



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES MORELIA
CIENCIAS ATMOSFÉRICAS, ESPACIALES Y PLANETARIAS

INTEGRACIÓN DE CÓDIGOS NUMÉRICOS PARA EL ESTUDIO ORBITAL DE NEOS Y SU INTERACCIÓN
CON LA ATMÓSFERA TERRESTRE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:
RAUL GUTIÉRREZ ZALAPA

TUTOR:
MARIO RODRÍGUEZ MARTÍNEZ
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES MORELIA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
ERNESTO AGUILAR RODRÍGUEZ
INSTITUTO DE GEOFÍSICA UNIDAD MICHOACÁN

JOAQUÍN ESTEVEZ DELGADO
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

MORELIA MICHOACÁN, DICIEMBRE DE 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos en primer lugar al Posgrado en Ciencias de la Tierra por todo el apoyo recibido para desarrollar este trabajo de investigación.

También agradecer a la Escuela Nacional de Estudios Superiores unidad Morelia así como a la Universidad Nacional Autónoma de México, por la estancia permitida para el desarrollo de esta tesis.

Agradezco también al Concejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnología (CONAHCyT) por la beca de doctorado otorgada para la realización de mis estudios.

De la misma manera agradezco infinitamente a mi tutor, el Dr. Mario Rodríguez Martínez por toda su dedicación hacia mi persona, por sus consejos, por su incondicional apoyo, por su destacado profesionalismo así como por las facilidades prestadas para la realización de estos códigos y de su implementación en el Laboratorio de Ciencias Geoespaciales (LACIGE), principalmente por creer en mi, en aquel ya lejano mayo de 2017, muchas gracias Dr. Mario. Le viviré agradecido siempre.

Quiero agradecer también, por la infraestructura en cómputo brindada desde el LACIGE para el desarrollo de este trabajo de investigación, al Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM PE: 103419, Fotografía Científica: una herramienta para el aprendizaje situado, así como al proyecto de Infraestructura de CONAHCyT INFR-2015-253691, Propuesta para equipar el Laboratorio de Ciencias GeoEspaciales de la ENES-UNAM unidad Morelia, ambos a cargo del Dr. Mario Rodríguez Martínez.

Deseo agradecer también a los miembros de mi comité tutorial, al Dr. Joaquín Estevez Delgado y al Dr. Ernesto Aguilar Rodríguez, que junto con mi asesor, han sabido guiarme durante estos 6 años (maestría y doctorado) de estudio. Al primero por aceptarme a formar parte de *el cubo* lugar donde crecí e hice grandes amigos y al segundo por todos sus consejos, porque sin serlo, me he sentido como su asesorado, mil gracias doctores.

Expreso mi gratitud al comité sinodal que ha sido seleccionado para la revisión de mi trabajo, a la Dra. Karina Cervantes, Dr. José Juan González, Dr. Lorenzo Olguín y al Dr. Joaquín Estevez. Muchas gracias por el tiempo invertido y por sus deseos de contribuir al mejoramiento de mi investigación.

Quiero agradecer a mi compañera de vida, Alo, por ya 9 años y a tambor batiente seguir caminando a mi lado, espero sean 1000 más, te amo, respeto y admiro mucho. A mis padres y hermano por siempre apoyarme y darme confianza, a mi tías y tíos, de Nahuatzen y Paracho, en especial a los de Morelia, que llevan 12 años dándome apoyo y comprensión.

Deseo agradecer a todos y cada uno de los profesores de los cuales recibí cátedra durante mi formación de posgrado, al Dr. Julio César Ambríz, Dra. Maria Sergeeva, Dr. José Juan González, Dr. Pedro Corona, Dr. Juan Américo González y Dr. Francisco Domínguez-Mota, en especial al Dr. Alejandro Raga[†], que en octubre de 2019, en el Instituto en Ciencias Nucleares comenzara el trabajo que hoy concluye, su aporte es invaluable. Dr. Raga, le extrañaremos y apreciaremos siempre. A todos muchísimas ¡gracias!

Finalmente, agradezco a mis familiares que ya no están en este plano terrenal, por sus consejos y por ayudar a formarme como persona, en especial a Petra, Consuelo, Raúl y Jesús, estoy seguro se sienten orgullosos de mi.

Parfraseando a Camüs:

*Por mucho, lo que sé sobre la voluntad y
las obligaciones de la humanidad,
se lo debo a mi familia y a la ciencia...*

Resumen

El estudio del impacto de los meteoroides con nuestro planeta es un tema de interés actual en el campo de las Ciencias Espaciales. Este trabajo estudia la dinámica de un meteoroide cuando ingresa a la atmósfera terrestre, los efectos que este fenómeno causa, así como, las implicaciones del impacto con el territorio mexicano. El trabajo consta de la implementación de dos códigos numéricos, escritos en PyThon, uno que resuelve las ecuaciones que modelan la dinámica de un meteoroide por la atmósfera terrestre y otro que calcula los efectos relacionados en el impacto del cuerpo sobre territorio mexicano.

Este trabajo muestra la implementación del código numérico el cual, utilizando el método de discretización de ecuaciones, resuelve las ecuaciones de la velocidad y masa. Obteniendo matrices numéricas que describen el comportamiento de estos parámetros, así como de sus productos (energía liberada y presión estática). Debido a la forma en cómo está estructurado el código, no se requiere de una ecuación explícita para el ángulo de vuelo, sino que este se puede determinar de las misma componentes, vertical y horizontal de la velocidad. El código también calcula la altura del break-up y burst además de admitir una ecuación para modelar la densidad interior del meteoroide. El código permite utilizar cualquier perfil para representar la densidad atmosférica de nuestro planeta. Las variables como coeficiente de arrastre, coeficiente de ablación o coeficiente de transferencia de calor no son restrictivas, como tampoco lo es la morfología del cuerpo. El código se puede utilizar en dos sentidos: uno es el de utilizar datos observacionales (*valores finales* en el código) como la velocidad, ángulo de vuelo, altura y una posible composición del cuerpo y con ello poder inferir los posibles *valores iniciales* (valores a una altitud de 100 km) de la velocidad, ángulo de ingreso, masa, diámetro. El otro sentido consta de utilizar valores teóricos, asumiendo un perfil de densidad del cuerpo, para modelar (o corroborar) el trayecto de un meteoroide por atmósfera terrestre, para esto último se usan *valores iniciales* de la velocidad, masa, ángulo de ingreso, diámetro y morfología del meteoroide; obteniendo *valores finales* para la velocidad, masa, ángulo vuelo, diámetro, altura del break-up y altura del burst.

El código anterior se utilizó para modelar tres escenarios, el primero fue recrear el evento del meteoroide de Chelyabinsk y dos hipotéticos de NEOs cuya probabilidad de impacto con la Tierra (en los próximos 100 años) es mayor a 1×10^{-4} . Para cada uno de los escenarios anteriores, se obtuvieron curvas relacionadas con la masa, velocidad, ángulo de vuelo, energía liberada y presión estática del cuerpo. Las curvas anteriores sirven para predecir las consecuencias ambientales y sociales que un evento como estos ocasionaría.

Finalmente, se uso el código que calcula los impactos de un NEO sobre el territorio mexicano, utilizando como condiciones iniciales de impacto, los valores finales del código mencionado en el párrafo anterior, aplicándolo al caso del evento de Chicxulub. Demostrando el acoplamiento entre ambos modelos, como un modelo viable para inferir los efectos que fenómenos de este tipo pudieran causar en nuestro país.

Como producto de esta tesis se presentaron tres trabajos de investigación; un artículo en una revista indexada y los otros presentados en congresos internacionales con arbitraje.

Abstract

The study of the impact of meteoroids with our planet is a topic of current interest in the field of Space Sciences. This work studies the dynamics of a meteoroid when it enters the Earth's atmosphere, the effects that this phenomenon causes, as well as the implications of the impact with the Mexican territory. The work consists of the implementation of two numerical codes, written in Python, one that solves the equations that model the dynamics of a meteoroid through the Earth's atmosphere and another that calculates the effects related to the impact of the body on Mexican territory.

This work shows the implementation of the numerical code which, using the equation discretization method, solves the velocity and mass equations. Obtaining numerical matrices that describe the behavior of these parameters, as well as their products (energy released and static pressure). Due to the way the code is structured, an explicit equation for the angle of flight is not required, but rather it can be determined from the same vertical and horizontal velocity components. The code also calculates the height of the break-up and burst as well as supporting an equation to model the interior density of the meteoroid. The code allows any profile to be used to represent the atmospheric density of our planet. Variables such as drag coefficient, ablation coefficient or heat transfer coefficient are not restrictive, nor is body morphology. The code can be used in two ways: one is to use observational data (*final values* in the code) such as speed, flight angle, height and a possible body composition and with this to be able to infer the possible *initial values* (values at an altitude of 100 km) of speed, angle of entry, mass, diameter. The other direction consists of using theoretical values, assuming a density profile of the body, to model (or corroborate) the path of a meteoroid through Earth's atmosphere, for the latter we use *initial values* of the speed, mass, angle of income, diameter and morphology of the meteoroid; getting *final values* for velocity, mass, flight angle, diameter, break-up height, and burst height.

The above code was used to model three scenarios, the first was to recreate the Chelyabinsk meteoroid event and two hypothetical NEOs whose probability of impact with Earth (in the next 100 years) is greater than 1×10^{-4} . For each of the previous scenarios, curves related to the mass, speed, angle of flight, energy released and static pressure of the body were obtained. The previous curves serve to predict the environmental and social consequences that an event like this would cause.

Finally, the code that calculates the impacts of an NEO on Mexican territory was used, using as initial impact conditions, the final values of the code mentioned in the previous paragraph, applying it to the case of the Chicxulub event. Demonstrating the coupling between both models, as a viable model to infer the effects that phenomena of this type could cause in our country.

As a product of this thesis, three research papers were presented; an article in an indexed journal and the others presented in oral format at an international congress with arbitration.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	IV
1. Formación y características de NEOs	9
1.1. Objetos cercanos a la Tierra	10
1.2. Clasificación de NEOs	10
1.2.1. Tamaño y condiciones orbitales	10
1.2.2. Composición	12
1.2.3. Origen	13
1.3. Estadísticas	14
2. Trayectoria de un NEO por la atmósfera terrestre	17
2.1. Presentación del análisis para la velocidad	18
2.2. Presentación del modelo para la masa	20
2.3. Análisis gráfico	21
2.3.1. Caso general de la velocidad	22
2.3.2. Altura de rompimiento e implementación de un análisis numérico-analítico	22
2.4. Desarrollo del código	23
3. Estudios orbitales sobre NEO's	29
3.1. Estudios de órbitas y colisiones	30
3.1.1. Una posible colisión	32
3.1.2. Órbitas estimadas por medio de la observación	33
3.1.3. Método de mínimos cuadrados ponderados	35
3.2. Dinámica orbital	37
3.2.1. Marcos de referencia para caracterizar el movimiento de un NEO en el espacio	37
3.2.2. Problema de dos cuerpos	38
3.2.3. Elementos orbitales clásicos	41
3.3. Las funciones de Bessel	44
3.3.1. Resolución de la ecuación de Kepler	47
3.4. Cálculo de geodésicas	48
3.4.1. Geodésicas en la métrica de Schwarzschild	49

3.5. Análisis de órbitas	52
3.5.1. Órbitas rodeadas con quintaesencia	57
4. Métodos numéricos	59
4.1. Diferencias finitas	60
4.1.1. Discretización en diferencias finitas	61
4.1.2. Discretización en volúmenes finitos	62
4.1.3. Tipos de diferencias finitas	62
4.2. La ecuación de advección	65
4.2.1. Prueba de la estabilidad	66
4.3. Ecuación de Burgers	67
4.4. Las ecuaciones de Euler	70
4.4.1. El problema de Riemann	72
4.4.2. Rarefacciones	73
4.4.3. Choques	75
4.5. Ecuaciones de Navier-Stokes	78
5. Casos de estudio	83
5.1. Evento de Chelyabinsk	85
5.2. NEO 2009 JF1	87
5.3. NEO 2023 DW	90
5.4. Modelado del impacto de asteroides sobre territorio mexicano	93
5.4.1. Velocidad terminal	93
5.4.2. Intensidad del sismo	94
5.4.3. Composición geológica	94
5.4.4. Efectos ambientales	94
5.5. Efectos en la infraestructura social	99
6. Conclusiones	101
Bibliografía	105

Índice de figuras

1.1.	Gráfica relativa al porcentaje de asteroides según su población. Imagen hecha con datos de Lupishko et al. (2006).	11
1.2.	Situación orbital de los tipos de NEAs. Imagen adaptada al español de NASA (2023b).	12
1.3.	Gráfica relativa al porcentaje de asteroides según su composición.	13
1.4.	Principales regiones de procedencia de los NEOs dentro del cinturón principal. Imagen realizada con datos de Bannister et al. (2019); Gladman et al. (2000).	14
1.5.	NEA descubiertos desde 1980 hasta la fecha, incluyendo población de PHA. Imagen tomada de NASA (2023a,b).	15
1.6.	Escala Torino que permite conocer la probabilidad de impacto en función de la energía liberada y del tamaño del impactor. Imagen tomada de: Stokes et al. (2017).	15
2.1.	Perfiles correspondientes a soluciones analíticas de las ecuaciones (2.14) y (2.20). . . .	21
2.2.	Representación de los dos tipos principales de perfiles atmosféricos. La flecha indica la posible incidencia de un NEO con nuestro planeta, como se puede observar en el panel derecho, el ángulo de incidencia del NEO no sería constante, mientras que en el panel izquierdo se asume que el objeto prácticamente viaja en línea recta. La abreviación CA _{Atm} significa capas atmosféricas.	24
2.3.	Gráficas de la velocidad y masa en función de la altura para el NEO 99942 Apophis. . .	26
2.4.	Gráficas de la energía liberada y presión estática en función de la altura para el NEO 99942 Apophis.	26
2.5.	Gráficas del ángulo y tiempo de vuelo en función de la altura para el NEO 99942 Apophis.	27
3.1.	Órbitas del cometa o asteroide <i>C</i> y de la Tierra <i>E</i> . Créditos: Roithmayr et al. (2005). . .	31
3.2.	Órbita verdadera y órbita determinada a partir de observaciones. Créditos: Roithmayr et al. (2005).	34
3.3.	Marcos de referencia astrofísicos. Créditos: Alvarez Guzman (2014).	37
3.4.	Marco de referencia cuerpo fijo. Créditos: Alvarez Guzman (2014).	38
3.5.	Diagrama del problema de los dos cuerpos. Créditos: Alvarez Guzman (2014).	39
3.6.	Elementos orbitales clásicos. Créditos: Alvarez Guzman (2014).	41
3.7.	Anomalía y excentricidad. Créditos: Battin (1999).	43
3.8.	Algunas funciones de Bessel de primera especie. Créditos: Korenev (2002).	46
3.9.	Cálculo de la órbita de asteroide 99942 <i>Apophis</i> utilizando mecánica clásica y relatividad. Créditos: Gutierrez-Zalapa et al. (2023a).	55

3.10. Acercamientos al afelio y perihelio con respecto a la Figura 3.9. Créditos: Gutierrez-Zalapa et al. (2023a).	55
3.11. Acercamientos a las intersecciones con la órbita terrestre con respecto a la Figura 3.9. Créditos: Gutierrez-Zalapa et al. (2023a).	56
3.12. Cálculo de la velocidad orbital del asteroide <i>99942 Apophis</i> utilizando mecánica clásica y relatividad. Créditos: Gutierrez-Zalapa et al. (2023a).	56
4.1. Una función genérica $y(x)$ muestreada en valores equidistantes de x . Créditos: Linge and Langtangen (2020).	63
4.2. Ilustración de cómo obtener ecuaciones en diferencias. Créditos: Linge and Langtangen (2020).	63
4.3. Una simple cuadrícula de diferencias finitas. La solución se almacena en cada uno de los puntos etiquetados. Las líneas de puntos muestran los puntos fantasma utilizados para extender la cuadrícula más allá de los límites físicos para adaptarse a las condiciones de frontera. Hay que tomar en cuenta que si existe periodicidad, entonces los puntos 0 y $N - 1$ están en el mismo punto físico en el espacio, por lo que solo se necesitaría actualizar uno de ellos. Créditos: Zingale (2017).	65
4.4. (Arriba) Distribución de velocidad inicialmente discontinua con velocidad baja a la izquierda de la velocidad alta (abajo). Estructura característica aproximada para la ecuación de Burgers, usando $u_0 = u(t)$. Créditos: Zingale (2017).	68
4.5. Un choque que se mueve hacia la derecha en el plano $x - t$ que separa dos estados: u_l y u_r . Créditos: Zingale (2017).	68
4.6. Solución a la ecuación de Burgers inviscida con 256 zonas y un número de Courant, $C = 0.8$ para condiciones iniciales que generan una rarefacción: la mitad izquierda del dominio se inicializó con $u = 1$ y la mitad derecha con $u = 2$. Esta velocidad inicial el estado crea un flujo divergente. Las curvas se muestran con una separación de $0.02 s$, y la escala de grises más oscura representa más tarde en el tiempo. Imagen obtenida de: Zingale (2017).	70
4.7. La estructura de onda, las regiones distintas y el salto o discontinuidad para el problema de Riemann. Créditos: Abgrall et al. (2017).	73
4.8. Comportamiento de la presión u - dirección, v - dirección en el espacio x, y, u, v . Imágenes creadas con un código propio implementando la discretización sugerida por Barba and Forsyth (2018).	80
4.9. Comportamiento de la presión p en el espacio x, y, p . Gráfica obtenida con los valores de $\nu = 0.1$, $c = 1$ y $\rho = 1$. Imágenes creadas con un código propio implementando la discretización sugerida por Barba and Forsyth (2018).	80
5.1. Gráfico de la velocidad y masa en función de la altura para el evento de Chelyabinsk.	85
5.2. Gráfico de la del ángulo y tiempo de vuelo en función de la altura para el evento de Chelyabinsk.	86
5.3. Gráfico de la deposición de energía y de la presión estática en función de la altura para el evento de Chelyabinsk.	86

5.4. Gráfico de la evolución del diámetro y de la densidad de la nube de escombros en función de la altura para el evento de Chelyabinsk. 87

5.5. Gráfico de la velocidad y masa en función de la altura para el NEO 2009 JF1. 88

5.6. Gráfico de la del ángulo y tiempo de vuelo en función de la altura para el NEO 2009 JF1. 89

5.7. Gráfico de la deposición de energía y de la presión estática en función de la altura para el NEO 2009 JF1. 89

5.8. Gráfico de la evolución del diámetro y de la densidad de la nube de escombros en función de la altura para el evento NEP 2009 JF1. 90

5.9. Gráfico de la velocidad y masa en función de la altura para el NEO 2023 DW. 91

5.10. Gráfico de la del ángulo y tiempo de vuelo en función de la altura para el NEO 2023 DW. 92

5.11. Gráfico de la deposición de energía y de la presión estática en función de la altura para el NEO 2023 DW. 92

5.12. Gráfico de la evolución del diámetro y de la densidad de la nube de escombros en función de la altura para el evento NEO 2023 DW. 93

5.13. El panel superior muestra el comportamiento del Porcentaje Global de Medio Ambiente Gravemente Afectado (GPESA, por sus siglas en inglés) en función de la energía liberada. Para un daño de 100% se requiere una energía del orden $\sim 1 \times 10^{24} J$. El panel inferior muestra el comportamiento de la energía en función de la velocidad del impacto. Para $v_i = 17 km/s$, el \cdot indica el valor obtenido para el valor de $E_i = 3.2 \times 10^{23} J$. 95

5.14. Este gráfico muestra la curva del radio de la bola de fuego en función de la energía liberada. El \cdot indica el valor obtenido para $R_f = 1.3 \times 10^5 m$ 96

5.15. Análisis gráfico del diámetro del cráter en función de la densidad del target. El \cdot indica el valor obtenido para del diámetro del cráter $D_{tc} = 1.3 \times 10^5 m$ 97

5.16. Análisis gráfico de la profundidad del cráter en función del diámetro del cráter. El \cdot indica el valor de la profundidad $d_{tc} = 4.8 \times 10^4 m$ 97

5.17. Análisis gráfico del terremoto en función de la energía del asteroide Chicxulub. El \cdot indica el valor obtenido para la magnitud del terremoto $M_w = 12.4$ 98

5.18. Análisis gráfico de la superficie afectada por la sobrepresión en función de la energía del asteroide Chicxulub. El \cdot indica el valor obtenido para el área afectada por la sobrepresión $S_R = 1.4 \times 10^7 km^2$ 98

Índice de tablas

2.1. Valores obtenidos a partir de pruebas en meteoritos y mezclas de hielos y rocas (Hills and Goda, 1993).	23
2.2. Datos de entrada para el asteroide (99942 Apophis) y ángulo de entrada a la atmósfera terrestre, parámetros usados para la implementación del código. Estos valores han sido obtenidos de NASA/JPL. *Asumiendo un cuerpo esférico.	25
3.1. Posición de la colisión. Créditos: Roithmayr et al. (2005).	33
3.2. Posición de la colisión. Créditos: Standish (1995).	42
3.3. Tipo de sección cónica. Créditos: Bate et al. (2020).	43
3.4. Datos orbitales del NEO 99942 Apophis. Créditos: Sentry CNEOS NASA.	54
5.1. Parámetros input para el evento de Chelyabinsk usados en la implementación del código.	85
5.2. Parámetros input para el evento teórico del NEO 2009 JF1 usados en la implementación del código.	88
5.3. Parámetros input para el evento teórico del NEO 2023 DW usados en la implementación del código.	91
5.4. Valores de impacto del asteroide de Chicxulub.	95
5.5. Resultados obtenidos implementando dos perfiles de densidad, valores obtenidos de (Gutiérrez-Zalapa et al., 2023).	99
5.6. Efectos infraestructurales causados por los efectos del diámetro del cráter y el radio de la bola de fuego.	100

Capítulo 1

Formación y características de NEOs

Una de las teorías más aceptadas sobre la formación de nuestro sistema solar es que éste comenzó hace 4,568 millones de años con el colapso gravitatorio de una nube molecular gigante. La mayor parte del material colapsado se solidificó en el centro para formar el Sol, y el resto se aplanó en el disco protoplanetario a partir del cual se formaron los planetas (Larson, 1994). Dicha nube molecular pudo haber sido el remanente de una supernova o una kilonova (Boss, 2006). La formación de los planetas interiores y exteriores se produjo a través de la cohesión del material sobrante de la formación estelar. Los objetos que no formaron parte de los planetas por sí mismos, quedaron atrapados como cuerpos errantes por la atracción gravitacional del Sol. A estos cuerpos que no pudieron formar planetas fueron llamados asteroides y cometas, la condición que define a cada uno de ellos es su lugar de formación, los asteroides se formaron como remanentes de los planetas interiores, mientras que los cometas de los planetas exteriores. Es en esta clase de cuerpos errantes en donde se centra la atención de este trabajo. Sobre todo, en aquellos cuya órbita los sitúa muy cerca de la Tierra, es decir, los NEOs (Near-Earth Objects), esto debido a las implicaciones de su cercanía o posible colisión. Ya que se considera que han generado cambios sustanciales en la historia del planeta, como por ejemplo en la configuración de la historia geológica y biológica (Alvarez et al., 1980).

Los NEO's se han convertido en un tema de interés creciente debido a una mayor conciencia del peligro potencial que algunos de los asteroides o cometas plantean. Por citar un ejemplo, al impactar la Tierra, los asteroides menores a 20 m causan ondas de choque y calor suficientemente fuertes como para dañar el entorno y poblaciones de cientos de habitantes (Rumpf et al., 2017).

De acuerdo con Rumpf et al. (2016), México tiene entre el 4 – 6% de probabilidad de que sea impactado por un NEO. Por ello es vital, incluso por Seguridad Nacional, contar con herramientas de software propias que permitan modelar la trayectoria por la atmósfera terrestre de los NEOs y sus posibles efectos en caso de que éstos impacten sobre el territorio mexicano. Nuestro país, que cuenta con un área aproximada de 1,964,375 km². En términos físicos, esta área representa una sección considerable y nada despreciable para que un objeto proveniente del espacio (cometas o asteroides), con cierta masa, velocidad y dirección, puedan impactar en nuestro territorio. Por ello, es importante contar con modelos que permitan hacer predicciones, con base en las condiciones iniciales generadas a partir de las observaciones, para saber qué tipo de daño pudieran causar a nuestro territorio (Gutiérrez-Zalapa et al., 2023).

1.1. Objetos cercanos a la Tierra

Por definición, un cuerpo menor del sistema solar es un NEO si su aproximación más cercana al Sol o perihelio (q) es menor que 1.3 unidades astronómicas (AU), donde una AU , equivale a 149, 597, 870, 700 metros o a la distancia media entre la Tierra y el Sol ([Morbidegli et al., 2002](#)).

Como se mencionó en la sección anterior, los NEO's son cometas y asteroides que, al ser remanentes de la formación del sistema solar, han sido empujados por la atracción gravitacional del Sol, así como de los planetas exteriores, principalmente Saturno y Júpiter, hacia órbitas que les permiten entrar al vecindario de la Tierra ([Cameron, 1995](#)). Los planetas se formaron a partir de una aglomeración de miles de millones de cuerpos y los restos de piezas de este proceso de formación que no se adhirieron a ningún cuerpo, son los cometas que hoy se observan, éstos están compuestos principalmente de hielo de agua mezclados con partículas de polvo, los cometas se formaron originalmente en el frío sistema planetario externo, de ahí las características de su composición. De la misma manera, los asteroides de hoy son las partes restantes de la aglomeración y formación inicial de los planetas interiores (véase [JPL-NASA, 2021](#)), cuerpos rocosos que sustentan esta teoría, se sitúan entre las órbitas de Marte y Júpiter, cuerpos que en su conjunto son llamados, cinturón de asteroides ([Morbidegli et al., 2002](#)).

Es importante señalar que el estudio de estos cuerpos errantes es trascendental si se quiere conocer más sobre el Universo, ya que estos son los remanentes del proceso de formación del sistema solar. Los cometas y los asteroides ofrecen pistas sobre la mezcla química de la que se formaron los planetas ([Garretson and Kaupa, 2008](#)).

1.2. Clasificación de NEOs

1.2.1. Tamaño y condiciones orbitales

Los objetos cercanos a la Tierra se clasifican como meteoroides, cometas o asteroides, según el tamaño y la composición. Los asteroides, así como los cometas, al acercarse lo suficiente a la Tierra (1.2 AU , aproximadamente) crean “colas” (objetos menores que acompañan al cuerpo principal) de meteoroides que pueden generar lluvias de meteoritos. A continuación, se definirán mejor, los conceptos antes dichos:

- Meteoroides: objetos con diámetro menor de 10 metros;
- Cometas Cercanos a la Tierra NEC's (por sus siglas en inglés): incluyen sólo los cometas de periodo orbital corto, inferior a 200 años y $q < 1.3 AU$;
- Asteroides: son la gran mayoría de los NEO's y se clasifican en tres grupos, según su semieje mayor, perihelio y afelio. Hasta el 12 de junio de 2023, se conocían más de 32,000 asteroides cercanos a la Tierra ([Garretson and Kaupa, 2008](#)). Los Asteroides Cercanos a la Tierra, NEA (por sus siglas en inglés) sobreviven en sus órbitas sólo durante unos pocos millones de años, pues eventualmente son eliminados por perturbaciones planetarias. El origen aceptado de estos

asteroides es que provienen del cinturón principal y se transfieren al sistema solar interior a través resonancias orbitales con Júpiter (Morbidei et al., 2002).

A partir de 1979, los objetos pertenecientes a la población de NEOs, que pueden acercarse y atravesar la órbita terrestre, se dividen tradicionalmente en cuatro grupos, de los cuales, para caracterizarlos mejor, se han empleado parámetros propios como semieje (a), perihelio (q) y afelio (Q) (Lupishko et al., 2006).

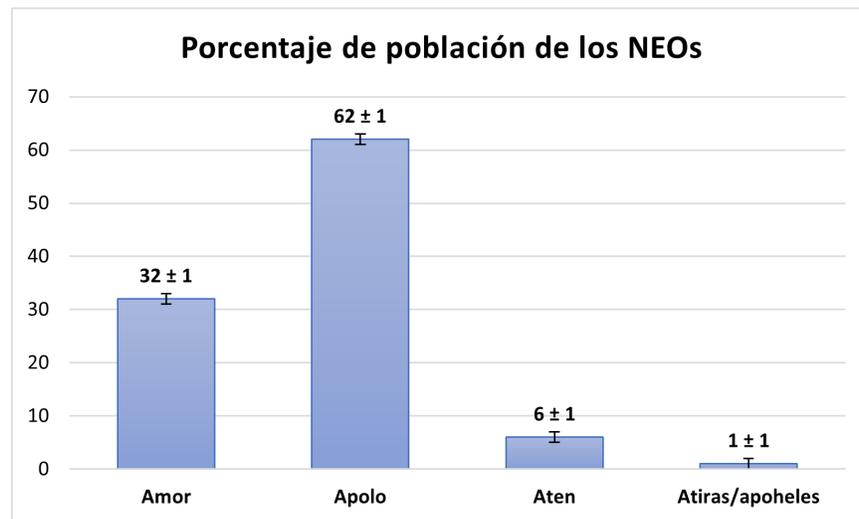


Figura 1.1: Gráfica relativa al porcentaje de asteroides según su población. Imagen hecha con datos de Lupishko et al. (2006).

Con base en lo anterior, a continuación, se describirá de manera más detallada a cada grupo. Para un mejor entendimiento de estos objetos, se hará uso de los parámetros anteriores como lo son: semieje mayor (a), perihelio (q) y afelio (Q), de esta manera poder definir más claramente sus características.

- **Los asteroides Atiras o Apoheles.** Presentan como características que Q es más pequeña que la distancia del perihelio de la Tierra ($0.983 AU$). Es decir, $Q < 0.983 AU$ (Badescu, 2013).
- **Los asteroides Atenas.** Tienen un semieje mayor de menos de $1 UA$ y cruzan la órbita de la Tierra. Matemáticamente, $a < 1 UA$ y $Q > 0.983 UA$. (Badescu, 2013).
- **Los asteroides Apolos (Apollos).** Tienen un semieje mayor de más de $1 UA$ y cruzan la órbita de la Tierra. Esto significa que $a > 1 UA$ y $q < 1.017 UA$.
- **Los Amores** tiene como características que su afelio está $1.017 UA < q < 1.3 UA$. Algunas órbitas de asteroides Amor cruzan la órbita de Marte (Mainzer et al., 2012)

Una representación de las órbitas de los NEAs se puede observar en la Figura 1.2. Una caracterización más profunda de estos cuerpos se puede encontrar en Gutiérrez-Zalapa et al. (2023).

- **Objetos Potencialmente Peligrosos.** Un objeto potencialmente peligroso es aquel cuya órbita le permite hacer acercamientos excepcionalmente cercanos a la Tierra y es lo suficientemente grande

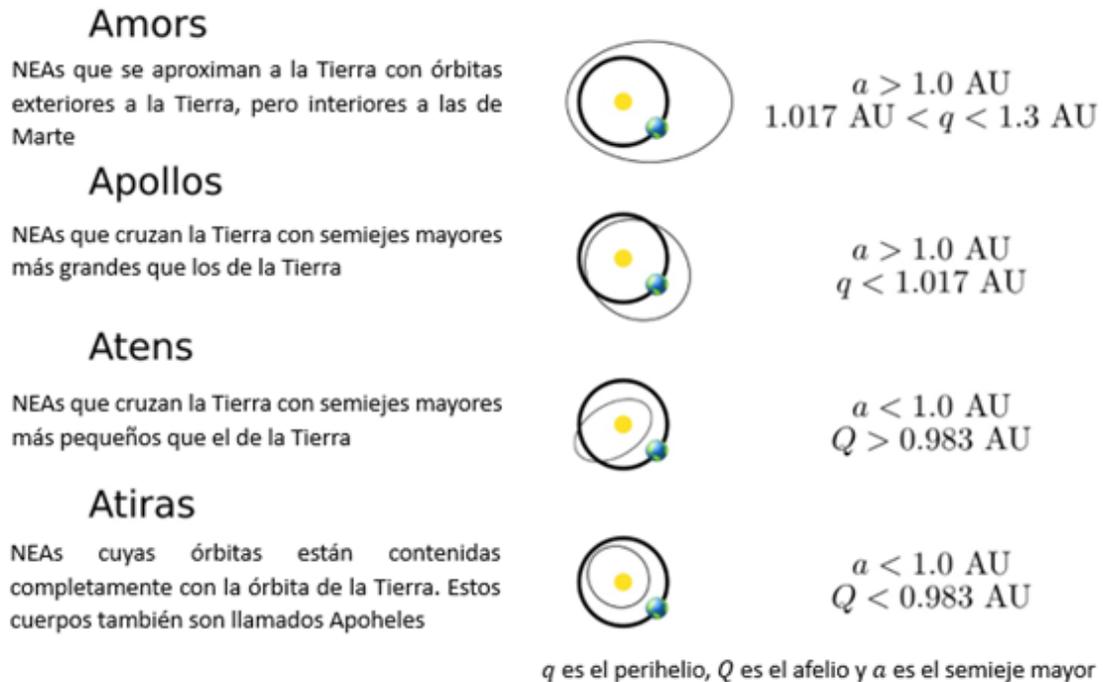


Figura 1.2: Situación orbital de los tipos de NEAs. Imagen adaptada al español de [NASA \(2023b\)](#).

como para causar un daño regional significativo en caso de impacto ([Atkinson et al., 2000](#)). Los asteroides potencialmente peligrosos se definen actualmente según los parámetros orbitales y de tamaño. Específicamente, tienen que cumplir que su Distancia de Intersección Orbital Mínima, (MOID, por sus siglas en inglés) con respecto a la Tierra sea de 0.05 AU o menor y tener una magnitud absoluta (H) de 22.0, es decir aproximadamente 140 metros de diámetro, con un albedo supuesto de 14%.

1.2.2. Composición

Se puede inferir que los asteroides tienen una gran variedad de composiciones químicas utilizando las muestras recopiladas de meteoritos, pero en términos generales, hay tres tipos de composiciones. Condritas, Silíceas y Níquel-Hierro. Estos se conocen respectivamente como tipo C, tipo S y tipo M ([Morbidelli et al., 2002](#)).

Los asteroides del cinturón exterior están compuestos predominantemente de carbono. Aquí es donde se encuentran asteroides de tipo C, estos asteroides están formados por una gran cantidad de carbono, ejemplos de este tipo de cuerpos son los NEOs (162173) Ryugu y (101955) Bennu ([Watanabe et al., 2019](#)), actualmente, objetos de estudio por misiones espaciales. Los elementos nitrógeno, oxígeno e hidrógeno también están presentes en los asteroides de este tipo, sin embargo, estos elementos se encuentran en cantidades más pequeñas, .

En el cinturón interior de asteroides, se localizan asteroides de tipo S. Estos asteroides están formados por roca de silicato. En el centro, se encuentran los asteroides de tipo M. Estos son asteroides metálicos.

Los asteroides de tipo M están compuestos hasta en un 80 % de hierro y un 20 % de una mezcla de níquel, iridio, paladio, platino, oro, magnesio y otros metales preciosos como el osmio y el rodio (Yamaguchi et al., 2023).

Los asteroides de tipo C son los más abundantes de todos los asteroides conformando el 80% de todos los NEOs descubiertos. Estos cuerpos tienden a encontrarse en el borde exterior del Cinturón de Asteroides, lo que significa que están más alejados del Sol Morbidelli et al. (2002).

Por su parte, los asteroides de tipo S existen en el borde interior del cinturón de asteroides. El borde interior está más cerca del planeta Marte. Están compuestos de hierro metálico, magnesio y materiales de silicato como el oxígeno y el silicio. Los asteroides de tipo S constituyen alrededor del 17 % de los asteroides en el cinturón de asteroides (Yamaguchi et al., 2023).

Los asteroides de tipo M ocupan el área central del cinturón de asteroides. Podría decirse que los asteroides de tipo M son más complejos de categorizar en lo que respecta a su composición química. En términos generales, los asteroides de tipo M están hechos de níquel-hierro. Sin embargo, existen diferencias de composición relacionadas con la distancia a la que se formaron del Sol, pues los cuerpos (de este tipo) que se encuentran más cerca del Sol presentan mayor carga de níquel-hierro (Crowe, 2019).

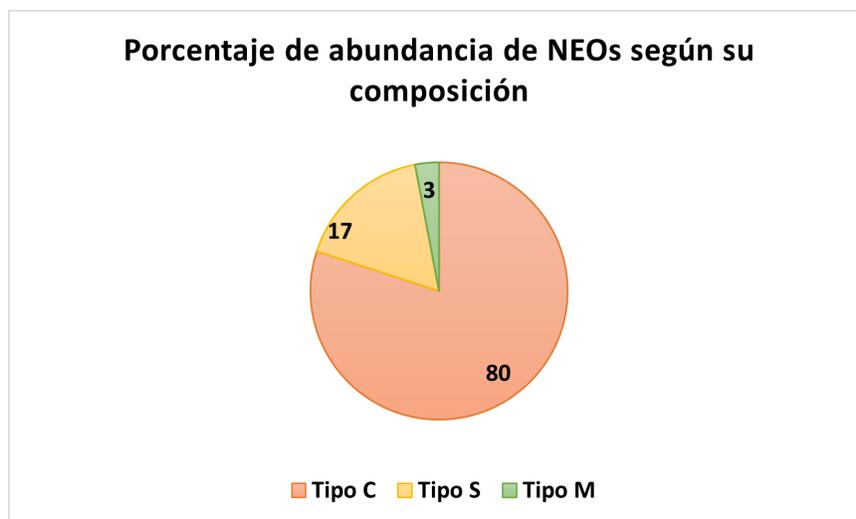


Figura 1.3: Gráfica relativa al porcentaje de asteroides según su composición.

1.2.3. Origen

Como ya se explicó en la sección anterior, los asteroides son remanentes de la formación del sistema solar. La gran mayoría de los asteroides que orbitan cerca de la Tierra (donde algunos de ellos se pueden considerar NEOs) provienen de dos lugares en específico, el cinturón de asteroides y el cinturón de Kuiper (Gladman et al., 2000), aunque este último aporta menos del 2 % de los NEOs. Estudios recientes sugieren que objetos extrasolares, debido a la atracción gravitacional del Sol, pudieran convertirse en NEOs (Bannister et al., 2019), aunque estos no representarían más del 1%. Para los fines que se persiguen en esta investigación ésta se concentrará sólo en los cuerpos provenientes del cinturón

principal de asteroides.

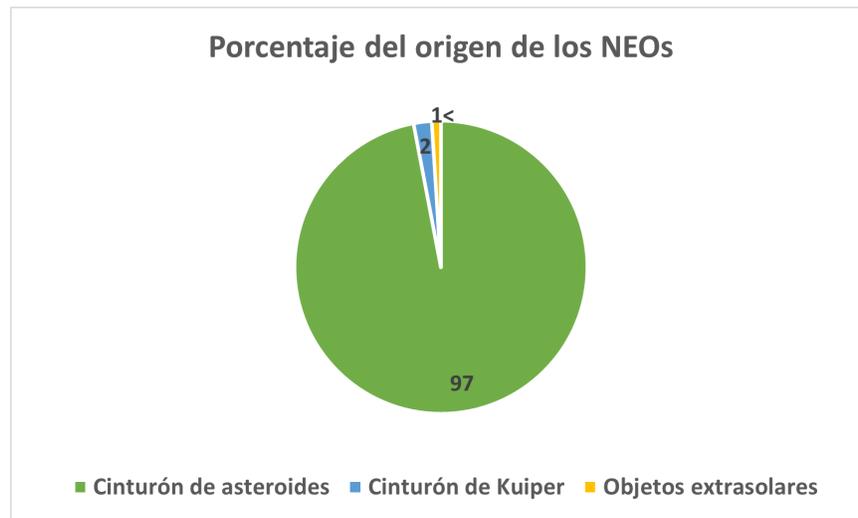


Figura 1.4: Principales regiones de procedencia de los NEOs dentro del cinturón principal. Imagen realizada con datos de [Bannister et al. \(2019\)](#); [Gladman et al. \(2000\)](#).

1.3. Estadísticas

Con más del 90% de los objetos cercanos a la Tierra de más de un kilómetro ya descubiertos, los programas de búsqueda de NEOs se están centrando ahora en encontrar el 90% de la población de NEOs mayor de 140 metros ([Garretson and Kaupa, 2008](#)). El tamaño de estos objetos se puede deducir aproximadamente de la magnitud absoluta estimada de un asteroide (H) y una reflectividad asumida (a) o albedo ([Stokes et al., 2017](#)).

A partir de mayo de 2023, se han clasificado 889 nuevos NEA's, incluyendo 151 PHA que miden al menos 1 km de diámetro. A partir del 12 de junio de este mismo año, según las estadísticas del sitio web [CNEOS](#), se han descubierto 18445 NEO's, 121 cometas cercanos a la Tierra y más de 32,100 asteroides cercanos a la Tierra, de estos últimos 2340 han sido clasificados como asteroides potencialmente peligrosos (PHA) véase [Figura 1.5](#).

Conociendo el tamaño de los NEO's, así como la probabilidad de impacto, es factible cuantificar el posible daño que uno de estos bólidos causaría si llegara a impactar con la Tierra. Para ello en 1999 la *International Astronomical Union* implementó la escala Torino como una herramienta para categorizar los posibles eventos de impacto en la Tierra. Esta escala consiste en números enteros que varían de 0 a 10 con codificación de colores asociada, destinada principalmente a facilitar la comunicación pública por parte de la comunidad de monitoreo de peligros de impacto de asteroides, [Figura 1.6](#). La escala muestra la probabilidad y las consecuencias de un evento de impacto potencial. Los eventos más extraordinarios están indicados por un valor numérico más alto.

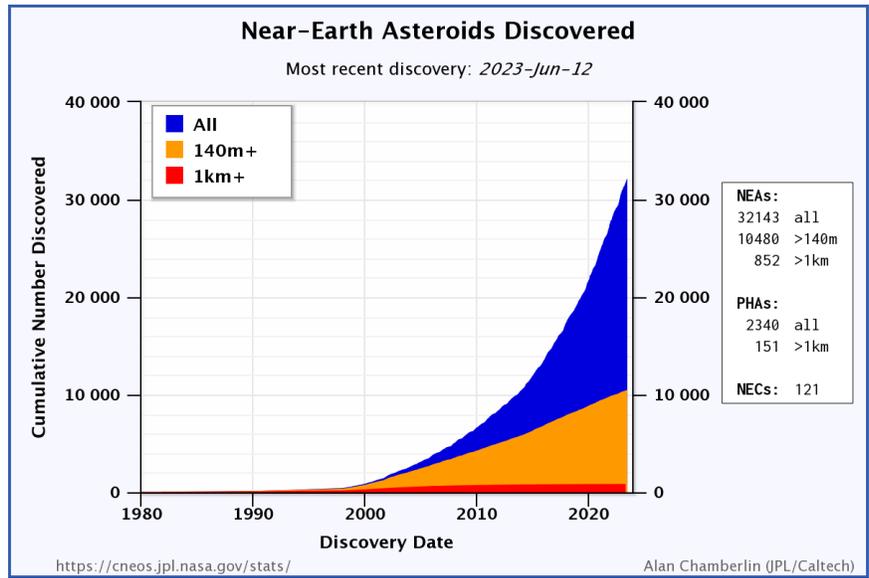


Figura 1.5: NEA descubiertos desde 1980 hasta la fecha, incluyendo población de PHA. Imagen tomada de NASA (2023a,b).

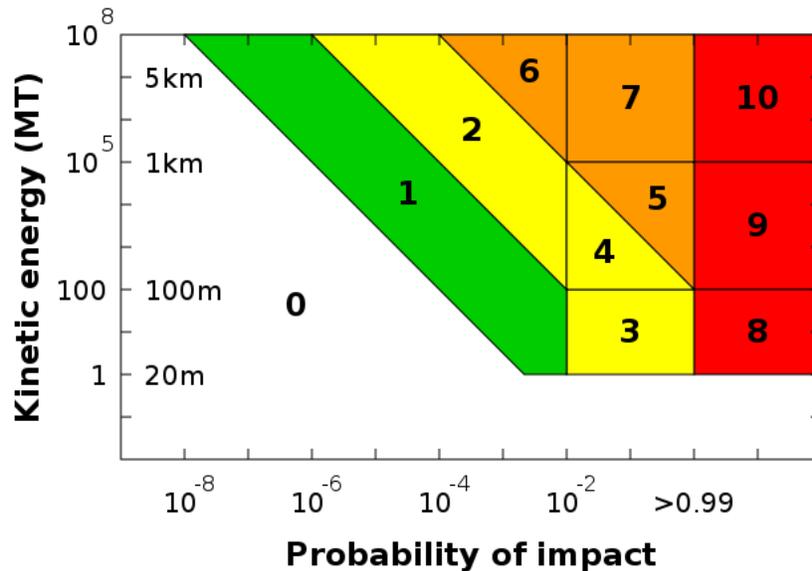


Figura 1.6: Escala Torino que permite conocer la probabilidad de impacto en función de la energía liberada y del tamaño del impactador. Imagen tomada de: Stokes et al. (2017).

Capítulo 2

Trayectoria de un NEO por la atmósfera terrestre

Durante la entrada del asteroide, debido a la fricción aerodinámica con la atmósfera se produce ablación térmica y la pérdida del ímpetu. Modelos analíticos de la entrada del asteroide y la física de la desintegración se utilizan para calcular la deposición de energía, que tiene como producto estimar el daño a la Tierra debido, por ejemplo, a acontecimientos como el “airburst”. El aporte de este trabajo es evaluar y comparar los resultados de la deposición de energía, modelar la ruptura de asteroides y presentar un nuevo modelo que resuelve, numéricamente, las ecuaciones de la dinámica de un objeto que ingresa a la atmósfera terrestre. Los enfoques existentes considerados incluyen una gota líquida o modelo de masa que trata el objeto como un solo cuerpo deformante y un conjunto de modelos discretos de fragmentos donde el objeto se rompe progresivamente en fragmentos individuales (Ceplecha, 1994; Silber et al., 2018). El nuevo modelo incorpora tanto fragmentos independientes como nubes de desechos agregados para representar una gama más amplia de comportamientos de fragmentación y producir características de curva de luz más detalladas. Estos modelos se utilizan para estimar la tasa de pérdida de energía en función de la altitud, para el impacto del meteorito tipo Chelyabinsk y los resultados se comparan con una curva de depósito de energía obtenida en forma analítica. Estas comparaciones muestran que el modelo coincide con el perfil de depósito de energía observado en general, pero las características del modelo combinado son necesarias para replicar mejor tanto los picos primarios y secundarios de la curva de comportamiento de un NEO cuando cruza la atmósfera terrestre (Silber et al., 2018; Svetsov et al., 1995).

Cuando un asteroide desciende a través de la atmósfera de la Tierra, las fuerzas de arrastre convierten porciones de su energía cinética en luz, calor y presión. La tasa de esta conversión de energía se denomina deposición de energía y se utiliza a menudo para estimar el posible daño a la superficie terrestre debido a ondas de choque o radiación térmica.

La primera ecuación del sistema (2.1) describe la tasa de cambio de velocidad en función de la masa, del coeficiente de arrastre C_d , morfología del objeto A_s , densidad atmosférica (que depende de la altura h), masa m y densidad del objeto ρ (Silber et al., 2018).

La segunda ecuación de (2.1) es la tasa de cambio de la masa, la cual depende del factor de transferencia de calor λ , morfología del objeto y coeficiente de calor de ablación Q , así como de la

velocidad de vuelo v .

La tercera ecuación de (2.1) es la parametrización del tiempo en términos de la altura h , velocidad v y ángulo de entrada θ medido con respecto a la horizontal [Collins et al. \(2005\)](#).

La cuarta ecuación describe la tasa de cambio del ángulo de vuelo del objeto en función de la velocidad v , radio de la Tierra R_E y la altura de vuelo del objeto en todo instante h .

Por último, la quinta ecuación establece el comportamiento del valor de la gravedad g como función de la altura h así como del valor de constante $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{C_d A_s \rho_a v^2}{m^{1/3} \rho^{2/3}} - g \sin \theta \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{\lambda A_s \rho_a v^3 m^{2/3}}{Q \rho^{2/3}} \\ dt &= -\frac{dh}{v \sin \theta} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{v}{R_E + h} + \frac{g}{v} \right) \cos \theta \\ g &= g_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^2 \end{aligned} \right\} \text{Modelado del paso de un NEO por la atmósfera terrestre.} \quad (2.1)$$

2.1. Presentación del análisis para la velocidad

Partiendo de la ecuación de balance de energía, el análisis físico-matemático que modela la dinámica de un asteroide a su paso por la atmósfera terrestre es:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \pi r_m^2 \Lambda \rho_a v^3}_A = \underbrace{4 \pi r_m^2 \epsilon \sigma_{SB} (T_s^4 - T_0^4)}_B + \underbrace{Q \frac{dm}{dt}}_C + \underbrace{\frac{4}{3} \pi r_m^3 \rho_m C \frac{dT_m}{dt}}_D, \quad (2.2)$$

donde A es la energía por área al chocar las moléculas de aire, B representa la pérdida radiativa, C es el calor consumido por la evaporación del material y D corresponde a la pérdida de energía debido a la conducción de calor. Limitando el análisis únicamente a los factores relacionados con la exposición a la ablación de un solo cuerpo, la velocidad del asteroide en su paso por la atmósfera, así como la masa que este pierde durante el mismo trayecto ([Chyba et al., 1993](#); [Silber et al., 2018](#)). Considerando un meteoroides con masa (m), radio (r_m), densidad (ρ_m) y área de sección eficaz (S), que se mueve a velocidad (v) y tiene un coeficiente de arrastre (C_D). El meteoroides luego barre un volumen de aire en un intervalo (dt), transfiriendo energía cinética a la atmósfera. Ahora se puede introducir el factor de forma adimensional (A_s), que relaciona el área de la sección media del meteoroides con su volumen (V_m) como $A_s = \frac{S}{v^{2/3}}$ ([Robertson and Mathias, 2019](#); [Silber et al., 2018](#)). En general, el área de la sección transversal eficaz se puede expresar en términos de la densidad medida en meteoritos y su masa:

$$S = A_s \left(\frac{m}{\rho_m} \right)^{2/3}. \quad (2.3)$$

El valor de A_s dependerá de la forma del meteoróide. Por ejemplo, para la esfera, $A_s = 1.21$ o para un hemisferio, $A_s = 1.92$. Tomando la ecuación de la densidad del aire como:

$$\rho_a = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}}, \quad (2.4)$$

donde ($\rho_0 \approx 1 \text{ kg/m}^3$) que es el valor de la densidad del aire en la superficie de la Tierra ($h = 0$) y H es la escala de altura ($H = 8.42 \text{ km}$). Ahora, por equilibrio de fuerzas, de la segunda ley de Newton se obtiene:

$$m \frac{dv}{dt} = -F_D - F_g, \quad (2.5)$$

es decir, el movimiento del objeto depende de la fuerza de arrastre F_D y del peso del objeto F_g . La ecuación (2.5) se convierte en:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{C_d A_s \rho_a v^2}{m^{1/3} \rho^{2/3}} - g \sin(\theta), \quad (2.6)$$

despreciando la contribución gravitacional F_g ligada al objeto (la razón se explicará en la sección (2.3.1)) se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{C_d A_s \rho_a v^2}{m^{1/3} \rho^{2/3}}, \quad (2.7)$$

es claro que si se resuelve la ecuación (2.7), dado que ésta no depende del tiempo, no se obtendría mucha información acerca de su trayectoria. Es decir, se obtendría:

$$v(t) = F_D(T_f - T_i), \quad (2.8)$$

siendo T_f y T_i tiempo final y tiempo inicial respectivamente.

Haciendo el siguiente cambio funcional, para la parametrización de la ecuación (2.7), propuesto por Collins et al. (2005) y Ceplecha (1994)

$$dt = -\frac{dh}{v \sin \theta}, \quad (2.9)$$

y sustituyendo el valor de A_s y de ρ_a , la ecuación (2.7) se escribiría como:

$$-\frac{dv}{dh} v \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{C_d S \rho_0 v^2}{m} e^{-\frac{h}{H}}, \quad (2.10)$$

de donde se obtiene

$$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{2} \frac{v C_d S \rho_0}{m \sin \theta} e^{-\frac{h}{H}}, \quad (2.11)$$

ahora por separación de variables, la ecuación anterior se deduce a:

$$\int_{v_0}^v \left(\frac{1}{v} \right) dv = \frac{1}{2} \frac{C_d S \rho_0}{m \sin \theta} \int_{h_0}^h \left(e^{-\frac{h}{H}} \right) dh, \quad (2.12)$$

lo que da como resultado:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = \frac{H}{2} \frac{C_d S}{m \sin\theta} \left(e^{-\frac{h_0}{H}} - e^{-\frac{h}{H}}\right), \quad (2.13)$$

donde finalmente

$$v(h) = e^{\frac{H}{2} \frac{C_d S}{m \sin\theta} \left(e^{-\frac{h_0}{H}} - e^{-\frac{h}{H}}\right)} v_0, \quad (2.14)$$

siendo h_0 y v_0 la altura inicial (el tope de la atmósfera) y la velocidad (la velocidad al entrar la atmósfera), respectivamente.

2.2. Presentación del modelo para la masa

De un análisis similar al de la sección anterior se puede establecer la forma funcional de la masa en función de la altura, es decir, si partimos de que la tasa de pérdida de masa por unidad de tiempo es (Silber et al., 2018):

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\lambda A_s \rho_a v^3 m^{2/3}}{Q \rho^{2/3}}, \quad (2.15)$$

donde λ es el coeficiente de transferencia de calor adimensional y Q es el calor latente de vaporización. Si el objeto es una esfera, se puede sustituir $\frac{\lambda}{Q} = C_d \sigma_{ab}$ (McMullan and Collins, 2019) y se sustituye el valor numérico del coeficiente de ablación $\sigma_{ab} = 1 \times 10^{-8} \text{ s}^2/\text{m}^2$ y $C_d = 1$ (Lobanovsky, 2014; Register et al., 2017). Por lo que la ecuación anterior (2.15) queda como:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{2} \sigma_{ab} \rho_a A v^3, \quad (2.16)$$

siendo A el valor del área transversal de la esfera (πr_i^2) con r_i como el valor del radio del *impactor*.

Para el caso general, se puede efectuar el mismo cambio funcional de la ecuación (2.9), donde la ecuación (2.15) queda como:

$$-\frac{dm}{dh} v \sin\theta = -\frac{1}{2} \frac{\lambda S \rho_0 v^3}{Q} e^{-\frac{h}{H}} \quad (2.17)$$

lo que a su vez, despejando $\frac{dm}{dh}$ queda como:

$$\frac{dm}{dh} = \frac{1}{2} \frac{v^2 \lambda S \rho_0}{Q \sin\theta} e^{-\frac{h}{H}} \quad (2.18)$$

Al igual que en la sección anterior, esta es una ecuación diferencial de variables separables, que resolviendo se expresa de la siguiente manera:

$$\int_{m_0}^m 1 dm = \frac{1}{2} \frac{v^2 \lambda S}{Q \sin\theta} \int_{h_0}^h e^{-\frac{h}{H}} dh, \quad (2.19)$$

lo que da como resultado

$$m(h) = \frac{H}{2} \frac{v^2 \lambda S}{Q \sin\theta} \left(e^{-\frac{h_0}{H}} - e^{-\frac{h}{H}}\right) + m_0 \quad (2.20)$$

siendo m_0 la masa inicial del objeto (masa al entrar a la atmósfera).

2.3. Análisis gráfico

Haciendo un análisis gráfico de la ecuación (2.14), se determina que esta tiene la forma:

$$v(h) = \alpha e^{\beta\tau} \quad (2.21)$$

con $\alpha = v_0 > 0$, $\beta = \frac{1}{2} \frac{HC_d S}{\sin(\theta)m} > 0$ y $\tau = e^{-\frac{h_0}{H}} - e^{-\frac{h}{H}} \leq 0$. La forma de esta exponencial se representa en la Figura 2.1a.

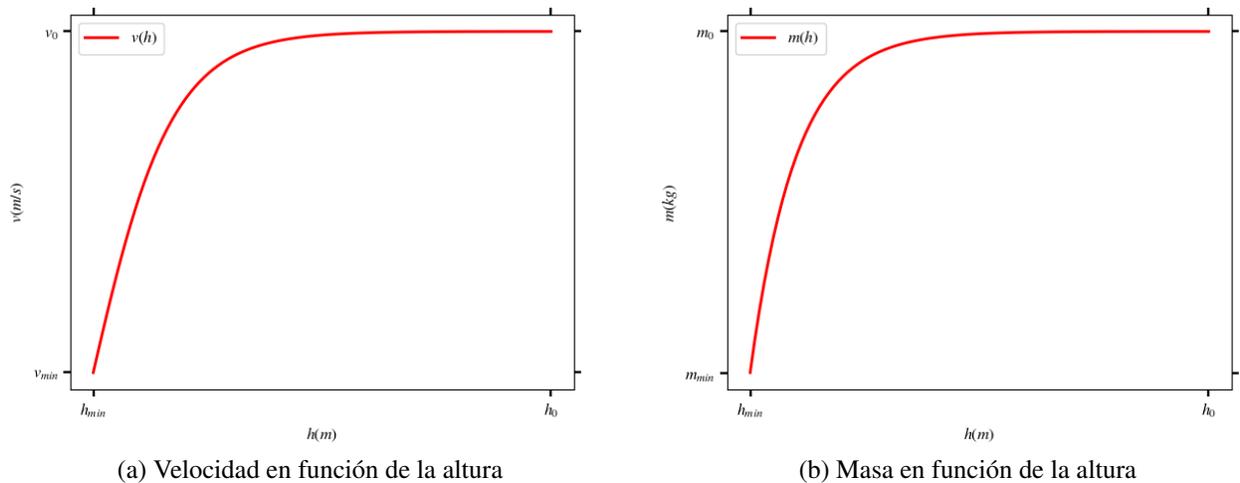


Figura 2.1: Perfiles correspondientes a soluciones analíticas de las ecuaciones (2.14) y (2.20).

La forma de (2.14) es una función decreciente (leyendo de derecha a izquierda el eje de las abscisas) que toma el valor mínimo de la velocidad a la menor altura de vuelo $h = h_{min}$, producto de la fuerza de arrastre, por otro lado, cuando a una altura $h = h_0$ se recupera el valor inicial de la velocidad, v_0 , valor máximo o valor al momento de entrar a la atmósfera de la Tierra, de hecho, estudiando la ecuación (2.15), se puede determinar que de la única manera en que la masa sea 0 es cuando la velocidad sea 0, pues los parámetros restantes de esta misma ecuación son fijos y distintos de 0. Ahora, de la misma forma, cuando la masa sea nula, la velocidad también debería de serlo, observando la ecuación 2.14, se puede deducir que cuando $m = 0$, esta ecuación adopta la forma siguiente:

$$v(h) = e^{-\infty} v_0 \rightarrow 0, \quad (2.22)$$

cumpliéndose así lo antes planteado, situación que es consistente con lo que físicamente se esperaría que ocurriese.

Para el caso de la masa, la ecuación (2.20) tiene la siguiente forma de la Figura 2.1b

$$m(h) = \eta\xi + \phi \quad (2.23)$$

con $\eta = \frac{1}{2} \frac{Hv^2 \lambda S \rho_0}{\sin(\theta)} > 0$, $\xi = e^{-\frac{h_0}{H}} - e^{-\frac{h}{H}} \leq 0$ y $\phi = m_0 > 0$. Por lo que la forma general de esta función es una curva como la de la gráfica 2.1b. La cual establece que cuando la altura $h = h_{min}$ se obtiene la masa

mínima, producto también de la fuerza de arrastre. Por otro lado, cuando la altura $h = h_0$ se recupera el valor inicial de la masa m_0 valor que tiene al momento de que el objeto entra a la atmósfera de la Tierra.

2.3.1. Caso general de la velocidad

Retomando la ecuación (2.6) y realizando el cambio de variable de la ecuación (2.9), la forma general de la velocidad de un asteroide en función de su altura es la siguiente:

$$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{2} \frac{v C_d S \rho_0}{m \sin \theta} e^{-\frac{h}{H}} + \frac{g}{v} \quad (2.24)$$

ecuación diferencial que es del tipo Bernoulli, cuya solución general es:

$$v(h) = \frac{\sqrt{e^{\frac{HC_d S \rho_0}{m \sin \theta} e^{-\frac{h}{H}}} \left(2gH \text{Ei} \left(1, -\frac{HC_d S \rho_0}{m \sin \theta} e^{-\frac{h}{H}} \right) + C \right)}}{e^{\frac{HC_d S \rho_0}{m \sin \theta} e^{-\frac{h}{H}}}} \quad (2.25)$$

donde

$$\text{Ei} \left(1, -\frac{HC_d S \rho_0}{m \sin \theta} e^{-\frac{h}{H}} \right) = h \int_0^1 \int_0^1 \left(e^{-xyh} \right) dx dy - \gamma - \ln(h) \quad (2.26)$$

es decir, una integral exponencial con $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right)$. Por lo que la implementación de métodos de integración numérica son pieza clave para la solución de este problema.

2.3.2. Altura de rompimiento e implementación de un análisis numérico-analítico

Para conocer la altura de rompimiento, es decir, la altura a la cual el asteroide comienza a desintegrarse, es necesario emplear la ecuación sugerida por [Bland and Artemieva \(2006\)](#) y [Stokes and Evans \(2004\)](#):

$$\rho_a v^2(h) \geq \mathbf{S}, \quad (2.27)$$

donde \mathbf{S} es la presión estática o *stagnation pressure* (en inglés) y es un factor numérico determinado para las principales composiciones de los asteroides. Este factor se entiende como la capacidad que tiene un elemento para soportar una cierta presión antes de fragmentarse.

Para fines prácticos, principalmente de notación, se renombrarán los valores como: $v_0 = v_i$ y $m_0 = m_i$. Ahora bien, el análisis se regirá bajo el siguiente orden:

1. Dada una velocidad inicial v_i , una altura inicial h_i , una masa inicial m_i así como todos los parámetros restantes (los cuales son constantes que se han denominado anteriormente como β) obtendremos, de la ecuación (2.14) una velocidad v_{i+1} .
2. Habiendo obtenido la velocidad v_{i+1} esta será insertada en la ecuación (2.20) junto con el valor de h_{i+1} que, aunado a los demás parámetros físicos (los cuales también son constantes y anteriormente llamados como η), se obtendrá un valor m_{i+1} .

Valores de presión estática típicos	
Composición del meteorito	S
Fragmentos de polvo, material asteroidal o cometario y hielos	1×10^6 Pa
Rocoso (condritas)	$1 - 5 \times 10^7$ Pa
Hierro-Niquel	2×10^8 Pa

Tabla 2.1: Valores obtenidos a partir de pruebas en meteoritos y mezclas de hielos y rocas (Hills and Goda, 1993).

3. Este valor m_{i+1} más un valor h_{i+1} y ambos evaluados en la ecuación (2.14) (de sobra esta decir que esta evaluación también involucrará el parámetro β), generando un nuevo valor v_{i+2} .
4. Este nuevo valor v_{i+2} más una nueva altura h_{i+2} , evaluados junto con el valor η en la ecuación (2.20), generando un nuevo valor de la masa, m_{i+2} .
5. Así sucesivamente, con una h_j y una v_j se obtendrá una m_j , con $j \in i \dots n$. Ahora, si el objeto no toca la superficie de la Tierra, es decir, se desintegra en la atmósfera, entonces querrá decir que existe una altura h_k con $i < k < n$ en el cual se cumpla que

$$\rho_a(k)v^2(k) \geq \mathbf{S}.$$

es decir, la presión de arrastre será mayor o igual que la presión estática que mantiene unido al objeto, lo que, a su vez, permite conocer a que altura se desintegró el objeto, cuál era su velocidad en ese momento, su masa y entonces poder inferir otros efectos propios del rompimiento, como la presión de la onda de choque o el radio que afecta dicha onda de choque. Así como en general, durante todo su trayecto por la atmósfera, los espectros de radiación sintética ligados a la pérdida de masa por la fricción con la atmósfera misma.

Cabe aclarar que si bien, la notación de los subíndices es creciente i. e. ($i+2 > i+1$) sólo es para explicar que se trata del paso en el tiempo inmediato superior, pero en realidad debido a la acción de la fuerza de arrastre, en dimensiones el paso $i+2 < i+1$, por ejemplo, $\|v_{i+2}\| < \|v_{i+1}\|$, o sea, la velocidad en la altura $i+2$ es menor que la velocidad en la altura $i+1$.

2.4. Desarrollo del código

La forma de operación del código desarrollado se basa en resolver un sistema análogo al (2.1) (véase Gutierrez-Zalapa et al. (2023b)). En este se asume que la fuerza de arrastre se produce durante toda la parte final del acercamiento del objeto a la Tierra hasta su precipitación, bajo la suposición de un perfil atmosférico exponencial rotatorio, como se muestra en la Figura 2.2a. El código también admite un perfil atmosférico que represente una atmósfera plano-paralela, Figura 2.2b.

A continuación, se muestra la implementación del código para el objeto 99942 Apophis, el código recibe como parámetros de entrada una velocidad inicial v_0 , una masa inicial m_0 , un ángulo inicial

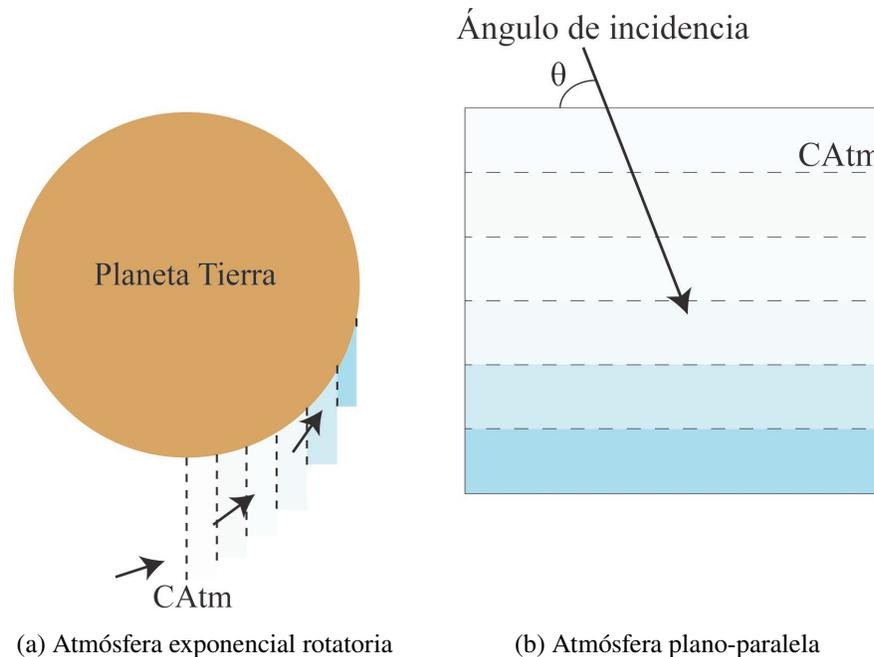


Figura 2.2: Representación de los dos tipos principales de perfiles atmosféricos. La flecha indica la posible incidencia de un NEO con nuestro planeta, como se puede observar en el panel derecho, el ángulo de incidencia del NEO no sería constante, mientras que en el panel izquierdo se asume que el objeto prácticamente viaja en línea recta. La abreviación CA_{Atm} significa capas atmosféricas.

θ_0 , así como una ecuación de estado (la cual puede no ser fija) de la densidad atmosférica para toda altura h . En primera instancia se asume que el objeto que entra a la atmósfera es esférico y que además es homogéneo situaciones que, no necesariamente pueden ser fijas, es decir el código admite cambios en la morfología del objeto, así como representaciones de un objeto cuya densidad no es homogénea, sino que puede obedecer a otra ecuación de estado que describa su densidad estratificada, además, a diferencia de los estudios citados anteriormente, en este código no se desprecia la contribución vertical del peso, inclusive dicha contribución en este código tiene una expresión más general que la que se presenta en Silber et al. (2018) o Wheeler et al. (2017). Esto genera mayor precisión en los cálculos y por ende condiciones más realistas acerca de la tasa de pérdida de masa, tasa de cambio de velocidad y por ende tasa de cambio de energía para todo tiempo t o toda altura h . Ya que una característica especial del código, que está ligada a la parte de solución numérica, es que genera un archivo de datos con valores acerca de, tiempo t , altura h , velocidad v y masa m para todo instante, situación que permite contrastar, por ejemplo, la velocidad del objeto en función del tiempo de vuelo o de la altura, cosa que, con las soluciones mostradas para la ecuación (2.8) y (2.14) no se podría pues en este caso se tendría que sesgar por hacer el análisis en función del tiempo o de la altura. El código arroja con una definición óptima condiciones para encontrar la altura de rompimiento, pues si bien, como se mencionó anteriormente, existen estudios acerca de la obtención de dicha altura de rompimiento, por ejemplo, una expresión de ajuste matemático que es una buena aproximación (Collins et al., 2005; Emel'yanenko et al., 2013) o una que establece un valor para la densidad atmosférica fijo (McMullan and Collins, 2019),

NEO 99942 Apophis	
Diámetro	325 m
Masa	5.75×10^{10} kg
Densidad*	3200 kg/m ³
Velocidad inicial	13 km/s
Ángulo de entrada	45°

Tabla 2.2: Datos de entrada para el asteroide (99942 Apophis) y ángulo de entrada a la atmósfera terrestre, parámetros usados para la implementación del código. Estos valores han sido obtenidos de [NASA/JPL](#).

*Asumiendo un cuerpo esférico.

el código permite conocer la altura de rompimiento con la misma ecuación (2.27) con las ecuaciones evolucionando de manera simultánea y sin dejar fijo el valor de la densidad atmosférica. Conociendo la altura de rompimiento en particular se puede conocer la velocidad y masa a dicha altura, punto que permite calcular la energía liberada al momento del rompimiento y con esto conocer el único producto relacionado a dicho suceso, la presión generada por la onda de choque producto de la explosión misma y con ello poder estimar la distancia radial afectada a cuando menos 4 psi \approx 27000 Pa con respecto al punto de rompimiento (para más datos acerca de este concepto véase ([Collins et al., 2005](#); [Popova et al., 2013](#))). Finalmente queda decir que el código está escrito en lenguaje de programación FORTRAN 77 y que su implementación, así como el análisis de sus productos se efectúan en los ordenadores del LACIGE (véase [Gutiérrez-Zalapa et al. \(2022a\)](#)). Para una mejor visualización de los productos del código, se muestran 6 gráficas que representan los efectos físicos del cuerpo 99942 Apophis a su paso por la atmósfera terrestre, en esta implementación se ha empleado ρ_a que modela una atmósfera exponencial rotatoria (véase [Rodríguez-Martínez et al. \(2023\)](#); [Sergeeva et al. \(2021\)](#)).

La Figura 2.3a muestra el comportamiento de la velocidad del objeto en función de la altura, como se puede observar, tiene un perfil similar al que se muestra en la Figura 2.1a, es conveniente mencionar que en nuestro modelo, las unidades en el eje de las abscisas se leen de derecha a izquierda. En esta gráfica se puede observar que la altura de rompimiento (break-up) es de 50 km, mientras que la velocidad en la altura de rompimiento es de aproximadamente 12.97 km/s, velocidad que es del orden en lo expuesto en la literatura, datos que coinciden con [Lobanovsky \(2014\)](#); [Smulsky and Smulsky \(2012\)](#).

En la Figura 2.3b se muestra la tasa de pérdida de masa en función de la altura, de donde se puede deducir que, a una misma altura de rompimiento que la ligada a la velocidad, el objeto tiene una masa de aproximadamente 5.67×10^{10} kg, masa “final” que es del orden de la literatura especializada [Shor et al. \(2012\)](#). Dicha gráfica posee el mismo comportamiento que el que se presenta en la Figura 2.1b.

En la gráfica 2.4a se puede ver la curva de comportamiento de la energía del objeto con respecto a la altura, lo cual sugiere que el objeto, al momento de romperse, genera una energía del orden de 4.85×10^{18} J, donde la línea azul representa la altura de rompimiento.

Por otro lado, la Figura 2.4b se muestra la presión estática en función de la altura, es decir, cuando se cumple que $\rho_a v^2 > S$ para un valor de $S = 1 \times 10^6$ Pa (véase Tabla 2.1) y con un factor de pancake de

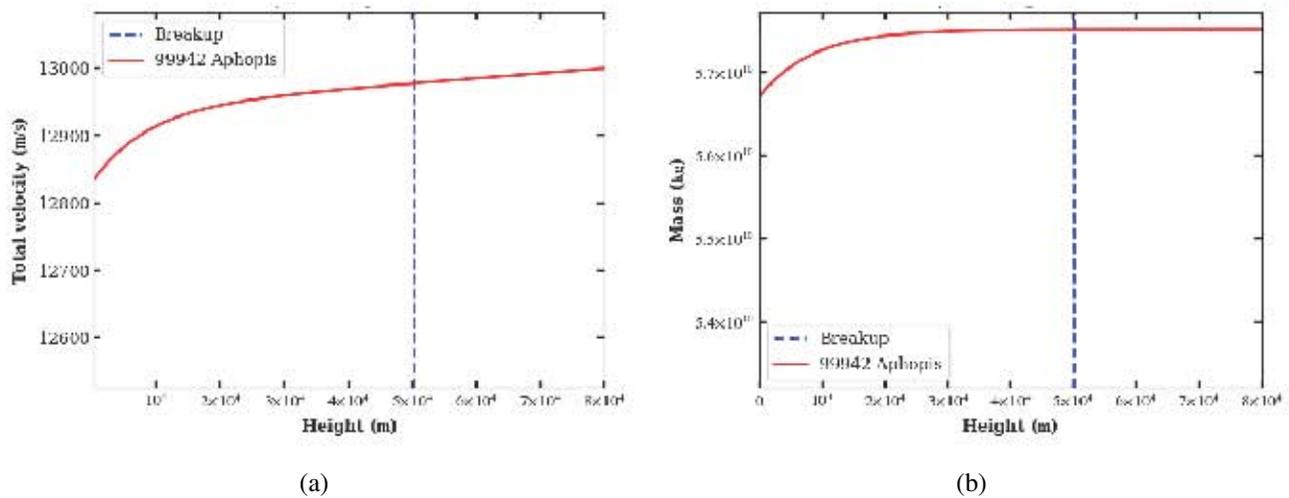


Figura 2.3: Gráficas de la velocidad y masa en función de la altura para el NEO 99942 Apophis.

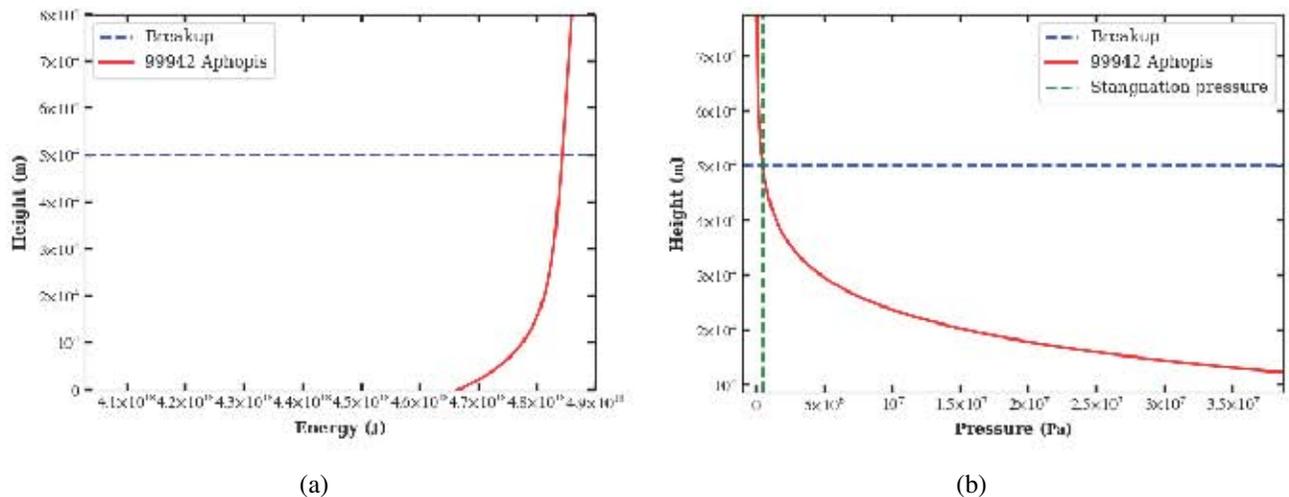


Figura 2.4: Gráficas de la energía liberada y presión estática en función de la altura para el NEO 99942 Apophis.

$f_p = 6$ (Collins et al., 2005).

Para la Figura 2.5a se muestra el análisis hecho para obtener la tasa de cambio del ángulo de vuelo en relación con la altura, es necesario recordar que este código tiene como parámetro de entrada el ángulo (con el que entra a la atmósfera terrestre), por lo tanto, se puede deducir que prácticamente el ángulo no cambia durante su trayecto por la atmósfera terrestre hasta la ruptura. Gran parte de la literatura citada, (Collins et al., 2005; McMullan and Collins, 2019; Register et al., 2017; Wheeler et al., 2017), se asume que el viaje del objeto describe una línea recta, ahora, con este código y su respectivo análisis se puede establecer que dado un ángulo de entrada el objeto se mueve prácticamente en línea recta durante su viaje por la atmósfera terrestre.

Por último se tiene la Figura 2.5b en la cual se calcula el tiempo de vuelo con respecto a la altura, esta gráfica empata con la realizada (en escala logarítmica) en los trabajos de (Gutiérrez-Zalapa et al.,

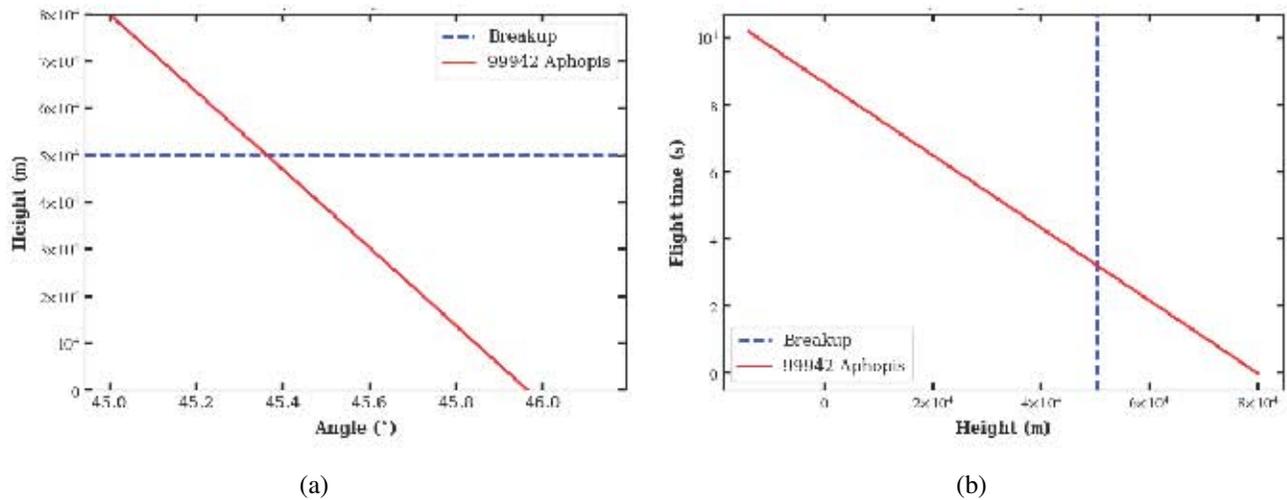


Figura 2.5: Gráficas del ángulo y tiempo de vuelo en función de la altura para el NEO 99942 Apophis.

2022b; Sergeeva et al., 2021). Como se puede observar, en las gráficas anteriores no aparece la altura de *burst*, esto se puede explicar con base en los parámetros físicos del cuerpo. Es decir, el cuerpo se fragmentaría pero una porción muy grande de este no se calcinaría, impactando con un porcentaje de pérdida de entre el $0 < F \leq 0.6$ Ceplecha and ReVelle (2005); Chernogor and Rozumenko (2013); Gladysheva (2019) con respecto a su masa inicial.

Capítulo 3

Estudios orbitales sobre NEO's

Como ya se mencionó, los asteroides son cuerpos pequeños en el sistema solar que orbitan alrededor del Sol, lo que significa que sus órbitas son heliocéntricas, como es el caso de todos los planetas del sistema solar. Están compuestos de rocas, metales pueden contener hielos y compuesto orgánicos y tienen formas irregulares debido al hecho de que no son tan masivos como los planetas, de hecho, son los restos de cuerpos que jamás formaron un planeta, por lo que pueden rotar de formas peculiares. Se ubican principalmente en el cinturón principal entre las órbitas de Marte y Júpiter ([Alvarez et al., 1980](#); [Mainzer et al., 2012](#)). Para una visión más específica de su distribución en el sistema solar interno estos se clasifican según la excentricidad y el eje semi-mayor de sus órbitas. Estos parámetros indican cuánto se desvían de una órbita circular y cuál es la distancia desde el centro hasta el punto más alejado de la órbita respectivamente ([Collins et al., 2005](#)). Como una subclase de estos cuerpos están los Objetos Cercanos a la Tierra (NEO, por sus siglas en inglés) que contienen también los cometas cercanos a la Tierra (NEC, por sus siglas en inglés) así como a los Asteroides Cercanos a la Tierra (NEA, por sus siglas en inglés) y difieren de los NEC's debido a su formación, composición, órbita y estabilidad de la superficie. Su estudio es de gran importancia debido a que algunos de los NEO's pueden chocar con la Tierra. Si bien la probabilidad de que un asteroide o cometa cercano a la Tierra se estrelle contra nuestro planeta y cause un daño significativo es muy remota, las consecuencias de tal impacto serían devastadoras, esto pues es lo que motiva el estudio de NEO's. También es preciso decir que, en otros casos, su proximidad se traduce en una forma factible de comprender la formación de nuestro sistema solar, ya que los asteroides se consideran parte de los restos desde su proceso de formación y su composición no ha cambiado en miles de millones de años.

Otra situación, que aun está en vías de desarrollo y que falta mucho para su consolidación, es que los NEOS's poseen recursos como minerales extras a los de nuestro planeta, de alguna u otra manera explotar. Muchos materiales podrían extraerse y procesarse a partir de NEO's que son útiles para propulsión, construcción, soporte vital, agricultura, metalurgia, semiconductores y metales preciosos ([Roithmayr et al., 2005](#)), también podrían contener gases como el hidrógeno y el metano que podrían usarse para producir propulsores de cohetes y transportar naves espaciales.

Pero cual sea la motivación, predecir un posible choque, entender la formación de sistema solar u obtener "riquezas" de estos cuerpos es necesario conocer, de una manera muy acertada, su órbita. Los

movimientos de los cuerpos celestes en nuestro sistema solar inspiraron a Isaac Newton a desarrollar sus profundas leyes de gravitación y movimiento, con una o dos excepciones notables, todos esos objetos se mueven como Newton propuso que lo harían. Pero normalmente el movimiento orbital armonioso va acompañado del riesgo de colisión, que puede ser catastrófico. Se cree que la luna de la Tierra fue producida por tal evento, y en los años 90's la humanidad fue testigo de bombardeos, por varias piezas de lo que alguna vez fue el cometa Shoemaker-Levy 9, a Júpiter. Otros cometas o asteroides pudieron haber impactado la Tierra con tanta violencia hayan hecho cambios geológicos-evolutivos (Alvarez et al., 1980). Es esta posibilidad la que genera la pregunta de cómo la especie humana podría evitar una catástrofe similar, la respuesta requiere una comprensión profunda del movimiento orbital.

En relación con esta investigación, el estudio de la órbita de los NEO es muy importante, porque conocer la órbita exacta de un cometa o asteroide ayuda a saber cuándo y dónde se podría producir una colisión con nuestro planeta. En este sentido, cuanto más sea el tiempo de advertencia, mayores serán las posibilidades de poder planificar y ejecutar acciones para evitar una colisión (Hasnain et al., 2012). Cuanto más precisa sea la determinación de una órbita, menos probable será que dicha acción sea un esfuerzo desaprovechado o, lo que es peor, un esfuerzo que aumenta en lugar de disminuir la probabilidad de una colisión (Wielicki et al., 2013). La determinación de órbita es el proceso de utilizar un conjunto de mediciones observacionales para calcular un conjunto de elementos orbitales, seis cantidades que proporcionan (implícita o explícitamente, ver Tabla 3.6) la posición y velocidad de un objeto en un momento determinado. Los métodos clásicos de Laplace, Gauss y Olbers utilizan estas seis mediciones angulares (Wielicki et al., 2013), la calidad del resultado se ve afectada por errores en las mediciones y por el espaciado espacial y temporal de las observaciones que a su vez están relacionadas con la geometría resultante de las órbitas del objeto y el observatorio. En lo subsecuente del texto se abordarán diversas formas de conocer la órbita de un objeto, en especial la relacionada con la solución de la ecuación de Kepler, la cual permite asociar una distancia r y un ángulo α y conocer con una buena aproximación la órbita de un objeto.

3.1. Estudios de órbitas y colisiones

Este análisis se ve facilitado por la suposición de que se produce una colisión cuando la distancia heliocéntrica de un cometa o asteroide es idéntica a la de la Tierra. En el caso de que la órbita del objeto no sea coplanar con la órbita de la Tierra, las distancias deben ser idénticas en un punto donde el objeto pasa a través de la eclíptica, el plano en el que la Tierra orbita alrededor del Sol. Los tiempos de posible colisión se estudian con la ayuda de órbitas coplanares a la par que se examina la órbita terrestre para dicha colisión. (Wielicki et al., 2013).

El tiempo de advertencia de colisión es el tiempo entre el momento en que se detecta el objeto por primera vez (o más precisamente, el momento en que se conoce con precisión la órbita) y el momento del impacto. Aunque pueden pasar algunos períodos orbitales durante este período, el peor de los casos implica el descubrimiento de un cometa o asteroide menos de un período orbital antes del impacto (Roithmayr et al., 2005). A diferencia de los asteroides grandes con períodos orbitales relativamente cortos, los cometas de período largo (LPC, por sus siglas en inglés) no se presentan para observación

en múltiples órbitas, por lo que es mucho más difícil predecir una colisión con décadas de anticipación. Los asteroides más pequeños pueden escapar de la detección hasta que quede menos de una órbita antes de una colisión. El tiempo de advertencia se puede obtener a través de una aplicación directa de ecuaciones de tiempo de vuelo.

La Figura 3.1 muestra la Tierra E en una órbita circular de radio $r_k = 1$ unidad astronómica (AU) alrededor del Sol S , y un cometa o asteroide C en una órbita elíptica coplanar. Los ejes s_1 y s_2 se encuentran en la eclíptica, con s_1 en la dirección del equinoccio vernal. Se supone que el descubrimiento de C ocurre después del afelio y antes del perihelio, en el punto donde la línea roja se cruza con la órbita de C , y se supone que E , que representa la órbita de la Tierra, de modo que E colisiona con C antes de que C alcance perihelio, en el punto donde la línea azul se cruza con las órbitas de ambos objetos; se determinará el tiempo de vuelo de C entre estos dos puntos. Se considera que el movimiento de S y C se rige por la mecánica de órbita de dos cuerpos; es decir, S y C se tratan cada uno como una partícula o una esfera cuya masa se distribuye de manera uniforme, y las únicas fuerzas ejercidas sobre S y C son las de gravitación mutua. La órbita circular de E sobre S también procede como movimiento de dos cuerpos; sin embargo, la fuerza gravitacional ejercida por E y C entre sí se deja fuera de cuenta, al igual que todas las demás fuerzas perturbadoras que actúan sobre E , C y S (Roithmayr et al., 2005).

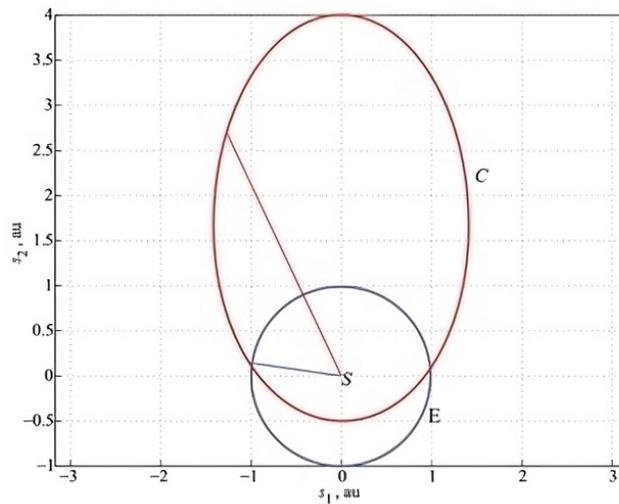


Figura 3.1: Órbitas del cometa o asteroide C y de la Tierra E . Créditos: Roithmayr et al. (2005).

La anomalía excéntrica E en cualquier punto de una órbita elíptica obedece a la relación:

$$\cos(E) = \frac{1 - \frac{r}{a}}{e}, \quad (3.1)$$

donde a y e son, respectivamente, el semieje mayor y la excentricidad de la órbita, y r es la distancia entre los centros de S y C en el punto de interés. Si E designa la anomalía excéntrica en el punto de descubrimiento donde la distancia heliocéntrica es r , y E_k denota la anomalía excéntrica en el punto de colisión donde la distancia heliocéntrica es $r_k = 1$ AU, entonces el tiempo de vuelo para un intervalo inferior a uno. El período orbital se obtiene mediante la ecuación de Kepler, tal como se indica en la ecuación de la referencia:

$$t - t_k = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} ((E - \text{esen}(E)) - (E_k - \text{esen}(E_k))), \quad (3.2)$$

donde μ es el parámetro gravitacional del primario, en este caso S. Ahora, los valores principales de la función de coseno inverso son $0 \leq (\cos(x))^{-1} \leq \pi$; E se define como 0 en el perihelio y π en el afelio. Si E y E_k tienen los valores correctos para los cuadrantes, el signo del miembro derecho de la ecuación (3.1) tendría que cambiarse, al igual que los signos de E , E_k , $\sin(E)$ y $\sin(E_k)$ en la ecuación (3.2); sin embargo, el valor absoluto del tiempo de vuelo $t - t_k$ permanecería inalterado.

3.1.1. Una posible colisión

Siguiendo con la idea anterior, a saber, que se produce una colisión con la Tierra cuando el objeto pasa a través del plano eclíptico y la distancia heliocéntrica del objeto es igual a r_k , el radio de colisión o 1 AU. *A priori*, todas las órbitas a estudiar cumplen estas condiciones; esto requiere una cierta relación, que se desarrollará actualmente, entre el argumento de periapsis por un lado y, por otro, r_p , r_k y e . Con la eclíptica elegida como referencia o plano fundamental, un objeto cuyo plano orbital está inclinado hacia la eclíptica se encuentra, por definición, en el nodo ascendente o descendente de la órbita cuando pasa a través de la eclíptica, es decir:

$$r = \frac{r_p(1+e)}{1+e \cos(v)}$$

donde r_p es el radio de periapsis, e es la excentricidad de la órbita, y v es la verdadera anomalía medida en el plano de la órbita desde la periapsis. En el nodo ascendente $v = \pi - w$, donde w se conoce como argumento de periapsis, y en el nodo descendente $v = \pi + w$. El requisito de que $r = r_k$ en uno de los nodos, por lo tanto, se puede expresar como

$$r = \frac{r_p(1+e)}{1 \pm e \cos(w)},$$

donde el signo positivo que precede a $\cos(w)$ significa que la condición se impone en el nodo ascendente, y el signo negativo está asociado con el nodo descendente. Esta relación puede reorganizarse,

$$\pm \cos(w) = \frac{r_p}{r_k} \left(1 + \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}. \quad (3.3)$$

Ahora, cualquier miembro de la ecuación (3.3) debe, por supuesto, permanecer entre -1 y 1 (inclusive) si se va a resolver para w , i.e.

$$-1 \leq \pm \cos(w) \leq 1, \quad (3.4)$$

sin embargo, uno simplemente puede trabajar con el signo positivo porque se puede ver que el requisito es el mismo sin importar qué signo se use. La sustitución de la ecuación (3.3) en (3.4) se obtiene

$$-1 \leq \frac{r_p}{r_k} \left(1 + \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} \leq 1 \implies \frac{1-e}{1+e} \leq \frac{r_p}{r_k} \leq 1,$$

y la desigualdad de la derecha produce la restricción esperada en r_p , a saber

$$r_p \leq r_k. \quad (3.5)$$

Se puede tratar la desigualdad (3.5) sustituyendo $(r_a - r_p)/(r_a + r_p)$ por e , que produce un resultado que involucra el radio en apoapsis

$$r_k \leq r_a. \quad (3.6)$$

Por lo tanto, mientras se satisfagan las desigualdades (3.5) y (3.6), se puede resolver la ecuación (5) para un valor de argumento de perihelio que cumpla con la condición necesaria para que se produzca una colisión en el nodo ascendente o descendente, según la elección del signo. Al cambiar el signo del argumento de la función $(\cos)^{-1}$ se obtiene el ángulo suplementario: $(\cos(x))^{-1} + (\cos(-x))^{-1} = \pi$. Ahora se presenta una segunda implicación de signo debido a que $\cos(w) = \cos(-w)$; el resultado de $\cos^{-1}(\cos(w))$ proporcionado por una máquina calculadora generalmente se encuentra en el rango de valores principales de la función inversa, a saber, $0 \leq w \leq \pi$, pero una solución en el intervalo $-\pi \leq w \leq 0$ es también correcta. Como w siempre se mide desde el nodo ascendente, $w > 0$ siempre corresponde a una periapsis que está en el lado norte del plano de referencia, y $w < 0$ siempre implica que la periapsis está en el lado sur (Wielicki et al., 2013). Cada una de las cuatro combinaciones posibles de las dos opciones está asociada con una colisión previa o posterior al perihelio como se indica en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Posición de la colisión. Créditos: Roithmayr et al. (2005).

-2*Nodo de colisión	Hemisferio perihelical	
	Norte ($w > 0$)	Sur ($w < 0$)
Ascendente	Preperihelio	Posperihelio
Descendente	Posperihelio	Preperihelio

3.1.2. Órbitas estimadas por medio de la observación

Los elementos orbitales determinados en base a observaciones generalmente difieren de los elementos orbitales verdaderos, es decir, en un valor particular de tiempo t , la posición verdadera \mathbf{r} y la velocidad \mathbf{v} difieren de la posición \mathbf{r}' y la velocidad \mathbf{v}' resultantes del proceso de determinación de la órbita. En la práctica, los elementos orbitales verdaderos son desconocidos; sin embargo, deben especificarse en el análisis que sigue. Los dos conjuntos de elementos orbitales se pueden comparar para juzgar la calidad del resultado de la determinación de la órbita; sin embargo, es más conveniente comparar un solo parámetro si es posible en lugar de seis valores escalares asociados con la posición y la velocidad (o, de hecho, seis elementos orbitales clásicos). Se introduce ahora dicho parámetro ϵ , en lo sucesivo denominado "distancia de error predicha". Cuando ϵ desaparece la órbita determinada a partir de las observaciones produce una colisión en la posición especificada y en el momento designado (Roithmayr et al., 2005).

Un objeto C viaja a lo largo de una órbita verdadera, que se muestra en la Figura 3.2 con una línea roja, diseñado para colisionar con la Tierra E en el tiempo t_k , en un punto K donde el objeto pasa a través del plano eclíptico a una distancia heliocéntrica de $r_k = 1$ au. La órbita de C generalmente no es idéntica a una órbita determinada a partir de mediciones, que se muestra con una línea punteada roja y asociada con un objeto C' . Se establece una solución de órbita para algún tiempo t , en cuyo momento el vector de posición real de S a C es $\mathbf{r}(t)$, y la posición determinada a partir de la observación se muestra como $\mathbf{r}'(t)$. Cuando la órbita verdadera se propaga al momento de la colisión t_k , $\mathbf{r}(t_k)$ es, por supuesto, el vector de posición de S a K (Bate et al., 2020). La órbita de C' también se puede propagar a t_k , produciendo un vector de posición $\mathbf{r}'(t_k)$; la magnitud ϵ de la diferencia $\mathbf{r}'(t_k) - \mathbf{r}(t_k)$ se define como la “distancia de error predicha”.

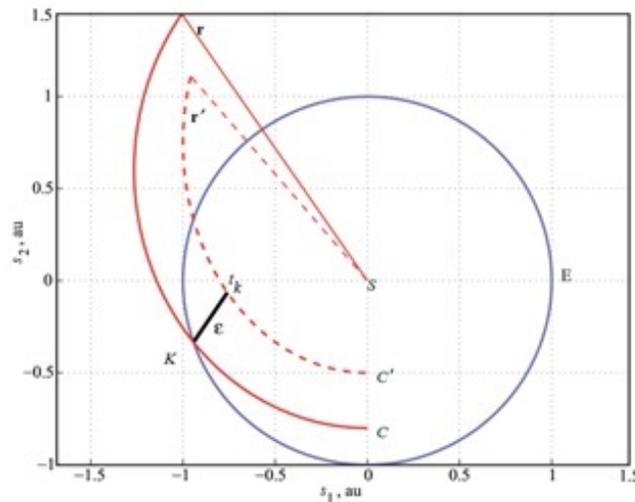


Figura 3.2: Órbita verdadera y órbita determinada a partir de observaciones. Créditos: Roithmayr et al. (2005).

Para cada órbita examinada en lo subsecuente, ϵ se obtiene mediante los siguientes pasos:

1. Un conjunto de elementos orbitales clásicos se construye de acuerdo con la ecuación (3.3) y se usa junto con el software de propagación de órbita para producir historiales de tiempo de r y v durante un intervalo de tiempo durante el cual se tomarán mediciones ópticas.
2. El tiempo de vuelo hasta la colisión $t_k - t$ se determina de acuerdo con la ecuación (3.2), con lo cual se calculan los coeficientes de Lagrange y se utilizan para obtener la posición de la colisión $\mathbf{r}(t_k)$.
3. Se seleccionan varios valores de tiempo $t_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ para obtener observaciones. Para cada valor de este tipo, se construye una posición de un observatorio y se resta de $\mathbf{r}(t_i)$ para obtener el vector de posición del observatorio al objeto de interés; este vector se usa a su vez para calcular la longitud y latitud del objeto con respecto a un conjunto de ejes heliocéntricos-eclípticos fijos por inercia.

4. Para cada observación, los errores se introducen intencionalmente en la longitud y latitud para reflejar los límites en la resolución angular de un telescopio. Los ángulos resultantes sirven como medidas.
5. Se infiere la posición y la velocidad en el momento t de una de las observaciones. El objetivo del proceso de determinación de la órbita es ajustar la suposición y obtener $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{v}'(t)$ que sean lo más consistentes posible con las mediciones.
6. El tiempo de vuelo obtenido en el paso 2 se usa junto con $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{v}'(t)$ para obtener $\mathbf{r}'(t_k)$.
7. La distancia de error predicha ϵ es la magnitud de $\epsilon = \mathbf{r}'(t_k) - \mathbf{r}(t_k)$.

3.1.3. Método de mínimos cuadrados ponderados

El método de mínimos cuadrados permite aprovechar múltiples mediciones realizadas desde un solo observatorio o desde dos o más observatorios repartidos por todo el sistema solar. La precisión de los elementos orbitales así obtenidos es, por lo tanto, una función del número y el espaciamiento de las observaciones, y el número y la ubicación de los observatorios. A continuación, describiremos el método de esta subsección basado en los trabajos de [Bate et al. \(2020\)](#) y [Battin \(1999\)](#).

La determinación de una posible órbita se puede realizar utilizando el método de mínimos cuadrados lineales ponderados, formulado por Gauss en 1809. Este método se utiliza para determinar de forma aproximada las órbitas utilizando tres o cuatro observaciones como se describe más adelante, así como una mejor determinación de la órbita basada en múltiples observaciones ([Battin, 1999](#)). El método de mínimos cuadrados ponderados se puede describir brevemente de la siguiente manera: Sea X_1, \dots, X_6 seis elementos orbitales, por ejemplo, seis escalares asociados en un instante particular de tiempo con la posición $\mathbf{r}(t)$ y la velocidad $\mathbf{v}(t)$, que se determinará a partir de mediciones de longitud $\tilde{\phi}(t_1), \dots, \tilde{\phi}(t_n)$ y latitud $\tilde{\lambda}(t_1), \dots, \tilde{\lambda}(t_n)$ obtenida en los tiempos t_1, \dots, t_n de n observaciones. Usando estimaciones $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6$ de los parámetros orbitales, entonces se pueden calcular los valores correspondientes de longitud $\bar{\phi}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_1), \dots, \bar{\phi}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_n)$ y latitud $\bar{\lambda}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_1), \dots, \bar{\lambda}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_n)$, y formar $2n$ residuales los valores calculados de las mediciones ([Bate et al., 2020](#); [Battin, 1999](#)), es decir:

$$y_j(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6) = \begin{cases} \tilde{\phi}(t_j) - \bar{\phi}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_j) & (j = 1, \dots, n) \\ \tilde{\lambda}(t_{j-n}) - \bar{\lambda}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_{j-n}) & (j = n+1, \dots, 2n) \end{cases} \quad (3.7)$$

El propósito del método de mínimos cuadrados ponderados es encontrar los valores $\hat{X}_1^*, \dots, \hat{X}_6^*$ que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos ponderados:

$$Q = \sum_{j=1}^{2n} w_j y_j^2,$$

donde los pesos w_1, \dots, w_{2n} se eligen para dar más peso o importancia a las mediciones obtenidas con una mejor resolución; $w_j^{-1/2}$ es la precisión asumida de la medida j . Ahora, para valores de X_1, \dots, X_6 en la vecindad de $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6$ los valores calculados se pueden expandir en una serie de Taylor, por ejemplo:

$$\bar{\phi}(X_1, \dots, X_6, t_j) = \bar{\phi}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_j) + \sum_{i=1}^6 (X_i - \hat{X}_i) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial X_i}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_j) + \dots \quad (j = 1, \dots, n),$$

que se puede usar para escribir expresiones aproximadas para residuos

$$y_j(X_1, \dots, X_6) = \tilde{\phi}(t_j) - \bar{\phi}(X_1, \dots, X_6, t_j) \approx y_j(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6) - \sum_{i=1}^6 (X_i - \hat{X}_i) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial X_i}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_j),$$

con $j = 1, \dots, n$. Si uno define matrices como:

$$\{y\} \triangleq (y_1(X_1, \dots, X_6) y_2(X_1, \dots, X_6) \dots y_{2n}(X_1, \dots, X_6))^T,$$

$$\{y\} \triangleq (y_1(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6) y_2(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6) \dots y_{2n}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6))^T,$$

$$\{x\} \triangleq ((X_1 - \hat{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) \dots (X_6 - \hat{X}_6))^T,$$

y matrices $[H]$ y $[W]$, cuyos elementos se definen como:

$$H_{ji} = \begin{cases} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial X_i}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_j) & (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, 6) \\ \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X_i}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_6, t_{j-n}) & (j = n+1, \dots, 2n; i = 1, \dots, 6) \end{cases}$$

$$W_{ji} = \begin{cases} w_j & (i = j; j = 1, \dots, 2n) \\ 0 & (i \neq j; i = 1, \dots, 2n), \end{cases}$$

entonces Q se puede expresar como:

$$Q = \sum_{j=1}^{2n} w_j y_j^2 = \{y\}^T [W] \{y\} \approx (\{\hat{y}\} - [H] \{x\})^T [W] (\{\hat{y}\} - [H] \{x\}), \quad (3.8)$$

de donde se obtiene finalmente:

$$Q = \{\hat{y}\}^T [W] \{\hat{y}\} - \{\hat{y}\}^T [W] [H] \{x\} - \{x\}^T [H]^T [W] \{\hat{y}\} + \{x\}^T [H] [W] [H] \{x\}. \quad (3.9)$$

El valor $\{x\}$ que minimiza Q se obtiene al establecer que $\partial Q / \partial \{x\} = \{0\}$, una matriz de ceros 6×1 , que produce:

$$\{x\} = ([H]^T [W] [H])^{-1} [H]^T [W] \{\hat{y}\},$$

siempre y cuando $([H]^T [W] [H])$ sea no singular; esta cantidad se conoce como matriz normal o de información y es igual a la inversa de la matriz de covarianza que describe la precisión de $\{x\}$. Cuando la matriz normal es singular, la órbita no se puede determinar únicamente a partir de las mediciones y se dice que la órbita es inobservable [Bate et al. \(2020\)](#). Se forma una nueva estimación de los parámetros orbitales al agregar el ajuste $\{x\}$ a la estimación anterior $\{\hat{x}\} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5, \hat{x}_6]^T$ y el proceso se repite, lo que lleva a los valores de $\hat{x}_1^*, \dots, \hat{x}_6^*$ que minimizan Q .

3.2. Dinámica orbital

La dinámica orbital del Centro de Masa (CoM) de un asteroide o cometa se puede ver en dos partes. Primero, el sistema se caracteriza por la fuerza gravitacional del Sol. Definiendo el movimiento de un NEO bajo la idea de una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos. En segundo lugar, otras fuerzas externas podrían generar perturbaciones, como la presión de radiación solar (SRP, por sus siglas en inglés) que da origen al efecto YORP ¹, así como la interacción con Júpiter a través de ν -frecuencias (Alvarez Guzman, 2014). El conjunto de estas perturbaciones define la órbita del cuerpo.

3.2.1. Marcos de referencia para caracterizar el movimiento de un NEO en el espacio

Primero se definirán los marcos de referencia apropiados y para cada uno de ellos sus tres vectores de unidades ortogonales. Un marco de referencia se define mediante un plano de referencia y una dirección de referencia comúnmente se asumen un par de premisas:

1. El primer plano es la eclíptica, un plano cuasi-inercial definido por el movimiento aparente del Sol. Su cambio marginal se debe a la precesión lunar y solar, la nutación y otras perturbaciones planetarias.
2. El segundo plano es el ecuador celeste, un plano no inercial definido por la proyección del ecuador de la Tierra. Tiene una oblicuidad (ϵ) de 23.44 grados con respecto al primero.

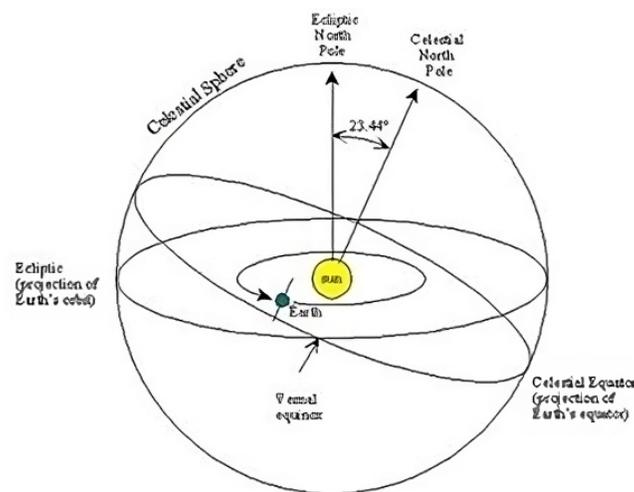


Figura 3.3: Marcos de referencia astrofísicos. Créditos: Alvarez Guzman (2014).

Un plano eclíptico estándar se usa a menudo el 1 de enero de 2000, 11: 58: 55.816 UTC. La dirección de referencia es el equinoccio de verano (γ), que es el punto en la esfera celeste en la intersección del

¹El efecto YORP (proveniente de las iniciales de Yarkovsky — O’Keefe — Radzievskii — Paddack), es una perturbación generalizada del Efecto Yarkovsky, el cual estudia las variaciones orbitales de un asteroide causadas por la absorción de la radiación solar en su superficie y la emisión de ésta a través de su propia radiación térmica y el cambio de su estado rotacional.

ecuador celeste y la eclíptica, donde el Sol cruza el ecuador de sur a norte en su aparente movimiento anual a lo largo de la eclíptica [Morbidelli et al. \(2002\)](#). Este marco de referencia (también denominado marco de referencia celestial internacional) se considera inercial y se escribe como:

$$R_J = \{O, \hat{i}_J, \hat{j}_J, \hat{k}_J\}.$$

Donde el origen O es el centro de masa (que en lo subsecuente se denotará como CM) del sistema solar. El plano formado por $\{O, \hat{i}_J, \hat{j}_J\}$ está alineado con el ecuador (ecuador medio), y \hat{i}_J apunta al equinoccio vernal (equinoccio medio). Por último, otro marco de referencia importante es el marco de referencia cuerpo fijo (marco del cuerpo) está definido por un origen y dos puntos que definen el polo y el plano ortogonal. Se puede formalizar de la siguiente manera:

$$R_b = \{C, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$$

Donde, como se muestra en la Figura 3.4, C corresponde con el centro de masa, CM , del cuerpo rígido. \hat{b}_3 es el vector unitario en la dirección del polo. \hat{b}_3 es el vector unitario definido por un punto P_2 que se encuentra en el plano ortogonal Π a \hat{b}_3 . Y $\hat{b}_2 = \hat{b}_3 \times \hat{b}_1$ simplemente se construye para ser ortogonal a ambos \hat{b}_3 y \hat{b}_1 .

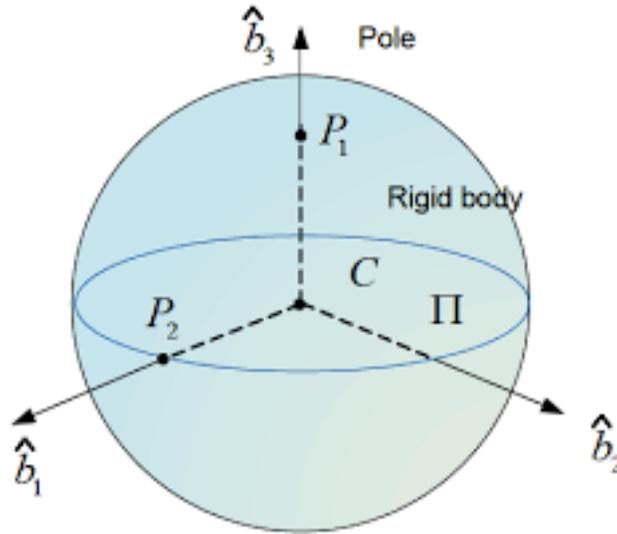


Figura 3.4: Marco de referencia cuerpo fijo. Créditos: [Alvarez Guzman \(2014\)](#).

3.2.2. Problema de dos cuerpos

El problema de dos cuerpos describe el movimiento de dos cuerpos en atracción gravitacional mutua. Estos dos cuerpos pueden tener una forma y masa arbitraria, pero para el alcance de este estudio se restringe el estudio de la dinámica de un asteroide m_1 , sobre un cuerpo masivo y esféricamente simétrico ([Standish, 1995](#)), en este caso, el Sol sería representado por m_0 .

La posición y la velocidad se definen en un marco inercial $R\{O, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$, por lo tanto, el vector de estado del Sol y el asteroide $\{\underline{r}_0, \underline{v}_0\}$ y $\{\underline{r}_1, \underline{v}_1\}$ respectivamente ([Alvarez Guzman, 2014](#)), véase la Figura

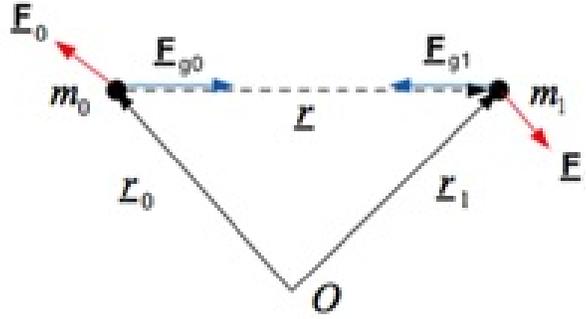


Figura 3.5: Diagrama del problema de los dos cuerpos. Créditos: [Alvarez Guzman \(2014\)](#).

3.5. La ley de gravitación universal de Newton establece que dos cuerpos se atraen entre sí con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Al definir la posición relativa entre ellos, $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_0$, su magnitud, $r = |\underline{r}|$, y la constante de gravedad universal, G , las ecuaciones matemáticas en este caso se definen como ([Scheeres, 2016](#)):

$$\underline{F}_{g0} = \frac{Gm_0m_1}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \quad (3.10)$$

$$\underline{F}_{g1} = -\frac{Gm_0m_1}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \quad (3.11)$$

Aplicando la segunda ley de Newton, usando las fuerzas gravitacionales de las dos ecuaciones anteriores, y siendo F_0 y F_1 perturbaciones externas, describimos el sistema en un conjunto de seis ecuaciones por cuerpo. Donde las variables de estado, $\{\underline{r}_0, \underline{v}_0\}$ y $\{\underline{r}_1, \underline{v}_1\}$, se escriben de la siguiente manera ([Scheeres, 2016](#); [Standish, 1995](#)):

$$\dot{\underline{r}}_0 = \underline{v}_0, \quad (3.12)$$

$$\dot{\underline{v}}_0 = \frac{Gm_0m_1}{m_0r^3} \underline{r} + \frac{\underline{F}_0}{m_0}, \quad (3.13)$$

$$\dot{\underline{r}}_1 = \underline{v}_1, \quad (3.14)$$

$$\dot{\underline{v}}_1 = \frac{Gm_0m_1}{m_1r^3} \underline{r} + \frac{\underline{F}_1}{m_1}. \quad (3.15)$$

Con condiciones iniciales:

$$\underline{r}_0(0) = r_{00}, \underline{v}_0(0) = v_{00}, \underline{r}_1(0) = r_{10}, \underline{v}_1(0) = v_{10}. \quad (3.16)$$

Haciendo un cambio lineal de variables empleando el movimiento relativo entre los dos cuerpos, $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_0$ y $\underline{v} = \underline{v}_1 - \underline{v}_0$, se encuentra un nuevo conjunto de seis ecuaciones con variables de estado $\{\underline{r}, \underline{v}\}$, de esta manera ([Scheeres, 2016](#)):

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_1 - \dot{\underline{r}}_0 = \underline{v}_1 - \underline{v}_0 = \underline{v}, \quad (3.17)$$

$$\dot{\underline{v}} = \dot{\underline{v}}_1 - \dot{\underline{v}}_0 = -\frac{G(m_0+m_1)}{r^3}\underline{r} + \frac{\underline{F}_1}{m_1} - \frac{\underline{F}_0}{m_0}. \quad (3.18)$$

Es conveniente encontrar el vector de estado de la CM . Al realizar otro cambio lineal de variables, definimos la posición y la velocidad del CM de esta manera:

$$\underline{r}_{CM} = \frac{m_0}{m_0+m_1}\underline{r}_0 + \frac{m_1}{m_0+m_1}\underline{r}_1, \quad (3.19)$$

$$\underline{v}_{CM} = \frac{m_0}{m_0+m_1}\underline{v}_0 + \frac{m_1}{m_0+m_1}\underline{v}_1, \quad (3.20)$$

lo que lleva a:

$$\dot{\underline{r}}_{CM} = \frac{m_0}{m_0+m_1}\dot{\underline{r}}_0 + \frac{m_1}{m_0+m_1}\dot{\underline{r}}_1 = \underline{v}_{CM}, \quad (3.21)$$

$$\dot{\underline{v}}_{CM} = \frac{m_0}{m_0+m_1}\dot{\underline{v}}_0 + \frac{m_1}{m_0+m_1}\dot{\underline{v}}_1 = \underline{v}_{CM} = \frac{\underline{F}_0 + \underline{F}_1}{m_0+m_1}. \quad (3.22)$$

De (3.21) y (3.22) se confirma que la fuerza gravitacional es intrínseca al sistema, ya que el conjunto de ecuaciones de la CM no depende de él, sino que depende solo de las fuerzas externas aplicadas a los cuerpos. Además, dado que la masa del asteroide es insignificante en comparación con la masa del Sol ($m_0 \gg m_1$) y suponiendo fuerzas externas finitas, las ecuaciones se simplifican, obteniendo un nuevo sistema:

$$\dot{\underline{r}} = \underline{v}, \quad (3.23)$$

$$\underline{\dot{v}} \approx -\frac{Gm_0}{r^3}\underline{r} + \frac{\underline{F}_1}{m_1} = -\frac{\mu}{r^3}\underline{r} + \frac{\underline{F}_1}{m_1}, \quad (3.24)$$

$$\underline{r}_{CM} \dot{=} \underline{v}_{CM}, \quad (3.25)$$

$$\dot{\underline{v}}_{CM} \approx 0, \quad (3.26)$$

con las condiciones iniciales:

$$\underline{r}_0(0) = r_0, \quad \underline{v}_0(0) = v_0, \quad \underline{r}_{CM}(0) = r_{CM0}, \quad \underline{v}_{CM}(0) = v_{CM0}.$$

Donde $\mu = Gm_0 = 1.32712440018 \times 10^{20} [\frac{m^3}{s^2}]$ es el parámetro gravitacional estándar del Sol. Dado que la aceleración de la ecuación (3.26) $CM \sim 0$, \underline{r}_{CM} puede ser seleccionado como el marco de referencia del centro de referencia. Confirmando la premisa de que el CM del sistema solar se selecciona como el origen del marco de referencia el primer día de enero de 2000 (J2000) [Standish \(1995\)](#). En particular, dado que la masa del asteroide es insignificante en comparación con la del Sol, este último puede seleccionarse como el origen del marco de referencia.

3.2.3. Elementos orbitales clásicos

Para describir la dinámica de los asteroides es necesario primero para caracterizar los elementos orbitales clásicos (COE, por sus siglas en inglés) que se requieren para delinear una órbita específica. Estos elementos se consideran en un sistema clásico de dos cuerpos, uno de los cuales es el Sol y el otro un asteroide en órbita alrededor del primero. En general, se necesitan seis parámetros para definir de manera única una órbita y su vector de estado relativo (Scheeres, 2016; Standish, 1995). Los seis elementos clásicos keplerianos utilizados para describir el movimiento de un cuerpo celeste se presentan en la tabla 3.2. En la Figura 3.6, la órbita del cuerpo celeste se muestra con sus respectivos elementos orbitales. En este caso el plano de referencia es el plano eclíptico J2000 estándar, y la dirección de referencia es el equinoccio vernal.

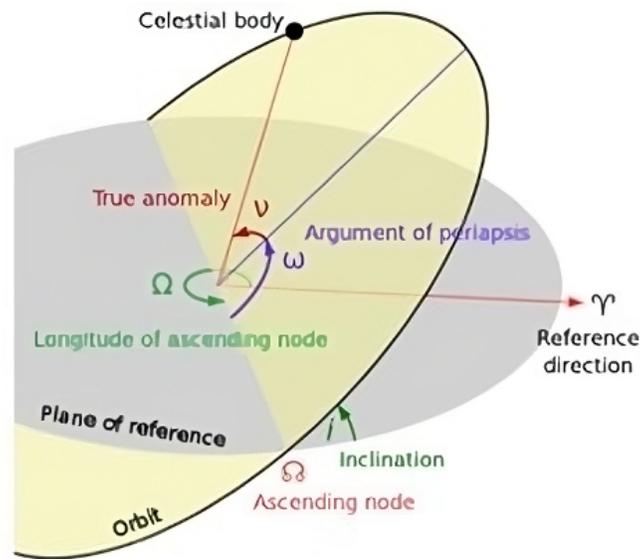


Figura 3.6: Elementos orbitales clásicos. Créditos: Alvarez Guzman (2014).

En un marco de referencia “libre”, las ecuaciones (3.23) y (3.24) se simplifican al establecer la entrada de las fuerzas externas a cero. Obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\underline{r}} = \underline{v}, \quad \underline{r}(0) = \underline{r}_0$$

$$\dot{\underline{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\underline{r}, \quad \underline{v}(0) = \underline{v}_0.$$

Es conveniente entonces definir el vector de momento angular, \underline{h} , del asteroide con respecto al Sol, y su derivada del tiempo de la siguiente manera (Alvarez et al., 1980; Standish, 1995):

$$\underline{h} = \underline{r} \times \underline{v}$$

$$\dot{\underline{h}} = \underline{r} \times \dot{\underline{v}} + \dot{\underline{r}} \times \underline{v} = 0 \quad (3.27)$$

Tabla 3.2: Posición de la colisión. Créditos: [Standish \(1995\)](#).

Eje semi-mayor (a)	Define el tamaño de la órbita
Excentricidad (e)	Define la forma de la órbita
Inclinación (i)	Define la inclinación de la órbita con respecto al plano de referencia (eclíptico) medido desde el nodo ascendente
Argumento del perihelio (ω)	Define la orientación de la órbita en el plano orbital, medida en ángulo desde el nodo ascendente hasta el perihelio
Longitud del nodo ascendente (Ω)	Define la ubicación de las ubicaciones de la órbita ascendente y descendente con respecto al plano de referencia (eclíptico)
Anomalía verdadera (ν)	Define dónde está el cuerpo dentro de la órbita con respecto al perihelio

Dado que la derivada del tiempo del vector de momento angular en la ecuación (3.27) es cero debido a las propiedades del producto cruzado, el plano orbital puede considerarse como un marco de referencia inercial. Considerando la siguiente ecuación (ecuación de momento angular orbital-gravitacional [Scheeres \(2016\)](#)):

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{v}} \times \underline{h} - \dot{\underline{v}} \times \underline{h} &= 0, \\
 \dot{\underline{v}} \times \underline{h} + \frac{\mu}{r^3} \underline{r} \times \underline{h} &= 0, \\
 \frac{d}{dt} \left(\underline{v} \times \underline{h} - \mu \frac{\underline{r}}{r} \right) &= 0, \\
 \underline{v} \times \underline{h} - \mu \frac{\underline{r}}{r} &= \mu \underline{e}. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

La órbita del asteroide describe una trayectoria elíptica en la que el Sol es uno de los focos. En la ecuación (3.28), se define el vector de excentricidad \underline{e} . Este vector es constante, se encuentra en el plano orbital y señala el perihelio. Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.28) por \underline{r}^T se encuentra que:

$$\underline{r}^T (\underline{v} \times \underline{h}) - \frac{\mu}{r} \underline{r}^T \underline{r} = \mu \underline{r}^T \underline{e}.$$

Aplicando que ([Battin, 1999](#); [Scheeres, 2016](#))

$$h^2 - \mu r(t) = \mu r(t) e \cos(\nu(t)).$$

Finalmente, se obtiene una expresión para el radio de la órbita de la siguiente manera:

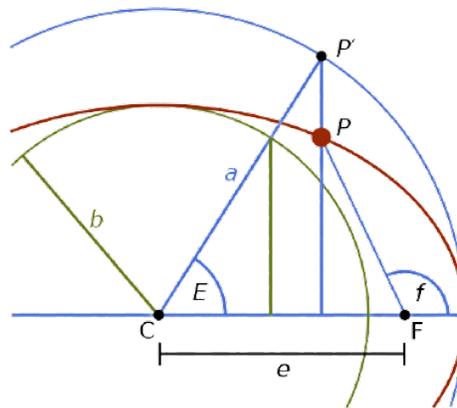
Tabla 3.3: Tipo de sección cónica. Créditos: [Bate et al. \(2020\)](#).

Cónica	Excentricidad
Círculo	$e = 0$
Elipse	$0 < e < 1$
Parábola	$e = 1$
Hipérbola	$e > 1$

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos(\nu(t))} \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) es, de hecho, la ecuación de la órbita, también llamada ecuación de trayectoria. Donde $p = \frac{h^2}{\mu}$. $e = |\underline{e}|$, es la excentricidad de la órbita. $\nu(t)$, el ángulo entre \underline{r} y \underline{e} , es la verdadera anomalía. Y $h = |\underline{h}|$ es la magnitud del vector de momento angular. Además, esta ecuación describe la forma y el tamaño de la órbita, lo que indica que todas las órbitas de asteroides son secciones cónicas: elipses, círculos, parábolas e hipérbolas, como se muestra en la tabla 3.3.

La tabla 3.3 muestra el tipo diferente de secciones cónicas y, por lo tanto, todas las órbitas posibles que el asteroide puede describir según la excentricidad. Normalmente, el movimiento del asteroide dentro de la órbita se describe por la anomalía verdadera (ν), pero se puede reemplazar por la anomalía excéntrica (E) [Chodas and Yeomans \(1999\)](#); [Hartle \(2005\)](#); [Roithmayr et al. \(2005\)](#), que es la distancia angular entre el perihelio y la proyección de la posición de la órbita elíptica. en su círculo auxiliar de radio a , medido desde el centro de la órbita véase Figura 3.7. Ahora bien, la ecuación diferencial que define este movimiento, una versión modificada de la ecuación de Kepler, se ve como:

Figura 3.7: Anomalía y excentricidad. Créditos: [Battin \(1999\)](#).

$$\dot{E}(t)(1 - e \cos(E(t))) = \omega_0, \quad E(0) = 0. \quad (3.30)$$

Con tasa angular media y período orbital medio, respectivamente ([Scheeres, 2016](#); [Standish, 1995](#)):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} [\text{rad/s}],$$

$$p_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} [s].$$

La velocidad angular media es la velocidad angular constante que el asteroide tendría en una órbita circular ($e = 0$), y el período angular medio sería su período en tal caso. Resolviendo la ecuación (3.30) deduciendo la siguiente ecuación:

$$E(t) = e \sin(E(t)) + \omega_0(t - t_0), \quad t \geq t_0, \quad (3.31)$$

$$r(t) = a(1 - e \cos(E(t))). \quad (3.32)$$

La parte lineal de la ecuación (3.31) se llama anomalía media, $M(t) = \omega_0(t - t_0)$. En el caso particular de una órbita circular, dado que existe una excentricidad cero ($e = 0$), la ecuación (3.31) y la ecuación (3.32) se simplifican obteniendo finalmente:

$$E(t) = \omega_0(t - t_0) \quad t \geq t_0,$$

$$r(t) = a.$$

Como se esperaba, si el radio de la órbita es equivalente a a entonces la anomalía excéntrica y la anomalía media son idénticas, $E(t) = M(t)$.

3.3. Las funciones de Bessel

Antes de iniciar la resolución de la ecuación de Kepler es necesario hacer una pequeña introducción a las funciones de Bessel puesto que estarán involucradas en la misma. Estas funciones suelen presentarse como la solución de la ecuación diferencial de Bessel

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0, \quad (3.33)$$

donde ν es un parámetro real positivo (en principio distinto al ν de la sección anterior). En la forma normal, las funciones coeficientes de x' y x son:

$$\frac{1}{t}, \quad \frac{t^2 - \nu^2}{t^2}, \quad (3.34)$$

que evidentemente no son desarrollables en potencias de t , pero sin embargo, el punto $t = 0$ es un punto singular regular. Por lo anterior es posible resolver la ecuación diferencial (3.33) aplicando el método de Fröbenius (Colwell, 1992).

La ecuación “base” viene dada por

$$m^2 - \nu^2 = 0,$$

cuyas raíces son $m_1 = \nu$ y $m_2 = -\nu$. El método de Fröbenius asegura la existencia de una solución en forma de serie de Fröbenius para $m_1 = \nu$ (Korenev, 2002). Probando con soluciones de la forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+m},$$

obteniendo la relación de recurrencia siguiente:

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+m+2+\nu)(k+m+2-\nu)}.$$

Para $m_1 = \nu$, teniendo en cuenta que $a_0 \neq 0$ se obtiene que:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1) a_0}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)},$$

lo que implica que:

$$x_1(t) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1) a_0}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k},$$

que es una solución de la ecuación de Bessel. Los coeficientes a_{2k+1} dan lugar a las llamadas funciones especiales de Bessel (Korenev, 2002).

Tomando $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ se obtiene lo que se define como función de Bessel de primera especie de orden ν , que está dada por

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Tomando $n \in \mathbb{N}$, la función $J_n(t)$ es la única solución del problema de valores iniciales siguiente (Colwell, 1992):

$$(P_n) = \begin{cases} t^2 x'' + t x' + (t^2 - n^2) x = 0 \\ x(0) = 0, x'(0) = \delta_{1n}, \end{cases} \quad (3.35)$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker definida como

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Este hecho será fundamental para probar la representación integral para $J_n(t)$, que es la pieza clave de la solución de la ecuación de Kepler. En la Figura 3.8 se muestran algunas funciones $J_n(t)$.

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces:

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nE - t \sin(E)) dE,$$

esto se puede probar si sabiendo que:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nE - t \sin(E)) dE,$$

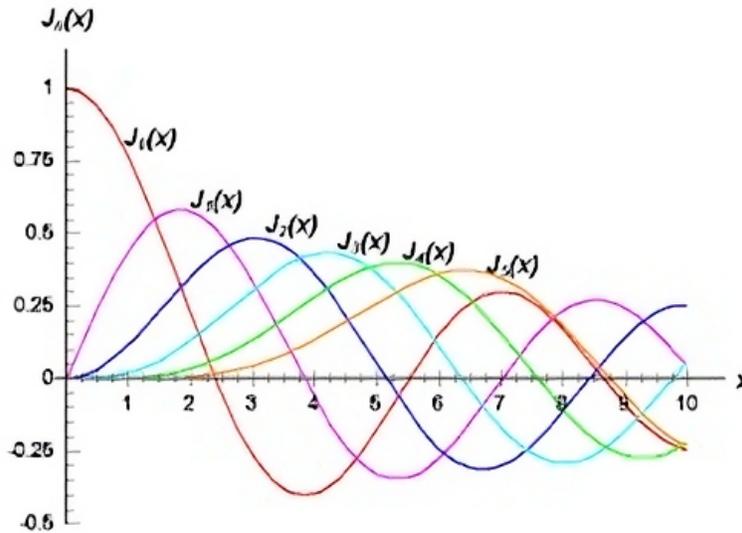


Figura 3.8: Algunas funciones de Bessel de primera especie. Créditos: [Korenev \(2002\)](#).

es la solución del problema con valores iniciales (3.35). También es claro que

$$x'(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nE - t \sin(E)) (-\sin(E)) dE,$$

y, aplicando integración por partes tomando $u = \sin(nE - t \sin(E))$ y $dv = (-\sin(E)) dE$, se obtiene que

$$x'(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nE - t \sin(E)) (n - t \cos(E)) \cos(E) dE,$$

o también

$$x'(t) = \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nE - t \sin(E)) \cos(E) dE - \frac{t}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nE - t \sin(E)) \cos^2(E) dE.$$

Mientras que su segunda derivada es:

$$x''(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nE - t \sin(E)) \sin^2(E) dE,$$

donde su forma explícita se representa como

$$x''(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nE - t \sin(E)) dE + \frac{1}{\pi \cos(nE - t \sin(E))} \cos^2(E) dE.$$

Sustituyendo en (3.33) se encuentra que [Colwell \(1992\)](#); [Korenev \(2002\)](#):

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = \frac{nt}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nE - t \sin(E)) dE - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nE - t \sin(E)) dE = 0, \quad (3.36)$$

y, por tanto, $x(t)$ cumple la ecuación diferencial en P_n , lo que implica que también cumple las condiciones iniciales [Korenev \(2002\)](#). Finalmente, es claro que

$$x(0) = \frac{1}{\pi} \cos(nE) dE = 0 \quad n \geq 1,$$

además de que:

$$\begin{aligned} x'(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(nE) \sin(E) dE \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi \cos((n-1)E) dE - \int_0^\pi \cos((n+1)E) dE \right) \\ &= \begin{cases} 0, & n \geq 2, \\ \frac{1}{2}, & n = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Probando así que $x(t)$ es solución de P_n .

3.3.1. Resolución de la ecuación de Kepler

Habiendo hecho el estudio de las funciones de Bessel ahora, se obtendrá una expresión para la solución de la ecuación de Kepler en forma de serie de Fourier de senos, es decir:

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\epsilon) \sin(nM),$$

donde los coeficientes $b_n(\epsilon)$ están relacionados con las funciones de Bessel. Es necesario señalar que Bessel introdujo las funciones que llevan su nombre precisamente para obtener esta solución de la ecuación de Kepler, ver [Colwell \(1992\)](#).

En primer lugar, se observa que para cada $M \in \mathbb{R}$, la ecuación de Kepler admite una única solución denotada por $E_\epsilon(M)$. Aplicando el teorema de la función implícita a la siguiente función

$$F(M, E) = e - \epsilon \sin(E) - M.$$

(notar que $\frac{\partial F}{\partial E} = 1 - \epsilon \cos(E) \neq 0$, puesto que $0 < \epsilon < 1$) es factible aseverar que existe una única función:

$$\begin{aligned} E_\epsilon &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ M &\rightarrow E_\epsilon(M). \end{aligned}$$

Además, la función $E_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ dado que $F(M, E) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ [Korenev \(2002\)](#). Por lo tanto, si $0 < \epsilon < 1$ y $M \in \mathbb{R}$, entonces:

$$E_\epsilon(M) = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\epsilon) \sin(nM).$$

Esto es fácil de probar debido a que:

$$g_\epsilon = E_\epsilon(M) - M,$$

ya que $g_\epsilon \in C^\infty\mathbb{R}$, es impar, $g_\epsilon(0) = 0$ y $g_\epsilon(\pi) = \pi$. Además g_ϵ se intuye como una función 2π -periódica. Pues ello se prueba con:

$$E_\epsilon(M + 2\pi) = E_\epsilon(M) + 2\pi.$$

Y como $E_\epsilon(M + 2\pi)$ es solución de la ecuación

$$M + 2\pi = E - \epsilon \sin(E), \quad (3.37)$$

de hecho, bastaría ver que $E_\epsilon(M) + 2\pi$ es solución de la misma ecuación. Pero como $E_\epsilon(M)$ es solución de la ecuación $M + 2\pi = E + 2\pi - \epsilon \sin(E + 2\pi)$, se deduce que $E_\epsilon + 2\pi$ es solución de (3.37). Por lo anterior se podría sugerir que g_ϵ se puede expresar como una serie de Fourier en términos de senos en el intervalo $[0, \pi]$ convergente en cada punto; es decir:

$$g_\epsilon(M) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\epsilon) \sin(nM).$$

Ahora, se determinarán los coeficientes $b_n(\epsilon)$ sabiendo que:

$$b_n(\epsilon) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_\epsilon(M) \sin(nM) dM.$$

Aplicando integración por partes, $u = g_\epsilon(M)$ y $dv = \sin(nM) dM$, se tiene que:

$$b_n(\epsilon) = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi g'_\epsilon(M) \cos(nM) dM = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi E'_\epsilon(M) \cos(nM) dM.$$

Debido a que $M = E - \epsilon \sin(E) = E_\epsilon(M) - \epsilon \sin(E_\epsilon(M))$, aplicando la parametrización $E = E_\epsilon(M)$, de donde:

$$b_n(\epsilon) = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nE - \epsilon \sin(E)) dE,$$

de donde finalmente deducimos que

$$b_n(\epsilon) = \frac{2}{\pi} J_n(n\epsilon),$$

lo cual demuestra que la ley que rige el movimiento de un cuerpo alrededor del Sol, ley de Kepler, puede tener como solución funciones de Bessel.

3.4. Cálculo de geodésicas

Como se puede intuir, las geodésicas son el análogo de las órbitas en los estudios de la relatividad o gravitación, es decir, las geodésicas determinan el “camino” o trayectoria que sigue, comúnmente una partícula sin masa, alrededor de un cuerpo muy masivo. Las geodésicas de Schwarzschild son funciones elípticas, por lo tanto, deben escribirse como tales. Para este propósito, las funciones elípticas de Weierstrass son más útiles porque conducen a expresiones simples. La razón de esto es que la solución

de ecuaciones cuárticas o cúbicas se puede evitar de esta manera. En el trabajo de [D'Orazio and Saha \(2010\)](#) se dio una solución analítica para la geodésica en la aproximación de campo débil. Como se señaló en ese documento, el progreso en las observaciones astronómicas requiere mejores métodos analíticos. A este respecto, es deseable tener las geodésicas exactas en la forma más adecuada para las aplicaciones. Para las órbitas en coordenadas polares, este objetivo se puede lograr mediante el uso de la función \mathcal{P} Weierstrass para la cual se conocen muchos métodos analíticos y numéricos [Scharf \(2011\)](#).

3.4.1. Geodésicas en la métrica de Schwarzschild

Tomando las coordenadas $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$ y escribimos la métrica de Schwarzschild en la forma

$$ds^2 = \frac{r-r_s}{r} c^2 dt^2 - \frac{r}{r-r_s} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

donde $r_s = \frac{2Gm}{c^2}$ es el radio de Schwarzschild. Si asumimos $c = 1$ la ecuación geodésica se ve como:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0,$$

siendo $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ los símbolos de Christoffel ([Wald, 2010](#)) y utilizando $1 - \frac{r_s}{r} = e^\nu$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \nu' \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\nu}{2} e^{2\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{\nu'}{2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r e^\nu \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0, \quad (3.40)$$

además, se ha elegido $\theta = \frac{\pi}{2}$ como el plano de movimiento. Si se multiplica (3.38) por e^ν [Scharf \(2011\)](#) se encuentra que:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(e^\nu \frac{dt}{ds} \right) = 0 \implies e^\nu \frac{dt}{ds} = \text{constante} = E \implies \frac{dt}{ds} = E^{-\nu}. \quad (3.41)$$

Multiplicando ahora (3.40) por r^2 se obtiene que

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = \text{constante} = L \implies \frac{d\phi}{ds} = \frac{L}{r^2}. \quad (3.42)$$

Si se sustituye (3.41) y (3.42) en (3.40) y se multiplica por $2e^\nu \frac{dr}{ds}$ se obtiene

$$\frac{d}{ds} \left[\underbrace{e^\nu \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - E^2 e^{-\nu} + \frac{L^2}{r^2}}_{\text{constante}=b} \right] = 0$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = E^2 + e^\nu \left(b - \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (3.43)$$

La constante b se puede ajustar arbitrariamente. Si ahora se toma $b = -m^2$ donde m es la masa en reposo de la partícula de “prueba”. Esto permitirá incluir geodésicas nulas (rayos de luz) con $m^2 = 0$. Cada geodésica se caracteriza por dos constantes del movimiento: energía E y momento angular L [Scharf \(2011\)](#).

Si se toma la ecuación (3.43) y la ecuación (3.42), se obtiene:

$$\frac{dr}{d\phi} = \sqrt{\frac{E^2 - m^2}{L^2} r^4 + \frac{m^2}{L^2} r_S r^3 - r^2 + r_S r} = \sqrt{f(r)}, \quad (3.44)$$

Ahora $\phi = \phi(r)$ se puede escribir como una integral elíptica. Sin embargo, es conveniente utilizar la inversa de $r = r(\phi)$ en términos de función elíptica mediante el uso de una fórmula de Weierstrass ([Abramowitz et al., 1988](#)). Donde $f(r)$ se escribe como [Scharf \(2011\)](#)

$$f(r) = a_0 r^4 + 4a_1 r^3 + 6a_2 r^2 + 4a_3 r + a_4, \quad (3.45)$$

y si $r_1 = \implies f(r_1) = 0$, entonces una solución de (3.44) viene dada por

$$r = r_1 + \frac{f'(r)}{4\mathcal{P}(\phi; g_2, g_3) - \frac{f''(r_1)}{6}}. \quad (3.46)$$

Aquí $\mathcal{P}(\phi; g_2, g_3)$ es la función \mathcal{P} de Weierstrass con invariantes:

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

$$a_4 = 0$$

La ecuación (3.46) aún no es la solución del problema, ya que contiene demasiados parámetros, por ejemplo, los invariantes g_2 , g_3 y las derivadas de f que esta a su vez contiene a E y L , pero además aparece r_1 [Scharf \(2011\)](#). Es obvio que se podría calcular r_1 en función de E y L resolviendo la ecuación cuártica $f(r) = 0$, pero esto da expresiones complicadas. Es mejor usar r_1 y un segundo cero r_2 como constantes de integración en lugar de E y L . Esto es incluso deseable desde el punto de vista de los astrónomos porque los ceros de la derivada (3.44) son puntos de inflexión de la geodésica, por ejemplo, en el caso de una órbita limitada, pueden identificarse con el perihelio y el afelio de la órbita [Scharf \(2011\)](#); [Wald \(2010\)](#). Para expresar E y L en términos de r_1 y r_2 , reescribimos el problema como:

$$f(r) = a_0 r(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3),$$

sí empleando la ecuación (3.45) y comparando términos a término:

$$4a_1 = -a_0(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{m^2}{L^2} r_S,$$

$$6a_2 = a_0(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = -1,$$

$$4a_3 = -a_0r_1r_2r_3 = r_S,$$

$$a_0 = \frac{E^2 - m^2}{L^2},$$

se puede resolver como

$$\frac{m^2}{L^2}r_S = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3},$$

obteniendo un tercer cero

$$r_3 = r_S \frac{r_1r_2}{r_1r_2 - r_1r_S - r_2r_S}, \quad (3.47)$$

encontrando los valores expresos de g_2 y g_3

$$g_2 = \frac{1}{12} - \frac{m^2}{4L^2}r_S^2 \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{r_S}{4} \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3} \quad (3.49)$$

$$g_3 = \frac{1}{6^3} - \frac{m^2}{48L^2}r_S^2 - \frac{a_0}{16}r_S^2, \quad (3.50)$$

$$= \frac{1}{6^3} - \frac{1}{48} \frac{(r_1 + r_2 + r_3)r_S}{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3} + \frac{1}{16} \frac{r_S^2}{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}. \quad (3.51)$$

Sustituyendo r_3 en (3.47), entonces las derivadas $f'(r_1)$, $f''(r_1)$ que aparecen en la solución (3.46) obteniendo [Scharf \(2011\)](#):

$$f'(r_1) = -\frac{r_1(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3},$$

$$f''(r_1) = -2 \frac{(r_1 - r_2)r_1 + (r_1 - r_3)r_1 + (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}.$$

Con estas sustituciones, la ecuación (3.46) da todas las geodésicas posibles en la forma $r = r(\phi; r_1, r_2)$. Si se propone que las dos soluciones r_1 r_2 sean reales más grandes, en comparación con el radio de Schwarzschild [Scharf \(2011\)](#); [Wald \(2010\)](#) r_s en valor absoluto. Entonces despreciando $O(r_s)$ en los invariantes (3.48) y (3.50) la función \mathcal{P} se vuelve fácil de resolver [Abramowitz et al. \(1988\)](#):

$$\mathcal{P}(\phi; \frac{1}{12}, 6^{-3}) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4 \sin^2 \phi/2} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2(1 - \cos \phi)}.$$

Mientras que las derivadas de f se expresan como:

$$f'(r_1) = -\frac{r_1}{r_2}(r_1 - r_2),$$

$$f''(r_1) = -2\left(3\frac{r_1}{r_2} - 2\right).$$

Ahora, introduciendo el parámetro de excentricidad ϵ se obtiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}, \quad (3.52)$$

por lo que usando la ecuación (3.46), se determina la forma final de la geodésica, así como la solución general a la ecuación de Kepler

$$r = \frac{(1 + \epsilon)r_1}{1 + \epsilon \cos \phi}. \quad (3.53)$$

Suponiendo que ambos ceros r_1 y r_2 positivos y, en particular $r_1 < r_2$ se tiene $\epsilon < 1$ y la órbita es una elipse con perihelio r_1 y afelio r_2 . En el caso hiperbólico $\epsilon > 1$ se puede ver en (3.52) que si $r_1 > 0 \implies r_2 < 0$. Entonces solo hay un punto de inflexión físico r_1 que es el punto de aproximación más cercano. Este último siempre corresponde a $\phi = 0$.

3.5. Análisis de órbitas

Como lo vimos en la secciones anteriores existen muchas maneras de dar solución u obtener la expresión de la ecuación de Kepler. En particular, en la subsección 3.4.1 se calcula la ecuación de Kepler bajo los términos relativistas, ahora se calculará utilizando la mecánica clásica. Partiendo de la definición de torque:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

como se sabe, el momento angular se puede ver como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}),$$

pero

$$\vec{r} \parallel \vec{F} \implies \vec{\tau} = 0.$$

Por otro lado, el momento angular se define como:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \vec{L} = cte,$$

por lo que

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mrv \cos(\vec{r}, \vec{p})$$

Al ser \vec{L} constante, también lo serán \vec{r} y el momento lineal \vec{p} , r y p estarán siempre en el mismo plano, y por eso las órbitas son planas. Esta misma cuestión de órbitas planas se obtiene de la relatividad al

momento de imponer la métrica. Ahora, queda solamente demostrar que la curva que describen los planetas es una elipse. Una órbita cualquiera debe cumplir las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\omega = \frac{da}{dt},$$

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$v_a = r\omega$$

y

$$L = m\omega r^2.$$

Ahora la energía mecánica total se define como:

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{GMm}{r} \implies v_r = \sqrt{\frac{2E_m}{m} - r^2\omega^2 + \frac{2GM}{r}}$$

y dado que

$$\omega r = \frac{L}{mr} \implies v_r = \sqrt{-\frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{2GM}{r} + \frac{2E_m}{m}}.$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{da}{dr} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\omega}{v_r} \implies \frac{da}{dr} = \frac{\omega}{v_r},$$

lo que implica que

$$\frac{da}{dr} = \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{-\frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{2GM}{r} + \frac{2E_m}{m}}},$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\frac{da}{dr} = \frac{\frac{1}{r^2}}{\sqrt{-\frac{1}{r^2} + \frac{2GMm^2}{L^2r} + \frac{2mE_m}{L^2}}}, \quad (3.54)$$

cabe resaltar que esta ecuación tiene mucha similitud con la ecuación (3.44), ya que ambas aparecen términos ligados a la energía, constante gravitacional, momento y masas de prueba.

Ahora, fijando $A = -1$, $B = \frac{-2GMm^2}{L^2}$ y $C = \frac{2mE_m}{L^2}$, la ecuación (3.54) se ve como:

$$\frac{da}{dr} = \frac{\frac{1}{r^2}}{\sqrt{A\frac{1}{r^2} - B\frac{1}{r} + C}},$$

efectuando el cambio de variable:

$$u = -\frac{1}{r} \implies du = \frac{1}{r^2} dr.$$

Por lo que se puede establecer el valor de a como:

$$a = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{Au^2 + Bu + C}} du \implies a = \arccos\left(\frac{-2u + B}{\sqrt{B^2 + 4C}}\right),$$

de donde, al deshacer el cambio de variable se obtiene:

$$r = \frac{-2}{B - \sqrt{B^2 - 4C} \cos(a)},$$

que finalmente se puede expresar como:

$$r = -\frac{\frac{2}{B}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}} \cos(a)}, \quad (3.55)$$

que es la ecuación de una elipse en forma polar, cuya excentricidad depende de C y B , y estos a su vez de G , M , m , L y E_m y que es muy parecida a la ecuación (3.53).

A continuación y a manera de ver la aplicación y posible diferencia en cuanto al cálculo de órbitas, se hará uso de los cálculos de esta sección así como los de la subsección 3.4.1 y se compararán la órbita establecida por la mecánica clásica y por la relatividad con los datos proporcionados por el [JPL-99942 Apophis](#) con relación al NEO 99942 Apophis.

Tabla 3.4: Datos orbitales del NEO 99942 Apophis. Créditos: [Sentry CNEOS NASA](#).

Excentricidad (e)	0.191
Semieje mayor (a)	0.922 AU
Perihelio (q)	0.746 AU
Inclinación; ángulo con respecto al plano eclíptico $x - y$ (i)	3.33°
Afelio (Q)	1.09 AU

La Figura 3.9 muestra en línea azul punteada la órbita que sigue nuestro planeta alrededor del Sol (el cual es el punto amarillo situado en la coordenada [0,0]), los puntos verdes corresponden a datos del Sentry CNEOS NASA exclusivos para este asteroide con un factor de error del 10%, la línea roja es la órbita, calculada con mecánica clásica (ecuación (3.55)), de este asteroide mientras que la línea negra representa la órbita calculada utilizando la geodésica ligada a la métrica de Schwarzschild (ecuación (3.53)). Las siguientes imágenes representan un acercamiento a la zona de perihelio (gráfica 3.10a) y afelio (gráfica 3.10b) con la finalidad de hacer más notorios los cambios de las órbitas.

Como se puede ver en las figuras 3.10a y 3.10b, la órbita predicha por la relatividad se apega más a los datos establecidos por el Sentry CNEOS NASA.

Para conocer la diferencia al momento que cruzan las órbitas, tanto la de Kepler como la relacionada con la relatividad, se ha hecho también un par de acercamientos a dichas partes, al norte 3.11b y sur

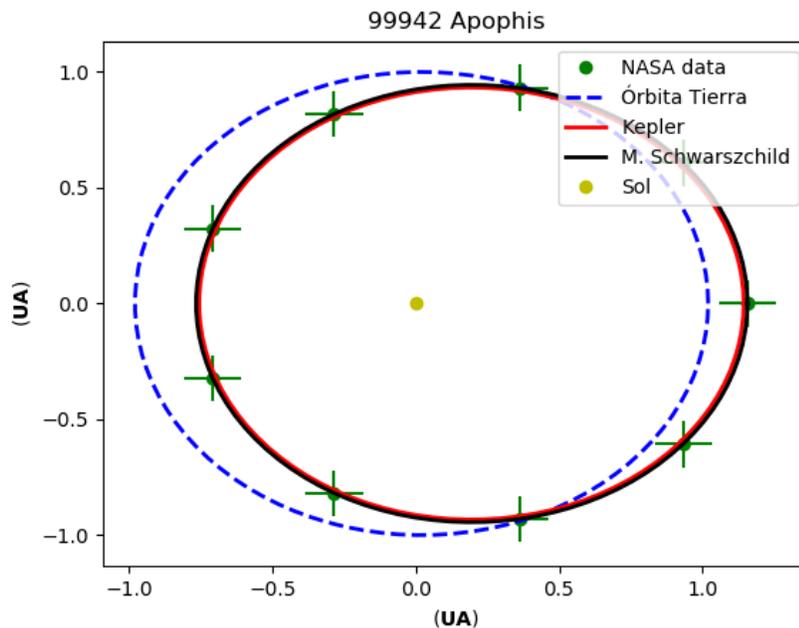


Figura 3.9: Cálculo de la órbita de asteroide *99942 Apophis* utilizando mecánica clásica y relatividad. Créditos: [Gutierrez-Zalapa et al. \(2023a\)](#).

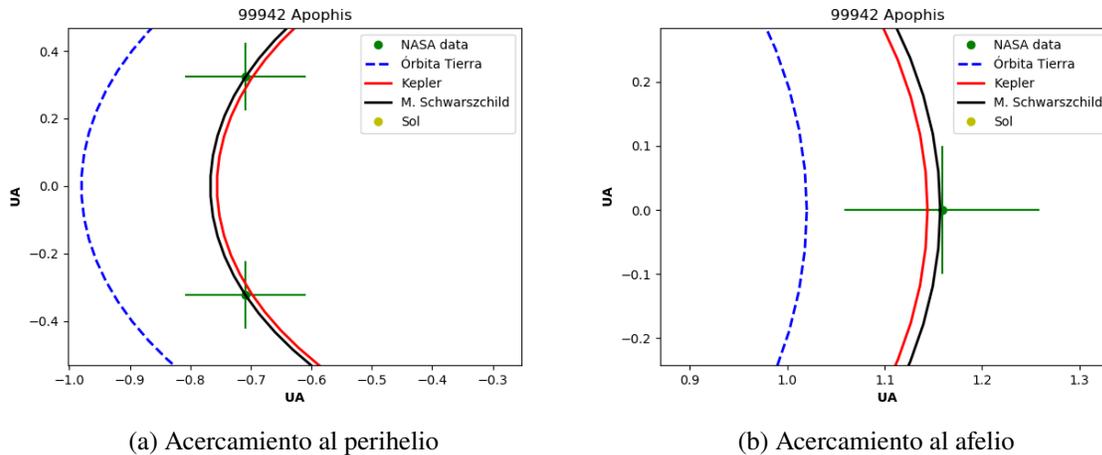


Figura 3.10: Acercamientos al afelio y perihelio con respecto a la Figura 3.9. Créditos: [Gutierrez-Zalapa et al. \(2023a\)](#).

3.11a, comportamientos que similares a los sugerido por [Shor et al. \(2012\)](#); [Smulsky and Smulsky \(2012\)](#).

Finalmente se decide conocer la velocidad orbital predicha por ambos modelos, en donde la gráfica 3.12 muestra que la velocidad predicha por la métrica de Schwarzschild difiere un poco con respecto a la predicha por Kepler, es conveniente mencionar que ambas están el orden de magnitud con la velocidad alrededor del Sol de *99942 Apophis* (30 km/s).

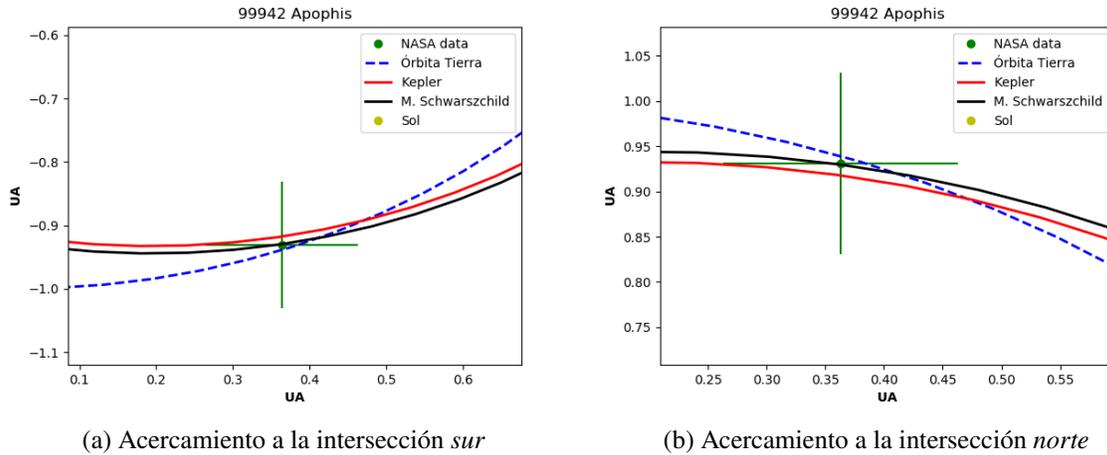


Figura 3.11: Acercamientos a las intersecciones con la órbita terrestre con respecto a la Figura 3.9. Créditos: [Gutierrez-Zalapa et al. \(2023a\)](#).

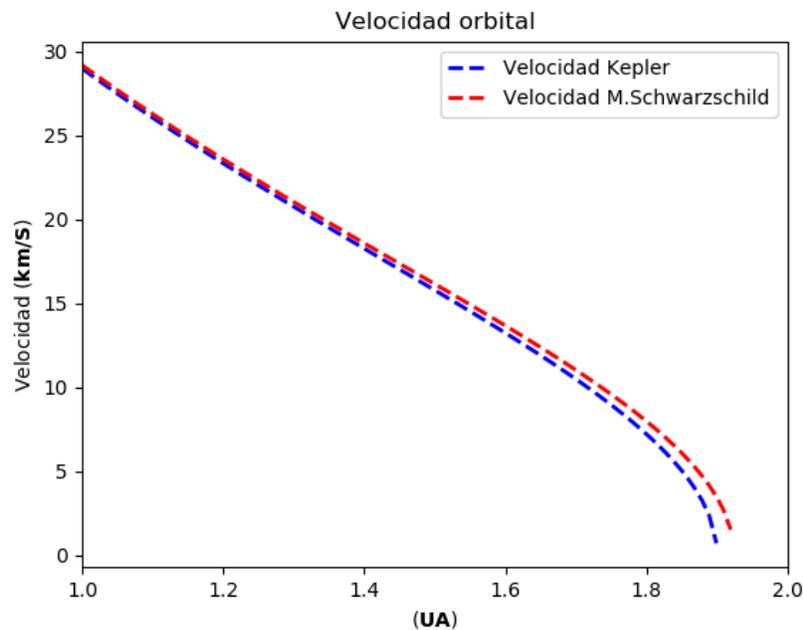


Figura 3.12: Cálculo de la velocidad orbital del asteroide 99942 *Apophis* utilizando mecánica clásica y relatividad. Créditos: [Gutierrez-Zalapa et al. \(2023a\)](#).

Cabe resaltar que dicho cálculo (el de la velocidad orbital) es muy importante, pues haciendo algunas modificaciones a la ecuación de la *velocidad límite* (más precisamente la relacionada con la masa) se podría conocer la velocidad orbital alrededor de nuestro planeta, dicha velocidad se tomaría como la velocidad inicial de este cuerpo en el tope de la atmósfera terrestre, dato que es crucial para la implementación de cálculos relacionados con la interacción y fenómenos físicos ligados al paso de un bólido por la atmósfera terrestre. Saber si este objeto *empataría a tiempo* con nuestro planeta, se

conocería con los datos de los últimos 2 años previo al acontecimiento [Shor et al. \(2012\)](#); [Smulsky and Smulsky \(2012\)](#), ya que condiciones como, fuerza no gravitacionales (por ejemplo, el efecto YORP) podría acelerar o ralentizar su camino [Vokrouhlický et al. \(2015\)](#).

3.5.1. Órbitas rodeadas con quintaesencia

Bajo la idea de que aproximadamente el 30% de la materia en el universo es *materia no común*, se pueden explorar condiciones como, órbitas en espacio-tiempo permeado por materia de quintaesencia, con la finalidad de observar el comportamiento de la geodésica asociada a este tipo de métricas, para cuerpos con masa no despreciable. Con base en lo anterior, se puede concebir una métrica del tipo:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (3.56)$$

donde $f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2M\epsilon}$, con M es el parámetro de masa y ϵ un parámetro relacionado con la constante cosmológica [Pedraza et al. \(2021\)](#). Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ la métrica (3.56) se reduce al agujero negro de Schwarzschild. En el trabajo de [Kiselev \(2003\)](#) sobre quintaesencia y agujeros negros, se propone una nueva solución de la métrica para el espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico, considerando que el tensor energía-momento para quintaesencia debería satisfacer

$$T_{\phi}^{\phi} = T_{\theta}^{\theta} = -\frac{1}{2}(3w+1)T_r^r = \frac{1}{2}(3w+1)T_t^t,$$

con w constante y la condición de energía dominante $\rho = T_{tt} \geq 0$, siendo ρ la densidad de energía y $|3w+1| \leq 2$. Por lo tanto, la expresión de la función métrica de tal agujero negro rodeado por quintaesencia se obtiene sumando el término $-c/r^{3w+1}$ a la métrica de los agujeros negros [Estevez-Delgado et al. \(2020\)](#); [Ghaderi \(2017\)](#):

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2M\epsilon^2} - \frac{c}{r^{3w+1}},$$

nuevamente cuando $\epsilon \rightarrow 0$, ahora se obtiene la función $f(r)$ para la métrica de Schwarzschild rodeada por materia de quintaesencia

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{c}{r^{3w+1}}.$$

Con lo anterior como sustento, es factible comparar los datos orbitales que instituciones como la NASA o el Minor Planet Center IAU tienen, con geodésicas no nulas, y con ello poder establecer la injerencia de la materia exótica en el cálculo de las órbitas de los NEOs, generando así una nueva vertiente en el análisis orbital [Gutierrez-Zalapa et al. \(2023a\)](#).

Una vez conocido el camino del NEO y habiendo determinado si éste podría representar un peligro para nuestro planeta, lo inmediato sería conocer las implicaciones físicas que éste suceso le causaría a la Tierra. Para ello es indispensable contar con un modelo que permita conocer los efectos relacionados con el escenario antes descrito. Con respecto a esto, en el Capítulo 2, se estableció el sistema de ecuaciones que modela el paso de un NEO por la atmósfera terrestre. Este sistema de ecuaciones sólo puede ser resuelto, haciendo restricciones que lo alejan de un escenario realista o usando métodos de integración

numérica. Esto último, el uso de métodos de integración numérica, serán las ideas fundamentales de este trabajo y las técnicas existentes y usadas por nuestro modelo se describen en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Métodos numéricos

Los métodos numéricos utilizan a la informática para generar aproximaciones numéricas que simulen procesos matemáticos, que a su vez suelen modelar situaciones del mundo real. La elección de la fórmula o algoritmo a usar para modelar alguna situación o fenómeno, influye, en particular, no solo en el tiempo de cómputo, sino también en los resultados y en cómo estos se interpretan. La forma en que avanza la computación, el número de iteraciones que requiere o el ritmo utilizado por una fórmula, mejora día con día con el avance de la tecnología. Por lo cual, se puede considerar que el mismo proceso de cálculo proveniente de diferentes modelos y con diferentes visiones genera un continuo mejoramiento de esta rama de las matemáticas y de la computación ([Hamming \(2012\)](#); [Hellevik \(2018\)](#)).

Quizás el problema más simple de los métodos de aproximación numérica es el de encontrar los ceros de una función. En la evaluación de una función cercana a cero hay una cancelación casi exacta de las partes positiva y negativa, el redondeo de los números y la evaluación de funciones, son básicos, ya que, si no se calcula la función con precisión, puede haber poco significado para los ceros encontrados. Debido a la estructura discreta del error de redondeo de la computadora, es muy poco probable que haya un número x que haga que la función $y = f(x)$ sea exactamente cero. En cambio, generalmente se encuentra un pequeño intervalo en el que la función cambia de signo. El tamaño del intervalo que se usa está relacionado con el tamaño del argumento x , ya que para x grande el sistema numérico tiene un espaciado grueso y para x pequeño (en tamaño) tiene un espaciado fino. Ésta es una de las razones por las que la idea del error relativo [Hamming \(2012\)](#):

$$R_E = \left| \frac{\text{verdadero} - \text{calculado}}{\text{verdadero}} \right|,$$

juega un papel importante en los cálculos científicos y de ingeniería. Las matemáticas convencionales calculan el error absoluto como:

$$Abs_E = |\text{valor verdadero} - \text{valor calculado}|,$$

Por otro lado, el error relativo tiene problemas cerca de lugares donde el valor verdadero es aproximadamente cero, y en tales casos se acostumbra usar como denominador [Hamming \(2012\)](#):

$$\max\{|x|, |f(x)|\},$$

donde $f(x)$ es una función calculada en x .

El problema que comúnmente se centra en encontrar los ceros complejos de una función analítica, ocurre con tanta frecuencia en la práctica que no se puede ignorar en el análisis de los métodos numéricos, aunque casi nunca se menciona en el análisis numérico. Un método simple parecido al que se usa para encontrar los ceros reales es muy efectivo en la práctica.

En el caso especial de encontrar todos los ceros de un polinomio, el hecho de que se conozca de antemano el número de ceros (así como otras características especiales) hace que el problema sea más fácil que para la función analítica general. Uno de los mejores métodos para encontrarlos es una adaptación del método habitual de Newton para encontrar ceros reales, y esta discusión se usa para ampliar, así como para analizar más, el método de Newton. Sólo en situaciones en las que puede hacerse un análisis cuidadoso, el método de Newton es útil en la práctica; de lo contrario, sus defectos conocidos superan sus virtudes.

Lo que hace que el problema de encontrar los ceros de un polinomio sea especialmente importante, además de su frecuencia, es el uso que se hace de los ceros encontrados. El método es un buen ejemplo de la diferencia entre el enfoque matemático y el enfoque de ingeniería. El primero simplemente intenta encontrar algunos números que hagan que la función se acerque a cero, mientras que el segundo reconoce que un par de ceros *cercanos* darán lugar a graves problemas de redondeo cuando se utilicen en una etapa posterior. De forma aislada, el problema de encontrar los ceros no es un problema realista, ya que los ceros deben usarse, no simplemente admirarse en el vacío. Por lo tanto, lo que se desea en la mayoría de la práctica es encontrar los ceros múltiples como ceros múltiples, no como unos separados tan cercanos. De manera similar, los ceros que son puramente imaginarios deben preferirse a los que tienen una parte real pequeña y una parte imaginaria grande, siempre que la diferencia pueda atribuirse razonablemente a incertidumbres en el modelo subyacente.

Otro problema algorítmico estándar tanto en matemáticas como en el uso de la computación para resolver problemas es la solución de ecuaciones lineales y diferenciales simultáneas. En la actualidad ningún método de solución completamente satisfactorio, debido a que la solución de este tipo de ecuaciones es a menudo el uso de un paquete de biblioteca estándar proporcionado por el lenguaje de programación donde la descripción correspondiente del método usado es a menudo superficial [Hamming \(2012\)](#); [Heath \(2018\)](#).

4.1. Diferencias finitas

Después de hablar sobre algoritmos y cómputo, es necesario introducir otras herramientas de cálculo más complejas con la finalidad de comenzar a representar situaciones del mundo real. La herramienta a introducir es el método de diferencias finitas. El método de diferencias finitas consiste en sustituir las fórmulas de derivadas numéricas obtenidas del polinomio de interpolación en la ecuación diferencial a resolver. Este método sigue las mismas reglas que la interpolación polinómica, especialmente en lo que respecta al espaciado constante. El método consiste, una vez sustituidas las ecuaciones diferenciales numéricas en las ecuaciones diferenciales, en construir una ecuación de recurrencia, alrededor de n puntos equidistantes en el intervalo $[a, b]$, lo que proporcionará una serie de ecuaciones que se resolverá utilizando un método específico. El método de diferencias finitas proporciona tanto la notación como

el marco de ideas para realizar muchas modelaciones. Este método es análogo al cálculo diferencial habitual, ya que también existen las operaciones fundamentales de la aritmética aunadas a las ecuaciones diferenciales. De la misma forma en cómo poseen similitudes también poseen diferencias, por ejemplo en el cálculo diferencial *el tamaño de paso* puede ser llevado al extremo de la infinitud, tratando al espacio como un continuo, mientras que en las diferencias finitas el tamaño de paso es fijo. Lo anterior, muestra una relevancia más del cálculo diferencial haciendo evidente la idea de que si un proceso computacional no se puede llevar al límite, entonces existe una pregunta muy legítima relacionada a la solidez de la aproximación con respecto al valor verdadero. Esta situación deja de tener relevancia cuando la aproximación numérica es la única forma de modelar fenómenos para los que el cálculo diferencial no tiene respuesta exacta [Langtangen and Linge \(2017\)](#). Una rama del cálculo diferencial que posee otra relación muy estrecha con este método, son las series de potencias, las cuales tienen un algoritmo simple, pero poderoso ya que permite tener una solución aproximada casi analítica a un problema, la limitante de este método radica en la poca eficiencia del tiempo de cómputo [Langtangen \(2012\)](#).

El cálculo de diferencias finitas también proporciona una herramienta para estimar los efectos de redondeo que aparecen en una tabla de numérica. Esta herramienta es de amplia y útil aplicación porque en lugar de estudiar cuidadosamente cada cálculo en particular, es posible aplicar este método general sin tener en cuenta los detalles del cálculo. Por supuesto, un método tan general no es tan poderoso como los métodos especiales hechos a la medida del problema, pero en gran parte de la computación ahorra tiempo y problemas.

La solución de ecuaciones en diferencias finitas es una forma de resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias, especialmente el caso muy común de coeficientes constantes, teniendo como principal característica la discretización de estas ecuaciones y su estabilidad en sus condiciones iniciales.

4.1.1. Discretización en diferencias finitas

Muchos de los desafíos numéricos que se enfrentan al calcular soluciones para ecuaciones diferenciales pueden ser solucionados con la implementación del método por diferencias finitas.

Comúnmente, los sistemas físicos modelados se describen mediante funciones matemáticas continuas, $f(x, t)$ y sus derivadas en el espacio y el tiempo. Para representar este sistema continuo en una computadora, este se debe de *discretizar* es decir, convertir la función continua en un número discreto de puntos en el espacio y uno o más niveles discretos en el tiempo. Hay muchos métodos de discretización utilizados en los campos de las ciencias físicas, la ingeniería y las matemáticas aplicadas, cada uno con sus propias fortalezas y debilidades. En términos generales, se pueden dividir en métodos basados en mallas y sin mallas [LeVeque \(2007\)](#); [Zingale \(2017\)](#).

Las cuadrículas estructuradas son lógicamente cartesianas. Esto significa que puede hacer referencia a la ubicación de cualquier celda en un dominio computacional a través de un índice entero en cada dimensión espacial. Desde el punto de vista de la programación, los valores definidos en cada punto de la cuadrícula se puede representar exactamente mediante una matriz multidimensional. Las cuadrículas no estructuradas no tienen este patrón simple. Un tipo popular de cuadrícula no estructurada se crea utilizando celdas triangulares (2-dimensional) o tetraedros (3-dimensional) [Blazek \(2015\)](#). La principal

ventaja de estas cuadrículas es que puede representar fácilmente dominios de forma irregular. La desventaja es que las estructuras de datos necesarias para describir la cuadrícula son más complicadas que una matriz simple (y tienden a tener un acceso a la memoria más ineficiente) [Zingale \(2017\)](#).

Una vez que se establece una cuadrícula, el sistema de ecuaciones se convierte en un sistema de ecuaciones discretas. Los métodos de diferencias finitas y volúmenes finitos (que se describirán en la siguiente subsección) se pueden aplicar a cuadrículas estructuradas. La principal diferencia entre estos métodos es que los métodos de diferencia finita se construyen a partir de la forma diferencial de las ecuaciones, mientras que los métodos de volumen finito se basan en la forma integral de las ecuaciones. La ventaja de los métodos de volúmenes finitos es que la conservación es una consecuencia natural de la discretización, por eso son populares en astrofísica [Heath \(2018\)](#); [Stewart \(2017\)](#); [Zingale \(2017\)](#).

4.1.2. Discretización en volúmenes finitos

En la discretización de volúmenes finitos, f_i representa el promedio de $f(x, t)$ en el intervalo $x_{i-1/2}$ a $x_{i+1/2}$, donde los índices de medio entero denotan los bordes de la zona (es decir, $x_{i-1/2} = x_i - \Delta x/2$) [Hirsch \(1988, 1990\)](#):

$$\langle f \rangle_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx.$$

Aquí se ha pensado $\langle f \rangle_i$ como una línea horizontal que “barre” toda la zona; esto es para representar que es un promedio dentro del volumen definido por los bordes de la zona. Para una precisión de segundo orden,

$$\langle f \rangle_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx \sim f(x_i).$$

Esto significa que se puede tratar el promedio de f sobre una zona como simplemente $f(x)$ evaluado en el centro de la zona si solo se requiere precisión de segundo orden. Usando la notación de subíndice, se puede expresar el promedio de la zona a la derecha como $\langle f \rangle_{i+1}$.

4.1.3. Tipos de diferencias finitas

A continuación, se introducirá una notación adecuada que permita describir el tipo de diferencias. En la Figura 4.1 se ilustra una función arbitraria continua de x , es decir, $y = y(x)$. Posteriormente se usará y para representar la solución de una, que solo se puede representar y obtener para valores discretos de x . Dichos valores discretos y equidistantes de x se representan como:

$$x_j = x_0 + jh,$$

donde $h = \Delta x$ es el tamaño de paso y se asume constante a menos que se indique lo contrario y j es un contador entero que se refiere a los valores discretos x_j para los cuales el valor discreto correspondiente

Habiendo introducido esta notación, es factible desarrollar expresiones y notaciones útiles para diferencias hacia adelante (véase Figura 4.2), diferencias hacia atrás y diferencias centrales, que se utilizarán con frecuencia más adelante:

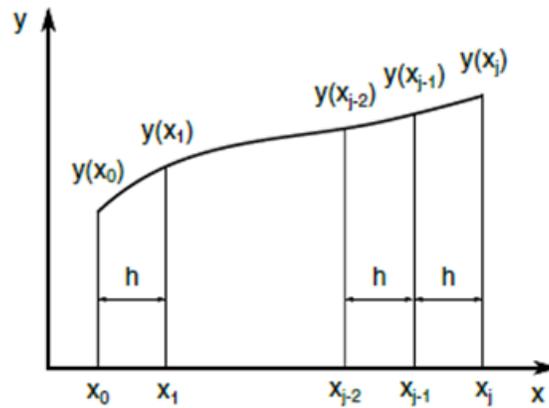


Figura 4.1: Una función genérica $y(x)$ muestreada en valores equidistantes de x . Créditos: [Linge and Langtangen \(2020\)](#).

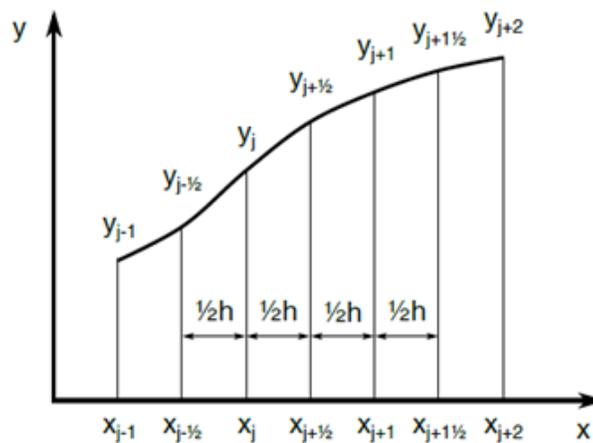


Figura 4.2: Ilustración de cómo obtener ecuaciones en diferencias. Créditos: [Linge and Langtangen \(2020\)](#).

Forward differences :

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j.$$

Backward differences :

$$\nabla y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Central differences

$$\delta y_{j+1/2} = y_{j+1} - y_j.$$

Los operadores de diferencias lineales, Δ , ∇ y δ son útiles cuando se derivan expresiones más complicadas, un ejemplo de este uso es el siguiente:

$$\delta^2 y_j = \delta(\delta y_j) = \delta(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) = y_{j+1} - y_j - (y_j - y_{j-1}) = y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}.$$

Sin embargo, para mayor claridad, se usarán las fórmulas completas en lugar de usar operadores. Un ejemplo de la aplicación de diferencias Forward, Backward y Central se puede ver el teorema de Taylor:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}y''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n \quad (4.1)$$

El resto R_n viene dado por:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!y^{n+1}(\epsilon)(x - x_0)^n}, \quad (4.2)$$

donde $\epsilon \in (x_0, x)$.

Ahora, el teorema de Taylor (4.1) puede usarse para aproximar el valor de $y(x_j + 1)$, es decir, el valor hacia adelante de $y(x_j)$, asumiendo que $y(x_j)$ y sus derivadas son conocidas:

$$y(x_{j+1}) \equiv y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \cdots + \frac{h^n y^{(n)}(x_j)}{n!} + R_n, \quad (4.3)$$

donde $R_n = O(h^{n+1})$, $h \rightarrow 0$. De (4.3) se tiene que [Linge and Langtangen \(2020\)](#):

$$y(x_{j-1}) \equiv y(x_j - h) = y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \cdots + \frac{h^k (-1)^k y^{(k)}(x_j)}{k!} + \dots \quad (4.4)$$

En lo siguiente se asumirá que h es positivo. Resolviendo (4.3) con respecto a y_0 se puede obtener una aproximación diferencial progresiva discreta de y_0 en x_j :

$$y'(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} + O(h). \quad (4.5)$$

Al resolver (4.4) con respecto a y_0 se obtiene una aproximación discreta en x_j :

$$y'(x_j) = \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h} + O(h). \quad (4.6)$$

Sumando (4.3) y (4.4), se obtiene una aproximación a la segunda derivada en el punto x_j

$$y''(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2} + O(h^2). \quad (4.7)$$

Restando (4.3) de (4.4) se obtiene una aproximación en diferencia hacia atrás de la derivada de primer orden en la ubicación x_j [Hellevik \(2018\)](#); [Linge and Langtangen \(2020\)](#):

$$y'(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}))}{2h} + O(h^2). \quad (4.8)$$

Las formas finales de las discretizaciones, *forward*, *central* y *backward* se pueden encontrar en la página 25 de [Hellevik \(2018\)](#).

actualizando. Esto se debe a que la información fluye de izquierda a derecha en este problema ($u > 0$). Esta elección de la derivada se llama *upwinding*: y da como resultado un método estable. Note que usando la ecuación (4.10) para actualizar los datos en la primera zona dentro de la frontera, es necesario datos a la izquierda de esta zona, es decir, fuera del dominio. Esto significa que se requiere un único punto fantasma para implementar las condiciones de frontera de nuestro método. La presencia de los puntos fantasma permite utilizar la misma ecuación de actualización (por ejemplo, la misma ecuación (4.10)) para todas las zonas del dominio Zingale (2017).

La última información necesaria para actualizar la solución es el intervalo de tiempo, Δt . Se puede demostrar que para que la solución sea *estable*, el intervalo de tiempo debe ser menor que el tiempo que tarda la información en propagarse a través de una sola zona Hellevik (2018); LeVeque et al. (2002); Stewart (2017). Es decir:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u}. \quad (4.11)$$

Esto se llama la condición de Courant-Friedrichs-Lewy o CFL. Una cantidad adimensional llamada número CFL, o sólo número de Courant, se define como:

$$C = \frac{\Delta t u}{\Delta x}. \quad (4.12)$$

La estabilidad requiere $C \leq 1$. Tradicionalmente escribimos el paso de tiempo como:

$$\Delta t = C \frac{\Delta x}{u}, \quad (4.13)$$

especificando C como parte del problema (un valor típico puede ser $C = 0.7$ (Zingale, 2017)).

Tenga en cuenta que, en general, se está resolviendo un sistema de ecuaciones no lineal, por lo que no es posible ejecutar con $C = 1$, ya que u (y por lo tanto C) cambiará de una zona a otra. En cambio, uno mira el intervalo de tiempo más restrictivo en todas las zonas y lo usa para todo el sistema Blazek (2015); Toro (2013). Se puede ver que, independientemente del valor de C que elija con el método *Forward in Time Centered in Space* o FTCS, la solución es incondicionalmente inestable. Si continúa evolucionando la ecuación con este método, encontrará que la amplitud crece sin límite Zingale (2017).

4.2.1. Prueba de la estabilidad

El método clásico para comprender la estabilidad es considerar el crecimiento de un solo modo de Fourier en la discretización. Es decir, sustituya en $a_i^n = A^n e^{Ii\theta}$, donde $I = \sqrt{-1}$ y θ representa una fase. Un método es estable si $|A^{n+1}/A^n| \leq 1$. FTCS aparece como Heath (2018):

$$a_i^{n+1} = a_i^n - \frac{C}{2}(a_{i+1}^n - a_{i-1}^n), \quad (4.14)$$

de donde:

$$A^{n+1} e^{Ii\theta} = A^n e^{Ii\theta} - \frac{C}{2} \left(A^n e^{I(i+1)\theta} - A^n e^{I(i-1)\theta} \right) \implies A^{n+1} = A^n (1 - IC \sin(\theta)). \quad (4.15)$$

Entonces la magnitud de la amplificación es Heath (2018); Stewart (2017):

$$\frac{A^{n+1}{}^2}{A^n} = 1 + C^2 \sin^2(\theta). \quad (4.16)$$

Se puede inferir que no hay ningún valor de C que pueda hacer que el método sea estable ($|A^{n+1}/A^n| > 1$ siempre). Haciendo el mismo análisis para la ecuación (4.10) mostraría que el método de *upwind* es estable para $0 \leq C \leq 1$.

4.3. Ecuación de Burgers

La ecuación en 1D de Burgers es una ecuación hiperbólica no lineal que se usa comúnmente como una ecuación para ilustrar varios esquemas numéricos asociados con ecuaciones diferenciales hiperbólicas no lineales [Gautschi \(1997\)](#). Esta luce como:

$$u_t + uu_x = 0. \quad (4.17)$$

Aquí u es la cantidad advectada como la velocidad a la que se advecta. Para la ecuación de Burgers, este ya no es el caso, ya que las condiciones ahora están dadas por $dx/dt = u$, con $x(0) = x_0$. Dado que $u = u(t)$, no se puede integrar esto directamente.

Tomando $u_0 = u(t=0)$, entonces se observa cómo se comporta dx/dt en un pequeño intervalo de tiempo (antes de que $u(x,t)$ cambie significativamente).

Una característica que no está presente en un sistema lineal es una rarefacción. La Figura 4.4 muestra las condiciones iniciales de una velocidad más lenta a la izquierda de una velocidad más rápida. Se puede ver que las características divergen en este caso, y teniendo que completar la solución intermedia como un estado intermedio [Gautschi \(1997\)](#); [Zingale \(2017\)](#).

En forma conservativa, la ecuación de Burgers se escribe como::

$$u_t + \left[\frac{1}{2}u^2 \right]_x = 0. \quad (4.18)$$

Los estados de la interfaz son predichos como de segundo orden por por medio de la serie de Taylor expandiéndose en el espacio y tiempo.

$$u_{i+1/2,L}^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta x}{2} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_i \right) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i \quad (4.19)$$

La única diferencia con la ecuación de advección lineal es que ahora $u_i Dt/Dx$ (donde D es el operador de la derivada advectiva) varía de una zona a otra, mientras que con la advección lineal, es la constante C . Los valores en cada punto de la derivada se calculan usando los mismos limitadores que con la advección lineal [Zingale \(2017\)](#).

Como vimos anteriormente, las curvas características pueden cruzarse en el plano $x-t$, y no es posible rastrear hacia atrás desde el tiempo para saber dónde se originó el flujo. Ésta es la condición para un choque [Toro \(2013\)](#).

La velocidad del choque se calcula a través de las condiciones de salto (o discontinuidad) Rankine-Hugoniot. Para una ecuación escalar, estos son fáciles de construir [LeVeque \(2007\)](#). La Figura 4.5

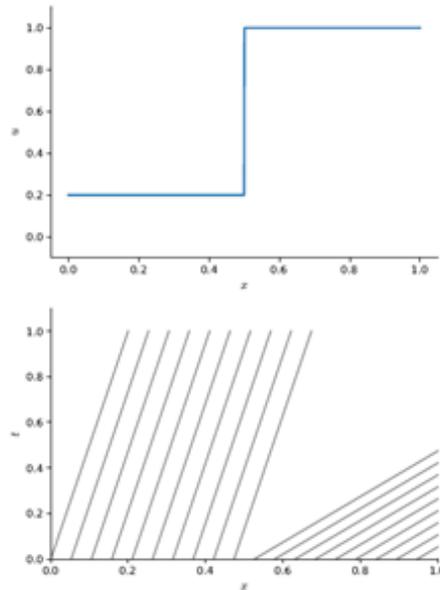


Figura 4.4: (Arriba) Distribución de velocidad inicialmente discontinua con velocidad baja a la izquierda de la velocidad alta (abajo). Estructura característica aproximada para la ecuación de Burgers, usando $u_0 = u(x)$. Créditos: [Zingale \(2017\)](#).

muestra dos estados separados por un choque que se mueve hacia la derecha en el plano $x-t$. En el tiempo t^n , el estado en el intervalo $(x \in [x_l, x_r])$ es completamente u_r . A medida que evoluciona el tiempo, considerando que el intervalo $[x_l, x_r]$ se mueve verticalmente hacia arriba en el diagrama el cual contiene una mezcla de estados u_l y u_r . Finalmente, en el momento t^{n+1} es completamente u_l . El choque se mueve con una velocidad $S = \Delta x / \Delta t$. Para determinar la velocidad, integrando la ley de conservación tanto en el espacio como en el tiempo (y normalizando por $\Delta x = x_r - x_l$) [Linge and Langtangen \(2020\)](#):

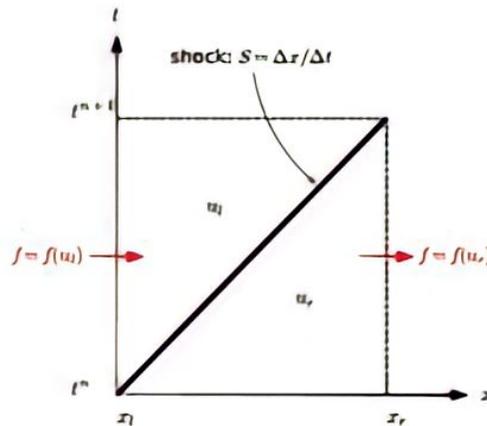


Figura 4.5: Un choque que se mueve hacia la derecha en el plano $x-t$ que separa dos estados: u_l y u_r . Créditos: [Zingale \(2017\)](#).

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_l}^{x_r} dx \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt u_t = -\frac{1}{\Delta x} \int_{x_l}^{x_r} dx \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt [f(u)]_x.$$

Haciendo la integral t a la izquierda y la integral x a la derecha, tenemos:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_l}^{x_r} \left(u(t^{n+1}) - u(t^n) \right) dx = -\frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(f(u)|_{x=x_r} - f(u)|_{x=x_l} \right) dt.$$

Reconociendo que en $t = t^n$, $u = u_r$ y en $t = t_{n+1}$, $u = u_l$, en el lado izquierdo se convierte en:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_l}^{x_r} \left(u(t^{n+1}) - u(t^n) \right) dx = \left(u(t^{n+1}) - u(t^n) \right) = u_l - u_r.$$

Para el lado derecho, se determina que a lo largo de $x = x_l$ el flujo es $f = f(u_l)$ para $t \in [t^n, t^{n+1}]$. Asimismo, a lo largo de $x = x_r$, el flujo es $f = f(u_r)$ en el mismo intervalo de tiempo. Por tanto, la expresión se convierte en:

$$(u_r - u_l) = \frac{1}{\Delta x} [f(u_r) - f(u_l)],$$

y usando $S = \Delta x / \Delta t$, vemos

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}.$$

Para la ecuación de Burgers, sustituyendo en $f(u) = u^2/2$, se obtiene (Sundnes, 2020):

$$s = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

Con la velocidad de choque conocida, el problema de Riemann (dos estados separados por una interfaz) es sencillo. Si hay un choque (compresión, por lo tanto $u_l > u_r$), se calcula la velocidad del choque y se determina si el choque se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha, usando el estado apropiado. Si no hay ningún choque, simplemente se usa el movimiento ascendente, ya que no hay ambigüedad en cuanto a cómo rastrear hacia atrás en el tiempo hasta el estado correcto Raga et al. (2021). Obteniendo ahora:

$$\text{if } u_l > u_r \text{ (choque): } \quad u_s = \begin{cases} u_l & \text{si } S > 0 \\ u_r & \text{si } S < 0 \\ 0 & \text{si } S = 0 \end{cases}$$

$$\text{de lo contrario: } \quad u_s = \begin{cases} u_l & \text{si } u_l > 0 \\ u_r & \text{si } u_r < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una vez que se construyen los estados de la interfaz, el flujo se calcula como:

$$F_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(F_{i-1/2}^{n+1/2} - F_{i+1/2}^{n+1/2} \right).$$

La restricción de intervalo de tiempo ahora debe considerar la condición Courant más restrictiva en todas las zonas:

$$\Delta t = \min(\Delta x/u_i).$$

La Figura 4.6 muestra la solución de la ecuación de Burgers utilizando el método lineal por volúmenes finitos. Las condiciones iniciales elegidas son todas de velocidad positiva, con una velocidad más baja a la izquierda de la velocidad más alta. A medida que evoluciona la solución, el estado de la derecha se alejará del estado de la izquierda y se extenderá como un abanico. Esto se llama onda de rarefacción o simplemente rarefacción [Langtangen and Logg \(2016\)](#); [Linge and Langtangen \(2020\)](#); [Zingale \(2017\)](#).

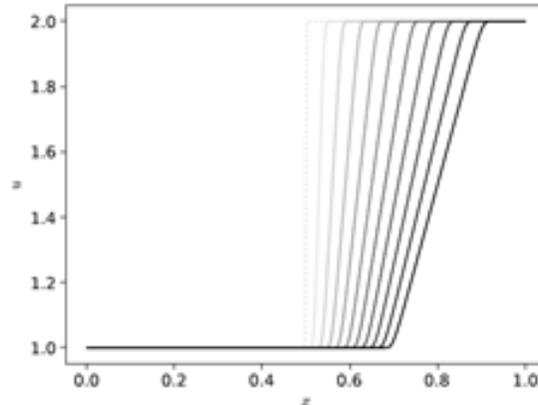


Figura 4.6: Solución a la ecuación de Burgers inviscida con 256 zonas y un número de Courant, $C = 0.8$ para condiciones iniciales que generan una rarefacción: la mitad izquierda del dominio se inicializó con $u = 1$ y la mitad derecha con $u = 2$. Esta velocidad inicial el estado crea un flujo divergente. Las curvas se muestran con una separación de 0.02 s, y la escala de grises más oscura representa más tarde en el tiempo. Imagen obtenida de: [Zingale \(2017\)](#).

4.4. Las ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler describen la conservación de masa, momento y energía en la aproximación de fluidos. Su forma general, sin ningún término fuente, es [Toro \(2013\)](#):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0. \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) + \nabla p = 0. \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{U} + p \mathbf{U}) = 0. \quad (4.22)$$

Aquí ρ es la densidad, \mathbf{U} es el vector de velocidad, $\mathbf{U} = u\hat{x} + v\hat{y}$, p es la presión y E es la energía / masa total, y se puede expresar en términos de la energía interna específica, e , y energía cinética como [Zingale \(2017\)](#):

$$E = e + \frac{1}{2}|\mathbf{U}|^2, \quad (4.23)$$

Las ecuaciones se completan con la adición de una ecuación de estado. Una opción común es la ecuación de estado del gas ideal:

$$p = \rho e(\gamma - 1). \quad (4.24)$$

donde γ es la relación de calores específicos para el gas / fluido (para un gas monoatómico ideal, $\gamma = 5/3$), en general cualquier relación de la forma:

$$p = p(\rho, e). \quad (4.25)$$

Para muchos entornos astrofísicos, es posible que no se pueda expresar esta relación de forma analítica, sino que se resuelve mediante integración numérica o interpolando a partir de resultados tabulados [Langtangen and Linge \(2017\)](#); [Linge and Langtangen \(2020\)](#).

Utilizando coordenadas cartesianas y en 1-D, el sistema (4.20)-(4.22) se ve como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u + p)}{\partial x} = 0. \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u E + u p)}{\partial x} = 0. \quad (4.28)$$

Es necesario mencionar que la temperatura está implícita en la ecuación estado en este conjunto de ecuaciones, aunque a menudo, cuando los términos fuente están presentes, es necesario obtener la temperatura de la ecuación de estado [Woodward and Colella \(1984\)](#).

De esta forma, se dice que las ecuaciones están en forma conservativa, es decir, se pueden escribir como [Zingale \(2017\)](#):

$$\mathcal{U}_t + [F(\mathcal{U})]_x = 0. \quad (4.29)$$

Con

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho u E + u p \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Es factible escribir esto en forma cuasi-lineal expresando primero el vector de flujo en términos de las variables conservativas directamente. Tomando $m \equiv \rho u$, $\mathcal{E} \equiv \rho E$, junto con la ecuación de estado antes planteada se obtiene [Toro \(2013\)](#); [Zingale \(2017\)](#):

$$p = \rho e(\gamma - 1) = \left(\mathcal{E} - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\rho} \right) (\gamma - 1). \quad (4.31)$$

Obteniendo:

$$\mathbf{F}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{1}{2} \frac{m^2}{\rho} (3 - \gamma) + \mathcal{E}(\gamma - 1) \\ \frac{m\mathcal{E}}{\rho} \gamma - \frac{1}{2} \frac{m^3}{\rho^2} (\gamma - 1) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

El jacobiano de este vector de flujo ahora se puede calcular como $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathcal{U}$ (Toro, 2013):

$$A(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} u^2 (3 - \gamma) & u(3 - \gamma) & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2} (\gamma - 2) u^3 - \frac{u c^2}{\gamma - 1} & \frac{3 - 2\gamma}{2} u^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} & u\gamma \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

donde la velocidad del sonido es $c \equiv \sqrt{\gamma p / \rho}$. Con esto, el sistema en estudio se puede escribir como Toro (2013):

$$\mathcal{U}_t + \mathbf{A}(\mathcal{U}) \mathcal{U}_x = 0. \quad (4.34)$$

Esta matriz es bastante compleja y difícil de trabajar. Los vectores propios de esta matriz son: $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + a$.

4.4.1. El problema de Riemann

Antes de entrar al problema de general de la ecuaciones de Euler, es decir el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, es necesario conocer un poco más en un tema crucial para entender las implicaciones físicas de la hidrodinámica, el problema de Riemann. Al igual que con la advección y la ecuación de Burgers, es necesario resolver un problema de Riemann. Sin embargo, como el sistema no es lineal, la solución es considerablemente más compleja, pero las ideas generales son similares Zingale (2017).

El problema de Riemann consiste en un estado izquierdo y derecho separados por una interfaz. Para las ecuaciones de Euler, hay tres valores propios, que son las velocidades a las que se propaga la información. Cada uno de estos responderá a una onda que irá saliendo de la interfaz con el tiempo, y cada onda llevará consigo un salto en las variables características. La Figura 4.7 muestra los estados de la interfaz, separando el espacio en 3 regiones, marcadas: U_L , U_R y U_* . Los estados en las regiones L y R son simplemente los estados de entrada izquierdo y derecho; las ondas no han tenido tiempo de llegar aquí, por lo que no se modifican.

Al observar la Figura 4.7, se puede observar la onda media como una discontinuidad de contacto. No hay compresión ni expansión a través de esta onda (ya que la velocidad no salta a través de ella) y simplemente separa dos estados. De donde se deduce (por los vectores propios) que la presión es constante a través del contacto.

Las ondas izquierda y derecha pueden ser una rarefacción o un choque. Será un choque si el flujo se comprime y una rarefacción de lo contrario.

Se puede observar que las únicas incógnitas son u_* , p_* , $\rho_{*,L}$, y $\rho_{*,R}$ Abgrall et al. (2017); Zingale (2017).

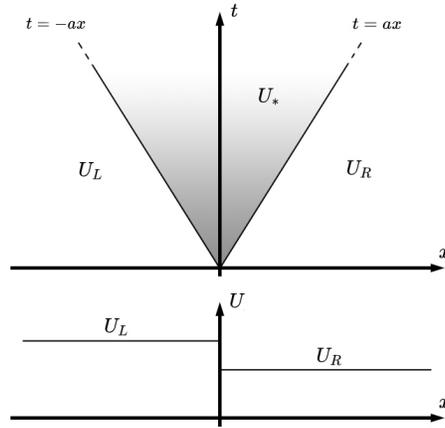


Figura 4.7: La estructura de onda, las regiones distintas y el salto o discontinuidad para el problema de Riemann. Créditos: [Abgrall et al. \(2017\)](#).

4.4.2. Rarefacciones

Las condiciones en una rarefacción pueden entenderse considerando un sistema donde la entropía reemplaza la presión, $\mathbf{q}_s = (r, u, s)^T$. La ecuación de entropía es simplemente $Ds/Dt = 0$. Escribiendo el gradiente de presión en la ecuación de velocidad en términos de \mathbf{q}_s se obtiene.

$$\frac{\partial p(\rho, s)}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{p\Gamma_1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4.35)$$

obteniendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{p\Gamma_1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = 0. \quad (4.36)$$

Esto le da a un sistema:

$$\mathbf{q}_{st} + \mathbf{A}_s(\mathbf{q}_s) \mathbf{q}_{sx} = 0, \quad (4.37)$$

donde

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ c^2/\rho & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Los valores propios de \mathbf{A}_s son de nuevo u , $u - c$ y $u + c$. Los vectores propios correctos son:

$$\mathbf{r}_s^{(-)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c/p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -c^2/p \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_s^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ c/p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Aquí, definimos $p_s \equiv \partial p / \partial s|_{\rho}$. Dado que el salto en \mathbf{q}_s es proporcional a estos autovectores, se puede inferir que la entropía no cambia a través de las ondas izquierda, (-) y derecha, (+) [Priest \(2014\)](#).

Considere la onda (+), que se mueve a una velocidad $\lambda^{(+)} = u + c$. A través de esta onda, la variable característica $w^{(+)}$ saltará, pero las demás no. De manera similar, $w^{(-)}$ será constante en la onda (-). Entonces, se puede usar esta condición para decirnos cómo se comporta la evolución a través de esa onda. La constancia de las variables características media y derecha a través de la onda izquierda genera las condiciones (usando el sistema de variables original) [Goedbloed et al. \(2010\)](#):

$$\mathbf{l}^{(+)} \cdot d\mathbf{q} = 0$$

$$\mathbf{l}^{(o)} \cdot d\mathbf{q} = 0$$

o

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{2c} & \frac{1}{2c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = 0$$

Desarrollando estos términos, se obtiene el sistema:

$$du + \frac{1}{\rho c} dp = 0, \tag{4.40}$$

$$du + \frac{1}{c^2} dp = 0. \tag{4.41}$$

Definiendo la velocidad del sonido lagrangiano, $C \equiv \rho c$, y el volumen específico, $\tau = 1/\rho$, se puede reescribir este sistema como [Davidson \(2002\)](#):

$$du = -\frac{dp}{C}, \quad d\tau = -\frac{dp}{C^2} \text{ a través de la ola izquierda.} \tag{4.42}$$

Argumentos similares darían la condición en la onda derecha como [Zingale \(2017\)](#):

$$du = \frac{dp}{C}, \quad d\tau = -\frac{dp}{C^2} \text{ a través de la ola derecha,} \tag{4.43}$$

Estos son completamente generales en este punto. Tenga en cuenta que la condición de la segunda onda, $d\tau/dp$ es esencialmente la definición del índice adiabático Γ_1 , $dp/p - \Gamma_1 d\rho/\rho = 0$ para la entropía constante. Encontrar la solución a través de la rarefacción implica integrar el sistema de $p_{l,r}$ a p_* , donde l,r es el estado original izquierdo o derecho, según la onda que esté considerando. A la par, es necesario una ecuación de estado para obtener $C = C(\tau, p)$. Estas soluciones se denominan *invariantes de Riemann* [Toro \(2013\)](#).

Se puede hacer una simplificación considerable si asumimos un gas ideal. El sistema propio con entropía mostró que la entropía es constante en toda la solución. Esto permite escribir la ecuación de estado como [Landau and Lifshitz \(1991\)](#):

$$p = K\rho^\gamma,$$

donde K es una constante que depende de la entropía, y hacen las integrales analíticamente.

Para una ecuación de estado general, no existe una forma cerrada, pero sería necesario integrar el sistema para obtener $u_* = u(p_*)$ y $\rho_{*,s} = 1/\tau(p_*)$. También se podría obtener la solución a través de la rarefacción izquierda como $u_* = u_L^{rare}(p_*)$ al igual que la rarefacción derecha como $u_* = u_R^{rare}(p_*)$ Toro (2013).

4.4.3. Choques

Al no ser constante la entropía a través de un choque, genera disipación, por lo que se sugiere una forma diferente de conectar los estados a través del choque Chandrasekhar (1961). Al igual que con la ecuación de Burgers, es posible comprender el impacto observando las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot. Habrá una condición para cada una de las leyes de conservación, y juntas establecen la velocidad del choque y cómo la densidad y la presión saltan a través de él Toro (2013).

Las condiciones de Rankine-Hugoniot son:

$$\frac{\mathbf{F}(\mathcal{U}_*) - \mathbf{F}(\mathcal{U}_s)}{\mathcal{U}_* - \mathcal{U}_s} = S, \quad (4.44)$$

donde S es la velocidad del choque. Es más fácil trabajar en el marco de referencia del choque. Si la velocidad del choque es S , entonces definimos la velocidad en el marco del choque como:

$$\hat{u}_s = u_s - S \quad (4.45)$$

$$\hat{u}_* = u_* - S \quad (4.46)$$

transformándose las condiciones anteriores en:

$$\frac{\mathbf{F}(\hat{\mathcal{U}}_*) - \mathbf{F}(\hat{\mathcal{U}}_s)}{\hat{\mathcal{U}}_* - \hat{\mathcal{U}}_s} = 0.$$

Para el sistema unidimensional de ecuaciones de Euler, se tienen las siguientes condiciones:

$$\rho_* \hat{u}_* = \rho_s \hat{u}_s. \quad (4.47)$$

$$\rho_* \hat{u}_*^2 + p_* = \rho_s \hat{u}_s^2 + p_s. \quad (4.48)$$

$$\rho_* \hat{u}_* e_* + \frac{1}{2} \rho_* \hat{u}_*^3 + \hat{u}_* p_* = \rho_s \hat{u}_s e_s + \frac{1}{2} \rho_s \hat{u}_s^3 + \hat{u}_s p_s. \quad (4.49)$$

El objetivo es averiguar cómo salta cada variable a través del choque. Resolviendo esto para el caso general de la ecuación de estado, siguiendo las ideas en Colella and Glaz (1985). Comenzando con el flujo de masa, se puede expresar que:

$$\hat{u}_* = \frac{\rho_s}{\rho_*} \hat{u}_s, \quad (4.50)$$

si se agrega la ecuación de estado se obtiene:

$$\rho_s^2 \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_*} \right) \hat{u}_*^2 = p_* - p_s. \quad (4.51)$$

Lo cual se puede ver como:

$$[q] \equiv q_* - q \implies -[\tau] = \frac{[p]}{\rho_s^2 \hat{u}_s^2}. \quad (4.52)$$

Introducimos ahora el flujo de masa, W_s . Para un choque que separa L/L_* , la masa se moverá a través del choque hacia la derecha, por lo que, en el marco del choque, el flujo de masa es [Colella and Puckett \(1998\)](#); [Colella and Woodward \(1984\)](#):

$$W_L \equiv \rho_L \hat{u}_L = \rho_* \hat{u}_* \quad (4.53)$$

Del mismo modo, para un choque que separa R/R_* , la masa se moverá hacia la izquierda pasando a través del choque, y en el marco del choque, el flujo de masa es:

$$W_R \equiv -\rho_R \hat{u}_R = -\rho_* \hat{u}_*. \quad (4.54)$$

Por lo tanto, la primera condición de salto se convierte en

$$-[\tau] = \frac{[p]}{W_s^2}. \quad (4.55)$$

A continuación, volviendo a la ecuación de la cantidad de movimiento, es posible sustituir el flujo de masa. Para la izquierda, tenemos:

$$W_L \hat{u}_* + p_* = W_L \hat{u}_L + p_L \implies [u] = -\frac{[p]}{W_L},$$

donde reconocimos que $\hat{u}_* - \hat{u}_L = u_* - u_L = [u]$ a que la velocidad de choque es la misma para u_* y u . Del mismo modo, para la derecha (3 choques), se obtiene [Colella and Glaz \(1985\)](#):

$$-W_R \hat{u}_* + p_* = -W_R \hat{u}_R + p_R \implies [u] = \frac{[p]}{W_R}.$$

La última condición de salto es por energía. Dado que todos los términos en la ecuación de energía son proporcionales a la velocidad, no habrá diferencia de signo entre las condiciones de salto de choque izquierdo y derecho. Introduciendo el flujo de masa [Colella and Woodward \(1984\)](#):

$$W_s e_* + \frac{1}{2} W_s \hat{u}_*^2 + \frac{W_s}{\rho_*} p_* = W_s e_s + \frac{1}{2} W_s \hat{u}_s^2 + \frac{W_s}{\rho_s} p_s.$$

El flujo de masa se cancela, por lo que se obtiene:

$$[e] + \frac{p_*}{\rho_*} - \frac{p_s}{\rho_s} + \frac{1}{2} (\hat{u}_*^2 - \hat{u}_s^2) = 0,$$

se puede prescindir del término de las velocidades usando $\hat{u}_*^2 = W_s^2 / \rho_s^2$ y $\hat{u}_s^2 = W_s^2 / \rho_s^2$ tenemos:

$$[e] + \frac{p_*}{\rho_*} - \frac{p_s}{\rho_s} + \frac{1}{2} W_s^2 \left(\frac{1}{\rho_*^2 - \frac{1}{\rho_s^2}} \right) = 0.$$

Ahora, introduciendo $W_s^2 = -[p]/[\tau]$ se obtiene:

$$[e] = -\frac{p_* + p_s}{2} \tau,$$

o también se puede establecer como (Colella and Glaz, 1985):

$$p \equiv (p_* + p_s)/2.$$

Para resumir, las condiciones de salto a través del choque son:

$$[\tau] = -\frac{[\tau]}{W_s^2},$$

$$[u] = \mp \frac{[p]}{W_s},$$

$$[e] = -\frac{p_* + p_s}{2} \tau.$$

Al igual que con la rarefacción, el objetivo es expresar esto como una función, $u_* = u_s^{\text{shock}}(p_*)$. El procedimiento de solución general comienza con un valor propuesto para p_* , luego Zingale (2017):

1. Encontrar ρ correspondiente a p_* :

a) adivinar un valor para ρ_*

b) usando la ecuación de estado, expresa $e_* = e(p_*, \rho_*)$

c) utilizar el método de Newton (u otra técnica) con $[e] = -p[t]$ para encontrar una corrección de $r\rho_*$

2. Calcular

$$\frac{1}{W_s^2} = -\frac{[\tau]}{[p]}$$

3. Encontrar la *velocidad asterisco*

$$u_* = u_s \mp \frac{[p]}{W_s},$$

donde se usa “-” para el choque izquierdo y “+” para el choque derecho

El otro dato que es necesario es la velocidad de descarga. Esto se puede obtener de la definición de flujo de masa, W_s , por ejemplo, $W_L = \rho_L \hat{u}_L = \rho_L (u_L - S)$ Woodward and Colella (1984); Zingale (2017):

$$S = u_s \mp \frac{W_s}{\rho_s} \quad \text{“-” para la izquierda, “+” para la derecha.}$$

Este procedimiento genera $\rho_{*,s}$, ρ_* y S , la velocidad de choque.

Al igual que con la rarefacción, se puede hacer una simplificación considerable si asumimos un gas ideal.

4.5. Ecuaciones de Navier-Stokes

Una de las áreas de la física más complejas de estudiar son los fluidos, es decir, el comportamiento de los gases y líquidos en movimiento. Por ejemplo, comprender las corrientes de aire turbulentas o los vórtices que se forman cuando el agua fluye a través de tuberías o la sangre a través de arterias es de suma importancia, ya sea para ingeniería o la medicina.

Las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos son las conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, producto del francés constructor de puentes Claude-Louis Navier y del matemático irlandés George Stokes. El primero en obtener estas ecuaciones fue el francés en una época en que no se comprendía muy bien cuál era la física de la situación que estaba tratando de explicar matemáticamente. De hecho, lo único que hizo fue modificar unas ecuaciones ya existentes y obtenidas por el famoso matemático Euler, de modo que incluyesen las fuerzas existentes entre las moléculas del fluido [Priest \(2014\)](#). Aproximadamente 20 años después, Stokes justificó las ecuaciones del ingeniero francés deduciéndolas adecuadamente. A pesar de que las ecuaciones de Navier-Stokes son sólo una aproximación del comportamiento real de los fluidos, se utilizan para estudiar cualquier aspecto que tenga que ver con éstos; el problema es que si uno estudia el movimiento de un fluido con estas ecuaciones, es incapaz de prever si ese movimiento se va a mantener siempre o se va a complicar [Stewart \(2017\)](#).

Este sistema matemático es un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales las cuales no tienen una solución general analítica o numérica. Salvo ciertos tipos de flujo y situaciones muy concretas, no es posible hallar una solución analítica, por lo que en muchas ocasiones es preciso recurrir al análisis numérico para determinar una solución aproximada. A la rama de la mecánica de fluidos que se ocupa de la obtención de estas soluciones mediante métodos numéricos se le denomina dinámica de fluidos computacional (CFD, de su acrónimo en inglés Computational Fluid Dynamics) [Barba and Forsyth \(2018\)](#); [Raga et al. \(2021\)](#).

La ecuación de la cantidad de movimiento en forma vectorial para un campo de velocidades \vec{v} es:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Esto representa tres ecuaciones escalares, una para cada componente de velocidad (u, v, w). En este caso se resolverá en dos dimensiones, por lo que habrá dos ecuaciones escalares.

Aquí está el sistema de ecuaciones diferenciales: formado por dos ecuaciones para las componentes de velocidad u, v y una ecuación para la presión p :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.58)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones usando diferencias finitas. Primero se discretizará la ecuación del u -impulso:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

De manera similar para la ecuación de v -momento:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Finalmente, la ecuación de Poisson de presión discretizada se puede escribir así:

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = \rho \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right. \\ \left. - \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - 2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Organizando las ecuaciones de la forma en que las iteraciones sean coherentes con la modelación y con CFD. Por lo que las ecuaciones de impulso para la velocidad, momento y presión se tienen que expresar en términos de los subíndices i, j , es decir despejar las tres ecuaciones anteriores en función de $u_{i,j}^{n+1}$, $v_{i,j}^{n+1}$ y $p_{i,j}^n$.

Las condiciones iniciales que se usan para un caso particular son $u, v, p = 0$ en todas partes y las condiciones de frontera son:

$$u = 1 \quad \text{en} \quad y = 2$$

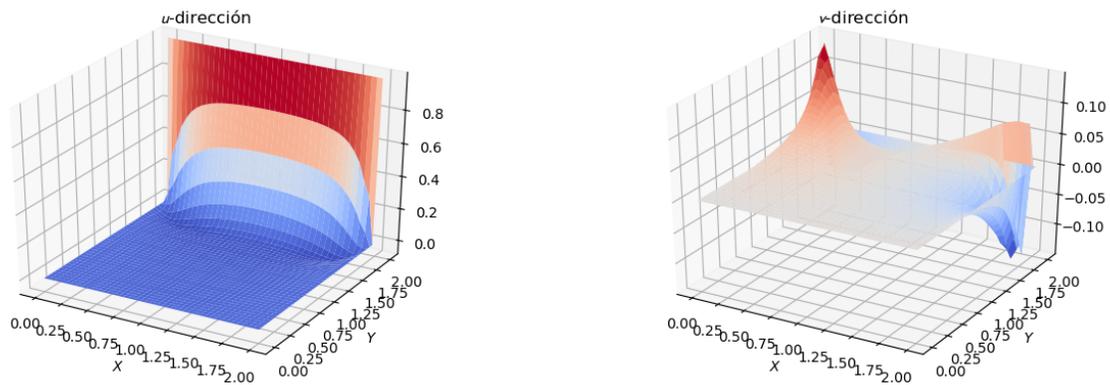
$$u, v = 0 \quad \text{en las otras fronteras}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \implies y = 0, \quad (4.62)$$

$$p = 0 \implies y = 2,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \implies x = 0.2.$$

Las Figuras 4.8 y 4.9 muestran el comportamiento gráfico de la presión en las direcciones $u - v$ así como en el espacio x, y, p .



(a) Gráfica obtenida con los valores de $\nu = 0.1$, $c = 1$ y $\rho = 1$. (b) Gráfica obtenida con los valores de $\nu = 0.1$, $c = 1$ y $\rho = 1$.

Figura 4.8: Comportamiento de la presión u – dirección, v – dirección en el espacio x, y, u, v . Imágenes creadas con un código propio implementando la discretización sugerida por [Barba and Forsyth \(2018\)](#).

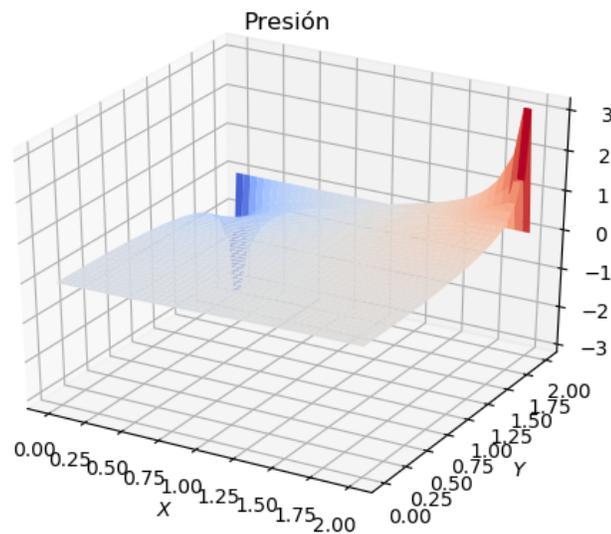


Figura 4.9: Comportamiento de la presión p en el espacio x, y, p . Gráfica obtenida con los valores de $\nu = 0.1$, $c = 1$ y $\rho = 1$. Imágenes creadas con un código propio implementando la discretización sugerida por [Barba and Forsyth \(2018\)](#).

Lo presentado en este capítulo, en especial el tema de diferencias finitas (subsección 4.1.1), fue el sustento en la construcción del código numérico que describe el paso de un NEO por la atmósfera terrestre ([Gutierrez-Zalapa et al., 2023b](#)). El uso del método discretización de las ecuaciones que modelan el fenómeno antes mencionado, fue esencial para tratar el análisis 2-dimensional de los efectos

físicos relacionados con este tipo de eventos. Ya que dicha técnica es eficiente, precisa y permite generar condiciones computacionales excepcionales en su manejo. En el capítulo siguiente se mostrará la implementación del código antes señalado, aplicándolo en dos casos de estudio hipotéticos, así como en la recreación del evento de Chelyabinsk.

Capítulo 5

Casos de estudio

Como se mencionó en el Capítulo 2, el modelar el paso de un NEO por la atmósfera terrestre se basa en solucionar el sistema de ecuaciones de Silber et al. (2018). El cual tiene 4 ecuaciones diferenciales, dos relacionadas con la tasa de pérdida de velocidad y masa, la tasa del ángulo de vuelo y la parametrización de la altura en función del tiempo de vuelo. En este trabajo se propone el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, en el que a diferencia del propuesto por Silber et al. (2018), se ha incluido la componente de la fuerza de gravedad:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{C_d A_s \rho_a v^2}{m^{1/3} \rho_m^{2/3}} \cos(\theta) \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{C_d A_s \rho_a v^2}{m^{1/3} \rho_m^{2/3}} \sin(\theta) + G \frac{M_E}{(R_E + h)^2} \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{\lambda A_s \rho_a v^3 m^{2/3}}{Q \rho_m^{2/3}} \\ dt &= -\frac{dh}{v \sin \theta} \\ \rho_m &= \beta_m \frac{m}{L_o^3} \quad \text{con} \quad \beta_m = 8 \left(\frac{A_s}{\pi} \right)^{3/2} \\ v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \end{aligned} \right\} \text{Sistema de ecuaciones modificado.} \quad (5.1)$$

La primera y segunda ecuaciones del sistema 5.1 son para la velocidad horizontal v_x y la velocidad vertical v_y , respectivamente. La tercera y cuarta ecuaciones no tienen cambios y permanecen intactas con respecto al sistema de Silber et al. (2018). La quinta ecuación representa la densidad de la nube de escombros en función de la masa y el diámetro del objeto, asumiendo una forma esférica proyectada en el plano del cielo, y proponiendo β_m como un factor adimensional que depende de la forma del objeto (A_s). Aunque la densidad interna de los cuerpos pequeños se puede modelar con un perfil de densidad estándar. Este modelo considera que la densidad del cuerpo permanece constante hasta el break-up, después, entre el break-up y el burst, la quinta ecuación describe las variaciones de densidad en función del volumen que rodea la nube de escombros. La sexta ecuación es la velocidad total del cuerpo. La cuarta ecuación del sistema en el trabajo de Silber et al. (2018) no se considera en este trabajo debido a la construcción natural del modelo, en el cual el valor del ángulo de vuelo (θ) para cada tiempo t o altura

h se puede calcular usando los componentes v_x y v_y , as $\theta = \arctan(v_y/v_x)$. En todas las ecuaciones del sistema 5.1, λ , C_d , A_S y ρ_a pueden variar dependiendo de la forma, masa y tamaño del meteoróide. Además, la ecuación de estado podría asociarse con la densidad del aire en función de la altura; en particular, ρ_a también admite una forma no analítica.

Además, para el sistema of ecuaciones (5.1), G , M_E y R_E son la constante gravitacional, la masa y el radio de la Tierra, respectivamente, sumando una no- atmósfera giratoria. Con base en un desarrollo previo, hemos considerado que este sistema de ecuaciones (5.1) es una versión modificada del sistema de ecuaciones de Silber et al. (2018). En este contexto, el trabajo aquí desarrollado considera únicamente una simulación para una solución simultánea en el sistema de ecuaciones (5.1). La simulación nos permite inferir la velocidad horizontal, v_x , la velocidad vertical, v_y , la masa m y la altura h .

El modelo calcula el punto de ruptura usando la ecuación sugerida por Collins et al. (2005). Los trabajos de Chyba et al. (1993) y Hills and Goda (1993) han demostrado que esta condición puede ocurrir cuando:

$$\rho_a v^2 \geq \mathbf{S}, \quad (5.2)$$

donde \mathbf{S} es la fuerza del cuerpo. Cuando se alcanza esta condición, el modelo arroja los valores particulares de v_{xB} v_{yB} , que son los componentes de la velocidad en el momento del break-up y del burst. De manera similar, m_B y h_B son la masa y la altura en el momento del break-up y del burst. Estos valores brindan la posibilidad de conocer la energía liberada en cada tiempo de vuelo. El coeficiente \mathbf{S} es un parámetro, que se puede obtener de los valores sugeridos por Hills and Goda (1993).

Los parámetros de entrada iniciales que nuestro modelo requiere son la masa inicial m_o y la velocidad v_o (ambos valores se consideran en la parte superior de la atmósfera terrestre), el diámetro del meteoróide, un valor para el coeficiente de ablación σ_{ab} , un factor de arrastre C_d y ρ_a , que se obtiene de Wheeler et al. (2017).

Es importante mencionar que existen dos formas de utilizar el modelo. La primera considera necesario conocer: a) la velocidad final del meteoróide (es decir, en el momento en que el objeto ya no es visible), b) el ángulo de vuelo final, y c) la masa final. Con estos valores límite el modelo sería capaz de reproducir en límites superiores los parámetros esperados cuando el objeto ingrese a la atmósfera terrestre, de manera similar a como fue estudiado en el trabajo de Sergeeva et al. (2021). La segunda forma consiste en conocer previamente los parámetros iniciales cuando el cuerpo ingresa a la atmósfera terrestre y con esto predecir los efectos sobre la atmósfera como la energía liberada o el ángulo de vuelo, así como los cambios en sus parámetros físicos a diferentes alturas. Esta segunda forma de emplear el modelo es la que se usará para representar los 3 casos de estudios siguientes, el primero servirá para validar el modelo con un evento ampliamente estudiado Gutierrez-Zalapa et al. (2023b), mientras que los otros 2 servirán como predicciones de escenarios hipotéticos Gutiérrez-Zalapa et al. (2022a,b) y Rodríguez-Martínez et al. (2023), respectivamente. Para cada uno de estos tres casos se obtendrán las alturas del break-up y burst y los perfiles de velocidad, masa, ángulo y tiempo de vuelo, deposición de energía, presión estática y variación del diámetro y densidad de la nube de escombros en el escenario post break-up. Para finalizar, se mostrarán los resultados del código que calcula los efectos físicos ocasionados por el impacto de un NEO sobre territorio mexicano Gutiérrez-Zalapa et al. (2023), código que se acopla al modelo descrito en esta tesis, utilizando los valores finales arrojados por éste a manera

de condiciones iniciales del impacto del NEO con el territorio de nuestro país.

5.1. Evento de Chelyabinsk

Durante la mañana del 15 de febrero de 2013, sobre la ciudad de Chelyabinsk se precipitó un meteoróide, liberando una energía total cercana a los 500 kt ($\approx 2.09 \times 10^{15}$ Joules), con una altura de break-up cercano a los 55 km y una altura de burst de 32 km. Los parámetros de entrada calculados por NASA (2023b) son los mostrados en la tabla 5.1.

Bólide de Chelyabinsk	
Diámetro	19.8 m
Densidad	3300 kg/m ³
Velocidad inicial	19.16 km/s
Ángulo de entrada	18.2°

Tabla 5.1: Parámetros input para el evento de Chelyabinsk usados en la implementación del código.

A continuación, se muestran los resultados de la implementación del código numérico con la finalidad de recrear el escenario del impacto del bólido de Chelyabinsk.

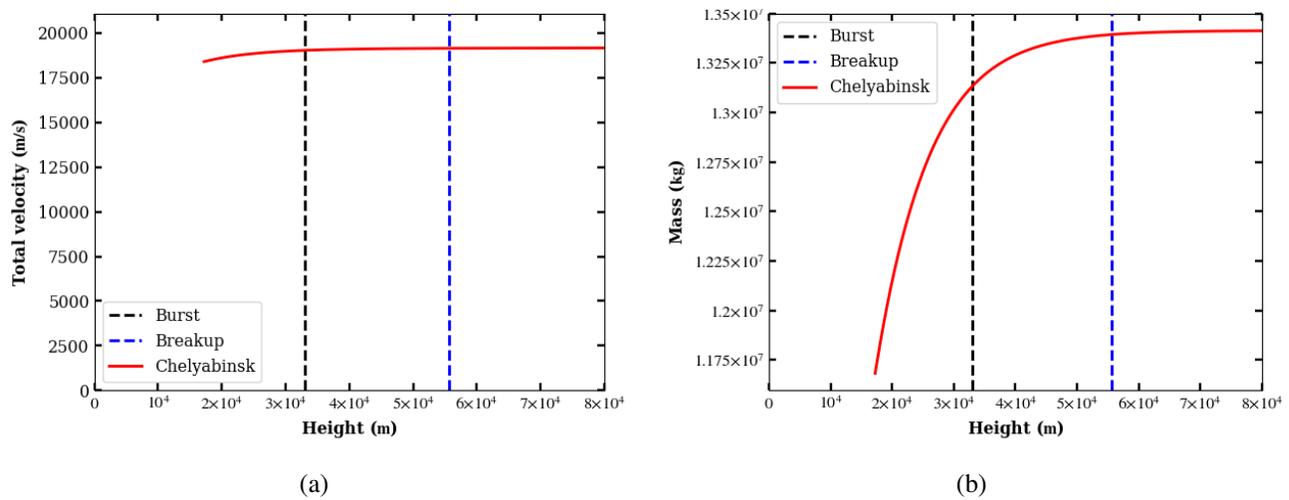


Figura 5.1: Gráfico de la velocidad y masa en función de la altura para el evento de Chelyabinsk.

La Figura 5.1a muestra el perfil monótono decreciente de la velocidad como función de la altura, perfil acorde a los propuesto por Chyba et al. (1993). Se puede observar que la velocidad final es prácticamente la velocidad inicial, situación que estaría relacionada con su tamaño y velocidad Lobanovsky (2014). Por su parte, la Figura 5.1b muestra el comportamiento de la masa en función de la altura, de esta se deduce otro comportamiento monótono decreciente (Gladysheva, 2019), con una masa en el momento del break-up de 1.34×10^7 kg, mientras que al momento del burst de 1.32×10^7 kg.

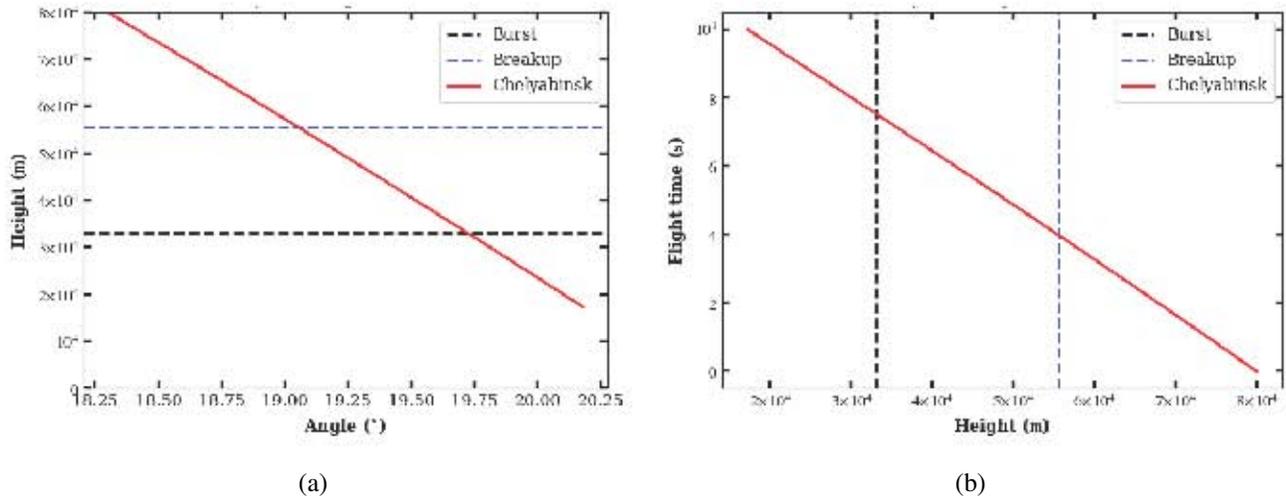


Figura 5.2: Gráfico de la del ángulo y tiempo de vuelo en función de la altura para el evento de Chelyabinsk.

La Figura 5.2a muestra el cambio del ángulo de vuelo como función de la altura, de un análisis gráfico se puede inferir que desde el momento del break-up, pasando por el burst y el ángulo final existe una variación de entre $1^\circ - 2^\circ$, lo que coincide con lo expuesto en los trabajos de [Sergeeva et al. \(2021\)](#) y [Gutiérrez-Zalapa et al. \(2022b\)](#); [Gutiérrez-Zalapa et al. \(2023b\)](#). La Figura 5.2b señala que el tiempo de vuelo de cuerpo fue de aproximadamente 10 segundos (para los últimos 80 km de su trayectoria), existiendo una diferencia de 2.8 segundos entre el break-up y el burst, datos que empata con los propuesto por [Chernogor and Rozumenko \(2013\)](#).

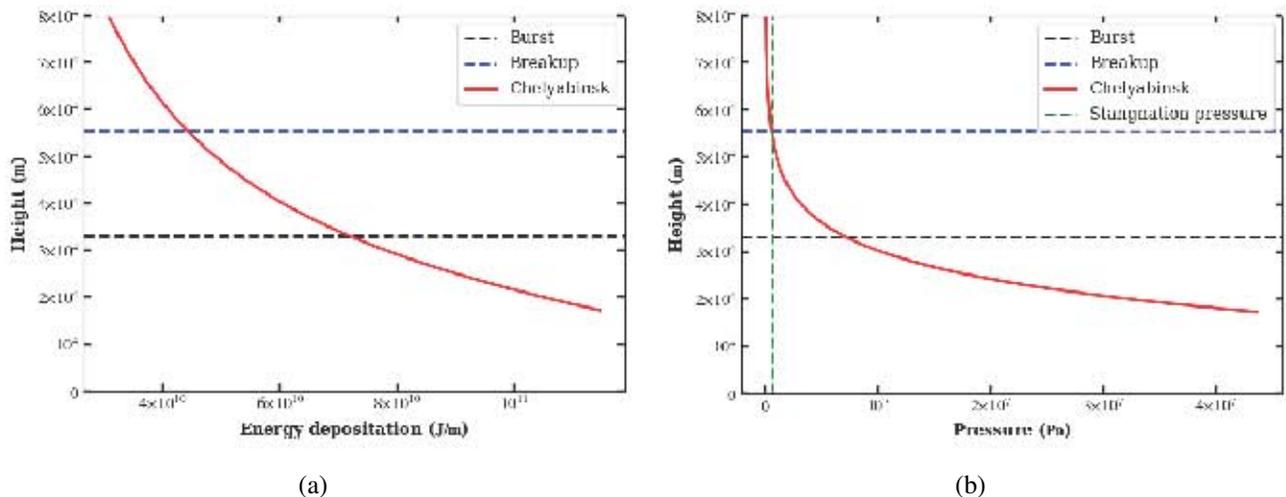


Figura 5.3: Gráfico de la deposición de energía y de la presión estática en función de la altura para el evento de Chelyabinsk.

De gráfica de la Figura 5.3a se puede observar un perfil típico de este tipo de fenómenos. A la altura de rompimiento el cuerpo ha liberado una energía de 4.5×10^{10} J/m, mientras que el estallido es de

7.2×10^{10} J/m, valores que difieren en el 3% a los reportado por [Popova et al. \(2013\)](#). La Figura 5.3b señala la curva de la presión estática a la que el cuerpo estuvo sometido como función de la altura. En el momento del rompimiento la presión es de 0.08×10^7 Pa mientras que en el momento del estallido es de 0.7×10^7 Pa. En particular, se puede observar que la curva que describe esta presión cruza la línea del factor **S** y la relacionada con la altura del break-up, lo que le da fidelidad al modelo.

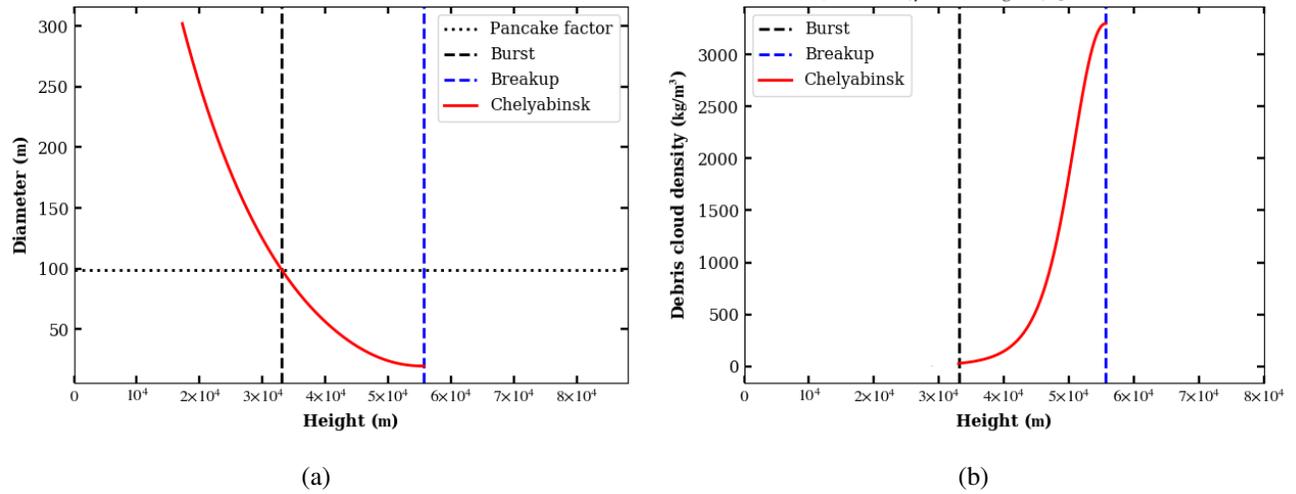


Figura 5.4: Gráfico de la evolución del diámetro y de la densidad de la nube de escombros en función de la altura para el evento de Chelyabinsk.

Finalmente, la Figura 5.4a y 5.4b señalan la variación del diámetro y densidad de la nube de escombros en el escenario post-ruptura del cuerpo. Para calcular la expansión del diámetro se ha empleado un coeficiente para el *pancake factor* $f_p = 5$, este coeficiente adimensional señala la mayor expansión o *achatamiento* del diámetro posible entre el break-up y el burst antes de comenzar a incinerarse y se define como $f_p = L_{burst}/L_o$. Para modelar la densidad se ha usado un perfil que depende de la morfología del cuerpo, A_s , [Gutierrez-Zalapa et al. \(2023b\)](#). En la pimer gráfica se puede establecer que la nube de escombros, al momento del burst, es de 100 m. Mientras que la densidad en este mismo momento es prácticamente de 0.

5.2. NEO 2009 JF1

De una recopilación de datos de [NASA \(2023b\)](#), se decidió estudiar el caso hipotético del impacto de este NEO con nuestro planeta, esto basado en el tamaño y composición de este cuerpo. Las condiciones físicas de este NEO, en particular su diámetro, permite estimar que un impacto con la tierra ocurre cada 10-15 años [Lupishko et al. \(2006\)](#). Representado peligros prácticamente nulos para el ser humano, pero con liberación de energía en la atmósfera lo suficiente como para perturbarla ([Sergeeva et al., 2021](#)). De la implementación del modelo se determina que la altura del break-up es de 52.7 km y la del burst de 33.1 km. A continuación, se muestran los resultados obtenidos para los parámetros intrínsecos del NEO, para su energía liberada y su presión estática. Se han utilizando los valores de la Tabla 5.2, obtenidos de [NASA \(2023b\)](#), como condiciones iniciales para el código.

NEO 2009 JF1	
Diámetro	10 m
Densidad	3100 kg/m ³
Velocidad inicial	15 km/s
Ángulo de entrada	37°

Tabla 5.2: Parámetros input para el evento teórico del NEO 2009 JF1 usados en la implementación del código.

La Figura 5.5a muestra un comportamiento de la velocidad como función de la altura con un perfil monótono decreciente. Al igual que para el caso de Chelyabinsk, su velocidad en el break-up es prácticamente igual a su velocidad inicial. Mientras que en el momento del burst la velocidad apenas presenta una variación del 3% con respecto al valor inicial. La Figura 5.5b muestra el perfil de la masa en función de la altura. Al momento del rompimiento el cuerpo prácticamente conserva su masa inicial, mientras que en el estallido la pérdida es del 2.3% con respecto a esta misma masa. En ambos casos el cuerpo deja de ser visible a los 4 km (Gutiérrez-Zalapa et al., 2022b).

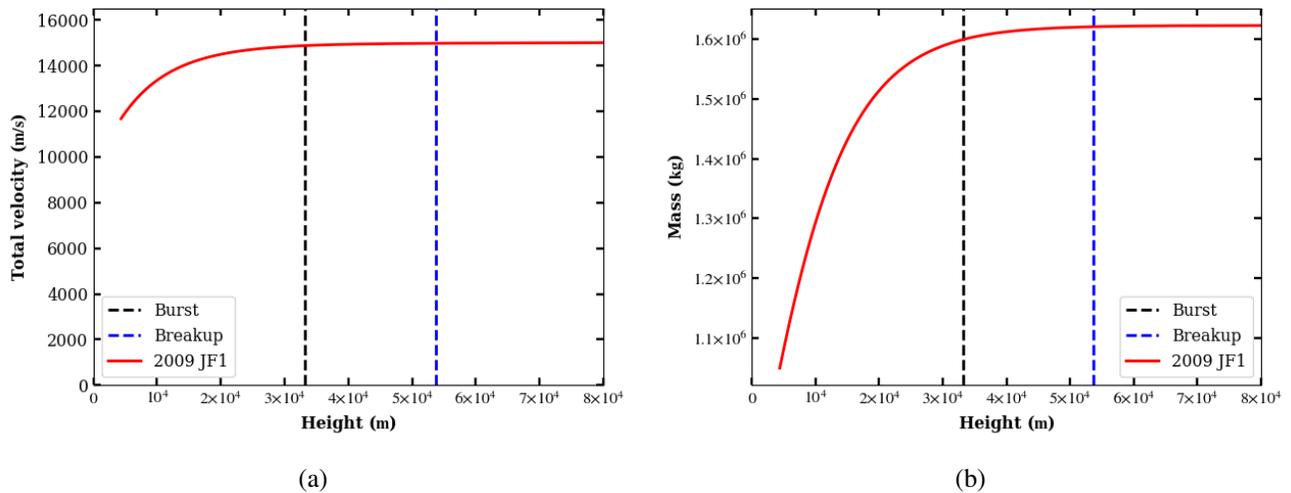


Figura 5.5: Gráfico de la velocidad y masa en función de la altura para el NEO 2009 JF1.

La Figura 5.6a muestra el comportamiento del ángulo de vuelo en función de la altura de donde se puede afirmar que la variación del ángulo de vuelo desde el break-up hasta el burst es menor a 1° . Es conveniente mencionar que, el ángulo inicial es una predicción hecha por NASA (2023b). Para el caso del tiempo de vuelo, la Figura 5.6b muestra que entre el break-up y el burst hay un intervalo de ≈ 1.7 s, con una duración total de ≈ 8.5 s, valores típicos de estos cuerpos Smulsky and Smulsky (2012); Svetsov et al. (1995).

En lo referente a la energía liberada, la Figura 5.7a muestra la curva de deposición de energía. Al momento del rompimiento la energía liberada por unidad de altura es de 3.4×10^9 J/m. Mientras que en el momento del estallido es de 5.2×10^9 J/m. Con una energía total por unidad de altura de 1.65×10^{10}

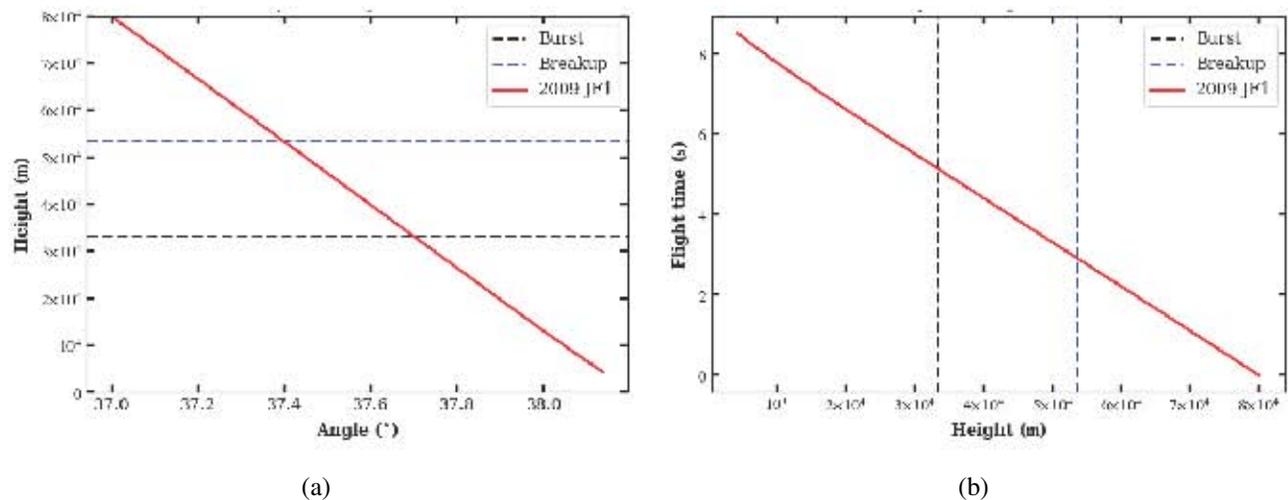


Figura 5.6: Gráfico de la del ángulo y tiempo de vuelo en función de la altura para el NEO 2009 JF1.

J/m. La presión estática está representada por la Figura 5.7b, la cual muestra que el break-up la presión estática que el cuerpo experimenta es de 0.05×10^7 Pa, mientras que el el burst es de 0.5×10^7 Pa. Estos valores, tan cercanos a los mostrados para el caso de Chelyabinsk, se pueden entender gracias a la densidad tan similar de los cuerpos, ya que la altura del break-up y burst dependen en gran medida de este parámetro físico.

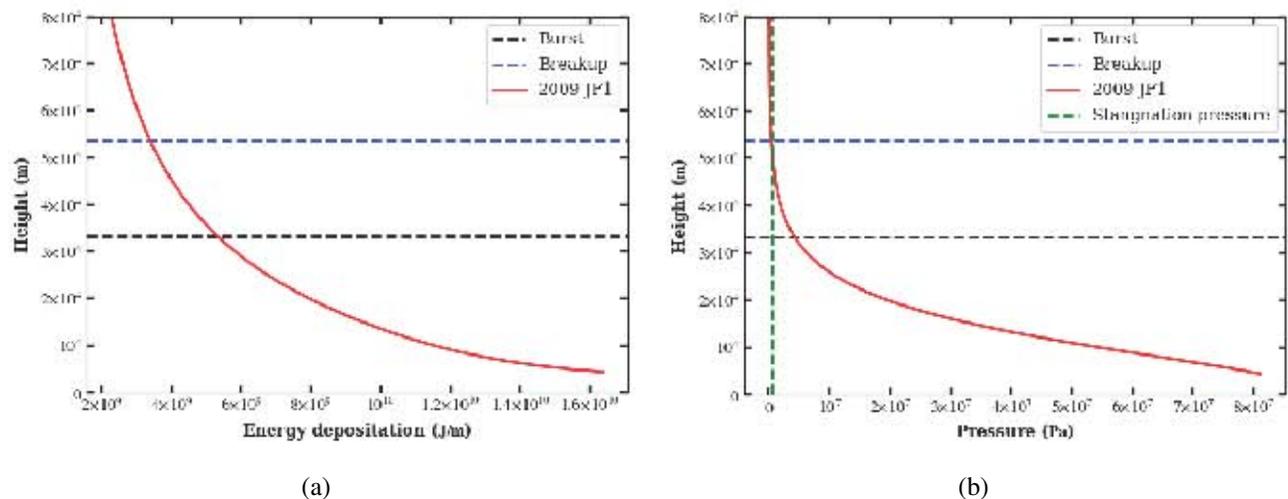


Figura 5.7: Gráfico de la deposición de energía y de la presión estática en función de la altura para el NEO 2009 JF1.

Dado que el modelo utiliza el concepto de *single-body* y es posible modelar la variación del diámetro, la Figura 5.8a, muestra dicho cambio utilizando un $f_p = 5.1$. La densidad entre el break-up y el burst se ha modelado utilizando el perfil propuesto por Gutierrez-Zalapa et al. (2023b) y su comportamiento se puede observar en la Figura 5.8b. La densidad representada en la Figura anteriormente descrita ayuda a conocer la energía liberada y convertida en ondas de choque.

Un NEO, con dimensiones similares a las mostradas en este caso, se precipitó el 25 de julio pasado en las inmediaciones del poblado de Tepame, municipio de Chinicuilá, al suroeste del estado de Michoacán. Haciendo uso del modelo creado, así como de datos satelitales y observaciones de cámaras de seguridad, se ha logrado reproducir este suceso obteniendo resultados consistentes con los mostrados por la base de datos del NASA (2023a). Este trabajo ha sido aceptado para presentarse en la Reunión Anual de la Unión Geofísica Mexicana en noviembre de 2023.

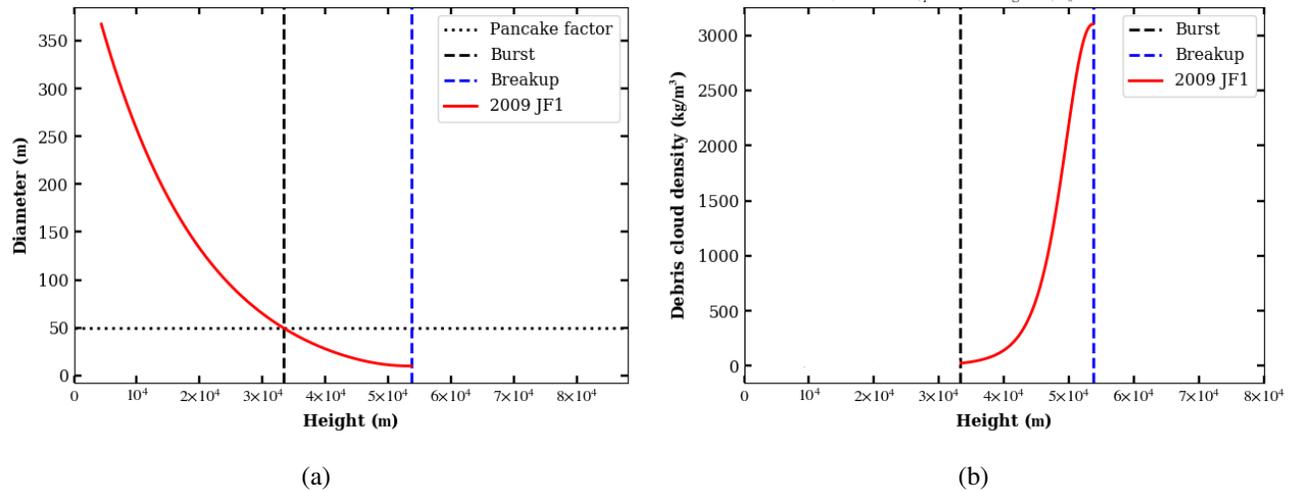


Figura 5.8: Gráfico de la evolución del diámetro y de la densidad de la nube de escombros en función de la altura para el evento NEP 2009 JF1.

5.3. NEO 2023 DW

Al igual que la subsección anterior anterior, el caso de este NEO es la representación del escenario hipotético del impacto de este NEO con nuestro planeta. Se ha elegido este cuerpo debido a las similitudes que tiene con el objeto de Tunguska. A saber, el diámetro difiere en aproximadamente 2 m, la densidad en 250 kg/m^{-3} y la velocidad inicial en 2 km/s. Cuerpos con estas características chocan con nuestro planeta entre 90-120 años y como se mencionó, el caso mas reciente fue el de Tunguska en 1908. Por lo cual, bajo un punto de vista estadístico, la Tierra estaría próximo a experimentar nuevamente este tipo de fenómenos. A continuación se muestran los resultados obtenidos de la implementación del modelo, usando como condiciones iniciales los valores de la Tabla 5.3, valores obtenidos de NASA (2023b).

Para inferir cual sería el comportamiento de la velocidad, se observa que la Figura 5.9a la cual modela este parámetro en función de la altura, de esta gráfica se determina que la altura del break-up sería a ≈ 60 km, mientras que la del burst a los 9 km. Nuevamente, la velocidad en el break-up es prácticamente la misma que la inicial, en el burst, la velocidad tendría una pérdida de 4% con respecto a la inicial. La Figura 5.9b muestra que en el rompimiento la masa es aproximadamente la misma que la inicial, mientras que en el estallido tiene una pérdida del 10%. La situación a señalar en este caso es que la etapa final del cuerpo, es decir, cuando termina por incinerarse, esta muy cerca de la altura del burst, lo cual señala que el cuerpo estaría en condiciones de casi impactar con una alta porción de

NEO 2023 DW	
Diámetro	47 m
Densidad	2750 kg/m ³
Velocidad inicial	17 km/s
Ángulo de entrada	40°

Tabla 5.3: Parámetros input para el evento teórico del NEO 2023 DW usados en la implementación del código.

su masa (Rodríguez-Martínez et al., 2023), situación similar al caso del Tunguska (Chyba et al., 1993; Lobanovsky, 2014).

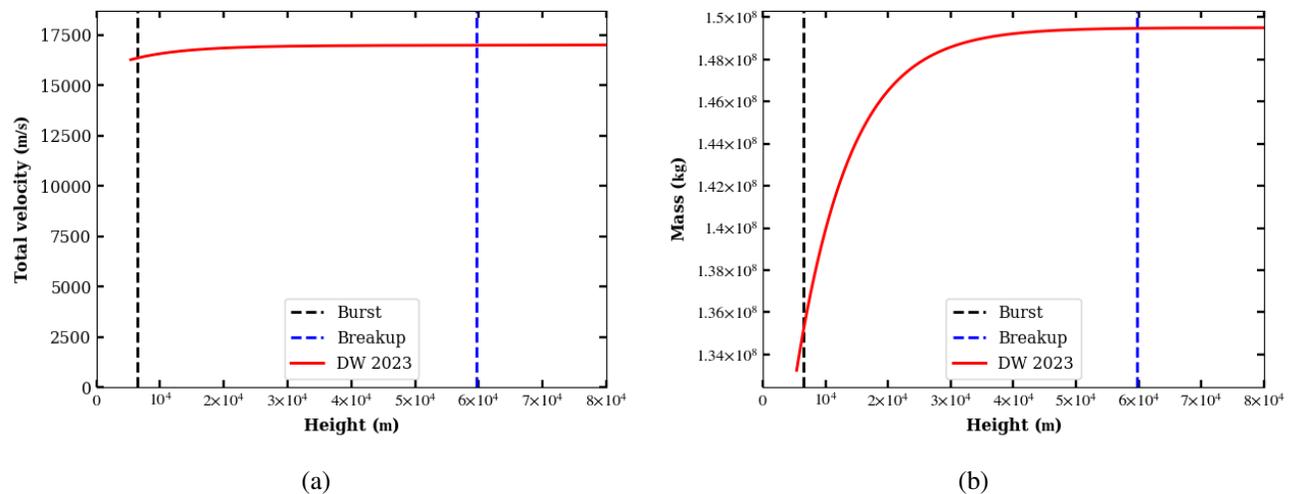


Figura 5.9: Gráfico de la velocidad y masa en función de la altura para el NEO 2023 DW.

Para el caso del ángulo de vuelo, la Figura 5.10a señala que entre el rompimiento y el estallido hay una variación de menos de 1° con respecto al ángulo de entrada a la atmósfera, situación que se ha demostrado en los trabajos de Gutiérrez-Zalapa et al. (2022b); Sergeeva et al. (2021). Donde existe una variación más significativa (con respecto a los casos anteriores) es en tiempo de vuelo, ya que desde el rompimiento hasta el estallido hay un intervalo de tiempo de 4.7 s, con una duración total de vuelo de 6.6 s (véase Figura 5.10b), tiempo similar al reportado por Robertson and Mathias (2019) para el caso de Tunguska.

Para analizar la deposición de energía, la Figura 5.11a señala que al momento del break-up se libera una energía de 4.8×10^{11} J/m y de 2.8×10^{12} J/m en el burst. Liberando una energía total de 4.8×10^{12} J/m, valor que difiere en el 8% con respecto al reportado por Chyba et al. (1993), nuevamente, para el caso de Tunguska. Para la presión estática, al momento del break-up el cuerpo experimentaría una presión de $\approx 0.16 \times 10^6$ Pa, mientras que en el burst sería de $\approx 1.27 \times 10^8$ Pa. Al igual que para los casos anteriores, la curva que describe la presión cruza las líneas horizontal y vertical que representan el break-up y el valor de S, lo que genera fidelidad al modelo.

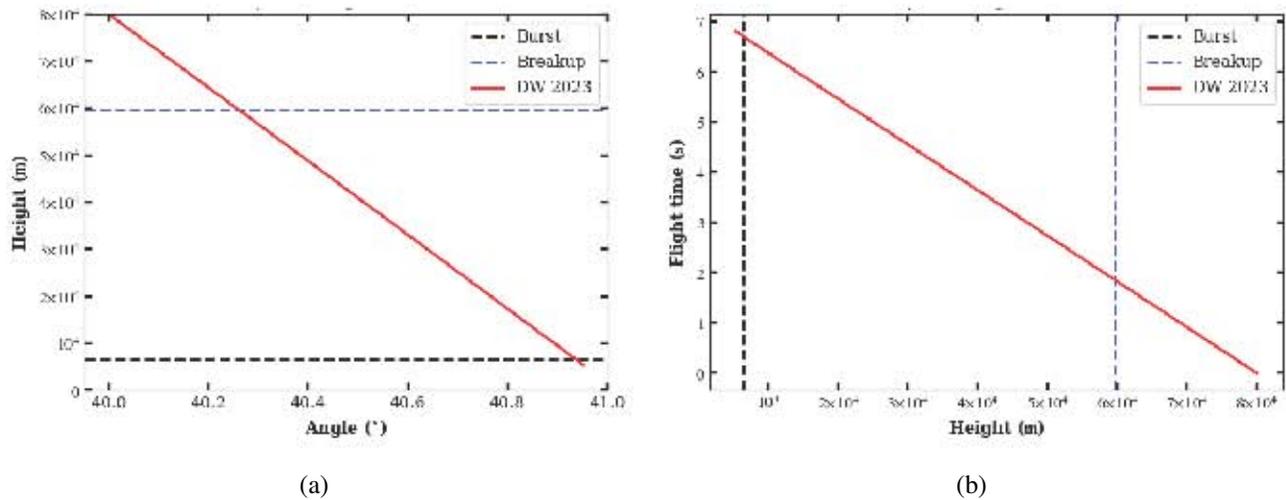


Figura 5.10: Gráfico de la del ángulo y tiempo de vuelo en función de la altura para el NEO 2023 DW.

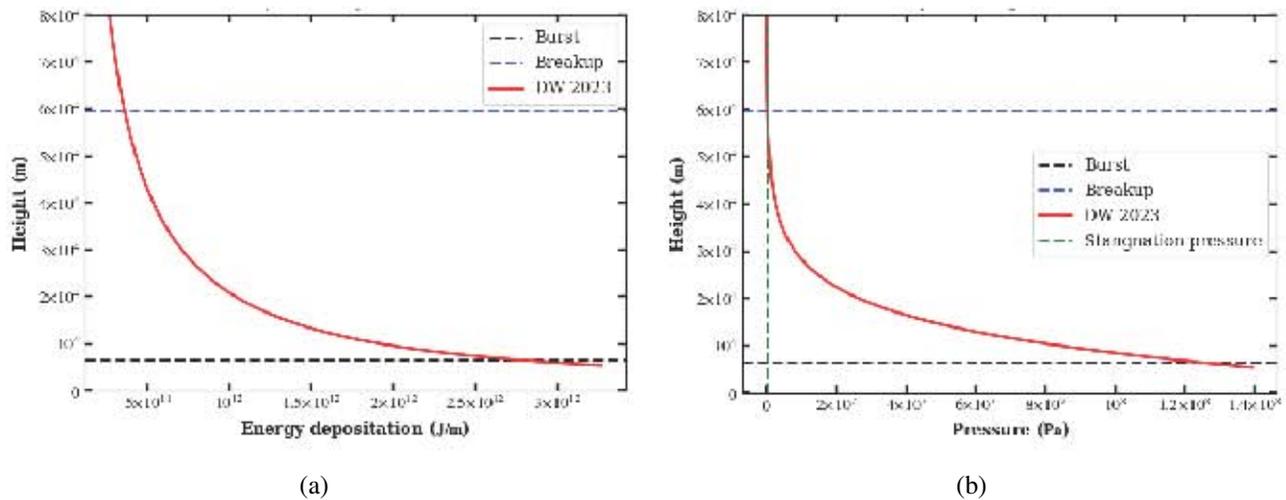


Figura 5.11: Gráfico de la deposición de energía y de la presión estática en función de la altura para el NEO 2023 DW.

Finalmente, la Figura 5.12a muestra la variación del diámetro del cuerpo entre la altura del break-up y la del burst, utilizando un $f_p = 7$. Para la densidad de la nube de escombros, la Figura 5.12b, muestra el comportamiento de este parámetro como función de la altura, con un valor en el burst prácticamente igual a 0 cuando el objeto deja de verse.

El código numérico empleado en este capítulo es el primer código en nuestro país, que modela los efectos relacionados con el paso de un NEO por la atmósfera terrestre. Una de las ventajas de este código es que permite conocer las componentes vertical y horizontal de la velocidad, lo que a su vez hace que prescindamos de una ecuación para el ángulo de vuelo. Por la construcción misma, este código no restringe la forma matemática del perfil atmosférico, tampoco su morfología ni el hecho de que el NEO sea homogéneo en su composición o bien diferenciado en sus capas. Por el contrario, para este último parámetro, apoyado del concepto del *single-body*, el código aquí mencionado acepta cualquier

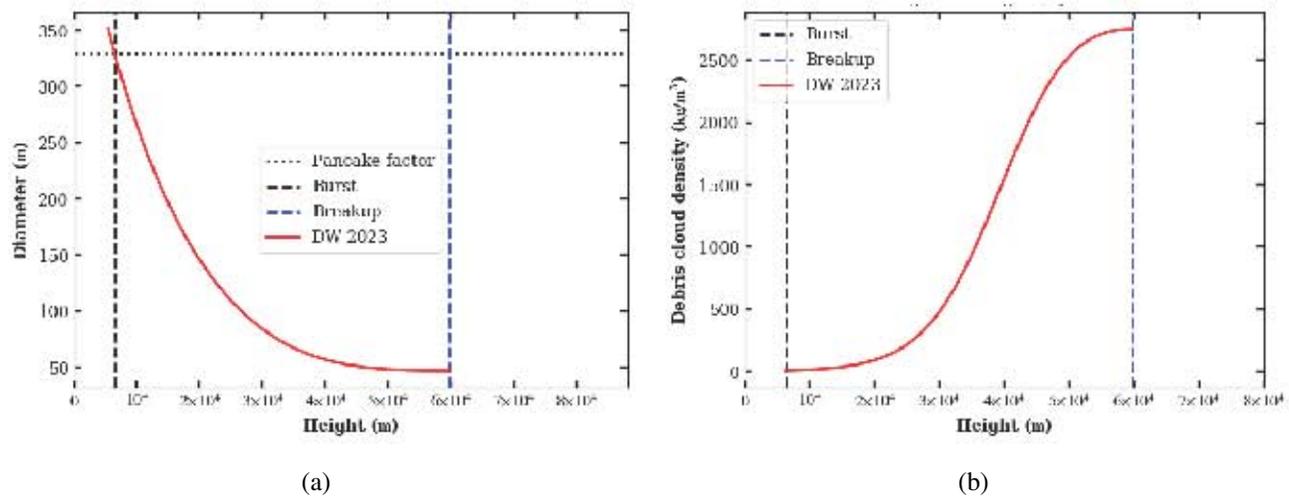


Figura 5.12: Gráfico de la evolución del diámetro y de la densidad de la nube de escombros en función de la altura para el evento NEO 2023 DW.

perfil matemático que modele la densidad del NEO en función de su diámetro y con ello calcular la densidad de la nube de escombros generada después del break-up así el tamaño de esta en función del diámetro inicial del cuerpo, generando perfiles de energía radiada entre el escenario del break-up y del burst. Aunado a lo anterior, el código es capaz de calcular la altura del break-up y del burst, el perfil de la tasa de pérdida de masa en función de la altura, la deflexión del ángulo de vuelo, el tiempo de vuelo, así como el perfil de presión estática a la que el NEO se somete causada por el arrastre o *drag* con las capas atmosféricas de nuestro planeta y la deposición de energía en función de la altura de vuelo. Todas las características anteriores, además de la versatilidad de usarlo para conocer los parámetros finales de un NEO, conociendo sus valores a la entrada de la atmósfera o viceversa, le generan a este código condiciones idóneas para modelar escenarios realistas.

5.4. Modelado del impacto de asteroides sobre territorio mexicano

El impacto de un asteroide sobre la superficie terrestre requiere centrarse específicamente en la caracterización del asteroide, la formación de cráteres y la evaluación de daños, entre otras variables. Es importante mencionar que se ha desarrollado modelación matemática para su aplicación en el territorio mexicano, tomando en cuenta elementos del trabajo de [Collins et al. \(2005\)](#) permitieron obtener las ecuaciones que describen la energía de impacto, E_i , el diámetro y la profundidad del cráter, D_{tc} y d_{tc} , respectivamente, así como el radio de la bola de fuego, R_f .

5.4.1. Velocidad terminal

Parámetros como la velocidad del impacto son necesarios para cuantificar las escalas espaciales cuando un asteroide choca con la superficie terrestre. Este modelo utiliza la ecuación de energía cinética proporcionada por [Chyba et al. \(1993\)](#) adaptándola a un perfil de densidad atmosférica exponencial

para una altura $h = 0$. Esta modificación establece que para objetos esféricos que impactan la superficie terrestre, la velocidad terminal del cuerpo con respecto a su velocidad inicial es entre 2/3 a 4/5 veces, aunque se considera una pérdida de masa de entre 30% y 60% debido al proceso de ablación por el paso a través de la atmósfera. En este contexto, la velocidad terminal se puede obtener de la siguiente manera:

$$V_i = \sqrt{\frac{4\rho_i dg}{3C_d \rho_a(h)_{h=0}}}, \quad (5.3)$$

donde ρ_i y d son la densidad y el diámetro del meteoróide, respectivamente, g es la constante de aceleración gravitacional, $C_d = 0.5$ es el coeficiente de arrastre y $\rho_a(h)_{h=0}$ es la densidad atmosférica evaluada en el suelo. La expresión matemática adecuada para la ecuación (5.3) tiene que ser del tipo $\rho_a(h) = \alpha e^{\delta_1 h} + \beta e^{\delta_2 h}$, con $\alpha + \beta > 0$ y $\delta_1, \delta_2 \in R$.

5.4.2. Intensidad del sismo

Este modelo considera un módulo para evaluar la fracción de energía cinética transformada en energía de onda sísmica, si ocurriera un impacto. Este módulo calcula la magnitud del terremoto; el valor de esta fracción oscila entre $10^{-5} - 10^{-3}$ Gutiérrez-Zalapa et al. (2023). En la relación energía-magnitud para un terremoto, Collins et al. (2005) la utilizó para calcular la intensidad del terremoto pero con la escala de Richter. De esta manera, la magnitud de un terremoto está relacionada con la energía radiada, E en Julios (J) como:

$$HK_s = \frac{\log_{10}(2 \times 10^4 E_i) - 9.05}{1.5}. \quad (5.4)$$

La ecuación anterior, es también denominada la ecuación de magnitud de momento o escala Hanks-Kanamori.

5.4.3. Composición geológica

Una de las principales consideraciones que se toma cuenta para representar los fenómenos físicos relacionados con el impacto de un objeto sobre todo el territorio mexicano es conocer la composición geológica del lugar de impacto. Para resolver esto, en el trabajo de Gutiérrez-Zalapa et al. (2023) se ha generado una matriz de valores de densidad superficial del territorio mexicano. con una precisión de $0,5^\circ$ de latitud por $0,5^\circ$ de longitud y 10 m de profundidad, en promedio. Matriz que sirve para elegir el *target* o lugar de impacto, dato crucial para conocer el diámetro y la profundidad que el cráter generaría.

5.4.4. Efectos ambientales

Otra propiedad de interés es el daño ambiental causado por el impacto de un NEO en el territorio mexicano. Los estudios y datos de NASA (2023b) relacionados con la estimación de la población mundial gravemente afectada con respecto a la energía liberada, ver el panel superior de la Figura 5.13.

Utilizando estos datos y un modelo basado en B-Splines y matrices de Vandermonde se obtuvo la función que relaciona la energía liberada con la población afectada. En particular, esto fue posible determinar la energía necesaria para dañar significativamente a la población mundial total, que es aproximadamente $1.2 \times 10^{24} J$.

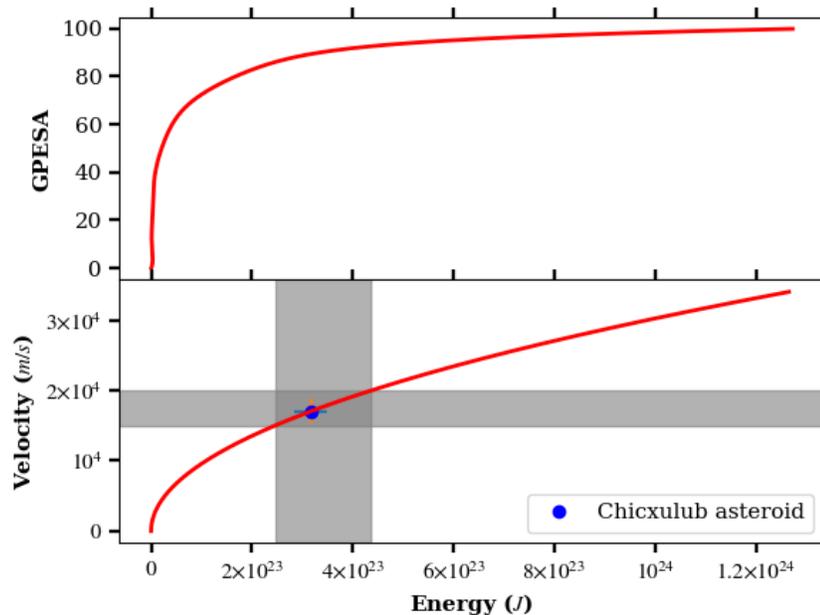


Figura 5.13: El panel superior muestra el comportamiento del Porcentaje Global de Medio Ambiente Gravemente Afectado (GPESA, por sus siglas en inglés) en función de la energía liberada. Para un daño de 100% se requiere una energía del orden $\sim 1 \times 10^{24} J$. El panel inferior muestra el comportamiento de la energía en función de la velocidad del impacto. Para $v_i = 17 km/s$, el \cdot indica el valor obtenido para el valor de $E_i = 3.2 \times 10^{23} J$.

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos con el acoplamiento de los 2 códigos antes mencionados para la recreación del evento de Chicxulub. En primera instancia con el código que calcula los valores finales de velocidad, masa y ángulo de vuelo de un NEO por la atmósfera terrestre se lograron determinar los valores mostrados en la Tabla 5.4:

Parámetro	Valor
Velocidad	17 km/s
Densidad	2750 kg/m ³
Ángulo final	45°
Diámetro	11.5 km

Tabla 5.4: Valores de impacto del asteroide de Chicxulub.

De los datos de la Tabla 5.4 se logró determinar que la energía liberada por el impacto del asteroide Chicxulub es del orden de $3.210^{23} J$ necesaria para afectar entre el 85 – 90% del medio ambiente de

la Tierra, ver el panel inferior de la Figura 5.13. Este valor se alcanza con la energía de impacto antes mencionada E_i , valor consistente con lo sugerido por Collins et al. (2005), como valor de la densidad del target se fijó en 1030 kg/m^3 , valor relacionado con un impacto en el mar.

La Figura 5.14 muestra el comportamiento del radio de la bola de fuego en función de la energía liberada. Se puede observar que el tamaño del radio de la bola de fuego sería $f_R = 1.5 \times 10^5 \text{ m}$.

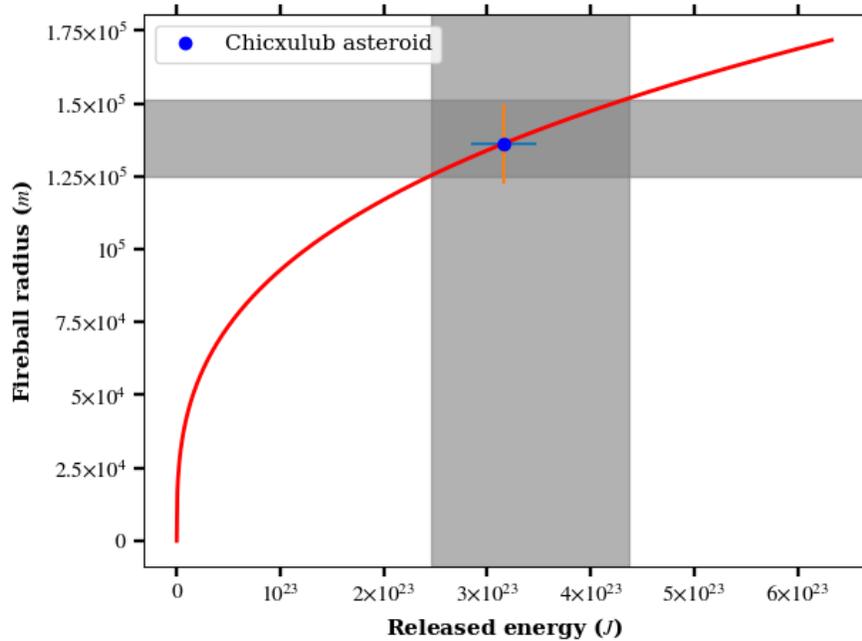


Figura 5.14: Este gráfico muestra la curva del radio de la bola de fuego en función de la energía liberada. El \bullet indica el valor obtenido para $R_f = 1.3 \times 10^5 \text{ m}$.

Tanto en la Figura 5.13 como en la Figura 5.14, la banda horizontal corresponden a los valores mínimo y máximo de velocidad de impacto sugeridos por Collins et al. (2005) y sus respectivos valores de energía liberada máxima y mínima. Asimismo, la banda gris horizontal indica el radio mínimo y máximo de la bola de fuego asociado con las energías liberadas antes mencionadas.

La Figura 5.15 describe el comportamiento del diámetro del cráter provocado por el impacto, en función de la densidad del target. En concreto, se indica que para una densidad objetivo de $\rho_t = 1030 \text{ kg/m}^3$, el diámetro sería $D_c = 9.3 \times 10^4 \text{ m}$.

La Figura 5.16 describe la curva de la profundidad del cráter en función de su diámetro mencionado, obteniendo que la profundidad sería $d_{tc} = 2.6 \times 10^4 \text{ m}$. Nuestros valores son consistentes con los reportados por Collins et al. (2005).

La Figura 5.17 muestra la curva de magnitud del terremoto en función de la energía, en la cual se infiere que la magnitud del terremoto sería $M_w = 12.4$, para poner este valor en contexto, el terremoto más grande registrado fue el de Valdivia Chile en 1960 con un valor de $M_w = 9.6$ (Gutiérrez-Zalapa et al., 2023).

La Figura 5.18 muestra el área afectada por la sobrepresión en función de la energía irradiada. El área afectada sería $S_R = 1.49 \times 10^7 \text{ km}^2$. En todos los gráficos anteriores se ha añadido una barra de

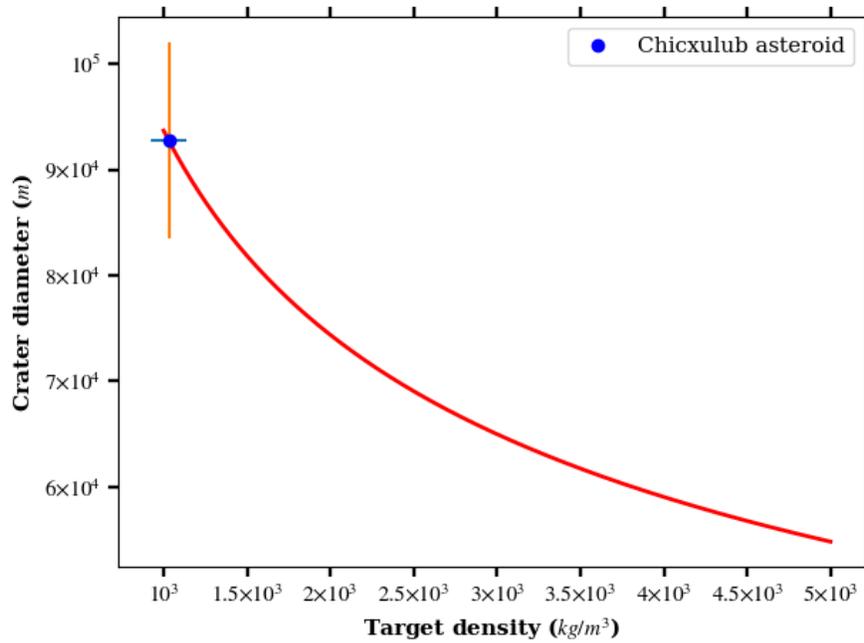


Figura 5.15: Análisis gráfico del diámetro del cráter en función de la densidad del target. El \cdot indica el valor obtenido para del diámetro del cráter $D_{tc} = 1.3 \times 10^5 \text{ m}$.

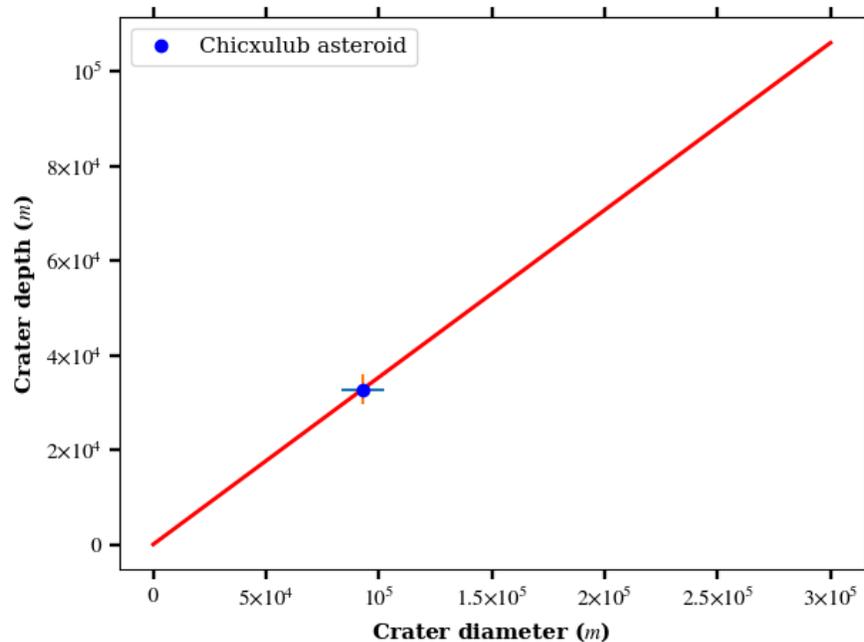


Figura 5.16: Análisis gráfico de la profundidad del cráter en función del diámetro del cráter. El \cdot indica el valor de la profundidad $d_{tc} = 4.8 \times 10^4 \text{ m}$.

error de 10% al resultado obtenido (Gutiérrez-Zalapa et al., 2023).

Para poner en contexto la relevancia del perfil de densidad atmosférica en el cálculo de la velocidad

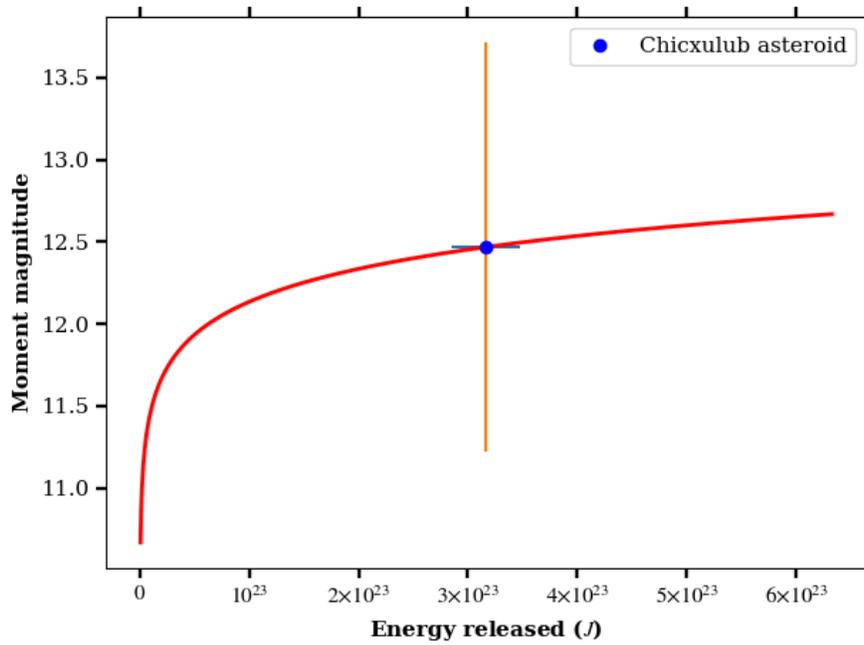


Figura 5.17: Análisis gráfico del terremoto en función de la energía del asteroide Chicxulub. El \cdot indica el valor obtenido para la magnitud del terremoto $M_w = 12.4$.

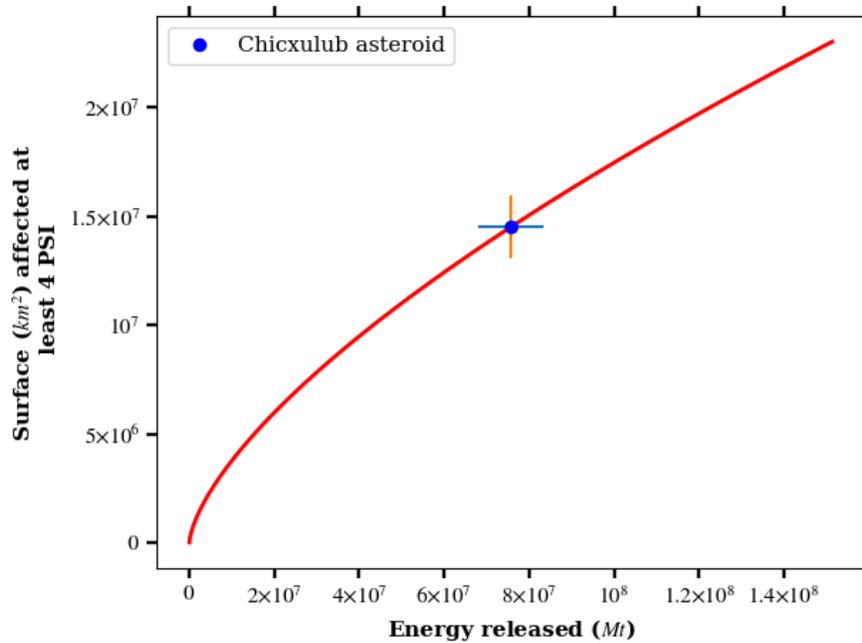


Figura 5.18: Análisis gráfico de la superficie afectada por la sobrepresión en función de la energía del asteroide Chicxulub. El \cdot indica el valor obtenido para el área afectada por la sobrepresión $S_R = 1.4 \times 10^7$ km².

Parámetro / Perfil de densidad atmosférico	Collins et al. (2005)	Register et al. (2017)	Variación
Velocidad de impacto (m/s)	2×10^4	1.8×10^4	10 %
Energía liberada (J)	4.5×10^{23}	4.1×10^{23}	8.8 %
Fireball radius (m)	1.5×10^5	1.4×10^5	< 1 %
Diámetro de cráter (m)	1.4×10^5	1.3×10^5	< 1 %
Profundidad del crater (m)	4.9×10^4	4.8×10^4	< 1 %
Magnitud del sismo	12.6	12.5	< 1 %
Superficie afectada por sobrepresión (km^2)	1.8×10^7	1.7×10^7	< 1 %

Tabla 5.5: Resultados obtenidos implementando dos perfiles de densidad, valores obtenidos de (Gutiérrez-Zalapa et al., 2023).

del impacto, se recreó el evento de Chicxulub utilizando el perfil Register et al. (2017). De los datos de la Tabla 5.5, se puede deducir que al utilizar el perfil de densidad atmosférica de Register et al. (2017) en este modelo, obtenemos valores que se ajustan mejor a lo propuesto por Alvarez et al. (1980) y Collins et al. (2005). En este orden, el valor de la velocidad del impacto difiere en una décima parte y la energía liberada y el radio de la bola de fuego están en el mismo orden de magnitud. Las dimensiones del cráter difieren en una centésima, mientras que la magnitud del terremoto lo hace en una décima. Finalmente, el área afectada por la sobrepresión es del mismo orden de magnitud.

Este mismo ejercicio se ha replicado para dos casos más en que la densidad del target varía en 2250 kg/m^3 y 2750 kg/m^3 , valores promedio y máximo de densidad superficial del territorio mexicano los resultados de esta simulación se pueden ver en (Gutiérrez-Zalapa et al., 2023).

5.5. Efectos en la infraestructura social

Siguiendo la idea de conocer las implicaciones sociales del impacto de un NEO con el territorio mexicano, se modelaron otros dos escenarios hipotéticos variando la densidad del target y empleando nuevamente los valores de la Tabla 5.4 como condiciones iniciales del impacto. Para calcular los daños a la infraestructura se ha usado el sitio web Atlas Nacional de Riesgos la herramienta *polígonos de información*, que permite conocer el número de casas existentes en una región poligonal bien definida. Para crear esta región, establecemos una coordenada geográfica e ingresamos los valores del diámetro del cráter y del radio de la bola de fuego obtenidos con nuestro modelo, generando la información deseada. Estos datos permitieron estimar la infraestructura afectada cerca del punto de impacto, obteniendo los resultados de la Tabla 5.6

A partir de esta tabla, se puede determinar que la mayor cantidad de viviendas dañadas serían causadas por el radio de la bola de fuego y se encontrarían en $25^\circ N$, $100^\circ W$ (ubicado aproximadamente a 110 km del ciudad de Monterrey en el estado de Nuevo León). Este mismo sitio geográfico tendría el menor número de viviendas dañadas, lo que parece contrastar con lo intuitivo. De lo anterior se puede inferen que esta situación se debe al fenómeno demográfico de gentrificación que presenta Monterrey.

Densidad del target y situación geográfica./ Parámetros y daños infraestructurales.	Viviendas afectadas en relación al diámetro del cráter	Viviendas afectadas en relación al radio de la bola de fuego
1030 kg/m^3 ($21.3^\circ N$, $89.5^\circ W$)	253,808	583,498
2250 kg/m^3 ($25^\circ N$, $100^\circ W$)	10,344	1,754,280
2750 kg/m^3 ($22^\circ N$, $103^\circ W$)	30,198	922,398

Tabla 5.6: Efectos infraestructurales causados por los efectos del diámetro del cráter y el radio de la bola de fuego.

Capítulo 6

Conclusiones

Esta tesis está relacionada con la modelación de las implicaciones físicas del choque de un NEO con nuestro planeta. La realización de este trabajo implicó el desarrollo de software, que aunado a base de datos existentes, permite dar condiciones iniciales con las cuales opera el modelo. A continuación se describen las conclusiones generales del trabajo, que concretamente se desarrollaron a lo largo de los capítulos 2, 3, 4 y 5:

- Se presentaron las soluciones analíticas del sistema de ecuaciones (2.1), sistema que modela la dinámica de los NEO's a su paso por la atmósfera terrestre. Dichas soluciones describen procesos en los cuales la variación de la masa con durante su trayectoria es prácticamente cero ($dm/dh \rightarrow 0$), este tipo de modelos representa con buena precisión objetos homogéneos del tipo metálico. El análisis gráfico de este tipo de soluciones ayudó a conocer el comportamiento de los parámetros físicos del cuerpo durante el evento.
- Se presentó el cálculo de las órbitas de los NEOs utilizando relatividad general. De donde se obtuvo como resultado que, empleando esta rama de las matemáticas y de la física, el *path* calculado para el objeto de prueba 99942 Apophis se encuentra dentro del margen de error del 10% propuesto por la NASA para este mismo objeto. En particular se analizaron 4 momentos de su órbita, el afelio y perihelio, así como las intersecciones con nuestro planeta previstas para el año 2029. En estos últimos 2 momentos, los resultados concuerdan en comportamiento previsto por los datos teóricos de la NASA, con un margen de error de menos del 0.01 UA. Concluyendo que, la órbita del objeto 99942 Apophis si cruzará con la órbita terrestre. El conocer si este objeto *empataría a tiempo* con nuestro planeta, se conocería hasta 2 años antes del acontecimiento, ya que condiciones como, fuerza no gravitacionales (por ejemplo, el efecto YORP) podría acelerar o ralentizar su camino. Aunado a lo anterior, se exploró la idea de calcular la órbita de un NEO usando espacio-tiempo rodeados por materia de quintaesencia, con la finalidad de conocer la injerencia de métricas no comunes en la descripción de las órbitas de NEOs.
- Se estudió el proceso de discretización de ecuaciones que a la postre sirvió como base para el desarrollo del código numérico que modela las implicaciones físicas y ambientales del paso de un NEO por la atmósfera terrestre. En particular, usamos el método de diferencias finitas para la

concreción del código. Con las bases establecidas en este capítulo, en el capítulo 5 se desarrollaron los casos 3 de estudio de esta investigación.

- En el primer caso de estudio, se recreó el evento del meteoróide de Chelyabinsk. En este evento. Se utilizaron los valores *input* de velocidad, diámetro y densidad inicial así como ángulo de incidencia, más aceptados en la literatura. De donde se obtuvieron curvas de comportamiento de los parámetros intrínsecos del objeto a su paso por la atmósfera terrestre, es decir, velocidad, masa, ángulo de vuelo energía liberada, diámetro, densidad de la nube de escombros y presión estática. Obteniendo resultados que coinciden con lo expuesto en artículos especializados. acertando también en la altura en la que el cuerpo experimentó el break-up y el burst. Mostrando que el código generado puede ser una herramienta para modelar escenarios de interacciones de la atmósfera terrestre con objetos de este tipo.
- En el segundo caso de estudio, se modeló el caso hipotético del objeto 2009 JF1, se escogió este NEO, pues a la fecha de la realización de esta tesis (junio de 2019) es el objeto que presenta mayor probabilidad de impacto con nuestro planeta en los próximos 7 años. También se tomó en consideración el hecho de que la frecuencia de impacto de estos cuerpos es de entre 5-10 años, así como también que el tamaño de este cuerpo está en el promedio entre el NEO de Chelyabinsk y el meteoróide moreliano. De dicha modelación se obtuvieron curvas de los parámetros intrínsecos del cuerpo a su paso por la atmósfera. Los resultado obtenido coinciden con los que literatura especializada ha sugerido para este tipo de escenarios. Como datos de input, se tomaron los valores teóricos propuestos por [NASA/JPL](#).
- Para el tercer caso de estudio, se implementó el escenario teórico del NEO 2023 DW. La trascendencia de modelar este cuerpo se debe a sus condiciones físicas, ya que este cuerpo tiene características similares de tamaño y velocidad orbital con las que el objeto de Tunguska pudo haber tenido. Al igual que para el caso del inciso anterior, los datos input se tomaron de los sugerido por [NASA/JPL](#), obteniendo de igual manera curvas de sus parámetros intrínsecos en su trayecto por la atmósfera. A diferencia del inciso anterior, los efectos de este cuerpo sobre nuestro planeta se discutieron con base en artículos de investigación relacionados con el evento de Tunguska. Obteniendo como resultado, que la modelación arroje coincidencias con la literatura existente.

Es conveniente mencionar que el modelo antes mencionado funciona en conjunto con el código presentado en el trabajo de [Gutiérrez-Zalapa et al. \(2023\)](#), tomando este último como condiciones *iniciales*, para calcular los efectos del impacto, los valores *finales* del modelo descrito en esta tesis. Ambos códigos representan un avance para conocer y predecir las implicaciones físicas y sociales del choque de un NEO con nuestro territorio.

Es necesario añadir que, la culminación del modelo aquí presentado sería que este operara de forma tridimensional. Pues si bien, el método de diferencias finitas es de una gran ayuda para modelar fenómenos como el tratado en esta tesis, los efectos como arcos de choque, cambios en la estructura del NEO o pérdida de masa transformada en calor y/o energía, no se pueden modelar usando el método de antes mencionado. Para compensar esto, como trabajo a futuro está el generar el *upgrade* de este modelo, es decir, implementarlo usando el método volúmenes finitos. Ya que el método de volúmenes

finitos permitirá generalizar el enfoque del trabajo aquí mostrado, permitiendo, inclusive, agregar los posibles efectos de perturbación atmosférica, en especial de la ionosfera en las vecindades del trayecto del NEO. Este método, ya ha sido probado para representar fenómenos como choque entre gases en el medio interplanetario o la formación de jets en la atmósfera solar, demostrando su versatilidad para modelar fenómenos del clima espacial ([González-Avilés et al., 2017](#); [Hajra and Tsurutani, 2022](#)).

Bibliografía

- Abgrall, R., Shu, C.-W., Dafermos, C., Toro, E. F., Sonar, T. H., Coquel, F., Despres, B., Zhang, Y.-T., Fjordholm, U., and Qiu, J. (2017). *Handbook of numerical methods for hyperbolic problems, vol. 18 of Handbook of Numerical Analysis*. North-Holland, Amsterdam.
- Abramowitz, M., Stegun, I. A., and Romer, R. H. (1988). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*.
- Alvarez, L. W., Alvarez, W., Asaro, F., and Michel, H. V. (1980). Extraterrestrial cause for the cretaceous-tertiary extinction. *Science*, 208(4448):1095–1108.
- Alvarez Guzman, J. A. (2014). *Modelling and simulation of the dynamics of near Earth asteroids*. Pontificia Universidad Javeriana.
- Atkinson, H., Tickell, C., and Williams, D. (2000). Report of the task force on potentially hazardous Near Earth Objects.
- Badescu, V. (2013). *Asteroids: Prospective energy and material resources*. Springer Science & Business Media.
- Bannister, M. T., Bhandare, A., Dybczyński, P. A., Fitzsimmons, A., Guilbert-Lepoutre, A., Jedicke, R., Knight, M. M., Meech, K. J., McNeill, A., Pfalzner, S., et al. (2019). The natural history of ‘oumuamua. *Nature astronomy*, 3(7):594–602.
- Barba, L. A. and Forsyth, G. F. (2018). Cfd python: the 12 steps to navier-stokes equations. *Journal of Open Source Education*, 2(16):21.
- Bate, R. R., Mueller, D. D., White, J. E., and Saylor, W. W. (2020). *Fundamentals of astrodynamics*. Courier Dover Publications.
- Battin, R. H. (1999). *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, revised edition*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Bland, P. A. and Artemieva, N. A. (2006). The rate of small impacts on earth. *Meteoritics & Planetary Science*, 41(4):607–631.
- Blazek, J. (2015). *Computational fluid dynamics: principles and applications*. Butterworth-Heinemann.
- Boss, A. (2006). Gas giant protoplanets formed by disk instability in binary star systems. *The Astrophysical Journal*, 641(2):1148.
- Cameron, A. (1995). The first ten million years in the solar nebula. *Meteoritics*, 30(2):133–161.
- Cepelcha, Z. (1994). Impacts of meteoroids larger than 1 m into the earth’s atmosphere. *Astronomy and Astrophysics, Vol. 286, p. 967-970 (1994)*, 286:967–970.

- Ceplecha, Z. and ReVelle, D. O. (2005). Fragmentation model of meteoroid motion, mass loss, and radiation in the atmosphere. *Meteoritics & Planetary Science*, 40(1):35–54.
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation.
- Chernogor, L. and Rozumenko, V. (2013). The physical effects associated with chelyabinsk meteorite's passage. .
- Chodas, P. and Yeomans, D. (1999). Predicting close approaches and estimating impact probabilities for near Earth objects.
- Chyba, C. F., Thomas, P. J., and Zahnle, K. J. (1993). The 1908 tunguska explosion: atmospheric disruption of a stony asteroid. *Nature*, 361(6407):40–44.
- Colella, P. and Glaz, H. M. (1985). Efficient solution algorithms for the riemann problem for real gases. *Journal of Computational Physics*, 59(2).
- Colella, P. and Puckett, E. G. (1998). Modern numerical methods for fluid flow. *University of California*.
- Colella, P. and Woodward, P. R. (1984). The piecewise parabolic method (ppm) for gas-dynamical simulations. *Journal of computational physics*, 54(1).
- Collins, G. S., Melosh, H. J., and Marcus, R. A. (2005). Earth impact effects program: A web-based computer program for calculating the regional environmental consequences of a meteoroid impact on Earth. *Meteoritics & planetary science*, 40(6):817–840.
- Colwell, P. (1992). Bessel functions and kepler's equation. *The American mathematical monthly*, 99(1):45–48.
- Crowe, W. (2019). What are neos and the technical means and constraints of solar system mapping? In *Planetary Defense*, pages 33–48. Springer.
- Davidson, P. A. (2002). *An introduction to magnetohydrodynamics*. American Association of Physics Teachers.
- D'Orazio, D. J. and Saha, P. (2010). An analytic solution for weak-field schwarzschild geodesics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406(4):2787–2792.
- Emel'yanenko, V., Popova, O., Chugai, N., Shelyakov, M., Pakhomov, Y. V., Shustov, B., Shuvalov, V., Biryukov, E., Rybnov, Y. S., Marov, M. Y., et al. (2013). Astronomical and physical aspects of the chelyabinsk event (february 15, 2013). *Solar System Research*, 47:240–254.
- Estevez-Delgado, J., Campuzano, E. A., Ceballos, J. A. R., Murguía, A. T., and Cabrera, J. V. (2020). Strange stars in the presence of quintessence. *The European Physical Journal Plus*, 135(2):204.
- Garretson, P. and Kaupa, D. (2008). Planetary defense: potential mitigation roles of the department of defense. *Air & Space Power Journal*, 22(3):34–42.

- Gautschi, W. (1997). *Numerical analysis*. Springer Science & Business Media.
- Ghaderi, K. (2017). Geodesics of black holes with dark energy. *Astrophysics and Space Science*, 362(12):218.
- Gladman, B., Michel, P., and Froeschlé, C. (2000). The near-earth object population. *Icarus*, 146(1):176–189.
- Gladysheva, O. G. (2019). Disintegration of the chelyabinsk cosmic body. *Planetary and Space Science*, 178:104709.
- Goedbloed, J. P., Keppens, R., and Poedts, S. (2010). *Advanced magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas*. Cambridge University Press.
- González-Avilés, J., Guzmán, F., and Fedun, V. (2017). Jet formation in solar atmosphere due to magnetic reconnection. *The Astrophysical Journal*, 836(1):24.
- Gutierrez-Zalapa, R., Estévez-Delgado, J., Rodriguez-Martinez, M., and Aguilar-Rodríguez, E. (2023a). Neos' orbits determination using matter quintessence-like. *Submitted to Astrophysical Journal*.
- Gutiérrez-Zalapa, R., Rodriguez-Martinez, M., Aguilar-Rodríguez, E., Estevez-Delgado, J., and Gonzalez-Esparza, J. A. (2022a). Study of the dynamics of an asteroid when it travels through earth's atmosphere. *Latin American Conference on Space Geophysics-COLAGE. Held December*, 13.
- Gutiérrez-Zalapa, R., Rodriguez-Martinez, M., Aguilar-Rodríguez, E., Olguin, L., and Estevez-delgado, J. (2022b). Modeling the transit of a neo through the earth's atmosphere. *44th COSPAR Scientific Assembly. Held 16-24 July*, 44:229.
- Gutierrez-Zalapa, R., Rodriguez-Martinez, M., Raga, A. C., Estévez-Delgado, J., Aguilar-Rodríguez, E., Olguin, L., Gonzalez-Esparza, J. A., Sergeeva, M. A., and Tarango-Yong, J. A. (2023b). Modeling meteoroid's parameters during its passage through the earth's atmosphere. *Submitted to Journal of Space Weather and Space Climate*.
- Gutiérrez-Zalapa, R., Rodríguez-Martínez, M., Aguilar-Rodríguez, E., and Estevez-Delgado, J. (2023). Modeling the impact of asteroids over Mexican territory. *In press in Revista mexicana de física*.
- Hajra, R. and Tsurutani, B. T. (2022). Near-earth sub-alfvénic solar winds: Interplanetary origins and geomagnetic impacts. *The Astrophysical Journal*, 926(2):135.
- Hamming, R. (2012). *Numerical methods for scientists and engineers*. Courier Corporation.
- Hartle, J. B. (2005). Gravity: An introduction to Einstein's general relativity. *Physics Today*, 58(1):52–54.
- Hasnain, Z., Lamb, C. A., and Ross, S. D. (2012). Capturing near-Earth asteroids around Earth. *Acta Astronautica*, 81(2):523–531.

- Heath, M. T. (2018). *Scientific Computing: An Introductory Survey, Revised Second Edition*. SIAM.
- Hellevik, L. R. (2018). Numerical methods for engineers. *Kompendium. NTNU*.
- Hills, J. G. and Goda, M. P. (1993). The fragmentation of small asteroids in the atmosphere. *The Astronomical Journal*, 105:1114–1144.
- Hirsch, C. (1988). Numerical computation of internal and external flows, volume 1: Fundamentals of numerical discretization. *John Wiley and Sons*, 9.
- Hirsch, C. (1990). Numerical computation of internal and external flows, volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows. *Wiley Series in Numerical Methods in Engineering*.
- Kiselev, V. (2003). Quintessence and black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 20(6):1187.
- Korenev, B. G. (2002). *Bessel functions and their applications*. CRC Press.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1991). *Mecánica de fluidos*. Number 53 LAN.
- Langtangen, H. P. (2012). *A primer on scientific programming with Python*. Springer.
- Langtangen, H. P. and Linge, S. (2017). *Finite difference computing with PDEs: a modern software approach*. Springer Nature.
- Langtangen, H. P. and Logg, A. (2016). *Solving PDEs in Python: The FEniCS Tutorial I*, volume 1. Springer.
- Larson, R. B. (1994). The evolution of molecular clouds. In *The Structure and Content of Molecular Clouds 25 Years of Molecular Radioastronomy*, pages 13–28. Springer.
- LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. SIAM.
- LeVeque, R. J. et al. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- Linge, S. and Langtangen, H. P. (2020). *Programming for Computations-Python: A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python 3.6*. Springer Nature.
- Lobanovsky, Y. I. (2014). Parameters of chelyabinsk and tunguska meteoroids. *Synerjetics Group*.
- Lupishko, D. F., Di Martino, M., and Binzel, R. P. (2006). Near-Earth Objects as principal impactors of the Earth: Physical properties and sources of origin. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2(S236):251–260.
- Mainzer, A., Grav, T., Masiero, J., Bauer, J., McMillan, R., Giorgini, J., Spahr, T., Cutri, R., Tholen, D., Jedicke, R., et al. (2012). Characterizing subpopulations within the Near-Earth Objects with newwise: preliminary results. *The Astrophysical Journal*, 752(2):110.

- McMullan, S. and Collins, G. (2019). Uncertainty quantification in continuous fragmentation airburst models. *Icarus*, 327:19–35.
- Morbidelli, A., Bottke, W., Froeschlé, C., Michel, P., et al. (2002). Origin and evolution of Near-Earth Objects. *Asteroids iii*, 409.
- NASA (2023a). Fireballs CNEOS-NASA.
- NASA (2023b). Sentry CNEOS-NASA.
- Pedraza, O., López, L., Arceo, R., and Cabrera-Munguia, I. (2021). Geodesics of hayward black hole surrounded by quintessence. *General Relativity and Gravitation*, 53:1–17.
- Popova, O. P., Jenniskens, P., Emel'yanenko, V., Kartashova, A., Biryukov, E., Khaibrakhmanov, S., Shuvalov, V., Rybnov, Y., Dudorov, A., Grokhovsky, V. I., et al. (2013). Chelyabinsk airburst, damage assessment, meteorite recovery, and characterization. *Science*, 342(6162):1069–1073.
- Priest, E. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press.
- Raga, A. et al. (2021). *The physics of the interstellar medium*. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto en Ciencias Nucleares.
- Register, P. J., Mathias, D. L., and Wheeler, L. F. (2017). Asteroid fragmentation approaches for modeling atmospheric energy deposition. *Icarus*, 284:157–166.
- Robertson, D. K. and Mathias, D. L. (2019). Hydrocode simulations of asteroid airbursts and constraints for tunguska. *Icarus*, 327:36–47.
- Rodriguez-Martinez, M., Gutierrez-Zalapa, R., Aguilar-Rodriguez, E., and Estevez-Delgado, J. (2023). Modelación de los efectos del impacto del meteoróide (2023 DW) a su paso por la atmósfera terrestre. In *Convención Geológica Nacional 2023*, volume 1.
- Roithmayr, C. M., Kay-Bunnell, L., Mazanek, D. D., Kumar, R. R., Seywald, H., and Hausman, M. A. (2005). Accurate determination of comet and asteroid orbits leading to collision with Earth.
- Rumpf, C., Lewis, H. G., and Atkinson, P. M. (2016). On the influence of impact effect modelling for global asteroid impact risk distribution. *Acta Astronautica*, 123:165–170.
- Rumpf, C. M., Lewis, H. G., and Atkinson, P. M. (2017). Asteroid impact effects and their immediate hazards for human populations. *Geophysical Research Letters*, 44(8):3433–3440.
- Scharf, G. (2011). Schwarzschild geodesics in terms of elliptic functions and the related red shift. *arXiv preprint arXiv:1101.1207*.
- Scheeres, D. J. (2016). *Orbital motion in strongly perturbed environments: applications to asteroid, comet and planetary satellite orbiters*. Springer.

- Sergeeva, M. A., Demyanov, V. V., Maltseva, O. A., Mokhnatkin, A., Rodriguez-Martinez, M., Gutierrez-Zalapa, R., Vesnin, A. M., Gatica-Acevedo, V. J., Gonzalez-Esparza, J. A., Fedorov, M. E., et al. (2021). Assessment of morelian meteoroid impact on mexican environment. *Atmosphere*, 12(2):185.
- Shor, V., Chernetenko, Y. A., Kochetova, O., and Zheleznov, N. (2012). On the impact of the yarkovsky effect on apophis' orbit. *Solar System Research*, 46:119–129.
- Silber, E. A., Boslough, M., Hocking, W. K., Gritsevich, M., and Whitaker, R. W. (2018). Physics of meteor generated shock waves in the Earth's atmosphere—a review. *Advances in Space Research*, 62(3):489–532.
- Smulsky, J. J. and Smulsky, Y. J. (2012). Asteroids apophis and 1950 da: 1000 years orbit evolution and possible use. *Horizons in Earth Science Research*, 6:63–97.
- Standish, E. (1995). The JPL planetary and lunar ephemerides de402/le402. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 27, page 1203.
- Stewart, J. M. (2017). *Python for scientists*. Cambridge University Press.
- Stokes, G., Barbee, B., Bottke, W. F., Yeomans, D., Buie, M., Chodas, P., et al. (2017). Report of the near-earth object science definition team: Update to determine the feasibility of enhancing the search and characterization of neos. nasa. *Science Mission Directorate, Planetary Science Division*.
- Stokes, G. and Evans, J. (2004). A study to determine the feasibility of extending the search for neos to smaller limiting diameters: Report of a NASA science definition team. In *35th COSPAR Scientific Assembly*, volume 35, page 4337.
- Sundnes, J. (2020). *Introduction to Scientific Programming with Python*. Springer Nature.
- Svetsov, V., Nemtchinov, I., and Teterev, A. (1995). Disintegration of large meteoroids in earth's atmosphere: Theoretical models. *Icarus*, 116(1):131–153.
- Toro, E. F. (2013). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media.
- Vokrouhlický, D., Farnocchia, D., Čapek, D., Chesley, S. R., Pravec, P., Scheirich, P., and Müller, T. G. (2015). The yarkovsky effect for 99942 apophis. *Icarus*, 252:277–283.
- Wald, R. M. (2010). *General relativity*. University of Chicago press.
- Watanabe, S., Hirabayashi, M., Hirata, N., Hirata, N., Noguchi, R., Shimaki, Y., Ikeda, H., Tatsumi, E., Yoshikawa, M., Kikuchi, S., et al. (2019). Hayabusa2 arrives at the carbonaceous asteroid 162173 ryugu—a spinning top-shaped rubble pile. *Science*, 364(6437):268–272.
- Wheeler, L. F., Register, P. J., and Mathias, D. L. (2017). A fragment-cloud model for asteroid breakup and atmospheric energy deposition. *Icarus*, 295:149–169.

- Wielicki, B. A., Young, D., Mlynczak, M., Thome, K., Leroy, S., Corliss, J., Anderson, J., Ao, C., Bantges, R., Best, F., et al. (2013). Achieving climate change absolute accuracy in orbit. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 94(10):1519–1539.
- Woodward, P. and Colella, P. (1984). The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of computational physics*, 54(1):115–173.
- Yamaguchi, A., Tomioka, N., Ito, M., Shirai, N., Kimura, M., Greenwood, R. C., Liu, M.-C., McCain, K. A., Matsuda, N., Uesugi, M., et al. (2023). Insight into multi-step geological evolution of c-type asteroids from ryugu particles. *Nature Astronomy*, 7(4):398–405.
- Zingale, M. (2017). Introduction to computational astrophysical hydrodynamics. Lectures of Department of Physics & Astronomy. Stony Brook University. Stony Brook, NY.