



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio estocástico de dos modelos epidemiológicos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuaria

PRESENTA:

Nancy Carolina Aburto Hernández

TUTOR

Dr. Fernando Baltazar Larios

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Felisa Luna,  
la luz de mi infancia.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a mis padres Nancy Hernández y José Aburto, quienes me enseñaron el valor del sacrificio / del amor y a defender mis principios. Gracias por nunca dejarme *romper* y guiarme con su gran amor día con día. A ti, mamá, por dedicarme todo tu tiempo y siempre impulsarme a crecer. A ti, papá, por ser un gran ejemplo, por ser mi persona favorita y siempre estar a mi lado para reconfortarme con un abrazo.

A mi hermana Cynthia Aburto, mi compañera de vida, por brindarme constantes alegrías y ser mi confidente, por darle sentido a mi vida y enseñarme la importancia de abogar por el antiespecismo.

A mis abuelas Felisa Luna y Rosa Mendoza, las primeras mujeres a quien admiro profundamente y quien por ellas soy una mujer capaz e independiente.

A mi abuelo Juan Hernández, quien desde mi infancia creyó en mí y quien compartía mi entusiasmo por pertenecer a la Facultad de Ciencias. Donde quiera que estés, este logro también es por ti y para ti, te amo.

Al Dr. Fernando Baltazar, por el tiempo y conocimiento compartido, por los correos que me ayudaron e impulsaron a concluir este trabajo.

A Julio Nava, por las valiosas tardes de códigos, orientarme en los primeros pasos para este trabajo y por las increíbles recomendaciones literarias.

A mis sinodales: Dra. Sandra Palau, Dra. Lizbeth Naranjo, Dra. Judith Rodríguez y al M. Salvador Zamora, por tomarse el tiempo de leerme y por sus valiosas recomendaciones, también les agradezco la motivación que me transmitieron en las aulas de la Facultad de Ciencias.

A Edwin Anzures, quién me enseñó a creer en mí y mis sueños, por sostenerme en tiempos de tristeza y transformarlos en un grandioso poemario, por esos momentos acompañados de poesía, whisky y tabaco. Gracias por enseñarme el valor de la amistad y siempre escucharme, te quiero mucho *rat*.

A Sergio Roberto, por hacerme sentir cómoda con mis propios pensamientos y no acallarlos, por reconocerme como una neurodivergente valiosa y admirable, por las interesantes charlas sobre matemáticas, *software libre*, psicoanálisis Lacaniano y tus pensamientos revolucionarios: *Me gustaría que algún día el significado regrese a las palabras*.

A mis amistades quiénes nos unió las matemáticas y recorrimos grandiosas aventuras en los pasillos de la facultad: Javier Barboza, Ana Gabriela, Enki Alonso, Christian Solis, Martín, Sandra, Marco, Carlos, Javier, Erick, Samantha, Leonardo, Elizabeth, Félix.

A la Facultad de Ciencias, por darme esta grandiosa oportunidad que le dio sentido a la vida misma.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>i</b>
<b>1. Procesos de Saltos de Markov</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	1
1.1.1. Generador infinitesimal . . . . .	5
1.1.2. Distribución estacionaria y límites de probabilidades . . . . .	7
1.2. Ejemplos . . . . .	9
1.2.1. Proceso de nacimiento-muerte . . . . .	9
1.2.2. Proceso de Poisson . . . . .	11
1.3. Simulación del PSM . . . . .	12
1.3.1. Algoritmo . . . . .	12
1.3.2. Implementación del algoritmo . . . . .	13
1.4. Puentes de Markov . . . . .	15
1.4.1. Ejemplo . . . . .	17
<b>2. Inferencia estadística para PSM</b>	<b>19</b>
2.1. Inferencia estadística para PSM con información a tiempo continuo . . . . .	19
2.1.1. Propiedades asintóticas . . . . .	20
2.2. Inferencia estadística para PSM con información a tiempo discreto . . . . .	22
2.3. Ejemplo . . . . .	23
<b>3. Modelos epidemiológicos</b>	<b>25</b>
3.1. Modelo epidemiológico SIS . . . . .	25
3.1.1. Modelo determinista SIS . . . . .	25

3.1.2. Modelo SIS como un PSM . . . . .	26
3.1.3. Ejemplo . . . . .	27
3.2. Modelo epidemiológico SIR . . . . .	28
3.2.1. Modelo determinista SIR . . . . .	29
3.2.2. Modelo SIR como un PSM . . . . .	30
<b>4. Conclusión</b>	<b>33</b>
<b>A. Códigos de R</b>	<b>34</b>

# Introducción

La modelación estocástica nos permite describir fenómenos bajo situaciones de variabilidad e incertidumbre permitiéndonos visualizar el modelo como una simplificación de la realidad, esto con la intención de predecir el fenómeno e inferir estadísticamente sus parámetros. La epidemiología se encarga del estudio de la distribución de enfermedades o problemas relacionados a la salud en una población, por esta razón utilizaremos la modelación estocástica, con el fin de analizar el fenómeno de una enfermedad infecciosa, observar su evolución a través del tiempo y hacer inferencia respecto a sus parámetros.

En este trabajo estudiaremos dos modelos epidemiológicos: SIS (Susceptible-Infectado-Susceptible) y SIR (Susceptible-Infectado-Recuperado), estos modelos matemáticos deterministas diseñan la evolución de alguna enfermedad infecciosa a través del tiempo bajo un sistema de ecuaciones diferenciales, sin embargo para aproximar el modelo a la realidad estudiaremos ambos modelos con aleatoriedad, es decir, los observaremos como un Proceso de saltos de Markov.

Con el objetivo de aproximar el fenómeno de manera natural haciendo uso de la aleatoriedad primero estudiaremos teóricamente los Procesos de saltos de Markov (Capítulo 1) para luego simular estocásticamente su comportamiento, de igual manera estudiaremos la teoría sobre la inferencia estadística (Capítulo 2) para la estimación de tasas de contagio y recuperación (considerando muestras a tiempo continuo y a tiempo discreto), con el motivo de ver qué tan próximas son.

Finalmente en el Capítulo 3 nos dedicaremos a estudiar los modelos epidemiológicos y su modelación matemática con base a la teoría desarrollada en el Capítulo 1 y Capítulo 2, exponiendo ejemplos junto a simulaciones de ambos modelos que nos permitan analizar la proximidad de las tasas estimadas con las tasas puntuales.





# Capítulo 1

## Procesos de Saltos de Markov

En este capítulo presentaremos la teoría de procesos de saltos de Markov necesaria para el desarrollo del trabajo. Expondremos los conceptos principales, las características y propiedades necesarias de los procesos de saltos de Markov esto con la intención de construir el algoritmo que simule trayectorias de estos procesos, de la misma manera analizaremos ejemplos. Finalmente incluiremos teoría necesaria que nos ayudará a la comprensión de los siguientes capítulos. Los resultados reunidos para este capítulo fueron tomados de [2], [3], [5] y [9].

### 1.1. Conceptos básicos

Los procesos de saltos de Markov han servido como herramienta en diversas áreas como Finanzas, Biología, Genética y Epidemiología, debido a su versatilidad para modelar fenómenos cuyo futuro no depende del pasado condicionado a su estado en el presente. Comenzaremos con una construcción intuitiva del proceso hilando las características importantes de éste.

Consideremos procesos estocásticos a tiempo continuo, un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  para todas las variables aleatorias vistas en el capítulo y espacio de estados  $E$  discreto (finito o numerable). Los procesos estocásticos de nuestro interés son los procesos que cumplan la propiedad de Markov y sean homogéneos en el tiempo.

Comencemos dando la definición formal de la propiedad de Markov y un proceso homogéneo en el tiempo:

**Definición 1.1.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico con espacio de estados  $E = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . Decimos que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  satisface la propiedad de Markov si:

$$P(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_0} = i) = P(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}),$$

para todo  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  e  $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j \in E$ .

**Definición 1.2.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso que satisface la propiedad de Markov. Decimos que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es homogéneo en el tiempo si satisface:

$$P(X_t = j | X_0 = i) = P(X_{t+s} = j | X_s = i)$$

para cualesquiera  $t, s \in \mathbb{R}^+$  e  $i, j \in E$ .

Para estudiar la evolución en el tiempo del proceso haremos referencia a las probabilidades de transición  $p_{ij}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$  con  $i, j \in E$  y  $t \geq 0$ . Es conveniente estudiar a la matriz  $P(t) \in \mathbb{M}_{N \times N}$ <sup>1</sup> con entradas  $p_{ij}(t)$ ,  $i, j \in E, t \geq 0$ , a la cual llamaremos matriz estocástica o matriz de transición, que satisface:

- i.  $p_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall i, j \in E, t \geq 0$ ,
- ii.  $\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$  para toda  $i \in E, t \geq 0$ .

La familia  $\{P(t)\}_{t \geq 0}$  es llamada semigrupo de transición de un proceso de Markov, así añadiremos también la siguiente definición.

**Definición 1.3.** La familia  $\{P(t)\}_{t \geq 0}$  es un semigrupo estocástico si satisface:

- i.  $P(0) = Id$ <sup>2</sup>.
- ii.  $P(t)$  es una matriz estocástica, es decir que cumple las propiedades i. y ii.
- iii. La ecuación de Chapman-Kolmogorov,  $P(s+t) = P(s)P(t)$ ,  $s, t \geq 0$ .

Adicionalmente pediremos que el semigrupo sea estándar, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Así

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad \text{donde } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Nótese que el semigrupo  $\{P(t)\}_{t \geq 0}$  es estándar si y sólo si  $p_{ij}(t)$  son funciones continuas por la derecha de  $t$ . Esta característica se hereda por el proceso estocástico a tiempo continuo, lo que no sucedería para procesos a tiempo discreto.

Que  $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$  nos dice que si el tiempo no pasa entonces el proceso no se mueve, así con esta condición y el semigrupo estándar garantizamos que las trayectorias de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  sean funciones continuas por la derecha y como  $E$  es un espacio de estados discreto entonces  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  son funciones escalonadas, es decir,  $\forall \omega \in \Omega$  y  $t \geq 0$ , existen  $i_0, i_1, i_2, \dots$  con  $i_k \neq i_{k+1}$  y  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  tales que:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} i_0 & \text{si } 0 \leq t < t_1, \\ i_1 & \text{si } t_1 \leq t < t_2, \\ i_2 & \text{si } t_2 \leq t < t_3, \\ i_3 & \text{si } t_3 \leq t < t_4, \\ \vdots & \\ i_j \neq i_k, & \end{cases}$$

entonces  $t_1, t_2, t_3, \dots$  son los tiempos de salto, y por este hecho se da el nombre de procesos de saltos de Markov.

<sup>1</sup> $\mathbb{M}_{N \times N}$  es la matriz cuadrada.

<sup>2</sup>Id es la matriz identidad N-dimensional.

**Definición 1.4.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Markov a tiempo continuo con espacio de estados discreto  $E$ , con inicio en el estado  $i_0$  al tiempo  $t_0 = 0$ . Decimos que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de saltos de Markov (PSM) si permanece en ese estado  $i_0$  hasta un tiempo posterior  $t_1 > t_0$  cuando hace una transición a un estado diferente  $i_1 \neq i_0$ , y así sucesivamente. Entonces si  $t_0, t_1, \dots$  es el conjunto de tiempos de salto,  $X_t = i_0$  para  $t \in [0, t_1)$  y así consecutivamente. Asumimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ .

Definiremos a la distribución inicial para un PSM con espacio de estados  $E = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  como una colección de números  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)$  no negativos y que suman uno, i.e.  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ , donde el número  $\alpha_i = P(X_0 = i)$  corresponde a la probabilidad de que la cadena inicie en el estado  $i$ .

Como nos interesa conocer la evolución del proceso, analizaremos los tiempos en que se abandona al estado actual. Suponiendo que  $X_t = i$ , consideremos el tiempo hasta que el proceso cambia de estado como:

$$\Delta(t) = \inf\{s > 0 \mid X_{t+s} \neq i\}.$$

Condicionado a  $X_t$  y  $\Delta(t) < \infty$ , entonces el próximo salto ocurre a tiempo  $t + \Delta(t)$ , de otra manera el PSM no estaría brincando a otro estado.

Observemos que el tiempo de estancia  $\Delta(t)$  es un tiempo de paro<sup>3</sup>. Ahora nos gustaría saber la distribución con la que se rige esta variable aleatoria.

La siguiente proposición justificará la distribución del tiempo de estancia.

**Proposición 1.1.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM, si  $X_t = i$ , entonces existe  $\lambda_i > 0$  tal que:

$$P(\Delta(t) > s \mid X_t = i) = \exp(-\lambda_i s) \quad \text{para toda } s > 0.$$

A  $\lambda_i$  la llamaremos tasa de salto asociada al estado  $i \in E$ , además la variable aleatoria  $\Delta(t)$  se distribuye exponencialmente.

*Demostración.* Definimos  $h(s) = P(\Delta(0) > s \mid X_0 = i)$ , queremos demostrar que  $h(s) = \exp(-\lambda_i s)$  para alguna  $\lambda_i > 0$ .

Considerando que en la Sección 1.1 vimos que el proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es homogéneo en el tiempo, entonces

$$P(\Delta(t) > s \mid X_t = i) = P(\Delta(0) > s \mid X_0 = i).$$

Desarrollamos

$$\begin{aligned} h(t+s) &= P(\Delta(0) > t+s \mid X_0 = i) \\ &= P(\Delta(0) > t, \Delta(t) > s \mid X_0 = i) \\ &= P(\Delta(0) > t \mid X_0 = i) P(\Delta(t) > s \mid \Delta(0) > t, X_0 = i) \\ &= h(t) P(\Delta(t) > s \mid X_t = i) \\ &= h(t) h(s). \end{aligned}$$

Si  $h(\cdot)$  es continua en cero entonces las probabilidades de transición también son continuas en cero, además  $0 \leq h(\cdot) \leq 1$ , por lo que la única solución es  $h(s) = \exp(-\lambda_i s)$  con  $\lambda_i > 0$ .

□

<sup>3</sup>Sea  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$  v.a. Decimos que  $\tau$  es tiempo de paro para  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  si para toda  $t \geq 0$  se cumple que  $(\tau \leq t) \in \sigma(X_s, s \leq t)$ .

Ya que la tasa de saltos  $\lambda_i$  es independiente del tiempo  $t \geq 0$  y sólo depende del estado  $i \in E$ , clasificaremos a los estados de acuerdo a esa tasa.

**Definición 1.5.** Sea  $i \in E$  con tasa de salto asociada  $\lambda_i$ , entonces  $i$  se define como:

- i.* Permanente, si  $\lambda_i = 0$ .
- ii.* Estable, si  $0 < \lambda_i < \infty$ .
- iii.* Instantáneo, si  $\lambda_i = \infty$ .

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM con  $X_t = i$ , estudiaremos las consecuencias del proceso dependiendo cada tipo de estado.

- i.* Si  $i$  es permanente,  
 $P(\Delta(t) > s \mid X_t = i) = 1$  para toda  $s > 0$ . Es decir, el PSM permanece siempre en el estado  $i \in E$ .
- ii.* Si  $i$  es estable,  
 $P(0 < \Delta(t) < \infty \mid X_t = i) = 1$ , es decir el proceso saldrá del estado  $i$  en un tiempo de espera positivo y finito.
- iii.* Si  $i$  es instantáneo,  
 $P(\Delta(t) = 0 \mid X_t = i) = 1$ , entonces el PSM sale del estado tan pronto entra a él.

Dado lo anterior, consideraremos sólo los PSM con espacios de estados  $E = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  que no contenga estados instantáneos.

Para facilitar el estudio de los PSM y sus tiempos definiremos las siguientes variables aleatorias.

**Definición 1.6.** Consideremos  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM. Definimos:

- $t_0 = 0$ .
- $t_k =$  tiempo en que ocurre el  $k$ -ésimo salto.
- $i_k =$  estado visitado durante  $[t_k, t_{k+1})$ .
- $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$ , tiempo en que el proceso permanece en el estado  $i_k$ .
- $N(t) =$  mayor número entero  $n$  para el cual  $t_n < t$ , i.e el número de saltos hasta el tiempo  $t$ .

Si  $t_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} t_k = \infty$ , decimos que el PSM es regular, esto se refiere a que si el proceso ha visitado un cierto estado, existe una probabilidad positiva de que vuelva a ese estado en el futuro.

Cabe destacar que el momento en que el PSM salta al siguiente estado y el estado al que salta son independientes, con la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM regular con espacio de estado  $E$  y  $t_{k+1} < \infty$ . Entonces las variables  $\Delta_k$  y  $X_{t_{k+1}}$  condicionadas a  $X_{t_k} = i$ , son independientes, i.e.

$$P(\Delta_k > t, X_{t_{k+1}} = j \mid X_{t_k} = i) = P(\Delta_k > t \mid X_{t_k} = i) P(X_{t_{k+1}} = j \mid X_{t_k} = i).$$

*Demostración.* Por definición de probabilidad condicional, tenemos:

$$P(\Delta_{k+1} > t, X_{t_{k+1}} = j \mid X_{t_k} = i) = P(\Delta_{k+1} > t \mid X_{t_k} = i) P(X_{t_{k+1}} = j \mid X_{t_k} = i, \Delta_{k+1} > t),$$

desarrollamos la parte derecha de la igualdad y tenemos

$$\begin{aligned} &= P(\Delta_{k+1} > t \mid X_{t_k} = i) P(X_{t_{k+1}} = j, X_s = i, t_k \leq s \leq t_{k+1} \mid X_{t_k} = i) \\ &= P(\Delta_{k+1} > t \mid X_{t_k} = i) P(X_{t_{k+1} + \Delta_{t_k + t}} = j, X_s = i, t_k \leq s \leq t_{k+1} \mid X_{t_k} = i) \\ &= P(\Delta_{k+1} > t \mid X_{t_k} = i) P(X_{t_{k+1}} = j \mid X_{t_k} = i), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$P(\Delta_{k+1} > t, X_{t_{k+1}} = j \mid X_{t_k} = i) = P(\Delta_{k+1} > t \mid X_{t_k} = i) P(X_{t_{k+1}} = j \mid X_{t_k} = i).$$

□

Intuitivamente construimos el PSM y sus principales características, para la simulación del mismo es necesario analizar la evolución del proceso.

Ahora presentaremos la caracterización de los PSM, en términos de cambios infinitesimales de las probabilidades de transición y basado en la noción de generadores; recuperados de [3]. También estudiaremos propiedades importantes sobre el comportamiento de un PSM a tiempo continuo y espacio de estados finitos.

### 1.1.1. Generador infinitesimal

En el caso de los Procesos de Markov a tiempo discreto (Cadenas de Markov) estudiamos su evolución a través de su transición por unidad de tiempo, escribiendo las probabilidades de transición en forma de matriz. Para describir la evolución de los PSM no hay un análogo exacto de esta matriz, pues no hay una unidad de tiempo implícita; sin embargo, gracias al cálculo infinitesimal veremos la existencia de la matriz  $Q$ , llamada generador infinitesimal o matriz de intensidad del PSM, que asume el papel de  $P$ .

Tomando en cuenta los PSM que satisfagan las condiciones ya mencionadas anteriormente. Supongamos  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM con  $X_t = i$ , estamos interesados en lo que pueda suceder en un intervalo pequeño de tiempo  $(t, t + h)$  y  $h > 0$ . Consideremos los siguientes casos:

- El proceso puede permanecer en el mismo estado hasta el tiempo  $t + h$ , esto sucede con probabilidad  $p_{ii}(h) + o(h)$ . Donde el término de error  $o(h)$  toma en cuenta la posibilidad de que el proceso haya salido del estado  $i$  y vuelva a  $i$  dentro del intervalo  $(t, t + h)$ .
- El proceso puede moverse a un estado  $j \neq i$ , con probabilidad  $p_{ij}(h) + o(h)$ , donde  $o(h)$  cubre la probabilidad de tener dos o más transiciones en el intervalo  $(t, t + h)$ .

Estamos interesados en el comportamiento de  $p_{ij}(h)$  para  $h$  pequeña, así consideremos la siguiente proposición.

**Definición 1.7.** *Definimos al generador infinitesimal  $Q$ , compuesto por las entradas  $q_{ij}$  (tasa de transición del estado  $i$  al estado  $j$ ) y  $q_{ii}$  (tasa de salida del estado  $i$ ), como*

$$Q := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(h) - Id}{h},$$

donde  $\{P(t)\}_{t \geq 0}$  es el semigrupo de un PSM. Sus tasas de transición se definen:

$$q_i := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$$

$$q_{ij} := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} \quad \text{con } i \neq j,$$

además  $0 \leq q_{ij} < \infty$  y  $0 \leq q_i < \infty$ .

Previamente vimos que como  $P(t)$  es matriz de transición se cumple:

$$1 = p_{ii}(h) + \sum_{j \neq i} p_{ij}(h),$$

despejando tenemos:

$$1 - p_{ii}(h) = \sum_{j \neq i} p_{ij}(h).$$

Ahora, dividiendo entre  $h$  y haciéndola tender a 0, tenemos:

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}(h).$$

Suponiendo  $E = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , consideremos la matriz  $Q \in \mathbb{M}_{N \times N}$  como se sigue:

$$\begin{pmatrix} -q_1 & q_{12} & \dots & q_{1N} \\ q_{21} & -q_2 & \dots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \dots & -q_N \end{pmatrix}$$

Ahora, de la Definición 1.7 tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(h) - Id}{h} = Q,$$

y por la Definición 1.3 podemos reescribir

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(t)(P(h) - Id)}{h} = \frac{P(h) - Id}{h} P(t),$$

así tomando el límite cuando  $h$  decrece a 0 obtenemos que la derivada de  $P(t)$  está dada por:

$$P'(t) = P(t)Q = QP(t),$$

donde  $P'(t)$  denota a la matriz con entradas  $p'_{ij}(t)$ . Esta derivada se puede resolver considerando como condición inicial  $P(0) = Id$  por medio de métodos estándar para sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de tal manera que la solución es:

$$P(t) = \exp(tQ) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!}.$$

La función  $\exp(tQ)$  denota la exponencial de la matriz  $tQ$  y  $Q \in \mathbb{M}_{n \times n}$  es la matriz de intensidad o generador infinitesimal de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , como su nombre lo dice genera un PSM, esto sucede si y sólo si las entradas fuera de la diagonal son no negativas y la suma de cada renglón es igual a cero. De facto sabemos que  $q_{ii} = -q_i$ .

Para poder asociar a los  $q_{ij}$  y  $q_i$  como parámetro de un PSM daremos las siguientes definiciones.

**Definición 1.8.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM con matriz de intensidad  $Q \in \mathbb{M}_{N \times N}$ . Decimos que  $p_{ij}$  es la probabilidad de saltar del estado  $i$  al  $j$  y se define como

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & \text{si } i \neq j, \text{ con } q_i > 0, \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ó } q_i = 0. \end{cases}$$

Al arreglo  $P \in \mathbb{M}_{N \times N}$  con entradas  $\{p_{ij}\}_{i,j \in E}$  lo llamamos matriz de saltos.

**Definición 1.9.** Considerando  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM, definimos las tasas de transición como:

$$q_{ij} = q_i p_{ij} \quad \text{para } i \neq j.$$

El siguiente teorema nos servirá para incorporar a las tasas de transición con el PSM.

**Teorema 1.1.** Sea  $Q \in \mathbb{M}_{N \times N}$  generador infinitesimal de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM, entonces

- i. Condicionado a que el PSM permanece en el estado  $i$  a tiempo  $t$ , el tiempo de estancia  $\Delta(t)$  se distribuye exponencial con parámetro  $q_i$ , es decir

$$P(\Delta(t) > s \mid X_t = i) = \exp(-q_i s).$$

- ii. Si  $X_t = i$  y  $q_i > 0$ , entonces con probabilidad 1 hay una discontinuidad en la trayectoria para algún  $t > 0$ , de hecho, la primer discontinuidad se da al realizar un salto. Si  $0 < s \leq \infty$ , la probabilidad condicional que la primer discontinuidad en el intervalo  $[t, t + s)$  sea un salto a  $j$ , dado que  $X_t = i$  y que haya una discontinuidad en  $[t, t + s)$ , es  $\frac{q_{ij}}{q_i}$ .

*Demostración.*

- i. Como vimos en la Proposición 1.1 sabemos que  $\Delta(t) \sim \text{Exp}(\lambda_i)$  entonces  $1 - F_\Delta(t) = \exp(-\lambda_i t)$  donde  $\lambda_i = F'_\Delta(0) = q_i$ .
- ii. Supongamos que  $h, t > 0$  y que el proceso sólo salta dentro del horizonte de tiempo  $(t, t + h]$ , entonces

$$P(\text{Xsalte a } j \text{ en un tiempo } (t, t + h) \mid X_t = i) \simeq \frac{p_{ij}(h)}{1 - p_{ii}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

□

Con este teorema podemos concluir que la tasa de saltos  $\lambda_i$  de la Proposición 1.1 es la misma que la  $q_i$  del generador infinitesimal, así iremos evolucionando nuestro PSM con  $P(t) = \exp(tQ) \forall t \geq 0$ .

### 1.1.2. Distribución estacionaria y límites de probabilidades

Estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico de un PSM para una  $t$  grande, este hecho está relacionado estrechamente con la existencia de distribuciones estacionarias.

**Definición 1.10.** Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un PSM con semigrupo estocástico  $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ . Decimos que el vector  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$  es una distribución estacionaria del proceso si:



*i.*  $\pi_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, N$ .

*ii.*  $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$ .

*iii.*  $\pi = \pi P(t)$  para todo  $t \geq 0$ .

Un vector  $\pi$  que cumple con las tres propiedades mencionadas recibe el nombre de distribución estacionaria. Esto implica que el proceso es estacionario, es decir, si la distribución inicial de  $X_0$  es  $\pi$  entonces la distribución de  $X_t$  también será  $\pi$  para todo  $t \geq 0$ . Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\text{Si } P(X_0 = j) = \pi_j \text{ entonces } P(X_t = j) = \pi_j, \text{ para todo } j \in E \text{ y } t \geq 0.$$

Para presentar a los procesos estacionarios tendremos en cuenta la siguiente proposición.

**Observación 1.1.** Para un PSM  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

*i.*  $X$  es un proceso estacionario.

*ii.*  $X_t \stackrel{d}{=} X_0$  con  $t > 0$ , i.e. la sucesión  $X_t$  es igual en distribución a  $X_0$ .

*iii.* La distribución de  $X_0$  es una distribución estacionaria.

El siguiente teorema hace relación de la distribución estacionaria y el generador infinitesimal.

**Teorema 1.2.** Para todo  $t \geq 0$  tenemos que  $\pi = \pi P(t)$  si y sólo si  $\pi Q = \bar{0}$ , donde  $\bar{0}$  es un vector de ceros.

*Demostración.* Recordando que  $Q^0 = Id$  entonces:

$$\begin{aligned} \pi Q = \bar{0} &\Leftrightarrow \pi Q^n = \bar{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \pi Q^n = \bar{0} \\ &\Leftrightarrow \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n = \pi \\ &\Leftrightarrow \pi P(t) = \pi \end{aligned}$$

□

Veamos que la condición  $\pi = \pi P(t)$  para todo  $t \geq 0$  la cual es bastante difícil de verificar, se reduce a la condición más simple  $\pi Q = \bar{0}$ , que queda en términos de la matriz del generador infinitesimal, la cual es un conjunto de  $n$  ecuaciones lineales, que junto a la restricción de normalización<sup>4</sup>, determina si la distribución estacionaria existe.

---

<sup>4</sup>  $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$

La  $j$ -ésima ecuación de  $\pi Q = \bar{0}$  está dada por

$$0 = -q_j \pi_j + \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i,$$

entonces

$$q_j \pi_j = \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i. \quad (1.1)$$

De esta ecuación hacemos la siguiente interpretación:

1. En el lado izquierdo de la igualdad,  $\pi_j$  es la proporción de tiempo a largo plazo en que el proceso permanece en el estado  $j$ , mientras que  $q_j$  es la tasa de abandono del estado  $j$  cuando el proceso se encuentra en el estado  $j$ . Por lo tanto  $q_j \pi_j$  se interpreta como la tasa de abandono del estado  $j$  a largo plazo.
2. En el lado derecho de la igualdad,  $q_{ij}$  es la tasa de ir al estado  $j$  cuando el proceso está en el estado  $i$ , así el producto  $q_{ij} \pi_i$  es interpretado como la tasa de ir del estado  $i$  al  $j$  en un largo plazo. Al sumar para todo  $i \neq j$  tenemos la tasa de ir al estado  $j$  a largo plazo.

Así la ecuación (1.1) nos dice que la tasa de abandono del estado  $j$  a largo plazo es igual a la tasa de transición en el estado  $j$  a largo plazo.

Por esa razón la ecuación  $\pi Q = \bar{0}$  es llamada Ecuación de Balance Global o solo Ecuación de Balance, porque expresan el hecho de que cuando el proceso se estaciona, debe haber equilibrio, o balance, en las tasas dentro o fuera de  $j$  a largo plazo.

Para obtener la distribución estacionaria de un PSM consideraremos el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j \quad i, j \in E.$$

## 1.2. Ejemplos

En esta sección profundizaremos en la aplicación práctica de la teoría de PSM, consideraremos el Proceso de nacimiento-muerte y Proceso de Poisson como ejemplos representativos de estos, respaldándonos de la teoría vista en las secciones pasadas y de [9].

### 1.2.1. Proceso de nacimiento-muerte

Supongamos una población con  $i$  individuos al tiempo  $t$ , es decir  $X_t = i$ . Nace (o llega) un nuevo individuo en un tiempo exponencial con tasa  $\mu$  y muere (o se va) un individuo en un tiempo exponencial con tasa  $\gamma$ . El proceso  $X_t$  representa el número de individuos que integran la población al tiempo  $t$  y  $X_t$  cumple la propiedad de Markov, es continuo en tiempo y discreto en el espacio de estados, es decir es un PSM.

Bajo estas condiciones y considerando las siguientes tasas de transición:

$$q_{ij} = \begin{cases} \mu & \text{si } j = i + 1, \\ \gamma & \text{si } j = i - 1, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

llamamos a  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  proceso de nacimiento-muerte con tasa de nacimiento  $\mu$  y tasa de muerte  $\gamma$ . Observemos que la tasa de estancia  $\lambda = \mu + \gamma$  es exponencial, y como consecuencia del Teorema 1.1, tenemos que  $q_i = \mu + \gamma$ . Es decir que podemos observar las probabilidades de salto como:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu}{\mu + \gamma} & \text{si } j = i + 1, \\ \frac{\gamma}{\mu + \gamma} & \text{si } j = i - 1. \end{cases}$$

Con las probabilidades de saltos definidas anteriormente podemos generar nuestro proceso de nacimiento y muerte hasta un cierto horizonte de tiempo  $T$ .

Finalmente para encontrar la distribución estacionaria del proceso nacimiento-muerte utilizaremos el Teorema 1.2 para encontrar  $\pi$  que satisfaga  $\pi Q = \vec{0}$ , es decir la Ecuación de Balance Global. Primero visualizamos a  $Q$  considerando:

$$Q(i, j) = \begin{cases} q_{ij} & \text{si } j \neq i, \\ -\lambda & \text{si } j = i. \end{cases}$$

En este ejemplo consideraremos  $E = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$ , como el proceso inicia con 0 individuos la tasa de muerte  $\gamma$  es cero en el primer renglón y como consideramos una población hasta  $N$  individuos la tasa de nacimiento  $\mu$  es cero en el último renglón, tenemos:

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & -(\mu + \gamma) & \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu + \gamma) & \mu & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \gamma) & \mu & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma & -(\mu + \gamma) & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma & -\gamma \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -\mu\pi_0 + \gamma\pi_1 = 0, \\ \mu\pi_0 - (\mu + \gamma)\pi_1 + \gamma\pi_2 = 0 \\ \mu\pi_1 - (\mu + \gamma)\pi_2 + \gamma\pi_3 = 0 \\ \mu\pi_2 - (\mu + \gamma)\pi_3 + \gamma\pi_4 = 0 \\ \mu\pi_3 - (\mu + \gamma)\pi_4 + \gamma\pi_5 = 0 \\ \vdots \\ \mu\pi_{N-1} - \gamma\pi_N = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots + \pi_N = 1 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos:  $\pi_1 = \frac{\mu}{\gamma}\pi_0$ , sustituyendo en la segunda ecuación tenemos  $\pi_2 = \frac{\mu^2}{\gamma^2}\pi_0$ , de la tercera ecuación obtenemos:  $\pi_3 = \frac{\mu^3}{\gamma^3}\pi_0$ , inductivamente tendríamos que  $\pi_N = \frac{\mu^N}{\gamma^N}\pi_0$ .

Luego al sustituir los  $\pi_i$  en la última ecuación nos queda:

$$\pi_0 + \frac{\mu}{\gamma}\pi_0 + \frac{\mu^2}{\gamma^2}\pi_0 + \frac{\mu^3}{\gamma^3}\pi_0 + \dots + \frac{\mu^N}{\gamma^N}\pi_0 = 1$$

Entonces  $\pi_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\mu^2}{\gamma^2} + \frac{\mu^3}{\gamma^3} + \dots + \frac{\mu^N}{\gamma^N}\right)}$ ,  $\pi_1 = \frac{\mu}{\gamma \left(1 + \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\mu^2}{\gamma^2} + \frac{\mu^3}{\gamma^3} + \dots + \frac{\mu^N}{\gamma^N}\right)}$ ,  $\dots$ ,  $\pi_N = \frac{\mu^N}{\gamma^N \left(1 + \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\mu^2}{\gamma^2} + \frac{\mu^3}{\gamma^3} + \dots + \frac{\mu^N}{\gamma^N}\right)}$ .

### 1.2.2. Proceso de Poisson

El Proceso de Poisson homogéneo es un PSM que empieza en 0, es decir, la distribución inicial tiene el valor 1 en el estado 0. Los tiempos de estancia son exponenciales de parámetro  $\lambda = q_x$ , donde  $q_x$  es la entrada  $x$  del generador infinitesimal (como consecuencia del Teorema 1.1) y las probabilidades de salto de un estado a otro son

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{si } j \neq i + 1. \end{cases}$$

Así con nuestro generador infinitesimal podremos ir evolucionando el proceso de Poisson hasta un tiempo  $t$ , el cual está definido como:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{si } j \neq i, i + 1 \end{cases}$$

Para encontrar la distribución estacionaria  $\pi$  del proceso Poisson consideraremos el Teorema 1.2, así primero visualizamos el generador infinitesimal, considerando  $Q$  como en el ejemplo anterior:

$$Q(i, j) = \begin{cases} q_{ij} & \text{si } j \neq i, \\ -\lambda & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Es decir, consideraremos:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{pmatrix}$$

Propondremos condiciones de frontera ya que el proceso está en constante crecimiento y existe la posibilidad de que se degenerara, lo que llevaría a no obtener solución. Consideraremos el espacio de estados  $E = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$  y tendríamos el siguiente generador infinitesimal asociado:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Del cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 = 0 \\ \lambda\pi_0 - \lambda\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_1 - \lambda\pi_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda\pi_{N-1} = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_N = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto  $\pi_N = 1$  y la distribución estacionaria del proceso de Poisson con condiciones de frontera sería:  $\pi = (0, 0, \dots, 0, 1)$

### 1.3. Simulación del PSM

En esta sección presentaremos el algoritmo para simular trayectorias de un PSM. Con base a la teoría vista, consideramos como característica principal para simular un PSM la independencia de los tiempos de estancia que se distribuye exponencialmente con parámetros  $q_i$  (tasa de intensidad del estado  $i$ ).

#### 1.3.1. Algoritmo

Por el Teorema 1.1 y la observación de la independencia del tiempo de estancia sabemos que debemos generar los tiempos con una exponencial de parámetro  $\lambda_{X_t}$  quien representa la tasa de salto asociada a la simulación  $X_t$ .

Mostraremos el algoritmo para simular un PSM con distribución inicial  $\alpha$ , generador infinitesimal  $Q$  y horizonte de tiempo  $T$ .

---

**Algoritmo 1:** Proceso de Saltos de Markov

---

**Input:** Distribución inicial  $\alpha$ , generador infinitesimal  $Q$  y horizonte de tiempo  $T$

**Output:** Trayectoria de un PSM

- 1 Inicializamos  $n = 0$  y  $t_n = 0$ ;
  - 2 Simulamos  $X_0 \sim \alpha$ ;
  - 3 **while**  $t_n \leq T$  **do**
  - 4      $i \leftarrow X_n$ ;
  - 5     Simulamos  $T_{n+1} \sim \exp(q_i)$ ;
  - 6      $t_{n+1} \leftarrow t_n + T_{n+1}$ ;
  - 7     **if**  $t_{n+1} > T$  **then**
  - 8         **terminamos**;
  - 9     Simulamos  $X_{n+1}$  a partir de la matriz de saltos  $P$ ;
  - 10     $n \leftarrow n + 1$ ;
- 

El algoritmo inicia definiendo el primer tiempo del proceso  $t_n = 0$  y su distribución inicial  $\alpha$  que nos dirá en qué estado iniciará el proceso, después de hacer  $i = X_n$  simulamos el tiempo de estancia en el estado  $i$  con  $T_{n+1} \sim \exp(q_{X_n})$  y hacemos  $t_{n+1} = t_n + T_{n+1}$  para acumular el tiempo que ha transcurrido en el proceso, luego verificar que  $t_{n+1} > T$ ; si aún  $t_{n+1} \leq T$ , simulamos el siguiente estado  $X_{n+1}$  obteniéndolo

de la matriz de saltos  $P$  (calculada del generador infinitesimal  $Q$ ), actualizamos haciendo  $n = n + 1$  y volvemos a simular el tiempo de estancia.

### 1.3.2. Implementación del algoritmo

En este apartado vamos a implementar el Algoritmo 1 para los ejemplos ya vistos en la Sección 1.2.

Las entradas para simular trayectorias de PSM con el Código A.1 son:

$\alpha$  - distribución inicial.

$Q$  - generador infinitesimal.

$T$  - horizonte de tiempo del proceso.

Así para el ejemplo de un proceso de nacimiento-muerte supondremos una tasa  $\mu = 1/5$  y  $\gamma = 1/3$ , por la Subsección 1.2.1 tenemos que la tasa de estancia es  $\lambda = \mu + \gamma = 8/15$ , así tenemos que nuestra  $Q$  (suponiendo que el proceso llega hasta 4 individuos) está dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -8/15 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -8/15 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -8/15 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para la distribución inicial consideraremos  $\alpha = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$  y simularemos la trayectoria hasta un tiempo  $T = 30$ .

En la Figura 1.1 observamos una trayectoria de un proceso de nacimiento y muerte con tasas  $\mu = 1/5$  y  $\gamma = 1/3$ , hasta el tiempo  $T = 30$ .

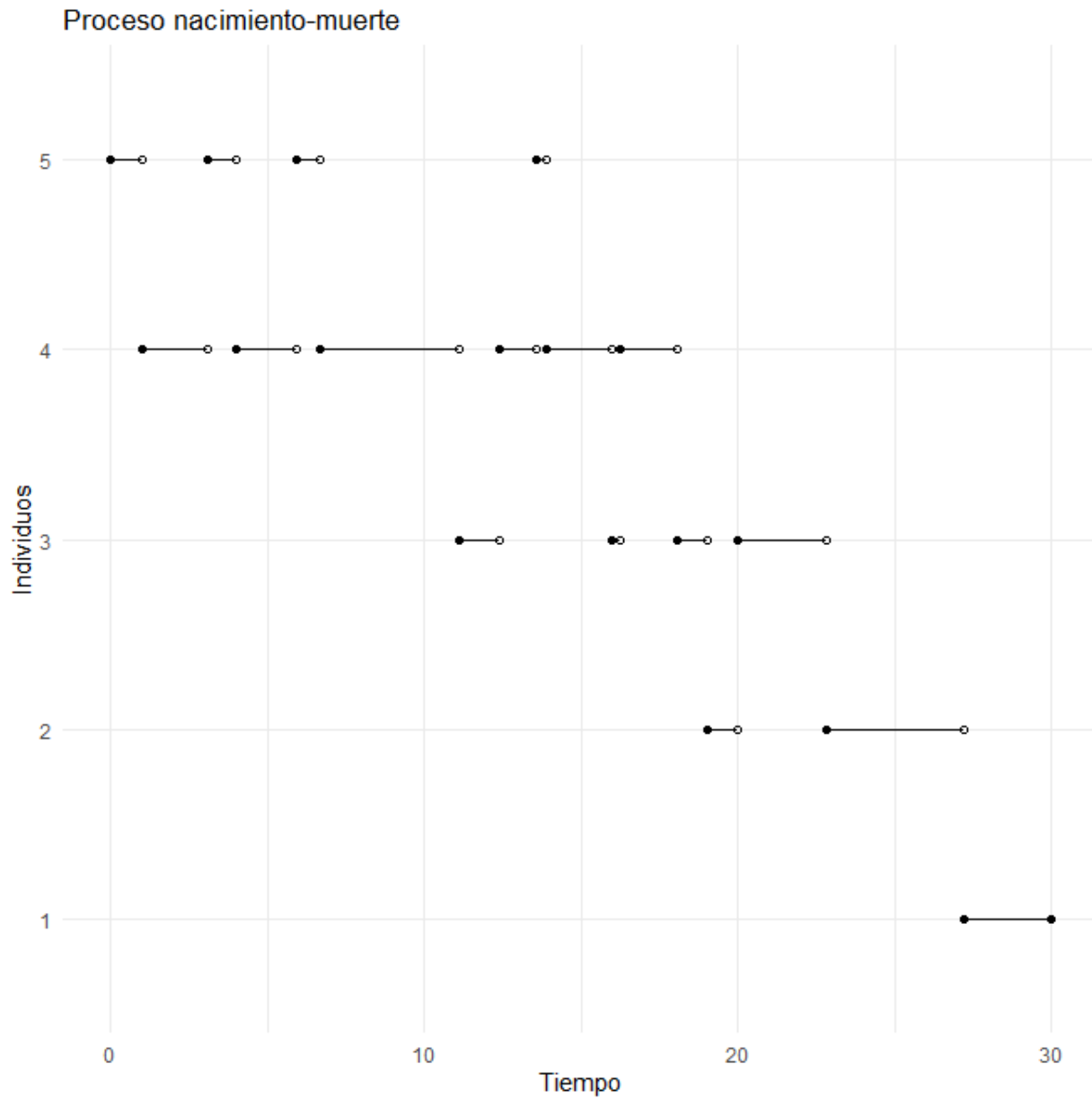


Figura 1.1: Trayectoria de un Proceso de nacimiento-muerte con tasas  $\mu = 1/5$ ,  $\gamma = 1/3$ , horizonte de tiempo  $T = 30$  y  $N = 5$ .

Para calcular la distribución estacionaria, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 = 0, \\ \frac{1}{5}\pi_0 - \frac{8}{15}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = 0 \\ \frac{1}{5}\pi_1 - \frac{8}{15}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = 0 \\ \frac{1}{5}\pi_2 - \frac{8}{15}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 = 0 \\ \frac{1}{5}\pi_3 - \frac{1}{3}\pi_4 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

Del sistema obtenemos  $\pi_0 = \frac{125}{411} \approx 0.3041$ ,  $\pi_1 = \frac{25}{137} \approx 0.1824$ ,  $\pi_2 = \frac{50}{411} \approx 0.1216$ ,  $\pi_3 = \frac{35}{411} \approx 0.0851$  y  $\pi_4 = \frac{26}{411} \approx 0.0632$ .

Una manera de entender intuitivamente la distribución estacionaria es considerar el tiempo promedio que el proceso pasa en cada estado. Al aproximar esta distribución estacionaria utilizando esta perspectiva intuitiva y el Código A.2 con parámetros de la *trayectoria* simulada en la Figura 1.1 y  $n = 5$  estados obtuvimos:  $\pi = (0.3303614, 0.2237099, 0.2196804, 0.1245921, 0.1016563)$ .

## 1.4. Puentes de Markov

En esta sección final, incorporaremos las definiciones, teoremas y propiedades esenciales de los Puentes de Markov, los cuales serán fundamentales para la comprensión de los capítulos siguientes. La información vista en esta sección se ha recopilado de [5].

**Definición 1.11.** *Un puente de Markov con parámetros  $s, a, b$  es un proceso estocástico en  $t \in [0, s]$  y con la misma distribución de un Proceso de Saltos de Markov  $\{X_t; t \leq s\}$  condicionado a  $X_0 = a$  y  $X_s = b$ , con  $a, b \in E$  y  $s > 0$ .*

Para simular un puente de Markov usaremos el método de muestreo de rechazo (Rejection Sampling REJ) estudiado en [5], este método simula una trayectoria de un PSM condicionando la posición inicial  $X_0 = a$  y termina hasta generar una trayectoria con posición final  $X_s = b$ , rechazando todas aquellas trayectorias que no cumplen dicha condición.

---

### Algoritmo 2: Simulación de Puentes de Markov

---

**Data:** Parámetros  $s, a, b$

**Result:** Simulación de la trayectoria de Puentes de Markov

Inicializar  $X_0 = a$ ;

**repeat**

    Simular una trayectoria  $X_s$  (usando el Algoritmo 1 con horizonte de tiempo  $s$ , generador infinitesimal  $Q$  y distribución inicial  $\alpha$ );

**until**  $X_s = b$ ;

---

Ya que el algoritmo rechaza trayectorias hasta encontrar una trayectoria que cumpla las condiciones mencionadas anteriormente, entonces es importante mencionar la siguiente proposición:

**Observación 1.2.** *En el método REJ, la probabilidad de alcanzar el estado final observado es  $p_{ab}(s)$ .*

*i.* Si  $s$  es grande entonces  $p_{ab}(s) \approx \pi_b$ .

*ii.* Si  $s$  es pequeño entonces  $p_{ab}(s) \approx q_{ab}s$ .

Tendremos en consideración los tiempos de ejecución excesivos, ya que muchas rutas se rechazan si:

- $s$  es grande y  $\pi_b$  es pequeño, o,
- $s$  es pequeño y  $a \neq b$ .



Usando el Código A.3 visualizaremos estos casos con los siguientes ejemplos. Para el primer caso consideramos la siguiente matriz infinitesimal:

$$Q = \begin{pmatrix} -51 & 4 & 10 & 1 & 4 & 6 & 3 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & -47 & 1 & 9 & 4 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & -51 & 5 & 5 & 7 & 5 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 10 & 6 & -52 & 6 & 10 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 1 & -55 & 1 & 9 & 10 & 7 & 9 \\ 9 & 6 & 1 & 7 & 2 & -46 & 7 & 3 & 10 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 8 & 9 & -64 & 9 & 6 & 9 \\ 9 & 7 & 2 & 4 & 1 & 1 & 9 & -44 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 4 & 3 & 10 & 2 & -35 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 2 & 2 & 6 & 4 & 3 & -35 \end{pmatrix},$$

luego resolviendo el sistema obtenemos que la distribución estacionaria es

$$\pi = (0.10122, 0.11116, 0.06680, 0.09036, 0.06589, 0.08375, 0.10177, 0.11245, 0.13567, 0.13087),$$

para este caso se debe cumplir que  $\pi_b$  sea pequeño, así nos tomaremos la entrada más pequeña para simular este ejemplo, entonces  $\pi_b = \pi_5 = 0.06589$  finalmente consideraremos la trayectoria con horizonte de tiempo  $s = 100$  y estados  $a = 7$ ,  $b = 5$ . Después realizamos 1000 trayectorias con los mismos parámetros para tener un promedio de cuántas trayectorias se rechazan antes de conseguir una trayectoria con estos parámetros y obtuvimos 16.17 trayectorias, es decir que la probabilidad de construir un Puente Markoviano con el método REJ (bajo estas condiciones) es de  $p = 0.0618$ .

Para el segundo caso donde el tiempo es pequeño y el estado  $a$  distinto del  $b$ , consideraremos la misma matriz infinitesimal para construir un puente de Markov con los siguientes parámetros  $s = 0.0005$ ,  $a = 1$  y  $b = 2$ . De igual manera se generaron 1000 puentes Markovianos para encontrar el promedio de trayectorias rechazadas antes de construir un PM con estos parámetros y obtuvimos que el promedio es de 515.04, es decir que la probabilidad de construir un PM bajo estas condiciones y por el método REJ es de  $p = 0.00194$ . Para este caso sí podemos visualizar el puente Markoviano construido, pues sólo son dos estados y el tiempo es pequeño.

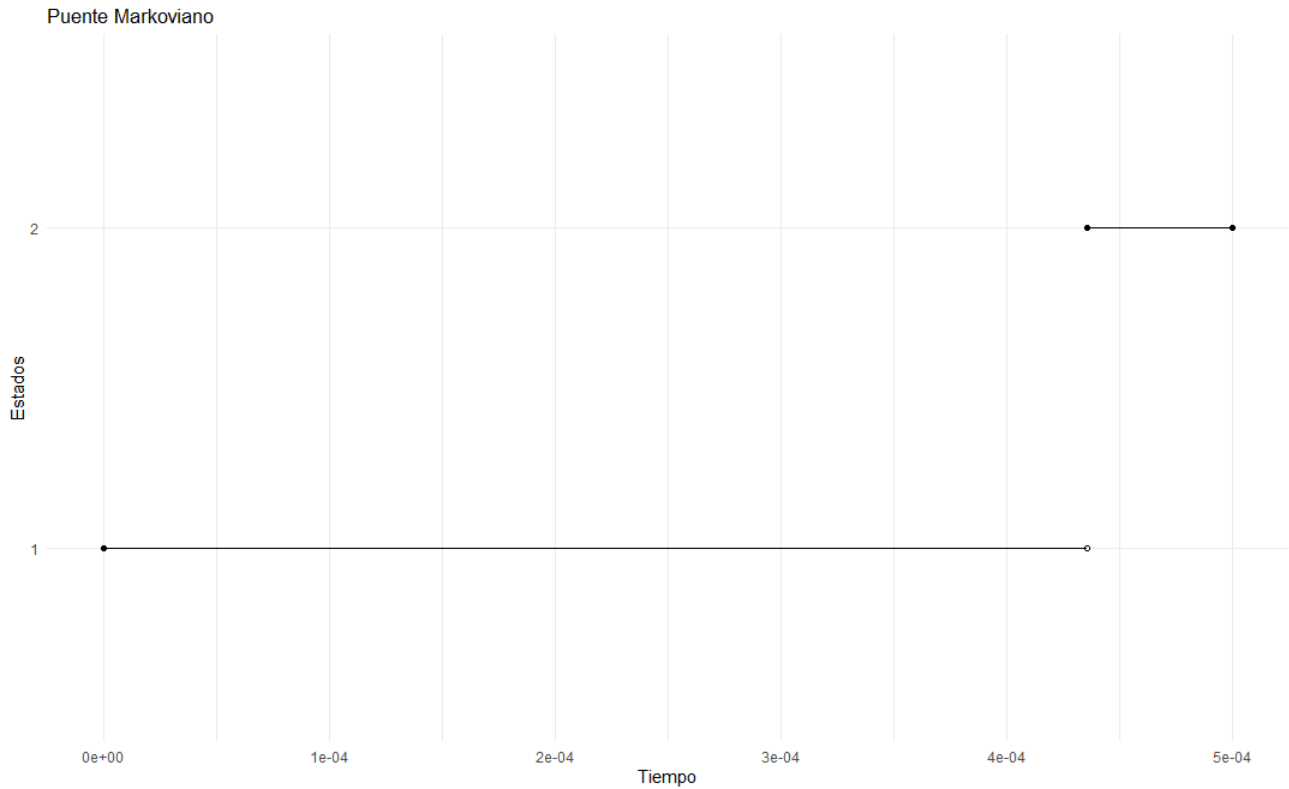


Figura 1.2: Puente Markoviano con  $s = 0.0005$ ,  $a = 1$  y  $b = 2$ .

En la Figura 1.2 se visualiza gráficamente un puente Markoviano bajo la condición de la Observación 1.2, una trayectoria simulada por PM considerando una  $s$  pequeña y  $a \neq b$ , es decir, considerando el tiempo inicial 0, el PM inicia en el estado  $a = 1$  y termina el proceso cuando la trayectoria llega al estado  $b = 2$  en un horizonte del tiempo  $s = 0.0005$  y generándolo con la misma matriz 1.4 mencionada en el primer caso.

### 1.4.1. Ejemplo

Los ejemplos que vimos anteriormente son casos particulares, en este último apartado de la sección, queremos estudiar un ejemplo general. Incluiremos un ejemplo en el que podamos observar las distintas trayectorias que se pueden construir a partir de puentes Markovianos.

Consideramos los mismos parámetros para las cuatro distintas trayectorias, con estado inicial  $a = 1$ , estado final  $b = 3$ , horizonte de tiempo  $s = 3$  y generador infinitesimal

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

junto al Código A.3 simularemos las cuatro distintas trayectorias por puentes Markovianos.

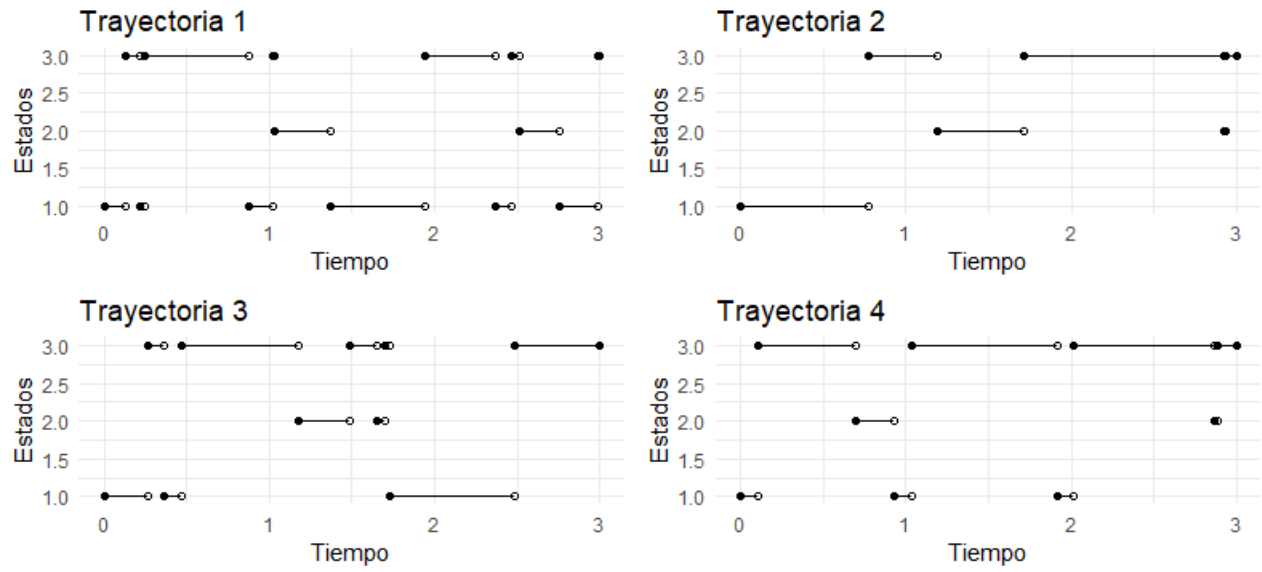


Figura 1.3: Distintas trayectorias construidas por Puentes Markovianos con parámetros  $a = 1$ ,  $b = 3$ , horizonte de tiempo  $s = 3$  y generador infinitesimal  $Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

## Capítulo 2

# Inferencia estadística para PSM

En este capítulo analizaremos la inferencia estadística de los PSM. Para observaciones continuas estudiaremos la Máxima Verosimilitud. En cuanto a los casos de muestreo discreto de los procesos de saltos de Markov, estudiaremos el método de Muestreo de Rechazo (REJ) y del Algoritmo EM para tener una estimación de nuestro generador infinitesimal  $Q$ , para generar puentes markovianos, así finalmente poder construir trayectorias de un PSM y poder inferir de él. Para este capítulo nos guiaremos de [5], y [8].

### 2.1. Inferencia estadística para PSM con información a tiempo continuo

En esta sección se abordará un método para la inferencia estadística de los procesos de saltos de Markov con observaciones continuas. Nos basaremos en [5] y [8].

#### Máxima Verosimilitud

La teoría de la estimación de verosimilitud está basada en observaciones a tiempo continuo de un proceso de saltos de Markov. Procederemos a estudiar la Máxima Verosimilitud como método inferencial para los PSM a tiempo continuo.

Consideremos un proceso de saltos de Markov  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  con espacio de estados finitos  $E = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  y generador infinitesimal  $Q$  como se observó en la Sección 1.1.1. Una trayectoria observada dado el intervalo  $[0, T]$  se caracteriza por el número de saltos, secuencia de estados visitados y el tiempo recurrido entre cada estado visitado dentro de ese intervalo; por lo que la trayectoria observada  $X = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$  se puede representar como una secuencia ordenada:

$$\{X_t\}_{0 \leq t \leq T} = \{(x_1, \Delta_1), (x_2, \Delta_2), (x_3, \Delta_3), \dots, (x_n, \Delta_n), x_{n+1}\}$$

Leeremos que la trayectoria observada comienza en  $x_1$  al tiempo 0, permanece en  $x_1$  por  $\Delta_1 = t_2 - t_1$  unidades de tiempo, hace un salto a  $x_2$ , permanece en  $x_2$  por  $\Delta_2 = t_3 - t_2$  unidades de tiempo y así sucesivamente, hasta que salta a  $x_n$  permanece ahí por  $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$  unidades de tiempo y luego hace el salto final a  $x_{n+1}$  y permanece ahí hasta el tiempo  $T$ .

Observemos que en total se han realizado  $n$  saltos. Para un mayor análisis sobre la función de verosimilitud se puede revisar el Capítulo 2 del Billingsley [8].

Para fines de nuestro trabajo presentaremos explícitamente la función de verosimilitud para un proceso de saltos de Markov con una trayectoria observada  $X$  a tiempo continuo y condicionado a un estado inicial dado:

$$\begin{aligned} L_T^c(Q) &= P((x_1, \Delta_1), (x_2, \Delta_2), (x_3, \Delta_3), \dots, (x_n, \Delta_n), x_{n+1}) \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} q_{ij}^{N_{ij}(T)} \exp(-q_{ij} R_i(T)), \end{aligned}$$

donde  $N_{ij}(T)$  es el número de saltos del estado  $i$  al estado  $j$  y  $R_i(T)$  es el tiempo total esperado en el estado  $i$  durante el horizonte de tiempo  $[0, T]$ . Por lo tanto, las estadísticas suficientes del proceso de saltos de Markov es el tiempo esperado en cada estado  $R_i(T)$  y el número de saltos entre dos estados cualesquiera  $N_{ij}(T)$ . Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud (EMV) del  $ij$ -ésimo elemento de  $Q$  primero consideraremos la log-función de verosimilitud:

$$\log L_T^c(Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} [N_{ij}(T) \log(q_{ij}) - q_{ij} R_i(T)],$$

por el criterio de la primer derivada es fácil calcular el EMV a partir de:

$$\frac{\partial \log L_T^c(Q)}{\partial q_{ij}} = 0,$$

de igual manera se puede consultar [8] para demostrar el criterio de la segunda derivada. Así el estimador de máxima verosimilitud es:

$$\hat{q}_{ij}(T) = \frac{N_{ij}(T)}{R_i(T)}.$$

Finalmente observemos que  $\hat{q}_{ij}(T)$  existe, siempre y cuando  $R_i(T) > 0$ , es decir, si el proceso no ha estado en el estado  $i$ , no hay información sobre  $q_{ij}$  en los datos, y el estimador de máxima verosimilitud de  $q_{ij}$  no existe.

### 2.1.1. Propiedades asintóticas

En esta subsección analizaremos numéricamente algunas propiedades del estimador máximo verosímil para un PSM (la consistencia y eficiencia).

En principio estudiaremos teóricamente que el estimador máximo verosímil es consistente asintóticamente, mencionaremos el siguiente teorema que nos dice las condiciones para decir que un estimador es consistente asintóticamente.

**Teorema 2.1.** *Sea un PSM  $\{X_t\}_{t>0}$  ergódico <sup>1</sup> con generador  $Q$  y espacio de estados  $E$ , el estimador máximo verosímil del generador infinitesimal  $\hat{q}_{ij}(T) = \frac{N_{ij}(T)}{R_i(T)}$  convergen casi seguramente al verdadero*

<sup>1</sup>Se dice que un PSM  $\{X_t\}_{t>0}$  es ergódico si es irreducible y recurrente positivo.

parámetro  $q_{ij}$  cuando  $T$  tiende a infinito, para todo  $i, j \in E$ . Más aún

$$\|Q - \hat{Q}(T)\|_{\infty} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{c.s.} 0,$$

donde  $\hat{Q} = (\hat{q}_{ij})$  y  $\|\cdot\|$  denota la norma usual en el espacio euclidiano. En otras palabras el estimador  $\hat{Q}(T)$  es consistente.

*Demostración.* Se puede seguir de la Subsección 4.2.2 de [4]. □

Observemos el siguiente ejemplo para analizar si el estimador es consistente y eficiente. Se simuló una trayectoria de un PSM usando el Código A.1, con la siguiente matriz infinitesimal

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

probabilidad inicial  $\alpha = (1/3, 1/3, 1/3)$  y horizonte de tiempo  $T = 1000$ .

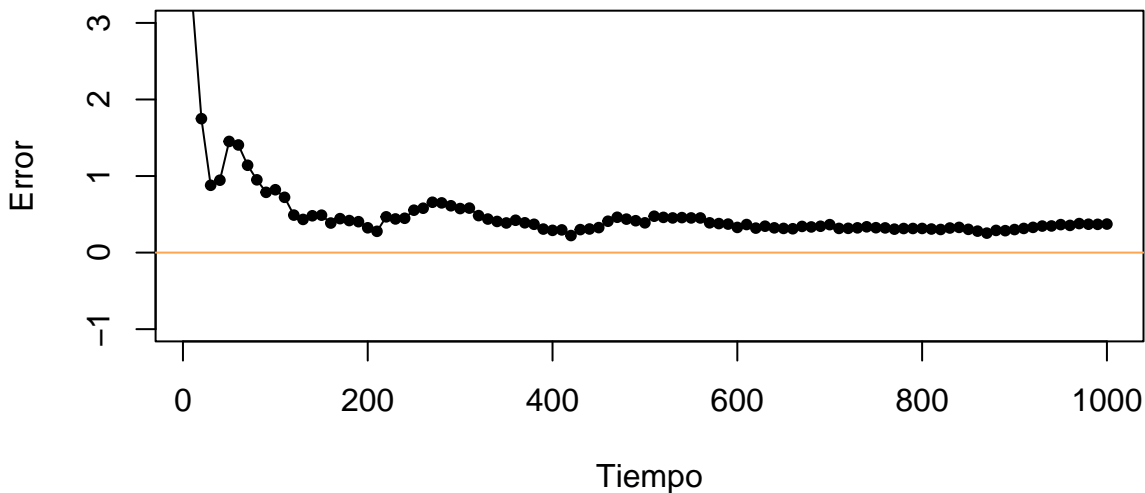


Figura 2.1: Consistencia obtenida a 10 cortes con el Código A.5.

En la Figura 2.1 se muestra la distancia entre el generador infinitesimal y el estimador conforme un horizonte de tiempo para una trayectoria con los parámetros mencionados anteriormente y cortes de 10. Se cortó la trayectoria cada 10 tiempos y se obtuvo el EMV para cada corte, finalmente se obtiene la norma entre cada estimador y el generador infinitesimal, al cual le llamamos error y se observa que conforme el tiempo tiende a infinito la distancia tiende a cero, es decir que el estimador es consistente asintóticamente.

Ahora bien, mencionaremos el teorema que nos dice cuando el estimador máximo verosímil es eficiente.

**Teorema 2.2.** Sea  $\{X_t\}_{t>0}$  un PSM con espacio de estados  $E = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  y  $Q$  su correspondiente generador infinitesimal, suponemos además que es ergódico entonces

$$\sqrt{T} \left( \hat{Q}(T) - \bar{Q} \right) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} N(\bar{0}, \bar{\Lambda}),$$

donde  $\bar{\Lambda} = \lim_{T \rightarrow \infty} T (i_T(\bar{Q}))^{-1}$ , y  $\hat{Q}(T)$  y  $\bar{Q}$  son el estimador y el generador infinitesimal sin la diagonal, respectivamente. Además  $(i_T(\bar{Q}))^{-1}$  es la inversa de la matriz de información de Fisher.

*Demostración.* Se puede seguir de la Subsección 4.2.2 de [4]. □

Considerando el mismo generador infinitesimal del PSM pasado se hizo una recopilación de 1000 trayectorias con un horizonte de tiempo  $[0, 10000]$ , a las cuales les fue estimada su matriz infinitesimal (o estimador máximo verosímil  $\hat{Q}(T)$ ) con los Códigos A.6 y se obtuvieron:

$q_{ij}$	$\widehat{q}_{ij}$	$(IC_{q_{0.025}}$	$IC_{q_{0.975}})$
$q_{12} : 1$	0.9989934	0.9628174	1.0339354
$q_{13} : 2$	2.000159	1.949366	2.054036
$q_{21} : 2$	1.999757	1.933176	2.070966
$q_{23} : 3$	3.001638	2.918438	3.085464
$q_{31} : 1$	1.000486	0.9745924	1.0269844
$q_{32} : 1$	1.000225	0.9739574	1.0259211

Tabla 2.1: Estimadores  $\widehat{q}_{ij}$  e intervalos de confianza.

En la Tabla 2.1 podemos observar que se construye de cuatro importantes columnas, en la primera las entradas de la matriz infinitesimal  $Q$ , la segunda contiene la media de los estimadores ( $\widehat{q}_{ij}$ ) de las 1000 trayectorias simuladas y las ultimas dos filas son las entradas de los intervalos de confianza. Ahora bien, que  $q_{ij} \approx \widehat{q}_{ij}$  y  $\widehat{q}_{ij} \in (IC_{q_{0.025}}, IC_{q_{0.975}})$  significa que el estimador parece insesgado y la cobertura de su intervalo de confianza es adecuada.

## 2.2. Inferencia estadística para PSM con información a tiempo discreto

En esta sección se estudiará la inferencia estadística dado registros u observaciones a tiempo discreto. Inicialmente elegiremos un método para poder simular trayectorias de un PSM a partir de puentes markovianos (ya visto en la Sección 1.4), a partir del algoritmo de Muestreo de Rechazo (REJ), también consideraremos que para poder estimar el generador infinitesimal  $Q$  con el que generaremos el PM nos apoyaremos del Algoritmo Esperanza-Maximización, los cuales estudiaremos a continuación.

Para esta sección consideraremos los tiempos discretos  $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_m = T\}$  para alguna  $m \in \mathbb{N}$  y sus respectivas observaciones  $Y = \{X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_m} = x_m\}$ .

### Muestreo de Rechazo (REJ)

En el caso de tener observaciones a tiempo discreto, tenemos que estimar las estadísticas suficientes (tiempo pasado en cada estado  $R_i(T)$  y el número de saltos entre dos estados cualesquiera  $N_{ij}(T)$ ) condicionadas a las observaciones a tiempo discreto. En esta situación, necesitaremos un método eficiente para crear trayectorias de un PSM que comiencen con el valor observado y terminen en el momento del siguiente valor de una observación de muestra.

Retomaremos el Algoritmo 2 para simular Puentes Markovianos, ya que en esta sección mostraremos un ejemplo numérico de éstos. Éste va simulando trayectorias de un PSM con el estado inicial  $a$  y horizonte de tiempo  $s$ , el algoritmo termina en cuanto una trayectoria simulada termina en el estado  $b$ .

### Estimación del generador infinitesimal $Q$

Para poder generar los puentes markovianos por el método REJ es necesario tener el generador infinitesimal adecuado, así una manera de poder estimar el generador infinitesimal  $Q$  es a través del siguiente algoritmo, el cual se puede consultar en [3].

Con intención de describir de forma legible el algoritmo definiremos a  $\Delta$  como el intervalo de tiempo de saltar del estado  $i$  al estado  $j$ .

---

#### Algoritmo 3: Algoritmo EM (Esperanza-Maximización) para estimar $Q$

---

**Input:**  $Q^0$  arbitraria y trayectoria observada  $Y$

**Result:** Estimación de la matriz  $Q$

- 1 Elegimos un valor inicial  $Q^0$  y hacemos  $k = 0$ ;
  - 2 Simulamos una trayectoria continua  $X^T$ , usando el actual  $Q^k$  condicionado a  $Y$ ;
  - 3 **repeat**
  - 4     **Paso-E.** Estimamos la estadística suficiente  $\hat{N}_{ij}(T)$  y  $\hat{R}_i(T)$  usando  $X^T$  donde:
 
$$\hat{N}_{ij}(T) = \mathbb{E} \left[ N_{ij}(T) | Q^k, Y \right] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E} \left[ N_{ij}(\Delta) | Q^k, x_{i-1}, x_i \right]$$

$$\hat{R}_i(T) = \mathbb{E} \left[ R_i(T) | Q^k, Y \right] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E} \left[ Ri(\Delta) | Q^k, x_{i-1}, x_i \right]$$
  - 5     **Paso-M.**

$$\hat{q}_{ij}^{k+1} = \frac{\hat{N}_{ij}(T)}{\hat{R}_i(T)}$$
  - 6     Actualizar  $Q^{k+1} = \left( \hat{q}_{ij}^{k+1} \right)_{i,j \in E}$ ;
  - 7      $k = k + 1$  y vamos al **Paso 2.**;
  - 8 **until** se cumpla un criterio de convergencia;
- 

El Algoritmo 3 inicia con una  $Q^0$  arbitraria, con la cual iremos simulando trayectorias continuas (construidas por puentes markovianos) condicionadas a las observaciones discretas, después se calcula el estimador de máxima verosimilitud (EMV) de la trayectoria simulada y con esa  $Q$  estimada se vuelve a simular una trayectoria continua. El algoritmo con esa  $Q$  estimada se repite hasta que el EMV converge al parámetro.

La convergencia  $Q^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Q$  nos dice que el algoritmo 3 converge al EMV de la trayectoria observada, se puede consultar en la Sección 3 de [7].

## 2.3. Ejemplo

En esta sección nos dedicaremos a observar qué tan próximas son nuestras estimaciones a tiempo discreto (considerando el Muestreo de Rechazo y el Algoritmo 3 para el Estimador del generador infinitesimal  $Q$



(en la Sección 2.2)) con respecto a nuestra información a tiempo discreto y las estimaciones calculadas, ya vistas en la Sección 2.1.

En principio tomamos la trayectoria continua con la que trabajamos en la Subsección 2.1.1, recordando que nuestro generador infinitesimal es

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y nuestro horizonte de tiempo  $s = 3,000$ ; usamos el Código A.8 para obtener nuestra muestra de observaciones discretas con la que trabajaremos en este ejemplo. Es importante considerar que la discretización se realizó con cortes de tamaño  $dt = \frac{1}{3}$ .

Ya con nuestras observaciones discretas aplicamos el Código A.10 para encontrar la  $Q$  con la que generaremos la trayectoria continua final. Y recordando que el Algoritmo 3 se corre desde la convergencia  $Q^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Q$ . Iniciamos el algoritmo con

$$Q_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

así después de  $k = 5,000$  estimaciones obtuvimos como último generador:

$$Q_{5000} = \begin{pmatrix} -3.200132 & 1.2691577 & 1.930974 \\ 2.019399 & -5.3619219 & 3.342523 \\ 1.066791 & 0.9847298 & -2.051520 \end{pmatrix}.$$

Por último, para verificar qué tan próxima son nuestras estimaciones (a tiempo discreto) respecto a los valores a tiempo continuo, consideramos el promedio de las últimas 1,000 estimaciones, así obtuvimos:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -3.063516 & 1.09399 & 1.969526 \\ 2.049842 & -5.197039 & 3.147197 \\ 0.9811856 & 1.021239 & -2.002425 \end{pmatrix}.$$

En el Cuadro 2.2 se muestran los valores reales del generador infinitesimal ( $q_{ij}$ ), el promedio de cada entrada de las últimas mil estimaciones ( $\widehat{q}_{ij}$ ) y el intervalo de confianza de cada entrada de las mil estimadas ( $ICq_{0.025}, ICq_{0.975}$ ).

$q_{ij}$	$\widehat{q}_{ij}$	$(ICq_{0.025})$	$(ICq_{0.975})$
$q_{21} : 2$	2.049842	1.809556	2.327419
$q_{31} : 1$	0.9811856	0.892659	1.068733
$q_{21} : 1$	1.09399	0.9699487	1.2127822
$q_{23} : 1$	1.021239	0.9306587	1.1191251
$q_{13} : 2$	1.969526	1.840156	2.092696
$q_{23} : 3$	3.147197	2.885783	3.373416

Tabla 2.2:  $\hat{Q}$  bajo el Algoritmo EM con  $k = 5,000$  estimaciones.

Observemos que los valores de cada entrada  $\widehat{q}_{ij}$  son muy próximos a los valores reales de nuestro generador infinitesimal, además que  $q_{ij} \in (ICq_{0.025}, ICq_{0.975})$ .

# Capítulo 3

## Modelos epidemiológicos

### 3.1. Modelo epidemiológico SIS

El objetivo de este capítulo es dar una introducción al modelo epidemiológico Susceptible-Infectado-Susceptible (SIS) en sus formas determinista y estocástica, este último considerado como un Proceso de Saltos de Markov. Además, se presentarán los algoritmos, códigos e inferencias asociados. Consultaremos el Capítulo 3 de [6] para el estudio de este capítulo.

#### 3.1.1. Modelo determinista SIS

El modelo epidemiológico SIS clasifica en dos posibles casos en que el individuo puede modificarse ante una epidemia: de susceptible a infectado y de infectado a susceptible, es decir que el individuo no desarrolla inmunidad ante una enfermedad.

Inicialmente definiremos las variables primordiales con las que se modelará:

- $S_t$  : número de personas susceptibles al tiempo  $t$ .
- $I_t$  : número de personas infectadas al tiempo  $t$ .
- $\beta$  : tasa de transmisión.
- $\vartheta$  : tasa de recuperación.

Es importante señalar que no consideraremos nacimientos ni muertes dentro de la evolución en la población, así que si  $N$  es el tamaño de la población donde  $N = S_t + I_t \quad \forall t$ , por lo que obtenemos el modelo:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{dt} = -\beta \frac{S_t I_t}{N} + \vartheta I_t \\ \frac{dI_t}{dt} = \beta \frac{S_t I_t}{N} - \vartheta I_t \end{cases}$$

Analizaremos el comportamiento de una población de  $N = 50$  individuos, tasa de transmisión  $\beta = 0.9$ , tasa de recuperación  $\vartheta = 0.5$  y un horizonte de tiempo de  $T = 100$  días, además la epidemia inicia con  $I_0 = 2$  infectados; simulada con el Código [A.12](#).

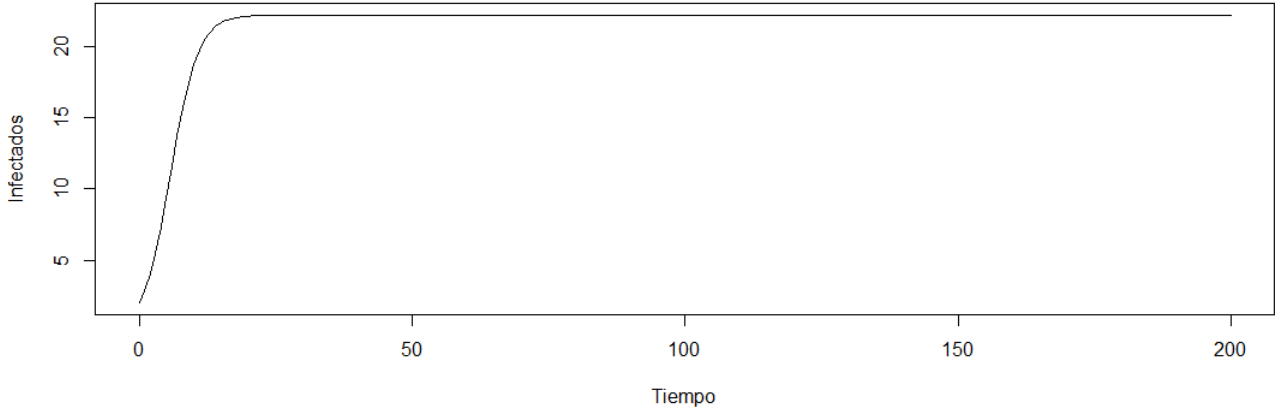


Figura 3.1: Evolución de infectados para el modelo determinista SIS con parámetros  $N = 50$ ,  $I_0 = 2$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $\vartheta = 0.5$  y un horizonte de tiempo de  $T = 200$ .

En la Figura 3.1 se muestra el comportamiento de infectados, los primeros 15 días el número de infectados crece de 2 a 20 infectados y el modelo se establece con 20 infectados hasta  $T = 200$ .

### 3.1.2. Modelo SIS como un PSM

En esta sección nos guiaremos de [6] para poder construir el modelo SIS estocástico. Consideremos las variables aleatorias:

$$\begin{aligned} S_t &: \text{número de personas susceptibles a tiempo } t. \\ I_t &: \text{número de personas infectadas a tiempo } t. \end{aligned}$$

Observemos que  $S_t, I_t \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$  con  $t \in [0, \infty)$ .

Como  $I_t = N - S_t$ , entonces  $I_t$  es una variable aleatoria independiente, así modelaremos bajo el proceso estocástico  $\{I_t\}_{t \geq 0}$ .

Las probabilidades de transición dependen del tiempo entre los eventos, es decir de  $\Delta t$  y no específicamente del tiempo  $t$ , por lo que estamos hablando de un proceso de tiempo homogéneo. Además dado el estado actual al tiempo  $t > 0$ , el estado futuro al tiempo  $t + \Delta t$  no depende de tiempos anteriores a  $t$ , es decir que cumple la propiedad de Markov, siguiendo esto tenemos las siguientes probabilidades de transición:

$$p_{ij}(\Delta t) = P(I_{t+\Delta t} = j \mid I_0, I_{\Delta t}, \dots, I_t = i) = P(I_{t+\Delta t} = j \mid I_t = i)$$

La segunda igualdad se da porque cumple la propiedad de Markov, ya que el estado futuro (al tiempo  $t + \Delta t$ ) sólo depende del estado en el que está en el presente (al tiempo  $t > 0$ ). Y como la probabilidad de transición no depende del tiempo, entonces el proceso  $\{I_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de tiempo homogéneo.

Considerando las tasas del modelo determinista, podemos definir las probabilidades de transición como:

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} \beta i \frac{N-i}{N} \Delta t & \text{si } j = i + 1 \\ \vartheta i \Delta t & \text{si } j = i - 1 \\ 1 - \left( \beta i \frac{N-i}{N} + \vartheta i \right) \Delta t & \text{si } j = i \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Finalmente podemos escribir el generador infinitesimal  $Q_{N+1 \times N+1}$  para el Proceso de Saltos de Markov  $\{I_t\}_{t>0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta & -(\beta \frac{s}{N} + \vartheta) & \beta \frac{s}{N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta(2) & -(\beta \frac{s(2)}{N} + \vartheta(2)) & \beta \frac{s(2)}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta(3) & -(\beta \frac{s(3)}{N} + \vartheta(3)) & \beta \frac{s(3)}{N} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vartheta(N-1) & -(\beta \frac{s(N-1)}{N} + \vartheta(N-1)) & \beta \frac{s(N-1)}{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vartheta N & -\vartheta N \end{pmatrix}$$

### 3.1.3. Ejemplo

Consideraremos una población de  $N = 50$  individuos, con una tasa de transmisión  $\beta = 0.9$ , tasa de recuperación  $\vartheta = 0.5$  e  $I_0 = 2$ . Es decir que simularemos un PSM con generador infinitesimal:

$$Q_{51 \times 51} = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.9 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -(0.9 \frac{49}{50} + 0.5) & 0.9 \frac{49}{50} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5(2) & -(0.9 \frac{(48)(2)}{50} + 0.5(2)) & 0.9 \frac{(48)(2)}{50} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.5(49) & -(0.9 \frac{49}{50} + 0.5(49)) & 0.9 \frac{49}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.5(50) & -0.5(50) \end{pmatrix},$$

distribución inicial  $\alpha_{51 \times 1} = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$  y horizonte de tiempo  $T = 200$ , apoyados del Código A.1. En la Figura 3.2 se muestran tres trayectorias del modelo epidemiológico SIS estocástico (la de color amarillo, azul y naranja), éstas siguen el comportamiento del modelo determinista SIS (curva negra).

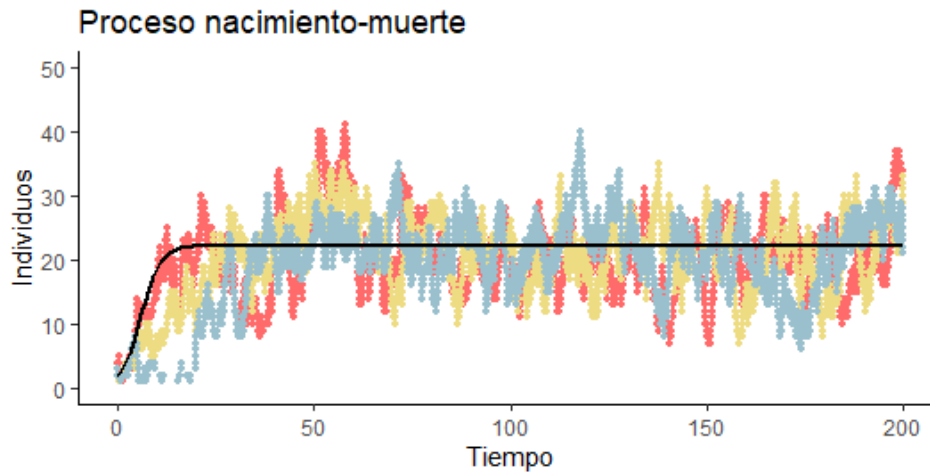


Figura 3.2: Trayectoria del modelo determinista (curva negra) y tres trayectorias estocásticas (procesos de colores) con parámetros  $N = 50$ ,  $I_0 = 2$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $\vartheta = 0.5$  y  $T = 200$ .

Usaremos la trayectoria roja de la Figura 3.2 para seguir con este ejemplo. Primero calcularemos su estimador máximo verosímil de esta trayectoria con el Código A.4 y con el Código A.7 calculamos sus tasas a partir del generador infinitesimal, obteniendo como promedio la tasa de transmisión  $\hat{\beta} = 0.8964$  y la tasa de recuperación  $\hat{\vartheta} = 0.5950$ .

Considerando 1,000 simulaciones del modelo SIS estocástico y calculando sus tasas a través del estimador del generador infinitesimal, se obtuvo:

$\beta$	$\hat{\beta}$	$(IC_{q_{0.025}}$	$IC_{q_{0.975}})$
0.9	0.8998	0.8976	0.9020
$\vartheta$	$\hat{\vartheta}$	$(IC_{q_{0.025}}$	$IC_{q_{0.975}})$
0.5	0.4991	0.4970	0.5011

Tabla 3.1: Estimaciones de tasas  $\beta$  y  $\vartheta$  de 1,000 simulaciones SIS estocásticas.

En el Cuadro 3.1 se muestran qué tan próximos se encuentran los valores estimados de los reales, el promedio de cada tasa considerando las estimaciones de las mil estimaciones y el intervalo de confianza  $(IC_{q_{0.025}}, IC_{q_{0.975}})$ .

## 3.2. Modelo epidemiológico SIR

En este capítulo desarrollaremos el modelo estocástico epidemiológico Susceptible-Infectado-Recuperado (SIR) sus conceptos, modelo, algoritmos y códigos; consecuente a la teoría ya trabajada en los capítulos anteriores.

### 3.2.1. Modelo determinista SIR

En esta sección estudiaremos el modelo epidemiológico determinista, éste nos servirá como base para formular el modelo estocástico epidemiológico, de igual manera nos servirá como parámetro para una comparación con el modelo estocástico. Para esta sección nos guiaremos de [1].

Para describir el modelo determinista utilizaremos las mismas variables ya vistas en la Sección 3.1.1 y añadiremos el nuevo estado en que puede estar el individuo si desarrolla inmunidad ante una enfermedad: recuperado, así que consideraremos una nueva variable:

$R_t$  : número de personas recuperadas al tiempo  $t$ .

De igual manera que el modelo SIS, para el modelo SIR no consideraremos nacimientos ni muertes así sólo supondremos que del estado infectado puede pasar al estado recuperado, es decir  $N = S_0 + I_0 + R_0$  es el tamaño de la población y el modelo determinista es:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta I \frac{S}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \beta I \frac{S}{N} - \vartheta I \\ \frac{dR}{dt} = \vartheta I \end{cases}$$

Observemos que el modelo sólo depende de dos variables, ya que  $R_t = N - S_t - I_t$ , así el sistema se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta I \frac{S}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \beta I \frac{S}{N} - \vartheta I. \end{cases}$$

Así con el Código A.13 encontramos la curva de infectados para una población de  $N = 200$  personas, tasa de transmisión  $\beta = 0.3$ , tasa de recuperación  $\vartheta = 0.1$  y un horizonte de tiempo de  $t = 100$  días.

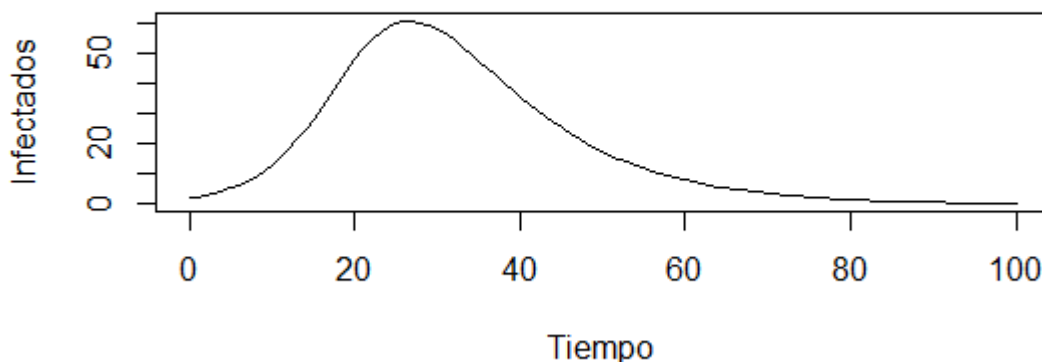


Figura 3.3: Evolución de infectados para el modelo determinista SIR con parámetros  $N = 200$ ,  $I_0 = 2$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\vartheta = 0.1$  y horizonte de tiempo de  $T = 100$  días.

En la Figura 3.3 se muestra el comportamiento de infectados en una población de  $N = 200$  personas, donde se observa que el máximo de infectados son  $I = 60$  al día  $t = 27$ .

### 3.2.2. Modelo SIR como un PSM

Para poder modelar estocásticamente el fenómeno nos guiaremos de [1], estudiaremos el algoritmo y modelo SIR estocástico. De igual manera que para el modelo SIS consideremos las variables aleatorias:

$$\begin{aligned} S_t & : \text{ número de susceptibles a tiempo } t. \\ I_t & : \text{ número de infectados a tiempo } t. \end{aligned}$$

Para entender el modelo como uno de PSM, necesitamos encontrar primero las probabilidades de transición, así denotaremos a las probabilidades de transición asociadas al proceso estocástico como:

$$p_{(s,i),(s+k,i+j)}(\Delta t) = P(S_{t+\Delta t}, I_{t+\Delta t} = (s+k, i+j) \mid S_t, I_t = (s, i)).$$

La probabilidades de transición son definidas en términos de las tasas del modelo determinista:

$$p_{(s,i),(s+k,i+j)}(\Delta t) = \begin{cases} \beta i \frac{S}{N} \Delta t + o(\Delta t) & \text{si } (k, j) = (-1, +1) \\ \vartheta i \Delta t + o(\Delta t) & \text{si } (k, j) = (0, -1) \\ 1 - \left( \beta i \frac{S}{N} + \vartheta i \right) \Delta t + o(\Delta t) & \text{si } (k, j) = (0, 0) \\ o(\Delta t) & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Es importante analizar los saltos de evento del modelo y con qué probabilidad pueden cambiar, así realizaremos la Tabla 3.2 en el que se observa el evento, cambio de estado y la probabilidad con la que se pueden mover los estados:

Evento	Cambio $(S, I)$	Probabilidad
Infección	$(-1, +1)$	$\beta i \frac{S}{N} \Delta t + o(\Delta t)$
Recuperación	$(0, -1)$	$\vartheta i \Delta t + o(\Delta t)$

Tabla 3.2: Supuestos del modelo SIR.

Analizando la Tabla 3.2 observamos que se puede pasar de ser susceptible a infectado con probabilidad  $\beta i \frac{S}{N} \Delta t + o(\Delta t)$  y se genera un cambio en las poblaciones, los susceptibles disminuyen una unidad y los infectados incrementan en una unidad. El otro caso es que un infectado se recupere, esto sucede con probabilidad  $\vartheta i \Delta t + o(\Delta t)$ , de igual manera las poblaciones son actualizadas, los susceptibles no generan un cambio pero los infectados disminuyen una unidad.

Ya teniendo los supuestos del modelo y la teoría ya vista en el Capítulo 1 y Capítulo 2, aplicaremos la parte teórica al modelo epidemiológico estocástico.

Finalmente llevaremos a cabo la práctica del estudio teórico con un ejemplo donde se simuló una población de  $N = 200$  individuos de los cuales al inicio de la epidemia se tienen  $I_0 = 2$  infectados, la tasa de transmisión es de  $\beta = 0.3$  y la tasa de recuperación  $\vartheta = 0.1$ .

Para simular el proceso de la población se utilizó el Código [A.11](#).

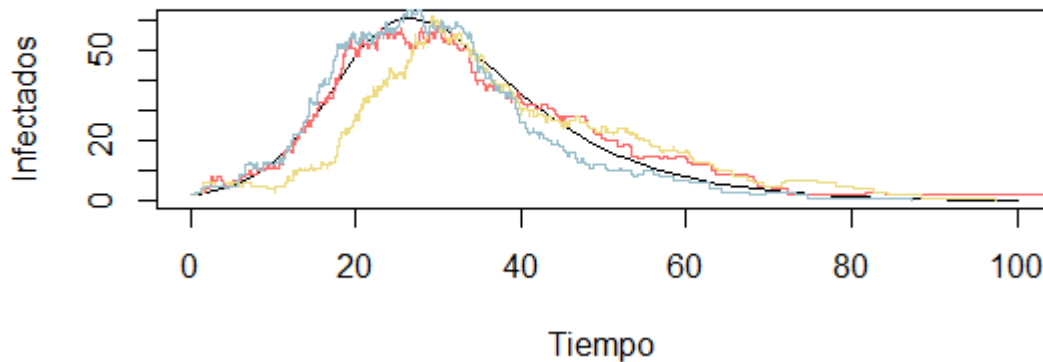


Figura 3.4: Trayectoria del modelo determinista y tres trayectorias estocásticas con parámetros  $N = 200$ ,  $I_0 = 2$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\vartheta = 0.1$  y  $T = 100$ .

En la Figura 3.4 se muestra la curva para el problema determinista de color negro (de la misma manera que se observa en la Figura 3.3) y las trayectorias del proceso estocástico se muestran de color naranja, amarillo y azul. Consideraremos la trayectoria de color azul para poder discretizarla, ya que visualmente se ajusta mejor a la del modelo determinista.

Antes de considerar la inferencia discreta, con el Código [A.14](#) estimaremos las tasas de la trayectoria azul, las cuales obtuvimos  $\hat{\beta} = 0.3040$  y  $\hat{\vartheta} = 0.0960$ , que son muy cercanos a los parámetros reales del modelo.

Ya simulado nuestro proceso estocástico, ahora necesitamos discretizar nuestras observaciones para poder realizar la inferencia de las tasas como lo realizamos en el Ejemplo 2.3 pero considerando esta vez para un modelo epidemiológico. Así con el Código [A.15](#) obtenemos la trayectoria discreta, la cual se representa en la Figura 3.5.



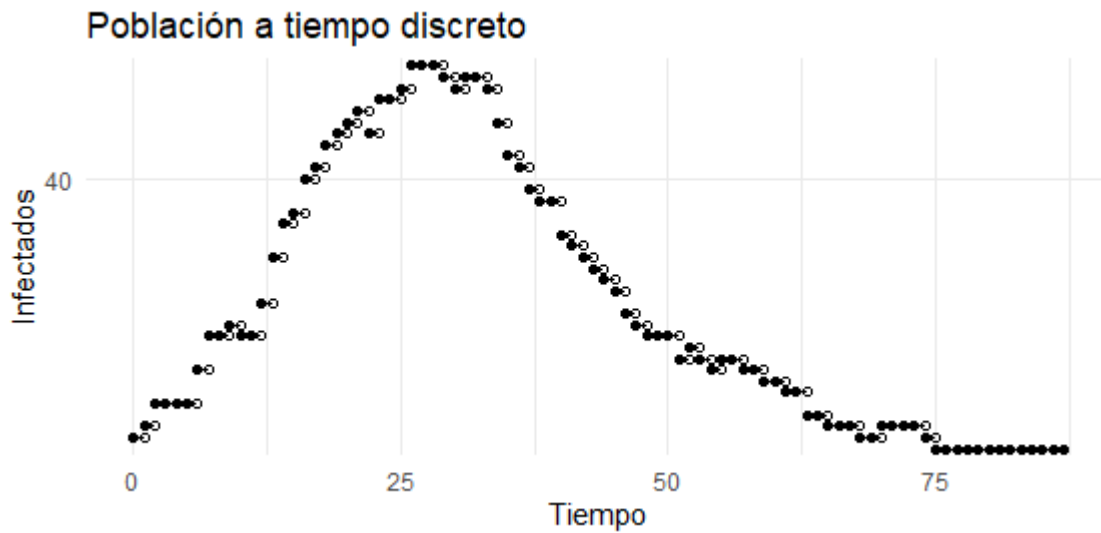


Figura 3.5: Trayectoria del modelo SIR a tiempo discreto con parámetros  $N = 200$ ,  $I_0 = 2$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\vartheta = 0.1$  y  $T = 100$ .

Para realizar la inferencia de las tasas de recuperación y contagio trabajaremos sobre la trayectoria de la Figura 3.5. Con el Código A.16 construimos la trayectoria discreta a una a tiempo continuo utilizando puentes Markovianos (visto en la Sección 1.4), finalmente obtenemos la trayectoria a tiempo continuo en la Figura 3.6.

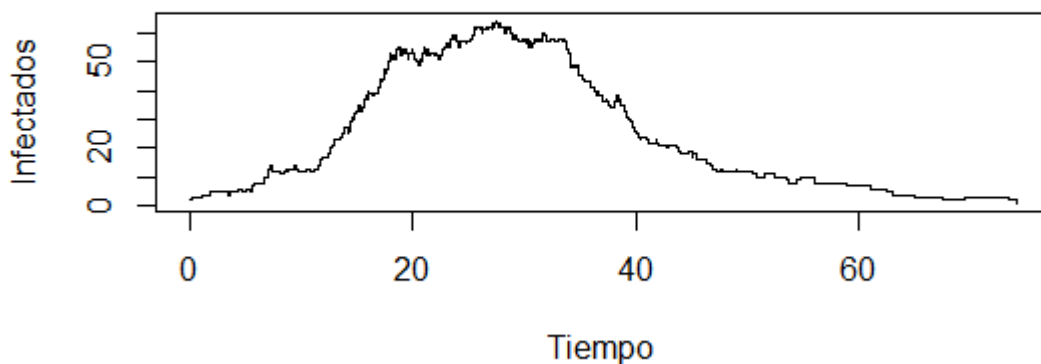


Figura 3.6: Trayectoria SIR construida por PM.

Así podemos inferir las respectivas tasas para la trayectoria de la Figura 3.6 y obtenemos  $\hat{\beta} = 0.2876$  y  $\hat{\vartheta} = 0.1052$ , las cuales se aproximan a las tasas inferidas de la trayectoria inicial a tiempo continuo (la trayectoria azul de la Figura 3.4) y de igual manera a los parámetros reales del modelo donde la tasa de transmisión es de  $\beta = 0.3$  y la tasa de recuperación  $\vartheta = 0.1$ .

## Capítulo 4

# Conclusión

La visualización estocástica de los modelos SIS y SIR nos permitió simular el fenómeno de manera natural como una simplificación de la realidad y encontrar una buena aproximación de la inferencia estadística de sus parámetros. En cuanto al modelo SIS estocástico simulamos la propagación de una enfermedad infecciosa y se lograron buenos estimadores puntuales con intervalos del 95 % que contiene a los parámetros estimados, eso nos da una buena aproximación de la estimación al modelo epidemiológico estocástico.

Finalmente bajo el estudio del modelo SIR estocástico hicimos el ejercicio de discretizar nuestro modelo estocástico para inferir los parámetros utilizando Puentes Markovianos, de igual manera se obtuvo una buena aproximación de los parámetros estimados con las tasas del modelo estocástico SIR inicial.

Cabe mencionar que con esta certeza de una buena aproximación de los parámetros también podemos confiar en la simulación de la evolución futura de una enfermedad infecciosa a partir de estos modelos epidemiológicos estocásticos, con el fin de tener información suficiente para toma de decisiones, prevenciones futuras y estudio de la transmisión sin experimentación animal.

También existen otros modelos para la simulación de los modelos epidemiológicos, esto dependiendo del objetivo de análisis, por ejemplo el proceso de ramificación suele ser una buena aproximación para el modelo SIR estocástico cuando el número de susceptibles es *suficientemente* grande ya que se puede calcular la probabilidad de que no se produzca un brote importante (*minor outbreak*), este proceso de ramificación se ven como un proceso de nacimiento y muerte (visto en la subsección 1.2.1) considerando sólo la dinámica de la población de los infectados.

Otra forma de analizar modelos epidemiológico es utilizando las ecuaciones diferenciales estocásticas de Kolmogórov (*forward* y *backward*) a través de las probabilidades de transición. Las ecuaciones *forward* suelen utilizarse para predecir el comportamiento a futuro, mientras que las ecuaciones *backward* se utilizan para analizar el fin de la epidemia (probabilidad de alcanzar un estado de absorción). La simulación numérica nos ayuda a encontrar una solución a estas ecuaciones, como es en el caso del algoritmo Gillespie que utilizamos para simular trayectorias del modelo epidemiológico estocástico SIR.

# Apéndice A

## Códigos de R

```
1
2 ctmc <- function(Q,pi,t){
3   s <- 0
4   n <- length(pi)
5   times <- c(0)
6   X <- sample(1:n,1,prob = pi)
7   Xn <- c(X)
8   P <- Q
9   diag(P) = 0
10  P <- P/apply(P, 1, sum)
11
12  while(s<t){
13    s <- s+ rexp(1,rate = -Q[X,X])
14    if(s>t){
15      times <- append(times, t)
16      Xn <- append(Xn, X)
17      break
18    }
19    times <- append(times,s)
20    X <- sample(1:n,1,prob = P[X,])
21    Xn <- append(Xn,X)
22  }
23  return(data.frame(t = times,Xn = Xn))
24 }
```

Listing A.1: Proceso de Saltos de Markov

```
1
2 distribucion_estacionaria <- function(trayectoria,n){
3
4   m <- nrow(trayectoria)
5   pi <- rep(0,n)
6   for (i in 100:(m-1)) {
7     pi[trayectoria$Xn[i]] <- pi[trayectoria$Xn[i]] +
8     trayectoria$t[i+1] -trayectoria$t[i]
9   }
10  return(pi/sum(pi))
11 }
```

Listing A.2: Distribución estacionaria

```

1
2 puente_rej <- function(t,a,b,Q){
3   n <- nrow(Q)
4   mu <- rep(0,n)
5   mu[a] <- 1
6   k <- 0
7   while(T){
8     k <- k+1
9     trayectoria <- ctmc(Q,mu,t)
10    if(tail(trayectoria$Xn,1) == b){
11      break
12    }
13  }
14  print(k)
15  return(trayectoria)
16 }

```

Listing A.3: Puente Markoviano

```

1
2 emv_continuo <- function(trayectoria,n){
3
4   N <- matrix(0,ncol = n,nrow = n,byrow = T) # Matriz de transicion
5   R <- rep(0,n) # Vector de tiempo en el estado i
6   m <- nrow(trayectoria)-1 # Numero de saltos
7   for (i in 1:m) {
8     N[trayectoria$Xn[i], trayectoria$Xn[i+1]] =
9     N[trayectoria$Xn[i], trayectoria$Xn[i+1]] +1
10    R[trayectoria$Xn[i]] <- R[trayectoria$Xn[i]] +
11    trayectoria$t[i+1] - trayectoria$t[i]
12  }
13
14  Q <- N/R
15  diag(Q) <- -apply(Q,1, sum)
16  return(Q)
17 }
18

```

Listing A.4: EMV Cadenas a tiempo continuo

```

1
2 consistencia_emv <- function(trayectoria,Q,step_time){
3   n <- nrow(Q)
4   index <- lapply(seq(0,tail(trayectoria$t,n=1),
5     step_time)[-1], function(i) trayectoria$t
6     <= i)
7   emv_by_time <- lapply(index, function(indx)
8     emv_continuo(trayectoria[indx,],n))
9   error <- sapply(emv_by_time, function(M)
10     norm(M-Q))
11   return(data.frame(t =
12     seq(0,tail(trayectoria$t,n=1),step_time)[-1],
13     error = error))
14 }

```

Listing A.5: Consistencia asintótica EMV

```

2 data_trayectoria <- lapply(1:1000, function(i)
3   ctmc(Q,c(1/3,1/3,1/3),10000))
4
5 emv_data <- do.call(rbind, lapply(1:1000, function(i)
6   cbind(emv_continuo(data_trayectoria[[i]],3),m=i) ))
7
8 entradas <- function(emv_data,k) { #k es el numero de trayectorias
9   entradas1_2 <- numeric(k)
10  entradas1_3 <- numeric(k)
11  entradas2_1 <- numeric(k)
12  entradas2_3 <- numeric(k)
13  entradas3_1 <- numeric(k)
14  entradas3_2 <- numeric(k)
15
16  for (i in 1:k) {
17
18    entradas1_2[i] <- emv_data[3*i-2,2]
19    entradas1_3[i] <- emv_data[3*i-2,3]
20    entradas2_1[i] <- emv_data[3*i-1,1]
21    entradas2_3[i] <- emv_data[3*i-1,3]
22    entradas3_1[i] <- emv_data[3*i,1]
23    entradas3_2[i] <- emv_data[3*i,2]
24
25    muestra_entradas <- data.frame(entradas1_2,entradas1_3,
26      entradas2_1,entradas2_3, entradas3_1,entradas3_2)
27  }
28  return(muestra_entradas)
29 }
30
31

```

Listing A.6: Eficiencia asintótica EMV

```

1
2 betgamest <- function(Qest,min, max){
3   betas <- numeric(max-min)
4   gamas <- numeric(max-min)
5
6   for (i in (min+1):max){
7
8     gamas[i] <- Qest[i,i-1]/(i-1)
9
10    if(Qest[i,i-1] != 0){
11
12      betas[i] <- Qest[i,i+1]/(((200-(i-1))*(i-1))/200)
13    }
14  }
15  return(data.frame(betas=betas, gamas=gamas))
16 }

```

Listing A.7: Estimación de tasas a partir del EMV

```

1
2 cortar <- function(trayectoria,dt){
3   t <- tail(trayectoria$t,1)
4   times <- seq(0,t,dt)
5   index <- sapply(times, function(s) tail(which(s>=trayectoria$t),1))
6   return(data.frame(times = times,

```

```

7           Xn = trayectoria$Xn[index]))
8     }

```

Listing A.8: Discretización de trayectoria de un PSM

```

1
2 trayectoria_pp <- function(tray_disc,Q,dt){
3
4     X <- tray_discr$Xn
5     n_cortes <- nrow(tray_discr)
6     puentes <- lapply(1:(n_cortes -1), function(i) puente_rej(dt, X[i],
7                       X[i+1], Q))
8     trayectoria_pp <- puentes[[1]][-nrow(puentes[[1]]),]
9
10    for(i in 2:(n_cortes-1)) {
11      puentes[[i]]$t <- puentes[[i]]$t + tail(puentes[[i-1]]$t,1)[1]
12      trayectoria_pp <- rbind(trayectoria_pp,puentes[[i]]
13                             [c(-1,-nrow(puentes[[i]])),])
14    }
15    return(trayectoria_pp)
16 }

```

Listing A.9: Construcción de trayectoria por Puentes Markovianos

```

1
2 alg_EM <- function(tray_disc,Q_0,k,dt){
3
4     tray_cont0 <- trayectoria_pp(tray_disc,Q_0,dt)
5     Qest_0 <- emv_continuo(tray_cont0,3)
6     Q_1 = Qest_0
7
8     for (i in 1:k) {
9       tray_cont <- trayectoria_pp(tray_disc,Q_1,dt)
10      Q_1 <- emv_continuo(tray_cont,3)
11    }
12    return(Q_1)
13 }

```

Listing A.10: Algoritmo EM

```

1
2 sir_gillespie <- function(S0,I0,N,beta,gamma,t){ #[I]_t, times
3     S=S0
4     I=I0
5     t_ev=0
6     times <- c(0)
7     St <- c(S)
8     It <- c(I)
9     proba <- numeric(2)
10    while(t_ev < t && I > 0){
11      lambda= ((beta*S*I)/N) + (gamma*I)
12      t_ev <- t_ev + rexp(1,rate=lambda)
13      if(t_ev > t){
14        break
15      }
16      times <- append(times,t_ev)
17      pi = c((beta*S*I/N)/lambda , (gamma*I)/lambda)
18      eventos <- sample(c(1,-1),1, prob = pi)

```

```

19
20   if(eventos==1){
21     I <- I + eventos
22     S <- S - 1
23   } else {
24     I <- I + eventos
25     S <- S
26   }
27   It <- append(It,I)
28   St <- append(St,S)
29 }
30 return(data.frame(It=It, St=St, times=times))
31 }

```

Listing A.11: Modelo SIR Gillespie

```

1
2 library(deSolve)
3
4 N = 200
5 est_ini <- c(S = N-2,
6             I = 2)
7 param <- c(beta = 0.3,
8            gamma = 0.1)
9
10 sis <- function(times, est_ini, param) {
11   with(as.list(c(est_ini, param)), {
12     dS <- -beta * (S/N) * I + gamma * I
13     dI <- beta * (S/N) * I - gamma * I
14     return(list(c(dS, dI)))
15   })
16 }
17
18 times <- seq(0, 100, by = 1)
19 out <- ode(y = est_ini, times = times, func = sis, parms = param)

```

Listing A.12: Modelo SIS determinista

```

1
2 library(deSolve)
3
4 N = 200
5
6 est_ini <- c(S = N-2,
7             I = 2,
8             R = 0)
9
10 param <- c(beta = 0.3,
11            gamma = 0.1)
12
13 sir <- function(times, est_ini, param) {
14
15   with(as.list(c(est_ini, param)), {
16
17     #ecuaciones diferenciales
18     dS <- -beta * (S/N) * I
19     dI <- beta * (S/N) * I - gamma * I
20     dR <-

```

```

21     #resultados de las tasas de cambio
22     return(list(c(dS, dI, dR)))
23   })
24 }
25 }
26
27 times <- seq(0, 100, by = 1)
28
29 out <- ode(y = est_ini, times = times, func = sir, parms = param)
30
31 out <- as.data.frame(out)
32
33 par(mfrow=c(1,1))
34 plot(times, out$I, type = 'l')

```

Listing A.13: Modelo SIR determinista

```

1 emv_tasas <- function(trayectoria,N){
2   k <- nrow(trayectoria)
3   n <- sum(trayectoria$It[1:(k-1)]<trayectoria$It[2:k])
4   m <- k - n #numero de eventos susceptibles
5   Ti <- trayectoria$times[2:k]-trayectoria$times[1:(k-1)]
6
7   beta_emv = n / sum(Ti*trayectoria$St[1:(k-1)]*trayectoria$It[1:(k-1)]/N)
8   gamma_emv = m / sum(Ti*trayectoria$It[1:(k-1)])
9
10  return(data.frame(beta_emv=beta_emv, gamma_emv=gamma_emv))
11 }
12 }

```

Listing A.14: Estimación de las tasas para modelo SIR a tiempo continuo

```

1 cortar_sir <- function(trayectoria,dt){
2   t <- tail(trayectoria$times,1)
3   times <- seq(0,t,dt)
4   index <- sapply(times, function(s) tail(which(s>=trayectoria$times),1) )
5   return(data.frame( times = times,
6                     St = trayectoria$St[index],
7                     It = trayectoria$It[index]) )
8 }
9 }

```

Listing A.15: Discretizar la trayectoria del modelo SIR

```

1 puente_rej_sir <- function(t,sa,ia,sb,ib,N,gama,beta){
2   k <- 0
3   while(T){
4     k <- k+1
5     trayectoria <- sir_gillespie(sa,ia,N,beta,gama,t)
6     if(tail(trayectoria$St,1) == sb && tail(trayectoria$It,1) == ib){
7       break
8     }
9   }
10 }
11 return(trayectoria)
12 }
13
14

```



```

15
16 trayectoria_por_puentes <- function(trayectoria,N,beta,gama,dt){
17   trayectoria_cortada <- cortar(trayectoria,dt)
18   S <- trayectoria_cortada$St
19   I <- trayectoria_cortada$It
20   n_cortes <- nrow(trayectoria_cortada)
21   puentes <- lapply(1:(n_cortes -1), function(i)
22     puente_rej_sir(dt, S[i],I[i],S[i+1],I[i+1],N,gama,beta))
23   trayectoria_pp <- puentes[[1]]
24   for(i in 2:(n_cortes-1)) {
25     puentes[[i]]$times <- puentes[[i]]$times + dt*(i-1)
26     trayectoria_pp <- rbind(trayectoria_pp,puentes[[i]][-1,])
27   }
28   return(trayectoria_pp)
29 }

```

Listing A.16: Trayectoria por puentes markovianos para el modelo SIR

```

1
2 emv_tasas <- function(trayectoria,N){
3   k <- nrow(trayectoria)
4   n <- sum(trayectoria$It[1:(k-1)]<trayectoria$It[2:k])
5   m <- k - n #numero de eventos susceptibles
6   Ti <- trayectoria$times[2:k]-trayectoria$times[1:(k-1)]
7
8   beta_emv = n / sum(Ti*trayectoria$St[1:(k-1)]*trayectoria$It[1:(k-1)]/N)
9   gamma_emv = m / sum(Ti*trayectoria$It[1:(k-1)])
10
11   return(data.frame(beta_emv=beta_emv, gamma_emv=gamma_emv))
12 }

```

Listing A.17: Estimación de las tasas para la trayectoria construida por PM para el modelo SIR

# Bibliografía

- [1] Linda J.S. Allen. A primer on stochastic epidemic models: Formulation, numerical simulation, and analysis. *Infectious Disease Modelling*, Volume 2(Issue 2):Pages 128–142, 2017.
- [2] S. Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer New York, 2010.
- [3] F. Baltazar Larios. *Estimation of some discretely observed Markov processes*. PhD thesis, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, 2011.
- [4] F. Baltazar-Larios. *Simulación e Inferencia de procesos de Markov con aplicaciones actuariales*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2020.
- [5] F. Baltazar-Larios and Luz Judith R. Esparza. A novel method and comparison of methods for constructing markov bridges. *arXiv preprint arXiv:2301.06098*, 2023.
- [6] Jianhong Wu F.Brauer, P. Driessche, editor. *Mathematical Epidemiology*. Springer Berlin, Heidelberg, 2008.
- [7] Søren F. Nielsen. The stochastic em algorithm: Estimation and asymptotic results. *Bernoulli*, Volume 6(no. 3):Pages 457–489, 2000.
- [8] P.Billingsley. *Statistical Inference for Markov Processes*. The University of Chicago Press, 1961.
- [9] L. Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2012.