de Hayward aún no ha sido estudiado. Este tipo de análisis pueden ser de utilidad en un futuro respecto a las observaciones obtenidas por colaboraciones como es el caso del *Event Horizon Telescope* [4].

Como ya se mencionó antes, la primer imagen de la vecindad del horizonte de eventos de un agujero negro fue un verdadero logro para la astrofísica ya que nos permitió observar por primera vez un agujero negro de manera

“directa”. A pesar de ser la primer imagen, desde antes ya habían personas trabajando en modelar estos objetos compactos; una de estas personas fue el físico-matemático alemán Karl Schwarzschild, cuyo trabajo hoy en día es utilizado para comprender los conceptos de horizonte de eventos, singularidad y, por supuesto, agujero negro.



## Capítulo 2

# Agujeros Negros

Los agujeros negros son objetos masivos cuya característica principal es su fuerte atracción gravitacional que impide que a partir de cierta región cualquier cuerpo pueda escapar de él.

En este capítulo se realiza un breve repaso a las ecuaciones de campo de Einstein para entender la relación entre estos objetos compactos y la curvatura al espacio-tiempo y se estudia la métrica de Schwarzschild desde distintos sistemas de coordenadas para comprender las características del agujero negro que modela esta métrica.

### 2.1. Las ecuaciones de campo

La teoría de la relatividad general establece una conexión entre la geometría del espacio-tiempo (una variedad 4-dimensional) y la energía contenida en él, esta relación fue propuesta por Einstein a través de las ecuaciones de campo. Estas ecuaciones dependen de 3 tensores; el tensor métrico ( $g_{\mu\nu}$ ), el tensor de Ricci ( $R_{\mu\nu}$ ) y el tensor de energía momento ( $T_{\mu\nu}$ ).

El tensor métrico es utilizado para medir distancias entre dos puntos del espacio-tiempo. Esta distancia o intervalo cambia dependiendo de la curvatura del espacio-tiempo y puede ser usada para caracterizar el movimiento de los objetos en la variedad dado por efectos gravitacionales. El tensor métrico satisface las ecuaciones de campo, es simétrico ( $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ) y debe ser no-degenerado ( $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ ) para que exista un tensor inverso  $g^{\mu\nu}$  tal

que  $g^{\mu\nu}g_{\mu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\nu}$ .

El segundo tensor que aparece en las ecuaciones de campo es el tensor de Ricci. Este tensor está definido por medio de la contracción del tensor de Riemann usando el tensor métrico.

El tensor de curvatura de Riemann es un tensor muy famoso en el campo de la relatividad general ya que, como su nombre lo indica, describe la curvatura del espacio-tiempo en términos de la variación de las componentes de la métrica en diferentes direcciones. Esta curvatura es debido a la presencia de la materia/energía contenida en el espacio-tiempo por lo que se encuentra relacionado con el tensor de energía-momento. El tensor de Riemann se obtiene de considerar la no-conmutación de derivadas  $\nabla$  sobre un vector dual y se escribe de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\alpha} = 2(\partial_{[\nu}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma[\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\sigma}) \quad (2.1)$$

Las componentes algebraicamente independientes de este tensor dependen de la dimensión  $n$  en la que se trabaje gracias a sus simetrías y antisimetrías, siendo un total de  $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$  componentes algebraicamente independientes. El caso más común con el que se suele tratar es tener dimensión  $n = 4$  (3 componentes espaciales y 1 temporal), dando un total de 20 componentes algebraicamente independientes.

A partir de la simetría bajo el intercambio del primer y segundo par de índices,  $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ , se puede definir el tensor conocido como el tensor de Ricci de la siguiente manera:

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\mu\nu}R_{\nu\beta\mu\alpha} = R_{\alpha\nu\beta}^{\nu} = R_{\beta\mu\alpha}^{\mu} = R_{\beta\alpha} \quad (2.2)$$

Este tensor describe cómo la curvatura del espacio-tiempo varía de un punto a otro. Contrayendo los índices de este tensor es como se obtiene el escalar de Ricci, el cual se define como la traza del tensor de Ricci:

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

Este escalar es una medida de la curvatura promedio del espacio-tiempo en un punto dado.

Finalmente, el último tensor que se requiere para escribir las ecuaciones de campo es el tensor de energía-momento. El tensor de energía-momento es

un tensor simétrico que describe la densidad y el flujo de energía y momento en el espacio-tiempo, los cuales son la fuente del campo gravitacional en las ecuaciones de campo de Einstein.

Con estos 3 tensores y el escalar de Ricci es como se construyen las ecuaciones de campo, dadas por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es un tensor definido como el tensor de Einstein. A partir de este momento se tomará  $G = 1$  y  $c = 1$  en el resto del trabajo. En este trabajo nos centraremos en fenómenos gravitacionales en los que la constante cosmológica es despreciable, i.e.  $\Lambda = 0$ . Bajo estas premisas, las ecuaciones que modelan el espacio-tiempo se ven como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

A través de las ecuaciones de campo (ecs. (2.5)) y con las definiciones de los tensores mencionados anteriormente se establece cómo la materia y la energía curvan el espacio-tiempo y afectan la geometría del mismo. Es claro que el lado izquierdo de las ecuaciones de campo depende de la métrica que se considere para medir el espacio-tiempo y el lado derecho depende de lo que se considere dentro del Universo y puede o no depender igualmente de la métrica. La primera solución exacta a estas ecuaciones es conocida como la métrica de Schwarzschild.

## 2.2. La métrica de Schwarzschild

Karl Schwarzschild fue un físico-matemático alemán nacido en 1873 que contribuyó enormemente al avance de la astrofísica en el área de agujeros negros. La solución que dio a las ecuaciones de campo [5] describe la geometría del espacio-tiempo de un objeto esférico, estático y masivo, como podría serlo una estrella. Para dicha solución, se consideran algunos aspectos preliminares para el espacio-tiempo [6]: es esféricamente simétrico por lo que se usan coordenadas esféricas espaciales  $(r, \theta, \phi)$  para facilitar el cálculo, también es estático ( $g_{\mu\nu}$  no depende de  $t$  y la métrica es invariante ante inversiones temporales), el espacio-tiempo es vacío, lo que implica que

el tensor  $T_{\mu\nu} = 0$  y es asintóticamente plano.

Para derivar la métrica de Schwarzschild se propone inicialmente un elemento de línea tomando en cuenta la simetría esférica y la independencia temporal, esto puede ser expresado como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.6)$$

Siendo  $f(r)$  y  $g(r)$  funciones que serán determinadas gracias a las ecuaciones de campo (ecs. (2.5)). Las ecuaciones de campo dependen del tensor de energía-momento que se escoja. Si se toma  $T_{\mu\nu} = 0$ , i.e. en el vacío, se obtendrán 3 ecuaciones para  $f(r)$  y  $g(r)$ , una por cada coordenada  $T_{tt}$ ,  $T_{rr}$  y  $T_{\theta\theta}$  (la ecuación para  $T_{\phi\phi}$  por simetría es la misma que  $T_{\theta\theta}$ ). Con estas 3 ecuaciones de campo y considerando el límite asintótico se llega a la métrica

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{c}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{c}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.7)$$

Con  $c$  una constante por determinar. Para obtener su valor, se toma un caso particular que es modelar una “estrella” de masa  $M$  y se usa el límite de campo débil. Este límite es útil cuando la curvatura al espacio-tiempo es pequeña, la métrica se puede aproximar como la métrica de Minkowski con una pequeña corrección en la parte de  $t$  y de  $r$ . Para la parte temporal  $g_{00} = -1 + 2\phi$  [7] donde  $\phi = M/r$  el potencial gravitacional de la teoría Newtoniana, siendo  $M$  la cantidad de materia contenida dentro de una esfera de un radio muy grande. Es por ello que, comparando con (2.7), se llega a que  $c = -2M$  y se obtiene el elemento de línea:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.8)$$

donde la función  $f(r)$  está denotada por  $f(r) = g(r)^{-1} = 1 - \frac{2M}{r}$ . Esta métrica describe el espacio-tiempo vacío alrededor de cuerpo esféricamente simétrico de masa  $M$ . Esto es el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Boyer-Lindquist.

La métrica (2.8) es una solución a las ecuaciones de campo a partir de la cual surge el teorema de Birkhoff. Este teorema establece que toda solución con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein en el vacío debe ser estática y asintóticamente plana [8]. Por la manera en como se construye

la solución de Schwarzschild, satisface las condiciones de Birkhoff, por lo que es la única solución posible bajo estas condiciones y no sólo aplica para estrellas, si no también para agujeros negros u objetos con distribuciones de masa suave como nubes de gas en equilibrio hidrostático.

En esta métrica existen distintos puntos interés, uno de ellos es cuando  $r = 0$  ya que la métrica se vuelve singular (no está definida). Otro punto de interés es al que se le denomina radio de Schwarzschild  $r_h = 2M$  donde, al igual que el caso anterior, la métrica es singular. Esto podría decirnos que al igual que  $r = 0$ ,  $r = r_h$  es una singularidad. Sin embargo existen singularidades físicas y singularidades de coordenadas. Las singularidades de coordenadas son, como el nombre lo indica, singularidades debidas al sistema de coordenadas que se utiliza y pueden ser evitadas cambiando a otro sistema de coordenadas. Las singularidades físicas son aquellas que, sin importar un cambio de coordenadas, seguirán estando presentes en la métrica. Éstas pueden ser identificadas utilizando una combinación del escalar de Riemann o de Ricci, e.g.  $R$ ,  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  y  $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta}$  [8]. En el caso de la métrica de Schwarzschild, el escalar de Ricci es:

$$R = \frac{12r_h^2}{r^6} \quad (2.9)$$

De donde se puede observar que  $r = 0$  es una singularidad física y  $r = r_h$  es una singularidad de coordenadas. Es por ello que se usa otro sistema de coordenadas para visualizar el espacio-tiempo en la vecindad de  $r = r_h$ , conocidas como las coordenadas de Kruskal-Szekeres. El cambio de coordenadas de Boyer-Lindquist a Kruskal-Szekeres está definido por:

$$\mathcal{T} = \left(-1 + \frac{r}{r_h}\right) e^{r/2r_h} \sinh \frac{t}{2r_h} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{X} = \left(-1 + \frac{r}{r_h}\right) e^{r/2r_h} \cosh \frac{t}{2r_h} \quad (2.11)$$

para  $r < r_h$  y por:

$$\mathcal{T} = \left(1 - \frac{r}{r_h}\right) e^{r/2r_h} \cosh \frac{t}{2r_h} \quad (2.12)$$

$$\mathcal{X} = \left(1 - \frac{r}{r_h}\right) e^{r/2r_h} \sinh \frac{t}{2r_h} \quad (2.13)$$

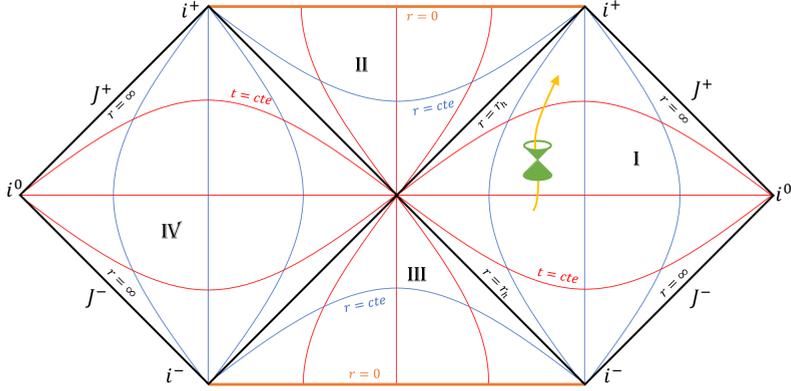


Figura 2.1: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Schwarzschild. Se encuentran marcados puntos importantes del espacio-tiempo; el futuro (pasado) infinito temporal  $i^+$  ( $i^-$ ) es el punto terminal futuro (pasado) de todas las geodésicas temporales que no terminan (inician) en  $r = 0$  y el infinito espacial  $i^0$  es el punto final o inicial de todas las geodésicas espaciales. Además, se encuentra marcado el futuro (pasado) infinito nulo  $J^+$  ( $J^-$ ) que es el conjunto de puntos terminales futuros (pasados) de todas las geodésicas nulas salientes (entrantes) a lo largo de las cuales  $r$  aumenta (disminuye).

para  $r > r_h$ .

En estas coordenadas, la métrica está dada por:

$$ds_{KS}^2 = \frac{4r_h^3}{r} e^{-r/r_h} (-d\mathcal{T}^2 + d\mathcal{X}^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.14)$$

de donde se observa que ya no tiene inconveniente con  $r = r_h$ .

Una manera de visualizar por completo este espacio-tiempo es por medio de un diagrama de Penrose. Los diagramas de Penrose son compactificaciones conformes del espacio-tiempo que sirven para dar un panorama completo de la estructura causal del mismo. Partiendo de las coordenadas de Kruskal-Szekeres, es posible llegar al diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Schwarzschild. El resultado se muestra en la figura [2.1](#).

Este diagrama proporciona la representación gráfica de cómo es el espacio-tiempo de Schwarzschild, manteniendo los conos de luz en la dirección es-

perada (a  $45^\circ$ ), un ejemplo de ellos se ilustra en la región I. Se puede notar que el espacio-tiempo se divide en 4 regiones separadas por  $r = r_h$ . A esta superficie se le denomina el horizonte de eventos ya que, al ser los conos de luz a  $45^\circ$ , una vez que una partícula atraviesa este horizonte no puede regresar y su único fin será terminar en la singularidad física, la cual se encuentra representada por la línea naranja horizontal de la región II (en  $r = 0$ ).

Las 4 regiones del diagrama representan; I el espacio-tiempo curvado de “nuestro Universo” U, II el agujero negro, III, un agujero blanco (que contrario al agujero negro, todo lo que está dentro de él tiene que salir) y IV el espacio-tiempo de un Universo primado U'. También se encuentran marcadas las hipérbolas que representan a  $r = cte$  (en azul) y a  $t = cte$  (en rojo). Con esto, se puede ver que cualquier partícula que inicie desde un radio inicial lejano,  $r = \infty$ , llegará al final al punto  $r = 0$  (la singularidad) de la región II, pasando por el horizonte de eventos.

Así como este cambio de coordenadas ayuda a realizar una interpretación más detallada del agujero negro de Schwarzschild, existen diferentes sistemas coordenados que facilitan los cálculos en distintas situaciones, a continuación se explican dos sistemas de coordenadas que son de utilidad para los siguientes capítulos.

### 2.2.1. Coordenadas de Lemaître

Un cambio de coordenadas para remover la singularidad espacial  $r = r_h$  se obtiene al considerar una partícula libre en caída radial en coordenadas de Boyer-Lindquist (ec. (2.8)). La ecuación que se obtiene es:

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{r_h}{r}} \left(1 - \frac{r_h}{r}\right) \quad (2.15)$$

integrando, se obtiene:

$$t = f(r) + cte \quad (2.16)$$

de donde, se puede construir el sistema de coordenadas de caída radial considerando que la constante de integración es  $cte = \rho$ ; regresando a la forma diferencial, se obtiene:

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{r_h}} \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{-1} dr + d\rho \quad (2.17)$$

Por otro lado, a partir de la métrica (2.8) se puede obtener el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{1}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \quad (2.18)$$

con  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{d\tau}$ .

Las cantidades conservadas de este Lagrangiano son  $e = \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right) \dot{t}$  para la coordenada  $t$  y  $l = r^2 \dot{\phi}$  para la coordenada  $\phi$ . Usando la condición de normalización de la cuadvirvelocidad ( $u^\mu u_\mu = -1$ ) y fijando la masa  $m = 1$ , se puede llegar a que el movimiento en el plano  $\theta = \pi/2$  esta descrito por la ecuación:

$$-1 = - \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right)^{-1} e^2 + \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} \quad (2.19)$$

Considerando un movimiento radial, i.e.  $l = 0$ , se obtiene:

$$\dot{r}^2 = e^2 - \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right) \quad (2.20)$$

donde  $e$  es una constante a determinar.

Imponiendo que la partícula se encuentra inicialmente en reposo ( $\dot{r}(r_0) = 0 \rightarrow r_0 = \frac{r_h}{1-e^2}$ ) en el infinito ( $r_0 = \infty \rightarrow e^2 = 1$ ), se llega a:

$$\dot{r} = - \sqrt{\frac{r_h}{r}} \quad (2.21)$$

tomando la raíz negativa debido a que se está representando caída radial. Si se integra la ecuación anterior y se define la cte. de integración como  $\rho$ , se llega a:

$$d\tau = -dr \sqrt{\frac{r}{r_h}} + d\rho \quad (2.22)$$

De las ecuaciones (2.17), (2.22) se puede obtener la forma diferencial explícita para  $\tau, \rho$ :

$$d\tau = dt + \sqrt{\frac{r_h}{r}} \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right)^{-1} dr \quad (2.23)$$

$$d\rho = dt + \sqrt{\frac{r}{r_h}} \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right)^{-1} dr \quad (2.24)$$

de donde, sustituyendo la métrica (2.8), se obtiene:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{r_h}{r} d\rho^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.25)$$

donde  $r = [(\rho - \tau) \frac{3\sqrt{r_h}}{2}]^{2/3}$ . Estas coordenadas son síncronas (se pueden escribir como  $ds^2 = -d\tau^2 + g_{ab}dx^a dx^b$ ), esto es que los relojes están en caída radial desde el infinito hacia el origen.

### 2.2.2. Coordenadas de Painlevé–Gullstrand

En el sistema coordenado de Painlevé–Gullstrand, las coordenadas espaciales  $(r, \theta, \phi)$  son las mismas que en el sistema de coordenadas de Boyer–Lindquist; la diferencia es la coordenada temporal que cambia a  $T$ , el cual es el tiempo coordenado medido por un observador en caída libre radial empezando en reposo en el infinito, a diferencia del tiempo  $t$  medido por el observador estático.

Para derivar esta métrica, se considera la 4-velocidad de un objeto cayendo radialmente, esto es  $u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \dot{x}^\mu$ . Gracias a la condición de normalización de la 4-velocidad ( $-1 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ ) y a que la cantidad conservada  $e$  (colocada explícitamente en la sección 2.2.1) se puede escribir como  $e = (1 - \frac{2M}{r})\dot{t} = f\dot{t}$ , se puede reescribir a  $\dot{r}$  de la componente  $u^r$  como:

$$\dot{r} = -\sqrt{e^2 - f} \quad (2.26)$$

Con esto, se identifica la 4-velocidad de la forma:

$$u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu = \left( -e, \frac{-\sqrt{e^2 - f}}{f} \right) \quad (2.27)$$

Como el tiempo coordenado  $T$  será el tiempo propio de un observador en caída libre radial, las geodésicas deben ser ortogonales a las superficies con  $T = cte$  y el vector tangente a las geodésicas  $u_\mu$  debe ser paralelo al gradiente de  $T$  [9]. De este modo:

$$u_\mu = -\frac{\partial T(x^\mu)}{\partial x^\mu} \quad (2.28)$$

Comparando con la expresión que se tenía para la 4-velocidad y tomando el caso de reposo en el infinito, i.e.  $e = 1$ , se llega a:

$$dT = dt + \sqrt{\frac{r_h}{r}} \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{-1} dr \quad (2.29)$$

Sustituyendo en la métrica (2.8), se obtiene:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{r_h}{r}\right) \left(dT - \sqrt{\frac{r_h}{r}} \frac{dr}{1 - \frac{r_h}{r}}\right)^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_h}{r}} + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \left(1 - \frac{r_h}{r}\right) dT^2 + 2\sqrt{\frac{r_h}{r}} dT dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Esta métrica es regular en  $r = r_h$ . Algo a recalcar es que estas coordenadas únicamente cubren las regiones I y II del diagrama, (2.1), para cubrir las otras regiones se tendría que hacer el cambio en la métrica  $dr \rightarrow -dr$  (10). El Lagrangiano asociado a esta métrica es (11):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( - \left(1 - \frac{r_h}{r}\right) \dot{T}^2 + 2\sqrt{\frac{r_h}{r}} \dot{T} \dot{r} + \dot{r}^2 + r^2 (\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) \right) \quad (2.31)$$

con la derivada respecto al tiempo propio  $\tau$ .

Después de este breve repaso a la métrica de Schwarzschild y algunos de sus sistemas coordenados puede hacerse la pregunta, ¿la singularidad en el origen en la métrica de Schwarzschild es una singularidad presente en la naturaleza?. Esta pregunta ha llamado la atención de los físicos desde el descubrimiento de los agujeros negros ya que, no existe evidencia empírica de la existencia de este punto en el espacio-tiempo. Más adelante se verá que esta pregunta dio inicio a la idea de los agujeros negros regulares.

### 2.3. Sombra del agujero negro

Como se mencionó anteriormente, el reciente logro por parte del proyecto *Event Horizon Telescope* (4) llevó a los agujeros negros a ser un tema recurrente no sólo en las conferencias de astrofísica y cosmología, sino también a las pláticas cotidianas de los aficionados a la ciencia. Esta imagen se basa en un término conocido como la sombra del agujero negro.

La sombra de un agujero negro es la región oscura en su interior y se produce gracias a que la atracción gravitacional del agujero negro es suficiente para impedir que la luz escape.

Para tener una idea de cómo es que esta región se observa, se puede suponer una fuente luminosa detrás del agujero negro, los rayos de luz provenientes de la fuente que atraviesen el horizonte de eventos serán atraídos (curvados) al interior, mientras que los que no lo atraviesen llegarán hasta el observador. De este modo, el agujero negro tendrá la forma de un disco negro en el cielo, a esta región oscura en el espacio se le conoce como sombra [11]. Para el caso del agujero negro de Schwarzschild, la sombra será circular y el borde corresponde a rayos de luz que giran asintóticamente en espiral alrededor de un radio  $r = \frac{3}{2}r_h$  conocido como la foto-esfera [11]. La foto-esfera es una superficie de radio constante donde los fotones se acumulan a lo largo del mismo y eventualmente escapan, llegando al observador y dejándolo ver un borde de sombra muy brillante.

De este modo, el observador verá la foto-esfera rodeando la sombra del agujero negro (como se aprecia en la figura 2.2). Usualmente, el cálculo de la sombra se hace considerando un agujero negro eterno, i.e. un agujero negro que siempre ha existido al ser estático y estacionario. El agujero negro de Schwarzschild eterno es un ejemplo de este tipo y existe una fórmula analítica para calcular el radio angular de la sombra [12]. Dependiendo del tipo de agujero negro, el cálculo de su sombra se puede hacer de manera analítica o numérica a través de diferentes métodos y técnicas cfr. [11].

Un punto importante a considerar respecto a la sombra de los agujeros negros es que se cree que los agujeros negros eternos no existen, si no que los agujeros negros tienen un inicio y un posible final, entonces ¿qué le pasa a la sombra si el agujero negro que se estudia no fuera un agujero negro eterno? y ¿si fuera un agujero negro que surge por colapso gravitacional? En el siguiente capítulo se discutirá un posible escenario para responder a esta pregunta.

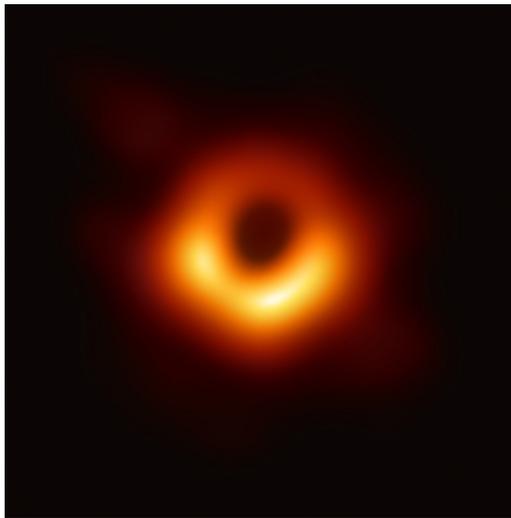


Figura 2.2: Primera imagen de un agujero negro supermasivo ubicado en el centro de la galaxia M87 [4], en ella se puede apreciar la foto-esfera y la sombra del agujero negro.

## Capítulo 3

# Colapso gravitacional

El colapso gravitacional es un proceso que ocurre cuando una estrella masiva agota su combustible nuclear y el núcleo ya no puede sostener su propia gravedad contrayéndose cada vez más. Si la masa de la estrella es mayor a la masa de Oppenheimer-Volkoff, el colapso gravitacional llevará a la formación de un objeto extremadamente denso [13], causando que la estrella se vuelva un agujero negro.

En este capítulo se verán las condiciones de energía, las cuales son de ayuda para caracterizar la energía-materia que curva el espacio-tiempo, cómo se modela un colapso gravitacional de polvo y la derivación del mismo. Además, se presentan las definiciones de algunas superficies especiales como lo son los horizontes de eventos, aparentes y las superficies atrapadas.

### 3.1. El tensor de energía-momento

El tensor de energía-momento se utiliza para representar matemáticamente la distribución de energía y momento en el Universo. Esto implica que, dependiendo de la materia, se tiene un tensor de energía momento diferente.

Este es un tensor simétrico, cuyas componentes están relacionadas con diferentes aspectos de la materia y la energía de la siguiente forma:

- La densidad de masa relativista está dada por la componente 00.

- El flujo de energía está dado por la componente  $k_0$  con  $k = 1, 2, 3$ . Describe la densidad de la componente  $k$ -ésima del momento lineal.
- El flujo de momento está dado por las componentes  $ij$  con  $i, j = 1, 2, 3$ , puede ser la presión en la diagonal o el estrés cortante en las demás componentes.

A continuación se muestran unos de los ejemplos más comunes.

### 3.1.1. Fluido perfecto

Muchos de los objetos astrofísicos son primeramente aproximados por un fluido perfecto. Un fluido es un continuo de partículas el cual puede ser estudiado por un promedio y depender de la región que se busca estudiar y del momento en que se mida. El tensor de energía-momento para un fluido perfecto, anisotrópico e inhomogéneo esta dado por [14]:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p_\theta)u^\mu u^\nu + p_\theta g^{\mu\nu} + (p_r - p_\theta)\xi^\mu \xi^\nu \quad (3.1)$$

donde  $\epsilon(t, r)$  es la densidad de energía del fluido,  $p_r(t, r), p_\theta(t, r)$  son las presiones radial y tangencial del fluido. Estas cantidades dependen del radio y del tiempo debido a que es inhomogéneo. De igual manera está presente  $u^\beta$  que representa la 4-velocidad de las partículas del fluido y  $\xi^\beta$  que es un vector unitario tipo espacial ortogonal a  $u^\beta$ .

Un fluido perfecto es definido en relatividad general como un fluido sin viscosidad ni conducción de calor en el marco de referencia comóvil [15]. Si se considera un fluido perfecto isotrópico, i.e.  $p = p_r = p_\theta$ , el tensor de energía-momento anterior se reduce a:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

La manera en que se relaciona la densidad de energía  $\epsilon$  y la presión  $p$  es por medio de la ecuación de estado. Para fluidos perfectos, el caso más simple es el polvo, el cual se obtiene de considerar que  $p = 0$ . Así, el tensor de energía-momento para polvo es simplemente:

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu \quad (3.3)$$

### 3.1.2. Tensor de energía-momento electromagnético

Una manera de escribir el tensor de energía-momento es asociar el contenido a un campo fundamental (como es el caso del campo electromagnético). Para obtener la forma explícita del tensor electromagnético se define la acción  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_g + \mathcal{S}_m$  donde  $\mathcal{S}_g = \frac{1}{\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x$  corresponde a la parte geométrica (conocida como la acción de Einstein-Hilbert) y  $\mathcal{S}_m = - \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x$  es la acción asociada a la parte de materia con  $\mathcal{L}$  la densidad lagrangiana. La variación de la acción resulta en:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \delta \int \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{\kappa} R - \mathcal{L}_m \right] d^4x \\ &= \frac{1}{\kappa} \int G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x - \int \delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x \end{aligned} \quad (3.4)$$

El primer término corresponde al tensor de Einstein. Desarrollando el término dentro de la segunda integral:

$$\delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_m \delta \sqrt{-g} \quad (3.5)$$

El Lagrangiano de materia puede depender de algún otro tensor asociado a un campo fundamental como lo puede ser el tensor de campo electromagnético definido como  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  con  $A_\mu$  el 4-potencial. De ese modo  $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}(F)$  y la ecuación anterior queda como:

$$\delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}(F)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \mathcal{L}(F) \delta \sqrt{-g} \quad (3.6)$$

Con  $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  un invariante de Lorentz. Usando la identidad  $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$  [6] en la ecuación anterior para el segundo término, se llega a:

$$\delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}(F)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \mathcal{L}(F) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.7)$$

Y usando la regla de la cadena, el primer término se puede escribir como:

$$\frac{\delta \mathcal{L}(F)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{d\mathcal{L}}{dF} \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} = L_F \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3.8)$$

El término  $\delta F$  se puede reescribir como:

$$\delta F = \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (3.9)$$

Y usando el hecho de  $\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 2F_{\mu}^{\beta}F_{\nu\beta}\delta g^{\mu\nu}$ , se obtiene:

$$\frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} = 2F_{\mu}^{\beta}F_{\nu\beta} \quad (3.10)$$

Finalmente, usando las ecuaciones (3.8) y (3.10) se llega a

$$\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}) = \sqrt{-g}[2\mathcal{L}_F F_{\mu}^{\beta}F_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\mathcal{L}(F)g_{\mu\nu}]\delta g^{\mu\nu} \quad (3.11)$$

Y regresando a la definición de la variación de la acción asociada a la materia.

$$\delta\mathcal{S}_m = - \int \sqrt{-g}[2\mathcal{L}_F F_{\mu}^{\beta}F_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\mathcal{L}(F)g_{\mu\nu}]\delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (3.12)$$

Definiendo al tensor de energía-momento como:

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_F F_{\mu}^{\beta}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}\mathcal{L}(F)g_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

la ecuación (3.12) queda como  $\delta\mathcal{S}_m = - \int 2\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d^4x$ . Así, si  $\kappa = \frac{1}{2}$ , la ecuación (3.4) resulta en:

$$\delta\mathcal{S} = 2 \int [G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}]\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (3.14)$$

De donde se obtienen las ecuaciones de campo en su forma  $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ . Análogamente, si se toma  $\kappa = 4\pi$ , las ecuaciones de campo quedan como  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ .

El tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$  describe el campo electromagnético en el espacio-tiempo. Si el espacio-tiempo tiene asociado un vector de Killing temporal y el observador está alineado con ese vector de Killing, se pueden definir los campos eléctrico y magnético a través del tensor de campo electromagnético como [16]:

$$E^a = -n_{\mu}F^{\mu a} \quad (3.15)$$

$$B^a = -n_{\mu}F^{*\mu a} \quad (3.16)$$

siendo  $n^a$  la 4-velocidad del observador.

### 3.1.3. Campo escalar

La ecuación de un tensor de energía-momento asociado a un campo escalar está dado por:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\varphi\nabla_{\nu}\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\varphi\nabla^{\alpha}\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\varphi^2 \quad (3.17)$$

siendo  $\varphi$  un campo escalar y  $m$  la masa del bosón asociado al mismo. Al igual que los anteriores tensores de energía momento, este tensor se conserva, respetando la ecuación:

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.18)$$

A partir de la conservación de  $T_{\mu\nu}$ , se puede llegar a la ecuación de Klein-Gordon.

La ecuación de Klein-Gordon en el espacio tiempo de Minkowski es una ecuación de onda que describe la propagación de un campo escalar en el espacio-tiempo. Como se mencionó anteriormente, el campo escalar asociado a este tensor de energía-momento satisface la ecuación de Klein Gordon dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\varphi = 0 \quad (3.19)$$

A partir de esta ecuación, se puede obtener la densidad de energía  $\epsilon$  y el momento  $p$  asociado al campo escalar.

Estos tensores son impuestos a priori, sin embargo, existe una serie de condiciones conocidas como las conocidas condiciones de energía las cuales, si se cumplen, nos proporcionan características del tensor de energía-momento.

### 3.1.4. Condiciones de energía

Dado un tensor de energía-momento se pueden verificar las condiciones de energía para asegurarse que esté en términos de campos de materia físicamente posibles y se pueda hacer una distinción de su significado físico. La definición de cada condición viene de la teoría de la relatividad general a través de consideraciones matemáticas y físicas. Estas condiciones son [14], [17]:

- Condición de energía débil: establece que para cualquier vector tipo tiempo  $t^\mu$  se debe satisfacer  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ . Si el vector es la 4-velocidad de un observador  $u^\mu$ , la desigualdad se ve como  $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$  y se puede interpretar como que la densidad de energía de una fuente de materia dada es no negativa (en cualquier sistema de referencia). En el marco comóvil y para un fluido perfecto se traduce como  $\epsilon \geq 0, \epsilon + p \geq 0$ .
- Condición de energía dominante: establece que la materia fluye a lo largo de líneas de mundo temporales o nulas y que siempre se conserva la masa total. Si se contrae al tensor de energía-momento con un campo vectorial tipo tiempo dirigido al futuro  $v^\nu$ , la cantidad  $-T_{\nu}^{\mu}v^\nu$  se convierte en un campo vectorial nulo o temporal dirigido al futuro. Esto implica que la densidad de energía domina las otras componentes de  $T_{\mu\nu}$  en el marco comóvil (cuando el tensor es diagonal) por lo que  $T_{00} \geq |T_{ij}|$ , que se traduce para fluido perfecto como  $\epsilon \geq 0, -\epsilon \leq p \leq \epsilon$ .
- Condición de energía fuerte: establece que para todo vector normalizado tipo tiempo dirigido al futuro  $t^\mu$  se debe cumplir  $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})t^\mu t^\nu \geq 0$  o análogamente  $R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ . En el marco comóvil y para fluido perfecto se traduce como  $\epsilon \geq 0, \epsilon + p \geq 0, \epsilon + 3p \geq 0$ . Esta condición en particular puede ser violada para modelos de materia físicamente válidos (campos escalares).

Estas condiciones de energía, pueden no ser las mismas que se aplican al régimen de curvatura fuerte (cerca de la singularidad). Una posibilidad es que en esta región se apliquen otras condiciones de energía que contemplen efectos cuánticos, por lo que se podrían tener modelos que violen alguna(s) de las condiciones de energía aún dentro del marco de la relatividad general.

### 3.2. Condiciones de juntura

Dependiendo de la situación física, de la geometría y de sus simetrías será preferible usar un sistema de coordenadas u otro para una métrica dada. En algunos casos, si el espacio-tiempo se encuentra dividido en dos regiones separadas por una superficie (cerrada), la métrica puede tener una

forma distinta dependiendo de si se encuentra en el interior o en el exterior, un ejemplo de esto se ve en la sección [3.3](#). La métrica debe satisfacer que en esta superficie que separa las regiones se respeten ciertas condiciones imperativas, conocidas como las condiciones de juntura.

Las condiciones de juntura en el contexto de los agujeros negros dados por colapso esférico se refieren a las condiciones que deben cumplirse en una superficie que separa las regiones en donde la métrica cambia de forma. Estas condiciones ayudan a modelar el espacio-tiempo fijando algunos de los parámetros que caracterizan a la métrica en cada región y relacionándolos entre sí.

Existen dos condiciones, la primera se encuentra relacionada con la forma métrica en ambos lados de la hipersuperficie que separa al espacio-tiempo en dos regiones y la segunda habla de la relación entre la materia y la energía que entra y sale del agujero negro.

Para encontrar las condiciones de juntura, se asume que la variedad  $\mathcal{M}$  se divide en una región interior y una exterior ( $\mathcal{M}^-$  y  $\mathcal{M}^+$ , respectivamente) separadas por la hipersuperficie  $\Sigma$  la cual puede ser tipo-tiempo o tipo-espacio [\[10\]](#). En  $\Sigma$  se puede definir un sistema de coordenadas  $y^a$  tal que pueda ser usado en ambas caras de la hipersuperficie y un vector normal a la hipersuperficie  $n^\alpha$  apuntando al exterior (esto hace que  $-n^\alpha$  apunte al interior). Además, cada región  $\mathcal{M}^\pm$  tendrá asociada una forma de la métrica  $g_{\mu\nu}^\pm$  con coordenadas  $x_\pm^\alpha$ . La meta es encontrar las condiciones para las cuales estos sistemas coordenados empatan en  $\Sigma$ , i.e la forma de la métrica en las dos regiones y que coincide en  $\Sigma$ .

Se puede asumir que  $\Sigma$  es atravesada por un conjunto de geodésicas ortogonalmente. De modo que se puede tomar  $\ell$  para denotar la distancia propia a lo largo de esas geodésicas, siendo su valor positivo en el exterior,  $\ell = 0$  cuando atraviesa  $\Sigma$  y negativo en el interior. En otras palabras, para un punto  $P$  fuera de  $\Sigma$ , se tendrá un valor  $\ell$  que denote la distancia propia de  $\Sigma$  a  $P$  a lo largo de la geodésica. Dada esa construcción, se implica que el desplazamiento a lo largo de la geodésica con coordenadas  $x_\pm^\alpha$  puede ser visto como  $dx_\pm^\alpha = n^\alpha d\ell$  donde  $n_\alpha = n^\beta n_\beta \partial_\alpha \ell$  [\[10\]](#). Una vez establecido cómo se denotan matemáticamente las regiones en la variedad  $\mathcal{M}$  se pueden encontrar las condiciones de juntura.

### 3.2.1. Primera condición de juntura

Se puede expresar a la métrica en una región cercana a la hipersuperficie  $\Sigma$  como:

$$g_{\mu\nu} = \Theta(\ell)g_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell)g_{\mu\nu}^- \quad (3.20)$$

con  $\Theta$  la distribución de Heaviside, siendo 1 si  $\ell > 0$ , -1 si  $\ell < 0$  o indeterminado si  $\ell = 0$ . La primera condición de juntura se obtiene de asegurar que con esta métrica se pueden construir cantidades geométricas bien definidas como distribuciones. Derivando la expresión (3.20) respecto a  $x^\gamma$  y usando la regla de la cadena, se obtiene:

$$g_{\mu\nu,\gamma} = \Theta(\ell)g_{\mu\nu,\gamma}^+ + \Theta(-\ell)g_{\mu\nu,\gamma}^- + n^\alpha n_\alpha \delta(\ell)[g_{\mu\nu}]n_\gamma \quad (3.21)$$

donde se usó que  $\frac{d\Theta}{d\ell} = \delta(\ell)$  (delta de Dirac) y se define  $[g_{\mu\nu}] = g_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu}^-$  evaluadas en  $\Sigma$ . El último término es singular [10] y al calcular los símbolos de Christoffel generará términos proporcionales a  $\Theta(\ell)\delta(\ell)$  los cuales no son distribuciones. Por lo tanto, es necesario que ese término sea cero para que la derivada de la métrica siga siendo una distribución. De ese modo se impone la continuidad de la métrica en  $\Sigma$ , i.e.  $[g_{\mu\nu}] = 0$  cerca de  $\Sigma$  para que el último término de la ecuación (3.21) desaparezca. Desarrollando:

$$0 = [g_{\mu\nu}] = [g_{\mu\nu}]e_a^\mu e_b^\nu = [g_{\mu\nu}]e_a^\mu e_b^\nu \quad (3.22)$$

donde  $e_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}$ . Para la última igualdad se usa  $[n^\alpha] = [e_a^\alpha] = 0$  debido a que  $y^a$  es igual en ambos lados de  $\Sigma$ . De este modo, se obtiene la condición de que la 3-métrica inducida  $[h_{ab}] = [g_{\mu\nu}]e_a^\mu e_b^\nu = 0$ , esto es que debe ser igual en ambos lados de  $\Sigma$ , lo que establece que la geometría en ambos lados de  $\Sigma$  esté bien definida.

### 3.2.2. Segunda condición de juntura

Para la segunda condición se necesita revisar antes algunos de los objetos geométricos que surgen de la métrica definida en la ecuación (3.20). Los símbolos de Christoffel estarán dados por:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Theta(\ell)\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha+} + \Theta(-\ell)\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha-} \quad (3.23)$$

Una vez definidos, se puede llegar a que el tensor de Riemann se escribe como:

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Theta(\ell)R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha+} + \Theta(-\ell)R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha-} + \delta(\ell)A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} \quad (3.24)$$

donde  $A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = n^{\mu}n_{\mu} \left( [\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}]n_{\gamma} - [\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}]n_{\delta} \right)$ . Del último término en el tensor de Riemann se observa que en el punto donde  $\ell = 0$ , en  $\Sigma$ , representa una singularidad de curvatura.

Como la 3-métrica es continua en  $\Sigma$ , sus derivadas tangenciales también deben serlo, por lo que si  $g_{\mu\nu,\gamma}$  es discontinua, debe serlo a lo largo del vector normal  $n^{\alpha}$ . Entonces, debe existir un campo tensorial  $\kappa_{\mu\nu} = n^{\beta}n_{\beta}[g_{\mu\nu,\alpha}]n^{\alpha}$  tal que  $[g_{\mu\nu,\alpha}] = \kappa_{\mu\nu}n_{\alpha}$ . Sustituyendo en las expresiones para el tensor  $A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$  se obtiene:

$$A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{n^{\mu}n_{\mu}}{2} (\kappa_{\delta}^{\alpha}n_{\beta}n_{\gamma} - \kappa_{\gamma}^{\alpha}n_{\beta}n_{\delta} - \kappa_{\beta\delta}n^{\alpha}n_{\gamma} + \kappa_{\beta\gamma}n^{\alpha}n_{\delta}) \quad (3.25)$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{n^{\mu}n_{\mu}}{2} (\kappa_{\nu\alpha}n^{\nu}n_{\beta} + \kappa_{\nu\beta}n^{\nu}n_{\alpha} - \kappa n_{\alpha}n_{\beta} - n^{\rho}n_{\rho}\kappa_{\alpha\beta}) \quad (3.26)$$

$$A = n^{\mu}n_{\mu} (\kappa_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} - n^{\nu}n_{\nu}\kappa) \quad (3.27)$$

Con estas expresiones, se puede hallar la parte del tensor de Einstein que depende del término de la función  $\delta(\ell)$ . Por otro lado, el tensor de energía-momento se puede escribir como:

$$T_{\mu\nu} = \Theta(\ell)T_{\mu\nu}^{+} + \Theta(-\ell)T_{\mu\nu}^{-} + \delta(\ell)S_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

siendo los primeros dos términos los tensores de energía-momento de la región exterior e interior y el tercero el término asociado a la presencia de una fina distribución de materia en  $\Sigma$ .

Usando las ecuaciones de campo, se puede llegar a:

$$16\pi n S_{\mu\nu} = \kappa_{\rho\mu}n^{\rho}n_{\nu} + \kappa_{\rho\nu}n^{\rho}n_{\mu} - \kappa n_{\mu}n_{\nu} - n\kappa_{\mu\nu} - (\kappa_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} - n\kappa)g_{\mu\nu} \quad (3.29)$$

con  $n = n^{\rho}n_{\rho}$ .

Con esta ecuación, se puede demostrar que  $S_{\mu\nu}$  es tangente a  $\Sigma$  ya que  $S_{\mu\nu}n^{\nu} = 0$ . Por ello, se puede descomponer este tensor de la forma  $S^{\mu\nu} = S^{ab}e_a^{\mu}e_b^{\nu}$  y obtener:

$$16\pi S_{ab} = -\kappa_{\mu\nu}e_a^{\mu}e_b^{\nu} + h^{cd}\kappa_{\alpha\beta}e_c^{\alpha}e_d^{\beta}h_{ab} \quad (3.30)$$

Haciendo uso de la derivada covariante para el vector normal  $n_\alpha$ , se puede llegar a la definición de la curvatura extrínseca dada por  $[K_{ab}] = [n_{\mu;\nu}]e_a^\mu e_b^\nu = \frac{n}{2}\kappa_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu$ . A partir de esta definición y de la ecuación (3.30) se obtiene la relación entre el tensor de energía-momento de la superficie  $\Sigma$  y el salto de la curvatura extrínseca de un lado al otro, dada por:

$$S_{ab} = -\frac{n}{8\pi} ([K_{ab}] - [K]h_{ab}) \quad (3.31)$$

La segunda condición de juntura es que la curvatura extrínseca se anule. Si  $[K_{ab}] = 0$ , el término con la función delta en las ecuaciones de campo desaparece, al igual que el término con la función delta en el tensor de Riemann. El hecho de que la curvatura extrínseca sea diferente dependiendo del lado considerado en  $\Sigma$  se traduce como que existe una capa en la superficie de  $\Sigma$  con un tensor de energía-momento asociado  $T^{\alpha\beta} = \delta(\ell)S^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta$ . Con estas condiciones de juntura es que se puede hacer el “pegado” para modelar los agujeros negros formados por colapso gravitacional. Por otro lado, ya sea polvo o algún otro tipo de materia en colapso, la aparición de un agujero negro se dará con la formación de las superficies atrapadas, conforme la materia colapse de una configuración inicial sin la presencia de éstas [14]. En la sección 3.4 se explica cómo se encuentran estas hipersuperficies y cómo se relacionan con los horizontes y la singularidad.

### 3.3. Colapso esférico de polvo

El modelo teórico más simple de colapso fue propuesto por Datt [18] en 1938 y por Oppenheimer y Snyder [3] en 1939 en el que se considera un objeto estelar esféricamente simétrico con densidad constante y presión interior nula, en su exterior se encuentra vacío. El colapso de polvo homogéneo resultará en la formación de un agujero negro cuya singularidad central puede ser evitada al detener el colapso gravitacional antes de alcanzarla.

En este modelo, el colapso se divide en dos regiones separadas por el horizonte de eventos, dichas regiones se modelan utilizando métricas distintas; debido a que el objeto estelar tiene densidad constante y posee simetría esférica, para el interior la forma de la métrica será tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y debido a que el objeto estelar es esféricamente

simétrico y el espacio fuera del mismo es vacío, para el exterior la forma de la métrica será de Schwarzschild.

### 3.3.1. Interior (FRW)

Como ya se mencionó anteriormente, el espacio-tiempo al interior del objeto estelar será modelado usando la métrica FRW. Esta métrica se ve como:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 [d\chi^2 + \sin(\chi)^2 d\Omega^2] \quad (3.32)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio de las líneas con  $\chi, \theta, \phi = cte$ . La superficie con  $\chi = \chi_0$  representa el borde de la esfera de polvo.

Usando las ecuaciones de campo (2.5) con un tensor de fluido perfecto con  $p = 0$  y con la métrica (3.32) se pueden obtener expresiones para  $a$ . En el caso de la componente 00:

$$\frac{8\pi}{3} \epsilon a^3 = \dot{a}^2 + 1 \quad (3.33)$$

con  $\dot{a} = \frac{da}{d\tau}$ .

Por otro lado, debido a la conservación del tensor de energía-momento ( $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ), junto con  $p = 0$  se llega a la conservación del número de partículas  $\nabla_\mu(\epsilon u^\mu) = 0$  [19]. Esta última expresión se puede reescribir como:

$$\nabla_\mu(\epsilon u^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g} \epsilon u^\mu) \quad (3.34)$$

donde  $\sqrt{-g} = a(\tau)^3 \sin \chi^2 \sin \theta$ . Eligiendo  $\mu = 0$  al ser la única entrada no-nula de la 4-velocidad se obtiene:

$$\partial_0(\epsilon a(\tau)^3) = 0 \quad (3.35)$$

que, integrando, da como resultado directo  $\epsilon a^3 = cte$ . Esta constante se puede tomar como  $\frac{3}{8\pi} a_m$  siendo  $a_m$  el valor máximo del factor de escala [19]. Usando estas dos últimas ecuaciones y definiendo el parámetro  $\eta$  como  $d\tau = a d\eta$  se llega a:

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 = a^2(a_m - 1) \quad (3.36)$$

Cuya solución está dada por:

$$a = \frac{1}{2}a_m(1 + \cos \eta) \quad (3.37)$$

donde el valor de  $\eta$  varía de 0 a  $\pi$ .

Recordando la definición del parámetro  $ad\eta = d\tau$  e integrando, se puede escribir el tiempo coordenado como función del parámetro  $\eta$ .

$$\tau = \frac{1}{2}a_m(\eta + \sin \eta) \quad (3.38)$$

Y usando la definición de la constante, la densidad de energía queda como:

$$\epsilon = \frac{3}{8\pi a_m^2} \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos \eta) \right]^{-3} \quad (3.39)$$

Con estas expresiones es claro que el factor de escala comienza en  $a_m$  (como se espera) y termina en 0. Así mismo, la densidad de energía comienza en  $\epsilon = \frac{3}{8\pi a_m^2}$  y termina en  $\epsilon = \infty$ .

Se puede escribir la métrica en términos del parámetro  $\eta$  para tener el factor de escala multiplicando todo. En la superficie de la esfera de polvo, i.e.  $\chi = \chi_0$ , esto se ve como:

$$\begin{aligned} ds_{int}^2 &= a(\eta)^2 [-d\eta^2 + \sin(\chi_0)^2 d\Omega^2] \\ &= \frac{a_m^2}{4}(1 + \cos \eta)^2 [-d\eta^2 + \sin(\chi_0)^2 d\Omega^2] \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.3.2. Exterior (Schwarzschild)

Para el exterior de la esfera de polvo, el espacio-tiempo será modelado usando la métrica de Schwarzschild (ec. (2.8)).

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (3.41)$$

Esta métrica tiene asociado el Lagrangiano de la ecuación (2.18) como se menciona en la sección 2.2.1. Si se consideran partículas siguiendo geodésicas radiales ( $\ell = 0$ ), la ecuación que describe el movimiento es:

$$\dot{r}^2 = e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (3.42)$$

con  $e$  la constante de movimiento que sale de las ecuaciones de lagrange para  $t$ .

Imponiendo la condición de partir del reposo en  $r = R_0$ , se puede encontrar que la energía de la partícula es:

$$e^2 = 1 - \frac{2M}{R_0} \quad (3.43)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.42) se llega a:

$$\dot{r}^2 = \frac{2M}{r} - \frac{2M}{R_0} \quad (3.44)$$

Resolviendo la ec. diferencial e imponiendo que  $\tau = 0$  en  $r = R_0$  se llega a:

$$\tau = \sqrt{\frac{R_0^3}{8M}} \left[ 2 \left( \frac{r}{R_0} - \frac{r^2}{R_0^2} \right)^{1/2} + \arccos \left( \frac{2r}{R_0} - 1 \right) \right] \quad (3.45)$$

Definiendo un parámetro  $\eta$  como  $\eta = \arccos \left( \frac{2r}{R_0} - 1 \right)$  [19] y recordando la identidad  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ , se puede reescribir a  $\tau$  en términos de este parámetro.

$$\tau = \left( \frac{R_0^3}{8M} \right)^{1/2} (\eta + \sin \eta) \quad (3.46)$$

El parámetro  $\eta$  va de  $\eta = 0$  a  $\eta = \pi$ , que se traduce en el intervalo de  $r = R_0$  a  $r = 0$ . Diferenciando ambos lados de la ecuación anterior se obtiene que:

$$d\tau = \left( \frac{R_0^3}{8M} \right)^{1/2} (1 + \cos \eta) d\eta \quad (3.47)$$

Escribiendo la 3-métrica de Schwarzschild para el radio de la esfera de polvo en términos del parámetro  $\eta$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} ds_{ext}^2 &= -d\tau^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= \frac{R_0^2}{4} (1 + \cos \eta)^2 \left[ - \left( \frac{R_0}{2M} \right) d\eta^2 + d\Omega^2 \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Comparando los coeficientes de  $d\Omega^2$  en las métricas (3.40) y (3.48) se obtiene:

$$R_0 = a_m \sin \chi_0 \quad (3.49)$$

Y comparando los términos de  $d\tau^2$ , se obtiene:

$$a_m = \sqrt{\frac{R_0^3}{2M}} \quad (3.50)$$

Que con la relación anterior se llega a:

$$2M = a_m \sin \chi_0^3 \quad (3.51)$$

Estas dos ecuaciones dan la relación entre los parámetros,  $a_m$  y  $\chi_0$  de la métrica en la región interior y  $R_0$  y  $M$  de la métrica en la región exterior. Estas relaciones ayudan a pegar las 3-métricas de manera uniforme, pudiendo pasar de una a la otra a través de la superficie de la esfera de polvo sin mayor complicación y haciendo el espacio-tiempo un continuo. Así se completa la solución de colapso gravitacional.

### 3.4. Superficies atrapadas

En una variedad diferencial 4-dimensional  $\mathcal{M}$ , se pueden describir superficies de dimensiones inferiores. En particular, cuando se usa una métrica sobre una variedad diferencial para describir un espacio-tiempo se pueden encontrar superficies muy particulares, tal es el caso de las superficies atrapadas cuando se habla de agujeros negros.

Las superficies atrapadas son, como su nombre lo indica, superficies en el espacio-tiempo a partir de las cuales los objetos no pueden volver por donde llegaron debido a la curvatura presente. Dicho de otro modo, sea  $\Sigma$  una hipersuperficie tipo-espacio, una superficie atrapada en  $\Sigma$  es una superficie  $S$ , 2-dimensional, cerrada cuya característica principal es que las geodésicas nulas dirigidas al futuro ortogonales a  $S$  (entrantes y salientes) convergen localmente en  $S$ . Estas superficies son pruebas matemáticas de cómo la gravedad de un objeto deforma la estructura del espacio-tiempo y modela superficies con características especiales.

Un ejemplo de esto se puede obtener si se considera el colapso de materia en un espacio-tiempo vacío de Schwarzschild. Cuando la materia se colapse por debajo de  $r = r_m$  a un tiempo dado (con  $t$  fijo), una 2-esfera (a un  $r$  fijo y  $\theta$  y  $\phi$  libres) puede ser encontrada en el espacio-tiempo vacío entre  $r = r_m$  y el radio de esfera colapsante, esta 2-esfera es lo que se conoce

como superficie atrapada [20]. Esto puede entenderse mejor si se compara con Minkowski. En el espacio-tiempo de Minkowski, en coordenadas esféricas, tomando un punto en una gráfica de  $t$  vs  $r$  (esto es una 2-esfera) se puede identificar que los rayos de luz dirigidos al futuro pueden tomar dos direcciones distintas. Por un lado, los rayos “salientes” representarán una disminución en el radio de la 2-esfera, mientras que los rayos “entrantes” representarán un aumento en el radio de la 2-esfera. En el caso de Schwarzschild, una vez que el radio es menor a  $r_h$  los rayos de luz dirigidos al futuro provenientes de esta 2-esfera solo pueden llevar a radios cada vez más pequeños, esto hace que los rayos de luz dirigidos al futuro converjan en ambas direcciones.

Para encontrar matemáticamente una superficie atrapada, se puede utilizar el concepto de la expansión de los rayos de luz. Para explicar este concepto es necesario hablar antes de congruencia de geodésicas. Una congruencia es un conjunto de curvas en una región abierta del espacio-tiempo tal que todos los puntos de la región pertenecen a alguna de las curvas [21]. Sea  $u^\mu$  el campo vectorial tangente a una congruencia geodésica 4-dimensional tipo-tiempo (como la 4-velocidad de algún fluido sin presión). Ahora, sea  $v^\mu$  un vector de separación apuntado de una geodésica a otra geodésica vecina, este vector obedece:

$$u^\nu \nabla_\nu v^\mu = B^\mu_\nu v^\nu \quad (3.52)$$

siendo  $B_{\nu\nu} = \nabla_\nu u_\nu$ . Este tensor puede ser tomado como una medida de error al transportar paralelamente al vector  $v^\nu$  a lo largo de la congruencia. Al ser un tensor de rango (0,2), se puede descomponer en su parte antisimétrica y simétrica. Esta última, puede ser descompuesta en su traza y su parte libre de traza al usar el tensor de proyección definido como  $P^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu$ . El resultado será [21]:

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\theta P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \quad (3.53)$$

donde el término  $\sigma_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\theta P_{\mu\nu}$  describe la distorsión en la forma, el término  $\omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}$  describe la rotación y finalmente  $\theta$  describe la expansión de la congruencia y está definida como  $\theta = \nabla_\mu u^\mu$ . La expansión es una medida de la tasa de cambio en la separación entre dos rayos de luz que se propagan en diferentes direcciones en el espacio-tiempo.

En una superficie atrapada, la expansión de dos geodésicas nulas será siempre negativa en todas las direcciones espaciales. Esta expansión de geodésicas nulas se puede expresar en términos de una ecuación diferencial ordinaria llamada ecuación de Raychaudhuri. Esta ecuación relaciona la expansión con la curvatura del espacio-tiempo y, usando la ecuación de Einstein (2.5), también relaciona la expansión con la distribución de la materia y de la energía. Si se evoluciona en el tiempo una superficie cerrada con la ecuación de Raychaudhuri y la expansión resulta ser negativa en todas las direcciones en algún momento en el futuro, la superficie evolucionada es una superficie atrapada.

Resumiendo, una superficie atrapada  $S$  es una superficie 2-dimensional (en el caso que el espacio-tiempo sea 4-dimensional) en donde las geodésicas nulas dirigidas al futuro y ortogonales de  $S$  salientes y entrantes tienen una expansión  $\theta$  negativa en  $S$ .

Las superficies atrapadas se encuentran dentro del horizonte de eventos y están relacionadas con el horizonte aparente. Estos horizontes son superficies muy especiales y serán abordadas a continuación.

### 3.4.1. Horizontes

En el campo de los agujeros negros existen diferentes tipos de horizontes, el entendimiento de estos horizontes es de ayuda para entender mejor la estructura causal de estos objetos extremadamente densos. Cada uno de los horizontes cuenta con características que los definen pero no siempre se encuentran en lugares del espacio-tiempo diferentes. Los tres tipos de horizontes que se discutirán son el horizonte de eventos, el horizonte aparente y el horizonte de Cauchy.

El horizonte de eventos es uno de los horizontes más famosos, es una hipersuperficie a partir de la cual los objetos no pueden escapar del agujero negro ya que es unidireccional, sólo se puede atravesar desde el exterior hacia el interior. En esta hipersuperficie nula, todos los eventos en el exterior están causalmente desconectados del interior, haciendo que los observadores fuera del horizonte no puedan recibir señales del interior, aunque el interior sí puede recibir información del exterior.

El horizonte de eventos separa al espacio-tiempo en dos regiones divididas de acuerdo al comportamiento de los rayos de luz (o los objetos en

general). Afuera de él, la luz (los objetos) está conectada por una curva tipo-luz (o tipo-tiempo) al infinito y lo puede alcanzar, lejos del agujero negro. Por otro lado, en el interior del horizonte, la luz (o cualquier objeto) irremediamente terminará en un punto en específico. Ese punto será la singularidad, como la que se forma en el estado final del colapso gravitacional de polvo y una vez presente, estará cubierta por el horizonte de eventos en todo momento, siempre y cuando se hable de una solución “genérica” [21].

El ejemplo que se conoce y que se ha mencionado anteriormente de horizonte de eventos es  $r = r_h$  en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Esta superficie es peculiar debido a que si una partícula va cayendo al interior del agujero negro de Schwarzschild y un observador en el infinito sigue su trayectoria, el observador nunca verá que la partícula cruza  $r = r_h$ .

Estas hipersuperficies, los horizontes de eventos, caracterizadas por una función  $f(x) = cte$  son nulas, esto quiere decir que su gradiente  $\partial_\mu f$  (normal a la hipersuperficie  $S$ ) es cero. Pueden pensarse como una colección de geodésicas nulas  $x^\mu(\lambda)$  llamadas generadoras de la hipersuperficie [21].

Dependiendo del espacio-tiempo sobre el que se estudie, el horizonte de eventos estará parametrizado de cierta manera; en el caso de una métrica estacionaria, es fácil definirlo matemáticamente. En este tipo de métrica, uno de los vectores de killing es  $\partial_t$  y se puede adaptar la métrica tal que el tensor métrico satisfaga que  $\partial_t g^{t\nu} = 0$ . En  $t = cte$  y  $r$  lo suficientemente grande se puede adoptar un sistema de coordenadas tal que sobre la hipersuperficie  $S$  se vea como Minkowski en coordenadas esféricas. Por otro lado, si se aleja lo suficiente y se fija el radio, lo que se verán son cilindros infinitos tipo-tiempo con  $r = cte$ . Existe un sistema coordenado tal que estas hipersuperficies seguirán siendo tipo-tiempo hasta que se disminuya a un cierto  $r = r_h$  donde la hipersuperficie  $S$  pasa a ser nula y se le denominará el horizonte de eventos. Determinar dicho punto es sencillo, se necesita saber en qué valor de  $r = cte$  la hipersuperficie se hace nula (puede ser otra función  $f = cte$ ). Para ello se toma la 1-forma  $\partial_\mu r$  y se busca en qué punto su norma se anula, esto es:

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu(r) \partial_\mu(r) = 0 \quad (3.54)$$

En el caso de Schwarzschild (un caso estático) esta ecuación da como resultado  $g^{rr} = 1 - \frac{r_h}{r} = 0$ , que se traduce como  $r = r_h$ , tal como es de

esperarse.

El horizonte de eventos es el límite de la región cuyos eventos no pertenecen al pasado causal del futuro nulo infinito. Es por ello que se considera una propiedad global del espacio-tiempo, esto implica que no se puede localizar con experimentos locales en un intervalo de tiempo finito. Debido a eso, este horizonte puede no ser muy útil para evolucionar agujeros negros dinámicos al ser no-local en el tiempo, para estos casos es preferible usar el horizonte aparente.

El horizonte aparente es una superficie 2-dimensional espacial cuando la coordenada temporal  $t$  es constante [22]. Este horizonte puede estar trasladado con el horizonte de eventos bajo ciertas circunstancias, tal es el caso de un objeto estacionario en el cual ambos horizontes son el mismo. El horizonte aparente depende del encajamiento de esa superficie (el horizonte) en el espacio-tiempo [22] y es el límite entre los rayos de luz que se dirigen hacia el exterior y se mueven al exterior y los que se dirigen al exterior pero se mueven al interior. A diferencia del horizonte de eventos, es una noción local del límite del agujero negro. Una definición más clara de esta superficie está relacionada con las superficies atrapadas ya que es la superficie atrapada más exterior o el límite de la unión de todas las superficies atrapadas.

Este horizonte depende de la posición y velocidad del observador, por lo que puede ser distinto para diferentes observadores. Es decir, un objeto puede estar dentro del horizonte aparente de un observador, pero fuera del horizonte aparente de otro observador en una posición diferente. A diferencia del horizonte de eventos de aquí sí se puede escapar.

El término de horizonte aparente es muy importante para la relatividad numérica ya que el gasto computacional es menor con respecto al horizonte de eventos y es de ayuda para extirpar la región del agujero negro junto con la singularidad para tener un cálculo estable.

Ambos horizontes tenderán asintóticamente a la misma superficie conforme el agujero negro comience a asentarse. Si el horizonte aparente existe, se formará el horizonte de eventos fuera de éste (o serán el mismo) aunque esto no aplica para algunas teorías de gravedad modificada.

El último horizonte es el horizonte de Cauchy el cual es una superficie en el espacio-tiempo tal que las perturbaciones dentro del horizonte sólo pueden ser influenciadas por eventos que ocurran en el interior y las perturbacio-

nes fuera de este no pueden ser influenciadas por esos mismos eventos. Esta superficie no tiene restricciones para ser atravesada como el horizonte de eventos. Es la región en donde la evolución está dada únicamente por las condiciones iniciales [10].

### 3.4.2. Singularidades

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, los horizontes y las singularidades están estrechamente relacionados. Los teoremas de la singularidad de Hawking-Penrose establecen que si se satisfacen las condiciones de energía (ver sec. 3.1.4), el espacio-tiempo es hiperbólico, la relatividad general es válida y si se forma una superficie atrapada durante el colapso, la aparición de la singularidad es inevitable [23]. Sin embargo, la predicción de la formación de una singularidad es vista (a falta de evidencia empírica) como un indicativo del fallo de la relatividad general para modelar estos objetos [24]. Un intento por solucionar este problema es proponer modelos de relatividad general acoplados con teoría cuántica o introducir conceptos relacionados a teorías no-lineales.

La singularidad se habrá formado si existe alguna geodésica que no puede extenderse dentro de la variedad, sin embargo termina en un valor finito de un parámetro afín, esto se conoce como incompletitud de geodésicas [21]. Se puede saber en qué punto de la variedad existe una singularidad física revisando divergencias en los escalares invariantes de curvatura, pero su entendimiento “físico” aún es un misterio ya que a la fecha no se han observado indicios de su existencia. Es por ello que se espera que en los agujeros negros formados por colapso gravitacional, esta región del espacio-tiempo con densidad infinita no se alcance después de todo y haya un frenado que detenga el colapso antes de su formación.

El modelo de Bardeen del espacio-tiempo es el primero en donde una superficie atrapada nula encierra una región en cuyo interior no aparece una singularidad, haciendo que la métrica sea regular, i. e. se puede tener una solución de agujero negro sin singularidad, un agujero negro regular [25].



## Capítulo 4

# Agujeros negros regulares

En la física, los agujeros negros juegan un papel muy importante para la predicción de eventos ya que debido a la curvatura extrema que generan en el espacio-tiempo, producen efectos que otros objetos astrofísicos no. Estos objetos existen de diferentes formas y propiedades, como lo son los tipo Kerr (agujeros negros rotantes). En el capítulo anterior se menciona la existencia de una clasificación de agujeros negros conocidos como agujeros negros regulares los cuales tienen como característica principal que no se alcanza la singularidad. Eventualmente, podrían ser los agujeros negros que existen en el Universo.

Una explicación para que no se forme la singularidad en un agujero negro regular es que exista un frenado en el colapso, dejando así una región central de densidad finita, un núcleo cuya vecindad tiene el comportamiento del espacio-tiempo de De Sitter. El primer modelo de estos objetos fue propuesto por Bardeen en 1968 [25].

### 4.1. Agujero negro de Bardeen

Los agujeros negros regulares surgen de la idea de que las singularidades no se encuentran en el Universo y son producto de teorías clásicas de la gravedad. Sakharov (físico nuclear) y Gliner (cosmólogo) sugieren que la singularidad para fuentes de materia puede ser evitada considerando un núcleo de Sitter en el centro del espacio-tiempo [26]. Basado en esta idea

es que Bardeen propuso la primer solución para un agujero negro estático, esféricamente simétrico y regular. En el interior de la métrica propuesta, existe una región que se comporta como una solución de Sitter [27].

Más adelante se planteó la idea de usar las ecuaciones de campo de Einstein en presencia de un campo electromagnético para reproducir el agujero negro de Bardeen. Una de las maneras de obtener este agujero negro (y de los agujeros negros regulares) es acoplando la relatividad general a la electrodinámica no-lineal, interpretando al campo gravitacional de un monopolo magnético o eléctrico no-lineal como el modelo del agujero negro regular. Este agujero negro se interpreta como un monopolo magnético en una electrodinámica no lineal (NLED) acoplada a la gravedad [28]. Contrastando con Schwarzschild, la función  $f(r)$  en Bardeen (ver sección 2.2) se escribe como:

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + q_m^2)^{3/2}} \quad (4.1)$$

donde  $q_m$  es la carga magnética del agujero negro y  $M$  su masa. No fue directa la interpretación de ese parámetro  $q_m$  que al principio parecía no tener una explicación física, fue hasta que Ayón-Beato y García encontraron que este agujero negro puede ser modelado si se considera que su fuente es producto de una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}(F)$  donde  $F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  es el tensor de campo electromagnético contraído [28]. A partir de esta propuesta, se han encontrado soluciones de agujeros negros regulares considerando fuentes magnéticas o eléctricas, estacionarias o que incluyan rotación y con teorías de gravedad alternativas [27].

El agujero negro de Bardeen satisface la condición de energía débil pero no la condición de energía fuerte, es por ello que una de las condiciones para la formación de la singularidad dadas por Einstein-Penrose no se satisface y se vuelve regular. Así, se forma un horizonte de eventos alrededor de una región atrapada pero sin la singularidad en su interior, dejando que la métrica sea regular en todo el espacio-tiempo.

## 4.2. Agujero Negro de Hayward

Otro de los modelos de agujeros negros regulares más famosos y que actualmente se encuentra en discusión es el agujero negro de Hayward. En el 2006 [24], Hayward propuso un agujero negro que en esencia, al igual

que el de Bardeen, es un agujero negro de Schwarzschild modificado para que sea regular.

Si se considera una métrica simétricamente esférica, estática, asintóticamente plana y con un tensor de energía-momento asociado que satisfaga la condición de energía débil (ver sec. [3.1.4](#)), la estructura causal del espacio-tiempo se puede visualizar como la de un agujero Negro de Reissner-Nordström con algunas modificaciones para preservar la regularidad de la métrica. La métrica de Reissner-Nordström está dada por:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_h}{r} + \frac{r_q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{r_h}{r} + \frac{r_q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.2)$$

donde  $r_q$  representa la carga eléctrica. En  $r = 0$  existe una singularidad física pero al tratar con un agujero negro regular la región donde se encontraba la singularidad pasa a ser un centro regular.

Primeramente, se considera que el comienzo del agujero negro es a partir del colapso gravitacional y el fin es con su evaporación. En la métrica de Reissner-Nordström existirán dos horizontes conocidos como el horizonte interior y el horizonte exterior los cuales se obtienen a partir de considerar  $1 - \frac{r_h}{r} + \frac{r_q^2}{r^2} = 0$ . Estos horizontes quedarán dentro de una región estática y de manera local serán horizontes atrapados [\[24\]](#). Para poder describir la evolución de estos horizontes, y con ello la evolución del agujero negro, se asume que la métrica estática y esféricamente simétrica está dada de la forma:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (4.3)$$

Esta métrica es en esencia la métrica [\(2.6\)](#). Si es asintóticamente plano con masa  $M$ , se debe cumplir que para  $r \rightarrow \infty$ ,  $f(r) \rightarrow 1 - \frac{2M}{r}$ . esto es que se vea como la métrica de Schwarzschild. Por otro lado, planitud en el centro requiere que para  $r$  pequeño,  $f(r) \rightarrow 1 - \frac{r^2}{\ell^2}$ , esto es que se vea como la métrica de Sitter [\[29\]](#). De este modo, el tensor de Einstein que se obtiene con esa métrica a escalas pequeñas cumple que  $G \sim \frac{g}{\ell^2}$ . Por ello surge la idea de una constante cosmológica efectiva  $\Lambda$  a escalas pequeñas con una longitud de Hubble  $\ell$ .

Con todo esto, Hayward propone que la función  $f(r)$  sea:

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2M\ell^2} \quad (4.4)$$

siendo  $\ell$  una escala fundamental. Cuando la escala fundamental es cero, se recupera la solución de Schwarzschild.

De acuerdo a la métrica (4.3), una superficie está atrapada si  $f(r) < 0$  y no lo está si  $f(r) > 0$ . Los horizontes son las superficies que satisfacen  $f(r) = 0$ . En el caso de esta métrica estática, estos horizontes también son horizontes de Killing [30]. A partir de la forma de la función  $f(r)$  y dependiendo del valor de la masa  $M$  y del parámetro  $\ell$  pueden existir dos horizontes, un horizonte o ninguno, lo que traduce como un agujero negro, un agujero negro extremo o ningún agujero negro respectivamente. Si se deja fija la escala fundamental, se pueden encontrar los ceros de  $f(r)$  y llegar a un valor de masa mínimo para que se forme el horizonte de Killing. Este valor es  $M = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ell$ , en cuyo caso sólo se tendrá un único horizonte de Killing degenerado en  $r = \sqrt{3}\ell$ . Si  $M < \frac{3\sqrt{3}}{4}\ell$  la función  $f(r)$  siempre será positiva y no se formará el agujero negro. Cuando  $M > \frac{3\sqrt{3}}{4}\ell$  se tendrán dos horizontes, el interior y el exterior.

En el agujero negro de Hayward, la materia puede ser descrita con una ecuación de estado politrópica como resultado de la unión suave del interior y exterior. Usando la métrica obtenida con la función  $f(r)$  dada anteriormente y con la fuente de un fluido anisotrópico dado por [29]:

$$\epsilon = -p_r = \frac{3\ell^2 M^2}{2\pi(r^3 + 2M\ell^2)^2} \quad (4.5)$$

$$p_\theta = p_\phi = \frac{3\ell^2 M^2(r^3 - M\ell^2)}{\pi(r^3 + 2M\ell^2)^3} \quad (4.6)$$

se obtiene una solución a las ecuaciones de campo de Einstein.

Para tener una imagen más detallada del agujero negro de Hayward es preferible sustituir la coordenada del tiempo estático  $t$  por el tiempo avanzado  $v$ , este tiempo avanzado satisface:

$$v = t + \int \frac{dr}{f(r)} \quad (4.7)$$

Por lo que al obtener el diferencial y elevarlo al cuadrado:

$$dt^2 = dv^2 + \left( \frac{dr}{f(r)} \right)^2 - \frac{2}{f(r)} dv dr \quad (4.8)$$

Y la métrica (4.3) queda como:

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2 \quad (4.9)$$

Suponiendo que la masa  $M$  depende también del tiempo avanzado  $v$ , los tensores de energía momento para la diagonal seguirán siendo los mismos pero se añadirá una componente adicional referente a la combinación de  $r$  y  $v$  siendo está equivalente a:

$$T_v^r = \frac{r^4 M'(v)}{4\pi(r^3 + 2\ell^2 M)^2} \quad (4.10)$$

con  $M' = \frac{\partial M}{\partial v}$ .

Cuando  $\ell = 0$  o  $r$  es lo suficientemente grande, se recupera la solución de Vaidya. El espacio-tiempo de Vaidya se puede interpretar como una fuente esféricamente simétrica que radía fotones al exterior. Esta emisión continua de fotones causa que la fuente tenga un cambio de masa  $M$  dependiendo de la coordenada  $v$ . En el centro del espacio-tiempo de Vaidya se crea una singularidad, sin embargo, en el modelo radiativo propuesto por Hayward el centro permanece regular con una densidad de energía central dada por  $\epsilon = \frac{3}{8\pi\ell^2}$  [24], por lo que el valor de la escala fundamental es lo que evita esa irregularidad.

Dependiendo de la derivada de  $M'(v)$  el flujo de energía será positivo (si crece  $M(v)$ ) o negativo (si decrece  $M(v)$ ). A partir del flujo de radiación entrante y saliente, se puede dar una imagen del proceso de formación y evaporación del agujero negro regular de Hayward. Lo primero es establecer seis tiempos avanzados consecutivos y considerar que  $M'(v)$  es continua en las regiones delimitadas por estos tiempos. Estas regiones se pueden caracterizar como:

- $v$  hasta un valor  $v_a$  con  $M(v) = 0$
- $v$  de  $v_a$  hasta un valor  $v_c$  con  $M'(v) > 0$
- $v$  de  $v_c$  hasta un valor  $v_d$  con  $M(v) = M_0 > \frac{3\sqrt{3}}{4}\ell \rightarrow M'(v) = 0$
- $v$  de  $v_d$  hasta un valor  $v_f$  con  $M'(v) < 0$
- $v$  a partir de  $v_f$  con  $M(v) = 0$

Además, los puntos  $v_b \in (v_a, v_c)$  y  $v_e \in (v_d, v_f)$  con  $M(v) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ell$  son los tiempos en los que se presentan los horizontes interior y exterior, los cuales se unen en esos momentos formando una región cerrada y compacta. Dentro de estos horizontes se encuentran todas las superficies atrapadas.

Como se mencionó anteriormente, la derivada de la función  $M(v)$  es la que regula el flujo de energía. Durante el intervalo de tiempo  $(v_a, v_c)$  el flujo de energía es positivo y es interpretado usando la radiación de Hawking. En el intervalo de tiempo  $(v_d, v_f)$  hay un flujo de energía negativo, el cual es modelado por creación de pares de partículas entrantes con energía negativa y partículas salientes con energía positiva. En esta fase se genera una superficie de creación de pares para un radio  $r_0 > r_h$ , fuera del agujero negro.

Para poder modelar matemáticamente esta superficie, se considera una métrica tipo Vaidya de la forma:

$$ds^2 = -f(r)du^2 - 2dudr + r^2d\Omega^2 \quad (4.11)$$

donde se supone un tiempo  $u$  tal que  $u = t - \int \frac{dr}{f}$  y una función de masa  $N(u)$ . Se ajusta el punto inicial de esta métrica de modo que  $r = r_0$  cuando  $u = v$ . De este modo, cuando  $r > r_0$  a partir del tiempo avanzado  $v > v_d$  se asume que el espacio-tiempo se comporta con esta nueva métrica, tal que  $u$  va de  $v_d$  hasta un valor  $v_f$  con  $N(u) = M(u)$ . Para los tiempos de  $u$  anteriores a  $v_d$  se fija  $N(u) = M_0$ .

Con esto, ya se tiene la imagen completa del agujero negro de Hayward. Se comienza con un espacio-tiempo plano hasta que al tiempo  $v_a$  comienza el flujo de energía positivo para en  $v_b$  inicie el colapso gravitacional y con ello, la formación del agujero negro. En  $v_c$  ha colapsado por completo y se mantiene en un estado estático con una masa  $M_0$  hasta que en  $v_d$  comienza la evaporación y la creación de pares en la superficie que está fuera del agujero negro. A partir de  $v_e$  desaparecen los horizontes y en  $v_f$  el agujero negro se evapora por completo y termina la creación de pares, dejando un espacio-tiempo plano. El horizonte interno nunca alcanza el centro  $r = 0$ , donde la singularidad se formaría. En la figura [4.1](#) se muestra el proceso completo. Debido a que en la fase de evaporación la radiación de Hawking considera energías negativas, los teoremas clásicos de Hawking-Penrose de formación de la singularidad son compatibles con este agujero negro, a diferencia del de Bardeen en donde a partir de cierto radio mínimo, la condición

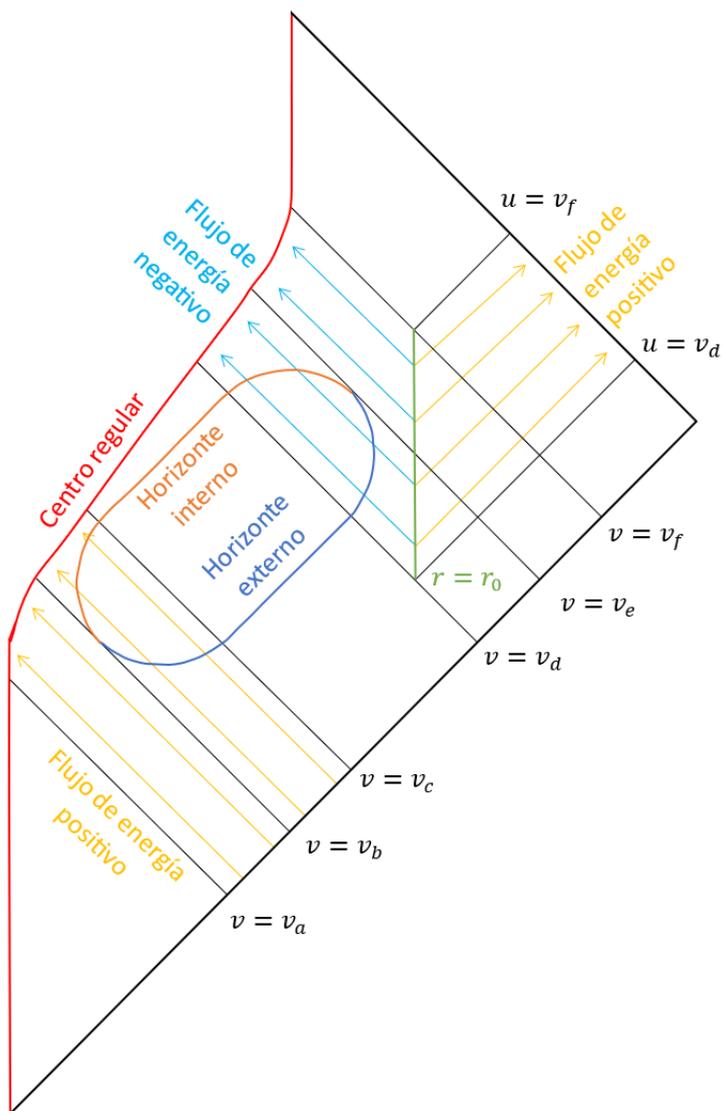


Figura 4.1: Diagrama de Penrose para el agujero negro regular de Hayward a partir de [24].

de energía fuerte se invalidaba [29]. Además, no se forma un horizonte de eventos en el agujero negro de Hayward [24]. Un último punto importante a remarcar es que el agujero negro de Hayward en lugar de contar con una singularidad física, se tiene una región finita central de alta densidad.

Los agujeros negros regulares, incluyendo al de Hayward y al de Bardeen, han sido objeto de estudio los últimos años en un intento por entender de mejor manera estos objetos y darles una interpretación física y posible. Uno de los métodos más usuales para darle explicación física a esta regularidad es usando electrodinámica no-lineal acoplada a la relatividad general para encontrar soluciones libres de la singularidad física que la teoría convencional presenta.

### 4.3. Electrodinámica no-lineal

Las extensiones no-singulares del espacio-tiempo formado por agujeros negros regulares han llevado a pensar en modificaciones en la materia acoplada a la teoría de la relatividad general, siendo la electrodinámica no-lineal un buen candidato para llegar a resultados interesantes.

La electrodinámica no lineal (NLED por sus siglas en inglés) es una extensión de la electrodinámica clásica que considera interacciones no-lineales entre los campos electromagnéticos y la materia. Una motivación de NLED es que el campo electromagnético debe perder su linealidad a altas energías debido a las interacciones con otros campos físicos [31].

En esta teoría, las ecuaciones de Maxwell, que describen los campos electromagnéticos, se modifican para incluir términos no lineales, cambiando el comportamiento de los mismos. Fue propuesta por primera vez en 1943 por Born e Infeld [32] con el fin de remover la singularidad central para una carga puntual y la divergencia de la autoenergía del electrón en la electrodinámica clásica.

Al estudiar la electrodinámica no-lineal como una posible fuente de gravedad se pueden estudiar varias geometrías de interés no-singulares, como es el caso en los agujeros negros regulares. Es por ello que en los últimos años se ha usado como una herramienta para explicar la geometría interna de los agujeros negros donde se evita la singularidad.

Como ya se mencionó previamente, en los agujeros negros regulares se evita la formación de la singularidad física; para lograrlo se propone utilizar un

tipo de materia que viole la condición de energía fuerte. Una manera de clasificar las soluciones regulares a las ecuaciones de campo es por medio de la juntura que presentan. Si no hay juntura se dice que es una solución continua en el espacio-tiempo. Con el agujero negro de Bardeen, Ayón-Beato y García propusieron que estos agujeros negros podían ser interpretados como un monopolo magnético en el marco de la electrodinámica no-lineal tal que se satisfaga la condición de energía débil.

Existen diversas soluciones regulares a las ecuaciones de campo las cuales abarcan a los agujeros negros cargados eléctricamente, agujeros negros magnéticos y agujeros negros cuya fuente es un monopolo. También existen soluciones regulares que consideran un interior lleno de materia (que pueda violar alguna de las condiciones de energía) hasta una superficie que respeta las condiciones de juntura y un exterior que puede ser representado con la métrica Schwarzschild o de Reissner–Nordström.

Se ha demostrado [31] que existen diferentes densidades lagrangianas  $\mathcal{L}(F)$  asociadas a soluciones de agujeros negros con un centro regular y un comportamiento tipo Reissner–Nordström para  $r$  grande con una configuración eléctrica. Del mismo modo, existen soluciones regulares con configuración puramente magnética. En el caso de los agujeros negros estáticos, el modelado puede ser logrado únicamente con una carga eléctrica o magnética [31]. Se puede mostrar que con un lagrangiano no-lineal adecuado para el campo electromagnético es posible llegar a una solución regular con una región central cuya ecuación de estado efectiva es de la forma  $p = -\epsilon$ .

El acople de la relatividad general con la electrodinámica no-lineal se puede visualizar por medio de la acción. La acción  $\mathcal{S}$ , tomando en cuenta la geometría del espacio-tiempo (acción de Einstein–Hilbert) acoplada a la parte de NLED ( $\mathcal{L}_{NLED}$ ), está dada por:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left( \frac{R}{\kappa} - \mathcal{L}_{NLED}(F) \right) \quad (4.12)$$

donde  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci,  $g$  es el tensor métrico contraído,  $\kappa = 4\pi$  o  $\frac{1}{2}$  dependiendo de las unidades y  $\mathcal{L}_{NLED}(F)$  es la densidad lagrangiana dependiente del tensor de campo electromagnético y considerando que en el régimen de campo débil debe tener el límite de Maxwell ( $\mathcal{L} \rightarrow F$  si  $F \rightarrow 0$ ) [31]. Esta densidad lagrangiana  $\mathcal{L}(F)$  se encuentra dada

a su vez por:

$$\mathcal{L}_{NLED} = \frac{-4\mu}{\alpha} \frac{(\alpha F)^{(\nu+3)/4}}{(1 + (\alpha F)^{\nu/4})^{1+\mu/\nu}} \quad (4.13)$$

donde  $\alpha$  es el acople de la electrodinámica no-lineal y  $\mu, \nu$  son constantes que dependen del tipo de agujero negro que se quiera modelar [14] ( $\mu = 3, \nu = 3$  para Hayward).

Gracias a la electrodinámica no-lineal es posible modelar objetos como el agujero negro regular de Hayward usando un parámetro conocido como la carga magnética, la cual será la encargada de evitar que durante el colapso se alcance la singularidad. Para lograrlo, a grandes rasgos, lo que hay que hacer es suponer un colapso de polvo esférico, hacer las correcciones al tensor de energía-momento adecuadas para violar alguna de las condiciones de energía, proponer una forma de la métrica exterior y pegarla a la interior con las condiciones de juntura. Todo esto se verá a más detalle en el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Colapso regular

En este capítulo se revisará la formación de un agujero negro regular tipo Hayward mediante el colapso de una nube de polvo en simetría esférica. El enfoque utilizado es el mismo presentado en [14] en donde supone que la materia en regiones de muy alta curvatura tiene un comportamiento que no satisface la condición de energía fuerte. Se muestran además las modificaciones necesarias en el tensor de energía-momento para evitar la formación de una singularidad. Se hace también una reformulación del colapso esférico de polvo que da lugar a un agujero negro singular de Schwarzschild presentado en el capítulo 3.3 que sirve para su generalización en el caso regular.

Para describir un espacio-tiempo y explicar los eventos físicos que ocurren en él, se utiliza el tensor métrico. Este tensor puede presentar singularidades, las cuales pueden aparecer al final del colapso gravitacional si se cumplen ciertas condiciones enunciadas en los teoremas de singularidades. Estas condiciones son [14]:

- I La validez de la relatividad general durante el colapso.
- II La validez de las condiciones de energía.
- III La hiperbolicidad global del espacio-tiempo (para poder predecir eventos).
- IV La formación de superficies atrapadas en algún momento del colapso.

Dado que no se ha observado alguna singularidad en el Universo, se especula que en cierto momento del colapso se debe violar alguna de las condiciones para su formación [14]. Esto llevaría a pensar que cerca del final del colapso existe una fuerza repulsiva (una posible presión de degeneración) que detiene la fuerza gravitacional y, con ello, el agujero negro no termine en la singularidad.

En las siguientes secciones se hace un repaso del colapso esférico de polvo homogéneo y se muestra los resultados conocidos para la formación de un agujero negro singular (Schwarzschild en el exterior). Posteriormente y siguiendo a [14], se modifica la densidad de energía en la región de curvatura fuerte para modelar la formación de un agujero negro regular tipo Hayward en el exterior. Al final del capítulo se describen los horizontes presentes en el espacio-tiempo resultante y se comparan los horizontes del espacio tiempo de Schwarzschild y Hayward.

## 5.1. El colapso esférico

La métrica para describir el colapso esférico en el interior en coordenadas comóviles está dado por [14]:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} dr^2 + C^2 d\Omega^2 \quad (5.1)$$

donde  $\nu$ ,  $\psi$  y  $C$  son funciones que dependen únicamente de  $r$  y de  $t$ . La función  $C$  es la función de radio de área y describe el radio de las esferas con  $r$  constante.

Para describir la materia se utilizará un tensor de energía-momento de un fluido perfecto isotrópico e inhomogéneo. En el marco de referencia de reposo local del fluido, este tensor tendrá la forma:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon(t, r) + p(t, r))u^\mu u^\nu + p(t, r)g^{\mu\nu} \quad (5.2)$$

Considerando la conservación del tensor de energía-momento para la componente radial, i.e.  $\nabla_\mu T^{\mu r} = 0$ , se puede obtener una ecuación que relacione la función  $\nu$  con cantidades descritas por  $p$  y  $\epsilon$ :

$$\nu' = -\frac{p'}{\epsilon + p} \quad (5.3)$$

donde ' es la derivada respecto a  $r$ .

Por otro lado, en un espacio-tiempo esféricamente simétrico, la distribución de materia está dada por una función  $F(r, t)$  llamada masa de Misner-Sharp. Esta función se puede interpretar como la cantidad de energía dentro de una esfera de radio  $r$  en un tiempo  $t$  [33]. En este espacio-tiempo se puede ver como [14]:

$$F = C(1 - e^{-2\psi} C'^2 + e^{-2\nu} \dot{C}^2) \quad (5.4)$$

donde ' es la derivada con respecto a  $r$  y  $\dot{\phantom{x}}$  es respecto a  $t$ .

Usando estas dos ecuaciones ((5.3) y (5.4)) y las 3 ecuaciones de campo obtenidas con el tensor de Einstein, se tienen un total de 5 ecuaciones para 6 variables ( $\nu$ ,  $\phi$ ,  $F$ ,  $p$ ,  $\epsilon$  y  $C$ ). Para cerrar el sistema de ecuaciones es necesario identificar la ecuación de estado del fluido, la cual puede ser de la forma  $p = p(\epsilon)$ .

Para asegurar que la densidad y presión sean regulares y que la función de masa se comporte bien en el tiempo inicial  $t_i$  es necesario imponer condiciones iniciales a las funciones  $C$  y  $F$ . La componente  $tt$  de las ecuaciones de Einstein se reduce a:

$$\epsilon = \frac{F'}{C^2 C'} \quad (5.5)$$

Para el tiempo inicial  $t_i$  se escoge que la función de radio de área sea  $C(r, t_i) = r$  y se define un "factor de escala"  $a(r, t)$  tal que  $C(r, t) = ra(r, t)$  cfr. [14]. De este modo, el colapso está descrito por  $\dot{a} < 0$ . Con esta nueva manera de escribir  $C$ , el comportamiento de  $F$  debe ser tal que  $\epsilon$  no diverja cuando  $r \rightarrow 0$ . Una solución trivial es  $F(r, t) = r^3 m(r, t)$  con  $m(r, t)$  una función que es constante  $\neq 0$  en  $t = t_i$ . Por último, por la definición de la masa de Misner-Sharp (ec. (5.4)) en un tiempo inicial:

$$m(r, t_i) = a \left( \frac{1 - e^{-2\psi} C'^2}{r^2} + e^{-2\nu} \dot{a}^2 \right) \quad (5.6)$$

Se le pide a la función  $m(t_i, r)$  que sea regular cuando  $r \rightarrow 0$ , por lo que si el término  $e^{-2\psi} C'^2 = 1 + r^2 b(r, t)$  con  $b(r, t_i) \neq 0$ , se cumple la regularidad de  $m$  al inicio. De este modo, el sistema de ecuaciones queda como:

$$\epsilon = \frac{3m + rm'}{a^2(a + ra')} \quad (5.7)$$

$$p = -\frac{\dot{m}}{a^2 \dot{a}} \quad (5.8)$$

$$\frac{r\dot{b}}{1+r^2b} = 2\nu' \frac{\dot{a}}{a+ra'} \quad (5.9)$$

$$\nu' = -\frac{p'}{\epsilon+p} \quad (5.10)$$

$$m = a(e^{-2\nu}\dot{a}^2 - b) \quad (5.11)$$

$$p = p(\epsilon) \quad (5.12)$$

Estas ecuaciones ayudan a describir el colapso al interior de un cierto radio  $r_b$  (con  $b$  de “boundary”).

Como el colapso será modelado usando una nube de polvo, lo más natural es que para el exterior se use una métrica del tipo:

$$ds^2 = -f(r)dr^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\Omega^2 \quad (5.13)$$

con  $f(r) = 1 - 2M(r)/r$  y  $M(r)$  una función tal que para  $r$  grande se recupere la métrica de Schwarzschild en vacío, i.e.  $M(r) \rightarrow M_0$  cfr. [14]. Es importante este límite ya que la métrica de Schwarzschild describe un agujero negro estático una vez que el límite de la nube que se encuentra colapsando cruce el horizonte cfr. [14]. Así, el interior y el exterior estarán acoplados en la región  $r_b$  siempre y cuando se cumplan las condiciones de juntura.

Dada la métrica (5.13), las ecuaciones de campo en su forma  $G^\mu_\nu = T^\mu_\nu$  y el escalar de Kretschmann son:

$$T_0^0 = T_1^1 = \frac{-2M'(r)}{r^2} \quad (5.14)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = \frac{-M''(r)}{r} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{K} = \frac{48M^2}{r^6} - \frac{16M}{r^3} \left( \frac{4M_{,r}}{r^2} - \frac{M_{,rr}}{r} \right) + 4 \left( \frac{8M_{,r}^2}{r^4} - \frac{4M_{,r} M_{,rr}}{r^3} + \frac{M_{,rr}^2}{r^2} \right) \quad (5.16)$$

De  $\mathcal{K}$  se puede ver que para evitar la singularidad es suficiente pedir que para  $r \rightarrow 0$ , la función  $M(r) \rightarrow r^3 cte$ , ya que de ese modo  $\mathcal{K}$  queda finito.

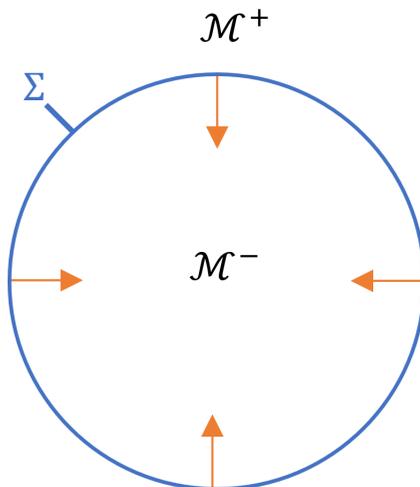


Figura 5.1: Diagrama del colapso esférico de la nube de polvo. La línea azul separa las regiones interior  $\mathcal{M}^-$  y exterior  $\mathcal{M}^+$  y representa a la hipersuperficie  $\Sigma$ .

Además, para  $r$  tendiendo a 0 o a infinito  $f(r) \rightarrow 1$ . De ese modo, para un  $r$  pequeño,  $f(r) = 1 - 2r^2 cte$ , lo que resulta en 2 o 0 raíces correspondientes a 2 horizontes o a ninguno, respectivamente cfr. [14].

Para poder unir estas dos formas de la métrica (ec. (5.1) y ec. (5.13)) es necesario revisar las condiciones de juntura.

### 5.1.1. Condiciones de juntura en colapso

La nube colapsando (región  $\mathcal{M}^-$ ) se separa del exterior (región  $\mathcal{M}^+$ ) por medio de una hipersuperficie 3-dimensional  $\Sigma$  asumida tipo-tiempo la cual se va desplazando al interior de la nube (ver fig. 5.1).

La métrica en todo el espacio-tiempo se puede escribir como  $g_{\mu\nu}^{\pm}$  para cada región (con coordenadas  $x^{\mu\pm}$ ) y como una métrica inducida  $\gamma_{ab}$  para  $\Sigma$  (con coordenadas  $y^a$ ) cfr. [14]. La primer condición de juntura dice que la métrica inducida debe ser continua de los dos lados de  $\Sigma$ , esto ya se

discutió en la sección 3.2. Se puede expresar la métrica en  $\Sigma$  como 14:

$$\gamma_{ab}^{\pm} = \frac{\partial x_{\pm}^{\mu}}{\partial y^a} \frac{\partial x_{\pm}^{\nu}}{\partial y^b} g_{\mu\nu}^{\pm} = e_a^{\mu} e_b^{\nu} g_{\mu\nu}^{\pm} \quad (5.17)$$

Y para que sea igual de ambos lados de la hipersuperficie se requiere que  $[\gamma_{ab}] = \gamma_{ab}^+ - \gamma_{ab}^- = 0$

La segunda condición de juntura se construye a partir de la curvatura extrínseca, definida como:

$$K_{ab} = g_{\mu\nu} n^{\mu} \nabla_a e_b^{\nu} \quad (5.18)$$

con  $n_{\mu} = \frac{\partial\Phi/\partial x^{\mu}}{\sqrt{g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\beta}}}}$  ( $\Phi = 0$  es la forma paramétrica de  $\Sigma$ ) 14. La segunda condición requiere que la curvatura extrínseca sea igual en ambos lados de  $\Sigma$ ,  $[K_{ab}] = K_{ab}^+ - K_{ab}^- = 0$ .

Ambas regiones podrán ser “pegadas” al aplicar estas condiciones de juntura. Si se considera una cáscara esférica tipo-tiempo en un espacio-tiempo dinámico arbitrario, dado por la métrica:

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 dr^2 + D^2 d\Omega^2 \quad (5.19)$$

se pueden llegar a las relaciones explícitas de las condiciones de juntura dependiendo de las funciones  $A$ ,  $B$  y  $D$ .

Tomando a  $\Sigma$  en su forma paramétrica como  $\Phi(x^{\mu}) = r - r_b(t) = 0$ , la métrica restringida a  $\Sigma$  queda como:

$$ds_{\Sigma}^2 = - \left[ A^2 - B^2 \left( \frac{\partial r_b}{\partial t} \right)^2 \right] dt^2 + D^2 d\Omega^2 \quad (5.20)$$

Por otro lado, la métrica en  $\Sigma$  en coordenadas  $y^a = \tau, \theta$  o  $\phi$  es:

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + D_b(\tau) d\Omega^2 \quad (5.21)$$

Comparando ambas, se obtienen las relaciones:

$$D_b(\tau) = D(t(\tau), r_b(t(\tau))) \quad (5.22)$$

$$\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{A^2} (1 + B^2 \dot{r}_b^2) \quad (5.23)$$

con  $\cdot$  para indicar la derivada respecto a  $\tau$ .

Al usar la expresión para la curvatura extrínseca (ec. (5.18)) evaluada en  $r = r_b$  se llega a

$$K_{\tau\tau} = -\frac{B\ddot{r}_b + B_{,r}\dot{r}_b^2}{\sqrt{1 + B^2\dot{r}_b^2}} - 2\frac{\dot{r}_b B_{,t}}{A} - \frac{A_{,r}}{AB}\sqrt{1 + B^2\dot{r}_b^2} \quad (5.24)$$

$$K_{\theta\theta} = D \left( \frac{B}{A}\dot{r}_b D_{,t} + \frac{\sqrt{1 + B^2\dot{r}_b^2}}{B} D_{,r} \right) \quad (5.25)$$

$$K_{\phi\phi} = \sin^2 \theta K_{\theta\theta} \quad (5.26)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $D$  están evaluados en  $\Sigma$ , siendo la última ecuación irrelevante al tener simetría esférica. Así, las condiciones de juntura proporcionan 4 ecuaciones para “pegar” las métricas,  $\gamma_{\mu\mu}^+ = \gamma_{\mu\mu}^-$ ,  $K_{\mu\mu}^+ = K_{\mu\mu}^-$  con  $\mu = \tau$  o  $\theta$ .

Ya establecida la forma de las condiciones de juntura, éstas pueden ser aplicadas a la situación que se está estudiando una vez que se fije la métrica. Considerando el interior  $\mathcal{M}^-$  con la forma de la métrica (5.1), la hipersuperficie  $\Sigma$  dada por  $\Phi^- = r - r_b(t) = 0$  y el caso en el que la frontera comóvil es constante ( $r_b = \text{cte}$ ), se puede obtener la relación entre la métrica y la métrica inducida [14].

$$\frac{dt}{d\tau} = e^{-\nu} \quad (5.27)$$

$$D(\tau) = C_b(t, r_b) \quad (5.28)$$

Así como la curvatura extrínseca explícita [14].

$$K_{\tau\tau}^- = \nu' e^{-\psi} \quad (5.29)$$

$$K_{\theta\theta}^- = CC' e^{-\psi} \quad (5.30)$$

con  $' = \frac{\partial}{\partial r}$ .

Por otro lado, sea el exterior  $\mathcal{M}^+$  dado por la forma de la métrica (5.13) pero con coordenadas de la forma  $(\mathcal{T}, \mathcal{R}, \theta, \phi)$  para diferenciarlo del interior, si  $\Sigma$  está dada por  $\Phi^+ = \mathcal{R} - \mathcal{R}_b(t) = 0$  y  $\mathcal{R}_b$  es la trayectoria radial

de partículas en caída libre en el espacio-tiempo, de un modo análogo al resultado previo, se obtiene:

$$\frac{d\mathcal{T}}{d\tau} = \frac{\sqrt{f(\mathcal{R}_b) + \dot{\mathcal{R}}_b^2}}{f(\mathcal{R}_b)} \quad (5.31)$$

$$D_b(\tau) = \mathcal{R}_b(\mathcal{T}(\tau)) \quad (5.32)$$

$$K_{\tau\tau}^+ = -\frac{1}{\sqrt{f + \dot{\mathcal{R}}_b^2}} \left( \ddot{\mathcal{R}}_b + \frac{f, \mathcal{R}}{2} \right) \quad (5.33)$$

$$K_{\theta\theta}^+ = \mathcal{R}_b \sqrt{f + \dot{\mathcal{R}}_b^2} \quad (5.34)$$

Así como se tomará una versión semi-clásica del modelo de colapso (al considerar un tensor de energía-momento que viole alguna de las condiciones de energía), se tendrá que considerar también una descripción semi-clásica en la geometría exterior del agujero negro (siendo esta una métrica regular que puede ser obtenida a partir de considerar electrodinámica no-lineal, ver [A](#)). Para evitar la singularidad, se debe considerar un modelo de colapso de polvo homogéneo semi-clásico para el interior y ver las condiciones en las que se puede acoplar al espacio-tiempo descrito por un agujero negro regular [\[14\]](#).

## 5.2. Colapso de polvo

El colapso del polvo en el interior se obtiene de fijar  $p = 0$  en las ecuaciones [\(5.7\)](#)-[\(5.12\)](#), dando como resultado que  $m = m(r)$  (ec. [\(5.8\)](#)), y que  $\nu = \nu(t)$  (ec. [\(5.10\)](#)). Esta última función puede ser reescalada con un tiempo comóvil adecuado a  $\nu = 0$  gracias a la ecuación [5.27](#). Además, considerando una de las ecuaciones de campo (ec. [\(5.9\)](#)) se puede llegar a que  $b = b(r)$ . Con estos resultados y con la ecuación [\(5.11\)](#), se llega a:

$$\dot{a}^2(r, t) = \frac{m(r)}{a(r, t)} + b(r) \quad (5.35)$$

Para imponer homogeneidad en el colapso se requiere que  $\epsilon = \epsilon(t)$ . Siguiendo la ecuación [\(5.7\)](#), una solución que cumple con homogeneidad es

$m = m_0$  y  $a = a(t)$ , resultando en

$$\epsilon(t) = \frac{3m_0}{a(t)^3} \quad (5.36)$$

Siguiendo la ecuación para el factor de escala  $a$ , ec. (5.35), y el resultado anterior, se puede ver que:

$$\dot{a}^2(t) = \frac{m_0}{a(t)} + b(r) \quad (5.37)$$

De aquí se puede inferir que  $b = k = \text{cte}$ . Los valores de  $k$  pueden ser restringidos a los valores de  $k = 0, \pm 1$  por medio de un reescalamiento. Al caso  $k = 0$  se le llama “marginamente ligado” y corresponde a partículas cayendo con velocidad nula en el infinito espacial cfr. [14]. En ese caso particular, se cumple:

$$\dot{a} = -\sqrt{\frac{m_0}{a}} \quad (5.38)$$

con el signo menos para representar el colapso. Integrando esta ecuación, se obtiene:

$$a(t) = \left(-\frac{3}{2}\sqrt{m_0}t\right)^{2/3} + \text{cte} \quad (5.39)$$

Tomando la condición inicial para  $a$  mencionada en la sección 5.1,  $a(t_i = 0) = 1$ , se llega a:

$$a(t) = \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{m_0}t\right)^{2/3} \quad (5.40)$$

De esta última ecuación se puede notar que la singularidad se alcanza a un tiempo  $t_s = 2/(3\sqrt{m_0})$ .

Con estas restricciones para colapso de polvo homogéneo y considerando las ecuaciones (5.27)-(5.30), se pueden escribir las condiciones de juntura en el interior como:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 \quad (5.41)$$

$$D(\tau) = r_b a(t) \quad (5.42)$$

$$K_{\tau\tau}^- = 0 \quad (5.43)$$

$$K_{\theta\theta}^- = r_b a(t) \quad (5.44)$$

en donde la última ecuación es gracias a que  $e^{-2\psi}C'^2 = 1$ .

<sup>1</sup>Para la forma de la métrica en el exterior, el “pegado” se puede hacer con la métrica de Schwarzschild ya que no debe existir flujo de materia del interior al exterior atravesando un límite dado por  $r_b = \text{cte}$ .

Con las ecuaciones (5.31)-(5.34) y lo encontrado para el interior de la nube de polvo se llega a:

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \frac{\sqrt{f(\mathcal{R}_b, M_0) + \dot{\mathcal{R}}_b^2}}{f(\mathcal{R}_b, M_0)} \quad (5.45)$$

$$\mathcal{R}_b(\mathcal{T}(t)) = r_b a(t) \quad (5.46)$$

$$\ddot{\mathcal{R}}_b = -\frac{f(\mathcal{R}_b, M_0), \mathcal{R}}{2} \quad (5.47)$$

$$1 = \sqrt{f(\mathcal{R}_b, M_0) + \dot{\mathcal{R}}_b^2} \quad (5.48)$$

Si se toma  $f(\mathcal{R}) = 1 - \frac{2M_0}{\mathcal{R}}$ , la ecuación (5.47) puede ser escrita como:

$$\ddot{\mathcal{R}}_b = -\frac{M_0}{\mathcal{R}_b^2} \quad (5.49)$$

Imponiendo  $2M_0 = m_0 r_b^3$ , se llega a:

$$\ddot{\mathcal{R}}_b = -\frac{m_0 r_b^3}{2\mathcal{R}_b^2} \quad (5.50)$$

Usando la ecuación (5.46),

$$\begin{aligned} r_b \ddot{a} &= -\frac{m_0 r_b^3}{2r_b^2 a^2} \\ \ddot{a} &= -\frac{m_0}{2a^2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

siendo esta última ecuación equivalente a derivar respecto de  $t$  la ecuación (5.38).

Del análisis anterior se puede decir que para polvo homogéneo la trayectoria de una partícula en la superficie de la estrella es una geodésica. La

---

<sup>1</sup>Cuando se fija la masa  $M(r) = M_0$  se está suponiendo que el espacio-tiempo exterior obedece la métrica de Schwarzschild.

métrica debe ser continua en ambos lados de la superficie, un sistema de coordenadas óptimo para este trabajo en el exterior es la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Lemaître cfr. [14].

Las coordenadas de Lemaître, como se mencionó anteriormente, representan un observador en caída libre y están dadas por la ecuación (2.25) que puede ser escrita de la forma:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{2M_0}{\mathcal{R}(\rho, \tau)} d\rho^2 + \mathcal{R}(\rho, \tau)^2 d\Omega^2 \quad (5.52)$$

con  $\mathcal{R}(\rho, \tau) = [(\rho - \tau) \frac{3}{2}]^{2/3} (2M_0)^{1/3}$ .

La trayectoria de una partícula en caída libre que empieza en  $\rho = \rho_0$ ,  $\theta = \theta_0$ ,  $\phi = \phi_0$  cumple que  $\mathcal{R}(\rho_0, \tau) = \mathcal{R}_0(\tau)$ . Haciendo uso de las ecuaciones (2.23) y (2.24) en la forma:

$$d\tau = d\mathcal{T} + \sqrt{\frac{2M_0}{\mathcal{R}}} \left(1 - \frac{2M_0}{\mathcal{R}}\right)^{-1} d\mathcal{R} \quad (5.53)$$

$$d\rho = d\mathcal{T} + \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{2M_0}} \left(1 - \frac{2M_0}{\mathcal{R}}\right)^{-1} d\mathcal{R} \quad (5.54)$$

se puede encontrar la forma explícita de esta trayectoria si se usa el hecho de que:

$$\begin{aligned} d\rho - d\tau &= \left( \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{2M_0}} - \sqrt{\frac{2M_0}{\mathcal{R}}} \right) \left(1 - \frac{2M_0}{\mathcal{R}}\right)^{-1} d\mathcal{R} \\ &= \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{2M_0}} \left(1 - \frac{2M_0}{\mathcal{R}}\right) \left(1 - \frac{2M_0}{\mathcal{R}}\right)^{-1} d\mathcal{R} \\ &= \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{2M_0}} d\mathcal{R} \end{aligned} \quad (5.55)$$

De donde para un  $\rho$  fijo, i.e.  $\mathcal{R}(\rho_0, \tau) = \mathcal{R}_0(\tau)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} -d\tau &= \sqrt{\frac{\mathcal{R}_0}{2M_0}} d\mathcal{R}_0 \\ \frac{d\mathcal{R}_0}{d\tau} &= -\sqrt{\frac{2M_0}{\mathcal{R}_0}} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación de movimiento para colapso de polvo marginalmente ligado (ec. (5.38)). Integrando y usando las condiciones iniciales, esto es que  $\mathcal{R}_0(0) = \rho_0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0(\tau) &= \rho_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2M_0}{\rho_0^3}} \tau \right)^{2/3} \\ &= \rho_0 a(\tau) \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde  $a(\tau)$  es un factor de escala adimensional. Comparando con la ecuación (5.40) de colapso de polvo homogéneo e identificando  $2M_0 = m_0 \rho_0^3$ , resultan ser la misma ecuación.

Así como se puede modelar el colapso de una nube de polvo homogéneo con la métrica de Schwarzschild en el exterior de la nube, se puede modelar el colapso de polvo homogéneo semi-clásico con una densidad de energía efectiva con la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Lemaître en el exterior de la nube cfr. [14].

### 5.3. Colapso semi-clásico

Una manera en que se construye una solución a las ecuaciones de campo que no tenga una singularidad central es usar un modelo que viole alguna de las condiciones de energía.

Se pueden hacer correcciones semi-clásicas al tensor de Einstein para mostrar la invalidez de la relatividad general por medio de un tensor de corrección  $G_{\mu\nu}^{\text{corr}}$  cfr. [14], de modo que las ecuaciones de campo sean:

$$G_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}^{\text{corr}} = T_{\mu\nu} \quad (5.58)$$

El tensor  $G_{\mu\nu}^{\text{corr}}$  se puede reescribir como una “corrección” al tensor de energía momento,  $T_{\mu\nu}^{\text{corr}}$ , junto con el tensor que contiene la parte de materia que puede o no violar las condiciones de energía. De este modo, obtenemos un tensor de energía momento efectivo y las ecuaciones de campo ahora se ven de la forma:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{ef}} = T_{\mu\nu}^{\text{mat}} + T_{\mu\nu}^{\text{corr}} \quad (5.59)$$

El tensor de materia puede ser uno ya conocido como el de fluido perfecto dado por la ecuación (3.2), mientras que el tensor de corrección dependerá

del cociente de la densidad de energía con la densidad de energía crítica. Esta densidad de energía crítica aparece cuando las correcciones de la teoría de relatividad general se vuelven importantes. Una manera de representar la densidad de energía efectiva es [14]:

$$\epsilon_{\text{ef}} = \epsilon + \epsilon^2 \alpha_1(\epsilon_{\text{cr}}) + \epsilon^3 \alpha_2(\epsilon_{\text{cr}}) + \dots \quad (5.60)$$

donde las  $\alpha$ 's se obtienen de la expansión de  $T_{\mu\nu}^{\text{corr}}$  para  $\epsilon \ll \epsilon_{\text{cr}}$ . Así mismo, se pueden reescribir las ecuaciones (5.8) y (5.11) para definir  $m_{\text{ef}}$  y  $p_{\text{ef}}$  como:

$$p_{\text{ef}} = -\frac{\dot{m}_{\text{ef}}}{a^2 \dot{a}} \quad (5.61)$$

$$m_{\text{ef}} = a(e^{-2\nu} \dot{a}^2 - b) \quad (5.62)$$

Esta última ecuación se cumple para una masa efectiva porque la definición de la masa de Misner-Sharp está en términos de los coeficientes de la métrica y no de las ecuaciones de campo de Einstein.

Si el tensor de energía momento efectivo es un fluido perfecto:

$$T_{\text{ef}}^{\mu\nu} = (\epsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}})u^\mu u^\nu + p_{\text{ef}}g^{\mu\nu} \quad (5.63)$$

con  $u^\mu$  es la 4-velocidad del fluido. Se puede suponer que la densidad de energía efectiva se puede separar en su parte de polvo y la corrección, i.e.  $\epsilon_{\text{ef}} = \epsilon + \epsilon_{\text{corr}}$ , con el primer término del lado derecho representando la  $\epsilon$  de polvo. Con esta separación y definiendo  $\epsilon_{\text{corr}} = -\frac{\epsilon^2}{\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ef}} &= \epsilon - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon} \\ &= \epsilon \left[ \frac{\epsilon + \epsilon_{\text{cr}}}{\epsilon_{\text{cr}}} \right]^{-1} \\ &= \epsilon \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{\text{cr}}} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Esta densidad de energía efectiva empata con la propuesta en la ecuación (5.60). Las correcciones que se hagan al tensor de energía momento pueden generar una repulsión al final del colapso que lo frene antes de que se forme la singularidad. Una posibilidad para la forma de la densidad de

energía efectiva (inspirada por LQG [14]) con la forma de la ecuación (5.64) es:

$$\epsilon_{\text{ef}} = \epsilon \left[ 1 \pm \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{\text{cr}}} \right)^{\beta} \right]^{\gamma} \quad (5.65)$$

con  $\beta$  y  $\gamma$  constantes por determinar dependiendo del agujero negro que se quiera modelar. La igualdad a la ecuación (5.64) se logra si se toma  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -1$  y con el signo  $+$ .

Para este caso se toma la expansión efectiva en la densidad de energía y no en la masa  $m$  o en el factor de escala  $a$  ya que de ese modo, en las ecuaciones (5.7)-(5.12) se puede desacoplar de manera más directa la parte efectiva de lo demás. Partiendo de la ecuación (5.7) para polvo homogéneo ( $m = \text{cte}$ ,  $a = a(t)$ ) y considerando a la densidad de energía como la densidad de energía efectiva (a partir de ahora se usa el factor de escala efectivo  $a_{\text{ef}}$  pero se sigue denotando como  $a$ ) se obtiene:

$$\epsilon_{\text{ef}} = \frac{3m_{\text{ef}}}{a^3} \quad (5.66)$$

donde se usa la ecuación (5.11) para obtener la forma explícita de la masa de Misner-Sharp efectiva reescalada,  $m_{\text{ef}} = a\dot{a}^2$ .

Usando las ecuaciones anteriores y que la densidad de energía se puede escribir como  $\epsilon = \frac{3m_0}{a^3}$ , se llega a:

$$\frac{3a\dot{a}^2}{a^3} = \frac{3m_0}{a^3} \left[ 1 \pm \left( \frac{3m_0}{a^3 \epsilon_{\text{cr}}} \right)^{\beta} \right]^{\gamma} \quad (5.67)$$

Y estableciendo  $\epsilon_{\text{cr}} = \frac{3m_0}{a_{\text{cr}}^3}$  (gracias a la ecuación (5.7)), se obtiene:

$$\begin{aligned} a\dot{a}^2 &= m_0 \left[ 1 \pm \left( \frac{3m_0}{3m_0 \frac{a_{\text{cr}}^3}{a^3}} \right)^{\beta} \right]^{\gamma} \\ \dot{a}^2 &= \frac{m_0}{a} \left[ 1 \pm \left( \frac{a_{\text{cr}}}{a} \right)^{3\beta} \right]^{\gamma} \\ \dot{a} &= -\sqrt{\frac{m_0}{a} \left[ 1 \pm \frac{a_{\text{cr}}^3}{a^3} \right]^{\gamma}} \end{aligned} \quad (5.68)$$

donde el signo menos de lado derecho en la última igualdad se usa para referirse al colapso y se fija  $\beta = 1$  para mantener hasta los términos de  $\epsilon^2$

en la expansión de la densidad de energía efectiva de la ecuación (5.60). Se puede encontrar la presión efectiva  $p_{\text{ef}}$  a través de:

$$\begin{aligned} p_{\text{ef}} &= -\frac{\dot{m}_{\text{ef}}}{a^2 \dot{a}} \\ &= -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} \end{aligned} \quad (5.69)$$

donde la segunda igualdad es gracias a la ecuación (5.62). Ahora, tomando a  $\dot{a}$  como (5.68) se llega a:

$$\begin{aligned} p_{\text{ef}} &= -\frac{3m_0 a_{\text{cr}}^3}{(a_{\text{cr}}^3 + a^3)^2} \\ &= -\frac{\epsilon^2 \epsilon_{\text{cr}}}{(\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon)^2} \end{aligned} \quad (5.70)$$

donde la segunda igualdad es gracias a que  $\epsilon = \frac{3m_0}{a^3}$  y  $\epsilon_{\text{cr}} = \frac{3m_0}{a_{\text{cr}}^3}$ . Finalmente, la ecuación (5.63) queda como:

$$T_{\text{ef}}^{\mu\nu} = \left( \epsilon - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon} - \frac{\epsilon^2 \epsilon_{\text{cr}}}{(\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon)^2} \right) u^\mu u^\nu - \frac{\epsilon^2 \epsilon_{\text{cr}}}{(\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon)^2} g^{\mu\nu} \quad (5.71)$$

Y debido a que  $p_{\text{polvo}} = 0$ , se puede separar el tensor de energía momento de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_{\text{ef}}^{\mu\nu} &= [(\epsilon + 0)u^\mu u^\nu + 0g^{\mu\nu}] + \left[ \left( -\frac{\epsilon^2}{\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon} - \frac{\epsilon^2 \epsilon_{\text{cr}}}{(\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon)^2} \right) u^\mu u^\nu - \frac{\epsilon^2 \epsilon_{\text{cr}}}{(\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon)^2} g^{\mu\nu} \right] \\ &= T_{\text{polvo}}^{\mu\nu} + T_{\text{corr}}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.72)$$

donde la segunda igualdad es de identificar a  $p_{\text{ef}} = p_{\text{corr}}$ . Así, se puede separar el tensor de energía momento efectivo en su parte de polvo y su corrección, siendo ambos tensores de fluido perfecto.

La densidad de energía y presión efectivas (identificadas arriba por (5.64) y (5.70)) deben violar alguna de las condiciones de energía (definidas en la sección 3.1.4) para evitar la formación de la singularidad. Fijando los valores  $\epsilon_{\text{cr}}, \epsilon \geq 0$ , las validez de las condiciones de energía queda de la siguiente manera.

- Condición de energía débil: Se debe cumplir que  $\epsilon_{\text{ef}} \geq 0$  y  $\epsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}} \geq 0$ . La primer desigualdad es directa considerando la última igualdad de [5.64](#). La segunda también se cumple ya que:

$$\epsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}} = \frac{\epsilon_{\text{cr}}^2 \epsilon}{(\epsilon_{\text{cr}} + \epsilon)^2} \quad (5.73)$$

- Condición de energía dominante: Se debe cumplir que  $\epsilon_{\text{ef}} \geq 0$  y  $-\epsilon_{\text{ef}} \leq p_{\text{ef}} \leq \epsilon_{\text{ef}}$ . La primer igualdad ya se demostró. La segunda se cumple debido a:

$$-\epsilon \epsilon_{\text{cr}} \leq -\frac{\epsilon^2 \epsilon_{\text{cr}}}{\epsilon + \epsilon_{\text{cr}}} \leq \epsilon \epsilon_{\text{cr}} \quad (5.74)$$

de donde

$$-\epsilon - \epsilon_{\text{cr}} \leq -\epsilon \leq \epsilon + \epsilon_{\text{cr}} \quad (5.75)$$

- Condición de energía fuerte: Se debe cumplir que  $\epsilon_{\text{ef}} \geq 0$ ,  $\epsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}} \geq 0$  y  $\epsilon_{\text{ef}} + 3p_{\text{ef}} \geq 0$ . Las primeras dos desigualdades ya se demostraron y la última se puede escribir como:

$$\epsilon_{\text{ef}} + 3p_{\text{ef}} = \frac{\epsilon \epsilon_{\text{cr}} (\epsilon_{\text{cr}} - 2\epsilon)}{(\epsilon + \epsilon_{\text{cr}})^2} \quad (5.76)$$

de donde se puede inferir que si  $\epsilon > \frac{\epsilon_{\text{cr}}}{2}$ , la condición de energía fuerte **NO** se cumple.

Si se toma esta corrección semi-clásica al colapso de polvo, también se debe revisar cómo es afectada la geometría del exterior fuera del borde de la nube. Para ello, hace falta ver para qué condiciones el colapso descrito por la ecuación anterior se puede “unir” a una geometría exterior. En este caso, se describirá el exterior usando la métrica [\(5.13\)](#) como un espacio-tiempo con un agujero negro regular que pueda ser obtenido a través de la NLED (ver apéndice [A](#)).

La función  $M(\mathcal{R})$  se puede escribir como:

$$M(\mathcal{R}) = \frac{M_0 \mathcal{R}^\mu}{(\mathcal{R}^\nu + q_*^\nu)^{\mu/\nu}} \quad (5.77)$$

donde  $q_*$  es la carga de Hayward que evitará el colapso y  $\mu = 0$  es la solución de Schwarzschild. Tomando en cuenta el escalero de Kretschmann

$\mathcal{K}$  se obtiene una condición para agujeros negros regulares, esto es que  $\mu \geq 0$  cfr. [14]. El caso del agujero negro de Hayward se obtiene al hacer  $\mu = 3$  y  $\nu = 3$ .

Para unir los modelos es necesario usar las condiciones de juntura. A partir de (5.31) y tomando en cuenta que por homogeneidad el tiempo comóvil  $t$  es el mismo que el tiempo propio en  $\Sigma$ , se obtiene:

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \frac{\sqrt{f(\mathcal{R}_b) + \dot{\mathcal{R}}_b^2}}{f(\mathcal{R}_b)} \quad (5.78)$$

Considerando una cáscara comóvil ( $r = r_b$ ) y con ayuda de las ecuaciones (5.28) y (5.32), se obtiene:

$$\mathcal{R}_b(\mathcal{T}(t)) = r_b a(t) \quad (5.79)$$

A partir de las ecuaciones (5.33) y (5.43) y tomando  $M(\mathcal{R})$  dado por la ecuación (5.77), la condición de juntura para la curvatura extrínseca  $K_{tt}$  queda como:

$$\ddot{\mathcal{R}}_b = -\frac{f(M(\mathcal{R}_b))_{,\mathcal{R}}}{2} \quad (5.80)$$

Mientras que con las ecuaciones (5.34) y (5.44) se tiene que, la condición de juntura para la curvatura extrínseca  $K_{\theta\theta}$  queda como:

$$\begin{aligned} r_b a(t) &= \mathcal{R}_b \sqrt{f + \dot{\mathcal{R}}_b^2} \\ 1 &= f(M(\mathcal{R}_b)) + \dot{\mathcal{R}}_b^2 \end{aligned} \quad (5.81)$$

A partir de estas 4 ecuaciones, se pueden encontrar las condiciones necesarias para poder pegar las métricas, estas son:

$$2M_0 = r_b^3 m_0 \quad (5.82)$$

$$q_*^\nu = (r_b a_{cr})^3 \quad (5.83)$$

$$\frac{\mu}{\nu} = -\gamma \quad (5.84)$$

$$\nu = 3 \quad (5.85)$$

En efecto, si se cumple lo anterior la ecuación (5.81) queda como:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\mathcal{R}(\mathcal{T})}{d\tau}\right)^2 &= 1 - \left(1 - \frac{2M(\mathcal{R})}{\mathcal{R}}\right) \\
\left(r^b \frac{a(t)}{dt}\right)^2 &= \frac{2}{r_b a} \frac{M_0 (r_b a)^\mu}{((r_b a)^\nu + q_*^\nu)^{\mu/\nu}} \\
\dot{a}^2 &= \frac{m_0}{a} \left[1 + \frac{(r_b a_{cr})^3}{(r_b a)^3}\right]^\gamma \\
\dot{a} &= \sqrt{\frac{m_0}{a} \left[1 + \left(\frac{a_{cr}}{a}\right)^3\right]^\gamma}
\end{aligned} \tag{5.86}$$

siendo esta ecuación idéntica a (5.68) con el signo positivo. Un punto importante a recalcar es que, por como fue definido el factor de escala  $a$ , para que no exista la singularidad,  $\dot{a}$  debe tender a 0 cuando  $r \rightarrow 0$  con  $a$  siendo finita en todo momento cfr. [14].

Con esto, se demuestra que se pueden pegar ambas regiones con un sistema de coordenadas más elegante, las coordenadas de Lemaître cfr. [14]. Análogamente a la ecuación (5.55), obtenida de la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Lemaître, siendo  $M$  una función de  $\mathcal{R}$ , podemos definir un observador en caída libre en  $\rho = \rho_0$ ,  $\theta = \theta_0$ ,  $\phi = \phi_0$  siguiendo una trayectoria descrita por  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(\rho_0, \tau)$  que cumple con la ecuación diferencial:

$$\frac{d\mathcal{R}_0}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2M_0}{\mathcal{R}_0} \left(1 + \frac{q_*^\nu}{\mathcal{R}_0^\nu}\right)^{-\mu/\nu}} \tag{5.87}$$

donde se usó que  $M = \frac{M_0 \mathcal{R}_0^\mu}{(\mathcal{R}_0^\nu + q_*^\nu)^{\mu/\nu}}$ . Identificando  $\mathcal{R}_0(\tau) = \rho_0 a(\tau)$ ,  $m_0 \rho_0^3 = 2M_0$  y  $q_* = q \rho_0$ , la ecuación para el factor de escala  $a(\tau)$  queda como:

$$\frac{da}{d\tau} = -\sqrt{\frac{m_0}{a} \left(1 + \frac{q^\nu}{a^\nu}\right)^{-\mu/\nu}} \tag{5.88}$$

Esta ecuación coincide con (5.68) si identificamos  $\nu = 3$  y  $\mu/\nu = -\gamma$ . Además, se puede notar que a pesar de que  $a_{cr}$  siempre es positivo,  $q$  puede ser positivo o negativo, por lo que la ecuación se puede reescribir

como cfr. [14]:

$$\frac{da}{d\tau} = -\sqrt{\frac{m_0}{a} \left[ 1 \pm \frac{|q|^3}{a^3} \right]^\gamma} \quad (5.89)$$

Con esto se establece una correspondencia entre el modelo del agujero negro regular en electrodinámica no-lineal y el colapso de polvo homogéneo semi-clásico. Para el caso de Hayward, se toma  $\gamma = -1$ ,  $\nu = 3$ ,  $\mu = 3$  y el signo + en las ecuaciones (5.65) y (5.68) para  $\epsilon$  y  $a$  respectivamente.

## 5.4. Superficies atrapadas y horizontes

Las superficies atrapadas son necesarias para que los fotones queden atrapados y se pueda modelar el agujero negro [14]. Aunque en una configuración inicial no estén presentes estas superficies, pueden formarse después de que inicia el colapso de la materia. A la superficie atrapada más exterior se le conocerá como horizonte aparente, el cual en el caso de colapso esférico (métrica (5.1)) puede ser caracterizada como la curva  $t_{\text{ha}}(r)$  para la cual la superficie  $C(r, t_{\text{ha}})$  se vuelve nula cfr. [14]. En otras palabras:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(\partial_\mu C)(\partial_\nu C) &= 0 \\ g^{rr}(\partial_r C)^2 + g^{tt}(\partial_t C)^2 &= 0 \\ -e^{-2\nu}\dot{C}^2 + e^{-2\phi}C'^2 &= 0 \\ 1 - \frac{F}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (5.90)$$

Todas las geodésicas localizadas dentro de la región atrapada terminarán, si es que se forma, en la singularidad. Las superficies atrapadas son inevitables conforme la materia colapse. Para el caso efectivo, i.e.  $m = m_{\text{ef}}$  y  $a = a_{\text{ef}}$ , se debe cumplir la ecuación (5.62), que queda escrita como:

$$\begin{aligned} m_{\text{ef}} &= a_{\text{ef}}(e^{-2\nu}a_{\text{ef}}\dot{a}^2 - b) \\ &= a\dot{a} \end{aligned} \quad (5.91)$$

donde la segunda igualdad es porque se considera el caso homogéneo en la ecuación (5.10) junto con la condición de junta (5.27) y en el caso

marginalmente ligado. De este modo, (5.90) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{C(\dot{C}^2)}{C} &= 0 \\ 1 - r_{\text{ha}}^2 \dot{a}^2 &= 0 \\ r_{\text{ha}} &= \frac{1}{|\dot{a}|} \end{aligned} \tag{5.92}$$

con el valor absoluto en la última igualdad debido a que el radio del horizonte aparente debe ser positivo.

El horizonte aparente estará presente únicamente en regiones que cumplan  $r_{\text{ha}}(t) \leq r_b$ . Cuando  $r_{\text{ha}}(t) = r_b$ , el horizonte aparente cruza la frontera y conecta con el correspondiente horizonte en el exterior cfr. [14]. En Hayward, el comportamiento de  $\dot{a}$  está descrito por la ecuación:

$$\dot{a} = -\sqrt{\frac{m_0}{a} \left[ 1 + \frac{q^3}{a^3} \right]^{-1}} \tag{5.93}$$

La comparación de este agujero negro con uno formado por colapso Oppenheimer-Snyder-Datt (OSD) se encuentra representado en la fig. 5.2

Siguiendo la ecuación para el caso de Hayward, si  $\dot{a} \rightarrow 0$  entonces  $r_{\text{ha}} \rightarrow +\infty$ , dando lugar a la formación de dos horizontes, uno interior y uno exterior cfr. [14], en lugar de uno como es el caso del colapso OSD (ver fig. 5.3).

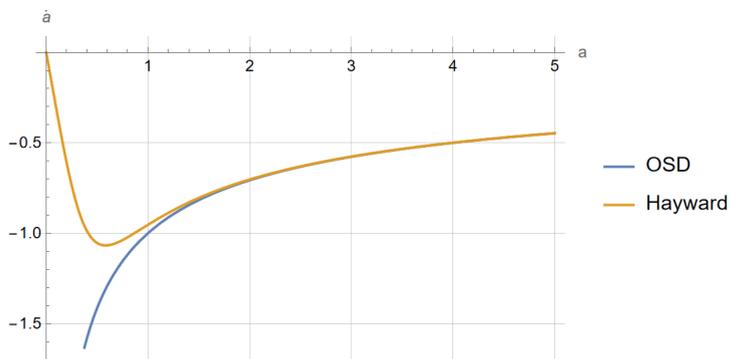


Figura 5.2: Gráfica de  $\dot{a}$  vs  $a$  para los modelos de Hayward y Oppenheimer-Snyder-Datt (OSD). Se fijó a  $m_0 = 1$  y  $q^3 = 0,1$ .

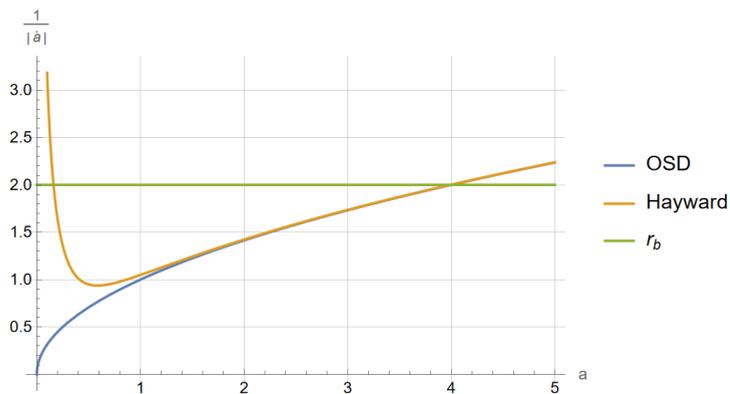


Figura 5.3: Gráfica de  $r_{ah} = \frac{1}{|\dot{a}|}$  vs  $a$  para los modelos de Hayward y OSD. Se tomó a  $m_0 = 1$  y  $q^3 = 0,1$ . También se muestra un valor de  $r_b$  fijo para hacer notar que, siguiendo la condición  $r_{ah} \leq r_b$ , Hayward formará dos horizontes (un interno y un externo) al cruzar 2 veces con  $r_b$  mientras que el caso de OSD sólo formará un horizonte.



## Capítulo 6

# Sombra de una estrella en colapso

La sombra de un agujero negro se refiere a la región geométrica de la proyección de la foto-esfera en el cielo del observador [34] y es de utilidad ya que proporciona una forma de “observar” este tipo de objetos. La sombra se puede visualizar a partir de la trayectoria de los rayos de luz provenientes de una fuente externa colocada detrás del agujero negro: una posibilidad es que atraviesen el horizonte de eventos y no puedan llegar al observador jamás (disco oscuro), la segunda posibilidad es que los rayos de luz pasen a un radio lo suficientemente pequeño para dar vueltas alrededor de él hasta que escapan y llegan al observador (anillo brillante).

La observación de la sombra se encuentra caracterizada por el ángulo de visión del observador. En este trabajo se va a describir la formación de un agujero negro mediante una estrella oscura en colapso a partir del ángulo de visión de dos observadores; uno estático y uno en caída libre. En este escenario dinámico, la sombra que determinan los observadores cambia con el tiempo y el cambio en el ángulo de la sombra medido por el observador nos puede dar una idea de cómo es la apariencia del agujero negro.

En este capítulo, se considerará el colapso de una estrella esféricamente simétrica y oscura (para evitar la salida de los fotones una vez que ya cruzaron el borde de la estrella) que comienza a un tiempo  $T_s = 0$ . Este sistema puede modelarse como el colapso esférico de polvo homogéneo, el cual se discutió en el capítulo anterior. En el plano del cielo del observador,

la estrella oscura se puede ver como un disco negro (la sombra) suponiendo una fuente luminosa detrás de ella en dirección del observador. Debido a que se considera que la estrella en colapso es opaca, el enfoque se centrará en la métrica en el exterior de la estrella colapsante, la cual será tomada como la métrica de Hayward, considerando la función  $M(r)$  como (5.77) y se estudiarán casos para diferentes valores de  $q_*$  (siendo  $q_* = 0$  la solución de Schwarzschild).

El análisis se hará con dos observadores para hacer una comparación desde dos puntos de vista, un observador fijo, a un radio al interior y otro al exterior del radio límite de la estrella  $r_b$  y un observador en caída libre tal que siempre se encuentre fuera de la estrella. Para modelar la sombra del colapso regular en el espacio tiempo de Hayward se sigue la derivación de S. Schneider y V. Perlick [11] para el espacio tiempo de Schwarzschild.

## 6.1. Geodésicas

La métrica de Hayward en coordenadas de Painlevé-Gullstrand se puede escribir como la ec. (2.30) si se considera  $M$  como función de  $r$ . Esta métrica resulta no contener la singularidad de coordenadas en  $r = r_h$ . El lagrangiano asociado a una partícula en este espacio-tiempo será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{2M(r)}{r}} \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s} + \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{2} \left( \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.1)$$

Siendo  $s$  igual a un parámetro afín  $\lambda$  para una partícula tipo-luz o igual al tiempo propio  $\tau$  para una partícula tipo-tiempo. A partir de este lagrangiano, para una partícula tip-luz, las cantidades conservadas serán:

$$E = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}} = \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \sqrt{\frac{2M(r)}{r}} \frac{\partial r}{\partial \lambda} \quad (6.2)$$

$$L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \quad (6.3)$$

siendo ' la derivada respecto a  $\lambda$ .  $E$  es la energía y  $L$  el momento angular. Las geodésicas radiales tipo-tiempo que describen la trayectoria de un objeto con masa en caída libre pueden ser encontradas a partir del Lagrangiano asociado a la métrica. A partir de la condición de normalización de la cuadrivelocidad, tomando el parámetro afín como el tiempo propio  $\tau$  y con  $\theta$  y  $\varphi$  fijos se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mg_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &= \mathcal{L} \\ -\frac{1}{2}m &= \frac{1}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{2M(r)}{r}} \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial r}{\partial \tau} \right)^2 \right] \\ 1 &= \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} \right)^2 - 2\sqrt{\frac{2M(r)}{r}} \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial r}{\partial \tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

siendo la última igualdad tomando  $m = 1$ .

La parametrización dada por el tiempo propio  $\tau$  orientada al futuro con respecto el tiempo coordenado  $T$  se expresa como  $dT/d\tau > 0$  y un movimiento entrante empezando de  $r > r_h$  se expresa como  $dr/d\tau < 0$ , con  $r_h$  la solución a  $1 - 2M(r)/r = 0$ . A partir de (6.2) y (6.4), y considerando al parámetro  $s$  como el tiempo propio  $\tau$ , se obtiene:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{2M(r)}{r}} \quad (6.5)$$

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{\varepsilon - \sqrt{2M(r)/r} \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r}}{1 - 2M(r)/r} \quad (6.6)$$

donde el cambio de  $E$  a  $\varepsilon$  es por la elección del parámetro  $\tau$  (del mismo modo hay un cambio de  $L$  a  $\ell$ ). Dependiendo del valor de  $\varepsilon$  tenemos 3 casos:

- $0 < \varepsilon < 1$ : para  $r = r_i$  tal que  $\varepsilon^2 = 1 - 2M(r_i)/r_i$  se tendrá  $dr/d\tau = 0$  y  $dT/d\tau = \left( 1 - \frac{2M(r_i)}{r_i} \right)^{-1/2}$  con  $r_h < r_i$ . Este será el caso de caída libre desde el reposo en  $r_i$ .
- $\varepsilon = 1$ : cuando  $r_i \rightarrow \infty$  se tendrá el caso de caída libre desde el reposo en el infinito. En esta configuración se tiene  $dr/d\tau = -\sqrt{2M(r)/r}$  y  $dT/d\tau = 1$ , en cuyo caso se puede sustituir el tiempo coordenado  $T$  con el tiempo propio  $\tau$ .

- $1 < \varepsilon$ : en este caso, los observadores provienen del infinito con una velocidad radial dirigida al interior diferente de 0.

Por otro lado, para  $r > r_h$  se puede definir la tetraada ortonormal para observadores estáticos tal que localmente se vea como un espacio-tiempo plano. Gracias a la normalización de la 4-velocidad y considerando a un observador tipo-tiempo, la tetraada queda como:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M(r)}{r}}} \frac{\partial}{\partial T} \quad (6.7)$$

$$e_1 = \sqrt{1 - \frac{2M(r)}{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sqrt{2M(r)/r}}{\sqrt{1 - \frac{2M(r)}{r}}} \frac{\partial}{\partial T} \quad (6.8)$$

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (6.9)$$

$$e_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.10)$$

Esta tetraada cumple que, para la métrica de Hayward en coordenadas de Painlevé-Gullstrand,  $g_{\mu\nu}^{ab}(e_a, e_b) = \eta_{\mu\nu}$  con  $\eta_{\mu\nu}$  la métrica de Minkowski. Para un observador estático, el campo vectorial  $e_0$  representa la 4-velocidad del mismo.

De manera análoga, para un observador en caída radial con  $\varepsilon > 0$  se puede definir otra tetraada ortonormal. Para ello se emplea la condición de normalización de la 4-velocidad ( $u^\mu u_\mu = -1$ ) y que las primeras dos entradas sólo dependan de  $r$  y de  $T$ . De esta forma se llega a:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0 = & \frac{\varepsilon - \sqrt{2M(r)/r} \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r}}{1 - 2M(r)/r} \frac{\partial}{\partial T} \\ & - \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r} \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\tilde{e}_1 = \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varepsilon \sqrt{2M(r)/r} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r}}{1 - 2M(r)/r} \frac{\partial}{\partial T} \quad (6.12)$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (6.13)$$

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.14)$$

La velocidad relativa entre el observador estático y el que está en caída radial se obtiene a partir de la fórmula de relatividad especial:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} e_0^\mu e_0^\nu &= \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}} \\ -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-2M(r)/r}} &= \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}} \\ v &= \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r} \end{aligned} \quad (6.15)$$

de donde se puede ver que para  $\varepsilon \geq 1$  la velocidad relativa está definida si se satisface que  $r > 2M(r)$ . Si  $0 < \varepsilon < 1$ , la velocidad relativa estará definida sólo si se satisface  $2M(r) < r < 2M(r)/(1 - \varepsilon^2)$ .

Para calcular las geodésicas tipo-luz se puede fijar  $\theta = \pi/2$  (en el plano ecuatorial) para hacer los cálculos más sencillos, esto gracias a la simetría esférica cfr. [11]. Con esto, el lagrangiano (6.1) se ve como:

$$0 = -\left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2M(r)}{r}} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \frac{\partial r}{\partial \lambda} + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (6.16)$$

Dividiendo entre  $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}^2$  y multiplicando por  $1 - \frac{2M(r)}{r}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \left[ -\left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2M(r)}{r}} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2 \right] \end{aligned}$$

Junto con las expresiones (6.2) y (6.3) para las constantes de movimiento se llega a:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2 r^4}{L^2} - r^2 + 2M(r)r \quad (6.17)$$

Esta ecuación se encuentra asociado con el potencial ya que  $\dot{r} \approx V(E, r)$ . Derivando respecto a  $\varphi$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{E^2 r^4}{L^2} - r^2 + 2M(r)r \right) \\ 2 \frac{dr}{d\varphi} \frac{d^2 r}{d\varphi^2} &= \left( \frac{4E^2 r^3}{L^2} - 2r + 2M(r) + \frac{6M_0 r^3}{r^3 + q_*^3} - \frac{6M_0 r^6}{(r^3 + q_*^3)^2} \right) \frac{dr}{d\varphi} \\ \frac{d^2 r}{d\varphi^2} &= \frac{2E^2 r^3}{L^2} - r + M(r) + 3M(r) - 3 \frac{M^2(r)}{M_0} \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde la segunda igualdad es de identificar  $M(r) = \frac{M_0 r^3}{(r^3 + q_*^3)}$ . Si la coordenada  $r$  va a un valor extremo  $r_m$  a lo largo de la geodésica tipo-luz, la ecuación (6.17) se escribe como:

$$\frac{E^2 r_m^3}{L^2} - r_m + 2M(r_m) = 0 \quad (6.19)$$

Partiendo de este hecho, la ecuación (6.18) para el valor de  $r_m$  se ve como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \right)_{r=r_m} &= \frac{2E^2 r_m^3}{L^2} - r_m + M(r_m) + 3M(r_m) - 3 \frac{M^2(r_m)}{M_0} \\ &= 2(r_m - 2M(r_m)) - r_m + 4M(r_m) - 3 \frac{M^2(r_m)}{M_0} \\ &= r_m - \frac{3M^2(r_m)}{M_0} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Se define el radio  $r = r_{mf}$  para el caso en que  $\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 0$  (al igual que  $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ ) que es donde hay un cambio de mínimo local a máximo local, este radio satisface la ecuación implícita:

$$r_{mf} = \frac{3M^2(r_{mf})}{M_0} \quad (6.21)$$

Este es el radio de una esfera compuesta de fotones en orbitas inestables ante perturbaciones radiales.

Usando (6.17) en la ecuación (6.16) se llega a:

$$0 = - \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2M(r)}{r}} \frac{\partial T}{\partial r} + 1 + \frac{r^2}{\frac{E^2 r^4}{L^2} - r^2 + 2M(r)r}$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\sqrt{2M(r)r}}{r - 2M(r)} \pm \frac{E\sqrt{r^5}}{(r - 2M(r))\sqrt{E^2 r^3 - (r - 2M(r))L^2}}$$
(6.22)

Para el caso que cumple  $r > 2M(r)$ , el segundo término es mayor que el primero, por lo que dependiendo de la relación entre  $dT/dr$  se escoge el signo positivo o el negativo de la ecuación anterior.

Para las geodésicas tipo-luz con un extremo en  $r = r_m$  dado por la ecuación (6.19), las ecuaciones (6.17) y (6.22) quedan como:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{r^4(r_m - 2M(r_m))}{r_m^3} - r^2 + 2M(r)r$$
(6.23)

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\sqrt{2M(r)r}}{r - 2M(r)} \pm \frac{\sqrt{r^5(r_m - 2M(r_m))}}{(r - 2M(r))\sqrt{(r_m - 2M(r_m))r^3 - (r - 2M(r))r_m^3}}$$
(6.24)

## 6.2. Sombra

Para calcular el ángulo de la sombra para observadores estáticos y en caída libre se consideran geodésicas tipo-luz en el plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ). Las trayectorias a lo largo de estas geodésicas estarán parametrizadas por un parámetro afín  $\sigma$ . El vector tangente de la geodésica tipo-luz se puede expandir en términos de las tetradas definidas en la sección 6.1, tal que para ciertos ángulos  $\alpha$ 's se satisface [11]:

$$\dot{T} \frac{\partial}{\partial T} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \chi(e_0 + \cos \alpha e_1 - \sin \alpha e_3)$$

$$= \tilde{\chi}(\tilde{e}_0 + \cos \tilde{\alpha} \tilde{e}_1 - \sin \tilde{\alpha} \tilde{e}_3)$$
(6.25)

donde  $\dot{\phantom{x}}$  es la derivada respecto al parámetro afín. Los ángulos  $\alpha$  y  $\tilde{\alpha}$  son los ángulos se forman entre el vector tangente a trayectoria de la geodésica

tipo-luz y el vector tangente a la dirección radial en el respectivo sistema. En el caso de  $\alpha$ , el ángulo de la sombra está definido para  $r_h < r < \infty$ , mientras que para  $\tilde{\alpha}$  está definido para  $0 < r < \infty$  si  $\varepsilon \geq 1$ . El factor de escala  $\chi$  o  $\tilde{\chi}$  nos permite establecer la igualdad sin tener problemas con la norma de la cuadrivelocidad y el signo depende de si se trata de una parametrización dirigida al futuro ( $\tilde{\chi}, \chi > 0$ ) o al pasado ( $\tilde{\chi}, \chi < 0$ ) con respecto a la coordenada  $T$  [11].

Tomando los coeficientes de las componentes de  $\frac{\partial}{\partial r}$  y  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  en la ecuación (6.25), se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \chi \sqrt{1 - \frac{2M(r)}{r}} \cos \alpha \\ &= \tilde{\chi} \left( \varepsilon \cos \tilde{\alpha} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r} \right)\end{aligned}\quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{-\chi \sin \alpha}{r} \\ &= \frac{-\tilde{\chi} \sin \tilde{\alpha}}{r}\end{aligned}\quad (6.27)$$

A partir de estas dos ecuaciones se puede obtener:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial \varphi} &= \frac{r \sqrt{1 - 2M(r)/r} \cos \alpha}{-\sin \alpha} \\ &= \frac{r \left( \varepsilon \cos \tilde{\alpha} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r} \right)}{-\sin \tilde{\alpha}}\end{aligned}\quad (6.28)$$

Para las geodésicas tipo-luz con un extremo en  $r = r_m$ , usando las ecuaciones (6.23) y (6.28) se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{r^2(r_m - 2M(r_m))}{r_m^3} - 1 + \frac{2M(r)}{r} = \frac{(1 - 2M(r)/r) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\quad (6.29)$$

$$\frac{r^2(r_m - 2M(r_m))}{r_m^3} - 1 + \frac{2M(r)}{r} = \frac{\left( \varepsilon \cos \tilde{\alpha} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r} \right)^2}{\sin^2 \tilde{\alpha}}\quad (6.30)$$

Resolviendo ambas ecuaciones para  $\alpha$  y  $\tilde{\alpha}$  se obtiene:

$$\sin \alpha = \sqrt{\mathcal{R}(r, r_m)}\quad (6.31)$$

$$\sin \tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{1 - 2M(r)/r} \sqrt{\mathcal{R}(r, r_m)}}{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r)/r} \sqrt{1 - \mathcal{R}(r, r_m)}} \quad (6.32)$$

donde  $\mathcal{R}(r, r_m) = \frac{r_m^3(r-2M(r))}{r^3(r_m-2M(r_m))}$ . El signo superior de la ecuación (6.32) aplica si  $dr/d\varphi > 0$  y el inferior aplica si  $dr/d\varphi < 0$ .

La sombra que se observa dependerá de la posición del observador mismo. Si el observador se encuentra en  $r_o > r_h$ , las geodésicas tipo-luz que llegan a él pueden provenir del infinito, pudiendo pasar por el radio de la superficie de la estrella  $r_b$  y llegar a un radio  $r_m$  en el que los fotones se encuentran dando vueltas hasta que escapan al observador.

En el caso en que no hay fuentes entre el observador y el agujero negro, se puede asociar la oscuridad a geodésicas tipo-luz cuya dirección inicial termina cayendo dentro del horizonte de eventos  $r_h$ . La luz que llegue al observador representa a las geodésicas tipo-luz provenientes del infinito que llegan hasta un radio límite y realizan un movimiento en espiral a lo largo de  $r_m$  III antes de escapar.

Las ecuaciones (6.31) y (6.32) establecen la relación entre el ángulo de esta región oscura (la sombra) y el radio del observador dependiendo del radio mínimo asociado al radio de la estrella de polvo en colapso. La ecuación (6.31) corresponde a un observador estático y es válida para posiciones mayores al radio del horizonte  $r_h$ . Por otro lado, la ecuación (6.32) corresponde a un observador que se encuentra cayendo y que pasa por  $r_o = r_o^*$  a  $T_o = 0$ . Es válida para  $r > 0$  si  $\varepsilon \geq 1$ .

### 6.3. Observador estático

Consideremos que la estrella de polvo comienza con un radio fijo  $r_s = r_i$ . Conforme el colapso avanza, el radio de la estrella  $r_s$  comenzará a disminuir. Se fija el inicio del colapso en  $T_s = 0$ . La relación entre el tiempo y el radio de la estrella se encuentra dividiendo la ecuación (6.6) con la ecuación (6.5) y considerando que la energía de la partícula en la superficie de la estrella es  $\varepsilon^2 = 1 - 2M(r_i)/r_i$ .

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\sqrt{2M(r)r}}{r - 2M(r)} - \frac{\sqrt{r^3} \sqrt{r_i - 2M(r_i)}}{(r - 2M(r)) \sqrt{2M(r)r_i - 2M(r_i)r}} \quad (6.33)$$

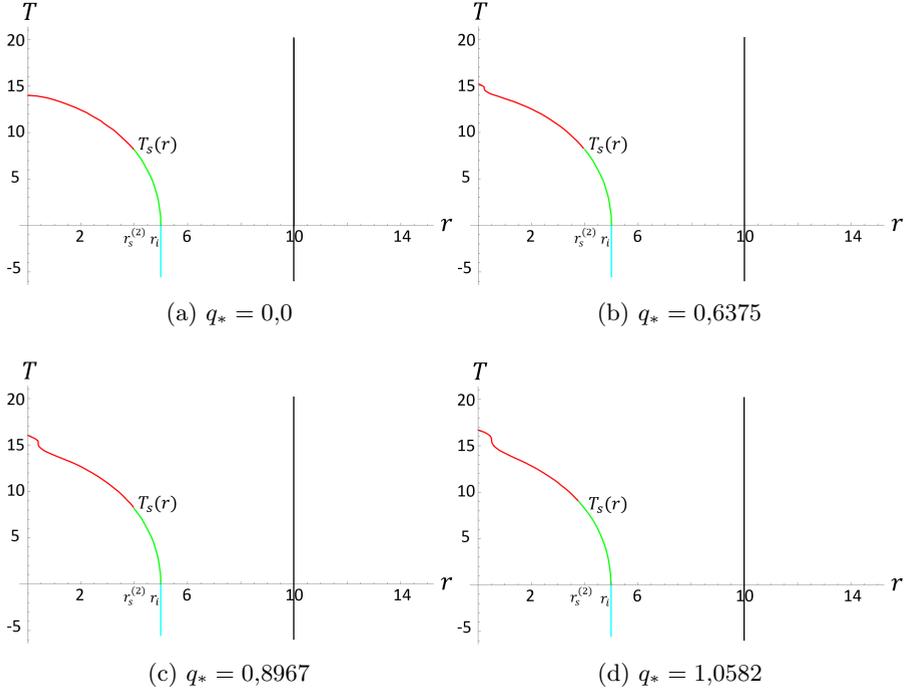


Figura 6.1: Gráficas del colapso de polvo esférico para diferentes valores de  $q_*$  en donde se muestran las etapas de la observación del mismo. En todos los casos se tomó  $M_0 = 1$  y se considera un observador estático en  $r_o = 10$ .

Integrando y fijando  $T_s = 0$  en  $r_s = r_i$ , se obtiene:

$$T_s = \int_{r_s}^{r_i} \frac{\sqrt{r^3} \sqrt{r_i - 2M(r_i)}}{(r - 2M(r)) \sqrt{2M(r)r_i - 2M(r_i)r}} - \frac{\sqrt{2M(r)r}}{r - 2M(r)} dr \quad (6.34)$$

En la figura [6.1](#) se muestran diagramas de espacio-tiempo para el colapso de la estrella con un observador estático. En ellos se muestran el tiempo de colapso  $T_s(r)$  con respecto al tamaño del radio de la estrella de polvo, al igual que se incluye la posición del observador (línea negra). Para este observador, se supone que  $r_i > r_{mf}$ .

A partir de la ecuación [\(6.30\)](#) y tomando  $r = r_s$  para ubicarse en la superficie de la estrella,  $\tilde{\alpha} = \pi/2$  y  $\varepsilon^2 = 1 - 2M(r_i)/r_i$  (energía total de la

partícula comenzando en reposo a un radio  $r_i$ ), se llega a:

$$\frac{r_m^3}{r_m - 2M(r_m)} = \frac{r_i r_s^2}{r_i - 2M(r_i)} \quad (6.35)$$

Este radio mínimo debe ser mayor o igual al radio límite encontrado a partir de (6.21). Cuando el valor de  $r_m = r_{mf}$ , al valor del radio de la estrella  $r_s$  se le denotará como  $r_s^{(2)}$ . Este radio satisface las desigualdades  $r_{mf} < r_s^{(2)} < r_i$ .

Con eso en mente, el colapso de la estrella de polvo se puede dividir en 3 etapas. La primer etapa comienza a un tiempo  $T_s < 0$  y termina al inicio del colapso, i.e.  $T_s = 0$ . A partir de ese momento comienza la segunda etapa, la cual durará hasta que el valor del radio de la estrella sea  $r_s = r_s^{(2)}$  a un tiempo  $T_s = T_s^{(2)}$ , en ese instante, el radio mínimo ha alcanzado su valor límite  $r_m = r_{mf}$ , el radio de la foto-esfera. La tercer y última etapa abarcará el resto del colapso en el cual el radio mínimo corresponde al valor límite  $r_{mf}$ . La descripción de la sombra dependerá de la posición del observador  $r_o$ , con respecto a la posición inicial de la superficie de la estrella. Para tal descripción, en el caso estático se consideran 3 posibilidades;  $r_o > r_i$ ,  $r_s^{(2)} < r_o \leq r_i$  y  $r_h < r_o \leq r_s^{(2)}$ . En los diagramas de la figura 6.1 se muestran las 3 etapas en las que se divide la observación del colapso, así como el radio inicial que tiene la estrella antes de colapsar y el radio  $r_s^{(2)}$ .

### 6.3.1. Observador en $r_o > r_i$

En la primer etapa, antes de comenzar el colapso, la superficie de la estrella está fija a  $r_s = r_i$ . A partir de la ecuación (6.35), el radio mínimo queda como  $r_m = r_i$ . Con este valor para  $r_m$  y fijando  $r = r_o$  en la ecuación (6.31), se tiene:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{r_i^3(r_o - 2M(r_o))}{r_o^3(r_i - 2M(r_i))}} \quad (6.36)$$

Por lo que el observador ve una sombra con un ángulo constante en toda la primer etapa. Esta etapa termina cuando comienza el colapso y los fotones que salen de  $r_m = r_i$  alcanzan al observador en  $r_o$ . Usando la ecuación (6.24)

con el signo positivo [\(6.31\)](#) de  $r = r_i$  a  $r = r_o$ , se llega a:

$$T_o^{(1)} = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sqrt{2M(r)r}}{r - 2M(r)} dr + \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sqrt{r^5(r_i - 2M(r_i))}}{(r - 2M(r))\sqrt{(r_i - 2M(r_i))r^3 - (r - 2M(r))r_i^3}} dr \quad (6.37)$$

donde  $T_o^{(1)}$  es el tiempo en que comienza la segunda etapa.

En la segunda etapa, la estrella colapsa y su sombra estará modelada a partir del radio mínimo por el que pasan los fotones. Este radio mínimo dependerá a su vez del radio en el que se encuentre la superficie de la estrella  $r_s$  a través de la ecuación [\(6.35\)](#). Siguiendo esta dependencia, la ecuación [\(6.31\)](#) con  $r = r_o$  queda como:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{r_i r_s^2 (r_o - 2M(r_o))}{r_o^3 (r_i - 2M(r_i))}} \quad (6.38)$$

A partir de la ecuación [\(6.24\)](#) se puede encontrar el tiempo que les toma a los fotones que salen a un radio  $r_s$  llegar al radio del observador  $r_o$ . Integrando, se obtiene:

$$T_o - T_s = \int_{r_s}^{r_o} \frac{\sqrt{2M(r)r}}{r - 2M(r)} dr + \int_{r_s}^{r_o} \frac{\sqrt{r^5(r_i - 2M(r_i))}}{(r - 2M(r))\sqrt{(r_i - 2M(r_i))r^3 - (r - 2M(r))r_i r_s^2}} dr \quad (6.39)$$

con  $T_s$  dado por la ecuación [\(6.34\)](#). Así, a partir de un valor fijo para el radio de la estrella se puede encontrar la relación entre el ángulo de la sombra  $\alpha$  y el tiempo  $T_o$  cuando los fotones llegan al observador.

La segunda etapa termina cuando el radio mínimo es igual al radio de la foto-esfera, i.e.  $r_m = r_{mf}$ , de modo que el radio de la estrella queda como

$r_s = r_s^{(2)}$ . Para ese radio, el tiempo  $T_o$  es:

$$T_o^{(2)} = T_s(r_s^{(2)}) + \int_{r_s^{(2)}}^{r_o} \frac{\sqrt{2M(r)r}}{r - 2M(r)} dr + \int_{r_s^{(2)}}^{r_o} \frac{\sqrt{r^5(r_i - 2M(r_i))}}{(r - 2M(r))\sqrt{(r_i - 2M(r_i))r^3 - (r - 2M(r))r_i r_s^{(2)2}}} dr \quad (6.40)$$

Finalmente, la tercera etapa comienza cuando el radio mínimo ha alcanzado el valor de  $r_{mf}$ . A partir de este momento, el radio mínimo que pueden alcanzar los fotones que salen de la fuente y llegan al observador es el radio de la esfera de fotones  $r_{mf}$ . En ese radio los fotones quedan haciendo espirales asintóticamente hasta que escapan al observador. Así, el ángulo de la sombra queda constante dado por la ecuación (6.31), fijando  $r = r_o$  y  $r_m = r_{mf}$ .

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{r_{mf}^3(r_o - 2M(r_o))}{r_o^3(r_{mf} - 2M(r_{mf}))}} \quad (6.41)$$

En las figuras 6.2 y 6.3 se observan los resultados del ángulo de la sombra para distintos casos con un observador estático.

### 6.3.2. Observador en $r_s^{(2)} < r_o \leq r_i$

A diferencia del caso anterior, al encontrarse en el interior de la estrella, la observación de la sombra sólo puede comenzar en el momento en que el radio de la superficie de la estrella sea menor que el radio en el que se encuentra el observador. Es por ello que las ecuaciones que definen a la sombra corresponderán a las vistas en la etapa 2 (ecs. (6.38) y (6.39)) y en la etapa 3 (ec. (6.41)).

En las figuras 6.4 y 6.5 se muestra la evolución de la sombra a través del tiempo  $T_o$  medido por el observador estático en  $r_s^{(2)} < r_o \leq r_i$  para diferentes valores de  $q_*$ .

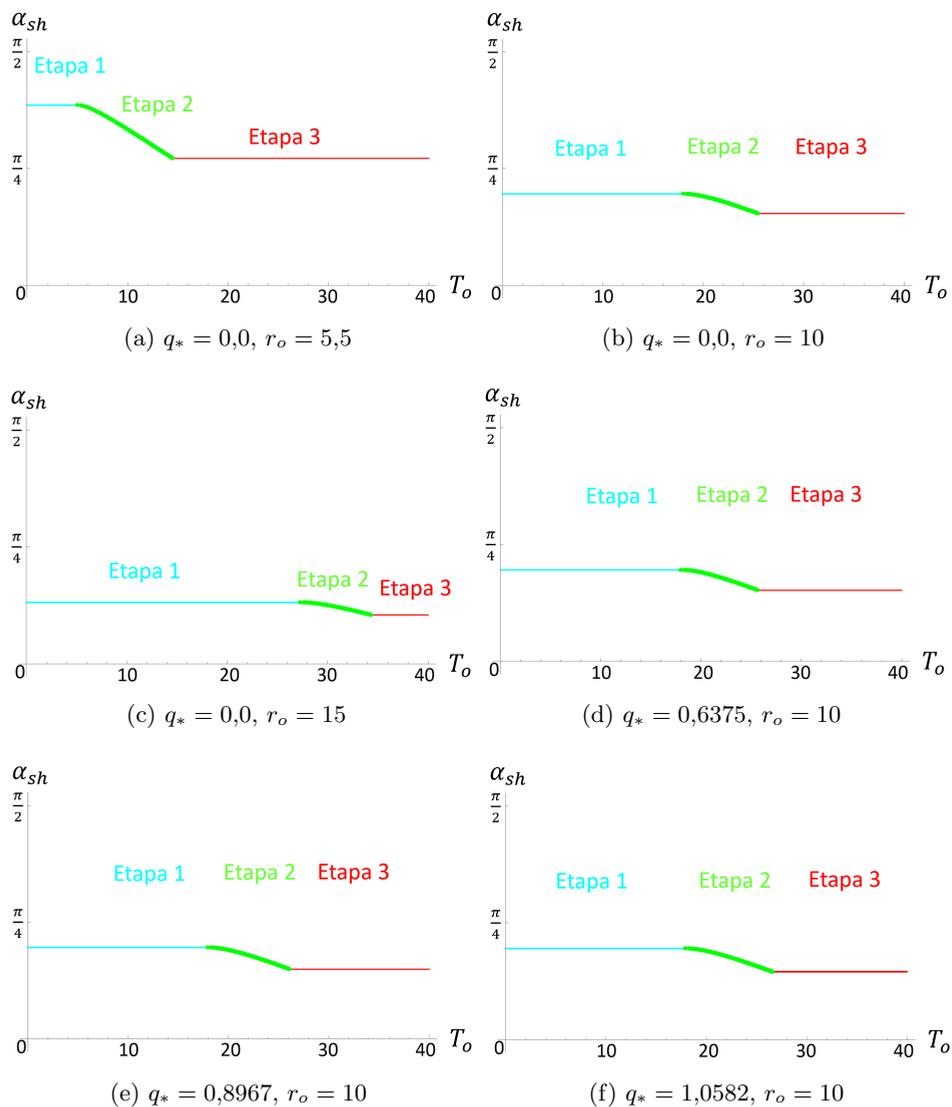


Figura 6.2: Gráficas del ángulo de la sombra  $\alpha_{sh}$  contra el tiempo  $T_o$  medido por el observador estático a  $r_o > r_i$  para diferentes valores de  $q_*$  y posiciones del observador. En todos los casos se tomó  $M_0 = 1$  y  $r_i = 5$ .

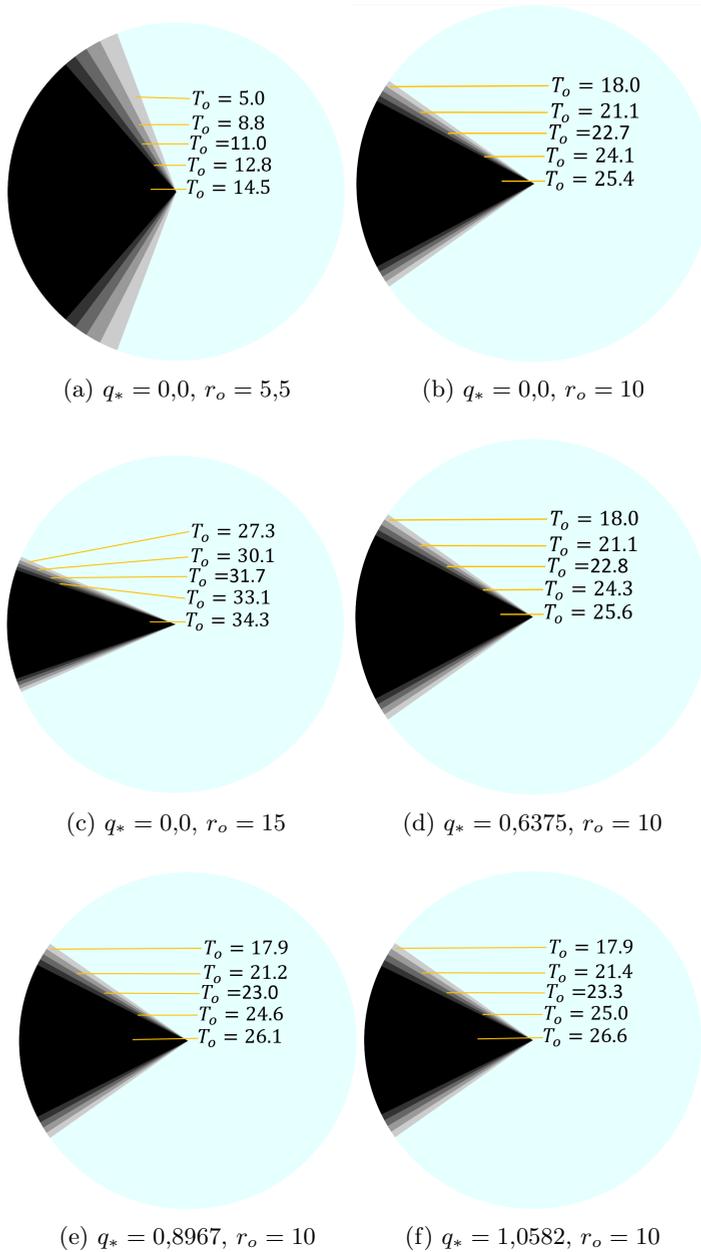


Figura 6.3: Diagramas del ángulo de la sombra para el caso estático para diferentes valores de  $q_*$  y  $r_o$ , se considera  $M_0 = 1$  y  $r_i = 5$ .

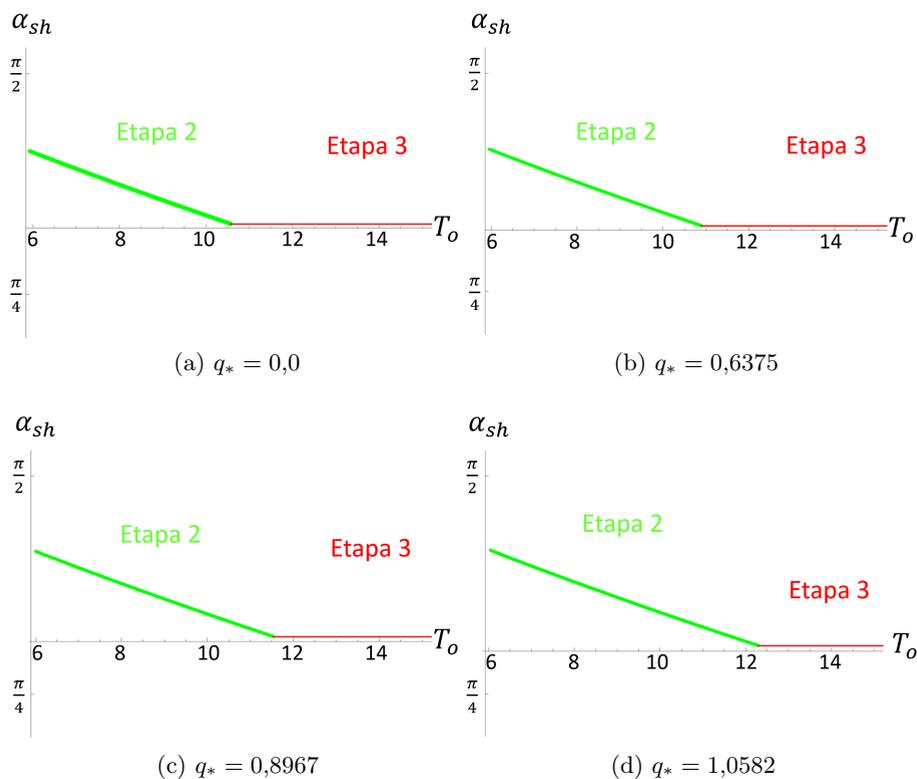


Figura 6.4: Gráficas del ángulo de la sombra  $\alpha_{sh}$  contra el tiempo  $T_o$  medido por el observador estático a  $r_o = 4,5$  para diferentes valores de  $q_*$ . En todos los casos se tomó  $M_0 = 1$  y  $r_i = 5$ .

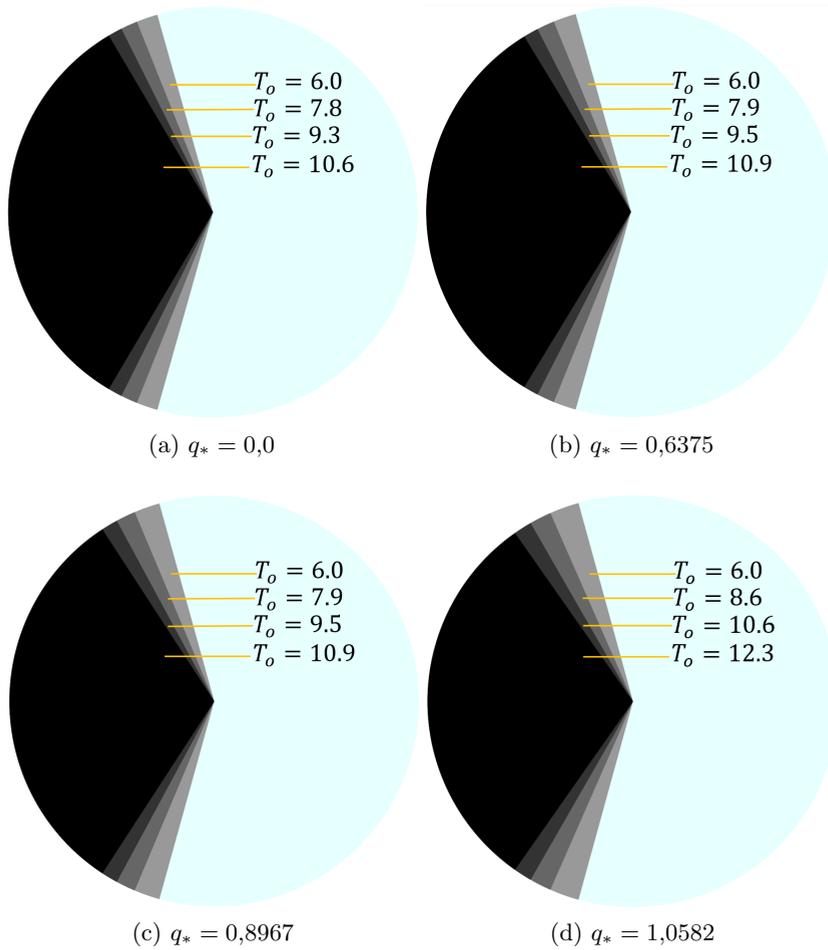


Figura 6.5: Diagramas del ángulo de la sombra para el caso estático para diferentes valores de  $q_*$ , se considera  $M_0 = 1$ ,  $r_o = 4,5$  y  $r_i = 5$ .

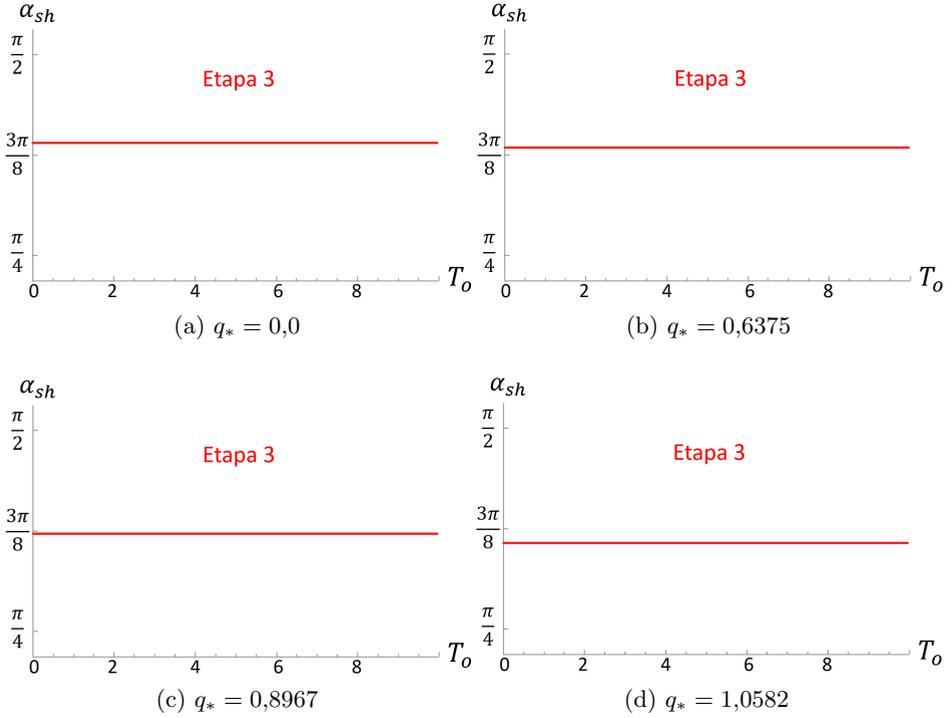


Figura 6.6: Gráficas del ángulo de la sombra  $\alpha_{sh}$  contra el tiempo  $T_o$  medido por el observador estático a  $r_o = 3,8$  para diferentes valores de  $q_*$ . En todos los casos se tomó  $M_0 = 1$  y  $r_i = 5$ .

### 6.3.3. Observador en $r_h < r_o \leq r_s^{(2)}$

Similar al caso para el observador anterior, la sombra estará únicamente dada por la ecuación (6.41) en el momento en que la superficie de la estrella cruza el radio del observador.

En las figuras 6.6 y 6.7 se observa el ángulo de la sombra  $\alpha_{sh}$  para diferentes valores de  $q_*$  cuando el observador estático está en  $r_h < r_o \leq r_s^{(2)}$ .

Resumiendo, cuando el observador estático se encuentra fuera del radio inicial de la estrella  $r_i$ , la observación de la sombra se divide en tres etapas; la primera etapa corresponde a los fotones que salen de la fuente antes de

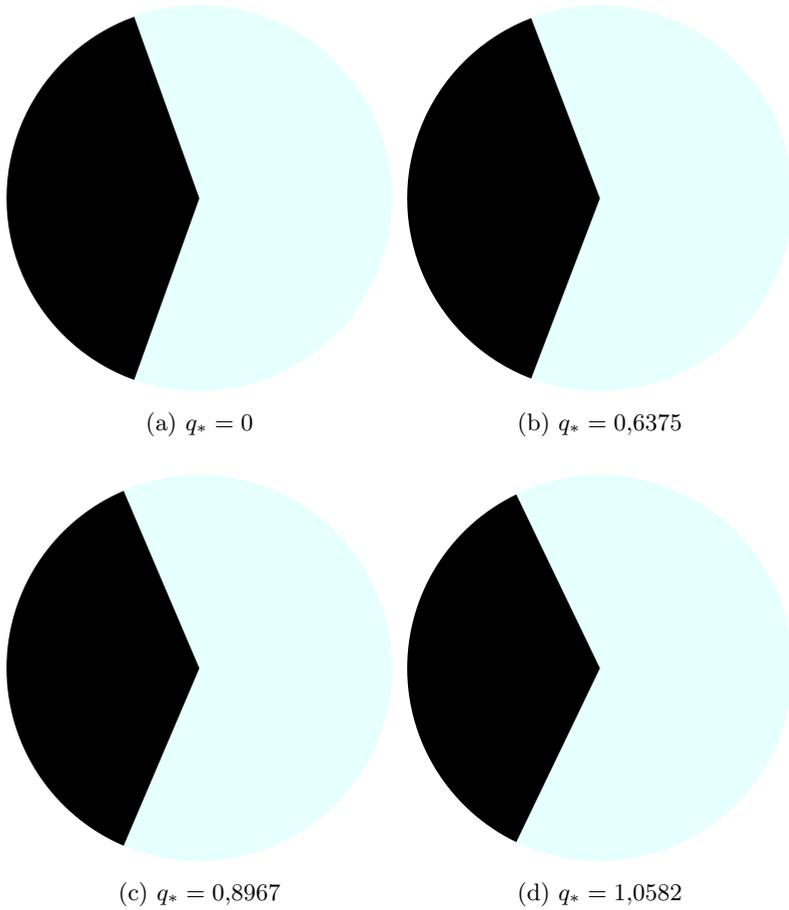


Figura 6.7: Diagramas del ángulo de la sombra para el caso estático para diferentes valores de  $q_*$ , se considera  $M_0 = 1$ ,  $r_o = 3,8$  y  $r_i = 5$ .

que comience al colapso y que alcanzan al observador, la segunda etapa abarca desde el inicio del colapso hasta que el radio mínimo por el que pueden dar vueltas los fotones ( $r_m$ ) es el valor de la foto-esfera ( $r_m = r_{mf}$ ) y la tercer etapa es para el resto del colapso.

En la primer etapa, el radio de la estrella permanece constante  $r_s = r_i$ . En la segunda etapa va de este radio inicial  $r_s = r_i$  hasta un radio  $r_s = r_s^{(2)}$ , el cual satisface la ecuación (6.35) con  $r_m = r_{mf}$ . Finalmente, en la tercer etapa el radio de la estrella  $r_s$  sigue disminuyendo pero deja de ser relevante para la observación de la sombra ya que el radio mínimo queda fijo a  $r_{mf}$ . Para este observador, el único cambio en la sombra ocurre en la segunda etapa del colapso, esto es cuando el radio mínimo  $r_m$  tiene un cambio de  $r_i$  a  $r_{mf}$ . Esto tiene sentido ya que los fotones que marcan el borde de la sombra siguen trayectorias circulares que dependen del tamaño de la estrella hasta llegar a ese radio mínimo límite (la foto-esfera).

En el caso de Schwarzschild para diferentes radios iniciales del observador, entre más cercano se encuentre el observador a la estrella, el ángulo de la sombra será mayor en cada una de las etapas. Además, el inicio de cada etapa comenzará antes lo cual tiene sentido ya que es menor el tiempo en llegar de la superficie de la estrella al observador.

Para los diferentes valores de  $q_*$ , entre mayor sea el valor de la carga de Hayward, el final de la segunda etapa ocurrirá a un  $T_o$  mayor, esto es debido a que el valor del radio de la foto-esfera es menor y, en consecuencia, los fotones alcanzan un radio menor en sus órbitas circulares. Debido a que esta segunda etapa termina en un tiempo mayor y el radio  $r_{mf}$  es menor, el ángulo que alcanza la sombra es también menor para una carga de Hayward  $q_*$  mayor.

Para los observadores estáticos en  $r_s^{(2)} < r_o \leq r_i$  sólo se observan las etapas 2 y 3. El valor de  $q_*$ , al igual que en el caso del observador fuera de la estrella, cambia el momento en que termina la segunda etapa, siendo de una duración más larga a un  $q_*$  mayor y alcanzando un ángulo de sombra menor en la última etapa.

Por último, los observadores estáticos en  $r_{mf} < r \leq r_s^{(2)}$  observan un ángulo de sombra constante en todo momento ya que el radio mínimo  $r_m$  es exactamente el radio de la foto-esfera. Este radio constante, como se explicó en los casos anteriores, será menor si el valor de  $q_*$  es mayor.

## 6.4. Observador en caída libre radial

La observación será dividida de igual manera en 3 etapas, las cuales serán bajo las mismas condiciones que en el caso anterior; la primera terminará cuando inicia el colapso, la segunda terminará cuando  $r_m = r_{mf}$  y la tercera tendrá un cambio de signo en la ecuación que modela el ángulo de la sombra cuando el radio del observador  $r_o = r_{mf}$ , a diferencia del caso anterior donde el ángulo de la sombra permanecía constante al iniciar esta etapa.

Para este análisis se considerará que el observador se encuentra en caída libre pero siempre fuera de la estrella en colapso, la cual tendrá un radio inicial  $r_i > r_{mf}$ . La relación entre el tiempo coordenado  $T_o$  medido por el observador y el radio  $r_o$  en el que se encuentra el mismo se puede obtener a partir de las ecuaciones (6.5) y (6.6).

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= -\frac{\varepsilon\sqrt{r^3} - \sqrt{2M(r)r}\sqrt{\varepsilon^2 r - r + 2M(r)}}{(r - 2M(r))\sqrt{\varepsilon^2 r - r + 2M(r)}} \\ T_o &= \int_{r_o}^{r_o^*} \frac{\varepsilon\sqrt{r^3} - \sqrt{2M(r)r}\sqrt{\varepsilon^2 r - r + 2M(r)}}{(r - 2M(r))\sqrt{\varepsilon^2 r - r + 2M(r)}} dr \end{aligned} \quad (6.42)$$

donde la segunda igualdad es gracias a que se identifica al observador en  $r = r_o^*$  cuando  $T_o = T_o^* = 0$ .

En los diagramas de espacio-tiempo de la figura 6.8 se muestra la evolución del colapso de la estrella de polvo a la par del observador en caída para  $M_0 = 1$ , un radio inicial del observador de  $r_o^* = 15$  y distintos valores de  $q_*$ .

Para la primer etapa, antes de que comience el colapso, la sombra estará determinada por la ecuación (6.32) con  $r = r_o$  y  $r_m = r_i$  como en el caso estático.

$$\sin \tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{1 - 2M(r_o)/r_o}\sqrt{\mathcal{R}(r_o, r_i)}}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r_o)/r_o}\sqrt{1 - \mathcal{R}(r_o, r_i)}} \quad (6.43)$$

Dependiendo de la posición del observador, la sombra del agujero negro cambiará de tamaño. Al final de esta etapa el observador termina en  $r_o = r_o^*$ .

En la segunda etapa, se usa la misma ecuación para encontrar el tiempo

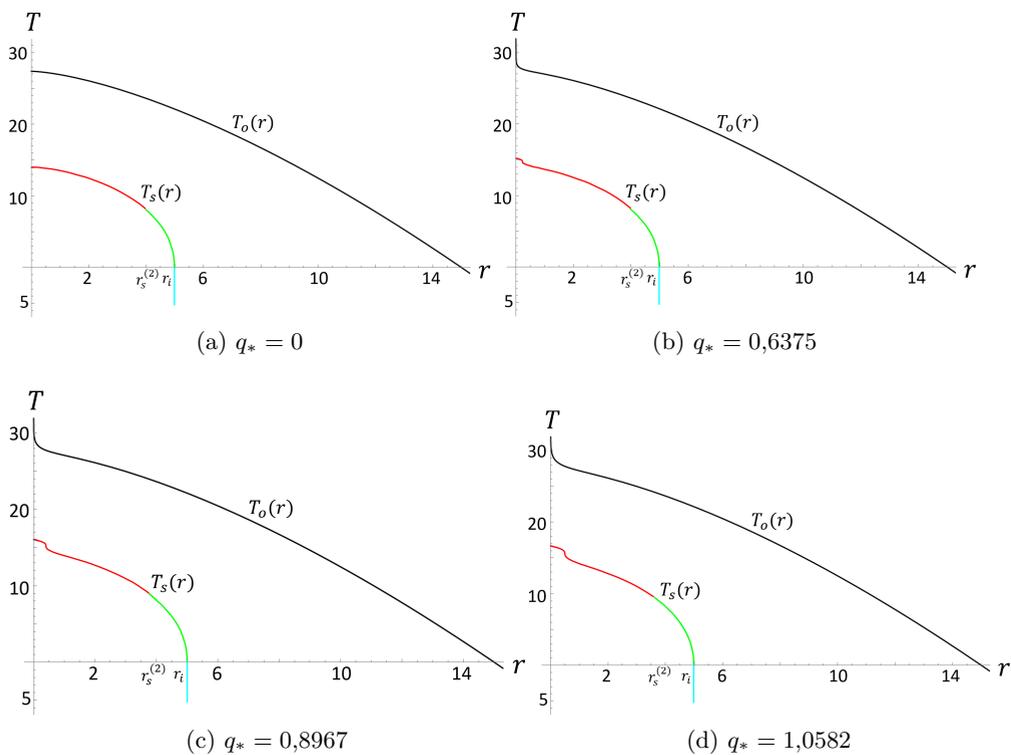


Figura 6.8: Diagramas de espacio-tiempo del colapso de polvo esférico para diferentes valores de  $q_*$ . En todos los casos se tomó  $M_0 = 1$  y se considera un observador cayendo con  $\varepsilon = 1$  (reposo en el infinito) y que pasa por  $r_o^* = 15$  a  $T_o^* = 0$ .

del observador (ec. (6.39)), pero en este caso el tiempo del observador  $T_o$  está dado por la ecuación (6.42) y depende de la posición del mismo. De este modo, se obtiene una ecuación que relaciona el radio del observador  $r_o$  con el radio de la estrella  $r_s$ . Por otro lado, usando la ecuación (6.32) con  $r_m$  dada por (6.35) y  $r = r_o$  se obtiene una ecuación que, para un  $r_s$  fijo, establece la relación entre el ángulo de la sombra y el valor de  $r_o$ . Usando ambas ecuaciones se puede modelar el ángulo de la sombra  $\tilde{\alpha}$  con respecto del radio del observador  $r_o$  variando el radio de la estrella  $r_s$ . Esta segunda etapa abarca desde  $r_s = r_i$  hasta  $r_s = r_s^{(2)}$ .

La tercera etapa comienza cuando  $r_m = r_{mf}$ , la sombra será en este caso dada por la ecuación (6.32), con  $r = r_o$ :

$$\sin \tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{1 - 2M(r_o)/r_o} \sqrt{\mathcal{R}(r_o, r_{mf})}}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r_o)/r_o} \sqrt{1 - \mathcal{R}(r_o, r_{mf})}} \quad (6.44)$$

Finalmente, una vez que el observador traspase  $r_o = r_{mf}$ , la ecuación (6.32) tendrá un cambio de signo, resultando en la ecuación:

$$\sin \tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{1 - 2M(r_o)/r_o} \sqrt{\mathcal{R}(r_o, r_{mf})}}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + 2M(r_o)/r_o} \sqrt{1 - \mathcal{R}(r_o, r_{mf})}} \quad (6.45)$$

Esta etapa durará hasta que el observador llegue a  $r_o = r_h$ . Este cambio de signo es debido a que en la ecuación (6.23), cuando  $r = r_{mf}$ ,  $dr/d\varphi = 0$ . Esto implica que a partir de ese radio  $dr/d\varphi$  cambia de positivo a negativo. En la figura 6.9 se muestran las 3 etapas del modelado de la sombra del agujero negro para  $q_* = 0$  partiendo de dos valores distintos de  $r_o^*$ . Así mismo, en la figura 6.10 se muestra la sombra del colapso para diferentes valores de  $q_*$  a un radio inicial del observador de  $r_o^* = 15$ . En las tablas donde se muestran las sombras para cierto radio  $r_o$  en las figuras 6.9 y 6.10, el color de la sombra está asociado al tamaño del ángulo de la misma, esta escala de grises se encuentra a la derecha en donde están señalados el ángulo mínimo y máximo que puede tomar el ángulo de la sombra con su respectivo color (blanco y negro).

A partir de estas figuras se puede notar que, en el caso de los observadores en caída libre para Schwarzschild, las etapas 1 y 3 tienen el mismo comportamiento sin importar el cambio de  $r_o^*$ . Esto es debido a que las ecuaciones (6.43), (6.44) y (6.45) son independientes de la posición del

observador en  $T_o^*$  y depende de valores fijos como lo son  $r_i$ ,  $r_{mf}$  o  $\varepsilon$ . La diferencia entre las gráficas es el momento en que comienza y termina la segunda etapa. Esto se encuentra determinado por el radio  $r_o^*$  ya que la ecuación para encontrar el tiempo coordenado medido por el observador  $T_o$  está en términos de este dato (ver ec. (6.42)). A partir de esta dependencia, el radio del observador  $r_o$  queda en términos de  $r_o^*$ ,  $r_s$  y  $r_i$ , por lo que el ángulo de la sombra (ver ec. (6.32)) queda también afectada por  $r_o^*$ . Conforme el valor de  $r_o^*$  sea mayor, el inicio y fin de la segunda etapa será a un radio menor. El cambio en el ángulo de la sombra de la primer etapa a la segunda se debe al cambio en el radio mínimo  $r_m$  que tiene la estrella en el colapso hasta quedar fijo al inicio de la tercer etapa y retomando el crecimiento esperado en el ángulo de la sombra, terminando en el mismo valor angular para  $r_o = r_h$ .

Considerando la carga de Hayward distinta de cero, esta tiene un efecto en la sombra cada vez más notorio conforme el colapso avanza. El comienzo de la tercer etapa ocurre a un radio menor debido a que el radio de la fotosfera disminuye si  $q_*$  es mayor, es por ello que la sombra alcanza un ángulo más pequeño al final de la segunda etapa. Además, al final de la tercera etapa el ángulo de la sombra disminuirá su crecimiento pudiendo inclusive reducir de tamaño si la carga de Hayward es lo suficientemente grande, dejando un máximo local y terminando con un ángulo para la sombra menor (ver el caso con  $q_* = 1,0583$ ). Esto puede deberse al frenado que se impone en el colapso para el agujero negro de Hayward, con este término amortiguando la contracción gravitacional y mostrando una especie de efecto de repulsión que se manifiesta en la sombra que ve el observador.

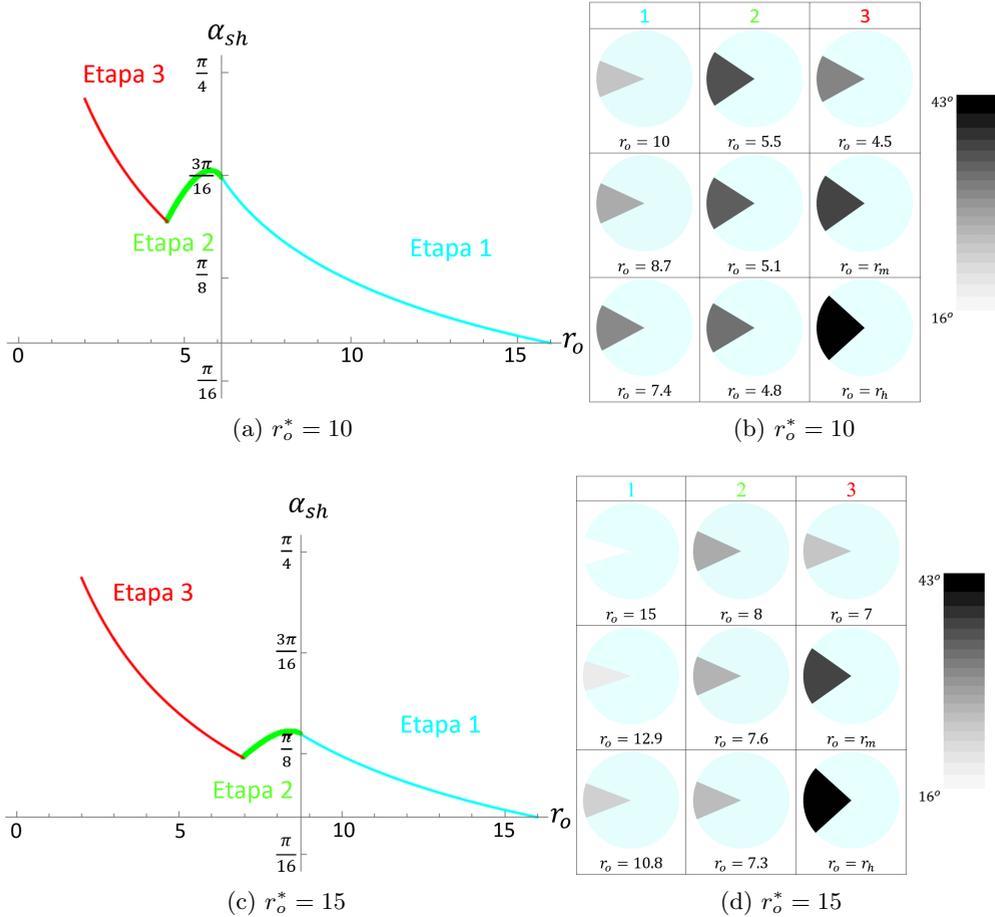


Figura 6.9: Gráficas del colapso de polvo esférico para  $q_* = 0,0$ . Del lado izquierdo se encuentran las gráficas para el ángulo de la sombra  $\alpha_{sh}$  contra el radio del observador  $r_o$ , mientras que del lado derecho están las sombras para un cierto radio  $r_o$  en una de las etapas del colapso indicado en la parte superior de la tabla. En todos los casos se tomó  $M_0 = 1$  y  $\varepsilon = 1$ .

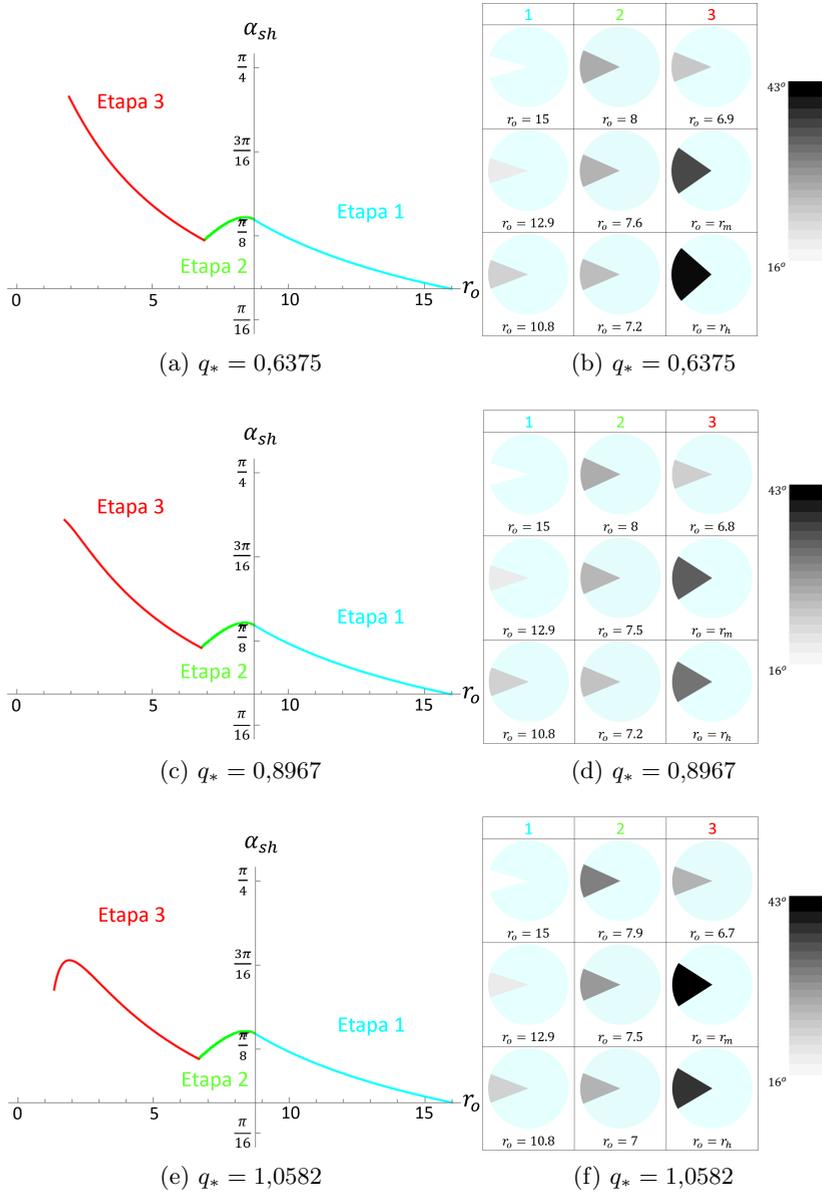


Figura 6.10: Gráficas del colapso de polvo esférico para  $r_o^* = 15$ . Del lado izquierdo se encuentran las gráficas para el ángulo de la sombra  $\alpha_{sh}$  contra el radio del observador  $r_o$ , mientras que del lado derecho están las sombras para un cierto radio  $r_o$  en una de las etapas del colapso indicado en la parte superior de la tabla. En todos los casos se tomó  $M_0 = 1$  y  $\varepsilon = 1$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

En la actualidad, los agujeros negros son objetos muy estudiados debido a que proporcionan escenarios difíciles de encontrar en algún otro lugar del Universo. Gracias a las observaciones realizadas en los últimos años de estos objetos es que se ha comenzado a comparar los datos obtenidos con los modelos teóricos que se han desarrollado en las últimas décadas. En la búsqueda de modelos más “realistas” de estos objetos compactos es que surge la idea de los agujeros negros regulares, los cuales carecen de una singularidad central. El espacio-tiempo de Hayward es un espacio-tiempo regular que puede ser obtenido a partir de considerar el colapso de polvo esférico homogéneo, imponiendo al final del colapso un tensor de energía-momento que viola la condición de energía fuerte, de modo que una de las condiciones del teorema de singularidades no se satisface. Otra manera de obtener este espacio-tiempo es a partir de las ecuaciones de campo de Einstein y considerando un tensor de energía-momento proveniente de la electrodinámica no lineal.

En el presente trabajo, se mostró la evolución del ángulo de la sombra producida durante el colapso de una estrella en el espacio-tiempo regular de Hayward a través de un método analítico sin un gran gasto computacional. Este método nos permite visualizar el ángulo de la sombra a lo largo del tiempo coordinado medido por un observador estático y dependiente del radio de un observador en caída radial. La estrella se asume que es opaca y oscura. Gracias a que es oscura los fotones que atraviesan un radio mínimo  $r_m$  no escapan al observador y debido a que es opaca, el modelado

sólo requiere de la métrica en el exterior del borde de la estrella, que en nuestro caso es la de Hayward.

Para un observador estático fuera de la estrella, el comportamiento de la sombra se divide esencialmente en tres etapas. La primer y tercer etapa mantienen un ángulo de la sombra constante ya que el radio mínimo  $r_m$  queda de igual modo constante tal que obedece la ecuación (6.35). El cambio en el ángulo de la sombra es en la segunda etapa donde el radio de la estrella  $r_s$ , así como el radio mínimo  $r_m$  va disminuyendo conforme pasa el tiempo, lo cual es de esperarse gracias al colapso de la estrella. El término de la segunda etapa e inicio de la tercera depende del valor de  $q_*$  ya que el radio de la foto-esfera depende del mismo. Para un valor de  $q_*$  mayor, la segunda etapa termina en un tiempo más tardío y causa que el ángulo de la sombra llegue a un valor menor. Para observadores entre el radio de la foto-esfera y el radio inicial de la estrella, la evolución de la sombra comienza en la segunda etapa una vez que el radio de la estrella es menor al del observador. Para un observador entre el radio del horizonte y el radio de la foto-esfera, el valor del ángulo de la sombra es constante y depende del radio de la esfera de fotones.

En el caso de un observador en caída radial, presentará también tres etapas dependientes del valor del radio mínimo  $r_m$ . A diferencia de un observador estático, en este tipo de observador se ve un cambio en el ángulo de la sombra al final de la tercer etapa. La relación entre la carga de Hayward  $q_*$  y el ángulo de la sombra es que: “conforme la carga de Hayward sea mayor, el ángulo de la sombra comenzará a disminuir cada vez más cerca del final de la tercer etapa”. Esta disminución en el ángulo que mide el observador es atribuido al frenado que causa la carga de Hayward cerca de  $r = 0$  y que evita la formación de la singularidad durante el colapso.

Los resultados presentados en esta tesis nos dan una nueva visión acerca de la evolución del colapso para los agujeros negros regulares, dejando ver el efecto que tiene el frenado en la sombra medida por el observador. Una propuesta para un trabajo posterior es considerar un modelo que incluya rotación en el colapso en un espacio-tiempo regular siguiendo la derivación que se realizó en este trabajo, haciendo los cambios necesarios. Otra propuesta de investigación sería trabajar en el régimen en que el radio en el que se encuentra el observador en caída libre sea menor que el radio de la superficie de la estrella ya que en la realización de este trabajo, el observa-

dor siempre se encuentra en el exterior.

La sombra de los agujeros negros es un tema de investigación recurrente en la comunidad científica ya que las observaciones que se han hecho (Event Horizon Telescope [4]) y que se harán en un futuro pueden ser comparados a través de los modelos teóricos de la sombra. La comprensión de este tipo de objetos (los agujero negros) es de gran relevancia en la actualidad y es uno de los candidatos en la búsqueda de una teoría que logre unificar la teoría de la relatividad con la física cuántica.



# Apéndice A

## Agujeros negros regulares y NLED

Una manera de modelar un agujero negro regular con la forma de la métrica (2.8) es acoplando electrodinámica no-lineal (NLED) con la teoría de relatividad general. El lagrangiano de la electrodinámica no-lineal se escribe como (14):

$$\mathcal{L}_{NLED} = \frac{-4\mu}{\alpha} \frac{(\alpha F)^{(\nu+3)/4}}{(1 + (\alpha F)^{\nu/4})^{1+\mu/\nu}} \quad (\text{A.1})$$

con  $\alpha$  el parámetro de acoplamiento y  $\mu, \nu$  constantes. En un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático, como en (5.13), se puede considerar al tensor de Faraday  $F_{\alpha\beta}$  como:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B(\theta) \\ 0 & 0 & B(\theta) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Es de esa forma debido a que no debe existir dependencia en  $t$  por estaticidad ni en  $r$  al no ser un campo eléctrico. Además, este tensor obedece las ecuaciones de campo de Maxwell:

$$\nabla_{\mu} \mathcal{L}_F F^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Resolviendo para  $B(\theta)$ , se obtiene:

$$B(\theta) = Q \sin(\theta) \quad (\text{A.4})$$

con  $Q$  una constante que representa la carga que produce el campo que satisface las ecuaciones de Maxwell.

El tensor de energía-momento tiene que deberse únicamente a la parte de NLED para poder considerar una solución de vacío en el exterior. De este modo y siguiendo la ecuación (3.13), el tensor de energía momento se ve como:

$$T_{\kappa\lambda} = \partial_F \mathcal{L}_{NLED} F_{\kappa}^{\sigma} F_{\lambda\sigma} - \frac{1}{4} g_{\lambda\kappa} \mathcal{L}_{NLED} \quad (\text{A.5})$$

En este caso las ecuaciones de campo se escribirán como  $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ . Resolviendo para  $M(\mathcal{R})$  en las ecuaciones de campo dadas por (5.14) y (5.15), se obtiene:

$$M(\mathcal{R}) = (\alpha Q^2)^{3/4} \frac{-1 + (1 + (\frac{2\alpha Q^2}{\mathcal{R}^4})^{\nu/4})^{-\mu/\nu}}{\alpha 2^{1/4}} + c_1 \quad (\text{A.6})$$

Definiendo  $c_1 = (\frac{Q^2}{2\alpha})^{1/4} = M_0$ ,  $q_* = (2\alpha Q^2)^{1/4}$ , se llega a:

$$M(\mathcal{R}) = \frac{M_0 \mathcal{R}^{\mu}}{(\mathcal{R}^{\nu} + q_*^{\nu})^{\mu/\nu}} \quad (\text{A.7})$$

Cuando se fijan las constantes  $\mu = \nu = 3$  se obtiene la métrica de Hayward para este espacio-tiempo.

# Bibliografía

- [1] S. Soter, N. Tyson, and A. M. of Natural History, *Cosmic Horizons: Astronomy at the Cutting Edge*. American Museum of Natural History book, New Press, 2001.
- [2] S. Chandrasekhar, “The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs,” , vol. 74, p. 81, July 1931.
- [3] J. R. Oppenheimer and H. S. Snyder, “On continued gravitational contraction,” *Physical Review*, vol. 56, pp. 455–459, 1939.
- [4] E. H. T. Collaboration, “First M87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, p. L1, apr 2019.
- [5] K. Schwarzschild, “On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory,” 1999.
- [6] K. Espinosa de los Monteros, *Regular Black Holes and Non-linear Electrodynamics*. PhD thesis, Universidad Yachay Tech, 2021.
- [7] S. Kalita and L. Sarmah, “Weak-field limit of  $f(r)$  gravity to unify peculiar white dwarfs,” *Physics Letters B*, vol. 827, p. 136942, 2022.
- [8] S. Ramos-Sánchez, *Relatividad para futuros físicos*. México: Copit-Arxives, 2018.
- [9] Y. Kanai, M. Siino, and A. Hosoya, “Gravitational collapse in painlevé-gullstrand coordinates,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 125, pp. 1053–1065, may 2011.

- [10] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [11] S. Schneider and V. Perlick, “The shadow of a collapsing dark star,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 50, may 2018.
- [12] J. L. Synge, “The Escape of Photons from Gravitationally Intense Stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 131, pp. 463–466, 02 1966.
- [13] J. Dar, “Mass limit of neutron star,” *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, vol. 04, pp. 414–418, 01 2014.
- [14] D. Malafarina and B. Toshmatov, “Connection between regular black holes in nonlinear electrodynamics and semiclassical dust collapse,” *Physical Review D*, vol. 105, jun 2022.
- [15] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd ed., June 2009.
- [16] M. Alcubierre, J. C. Degollado, and M. Salgado, “Einstein-Maxwell system in Einstein-Maxwell system in 3+1 form and initial data for multiple charged black holes,” *Physical Review D*, vol. 80, nov 2009.
- [17] S. Capozziello, S. Nojiri, and S. Odintsov, “The role of energy conditions in  $f(r)$  cosmology,” *Physics Letters B*, vol. 781, pp. 99–106, jun 2018.
- [18] B. Datt, “Über eine Klasse von Lösungen der Gravitationsgleichungen der Relativität,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 108, pp. 314–321, May 1938.
- [19] J. C. Degollado, “Lecture notes in relativity,” April 2022.
- [20] R. Penrose, “Gravitational collapse and space-time singularities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 14, pp. 57–59, 1965.
- [21] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.

- [22] E. Altas and B. Tekin, “Basics of apparent horizons in black hole physics,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2191, p. 012002, feb 2022.
- [23] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time: 50th Anniversary Edition*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2023.
- [24] S. A. Hayward, “Formation and evaporation of nonsingular black holes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 031103, Jan 2006.
- [25] J. M. Bardeen, “Proceedings of the international conference gr5,” 1968.
- [26] Z.-Y. Fan and X. Wang, “Construction of regular black holes in general relativity,” *Physical Review D*, vol. 94, dec 2016.
- [27] M. E. Rodrigues and M. V. de S. Silva, “Bardeen regular black hole with an electric source,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, p. 025, jun 2018.
- [28] D. P. Sorokin, “Introductory Notes on Non-linear Electrodynamics and its Applications,” *Fortsch. Phys.*, vol. 70, no. 7-8, p. 2200092, 2022.
- [29] F. Shojai, A. Sadeghi, and R. Hassannejad, “Generalized Oppenheimer–Snyder gravitational collapse into regular black holes,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 39, p. 085003, mar 2022.
- [30] A. B. Nielsen and A. A. Shoom, “Conformal killing horizons and their thermodynamics,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 35, p. 105008, apr 2018.
- [31] K. A. Bronnikov, “Nonlinear electrodynamics, regular black holes and wormholes,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 27, p. 1841005, apr 2018.
- [32] M. Born and L. Infeld, “Foundations of the new field theory,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 144, no. 852, pp. 425–451, 1934.

- [33] A. B. Nielsen and D.-H. Yeom, “Spherically symmetric trapping horizons, the Misner–Sharp mass and black hole evaporation,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 24, pp. 5261–5285, nov 2009.
- [34] T. Bronzwaer and H. Falcke, “The nature of black hole shadows,” *The Astrophysical Journal*, vol. 920, p. 155, oct 2021.