Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

UNA INTRODUCCIÓN A LA COMBINATORIA ANALÍTICA VÍA EL MÉTODO SIMBÓLICO Y APLICACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en matemáticas aplicadas y computación

P R E S E N T A :

Vergara Gómez Luis Alexandher

TUTOR

Dr. Rubio Montiel Christian

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México, 2023

«Hace frío sin ti, pero se vive.»

Roque Dalton García.

Agradecimientos

A mi madre Margarita, mi padre José Luis, mi hermano Joseph y mis abuelos, por su amor y apoyo incondicional, quienes son mi motivo de seguir adelante y sin los cuales yo no estaría aquí.

Al doctor Christian Rubio, por su tiempo, asesoramiento y enseñanza.

A mis sinodales: Julio Cesar Galindo, Héctor Axel Saavedra, Gustavo Gonzáles y Enrique Espinoza, por sus importantes aportaciones y comentarios.

A mis amigas y amigos, por hacer más amena mi existencia con su inigualable compañía.

Y a la vida en general, por todas las oportunidades brindadas.

Índice general

0 Introducción

Sabemos que al nacer no somos capaces de entender el significado de las palabras como “uno”, “dos” y “tres”, a veces denominadas como palabras de conteo. Sin embargo, se ha comprobado [17] que los bebés desde temprana edad son capaces de “contar” sin la necesidad de comprender el significado de esta palabra. Este tipo de investigaciones muestran que nuestro primer contacto con las matemáticas se da de manera casi inconsciente, pues nacemos con la capacidad de comparar y contar pequeñas cantidades de objetos; acción que se vuelve fundamental en nuestra vida cotidiana.

Entonces, resulta contradictorio que sea generalmente en el nivel superior donde se estudian cursos en los que se aborda la combinatoria, rama de las matemáticas donde se estudia este proceso protomatemático. Más aún, para que la combinatoria a profundidad este al alcance del alumnado, habrá que esperar a cursos de posgrado.

La siguiente tesis tiene como propósito introducir al lector al mundo de la combinatoria analítica, área de las matemáticas que según Philippe Flajolet y Robert Sedgewich [8] se puede dividir en dos partes importantes: el método simbólico y el análisis asintótico.

La primera parte se refiere a un “lenguaje” que nos permite convertir descripciones combinatorias naturales de objetos en ecuaciones sobre sus respectivas funciones generatrices. La segunda parte (el análisis asintótico) es necesaria para procesar las ecuaciones obtenidas en el método simbólico y extraer sus propiedades asintóticas. Las técnicas involucradas provienen principalmente del análisis complejo, como el estudio de singularidades.

El texto desarrolla los conceptos básicos de la enumeración combinatoria a través de un enfoque que gira en torno a las funciones generatrices. Nuestros principales objetos de estudio serán objetos que aparecen de forma recurrente en el área de las matemáticas discretas (gráficas, árboles, permutaciones, etc.).

El escrito se desarrolla principalmente en 4 partes:

El capítulo 1 abarca definiciones y temas introductorios a la teoría del conteo, tomando como concepto principal el de biyección (para así poder demostrar el principio de biyección).

El núcleo de la tesis está conformado por los capítulos 2 y 3, en los cuales se desarrolla el ya mencionado método simbólico, haciendo énfasis en la enumeración etiquetada y no etiquetada; pasando por definir una estructura combinatoria hasta el uso de funciones generatrices ordinarias y exponenciales como una herramienta de conteo, las cuales nos servirán de ayuda para codificar una sucesión de números como coeficientes de una serie formal de potencias.

El capítulo 4 abarca la parte necesaria del análisis asintótico para así poder ser capaces de enunciar y comprender los dos resultados claves relacionados con el estudio de singularidades de funciones complejas; cerramos el capitulo enunciando la fórmula de Stirling y su uso para dar una estimación a los Números de Catalán. El capítulo 5 tiene un enfoque computacional, en el cual se desarrollan implementaciones en SageMath para facilitar la extracción de coeficientes y dar estimaciones asintóticas, en ambos casos refiriéndose a funciones generatrices.

Finalmente, se agregan dos apéndices en los cuales se abordan los conceptos básicos y necesarios para la comprensión del texto, uno dedicado al análisis real y funciones generatrices, y el segundo enfocado a brindar una introducción a SageMath.

Aunque el texto trata de ser autocontenido, es recomendable que el lector tenga nociones básicas en áreas en las que no se hacen énfasis, tales como la teoría de conjuntos [9], teoría de coeficientes binomiales, [6], matemáticas discretas, análisis real y análisis complejo.

1 Biyecciones

1.1. El principio de biyección

Desde temprana edad nos enseñan a contar haciendo uso de los números naturales (a veces llamados "números de contar") y resulta un fenómeno tan trivial que somos capaces de hacerlo usando los dedos de la mano.

Lo que en combinatoria a menudo se pretende es contar los elementos de un conjunto, o más formalmente, determinar su cardinal (finito). Cuando el cardinal del conjunto es pequeño resulta sencilla nuestra tarea, pero si el cardinal es muy grande debemos hacer uso de otro tipo de herramientas, una de estas son las biyecciones.

Para esto vamos a utilizar uno de los conceptos más importantes en la matemática moderna y contemporánea, nos referimos al concepto de función. La definición moderna de función suele ser complicada, una forma sencilla de visualizarla es pensar en una máquina de dulces, la cual, al recibir una moneda es capaz de regresarnos un caramelo. Una función f trabaja de forma similar, recibe un elemento de un conjunto X y nos regresa un elemento de un conjunto Y (X e Y no son necesariamente distintos), este proceso suele denotarse como $f : X \to Y$. Existen muchos tipos de funciones, en este capítulo centraremos nuestra atención en el número de elementos de los conjuntos X e Y.

Definición 1.1.1 (Cardinal)**.** *Sea X un conjunto con n elementos, escribimos $|X| = n$ y diremos que el cardinal de X es n.*

Diremos que un conjunto es finito si tiene un número finito de elementos. Si se desea indagar en las sutilezas de la definición 1.1.1 puede consultar [9].

Definición 1.1.2 (Relación)**.** *Sean X e Y conjuntos. Un subconjunto $\mathfrak{R}$ de $X \times Y$, $\mathfrak{R}$ es una relación de X en Y si $\mathfrak{R} \subset X \times Y$.*

Definición 1.1.3 (Función)**.** *Una función f de X a Y es una relación que asocia a cada elemento $x \in X$ exactamente un elemento $f(x) \in Y$.*

Definición 1.1.4 (Función inyectiva)**.** *Una función $f : X \to Y$ es inyectiva si para distintos elementos en X se asignan elementos distintos en Y. Más precisamente, f es inyectiva si para $x_1, x_2 \in X$ tal que $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Alternativamente, podemos utilizar la formulacion contrapositiva, es decir, para cada $x_1, x_2 \in X$, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Definición 1.1.5 (Función sobreyectiva o suprayectiva)**.** *Una función $f : X \to Y$ es sobreyectiva si cada elemento $y \in Y$ está mapeado por algún $x \in X$. Más precisamente, f es sobreyectiva si para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Generalmente, para probar que una función $f : X \to Y$ es sobreyectiva debemos demostrar que $f(X) = Y$. En otras palabras, debemos demostrar que los conjuntos $f(X)$ e Y son iguales. Es sabido que $f(X) \subseteq Y$ si f es una función bien definida, por lo que todo lo que se debe demostrar es que $Y \subseteq f(X)$.

Definición 1.1.6 (Función biyectiva)**.** *Una función $f : X \to Y$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 1.1.7 (Composición de funciones)**.** *Considere las funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Denotamos por $g \circ f : X \to Z$ a la aplicación sucesiva de f y g en ese orden. Es decir $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, a dicha función se le conoce como composición de f con g. En general la composición de funciones no es conmutativa, es decir, $g \circ f \neq f \circ g$.*

Definición 1.1.8 (Función inversa)**.** *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos funciones tales que*

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= x \text{ ,para cada } x \in B, \\ g(f(x)) &= x \text{ ,para cada } x \in A. \end{aligned}$$

La función g se llama inversa de la función f y se denota por f^{-1}.

Se sabe que la inversa de f existe si y solo si f es biyectiva.

Proposición 1.1.1. *Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones biyectivas, definamos $h = (g \circ f) : X \to Z$. Entonces, h es una función biyectiva.*

Demostración. Recordemos que al ser f y g biyectivas entonces son inyectivas y sobreyectivas. Para probar la sobreyectividad de h considere que $f(X) = Y$, $g(Y) = Z$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} h(X) &= (g \circ f)(X) \\ &= \{z \in Z \mid (g \circ f)(x) = z, \text{ para algunos } x \in X\} \\ &= \{z \in Z \mid g(f(x)) = z, \text{ para algunos } x \in X\} \\ &= \{z \in Z \mid g(y) = z, \text{ para algunos } y \in f(X)\} \\ &= g(f(X)) \\ &= g(Y) \\ &= Z, \end{aligned}$$

es decir, h es sobreyectiva.

Para probar la inyectividad de h vamos a suponer que $h(x) = h(x')$, o bien, $g(f(x)) = g(f(x'))$. Por la inyectividad de f y g tenemos:

$$g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Por lo tanto, h es biyectiva.

□

En adelante para cada número natural n vamos a denotar $N_n := \{1, 2, ..., n\}$.

Teorema 1.1.1. *Sean X, Y conjuntos finitos y $f : X \to Y$ una función inyectiva, entonces $|X| \leq |Y|$.*

Demostración. Supongamos que $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Dado que f mapea de X en Y, es claro que $\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\} \subset Y$. Ya que f es una función inyectiva, todos los elementos $f(x_i) \neq f(x_j)$ con $i \neq j$, por lo que Y contiene al menos n elementos. Concluimos que $|X| \leq |Y|$. □

Teorema 1.1.2. *Sean X, Y conjuntos finitos y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva, entonces $|X| \geq |Y|$.*

Demostración. Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Ya que f es una función sobreyectiva, entonces para cada y_i existe x_i tal que $f(x_i) = y_i$. Es decir, para todo $y_i \in Y$ vamos a tomar uno de los posibles elementos $x_i \in X$ tal que $f(x_i) = y_i$. Como cada $x_i \neq x_j$ con $i \neq j$, concluimos que $|X| \geq |Y|$. □

Corolario 1.1.1. *Diremos que un conjunto A es finito si A es vacío o si existe algún entero positivo n y una biyección*

$$f : N_n \to A.$$

Demostración. Basta usar el los teoremas 1.1.1 y 1.1.2. □

Proposición 1.1.2. *Sean m, n dos enteros positivos con $m \neq n$, entonces no existe una biyección $f : N_n \to N_m$.*

Demostración. Ver [1, p. 122]. □

Corolario 1.1.2. *Sea A un conjunto finito y no vacío. Dados m, n enteros positivos y $f : N_n \to A$ y $g : N_m \to A$ son biyecciones, entonces $m = n$.*

Demostración. La inversa de la función $g^{-1} : A \to N_m$ es biyectiva. Luego por la proposición 1.1.1 podemos afirmar que la composición $g^{-1} \circ f : N_n \to N_m$ es una biyección. Lo anterior contradice la proposición 1.1.2, a menos que $m = n$. □

Ahora vamos a enunciar el principio de biyección. Para tener una idea previa del significado del principio de biyección podemos ilustrarlo muy fácilmente colocando los dedos de las manos punta con punta y preguntándose el significado de dicho gesto, uno podría pensar en la respuesta trivial "tengo cinco dedos en cada mano", pero esto es incompleto, lo integro es pensar que nuestra mano izquierda y derecha tienen el mismo número de dedos.

Teorema 1.1.3 (Principio de biyección)**.** *Sean A y B dos conjuntos finitos, si existe $f : A \to B$ tal que f es biyectiva, entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Basta usar la biyectividad de f y aplicar los teoremas 1.1.1 y 1.1.2. □

El principio de biyección nos indica que si encontramos una biyección entre dos conjuntos de los cuales queremos conocer su cardinalidad entonces ambos tendrán el mismo número de elementos. Debe quedar claro que, el principio de biyección cambia el problema de contar A en uno nuevo de contar B.

1.2. Pruebas combinatorias

Generalmete en combinatoria existen dos formas de resolver y probar resultados, la primera se conoce como *pruebas de doble conteo*, en las se cuales utilizan argumentos de conteo para demostrar que ambos lados de una identidad cuentan los mismos objetos, pero de diferentes maneras; la segunda forma es usar *pruebas biyectivas*, es estas se muestra que existe una biyección entre los conjuntos de objetos contados.

A continuación vamos a exponer dos problemas típicos de conteo. Para solucionar el primero haremos uso directo del teorema 1.1.3 (una prueba biyectiva), mientras que, para dar solución al segundo usaremos un método mas intuitivo.

1.2.1. Cardinal del conjunto potencia

A continuación vamos a resolver el problema que consta de determinar el cardinal del conjunto potencia de un conjunto S (denotado por $\mathbb{P}(S)$). Para resolver dicho problema vamos a establecer una biyección entre el conjunto potencia y el conjunto de cadenas binarias de longitud n.

Definición 1.2.1 (Conjunto potencia). *El conjunto potencia S, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de S. Es decir $\mathbb{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$.*

Definición 1.2.2 (Cadena binaria). *Una cadena binaria es una secuencia de $0's$ y $1's$, la cual puede ser vacía. Denotamos por $B(n)$ al conjunto de cadenas binarias de longitud n.*

Teorema 1.2.1. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|B(n)| = 2^n$*

Demostración. Procediendo por inducción sobre n. Sea $P(n) := |B(n)| = 2^n$.

Si $n = 0$, entonces $P(0) = 2^0 = 1$, lo cual es cierto, ya que la única cadena binaria de longitud 0 es la cadena vacía. Nuestra hipótesis de inducción será afirmar que $P(n)$ se cumple para $n \in \mathbb{N}$ fija. Queda probar que $P(n)$ implica $P(n+1)$.

Vamos a dividir en dos conjuntos las cadenas de longitud $n+1$, las que su último dígito es 1 y las que cuyo último dígito es 0. Observe que las cadenas de longitud $n+1$ cuyo último dígito es 1, consiste en una cadena binaria arbitraria de longitud n con sufijo 1, por tanto, la hipótesis de inducción indica que hay $|B(n)| = 2^n$ de ellas. Análogamente, las cadenas de longitud $n+1$ cuyo último dígito es 0, consiste en una cadena binaria arbitraria de longitud n con sufijo 0, por tanto, la hipótesis de inducción nos indica que hay $|B(n)| = 2^n$ de ellas, así que hay exactamente $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ cadenas binarias de longitud $n+1$. Hemos probado que $|B(n+1)| = 2^{n+1}$, por lo que $P(n)$ se cumple para toda n en los naturales. $\square$

Teorema 1.2.2. *El cardinal del conjunto potencia es* 2^n.

Demostración. Sea S un conjunto con cardinal n, $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, y definimos

$$B(n) = \{b_1 b_2 ... b_n \mid b_i \in \{0, 1\}\}$$

como el conjunto de cadenas binarias de longitud n.

Consideremos la función $f : \mathbb{P}(S) \to B(n)$, definida por $f(X) = b_1 b_2 ... b_n$, donde:

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{si } s_i \in X \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observe que cada elemento de $\mathbb{P}(S)$ está relacionado a un solo elemento del conjunto $B(n)$, es decir, a cada subconjunto de S se le asocia una única cadena binaria de longitud n.

Note que $s_i \in X_1 \Leftrightarrow b_i = 1 \Leftrightarrow s_i \in X_2$. Es decir, cada elemento de X_1 está en X_2 y viceversa. Así que para toda $X_1, X_2 \in \mathbb{P}(S)$ si $f(X_1) = f(X_2) = b_1 b_2 ... b_n$, entonces $X_1 = X_2$, por lo que f es inyectiva.

Para ver que f es sobreyectiva debemos probar que para todo $b_1 b_2 ... b_n \in B(n)$, existe al menos un $X \in \mathbb{P}(S)$ tal que $f(X) = b_1 b_2 ... b_n$. Para esto consideremos $X = \{s_i \mid b_i = 1, 1 \leq i \leq n\}$. Luego $f(X) = b_1 b_2 ... b_n$ como se pretendía.

Ya que f es biyectiva, por el teorema 1.1.3 concluimos que $|\mathbb{P}(S)| = |B(n)| = 2^n$. $\square$

1.2.2. Introducción a los números de Catalán

En la literatura matemática moderna nos encontramos muchas clases de números, sin duda unos de los más famosos son los llamados "Números de Catalán" [16], nombrados así en honor al matemático belga Eugene Charles Catalán. Estos forman una secuencia de números naturales que vienen definidos por la siguiente recurrencia

$$c_0 = 1,\ c_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} c_{n-1}.$$

El estudio de los Números de Catalán en combinatoria es muy amplio, al punto de que en OEIS [14] (The On-Line Encyclopedia Of Integers Sequences) la entrada más larga y con mas información es la vinculada a estos [14, A000108]. En capítulos posteriores se discutirán más apariciones de estos números en el área de la combinatoria enumerativa. Por el momento vamos a mostrar un problema clásico a modo de presentar al lector una introducción al estudio de estos números.

Considere una cuadrícula $m \times n$ y suponga que sólo puede avanzar por los lados de cada casilla limitando sus movimientos para arriba y a la derecha, la pregunta es ¿cuántas maneras posibles hay de llegar del extremo inferior izquierdo al extremo superior derecho?

Tome como referencia la figura 1.1, la cual muestra un posible camino.

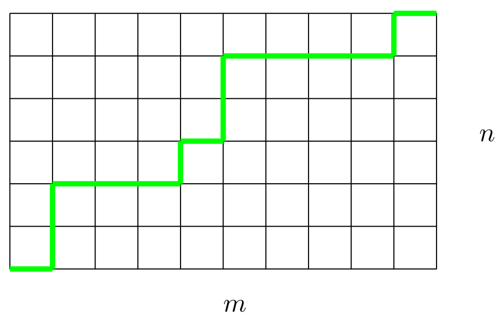


Figura 1.1: Un camino posible en una cuadricula com $m = 10$ y $n = 6$.

Denotemos por A un movimiento hacia arriba y por D uno hacia la derecha. Así pues, el camino mostrado en la figura 1.1 lo podemos escribir como

$$DAADDDADAADDDDAD$$

Note que cada camino se puede escribir como una secuencia de $m - D's$ y $n - A's$, y viceversa, por lo tanto al colocar las $D's$ vamos a poder notar donde faltan las n $A's$ restantes y podremos colocarlas en los espacios restantes. Así que basta encontrar cuantas formas hay de colocar m $D's$ en $m+n$ espacios. Esto se refiere al número en las que se pueden escoger m espacios de $m+n$, es decir, la solución viene dada por la permutación

$$\binom{m+n}{m}.$$

Ahora vamos a considerar una cuadrícula de $n \times n$ y dibujaremos su diagonal principal. Nuestra nueva pregunta es ¿cuántas maneras posibles hay de llegar del extremo inferior izquierdo al extremo superior derecho sin pasar por la diagonal principal?

A los caminos que sobrepasan la diagonal principal los llamaremos caminos no satisfactorios. Considere el cuadro azul de $(n-1) \times (n-1)$ como se muestra en la figura 1.2. Observe que todo camino no satisfactorio debe cortar la diagonal principal del cuadro azul.

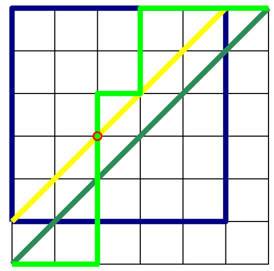


Figura 1.2: Camino no satisfactorio (verde fosforescente).

Ahora vamos a reflejar la parte del camino no satisfactorio como se observa en la figura 1.3 (camino color violeta) a partir de su punto de intersección (punto rojo).

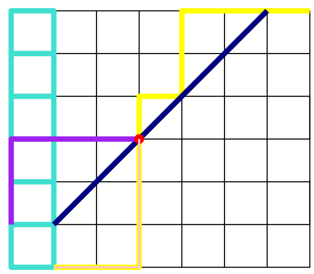


Figura 1.3: La columna azul se agregó ya que la reflexión sale de la cuadrícula original.

En la figura 1.3 se puede observar que la transformación siempre se encuentra en una cuadrícula $(n+1)\times(n-1)$. Además, esta cuadrícula no tiene ninguna restricción. Por lo tanto hemos encontrado una biyección con el ejercicio anterior para el caso de una cuadricula $(n+1)\times(n-1)$. Concluimos que el número de caminos no satisfactorios es:

$$\binom{(n+1)+(n-1)}{n+1} = \binom{2n}{n+1}.$$

Los caminos posibles que se pueden elaborar en una cuadrícula de $n \times n$ son:

$$\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Finalmente para obtener el número solicitado basta tomar los caminos posibles y restar los caminos no satisfactorios:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}. \tag{1.1}$$

En $n-$ésimo numero de Catalán viene dado directamente en términos de la expresión 1.1.

2 Estructuras combinatorias

La humanidad está acostumbrada a buscar e identificar patrones, a esto se le conoce como "apofenia". Como consecuencia abstraemos características de un conjunto de cosas y buscamos formar conceptos que las comprenda a todas, este proceso lleva el nombre de "generalizar", y en matemáticas es de vital importancia lograrlo (siempre que sea posible). Como ejemplos tenemos a los algebristas y las estructuras algebraicas (grupos, anillos, campos, etc.), los estadísticos y sus distribuciones, y un concepto moderno llamado Categorías. La Combinatoria no es la excepción y se trabaja con las llamadas estructuras combinatorias. A continuación, daremos una breve descripción acerca de estas estructuras sin meternos en un desarrollo plenamente axiomático.

Definición 2.0.1 (Estructura combinatoria)**.** *Una estructura combinatoria*[1] *es un conjunto $\mathcal{A}$ de objetos (la palabra "objeto" hace referencia al término de objeto combinatorio*[2]*), equipado de una función de tamaño $|\cdot|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$. La estructura $\mathcal{A}$ se define como $\mathcal{A}_n := \{\alpha \in \mathcal{A} \, : \, |\alpha|_{\mathcal{A}} = n\}$ y cumple la condición de finitud $|\mathcal{A}_n| < \infty$.*

Es decir, una clase combinatoria es un conjunto $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ...\}$, en el que cada $\mathcal{A}_i$ viven los objetos de tamaño i; y además, cada uno es finito. En otras palabras, una clase combinatoria es un conjunto que tiene una cantidad finita de elementos de tamaño 0, de tamaño 1, tamaño 2, etc.

Un ejemplo de un conjunto que no es una estructura combinatoria es el siguiente: consideremos $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, definamos el tamaño de $n \in \mathcal{A}$ como el número de factores primos distintos de n, así el tamaño de $2, 3$ y 5 será 1, el tamaño de 6 será 2 y el tamaño de 1 es 0. Es fácil ver que $\mathcal{A}$ no es una clase combinatoria, pues $\mathcal{A}_0 = \{1\}$ es finito, ya que 1 es el único entero positivo con 0 factores primos, pero observe que $\mathcal{A}_1$ no cumple con la condición de finitud debido a la infinitud de los números primos.

[1] A lo largo del texto se considera indistinto usar el término *estructura combinatoria*, *clase combinatoria* o *clase de estructuras*.

[2] concepto estructurado compuesto de componentes; suelen dividirse en objetos etiquetados y no etiquetados.

2.1. Estructuras triviales

El término de "estructura trivial" hace referencia a que la estructura misma "tiene poco contenido". En esta categoría tenemos dos clases de estructuras, la atómica y la neutral.

Definición 2.1.1 (Estructura atómica). *La estructura atómica $\mathcal{Z}$ es aquella que contiene un único objeto, y este es de tamaño de tamaño* 1.

Definición 2.1.2 (Estructura neutral). *La clase neutral $\mathcal{E}$ es aquella que contiene un único objeto, y este es de tamaño* 0.

Ante estas definiciones, diremos que un *átomo* es un objeto de tamaño 1 y un *objeto neutral (o neutro)* es un objeto de tamaño 0. Como veremos, los objetos atómicos y los objetos neutros serán la base del método simbólico, esto debido a que, en el marco de esta tesis, las estructuras combinatorias se construyen directamente en términos de clases mas simples.

Se debe recalcar que, podemos distinguir muchos tipos de objetos neutros, por ejemplo, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ etc.; así mismo, podemos identificar muchos tipos de objetos atómicos.

Un átomo puede usarse para describir un nodo genérico de un árbol o de una gráfica, es por eso que a los átomos se les suele denotar por $\{\bullet\}$. A continuación estudiaremos dos clases de estructuras combinatorias, las etiquetadas y las no etiquetadas.

2.2. Estructuras combinatorias no etiquetadas

Definición 2.2.1 (Objeto no etiquetado). *Un objeto no etiquetado es una clase de objetos de isomorfismo. (Sus átomos son no etiquetados e indistinguibles entre sí).*

Para dejar claro el concepto de objeto no etiquetados daremos un ejemplo:

Consideremos dos gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$. Diremos que son isomorfas si existe una biyección φ de V_1 a V_2, tal que para cada $v, w \in V_1$

$$\{v, w\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2.$$

En este caso llamamos a φ un isomorfismo de G_1 a G_2. Esta acción se suele denotar como $\varphi : G_1 \to G_2$, y escribimos $G_1 \cong G_2$ para decir que "G_1 es isomorfa a G_2".

Note que los isomorfismos entre las estructuras son biyecciones que conservan las relaciones clave de las estructuras que estamos mapeando. Para las gráficas, nuestra relación clave es que los vértices son adyacentes entre sí. Si esto se conserva, la estructura representada es, para todos los efectos, la misma.

Veamos que la relación "es isomorfa a" es una relación de equivalencia:

- **Reflexiva:** Para toda gráfica G se cumple que $G \cong G$, ya que φ es una biyección.
- **Simétrica:** Para cualesquiera gráficas G_1 y G_2 se tiene que $G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow G_2 \cong G_1$. Ya que toda biyección tiene una función inversa la cual también es biyectiva, y como $\{v, w\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2$, esto va a ser equivalente a $\{\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w)\} \in E_1 \Leftrightarrow \{v, w\} \in E_2$.
- **Transitiva:** Se tiene que, para cualesquiera gráficas G_1, G_2 y G_3, con los isomorfismos $\varphi_1 : G_1 \to G_2$ y $\varphi_2 : G_2 \to G_3$, la composición $\varphi_2 \circ \varphi_1 : G_1 \to G_3$ es una biyección, y

$$\{v, w\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi_1(v), \varphi_1(w)\} \in E_2 \Leftrightarrow \{\varphi_2(\varphi_1(v)), \varphi_2(\varphi_1(w))\} \in E_3.$$

Entonces $G_1 \cong G_3$.

Cuando los elementos de un conjunto dado tienen una relación de equivalencia definida entre ellos entonces se puede realizar el cociente del conjunto en clases de equivalencia (en nuestro caso, clases de isomorfismo). De manera formal, dado un conjunto $\mathcal{G}$ y una relación de equivalencia $\cong$ en $\mathcal{G}$, la clase de equivalencia de un elemento $a \in \mathcal{G}$ es el conjunto

$$\{x \in \mathcal{G} \mid x \cong a\}.$$

de elementos que son equivalentes (isomorfos) a a.

El ejemplo más fácil de representar es el dado por el conjunto de gráficas de 3 vértices.

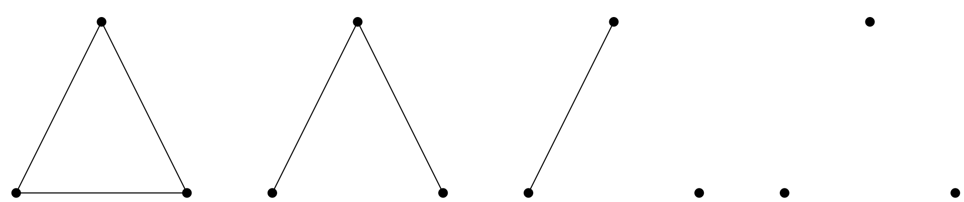


Figura 2.1: Existen 4 gráficas no etiquetadas de 3 vértices.

Cada gráfica sin etiquetar es una representación de una clase de isomorfismo diferente.

Definición 2.2.2 (Estructura combinatoria no etiquetada)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una estructura combinatoria, diremos que es no etiquetada si está formada por objetos no etiquetados.*

Generalmente, contar objetos no etiquetados resulta difícil, en el caso de las gráficas es un problema abierto, los avances más recientes se remontan al 2015, con un algoritmo propuesto por Lászlo Babai, el cual es un algoritmo de tiempo cuasipolinomial, dicho algoritmo tiene un tiempo de ejecución de $2^{O(\log n)^c}$ para algunas constantes c. Tiempo después, Harald Helfgott encontró un error en el desarrollo del algoritmo de Babai. Gracias a la observación de Helfgott en 2017, Babai hizo la corrección correspondiente. A su vez, Helfgott afirmó que se puede tomar $c = 3$, así el tiempo de ejecución es $2^{O(\log n)^3}$, y este es el mejor tiempo de ejecución conocido a día de hoy.

2.2.1. Propiedades de las estructuras no etiquetadas

A continuación vamos a enunciar algunas "operaciones" admisibles entre clases de estructuras no etiquetadas. Nuestro enfoque se basa en construir una nueva clase a partir de clases ya existentes y, al mismo tiempo, traducir la información. Primero veamos cuando dos clases son equivalentes.

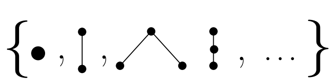
Definición 2.2.3 (Equivalencia de clases no etiquetadas). *Dos clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no etiquetadas son numéricamente equivalentes si $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$. La equivalencia entre dos clases la denotaremos por $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.*

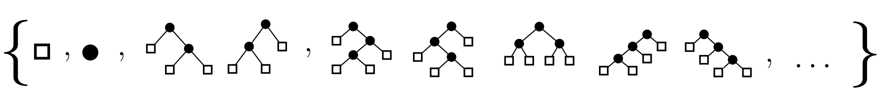
Ahora que es claro cuando dos clases son equivalentes, podemos comenzar a definir las operaciones clásicas entre clases no etiquetadas.

Definición 2.2.4 (Unión disjunta). *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos estructuras combinatorias no etiquetadas y disjuntas. Escribimos $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ si la estructura $\mathcal{C}$ se define como $\mathcal{C} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{B}$. Es decir, la estructura $\mathcal{C}$ contiene todos los objetos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y estos mantienen su tamaño. Así, el tamaño de los objetos $\gamma \in \mathcal{C}$ viene dado por:*

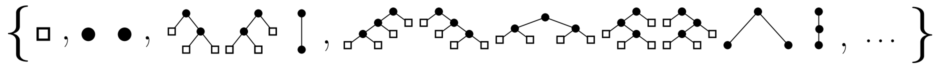
$$|\gamma|_{\mathcal{C}} = \begin{cases} |\gamma|_{\mathcal{A}}, & \text{si } \gamma \in \mathcal{A} \\ |\gamma|_{\mathcal{B}}, & \text{si } \gamma \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

El motivo principal para solicitar que las clases de estructuras sean disjuntas es, principalmente, que la función de tamaño sea consistente en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$; es decir, que dado un objeto que este en ambas clases de estructuras ($\alpha \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathcal{B}$) evitar que pase algo como $|\alpha|_{\mathcal{A}} \neq |\alpha|_{\mathcal{B}}$. Habrá casos particulares en los que a pesar de que la unión no sea disjunta, la función de tamaño mantendrá la consistencia; un ejemplo es el siguiente. Considere las siguientes clases de estructuras:

$\mathcal{M} =$ 

$\mathcal{T} =$ 

Donde $\mathcal{M}$ es la clase que correspondiente a los árboles de Motzquin (ver sección 5.1.2) y la clase $\mathcal{T}$ a los árboles planos con raíz y n nodos internos (ver sección 3.4). Ya que $\mathcal{M}$ no tiene elementos de tamaño 0, entonces, $|\bullet|_{\mathcal{M}} = |\bullet|_{\mathcal{T}} = 1$ (la función de tamaño es consistente), por lo que, en este caso es posible definir la clase de estructura $\mathcal{C} = \mathcal{M} + \mathcal{T}$ (donde $\mathcal{C}_n = \mathcal{M}_n + \mathcal{T}_n$) y obtenemos

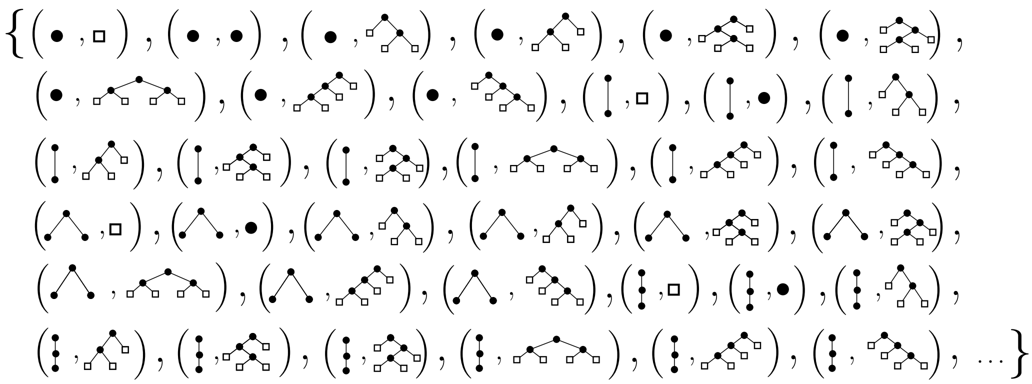
$\mathcal{C} = \mathcal{M} + \mathcal{T} =$ 

Definición 2.2.5 (Producto no etiquetado). *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos estructuras no etiquetadas, definimos el producto no etiquetado como*

$$\mathcal{C} \coloneqq \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}.$$

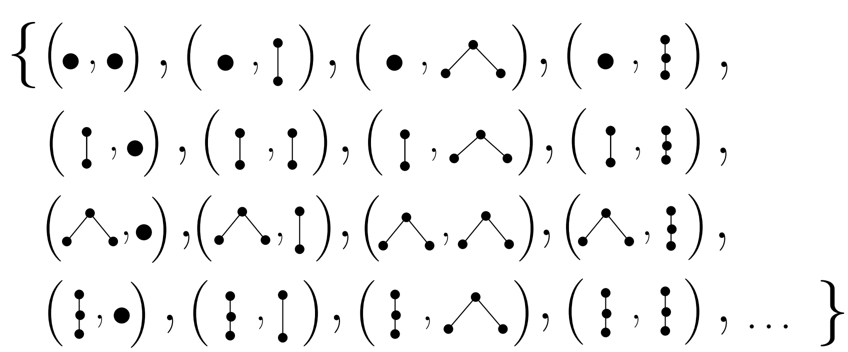
Además el tamaño del par $\gamma = (\alpha, \beta)$ esta definido por $|\gamma|_{\mathcal{C}} = |(\alpha, \beta)| = |\alpha|_{\mathcal{A}} + |\beta|_{\mathcal{B}}$.

Por ejemplo, retomando las clases de estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{T}$, el producto $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$ parcialmente se puede ver de la siguiente manera:

$\mathcal{M} \times \mathcal{T} =$ 

Definición 2.2.6 (Potencias de Clases). *Sea $\mathcal{A}$ una clase de estructuras no etiquetada. Para definir las potencias de $\mathcal{A}$ vamos a iterar la cosntrucción de su producto. Es decir, $\mathcal{A}^1 \coloneqq \mathcal{A}$. Para toda $k \geq 1$ se tiene $\mathcal{A}^{k+1} \coloneqq \mathcal{A} \times \mathcal{A}^k$. Para cada $j, k \in \mathbb{N}$ la equivalencia $\mathcal{A}^j \times \mathcal{A}^k \equiv \mathcal{A}^{j+k}$ se mantiene.*

Por ejemplo, la clase $\mathcal{M}^2$ se puede ver parcialmente así

$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M} \times \mathcal{M} =$ 

Definición 2.2.7 (Marcar). *Sea $\mathcal{A}$ una clase no etiquetada, definimos la clase $\mathcal{C} = \Theta\mathcal{A}$ como la clase que se obtiene marcando un átomo en cada objeto de todas las formas posibles.*

Un ejemplo de la acción marcar es:

$$\mathcal{A} = \{01, 10, 11, 010, 011, 101, ...\}$$
$$\Theta\mathcal{A} = \{\underline{0}1, 0\underline{1}, \underline{1}0, 1\underline{0}, \underline{1}1, 1\underline{1}, \underline{0}10, 0\underline{1}0, 01\underline{0}, ...\}.$$

Definición 2.2.8 (Sucesión). *Una $k-$sucesión de objetos de una estructura combinatoria $\mathcal{A}$, no etiquetada es un elemento de $\mathcal{A}^k$. En particular, la $0-$secuencia contiene solo un objeto neutral (de tamaño 0). Una secuencia de objetos es, entonces, la unión disjunta de $k-$secuencias*

$$\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) := \biguplus_{k\geq 0} \mathcal{A}^k.$$

O bien, $\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) = \{\varepsilon\} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}) + ...$

Vale la pena especificar que al definir $\mathcal{B} = \mathrm{Seq}(\mathcal{A})$ la estructura $\mathcal{A}$ no debe contener objetos de tamaño 0, pues de ser así habrá casos en los que $|\mathcal{A}_0| = \infty$ (basta ver el caso $\mathrm{Seq}(\mathcal{E})$), contradiciendo la definición de estructura combinatoria. Sin embargo $\mathcal{B}$ tendrá un objeto de tamaño 0.

Como ejemplo, consideremos la estructura atómica $\mathcal{Z} := \{\bullet\}$ (ver la definición :2.1.1), y definamos la estructura $\mathcal{I} = \mathrm{Seq}(\mathcal{Z})$; entonces la estructura $\mathcal{I}$ se puede ver como

$$\mathcal{I} = \{\varepsilon,\ \bullet,\ \bullet\bullet,\ \bullet\bullet\bullet,\ \bullet\bullet\bullet\bullet, ...\}.$$

A menudo buscamos restringir a ciertas longitudes la construcción $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$, para esto, existe una serie de modificaciones de dicha construcción

$$\mathrm{Seq}_{=k}(\mathcal{A}) : \text{Sucesiones de longitud exactamente igual a } k.$$

$$\mathrm{Seq}_{\leq k}(\mathcal{A}) : \text{Sucesiones de longitud como máximo igual a } k.$$

$$\mathrm{Seq}_{\geq k}(\mathcal{A}) : \text{Sucesiones de longitud al menos igual a } k.$$

2.3. Estructuras combinatorias etiquetadas

Ya hemos definido estructuras para objetos no etiquetados, ahora es el turno de los objetos etiquetados.

Definición 2.3.1 (Objeto etiquetado). *Un objeto etiquetado es aquel que tiene cada uno de sus átomos etiquetado por un número entero distinto. Si existe una biyección entre los átomos del objeto y el conjunto N_n se dice que el objeto está bien etiquetado; en caso contrario, si las etiquetas de los átomos son un subconjunto (distinto de N_n) de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces diremos que el objeto está débilmente etiquetado.*

En la figura 2.1 ilustramos que existen 4 gráficas no etiquetadas de 3 vértices; ahora para aclarar la diferencia entre objetos etiquetados y no etiquetados la figura 2.2 muestra las cantidad de gráficas etiquetadas que hay de 3 vértices:

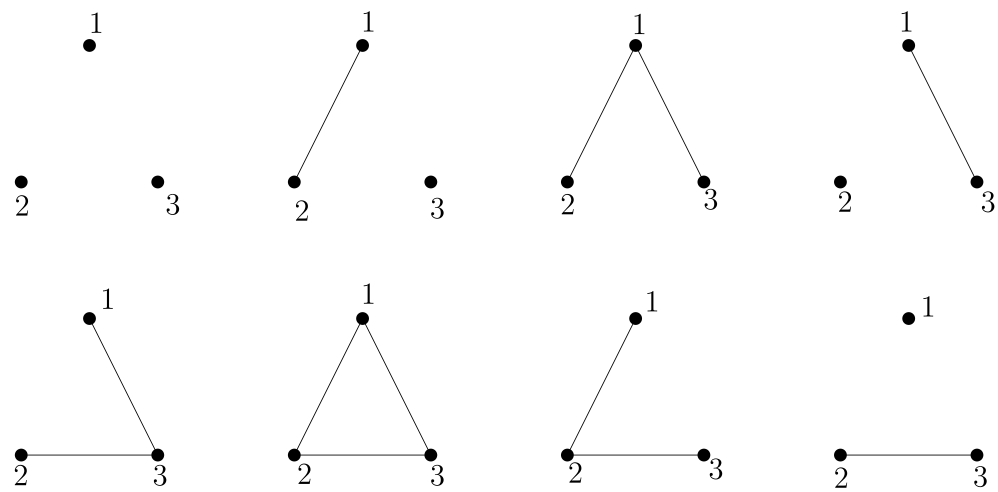


Figura 2.2: Existen 8 gráficas etiquetadas de 3 vértices.

Generalmente, hay más objetos etiquetados que no etiquetados.

Definición 2.3.2 (Estructuras combinatorias etiquetadas)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una estructura combinatoria, diremos que es etiquetada si está asociada a un conjunto finito X denotado, por $\mathcal{A}_X$ (también finito), tal que cumple con las siguientes condiciones (considere a los conjuntos X e Y conjuntos finitos):*

- *Si $X \neq Y$, entonces $\mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}_Y = \emptyset$.*
- *Si X e Y son conjuntos tales que $|X| = |Y|$, entonces $|\mathcal{A}_X| = |\mathcal{A}_Y|$.*

Esta definición, generalmente, suele no ser clara en la primer lectura, veamos un ejemplo de forma analítica: la clase $\mathcal{P}$ de permutaciones, consideramos el conjunto de todas las permutaciones de X como $\mathcal{P}_X$. La primera condición de la definición 2.3.2 es casi inmediata, pues al tomar los conjuntos X e Y, tales que $X \neq Y$, entonces estos van a diferir en al menos un elemento, y será por ese elemento que $\mathcal{P}_X \cap \mathcal{P}_Y = \emptyset$; para la segunda condición veamos que una permutación de X es una biyección definida por $\sigma : X \to X$. Si $|X| = n$ entonces $f : X \to N_n$ es una biyección (por el principio de biyección visto en el capítulo 1). Definamos la función $\alpha : \mathcal{P}_{N_n} \to \mathcal{P}_X$ por $\alpha(\sigma) := f \circ \sigma \circ f^{-1}$. Tenemos que la función $\alpha(\sigma)$ es una biyección de N_n a N_n. La función inversa $\beta : \mathcal{P}_X \to \mathcal{P}_{N_n}$ esta definida por $\beta(\tau) := f^{-1} \circ \tau \circ f$ para toda $\tau \in \mathcal{P}_n$. Como α y β son biyecciones mutuamente inversas entre $\mathcal{P}_X$ y $\mathcal{P}_{N_n}$. Por lo tanto, $|\mathcal{P}_X| = |\mathcal{P}_{N_n}|$.

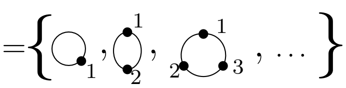
Darse cuenta que una estructura es etiquetada es más fácil de forma visual, es por eso que en adelante trabajaremos de esta forma (con gráficas y objetos visuales).

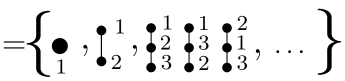
2.3.1. Propiedades de las estructuras etiquetadas

Por comodidad de notación omitiremos escribir "$\mathcal{A}_X$" para referirnos a una estructura etiquetada y simplemente lo haremos con palabras ($\mathcal{A}$ es una estructura etiquetada).

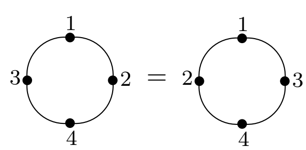
Ahora, enunciaremos las propiedades más importantes relacionadas con estructuras combinatorias etiquetadas.

Esta vez, para construir nuestros ejemplos vamos a considerar las dos siguientes clases de estructuras etiquetadas

$\mathcal{C} =$ 

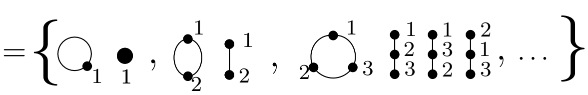
$\mathcal{A} =$ 

donde la clase de estructuras $\mathcal{C}$ pertenece a la clase de las permutaciones cíclicas donde no importa el sentido horario; hacemos esta restricción para simplificar la estructura, pues en este caso,



esto reduce la cantidad de elementos en nuestra clase $\mathcal{C}$; y la clase de estructuras $\mathcal{A}$ corresponde a la clase de árboles etiquetados.

Primero, tratemos el caso de la unión disjunta, la cual se comporta del mismo modo que el caso no etiquetado (ver definición 2.2.4). Nuestro ejemplo quedaría

$\mathcal{C} + \mathcal{A} =$ 

Donde debemos tener más cuidado es en la definición del producto no etiquetado. Recordemos que el elemento $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ debe tener tamaño $|\alpha| + |\beta|$, es decir, el producto debe etiquetarse con los números $\{1, 2, ..., |\alpha| + |\beta|\}$. Para lograrlo, debemos modificar las etiquetas, si no hacemos esto las etiquetas se van a repetir y "correrán" únicamente hasta $\text{máx}\{|\alpha|, |\beta|\}$. Para solucionar este problema vamos a introducir el termino "*reetiquetado*". Dado un objeto combinatorio α, denotaremos su reetiquetado por α' y este se obtiene aplicando a sus etiquetas una función creciente de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ a $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Podemos hacer esto formalmente usando las siguientes dos operaciones:

1. **Reducción:** Para una estructura débilmente etiquetada de tamaño n, esta operación reduce sus etiquetas al intervalo estándar $\{1, 2, ..., n\}$ manteniendo fijo el orden relativo. Por ejemplo, $\{4, 6, 1, 9\}$ pasa a ser $\{2, 3, 1, 4\}$. Esta operación se denota por $\rho(\alpha)$.

2. **Expansión:** Sea $e : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ cualquier función estrictamente creciente. Entonces, la expansión de un objeto α (el objeto debe estar bien etiquetado) por e se denota por $e(\alpha)$ y da como resultado un objeto débilmente etiquetado en el que la etiqueta j se reemplaza por $e(j)$. Por ejemplo, $\{2, 3, 1, 4\}$ se puede expandir a $\{7, 10, 2, 88\}$ ó $\{3, 9, 1, 20\}$, etc.

Ahora, dados dos objetos $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{B}$, su producto etiquetado se denota por $\alpha \star \beta$. Y este será un conjunto de pares bien etiquetados (α', β').

A modo de ejemplo consideremos los dos gráficos conectados α y β, los cuales se pueden reetiquetar en muchas formas diferentes. En nuestro ejemplo hemos elegido las etiquetas $\{2, 4, 5\}$ para reetiquetar nuestro primer objeto α. Ya decididas las etiquetas para α en $\gamma = (\alpha, \beta)$, las etiquetas originales de α y β determinan el resto

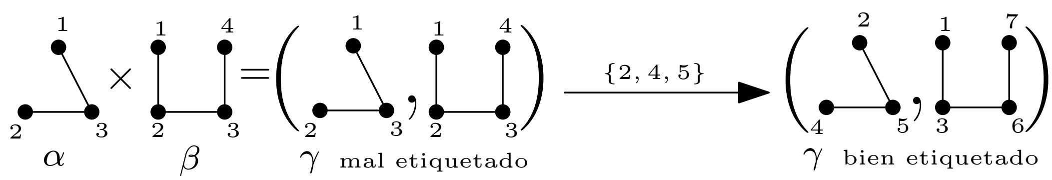


Figura 2.3: Ejemplo de un reetiquetado.

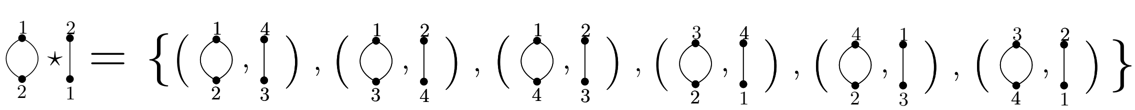
Por lo tanto, definimos el producto etiquetado de dos objetos como:

$$\alpha \star \beta := \{(\alpha', \beta'), \rho(\alpha') = \alpha, \rho(\beta') = \beta\},$$

El producto etiquetado $\alpha \star \beta$ de dos elementos α, β de tamaño n_1, n_2 respectivamente es un conjunto cuya cardinalidad se expresa con $n = n_1 + n_2$, como:

$$\binom{n_1 + n_2}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1}.$$

Un ejemplo específico de lo anterior es el siguiente:



Note que cada par ordenado del producto esta bien etiquetado.

Definición 2.3.3 (Producto etiquetado)**.** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos estructuras combinatorias etiquetadas. El producto etiquetado $\mathcal{A} \star \mathcal{B}$ se obtiene formando todos los pares ordenados a partir de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ y calculando todos los posibles reetiquetados. Es decir:*

$$\mathcal{A} \star \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}} (\alpha \star \beta).$$

Además, cuando $\mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B}$ las secuencias de conteo satisfacen la siguiente relación

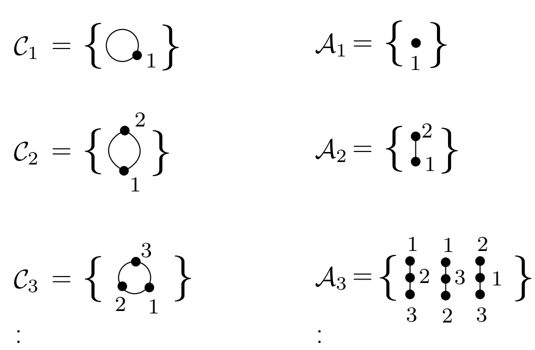
$$|\mathcal{C}_n| = \sum_{|\alpha|+|\beta|=n} \binom{|\alpha|+|\beta|}{|\alpha|, |\beta|} |\mathcal{A}_\alpha||\mathcal{B}_\beta| = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1} |\mathcal{A}_{n_1}||\mathcal{B}_{n_2}|. \tag{2.1}$$

Note que el producto $|\mathcal{A}_{n_1}||\mathcal{B}_{n_2}|$ nos da un seguimiento de todas las posibilidades de los elementos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$; el coeficiente binomial nos ayuda a contar el número de los posibles reetiquetados.

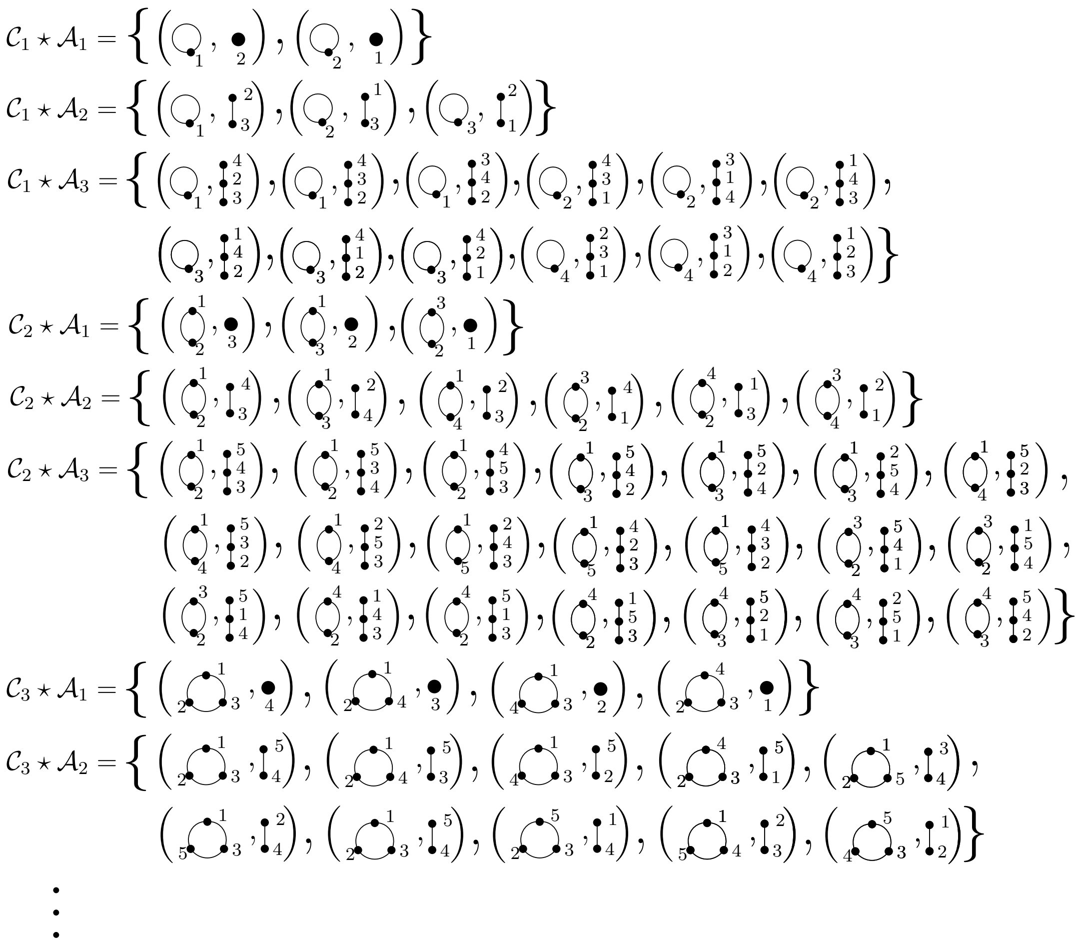
Lo anterior nos dice que, dadas las clases de estructuras $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, entonces las clases $(\mathcal{A} \star \mathcal{B}) \star \mathcal{C}$ y $\mathcal{A} \star (\mathcal{B} \star \mathcal{C})$ no son iguales, pero sí equivalentes debido a la siguiente biyección:

$$\begin{aligned} f : ((\mathcal{A} \star \mathcal{B}) \star \mathcal{C}) &\to (\mathcal{A} \star (\mathcal{B} \star \mathcal{C})) \\ ((\alpha, \beta), \gamma) &\mapsto (\alpha, (\beta, \gamma)). \end{aligned}$$

Para dar un buen ejemplo del producto etiquetado de clases de estructuras, primero retomemos las clases etiquetadas $\mathcal{C}$ de ciclos y $\mathcal{A}$ de árboles etiquetados (ya mencionadas al inicio de este capítulo), y note que



Por lo que



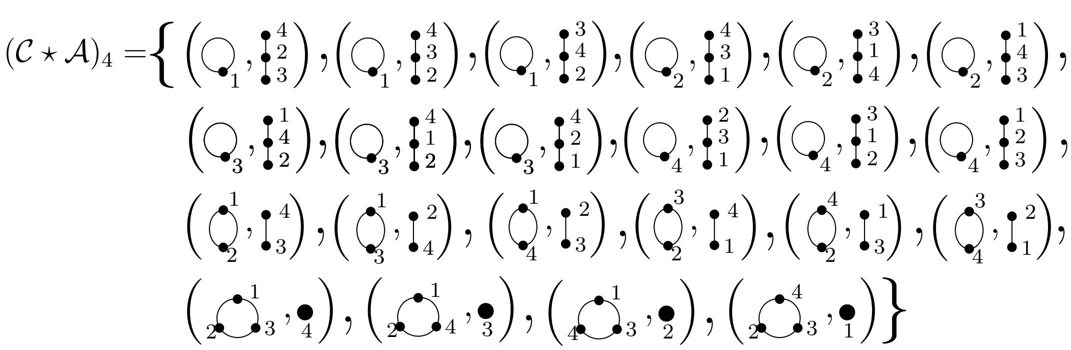
Finalmente,

$$\mathcal{C}\star\mathcal{A} = \mathcal{C}_1\star\mathcal{A}_1\cup\mathcal{C}_1\star\mathcal{A}_2\cup\mathcal{C}_1\star\mathcal{A}_3\cup\ldots\cup\mathcal{C}_2\star\mathcal{A}_1\cup\mathcal{C}_2\star\mathcal{A}_2\cup\mathcal{C}_2\star\mathcal{A}_3\cup\ldots\cup\mathcal{C}_3\star\mathcal{A}_1\cup\mathcal{C}_3\star\mathcal{A}_2\cup\ldots$$

Para finalizar el tema del producto etiquetado usemos la fórmula 2.1 para calcular el número de elementos de tamaño 4 en la clase $\mathcal{C}\star\mathcal{A}$. Así

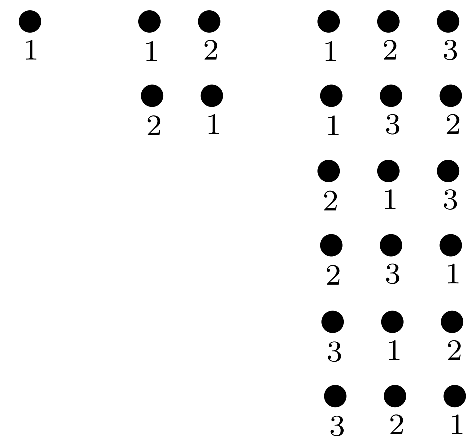
$$\binom{0+4}{0}a_0\cdot b_4+\binom{1+3}{1}a_1\cdot b_3+\binom{2+2}{2}a_2\cdot b_2+\binom{4+0}{0}a_4\cdot b_0+\binom{3+1}{1}a_3\cdot b_1=$$

$$=4\cdot a_1\cdot b_3+6\cdot a_2\cdot b_2+4\cdot a_3\cdot b_1=12+6+4=22=|(\mathcal{C}\star\mathcal{A})_4|.$$



Otra construcción que se comporta igual entre objetos etiquetados y objetos no etiquetados es la sucesión (definición 2.2.8); por ejemplo, la estructura etiquetada $\mathrm{Seq}_{\leq 3}(\mathcal{Z})$ se forma al igual que el caso no etiquetado pero considerando sus posibles reetiquetas:

$$\mathrm{Seq}_{\leq 3}(\mathcal{Z}) = \quad \mathcal{E}$$



Así, para una estructura etiquetada $\mathcal{C}$ definimos la clase combinatoria etiquetada de sucesiones de longitud k como

$$\mathrm{Seq}_k(\mathcal{C}) = \underbrace{\mathcal{C} \star \mathcal{C} ... \star \mathcal{C}}_{k \text{ veces}},$$

con $k \geq 1$ y $\mathrm{Seq}_0(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Además, si $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ entonces la clase combinatoria de sucesiones de cualquier longitud de elementos de la clase etiquetada $\mathcal{C}$ se define de manera análoga a la definición 2.2.8. ($\mathrm{Seq}(\mathcal{C}) = \varepsilon + \mathcal{C} + (\mathcal{C} \star \mathcal{C}) + (\mathcal{C} \star \mathcal{C} \star \mathcal{C}) + ...$). Algunas construcciones que funcionan específicamente con objetos etiquetados son la nombradas "conjunto" y "ciclo".

Definición 2.3.4 (Conjunto)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una estructura etiquetada sin objeto neutral. Definimos la estructura $\mathcal{C} = \mathrm{Set}(\mathcal{A})$ como la estructura formada por todos los subconjuntos finitos cuyos elementos son objetos de $\mathcal{A}$,*

$$\mathcal{C} \coloneqq \{\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \mid k \geq 0,\ \alpha_i \in \mathcal{A}\}.$$

La definición 2.3.4 nos invita a introducir el concepto de "conjunto de k componentes":

$$\mathrm{Set}_k(\mathcal{B}) \coloneqq \{\text{Conjuntos con } k \text{ elementos de } \mathcal{B}\}.$$

La clase $\mathrm{Set}_k(\mathcal{B})$ se define formalmente como:

$$\mathrm{Set}_k(\mathcal{B}) = \mathrm{Seq}_k(\mathcal{B}) / \simeq_S.$$

Aquí $\simeq_S$ es la relación de equivalencia, donde $(\beta_1, ..., \beta_k) \simeq_S (\beta'_1, ..., \beta'_k)$ si y solo si existe una permutación σ tal que $\beta_{\sigma(i)} = \beta'_i$.

Note que la razón de cardinalidad es:

$$\frac{|\mathrm{Set}_k(\mathcal{B})|}{|\mathrm{Seq}_k(\mathcal{B})|} = \frac{1}{k!}.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Set}(\mathcal{B}) := \bigcup_{k\geq 0} \mathrm{Set}_k(\mathcal{B}).$$

De manera explícita, consideremos los siguientes dos objetos

$$L = 1, 2, 3 \qquad R = 2, 3, 1.$$

Si a los objetos L y R los consideramos como dos sucesiones de números enteros entonces $\{L_n\} \neq \{R_n\}$, ahora bien, si los objetos L y R son considerados conjuntos entonces $L = R$. Justamente lo que hace la relación de equivalencia $\simeq_S$ es tomar elementos de Seq y tratarlos como conjuntos, es decir, dadas dos sucesiones tales que una es una permutación de otra, entonces considerarlas como iguales; así, si tomamos la construcción etiquetada

$$\mathrm{Seq}_3(\mathcal{Z}) = (\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 2, 1\}, \{3, 1, 2\}),$$

ya que cada uno de estas 6 sucesiones es permutación de otra, entonces $\simeq_S$ va a tomar a una como representante de todas, por lo que $\mathrm{Set}_3(\mathcal{Z}) = \{1, 2, 3\}$

Definición 2.3.5 (Ciclo)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una estructura etiquetada sin objeto neutral. Definimos la estructura $\mathcal{C} = \mathrm{Cyc}(\mathcal{A})$ como la clase de todos los ciclos no vacíos cuyos elementos son objetos de $\mathcal{A}$,*

$$\mathcal{C} := \{\langle \alpha_1, ..., \alpha_k \rangle \mid k > 0,\ \alpha_i \in \mathcal{A}\}.$$

Donde $\langle \alpha_1, ..., \alpha_k \rangle$ denota un ciclo de longitud k y tamaño $|\alpha_1| + ... + |\alpha_k|$.

Una vez más, al igual que con la operación Set podemos definir el siguiente conjunto:

$$\mathrm{Cyc}_k(\mathcal{B}) := \{\text{Ciclos con } k \text{ elementos de } \mathcal{B}\}$$

La clase $\mathrm{Cyc}_k(\mathcal{B})$ se define formalmente como:

$$\mathrm{Cyc}_k(\mathcal{B}) = \mathrm{Seq}_k(\mathcal{B}) / \simeq_C.$$

Aquí $\simeq_C$ denota la relación de equivalencia donde $(\beta_1, ..., \beta_k) \simeq_C (\beta'_1, ..., \beta'_k)$ si y solo si existe una permutación cíclica τ tal que $\beta_{\tau(i)} = \beta'_i$.

Note que la razón de cardinalidad es:

$$\frac{|\mathrm{Cyc}_k(\mathcal{B})|}{|\mathrm{Seq}_k(\mathcal{B})|} = \frac{1}{k}.$$

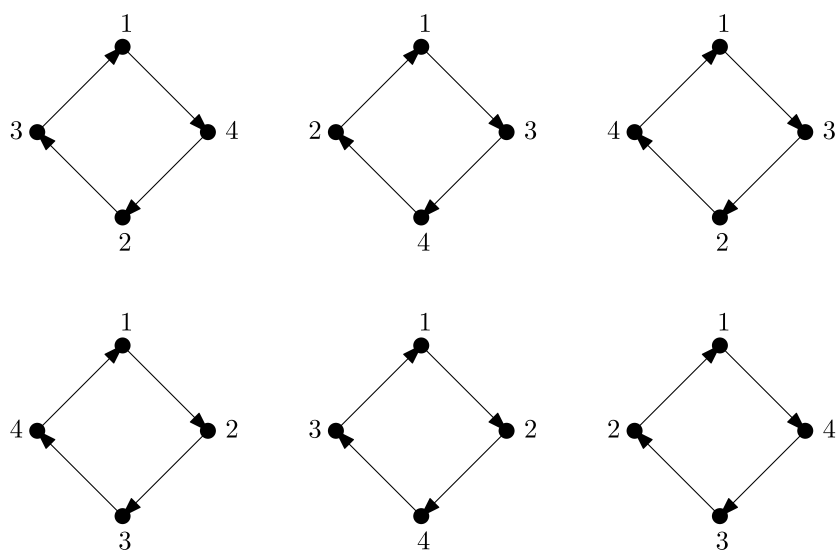
Por lo tanto

$$\mathrm{Cyc}(\mathcal{B}) \coloneqq \bigcup_{k\geq 0} \mathrm{Cyc}_k(\mathcal{B}).$$

Podemos pensar a los objetos de Cyc como círculos a los cuales se les da una orientación[3]. Consideremos la construcción etiquetada $\mathrm{Seq}_4(\mathcal{Z})$, la cual se conforma de los siguientes 16 elementos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Seq}_4(\mathcal{Z}) = (&\{1,2,4,3\},\{1,2,3,4\},\{1,3,2,4\},\{1,3,4,2\},\{1,4,2,3\},\{1,4,3,2\},\\ &\{2,1,3,4\},\{2,1,4,3\},\{2,3,1,4\},\{2,3,4,1\},\{2,4,1,3\},\{2,4,3,1\}\\ &\{3,1,2,4\},\{3,1,4,2\},\{3,2,1,4\},\{3,2,4,1\},\{3,4,1,2\},\{3,4,2,1\},\\ &\{4,2,3,1\},\{4,2,1,3\},\{4,3,1,2\},\{4,3,2,1\},\{4,1,2,3\},\{4,1,3,2\}).\end{aligned}$$

Ya que la relación de equivalencia $\simeq_C$ considera dos elementos como iguales si una es una permutación cíclica de la otra (por ejemplo $\{2,1,3,4\} \simeq_C \{1,3,4,2\}$) y toma una como representante de la clase; entonces, $\mathrm{Cyc}_4(\mathcal{Z})$ se conforma de los siguientes 6 ciclos



2.4. Admisibilidad

Debemos tener claro que nuestro objetivo es enumerar estructuras combinatorias. Para lograr esto vamos a descomponer la estructura a enumerar en estructuras más

[3]la cantidad de ciclos de tamaño n con orientación es $(n-1)!$, cuando no se considera la orientación es $(n-1)!/2$.

pequeñas, pueden ser en estructuras del mismo tipo o más simples y de esta descomposición se suele extraer una relación de recurrencia. En ocasiones, estas recurrencias pueden resolverse de manera directa haciendo uso de *funciones generatrices*. Específicamente, nos basaremos en las llamadas *construcciones admisibles*, las cuales nos permitirán traducir las estructuras combinatorias a funciones generatrices.

Definición 2.4.1 (Construcciones admisibles)**.** *Un operador combinatorio sobre clases de estructuras combinatorias se dice admisible si al asociar una nueva clase* $\mathcal{C} = \Phi(\mathcal{A}_1, ...\mathcal{A}_j)$ *esto implica que existe algún operador* Ψ *sobre funciones generatrices tal que* $C(x) = \Psi(A_1(x), ..., A_j(x))$.

Definición 2.4.2 (Estructura admisible)**.** *Una clase de estructuras se llama admisible si cumple con al menos una de las siguientes condiciones:*

1. *Contiene un solo objeto neutral.*
2. *Contiene un solo objeto atómico.*
3. *Se puede especificar mediante la aplicación de operadores admisibles.*

Ejemplos de construcciones admisibles son las estudiadas en el presente capítulo: Unión disjunta, productos, sucesiones, conjuntos, ciclos, etc.

3 Funciones generatrices

En [18] se menciona que "una función generatriz es un tendedero en el que colgamos una sucesión de números para mostrar". Ahora bien, una definición más precisa es decir que una función generatriz es "una serie de potencias, la cual nos da información sobre una sucesión determinada". A continuación abordaremos de manera formal y directa el tema de funciones generatrices, junto con sus principales aplicaciones en combinatoria y el método simbólico.

En el capítulo 2 describimos dos tipos principales de estructuras combinatorias, las etiquetadas y las no etiquetadas, además mencionamos que sus construcciones admisibles (unión disjunta, producto, conjunto, etc.) siempre tendrán asociada una función generatriz. El propósito del presente capítulo es, precisamente, asociar a cada construcción admisible su respectiva función generatriz.

La forma en que las funciones generatrices nos van a ayudar es la siguiente: dada la clase de estructuras $\mathcal{A}$, si logramos asociarle una función generatriz $A(z)$ ($\mathcal{A} \longrightarrow A(x)$) de la fomra $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ...$; va a resultar que en la estructura $\mathcal{A}$ habrá a_0 objetos de tamaño 0, a_1 objetos de tamaño 1, a_2 objetos de tamaño 2, etc.

3.1. Preliminares

Como dijimos, una función generatriz es una serie de potencias que nos da información de una sucesión específica, por lo que, primero debemos recordar los conceptos de sucesión y serie de potencias (conceptos estudiados principalmente en cursos de cálculo y análisis matemático).

Definición 3.1.1 (Sucesión). *Sea X un conjunto no vacío, una sucesión en X es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Si $f(n) = z_n$, decimos que z_n es el $n-$ésimo término de la sucesión.*

Normalmente, para denotar una sucesión se escribe $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, o simplemente $\{z_n\}$.

Definición 3.1.2 (Serie). *Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + ...z_n.$$

A la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *se le conoce como sucesión de sumas parciales y al límite como la serie infinita generada por la sucesión* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$*, y se denota por* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Definición 3.1.3 (Serie de potencias)**.** *Recibe el nombre de serie de potencia toda serie de la forma :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Una función generatriz será una serie de potencias con una pequeña diferencia a las ya conocidas[1], en el sentido de que en una función generatriz generalmente consideramos a z como un marcador de posición y no como un número, lo que provoca que ignoremos el problema de convergencia.

Vale la pena recalcar que, así como tenemos dos tipos importantes de estructuras combinatorias también tenemos dos tipos principales de funciones generatrices, las ordinarias y las exponenciales. Las funciones generatrices ordinarias le corresponden a las clases de estructuras no etiquetadas y las funciones generatrices exponenciales a las clases de estructuras etiquetadas.

3.2. Funciones generatrices ordinarias

Definición 3.2.1 (Función generatriz ordinaria)**.** *Sea* $\mathcal{A}$ *una clase de estructuras no etiquetada. Es posible tomar la sucesión* $|\mathcal{A}_{N_n}|$, $n \in \mathbb{N}$*, para formar la serie de potencias:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_{N_n}| z^n = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|}. \tag{3.1}$$

A la ecuación 3.1 se le conoce como función generatriz ordinaria asociada a $\mathcal{A}$.

Por fines de notación, dada una clase no etiquetada $\mathcal{A}$, a su función generatriz ordinaria asociada la escribiremos como:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|}.$$

donde α_n es el número de objetos de tamaño n de la clase $\mathcal{A}$.

Por definición, la función generatriz de la clase neutral $\mathcal{E}$ es $E(z) = 1$ y la función generatriz de de la clase atómica $\mathcal{Z}$ es $Z(z) = z$.

Teorema 3.2.1. *Sean* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *clases de estructuras no etiquetadas y disjuntas, entonces la función generatriz de la unión disjunta* $\mathcal{C} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{B}$ *es* $A(z) + B(z) = C(z)$.

[1]nos referimos principalmente a las series de Taylor y series de Maclaurin, estudiadas en cursos de calculo y ecuaciones diferenciales.

Demostración. Tenemos:

$$C(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} z^{|\alpha|} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} z^{|\alpha|} = A(z) + B(z).$$

□

Teorema 3.2.2. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases de estructuras no etiquetadas, y sea la clase $\mathcal{C}$ definida por $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Entonces la función generatriz de $\mathcal{C}$ es $C(z) = A(z) \cdot B(z)$.*

Demostración. Tenemos

$$C(z) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}} z^{|(\alpha,\beta)|} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{A}\\ \beta\in\mathcal{B}}} z^{|\alpha|_{\mathcal{A}}+|\beta|_{\mathcal{B}}} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{A}\\ \beta\in\mathcal{B}}} z^{|\alpha|_{\mathcal{A}}} \cdot z^{|\beta|_{\mathcal{B}}} =$$

$$\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z^{|\alpha|_{\mathcal{A}}}\right) \cdot \left(\sum_{\beta\in\mathcal{B}} z^{|\beta|_{\mathcal{B}}}\right) = A(z) \cdot B(z).$$

□

Teorema 3.2.3. *Sea $\mathcal{A}$ una clase no etiquetada. Entonces la función generatriz de las $k-$sucesiones (potencias) de $\mathcal{A}$ es $A^k(z)$*

Demostración. Recordemos que, dada una clase no etiquetada $\mathcal{A}$, entonces:

$$\mathcal{A}^k := \underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}}_{k-\text{veces}}.$$

Por lo tanto:

$$\underbrace{A(z) \cdot A(z) \cdot \ldots \cdot A(z)}_{k-\text{veces}} = A^k(z).$$

□

Teorema 3.2.4. *Sea $\mathcal{A}$ una clase no etiquetada y sea $\mathcal{C}$ la clase definida por $\mathcal{C} = \Theta\mathcal{A}$. Entonces la función generatriz de $\mathcal{C}$ es $zA'(z)$.*

Demostración. Note que la clase $\mathcal{C}$ tiene $n\alpha_n$ objetos de tamaño n, esto nos da:

$$C(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\alpha| z^{|\alpha|} = zA'(z).$$

□

Teorema 3.2.5. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de estructuras no etiquetada y sea la clase $\mathcal{C}$ definida por $\mathcal{C} = \mathrm{Seq}(\mathcal{A})$. Entonces la función generatriz de $\mathcal{C}$ viene dada por*

$$C(z) = \frac{1}{1 - A(z)}.$$

Demostración. Primero escribimos:

$$\mathcal{C} = \{\varepsilon\} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}) + ... = \{\varepsilon\} + \mathcal{A} \times \mathcal{C}.$$

Esto nos da:

$$C(z) = 1 + A(z) + A^2(z) + A^3(z) + ... = 1 + A(z) \cdot C(z).$$

Es decir, $C(z) = 1 + A(z) \cdot C(z)$. Basta resolver la ecuación funcional y obtenemos:

$$C(z) = \frac{1}{1 - A(z)}.$$

□

Las funciones generatrices ordinarias son de gran utilidad para contar objetos no etiquetados, esto se debe principalmente a que el producto de funciones generatrices ordinarias corresponde exactamente al producto de estructuras combinatorias no etiquetadas.

3.3. Funciones generatrices exponenciales

Es el turno de las funciones generatrices exponenciales. Deben su nombre a que la función exponencial se puede escribir como [15] $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, término que es similar a lo que es una función generatriz exponencial (definición 3.3.1).

Estas funciones se relacionan directamente con las estructuras no etiquetadas y existen dos principales razones para esto: la primera es que podemos permutar sus etiquetas en $n!$ maneras (siempre que no haya restricciones). Por ejemplo, el número de conjuntos etiquetados con n elementos y n etiquetas es $a_n = n!$, al tomar su función generatriz ordinaria obtenemos $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, la cual tiene un radio de convergencia igual a 0; incluso en el marco combinatorio (donde no nos interesa la convergencia) es claro que no se puede trabajar. La segunda razón es que el producto de funciones generatrices exponenciales corresponde al producto etiquetado.

Definición 3.3.1 (Función generatriz exponencial)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una clase de estructuras etiquetada y $|A_{N_n}|$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión. A la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_{N_n}| \frac{z^n}{n!} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}.$$

se le conoce como función generatriz exponencial asociada a $\mathcal{A}$.

Una vez más, por fines de notación escribiremos

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}.$$

Teorema 3.3.1. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases de estructuras etiquetadas y disjuntas, entonces la función generatriz de la unión disjunta $\mathcal{C} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{B}$ es $A(z) + B(z) = C(z)$.*

Demostración. Tenemos:

$$C(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = A(z) + B(z).$$

□

Teorema 3.3.2. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ estructuras etiquetadas, y sea la estructura $\mathcal{C}$ definida por $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, entonces la función generatriz exponencial de $\mathcal{C}$ es $C(z) = A(z) \cdot B(z)$.*

Demostración. Tenemos

$$C(z) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \beta \in \mathcal{B}}} \binom{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha|} \frac{z^{|\alpha|+|\beta|}}{(|\alpha| + |\beta|)!} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \beta \in \mathcal{B}}} \frac{(|\alpha| + |\beta|)!}{|\alpha|! \cdot |\beta|!} \cdot \frac{z^{|\alpha|} \cdot z^{|\beta|}}{(|\alpha| + |\beta|)!}$$

$$= \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{z^{|\beta|}}{|\beta|!} \right) = \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{z^{|\gamma|}}{|\gamma|!} = A(z) \cdot B(z).$$

□

Teorema 3.3.3. *Sea $\mathcal{A}$ una estructura etiquetada y $A(z)$ su función generatriz. Definamos $\mathcal{C}$ como la estructura $\mathcal{C} = \mathrm{Set}(\mathcal{A})$. Entonces la función generatriz de $\mathcal{C}$ es $C(z) = \exp(A(z))$.*

Demostración. Recordemos que, por la definición 2.3.4 podemos escribir

$$\mathcal{C} = \mathrm{Set}(\mathcal{A}) = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{Set}_k(\mathcal{A}) = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{Seq}_k(\mathcal{B}) / \simeq_S.$$

Vale la pena recordar que $\simeq_S$ es la relación de equivalencia, donde $(\beta_1, ..., \beta_k) \simeq_S (\beta'_1, ..., \beta'_k)$ si y solo si existe una permutación σ tal que $\beta_{\sigma(i)} = \beta'_i$. Esto significa que comenzamos con el conjunto de $k-$sucesiones, e identificamos dos sucesiones cualesquiera si difieren en su orden pero contienen los mismos objetos. Luego, cada $k-$sucesión se identifica con $k!$ sucesiones (al ser $k!$ permutaciones de tamaño k). Lo anterior nos permite escribir:

$$\mathcal{C} = \{\varepsilon\} + (\mathcal{A} / \simeq_S) + (\mathcal{A}^2 / \simeq_S) + (\mathcal{A}^3 / \simeq_S) + ... + (\mathcal{A}^k / \simeq_S) + ...$$

Que tendrá como función generatriz exponencial

$$C(z) = 1 + A(z) + \frac{A^2(z)}{2!} + \frac{A^3(z)}{3!} + ... + \frac{A^k(z)}{k!} + ... = \exp(A(z)).$$

□

Teorema 3.3.4. *Sea $\mathcal{A}$ una estructura combinatoria etiquetada y $A(z)$ su función generatriz. Definamos $\mathcal{C}$ como la estructura $\mathcal{C} = \mathrm{Cyc}(\mathcal{A})$. Entonces $\mathcal{C}$ tiene como función generatriz exponencial*

$$\ln \left(\frac{1}{1 - A(z)} \right).$$

Demostración. Por la definición 2.3.5 podemos escribir

$$\mathcal{C} = \mathrm{Cyc}(\mathcal{A}) = \bigcup_{k\geq 0} \mathrm{Cyc}_k(\mathcal{A}) = \bigcup_{k\geq 0} \mathrm{Seq}_k(\mathcal{A})/\simeq_C .$$

Recordando que $\simeq_C$ denota la relación de equivalencia donde $(\beta_1, ..., \beta_k) \simeq_C (\beta_1', ..., \beta_k')$ si y solo si existe una permutación cíclica τ tal que $\beta_{\tau(i)} = \beta_i'$.

Lo anterior nos permite escribir:

$$\mathcal{C} = (\mathcal{A}/\simeq_C) + (\mathcal{A}^2/\simeq_C) + (\mathcal{A}^3/\simeq_C) + ... + (\mathcal{A}^k/\simeq_C) + ...$$

Que tendrá como función generatriz exponencial

$$C(z) = A(z) + \frac{A^2(z)}{2} + \frac{A^3(z)}{3} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k(z)}{k}.$$

Queda analizar la convergencia de esta serie, para esto notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^z x^k \, \mathrm{d}x = \int_0^z \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\ln(1-z) = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Así, podemos concluir que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k(z)}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-A(z)}\right).$$

□

3.4. Un ejemplo no etiquetado

A continuación pondremos en práctica lo visto hasta ahora. Nuestro propósito será contar la cantidad de árboles binarios que tienen una cantidad fijada de nodos internos; para comprender bien nuestro problema a resolver primero definiremos conceptos básicos.

Definición 3.4.1 (Árbol)**.** *Un árbol libre es un grafo no dirigido acíclico y convexo.*

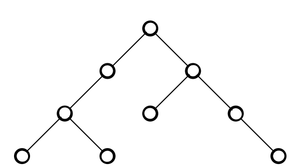


Figura 3.1: Árbol.

Note que cada par de vértices está conectado por exactamente un camino.

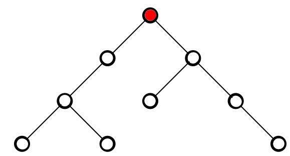


Figura 3.2: Árbol con raíz en color rojo.

Definición 3.4.2 (Árbol enraizado o con raíz)**.** *Un árbol con raíz es un árbol en el cual un vértice se distingue del resto. Este vértice se llama raíz.*

Un árbol que no tiene raíz a veces es denominado *árbol libre*, aunque el término "árbol" generalmente se refiere a un árbol libre.

Finalmente, diremos que un árbol enraizado es "plano" si se especifica una relación de orden para los hijos de cada vértice.

.

Existen cuatro elementos principales en un árbol:

1. **Nodo:** Es el término usado para referirnos a un vértice de un árbol con raíz.
2. **Paternidad:** Si (x, y) es el último eje en el camino desde la raíz hacia y, entonces se dice que x es el padre de y.
3. **Hoja:** Un nodo sin hijos se le llama hoja.
4. **Nodo interno:** Un nodo que no es hoja es un nodo interno.

Definición 3.4.3 (Árbol binario)**.** *Un árbol binario es un árbol enraizado y plano en el que cada nodo interno tiene a lo más dos hijos.*

Nuestro problema se resume en contar la cantidad de árboles binarios planos con raíz de n nodos internos. Denotemos por:

$n =$ Cantidad de nodos internos.

$T_n =$ Cantidad de árboles binarios planos con raíz de n nodos internos.

Note que $T_0 = 1, T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 5$. Un resultado óptimo sería encontrar T_n cuando n tiende a infinito. En esta sección vamos a encontrar una función generatriz asociada a esta estructura combinatoria no etiquetada.

Primero debemos definir nuestra estructura combinatoria e identificar cómo vendrá dado el tamaño.

- $\mathcal{T} =$ Conjunto de árboles binarios con un nodo externo "suelto".
- El tamaño de un árbol $t \in \mathcal{T}$ será $|t| =$ cantidad de nodos internos.

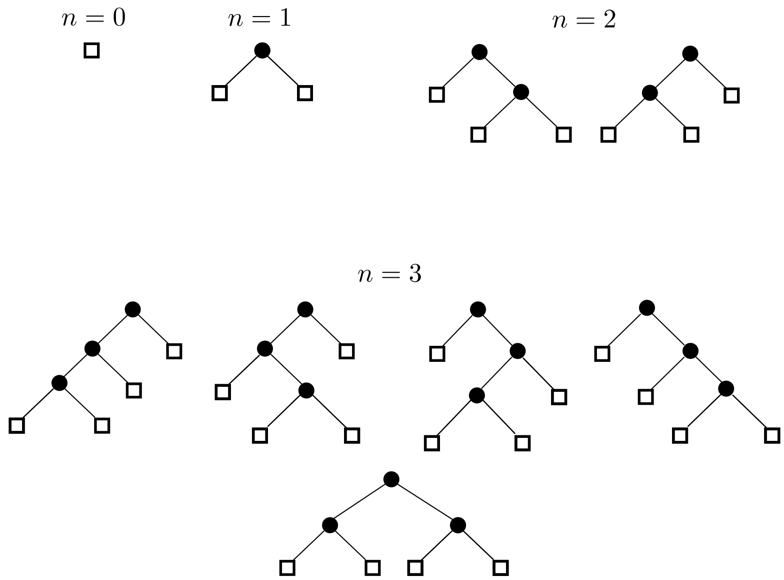


Figura 3.3: T_0, T_1, T_2 y T_3. Los nodos internos se representan por "$\bullet$" y las hojas por "$\square$".

Buscamos estimar $T_n = \#\{t \in \mathcal{T} \ : \ |t| = n\}$.

En el capítulo 2 mencionamos que nuestras estructuras combinatorias tienen una naturaleza recursiva, en el caso de nuestra estructura $\mathcal{T}$ nuestra descomposición recursiva la podemos escribir como: "Un objeto de la clase combinatoria $\mathcal{T}$ es una hoja o un nodo interno seguido de dos arboles binarios". Figurativamente tenemos:

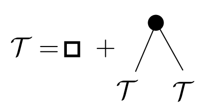


Figura 3.4: Descomposición recursiva de la clase combinatoria $\mathcal{T}$.

Esto lo podemos escribir como $\mathcal{T} = \{\square\} \cup (\{\bullet\} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T})$. Note que aquí las hojas toman el papel de un elemento neutro ($\square \equiv \mathcal{E}$), y los nodos internos toman el papel de un elemento atómico ($\bullet \equiv \mathcal{Z}$); por lo tanto las hojas se traducen a 1 y los nodos internos a z. Suponiendo que $\mathcal{T}$ tiene como función generatriz $T(z)$, entonces

$$T(z) = 1 + z \cdot T(z) \cdot T(z) = 1 + z(T(z)^2).$$

Obteniendo

$$T(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2z},$$

Ahora debemos determinar qué símbolo escoger. Ya que $T_0 = 1$, se tiene que $\lim_{z \to 0^+} T(z) = 1$. Pues

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} &= \lim_{z\to 0^+} \left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} \cdot \frac{1+\sqrt{1-4z}}{1+\sqrt{1-4z}} \right) \\
&= \lim_{z\to 0^+} \frac{1-(1-4z)}{2z(1+\sqrt{1-4z})} \\
&= \lim_{z\to 0^+} \frac{2}{1+\sqrt{1-4z}} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

mientras

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} = \infty,$$

por lo tanto

$$T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Recordemos que el teorema de Newton nos dice que $(1+y)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} y^k$, para nuestros fines $n = 1/2$ e $y = -4z$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
(1-4z)^{1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4z)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \binom{1/2}{n} z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n \binom{1/2}{n} z^n \\
&= 1 + z \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^{n+1} \binom{1/2}{n+1} z^n.
\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$1-\sqrt{1-4z} = -z \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^{n+1} \binom{1/2}{n+1} z^n.$$

Se sigue que

$$T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) (-4)^{n+1} \binom{1/2}{n+1} z^n.$$

Así que para cada entero no negativo n se tiene

$$[z^n]T_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(-4)^{n+1}\binom{1/2}{n+1}.$$

Ahora, intentando obtener una fórmula más precisa para T_n debemos calcular para cada entero $n \geq 0$ lo siguiente

$$\begin{aligned}
T_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)(-4)^{n+1}\binom{1/2}{n+1} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)(-4)^{n+1}\frac{(1/2)\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)\cdot\ldots\cdot(1/2-n)}{(n+1)!} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)(-4)^{n+1}\frac{(1/2)\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)\cdot\ldots\cdot(-(2n-1)/2)}{(n+1)!} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)(-4)^{n+1}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)!} \\
&= \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{n!}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

.

Finalmente podemos concluir que

$$[z^n]T_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Teorema 3.4.1. *El número de árboles binarios planos con n nodos internos está dado por:*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{3.2}$$

Fórmula que devuelve el $n-$ésimo número de Catalán.

3.5. Un ejemplo etiquetado

Ahora es turno de hacer uso de las funciones generatrices exponenciales como método de conteo. Vamos a contar la cantidad de grafos etiquetados $2-$regulares.

Definición 3.5.1 (Grado de un vértice)**.** *El grado de un vértice es el número de aristas incidentes a él.*

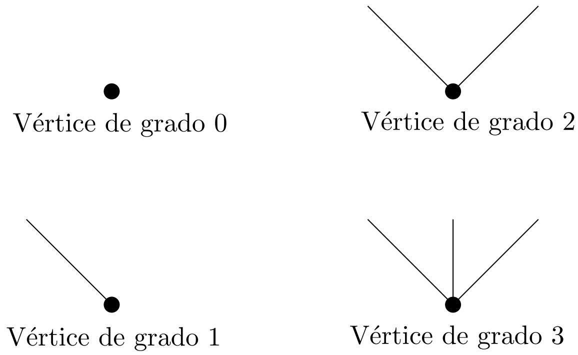


Figura 3.5: Vértices con grados $0, 1, 2$ y 3.

Definición 3.5.2 (Grafo regular)**.** *Un grafo regular es un grafo donde cada uno de sus vértices tienen el mismo grado.*

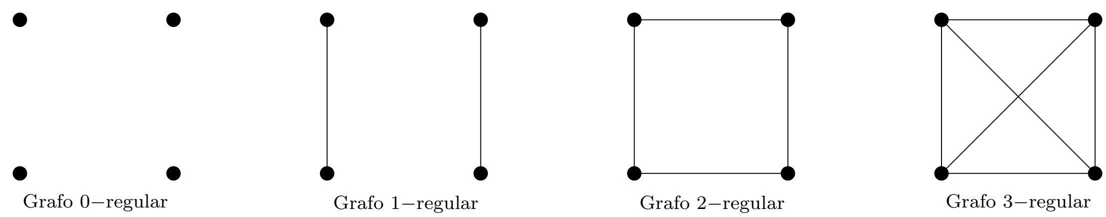


Figura 3.6: Ejemplos de grafos $0, 1, 2, 3-$regular

La definición 3.5.2 nos dice que, un grafo $2-$ regular es aquel en el que todos los grados de sus vértices es 2.

Note que, para que un grafo sea $2-$regular este debe tener al menos 3 vértices (no se aceptan ciclos). Definamos las características de nuestra estructura combinatoria

- $\mathcal{G}$ = Conjunto de grafos etiquetados $2-$regulares.
- G_n = cantidad de grafos etiquetados $2-$regulares.
- n = cantidad de vértices de un grafo $2-$regular.
- El tamano de un grafo $g \in \mathcal{G}$ será $|g|$ = cantidad de vértices.

Buscamos estimar una función generatriz exponencial asociada a nuestra clase etiquetada $\mathcal{G}$. Note que cada uno de nuestros $g \in \mathcal{G}$ se comporta como un ciclo en el que invertir el orden de las etiquetas alrededor del grafo no lo modifica, es decir $G_n = \frac{(n-1)!}{2}$.

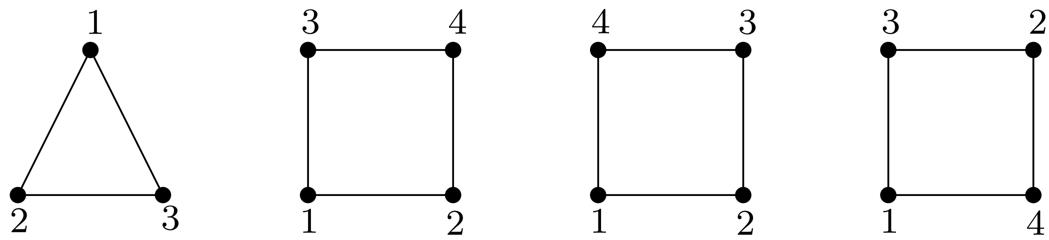


Figura 3.7: $G_3 = 1$, $G_4 = 3$.

Así que, nuestra estructura $\mathcal{G}$ es un conjunto de ciclos, pero nuestros ciclos contienen 3 o más átomos. Esto se traduce a $\mathcal{G} = \mathrm{Set}(\mathrm{Cyc}_{\geq 3}(\mathcal{Z}))$.

Para encontrar nuestra función generatriz $G(z)$ necesitamos primero deducir la función generatriz asociada a $\mathrm{Cyc}_{\geq 3}(\mathcal{Z})$. Por el teorema 3.3.4 tenemos que

$$\mathcal{B} = \mathrm{Cyc}_k(\mathcal{A}) \to B(z) = \frac{1}{k}A(z)^k.$$

Podemos describir de manera informal $\mathrm{Cyc}_{\geq r} = \mathrm{Cyc} - \sum_{k=1}^{r-1} \mathrm{Cyc}_k$. Por lo que, la función generatriz de $\mathcal{B} = \mathrm{Cyc}_{\geq r}(\mathcal{Z})$ es:

$$B(z) = \log\left(\frac{1}{1-z}\right) - \sum_{n=1}^{r-1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} - \sum_{n=1}^{r-1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n\geq r} (n-1)! \frac{z^n}{n!}.$$

Por lo tanto, la función generatriz de $\mathcal{C} = \mathrm{Cyc}_{\geq 3}(\mathcal{Z})$, es

$$C(z) = \sum_{n\geq 3} \frac{(n-1)!}{2} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-z} - z - \frac{z^2}{2}\right)$$

Finalmente, la función generatriz de $\mathcal{G} = \mathrm{Set}(\mathrm{Cyc}_{\geq 3}(\mathcal{Z}))$ (usando el teorema 3.3.3) es

$$G(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-z} - z - \frac{z^2}{2}\right)\right) = \frac{\exp(-z/2 - z^2/4)}{\sqrt{1-z}}.$$

A manera de comprobación, al expandir $G(z)$ como una serie de Taylor tenemos

$$1 + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{8} + \frac{z^5}{10} + \frac{7z^6}{72} + O(z^7).$$

Por lo que

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = \tfrac{3!\cdot 1}{6} = 1, a_4 = \tfrac{4!\cdot 1}{8} = 3, a_5 = \tfrac{5!\cdot 1}{10} = 12, A_6 = \tfrac{6!\cdot 7}{72} = 70, ...$$

Lo que corresponde a [14, A001205].

4 Análisis asintótico

Como habrá notado, nuestro ejemplo de árboles (ver 3.4) introduce estructuras definidas recursivamente; en este caso la definición recursiva se traduce a una ecuación funcional que determina implícitamente la función generatriz. Existen resultados enumerativos que no dejan nada que desear (como en nuestro ejemplo) en los cuales dicha ecuación funcional es posible resolverla y obtener un resultado de conteo explícito, donde tenemos la información en todos los aspectos de esta función (podemos estimar el valor de cualquier n y su comportamiento es lo más "simple" posible). Sin embargo, dichas técnicas no siempre son suficientes para encontrar una función f_n para alguna función generatriz $F(z)$, ya que se puede dar el caso en el que nuestra función generatriz (funcional) sea del tipo "intratable", es decir, crece abruptamente y además, dicho crecimiento no lo podemos controlar, o bien, su comportamiento no es adecuado. En estos casos generalmente se puede proceder con una análisis asintótico complejo directamente de la ecuación y obtener estimaciones asintóticas muy precisas. El análisis asintótico "reemplaza" la función intratable por una más sencilla de trabajar, donde estas se relacionan por medio de sus límites o su crecimiento.

Usaremos métodos asintóticos para obtener información sobre la tasa de crecimiento de nuestras funciones generatrices.

El análisis asintótico es una rama de las matemáticas muy amplia, por esta razón nos enfocaremos principalmente en tres resultados, dos de estos vienen directamente relacionados con funciones analíticas y sus singularidades [7], el tercero es la famosa fórmula de Stirling.

4.1. Preliminares

Nuestro punto clave es cambiar la perspectiva que hemos trabajado hasta ahora. En capítulos anteriores hemos tratado a las funciones generatrices como objetos puramente formales (sin considerar la convergencia); a lo largo de este capítulo las vamos a interpretar como objetos analíticos, lo que nos va a permitir obtener mucha información sobre el comportamiento asintótico de sus coeficientes.

Definición 4.1.1 (Función de variable compleja). *Sea $S \subseteq \mathbb{C}$, se denomina función de una variable compleja $f(z)$ a una relación $f : S \to \mathbb{C}$ tal que para cada $z \in S \subseteq \mathbb{C}$ le corresponde un único número complejo $f(z)$.*

Al considerar una función generatriz $G(z)$ como una función de variable compleja esta vez nos vemos obligados a estudiar su convergencia, por esta razón en adelante será indistinto el término "serie de potencias" y "función generatriz".

4.1.1. Series de potencias y radio de convergencia

Definición 4.1.2 (Serie de potencias)**.** *Una expresión de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

recibe el nombre se serie de potencias centrada en z_0.

Cuando la serie de potencias está centrada en $z_0 = 0$ entonces se escribe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Al considerar la convergencia surge de manera natural la pregunta ¿para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ la serie de potencias $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ converge y produce una función bien definida en el plano complejo?

Para responder este tipo de preguntas debemos introducir el concepto de *radio de convergencia*. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ definimos el conjunto

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ converge} \right\}.$$

Definimos $R = \sup\{|z - z_0| \ : \ z \in S\}$.

Note que, para el caso 1: $R = 0$, en el caso 2: $R = \infty$ y para el caso 3: $0 < R < \infty$ y además la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absolutamente en $|z - z_0| < R$ y diverge en $|z - z_0| > R$. Por otro lado es fácil ver que $S \subset \{|z - z_0| \leq R\}$, por lo que, para cada z, si $|z - z_0| > R$, entonces z no pertenece a S; es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ diverge.

Al número R se le conoce como *radio de convergencia* de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. El radio de convergencia es el radio del disco abierto dentro del cual la serie converge y diverge fuera de este; tenga en cuenta que dicho disco es único y no hay información sobre la convergencia en el límite del disco. A este disco se le conoce como *disco de convergencia* y lo denotamos por $D(z_0, R)$ (disco de radio R con centro en z_0).

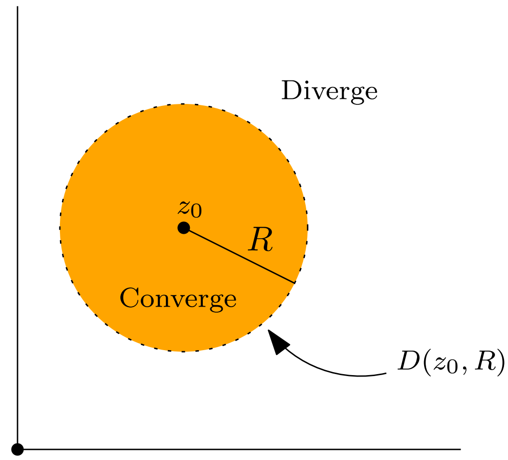


Figura 4.1: Disco de convergencia

Encontrar el radio de convergencia de una serie de potencias no es complicado, a modo de ejemplo considere la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(3n)!z^n}{n!(2n)!} \right),$$

para poder aplicar la prueba de la razón, recordemos que esta funciona con sucesiones positivas, por lo tanto vamos a considerar la convergencia absoluta. Sea

$$a_n = \frac{(3n)!z^n}{n!(2n)!} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(3(n+1)!|z|^{n+1})}{(n+1)!(2(n+1))!} \cdot \frac{n!(2n)!}{(3n)!|z|^n} \\ &= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)}|z| \\ &= \frac{(3+1/n)(3+2/n)(3+3/n)}{(1+1/n)(2+1/n)(2+2/n)}|z|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \to \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2}|z| = \frac{27|z|}{4} < 1.$$

Esto nos dice que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente para $|z| < 4/27$, y diverge para $|z| > 4/27$. Concluimos que el radio de convergencia es $R = 4/27$.

El concepto de radio de convergencia nos da las condiciones suficientes para afirmar que las series de potencias nos permiten definir funciones continuas con facilidad; pues, suponga que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, podemos definir su dominio de convergencia como

$$\Omega = \begin{cases} D(z_0, R), & \text{si } R < \infty \\ \mathbb{C}, & \text{si } R = \infty \end{cases}$$

y así la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $\forall\, z \in \Omega$ es continua, más aun, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.1.1. *Suponga que la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, y sea Ω su dominio de convergencia. Considere la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \ \forall\, z \in \Omega.$$

Entonces f es infinitamente diferenciable en Ω y

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}(z-a)^n, \forall\, z \in \Omega, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Para nuestros fines, la importancia del concepto de radio de convergencia recae en que, dada una clase combinatoria (etiquetada o no etiquetada) $\mathcal{A}$ que admite una especificación en términos de $(+, \cdot, \Theta, \star, \mathrm{Seq}, \mathrm{Set}, \mathrm{Cyc})$, entonces el radio de convergencia de su función generatriz $A(z)$ existe y es estrictamente positivo o ∞, además, este siempre se puede calcular [8, p. 251].

4.1.2. Funciones analíticas y singularidades

Ahora entra en escena el concepto de función analítica, estas resultan ser muy útiles cuando son definidas en el plano complejo, pues resulta que todas las funciones "habituales" son analíticas. Estas funciones cumplen con propiedades muy interesantes e indispensables como la regla de la cadena.

Definición 4.1.3 (Función analítica)**.** *Una función de variable compleja $F(z)$ es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $F(z)$ se puede representar como una serie de potencias convergentes en algún disco abierto en z_0.*

Cabe mencionar que en análisis complejo las palabras "analítico" y "holomorfo" se pueden usar indistintamente.

Una observación importante que hay que notar es que, como nuestras funciones generatrices poseen radio de convergencia entonces, sin pérdida de generalidad, podemos afirmar que estas se encuentran centradas en el origen por lo que son analíticas en $z = 0$. Más aún, ya que las funciones analíticas forman un anillo, entonces las respectivas funciones generatrices de nuestras construcciones admisibles también son analíticas en $z = 0$.

Ahora que podemos tratar a nuestras funciones generatrices como funciones analíticas podemos definir lo que es una singularidad.

Definición 4.1.4 (Singularidades)**.** *Los puntos en los que una función $f(z)$ no es analítica se denominan singularidades de $f(z)$.*

Si $f(z)$ es analítica a lo largo de una vecindad de un punto $z = z_0$, excepto en el punto $z = z_0$, entonces $z = z_0$ se llama una singularidad aislada de $f(z)$.

Definición 4.1.5 (Polos)**.** *Si $f(z)$ tienen una singularidad aislada en $z = z_0$, y $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, entonces decimos que z_0 es un polo de $f(z)$.*

Es decir, los polos son puntos en los que la función se hace infinito. Existe un término que vine ligado a la definición de polo, y nos referimos al de *orden*. Para entender el orden de un polo podemos pensar en la multiplicidad de las raíces de polinomios; por ejemplo, $f(z) = 1/z^2$ tiene un polo de orden 2 en $z = 0$. Esta perspectiva nos será útil, ya que vamos a trabajar, principalmente, con funciones racionales y meromorfas (ver definición**??**).

Vamos a aprovechar el hecho de que los polos sean los puntos en los que la función se haga infinito de la siguiente forma: si una función meromorfa tiene un polo simple en un punto z_0, entonces la función se acerca al infinito cuando z se acerca a z_0, y la tasa a la que se acerca al infinito está determinada por la magnitud del polo. Si el módulo del polo es grande, entonces la función se acerca rápidamente a infinito, mientras que, si su módulo es pequeño entonces se acerca a infinito más lentamente.

Definición 4.1.6 (Singularidad (polo) dominante)**.** *Una singularidad (polo) que posee el módulo mínimo se llama singularidad dominante.*

Para nosotros, las singularidades dominantes de una función son de vital importancia, pues estas influyen directamente en las asíntotas dominantes de su sucesión de coeficientes. El caso más simple ocurre cuando la singularidad dominante (puede ser más de una) es un polo.

Si suponemos que $f(z)$ es analítica en 0 y además tiene radio de convergencia finito, lo primero que debemos hacer es determinar la singularidad dominante de $f(z)$; suponiendo que solo hay una (simplificando) nos apoyaremos de los siguientes dos teoremas.

Teorema 4.1.2. *Una función $f(z)$ analítica en 0, cuya expansión en el origen tiene un radio de convergencia finito R, necesariamente tiene una singularidad en el límite de su disco de convergencia $|z| = R$.*

Teorema 4.1.3 (Pringsheim)**.** *Si $f(z)$ se puede representar en 0 por una expansión en serie que tiene coeficientes no negativos (de Taylor) y radio de convergencia finito R, entonces el punto $z = R$ es una singularidad de $f(z)$.*

Una consecuencia del teorema 4.1.2 es que el crecimiento exponencial de los coeficientes de la serie de potencias será $1/R$, donde R es el módulo mínimo de una singularidad de nuestra serie (preferiblemente la singularidad dominante); es por esta razón que el estudio de las singularidades nos resulta importante, pues la ubicación de estas va a dictar el crecimiento exponencial de los coeficientes de nuestra función generatriz.

4.1.3. Teorema de coeficientes de Cauchy

Los métodos de la combinatoria analítica funcionan debido a las conexiones que hay entre las propiedades analíticas de una función y las propiedades asintóticas de sus coeficientes de su serie de potencias; la base para esto es el siguiente teorema:

Teorema 4.1.4 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea f holomorfa en y dentro de un camino cerrado simple C*[1]*. Entonces para cada punto a dentro de C,*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Demostración. Ver [10, cap. 5] □

El teorema 4.1.4 proporciona una expresión analítica para los coeficientes de una serie de potencias.

Teorema 4.1.5 (Fórmula de Cauchy para derivadas). *Sea f holomorfa en y dentro de un camino cerrado simple C. Entonces en cada punto a dentro de C existe la $n-$ésima derivada $f^{(n)}(a)$ para $n = 0, 1, 2, 3, ...,$ y*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Demostración. Ver [10, cap. 5] □

Teorema 4.1.6 (Teorema de los coeficientes). *Sea f una función analítica en 0, si C es un camino cerrado simple que encierra el punto 0 y además f es holomorfa en C, entonces*

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C f(z) \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Demostración. Ver [10, cap. 5] □

El teorema 4.1.6 es una técnica importante en la demostración de los teoremas de ampliación que enunciaremos más adelante. Esta fórmula es una aplicación directa del conocido teorema de los residuos estudiado en Análisis Complejo.

[1] Un camino γ es un mapeo continuo del eje real en los números complejos, es decir $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Decimos que el camino γ es cerrado si $\gamma(a) = \gamma(b)$, y si la restricción de γ a $[a, b)$ es inyectiva se dice que es cerrado y simple.

Seguiremos definiendo algunos tipos de funciones para las que existen teoremas generales que permiten procedimientos mecánicos para extraer equivalentes asintóticos de ellas.

La parte interesante ahora será entender a qué tipo de función pertenece nuestra función generatriz; principalmente tenemos dos opciones: función racional o función meromorfa.

4.2. Funciones generatrices meromorfas

Una función meromorfa es una función que es analítica en todo punto de su dominio, excepto en un conjunto discreto de puntos, los cuales son sus polos, es decir, una función meromorfa tiene singularidades en forma de polos y es analítica en todas las demás partes de su dominio.

Definición 4.2.1 (Función meromorfa). *Una función $h(z)$ es meromorfa en z_0 si y solo si, para cada z en la vecindad de z_0 (con $z \neq z_0$) puede representarse como $\frac{f(z)}{g(z)}$ con $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en z_0. En estos casos la función admite una expansión como serie de potencias de Laurent*

$$h(z) = \sum_{n \geq -M} h_n (z - z_0)^n.$$

Si $h_{-M} \neq 0$ y $M \geq 1$, entonces $h(z)$ tiene un polo de orden M en $z = z_0$, y al coeficiente h_{-1} es llamado residuo de $h(z)$ en $z = z_0$.

Otra forma de encontrar en la literatura la expansión como serie de Laurent de una función meromorfa $h(z)$ es la siguiente

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Las series de Laurent se utilizan para representar funciones meromorfas como una serie infinita de términos polinomiales y fraccionarios (donde los términos fraccionarios corresponden a los polos de la función). Este tipo de representaciones son de gran utilidad, pues nos permite estudiar la función en su totalidad, incluyendo su comportamiento en sus polos.

Lo que cada singularidad (o polo) nos va a contribuir (asintóticamente hablando) se puede determinar mediante un cálculo de residuos.

Teorema 4.2.1 (Residuo de Cauchy). *Sea $f(z)$ una función meromorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, y sea C orientada positivamente en Ω en el que f es analítica. Si $a_1, ..., a_r$ denotan polos de $f(z)$ dentro de C, entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^{r} Res_{z=a_j} f(z).$$

Demostración. Ver [11]. □

La importancia de los polos y residuos de una función generatriz meromorfa recae en sus asíntotas exponenciales. Primero respondamos la siguiente pregunta ¿por qué usar asíntotas exponenciales? Recordemos que estamos considerando funciones generatrices meromorfas, y nos ayudaremos de sus polos para que así, la asíntota tome en cuenta la ubicación del polo y su tasa de crecimiento. No está de más mencionar que una asíntota exponencial es más precisa que una polinómica cuando la función generatriz tiene polos de orden bajo (es por eso que suponemos que usamos los teoremas 4.1.2 y 4.1.3 para simplificar a una sola singularidad); en general, la asíntota exponencial dominante de una función generatriz meromorfa está determinada por el polo de menor magnitud.

Para encontrar la forma de dicha asíntota utilizamos el teorema 4.2.4.

Teorema 4.2.2 (Desigualdad de Cauchy)**.** *Sea C_R el círculo $|z-c| = R$. Suponga que $f(z)$ es analítica en C_R y en su interior, i.e. en el disco $|z-c| \leq R$. Sea $M_R = \max|f(z)|$ sobre z en C_R. Entonces:*

$$|f^{(n)}(c)| \leq \frac{n!M_R}{R^n} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Usando la fórmula de Cauchy para derivadas se tiene:

$$|f^{(n)}(c)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(w)|}{|w-c|^{n+1}}|dw| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M_R}{R^{n+1}} \int_{C_R} |dw| = \frac{n!}{2\pi} \frac{M_R}{R^{n+1}} 2\pi R.$$

□

Teorema 4.2.3. *Si $f(z)$ tiene un polo de orden M en $z = c$ entonces:*

$$Res_{z=c}f(z) = \frac{1}{(M-1)!} \lim_{z \to c} \frac{d^{M-1}}{dz^{M-1}}(z-c)^M f(z).$$

Demostración. Ver [13]. □

Teorema 4.2.4 (Ampliación de funciones meromorfas)**.** *Sea $f(z)$ analítica en el círculo $|z| = R$ y analítica en el disco $|z| < R$ excepto en un número finito de polos (distintos) $a_1, ..., a_m$, distintos de cero. Entonces existen polinomios $P_1(n), ..., P_m(n)$ tal que*

$$f_n = \sum_{k=1}^{m} P_k(n) a_k^{-n} + O(R^{-n}).$$

Además el grado de P_k es uno menos que el orden del polo de f en $z = a_k$. Para este caso $f(z)$ puede ser vista como la función generatriz de la sucesión $\{f_n\} = f_0, f_1, f_2, ...$

Demostración. Definamos

$$I_n = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz,$$

note que la desigualdad de Cauchy implica que $I_n = O(R^{-n})$ y por el teorema 4.2.1 obtenemos:

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right) + \sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}_{z=a_k}\left(\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right) = f_n + \sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}_{z=a_k}\left(\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right).$$

Luego usando el teorema 4.2.3, si $z = a_k$ es un polo de orden r, entonces:

$$\mathrm{Res}_{z=a_k}\left(\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right) = \frac{1}{(r-1)!}\lim_{z\to a_k}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left((z-a_k)^r f(z) z^{-n-1}\right),$$

que es un polinomio de orden $r-1$.

□

El teorema 4.2.4 nos indica que, dada una función generatriz $G(z)$ meromorfa, entonces la tasa de crecimiento asintótico del coeficiente $[z^n]G(z)$ es proporcional a n^{r-1}, donde r es el orden del polo.

4.2.1. Ejemplo

Ahora vamos a examinar un objeto combinatorio que podemos describir usando construcciones simbólicas iterativas (no recursivas) que "tienen dos niveles de profundidad". Nos referimos al concepto de sobreyección, una sobreyección de un conjunto A a un conjunto B es una función $f : A \to B$, la cual asume cada valor al menos una vez (coloquialmente llamadas *"onto"*).

Definición 4.2.2 (Sobreyección)**.** *Una sobreyección de tamaño n es una función $\phi : N_n \to N_r$ tal que la imagen de ϕ es todo N_r. Es decir, para cada $j \in N_r$ existe $i \in N_n$ tal que $\phi(i) = j$.*

Vamos a identificar dos clases combinatorias distintas relacionadas a las sobreyecciones. La primera será fijando un entero $r \geq 1$ y denotaremos por $\mathcal{R}_n^{(r)}$ a la clase de todas las sobreyecciones de N_n sobre N_r, a los elementos de esta clase se le denominan como $r-$sobreyecciones. La segunda clase denotada por $\mathcal{R}$ es la clase combinatoria de todas las sobreyecciones (se permite cualquier valor de r).

Analicemos primero a la clase $\mathcal{R}_n^{(r)}$. Establezcamos

$$\mathcal{R}^{(r)} := \bigcup_n \mathcal{R}_n^{(r)}.$$

El siguiente paso será notar que cada $r-$sobreyección $\phi \in \mathcal{R}_n^{(r)}$ está determinada por la $r-$tupla ordenada formada por la colección de todos los conjuntos de preimágenes $(\phi^{-1}(1), \phi^{-1}(2), ..., \phi^{-1}(r))$, además, estos serán conjuntos disjuntos no vacíos de números enteros que cubren el conjunto N_n. Considere la sobreyección $\phi : N_7 \to N_4$

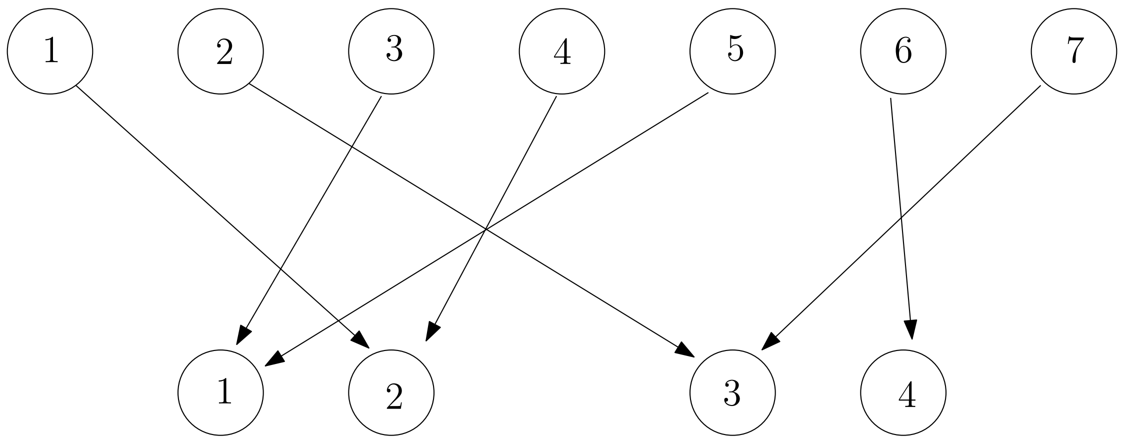


Figura 4.2: $\phi : N_7 \to N_4$

En otras palabras "una sobreyección es una sucesión de conjuntos no vacíos".

Vamos a analizar la estructura $\mathcal{R}^{(2)}$, la cual consta de las sobreyecciones del tipo $\phi : N_n \to \{1, 2\}$, note que $\mathcal{R}^{(2)}$ se puede escribir como

$$\mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{R}_1^{(2)} \cup \mathcal{R}_2^{(2)}.$$

Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos las sobreyecciones del tipo $\phi : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, que podemos expresar de la siguiente manera

$$\mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{R}_1^{(2)} \cup \mathcal{R}_2^{(2)} = (\{12\}) \cup (\{21\}) = (\{12\}, \{21\}).$$

Análogamente, para $n = 3$ estudiamos las sobreyecciones $\phi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ que se expresan como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(2)} &= \mathcal{R}_1^{(2)} \cup \mathcal{R}_2^{(2)} \\ &= (\{112\}, \{122\}, \{121\}) \cup (\{211\}, \{212\}, \{221\}) \\ &= (\{112\}, \{122\}, \{121\}, \{211\}, \{212\}, \{221\}). \end{aligned}$$

Dicho lo anterior, note que podemos escribir a la clase $\mathcal{R}^{(2)}$ como:

$$\mathcal{R}^{(2)} = 1 \text{ Seq}(1) \; 2 \text{ Seq}(1 + 2) \cup 2 \text{ Seq}(2) \; 1 \text{ Seq}(1 + 2).$$

Como hemos visto, una $r-$sobreyección se puede ver como una sucesión de preimágenes no vacías. La sobreyección $\phi : N_7 \to N_4$ (figura 4.2) corresponde a la secuencia $(\{3, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 7\}, \{6\})$. Es decir, cada preimagen es en sí misma un conjunto. Por lo tanto, las $r-$sobreyecciones están representadas por la construcción etiquetada

$$\mathcal{R}^{(r)} = \mathrm{Seq}_r(\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$$

Lo anterior nos permite trasladarnos a la clase $\mathcal{R}$ con facilidad, y así primero establecer

$$\mathcal{R} \coloneqq \bigcup_n \mathcal{R}_n^{(r)}.$$

Finalmente, el conjunto de todas las sobreyecciones está representado por la construcción

$$\mathcal{R} = \mathrm{Seq}(\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$$

Ahora que hemos definido nuestra construcción queda asociarle una función generatriz.

El teorema 3.2.5 nos dice que la función generatriz de la construcción $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$ es $\frac{1}{1-A(x)}$, por lo tanto $\mathrm{Seq}(\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ se puede escribir como

$$\frac{1}{1-(\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))}$$

Nos queda estimar la función generatriz para la construcción $\mathrm{Set}(\mathcal{Z})$, apoyándonos del teorema 3.3.3 sabemos que la función generatriz asociada a la construcción $\mathrm{Set}(\mathcal{A})$ es $\exp(A(z))$. En nuestro caso particular se deben hacer dos observaciones, primero $\mathrm{Set}(\mathcal{Z}) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, la segunda es que se nos pide asociar una función generatriz a la construcción $\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z})$ (no a $\mathrm{Set}(\mathcal{Z})$), lo que significa que debemos omitir el 0, por lo tanto debemos estimar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1.$$

Podemos concluir que la construcción $\mathcal{R} = \mathrm{Seq}(\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ se puede traducir a la función generatriz exponencial

$$\frac{1}{1-(e^z-1)} = \frac{1}{2-e^z}.$$

Por lo tanto,

$$R(z) = \frac{1}{2-e^z}.$$

Calculemos ahora la estimación asintótica, para esto debemos observar que la función $R(z)$ tiene sus singularidades en $\ln(2) + 2\pi i k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Recordemos que nuestra función deja de ser analítica cuando el denominador se anula, de modo que nuestra singularidad dominante es $z = \ln(2)$, ya que

$$\frac{1}{2-e^{\ln(2)}} = \frac{1}{2-2}.$$

Lo siguiente es obtener el residuo de nuestra singularidad (de orden 1) $z = \ln(2)$, para esto haremos uso del teorema 4.2.3

$$\lim_{z\to\ln(2)} \frac{1}{(1-1)!}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}\left[\left(z-\ln(2)^1 \cdot \frac{1}{2-e^z}\right)\right] = \lim_{z\to\ln(2)} \frac{z-\ln(2)}{2-e^z} = -\frac{1}{2}.$$

Hemos obtenido $c = -1/2$ y $a = \ln(2)$. Usando la relación [8, p. 259]

$$\mathrm{Res}(f(z)z^{-n-1}\ ;\ z=a) = \mathrm{Res}\left(\frac{c}{(z-a)}z^{-n-1}\ ;\ z=a\right) = \frac{c}{a^{n+1}},$$

se tiene

$$\frac{c}{a^{n+1}} = \frac{-1/2}{\ln(2)^{n+1}} = -\frac{1}{2}\ln(2)^{-n-1}$$

Recordando que la función es meromorfa con polos en $\ln(2) + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$. Los siguientes polos están en $\ln(2) \pm 2\pi i$, con un módulo menor a 6.

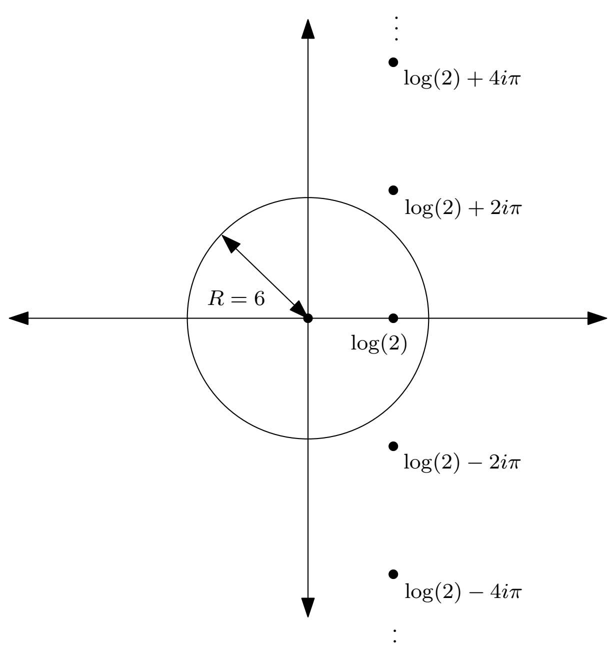


Figura 4.3: Visualización de $R = 6$.

Obtenemos la estimación:

$$\frac{f_n}{n!} = \frac{1}{2}(\ln(2))^{-n-1} + O(6^{-n}).$$

Conociendo que $r_{10} = 102247563$ [14, A00670], y usando nuestra estimación se tiene

$$\frac{1}{2}(\ln(2))^{-11}10! = 102247563.0052.$$

4.3. Funciones generatrices racionales

Ahora estudiemos el caso en el que nuestra función generatriz obtenida sea una función racional.

Definición 4.3.1 (Función racional). *Una función $f(z)$ es una función racional si y solo si se escribe de la forma*

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)},\ N(z) \neq D(z),$$

done $N(z)$ y $D(z) \neq 0$ son polinomios; y $\deg(D(z)) \geq 1$.

El caso racional no es muy distinto al meromorfo, pues una vez más, las asíntotas de una función generatriz racional están muy ligadas a sus polos; aunque en este caso, encontrar los polos de una función racional es más sencillo. Retomando la definición 4.3.1, si $D(z)$ tiene un cero de multiplicidad r en $z = z_0$, entonces decimos que $f(z)$ tiene un polo de orden r en $z = z_0$.

Las asíntotas de una función generatriz racional se comportan de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 (Ampliación de funciones racionales). *Si $f(z)$ es una función racional, analítica en cero y tiene polos en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, entonces sus coeficientes son una suma de polinomios exponenciales: Existen m polinomios $P_1(n), ..., P_m(n)$ tales que, para n más grande que algunos n_o fijos*

$$f_n = \sum_{j=1}^{m} P_j(n) \alpha_j^{-n}.$$

Además, el grado de P_j es igual al orden del polo de f en α_j menos uno.

Demostración. Como $f(z)$ es racional, entonces admite un desarrollo en fracciones parciales, es decir

$$f(z) = Q(z) + \sum_{(\alpha,r)} \frac{C_{\alpha,r}}{(z-\alpha)^r},$$

donde $Q(z)$ es un polinomio de grado $n = \deg(N(z)) - \deg(D(z))$, si $f = N/D$. Aquí α oscila sobre los polos de $f(z)$ y r está acotado superiormente por la multiplicidad de α como polo de f. La extracción de coeficientes en esta expresión resulta de la expresión de Newton:

$$[z^n]\frac{1}{(z-\alpha)^r} = \frac{(-1)^r}{\alpha^r}[z^n]\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}} = \frac{(-1)^r}{\alpha^r} = \frac{(-1)^r}{\alpha^r}\binom{n+r-1}{r-1}\alpha^{-n}.$$

El coeficiente binomial es un polinomio de grado $r-1$ en n, y la recopilación de términos asociado con un α dado prueba el teorema.

□

En otras palabras, si tenemos una sucesión $\{a_n\}$ la cual tiene como función generatriz una función racional $P(z)/Q(z)$, con $\deg(P(z)) < \deg(Q(z))$ entonces

$$a_n = P_1(n)\alpha_1^n + P_2(n)\alpha_2^n + ... + P_m(n)\alpha_m^n,$$

donde $\alpha_1^{-1}, ..., \alpha_m^{-1}$ son raíces de $Q(z)$, y cada $P_i(n)$ es un polinomio de grado $r_i - 1$, donde r_i es la multiplicidad de la raíz α_i^{-1}.

4.3.1. Ejemplo

Consideremos la clase $\mathcal{C}$ de composiciones enteras, donde una composición de n tiene "peso" n. Una composición de este tipo se puede representar como una diagrama de puntos y barras, por ejemplo, la composición $2+3+4+1$ del 10 se puede ver como

$$\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet.$$

Este tipo de representación nos permite ver a una composición como una sucesión de enteros estrictamente positivos. Tomemos $\mathcal{C} = \mathrm{Seq}(\mathcal{I})$, con $\mathcal{I}$ la clase de enteros estrictamente positivos. Primero debemos hallar la función generatriz de $\mathcal{I}$, para esto podemos ver a un entero como una sucesión de puntos, y como buscamos enteros positivos, se tiene que $\mathcal{I} = \mathrm{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{Z})$. Es decir:

$$\mathcal{C} = \mathrm{Seq}(\mathrm{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{Z})).$$

Calcular la función generatriz resulta fácil:

$$C(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{1-z}} = \frac{1-z}{1-2z}.$$

Para terminar,

$$\frac{1-z}{1-2z} = \frac{1}{1-2z} - \frac{z}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - z\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^n.$$

Imaginemos ahora que buscamos contar composiciones restringidas, por ejemplo, aquellas cuyas partes son solo 1 y 2, podemos denotar esta clase como $\mathcal{C}_{1,2}$. Es fácil ver que $\mathcal{C} = \mathrm{Seq}(\bullet, \bullet\bullet)$, además, la función generatriz de la clase $\{\bullet, \bullet\bullet\}$ es $A(z) = z + 2z$, por lo tanto

$$C_{1,2}(z) = \frac{1}{1 - A(z)} = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

En general, si tomamos composiciones cuyas partes sean $\{p_1, p_2, ..., p_r\}$ entonces la función generatriz será

$$C_{p_1,...,p_r}(z) = \frac{1}{1 - z^{p_1} - z^{p_2} - ... - z^{p_r}}.$$

Sabido lo anterior, usaremos herramientas de análisis asintótico en el caso de $\mathcal{C}_{1,2,3}$. Sabemos que su función generatriz viene dada por

$$C_{1,2,3}(z) = \frac{1}{1 - z - z^2 - z^3}.$$

Note que $C_{1,2,3}(z)$ cumple las condiciones para aplicar el teorema 4.3.1, el cual nos ayudará a darnos una idea de su orden de magnitud.

Calculamos las raíces de $1 - z - z^2 - z^3$, las cuales son:

$$\alpha_1 \approx 0.5437,\ \alpha_2 \approx -.7718 + 1.1151i,\ \alpha_3 \approx -.7718 - 1.1151i.$$

Ya que cada raíz es de multiplicidad 1 tenemos

$$\frac{1}{1 - z - z^2 - z^3} = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n z^n + B \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n z^n + C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_3}\right)^n z^n ,$$

para algunas constantes A, B, C.

Para poder dar una estimación calculamos

$$\left|\frac{1}{\alpha_1}\right| \approx 1.8393,\ \left|\frac{1}{\alpha_2}\right| = \left|\frac{1}{\alpha_3}\right| \approx 0.7379.$$

Para un n grande el término $(1/\alpha_1)^n$ va a "ganar" a los demás; así, podemos afirmar que el número de composiciones de n con partes $1, 2, 3$ se comporta asintóticamente como $A \cdot 1.8393^n$, para alguna constante A.

Sin pérdida de generalidad, si $G(z)$ es una función generatriz racional, y α_i es una raíz del denominador tal que tiene el módulo más pequeño, y además α_i es raíz simple, entonces para un n grande

$$[z^n]G(z) \sim C \left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^n,$$

con C una constante.

4.4. Fórmula de Stirling

Sin duda alguna, la función factorial es una de las funciones más importantes y utilizadas en combinatoria. Esta importancia viene acompañada de una complejidad computacional considerable (al punto de que no se puede calcular en tiempo polinomial), pues tiene un crecimiento muy rápido. Y como se mencionó al inicio de este capítulo, el análisis asintótico suele ser usado para facilitar la manipulación de estas funciones.

La fórmula asintótica más conocida para estimar la función factorial es la llamada "fórmula de Stirling".

Teorema 4.4.1 (Fórmula de Stirling)**.** $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Demostración. Ver [5] □

Teorema 4.4.2. *Se tiene*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}(1+O(1/n)).$$

Donde C_n denota el $n-$ésimo número de Catalán.

Demostración. Para probar esta estimación se hará uso del teorema de Stirling

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1+O(\frac{1}{n}))}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{(1+O(\frac{1}{n}))}{(1+O(\frac{1}{n}))(1+O(\frac{1}{n}))} \\
&= \frac{1}{n(1+O(\frac{1}{n}))}\cdot\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3 \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4 \\
&= \frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Note que se ha hecho uso de que

$$\frac{1}{1+O(\frac{1}{n})} = 1+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

y también

$$\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

5 Extracción de coeficientes en SageMath

En el siguiente capítulo se pretenden agilizar algunos de los procesos ya estudiados en capítulos anteriores. Para esto haremos uso del software libre “SageMath”.

Como se ha mencionado, la combinatoria analítica consta de dos principales bloques, el método simbólico y el análisis asintótico (como una herramienta de conteo), este segundo conlleva un grado más alto de complejidad debido a la gran variedad de herramientas y teoremas que lo acompañan [2]. Es por esta razón que las implementaciones presentadas tendrán un mayor enfoque a la extracción de coeficientes de funciones generatrices (para el caso del análisis asintótico se complementa el caso de la estructura de las sobreyecciones, ya estudiada en el capítulo 4).

5.1. Funciones generatrices ordinarias en SageMath

Para el caso de las estructuras no etiquetadas, al momento de obtener la función generatriz ordinaria correspondiente nos podemos encontrar con dos casos, obtenemos la función generatriz directamente usando el método simbólico o nos encontramos con una ecuación funcional, la cual, al solucionarla obtendremos la función generatriz buscada. En el primer caso, las ecuaciones generatrices resultan ser triviales, basta usar teoremas relacionados con la series de Taylor para extraer sus coeficientes; es por eso que nos vamos a enfocar en el segundo caso. Analizaremos la clase de los árboles de Motzkin y complementaremos el caso ya estudiado en la sección 3.4 que corresponde a la cantidad de árboles binarios con una cantidad fija de nodos internos.

5.1.1. Árboles binarios con nodos internos fijados

Como primer ejemplo nos vamos a enfocar en la estructura que se ha estudiado previamente en la sección 3.4, obteniendo la ecuación funcional

$$T(z) = 1 + zT(z)^2.$$

Procediendo en SageMat:

Definimos primero nuestras variables `T`, `z` y llamamos `Sistema` a nuestra ecuación funcional:

```
sage: T,z = var('T,z')
sage: Sistema = [T==1+z*T^2]
```

Ahora, solucionamos nuestra ecuación, la cual, al ser de grado dos tendrá dos soluciones.

```
sage: Soluciones = solve(Sistema, T, solution_dict=True); Soluciones
[{T: -1/2*(sqrt(-4*z + 1) - 1)/z}, {T: 1/2*(sqrt(-4*z + 1) + 1)/z}]
```

A nuestras soluciones obtenidas las llamaremos `s0` y `s1`:

$$\texttt{s0} = -\frac{\sqrt{1-4z}-1}{2z}, \quad \texttt{s1} = \frac{\sqrt{1-4z}+1}{2z}.$$

```
sage: s0= Soluciones[0][T]; s1= Soluciones[1][T]
```

Para saber que solución elegir podemos expandir sus coeficientes y analizarlos. Primero expandimos `s0`:

```
sage: s0.series(z,10)
1 + 1*z + 2*z^2 + 5*z^3 + 14*z^4 + 42*z^5 + 132*z^6 + 429*z^7 + 1430*z^8
   + 4862*z^9 + Order(z^10)
```

Ahora `s1`:

```
sage: s1.series(z,10)
1*z^(-1) + (-1) + (-1)*z + (-2)*z^2 + (-5)*z^3 + (-14)*z^4 + (-42)*z^5 +
   (-132)*z^6 + (-429)*z^7 + (-1430)*z^8 + (-4862)*z^9 + Order(z^10)
```

Se puede observar que los coeficientes para el caso de `s0` son más coherentes, así que elegimos `T=s0`:

```
sage: T=s0
```

Finalmente, podemos extraer los coeficientes de `T`, por ejemplo, el coeficiente 100 :

```
sage: T.series(z,101).coefficient(z,100)
896519947090131496687170070074100632420837521538745909320
```

O bien, un conjunto de coeficientes, por ejemplo, los primeros 10:

```
sage: T.series(z,11).coefficients(z,10)
[[1, 0],
 [1, 1],
 [2, 2],
 [5, 3],
 [14, 4],
 [42, 5],
 [132, 6],
 [429, 7],
 [1430, 8],
 [4862, 9],
 [16796, 10]]
```

Secuencia que pertenece al $n-$ésimo número de Catalán [14, A000108].

5.1.2. Árboles de Motzkin

También llamados como "árboles unarios-binarios", es un árbol plano donde todos los nodos internos tienen uno o dos hijos. El tamaño de un árbol de Motzkin es el número total de nodos. A la clase combinatoria de los árboles unarios-binarios la denotamos por $\mathcal{M}$, y se suele denotar por M_n al número de árboles de Motzkin con n nodos.

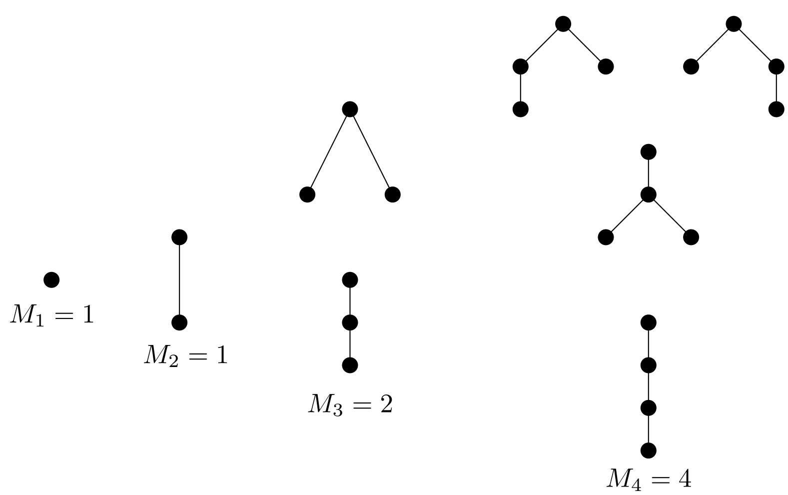


Figura 5.1: $M_1, M_2 M_3$ y M_4

Note que "un objeto de la clase combinatoria $\mathcal{M}$ es un nodo, o un nodo seguido de un árbol unario, o un nodo seguido de un árbol binario¨. Simbólicamente tenemos:

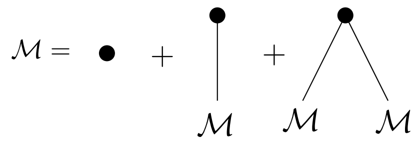


Figura 5.2: Descomposición recursiva de la clase combinatoria $\mathcal{M}$

Lo anterior lo podemos escribir como $\mathcal{M} = \{\bullet\} \cup (\{\bullet\} \times \mathcal{M}) \cup (\{\bullet\} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M})$. Suponiendo que la clase $\mathcal{M}$ tiene como función generatriz $M(z)$, entonces se puede traducir a la siguiente ecuación funcional:

$$M(z) = z + z \cdot M(z) + z \cdot M(z) \cdot M(z) = z + zM(z) + zM(z)^2.$$

El siguiente paso es resolver la recurrencia en SageMath obteniendo dos soluciones :

```
sage: var('M,z')
(M, z)
sage: Sistema = [M==z+z*M+z*M^2]
sage: Solucion = solve(Sistema, M, solution_dict=True);Solucion
[{M: -1/2*(z + sqrt(-3*z^2 - 2*z + 1) - 1)/z},
 {M: -1/2*(z - sqrt(-3*z^2 - 2*z + 1) - 1)/z}]
```

$$\texttt{s0} = -\frac{z - 1 + \sqrt{-3z^2 - 2z + 1}}{2x}, \quad \texttt{s1} = \frac{-z + 1 + \sqrt{-3z^2 - 2z + 1}}{2z}.$$

Guardamos las soluciones y las expandimos como series de potencias para analizar sus coeficientes y elegir una de las dos soluciones:

```
sage: s0=Solucion[0][M]; s1=Solucion[1][M]
sage: s0.series(z,5)
1*z + 1*z^2 + 2*z^3 + 4*z^4 + Order(z^5)
sage: s1.series(z,5)
1*z^(-1) + (-1) + (-1)*z + (-1)*z^2 + (-2)*z^3 + (-4)*z^4 + Order(z^5)
```

Al observar los coeficientes podemos ver que la solución `s1` no hace mucho sentido (pues sus coeficientes son negativos), por lo que vamos a elegir `s0`.

```
sage: M=s0
```

Con esto definido podemos calcular cualquier coeficiente o coeficientes en un intervalo. Por ejemplo, el coeficiente 50 es:

```
sage: M.series(z,51).coefficient(z,50)
9738997404881074746893
```

y los coeficientes del 0 al 10 son:

```
sage: M.series(z,11).coefficients(z,10)
[[0, 0],
 [1, 1],
 [1, 2],
 [2, 3],
 [4, 4],
 [9, 5],
 [21, 6],
 [51, 7],
 [127, 8],
 [323, 9],
 [835, 10]]
```

Sucesión que pertenece al $(n-1)-$ésimo número de Motzkin [14, A001006].

5.2. Funciones generatrices exponenciales en SageMath

Es posible usar SageMath para calcular los coeficientes de $\frac{z^n}{n!}$ en una función generatriz exponencial. Dada una función generatriz exponencial procederemos a expandirla a su serie de Taylor y si a_n es el coeficiente de z^n entonces $a_n \cdot n!$ será el coeficiente de $\frac{z^n}{n!}$.

A modo de ejemplo veamos el caso de e^x:

```
1 sage: var('z')
2 z
3 sage: F=exp(z)
4 sage: G=F.taylor(z,0,10)
5 sage: L=G.coefficients()
6 sage: Coeficientes={c[1]:c[0]*factorial(c[1]) for c in L}
7 sage: Coeficientes
8 {0: 1, 1: 1, 2: 1, 3: 1, 4: 1, 5: 1, 6: 1, 7: 1, 8: 1, 9: 1, 10: 1}
```

En la línea 1 se define nuestra variable z. Después, en la línea 3 introducimos nuestra función, para este caso e^x y en la línea 4 calculamos sus primeros 10 términos de su serie de Taylor. En las líneas 5 y 6 extraemos los coeficientes y multiplicamos por el factorial (para obtener los coeficientes correctos).

5.2.1. Clase de permutaciones

Hay más de 650 artículos en el área de Combinatoria con la palabra permutación en el título [4], esto es un claro indicador de la importancia de este objeto combinatorio. Una permutación del conjunto N_n es una lista de longitud n sin repetición formada por sus elementos. En los términos de esta definición, cada permutación es una (re)ordenación de los elementos de N_n (es sabido que hay $n!$ de ellas).

Para escribir una permutación podemos escribir la lista correspondiente

$$(2, 7, 5, 1, ..., 6),$$

o bien, podemos escribirla como una aplicación biyectiva

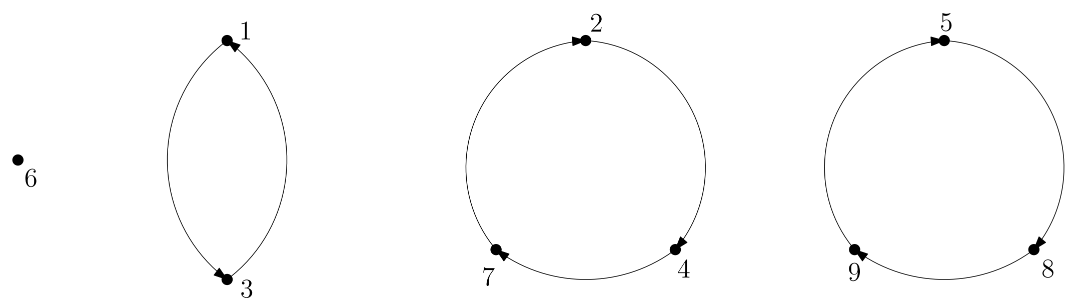
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ 2 & 7 & 5 & 1 & ... & 6 \end{pmatrix}.$$

La segunda notación resulta más útil, pues nos permite identificar la aplicación biyectiva, la cual, en nuestro ejemplo lleva el 1 en el 2, el 2 en el 7, el 3 en el 5, etc.

Existen muchos tipos de permutaciones, uno de ellos son los llamados ciclos. Un ciclo es una permutación que fija un cierto numero de elementos de N_n (puede no fijar ninguno, en este caso se habla de una permutación cíclica), mientras que a los demás elementos los mueve cíclicamente. A modo de ejemplo, considere la siguiente permutación

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix},$$

estamos fijando al elemento 6 y en los restantes note que el 1 va al 3 y el 3 regresa al 1 (tenemos una transposición (1 3)). Luego, el 2 va al 4, el 4 al 7 y el 7 al 2 (tenemos un 3−ciclo (2 4 7)). Finalmente, el 5 va al 8, el 8 al 9 y el 9 al 5 (otro 3−ciclo (5 8 9)). Gráficamente la permutación α se puede ver como



Algebraicamente, tenemos $\alpha = (1\ 3)(2\ 4\ 7)(5\ 8\ 9)(6)$. En este caso, hemos descompuesto a α como un producto de ciclos disjuntos.

La importancia de los ciclos radica justamente en el siguiente teorema.

Teorema 5.2.1. *Cada permutación α se puede escribir como un producto de ciclos disjuntos. Además, dicha representación es única, salvo el orden en que se escriben los ciclos.*

Demostración. Ver [4, cap. 3] □

Recordemos que, en el entorno etiquetado $\mathrm{Cyc}(\mathcal{Z})$ contiene todos los ciclos de N_n, para cada $n \geq 0$. Aplicando la construcción Set a $\mathrm{Cyc}(\mathcal{Z})$ producimos todos los conjuntos de ciclos disjuntos, los cuales, por el teorema 5.2.1, están en biyección con las permutaciones. Por lo que la clase de permutaciones $\mathcal{P}$ se asocia con la construcción $\mathcal{P} = \mathrm{Set}(\mathrm{Cyc}(\mathcal{Z}))$. Hacer uso del método simbólico para obtener su función generatriz es sencillo:

Usando el teorema 3.3.3 tendremos que

$$P(z) = \exp(\mathrm{Cyc}(\mathcal{Z})),$$

y por el teorema 3.3.4

$$P(z) = \exp\left(\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right).$$

Ahora calculemos los primeros 13 coeficientes de $P(z)$:

```
sage: var('z')
z
sage: P=exp(log(1/(1-z)))
sage: g=P.taylor(z,0,13)
sage: L=g.coefficients()
sage: Coeficientes={c[1]:c[0]*factorial(c[1]) for c in L}
sage: Coeficientes
{0: 1,
 1: 1,
 2: 2,
 3: 6,
 4: 24,
 5: 120,
 6: 720,
 7: 5040,
 8: 40320,
 9: 362880,
 10: 3628800,
 11: 39916800,
 12: 479001600,
 13: 6227020800}
```

Sucesión que pertenece a los números factoriales ($n!$) [14, A000142].

5.2.2. Particiones de conjuntos

Definición 5.2.1. *Una partición π de un conjunto S es una colección $B_1, B_2, ..., B_k$ de subconjuntos no vacíos de S tal que $\cup_{i=1}^{k} B_i = S$.*

Los subconjuntos B_i son, a menudo, llamados bloques. Cabe recalcar que el orden de los elementos dentro de cada bloque es irrelevante (esto está implícito en el uso de subconjuntos), y el orden de los bloques también es irrelevante.

El segundo punto dice que, pese a que nombramos a los bloques como $B_1, B_2, ..., B_k$ no se debe suponer que existe un orden entre ellos.

La definición 5.2.1 nos invita a ver a una partición como un conjunto de conjuntos con sus etiquetas mayores o iguales a 1, así, su construcción etiquetada vendrá dada por

$$\mathcal{P} = \mathrm{Set}(\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$$

Usando el método simbólico, en particular el teorema 3.3.3, tenemos

$$P(z) = \exp(\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$$

Recordemos que la función generatriz de $\mathrm{Set}(\mathcal{Z})$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, en nuestro caso $\mathrm{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z})$ tendrá como función generatriz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1$, así que

$$P(z) = \exp(e^x - 1)$$

Ahora calculamos los primeros 13 coeficientes de $P(z)$:

```
sage: var('z')
z
sage: P=exp(exp(z)-1)
sage: G=P.taylor(z,0,13)
sage: L=G.coefficients()
sage: Coeficientes={c[1]:c[0]*factorial(c[1]) for c in L}
sage: Coeficientes
{0: 1,
 1: 1,
 2: 2,
 3: 5,
 4: 15,
 5: 52,
 6: 203,
 7: 877,
 8: 4140,
 9: 21147,
 10: 115975,
 11: 678570,
 12: 4213597,
 13: 27644437}
```

Esta sucesión pertenece a los llamados números de Bell [14, A000110]

5.2.3. Números de Lah

Los números de Lah, denotados por $\binom{n}{k}_L$ enumeran el número de particiones de un conjunto con n elementos en k listas ordenadas no vacías. Esta sucesión satisface la siguiente recurrencia

$$\binom{n}{k}_L = \binom{n-1}{k-1}_L + (n+k-1)\binom{n-1}{k}_L,$$

con $\binom{0}{0}_L = 1$ y $\binom{n}{0}_L = \binom{0}{n}_L = 0$ si $n \geq 1$.

Los números de Lah son importantes a la hora de introducir la sucesión $L(n)$, la cual se define como el número total de particiones de N_n en listas ordenadas, a este concepto se le conoce como "permutaciones fragmentadas", así :

$$L(n) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_L.$$

Por ejemplo $L(3) =$

$$\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{2,1\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{2\}\},\ \{\{3,1\},\{2\}\}$$

$$\{\{1\},\{2,3\}\},\ \{\{1\},\{3,2\}\},\ \{\{1,2,3\}\},\ \{\{1,3,2\}\},\ \{\{2,1,3\}\}$$

$$\{\{2,3,1\}\},\ \{\{3,1,2\}\},\ \{\{3,2,1\}\}.$$

Si contamos los elementos podemos notar que $L(3) = 13$.

Teniendo claro lo anterior es fácil ver que estamos hablando de "un conjunto de listas", lo que nos indica que su construcción asociada es $\mathrm{Set}(\mathrm{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$. Usando el método simbólico, en concreto el teorema 3.3.3 y el teorema 3.2.5 obtenemos la función generatriz

$$L(z) = e^{z/(1-z)}.$$

Ahora vamos a extraer los coeficientes de $L(z)$ usando SageMath.

```
sage: var('z')
z
sage: L= exp(z/(1-z))
sage: G=L.taylor(z,0,15)
sage: P=G.coefficients()
sage: Coeficientes={c[1]:c[0]*factorial(c[1]) for c in P}
sage: Coeficientes
{0: 1,
 1: 1,
 2: 3,
 3: 13,
```

```
4: 73,
5: 501,
6: 4051,
7: 37633,
8: 394353,
9: 4596553,
10: 58941091,
11: 824073141,
12: 12470162233,
13: 202976401213,
14: 3535017524403,
15: 65573803186921}
```

Sucesión que pertenece a [14, A000262]

A Series de potencias y funciones generatrices

Uno de los conceptos más importantes mencionado a lo largo del texto es el de función generatriz; y no es de extrañarse que sea la primera vez que el lector se encuentre con dicho objeto matemático. Es por esta razón que el siguiente apéndice tiene como propósito principal esclarecer la diferencia entre una serie, una serie formal de potencias y una función generatriz.

A.1. Sucesiones y series

Los conceptos de serie y sucesión (definiciones 3.1.2 y 3.1.1, respectivamente) son básicos y de gran importancia en matemáticas. Desde la construcción de los números reales por medio de sucesiones de Cauchy y su convergencia, hasta la aparición de series en la definición de funciones importantes (como las trigonométricas y e^x), o en soluciones de ecuaciones diferenciales. Es por eso que la total comprensión de estos dos conceptos es de vital importancia para todo estudiante. A continuación introduciremos el término de sucesión con la única intención de definir formalmente lo que es una serie.

A.1.1. Sucesiones

La palabra sucesión la vamos a usar para designar una colección ordenada de objetos, de forma que uno de ellos se va a identificar como el primero, otro con el segundo, etc. Es decir, una sucesión es una secuencia de números ordenados. En nuestro contexto, la importancia de las sucesiones viene dada por las propiedades que estas le heredan a las series, por ejemplo, su convergencia única.

Definición A.1.1 (Convergencia de una sucesión)**.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión y L un número. Diremos que $\{a_n\}$ converge a L si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que*

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

con $n \geq N$. Si $\{a_n\}$ converge a L podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Si una sucesión no converge entonces diremos que diverge.

Teorema A.1.1. *Una sucesión tiene a lo más un límite.*

Demostración. Sea $\{s_n\}$ una sucesión con limites L_1 y L_2 y elegimos un $\varepsilon > 0$. Ya que $\{s_n\}$ converge a L_1 entonces hay un entero N_1 tal que

$$|s_n - L_1| < \varepsilon, \forall\, n \geq N_1.$$

Del mismo modo

$$|s_n - L_2| < \varepsilon, \forall\, n \geq N_2.$$

Para cada $n \geq \text{máx}\{N_1, N_2\}$ se cumplen ambas desigualdades. Por lo que para cada n tenemos

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - S_n + S_n - L_2| \leq |S_n - L_1| + |S_n - L_2| < 2\varepsilon.$$

Pero ε es arbitrario y positivo. Si $L_1 \neq L_2$ entonces podemos tomar

$$\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$$

obteniendo la contradicción de que $|L_1 - L_2| < |L_2 - L_1|$, por lo tanto $L_1 = L_2$ □

A.1.2. Series

El término de sucesión se puede combinar con la noción de suma para así obtener un objeto llamado *serie*. Este concepto intenta capturar la idea de sumar infinitos números complejos y tienen aplicaciones en muchas áreas de las matemáticas, en nuestro caso, lo enfocaremos para tener un mejor entendimiento de la teoría de funciones generatrices.

Sabemos (al menos teóricamente) cómo lidiar con sumas finitas de números reales

$$\sum_{k=j} a_k = a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + ... + a_n.$$

Sin embargo, el mayor interés en las matemáticas tiende a recaer en el área de las *series infinitas*:

$$\sum_{k=j} a_k = a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + ...$$

Definición A.1.2 (Sumas parciales)**.** *Definimos la $n-$ésima suma parcial, S_n por*

$$S_n = a_j + a_{j+1} + ... + a_n = \sum_{k=j}^{n} a_k.$$

La definición A.1.2 nos permite introducir el término de *sucesión de sumas parciales* $\{S_k\}_{k=j}^{\infty}$.

Se dice que la serie infinita $\sum_{k=j}^{\infty} a_k$ converge siempre que la sucesión de sumas parciales converja a un número real l. En este caso se define $\sum_{n=j}^{\infty} a_n = l$. De este modo

$$\sum_{n=j}^{\infty} a_n = l \text{ significa que } \lim_{n\to\infty} S_n = l, \text{ o bien, } \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \right) = l.$$

Definición A.1.3 (Convergencia de una serie)**.** *Diremos que una serie es convergente si la sucesión $\{S_n\} = S_1, S_2, \ldots$ de sus sumas parciales tiende a un límite. Formalmente, una serie converge si existe l tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero suficientemente grande N tal que para cada $n \geq N$ se cumple que $|S_n - l| < \varepsilon$.*

La convergencia es probablemente el concepto de más interés a la hora de estudiar series infinitas, es por eso que su clasificación, a menudo, dependerá totalmente de su convergencia (convergen o no, es fácil deducir su convergencia, etc.). A continuación haremos mención de las series más trabajadas en análisis (geométrica, telescópica, y armónica), de la mano de algunos resultados impotentes.

Teorema A.1.2. *Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| < 1$, entonces*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j = \frac{1}{1-a},$$

(por convención, en esta ocasión diremos que $0^0 = 1$) pero si $|a| \geq 1$ entonces la serie diverge.

Demostración. Sea n un entero no negativo. Si $a = 1$ entonces

$$\sum_{j=0}^{n} a^j = \sum_{j=0}^{n} 1 = n + 1.$$

por lo que la serie diverge. Ahora sea $a \neq 1$, entonces

$$\sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}.$$

Sabemos que para cada $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ y además, la sucesión $\{a^n\}$ converge si y solo si $|a| < 1$ ó $a = 1$. Esto nos dice que la serie converge a $1/(1-a)$ si $|a| < 1$, pero diverge si $|a| \geq 1$. $\square$

Definición A.1.4 (Serie geométrica)**.** *La serie*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j = \frac{1}{1-a},$$

es llamada serie geométrica.

Teorema A.1.3. *La serie*

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_{j+1}-a_j)$$

converge si y solo si la sucesión $\{a_n\}$ *converge, y en este caso*

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_{j+1}-a_j)=\lim_{n\to\infty}a_n-a_0.$$

Demostración. Es inmediato, pues por la propiedad telescópica [12, p. 26] para cada n se tiene

$$\sum_{j=0}^{n}(a_{j+1}-a_j)=a_{n+1}-a_0.$$

□

Definición A.1.5 (Serie telescópica)**.** *La serie*

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_{j+1}-a_j)$$

es llamada serie telescópica.

Teorema A.1.4. *Si la serie* $\sum_{j=0}^{\infty}a_j$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Demostración. Para cada $n\geq 0$ sea

$$S_{=}\sum_{j=0}^{n}a_j.$$

Entonces $a_n=S_n-S_{n-1}$ para cada $n>0$. Si

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_j=S,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

□

El teorema anterior tiene un mayor impacto en su contrapositiva, pues es útil para establecer la prueba del $n-$ésimo término. La prueba del $n-$ésimo término dice que si $\lim_{n\to\infty}a_n$ no existe o no es cero, entonces la serie $\sum_{j=0}^{\infty}a_j$ diverge.

Teorema A.1.5. *La serie*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

diverge.

Demostración. Denotemos por $\{s_n\} = \sum_{j=1}^{n} 1/j$, y probemos que $\{s_n\}$ diverge.

Suponga que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Entonces

$$t_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2j} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \to \frac{s}{2}$$

ya que $n \to \infty$, y

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} = s_{2n} - t_n \to s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}.$$

ya que $n \to \infty$. Esto no es posible, ya que

$$\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j} > 0 \text{ para cada } j > 0,$$

tenemos $\lim_{n\to\infty}(u_n - t_n) > u_1 - t_1 = 1/2 > 0$. Por lo tanto $\{s_n\}$ diverge. □

Definición A.1.6 (Serie armónica)**.** *La serie*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

se llama serie armónica.

A.1.3. Criterios de convergencia

Deducir si una serie converge o diverge no siempre es tarea fácil, por esta razón existen distintas pruebas que se aplican a la serie en cuestión y así facilitar la deducción de la divergencia o convergencia de dicha serie. A continuación enunciaremos las pruebas más conocidas y utilizadas en la teoría de series, la demostración de estos enunciados los puede consultar en [12, c. 3].

Teorema A.1.6 (Criterio de comparación)**.** *Sea $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ dos series con términos no negativos, y suponga que $a_j \leq b_j$ para cada j mayor o igual a un número entero no negativo N. Si la última serie converge, entonces también lo hace la primera; si la primera diverge, lo hace la segunda.*

Teorema A.1.7 (Criterio de condensación de Cauchy). *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no creciente de términos no negativos, entonces la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge si y solo si su serie condensada*[1] *lo hace.*

Teorema A.1.8 (Criterio de la razón). *Sea $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ una serie de términos positivos y sea*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

para algún número L. Entonces la serie converge si $L < 1$ y diverge si $L > 1$.

Teorema A.1.9 (Criterio de la raíz). *Sea $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ una serie de términos no negativos y sea*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$$

para algún número L. Entonces la serie converge si $L < 1$ y diverge si $L > 1$.

Teorema A.1.10 (Criterio de Kummer-Jensen). *Sea $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ una serie de términos positivos, y $\{b_n\}$ una sucesión de términos positivos. Sea*

$$c_n = b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1}.$$

entonces

1. *Si $\lim_{n\to\infty} c_n > 0$, entonces $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge.*

2. *Si $\sum_{j=0}^{\infty} 1/b_j$ diverge y existe N tal que $c_n \leq 0$ para cada $n \geq N$, entonces $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ diverge.*

Teorema A.1.11 (Criterio de Raabe). *Sea $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ una serie de términos positivos, y suponga que*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$$

para algún número L. Entonces la serie converge si $L > 1$ y diverge si $L < 1$.

[1] la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n)$ se llama condensada de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

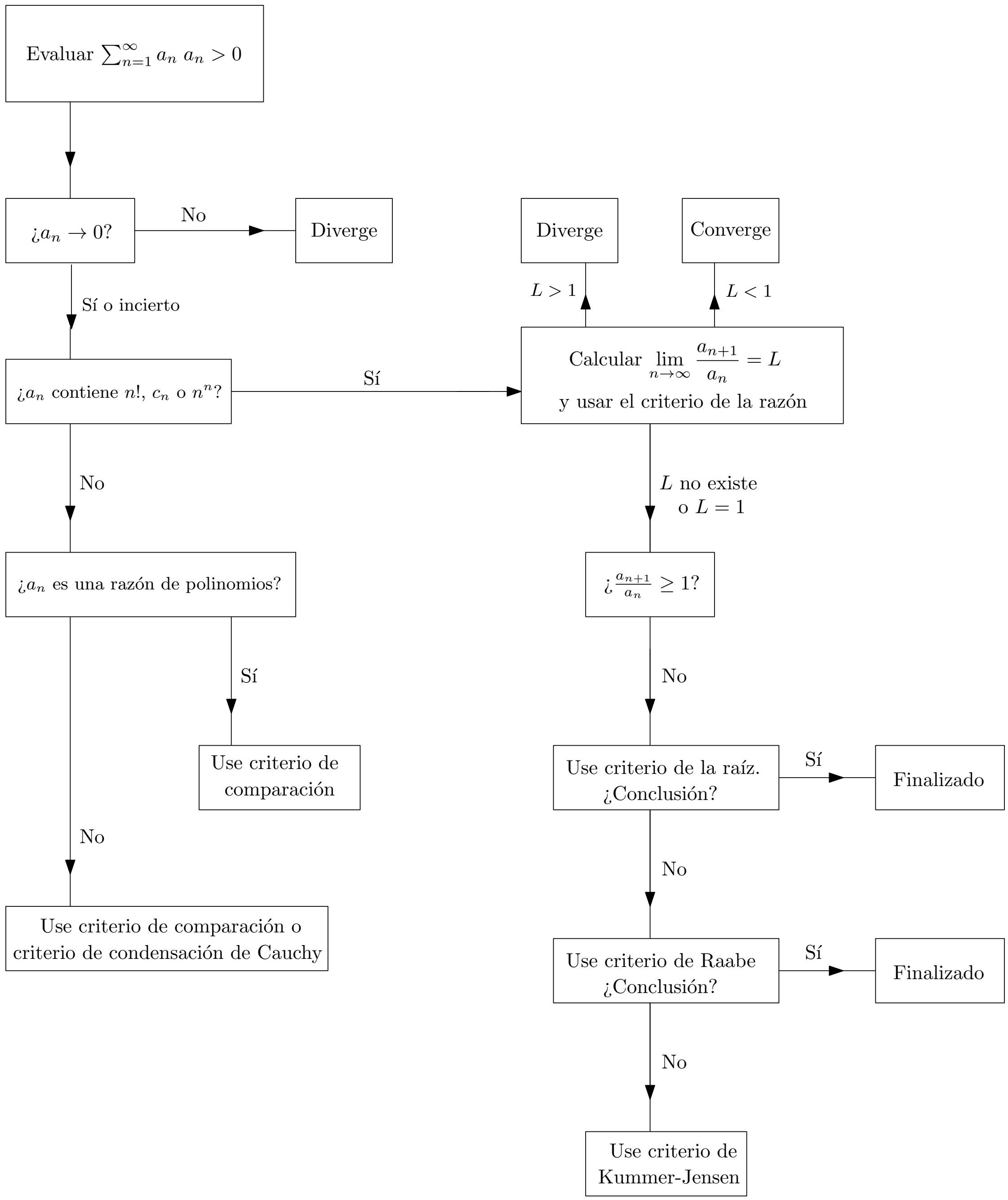


Figura A.1: Determinar convergencia o divergencia de una serie.

A.1.4. Series de potencias

Deben ser claras las diferencias que hay entre una serie de potencias y una serie. Como hemos visto, la palabra serie hace referencia a una suma infinita. Un ejemplo inmediato es pensar en una serie geométrica cuyo primer término es 1 y cuya proporción es 1/2:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

y esta suma converge a 2.

Por otra parte, una serie de potencias es una serie con una variable (usualmente se usa x), cuya $n-$ésima potencia aparece como un factor en el $n-$ésimo término de la serie. Retomando el ejemplo anterior, la serie de potencias pasa a ser:

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + ... + \frac{1}{2^n}x^n + ...$$

la serie de potencias converge cuando $-2 < x < 2$, y en este caso la suma es

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2}}.$$

Es decir, la serie representa a la función $f(x) = \frac{1}{(1-x/2)}$ en el intervalo $(-2, 2)$.

Dentro de este contexto vale la pena recalcar una observación más, nos referimos como "serie formal de potencias" cuando solo nos preocupamos por la "forma" de la serie (los coeficientes) y no por la convergencia. Tendrá sentido tratar a una serie formal de potencias como función únicamente en áreas donde la serie infinita converge; generalmente en el radio de convergencia (sección 4.1), en este caso nuestra serie formal de potencias pasa a ser una serie de potencias convergente.

A lo largo de la tesis hemos trabajado con distintos tipos de series convergentes de potencias, como las series de Taylor y de Laurent.

En el contexto del análisis complejo, usamos series de Taylor para funciones holomorfas y series de Laurent en presencia de singularidades aisladas. Ambas representan la función, pero solo una va a converger cuando $|z| > 1$, y la otra solo converge cuando $|z| < 1$. Además, es fácil notar por el teorema de Cauchy que cuando f es holomorofa la serie de Taylor y la serie de Laurent son lo mismo.

Definición A.1.7 (Serie formal de potencias)**.** *Una serie formal de potencias en una variable con coeficientes en* $\mathbb{R}$ *es una función* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Se escribe* $F(n)$ *ó* F_n *para el valor de la función en la entrada* $n \in \mathbb{N}$*. El conjunto de todas las funciones formales de potencias (con coeficientes en* $\mathbb{R}$*) se denota por* $\mathbb{R}[[x]]$*.*

Una serie formal de potencias $F \in \mathbb{R}[[x]]$ es una sucesión $F = (F_0, F_1, , ..., F_n, ...)$ indexada por enteros no negativos; donde cada $F_n \in \mathbb{R}$. Esta sucesión a menudo se escribe como

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

donde a F_n se le conoce como coeficiente de x^n en F.

Definición A.1.8 (Igualdad). *Dos series formales de potencias $F, G \in \mathbb{R}[[x]]$ son iguales si $F_n = G_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Definición A.1.9 (Suma y producto). *Dadas $F, G \in \mathbb{R}[[x]]$, definimos la suma $F + G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como $(F+G)(n) = F(n) + G(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos el producto $F \cdot G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como $(F \cdot G)(n) = \sum_{i+j=n} F(i) \cdot G(j)$.*

Usando nuestra notación:

$$\text{Suma: } \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (F_n + G_n) x^n.$$

$$\text{Producto: } \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} F_i \cdot G_j \right) x^n.$$

Teorema A.1.12 (Producto de k-series). *Sea $G_1, G_2, ..., G_k \in \mathbb{R}[[x]]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$(G_1 \cdot G_2 \cdot ... \cdot G_k) = \sum_{j_1 + j_2 + ... + j_k = n} G_1(j_1) \cdot G_2(j_2) \cdot ... \cdot G_k(j_k).$$

Demostración. Usando inducción sobre k. El caso $k = 1$ es trivial, para $k = 2$ viene dado por la definición. Ahora suponga que $k > 2$ y que conocemos el resultado para $k - 1$. Sea $F = G_1 \cdot G_2 \cdot ... \cdot G_{k-1}$, y calculamos

$$(G_1 \cdot G_2 \cdot ... \cdot G_k)(n) = (F \cdot G_k)(n) = \sum_{r+s=n} F(r) \cdot G_k(s)$$

$$= \sum_{r+s=n} \left(\sum_{j_1 + j_2 + ... + j_{k-1} = r} G_1(j_1) \cdot G_2(j_2) \cdot ... \cdot G_{k-1}(j_{k-1}) \right) G_k(s)$$

$$= \sum_{j_1 + j_2 + ... + j_k = n} G_1(j_1) \cdot G_2(j_2) \cdot ... \cdot G_{k-1}(j_{k-1}) \cdot G_k(j_k).$$

El último paso se sigue por la ley distributiva y cambiando los nombres de los índices de suma.

□

Del mismo modo que en las sucesiones podemos definir el límite de una serie formal de potencias y definir operaciones sobre estos límites.

Definición A.1.10 (Límite de una sucesión de series de potencias formales). *Sea $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{R}[[x]]$ y $G \in \mathbb{R}[[x]]$. Escribimos*

$$\lim_{k \to \infty} F_k = G \text{ ó bien } F_k \to G,$$

si y solo si para cada $n \geq 0$*, existe un índice* $K(n)$ *tal que* $k \geq K(n)$ *implica* $F_k(n) = G(n)$*.*

Teorema A.1.13 (Álgebra de límites)**.** *Sean* $F_n, G_n \in \mathbb{R}[[x]]$ *tal que* $F_n \to P$ *y* $G_n \to Q$*. Entonces:*

1. $F_n + G_n \to P + Q$*.*

2. $F_n \cdot G_n \to F_n \cdot G_n$*.*

Teorema A.1.14. *Sea*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

una serie de potencias. Hay un R *con* $0 \leq R \leq \infty$*, tal que la serie converge absolutamente para* $0 \leq |x-c| < R$ *y diverge para* $|x-c| > R$*. Además, si* $0 \leq \rho \leq R$*, entonces la serie de potencias converge uniformemente en el intervalo* $|x-c| \leq \rho$*, y la suma de la serie es continua en* $|x-c| < R$*.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $c = 0$ (o bien, tome x por $x - c$). Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

y suponga que converge para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, con $x_0 \neq 0$.

Luego, sus términos convergen a cero, por lo que estan acotadas y existe $M \geq 0$ tal que

$$|a_n x_0^n| \leq M, \, n = 0, 1, 2, ...$$

Si $|x| < |x_0|$ entonces

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M r^n \;, r = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1.$$

Comparando la serie de potencias con la serie geométrica convergente $\sum M r^n$, notamos que la serie $\sum a_n x^n$ converge absolutamente. Por lo tanto, si la serie de potencias converge para algunos $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < |x_0|$.

Sea

$$R = \sup\{|x| \geq 0 \ : \ \sum a_n x^n \text{ converge}\}$$

Si $R = 0$, entonces la serie sólo converge en $x = 0$. Si $R > 0$ entonces la serie converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < R$, ya que converge para algunos $x_0 \in \mathbb{R}$ con $|x| < |x_0| < R$. Si $R = \infty$ entonces la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Finalmente, sea ρ con $0 \leq \rho \leq R$, suponga que $|x| \leq \rho$. Tomemos $\sigma > 0$ tal que $\rho > \sigma > R$. Entonces $\sum |a_n \sigma^n|$ converge, luego $|a_n \sigma^n| \leq M$, por lo que

$$|a_n x^n| = |a_n \sigma^n| \left|\frac{x}{\sigma}\right|^n \leq |a_n \sigma^n| \left|\frac{\rho}{\sigma}\right| \leq M r^n, \text{ con } r = \rho/\sigma < 1.$$

Ya que $\sum M r^n < \infty$, la prueba M de Weierstrass nos dice que la serie converge uniformemente en $|x| \leq \rho$, y la suma será continua en $|x| \leq \rho$. Al ser esto válido para cada $0 \leq \rho \leq R$, concluimos que la suma es continua en $|x| < R$.

□

Ya que hemos probado la continuidad de una serie de potencias ahora podemos definir su derivabilidad.

Definición A.1.11 (Derivada de una serie de potencias)**.** *Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *usando la regla de la cadena se tiene:*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Las derivadas formales de orden superior se pueden definir recursivamente para cada $k \geq 1$, como $F^{(k+1)} = (F^{(k)})'$. Se sigue que

$$F^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+k) F_{n+k} x^n.$$

Definición A.1.12 (Integral de una serie de potencias)**.** *Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *definimos su integral como:*

$$\int f(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + ... + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

A.1.5. Funciones generatrices

Dada una función de conteo $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, a menudo descrita como una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, podemos asociarle una serie de potencias $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, la cual se le llama *función generatriz* de la secuencia.

Una función generatriz es una *serie formal de potencias*, y por serie formal de potencias nos referimos a que estamos considerando este objeto no como una función de

x, si no como una colección de marcadores de posición convenientes para indexar una sucesión $a_1, a_2, a_,..., a_n$. En otras palabras, por lo general no nos vamos a preocupar por asignar valores a x, en cambio, vamos a tomar este objeto y pretender que todos los x_i son marcadores de posición que nos permite diferenciar a_1 y a_2, y así sucesivamente.

Recordemos que al estudiar series de potencias por lo general hacemos uso de la información conocida de la sucesión para estudiar la serie, es decir

$$(\text{Información de } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}) \Rightarrow \left(\text{Información de } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right).$$

Esto suele pasar ya que, en general es más fácil estudiar las sucesiones que las series de potencias. Dicho esto, es natural preguntarse si podemos invertir este proceso. Supongamos que tenemos una secuencia que buscamos estudiar, ¿qué pasa si la convertimos en una serie de potencias y usamos nuestro conocimiento para responder preguntas sobre la sucesión original? Es decir,

$$\left(\text{Información de } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \Rightarrow (\text{Información de } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

La respuesta es sí, y a este método se le conoce como *método de funciones generatrices*, el cual trabaja de la siguiente manera:

- Tomamos nuestra sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que buscamos estudiar.
- Observamos su serie de potencias asociada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.
- El siguen te paso es buscar una forma cerrada para la serie de potencias (por ejemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$). Para encontrar esta forma cerrada se usan herramientas algebraicas o de cálculo.
- Usamos la forma cerrada de la serie de potencias para recuperar la información de la sucesión original.

Teorema A.1.15. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y $A(x)$, $B(x)$ sus funciones generatrices asociadas respectivamente, entonces*

1. *la sucesión $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$ tiene como función generatriz $C(x) = A(x) + B(x)$,*
2. *la sucesión $\{c_n\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right\}$ tiene como función generatriz*
$$C(x) = A(x) \cdot B(x),$$
3. *la sucesión $\{c_n\} = \{\alpha a_n\}$ tiene como función generatriz $C(x) = \alpha A(x)$, con α constante,*

4. *la sucesión*

$$\{c_n\} = \begin{cases} a_{n-m}, & si\ n \geq m \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

tiene como función generatriz $C(x) = x^m A(x)$,

5. *la sucesión* $\{c_n\} = \{a_{n+m}\}$ *tiene como función generatriz*

$$C(x) = \frac{A(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n}{x^m},$$

6. *la sucesión* $\{c_n\} = \{na_n\}$ *tiene como función generatriz* $C(x) = xA'(x)$,

7. *la sucesión*

$$\{c_n\} = \begin{cases} \frac{a_n}{n}, & si\ n > 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

tiene como función generatriz $C(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{A(t) - a_0}{t}\, dt$,

8. *la sucesión* $\{c_n\} = \left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}$ *tiene como función generatriz* $C(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$.

Demostración. Se tiene que:

1. $C(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = A(x) + B(x)$.

2. $C(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} a_k b_{n-k} x^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k x^k b_l x^l = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l\right) = A(x) \cdot B(x).$$

3. $C(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha \cdot A(x)$.

4. $C(x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^m A(x).$

5. $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}x^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^{n-m} = x^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n = \dfrac{A(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n}{x^m}.$

6. $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = x \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \cdot A'(x).$

7. $C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \dfrac{A(x) - a_0}{t}\mathrm{d}t.$

8. $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_k x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{A(x)}{1-x}.$$

□

Las funciones generatrices pueden considerarse de dos formas distintas, como objetos algebraicos o como objetos analíticos.

Para considerarlas como objetos algebraicos debemos situarnos en el anillo de las series formales de potencias [3], donde estas se encuentran sujetas a una suma, un producto, una composición, etc. Una vez más, el término formal hace referencia a objetos puramente algebraicos donde el indeterminado x^n es una marca para saber donde está el $n-$ésimo coeficiente. En este contexto, una función generatriz y una serie formal de potencias se pueden considerar el mismo objeto.

Estudiar las funciones generatrices como objetos analíticos es lo que hemos hecho en el capítulo 4. Tratarlas como funciones analíticas y usar herramientas del análisis complejo para obtener información sobre el comportamiento de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ para $n's$ grandes.

B Introducción a SageMath

En el capítulo 5, hemos abordado el tema de la extracción de coeficientes de funciones generatrices apoyándonos del SAC (sistema algebraico computacional) `SageMath`, es un software de licencia libre y código abierto. Fue lanzado en el 2005, es decir, es un sistema relativamente nuevo; razón por la cual, al día de hoy no es muy conocido (a comparación de otros SAC's) dentro de la comunidad matemática. Es precisamente esta mocedad la que nos lleva a pensar que muy probablemente el lector no esté familiarizado con `SageMath`. El presente apéndice se enfoca principalmente en apoyar al lector a comprender con más claridad los códigos presentados en el capítulo 5.

Gran parte de `SageMath` está implementado usando el lenguaje de programación Python. La audiencia a la que está dirigida, principalmente, este sistema es a la comunidad matemática y tiene como principal objetivo proveer software útil para la investigación en diversas áreas tales como la Combinatoria, Álgebra, Teoría de números, etc.

B.1. Conceptos básicos

En toda disciplina lo más importante son los fundamentos, es por eso que antes de intentar hacer matemáticas avanzadas en `SageMath` debemos ser capaces de manipular lo más esencial, como la aritmética y el manejo de funciones matemáticas básicas.

B.1.1. Calculadora y funciones básicas

Una de las más básicas y principales herramientas de `SageMath` es el uso de este como una calculadora; por ejemplo, al escribir `2+3` y presionar "Evaluate" obtenemos como resultado `5`. Análogamente, al evaluar la instrucción `2*3` obtenemos `6` (las operaciones resta `-` y cociente `/` trabajan de forma similar). Las operaciones potencia y factorial se usan de una manera ya conocida, por ejemplo, para evaluar 2^2 debemos dar la instrucción `2^2`; y para evaluar $2!$ simplemente basta escribir `factorial(2)`. Otra operación básica es la raíz cuadrada, para calcular, por ejemplo $\sqrt{9}$ debemos dar la instrucción `sqrt(9)` y para una raíz de orden superior, por ejemplo $\sqrt[6]{64}$ damos la instrucción `64^(1/6)`.

```
sage: #Todo el texto que aparece a la derecha del signo # son comentarios
sage: 12+96
108
sage: 87-32
55
sage: 1000/10
100
sage: 7/3 #Podemos obtener numeros irracionales
7/3
sage: 12/2 #Tambien se reducen las fracciones reducibles
6
sage: 3^2 #Para calcular potencias se usa el circunflejo
9
sage: 3**2 #O bien un doble asterisco
9
sage: 3^2, 2**3 #Podemos separar operaciones por comas
(9, 8)
sage: 3^2; 2**3 #Podemos separar operaciones por punto y coma
9
8
sage: 4^(-2) #Las potencias de exponente negativo producen fracciones
1/16
```

Puede presentarse el caso, en el que busquemos calcular, por ejemplo la raíz cuadrada de un número primo (la cual siempre será irracional) y `SageMath` nos permite aproximar el resultado tanto como deseemos, por ejemplo, para calcular $\sqrt{3}$ a 50 dígitos damos la siguiente instrucción

`numerical_approx(sqrt(3), digits=50)`.

```
sage: numerical_approx(sqrt(3), digits=50)
1.7320508075688772935274463415058723669428052538104
```

Cabe recalcar que en `SageMath` existen las llamadas *construcciones*, las cuales nos ayudan a responder preguntas del tipo "*¿Cómo construyo... en `SageMath`?*" Por ejemplo, para construir la derivada de una función f se usa (como veremos a continuación) la construcción `f.diff()`.

B.1.2. Variables y ecuaciones

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más variables, y solucionar ecuaciones suele ser una tarea incesante en matemáticas. Es por esta razón que `SageMath` funciona como una gran herramienta para esto. Para definir una o más variables se hace uso de la instrucción `var`; por ejemplo, para definir las variables x, y, z :

```
sage: var('x␣y␣z')
(x, y, z)
```

También es posible hacerlo de manera individual

```
sage: var('x')
x
sage: var('y')
y
sage: var('z')
z
```

En el ámbito de la programación existen dos tipos de operadores muy importantes, operadores de asignación y de comparación. Un operador de asignación, como su nombre lo indica, se encarga de asignarle a una variable el resultado de una expresión matemática o el valor de otra variable, en `SageMath` se utiliza "`=`" para la asignación; y un operador de comparación nos ayuda a comparar dos expresiones y nos devuelve un valor de verdad el cual representa relación de los valores comparados, para comparación utilizamos `==`, `<`, `>`, `<=`, `>=`.

Ahora, suponga que buscamos resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 3 = 0$. Para esto, definimos la variable x y usamos la instrucción `solve`:

```
1 sage: var('x')
2 x
3 sage: solve(x^2+2*x+3==0,x)
4 [x == -I*sqrt(2) - 1, x == I*sqrt(2) - 1]
```

Note que en la línea 1 y 2 hemos definido la variable x, en la línea 3 usamos la instrucción `solve` seguido de nuestra ecuación a resolver y al final la variable respecto a la cual buscamos la solución. Finalmente, en la línea 4 `SageMath` nos da las dos soluciones: $-1 - i\sqrt{2}$ y $-1 + i\sqrt{2}$.

Habrá casos en el que las soluciones llegan a ser ilegibles, para esto podemos proceder de la siguiente manera

```
sage: respuesta=solve(x^2+2*x+3==0,x)
sage: print(respuesta[0])
x == -I*sqrt(2) - 1
sage: print(respuesta[1])
x == I*sqrt(2) - 1
```

Lo cual nos permite imprimir las dos respuestas ([0] y [1]) por separado.

B.1.3. Funciones

En el capítulo 1, hemos definido lo que es una función (1.1.3), concepto central de muchas áreas de las matemáticas modernas. Es por eso que `SageMath` proporciona herramientas para su manipulación de forma fácil y concisa. En la siguiente tabla, en la columna izquierda, se muestra la instrucción requerida en `SageMath` para llamar a la función que se muestra de lado derecho.

`sin(x)`	Seno de x en radianes
`cos(x)`	Coseno de x en radianes
`tan(x)`	Tangente de x en radianes
`sinh(x)`	Seno hiperbólico de x
`cosh(x)`	Coseno hiperbólico de x
`tanh(x)`	Tangente hiperbólica de x
`asin(x)`	ArcoSen de x
`acos(x)`	ArcoCoseno de x
`atan(x)`	ArcoTangente de x
`abs(x)`	Valor absoluto de x
`exp(x)`	Exponencial de base el número e
`ln(x)`	Logaritmo natural de x
`log(x, base)`	Logaritmo

Es posible nombrar y hacer operaciones con funciones, por ejemplo, derivarlas:

```
sage: #Podemos nombrar una funcion
sage: F = x^3+sin(x)
sage: F
x^3 + sin(x)
sage: #Tambien podemos derivar la funcion con la construccion .diff()
sage: F.diff()
3*x^2 + cos(x)
```

`SageMath` también nos proporciona una implementación para expandir la función como series de potencias.

Para obtener series de Taylor a partir de una función usamos la construcción `.taylor()` en la expresión:

```
sage: F = sin(x)
sage: #Usamos la construccion .taylor(variable, al rededor de..., grado)
sage: F.taylor(x,0,5)
1/120*x^5 - 1/6*x^3 + x
```

Es posible obtener la expansión formal de una función en serie de potencias con la construcción `.series()`, y al mismo tiempo usar `coefficient()` para imprimir el coeficiente deseado de la serie:

```
sage: G=(2/(1-cos(x)))
sage: #Usamos la construccion .series(variable, grado)
sage: G.series(x,6)
4*x^(-2) + 1/3 + 1/60*x^2 + 1/1512*x^4 + Order(x^6)
sage: ##Usamos la construccion .coefficient(variable, coeficiente
    buscado)
sage: G.series(x,6).coefficient(x,4)
1/1512
```

Notación

En este trabajo se usa la siguiente notación:

$\mathbb{N} = \{1, 2, ..., \}$,

$\mathbb{Z}$ = anillo de los números enteros,

$\mathbb{Z}_{\geq n}$ = enteros mayores o iguales a n,

$\mathbb{R}$ = campo de los números reales,

$\mathbb{C}$ = campo de los números complejos,

De forma estándar se usa el alfabeto caligráfico (mathcal) para estructuras combinatorias (etiquetadas y no etiquetadas):

$$\mathcal{A} \quad \mathcal{B} \quad \mathcal{C}$$

$$\mathcal{T} \quad \mathcal{E} \quad \mathcal{Z}$$

Al igual que la fuente matemática predeterminada en mayúsculas para denotar conjuntos:

$$A \quad B \quad C$$

$$X \quad Y \quad Z$$

$\emptyset$	denota el conjunto vacío;
$\lvert A \rvert$	cardinal del conjunto A;
$X \subset Y$	X es subconjunto de Y;
$f : X \to Y$	mapeo del conjunto X al conjunto Y;
$x \in X$	x es elemento de X;

$g \circ f$	composición de las funciones f y g;
N_n	denota al conjunto $\{1, 2, ..., n\}$;
$\mathbb{P}(S)$	denota el conjunto potencia del conjunto S;
$\simeq$	denota una relación de equivalencia;
$\equiv$	denota la equivalencia entre dos clases de estructuras combinatorias;
$\uplus$	denota unión disjunta;
$A \times B$	denota el producto cruz de los conjuntos A y B;
$\Theta\mathcal{A}$	construcción marcar;
$\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$	construcción sucesión;
$\mathrm{Seq}_{=k}(\mathcal{A})$	construcción sucesión de longitud igual a k;
$\mathrm{Seq}_{\leq k}(\mathcal{A})$	construcción sucesión de longitud máxima igual a k;
$\mathrm{Seq}_{\geq k}(\mathcal{A})$	construcción sucesión de longitud mínima igual a k;
$\mathrm{Set}(\mathcal{A})$	construcción conjunto;
$\mathrm{Cyc}(\mathcal{A})$	construcción ciclo;
$\star$	denota producto etiquetado;
$\sum$	denota "suma";
a_n	$n-$ésimo término de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$;
$[x^m]f(x)$	coeficiente de x^m en la serie de potencias $f(x)$;
$\ln(a)$	denota el logaritmo natural de a;
$\sup$	denota el supremo de un conjunto;
$\int f(x)$	integral de la función $f(x)$;

$\int_\gamma f(x)$	integral de la función $f(x)$ a lo largo de la curva γ;
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$	denota la derivada respecto a x;
$\gamma \subset \Omega$	curva cerrada en el abierto Ω;
$\mathrm{Res}_{z=a}$	residuo de z en la singularidad a.

Bibliografía

[1] Beck, M., and Geoghegan, R. *The art of proof. Basic training for deeper mathematics.* New York, NY: Springer, 2010.

[2] Bender, E. A. Errata: Asymptotic methods in enumeration. *SIAM Rev. 18* (1976), 292.

[3] Birmajer, D., and Gil, J. B. Arithmetic in the ring of formal power series with integer coefficients. *The American Mathematical Monthly 115*, 6 (2008), 541–549.

[4] Bóna, M. *Combinatorics of permutations*, 3rd edition ed. Discrete Math. Appl. (Boca Raton). Boca Raton, FL: CRC Press, 2022.

[5] Diaconis, P., and Freedman, D. An elementary proof of stirling's formula. *The American Mathematical Monthly 93*, 2 (1986), 123–125.

[6] Enochs, E. E. Binomial coefficients. *Bol. Asoc. Mat. Venez. 11*, 1 (2004), 17–28.

[7] Flajolet, P., and Odlyzko, A. Singularity analysis of generating functions. *SIAM J. Discrete Math. 3*, 2 (1990), 216–240.

[8] Flajolet, P., and Sedgewick, R. *Analytic combinatorics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[9] Hernández Hernández, F. *Teoría de conjuntos*, vol. 13 of *Aportaciones Matemáticas: Textos [Mathematical Contributions: Texts]*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 1998.

[10] Lang, S. *Complex analysis*, vol. 103. Springer Science & Business Media, 2003.

[11] Li, W., and Paulson, L. C. A formal proof of Cauchy's residue theorem. In *Interactive theorem proving*, vol. 9807 of *Lecture Notes in Comput. Sci.* Springer, [Cham], 2016, pp. 235–251.

[12] Little, C. H. C., Teo, K. L., and van Brunt, B. *Real analysis via sequences and series*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2015.

[13] Melczer, S. *Algorithmic and symbolic combinatorics—an invitation to analytic combinatorics in several variables.* Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer, Cham, [2021] ©2021. With a foreword by Robin Pemantle and Mark Wilson.

[14] OEIS Foundation Inc. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at `http://oeis.org`.

[15] Spivak, M. *Calculus.* Houston, TX: Publish or Perish, 2008.

[16] Stanley, R. P. *Catalan numbers.* Cambridge University Press, New York, 2015.

[17] Wang, J., and Feigenson, L. Infants recognize counting as numerically relevant. *Developmental science 22*, 6 (2019), e12805.

[18] Wilf, H. S. *generatingfunctionology*, third ed. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006.