



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICA

INSTITUTO DE FÍSICA

**EFFECTOS DE PROCESOS RADIATIVOS EN OBSERVABLES DE
PRECISIÓN**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

M.C. ANTONIO ROJAS RAMOS

TUTOR PRINCIPAL:

DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ

INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. EDUARDO PEINADO RODRÍGUEZ

INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

DR. CÉSAR FERNÁNDEZ RAMÍREZ

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Graduación con trabajo escrito)**

De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la Institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado:
Efectos de procesos radiativos en observables de precisión

que presenté para obtener el grado de ----Doctorado---- es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi programa de posgrado, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de graduación.

Atentamente

Antonio Rojas Ramos. Núm. de Cuenta: 516014740

(Nombre, firma y Número de cuenta de la persona alumna)

Índice general

Índice de figuras	v
Índice de cuadros	xI
1.	2
1.1. Estatus de $g - 2$ del muón	8
1.1.1. Evaluaciones basadas en datos para la contribución HVP	11
1.1.2. Cálculos de la contribución HVP en lattice QCD	16
1.1.3. Perspectivas para $g - 2$ del muón	19
1.2. Momento dipolar magnético del mesón $\rho(770)$	21
1.3. Análisis de parámetros hadrónicos a bajas energías	24
1.4. Estructura de la tesis	26
2. Breve descripción del Modelo Estándar	28
2.1. Partículas elementales del Modelo Estándar	29
2.2. Lagrangiana del Modelo Estándar	32
2.2.1. Mezcla de SU(2) y U(1)	34
2.2.2. Mecanismo de Higgs	36
2.2.3. Generación de Masa de bosones y fermiones	37
2.2.4. Auto-interacción de los bosones de norma	42
2.3. Fundamentos de QCD	50

2.3.1. Lagrangiana de QCD	51
2.4. Libertad asintótica en QCD	54
2.4.1. Modelo de Dominancia Vectorial VMD	58
2.4.2. Teoría Quiral perturbativa	61
2.5. Representación de Hadrones: Mesones y Bariones en SU(3)	69
2.5.1. Mesones	71
2.5.2. Bariones	74
3. Parámetros hadrónicos de mesones ligeros en observables de baja energía	83
3.1. Decaimiento $V \rightarrow P_1 P_2$: Acoplamiento $g_{VP_1P_2}$	86
3.2. Decaimiento $V \rightarrow \ell^+ \ell^-$: Acoplamiento g_V	88
3.3. Decaimiento $V_1 \rightarrow P \gamma$: Acoplamientos $g_{V_1P\gamma}$ y $g_{V_1V_2P}$	90
3.4. Decaimiento $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$: Acoplamientos $g_{P\gamma\gamma}$ y $g_{V_1V_2P}$	91
3.5. Decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$	92
3.6. Sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$	94
3.7. Sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \omega \pi^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$	97
3.8. Análisis χ^2 . Resultados	99
4. Momento dipolar magnético del mesón ρ (770).	107
4.1. Introducción	107
4.2. Vértice electromagnético para una partícula Vectorial	109
4.3. Descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+\pi^-$	115
4.3.1. Canal A	117
4.3.2. Canal B	119
4.3.3. Canal C	123
4.3.4. Canal D	131
4.3.5. Canal E	134
4.3.6. Canal F	138

4.3.7. Canal G	141
4.4. Sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+ \pi^-$	143
4.4.1. Sección eficaz para los canales A, B y C del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+ \pi^-$	145
4.4.2. Sección eficaz para el proceso $e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+ \pi^-$ a través del mesón ω	147
4.4.3. Resultados para la sección eficaz total.	150
4.5. Factor de Forma eléctrico y el MDM	153
5. Decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ y el MDM del muón ($g - 2$)	155
5.1. Decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$	158
5.1.1. Amplitud de decaimiento en el contexto de VMD	159
5.1.2. Contribuciones Dependientes de Modelo (MD)	165
5.1.3. Distribución de masa invariante del dipión	167
5.2. Correcciones radiativas para la polarización de vacío hadrónico y MDM del	
muón	169
5.2.1. Correcciones de rompimiento de isospín para $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$	175
6. Conclusiones	178
A. Traza de matrices Gamma y Sección Eficaz	183
A.1. Notación y Convención	183
A.2. Solución de ondas planas	184
A.2.1. Igualdad de Gordon	185
A.3. Matrices γ de Dirac	185
A.4. Conjugación de Carga de Matrices	185
A.5. Representación quirral (Weyl)	186
A.6. Representación Pauli-Dirac	186
A.7. Traza de Matrices γ	186
A.8. Tensor antisimétrico LeviCivita	187
A.9. Suma de polarizaciones para partículas vectoriales	188

A.10. Vectores de polarización para una partícula real/virtual	189
B. Reglas de Feynman	190
C. Cinemática	195
C.1. La razón diferencial de decaimiento	195
C.2. Decaimientos a dos cuerpos	196
C.3. Decaimientos a tres cuerpos	197
C.4. Decaimientos a cuatro cuerpos	200
C.5. Espacio fase para procesos de producción con n partículas en el estado final	205
C.6. Caso $n = 3$	208
C.7. Caso $n = 4$	210
D. Más constantes de acoplamiento	213
D.1. Decaimiento $V \rightarrow \pi\gamma$: Acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$	213
D.2. Decaimiento $\sigma \rightarrow \pi\pi$: Acoplamiento $g_{\sigma\pi\pi}$	214
D.3. Decaimiento $a_1 \rightarrow \rho\pi$: Acoplamiento $g_{a_1\rho\pi}$	215
D.4. Decaimiento $\rho \rightarrow \rho\sigma$: Acoplamiento $g_{\rho\rho\sigma}$	216
E. Expansión multipolar de la función vértice	219
E.0.1. Marco de Breit	220
E.0.2. Momento Magnético	220
E.1. Momento Cuadrupolar	222
E.1.1. Expansión Multipolar	223
F. Factor de Forma para el canal omega en el proceso $\tau^- \rightarrow \pi\pi\nu_\tau\gamma$	227

Índice de figuras

1.1. Comparación de los diferentes resultados en lattice QCD para la observable de la ventana intermedia $a_\mu^{\text{HVP,LO,W}}$ por Fermilab/HPQCD/MILC [65], RBC/UKQCD [111, 120], ETMC [116], Mainz/CLS [115], Aubin *et al.* [112, 117], χ QCD [119], BMW [63] y Lehner & Meyer [118]. Está figura fue tomada directamente de la Ref. [65]. 18

2.1. Representación de las familias de partículas y estructura generacional que componen al Modelo Estándar de partículas elementales. Cada generación está formada por dobletes de campos izquierdos y singletes de campos derechos en la interacción electro-débil. El bloque está conformado de seis leptones y seis quarks (y sus respectivas antipartículas). Los quarks a su vez pueden llevar carga de color (tres colores denotados por R , G y B (rojo, verde y azul por sus siglas en inglés). Además de los quarks y los leptones, la inclusión de los bosones de norma y el bosón de Higgs es necesaria para hacer una teoría consistente. La teoría electro-débil requiere un bosón de Higgs neutro, pero podrían existir más. 30

2.2. Una simple representación de la imagen de VMD para la contribución hadrónica al propagador del fotón. Los mesones vectoriales más pesados se incluyen en modelos VMD generalizados. 59

2.3. Nonete = singlete + octeto formado por (u, d, s) y (u, d, s). La Fig.(a) corresponde a los mesones con $J = 0^-$ observados y las combinaciones de pares quark-antiquark. La Fig.(b), al igual que en la Fig.(a) pero para los mesones con $J = 1^-$.	75
2.4. (a) Un octeto formado por tres quarks. (b) Bariones observados con $J = (1/2)^+$.	77
2.5. (a) Pueden construirse 10 combinaciones totalmente simétricas de tres quarks. (b) Espectro observado de las resonancias $J^P = (3/2)^+$.	79
3.1. Decaimiento de un mesón vectorial de la forma (a) $V \rightarrow PP$ y (b) $V \rightarrow \ell\ell$.	87
3.2. Decaimiento de un mesón vectorial en la forma (a) $V \rightarrow P\gamma$ y (b) $P \rightarrow \gamma\gamma$.	90
3.3. Diagramas de Feynman para el proceso $\omega \rightarrow 3\pi$. Se muestran los canales para los mesones $\rho, \rho' (a, b, c)$ y el término de contacto (d).	93
3.4. Datos experimentales para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$ (símbolos) de SND [251], CMD2 [92], BABAR [88] y BESII [252]. Se muestra el correspondiente resultado (línea sólida) a partir de usar los valores obtenidos para los parámetros involucrados en este análisis, Cuadro 3.6.	96
3.5. Diagramas de Feynman para el proceso $e^+e^- \rightarrow \omega\pi \rightarrow \pi\pi\gamma$.	98
3.6. Datos experimentales para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ (símbolos) de SND (SND00 [253], SND13 [254] y SND16 [250]) y CMD2 [255]. Los correspondientes resultados (línea sólida) fueron obtenidos usando los valores encontrados para los parámetros involucrados en este análisis, Cuadro 3.7.	99
3.7. Matriz de correlación para las constantes de acoplamiento $g_{\rho\pi\pi}, g_\rho, g_\omega$ y $g_{\omega\rho\pi}$ a partir de 10 modos de decaimiento, ver el texto para los detalles.	101
3.8. Matriz de correlación para las constantes de acoplamiento considerando 11 modos de decaimiento y los datos experimentales de la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$. Ver el texto para los detalles.	103

3.9. Matriz de correlación para las constantes de acoplamiento considerando 11 modos de decaimiento y los datos experimentales de las secciones eficaces de los procesos $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ y $e^+ e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$. Ver el texto para los detalles.	104
3.10. Acoplamientos involucrados en el análisis con sus correspondientes errores como una función de un conjunto de datos considerados en el ajuste, para mostrar las variaciones en función de las mismas además se muestra el correspondiente etiquetado del eje x . En 2 y 3, el símbolo (+) significa la adición del caso 1 (es decir, 10 modos de decaimiento). De 4 a 11, el símbolo (+) significa la adición del caso 3 (es decir, 11 modos de decaimiento). En los casos 4 a 11, el símbolo (+) significa la adición del caso 3 (es decir, más 11 modos de desintegración).	105
3.11. En la Figura se muestra el comportamiento de la fase relativa θ como una función del conjunto de datos considerados en el ajuste de datos junto al correspondiente etiquetado para el eje x , análogo al mostrado en la Fig. 3.10. En 2 y 3, el símbolo (+) significa la adición del caso 1 (es decir, 10 modos de decaimiento). De 4 a 11, el símbolo (+) significa la adición del caso 3 (es decir, 11 modos de decaimiento). En los casos 4 a 11, el símbolo (+) significa la adición del caso 3 (es decir, más 11 modos de desintegración).	106
4.1. Diagramas de Feynman para el proceso $e^- e^+ \rightarrow W^- W^+$. (a) Corriente cargada, (b) Electromagnética y (c) Corriente neutra Los sufijos μ , ν y λ denotan los estados de polarización de los bosones vectoriales.	110
4.2. Diagramas de Feynman que componen al denominado Canal A del proceso de producción a 4π : $\rho \rightarrow \pi\pi \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$	117
4.3. Diagramas de Feynman que constituyen el denominado Canal B en el proceso de producción a 4π : $\rho \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$	119
4.4. Diagramas de Feynman para el canal C para la producción 4π : $\rho \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$. . .	123
4.5. Diagramas de Feynman para el Canal D para el proceso de producción a 4π : $\rho \rightarrow \omega\pi \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$	131

4.6. Diagramas de Feynman para el canal E del proceso a 4π : $\rho \rightarrow \pi a_1 \rightarrow \pi \rho \pi \rightarrow 4\pi$	135
4.7. Diagramas de Feynman para el Canal C en el proceso de producción a 4π : $\rho \rightarrow \rho \sigma(f_0) \rightarrow 4\pi$	138
4.8. Diagramas de Feynman para el Canal G del proceso de producción a 4π : $\pi \pi \rightarrow \pi \pi \sigma(f_0) \rightarrow 4\pi$	141
4.9. Contribución de los canales A, B (con $\beta_0 = 1, 2, 3$) y C a la sección eficaz total del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2 \pi^0 \pi^+ \pi^-$ comparado respecto a los datos experimentales de BABAR [17].	147
4.10. Mediciones de la sección eficaz para el proceso $e^+ e^- \rightarrow \omega \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- 2\pi^0$ de diferentes experimentos (BABAR [17], SND [250], [253], [254] y CMD2 [255]) como función de la energía del centro de masa E_{CM} con incertidumbres estáticas. Los datos medidos en otras desintegraciones distintas de $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ se escalan por el apropiado branching ratio. La línea sólida azul corresponde a la evaluación del modelo considerando los valores para parámetros dados en el Cuadro 3.7, mientras que la línea negra punteada corresponde a la evaluación del modelo considerando los valores de los parámetros dados en el Cuadro 3.6.	148
4.11. Contribución de los canales A, B (con $\beta_0 = 2$), C y D a la sección eficaz total del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2 \pi^0 \pi^+ \pi^-$ comparados respecto a los datos experimentales de BABAR [17].	149
4.12. Resultado para las diferentes secciones eficaces para los diferentes canales que involucran a los mesones $\rho, \rho', \omega, a_1, \sigma$ y f_0 (La contribución del mesón ρ se resume en los canales A, B ($\beta_0 = 2$) y C que en conjunto forman una amplitud invariante de norma) para la descripción del del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2 \pi^0 \pi^+ \pi^-$. Los resultados son comparados respecto a los datos experimentales de BABAR [17].	151

4.13. Resultados para la sección eficaz total del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$, obtenida a partir de la suma de todos los canales presentados a lo largo de este trabajo que son necesarios en la descripción del proceso. Dichos resultados son comparados con los datos experimentales de BABAR [17].	152
4.14. Resultado preliminar para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ obtenida para la región de bajas energías, de 0.6 a 1.1 GeV, en comparación con los resultados experimentales de BABAR [17].	153
5.1. Principales diagramas que contribuyen a la parte sin estructura independiente y dependiente de modelo para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$	161
5.2. Contribuciones dependientes de modelo para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$. La contribución relevante en este caso es aquella que viene mediada a través del mesón ω (b).	165
5.3. Distribución de masa invariante del dipión, normalizado con el ancho de decaimiento no radiativo (Γ_{nr}), usando un corte en la energía del fotón $E_{\gamma_{min}} = 300$ MeV. La línea punteada corresponde a la distribución invariante total, la línea entrecortada corresponde a la distribución considerando la contribución exclusiva del mesón ρ' en el canal ω , y la línea solida es la contribución que se obtiene al considerar la amplitud de Low.	167
5.4. Distribución de masa invariante del dipión, normalizado con el ancho de decaimiento no radiativo (Γ_{nr}), usando un corte en la energía del fotón $E_{\gamma_{min}} = 300$ MeV. La línea punteada corresponde a la distribución invariante total, la línea entrecortada corresponde a la distribución considerando la contribución exclusiva del mesón ρ' en el canal ω , y la línea solida es la contribución que se obtiene al considerar la amplitud de Low.	168

5.5. Función $G_{EM}(t)$ que incluye las partes independientes y dependientes de modelo (línea sólida negra). La región sombreada azul queda definida a partir de la inclusión de las incertidumbres para los parámetros del mesón ρ' . También se incluyen las contribuciones de Low (línea sólida roja), la contribución que solo incluye al mesón ρ' en el canal ω (línea entrecortada verde), el resultado para la función $G_{EM}^0(t)$ (línea entrecortada negra).	173
5.6. Función $G_{EM}(t)$ considerando la región delimitada por las incertidumbres de ρ' (banda sombreada azul). Además, se incluye una región de proyección (banda sombreada amarilla) considerando una mejora del 20% en el valor de las constantes de acoplamiento del mesón ρ' ($g_{\omega\rho'\pi}, g_{\rho'\pi\pi}$). También se incluye el resultado para la función $G_{EM}^0(t)$.	174
B.1. Las funciones de onda para los estados inicial o final para: los fermiones (a)-(b), anti-fermiones (c)-(d) y vectores de polarización para bosones (e)-(f).	190
D.1. Desde el punto de vista de VMD, el proceso $\rho \rightarrow \rho\sigma$ puede verse como el proceso radiativo $\rho \rightarrow \sigma\gamma$ seguido de la hadronización del fotón a un mesón ρ .	217
F.1. Diagramas de Feynman para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ en el modelo VMD. Los estados intermedios V_j^- denotan resonancias hadrónicas cargadas con $J^P = 1^-$.	228
F.2. (a) Factor de forma del pión extraído de datos experimentales al decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ de la Colaboración Belle [249]. Las diferentes curvas corresponden a ajustes en diferentes aproximaciones que incluyen a las resonancias ρ , ρ' y ρ'' . La azul corresponde a nuestra aproximación, la línea roja corresponde al ajuste en relaciones de dispersión (DR) y la línea verde corresponde al ajuste cuando $f_+[t]$ solo incluye a las resonancias ρ y ρ' [292]. (b) De forma ilustrativa se compara el cuadrado de $f_+[t]$ con el cuadrado del factor de forma $f_o[t]$ para el canal ω , la banda azul corresponde al error asociado a los diferentes acoplamientos.	232

Índice de cuadros

1.1. Resumen de las contribuciones de a_{μ}^{SM} , tal y como se recogen en las Refs. [12, 14, 23, 59]. En el primer bloque se muestran los resultados para las principales contribuciones hadrónicas, así como el resultado combinado para el proceso de dispersión HLbL a partir de fenomenología y de lattice QCD disponibles hasta el momento. En el segundo bloque se resumen las cantidades que entran en la recomendación final para la contribución del SM, en particular, la contribución total HVP, evaluada a partir de datos e^+e^- , y el número total para la contribución HLbL.	10
1.2. Comparación de los diferentes resultados para el momento dipolar magnético μ_{ρ} (en unidades de $\left[\frac{e}{2m_{\rho}}\right]$) en diferentes aproximaciones.	22
2.1. Mesones pseudoescalares $J^P = 0^-$ [Determinados a través de las ecs. (2.126) y (2.129)].	74
2.2. Bariones $J^P = \frac{1}{2}^+$	80
2.3. Decuplete de bariones $J^P = \frac{3}{2}^+$ [Obtenidos a partir de la ec. (2.153)]	81
3.1. Valores para el acoplamiento $g_{\rho\pi\pi}$ obtenidos a partir de los procesos neutro y cargado y el promedio pesado, $\bar{g}_{\rho\pi\pi}$.	88

3.2. Constante de acoplamiento g_V ($V = \rho(770), \omega(782), \phi(1020), \rho(1450)$) obtenida a partir de los decaimientos a par de muones y electrones. Para la constante de acoplamiento $g_{\rho(1450)}$ se cita solo un valor central, ya que la información experimental sólo proporciona una estimación de la anchura de decaimiento.	89
3.3. Promedio pesado para las constantes de acoplamiento \bar{g}_V ($V = \rho, \omega, \phi$).	89
3.4. Valores de la constante de acoplamiento $g_{\rho\omega\pi}$ obtenidos a partir de cuatro modos de decaimiento diferentes.	92
3.5. Valores para las constantes de acoplamiento encontrados a partir del ajuste de 10 modos de decaimiento diferentes descritos en el texto.	100
3.6. Valores para los parámetros obtenidos a partir del ajuste de 11 modos de decaimiento y todos los datos experimentales para las secciones eficaces.	102
3.7. Valores para los parámetros obtenidos a partir del ajuste de 11 modos de decaimiento y los datos experimentales de la sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$.	102
5.1. $\Delta a_\mu^{\text{HVP,LO}} _{G_{\text{EM}}(t)}$ ($\times 10^{-11}$) para varias contribuciones de la función electromagnética $G_{\text{EM}}(t)$.	177
D.1. Valores obtenidos para la constante de acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$ a través de diferentes procesos.	214
F.1. Valores para los parámetros libres obtenidos del ajuste al cuadrado del factor de forma $f_+[t]$.	232

Resumen

La necesidad de entender la estructura y el comportamiento de los hadrones que interactúan fuertemente a bajas energías es de suma importancia, ya que podrían proporcionar información relevante sobre su dinámica interna, las cuales no pueden ser descritas cuantitativamente a partir de los principios fundamentales de la Cromodinámica Cuántica (QCD) por su carácter no perturbativo. El momento dipolar magnético (MDM) del mesón ρ es una de las propiedades que puede ayudar en este objetivo, por lo que la determinación de este parámetro es importante. Por otra parte, dada la falta de evidencia directa de Nueva Física en el LHC a altas energías, las mediciones de precisión a bajas energías para ciertas observables, buscan desviaciones respecto a las predicciones teóricas e indicar la presencia de física más allá del Modelo Estándar. Por esta razón, existe la necesidad de contar con cálculos precisos que nos permitan entender los efectos de nueva física o los ya existentes dentro del Modelo Estándar lo que lleva a la necesidad de recurrir a modelos fenomenológicos que incluyan a la interacción fuerte de forma efectiva, tratando de modelar la dinámica subyacente. Un ejemplo es el MDM del muón, cuya precisión depende de entender las contribuciones hadrónicas, por lo que en este trabajo de tesis se aborda estos problemas considerando el Modelo de Dominancia Vectorial (VMD) generalizado, en el cual los mesones vectoriales neutros se acoplan a la corriente electromagnética, teniendo en cuenta a los hadrones como grados de libertad relevantes e incluyendo la interacción con mesones pseudo-escalares. En primer lugar, se hizo un análisis a un conjunto de modos de decaimiento y secciones eficaces que involucra a los mesones ligeros π , $\rho(770)$, $\omega(782)$ y $\rho(1450)$ y sus interacciones

hadrónicas efectivas para determinar sus correspondientes acoplamientos. La segunda parte fue determinar el valor del momento dipolar magnético del mesón ρ (770) de forma indirecta a través de un análisis de la sección eficaz experimental del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- 2 \pi^0$. Bajo VMD, uno de sus canales involucra al vértice de tres mesones ρ (770), asociado directamente al vértice $\rho^+ \rho^- \gamma$ el cual está parametrizado en términos de los multipolos electromagnéticos del mesón ρ . La primera parte del trabajo se vuelve relevante para reducir los errores en los resultados. Finalmente, se considera al decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ en donde se hace una descripción de la parte independiente de modelo y del llamado canal ω , contribución dependiente de modelo. Mostrando que en la interferencia del canal ω con la contribución independiente, el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ puede ayudar a explicar adecuadamente dichos efectos. Además, se evalúa su implicación en la corrección de la ruptura de la simetría del isospín electromagnético para las estimaciones basadas en el decaimiento del leptón τ^- al momento dipolar magnético del muón.

Abstract

The need to understand the structure and behaviour of strongly interacting hadrons at low energies is of paramount importance, as it could provide relevant information about their internal dynamics, which, due to their non-perturbative nature, cannot be described quantitatively from the fundamental principles of quantum chromodynamics (QCD). The magnetic dipole moment (MDM) of the ρ meson is one of the properties that can help in this objective, so the determination of this parameter is important. On the other hand, given the lack of direct evidence for new physics at the LHC at high energies, precision measurements at low energies for certain observables look for deviations from theoretical predictions and indicate the presence of physics beyond the Standard Model. For this reason, there is a need for precise calculations that allow us to understand the implications of new physics or existing physics within the Standard Model, leading to the need for phenomenological models that effectively include the strong interaction and attempt to model the underlying dynamics. An example is the muon MDM, whose accuracy depends on understanding the hadronic contributions, so this thesis addresses these problems by considering the Generalised Vector Dominance Model (VMD), in which neutral vector mesons are coupled to the electromagnetic current, taking hadrons as relevant degrees of freedom and including the interaction with pseudoscalar mesons.

First, an analysis of a set of decay modes and cross sections involving the light mesons π , $\rho(770)$, $\omega(782)$ and $\rho(1450)$ and their effective hadronic interactions was carried out to determine their corresponding couplings. The second part was to determine the value of the

magnetic dipole moment of the $\rho(770)$ meson indirectly through an analysis of the experimental effective cross section from $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- 2\pi^0$. In VMD, one of its channels involves the three-meson ρ vertex (770), which is directly associated with the $\rho^+\rho^-\gamma$ vertex parameterised in terms of the electromagnetic multipoles of the ρ meson. The first part of the work becomes relevant to reduce the errors in the results. Finally, we consider the decay of the $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu^- \gamma$ decay, where a description of the model-independent part and the so-called ω channel, the model-dependent contribution, is given. It is shown that when the ω channel interferes with the independent contribution, the $e^+e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ process can help to adequately explain such effects. Furthermore, its implications for the correction of the electromagnetic isospin symmetry breaking for estimates based on the decay of the lepton τ^- to the magnetic dipole moment of the muon are evaluated.

Agradecimientos

Capítulo 1

En este primer capítulo se hace una breve introducción y descripción sobre los temas relevantes a desarrollar a lo largo de este trabajo de tesis. La primera parte está centrada en el estatus actual de $g - 2$ del muón, fijando la atención en las contribuciones hadrónicas dada la tensión que existe entre los resultados teóricos y experimentales. El segundo tema importante está enfocado en el momento dipolar magnético del mesón ρ y la gran variedad de resultados teóricos existentes para este parámetro. La necesidad de un análisis de parámetros hadrónicos a bajas energías se vuelve relevante, ya que estos son indispensables en el desarrollo de los temas de este trabajo de tesis. Finalmente, el capítulo culmina con la descripción de la estructura de los distintos capítulos que componen a este trabajo de tesis.

Introducción

Dentro del Modelo Estándar de la física de partículas, la interacción fuerte, descrita a través de la Cromodinámica Cuántica (QCD), la evolución en energía de la intensidad de la interacción juega un papel importante, ya que la constante de acoplamiento disminuye en forma logarítmica a grandes transferencias de momento (o, equivalentemente, la disminución de la constante de acoplamiento a pequeñas distancias). Sin embargo, esta misma propiedad implica un aumento de la constante de acoplamiento a transferencias de momento pequeño, es decir, a grandes distancias. Este aumento limita la aplicación de la teoría de perturbaciones. Así, la teoría de interacción fuerte puede dividirse principalmente en dos áreas:

espectroscopia de hadrones a bajas energías y los aspectos no perturbativos de los procesos a altas energías. La primera guarda una estrecha relación con la propiedad de confinamiento: los quarks y los gluones no pueden salir de su región de interacción fuerte y no pueden ser observados como objetos físicos reales. Los objetos físicos, observados experimentalmente a grandes distancias son los hadrones. El estudio de la interacción fuerte a bajas energías es fundamental para comprender la estructura de los hadrones, como su masa, momento angular y propiedades de espín, así como para explorar fenómenos como la ruptura espontánea de la simetría quiral, los condensados de quark y gluón y la formación de estructuras no perturbativas como los glueballs y mesones exóticos. Sin embargo, la poca comprensión de este régimen no perturbativo ha llevado al desarrollo de un gran número de métodos y técnicas para describir las propiedades de los hadrones y las interacciones entre ellos. Esto incluye el uso de modelos fenomenológicos, simulaciones en redes de QCD, teoría de campos efectivas y aproximaciones analíticas.

Por otra parte, dado que se tiene un mejor entendimiento sobre la interacción electromagnética, es natural utilizarla como un sondeo para poder entender la estructura interna y el comportamiento de la materia que interactúa fuertemente en función de sus constituyentes fundamentales; los hadrones. Los primeros estudios comenzaron en la década de 1950 con el trabajo de Hofstadter et. al. [1] utilizando haces de electrones energéticos con el objetivo de comprender cómo es la interacción electromagnética a través las distribuciones de carga y corriente dentro de los hadrones y dar información sobre su estructura interna. La materialización de estas interacciones son los factores de forma electromagnéticos, los cuales proporcionan una herramienta importante para el entendimiento de la estructura de los estados ligados en QCD. En particular, el estudio teórico de las propiedades electromagnéticas de los mesones π y ρ , constituidos a partir de dos quarks ligeros (u , d), es de interés porque en muchos aspectos son los estados ligados más simples. Cabe señalar que la situación experimental es muy diferente. Las propiedades de los piones son bien conocidas por los experimentos. Por el contrario, la información experimental sobre el mesón ρ es limitada.

Su tiempo de vida es muy corta, $\approx 4.5 \times 10^{-24}$ s, por lo que las medidas directas de sus propiedades electrodébiles (por ejemplo, factores de forma electromagnéticos y momentos estáticos) son casi imposibles. Sin embargo, estos factores de forma son importantes para la física hadrónica: por ejemplo, contribuyen a las corrientes de intercambio de mesones. También están estrechamente relacionados con los factores de forma de los nucleones. Además, la descripción del mesón ρ es interesante por sí misma. En tales condiciones, el papel de las investigaciones teóricas aumenta con el único objetivo de desentrañar las propiedades físicas de estos estados ligados. Estas cantidades podrían calcularse si existiera una teoría completa para la estructura hadrónica. Sin embargo, en ausencia de tal teoría, los factores de forma electromagnéticos proporcionan un excelente punto de encuentro entre las mediciones experimentales y los cálculos teóricos de diferentes tipos de modelos.

Otro aspecto fundamental de la espectroscopia de hadrones a bajas energías son los decaimientos radiativos de mesones, los cuales están directamente relacionados a los procesos de aniquilación electrón-positrón a hadrones, y cuya característica principal se centra en el estudio de los mesones vectoriales de quarks ligeros, tanto isovectoriales como isoescalares, para determinar ciertas propiedades y observables tales como su espectro, modos de decaimiento y naturaleza. Estos procesos de aniquilación a su vez pueden venir mediados por ciertas resonancias y sus efectos se pueden notar en las observables del proceso. Un importante subproducto de estos procesos de aniquilación, e^+e^- a hadrones, es la contribución de la polarización de vacío hadrónica al momento magnético del muón. Por otro lado, directamente relacionados con los estados isovectoriales, a través de la asunción de la Conservación de Corriente Vectorial (CVC), se encuentra que están relacionados con los decaimientos hadrónicos o semileptónicos del leptón τ^- . Al contrario de lo que sucede con el resto de los leptones, (electrón (e^-) y muón (μ^-)), la masa del leptón τ^- ($M_{\tau^-} \sim 1.7$ GeV) es suficientemente grande como para permitir este tipo de desintegraciones, que incluye a los mesones ligeros (piones- π^- , kaones $-K$ y etas $-\eta, \eta'$). Estos procesos incluyen además al correspondiente neutrino, ν_τ , y pueden incluir (en los llamados procesos radiativos) múltiples fotones,

γ . Dichos decaimientos del leptón τ^- proporcionan un entorno limpio en el cual estudiar la interacción fuerte a energías bajas e intermedias, ya que la mitad del proceso, la parte electro-débil, es limpia y está bajo control desde el punto de vista teórico. Por otra parte, dado el intervalo de energías del sistema hadrónico que cubren estas desintegraciones (esencialmente desde el umbral de producción del mesón $\pi \sim 0.14$ GeV hasta la masa del leptón τ^- , M_τ), las resonancias más ligeras se pueden intercambiar en capa de masa (*on-shell*), de modo que sus efectos son notables y se puede proceder al estudio de sus propiedades.

En el resto de las secciones que conforman esta Introducción, se presenta el estado actual del momento dipolar magnético del muón y del mesón ρ , abordando con mayor detalle aspectos que son parte fundamental para el objetivo y realización de este trabajo de tesis. Primeramente, es necesario dar panorama general sobre el estado actual del momento dipolar magnético del muón, describir las principales fuentes de incertidumbre asociadas a las contribuciones hadrónicas y las tensiones significativas que existen entre los resultados obtenidos a partir de datos experimentales provenientes de procesos de aniquilación e^+e^- y los obtenidos a partir de lattice QCD. También es importante mencionar la importancia de los datos hadrónicos del leptón τ^- , que en principio, pueden utilizarse para evaluar la contribución hadrónica principal a través del canal a dos piones, salvo el requerimiento de determinar las correcciones de isoespín necesarias [2]. Sin embargo, algunas de estas correcciones, por ejemplo: las correcciones requeridas de violación de isospín [3, 4] han sido calculadas utilizando la teoría de resonancia quiral (R χ T) [5-7], y modelos de dominancia vectorial (VMD) [8, 9], lo cual sirve como punto de partida y justificación en este trabajo para estudiar el proceso radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$.

Un escenario particular en la desintegración $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$, dominada por la parte independiente del modelo [7-10], en acuerdo con el teorema de Low para la emisión de fotones suaves [11], es la aparición de las resonancias ρ y ω , la cercanía en masa juega un papel importante en la comprensión de muchos fenómenos hadrónicos de baja energía. La llamada mezcla $\rho - \omega$ es uno de los ingredientes clave en la descripción adecuada de los datos de dispersión

$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, que es la contribución hadrónica dominante para la predicción del momento dipolar magnético $g - 2$ del muón en el modelo estándar (SM) [12,14]. Allí, se ha observado que una contribución dependiente del modelo, asociada al llamado canal ω , tiene un efecto relevante en el espectro dipión, pero no se identifican los roles específicos de cada una de las resonancias involucradas, lo que dificulta identificar cómo se combinan las propiedades particulares para obtener el resultado total. Este hecho no es trivial, ya que los procesos involucran un vértice $\rho - \omega - \pi$. Contabilizar adecuadamente este canal es importante para la corrección de la ruptura de simetría de isospín. Si bien este proceso radiativo no ha sido medido, las perspectivas experimentales en Belle II podrían ofrecer una primera visión de ello. Además, en la Ref. [13] se menciona de manera notable que la discrepancia entre la predicción del Modelo Estándar y la medida experimental se reduce sustancialmente cuando se emplean los datos del τ . Sin embargo, la evaluación basada en e^+e^- ganó preferencia sobre el uso de los datos del τ ya que como se concluye en la Ref. [12], la comprensión actual de las correcciones de violación de isospín a los datos del τ , desafortunadamente, aún no está a un nivel que permita su uso con incertidumbres competitivas. Parte del propósito de este trabajo es revisar los análisis previos de VMD [8, 9] para las correcciones electromagnéticas requeridas en los decaimientos de τ^- a dipiones y comparar los resultados obtenidos con los de R χ T recientes [7], de modo que puedan ser considerados confiables en la predicción del Modelo Estándar para $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$. También se hace un análisis sobre ciertos aspectos fenomenológicos similares que tiene con su contra-parte, al proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\gamma$, a través del llamado canal ω .

Un segundo punto que se desarrolla en esta introducción es el estado actual de las predicciones teóricas para el momento dipolar magnético del mesón ρ (770). En el estudio del proceso de decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$, dicha observable tiene una contribución dependiente de modelo asociado directamente al vértice electromagnético $\rho^+ \rho^- \gamma$ (parametrizado en términos de los multipolos electromagnéticos del mesón ρ). Aunque se sabe que en algunos modelos de quarks no relativistas, proporcionan un valor $\mu_\rho = 2$, en unidades de $e/2 M_\rho$,

similar al del bosón W . A la fecha, existen una serie de trabajos teóricos sobre la estructura del mesón ρ que muestran que dicho valor podría tener una leve desviación respecto a 2 que vale la pena revisar.

La determinación indirecta de esta observable podría llevarse a cabo a través del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$, ya que el ancho de decaimiento es una función del MDM del mesón ρ , pero a falta de información experimental para este proceso de desintegración, dicha determinación es imposible de realizar por el momento. Sin embargo, una alternativa para determinar de manera indirecta el MDM del mesón ρ viene a través del uso de datos experimentales para la sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- 2 \pi^0$. El valor reportado en la Ref. [15], sugiere un valor $\mu_\rho = 2.1 \pm 0.5$. La idea surge a partir de que en el contexto del VMD, el proceso de aniquilación a cuatro piones puede ser descrito a través de una serie de canales mediados por los mesones ligeros ρ , ρ' , ω , π , a_1 , σ y f_0 . Uno de estos los canales, mediado a través del mesón ρ , contiene al vértice electromagnético $\rho^+ \rho^- \gamma$, lo que permite calcular la sección eficaz total como función del MDM del mesón ρ y con ayuda de los datos experimentales se puede ajustar el valor de dicha observable. Para dicha determinación se usaron datos experimentales preliminares de la Colaboración BABAR [16] así como ciertas aproximaciones para el valor de las constantes de acoplamiento involucradas en la descripción del proceso, lo que genera que la incertidumbre sea relativamente grande en comparación con las predicciones teóricas. La necesidad de hacer un nuevo análisis para este proceso, bajo el mismo contexto, es con la finalidad de actualizar el valor reportado para μ_ρ , pero ahora usando los datos experimentales publicados por la colaboración BABAR [17] para el proceso $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- 2 \pi^0$, utilizando información experimental adicional para las constantes de acoplamiento involucradas en lugar de las aproximaciones anteriores.

A medida que avanza la tecnología, se aportan más datos de precisión desde el punto de vista experimental. La credibilidad del Modelo Estándar está firmemente establecida, ya que ahora puede reproducir teóricamente esos datos de precisión. Usando dicha teoría, se pueden hacer predicciones sobre el valor de acoplamientos, anchos de decaimiento, propie-

dades electro-débiles, entre otras observables. También puede poner severas restricciones a la posible física más allá del Modelo Estándar. Se puede enfatizar la importancia de mejorar la precisión teórica para los casos de estudio particular en este trabajo; Corrección electro-magnética y su respectiva contribución al momento dipolar magnético del muón para el caso $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ y la determinación del momento dipolar magnético del mesón ρ a través del proceso de aniquilación $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- 2 \pi^0$; en el contexto de VMD, la descripción de dichos procesos se hace asumiendo que el fotón virtual se acopla a una serie de mesones ligeros intermedios, dicha interacción se codifica en las llamadas constantes de acoplamiento. Estas constantes son importantes porque tienen implicaciones en las observables de los procesos. Sin embargo, la determinación de manera directa de algunos acoplamientos no puede llevarse a cabo, por lo que deben ser extraídos de manera indirecta a través de procesos de aniquilación o a partir de una serie de anchos de decaimiento de algunos procesos de baja energía. Además, la inclusión del mesón $\rho(1450)$ toma una relevante importancia para describir adecuadamente ciertas observables de precisión. Lo que resulta en la necesidad de realizar un análisis de un conjunto de modos de decaimiento y secciones eficaces en el régimen de baja energía para extraer los parámetros utilizados para su descripción en el contexto de VMD y las interacciones hadrónicas efectivas, que involucran a los hadrones de baja masa (ρ , ω y π) y ρ' . Finalmente, este capítulo culminará con la enumeración de los distintos capítulos de la tesis.

1.1. Estatus de $g - 2$ del muón

En abril del 2021, el experimento $g - 2$ del Fermilab [18-21], E989, publicó su primer resultado para el momento anómalo magnético del muón $a_\mu \equiv (g_\mu - 2)/2$ basado en los datos de Run-1. Cuando se combina este resultado con la medición anterior del experimento E821 del Brookhaven National Lab (BNL) [22], el resultado tiene una tensión de 4.2σ con respecto a la predicción teórica recomendada en el White Paper [12] de la Iniciativa Teórica Muon $g - 2$

[14]. Sin embargo, el nuevo resultado de FNAL en Fermilab de Run-1/2/3 [23], al comparar con la predicción de 2020 [12], arroja una discrepancia de 5.0σ uno respecto al otro, lo cual probablemente podría indicar la existencia de física más allá del Modelo Estándar. Por lo que, justo como se menciona en la Ref. [23], es necesaria una predicción teórica actualizada que considere todos los datos disponibles hasta ahora. Además, se requiere de una mayor precisión, ya que esto es esencial para poder decir de manera concluyente si esta diferencia sustancial proviene de física más allá del Modelo Estándar o pueda arrojar una discrepancia menor y menos significativa. Por lo que el estudio del MDM del muón tiene un significado práctico muy importante hoy en día.

La incertidumbre en la predicción del Modelo Estándar del momento dipolar magnético del muón, a_μ^{SM} , está limitada completamente por nuestro conocimiento de sus diferentes contribuciones, las cuales están determinadas a través de la suma de todos los sectores:

$$a_\mu^{\text{SM}} = a_\mu^{\text{QED}} + a_\mu^{\text{EW}} + a_\mu^{\text{HVP}} + a_\mu^{\text{HLbL}}, \quad (1.1)$$

donde a_μ^{QED} son las contribuciones de lazos en QED; a_μ^{EW} son las contribuciones electrodébiles; a_μ^{HVP} las contribuciones de polarización del vacío hadrónicas (HVP) y a_μ^{HLbL} son las contribuciones hadrónicas de dispersión de luz por luz (HLbL). Estos dos últimos conjuntos distintos de contribuciones hadrónicas son las que presentan una mayor incertidumbre dentro de la predicción del Modelo Estándar. En ambos casos, su evaluación viene a través de dos enfoques complementarios: un método dispersivo, el cual toma datos experimentales como punto de partida, y las evaluaciones de lattice QCD, en la que las correcciones hadrónicas son calculadas mediante simulaciones numéricas en el denominado espacio-tiempo euclidiano. Este punto es importante, por lo que será retomado en las siguientes secciones con un poco más de detalle.

Contribución	Valor $\times 10^{11}$	Referencias
Experimento (E821 + E989)	116 592 061 (41)	Refs. [18, 22]
Experimento (FNAL+BNL)	116 592 059 (22)	Refs. [23]
HVP LO(e^+e^-)	6931 (40)	Refs. [24-29]
HVP NLO (e^+e^-)	-98.3 (7)	Refs. [29]
HVP NNLO(e^+e^-)	12.4 (1)	Refs. [30]
HVP LO (lattice, $udsc$)	7116 (184)	Refs. [31-39]
HLbL (fenomenología)	92 (19)	Refs. [40-52]
HLbL NLO (fenomenología)	2 (1)	Refs. [53]
HLbL (lattice, uds)	79 (35)	Refs. [54]
HLbL (fenomenología + lattice)	90 (17)	Refs. [40-52, 54]
QED	116 584 718.931 (104)	Refs. [55, 56]
Electrodébil	153.6 (1.0)	Refs. [57, 58]
HVP (e^+e^- , LO+NLO+NNLO)	6845 (40)	Refs. [24-30]
HLbL (fenomenología + lattice + NLO)	92 (18)	Refs. [40-54]
Valor Total SM	116 591 810 (43)	Refs. [24-30, 40, 45-52, 53-58]
Diferencia: $\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}}(E821 + E989) - a_\mu^{\text{SM}}$	251 (59)	

Cuadro 1.1: Resumen de las contribuciones de a_μ^{SM} , tal y como se recogen en las Refs. [12, 14, 23, 59]. En el primer bloque se muestran los resultados para las principales contribuciones hadrónicas, así como el resultado combinado para el proceso de dispersión HLbL a partir de fenomenología y de lattice QCD disponibles hasta el momento. En el segundo bloque se resumen las cantidades que entran en la recomendación final para la contribución del SM, en particular, la contribución total HVP, evaluada a partir de datos e^+e^- , y el número total para la contribución HLbL.

En la Cuadro [1.1], se reproduce el estado actual de las predicciones del Modelo Estándar [14], así como también los recientes resultados experimentales [18, 22, 23], las cuales sirven como punto de referencia para las perspectivas de futuras mejoras experimentales. Ya que, justo como lo hace Fermilab en sus nuevos resultados [23], el objetivo principal es reducir

las incertidumbres experimental para los futuros experimentos de $g - 2$, como J-PARC [60] y, potencialmente en el PSI [61] y los siguientes en Fermilab [62], por lo que está claro que la teoría debe mejorarse al mismo tiempo. Esto es particularmente importante, ya que en lo que respecta a la contribución HVP, la situación actual es complicada dadas las tensiones que existen entre los diferentes resultados, especialmente en el enfoque dispersivo, donde las mediciones experimentales para las secciones eficaces $e^+e^- \rightarrow$ hadrones a bajas energías están basadas en más de veinte años de mediciones experimentales, y cuya predicción obtenida en el White Paper del 2020 [12] es inferior en alrededor de 5σ en comparación con la media experimental del 2023 presentada por Fermilab [23]. A esto, hay que sumarle los resultados presentados en lattice QCD por parte de la colaboración BMW [63], cuyo resultado está más cerca de la media experimental y a 2.1σ de tensión con la evaluación basada en datos presentada en el White Paper del 2020 [12]. Por otro lado, justo como se menciona en las Ref. [64, 65], para los resultados más recientes en el caso de la contribución HLbL, los dos enfoques arrojan resultados compatibles dentro de los errores con la estimación HLbL del White Paper 2020 [12]. Es por esta razón que la discusión se centra solo en las contribuciones HVP y se dejan a un lado las contribuciones HLbL, sumado a que para propósitos de este trabajo, éstas no son relevantes.

1.1.1. Evaluaciones basadas en datos para la contribución HVP

La evaluación de la contribución HVP basada en datos está dada a través de una relación de dispersión, la cual relaciona la contribución HVP a orden principal, denotada por $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$, con la sección eficaz total para procesos de aniquilación $e^+e^- \rightarrow$ hadrones [66, 67]:

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \frac{K(s)}{s} R(s), \quad (1.2)$$

¹La sección eficaz se define de manera inclusiva de fotones, ver Ref. [12], es decir, mientras que $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ es a orden $\mathcal{O}(\alpha^2)$, está contiene, por definición, contribuciones irreducibles de un fotón de orden $\mathcal{O}(\alpha^3)$. Esta convención coincide con la que se utiliza en los cálculos numéricos de lattice QCD.

donde $R(s)$ es la denominada relación R (hadrónica) definida por la sección eficaz *desnuda* para el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow$ hadrones con respecto a la sección eficaz de procesos de aniquilación e^+e^- a pares de muones de tipo puntual,

$$R(s) = \frac{\sigma^0(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}(\gamma))}{\sigma_{\text{pt}}}, \quad \sigma_{\text{pt}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \quad (1.3)$$

y $K(s)$ es el kernel de QED [67], el cual está definido por la expresión:

$$K(s) = x^2 \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) + (1+x)^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) (\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2) + \frac{1+x}{1-x} x^2 \log x, \quad (1.4)$$

donde $x = (1 - \beta_\mu)/(1 + \beta_\mu)$ y $\beta_\mu = \sqrt{(1 - 4m_\mu^2/s)}$.

La razón de utilizar la sección eficaz *desnuda*, (sección eficaz medida y corregida por la radiación del estado inicial (ISR), el vértice del electrón a un lazo y la contribución de polarización de vacío del fotón), es evitar una posible duplicación de las contribuciones de orden superior que ya están incluidas y forman parte de a_μ . Por otra parte, dado que el kernel de QED, $K(s)$, disminuye a medida que la energía s aumenta, la integral de la ec. (1.2), se pondera hacia regiones de bajas energías y, como se menciona en la Ref. [68], hace enfatizar la contribución del mesón ρ junto a una mezcla con el mesón ω , lo cual representa aproximadamente un 73% de la contribución total. Además, se sabe que alrededor del 93% de la contribución total proviene de valores para la energía s por debajo de 1.8 GeV [68]. Por lo que, dado que la sección eficaz total medida directamente de procesos de aniquilación $e^+e^- \rightarrow$ hadrones por encima de $\sqrt{s} \approx 1$ GeV no se conoce con suficiente precisión, por lo que es común utilizar secciones eficaces individuales exclusivas. Este enfoque dispersivo gira en torno a la facilidad que se tiene sobre las mediciones de la sección eficaz hadrónica e^+e^- a energías por debajo de unos pocos GeV. Sin embargo, como señalan los autores de la Ref. [2], también es posible utilizar las desintegraciones hadrónicas del leptón τ^- para la evaluación de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$. Este enfoque fue competitivo durante algún tiempo con el método que considera procesos de aniquilación e^+e^- , aunque en la actualidad no se considera que

este sea el caso [12] ya que existe un desacuerdo entre las funciones espectrales de los canales a 2π y 4π obtenidas a partir de estas dos reacciones. Esto plantea un problema serio ya que estos son dos de los canales dominantes de la contribución hadrónica total.

Procesos de aniquilación e^+e^- y decaimientos del leptón τ .

A partir de 1997, se dispusieron de funciones espectrales para el leptón τ^- precisas [69-71], lo que permitió obtener la parte iso-vectorial de la sección eficaz de procesos e^+e^- [72]. En la medida en que la hipótesis de la conservación de corriente vectorial (CVC) sea correcta, la parte iso-vectorial de la sección eficaz $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})$ está directamente relacionada con la correspondiente desintegración del leptón τ a partir de una rotación de isospín [73]. La sección eficaz del proceso de aniquilación e^+e^- a un estado final hadrónico X se puede escribir en términos de una función espectral $v_0^X(s)$ como:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow X) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} v_0^X(s), \quad (1.5)$$

donde $s \equiv M_X^2$ es el cuadrado de la energía de centro de masa para el proceso de aniquilación e^+e^- .

Por otra parte, para el proceso de decaimiento $\tau^- \rightarrow X^- \nu_\tau$, se tiene que:

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 S_{EW}}{32\pi^2 m_\tau^3} (m_\tau^2 - s)^2 (m_\tau^2 + 2s) v_-^X(s), \quad (1.6)$$

donde m_τ es la masa del leptón τ , G_F es la constante de Fermi, $|V_{ud}|$ es el elemento de matriz de mezcla débil de la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) y S_{EW} tiene en cuenta las correcciones radiativas electro-débiles [74-78]. Por otro lado, las funciones espectrales son obtenidas a partir de su correspondiente distribución invariante de masa y la suposición de CVC implica que $v_0^X = v_-^X$, donde v_-^X es la función espectral para las desintegraciones del leptón τ^- y la cual depende directamente de las correcciones de rompimiento de isoespín. Con una apropiada combinación de estados finales, se tiene por ejemplo, para los canales a

2π y 4π que:

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{s} v^{\pi^-\pi^0}, \\ \sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{s} v^{\pi^-\pi^0}, \\ \sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0) &= \frac{4\pi\alpha^2}{s} (v^{2\pi^-\pi^+\pi^0} - v^{\pi^-\pi^0}).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Centrando nuestra atención en el canal dominante a dos piones, $\pi^+\pi^-$, para el caso del leptón τ^- se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{ds}(\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau) &= \frac{6\pi|V_{ud}|^2 S_{EW}}{m_\tau^2} \frac{B(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)}{B(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^-\pi^0)} \\ &\times \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right) \left(1 + \frac{2s}{m_\tau^2}\right) v_-(s),\end{aligned}\tag{1.8}$$

donde los $B(i)$ se refiere a los Branching ratios. La simetría SU(2) (CVC) implicaría que $v_-(s) = v^{\pi^-\pi^0}$, y dichas funciones espectrales a su vez están relacionadas a los factores de forma del pión $F_\pi^i(s)$ por:

$$v_i(s) = \frac{\beta_i^3(s)}{12\pi} |F_\pi^i|^2,\tag{1.9}$$

donde $\beta_i(s)$ es la velocidad del pión. Antes de que sea posible una comparación precisa para el canal a dos piones, es necesario tomar en cuenta los efectos de rompimiento de isoespín $R_{IB}(s)$ como se menciona en la Ref. [4]. La versión correcta para la sección eficaz a dos piones (ver detalles en Ref. [4]) puede ser escrita entonces como:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \left[\frac{K_\sigma(s)}{K_\Gamma(s)}\right] \frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{ds} \frac{R_{IB}}{S_{IB}}\tag{1.10}$$

con

$$K_\Gamma(s) = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2 m_\tau^3}{384\pi} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2s}{m_\tau^2}\right); \quad K_\sigma(s) = \frac{\pi\alpha^2}{3s}.\tag{1.11}$$

Luego, el factor de corrección de rompimiento de isoespín queda definido por la expresión:

$$R_{IB} = \frac{FSR(s)}{G_{EM}(s)} \frac{\beta_0^3(s)}{\beta_-^3(s)} \left| \frac{F_0(s)}{F_-(s)} \right|,\tag{1.12}$$

donde $FSR(s)$ corresponde a la corrección radiativa para el estado final [79, 80], $G_{EM}(s)$ denota a la corrección radiativa de largas distancias de orden α para el espectro del proceso inclusivo de fotones $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau(\gamma)$ [13], $\beta_0^3(s)/\beta_-^3(s)$ considera el imparto entre la razón de los factores de espacio fase, relevante cerca del umbral, y $F_0(s)$, $F_-(s)$ son los factores de forma electromagnético y débil para el pión, respectivamente. La razón entre estos factores es la corrección más difícil de estimar. ya que por debajo de 1 GeV, dichos factores de forma están gobernados principalmente por la resonancia del mesón ρ . Además de que se esperan efectos importantes de rompimiento de isoespín (IB) asociados a las diferencias de masa y ancho de decaimiento entre los mesones ρ^\pm y ρ^0 , y la mezcla $\rho - \omega$ [81, 82].

A pesar de las mejoras que se tienen en el cálculo de las correcciones IB, todavía existe una discrepancia considerable entre la predicción basada en e^+e^- de $693.1 (4.0) \times 10^{-10}$ y la basada en τ de $703.0 (4.4) \times 10^{-10}$ [83]. Esta diferencia asciende a $9.9(4.0) \times 10^{-10}$, lo cual corresponde aproximadamente a una desviación alrededor de 2σ . Lamentablemente, la comprensión de las correcciones IB a los datos del leptón τ aún no alcanza el nivel de precisión necesario para igualar la precisión de los datos de procesos e^+e^- , lo que hace que estos no sean considerados para su uso en la evaluación de la integral de dispersión para HVP. Sin embargo, dado que sigue siendo una posibilidad, en este trabajo se examinará el enfoque basado en datos del leptón τ , principalmente enfocado en el espectro del dipión, en la corrección electromagnética $G_{EM}(s)$ y su contribución al MDM del muón Δa_μ bajo el contexto de VMD. Esto se hace con el objetivo de cerrar las discrepancias existentes para los valores obtenidos de Δa_μ bajo los modelos de VMD [8, 9] y $R\chi T$ [3, 4, 7, 84].

Los avances en la evaluación de la contribución HVP basada en datos que incluyen al canal más crucial a 2π , (datos de SND [85] y BESIII [86]) así como datos para $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ [87, 88], el segundo canal más grande tanto en valor absoluto como en error no indican cambios significativos en comparación con la situación descrita en la Ref. [12]. Además, se han analizado restricciones de unitaridad y analiticidad para los canales $\pi^0\gamma$ [89] y $\bar{K}K$ [90]. Sin embargo, la situación se ha vuelto desconcertante, ya que en febrero del 2023, la colaboración

CMD-3 lanzó los resultados de medición más reciente para la sección eficaz $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$ [91], la cuál, por sí sola, reduciría la discrepancia existente con a_μ^{Exp} a menos de 2σ . En consecuencia, estos resultados de CMD-3 están en tensión con las mediciones anteriores para el canal $\pi^+\pi^-$, realizadas por CMD-2 [92-94], SND [95, 96], KLOE [97-99], BABAR [100], BES [101] y CLEO [102]. Estudios dedicados a las correcciones radiativas empleadas en los generadores Monte Carlo que se utilizan en estos experimentos [103] podrían explicar esta controversia. Por otro lado, de forma más discreta, pero relacionada, BABAR [104] muestra que su método para medir $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ es robusto frente a la radiación adicional, pero que vale la pena seguir de cerca.

De cara al futuro, nuevos datos en el canal crítico $\pi^+\pi^-$ con el mismo nivel de precisión que BABAR [100, 105] y KLOE [97-99, 106] son requeridos, además de nuevos datos para otros canales. Por otra parte, se sabe que el análisis de $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ de SND 2020 [96] se basó solo en el 10% de las estadística disponible, por lo que se está esperando una actualización con un conjunto más completo de datos. Sin embargo, para resolver de forma creíble las tensiones existentes, especialmente para el canal $\pi^+\pi^-$, los análisis ciegos son de suma importancia, por lo que se espera que las colaboraciones como BABAR, CMD-3, BESII y Belle II estén disponibles en los próximos años. Por último, para el éxito de este programa, el desarrollo de generadores Monte Carlo con mayor precisión es necesario [107, 108].

1.1.2. Cálculos de la contribución HVP en lattice QCD

La contribución de orden principal HVP del momento anómalo magnético del muón a_μ se puede calcular en lattice QCD como una integral ponderada sobre el tiempo euclidiano de la función de correlación de dos puntos de la corriente vectorial electromagnética de los quarks [109, 110]. Esta integral se hace restringiendo juiciosamente el rango de integración (o *ventana*), lo cual permite construir sub-cantidades para la contribución HVP del momento anómalo magnético del muón $a_\mu^{HVP,LO}$, lo que evita tener efectos estadísticos y/o sistemáticos

problemáticos [111-113]. Estas mismas observables de *ventanas* sobre el tiempo euclidiano también pueden obtenerse a partir del enfoque basado en datos a través de la relación R , descrito anteriormente, salvo que debe incluirse una función de peso adecuada sobre la integral de dispersión para $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ [114]. Estas *ventanas* son una valiosa herramienta no solo para detectar fuentes de desacuerdo entre los diferentes resultados de lattice QCD, sino también para cuantificar las diferencias (si las hay) entre las determinaciones basadas en datos y las basadas en lattice QCD, dado que este enfoque de las ventanas de tiempo euclidiano permiten comparaciones más detalladas y sensibles entre cálculos independientes para $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$.

La predicción para HVP en lattice del White Paper de 2020 [12], resulta de la combinación de los diferentes resultados por varias colaboraciones publicados antes de la fecha límite de marzo de 2020 [31-39] con una incertidumbre total de aproximadamente 2.6%. En 2021, la colaboración BMW publicó el primer resultado de lattice QCD para $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ más preciso hasta la fecha con una incertidumbre por debajo del porcentaje [63] (BMW20). Tomado de forma aislada, el resultado de BMW20 muestra una tensión reducida con el promedio para a_μ de aproximadamente 1.5σ del experimental, al mismo tiempo que se aleja 2.1σ del resultado dado en la Ref. [12] para el cálculo basado en datos para la contribución HVP. Bajo la propuesta de las ventanas de tiempo euclidiano [111-113], en 2018 las colaboraciones RBC y UKQCD propusieron la separación de la integral de tiempo euclidiano en tres contribuciones de tiempos: *cortos* ($t \leq 0.4$ fm), *intermedios* ($0.4 \leq t \leq 1.0$ fm) y *largos* ($t \geq 1.0$ fm) [111]. La observable de la ventana intermedia $a_\mu^{\text{HVP,LO,W}}$ se puede calcular en lattice QCD con alta precisión estadística. Por lo que, dicha observable ha sido adoptada por la comunidad de $g-2$ del muón como una cantidad de referencia. Varios cálculos independientes de lattice QCD para $a_\mu^{\text{HVP,LO,W}}$ han sido llevados a cabo [63, 111, 115, 116], pero los resultados arrojados no fueron del todo consistentes. Por un lado, el resultado inicial para la ventana intermedia presentado por RBC/UKQCD [111] está alrededor de 1σ respecto a la determinación a partir de los datos [114]. Cálculos más recientes para $a_\mu^{\text{HVP,LO,W}}$, resumidos en la Fig. 1.1, fueron

realizados por Aubin *et al.* [112, 117], Lehner & Meyer [118], las colaboraciones BMW [63], χ QCD [119], Mainz/CLS [115], ETM [116], RBC/UKQCD [120] y Fermilab/HPQCD/MILC [65], son todos superiores en más de 3σ por encima del valor obtenido a partir de los datos. A pesar de que los resultados parecen coherentes unos respecto a los otros, estos no son totalmente independientes, ya que justo como se menciona en la Ref. [65], deben tomarse en cuenta las correlaciones estadísticas y sistemáticas debidas a las configuraciones compartidas. Por lo tanto, es necesario un análisis más detallado de la ventana intermedia para aclarar el panorama.

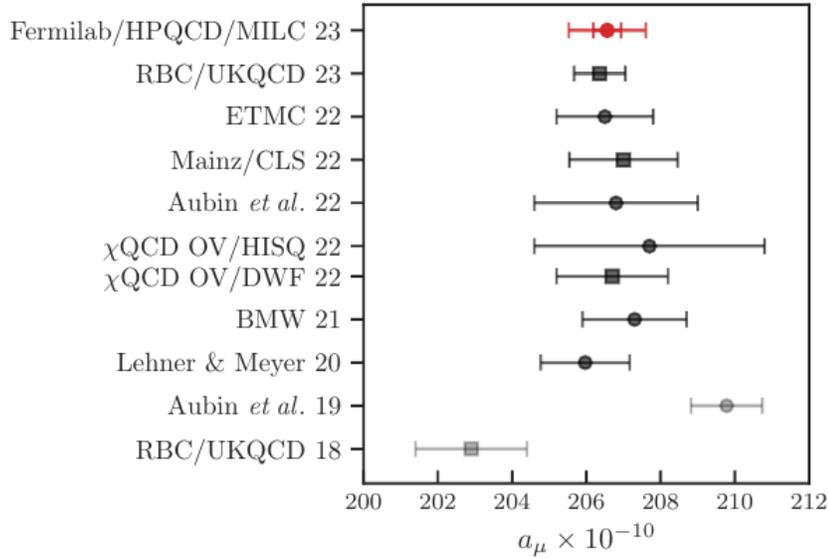


Figura 1.1: Comparación de los diferentes resultados en lattice QCD para la observable de la ventana intermedia $a_\mu^{\text{HVP,LO,W}}$ por Fermilab/HPQCD/MILC [65], RBC/UKQCD [111, 120], ETMC [116], Mainz/CLS [115], Aubin *et al.* [112, 117], χ QCD [119], BMW [63] y Lehner & Meyer [118]. Esta figura fue tomada directamente de la Ref. [65].

Por otra parte, existe la posibilidad de evaluar las ventanas de tiempo euclidiano a través de datos del leptón τ^- . De echo, en la Ref. [121] se hace el cálculo por primera vez, mostrando que los resultados coinciden con las evaluaciones disponibles en lattice QCD para la observable de la ventana intermedia, donde todas las evaluaciones son bastante precisas.

Esto es particularmente interesante, ya que como se menciona con anterioridad, existe una discrepancia entre el resultado obtenido basado en datos para e^+e^- con los valores obtenidos en lattice QCD en esta ventana intermedia. Una vez que se resuelvan las tensiones entre los diferentes resultados en lattice QCD, las comparaciones detalladas de los resultados para las ventanas, así como de otras sub-cantidades (véase, por ejemplo, la Ref. [122]), de lattice QCD y el enfoque basado en datos permitirán realizar pruebas refinadas entre los dos enfoques para la contribución HVP. Además, suponiendo que las tensiones entre los dos enfoques se entiendan y se resuelvan, las cantidades de ventana pueden proporcionar una estrategia útil para combinar los resultados de lattice QCD y los basados en datos para producir una mejor precisión en la contribución total para $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ [33].

1.1.3. Perspectivas para $g - 2$ del muón

Con todo lo mencionado anteriormente, lo más razonable es esperar a que se dispongan de nuevos datos y nuevos resultados para las contribuciones hadrónicas de a_μ , no solo para la contribución HVP si no también para la contribución HLbL, a partir de los dos enfoques independientes mencionados anteriormente. Cada uno de estos enfoques con la precisión comparable con las perspectivas de los experimentos $g - 2$. Si en determinado momento para la contribución HVP como para HLbL las determinaciones basadas en datos y en lattice QCD coinciden, se podría obtener una predicción para a_μ con una precisión sin precedentes dentro del Modelo Estándar. En cambio, si se mantienen las tensiones entre los resultados, particularmente para la contribución HVP, serán necesarios esfuerzos adicionales para tratar de comprender de dónde surgen estas tensiones y de alguna forma tratar de resolverlas. Por lo que será importante explorar en detalle las conexiones que existen entre la contribución HVP, las secciones eficaces e^+e^- , los parámetros de baja energía relacionados, las correcciones hadrónicas en función de en la constante electromagnética α y el ajuste electrodébil global [123-128]. También, se espera en los próximos años que el experimento MUonE [129-132] en

el CERN proporcioné un método independiente y competitivo para calcular la contribución HVP, basado en la medición de alta precisión de la forma de la sección eficaz diferencial de la dispersión elástica muón-electrón.

Por otra parte, se ha mencionado que los datos hadrónicos para decaimientos del leptón τ^- pueden utilizarse para evaluar la contribución HVP. Sin embargo, se requiere de la determinación de las correspondientes correcciones de rompimiento de isospín [2]. Aunque las estimaciones fenomenológicas de estas correcciones no están lo suficientemente cuantificadas, en la Ref. [133] se menciona que pueden calcularse de forma fiable en lattice QCD. Por lo que, si se dispusiera de estos resultados precisos para las correcciones de isospín en lattice QCD, los datos provenientes a partir de decaimientos hadrónicos del leptón τ podrían utilizarse para proporcionar interesantes comprobaciones cruzadas con otros modelos. Cabe señalar que se esperan medidas precisas de las funciones espectrales de decaimientos del leptón τ en Belle II en los próximos años que probablemente ayuden ampliar el panorama desde este punto de vista.

Finalmente, el programa experimental de $g - 2$ continuará en J-PARC [60], con una técnica experimental completamente independiente. Potencialmente aún más allá, con el High-Intensity Muon Beams (HIMB) del PSI [61] y el Muon Campus del Fermilab [62]. Además, para la evaluación basada en datos de la contribución HVP, se requiere de un programa sostenido en máquinas e^+e^- (en Belle II, BES III y Novosibirsk), junto con el cálculo de correcciones radiativas de orden superior y el desarrollo de generadores Monte Carlo con mayor precisión. En el caso de los cálculos de HVP y HLbL en lattice QCD, las incertidumbres sistemáticas y estadísticas pueden mejorarse significativamente con el acceso a gran escala a futuras instalaciones informáticas de primer orden.

1.2. Momento dipolar magnético del mesón ρ (770)

La descripción de la interacción fuerte entre quarks se dividen en dos direcciones. Desde el punto de vista de las altas energías, estos se acoplan débilmente, por lo que los cálculos perturbativos fiables ayudan un poco en la descripción cuantitativa de datos precisos de baja energía. Desde el punto de vista de las bajas energías, se han desarrollado con éxito varios modelos para describir un gran número de datos, los cuales, para ser cuantitativos, requieren necesariamente de alguna aportación fenomenológica. En esta dirección, el estudio de las propiedades electromagnéticas de los mesones π y ρ , los estados ligados más simples construidos a partir de dos quarks ligeros (u, d), es de particular interés. Además, vale la pena mencionar que la situación experimental es bastante diferente para estos dos mesones. Las propiedades del pión son bien conocidas a partir de experimentos. Por el contrario, los datos experimentales sobre el mesón ρ son escasos. Su tiempo de vida es muy corto, aproximadamente 4.5×10^{-24} s, por lo que las medidas directas de sus propiedades electro-débiles son prácticamente imposibles. Esto ha dado surgimiento a una gran cantidad de trabajos teóricos, los cuales han considerado el estudio de las propiedades electro-débiles del mesón ρ . Sin embargo, la base experimental sigue siendo limitada. Dado el interés particular que se tiene sobre la obtención indirecta del MDM del mesón ρ en este trabajo, en el Cuadro [1.2](#) se proporciona el valor del MDM del mesón ρ a través de diferentes modelos, dejando de lado muchos artículos interesantes que dan un panorama un poco más general sobre la estructura del mesón ρ , por ejemplo, algunos basados en el enfoque holográfico [134](#).

Note que existen una gran cantidad de cálculos para el MDM del mesón ρ a partir de diferentes modelos efectivos basados en simétrías de QCD. En primer lugar, se hace referencia a diferentes formulaciones relativistas particulares del modelo de quarks constituyentes (CQM) basados en el trabajo de P. Dirac [135](#), denominada dinámica relativista Hamiltoniana (RHD) o mecánica cuántica relativista (RQM) cuyas formas principales son la forma instantánea (IF) [136](#), [137](#), la forma puntual (PF) [137](#), [138](#) y la dinámica de frente-luz (LF) [139](#)-[143](#). Dinámica de frente de luz en modelo de quarks constituyentes [144](#) (LF CQM) y

funciones de onda (LFWF) [145].

Modelo	$\mu_\rho \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]$	Referencias	Modelo	$\mu_\rho \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]$	Referencias
RHD	2.16 ± 0.03	Ref. [136]	NJL	2.083	Ref. [146]
	2.26	Ref. [139]		2.59	Ref. [147]
	2.14	Ref. [140]		2.1	Ref. [148]
	2.1	Ref. [141]	QCD sum rules	2.0 ± 0.3	Ref. [149]
	1.83	Ref. [142]		2.4 ± 0.4	Ref. [150]
	1.92	Ref. [143]	LF triangle	2.35	Ref. [151]
	1.5	Ref. [137]	Bag model	2.06	Ref. [152]
	0.9	Ref. [137]	RCQM	2.3	Ref. [153]
	2.20	Ref. [138]	RH	1.96	Ref. [154]
LF CQM	2.06	Ref. [155]	EFT	2.24	Ref. [144]
LFWF	2.15	Ref. [145]			
DSE	2.69	Ref. [156]	Lattice	2.25 ± 0.34	Ref. [157]
	2.44	Ref. [158]		2.02	Ref. [159]
	2.01	Ref. [160]		2.39 ± 0.01	Ref. [161]
	2.11	Ref. [162]		2.21 ± 0.08	Ref. [163]
	2.11	Ref. [164]		2.11 ± 0.10	Ref. [165]
	2.21	Ref. [166]	Exp. VMD	2.1 ± 0.5	Ref. [15]
PiQM	2.29 ± 0.01	Ref. [167]	Val. Obt.		

Cuadro 1.2: Comparación de los diferentes resultados para el momento dipolar magnético μ_ρ (en unidades de $\left[\frac{e}{2m_\rho} \right]$) en diferentes aproximaciones.

También hay enfoques basados en la ecuación de Dyson-Schwinger (DSE) [156, 158, 160, 162, 164, 166], la forma puntual de la mecánica cuántica invariante de Poincaré (PiQM) [167]. Otros más basados en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [146-148]. Algunos autores utilizan Reglas de Suma de QCD (QCD sum rules) [149, 150], diagramas de Feynman en

el formalismo de frente de luz (LF-triangle) [151], el modelo de bolsa (Bag model) [152], el modelo compuesto relativista (RCQM) [153], el modelo Hamiltoniano relativista construido (RH) [154], una teoría efectiva de campos de baja energía (EFT) construida a partir de la Lagrangiana efectiva, invariante quiral, de mesones vectoriales que interactúan con piones en presencia de campos externos más general [144], y cálculos en lattice QCD [157, 159, 161, 163, 165]. Se puede observar en el Cuadro 1.2 que la mayoría de los resultados se agrupan cerca del valor $\mu_\rho = 2 [e/2 m_\rho]$, es decir, cerca de la relación giromagnética $g = 2$, salvo en algunos de los cálculos basados en los modelos LF, IF, PF, RHD [137, 142, 143] y RH [154] donde se estimó que $\mu_\rho < 2$. Los autores de la Ref. [168], señalaron que la cercanía universal a $g = 2$ también se puede entender en comparación con el principio de equivalencia para los mesones vectoriales.

Por otra parte, en la Ref. [15], el momento magnético del mesón ρ se obtuvo a partir de los datos experimentales preliminares, proporcionados por BABAR [16], para sección eficaz del proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ bajo el contexto de VMD. El valor reportado para el MDM del mesón ρ fue de $\mu_\rho = 2.1 \pm 0.5 [e/2 m_\rho]$. En un artículo más reciente [17], la Colaboración BABAR presenta los resultados definitivos sobre la mencionada reacción. Justo como se menciona en la Ref. [136], es necesario un nuevo procesamiento de los datos de BABAR que permita aumentar la precisión del valor de μ_ρ extraído a partir de los datos experimentales. Note que la incertidumbre asociada a este cálculo es grande respecto a las otras aproximaciones, pero esto no solo se debe a el uso de datos experimentales preliminares, también se debe a que este valor depende de las incertidumbres asociadas a los parámetros involucrados (constantes de acoplamiento), para la descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, el cual está mediado por los mesones $\rho(770)$, $\rho(1450)$, $\omega(782)$, π , $a_1(1260)$, $\sigma(600)$ y $f_0(980)$. La inclusión del mesón $\rho(1450)$ es de suma importancia para tener una mejor descripción y ajuste de la sección eficaz del proceso a cuatro piones como una función de μ_ρ . Sin embargo, también es una fuente de incertidumbre dada la falta de información experimental. Por esta razón, un objetivo de este trabajo fue actualizar este valor μ_ρ , a través del re-análisis del

proceso $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- 2 \pi^0$, bajo el mismo contexto dado en la Ref. [15], pero ahora usando los datos experimentales más recientes de la colaboración BABAR [17]. Por otra parte, la inclusión del mesón ρ' lleva a la necesidad de hacer un análisis a un conjunto de modos de decaimiento y secciones eficaces, en el régimen de baja energía, con el objetivo determinar el papel desempeñado por este mesón y la extracción de sus parámetros e interacciones hadrónicas efectivas que, además, involucra a otros hadrones de baja masa (ρ , ω y π).

1.3. Análisis de parámetros hadrónicos a bajas energías

La existencia de los mesones isovectoriales $\rho(1450)$ y $\rho(1700)$ y sus homólogos mesones isoescalares parece estar bien establecida [169]. La explicación inicial de estos estados de mesones vectoriales fue que son el primer radial $2^3 S_1$, y el primer orbital, $1^3 D_1$, de los mesones ρ y ω , ya que sus masas se aproximan a las predichas por el modelo de quarks [170]. Sin embargo, la existencia del mesón $\rho(1450)$ fue apoyada por un análisis de los espectros de masas $\eta \rho^0$ obtenidos a través de la fotoproducción y procesos de aniquilación $e^+ e^-$ y numerosos análisis posteriores de los canales 2π , 4π y $\eta \rho^0$ en procesos de aniquilación $e^+ e^-$ y decaimientos τ^- [171]. Pruebas independientes tanto para $\rho(1450)$ como para $\rho(1700)$ en sus modos de desintegración a 2π y 4π surgieron del estudio de las reacciones $\bar{p}n \rightarrow \pi^- \pi^0 \pi^0$ [172] y $\bar{p}n \rightarrow \pi^- 4\pi^0$, $\bar{p}n \rightarrow 2\pi^- 2\pi^+ \pi^+$ [173]. Por otro lado, las pruebas de la existencia conjunta de los mesones $\rho(1450)$ y la $\rho(1700)$ proceden principalmente de los canales $\pi^+ \pi^-$ y $\omega \pi^0$ en la procesos de aniquilación $e^+ e^-$ y de los correspondientes canales cargados en la desintegración del leptón τ^- . Los datos sobre $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-$ y $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \pi^0$ (excluyendo $\omega \pi^0$) y los correspondientes canales cargados en el decaimiento del τ^- son compatibles con la interpretación de dos resonancias [174][176].

Aunque existe un consenso general sobre la existencia de las resonancias $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ y sus homólogos isoescalares, existe una considerable ambigüedad en los parámetros de estas resonancias. Los resultados de los canales para los que existe una fuerte interferencia con la

cola de los mesones ρ , ω o ϕ , por ejemplo en $\pi^+\pi^-$ y $\omega\pi^0$, son sensibles a la elección del modelo utilizado para estimar esta contribución. Los datos que se analizan tienen muchas medias por encima del pico ρ , ω o ϕ y la cola de alta energía de una resonancia es una cantidad bastante mal definida. Se desconocen las fases relativas de los mesones vectoriales de masa superior. Además, las correcciones del modelo y la mezcla de estados desnudos a través de canales hadrónicos comunes pueden inducir fases arbitrarias entre estados físicos. Permitir que éstas varíen puede cambiar drásticamente la interferencia y, por tanto, los parámetros de resonancia. Es esencial analizar todos los canales disponibles simultáneamente para tener en cuenta correctamente la contribución de la apertura a la anchura total. Sin embargo, no todos los datos son de calidad comparable y los datos de algunos canales son incoherentes. Además, las intensidades de los acoplamientos entre el fotón virtual y los mesones vectoriales están restringidos por otros datos experimentales. Es evidente que no se conoce con certeza ni el número ni la naturaleza de todos los estados vectoriales. Falta un conocimiento detallado de los canales hadrónicos específicos en sus desintegraciones.

Con todo lo mencionado anteriormente y teniendo la necesidad de incluir al mesón ρ (1450) en la descripción de varios de los procesos que se desarrollan a lo largo de este trabajo, se tiene la necesidad de hacer un análisis a un conjunto de modos de decaimiento y secciones eficaces, en el régimen de baja energía, con el objetivo de determinar el papel que desempeña este mesón así como la extracción de sus parámetros e interacciones hadrónicas efectivas que, además, involucra a otros hadrones de baja masa (ρ , ω y π). En un primer paso, se determinan una serie de parámetros que dependen del modelo (Modelo de Dominancia Vectorial VMD) a partir de diez modos de decaimiento que son insensibles al mesón ρ (1450). Luego, se considera al decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$ y se muestra la necesidad de extender la descripción incorporando al mesón ρ (1450) y un término de contacto según lo prescrito por la anomalía de Wess-Zumino-Witten. En un segundo paso de este análisis, se incorporan los datos de la sección eficaz experimental de los procesos de aniquilación $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ (medidos por SND, CMD2, BABAR y BESIII) y luego los datos del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ (medidos

por SND y CMD2) para restringir aún más la región de validez de los parámetros del mesón ρ (1450). La aplicación de los resultados de este análisis es de suma relevancia para el desarrollo de esta tesis.

1.4. Estructura de la tesis

Como se ha dicho, este trabajo adopta el enfoque de una versión generalizada del Modelo de Dominancia Vectorial (VMD) que permite describir el acoplamiento de mesones vectoriales y la corriente electromagnética, y los elementos de matriz hadrónicos de los diferentes procesos desarrollados a lo largo de este trabajo. La idea principal se basa en que los factores de forma que describen estas corrientes hadrónicas pueden ser descritos a través de hadrones ligeros (vectoriales, axiales y/o pseudo-escalares, según sea el caso) que poseen los números cuánticos apropiados para acoplarse [177, 178]. Dado que los quarks u y d son los componentes fundamentales de los hadrones, todos los modelos de VMD incluyen los mesones de masa más baja, el π , ρ y el ω .

El viaje y desarrollo a través de este trabajo de tesis se realiza a través de una serie de seis Capítulos. Desafortunadamente para el lector, esta Introducción desarrollada hasta ahora forma parte del Cap. [1] y por tanto ya sabe su contenido, es innecesario repetir y describir otra vez los elementos que la componen. El Cap. [2] parte de la necesidad de conocer los componentes fundamentales necesarios para el desarrollo de esta tesis, proporcionando de una breve introducción de los elementos que conforman al Modelo Estándar de partículas elementales a través de la descripción, primero, de la parte de interacción electro-débil; Lagrangiana, interacciones, generación de masa de fermiones y bosones para luego introducir los conceptos fundamentales de la interacción fuerte, la descripción de modelos efectivos (ChPT y VMD) que ayudan a la descripción del régimen no perturbativo de QCD, además de una breve descripción de los Hadrones y sus constituyentes fundamentales, los quarks. El desarrollo de los objetivos propuestos en este trabajo inicia a partir del Cap. [3] el cual pre-

senta un análisis de parámetros hadrónicos fundamentales para este trabajo. En el Cap. 4 se desarrolla a detalle el modelo utilizado para la determinación indirecta del MDM del mesón ρ a partir de los datos para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$, el cual se describe a través de una serie de canales que involucra a los mesones ligeros vectoriales. Además, se discuten los valores de los parámetros del modelo que fueron definidos previamente, y se hace una discusión y la comparación del resultado obtenido con los resultados de otros autores previamente mostrados en el Cuadro 1.2. El Cap. 5 presenta el estudio del decaimiento radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau\gamma$ donde se determinan las partes dependiente e independientes de modelo. Se determina completamente las correcciones electromagnéticas a primer orden al decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$ y el efecto de rompimiento de isoespín originado por las correcciones radiativas en la predicción del MDM del muón a_μ . Finalmente en el Cap. 6 se dan las conclusiones y observaciones más importantes de este trabajo. Como un extra, se incluyen algunos apéndices con detalles esenciales para la realización de los cálculos de este trabajo.

Capítulo 2

Breve descripción del Modelo

Estándar

En este capítulo se hace una breve descripción de las partículas e interacciones elementales que constituyen al Modelo Estándar de física de partículas. Se presentan los conceptos básicos en la construcción de la Lagrangiana del Modelo Estándar, los fundamentos de la teoría de interacción fuerte (QCD) así como las bases de los modelos ChPT y VMD. Finalmente se presentan algunas características de los mesones ligeros.

El Modelo Estándar (SM) de la física de partículas se basa en los grupos de norma $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Se trata de un modelo de gran éxito para la descripción de tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. Las interacciones electromagnética, débil y fuerte entre las partículas elementales conocidas en las escalas de energía disponibles actualmente se predicen y describen mediante el Modelo Estándar en términos de una serie de parámetros que pueden determinarse experimentalmente o calcularse a partir de la teoría. Por un lado, la teoría electro-débil (también conocida como teoría de Glashow-Weinberg-Salam (GWS)) es una teoría unificada que describe la interacción débil y electromagnética de las partículas elementales. Su prototipo fue el modelo de Glashow [\[179\]](#) para combinar la

interacción débil y electromagnética en el marco de la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Weinberg y Salam [180, 181], complementaron el mecanismo de Higgs [182] para generar las masas de partículas de norma y fermiones, y consiguieron situar el modelo en el marco matemático de las teorías de norma. Su renormalizabilidad fue demostrada por 't Hooft [183, 184], completándola como una teoría matemática autoconsistente.

Por otra parte, la Cromodinámica Cuántica (QCD) es una teoría de norma basada en la simetría de color $SU(3)_C$, donde surge la idea de la carga de color, la cual puede ser de tres tipos y que es la fuente de la interacción fuerte que actúa entre los quarks [185, 186]. Está fue elevada a la teoría de la interacción fuerte cuando la libertad asintótica fue descubierta por Gross, Politzer y Wilczek [187-189]. La esencia del Modelo Estándar, un nombre para denotar la teoría GWS y QCD, puede resumirse en las siguientes frases:

1. Los componentes básicos de la materia son los quarks y los leptones.
2. Sus interacciones se describen en el marco matemático de la teoría de campos de norma.
3. El vacío está en una especie de fase superconductora.

2.1. Partículas elementales del Modelo Estándar

Las partículas y campos que componen al Modelo Estándar consisten en un bloque compuesto de doce fermiones: leptones y quarks (espín = 1/2), cuatro bosones de norma: γ , Z y W^\pm (espín=1), ocho gluones y un bosón escalar, conocido como el bosón de Higgs, H (espín =0) (Ver Fig. 2.1¹). A su vez, los fermiones pueden ser clasificados en términos de sus componentes de isospín en dobletes izquierdos (L) y singletes derechos (R) del grupo de simetría $SU(2)$.

¹Figura generada y modificada con TikZ Latex a partir del ejemplo mostrado en: <https://texample.net/tikz/examples/model-physics/>

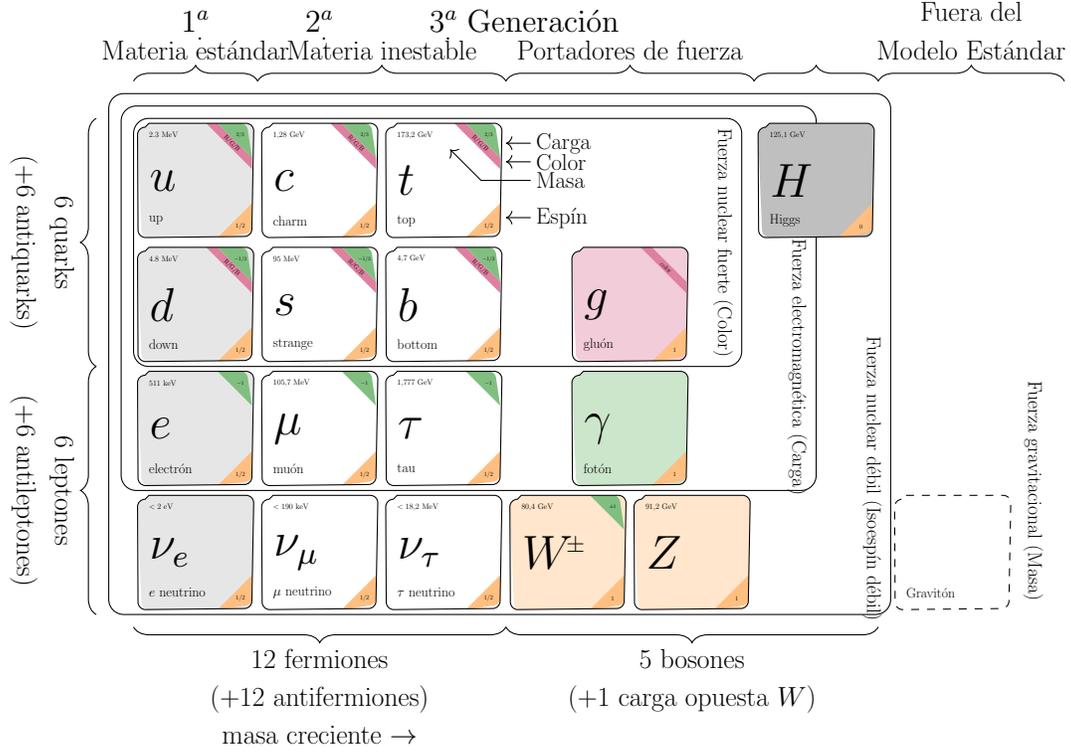


Figura 2.1: Representación de las familias de partículas y estructura generacional que componen al Modelo Estándar de partículas elementales. Cada generación está formada por dobletes de campos izquierdos y singletes de campos derechos en la interacción electro-débil. El bloque está conformado de seis leptones y seis quarks (y sus respectivas antipartículas). Los quarks a su vez pueden llevar carga de color (tres colores denotados por R, G y B (rojo, verde y azul por sus siglas en inglés)). Además de los quarks y los leptones, la inclusión de los bosones de norma y el bosón de Higgs es necesaria para hacer una teoría consistente. La teoría electro-débil requiere un bosón de Higgs neutro, pero podrían existir más.

Para los leptones, se tiene:

$$\text{Leptones} \begin{cases} I_3 = +1/2 \\ I_3 = -1/2 \end{cases} \quad \psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L, \quad (2.1)$$

$$I = I_3 = 0 \quad e_R^-, \mu_R^-, \tau_R^-,$$

donde I_3 es la tercera componente de isoespín débil (I). Note que los leptones tienen $I_3 = \pm 1/2$ y su carga eléctrica es igual a $Q = -e$, donde e es la magnitud de la carga eléctrica del electrón, mientras que sus correspondientes neutrinos son eléctricamente neutros. Hasta donde se sabe, los distintos tipos de leptones cargados eléctricamente no experimentan tran-

siones significativas entre sí. Por lo que se puede definir un número leptónico para cada familia, el cual se ha observado experimentalmente que se conserva. Además, en el Modelo Estándar, los neutrinos derechos no existen.

Los quarks pueden ser definidos como un fermión que lleva carga de color y se presentan en seis tipos (seis quarks de *sabor*). En términos de I_3 , estos pueden clasificarse como:

$$\text{Quarks} \begin{cases} I_3 = +1/2 \\ I_3 = -1/2 \end{cases} \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L, \quad (2.2)$$

$$I = I_3 = 0, \quad u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R,$$

donde $D'^T \equiv (d', s', b')$ son los campos rotados por la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (V_{CKM}):

$$D' = V_{\text{CKM}} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}, \quad V_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Los quarks con $I_3 = 1/2$ tienen carga eléctrica $Q = \frac{2}{3}e$, y aquellos con $I_3 = -1/2$ tienen carga $Q = -\frac{1}{3}e$. Cada quark viene en tres colores (R, G y B (rojo, verde y azul por sus siglas en inglés)). La carga de color es el grado de libertad responsable de la interacción fuerte y cuyos mediadores de interacción son ocho campos vectoriales conocidos como gluones. También, los quarks llevan otro número cuántico asociado, el número bariónico igual a $B = \frac{1}{3}$. Los fotones y gluones son partículas sin masa y tienen dos grados de libertad (polarizaciones), Z y W son bosones masivos y tienen tres grados de libertad (polarizaciones), estos son los mediadores de la interacción electro-débil. Al conjunto de quarks, leptones y bosones de norma, es necesario agregarles una clase más de partículas para hacer una teoría consistente con las masas e interacciones de las partículas, los bosones de espín cero o bosones escalares llamados bosones de Higgs. La teoría electro-débil requiere un bosón de Higgs eléctricamente neutro, pero en principio podrían existir más.

La dinámica de los quarks se tratará en detalle un poco más adelante, ya que por ahora la discusión se centrará en la interacción electro-débil.

2.2. Lagrangiana del Modelo Estándar

La Lagrangiana de la interacción electro-débil (EW), basada en el grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$, antes de la mezcla y rompimiento espontáneo de la simetría viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EW}} = & \bar{\psi} i \gamma^\mu D^\mu \psi - \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) - G_f [\bar{e}_R (\phi^\dagger \psi_L) + (\bar{\psi}_L \phi) e_R], \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde ψ está asociado al campo fermiónico, ec. (2.1) y (2.2), (ψ_L para dobletes, ψ_R para singletes). Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g_W \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde se denotan a los bosones de norma de $U(1)$ como B_μ y para $SU(2)$, $\mathbf{W}_\mu(x) = (W^1(x), W^2(x), W^3(x))$, los cuales constituye un triplete de isoespín ($I = 1$). La derivada covariante que incluye tanto a B_μ como a \mathbf{W}_μ está dada por:

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_W \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{t} + i \frac{g_B}{2} Y, \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{t} = \tau/2$ es el generador de $SU(2)$ asociado a las matrices de Pauli τ e Y se refiere a la hipercarga. El isoespín débil y la hipercarga satisfacen la relación de Nishijima-Gell-Mann:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (2.7)$$

a partir de esta relación, se puede deducir, por ejemplo que:

$$\begin{aligned} Y(\nu_{eL}) = Y(e_L^-) = -1, \quad Y(\nu_{eR}) &= 0, \quad Y(e_R^-) = -2, \\ Y(U_L) = Y(d_L) = 1/3, \quad Y(u_R) &= 4/3, \quad Y(d_R) = -2/3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La asignación de Y a otros fermiones es obtenido de forma similar.

Hay otro jugador importante en la descripción, $V(\phi)$ es el potencial de auto-interacción del campo de Higgs,

$$V(\phi) = \lambda \left(|\phi|^2 + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2, \quad \lambda > 0, \quad \mu^2 < 0. \quad (2.9)$$

Note que no hay términos de masa (términos cuadráticos en los campos) en la Lagrangiana.

Por otra parte, el campo de Higgs es:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

donde, en la interacción electrobébil, ϕ^+ , ϕ^0 son dos campos complejos escalares. Juntos, constituyen un doblete de isospín ($I = 1/2$, $I_3 = \pm 1/2$), los cuales llevan hipercarga $Y(\phi^+) = Y(\phi^0) = 1$. La auto-interacción del campo de Higgs es la responsable del rompimiento espontáneo de la simetría de $SU(2)_L \times U(1)_Y$, dando masa a los bosones de norma como también a los fermiones. Note que se ha escrito la Lagrangiana solo para algún campo ψ particular, por ejemplo: $\psi = (\nu_e, e^-)$. Sin embargo, la Lagrangiana para otros campos puede ser escrita de manera similar. Así, la primera línea de la ec. (2.4), se refiere al sector de norma, mientras que la segunda línea es conocido como sector de Higgs. La expresión completa satisface la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ y es importante mencionar que tanto el sector de norma como el de Higgs son construidos para respetar la simetría de norma separadamente. El último termino de la ec. (2.4) está asociado al sector de Yukawa y es

adherido para generar las masas de los fermiones, este puede escribirse como:

$$\bar{e}_R (\phi^\dagger \psi_L) + (\bar{\psi}_L \phi) e_R = \bar{e}_R \nu_{eL} \phi^- + \nu_{eL} e_R \phi^+ + \bar{e}_R e_L \phi^{0\dagger} + \bar{e}_L e_R \phi^0, \quad (2.11)$$

La invariancia de este término viene a partir de la construcción del campo de Higgs como un doblete de isospín $I = 1/2$, y el producto de otro doblete de isospín ψ_L es un invariante bajo rotaciones de isospín, mientras que al multiplicar de un singlete ψ_R , la expresión se vuelve invariante de Lorentz porque cada término es de la forma: $\bar{\psi}_R \psi_R \phi$ o $\bar{\psi}_L \psi_R \phi$. Se puede demostrar que cada término es también invariante bajo U(1) quiral haciendo referencia a las hipercargas dadas en la ec. (2.8).

2.2.1. Mezcla de SU(2) y U(1)

La interacción de los bosones de norma con los fermiones esta contenida en la derivada covariante de la ec. (2.4), la cuál está dada por:

$$-\mathcal{L}_{\text{int}} = g_W \bar{\psi} \gamma^\mu \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{t} \psi + \frac{g_B}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu B_\mu \psi, \quad (2.12)$$

donde, el acoplamiento a la parte del bosón neutro (términos que contienen W_μ^3 y B_μ en la ec. (2.12)), se expresa como:

$$\frac{1}{2} [\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} (g_W W_\mu^3 - g_B B_\mu) - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L (g_W W_\mu^3 + g_B B_\mu) - 2 g_B (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) B_\mu]. \quad (2.13)$$

Dado que el campo electromagnético no debe acoplarse al neutrino, se define el bosón neutro débil Z como: $Z_\mu \sim g_W W_\mu^3 - g_B B_\mu$ y su componente ortogonal como el campo electro-

²”Bosón Neutro” se utiliza en general para referirse a cualquier miembro de carga neutra, incluido el fotón, pero en lo sucesivo solo se utilizará para referirnos específicamente al Z , a menos que se indique lo contrario.

magnético A_μ . Con una normalización adecuada, se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A^\mu &= \cos \theta_W B^\mu + \sin \theta_W W^{3\mu} = \frac{1}{\sqrt{g_W^2 + g_B^2}} [g_W B^\mu + g_B W^{3\mu}], \\ Z^\mu &= -\sin \theta_W B^\mu + \cos \theta_W W^{3\mu} = \frac{1}{\sqrt{g_W^2 + g_B^2}} [-g_B B^\mu + g_W W^{3\mu}], \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde θ_W es el ángulo de Weinberg, el cuál esta relacionado a los acoplamientos de norma de SU(2) (g_W) y U(1) (g_B) por:

$$\tan \theta_W = \frac{g_B}{g_W}. \quad (2.15)$$

Como resultado, el bosón Z se acopla a la componente derecha de los fermiones (vía B_μ) como a las componentes izquierdas (vía $W^{3\mu}$). Por esta razón hay que tener cuidado cuando se dice que la fuerza débil trabaja solo con partículas izquierdas. La sentencia es cierta solo para corrientes cargadas que se acoplan a W^\pm . La corriente neutra se acopla a Z que contiene componentes derechas. El fotón se acopla a la componente I_3 y la hipercarga de la partícula, que es el origen de la relación de Nishijima-Gell-Mann ³

Por otro lado, usando las ecs. (2.14) para reescribir W_μ^3 y B_μ en términos de A_μ y Z_μ , y denotando a los bosón W cargado como: $W^\pm = (W^1 \pm W^2)/\sqrt{2}$, la Lagrangiana de interacción queda escrita como:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{int}} &= \frac{g_W}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_L \gamma^\mu (W_\mu^+ \tau_+ + W_\mu^- \tau_-) \psi_L \\ &+ g_Z \bar{\psi} \gamma^\mu (I_{3L} - Q \sin^2 \theta_W) \psi Z_\mu + e \bar{\psi} \gamma^\mu Q \psi A_\mu, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $\tau_\pm = (\tau_1 \pm \tau_2)/2$ y se usa la relación de Nishijima-Gell-Mann y el hecho de que $I_3 \psi_R = 0$ con:

$$g_Z = \frac{g_W}{\cos \theta_W} = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W}, \quad e = g_W \sin \theta_W. \quad (2.17)$$

³Es una lógica circular. Historicamente la hipercarga se asigna para satisfacer la relación de Nishijima-Gell-Mann. Aquí, sin embargo, se empieza del axioma de que la hipercarga es una constante fundamental que todas las partículas poseen.

La parte de energía cinética de los campos de norma (derivadas de los campos) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{KE}} &= -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \\ &= -\frac{1}{4} \left(2 F_{\mu\nu}^- F^{+\mu\nu} + F_{\mu\nu}^Z F^{Z\mu\nu} + F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \right),\end{aligned}\tag{2.18}$$

con $F_{\mu\nu}^\mp = \partial_\mu W_\nu^\mp - \partial_\nu W_\mu^\mp$, $F_{\mu\nu}^Z = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$, $F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

2.2.2. Mecanismo de Higgs

Ahora, regresando a la ec. (2.10), donde se define al campo original de Higgs en SU(2). La razón para considerar un doblete del campo de Higgs es que se requiere utilizar tres bosones de Goldstone más adelante y un doblete de isospín de los campos de Higgs es el requisito mínimo dentro de la simetría SU(2). El campo de Higgs adquiere el valor de expectación de vacío (vev)

$$|\phi^2| = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2 = \frac{v^2}{2}.\tag{2.19}$$

Observe que hay tres campos que pueden desaparecer. El vacío es infinitamente degenerado y se elige al nuevo vacío en $\text{Re}[\phi^0] = v/\sqrt{2}$, $\text{Im}[\phi^0] = \phi^+ = 0$, a saber,

$$\phi' = \begin{bmatrix} 0 \\ (v + H)/\sqrt{2} \end{bmatrix},\tag{2.20}$$

donde se usa la nomenclatura $H = \text{Re}[\phi^0] - v/\sqrt{2}$ para denotarlo como un campo de Higgs observable real. Este es el rompimiento espontáneo de la simetría SU(2) (o SU(2) \times U(1) si se incluye además B^μ). El campo de Higgs antes de la ruptura de simetría puede parametrizarse como:

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\omega_1 + i\omega_2)/2 \\ v + H - i\omega_3/2 \end{bmatrix}.\tag{2.21}$$

Sin pérdida de generalidad, este campo puede ser reescrito como:

$$\phi = \exp\left(i \frac{\omega}{v} \cdot \frac{\tau}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

De hecho, en las proximidades del vacío elegido donde $v \gg |H|, |\omega|$, la ec. (2.22) se reduce a la ec. (2.21). La razón para colocar tres de los campos en un exponente es porque se puede realizar el nuevo campo de Higgs ec. (2.20) mediante una transformación de norma,

$$\phi \rightarrow \phi' = U \phi = \exp[-i \omega \cdot \tau / (2v)] \phi. \quad (2.23)$$

Las componentes de ω desaparecen del campo de Higgs. Como la transformación de norma también cambia al campo de norma \mathbf{W}_μ , estos transforman a \mathbf{W}'_μ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{t} \rightarrow \mathbf{W}'_\mu \cdot \mathbf{t} &= U \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{t} U^{-1} + \frac{i}{g_W} U \partial_\mu U^{-1}, \\ &= U \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{t} U^{-1} - \frac{1}{g_W v} \partial_\mu \omega \cdot t. \end{aligned} \quad (2.24)$$

El campo ω reaparece como la tercera componente (longitudinal) de los bosones de norma. Normalmente, tres de los campos de Higgs son absorbidos por los campos de norma y se han convertido en su tercera componente, lo que significa que se han vuelto masivos y la fuerza electro-débil se ha vuelto de corto alcance. La aparición de los términos de masa se mostrará explícitamente más adelante en la ec. (2.25). Renombrando a los nuevos campos ϕ' y \mathbf{W}'_μ de nuevo como: ϕ, \mathbf{W}_μ . Estas son las observables físicas porque se vive en un vacío donde la simetría de norma se rompe espontáneamente.

2.2.3. Generación de Masa de bosones y fermiones

El mecanismo desarrollado para construir una teoría de norma que pueda incluir la posibilidad de que las partículas fundamentales en el Lagrangiano del Modelo Estándar,

fermiones y bosones de norma, tengan masa. Técnicamente la situación está bien controlada, ya que no solo se puede escribir una teoría consistente, sino que también se calculan las masas de los bosones W^\pm y Z . El procedimiento teórico para hacer que W^\pm y Z sean masivos no es difícil de entender y los cálculos solo implican un poco de álgebra. Por otra parte, las masas de los fermiones se incluyen dentro de la teoría mediante una variación del mismo mecanismo. A continuación se presenta un breve resumen.

Masa de los bosones de Norma

Para esta parte, en primer lugar, es necesario echar un vistazo a la parte de la energía cinética del sector de Higgs. Sustituyendo la ec. (2.20) en el primer término de la segunda línea de la ec. (2.4), se tiene que:

$$\begin{aligned}
(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + \phi^\dagger (g_W \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{t} + \frac{g_B}{2} B_\mu \cdot Y)^2 \phi, \\
&= (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + \frac{(v+H)^2}{8} \left[2g_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} + (-g_W W_\mu^0 + g_B B_\mu)^2 \right] \\
&= (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + \left(\frac{g_W (v+H)}{2} \right)^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{g_Z (v+H)}{2} \right)^2 Z_\mu Z^\mu.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Los términos lineales en la derivada desaparecen y se ha usado las relaciones:

$$g_W W_\mu^0 - g_B B_\mu = g_Z Z_\mu, \quad g_Z = \sqrt{g_W^2 + g_B^2}. \tag{2.26}$$

En ausencia de la interacción con el campo de Higgs (es decir, cuando $H = 0$), el segundo y tercer término en la última línea de la ec. (2.25) dan los términos de masa para W y Z . El término con H da la interacción del campo de Higgs con W y Z . Considerando que hay un factor 1/2 de diferencia entre los bosones vectoriales cargados y neutros, se tiene que:

$$m_W = \frac{g_W v}{2}, \quad m_Z = \frac{g_Z v}{2}. \tag{2.27}$$

Nóte que la ec. (2.25) no contiene al campo electromagnético. Por lo tanto, el fotón no adquiere masa. Esto no es accidental. Recordando que la simetría fue rota por el vacío. Esto significa que el valor de expectación del vacío tanto como el del operador de isoespín (SU(2)) \mathbf{t} e hipercarga Y no desaparecen, es decir

$$\mathbf{t}\langle\phi\rangle = \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \langle\phi\rangle = \langle\phi\rangle \neq 0, \quad (2.28)$$

que es otra afirmación de la ruptura de simetría en el nuevo vacío. Por otra parte, como $Q = I_3 + Y/2$ y $\langle\phi\rangle = 1$, se tiene que

$$Q\langle\phi\rangle = \frac{1}{2}(1 + \tau_3) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.29)$$

Por lo tanto, el vacío no es invariante bajo la transformación de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ por separado, sino que es invariante bajo la transformación de norma combinada $U = \exp[Q e \alpha(x)]$. El campo de fotones generado por el operador de carga Q ha mantenido su libertad de la transformación de norma, lo que significa que el campo de norma no tiene masa.

Masa de los fermiones

Ahora, toca echar un vistazo a la interacción Higgs-fermión (el tercer término en la segunda línea de la ec. (2.4)), donde se tiene que:

$$-\mathcal{L}_{Hee} \equiv G_e [\bar{e}_R (\phi^\dagger \psi_L) + (\bar{\psi} \phi) e_R]. \quad (2.30)$$

Después del rompimiento de simetría, la interacción Higgs-fermión es

$$-\mathcal{L}_{Hee} \rightarrow \frac{G_e}{\sqrt{2}}(v + H)(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) = m_e \bar{e} e + \frac{m_e}{v} (\bar{e} e) H, \quad m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}}. \quad (2.31)$$

El primer término da la masa y el segundo, la interacción del Higgs con los fermiones. Como subproducto de la obtención del término de masa, una nueva interacción entre el Higgs con el fermión aparece, Esta interacción puede ser obtenida al remplazar el término de masa v por $v + H$, justo como una interacción con los bosones de norma como en la ec. (2.25). Note también que el acoplamiento es proporcional a la masa del fermión.

Como se puede notar, no aparece ningún término de masa para los neutrinos, lo cuál los deja con $m_{nu} = 0$. Formalmente esto se debe a que, por suposición, la teoría no contiene ningún estado ν_R , por lo que no se puede escribir un término análogo \mathcal{L}_{int} del fermión y dar lugar a un término de masa del tipo $\bar{\nu}_R \nu_L$. Por lo que, los neutrinos no interactúan con H . Si hubiera un ν_R , éste sería difícil de observar ya que tendría $I_3 = 0$ y $Q = 0$, y no podría acoplarse a W^\pm , Z^0 o γ .

Un efecto secundario importante de la generación de masa de los fermiones, es que la corriente axial ya no se conserva, es decir,

$$\partial_\mu A^\mu(x) = \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(x) = 2m \bar{\psi}(x) \psi(x) \neq 0. \quad (2.32)$$

Esto se aplica tanto a la corriente cargada como para la corriente neutra. Por lo tanto, la simetría de norma quiral se rompe por el término de masa y sólo la corriente vectorial se conserva⁴. Este fenómeno se denomina ruptura de simetría $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$.

Masa del bosón de Higgs

La Lagrangiana del campo de Higgs puede ser extraída del primer y segundo término de la segunda línea de la ec. (2.4). Usando el campo transformado ψ , se puede notar que: $\psi^\dagger \psi = (v + H)^2/2$ y $(\partial_\mu \psi)^\dagger (\partial^\mu \psi) = \partial_\mu H \partial^\mu H/2$. Dejando a un lado las interacciones con

⁴Esto no debe confundirse con la ruptura de la simetría quiral en la QCD. En la QCD, la ruptura de la simetría quiral también se produce rompimiento espontáneo del vacío en QCD.

el campo de norma y los fermiones y la parte del Higgs en la Lagrangiana se expresa como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H &= \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \lambda v^2 H^2 - \left(\lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4 \right), \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu H \partial^\mu H - m_H^2 H^2) - \frac{g_W}{4 m_W} m_H^2 H^3 - \frac{1}{32} \frac{g_W^2}{m_W^2} m_H^2 H^4, \\ m_H^2 &= 2 \lambda v^2,\end{aligned}\tag{2.33}$$

donde la ec. (2.27) fue usada para expresar la constante de acoplamiento en término de las masas de los acoplamientos de norma. Los acoplamientos son proporcionales a las masas de las partículas de interacción. Esta es una característica destacada del Modelo Estándar. A partir de esta Lagrangiana, se puede construir el propagador de Higgs y las reglas de Feynman para las interacciones del campo de Higgs.

Interacciones de Norma

Como ya se mencionó con anterioridad, las interacciones de los bosones de norma con los fermiones está contenida en la derivada covariante y pueden ser resumidas dentro de la ec. (2.12), y al usar la ec. (2.14) para reescribir W_μ^3 y B_μ en términos de A_μ y Z_μ . Al denotar a los bosones \mathbf{W} cargados como $W^\mp = (W_1 \pm i W_2)/\sqrt{2}$ y usando la relaciones $Q = I_3 + Y/2$, $I_3 \psi_R = 0$, se obtiene el resultado dado en la ec. (2.16). Sin embargo, para los cálculos reales, es más conveniente separar los acoplamientos a la izquierda y derecha o, alternativamente, en partes vectoriales y axiales-vector. Los tipos de acoplamiento que aparecen en la regla de Feynman vienen dados por el elemento de matriz $i \mathcal{L}_{\text{int}}$. Por lo tanto, omitiendo los operadores de campo y añadiendo un sufijo para diferenciar el sabor del fermión, dichas interacciones se expresan como:

$$\gamma - f f : -i Q_f e \gamma^\mu, \tag{2.34}$$

$$W^\pm - f f : -i \frac{g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5), \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
Z - f f : & -i \frac{g_Z}{2} \gamma^\mu [\epsilon_L(f)(1 - \gamma_5) + \epsilon_R(f)(1 + \gamma_5)] \\
& = -i \frac{g_Z}{2} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma^5).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde $\epsilon_L(f) = I_3 - Q_f \sin^2 \theta_W$, $\epsilon_R(f) = -Q_f \sin^2 \theta_W$, $v_f = I_3 - 2 Q_f \sin^2 \theta_W$ y $a_f = I_3$.

2.2.4. Auto-interacción de los bosones de norma

La Lagrangiana del campo de norma no abeliano contiene, además del término cinético cuadrático, potencias superiores del operador que representan las auto-interacciones de los bosones de norma,

$$\mathcal{L}_{\text{norma}} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \sum_A F_{A\mu\nu} F_A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu}, \tag{2.37}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{A\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{W}_{A\nu} - \partial_\nu \mathbf{W}_{A\mu} - g_W (\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu)_A \\
(\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu)_A &= \sum_{B,C} \epsilon_{ABC} W_{B\mu} W_{C\nu} \\
F_{B\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu
\end{aligned} \tag{2.38}$$

La auto-energía del bosón de norma viene dada por sus términos triples y cuárticos en la ec. (2.37), la cual puede descomponerse en:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{GWS}} &= \mathcal{L}_{\text{KE}} + \mathcal{L}_{\text{SE}}, \\
&= -\frac{1}{2} (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) \cdot (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu) + g_W (\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \cdot \partial^\mu \mathbf{W}^\nu) \\
&\quad - \frac{g_W^2}{4} [(\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu)^2 - (\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}^\nu)].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

A partir de esta Lagrangiana, se pueden derivar las amplitudes de Feynman correspondientes a los vértices de tres y cuatro bosones de norma (ver Apéndice B).

Vértice 3-W

Dado que que la interacción de tres bosones de norma es de suma importancia para los estudios posteriores desarrollados en los Cap.4 y 5, de la ec. (2.39), tratando en primer lugar a los elementos de matriz para el vértice 3-W. Reescribiendo el término como:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \cdot \partial^\mu \mathbf{W}^\nu &= (W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^1) \partial^\nu W_\nu^3 + (\text{cíclicidad}), \\ &= i(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) \partial^\mu (\cos \theta_W Z + \sin \theta_W A)^\nu + (\text{cíclicidad})\end{aligned}\tag{2.40}$$

donde, otra vez, se usa el hecho de que: $W^\mp = (W^1 \pm i W^2)/\sqrt{2}$ y la ec. (2.14). Los diagramas de Feynman de las interacciones pueden ser obtenidas calculando los elementos de matrix de la ec. (2.40).

El ejemplo más común es considerar el vértice $\gamma \rightarrow W^+ W^-$ (Ver apéndice B), cuya amplitud de Feynman es:

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = i e [g_{\mu\nu} (k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda} (k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu} (k_3 - k_1)_\nu].\tag{2.41}$$

El tratamiento y estudio de $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ será relevante, como ya se mencionó, en los Cap.4 y 5.

Otras auto-interacciones pueden ser el vértice de cuatro bosones W, descrito por los términos cuárticos de la Lagrangiana dada en la ec. (2.39),

$$\mathcal{L}_{4W} = -\frac{g_W^2}{4} (\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) \cdot (\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu).\tag{2.42}$$

Sin embargo, para propósitos de este trabajo no es necesario entrar en detalles sobre la obtención de las amplitud para dicho vértice. La amplitud explícita puede ser consultada en el Apéndice B.

Interacciones del Higgs

La Lagrangiana de interacción para el acoplamiento Higgs-Bosón de norma se obtiene expandiendo la ec. (2.25) y escogiendo los términos que contengan al campo de Higgs H , la cual se resume a la siguiente expresión,

$$\mathcal{L}_{W-H} = \left[g_W m_W W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{2} g_Z m_Z Z_\mu Z^\mu \right] H + \left[\frac{g_W^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{2} \frac{g_Z^2}{4} Z_\mu Z^\mu \right] H^2, \quad (2.43)$$

la cual contiene interacciones del tipo $H W W$, $H Z Z$ y $H^2 W^2$, $H^2 Z^2$.

El acoplamiento con los fermiones se obtiene de nuevo a partir del término de masa del fermión sustituyendo $v \rightarrow v + H$ que viene dado por el segundo término de la última igualdad de la ec. (2.31), dado por:

$$\mathcal{L}_{Hff} = -\frac{m_f}{v} \bar{\psi}_f \psi H = -g_W \frac{m_f}{2 m_W} \bar{\psi}_f \psi H, \quad (2.44)$$

mientras que las auto-interacciones del bosón de Higgs vienen resumidas en los dos últimos términos de la ec. (2.33), dados por

$$\mathcal{L}_{H\text{-self}} = -\frac{g_W}{4 m_W} m_H^2 H^3 - \frac{1}{32} \frac{g_W^2}{m_W^2} m_H^2 H^4. \quad (2.45)$$

La expresión es sencilla, pero al extraer elementos de matriz, es necesario contar cuidadosamente el factor de simetría. Por ejemplo, $\langle 0|H^3|h_1 h_2 h_3\rangle \rightarrow 3!$ y $\langle 0|H^4|h_1 h_2 h_3 h_4\rangle$, donde h_i son las i correspondientes partículas de Higgs.

Sector de Yukawa

Ahora es necesario revisar cómo es la interacción generadora de masa fermiónica en el sector del Higgs para quarks. Por lo tanto, es necesario escribir a los campos de quarks y

Higgs, pertenecientes en dobletes de $SU(2)_L$, como:

$$\psi_{kL} = \begin{bmatrix} u'_{kL} \\ d'_{kL} \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix}, \quad \phi^c = \begin{bmatrix} \phi^{0\dagger} \\ -\phi^- \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

donde $u'_{kL} (k = 1 \sim 3) = u'_L, c'_L, t'_L$ y $d'_{kL} = d'_L, s'_L, b'_L$. Recordar que las componentes derechas son singletes. Se cree que los fermiones son sin masa. La razón para agregar acentos es porque los campos de quarks que interactúan con el Higgs antes de la ruptura de simetría no necesariamente son los mismos que los quarks físicos con masa definida. Nos referimos a los campos con acentos como estados débiles propios y a los campos físicos como estados propios de masa.

Una interacción representativa de Yukawa, que genera masas se dio en la ec. (2.30). Extendiendo la fórmula para incluir a todos los quarks del Modelo Estándar, la interacción invariante de Yukawa de $SU(2)$ puede escribirse como:

$$-\mathcal{L}_Y(\psi, \phi) = \sum_{j,k} \left[Y_{ik} \bar{\psi}'_{jL} \phi d'_{kR} + Y'_{jL} \bar{\psi}'_{jL} \phi^c u'_{kR} \right]. \quad (2.47)$$

Los términos con $j \neq k$ aparecen porque no hay razón para suponer que la interacción Higgs sea diagonal de sabor. La Lagrangiana anterior está dispuesta de tal manera que dar masas a los quarks u'_j y d'_k cuando $\phi^0, \phi^{0\dagger}$ adquieren el valor de expectación de vacío. Y_{jk}, Y'_{jk} son las constantes de acoplamiento de la interacción de Yukawa entre los quarks y el campo de Higgs.

Cuando la simetría se rompe espontáneamente, el campo de Higgs adquiere los valores de expectación de vacío ($\langle \phi^\pm \rangle = 0, \langle \phi^0 \rangle = v/\sqrt{2}$) y la ec. (refec:62) se convierte en:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y(\psi, \phi) &= \sum_{j,k} \left[\bar{u}'_{jL} M'_{jk} u'_{kR} + \bar{d}'_{jL} M_{jk} d'_{kR} + \text{h.c.} \right] + \dots \\ &\equiv \left[\bar{U}'_L M^U U'_R + \bar{D}'_R M^D D'_R + \text{h.c.} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde h.c. denota al conjugado hermitiano,

$$M_{jk} = Y_{jk} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad M'_{jk} = Y'_{jk} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad M^U = [M'_{jk}], \quad M^D = [M_{jk}], \quad (2.49)$$

y

$$U' = \begin{bmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Como las matrices M_{jk} y M'_{jk} no son diagonales en general, los estados propios débiles no coinciden necesariamente con los estados propios de masa. Para describir los procesos físicos, se tiene que diagonalizar la ec. (2.48) y expresar la Lagrangiana en términos de los estados propios de masa.

De acuerdo con la teoría de matrices, alguna matriz $N \times N$ (no necesariamente hermitiana) puede ser diagonalizable usando dos matrices unitarias. Entonces, sean A_L , A_R^\dagger , B_L , B_R^\dagger cuatro matrices unitarias, se puede escribir que:

$$M_{\text{diag}}^U = A_L M^U A_R^\dagger, \quad M_{\text{diag}}^D = B_L M^D B_R^\dagger, \quad (2.51)$$

donde

$$M_{\text{diag}}^U = \begin{bmatrix} m_u & & \\ & m_c & \\ & & m_t \end{bmatrix}, \quad M_{\text{diag}}^D = \begin{bmatrix} m_d & & \\ & m_s & \\ & & m_b \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Es posible elegir matrices unitarias A_L , A_R , B_L , B_R para que todas las masas m_u , m_c , m_t y m_d , m_s , m_b sean reales. Dado que el producto de las matrices diagonales da como

resultado

$$M_{\text{diag}}^U M_{\text{diag}}^{U\dagger} = \begin{bmatrix} m_u^2 & & \\ & m_c^2 & \\ & & m_t^2 \end{bmatrix}, \quad M_{\text{diag}}^D M_{\text{diag}}^{D\dagger} = \begin{bmatrix} m_d^2 & & \\ & m_s^2 & \\ & & m_b^2 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Usando la ec. (2.51), la ec. (2.48) puede ser expresada como:

$$-\mathcal{L}_M = \sum \left[m_j (\bar{u}_{jL} u_{jR} + \bar{u}_{jR} u_{jL}) + m'_j (\bar{d}_{jL} d_{jR} + \bar{d}_{jR} d_{jL}) \right]. \quad (2.54)$$

La ec. (2.54) tiene exactamente la forma deseada de la Lagrangiana de masa del fermión. Por lo tanto, se puede ver que los quarks en los estados propios de masa (U , D) se obtienen a partir de los estados propios débiles (U' , D') mediante las transformaciones unitarias; $U_L = A_L U'_L$, $U_R = A_R U'_R$, $D_L = B_L D'_L$ y $D_R = B_R D'_R$.

Por otro lado, la Lagrangiana libre $\mathcal{L}_{\text{free}}$ y la Lagrangiana de interacción de corrientes neutras \mathcal{L}_{nc} , diagonales de sabor, no cambian su forma bajo las transformaciones unitarias anteriores, sino que simplemente cambian sus componentes $q'_j \rightarrow q_j$. Por lo tanto, se pueden expresar igualmente bien utilizando los estados propios de masa desde el principio. Este es un enunciado generalizado del mecanismo GIM [190], es decir, no existe ninguna corriente neutra que cambie de sabor. Por otro lado, la Lagrangiana de interacción de la corriente cargada \mathcal{L}_{cc} conecta quarks de diferentes sabores y cambia su forma dependiendo de si se escribe en términos de los estados propios débiles o de los estados propios de masa. Reescribiendo el \mathcal{L}_{cc} original dado en términos de los estados propios débiles por los de los estados propios de masa,

$$-\mathcal{L}_{\text{cc}} = \frac{g_W}{\sqrt{2}} \sum \left[\bar{u}_{jL} \gamma^\mu V_{jk} d_{kL} W_\mu^+ + \bar{d}_{kL} \gamma^\mu V_{jk}^* u_{jL} W_\mu^- \right], \quad (2.55)$$

vea que la interacción no se cierra dentro de cada doblete, sino que induce la mezcla entre diferentes generaciones. La matriz $V = A_L^\dagger B_L$ se denomina matriz Cabibbo-Kobayashi-

Maskawa (CKM). Aplicando la transformación de simetría CP, los campos vectoriales se transforman de acuerdo con

$$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_1, \quad W_\mu^+ \rightarrow -W^{-\mu}. \quad (2.56)$$

En consecuencia, la Lagrangiana cambia a:

$$-\mathcal{L}_{cc} \xrightarrow{\text{CP}} \frac{gW}{\sqrt{2}} \sum \left[\bar{d}_{kL} \gamma_\mu V_{jk} u_{jL} W^{-\mu} + \bar{u}_{jL} \gamma_\mu V_{jk}^* d_{kL} W^{+\mu} \right]. \quad (2.57)$$

Por lo tanto, la invariancia ante CP requiere que la matriz CKM sea real.

Parametrización de la Matriz CKM

Hay muchas formas de expresar a la matriz CKM, sin embargo, esta se parametriza por tres ángulos de rotación y un ángulo de fase. Aquí, siguiendo la convención adoptada por PDG [\[169\]](#), se puede expresar como:

$$\begin{aligned} V_{\text{CKM}} &\equiv \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} = R_{23} (I_{\delta_D} R_{13} I_{\delta_D}^\dagger) R_{12}, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.58) \\ &= \begin{bmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $I_{\delta_D} = \text{diag}(1, 1, e^{i\delta})$ es la matriz de fase diagonal y c_{ij} y s_{ij} denotan al $\cos \theta_{ij}$ y $\sin \theta_{ij}$ respectivamente. Estos tienen la propiedad de que en el límite $\theta_{23} = \theta_{13} \rightarrow 0$, la tercera

generación se separa y se reduce a la matriz de rotación de Cabibbo con $\theta_C = \theta_{12}$. Mediante una re-definición adecuada de los campos de quarks, todos los elementos c_{ij} , s_{ij} pueden hacerse positivos, a saber, tomando los límites $0 \leq \theta_{ij} \leq \pi/2$, y $0 \leq \delta \leq 2\pi$.

Experimentalmente, se ha observado que $c_{13} - 1 < 10^{-5}$, y por lo tanto, se puede aproximar $|V_{us}| = s_{12} c_{13} \approx s_{12}$, $|V_{ub}| = s_{13}$ y $|V_{cb}| = s_{23} c_{13} \approx s_{23}$. Por lo tanto, parametrizando ⁵

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A \lambda^2, \quad s_{13} e^{-i\delta} = A \lambda^3 (\rho - i\eta). \quad (2.59)$$

La matriz CKM queda expresada como:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A \lambda^3 (\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A \lambda^2 \\ A \lambda^3 (1 - \rho - i\eta) & -A \lambda^2 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (2.60)$$

la cual comúnmente es conocida como parametrización de Wolfenstein [192], ρ y η son parámetros reales que están relacionados a la violación de CP a través de la fase δ , $\tan \delta = \eta/\rho$. Es importante destacar que el Modelo Estándar provee un marco para investigar el proceso de violación de CP, pero no ofrece ninguna explicación para el origen dinámico de la fase compleja. Por lo tanto, investigar su estructura es un paso necesario para encontrar pistas sobre su origen, que podría ir más allá del Modelo Estándar. Dado que la reproducibilidad experimental del Modelo Estándar es muy buena, se espera que la parte conservadora de CP de la matriz CKM (es decir, el valor absoluto de los elementos de la matriz) cambie muy poco si el origen de la violación de CP está más allá del Modelo Estándar. De hecho, en muchos modelos propuestos hasta ahora, este es el caso. Además de eso, es de especial importancia verificar que:

$$V_{\text{CKM}} V_{\text{CKM}}^\dagger = V_{\text{CKM}}^\dagger V_{\text{CKM}} = 1 \quad (2.61)$$

⁵Históricamente, estos parámetros se introdujeron como aproximaciones convenientes. Ahora es común adoptar la expresión dada en la ec. (2.59) como definición. Entonces si se define: $\rho = \frac{s_{13}}{s_{12} s_{23}} \cos \delta$, $\eta = \frac{s_{13}}{s_{12} s_{23}} \sin \delta$, ec. (2.59) se vuelve exacta a todos los órdenes en λ , lo cual, teóricamente, es una característica muy conveniente [191].

es decir, que la matriz CKM sea unitaria. La determinación precisa de los elementos de matriz de CKM es obligatoria ya que son parámetros fundamentales del Modelo Estándar [193, 194].

2.3. Fundamentos de QCD

La Cromodinámica Cuántica (QCD) está firmemente establecida como el marco correcto para describir los fenómenos de la interacción fuerte, que gobierna la dinámica de los quarks y gluones, e indirectamente de los hadrones [187, 195-197], basada en la simetría de norma del grupo de color SU(3). Historicamente, el color fue introducido como un grado de libertad dentro del modelo de quarks para tomar en cuenta el principio de Pauli en la descripción de los bariones como estados de tres quarks [185, 186]. Los campos materiales de QCD son los llamados quarks, que como ya se mencionó anteriormente, son fermiones de espín $\frac{1}{2}$ con seis sabores (u, d, s, c, b, t). Estos están equipados con una especie de carga (eléctrica) conocida como carga de color, la cual es muy similar al del electromagnetismo. La diferencia es que existen tres tipos de cargas de color comúnmente denominadas Rojo, Verde y Azul (RGB). De manera exactamente similar, la fuerza de color, mediada por el portador de color, el gluón, el cual no tiene masa y viene en ocho tipos (nueve combinaciones de color-anticolor menos uno que es color neutral). Aunque el marco matemático básico de la QCD es esencialmente idéntico al de la Electrodinámica Cuántica (QED), la existencia de las tres cargas hace que las ecuaciones de movimiento sean no lineales y genera características distintivas muy diferentes de las de la QED. Lo más conspicuo es un fenómeno conocido como confinamiento, que impide que los quarks y gluones estén aislados, sino que los fuerza a formar hadrones y, por lo tanto, no pueden aislarse ni examinarse directamente en el laboratorio.

Por otra parte, para procesos que ocurren a una escala de energía alta, los cálculos perturbativos basados en QCD proporcionan una descripción muy precisa debido a la libertad asintótica [198]. Sin embargo, para sistemas en los que dominan las escalas de baja energía

(como los hadrones), es mucho más difícil hacer predicciones cuantitativas a partir de QCD, ya que la teoría perturbativa no es útil en este caso, ya que la constante de acoplamiento crece a bajas energías. Por lo que, es necesario implementar métodos no perturbativos para extraer las propiedades de los hadrones y muchos de estos métodos se han desarrollado y aplicado a sistemas hadrónicos durante las últimas décadas. En general, estos métodos pueden dividirse en dos grupos. En primer lugar, están aquellos que utilizan las técnicas de las teorías de campo efectivo y emplean a los mesones y bariones ligeros como sus grados de libertad. El segundo grupo, por otra parte, calcula directamente las observables hadrónicas a partir de la Lagrangiana de QCD, y por tanto, se basa en el lenguaje de los quarks y los gluones. Sin embargo, para propósito de la presente sección, nos limitamos a introducir los conceptos básicos de la QCD y de algunas teorías efectivas que ayudarán al desarrollo de este trabajo.

2.3.1. Lagrangiana de QCD

La Lagrangiana de QCD, obtenida aplicando el principio de norma con respecto al grupo de color $SU(3)_C$. Denotando a q_f^α como el campo del quark de color α y sabor f . Por cuestiones de simplificación, adoptando la notación vectorial en el espacio de color: $q_f^T \equiv (q_f^1, q_f^2, q_f^3)$ con masas m_f , la lagrangiana libre puede escribirse como:

$$\mathcal{L}_0 = \sum_f \bar{q}_f (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f, \quad (2.62)$$

es invariante bajo transformaciones globales arbitrarias del grupo de simetría $SU(3)_C$ en el espacio de color,

$$q_f^\alpha(x) \rightarrow (q_f^\alpha)' = U^\alpha_\beta q_f^\beta, \quad U U^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1. \quad (2.63)$$

Las matrices de $SU(3)_C$ pueden ser escritas en la forma:

$$U = \exp \left\{ -i g_s \frac{\lambda^a}{2} \theta_a \right\}, \quad (2.64)$$

donde λ^a ($a = 1, 2, \dots, 8$) denota a los generadores de la representación fundamental del algebra grupo de simetría $SU(3)_C$ [199], θ_a son parámetros arbitrarios y g_s denota la constante de acoplamiento de norma del grupo $SU(3)_C$. Las matrices λ^a son sin traza y satisfacen la relación de conmutación

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f^{abc} \lambda^c, \quad (2.65)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(3)_C$, los cuales son parámetros reales y totalmente antisimétricos. Como en el caso de la electrodinámica cuántica (QED), se requiere que la Lagrangiana también sea invariante ante transformaciones locales $SU(3)_C$, es decir, $\theta_a = \theta_a(x)$, por lo que es necesario cambiar las derivadas de los quarks por objetos covariantes. Esto hace que aparezcan ocho parámetros de norma independientes, ocho diferentes bosones de norma $G_a^\mu(x)$, los llamados gluones, entonces :

$$D^\mu q_f = \left[\partial^\mu - i g_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu(x) \right] q_f \equiv \left[\partial^\mu - i g_s G^\mu(x) \right] q_f, \quad (2.66)$$

donde se introduce la notación matricial

$$[G^\mu(x)]_{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{\alpha\beta} G_a^\mu(x). \quad (2.67)$$

Note que $D^\mu q_f$ tranforma exactamente de la misma forma que el vector de color q_f , entonces las propiedades de los campos de norma son:

$$D^\mu \rightarrow (D^\mu)' = U D^\mu U^\dagger; \quad G^\mu \rightarrow (G^\mu)' = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^\dagger. \quad (2.68)$$

Las transformaciones de norma del campo del gluón son más complicadas que las obtenidas en QED para los fotones. Para construir un término cinemático invariante de norma para los campos del gluón, es necesario introducir los correspondientes campos de fuerza:

$$G^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{i}{g_s}[D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - i g_s[G^\mu, G^\nu] \equiv \frac{\lambda^a}{2} G_a^{\mu\nu}(x), \quad (2.69)$$

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu.$$

Bajo una transformación de norma,

$$G^{\mu\nu} \rightarrow (G^{\mu\nu})' = U G^{\mu\nu} U^\dagger, \quad \text{y} \quad \text{Tr}(G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a. \quad (2.70)$$

Tomando la apropiada normalización para el término cinemático del gluón, finalmente se tiene la Lagrangiana de QCD invariante de $SU(3)_C$:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \equiv -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{q}_f (i \gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f. \quad (2.71)$$

Descomponiendo la Lagrangiana dentro de sus diferentes piezas, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) + \sum_f \bar{q}_f^\alpha (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f^\alpha \\ & + g_s G_a^\mu \sum_f \bar{q}_f^\alpha \gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{\alpha\beta} q_f^\beta \\ & - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e. \end{aligned} \quad (2.72)$$

La primera línea contiene los términos cinemáticos correctos para los diferentes campos que dan lugar a los propagadores correspondientes. La interacción de color entre los quarks y gluones viene dada por la segunda línea, en ella intervienen las matrices λ^a . Por último, debido al carácter no abeliano del grupo de color, en la última línea el término $G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$ genera las autointeracciones cúbicas y cuárticas de los gluones. Todas las interacciones están dadas en términos de una sola constante g_s , la cual es llamada constante de acoplamiento

fuerte.

Para cuantificar correctamente la Lagrangiana de QCD, hay que añadir a \mathcal{L}_{QCD} los llamados término de Fadeev-Popov [200], \mathcal{L}_{GF+FP} , el cual incluye la Lagrangiana anti-hermítica que introduce los campos de fantasmas, \mathcal{L}_{GF} y el término que fija la norma \mathcal{L}_{FG} , una explicación muy pedagógica sobre estos términos se puede encontrar en Ref. [201]. Por otra parte, desde el punto de vista de la invariancia de norma, la Lagrangiana de interacción fuerte podría también involucrar a los términos del tipo [202]

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{g_s^2 \bar{\theta}}{32 \pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}_c \left[G^{\mu\nu} G^{\rho\sigma} \right], \quad \epsilon_{0123} = 1, \quad (2.73)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ denota al tensor totalmente antisimétrico LeviCivita. El así llamado término θ en la ec. (2.73) implica una violación explícita de P y CP de las interacciones fuertes. La información empírica actual sobre el momento dipolar eléctrico del neutrón [203] indica que el término θ es pequeño, sin embargo, se omiten los detalles sobre la ec. (2.73) en nuestra discusión. Por otra parte, dado que la derivada covariante de los campos de quarks es independiente del sabor, la Lagrangiana de la ec. (2.71) tiene simetrías adicionales, accidentales y en este caso globales, aparte de la simetría de norma. Tanto la dinámica de la teoría (a través de la ruptura espontánea de la simetría) como los valores de las masas de los quarks afectan cómo estas simetrías se realizan (aproximadamente) en la naturaleza.

2.4. Libertad asintótica en QCD

Una prueba importante, que sugiere que QCD es realmente la verdadera teoría para describir la interacción fuerte, fue el descubrimiento de la libertad asintótica, descubierta por Gross, Politzer y Wilczek [187-189]. Esta propiedad, se basa esencialmente en que la constante de acoplamiento g_s se hace pequeña a grandes escalas de energía, y puede derivarse a través del procedimiento de renormalización de QCD. Como en cualquier teoría de campos, las correcciones cuánticas perturbativas (de lazo) contienen divergencias ultravioletas, las

cuales tienen que renormalizarse para que la teorías produzca resultados significativos. Si la teoría es renormalizable, todas las divergencias pueden absorberse en una redefinición de la constante de acoplamiento desnuda g_s , las masas m_f y los campos q_f y G_μ (Ver ec. (2.71)). Sin embargo, como se sabe, esta redefinición dependerá de la escala de energía μ a la que se lleva a cabo la renormalización, lo cual en principio introduce cierta dependencia de los parámetros de la teoría respecto a μ . Como μ es un parámetro arbitrario que se introduce a mano, las observables calculados a partir de la teoría no deben depender de él. Por lo que, este requisito conduce a varias ecuaciones del grupo de renormalización [204, 205]. Así, por ejemplo, cuando una cierta observable se expande en una serie perturbativa, esta puede escribirse genéricamente como:

$$P = c_1 \alpha_s + c_2 \alpha_s^2 + c_3 \alpha_s^3 + \dots \quad (2.74)$$

Donde $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ a primer orden y los coeficientes c_1, c_2, c_3, \dots se pueden obtener a través del cálculo de los diagramas de Feynman correspondientes. Bajo el esquema de *Sustracción Mínima Modificada* [206, 207] ($\overline{\text{MS}}$), los coeficientes en la ec. (2.74) dependen de la escala de energía μ como $\ln \mu^2$, así como de la elección de la constante de sustracción (esquema de renormalización). α_s en sí misma se convierte en una función de μ . Si la observable se especifica en una escala de energía Q , esta también es una función de Q . Ya se mencionó que μ es un artefacto que se introduce en el proceso de renormalización y las observables físicas no deberían depender de él. A primer orden, α_s es una constante, pero adquiere dependencia de μ^2 a medida que se tienen en cuenta correcciones de orden superior. Por lo tanto, las siguientes ecuaciones deben cumplirse para $P(\mu^2 \alpha_s, Q^2)$

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} P(\mu^2, \alpha_s, Q^2) &= \left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] P(\mu^2, \alpha_s, Q^2) = 0, \\ &= \left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] P(\mu^2, \alpha_s, Q^2) = 0, \\ \beta(\alpha_s) &= \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

lo cual se conoce como la ecuación del grupo de renormalización (RGE). La ecuación se puede resolver utilizando una técnica conocida como método de características. Introduciendo una nueva variable $\bar{\alpha}$ y un nuevo parámetro definido por:

$$\tau = \ln(Q^2/\mu^2), \quad d\tau = \frac{dQ^2}{Q^2} = \frac{d\bar{\alpha}(\tau)}{\beta(\tau)}, \quad (2.76)$$

con la condición de contorno $\bar{\alpha}_s(0) = \alpha_s$. Una solución para la ec. (2.76) se obtiene fácilmente,

$$\tau = \int_{\alpha_s}^{\bar{\alpha}_s} \frac{d\alpha}{\beta(\alpha)}. \quad (2.77)$$

Diferenciando con respecto a τ y α_s , uno puede obtener una ecuación para $\bar{\alpha}_s(\tau)$, lo que significa que para una función analítica $F(x)$, se tiene que:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) F(\bar{\alpha}_s(\tau)) = 0 \quad (2.78)$$

Comparando con la ec. (2.74), se obtiene una solución general

$$P(\tau, \alpha_s) = P(0, \bar{\alpha}_s(\tau)). \quad (2.79)$$

Esto significa que toda la dependencia de μ de una observable solo aparece a través de la constante de acoplamiento $\bar{\alpha}_s(\mu)$. Esta es una conclusión notable. Dice que toda la dependencia de escala de la renormalización se presenta solo a través de la constante de acoplamiento en ejecución dependiente de la escala. Por lo tanto, todo lo que se necesita hacer es calcular la observable como una función de la constante de acoplamiento.

La constante de acoplamiento dependiente de la escala $\alpha_s(\tau)$ se puede calcular utilizando las ecs. (2.75) o (2.76) una vez que se conoce la función β . Sin embargo, la función β solo se

puede obtener mediante el método de perturbaciones;

$$\begin{aligned}\beta(\alpha_s(\tau)) &= \mu^2 \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial \mu^2} = -\alpha_s^2 b_0 [1 + b_1 \alpha_s + b_2 \alpha_s^2 + \dots], \\ &= -\frac{\beta_0}{4\pi} \alpha_s^2 - \frac{\beta_1}{8\pi^2} \alpha_s^3 - \frac{\beta_2}{128\pi^3} \alpha_s^4 + \dots\end{aligned}\tag{2.80}$$

Sustituyendo $\beta(\alpha_s) = -b_0 \alpha_s^2$ en el grupo de renormalización dado por la ec. (2.76), se obtiene que

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2) b_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)},\tag{2.81}$$

donde

$$b_0 = \frac{\beta_0}{4\pi} = \frac{11 C_A - 2 n_f}{12\pi} = \frac{11 - \frac{2}{3} n_f}{4\pi}\tag{2.82}$$

con n_f es el número de especies de fermiones activos ($m_f < Q$). A diferencia de QED, no se puede utilizar $Q^2 = 0$ como punto de referencia porque α_s es divergente por lo que se debe escoger $Q^2 = \mu$. Además, b_0 es una función decreciente de Q^2 que se conoce como libertad asintótica. Esta es una de las características sobresalientes de QCD. La libertad asintótica fue la razón principal del éxito del modelo de partones en la explicación de los fenómenos de dispersión inelástica profunda. También nos permite utilizar el método perturbativo para fenómenos donde la energía Q^2 es grande. Por otro lado, esto también significa que cuando Q^2 es pequeño, el método perturbativo deja de ser válido. En la QED, se podía definir una constante de acoplamiento a larga distancia que es una cantidad medible. Sin embargo, en la QCD, no existen observables correspondientes que puedan definir una constante de acoplamiento de manera inequívoca. La constante de acoplamiento $\alpha_s(Q^2)$ en la QCD depende de la escala de renormalización μ^2 , aunque los observables físicos no lo hacen, por lo que se requiere tener una medición de referencia. Como el manejo matemático de la escala μ^2 es engorroso, existe una expresión alternativa que no depende de de está y puede obtenerse

reescribiendo la ec. (2.81) como:

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} - b_0 \ln Q^2 = \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} - b_0 \ln \mu^2 \equiv -b_0 \ln \Lambda^2, \quad (2.83)$$

El lado izquierdo es una función de Q^2 mientras que la ecuación del centro es una función de μ solamente y por tanto, no depende de Q^2 ni de μ^2 y es una constante. Así, el lado derecho define una constante universal Λ que no depende del punto de renormalización. En términos de Λ , la constante de acoplamiento se escribe como:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}. \quad (2.84)$$

En la discusión de los fenómenos de baja energía de la fuerza fuerte, incluida la dinámica nuclear, algunos modelos que ayudan a la descripción de ciertos fenómenos son VMD y ChPT, los cuales son herramientas útiles indispensable. A continuación se hace una descripción de ellas.

2.4.1. Modelo de Dominancia Vectorial VMD

Un aspecto importante de la física hadrónica que concierne en esta sección es la interacción entre el fotón y la materia hadrónica [208]. Esto se ha descrito notablemente bien utilizando el modelo de dominancia vectorial (VMD). Este modelo asume que los componentes hadrónicos de la polarización de vacío para el fotón se pueden identificar con los mesones vectoriales conocidos. Esto ciertamente es una aproximación en las regiones alrededor de las masas de los mesones ligados de quark-antiquark [209-211]. Resulta tentador tratar de establecer una conexión entre el antiguo lenguaje de dominancia vectorial y el Modelo Estándar [212]. En el Modelo Estándar, los quarks, al ser cargados, se acoplan al fotón, por lo que la contribución del sector fuerte al propagador del fotón surge de manera análoga a los lazos electrón-positrón en QED, donde se puede aproximar razonablemente bien la auto-energía del fotón usando propagadores y vértices en su forma básica sin preocuparse por los ordenes

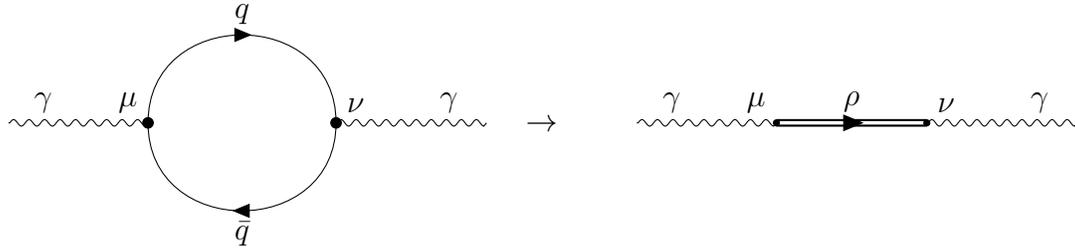


Figura 2.2: Una simple representación de la imagen de VMD para la contribución hadrónica al propagador del fotón. Los mesones vectoriales más pesados se incluyen en modelos VMD generalizados.

superiores. Sin embargo en QCD, para los lazos de los quarks, no se pueden desestimar tan fácilmente estos ordenes superiores en la expansión perturbativa. (Aunque para los quarks pesados, los efectos de ordenes superiores pueden ser ignorados como una consecuencia de la libertad asintótica).

Desarrollo historico de VMD

Las semillas de VMD fueron sembradas por Nambu [213] en 1957 cuando surgio la idea de que la distribución de carga del protón y el neutrón podrían explicarse mediante la contribución de un mesón vectorial isoescalar neutro. Sin embargo, fue Sakurai quien propuso una teoría de interacción fuerte mediada por mesones vectoriales [214] sacando ventaja de la teoría de campo no abeliana de Yang-Mills [215]. Le preocupaba la noción de corrientes conservadas, el principio de norma y la universalidad de los acoplamientos ya que deberían aplicarse a la física de las interacciones fuertes, así como el problema de las masas de los mesones de dicha teoría. Publicó su trabajo con este asunto sin resolver con la esperanza de que estimulara un mayor interés en el campo.

Kroll, Lee y Zumino persiguieron la idea de reproducir VMD a partir de una teoría de campo [216]. Dentro del modelo de VMD más simple, la contribución hadrónica de polarización de vacío del fotón toma la forma de un mesón vectorial propagante (ver Fig.2.2), el cual reemplaza la contribución de QCD para el proceso de polarización. Posteriormente, esta

interpretación se generalizó para que fuera válida para la totalidad de todas las interacciones fotón-hadrón, formuladas en términos de una identidad de operador [216, 217], conocida como identidad de campo-corriente (CFI). La corriente electromagnética, fuente del campo de Maxwell $j_\mu^{\text{EM}}(x) = j_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y$, fue identificada como una combinación lineal de las partes isovectoriales e isoescalares del campo del mesón vectorial. Por ejemplo: la parte isovectorial (con m_ρ la masa del mesón ρ^0 , $\rho_\mu^0(x)$ el campo asociado y $g_\rho = 2\gamma_\rho$ el acoplamiento), el CFI puede escribirse como:

$$[j_\mu^{\text{EM}}(x)]_{I=1} = \frac{m_\rho^2}{g_\rho} \rho_\mu^0(x), \quad (2.85)$$

y luego se generaliza [213] a un campo isovectorial, $\vec{\rho}(x)$, del cual $\rho^0(x)$ es la tercera componente [es decir, $\rho^0(x) \equiv \rho^3(x)$]. La ec. (2.85), implica que el campo $\vec{\rho}(x)$ es divergente bajo la interacción fuerte, que no es más que la condición habitual de Proca

$$\partial_\mu \vec{\rho}^\mu = 0, \quad (2.86)$$

para un campo vectorial masivo acoplado a una corriente conservada. La Lagrangiana resultante para el sector hadrónico es el mismo que la Lagrangiana de Yang-Mills [215], pero también tiene un término de masa que destruye la invariancia de norma local. Aunque la invariancia de norma es necesaria para la renormalizabilidad, Kroll y compañía, no se preocuparon por ello; afirmando que el valor no nulo de la masa hacía posible conectar la ecuación de conservación del campo, ec. (2.86), con la ecuación de movimiento del campo. El caso de un campo vectorial masivo global en SU(2) (el campo ρ) que interactúa con un campo triplete de piones y está acoplado a una corriente conservada es tratado en detalle por Lurie [218]. Por otra parte, la ingenua prescripción del vértice $\gamma - \rho$ que suele verse en VMD, $-\frac{em_\rho^2}{g_\rho}$, sugiere un término de acoplamiento en el Lagrangiano efectivo de la forma

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{em_\rho^2}{g_\rho} \rho_\mu^3 A^\mu, \quad (2.87)$$

el cual viene sugerido a través de la sustitución CFI en la pieza de interacción de la Lagrangiana electromagnética, $-e j_\mu^{\text{EM}} A^\mu$ (Una explicación más detallada puede ser vista en la Ref. [219]).

Con todo lo anterior y teniendo en cuenta a los hadrones como grados de libertad relevantes e incluyendo la interacción con mesones pseudoescalares, esta descripción es capaz de dar cuenta de manifestaciones a baja energía de la interacción fuerte. La incorporación de simetrías tales como el isoespín y la simetría de sabor SU(3) permiten tanto clasificar a los hadrones como relacionar sus propiedades. También se han considerado otras manifestaciones asociadas a los mesones vectoriales como bosones de norma y la incorporación de simetrías superiores como extensiones de VMD [216, 220-222]. Para este trabajo, dado que los hadrones implicados son los más ligeros, uno puede limitarse a la parte común a todos los modelos basados en VMD. Así, la Lagrangiana efectiva para los mesones ligeros ρ , π , ω , y ρ' puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{V=\rho, \rho'} g_{V\pi\pi} \epsilon_{abc} V_\mu^a \pi^b \partial^\mu \pi^c + \sum_{V=\rho, \rho'} g_{\omega V\pi} \delta_{ab} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\mu \omega_\nu \partial_\lambda V_\sigma^a \pi^b \\ & + g_{3\pi} \epsilon_{abc} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \omega_\mu \partial_\nu \pi^a \partial_\lambda \pi^b \partial_\sigma \pi^c + \sum_{V=\rho, \rho', \omega} \frac{e m_V^2}{g_V} V_\mu A^\mu, \end{aligned} \quad (2.88)$$

donde se han etiquetado a los acoplamientos con su correspondiente campo de interacción y, en general, V se refiere a un mesón vectorial y A^μ se refiere al campo del fotón. Las constantes de acoplamiento son parámetros libres que deben determinarse experimentalmente. Aunque, como se menciona anteriormente, se pueden establecer relaciones entre ellas e incluso extraerse a partir de otras descripciones [5, 221, 223-226].

2.4.2. Teoría Quiral perturbativa

La teoría quiral perturbativa (ChPT, por sus siglas en inglés) es una teoría de campo efectivo que describe las propiedades de sistemas que interactúan fuertemente a energías muy inferiores a las masas típicas de los hadrones. Esto significa que es una aproximación

sistemática e independiente de QCD, basada en las simetrías de la teoría subyacente y en los principios generales de la teoría cuántica de campos. En lugar de utilizar quarks y gluones como grados de libertad fundamentales, en ChPT se utilizan a los hadrones. A continuación, se presenta un resumen breve de ChPT, basado en gran medida en las referencias [201, 227, 228], a la cual se puede recurrir para obtener una introducción más detallada.

Para la construcción de la Lagrangiana de QCD, se hace uso de la simetría de color $SU(3)_C$, que es la base de la dinámica de la interacción fuerte. Dicha Lagrangiana, ec. (2.71), tiene simetrías globales adicionales asociadas con los números de sabor de los quarks:

1. \mathcal{L}_{QCD} es invariante bajo una re-definición de una fase global para todos los sabores de quark, es decir,

$$q_f \rightarrow \exp(i\theta) q_f. \quad (2.89)$$

Esta simetría se asocia con la conservación del número bariónico.

2. \mathcal{L}_{QCD} también es invariante bajo la redefinición de una fase independiente para los diferentes sabores de quark, es decir,

$$q_f \rightarrow \exp(i\theta_f) q_f. \quad (2.90)$$

Esta simetría implica la conservación del sabor.

3. Para las masas de los quarks iguales, existe una simetría bajo transformaciones del grupo $SU(N_f)$ en el espacio de sabor

$$q_f \rightarrow U_{ff'} q_{f'}, \quad U \in SU(N_f), \quad (2.91)$$

la cual es una buena simetría para el sector de quarks ligeros (u, d, s), donde su masa puede ser ignorada en primera aproximación.

Por otra parte, se sabe que la ruptura dinámica de la simetría quiral introduce una escala

$\Lambda_\chi = 4\pi F_0$ del orden de 1 GeV [229]. Bajo este contexto, es común dividir los seis sabores de quarks en los tres quarks ligeros u, d y s donde $m_l < \Lambda_\chi$ y en tres quarks pesados c, b y t donde $m_h > \Lambda_\chi$. Por lo que desde el punto de vista teórico, se pueden considerar dos límites; el límite donde las masas de los quarks ligeros tiende a cero (límite quiral) y el límite donde las masas de los quarks pesados tiende infinito [230]. Esta sección se centra exclusivamente en el límite quiral, considerando solo dos (u, d) o tres (u, d, s) quarks ligeros y omitiendo a los quarks pesados de la discusión.

Introduciendo los campos de quark izquierdos y derechos, donde por comodidad se omite el índice de sabor,

$$q_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)q, \quad q_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)q, \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (2.92)$$

la Lagrangiana de la QCD, ec. (2.71) en el límite quiral puede descomponerse en:

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{l=u,d,s} \left(\bar{q}_{L,l} i \gamma^\mu D_\mu q_{L,l} + \bar{q}_{R,l} i \gamma^\mu D_\mu q_{L,R} \right) - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a. \quad (2.93)$$

la cual tiene una simetría global

$$\underbrace{\text{SU}(N_f)_L \otimes \text{SU}(N_f)_R}_{\text{SU}(N_f)_L \otimes \text{SU}(N_f)_R} \otimes \text{U}(1)_V \otimes \text{U}(1)_A.$$

La simetría asociada a la conservación del número bariónico es usualmente llamada $\text{U}(1)_V$. El grupo axial $\text{U}(1)_A$ no es una simetría a nivel cuántico debido a la anomalía Abelianna [231][233]. Por tanto, esta Lagrangiana es invariante bajo una transformación independiente global $G \equiv \text{SU}(3)_L \otimes \text{SU}(3)_R$ para los campos de quark izquierdos y derechos en el espacio de sabor:

$$q_L \xrightarrow{G} g_L q_L, \quad q_R \xrightarrow{G} g_R q_R, \quad g_{L,R} \in \text{SU}(N_f)_{L,R}. \quad (2.94)$$

Además, la Lagrangiana clásica en el límite quiral tiene una simetría global $\text{U}(3)_L \times \text{U}(3)_R$, es decir, es invariante bajo transformaciones unitarias independientes de sabor para los campos

de quark izquierdos y derechos.

$$q_L \rightarrow U_L q_L, \quad q_R \rightarrow U_R q_R. \quad (2.95)$$

A nivel clásico, esta simetría quiral resulta en $2 \times (8 + 1) = 18$ corrientes conservadas:

$$\begin{aligned} L_a^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, & R_a^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R, & a &= 1, \dots, 8, \\ V^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, & A^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R - \bar{q}_L \gamma^\mu q_L. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Aquí, las matrices de Gell-Mann actúan en el espacio de sabor, ya que q_R y q_L son tripletes de sabores y el singlete para la corriente axial-vector $A^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q$ desarrolla la así llamada anomalía [231][233], lo que resulta en la ecuación de divergencia:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{3 g_s^2}{16 \pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}_c \left(G^{\mu\nu} G^{\rho\sigma} \right), \quad (2.97)$$

donde el factor de tres proviene del número de sabores. Para N_c grande (número de colores) [234], el singlete para la corriente vector-axial se conserva.

En la teoría cuantizada, las integrales espaciales sobre las densidades de carga de las corrientes de simetría dan lugar a los operadores de carga Q_{La} , Q_{Ra} ($a = 1, \dots, 8$) y Q_V . Estos son generadores del grupo $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$, que actúan en el espacio de Hilbert de la QCD, y satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [Q_{La}, Q_{Lb}] &= i f_{abc} Q_{Lc}, & [Q_{Ra}, Q_{Rb}] &= i f_{abc} Q_{Rc}, \\ [Q_{La}, Q_{Rb}] &= 0, & [Q_{La}, Q_V] &= [Q_{Ra}, Q_V] = 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura antisimétricas del álgebra de Lie para el grupo de simetría $SU(3)$ [199]. En el límite quiral, estos operadores conmutan con el Hamiltoniano,

$$[Q_{La}, H_{QCD}^0] = [Q_{Ra}, H_{QCD}^0] = [Q_V, H_{QCD}^0] = 0. \quad (2.99)$$

Justo como se menciona en la Ref. [228], es conveniente considerar a las combinaciones lineales $Q_{A_a} \equiv Q_{R_a} - Q_{L_a}$ y $Q_{V_a} \equiv Q_{R_a} + Q_{L_a}$, que transforman como: $Q_{A_a} \rightarrow -Q_{A_a}$ y $Q_{V_a} \rightarrow Q_{V_a}$ bajo Paridad. Además se asume que los generadores axiales Q_{A_a} no aniquilan el estado fundamental de la QCD, es decir

$$Q_{a_a}|0\rangle \neq 0 \quad (2.100)$$

Como consecuencia del teorema de Goldstone [235], cada generador axial Q_{A_a} que no aniquila el estado fundamental corresponde a un campo de bosón de Goldstone sin masa ϕ_a con espín 0. Además, de las relaciones dadas en la ec. (2.98), se tiene que $[Q_{V_a}, Q_{A_b}] = i f_{abc} Q_{A_c}$ y así, el Goldstone transforma bajo el subgrupo $SU(3)_V$, que deja al vacío invariante como un octeto. Los miembros del octeto pseudoescalar (π, K, η) son identificados como los bosones de Goldstone de QCD y podrían ser no masivos para quarks sin masa. Por otra parte, después de activar las masas de los quarks en el término de masa, se tiene:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = -\bar{q} \mathcal{M} q = -(\bar{q}_R \mathcal{M} q_L + \bar{q}_L \mathcal{M}^\dagger q_R), \quad \mathcal{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s), \quad (2.101)$$

y los Goldstone ya no serán sin masa. Sin embargo, las corrientes de simetría ya no se conservan (para más detalles, se sugiere ver la Ref. [227]). Además de las propiedades de conservación de las corrientes, también se pueden calcular sus conmutadores, que se pueden utilizar para derivar ciertas relaciones entre las funciones de Green de QCD análogas a las identidades de Ward QED. El conjunto de todas las funciones de Green se recoge de forma eficiente en una funcional generadora,

$$\exp(iZ_{\text{QCD}}[v, a, s, p]) = \langle 0|T \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{ext}}(x)\right]|0\rangle_0, \quad (2.102)$$

donde [202, 236]

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \bar{q} \gamma_\mu \left(v^\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu \right) q - \bar{q} (s - i \gamma_5 p) q. \quad (2.103)$$

Los operadores de campo de quark q en \mathcal{L}_{ext} , como el estado fundamental $|0\rangle$ se refieren al límite quiral. Además, a partir del funcional generador, se pueden obtener también funciones de Green donde los campos de quark y el estado fundamental son aquellos con masas de quark finitas, solo hay que evaluar la derivada funcional de la ec. (2.102) en $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$. Las identidades de Ward quirales resultan de una invariancia del funcional generador bajo una transformación local de los campos de quark y campos externos [202, 236], que transforman como:

$$q_L \rightarrow \exp\left(-i\frac{\Theta(x)}{3}\right) V_L(x) q_L, \quad q_R \rightarrow \exp\left(-i\frac{\Theta(x)}{3}\right) V_R(x) q_R, \quad (2.104)$$

donde V_L y $V_R(x)$ son matrices independientes en el espacio-tiempo, siempre que los campos estén sujetos a las transformaciones;

$$\begin{aligned} l_\mu &\rightarrow V_L l_\mu V_L^\dagger + i V_L \partial_\mu V_L^\dagger, & r_\mu &\rightarrow V_R r_\mu V_R^\dagger + i V_R \partial_\mu V_R^\dagger, \\ v_\mu^{(s)} &\rightarrow v_\mu^{(s)} - \partial_\mu \Theta, & s + i p &\rightarrow V_R (s + i p) V_L^\dagger, \\ s - i p &\rightarrow V_L (s - i p) V_R^\dagger, \end{aligned} \quad (2.105)$$

las cuales cancelan términos análogos originados en la parte cinética del Lagrangiano de los quarks.

Teoría quiral perturbativa para mesones

En el límite quiral, lo que se requiere es que la Lagrangiana efectiva sea invariante bajo $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V$. Bajo el rompimiento espontáneo de la simetría, el grupo quiral actúa de forma no lineal en los campos de los bosones de Goldstone [237, 238]. Definiendo la matriz del grupo de simetría $SU(3)$,

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_0}\right), \quad (2.106)$$

donde el campo ϕ es una matriz hermitiana, sin traza 3×3 , dada por:

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^8 \phi_a \lambda_a = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \eta & \sqrt{2} \pi^+ & \sqrt{2} K^+ \\ \sqrt{2} \pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \eta & \sqrt{2} K^0 \\ \sqrt{2} K^- & \sqrt{2} \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \eta \end{pmatrix}, \quad (2.107)$$

donde el parámetro F_0 es el límite quiral de la constante de desintegración del pión. Bajo una transformación chiral local, $U(x)$ transforma como [202]:

$$U(x) \rightarrow V_R(x) U(x) V_L^\dagger. \quad (2.108)$$

Esta transformación implica que ϕ transforma como $\phi(x) \rightarrow V \phi V^\dagger$ bajo $SU(3)_V$, es decir, los bosones de Goldstone efectivamente forman un octeto $SU(3)$. La Lagrangiana más general con el menor número de campos externos (distintos de cero) puede escribirse como [202]:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger), \quad (2.109)$$

con

$$\begin{aligned} D_\mu U &\equiv \partial_\mu U - i r_\mu U + i U l_\mu \rightarrow V_R D_\mu U V_L^\dagger, \\ \chi &\equiv 2 B_0 (s + i p) \rightarrow V_R \chi V_L^\dagger. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Denotando al cuadrimomento como $\mathcal{O}(q)$, la derivada covariante cuenta como $\mathcal{O}(q)$ y χ como $\mathcal{O}(q^2)$, de tal manera que la Lagrangiana de orden más bajo sea $\mathcal{O}(q^2)$. Además, \mathcal{L}_2 es invariante bajo las sustituciones simultáneas $U \rightarrow U^\dagger$, $l_\mu \rightarrow r_\mu$, y $\chi \rightarrow \chi^\dagger$ y contiene dos parámetros F_0 y B_0 . El primer término de la ec. (2.109), describe el término cinemático de los ocho bosones de Goldstone y el segundo término es un ejemplo de como el rompimiento de simetría explícito por las masas de quarks es transferido del nivel de QCD al nivel de la teoría efectiva. Tanto, $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \mathcal{L}_{\text{ext}}$ y \mathcal{L}_2 son invariantes bajo transformaciones quirales locales.

En el marco de la Lagrangiana efectivo de orden más bajo, la constante B_0 se relaciona con

el singlete escalar del condensado de quarks por:

$$3 F_0^2 B_0 = -\langle \bar{q} q \rangle_0. \quad (2.111)$$

Al considerar el límite isospín-simétrico $m_u = m_d = \hat{m}$ (de modo que no hay mezcla $\pi^0 - \eta$), se obtienen las masas de los bosones de Goldstone, al orden más bajo en las masas de los quarks $\mathcal{O}(q^2)$,

$$M_{\pi,2}^2 = 2 B_0 \hat{m}, \quad M_{K,2}^2 = B_0 (\hat{m} + m_s), \quad M_{\eta,2}^2 = \frac{2}{3} B_0 (\hat{m} + 2 m_s). \quad (2.112)$$

Estos resultados, en combinación con la ec. (2.111), se denominan relaciones de Gell-Mann, Oakes y Renner (Ver la Ref. [239]) y las predicciones de orden más bajo proporciona una primera estimación de la relación entre las masas de los quarks,

$$\frac{M_K^2}{M_\pi^2} = \frac{\hat{m} + m_s}{2 \hat{m}} \rightarrow \frac{m_s}{\hat{m}} = 25.9, \quad \frac{M_\eta^2}{M_\pi^2} = \frac{2 m_s + \hat{m}}{3 \hat{m}} \rightarrow \frac{m_s}{\hat{m}} = 24.3. \quad (2.113)$$

Una característica notable de la ec. (2.109) es que una vez conocida F_0 (a partir de la desintegración del pión), la simetría quiral permite hacer predicciones absolutas sobre otros procesos. Además, dado el esquema perturbativo en términos de momentos y masas externos se pueden construir Lagrangianas de ordenes superiores. Por ejemplo, para el caso $\mathcal{O}(q^4)$, construido por Gasser y Leutwyler [202], el cual contiene doce constantes de baja energía ($L_1, \dots, L_{10}, H_1, H_2$),

$$\mathcal{L}_4 = L_1 \{ \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \}^2 + \dots + H_2 \text{Tr}(\chi \chi^\dagger). \quad (2.114)$$

Los valores numéricos de las constantes de baja energía L_i no están determinados por la simetría quiral. Por analogía con F_0 y B_0 de \mathcal{L}_2 , son parámetros que contienen información sobre la dinámica subyacente. Para una extensa revisión del estado de estas constantes de

acoplamiento, véanse por ejemplo las Refs. [240, 241]. Finalmente, es importante mencionar que ChPT puede ser extendido al sector de los bariones [242], que considera una variedad de elementos matriciales con estados entrantes y salientes de un solo nucleón. Aunque la aproximación general es análoga a la del sector de mesones, el sector bariónico presenta algunas características nuevas. En particular, a diferencia de las masas de los bosones de Goldstone, las masas de los bariones no desaparecen en el límite quiral. Sin embargo, para propósitos de este trabajo, este tema queda fuera de la discusión realizada hasta ahora. Si el lector está interesado en una descripción más completa de la teoría ChPT, se sugiere revisar la Ref. [228].

Finalmente, en las últimas décadas, ChPT ha evolucionado en un enfoque maduro y completo para las interacciones de baja energía entre los bosones de Goldstone, los nucleones y los campos externos, con numerosas aplicaciones exitosas. ChPT ha desempeñado un papel importante en la interpretación de cálculos de lattice QCD realizados a masas de piones no físicas. También ha servido como prototipo para enfoques semi-fenomenológicos en otros sistemas.

2.5. Representación de Hadrones: Mesones y Bariones en SU(3)

Usando la notación de las Ref. [243, 244], de los ocho generadores tensoriales F_j^i de SU(3), el conjunto F_1^1, F_2^1, F_1^2 y F_2^2 forman los generadores del subgrupo $SU(2) \times U(1)$. Además, $SU(2) \subset SU(2) \times U(1) \subset SU(3)$, por lo que es conveniente clasificar los estados en una representación del grupo SU(3). Los generadores del subgrupo $SU(2) \times U(1)$, convenientemente tomados para corresponder al isospín y la hipercarga en el caso del grupo SU(3), son:

$$\begin{aligned} I_+ &= F_1^2, & I_- &= F_2^1, & I_3 &= \frac{1}{2}(F_1^1 - F_2^2), \\ Y &= F_1^1 + F_2^2 = -F_3^3, \end{aligned} \tag{2.115}$$

Existen, por lo tanto, dos operadores diagonales en $SU(3)$, I_3 e Y . Así, el grupo de simetría $SU(3)$ es un grupo de rango 2. Además, si se define a la carga eléctrica como $Q = F_1^1$ en $SU(3)$, la ec. (2.115) proporciona la ya conocida relación de Gell-Mann-Nishijima;

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \equiv I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (2.116)$$

$$Y = B + S.$$

Por otra parte, la representación fundamental es un vector que puede ser escrito como:

$$q_i \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

el operador de campo que crea un quark u , un quark d o un quark s , respectivamente,

$$\bar{u}|0\rangle = |u\rangle, \quad \bar{d}|0\rangle = |d\rangle, \quad \bar{s}|0\rangle = |s\rangle. \quad (2.118)$$

Este operador de campo q_i pertenecen a la representación $\mathbf{3}$ de $SU(3)$, mientras que los operadores de campo

$$q^i = q_i^* = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ d \\ s \end{bmatrix}, \quad (2.119)$$

pertenecen a la representación $\bar{\mathbf{3}}$ de $SU(3)$. El operado q^i crea antiquarks o aniquila quarks.

Por otra parte, debe satisfacer que:

$$[F_j^i, q_k] = \delta_k^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i q_k. \quad (2.120)$$

En la notación matricial, los operadores q_i y q^j pueden escribirse como una matriz fila y una matriz columna, respectivamente,

$$\bar{q} = (\bar{u} \ \bar{d} \ \bar{s}), \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad (2.121)$$

los cuales cumplen con las relaciones

$$[F_A, q] = -\frac{\lambda_A}{2} q, \quad [F_A, \bar{q}] = \bar{q} \frac{\lambda_A}{2}, \quad (2.122)$$

con λ_A las matrices de Gell-Mann.

Por lo tanto, se puede ver que a partir de las ecs. (2.116), (2.118), (2.120) o (2.122), los estados de quarks pertenecen a la representación de triplete del grupo de simetría SU(3) y tienen los siguientes números cuánticos: Es conveniente representar cada estado de la

	I	I_3	S	B	Y	Q
$ u\rangle$	1/2	1/2	0	1/3	1/3	2/3
$ d\rangle$	1/2	-1/2	0	1/3	1/3	-1/3
$ s\rangle$	0	0	-1	1/3	-2/3	-1/3

representación de triplete en un diagrama $I - Y$. Tal diagrama se llama diagrama de peso. La representación $\bar{\mathbf{3}}$ de SU(3) no es equivalente a la representación $\mathbf{3}$; está transformada como $q^i = q_i^*$. Es la hipercarga la encargada de distinguir a las representaciones $\mathbf{3}$ y $\bar{\mathbf{3}}$. Los antiquarks pertenecen a la representación $\bar{\mathbf{3}}$ de SU(3).

2.5.1. Mesones

La teoría de grupos proporciona poderosas herramientas para generar multipletes de partículas a partir de un par quark-antiquark o a partir de tres quarks. Un par quark-antiquark se representa simbólicamente por $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$, o más explícitamente por $q^i q_j$. Además, para construir partículas observables a partir de quarks, es conveniente asignar un número

bariónico de $B = 1/3$ a los quarks. Por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} q_i |0\rangle &: B = 1/3, \\ q^i |0\rangle &: B = -1/3. \end{aligned} \tag{2.123}$$

El producto tensorial $q^i q_j$ es reducible, ya que puede escribirse como:

$$\begin{aligned} q^i q_j &= \left(q^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i q^k q_k \right) + \frac{1}{3} \delta_j^i q^k q_k, \\ &= P_j^i (\text{Octeto}) + S (\text{Singlete}), \end{aligned} \tag{2.124}$$

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}.$$

Es claro que:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} (q^k \bar{q}_k), \tag{2.125}$$

donde S es invariante, mientras que P_j^i es considerado como un operador de campo para mesones pseudoscalares, definido por:

$$P_j^i \equiv |P_j^i\rangle = \left(q^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i q^k q_k \right) |0\rangle, \tag{2.126}$$

el cual tiene número bariónico cero y es un octeto. Usando los diferentes tipos de sabor de quarks u , d y s , se tiene que $(q^1, q^2, q^3) = (u, d, s)$ y $(q_1, q_2, q_3) = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ y las representaciones $\mathbf{1}$ y $\mathbf{8}$ quedan escritas como:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} (u \bar{u} + d \bar{d} + s \bar{s}), \tag{2.127}$$

$$P_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2u\bar{u} - d\bar{d} - s\bar{s}) & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & \frac{1}{3}(-u\bar{u} + 2d\bar{d} - s\bar{s}) & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & \frac{1}{3}(-u\bar{u} - d\bar{d} + 2s\bar{s}) \end{pmatrix} \tag{2.128}$$

Para identificar mejor los campos físicos asociados a las componentes tensoriales, se debe tener alguna idea sobre la estructura interna de los mesones. Para las partículas de menor masa, es razonable suponer que cada quark está en la misma órbita S de un potencial común y además, que no hay interacción entre quarks. Esta suposición implica, en primer lugar, que el momento angular total de un mesón proviene únicamente del acoplamiento de dos espines intrínsecos de quark $\frac{1}{2}$, lo que conduce a tener $J = 0$ y $J = 1$ y, en segundo lugar, que su Paridad es impar. Por lo tanto, los mesones deben ser pseudoescalares ($J^P = 0^-$) o vectoriales ($J^P = 1^-$).

En términos de los generadores de la representación fundamental λ_A , con coeficientes de campo real ϕ_A , para $A = 1, \dots, 8$, se tiene que:

$$P^i_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{A=1}^8 (\lambda_A)^i_j \phi_A, \quad (2.129)$$

con la normalización elegida de forma que:

$$P^i_j P^i_j = \frac{1}{2} \sum \text{Tr}(\lambda_A \lambda_B) \phi_A \phi_B = \phi_1^2 + \dots + \phi_8^2. \quad (2.130)$$

Usando las expresiones conocidas para λ_A se obtiene que:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \eta_8 + \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{1}{\sqrt{6}} \eta_8 - \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \eta_8 \end{pmatrix}. \quad (2.131)$$

La identificación de los campos físicos con los símbolos de las partículas, se muestra en el Cuadro [2.1](#). Por otra parte, el singlete para el mesón pseudoscalar η_1 , viene a través del campo pseudoescalar ϕ_0 y se representa por:

$$|\eta_1\rangle = \left| \frac{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}}{\sqrt{3}} \right\rangle = \frac{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}}{\sqrt{3}} |0\rangle : |1, 0, 0, 0\rangle. \quad (2.132)$$

Cuadro 2.1: Mesones pseudoescalares $J^P = 0^-$ [Determinados a través de las ecs. (2.126) y (2.129)],

Estado y su contenido de quarks	$ D^1, Y, I, I_3\rangle$
$ P_1^2\rangle = \pi^+\rangle = u\bar{d}\rangle$	$ \frac{\phi_1+i\phi_2}{\sqrt{2}}\rangle : - 8, 0, 1, 1\rangle$
$ \frac{P_1^1-P_2^2}{\sqrt{2}}\rangle = \pi^0\rangle = \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}\rangle$	$ \phi_3\rangle : 8, 0, 1, 0\rangle$
$ P_2^1\rangle = \pi^-\rangle = d\bar{u}\rangle$	$ \frac{\phi_1-i\phi_2}{\sqrt{2}}\rangle : 8, 0, 1, -1\rangle$
$ P_1^3\rangle = K^+\rangle = u\bar{s}\rangle$	$ \frac{\phi_4+i\phi_5}{\sqrt{2}}\rangle : 8, 1, 1/2, 1/2\rangle$
$ P_2^3\rangle = K^0\rangle = d\bar{s}\rangle$	$ \frac{\phi_6+i\phi_7}{\sqrt{2}}\rangle : 8, 1, 1/2, -1/2\rangle$
$ P_3^2\rangle = \bar{K}^0\rangle = s\bar{d}\rangle$	$ \frac{\phi_6-i\phi_7}{\sqrt{2}}\rangle : 8, -1, 1/2, 1/2\rangle$
$ P_3^1\rangle = K^-\rangle = s\bar{u}\rangle$	$ \frac{\phi_4-i\phi_5}{\sqrt{2}}\rangle : 8, -1, 1/2, -1/2\rangle$
$ \frac{3}{\sqrt{6}}P_3^3\rangle = \eta_8\rangle = \frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}}\rangle$	$ \phi_8\rangle : 8, 0, 0, 0\rangle$

Similares consideraciones se aplican para los mesones vectoriales $J^P = 1^-$, los cuales son:

$$\begin{aligned}
\rho^+, \rho^0, \rho^- & \quad I = 1, & \quad Y = 0, \\
K^{*+}, K^{*0} & \quad I = 1/2, & \quad Y = 1, \\
K^{*0}, K^{*-} & \quad I = 1/2, & \quad Y = -1, \\
\omega_8 & \quad I = 0, & \quad Y = 0.
\end{aligned} \tag{2.133}$$

El singlete para el bosón vectorial se denota como ω_1 y tiene exactamente la misma estructura que η_1 . Bajo el rompimiento de SU(3), un singlete de mesón puede mezclarse con la octava componente de un octeto. Por ejemplo, ω_8 y ω_1 pueden mezclarse y las partículas físicas se denotan como ω y ϕ . El diagrama de pesos para los mesones se muestra en la Figura 2.3.

2.5.2. Bariones

Ahora, se consideran a los bariones, los cuales tiene numero bariónico $B = 1$ y deben construirse a partir de 3 quarks. El producto de tres campos de quark puede ser reducido en

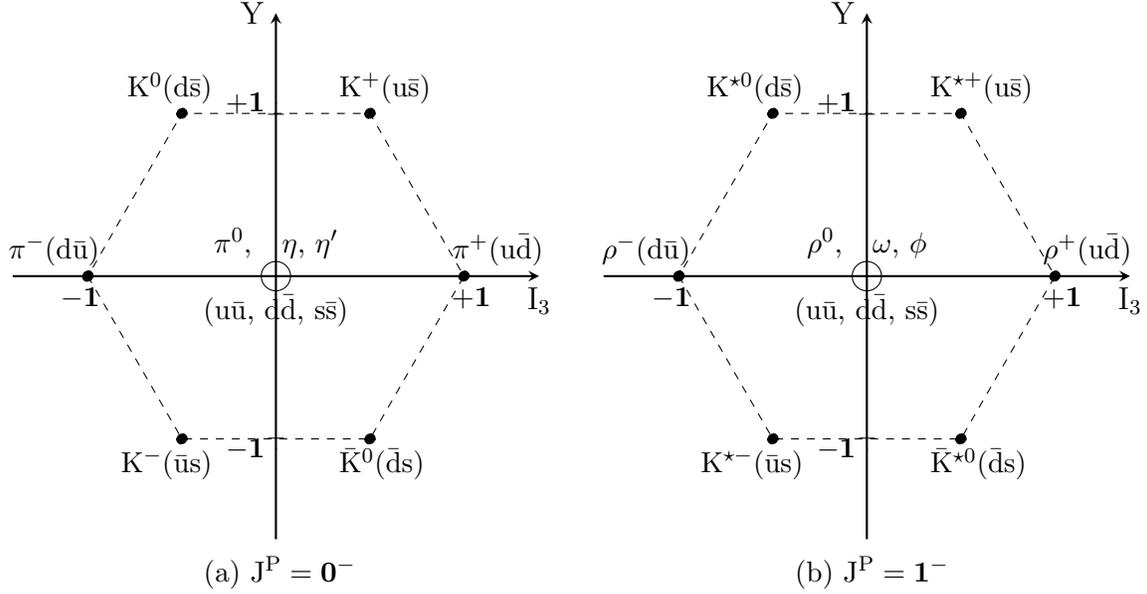


Figura 2.3: Nonete = singlete + octeto formado por (u, d, s) y (u, d, s). La Fig.(a) corresponde a los mesones con $J = 0^-$ observados y las combinaciones de pares quark-antiquark. La Fig.(b), al igual que en la Fig.(a) pero para los mesones con $J = 1^-$.

dos pasos a una combinación lineal de tensores irreducibles mediante simple cálculo tensorial,

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = (\mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}) \times \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10}. \quad (2.134)$$

En un primer paso, el producto $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ resulta:

$$\begin{aligned} q_j q_k &= \frac{1}{2} (q_j q_k + q_k q_j) + \frac{1}{2} (q_j q_k - q_k q_j), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_{jk} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{jk}, \end{aligned} \quad (2.135)$$

donde el tensor simétrico $S_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j q_k + q_k q_j)$ tiene seis componentes independientes. El tensor antisimétrico $A_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j q_k - q_k q_j)$ tiene tres componentes independientes. Ahora, sea T^i un vector perteneciente a la representación $\bar{\mathbf{3}}$, el cuál puede escribirse en términos de A_{lm} como:

$$T^i = \epsilon^{ilm} A_{lm}, \quad \text{o} \quad A_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T^i. \quad (2.136)$$

En un segundo paso, los productos $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$ y $\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}$ se pueden descomponer en las sumas $\mathbf{1} + \mathbf{8}$ y $\mathbf{8} + \mathbf{10}$, respectivamente. Considerando primero la representación $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$:

$$T^i q_j = \left(T^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i T^k q_k \right) + \frac{1}{3} \delta_j^i T^k q_k. \quad (2.137)$$

El operador octeto para los bariones se puede escribir como:

$$\bar{B}^i_j = \frac{1}{2} \left(T^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i T^k q_k \right), \quad (2.138)$$

donde

$$T^i = \epsilon^{ilm} A_{lm} = \frac{1}{1\sqrt{6}} \epsilon^{ilm} (q_l q_m - q_m q_l). \quad (2.139)$$

Para la representación del singlete, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} T^k q_k &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \epsilon^{klm} A_{lm} q_k. \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \epsilon^{klm} (q_l q_m - q_m q_l) q_k. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Ahora, si se considera a la representación $\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}$: está queda representada por:

$$\begin{aligned} S_{ij} q_k &= S_{ij} q_k + S_{jk} q_i + S_{ki} q_j - S_{jk} q_i - S_{ki} q_j, \\ &= \hat{T}_{\{ijk\}} - S_{jk} q_i - S_{ki} q_j, \end{aligned} \quad (2.141)$$

donde $\hat{T}_{\{ijk\}} = S_{ij} q_k + S_{jk} q_i + S_{ki} q_j$ es un tensor completamente simétrico y tiene diez componentes independientes. Ahora, se tiene que (la comprobación es sencilla de realizar):

$$-(S_{jk} q_i + S_{ki} q_j) + 2 S_{ij} q_k = \epsilon_{kjl} \epsilon^{lmn} S_{in} q_m + \epsilon_{kil} \epsilon^{lmn} S_{jn} q_m. \quad (2.142)$$

Por lo tanto, a partir de las ecs. (2.141) y (2.142), se obtiene

$$S_{ij} q_k = \frac{1}{3} \hat{T}_{\{ijk\}} + \frac{1}{3} [\epsilon_{kjl} \delta_i^r + \epsilon_{kil} \delta_j^r] \epsilon^{lmn} S_{rn} q_m. \quad (2.143)$$

Aquí, se tiene que $\mathbf{6} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8}$. La representación del decuplete puede escribirse como:

$$\hat{T}_{\{ijk\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} [S_{ij} q_k + S_{jk} q_i + S_{ki} q_j], \quad (2.144)$$

y la representación del octeto ($\mathbf{8}'$) es:

$$\bar{B}^l_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon^{lmn} S_{rn} q_m, \quad y \quad \bar{B}^l_l = 0. \quad (2.145)$$

Así, con todo lo anterior se tiene que el producto $q^i q^j q^k$ se reduce a la suma:

$$q_i q_j q_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T^k q_k + \frac{1}{2} S_{ij} q_k. \quad (2.146)$$

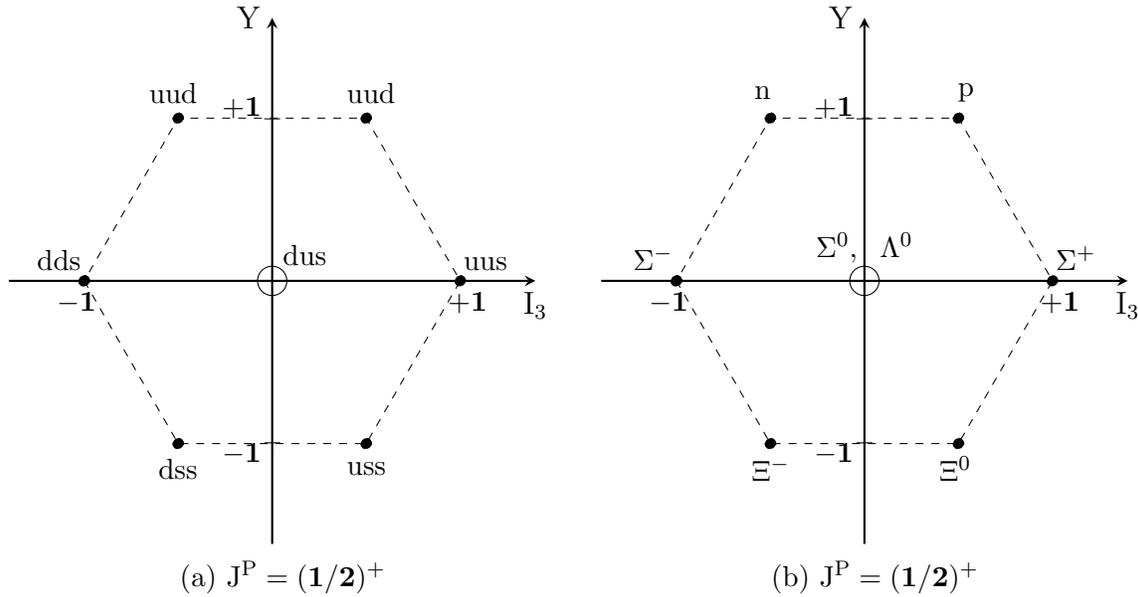


Figura 2.4: (a) Un octete formado por tres quarks. (b) Bariones observados con $J = (1/2)^+$.

Estados Barionicos

Los bariones ordinarios, son aquellos que están formados por los quarks ligeros u , d y s , deberían aparecer, justo como ya se mostro, como singletes, octetos y decupletes en el

grupo de simetría SU(3), (Ver Fig. 2.4 y Fig. 2.5). Los bariones más ligeros con $J^P = \frac{1}{2}^+$, que incluyen al neutrón y al protón, Cuadro 2.2, forman octetos, mientras que aquellos con $J^P = \frac{3}{2}^+$, que incluyen a la resonancia Δ y Ω^- , Cuadro 2.3, forman un singlete. Por otra parte, el singlete **1** de SU(3) es un estado uds (Λ_1), similar en contenido a Λ^0 encontrado en el octeto; aunque puede aparecer a una energía más alta, está prohibido en el multiplete del estado básico por la estadística de Fermi-Dirac, y por tanto, no puede mezclarse. Tampoco puede producirse la mezcla entre los multipletes $\frac{1}{2}^+$ y $\frac{3}{2}^+$, ya que no hay dos estados que tengan los mismos números cuánticos I , J e Y . A continuación presentamos sus respectivas representaciones.

(i) Representación de octeto 8

A partir de las ecs. (2.138) y (2.145), se tiene que:

$$\bar{B}^i_j |0\rangle = |B^i_j\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\epsilon^{ilm} (q_l q_m - q_m q_l) q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \epsilon^{klm} (q_l q_m - q_m q_l) q_k \right] |0\rangle, \quad (2.147)$$

y para la representación 8' se tiene que:

$$\bar{B}^i_j |0\rangle = |B^i_j\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} \epsilon^{ikl} S_{jl} q_k |0\rangle. \quad (2.148)$$

Los octetos de bariones se identifican entonces como se muestra en la Cuadro 2.2. Por lo tanto, a partir de la ec. (2.147) y el Cuadro 2.2, se ve que los ocho bariones conocidos para $J^P = \frac{1}{2}^+$ se pueden representar como matrices de 3×3 :

$$B^i_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0 \end{pmatrix}, \quad (2.149)$$

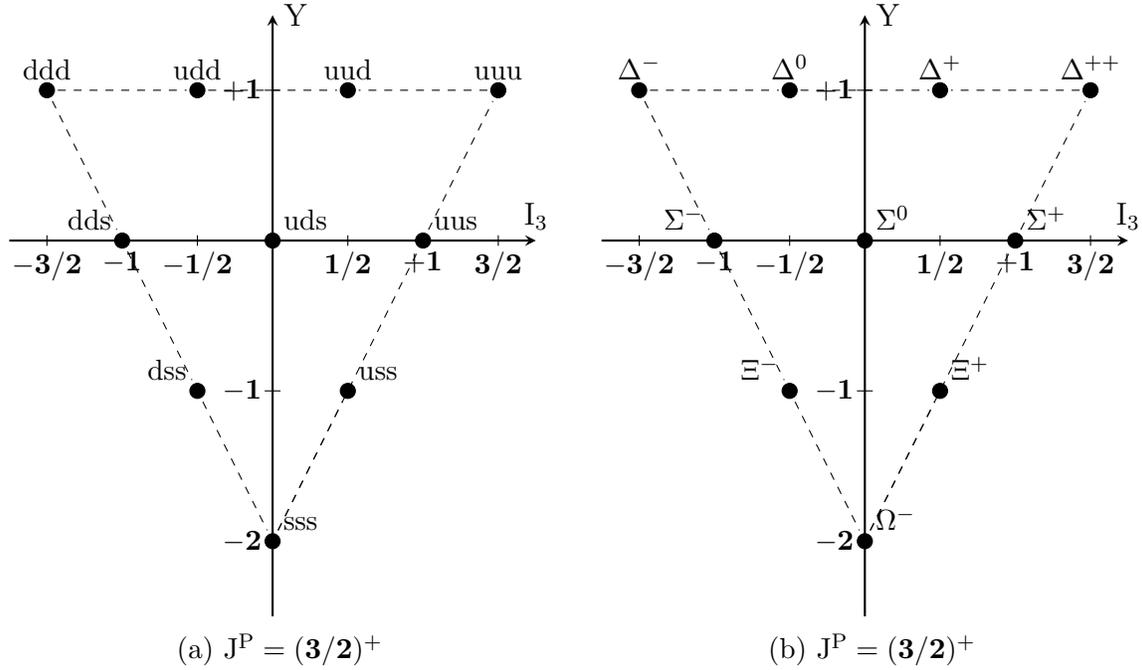


Figura 2.5: (a) Pueden construirse 10 combinaciones totalmente simétricas de tres quarks. (b) Espectro observado de las resonancias $J^P = (3/2)^+$.

y,

$$\bar{B}^i_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.150)$$

Note que

$$\bar{B}^i_j = B_i^{*j} \gamma^0, \quad (2.151)$$

donde el símbolo \star denota la conjugación compleja con respecto a $SU(3)$, pero la conjugación hermítica para los operadores de campo. El diagrama de pesos para la representación del octeto se muestra en la Figura [2.4](#).

Representación de singlete 1

A partir de la ec. (2.144), se tiene que:

$$\begin{aligned}\Lambda_1^0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{klm} (q_l q_m - q_m q_l) q_k |0\rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} |[d, s] u + [s, u] d + [u, d] s\rangle.\end{aligned}\tag{2.152}$$

(ii) Representación del decuplete 10:

Cuadro 2.2: Bariones $J^P = \frac{1}{2}^+$

Estado: 8	Contenido de Quarks	Q	I	I_3	Y
$ p\rangle = \bar{B}_1^3 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [u, d] u\rangle$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$ n\rangle = \bar{B}_2^3 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [u, d] d\rangle$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$ \Sigma^+\rangle = \bar{B}_1^2 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [u, s] u\rangle$	1	1	+1	0
$ \Sigma^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{B}_1^1 - \bar{B}_2^2) 0\rangle$	$\frac{1}{2}([d, s] u + [u, s] d)$	0	1	0	0
$ \Sigma^-\rangle = \bar{B}_2^1 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [d, s] d\rangle$	-1	1	-1	0
$ \Lambda^0\rangle = -\frac{3}{\sqrt{6}}\bar{B}_3^3 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{12}}[2[u, d] s - [d, s] u - [s, u] d]$	0	0	0	0
$ \Xi^-\rangle = \bar{B}_3^1 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [d, s] s\rangle$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$ \Xi^0\rangle = \bar{B}_3^2 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [s, u] s\rangle$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
Estado: 8'	Contenido de Quarks				
$\bar{B}_1'^3 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}} [u, d]_+ u - 2 u u d\rangle$				
$\bar{B}_2'^3 0\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{6}} [u, d]_+ d - 2 d d u\rangle$				
$\bar{B}_1'^2 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}} [u, s]_+ u - 2 u u s\rangle$				
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{B}_1'^1 - \bar{B}_2'^2) 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{12}}\{(-2[u, d]_+ s + [u, s]_+ d + [d, s]_+ u)\}$				
$\bar{B}_2'^1 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}} [d, s]_+ d - 2 d d s\rangle$				
$-\frac{3}{\sqrt{6}}\bar{B}_3'^3 0\rangle$	$-\frac{1}{2}([s, d]_+ u - [s, u]_+ d)$				
$\bar{B}_3'^1 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 s s d - [d, s]_+ d)$				
$\bar{B}_3'^2 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}([s, u]_+ s - 2 s s u)$				

A partir de la ec. (2.144), se tiene que:

$$|T_{ijk}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \{S_{ij} q_k + S_{jk} q_i + S_{ki} q_j\} |0\rangle.\tag{2.153}$$

La identificación detallada de los estados de la representación del decuplete se muestra en el Cuadro 2.3. El diagrama de pesos para el decuplete de bariones se muestra en la Figura

2.5.

Cuadro 2.3: Decuplete de bariones $J^P = \frac{3}{2}^+$ [Obtenidos a partir de la ec. (2.153)]

Estado	Contenido de Quarks	Q	I	I_3	Y
$ \Delta^{++}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} T_{111}\rangle$	$ uuu\rangle$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
$ \Delta^+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} T_{112}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} udu + duu + uud\rangle$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$ \Delta^0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} T_{122}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} udd + ddu + dud\rangle$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$ \Delta^-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} T_{222}\rangle$	$ ddd\rangle$	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
$ \Sigma^{*+}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} T_{113}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} uus + usu + suu\rangle$	1	1	1	0
$ \Sigma^{*0}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} T_{123}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \left \begin{array}{l} uds + usu + suu \\ +sdu + sud + usd \end{array} \right\rangle$	0	1	0	0
$ \Sigma^{*-}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} T_{322}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} sdd + dds + dsd\rangle$	-1	1	-1	0
$ \Xi^{*0}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} T_{133}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} uss + ssu + sus\rangle$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$ \Xi^{*-}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} T_{233}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} dss + ssd + sds\rangle$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$ \Omega^-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} T_{333}\rangle$	$ sss\rangle$	-1	0	0	-2

Estados excitados

Hasta el momento solo se ha hablado de los mesones y bariones compuestos principalmente por los quarks ligeros u , d y s . Sin embargo, existe la posibilidad de formar mesones encantados o *charmed mesons*, compuestos por el grupo de quarks ligeros más el quark c . Estos mesones son identificados genéricamente como mesones D. Si se considera un cuarto quark, en este caso c , el grupo de simetría SU(3) se extiende al grupo de simetría SU(4), el cual se rompe debido a que la masa del quark c es mucho más grande y da como resultado un total de 16 mesones. También existe la posibilidad de observar combinaciones de quarks ligeros y pesados, tales como mesones pseudoescalares encantados: $D^+(c\bar{d})$, $D^0(c\bar{u})$, D_s^+ , etc., mesones vectoriales encantados: $D^{*0}(c\bar{u})$, $D_s^{*+}(c\bar{s})$, etc. y sus correspondientes estados radiales. De igual forma, existe la posibilidad de combinar quarks ligeros con el quark b , genéricamente llamados mesones B , dando lugar a sus respectivas formas pseudoescalares y vectoriales. Adicionalmente a esto, también existe la posibilidad de tener estados excitados, con la misma composición de quarks que los estados fundamentales de quark-antiquark o de tres quarks y momento angular orbital $l = 0$. Sin embargo, para los estados excitados $l \neq 0$,

lo que ocasiona una extensión del modelo de quarks para acomodar estos estados. Estos estados excitados, con energías más altas, pueden ser obtenidos por excitaciones radiales, orbitales o por la adición de pares quark-antiquark, lo que provoca que dichos estados sean muy inestables, decaigan fácilmente y sean observados como resonancias [245]. Además, al igual que los estados fundamentales, los estados excitados también se caracterizan por sus números cuánticos (excitación orbital (n), espín (S), momento angular total (J), isoespín (I), etc.) y un rasgo característico es la alternancia de Paridad con el aumento del momento angular orbital. Para los mesones, la conjugación Carga-Paridad (CP) y la G-Paridad (combinación de conjugación de carga con una rotación de isoespín) son operaciones definidas por:

$$CP = (-1)^{S+1}, \quad G = (-1)^{J+I}. \quad (2.154)$$

Este punto es relevante, ya que a pesar de que estos estados excitados comparten el mismo momento angular total (J) del estado base, no lo hacen para el momento angular (L) y espín (S). Además, estos estados difieren del estado base en otras cantidades físicas como la masa y el ancho de decaimiento. Por ejemplo, para el caso específico del mesón ρ , existe la posibilidad de tener diferentes excitaciones radiales como: el mesón $\rho(1450)$ (ρ') con una masa $m_{\rho'} = 1465 \pm 25$ MeV y un ancho de decaimiento $\Gamma_{\rho'} = 400 \pm 60$ MeV [169], y el mesón $\rho(1700)$ (ρ''), con una masa $m_{\rho''} = 1720 \pm 20$ MeV y un ancho de decaimiento $\Gamma_{\rho''} = 250 \pm 100$ MeV [169], los cuales serán de relevancia en el desarrollo de este trabajo de tesis.

Con todo lo anterior, se concluye este capítulo dedicado a la revisión de los elementos básicos del Modelo Estandar de partículas elementales así como de los elementos necesarios del modelo de quarks que son de interés particular.

Capítulo 3

Parámetros hadrónicos de mesones ligeros en observables de baja energía

En este capítulo se presenta el análisis de un conjunto de modos de decaimiento y secciones eficaces que involucran a los mesones vectoriales ρ (770), ω (782) y ρ (1450) (ρ'), descritos en el contexto de VMD y sus interacciones hadrónicas efectivas incluyendo al pión (π), para determinar sus correspondientes acoplamientos. Se realizó un ajuste a los datos experimentales haciendo uso de la paquetería MINUIT para la minimización y la subrutina Vegas [246] para la integración del espacio fase, necesario para obtener el resultado de las secciones eficaces de los diferentes procesos analizados.

Las mediciones de baja energía en las que intervienen hadrones están alcanzando una gran precisión. En general, pueden identificarse los espectros hadrónicos de baja masa que contribuyen a los procesos y obtenerse los correspondientes parámetros de masa y ancho de decaimiento. Los estados excitados pueden manifestarse en las observables de baja energía como modificaciones en el valor de los parámetros efectivos de interacción, cuando no se consideran explícitamente. Para energías que alcanzan el umbral de su masa nominal, los estados excitados exhiben sus características resonantes en las observables y se incluyen ne-

cesariamente para describir adecuadamente los datos experimentales. Por ejemplo: el mesón vectorial $\rho(1450)$ (denotado muchas veces como ρ') es uno de tales estados excitados y puede identificarse cuál es su contribución en la amplitud decaimiento para el proceso $\omega \rightarrow 3\pi$, observando que el acoplamiento fuerte efectivo asociado a dicha transición, considerando sólo al mesón ρ (770) como estado intermedio, se desvía de lo observado en otros procesos que son insensibles a dicho mesón ρ' [217, 247]. Por otro lado, los espectros obtenidos en decaimientos hadrónicos del leptón τ^- [248, 249] y en procesos de aniquilación e^+e^- en hadrones [250], muestran claros indicios de su presencia y sirven para determinar su masa y anchura total de decaimiento [169]. Esta importante información necesita ser complementada con la anchura parcial de los diferentes modos de decaimiento, que a su vez tienen implicaciones en los parámetros de los modelos que intentan describirlos. Esta información no ha sido establecida, aunque se pueden extraer evidencias de observables particulares [169].

Los modos de decaimiento tales como $\rho' \rightarrow \omega\pi$ y $\rho' \rightarrow \pi\pi$ son de particular interés para desentrañar las contribuciones de los mesones ρ' y ρ en observables de baja energía sensibles para ambos mesones. De esta forma, la idea de hacer un análisis combinado de observables de baja energía se muestra como una posibilidad para proporcionar más información sobre esta cuestión. Además, son necesarios para una buena descripción, por ejemplo, de los procesos $e^+, e^- \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-$ [88, 92, 251, 252], $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ [250, 253-255] y en el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^+\pi^-$ a través del canal del mesón ω como estado intermedio [17, 256]. Este análisis también es relevante para la determinación indirecta del momento di-polar magnético del mesón ρ y para la descripción del proceso $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau\gamma$ para las partes independientes y dependientes de modelo.

En un primer paso, se determinaron los parámetros del modelo que involucran a los mesones vectoriales ρ (770), ω (782) y al mesón pseudo-escalar π , a partir de diez modos de decaimiento prácticamente insensibles al mesón ρ (1450), a saber: los decaimientos $\rho \rightarrow \pi\pi$ neutro y cargado, $\rho^0 \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, $\omega \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$, los modos neutro y cargado $\rho \rightarrow \pi\gamma$ y $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Luego, se incluyó al decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$, inicialmente consi-

derando que solamente estaba mediado por el mesón ρ como estado intermedio, esto para exhibir la modificación de los parámetros previamente obtenidos, señalando la inconsistencia y por tanto, que era necesario ampliar la descripción incorporando la contribución del mesón ρ' y un término de contacto como prescribe la anomalía Wess-Zumino-Witten (WZW) [257, 258]. En un segundo paso, se incorporaron los datos experimentales para las secciones eficaces de los procesos $e^+ e^- \rightarrow 3\pi$, medida por SND, CMD2, BABAR y BESIII [88, 92, 251, 252]), y $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ medida por SND y CDM2 [250, 253-255], esto con la idea de poder restringir aún más el régimen de validez de los parámetros del mesón ρ' . Como una aplicación inmediata de los resultados, en el Capítulo 4, Sección 4.5 se calcula la sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+ \pi^-$ a través del así llamado canal del mesón ω , y se hace una comparación con los datos experimentales reportados por BABAR [17] considerando el resultado de los parámetros obtenidos en este análisis. Como subproducto, se hace un seguimiento del comportamiento del acoplamiento entre los mesones ρ , ω y π para determinar su estabilidad tras la inclusión de las contribuciones del mesón ρ' y el término de contacto en la descripción del proceso bajo consideración.

La interacción fuerte entre los mesones ω , ρ y π , codificada en el parámetro $g_{\omega\rho\pi}$, necesariamente involucra al menos a una de las partículas fuera de capa de masa debido a las restricciones del espacio fase. Así, la determinación de su valor podría depender de las condiciones cinemáticas particulares de la observable a consideración. Por ejemplo, estos mesones son producidos en experimentos dedicados a la producción hadrónica en aniquilaciones electrón-positrón como se ha mencionado anteriormente y las desintegraciones hadrónicas del leptón τ^- [169, 248, 251, 259-261]. Aquí solo se toman en cuenta los datos experimentales de los primeros. La constante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$, los parámetros del mesón ρ' y el término de contacto incluido en el decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$ ($g_{3\pi}$) usualmente aparecen juntos cuando se describen los datos experimentales, exhibiendo una fuerte correlación entre ellos [247]. Por lo tanto, un análisis que involucra a datos de diferentes fuentes debería ayudar a desenmarañar sus contribuciones individuales. Esta información es relevante para el entendimiento

de otros escenarios donde no se cuenta con la suficiente información para realizar un análisis independiente y por lo que requiere basarse en una determinación bien fundamentada de dichos parámetros para extraer conclusiones.

A partir de este punto, se procede a describir los procesos genéricos y la forma en que fueron implementados en el análisis. Se hará una extensión de la discusión sobre cada contribución y los posibles escenarios a lo largo de este trabajo de tesis.

3.1. Decaimiento $V \rightarrow P_1 P_2$: Acoplamiento $g_{VP_1P_2}$

La constante de acoplamiento de un mesón vectorial (V) y dos mesones pseudo-escalares (P), denotada en general como $g_{VP_1P_2}$, puede ser extraída de la medición del ancho de decaimiento del proceso $V \rightarrow P_1 P_2$. La amplitud de este proceso, ilustrado en la Fig. 3.1(a), puede ser escrita como:

$$\mathcal{M} = i g_{VP_1P_2} (p_1 - p_2)^\mu \eta_\mu(q), \quad (3.1)$$

donde q , p_1 y p_2 son los cuádrimomentos del mesón vectorial inicial V y el par de pseudo-escalares en el estado final, respectivamente. Por otro lado, η_μ es el tensor de polarización de la partícula vectorial. La expresión para el ancho de decaimiento queda descrita en términos de la constante de acoplamiento y las masas de las partículas involucradas como:

$$\Gamma_{VP_1P_2} = \frac{g_{VP_1P_2}^2}{48 \pi} \frac{\lambda^{3/2}(m_V^2, m_{P_1}^2, m_{P_2}^2)}{m_V^5}, \quad (3.2)$$

donde $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ es la función de Källén, m_V , m_{P_1} y m_{P_2} son las correspondientes masas de la partícula vectorial y el par de pseudo-escalares respectivamente. De la ec. (3.2), es fácil ver que la constante de acoplamiento $g_{VP_1P_2}$ es adimensional. Este resultado es útil para obtener las constantes $g_{\rho\pi\pi}$ y $g_{\rho'\pi\pi}$ a partir de los datos experimentales para los anchos de decaimiento parciales disponibles, este es el caso para el proceso de

decaimiento $\rho \rightarrow \pi \pi$ [169]. En el Cuadro 3.1 se muestran los valores para la constante de acoplamiento $g_{\rho\pi\pi}$ obtenidos a partir de dos diferentes procesos: $\rho^0(770) \rightarrow \pi^+ \pi^-$ y $\rho^+(770) \rightarrow \pi^+ \pi^0$ y su promedio pesado. El promedio pesado y sus incertidumbres esta definido en general como (ver revisión de estadística de Particle Data Group (PDG) [169]):

$$\bar{x} \pm \delta\bar{x} = \frac{\sum_i^n w_i x_i}{\sum_i^n w_i} \pm \left(\sum_i^n w_i \right)^{-1/2}, \quad (3.3)$$

donde x_i y $\delta\bar{x}$ son los i valores y errores de las i mediciones y $w_i = 1/(\delta x_i)^2$ es el i peso asociado con esta medición. Para este caso en específico, x_i se asocia a la constante de acoplamiento.

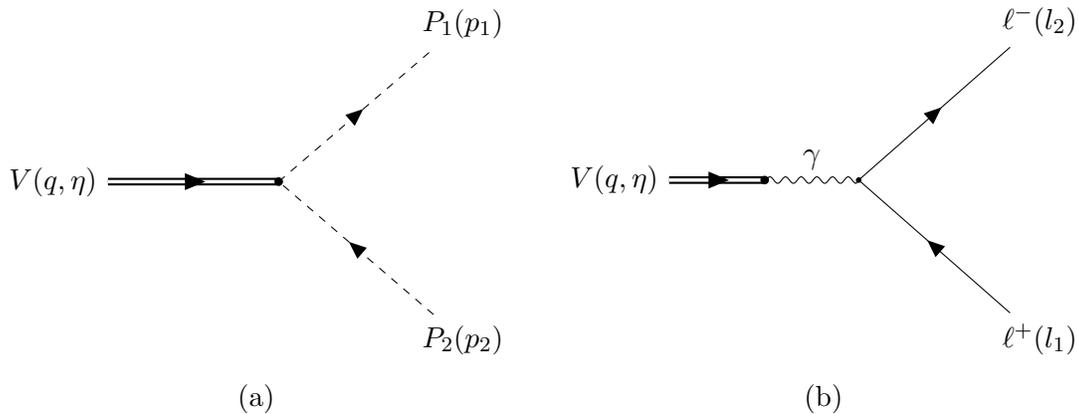


Figura 3.1: Decaimiento de un mesón vectorial de la forma (a) $V \rightarrow PP$ y (b) $V \rightarrow \ell\ell$

Para el mesón ρ' , el ancho de decaimiento parcial no esta establecido, así, se puede usar la ec. (3.2) y su anchura de decaimiento total de 400 MeV para establecer un límite superior del acoplamiento $g_{\rho'\pi\pi} \leq 6.64$ considerando que este puede ser el único modo de decaimiento. Es necesario aplicar esta restricción para establecer la región de búsqueda de este parámetro, tal cual se verá más adelante. El modo de decaimiento $\rho' \rightarrow \pi \pi$ puede ser también abordado de manera indirecta, considerándola como una parte de una cadena de descomposición. Por ejemplo, en el decaimiento $D_s \rightarrow \rho(1450) \pi$, donde el mesón $\rho(1450)$ se reconstruye utilizando el modo de decaimiento de dos piones, aunque para ello se requiere información adicional sobre otros acoplamientos [262].

Proceso	$g_{\rho\pi\pi}$
$\rho^0(770) \rightarrow \pi^+\pi^-$	5.944 ± 0.018
$\rho^+(770) \rightarrow \pi^+\pi^0$	5.978 ± 0.048
Promedio pesado	$\bar{g}_{\rho\pi\pi}$
	5.953 ± 0.017

Cuadro 3.1: Valores para el acoplamiento $g_{\rho\pi\pi}$ obtenidos a partir de los procesos neutro y cargado y el promedio pesado, $\bar{g}_{\rho\pi\pi}$.

3.2. Decaimiento $V \rightarrow \ell^+ \ell^-$: Acoplamiento g_V

La transición vector-fotón depende de la constante de acoplamiento g_V , descrita en la ec. (2.88). Esta puede ser extraída de la medición del ancho de decaimiento del proceso tipo $V \rightarrow \ell^+ \ell^-$, donde V es un mesón vectorial y ℓ puede tratarse de electrones o muones. La amplitud de este proceso, ilustrado en la Fig. 3.1(b), puede ser escrita como:

$$\mathcal{M} = -i \frac{e^2}{g_V} \bar{u}(l_1) \gamma^\nu v(l_2) \eta_\nu(q), \quad (3.4)$$

donde q , l_1 y l_2 son los cuádrimomentos del mesón vectorial inicial y el par de leptones en el estado final, respectivamente. Por otro lado, η_ν es el tensor de polarización de V , $\bar{u}(l_1)$ y $v(l_2)$ son los correspondientes espinores de los leptones. La expresión para el ancho de decaimiento $\Gamma_{V\ell\ell}$ está dada en términos de la constante de acoplamiento g_V , la masa del mesón vectorial m_V y la masa de los leptones m_ℓ como:

$$\Gamma_{V\ell\ell} = \frac{4\pi\alpha^2}{3g_V^2} \frac{(2m_\ell^2 + m_V^2)(m_V^2 - 4m_\ell^2)^{1/2}}{m_V^2}. \quad (3.5)$$

De la ecuación anterior, note que la constante de acoplamiento g_V es adimensional. En el Cuadro 3.2, se muestran los diferentes valores para la constante de acoplamiento g_V para un conjunto de mesones vectoriales, obtenidos a partir de los modos de decaimiento a un par de

muones y electrones. También note que se incluye el valor para la constante de acoplamiento $g_{\rho(1450)}$, obtenida a partir de la información dada en PDG [169] pero se cita solo un valor central, ya que la información experimental sólo proporciona una estimación de la anchura de decaimiento. Sería muy útil mejorar esta medida, aún así, este valor ayudará a orientar el análisis sobre este parámetro cuando se consideran a los procesos de dispersión. El promedio pesado para el acoplamiento \bar{g}_V que viene de los modos de decaimiento $V \rightarrow \mu^+ \mu^-$ y $V \rightarrow e^+ e^-$ se muestra en el Cuadro 3.3, considerando a los mesones $\rho(770)$, $\omega(782)$ y $\phi(1020)$.

Proceso	Acoplamiento	Valor
$\rho^0(770) \rightarrow e^+ e^-$	g_ρ	4.956 ± 0.021
$\rho^0(770) \rightarrow \mu^+ \mu^-$	g_ρ	5.037 ± 0.021
$\omega(782) \rightarrow e^+ e^-$	g_ω	17.058 ± 0.292
$\omega(782) \rightarrow \mu^+ \mu^-$	g_ω	16.470 ± 2.469
$\phi(1020) \rightarrow e^+ e^-$	g_ϕ	13.381 ± 0.216
$\phi(1020) \rightarrow \mu^+ \mu^-$	g_ϕ	13.674 ± 0.479
$\rho(1450) \rightarrow e^+ e^-$	$g_{\rho(1450)}$	13.528

Cuadro 3.2: Constante de acoplamiento g_V ($V = \rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $\rho(1450)$) obtenida a partir de los decaimientos a par de muones y electrones. Para la constante de acoplamiento $g_{\rho(1450)}$ se cita solo un valor central, ya que la información experimental sólo proporciona una estimación de la anchura de decaimiento.

Acoplamiento	Valor
\bar{g}_ρ	4.966 ± 0.021
\bar{g}_ω	16.972 ± 0.287
\bar{g}_ϕ	13.528 ± 0.339

Cuadro 3.3: Promedio pesado para las constantes de acoplamiento \bar{g}_V ($V = \rho, \omega, \phi$).

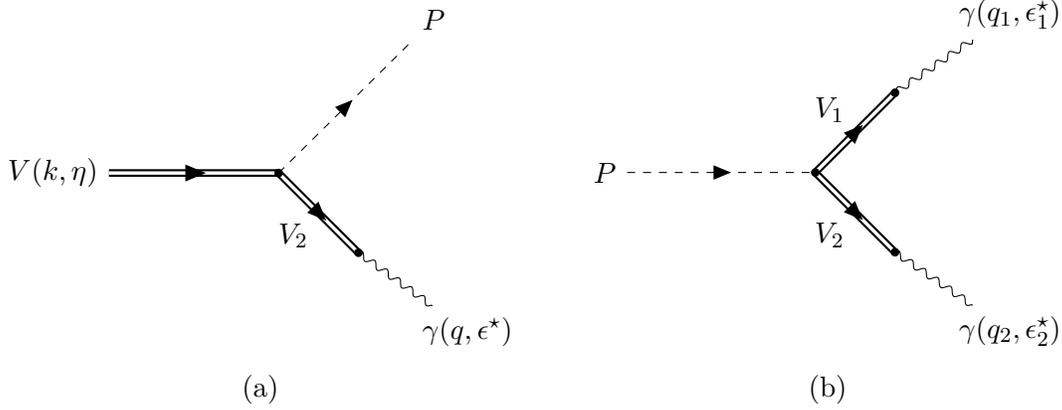


Figura 3.2: Decaimiento de un mesón vectorial en la forma (a) $V \rightarrow P \gamma$ y (b) $P \rightarrow \gamma \gamma$.

3.3. Decaimiento $V_1 \rightarrow P \gamma$: Acoplamiento $g_{V_1 P \gamma}$ y $g_{V_1 V_2 P}$

La constante de acoplamiento $g_{V_1 P \gamma}$ puede ser extraída del ancho de decaimiento del proceso $V_1 \rightarrow P \gamma$, donde nuevamente V_1 se refiere a un mesón vectorial, P a un mesón pseudo-escalar y γ al fotón. La amplitud de este proceso, ilustrado en la Fig. 3.2 (a), puede ser escrita como:

$$\mathcal{M} = i g_{V_1 P \gamma} \epsilon^{\beta \nu \alpha \mu} k_\beta q_\alpha \eta_\mu \epsilon_\nu^*, \quad (3.6)$$

donde k (η) y q (ϵ^*) son el cuadrimomento (tensor de polarización) de V_1 y γ , respectivamente. El ancho de decaimiento $\Gamma_{V_1 P \gamma}$ está dado en términos de la constante de acoplamiento $g_{P \gamma}$, la masa del mesón vectorial m_V y las masas de los mesones pseudo-escalares m_P ,

$$\Gamma_{V_1 P \gamma} = g_{V_1 P \gamma}^2 \left[\frac{(m_{V_1}^2 - m_P^2)^3}{96 \pi m_P^3} \right]. \quad (3.7)$$

Como se puede notar en la ec. 3.7, la constante de acoplamiento $g_{V_1 P \gamma}$ tiene unidades de energía inversa.

Por otra parte, el otro acoplamiento relacionado es uno donde dos mesones vectoriales interactúan con un mesón pseudo-escalar, denotado por $g_{V_1 V_2 P}$. Este puede ser obtenido a través del decaimiento radiativo de un mesón vectorial, visto previamente ($V_1 \rightarrow P \gamma$), conside-

rando que la emisión del fotón viene mediada por un mesón vectorial neutro [217] (Ver Fig. 3.2(a)). Luego, la amplitud y el ancho de decaimiento de este proceso son similares a los encontrados previamente en las ecs. (3.6) y (3.7), con el remplazo de la constante de acoplamiento $g_{V_1 P \gamma} \rightarrow g_{V_1 V_2 P} (e/g_{V_2})$. De aquí, se sigue que la constante de acoplamiento $g_{V_1 V_2 P}$ también tiene unidades de energía inversa, además, es importante mencionar que se utiliza a este parámetro en lo sucesivo. Luego, para el análisis, se han considerado los siguientes decaimientos, con sus respectivas combinaciones de carga: $\omega \rightarrow \pi \gamma$, mediado por el proceso de decaimiento $\omega \rightarrow \pi \rho \rightarrow \pi \gamma$; el decaimiento $\rho \rightarrow \pi \gamma$, mediado por el proceso de decaimiento $\rho \rightarrow \pi \omega (\phi) \rightarrow \pi \gamma$. Las contribuciones para el canal del mesón ϕ son relativamente pequeñas y despreciables a este nivel [263, 264] (la razón esperada para $g_{\rho\omega\pi}/g_\omega \approx 0.7$, la cual puede ser comparada con la razón $g_{\phi\rho\pi}/g_\phi \approx 0.06$, tomando el promedio pesado de la constante g_ϕ y, como una aproximación, $|g_{\phi\rho\pi}| = 0.86 \pm 0.01 \text{ GeV}^{-1}$, la cuál es obtenida a partir de la consideración del ancho de decaimiento del proceso de decaimiento $\phi \rightarrow 3 \pi$ para ser totalmente contabilizado por el canal $\rho \pi$) y las contribuciones de otros canales son relativamente pequeñas [259].

3.4. Decaimiento $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$: Acoplamientos $g_{P\gamma\gamma}$ y $g_{V_1 V_2 P}$

La constante de acoplamiento $g_{P\gamma\gamma}$ puede ser extraída de la medición del ancho de decaimiento $P \rightarrow \gamma \gamma$. La amplitud de este proceso, ilustrado en la Fig. 3.2 (b), puede ser escrita como:

$$\mathcal{M} = i g_{P\gamma\gamma} \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} q_{1\beta} q_{2\alpha} \epsilon_{1\mu}^* \epsilon_{2\nu}^*, \quad (3.8)$$

donde $q_1 (\eta_1^*)$ y $q_2 (\eta_2^*)$ son los cuadrimentos (tensor de polarización) de los fotones en el estado final, respectivamente.

La anchura de decaimiento $\Gamma_{P\gamma\gamma}$ puede ser escrita en términos de la constante de acopla-

miento $g_{P\gamma\gamma}$ y la masa del mesón pseudo-escalar m_P como:

$$\Gamma_{P\gamma\gamma} = \frac{g_{P\gamma\gamma}^2}{64\pi} m_P^3. \quad (3.9)$$

De la ecuación anterior, ec. (3.9), se puede notar que la constante de acoplamiento $g_{P\gamma\gamma}$ tiene unidades de energía inversa.

Por otra parte, la constante de acoplamiento $g_{V_1 V_2 P}$ puede relacionarse con este decaimiento considerando que la emisión de fotones está mediada por dos mesones vectoriales neutros, $\pi^0 \rightarrow \rho \omega (\phi) \rightarrow \gamma \gamma$ [217]. Entonces, la amplitud y el ancho de decaimiento de este proceso son similares a las mostradas en las ecs. (3.8) y (3.9) reemplazando $g_{P\gamma\gamma} \rightarrow g_{V_1 V_2 P} \frac{4\pi\alpha}{g_{V_1} g_{V_2}}$. En el Cuadro 3.4, se muestran los valores para la constante de acoplamiento $g_{\rho\omega\pi}$ que viene a partir de cuatro diferentes modos de decaimiento: $\omega(782) \rightarrow \pi^0 \gamma$, $\rho^0(770) \rightarrow \pi^0 \gamma$, $\rho^+(770) \rightarrow \pi^+ \gamma$ y $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$. Se han usado los diferentes valores para la constante de acoplamiento g_V listadas en el Cuadro 3.3, y se desprecia al canal $\rho - \phi$ en el decaimiento $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$. No se consideran los efectos de mezcla entre los estados $\pi^0 - \eta - \eta'$, aunque pueden ser relevantes en el análisis de observables de precisión [265, 269].

Proceso	$g_{\rho\omega\pi}$ (GeV ⁻¹)
$\omega(782) \rightarrow \pi^0 \gamma$	11.489 ± 0.387
$\rho^0(770) \rightarrow \pi^0 \gamma$	14.224 ± 2.227
$\rho^+(770) \rightarrow \pi^+ \gamma$	12.358 ± 1.806
$\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$	11.712 ± 1.397

Cuadro 3.4: Valores de la constante de acoplamiento $g_{\rho\omega\pi}$ obtenidos a partir de cuatro modos de decaimiento diferentes.

3.5. Decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$

En esta sección, ahora se considera al proceso de decaimiento $\omega(q, \eta) \rightarrow \pi^+(p_1) \pi^-(p_2) \pi^0(p_3)$, donde p_i se refiere a los cuadrimentos de los piones, q y η son el cuadrimento y el tensor

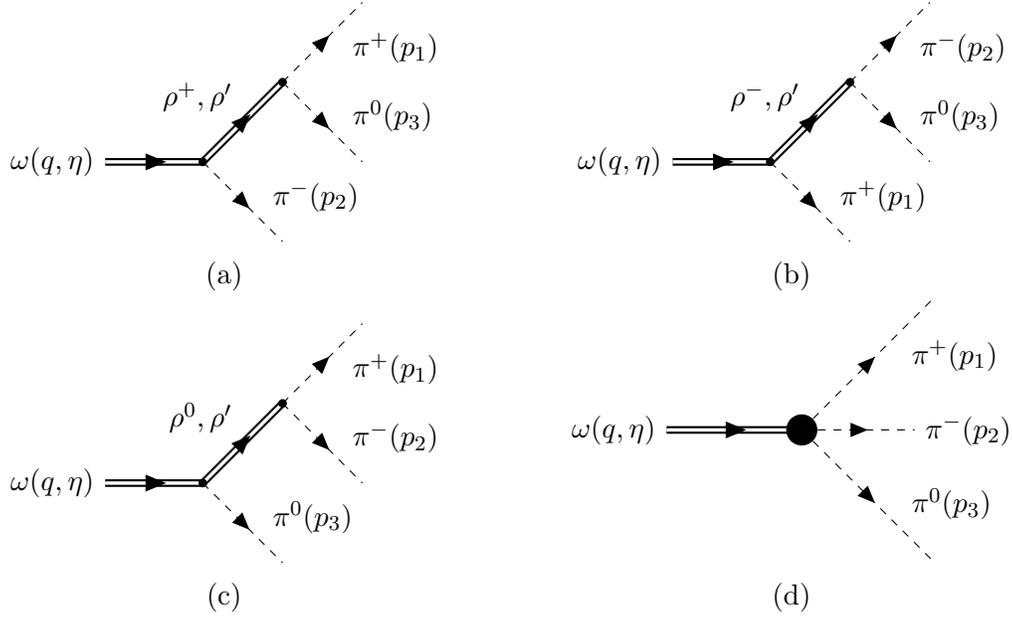


Figura 3.3: Diagramas de Feynman para el proceso $\omega \rightarrow 3\pi$. Se muestran los canales para los mesones ρ, ρ' (a, b, c) y el término de contacto (d).

de polarización del mesón ω , respectivamente. Es importante mencionar que este proceso puede recibir contribuciones de los mesones ρ, ρ' además de un término de contacto como se muestra en la Fig. 3.3. Así, la amplitud total de decaimiento puede ser escrita como:

$$\mathcal{M}_{\omega \rightarrow 3\pi} = i \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \eta^\mu p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \mathcal{A}(m_\omega^2), \quad (3.10)$$

donde $\mathcal{A}(m_\omega^2)$ esta definida de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(m_\omega^2) = & 6 g_{3\pi} + 2 g_{\omega\rho\pi} g_{\rho\pi\pi} (D_{\rho^0}[s_{12}] + D_{\rho^+}[s_{13}] + D_{\rho^-}[s_{23}]) \\ & + 2 g_{\omega\rho'\pi} g_{\rho'\pi\pi} (D_{\rho'^0}[s_{12}] + D_{\rho'^+}[s_{13}] + D_{\rho'^-}[s_{23}]), \end{aligned} \quad (3.11)$$

con $s_{ij} = p_i + p_j$ y $D_V[p] = 1/(p^2 - m_V^2 + i m_V \Gamma_V)$. Por otra parte, los factores 6 y 2 en la expresión para $\mathcal{A}(m_\omega^2)$ vienen de permutaciones cíclicas y la conservación de cuadrimento utilizado para llevar la amplitud a la forma actual. La notación es explícita para poder denotar a las contribuciones asociadas a los mesones ρ y ρ' . Por otro lado, el ancho de decaimiento se obtiene a partir de la integración del espacio fase completo a tres cuerpos

[169] (Ver Apéndice C). Sin embargo, mientras que para un solo decaimiento este proceso no genera un mayor problema, la inclusión en un análisis numérico que involucra a más procesos requiere de un enfoque práctico para agilizarlo. Entonces, dado que se está interesado en las constantes de acoplamiento (masas y anchos de decaimiento son tomados a su valor nominal), el ancho de decaimiento puede ser descompuesto como un polinomio de las constantes de acoplamiento como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega 3\pi} = & A_1 g_{3\pi}^2 + A_2 g_{\omega\rho\pi}^2 g_{\rho\pi\pi}^2 + A_3 g_{3\pi} g_{\omega\rho\pi} g_{\rho\pi\pi} + A_4 g_{\omega\rho'\pi}^2 g_{\rho'\pi\pi}^2 \\ & + A_5 g_{\omega\rho'\pi} g_{3\pi} g_{\rho'\pi\pi} + A_6 g_{\omega\rho'\pi} g_{\omega\rho\pi} g_{\rho\pi\pi} g_{\rho'\pi\pi}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde los coeficientes A_i pueden ser identificados con la parte correspondiente al ancho de decaimiento para los acoplamientos involucrados, y se calculan siguiendo la definición para el ancho de decaimiento a tres cuerpos dada en PDG [169]. Los acoplamientos implicados en el lado derecho de la ec. (3.12) asociados al mesón ρ' no están establecidos, ni teórica ni experimentalmente. Por otra parte, los estudios sobre el valor de $|g_{\omega\rho'\pi}|$ han encontrado un rango de valores entre 10 a 18 GeV^{-1} [217, 270]. La magnitud para el acoplamiento de contacto en la literatura tiene diferentes aproximaciones y también se encuentra en un amplio rango de valores entre 29 a 123 GeV^{-3} [217, 223-225, 271, 272].

Más adelante, se demostrará que la aproximación en la que sólo se considera al canal del mesón ρ requiere un valor grande para la constante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$ en comparación con las estimaciones anteriores que consideraban decaimientos radiativos. de hecho, este resultado fue el que motivo a incluir las contribuciones del mesón $\rho(1450)$ y el término de contacto.

3.6. Sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$

La sección eficaz para el proceso $e^+(k_+)e^-(k_-) \rightarrow \omega(q) \rightarrow \pi^+(p_1)\pi^-(p_2)\pi^0(p_3)$ se obtiene bajo la misma aproximación dada anteriormente en la Sección 3.5, es decir, siguiendo la

misma notación para los cuádrimomentos de los piones, solo que ahora se tiene una energía $q^2 = (k_+ + k_-)^2$ en lugar de m_ω^2 . La amplitud para el canal del mesón ω puede escribirse como:

$$\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow 3\pi} = \frac{e}{q^2} \frac{m_\omega^2}{g_\omega} D_\omega(q) \mathcal{A}(q^2) \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma l^\mu \quad (3.13)$$

donde e es la carga eléctrica del positrón, l^μ es la corriente leptónica definida por la expresión:

$$e^-(k_-) \quad e^+(k_+) \quad \mu \quad \gamma \rightarrow l^\mu = -i e \bar{v}(k_+) \gamma^\mu u(k_-). \quad (3.14)$$

Por otro lado, $\mathcal{A}(q^2)$ fue definida anteriormente en la ec. (3.11), pero ahora está dada como función de la energía q^2 .

Siguiendo el mismo enfoque que para el caso del decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$, se hace una expansión de la sección eficaz en términos de las constantes de acoplamiento y coeficientes evaluados a las energías correspondientes reportadas por los diferentes experimentos, la cual queda definida por la expresión:

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi) = & \frac{1}{g_\omega^2} \left(B_1 g_{3\pi}^2 + B_2 g_{\omega\rho\pi}^2 g_{\rho\pi\pi}^2 + B_3 g_{3\pi} g_{\omega\rho\pi} g_{\rho\pi\pi} + B_4 g_{\omega\rho'\pi}^2 g_{\rho'\pi\pi}^2 \right. \\ & \left. + B_5 g_{\omega\rho'\pi} g_{3\pi} g_{\rho'\pi\pi} + B_6 g_{\omega\rho'\pi} g_{\omega\rho\pi} g_{\rho\pi\pi} g_{\rho'\pi\pi} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

Los coeficientes B_i son calculados una sola vez en cada punto de energía de los datos experimentales, usando la descripción cinemática dada en la Ref. [273] (Ver Apéndice C), e implementada en un programa Fortran en conjunto con la subrutina de integración Vegas [246]. Para este caso, se consideraron los datos experimentales de SND [251], que a su vez utilizan los datos de DM2 para ampliar su alcance hasta 2 GeV y donde se encuentran

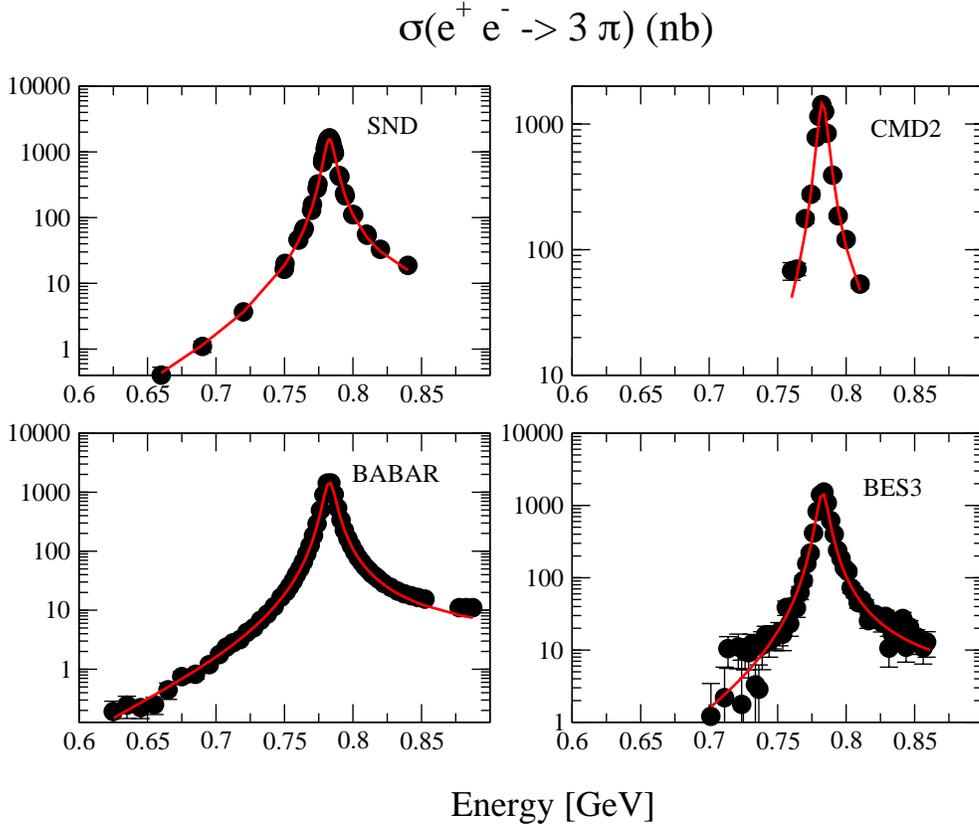


Figura 3.4: Datos experimentales para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$ (símbolos) de SND [251], CMD2 [92], BABAR [88] y BESII [252]. Se muestra el correspondiente resultado (línea sólida) a partir de usar los valores obtenidos para los parámetros involucrados en este análisis, Cuadro 3.6.

evidencias del modo de decaimiento $\rho \rightarrow 3\pi$, con un valor para la fracción de decaimiento de 10^{-4} , por lo que su pequeñez justifica la decisión de no considerarlo en este análisis. Otra consideración es que se tomó un rango de energía hasta alrededor de 0.82 GeV, esto para evitar la contribución del mesón ϕ . Los datos de CMD2 [92] actualizaron la medición anterior [255] con el objetivo de incluir a las contribuciones que faltaban en el rango de energía de 0.76 a 0.821 GeV, en ese caso no realizaron un análisis espectral.

Para los datos de BABAR [88], se considera un rango de energía por debajo de 0.9 GeV para evitar la contribución, otra vez, del mesón ϕ . También encuentran que la fracción de decaimiento del modo $\rho \rightarrow 3\pi$ es del orden de 10^{-4} . Por otro lado, se dispone de datos

preliminares de BESIII [252] en un rango de energía de 0.7-3 GeV, por coherencia con el enfoque del análisis, se han restringido a consideración estos datos a energías por debajo de 0.8 GeV. Nótese que estos cortes en el valor superior de la energía no son los mismos para todos los experimentos debido a sus diferentes agrupaciones energéticas. Sin embargo, se ha verificado que el valor superior de energía considerado en esta región no afecta a los resultados.

3.7. Sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow \omega \pi^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$

Para hacer la descripción de esta parte del trabajo, la notación utilizada para este proceso es: $e^+(k_+) e^-(k_-) \rightarrow \pi^0(p_1) \pi^0(p_2) \gamma(p_3, \eta^*)$, donde las variables entre paréntesis representan a los correspondientes cuádrimomentos y η^* representa al tensor de polarización del fotón. El proceso es ilustrado por los diagramas en la Fig. 3.5, en la que ambos, ρ y ρ' , se consideran como estados intermedios. Otras contribuciones como la del mesón ϕ o escalares no se consideran en esta etapa, aunque pueden ser relevantes para estimaciones de observables de precisión, por ejemplo: el momento dipolar magnético del muón [269, 274].

La amplitud del diagrama (a), Fig. 3.5, puede escribirse como:

$$\mathcal{M}_{(a)} = \frac{e^2}{q^2} \left(C_{\rho^0} + e^{i\theta} C_{\rho'} \right) D_\omega(q - p_1) \epsilon_{\mu\sigma\epsilon\lambda} q^\sigma (q - p_1)^\epsilon \epsilon_{\alpha\beta\nu\lambda} (q - p_1)^\alpha p_3^\beta \eta^{*\nu} l^\mu, \quad (3.16)$$

donde la parte leptónica l^μ del proceso es exactamente la misma que la mostrada en la ec. (4.30), además, se han definido a los factores globales,

$$C_{\rho^0} = \left(\frac{g_{\omega\rho\pi}}{g_\rho} \right)^2 m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}(q), \quad C_{\rho'} = \frac{g_{\omega\rho'\pi} g_{\omega\rho\pi}}{g_\rho g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}(q), \quad (3.17)$$

con una fase relativa $e^{i\theta}$ entre ambos canales. Note que la amplitud para el diagrama (b), Fig. 3.5, considera el intercambio de piones neutros, respecto al diagrama (a), Fig. 3.5. Así, su amplitud tiene exactamente la misma estructura que la amplitud $\mathcal{M}_{(a)}$ y queda definida

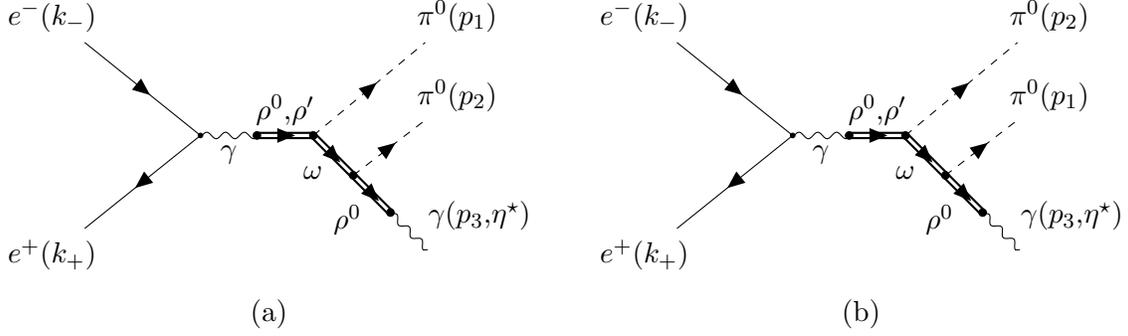


Figura 3.5: Diagramas de Feynman para el proceso $e^+ e^- \rightarrow \omega \pi \rightarrow \pi \pi \gamma$.

bajo el intercambio de los cuadrimomentos $p_1 \leftrightarrow p_2$.

Luego, usando nuevamente la descripción cinemática dada en la Ref. [273] (Ver Apéndice C), la sección eficaz se establece, en términos de los acoplamientos implicados, como:

$$\begin{aligned} \sigma(e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \gamma) &= C_1 \left(\frac{g_{\omega\rho\pi}}{g_\rho} \right)^4 + C_2 \left(\frac{g_{\omega\rho\pi}}{g_\rho} \frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\rho'}} \right)^2 C_2 \\ &+ \left(C_3 \cos(\theta) - C_4 \sin(\theta) \right) \left(\frac{g_{\omega\rho\pi}^3}{g_\rho^3} \frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\rho'}} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para este caso, se han considerado los datos experimentales para tres diferentes mediciones de la colaboración SND [250, 253, 254], aunque estas últimas, Ref. [250], son una actualización de las anteriores, la cuales son útiles para ilustrar el comportamiento de las constantes de acoplamientos, incluso en aquellos casos en los que faltan algunas correcciones. Los datos experimentales de la colaboración CMD2 [255] también están disponibles y se han utilizado en este análisis. Uno se puede beneficiar del correspondiente análisis que los experimentos llevaron a cabo, identificando la región de parámetros favorecida a partir de su propio ajuste. En particular, se espera que la fase relativa sea grande ($\theta = 122 \pm 8^\circ$ en Ref. [250]), y la introducción del parámetro $A_1 \equiv \left(\frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\omega\rho\pi}} \right) \left(\frac{g_\rho}{g_{\rho'}} \right)$ para describir el proceso, en lugar de los parámetros individuales (no confundir con el coeficiente A_1 de la ec. (3.12)). Al considerar a este último como una restricción para las constantes de acoplamiento individuales, y buscando también el valor más favorable, usando los análisis experimentales como guía, se esperaba que el valor estuviera alrededor de $A_1 \approx 0.2$.

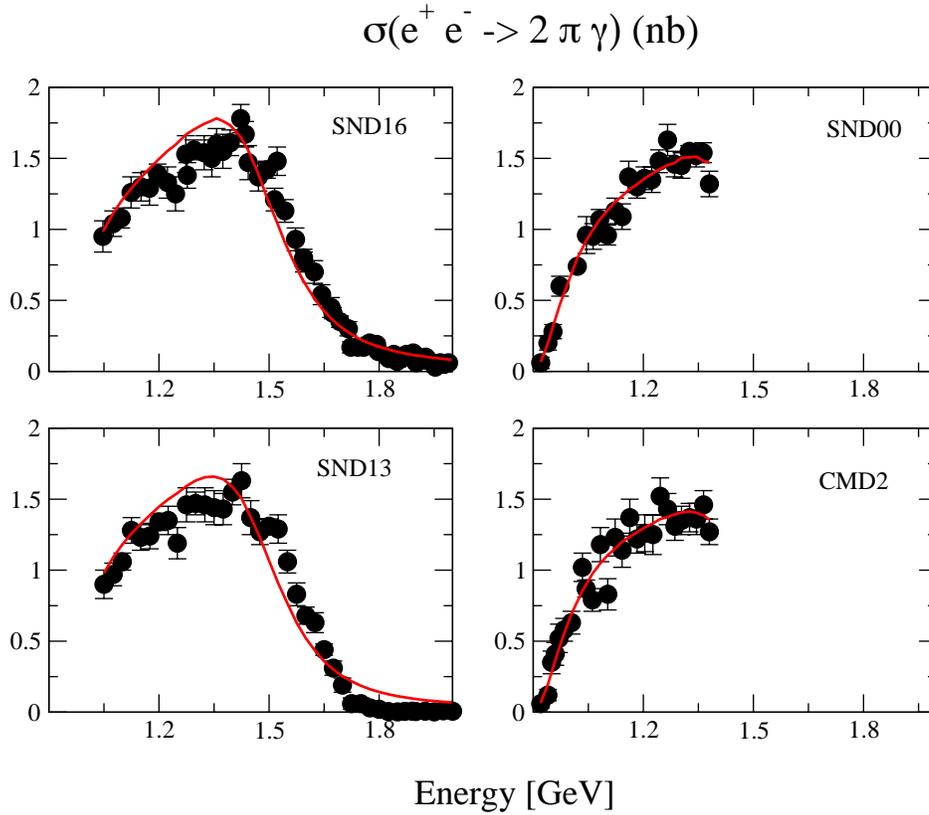


Figura 3.6: Datos experimentales para la sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ (símbolos) de SND (SND00 [253], SND13 [254] y SND16 [250]) y CMD2 [255]. Los correspondientes resultados (línea sólida) fueron obtenidos usando los valores encontrados para los parámetros involucrados en este análisis, Cuadro 3.7.

3.8. Análisis χ^2 . Resultados

Para determinar los acoplamientos hadrónicos de los mesones de baja energía y del mesón ρ' , a partir de los procesos descritos anteriormente, se realizó un ajuste a varios conjuntos de datos experimentales disponibles en la literatura utilizando la paquetería MINUIT. La

función χ^2 a minimizar se define por:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \mu(x_i; \theta))^2}{E_i^2}, \quad (3.19)$$

donde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ son los parámetros a determinar; y_i y E_i son los datos experimentales y su correspondiente incertidumbre. Por otro lado, $\mu(x_i; \theta)$ son las estimaciones teóricas para los correspondientes parámetros.

Parámetro	Valor
$g_{\rho\pi\pi}$	5.9485 ± 0.0536
g_ρ	4.9619 ± 0.0661
g_ω	17.038 ± 0.603
$g_{\omega\rho\pi}$ (GeV ⁻¹)	11.575 ± 0.438

Cuadro 3.5: Valores para las constantes de acoplamiento encontrados a partir del ajuste de 10 modos de decaimiento diferentes descritos en el texto.

En un primer paso, se han determinado los parámetros del modelo que involucra a los mesones ligeros, a partir de diez modos de decaimiento insensibles al mesón $\rho'(1450)$, a saber: los modos de decaimiento neutro y cargado para $\rho \rightarrow \pi\pi$, los modos $\rho^0 \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, $\omega \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$, los modos de decaimiento neutro y cargado para $\rho \rightarrow \pi\gamma$ y $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, usando la información experimental para los diferentes anchos de decaimiento y masas de las partículas involucradas listadas en PDG [169]. En estos procesos intervienen cuatro parámetros: g_ρ , $g_{\rho\pi\pi}$, g_ω y $g_{\omega\rho\pi}$. En el Cuadro 3.5 se muestra el resultado del ajuste. El valor de la función de minimización por grado de libertad (*dof*) es $\chi^2/dof = 0,32$. La correlación entre los parámetros es mostrada en la Fig. 3.7 como un mapa de calor. La grande correlación entre g_ω y $g_{\omega\rho\pi}$ se debe al hecho de que este conjunto de observables implica tanto la interacción $\omega - \rho - \pi$ como la transición ω -fotón combinadas. Luego, se incluyó al modo de decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$ para mostrar la fuerte modificación del parámetro $g_{\omega\rho\pi}$ previamente obtenido, el cuál pasa a tener un valor de $g_{\omega\rho\pi} = 14.572 \pm 0.22$ y un $\chi^2/dof \gg 1$, lo que

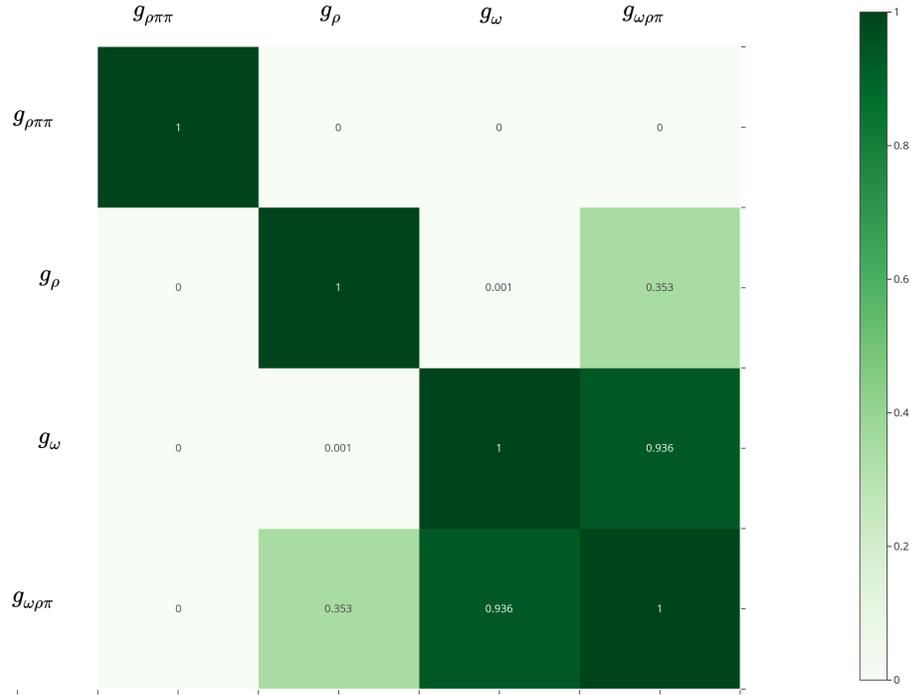


Figura 3.7: Matriz de correlación para las constantes de acoplamiento $g_{\rho\pi\pi}$, g_ρ , g_ω y $g_{\omega\rho\pi}$ a partir de 10 modos de decaimiento, ver el texto para los detalles.

muestra una inconsistencia y por tanto, la necesidad de ampliar la descripción incorporando las contribuciones del mesón $\rho(1450)$ y un término de contacto como prescribe la anomalía WZW. Una vez incluidas estas contribuciones, se obtiene un valor de $g_{\omega\rho\pi} = 11.576 \pm 0.463$, el cual está de acuerdo con los resultados obtenidos anteriormente. A partir de aquí, ésta fue la forma de describir al decaimiento del mesón ω , y a este conjunto de datos se denotaron como los 11 modos de decaimiento.

En un segundo paso, se incorporaron los datos experimentales para las secciones eficaces de los procesos $e^+, e^- \rightarrow 3\pi$ (medidos por SND [251], CMD2 [92], BABAR [88] y BESIII [252]) y $e^+, e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ (medidos por SND [250, 253, 254] y CDM2 [255]), esto para poder restringir aún más la región de validez de los parámetros del mesón $\rho(1450)$. Las restricciones globales de otras mediciones, como la mencionada A_1 y el límite superior para el parámetro

$g_{\rho'\pi\pi}$, se incorporan estableciendo una región consistente para la búsqueda de los parámetros en el proceso de minimización. En particular, se obtiene que $A_1 = 0.125 \pm 0.05$.

Parámetro	Valor
$g_{\rho\pi\pi}$	5.9486 ± 0.0755
g_ρ	4.9622 ± 0.0928
g_ω	16.652 ± 0.4726
$g_{\omega\rho\pi}$ (GeV ⁻¹)	11.314 ± 0.383
$g_{\rho'\pi\pi}$	5.4999 ± 1.0597
$g_{\omega\rho'\pi}$ (GeV ⁻¹)	3.4774 ± 0.96262
$g_{3\pi}$ (GeV ⁻³)	-54.338 ± 6.6739
$g_{\rho'}$	12.918 ± 1.1907
θ (in π units)	0.8715 ± 0.0512

Cuadro 3.6: Valores para los parámetros obtenidos a partir del ajuste de 11 modos de decaimiento y todos los datos experimentales para las secciones eficaces.

Parámetro	Valor
$g_{\rho\pi\pi}$	5.9484 ± 0.0668
g_ρ	4.9618 ± 0.0819
g_ω	16.907 ± 0.6625
$g_{\omega\rho\pi}$ (GeV ⁻¹)	11.486 ± 0.4951
$g_{\rho'\pi\pi}$	4.5103 ± 1.0371
$g_{\omega\rho'\pi}$ (GeV ⁻¹)	3.1363 ± 1.7702
$g_{3\pi}$ (GeV ⁻³)	-53.612 ± 6.8932
$g_{\rho'}$	12.472 ± 1.2437
θ (in π units)	0.8697 ± 0.0452

Cuadro 3.7: Valores para los parámetros obtenidos a partir del ajuste de 11 modos de decaimiento y los datos experimentales de la sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$.

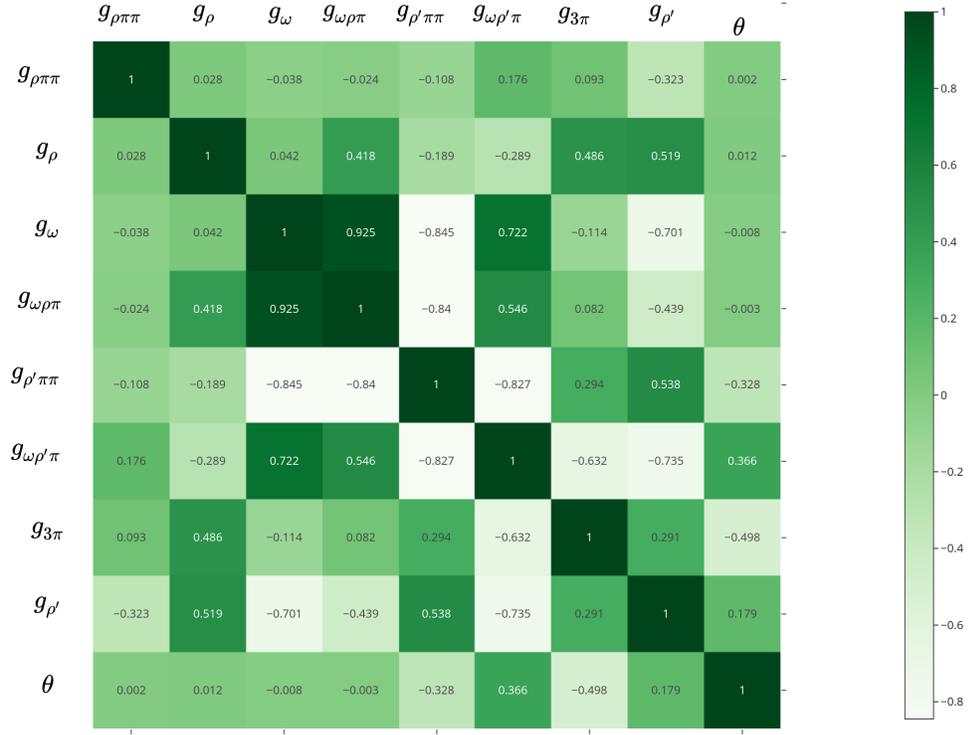


Figura 3.8: Matriz de correlación para las constantes de acoplamiento considerando 11 modos de decaimiento y los datos experimentales de la sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$. Ver el texto para los detalles.

En el Cuadro 3.7, se muestran los valores para las constantes de acoplamiento cuando se consideran los 11 modos de decaimiento más los datos experimentales de la sección eficaz del proceso $e^+, e^- \rightarrow \pi^0, \pi^0, \gamma$, y en el Cuadro 3.6, se muestran los resultados cuando se añaden los datos experimentales para la sección eficaz del proceso $e^+, e^- \rightarrow 3\pi$. Las matrices de correlación correspondientes se muestran también como mapas de calor en las Figs. 3.8 y 3.9, respectivamente.

Para resumir los resultados, en la Fig. 3.10 se representan los valores para las diferentes constantes de acoplamiento en función del conjunto de datos considerados para la minimización (eje x). Además, en la Fig. 3.11 también se muestra el comportamiento de la fase relativa θ . La variable $x = 1$ considera al conjunto de datos de los diez modos de decaimientos mencio-

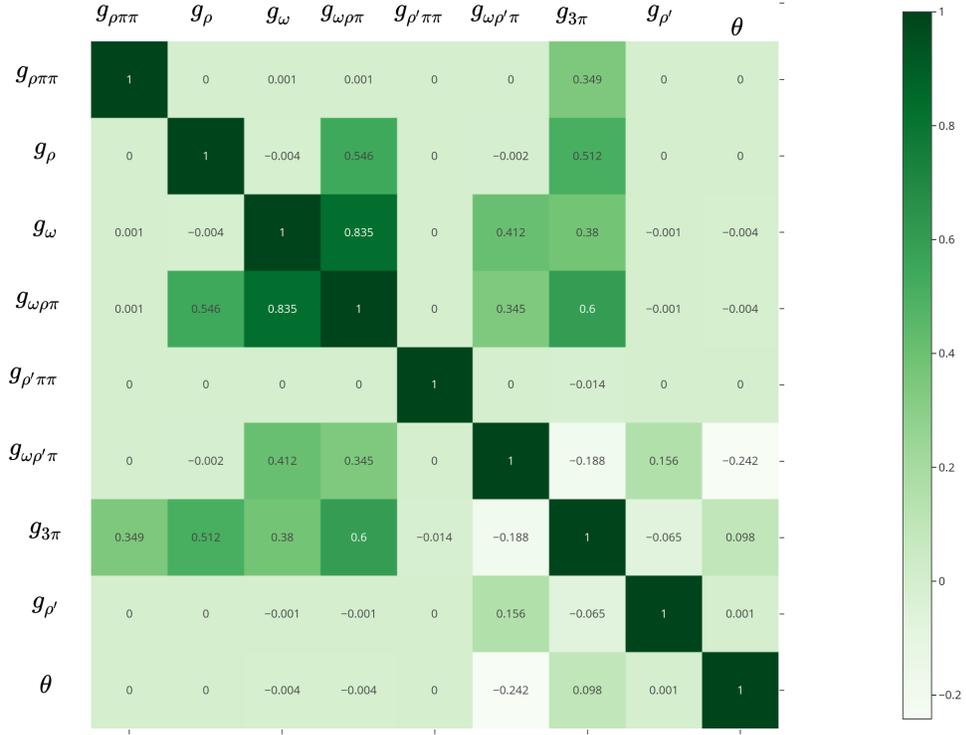


Figura 3.9: Matriz de correlación para las constantes de acoplamiento considerando 11 modos de decaimiento y los datos experimentales de las secciones eficaces de los procesos $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ y $e^+ e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$. Ver el texto para los detalles.

nados anteriormente, obsérvese que sólo cuatro constantes implicadas se muestran con un símbolo; la variable $x = 2$ considera al conjunto de datos de los diez modos de decaimiento más el decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$, considerando sólo al canal del mesón ρ como estado intermedio; la variable $x = 3$ considera al conjunto de datos de los 11 modos de decaimiento como se ha descrito anteriormente; los parámetros considerados en las variables $x = 4, \dots, 11$, son los resultados correspondientes cuando se añaden los datos experimentales de las secciones eficaces individuales a los 11 modos de decaimiento. A saber: $e^+, e^- \rightarrow 3\pi$ de SND [251] ($x = 4$), CMD2 [92] ($x = 5$), BABAR [88] ($x = 6$) y BES III [252] ($x = 7$), y $e^+, e^- \rightarrow \pi^0, \pi^0, \gamma$ de SND [253] ($x = 8$), [254] ($x = 9$), [250] ($x = 10$) y CMD2 [255] ($x = 11$). La variable para $x = 12$ se deja vacía y $x = 13$ corresponde a incluir todos los datos. En aras de clarificar la

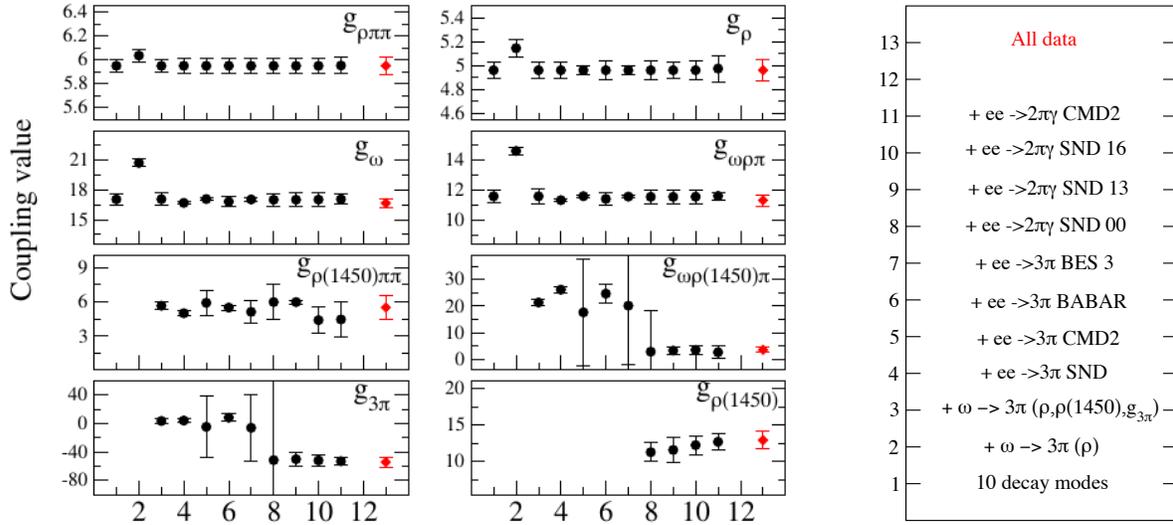


Figura 3.10: Acoplamientos involucrados en el análisis con sus correspondientes errores como una función de un conjunto de datos considerados en el ajuste, para mostrar las variaciones en función de las mismas además se muestra el correspondiente etiquetado del eje x . En 2 y 3, el símbolo (+) significa la adición del caso 1 (es decir, 10 modos de decaimiento). De 4 a 11, el símbolo (+) significa la adición del caso 3 (es decir, 11 modos de decaimiento). En los casos 4 a 11, el símbolo (+) significa la adición del caso 3 (es decir, más 11 modos de desintegración).

descripción anterior, en las Figs. 3.10 y 3.11 también se muestra la descripción y etiquetado de los mismos, el cuál es correspondiente al eje x de las figuras antes mencionadas. La ausencia de datos para los parámetro en cualquiera de estos valores de x significa que este último no depende de el.

Finalmente, es importante mencionar que los resultados encontrados en este Capítulo son de alta relevancia para el desarrollo del Cap. 4 y Cap.5, ya que serán utilizados para encontrar y describir ciertas observables de diferentes procesos. Primeramente, como una aplicación inmediata de los resultados, en el Cap. 4, Sección 4.5, se hace el cálculo la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ a través del llamado canal del mesón $\omega(782)$, lo cual lleva a una comparación directa del resultado teórico obtenido con los datos experimentales reportados por BABAR [17] para este proceso. Sin embargo, es importante mencionar que no se consideran los datos experimentales más recientes medidos por SND [256], ya que no se proporcionan explícitamente. Este proceso ha sido considerado en estudios previos para

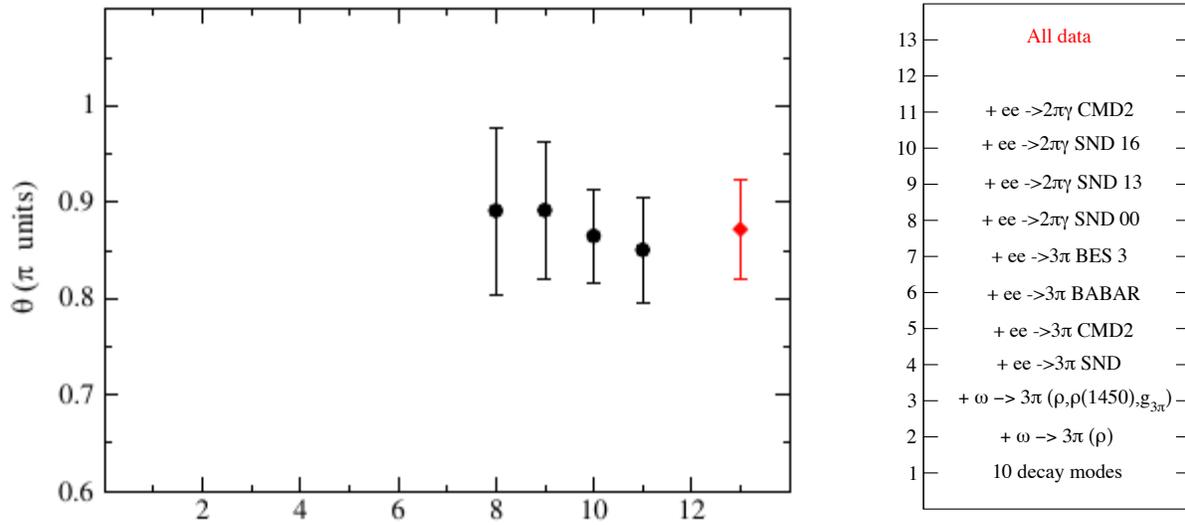


Figura 3.11: En la Figura se muestra el comportamiento de la fase relativa θ como una función del conjunto de datos considerados en el ajuste de datos junto al correspondiente etiquetado para el eje x , análogo al mostrado en la Fig. 3.10. En 2 y 3, el símbolo (+) significa la adición del caso 1 (es decir, 10 modos de decaimiento). De 4 a 11, el símbolo (+) significa la adición del caso 3 (es decir, 11 modos de decaimiento). En los casos 4 a 11, el símbolo (+) significa la adición del caso 3 (es decir, más 11 modos de desintegración).

probar la viabilidad de los modelos y dar cuenta de los datos observados. También es importante mencionar que dichos resultados encontrados hasta el momento son relevantes para la evaluación de la sección eficaz total del proceso e^+e^- a 4π , necesaria para la determinación indirecta del momento dipolar magnético del mesón ρ [15] y estudiar los efectos de ruptura de la simetría de isospín en comparación con su análogo a partir de decaimientos del leptón τ^- [275, 276]. Además, estos resultados son utilizados en la descripción del proceso radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ desarrollado en el Cap. 5 y en la obtención de ciertas observables.

Capítulo 4

Momento dipolar magnético del mesón ρ (770).

El siguiente capítulo está organizado de la siguiente manera: Primeramente se hace una breve introducción del vértice electromagnético $\rho^+\rho^-\gamma$ y su estructura multipolar. Luego, bajo VMD se hace la descripción de los diferentes canales para la descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$. La determinación indirecta del momento dipolar magnético del mesón ρ se hace a partir de dejar a la sección eficaz total del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ como una función de este parámetro libre, el cual se debe ajustar a los datos experimentales proporcionados por BaBar [17]. Finalmente se discuten algunos de los resultados obtenidos.

4.1. Introducción

Para nuestra comprensión de la estructura de la interacción fuerte, los factores de forma electromagnéticos tienen una importancia fundamental ya que constituyen una herramienta importante para comprender la estructura de los estados ligados en QCD. La precisión de los datos experimentales modernos ha renovado el interés por estudiar el mecanismo de interacción de los quarks dentro de los hadrones. Los mesones del sector ligero, formados por los quarks ligeros u y d , son de interés, especialmente el estudio de las propiedades electro-

magnéticas de los mesones π y ρ , porque son los estados ligados más simples. Sin embargo, la situación experimental es bastante diferente ya que, por un lado, las propiedades de los piones están bien establecidas por los experimentos mientras que los datos experimentales sobre el mesón ρ son escasos dado que su vida media $\sim 4.5 \times 10^{-24}$ s es muy corta, por lo que las medidas directas de sus propiedades electro-débiles sean casi imposibles de realizar. Por otro lado, hoy en día existe una gran variedad de trabajos que toman en consideración las propiedades electro-débiles del mesón ρ , obteniendo así mucha información teórica mientras que la base experimental sigue siendo escasa. En la Introducción de este trabajo de tesis, se mencionaron diferentes tipos de trabajos teóricos basados en diferentes modelos efectivos para QCD (Ver Cuadro 1.2), y cuya particularidad es que en todos se obtiene el valor para el momento dipolar magnético del mesón ρ . Por ejemplo: los basados en mecánica cuántica relativista (RQM) y derivados [136-145], las aproximaciones basadas en la ecuación de Dyson-Schwinger [156, 158, 160, 162, 164, 166], la forma puntual de la mecánica cuántica invariante de Poincaré (PiQM) [167], en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio [146-148], reglas de suma de QCD [149, 150], diagramas de Feynmann en el formalismo del frente de luz [151], el modelo de bolsa [152], el modelo compuesto relativista (RCQM) [153], el modelo Hamiltoniano relativista [154], una teoría de campo efectivo de baja energía (EFT) [144], cálculos de QCD en lattice [157, 159, 161, 163, 165].

Por otra parte, justo como se hace en la Ref. [15], existe la posibilidad de obtener el MDM del mesón ρ de manera indirecta a partir de los datos experimentales para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$. Usando datos preliminares de la Colaboración BABAR [16], se encontró un valor para el MDM de ρ de $\mu_\rho^{\text{exp}} = 2.1 \pm 0.5$ en unidades de $[e/2m_\rho]$. Sin embargo, recientemente la colaboración BABAR presentó [17] nuevos datos experimentales para la el proceso mencionado. Por lo que es necesario, como lo mencionan los autores de la Ref. [136], un nuevo procesamiento de los datos que permita aumentar la precisión para el valor de μ_ρ extraído de los datos experimentales. Por está razón, en este capítulo se presenta

el reanálisis del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$, siguiendo el enfoque de VMD usado en la Ref. [15], pero ahora usando los datos experimentales más recientes publicados por la colaboración BABAR [17]. La descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ esta determinada por una serie de canales que involucran a los mesones $\rho(770)$, $\rho(1450)$, $\omega(782)$, $a_1(1260)$, $\sigma(600)$, $f_0(980)$ y π y por ende, la descripción del proceso es fuertemente dependiente de una serie de constantes de acoplamiento que involucra a estos mesones. Muchos de estos acoplamientos ya han sido determinados previamente en el Cap. 3, por lo que se toman directamente sus correspondientes valores numéricos. Sin embargo, la inclusión de los mesones a_1 , σ y f_0 involucra una fuente de incertidumbre dada la falta de información experimental, por lo que es necesario hacer ciertas hipótesis, que se irán describiendo a lo largo de este capítulo, para los valores de sus correspondientes constantes de acoplamiento.

4.2. Vértice electromagnético para una partícula Vectorial

Como se ha mencionado con anterioridad en el Cap. 2, Sub-sección 2.2.4, los bosones de norma W^\pm , Z^0 tienen autointeracciones que son características de la teoría de norma no abeliana. Para el caso del bosón W^\pm , la producción de pares viene dada principalmente mediante el proceso $e^+e^- \rightarrow W^-W^+$ a través de tres diagramas a nivel árbol, Fig. 4.1. La contribución tradicional (a) por sí sola, da una sección eficaz que crece en función de la energía del centro de masa s y viola la unitariedad a altas energías, por lo que son necesarios nuevos procesos (Fig. 4.1 (b)-(c)). El proceso con acoplamiento no lineal del bosón W con el fotón γ y el bosón Z funciona de tal manera que cancela estos problemas a altas energías s haciendo que la sección eficaz decrezca lentamente (logarítmicamente). Por lo tanto, la comparación de la sección eficaz medida del proceso $e^-e^+ \rightarrow W^-W^+$ con la teoría es una excelente prueba de la existencia del triple acoplamiento de norma (abreviado TGC por sus siglas en inglés) y de su magnitud. Los datos de PDG [169] concuerdan bastante bien con la

predicción teórica [277, 278] y confirman la existencia del TGC. En la teoría, existe un cuarto diagrama mediado por el bosón de Higgs. Sin embargo, experimentalmente no es necesario considerarlo, ya que que el acoplamiento del bosón de Higgs con el fermión es proporcional a la masa del fermión y a la energía de producción del par de bosones W , existe un factor m_e^2/m_W^2 que reduce su contribución a un nivel despreciable.

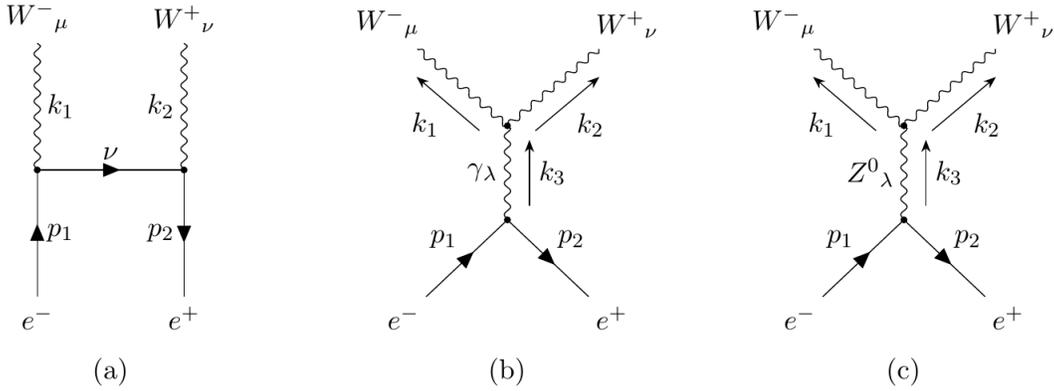


Figura 4.1: Diagramas de Feynman para el proceso $e^-e^+ \rightarrow W^-W^+$. (a) Corriente cargada, (b) Electromagnética y (c) Corriente neutra. Los sufijos μ , ν y λ denotan los estados de polarización de los bosones vectoriales.

Las amplitudes de Feynman para los acoplamiento $\gamma - f f$ y $\gamma \rightarrow W^+W^-$ vienen dadas en las ecs. (2.34) y (2.41), descritas con anterioridad en el Cap. 2, en las Sub-secciones 2.2.3 y 2.2.4 respectivamente. Por lo que, la amplitud para el vértice $W W V$ ($V = \gamma, Z$) puede escribirse como:

$$\langle f | i \mathcal{L}_{WWV} | i \rangle = i g_V [g_{\mu\nu} (k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda} (k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu} (k_3 - k_1)_\nu]$$

$$g_V = e \quad \text{for } V = \gamma \tag{4.1}$$

$$g_V = e \cot \theta_W \quad \text{for } V = Z.$$

Esta forma es muy restrictiva, ya que define la estructura del TGC y su intensidad de forma única. Sin embargo, la Lagrangiana más general para el triple acoplamiento de bosones de

norma en la literatura [279-283], consistente con la invariancia Lorentz, se expresa como:

$$\begin{aligned}
i \mathcal{L}_{\text{TGC}} = & g_{VWW} \left[g_1^V V^\mu (W_{\mu\nu}^- W^{+\nu} - W_{\mu\nu}^+ W^{-\nu}) + \kappa_V W_\mu^+ W_\nu^- V^{\mu\nu} \right. \\
& + \frac{\lambda_V}{m_W^2} V^{\mu\nu} W_\nu^{+\rho} W_{\rho\mu}^- + i g_5^V \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ (\partial^\rho W^{-\mu}) W^{+\nu} - W^{-\mu} (\partial^\rho W^{+\nu}) \right\} V^\sigma \\
& + i g_4^V W_\mu^+ W_\nu^- (\partial^\mu V^\nu + \partial^\nu V^\mu) - \frac{\bar{\kappa}_V}{2} W_\mu^- W_\nu^+ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} V_{\rho\sigma} \\
& \left. - \frac{\bar{\lambda}_V}{2 m_W^2} W_{\rho\mu}^- W_\nu^{+\mu} \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} V_{\alpha\beta} \right], \tag{4.2}
\end{aligned}$$

donde W es el campo para los bosones cargados, $W^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu$, V puede ser campo del fotón o del bosón Z y $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. La constante de acoplamiento global se fija mediante $g_{VWW} = e$ para $V = \gamma$ y $g_{VWW} = e \cot \theta_W$ para $V = Z$ y θ_W es el ángulo de mezcla débil. Una vez definidos los acoplamientos globales, hay siete parámetros complejos para dos opciones de $V = Z, \gamma$, sumando un total de catorce. Sin embargo, son demasiados para ser medidos simultáneamente por lo que es necesario introducir algunas hipótesis. Primero, hay que ver cómo transforman bajo las simetrías de paridad (P), conjugación de carga (C) e inversión temporal (T):

$$\begin{aligned}
W_\mu^- & \xrightarrow{\text{C}} -W_\mu^+, & A_\mu & \xrightarrow{\text{C}} -A_\mu \\
V_\mu(t, \mathbf{x}) & \xrightarrow{\text{P}} V^\mu(t, -\mathbf{x}), & \partial_\mu & \xrightarrow{\text{P}} \partial^\mu, \\
V_\mu(t, \mathbf{x}) & \xrightarrow{\text{T}} V^\mu(t, -\mathbf{x}), & \partial_\mu & \xrightarrow{\text{T}} -\partial^\mu,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

con A_μ el potencial electromagnético (vector real) y $V_\mu = W_\mu^{\pm,0}$, A_μ . Los tres primeros términos de la ec. (4.2) respetan P, C y T. El cuarto término respeta la simetría CP, pero los tres últimos términos no. Una restricción lógica es exigir que la simetría CP se cumpla. La invariancia de norma electromagnética fija $g_1^\gamma = 1$ y $g_5^\gamma = g_5^Z = 0$. Las restantes constantes $g_1^Z, \kappa_\gamma, \kappa_Z, \lambda_\gamma$ y λ_Z se asumen reales (es decir, invariantes bajo T). Luego, la simetría SU(2) implica [282, 284] que:

$$\kappa_Z = g_1^Z - \tan^2 \theta_W (\kappa_\gamma - 1), \quad \lambda_Z = \lambda_\gamma, \tag{4.4}$$

reduciendo el número de parámetros para TGC a solo tres, g_1^Z , κ_γ y λ_γ . Este conjunto de tres parámetros son el punto de partida del análisis experimental convencional. En el Modelo Estándar sus valores son: $g_1^Z = \kappa_\gamma = \kappa_Z = 1$, y $\lambda_\gamma = \lambda_Z = 0$ a nivel de árbol.

Ahora bien, usando la notación de la Ref. [285], al tomar el valor de expectación de la Lagrangiana entre los estados físicos $|p, \epsilon_h\rangle$ y $|p', \epsilon_{h'}\rangle$ para W^\pm , donde $\epsilon_{h,h'}$ son los vectores de polarización, teniendo en cuenta que $(p \cdot \epsilon_h) = (p' \cdot \epsilon_{h'}) = 0$ y $p^2 = p'^2 = m_W^2$, la función de vértice para $V = \gamma, Z$ en el espacio de momento puede expresarse como:

$$g_{VWW} \Gamma_{h',h}^\mu \equiv g_{VWW} \langle p' s' h' | J_\mu(0) | p s h \rangle, \quad (4.5)$$

donde p (p'), s (s') y h (h') son los correspondientes momentos, espines, helicidadades respectivamente y

$$\begin{aligned} \Gamma_{h',h}^\mu &= i (\epsilon_{h'}^\star)_\beta V^{\mu\alpha\beta} (\epsilon_h)_\alpha \stackrel{(p^2=m^2, p'^2=m'^2)}{=} - \left[G_1^V (p + p')^\mu (\epsilon_{h'}^\star \cdot \epsilon_h) \right. \\ &\quad \left. + G_2^V \{ \epsilon_{h'}^{\star\mu} (q \cdot \epsilon_h) - \epsilon_h^\mu (q \cdot \epsilon_{h'}^\star) \} + G_3^V (p + p')^\mu (q \cdot \epsilon_{h'}^\star) (q \cdot \epsilon_h) / m^2 \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

con $q^\mu = (p - p')^\mu$ y los factores de forma electromagnéticos definidos como:

$$G_1^V(q^2) = 1 + \frac{1}{2} \lambda_V \frac{q^2}{m^2}, \quad G_2^V = 1 + \kappa_V + \lambda_V, \quad G_3^V = -\lambda_V. \quad (4.7)$$

El momento dipolar magnético μ_W y el momento cuadrupolar eléctrico Q_W del bosón cargado W pueden ser expresados en términos de κ_γ y λ_γ como [285]:

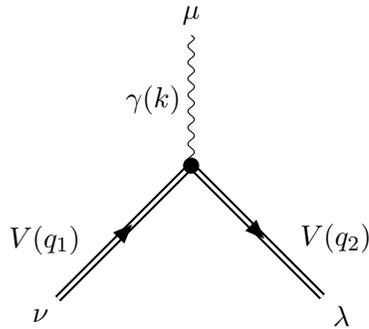
$$\begin{aligned} \mu_W &= \frac{e}{2 m_W} (1 + \kappa_\gamma + \lambda_\gamma), \\ Q_W &= -\frac{e}{m_W^2} (\kappa_\gamma + \lambda_\gamma). \end{aligned} \quad (4.8)$$

La prueba de la ec. (4.8) puede verse en el Apéndice E, mientras que los resultados combi-

nados en PDG [\[169\]](#) para estos parámetros son:

$$g_1^Z = 0.984_{-0.020}^{+0.018}, \quad \kappa_\gamma = 0.982 \pm 0.042, \quad \lambda_\gamma = -0.022 \pm 0.019. \quad (4.9)$$

Ahora, ¿qué pasa si se considera el acoplamiento $V V \gamma$?, donde V denota a una partícula vectorial de espín igual a 1. Bueno, la respuesta es que la estructura para este vértice $V V \gamma$ también puede ser asociada de manera directa con los diferentes multipolos de una partícula V . Para establecer dicha relación se debe considerar una parametrización de la forma más general posible para luego, análogo al caso del vértice $W W V$, imponer las restricciones debidas a las simetrías de la teoría, particularmente las simetrías discretas C, P y T. La identificación de las estructuras multipolares se ha realizado en detalle en la Ref. [\[286\]](#), donde se parte de la expresión para la amplitud asociada al proceso $V(q_1, \eta_1) \rightarrow V(q_2, \eta_2^*) + \gamma(k)$, que es descrita por el elemento de matriz de la corriente electromagnética dada por:



$$\rightarrow \langle V(q_2, \eta_2^*) | J_\mu^{\text{ele}}(0) | V(q_1, \eta_1) \rangle = \eta_2^{*\lambda} \eta_1^\nu \Gamma_{\mu\nu\lambda}, \quad (4.10)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ denota al vértice $V V \gamma$ y η_1 (η_2^*) los correspondientes tesoeres de polarización asociados a las partículas V . Después de aplicar las simetrías C, P y CP, el vértice $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ puede descomponerse en las siguientes estructuras de Lorentz [\[15\]](#):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\lambda} = & \alpha(q^2) g_{\nu\lambda} (q_1 + q_2)_\mu + \beta(q^2) (g_{\mu\nu} q_\lambda - g_{\mu\lambda} q_\nu) \\ & - \frac{\gamma(q^2)}{M_V^2} (q_1 + q_2)_\mu q_\nu q_\lambda - q_{1\lambda} g_{\mu\nu} - q_{2\nu} g_{\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\alpha(q^2)$, $\beta(q^2)$ y $\gamma(q^2)$ son los factores de forma electromagnéticos asociados a la partícula

vectorial V . Siguiendo a la Ref. [287], la forma de relacionar los factores de forma del vértice $V V \gamma$ con los momentos multipolares, es a partir de las expresiones clásicas para la carga eléctrica C_V , el momento dipolar magnético $\vec{\mu}_V$ y momento cuadrupolar eléctrico Q_V , se hace en la Ref. [287], dadas por:

$$\begin{aligned} C_V &= \int d^3 x \rho^{\text{elm}}(x), \\ \vec{\mu}_V &= \frac{1}{2} \int d^3 x \vec{x} \times \vec{J}^{\text{elm}}(x), \\ Q_V^{ij} &= \int d^3 x x^i x^j \rho^{\text{elm}}(x), \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde el cuadvivector de corriente se define como: $J_\mu^{\text{elm}} = (\rho^{\text{elm}}, \vec{J}_\mu^{\text{elm}})$. En el límite estático, los multipolos electromagnéticos son identificados como: la carga eléctrica $C_V = \alpha(0)$, el momento dipolar magnético $m_V = \beta(0)$ (en unidades de $\frac{e}{2M_V}$) y el cuadrupolo $Q_V = 1 - \beta(0) + 2\gamma(0)$ (en unidades de $\frac{e}{2M_V^2}$). Análogo al caso del vértice WWV , existe otro conjunto de parámetros para definir a los multipolos electromagnéticos para partículas de espín 1, κ_V y λ_V , relacionados a los previos como: $\beta(0) = 1 + \kappa_V + \lambda_V$ y $\gamma(0) = \lambda_V$ [287]. Normalmente, los valores para los multipolos de un partícula vectorial se toman iguales a los del bosón W a nivel árbol. Sin embargo, esto no debería ser del todo correcto, ya que no están ligados a una simetría de norma y más bien se espera que reflejen la dinámica de interacción fuerte entre quarks. Por lo que se ha utilizado una variedad de aproximaciones efectivas de QCD para calcular el MDM de los mesones vectoriales ligeros. El más representativo es el del mesón ρ , que como ya se vio anteriormente en el Cuadro [1.2] el valor para el MDM se encuentra en una región alrededor de 2 (en unidades $\frac{e}{2m_\rho}$).

A partir de aquí, el interés particular es determinar de manera indirecta el MDM del mesón ρ justo como se hace en la Ref. [15]. La descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ en sus diferentes canales se hace bajo el enfoque de VMD, pero ahora se usan los datos más recientes publicados por la colaboración BABAR [17] para la sección eficaz de este mismo proceso.

4.3. Descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$

La notación para este proceso es: $e^+(k_+)e^-(k_-) \rightarrow \pi^+(p_1)\pi^0(p_2)\pi^-(p_3)\pi^0(p_4)$, donde entre paréntesis se denotan a los correspondientes cuádrimomentos, los cuales cumplen la relación de conservación:

$$q = k_+ + k_- = \sum_{i=1}^4 p_i. \quad (4.13)$$

La amplitud total del proceso puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_T = \frac{e^2}{q^2} J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4), l_\mu, \quad (4.14)$$

donde l_μ corresponde a la parte puramente leptónica, definida con anteriormente en el Cap. 3, Sec. 3.6, ec. (3.14), mientras que J^μ corresponde al elemento de matriz hadrónico de los piones asociado a la corriente electromagnética:

$$J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = \langle \pi^+(p_1)\pi^0(p_2)\pi^-(p_3)\pi^0(p_4) | J_{elm}^\mu(0) | 0 \rangle. \quad (4.15)$$

Por otra parte, la expresión para la sección eficaz diferencial viene dada por la expresión [169]:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\overline{\mathcal{M}_T}|^2}{4 \sqrt{(k_+ \cdot k_-)^2 - M_1^2 M_2^2}} \delta^4\left(q - \sum_{i=1}^n p_i\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (4.16)$$

donde M_1, M_2 son las masas de las partículas iniciales y $|\overline{\mathcal{M}_T}|^2$ denota el cuadrado de la amplitud total. La descripción adecuada del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ y la expresión para la sección eficaz diferencial, ec. (4.16), salvo la aplicación de los factores estadísticos adecuados [273], ayudarán a tener una buena descripción teórica de los datos experimentales de la sección eficaz.

En el límite de isoespín, el elemento de matriz para el canal $2\pi^+2\pi^-$ puede expresarse en términos del elemento de matriz $J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$ para el canal $2\pi^0\pi^+\pi^-$ [275, 288]. Del

mismo modo, los elementos matriciales de la corriente vectorial cargada, relevante para el decaimiento de τ^- , también pueden expresarse en términos de $J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$ [288], con la normalización habitual de la corriente vectorial cargada $V_{cc}^\mu = \bar{d} \gamma^\mu u$ en términos de campos de los quarks. Además del isoespín, estos elementos matriciales para la corriente electromagnética también están limitados por la invariancia de norma, la simetría de Bose y la invariancia de carga C. Para el canal de interés, basta con considerar estas tres simetrías. Así, la invariancia de norma (conservación de la corriente vectorial) implica que:

$$q_\mu J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0. \quad (4.17)$$

Las restantes restricciones de simetría para $J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$ son:

Simetría de Bose (intercambio de piones neutros) implica que:

$$J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = J^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2), \quad (4.18)$$

Invariancia de carga C (intercambio de piones cargados) implica que

$$J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -J^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4),$$

lo que siempre se puede manifestar escribiendo [275] que:

$$\begin{aligned} J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \mathcal{M}_r^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) + \mathcal{M}_r^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) \\ &\quad - \mathcal{M}_r^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) - \mathcal{M}_r^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$ se puede escribir en términos de una amplitud reducida, $\mathcal{M}_r^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$, que no está limitada por la invariancia de carga C o la simetría de Bose. Como consecuencia, en este trabajo todas las amplitudes de los diferentes canales se expresan en términos de las reglas de Feynman (Ver Apéndice B), las cuales deben cumplir las mismas propiedades de $J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$. Una consideración importante para facilitar la simplificación de las expresiones resultantes, consiste en eliminar los términos proporcionales a q^μ en las diferentes

amplitudes $\mathcal{M}_r^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$ y, por tanto, también en $J^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$. La eliminación de estos términos puede conducir a decir que hay aparentes violaciones de la invariancia de norma. Sin embargo, no hace falta decir que esos términos siempre pueden ser recuperados de forma única para un elemento matricial dado, imponiendo la conservación de corriente.

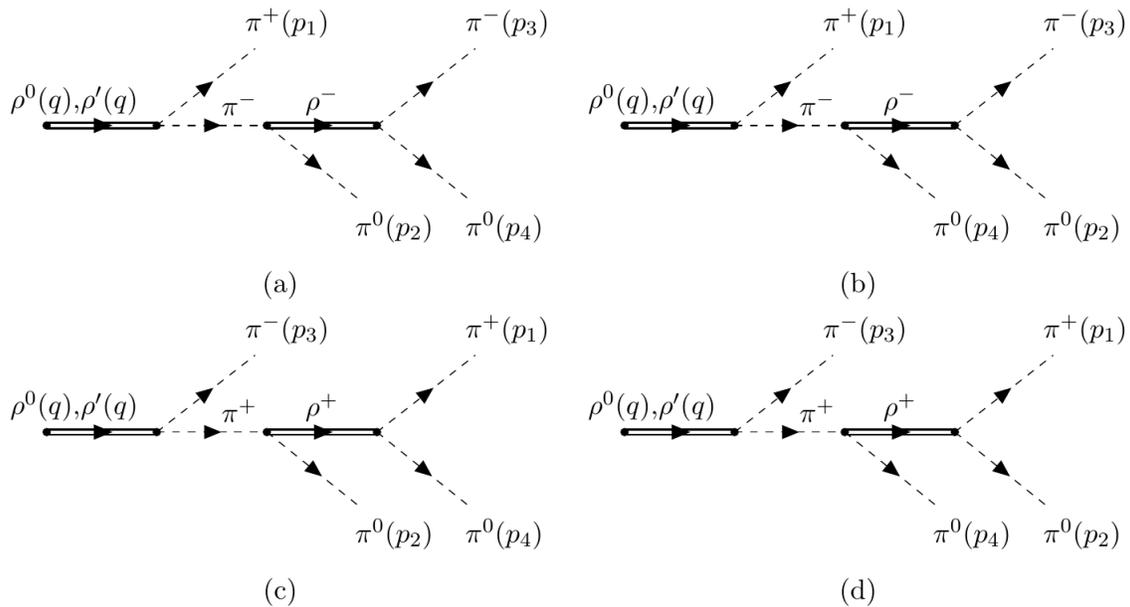


Figura 4.2: Diagramas de Feynman que componen al denominado Canal A del proceso de producción a 4π : $\rho \rightarrow \pi\pi \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$.

4.3.1. Canal A

El primer canal del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ a describir es el denominado Canal A, donde los estados intermedios involucrados son los mesones ρ , π y ρ' . Los diagramas de Feynman que ilustran este canal se muestran en la Fig. 4.2, donde los estados resonantes iniciales son ρ y ρ' , los cuales se acoplan a la corriente leptónica definida exactamente igual que en la ec. (3.14), Cap. 3, Sec. 3.6. La parte de la Lagrangiana de interacción que involucra

a los mesones vectoriales (V), pseudo-escalares (P) y al fotón (A) esta definida por:

$$\mathcal{L} = g_{VPP} \epsilon_{abc} V_\mu^a P^b \partial^\mu P^c + \frac{e m_V^2}{g_V} V_\mu A^\mu, \quad (4.20)$$

donde g_{VPP} y g_V son las constantes de acoplamiento efectivas.

Las amplitudes de cada diagrama son escritas explícitamente, con el fin de no perder generalidad. Así, para el diagrama (a) de la Fig. 4.2, la amplitud queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{Ar}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -e \left(C_a^{\alpha\mu} - C_a'^{\alpha\mu} \right) (q - 2p_1)_\alpha S_{\pi^-} [q - p_1] (q - p_1 + p_2)_\gamma D_{\rho^-}^{\eta\gamma} [s_{43}] r_{43\eta}, \quad (4.21)$$

donde la fase relativa entre ρ y ρ' se toma igual a 180° [275, 276], ya que dicha fase es favorecida en el análisis de la sección eficaz experimental [15]. Luego, para simplificar la escritura, es necesario definir las siguientes expresiones:

$$D_V^{\alpha\mu}[p] = -i \left(\frac{g^{\alpha\mu} - \frac{p^\alpha p^\mu}{m_V^2 - i m_V \Gamma_V}}{p^2 - m_V^2 + i m_V^2 \Gamma_V} \right), \quad S_{\pi^\pm}[q] = \frac{i}{q^2 - m_{\pi^\pm}^2}, \quad (4.22)$$

$$C_a^{\alpha\mu} = \frac{(g_{\rho\pi\pi})^3}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}^{\alpha\mu}[q], \quad C_a'^{\alpha\mu} = \frac{g_{\rho'\pi\pi} (g_{\rho\pi\pi})^2}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}^{\alpha\mu}[q], \quad (4.23)$$

$$s_{ij} = p_i + p_j, \quad r_{ij} = p_i - p_j, \quad (4.24)$$

donde $D_V^{\mu\nu}[p]$ y $S_{\pi^\pm}[q]$ son los propagadores generalizados para una partícula vectorial y el pión respectivamente. Siguiendo la misma notación, la amplitud para el diagrama (b) de Fig. 4.2, asociado al intercambio de piones neutros, puede escribirse como:

$$\mathcal{M}_{Ar}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) = -e \left(C_a^{\alpha\mu} - C_a'^{\alpha\mu} \right) (q - 2p_1)_\alpha S_{\pi^-} [q - p_1] (q - p_1 + p_4)_\gamma D_{\rho^-}^{\eta\gamma} [s_{23}] r_{23\eta}, \quad (4.25)$$

Luego, la amplitud del diagrama (c), Fig. 4.2, asociada al intercambio de piones cargados, queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{Ar}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) = -e \left(C_a^{\alpha\mu} - C_a'^{\alpha\mu} \right) (q - 2p_3)_\alpha S_{\pi^+} [q - p_3] (q - p_3 + p_2)_\gamma D_\rho^{\eta\gamma} [s_{41}] r_{14\eta}. \quad (4.26)$$

Finalmente la amplitud del diagrama (d) de la Fig. 4.2, asociada al intercambio de piones neutros y cargados, es:

$$\mathcal{M}_{Ar}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) = -e \left(C_a^{\alpha\mu} - C_a'^{\alpha\mu} \right) (q - 2p_3)_\alpha S_{\pi^+} [q - p_3] (q - p_3 + p_4)_\gamma D_{\rho^+}^{\eta\gamma} [s_{21}] r_{12\eta}. \quad (4.27)$$

Note que las amplitudes del Canal A dependen de las constantes de acoplamiento $g_{\rho\pi\pi}$, g_ρ , $g_{\rho'}$ y $g_{\rho'}$ principalmente. Esto será relevante en el posterior análisis de la sección eficaz del proceso.

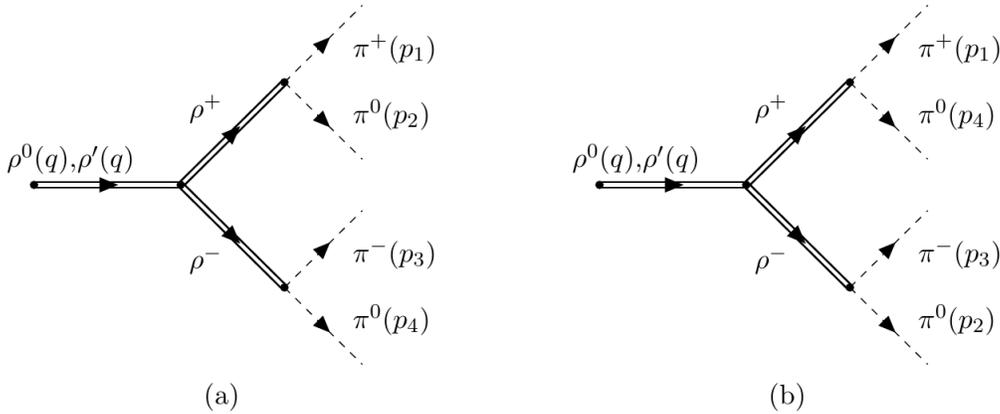


Figura 4.3: Diagramas de Feynman que constituyen el denominado Canal B en el proceso de producción a $4\pi : \rho \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$.

4.3.2. Canal B

La extracción del MDM del mesón ρ se basa en la existencia del vértice $\rho^+ \rho^- \gamma$. Este vértice queda determinado en este segundo canal, denominado Canal B, y cuyos diagramas

de Feynman se ilustran en la Fig. 4.3. Dado el rango de energía que se considera, alrededor de 3 GeV, permite que el fotón se acople a estados intermedios como los mesones ρ y ρ' , los cuales a su vez se acoplan a un par de mesones ρ . La estructura de estos vértices es similar a la del vértice electromagnético $W W \gamma$, pero con diferentes constantes de acoplamiento globales que muestran que se trata de un proceso de interacción fuerte, dichas constantes son: $g_{\rho\pi\pi}$ y $g_{\rho'\pi\pi}$ respectivamente y donde se ha considerado al mesón ρ como un bosón de norma del grupo de simetría SU(2), y se generaliza al caso del mesón ρ' . Bajo el esquema de VMD, la amplitud del diagrama (a) en Fig. 4.3, puede escribirse como:

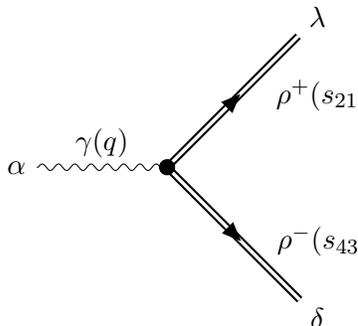
$$\mathcal{M}_{Br}^{\mu}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -e \left(C_b^{\alpha\mu} - C_b'^{\alpha\mu} \right) r_{12\gamma} D_{\rho^+}^{\lambda\gamma}[s_{21}] \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^1 D_{\rho^-}^{\eta\delta}[s_{43}] r_{43\eta}. \quad (4.28)$$

Bajo el intercambio de piones neutros, diagrama (b) de la Fig. 4.3, la amplitud queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{Br}^{\mu}(p_1, p_4, p_3, p_2) = -e \left(C_b^{\alpha\mu} - C_b'^{\alpha\mu} \right) r_{14\gamma} D_{\rho^+}^{\lambda\gamma}[s_{41}] \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^2 D_{\rho^-}^{\eta\delta}[s_{23}] r_{23\eta}. \quad (4.29)$$

Las constantes $C_b^{\alpha\mu}$ y $C_b'^{\alpha\mu}$ son exactamente las mismas que para el Canal A, es decir, $C_a^{\alpha\mu} = C_b^{\alpha\mu}$ y $C_a'^{\alpha\mu} = C_b'^{\alpha\mu}$ y por lo tanto, este canal depende de las mismas constantes de acoplamiento del Canal A.

Por otra parte, la estructura del vértice $\gamma(q) - \rho^+(s_{21}) - \rho^-(s_{43})$ queda definida a partir de la expresión:



$$\rightarrow \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^1 = (1 + i\gamma) \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^0, \quad (4.30)$$

donde $\gamma \equiv \Gamma_V/m_V$ y por conservación de cuadrimento, se tiene que: $q = s_{21} + s_{43}$. Sea $\bar{q}_1 = s_{43} - s_{21}$ y $\beta(0) = \beta_0$, la estructura a nivel árbol para el vértice $\Gamma_{\alpha\lambda\delta}^0$ esta definida por:

$$\Gamma_{\alpha\lambda\delta}^0 = g_{\lambda\delta} \bar{q}_{1\alpha} + \beta_0 (q_\delta g_{\alpha\lambda} - q_\lambda g_{\delta\alpha}) + s_{21\lambda} g_{\delta\alpha} - s_{43\delta} g_{\alpha\lambda}. \quad (4.31)$$

Con la idea de usar la identidad de Ward, y usando la conservación de cuadrimento $q = s_{21} + s_{43}$, es fácil mostrar que se cumple:

$$q^\alpha \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^0 = g_{\lambda\delta} \bar{q}_1 \cdot q + s_{21\delta} s_{21\lambda} - s_{43\lambda} s_{43\delta}. \quad (4.32)$$

Tomando la estructura dada en la ec. (4.31), sumando y restando los términos correctos que ayuden a construir la identidad de Ward y mantener la invariancia de norma al mismo tiempo, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^0 &= g_{\lambda\delta} \bar{q}_{1\alpha} + \beta_0 (q_\delta g_{\alpha\lambda} - q_\lambda g_{\delta\alpha}) + s_{21\lambda} g_{\delta\alpha} - s_{43\delta} g_{\alpha\lambda} \\ &+ \frac{\bar{q}_{1\alpha}}{\bar{q}_1 \cdot q} (q_\delta s_{21\lambda} - q_\lambda s_{43\delta}) - \frac{\bar{q}_{1\alpha}}{\bar{q}_1 \cdot q} (q_\delta s_{21\lambda} - q_\lambda s_{43\delta}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Luego, agrupando los términos adecuadamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^0 &= \frac{\bar{q}_{1\alpha}}{\bar{q}_1 \cdot q} \left(g_{\lambda\delta} \bar{q}_1 \cdot q + s_{12\delta} s_{21\lambda} - s_{43\lambda} s_{43\delta} \right) \\ &+ \beta_0 (q_\delta g_{\alpha\lambda} - q_\lambda g_{\delta\alpha}) + F_{\alpha\delta}[\bar{q}_1] s_{21\lambda} - F_{\alpha\lambda}[\bar{q}_1] s_{43\delta}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde, nuevamente para simplificar la escritura, se define la estructura genérica:

$$F_{\mu\nu}[p] \equiv g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu}{p \cdot q} q_\nu. \quad (4.35)$$

Por otra parte, el propagador inverso para una partícula vectorial está definido como:

$$\left(i D_{\lambda\delta}^v[p] \right)^{-1} = g_{\lambda\delta} (p^2 - m_v^2 + i \gamma p^2) - p_\lambda p_\delta (1 + i \gamma). \quad (4.36)$$

y la diferencia de propagadores inversos que se necesitan puede escribirse de la siguiente forma:

$$\left(i D_{\lambda\delta}^{\rho-}[s_{43}]\right)^{-1} - \left(i D_{\lambda\delta}^{\rho+}[s_{21}]\right)^{-1} = (1 + i\gamma) \left[g_{\lambda\delta} \bar{q}_1 \cdot q + s_{21\delta} s_{21\lambda} - s_{43\lambda} s_{43\delta} \right], \quad (4.37)$$

donde se usa el hecho de que $q = s_{21} + s_{43}$ y $\bar{q}_1 \cdot q = s_{43}^2 - s_{21}^2$. Teniendo en cuenta de que $\Gamma_{\alpha\lambda\delta}^1 = (1 + i\gamma) \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^0$, al comparar las ecs. (4.37) y (4.32), es evidente que la Identidad de Ward se satisface correctamente. Insertando la ec. (4.37) en la definición del vértice electromagnético $\rho\rho\gamma$, éste queda definido como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\lambda\delta}^1 &= \frac{\bar{q}_{1\alpha}}{\bar{q}_1 \cdot q} \left\{ \left(i D_{\lambda\delta}^{\rho-}[s_{43}]\right)^{-1} - \left(i D_{\lambda\delta}^{\rho+}[s_{21}]\right)^{-1} \right\} \\ &+ (1 + i\gamma) \left\{ \beta_0 (q_\delta g_{\alpha\lambda} - q_\lambda g_{\delta\alpha}) + F_{\alpha\delta}[\bar{q}_1] s_{21\lambda} - F_{\alpha\lambda}[\bar{q}_1] s_{43\delta} \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Finalmente, usando el hecho de que: $D_v^{\lambda\gamma}(p) \left[D_{\lambda\delta}^v(p) \right]^{-1} = g^{\gamma\delta}$, al sustituir la ec. (4.38) en la amplitud del diagrama (a), ec. 4.28, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -e \left(C_b^{\alpha\mu} - C_b'^{\alpha\mu} \right) \left\{ \frac{\bar{q}_{1\alpha}}{\bar{q}_1 \cdot q} i \left(D_{\rho-}^{\eta\gamma}[s_{43}] - D_{\rho+}^{\eta\gamma}[s_{21}] \right) r_{12\gamma} r_{43\eta} \right. \\ &+ (1 + i\gamma) r_{12\gamma} D_{\rho+}^{\lambda\gamma}[s_{21}] \left(\beta_0 (q_\delta g_{\alpha\lambda} - q_\lambda g_{\delta\alpha}) + F_{\alpha\delta}[\bar{q}_1] s_{21\lambda} - F_{\alpha\lambda}[\bar{q}_1] s_{43\delta} \right) D_{\rho-}^{\eta\delta}[s_{43}] r_{43\eta} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

Bajo el intercambio de piones neutros, diagrama (b) de la Fig. 4.3, haciendo un procedimiento análogo al caso anterior, es fácil mostrar que la amplitud queda escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) &= -e \left(C_b^{\alpha\mu} - C_b'^{\alpha\mu} \right) \left\{ \frac{\bar{q}_{2\alpha}}{\bar{q}_2 \cdot q} i \left(D_{\rho-}^{\eta\gamma}[s_{23}] - D_{\rho+}^{\eta\gamma}[s_{41}] \right) r_{14\gamma} r_{23\eta} \right. \\ &+ (1 + i\gamma) r_{14\gamma} D_{\rho+}^{\lambda\gamma}[s_{41}] \left(\beta_0 (q_\delta g_{\alpha\lambda} - q_\lambda g_{\delta\alpha}) + F_{\alpha\delta}[\bar{q}_2] s_{41\lambda} - F_{\alpha\lambda}[\bar{q}_2] s_{23\delta} \right) D_{\rho-}^{\eta\delta}[s_{23}] r_{23\eta} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde el intercambio de piones neutros lleva a la sustitución de $\bar{q}_1 = s_{43} - s_{21} \rightarrow \bar{q}_2 = s_{23} - s_{41}$.

4.3.3. Canal C

Los diagramas que constituyen al tercer canal del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, denominado como Canal C, se ilustran en la Fig. 4.4.

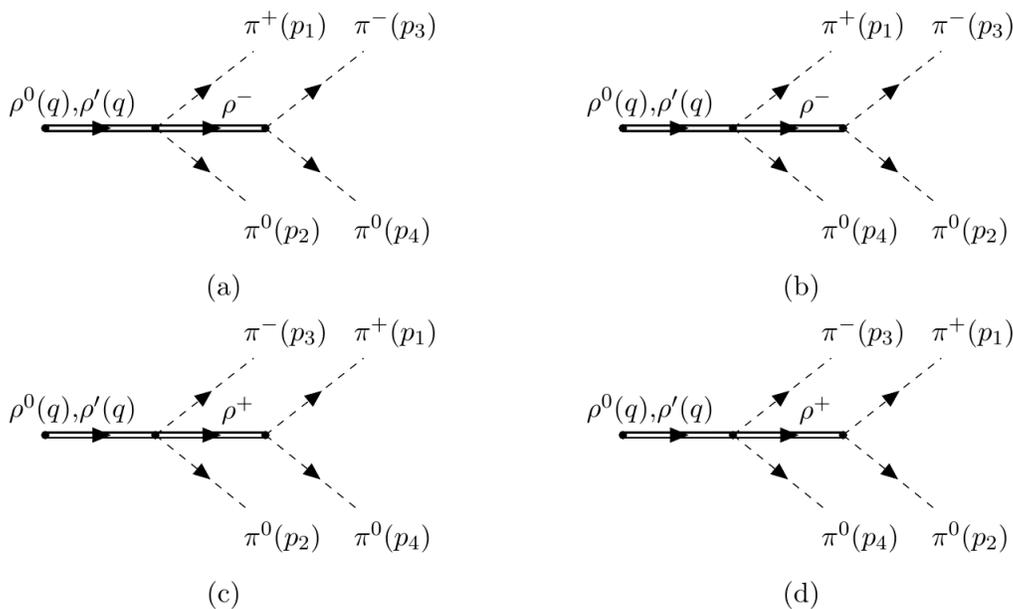


Figura 4.4: Diagramas de Feynman para el canal C para la producción 4π : $\rho \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$

Este canal viene mediado a través del mesón ρ (ρ'), que a su vez sigue con la emisión de dos piones y un mesón ρ , el cuál finalmente decae a dos piones. Por lo tanto, este canal incluye los términos de contacto $\rho\rho\pi\pi$ y $\rho'\rho\pi\pi$. Sin embargo, VMD no proporciona información directa de cuanto debería valer dichos términos. La manera para fijar estos términos es bajo el requerimiento de invariancia de norma para los canales A, B y C en conjunto, es decir,

$$q_\mu (\mathcal{M}_{A_r}^\mu + \mathcal{M}_{B_r}^\mu + \mathcal{M}_{B_r}^\mu) = 0. \quad (4.41)$$

Por lo que es necesario calcular las diferentes amplitudes de los diagramas que constituyen al Canal C. Así, comenzando con el diagrama (a) de la Fig. 4.4, su amplitud queda escrita

como:

$$\mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e \left(C_c^{\alpha\mu} - C_c'^{\alpha\mu} \right) \Gamma_{\alpha\gamma}^1 D_{\rho^-}^{\eta\gamma} [s_{43}] r_{43\eta}, \quad (4.42)$$

donde se definen los términos:

$$C_c^{\alpha\mu} = \frac{g_{\rho\pi\pi} g_{\rho\rho\pi\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}^{\alpha\mu} [q], \quad C_c'^{\alpha\mu} = \frac{g_{\rho\pi\pi} g_{\rho'\rho\pi\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}^{\alpha\mu} [q]. \quad (4.43)$$

Aquí se están suponiendo dos cosas muy relevantes: primero que $g_{\rho\rho\pi\pi}$ y $g_{\rho'\rho\pi\pi}$ son estructuras compuestas solamente por constantes de acoplamiento conocidas a través de los canales A y B, y lo segundo es que la estructura $\Gamma_{\alpha\gamma}^1$ es exactamente la misma para las contribuciones que vienen de los mesones ρ^0 y ρ' respectivamente. Luego, bajo el intercambio de piones neutros, diagrama (b) de la Fig. 4.4, la amplitud queda descrita como:

$$\mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) = i e \left(C_c^{\alpha\mu} - C_c'^{\alpha\mu} \right) \Gamma_{\alpha\gamma}^2 D_{\rho^-}^{\eta\gamma} [s_{23}] r_{23\eta}, \quad (4.44)$$

La amplitud bajo el intercambio de piones cargados, diagrama (c) de la Fig. 4.4, queda definida como:

$$\mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) = i e \left(C_c^{\alpha\mu} - C_c'^{\alpha\mu} \right) \Gamma_{\alpha\gamma}^3 D_{\rho^+}^{\eta\gamma} [s_{41}] r_{14\eta}. \quad (4.45)$$

y la correspondiente amplitud para el diagrama (d), Fig. 4.4, correspondiente al intercambio de piones cargados y neutros, es:

$$\mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) = i e \left(C_c^{\alpha\mu} - C_c'^{\alpha\mu} \right) \Gamma_{\alpha\gamma}^4 D_{\rho^+}^{\eta\gamma} [s_{21}] r_{12\eta}. \quad (4.46)$$

Ahora bien, la condición de invariancia de norma para los canales A, B y C, ec. (4.41), implica que:

$$q_\mu \left(\mathcal{M}_{A_r}^\mu + \mathcal{M}_{B_r}^\mu \right) = -q_\mu \mathcal{M}_{C_r}^\mu. \quad (4.47)$$

Por conservación de la corriente, $q_\mu J_{\text{elm}}^\mu = 0$, los términos proporcionales a q^μ en las amplitu-

des automáticamente se pueden cancelar. En ese sentido, note que al contraer el propagador con q^μ , se tiene que:

$$q_\mu D_\rho^{\alpha\mu}[q] = -i q^\alpha D_\rho[q], \quad D_\rho[q] = \frac{1}{q^2 - m_\rho^2 + i m_\rho \Gamma_\rho}, \quad (4.48)$$

y por simetría de isoespín, $s_{ij} \cdot r_{ij} = m_i^2 - m_j^2 = 0$, lo que ayuda a simplificar la expresión

$$r_{ij\eta} D_\rho^{\eta\gamma}[s_{ij}] = -i r_{ij}^\gamma D_\rho[s_{ij}], \quad D_\rho[s_{ij}] = \frac{1}{s_{ij}^2 - m_\rho^2 + i m_\rho \Gamma_\rho}, \quad (4.49)$$

En base a lo anterior, tomando la expresión para la amplitud $\mathcal{M}_{Ar}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$, ec. (4.21), escribiendo la expresión explícita para el propagador del pión, al contraer con q_μ se tiene que:

$$q_\mu \mathcal{M}_{Ar}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e \left(C_a - C'_a \right) x_1 \cdot q \frac{z_{12\gamma}}{(q - p_1)^2 - m_{\pi^-}^2} r_{43}^\gamma D_{\rho^-}[s_{43}], \quad (4.50)$$

donde se han definido, por comodidad, los términos $x_1 = q - 2p_1$, $z_{12} = q - p_1 + p_2$ y

$$C_a = \frac{(g_{\rho\pi\pi})^3}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}[q], \quad C'_a = \frac{g_{\rho'\pi\pi} (g_{\rho\pi\pi})^2}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}[q]. \quad (4.51)$$

Además, note que si uno desarrolla el denominador del propagador del pión, por simetría de isoespín, se tiene que: $(q - p_1)^2 - m_{\pi^-}^2 = q^2 - 2p_1 \cdot q = x_1 \cdot q$, lo que implica que:

$$q_\mu \mathcal{M}_{Ar}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e \left(C_a - C'_a \right) z_{12\gamma} r_{43}^\gamma D_{\rho^-}[s_{43}]. \quad (4.52)$$

Por otra parte, al contraer la amplitud $\mathcal{M}_{Br}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4)$, ec. (4.39) con q_μ , es fácil mostrar que:

$$q_\mu \mathcal{M}_{Br}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e \left(C_b - C'_b \right) \left(r_{12\gamma} r_{43}^\gamma D_{\rho^-}[s_{43}] - r_{43\gamma} r_{12}^\gamma D_{\rho^+}[s_{21}] \right). \quad (4.53)$$

Sea $C_{ab} = C_a = C_b$ y $C'_{ab} = C'_a = C'_b$, al sumar las contribuciones dadas en la ec. (4.52) y ec. (4.53), se tiene que:

$$\begin{aligned} q_\mu \left(\mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) + \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) \right) \\ = i e \left(C_{ab} - C'_{ab} \right) \left\{ (z_{12\gamma} + r_{12\gamma}) r_{43}^\gamma D_{\rho^-}[s_{43}] - r_{43\gamma} r_{12}^\gamma D_{\rho^+}[s_{21}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

A simple vista, parece que hace falta agregar la contribución de la amplitud $\mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2)$ para que la estructura sea simétrica. Así, tomando $x_3 = q - 2p_3$ y $z_{34} = q - p_3 + p_4$, al contraer con q_μ la amplitud $\mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2)$, ec. (4.27), se tiene que:

$$q_\mu \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) = i e \left(C_{ab} - C'_{ab} \right) z_{34\gamma} r_{12}^\gamma D_{\rho^+}[s_{21}]. \quad (4.55)$$

Sumando nuevamente, ahora se tiene que:

$$\begin{aligned} q_\mu \left(\mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) + \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) + \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) \right) \\ = i e \left(C_{ab} - C'_{ab} \right) \left\{ (z_{12\gamma} + r_{12\gamma}) r_{43}^\gamma D_{\rho^-}[s_{43}] + (z_{34\gamma} - r_{43\gamma}) r_{12}^\gamma D_{\rho^+}[s_{21}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Al contraer con q_μ el resto de las amplitudes, tomando $z_{14} = q - p_1 + p_4$ y $z_{32} = q - p_3 + p_2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} q_\mu \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) &= i e \left(C_{ab} - C'_{ab} \right) z_{14\gamma} r_{23}^\gamma D_{\rho^-}[s_{23}], \\ q_\mu \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) &= i e \left(C_{ab} - C'_{ab} \right) \left(r_{14\gamma} r_{23}^\gamma D_{\rho^-}[s_{23}] - r_{23\gamma} r_{14}^\gamma D_{\rho^+}[s_{14}] \right), \\ q_\mu \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) &= i e \left(C_{ab} - C'_{ab} \right) z_{32\gamma} r_{14}^\gamma D_{\rho^+}[s_{41}], \end{aligned} \quad (4.57)$$

volviendo a sumar se tiene que:

$$\begin{aligned} q_\mu \left(\mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) + \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) + \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) \right) \\ = i e \left(C_{ab} - C'_{ab} \right) \left\{ (z_{14\gamma} + r_{14\gamma}) r_{23}^\gamma D_{\rho^-}[s_{23}] + (z_{32\gamma} - r_{23\gamma}) r_{14}^\gamma D_{\rho^+}[s_{41}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por lo que, se puede identificar que las expresiones que resultan de contraer las amplitudes

del Canal C con q_μ son:

$$\begin{aligned}
q_\mu \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -i e \left(C_c - C'_c \right) q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^1 r_{43}^\gamma D_{\rho^-} [s_{43}], \\
q_\mu \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) &= -i e \left(C_c - C'_c \right) q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^2 r_{23}^\gamma D_{\rho^-} [s_{23}], \\
q_\mu \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) &= -i e \left(C_c - C'_c \right) q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^3 r_{14}^\gamma D_{\rho^+} [s_{41}], \\
q_\mu \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) &= -i e \left(C_c - C'_c \right) q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^4 r_{12}^\gamma D_{\rho^+} [s_{21}],
\end{aligned} \tag{4.59}$$

donde ahora se tiene

$$C_c = \frac{g_{\rho\pi\pi} g_{\rho\rho\pi\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0} [q], \quad C'_c = \frac{g_{\rho\pi\pi} g_{\rho'\rho\pi\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'} [q]. \tag{4.60}$$

Por la condición de invariancia de norma impuesta, sumando en pares adecuadamente se tiene

$$\begin{aligned}
& - q_\mu \left(\mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) + \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) \right) \\
& = i e \left(C_c - C'_c \right) \left\{ q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^1 r_{43}^\gamma D_{\rho^-} [s_{43}] + q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^4 r_{12}^\gamma D_{\rho^+} [s_{21}] \right\},
\end{aligned} \tag{4.61}$$

y

$$\begin{aligned}
& - q^\mu \left(\mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) + \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) \right) \\
& = i e \left(C_c - C'_c \right) \left\{ q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^2 r_{23}^\gamma D_{\rho^-} [s_{23}] + q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^3 r_{14}^\gamma D_{\rho^+} [s_{41}] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Ahora, para comparar línea a línea las ecs. (4.56) y (4.61), es necesario, primero, que las correspondientes constantes de acoplamiento sean iguales para todos los canales, es decir,

$$\begin{aligned}
C_{abc} = C_{ab} = C_c & \Leftrightarrow g_{\rho\rho\pi\pi} = (g_{\rho\pi\pi})^2, \\
C'_{abc} = C'_{ab} = C'_c & \Leftrightarrow g_{\rho'\rho\pi\pi} = g_{\rho'\pi\pi} g_{\rho\pi\pi}, \\
\Rightarrow C_{abc} = \frac{(g_{\rho\pi\pi})^3}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0} [q], & \quad C'_{abc} = \frac{g_{\rho'\pi\pi} (g_{\rho\pi\pi})^2}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'} [q],
\end{aligned} \tag{4.63}$$

y de esta forma se puede identificar que:

$$\begin{aligned} q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^1 &= z_{12\gamma} + r_{12\gamma}, \\ q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^4 &= z_{34\gamma} - r_{43\gamma}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Luego, comparando las ecs. (4.58) y (4.62), las estructuras restantes son:

$$\begin{aligned} q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^2 &= z_{14\gamma} + r_{14\gamma}, \\ q^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^3 &= z_{32\gamma} - r_{23\gamma}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Es necesario factorizar el cuadrivector q^α de las expresiones anteriores. Esto se logra introduciendo las estructuras adecuadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\gamma}^1 &= \left\{ z_{12\gamma} \frac{x_{3\alpha}}{x_3 \cdot q} + r_{12\gamma} \frac{x_{3\alpha}}{x_3 \cdot q} \right\}, & \Gamma_{\alpha\gamma}^2 &= \left\{ z_{14\gamma} \frac{x_{3\alpha}}{x_3 \cdot q} + r_{14\gamma} \frac{x_{3\alpha}}{x_3 \cdot q} \right\}, \\ \Gamma_{\alpha\gamma}^3 &= \left\{ z_{32\gamma} \frac{x_{1\alpha}}{x_1 \cdot q} - r_{23\gamma} \frac{x_{1\alpha}}{x_1 \cdot q} \right\}, & \Gamma_{\alpha\gamma}^4 &= \left\{ z_{34\gamma} \frac{x_{1\alpha}}{x_1 \cdot q} - r_{43\gamma} \frac{x_{1\alpha}}{x_1 \cdot q} \right\}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Ahora, resta introducir las expresiones para los diferentes $\Gamma_{\alpha\gamma}^i$ en las correspondientes amplitudes del canal C.

Las expresiones simplificadas para las amplitudes del canal A quedan finalmente definidas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) &= i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) \underbrace{D_{\rho^-} [s_{43}] r_{43}^\gamma z_{12\gamma} \frac{x_1^\mu}{x_1 \cdot q}}_{a_{11}^\mu}, \\ \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) &= i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) \underbrace{D_{\rho^-} [s_{23}] r_{23}^\gamma z_{14\gamma} \frac{x_1^\mu}{x_1 \cdot q}}_{a_{21}^\mu}, \\ \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) &= i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) \underbrace{D_{\rho^+} [s_{41}] r_{14}^\gamma z_{32\gamma} \frac{x_3^\mu}{x_3 \cdot q}}_{a_{31}^\mu}, \\ \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) &= i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) \underbrace{D_{\rho^+} [s_{21}] r_{12}^\gamma z_{34\gamma} \frac{x_3^\mu}{x_3 \cdot q}}_{a_{41}^\mu}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Luego, las amplitudes para el canal B quedan determinadas por las expresiones:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) & \left\{ \underbrace{D_{\rho^-}[s_{43}] r_{43}^\gamma r_{12\gamma} \frac{\bar{q}_{1\mu}}{\bar{q}_1 \cdot q}}_{b_{11}^\mu} - \underbrace{D_{\rho^+}[s_{21}] r_{43}^\gamma r_{12\gamma} \frac{\bar{q}_{1\mu}}{\bar{q}_1 \cdot q}}_{b_{12}^\mu} \right. \\ & \left. + \underbrace{(1 + i\gamma) D_{\rho^-}[s_{43}] D_{\rho^+}[s_{21}] \beta_0 (q \cdot r_{12} r_{43}^\mu - q \cdot r_{43} r_{12}^\mu)}_{b_{13}^\mu} \right\}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) = i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) & \left\{ \underbrace{D_{\rho^-}[s_{23}] r_{23}^\gamma r_{14\gamma} \frac{\bar{q}_{2\mu}}{\bar{q}_2 \cdot q}}_{b_{21}^\mu} - \underbrace{D_{\rho^+}[s_{41}] r_{23}^\gamma r_{14\gamma} \frac{\bar{q}_{2\mu}}{\bar{q}_2 \cdot q}}_{b_{22}^\mu} \right. \\ & \left. + \underbrace{(1 + i\gamma) D_{\rho^-}[s_{23}] D_{\rho^+}[s_{41}] \beta_0 (q \cdot r_{14} r_{23}^\mu - q \cdot r_{23} r_{14}^\mu)}_{b_{23}^\mu} \right\}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

y para el Canal C, las expresiones de las amplitudes resultantes están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) & \left\{ \underbrace{D_{\rho^-}[s_{43}] r_{43}^\gamma z_{12\gamma} \frac{x_3^\mu}{x_3 \cdot q}}_{c_{11}^\mu} + \underbrace{D_{\rho^-}[s_{43}] r_{43}^\gamma r_{12\gamma} \frac{x_3^\mu}{x_3 \cdot q}}_{c_{12}^\mu} \right\}, \\ \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) = -i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) & \left\{ \underbrace{D_{\rho^-}[s_{23}] r_{23}^\gamma z_{14\gamma} \frac{x_3^\mu}{x_3 \cdot q}}_{c_{21}^\mu} + \underbrace{D_{\rho^-}[s_{23}] r_{23}^\gamma r_{14\gamma} \frac{x_3^\mu}{x_3 \cdot q}}_{c_{22}^\mu} \right\}, \\ \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) = -i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) & \left\{ \underbrace{D_{\rho^+}[s_{41}] r_{14}^\gamma z_{32\gamma} \frac{x_1^\mu}{x_1 \cdot q}}_{c_{31}^\mu} - \underbrace{D_{\rho^+}[s_{41}] r_{14}^\gamma r_{23\gamma} \frac{x_1^\mu}{x_1 \cdot q}}_{c_{32}^\mu} \right\}, \\ \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) = -i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) & \left\{ \underbrace{D_{\rho^+}[s_{21}] r_{12}^\gamma z_{34\gamma} \frac{x_1^\mu}{x_1 \cdot q}}_{c_{41}^\mu} - \underbrace{D_{\rho^+}[s_{21}] r_{12}^\gamma r_{43\gamma} \frac{x_1^\mu}{x_1 \cdot q}}_{c_{42}^\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Para construir las amplitudes invariantes de norma, es necesario sumar las amplitudes de los canales A, B y C correctamente. En primer lugar, se puede definir la amplitud \mathcal{M}_{ABC1r}^μ como la suma de las diferentes contribuciones;

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ABCr_1}^\mu = \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) + \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) + \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ + \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) + \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2), \end{aligned}$$

$$= f_g \left\{ (a_{11}^\mu + c_{11}^\mu) + (a_{41}^\mu + c_{41}^\mu) + (b_{11}^\mu + c_{12}^\mu) + (c_{42}^\mu + b_{12}^\mu) + b_{13}^\mu \right\}, \quad (4.71)$$

donde f_g denota un factor global asociado a las constantes de acoplamiento. La expresión correcta, resulta ser igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ABC r_1}^\mu = i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) \left\{ D_{\rho^-} [s_{43}] r_{43}^\gamma z_{12\gamma} L^\mu(x_1, x_3) + D_{\rho^+} [s_{21}] r_{12}^\gamma z_{34\gamma} L^\mu(x_3, x_1) \right. \\ \left. + D_{\rho^-} [s_{43}] r_{43}^\gamma r_{12\gamma} L^\mu(\bar{q}_1, x_3) + D_{\rho^+} [s_{21}] r_{12}^\gamma r_{43\gamma} L^\mu(x_1, \bar{q}_1) \right. \\ \left. + (1 + i\gamma) D_{\rho^-} [s_{43}] D_{\rho^+} [s_{21}] \beta_0 \left(q \cdot r_{12} r_{43}^\mu - q \cdot r_{43} r_{12}^\mu \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

donde la estructura genérica invariante $L^\mu(\alpha, \beta)$ se define como:

$$L^\mu(\alpha, \beta) \equiv \frac{\alpha^\mu}{\alpha \cdot q} - \frac{\beta^\mu}{\beta \cdot q}. \quad (4.73)$$

Por último, haciendo algo similar con las amplitudes restantes, definiendo $\mathcal{M}_{ABC r_2}^\mu$ como la sumas de las contribuciones;

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ABC r_2}^\mu = \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) + \mathcal{M}_{A_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) + \mathcal{M}_{B_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) \\ + \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) + \mathcal{M}_{C_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4), \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$= f_g \left\{ (a_{21}^\mu + c_{21}^\mu) + (a_{31}^\mu + c_{31}^\mu) + (b_{21}^\mu + c_{22}^\mu) + (c_{32}^\mu + b_{22}^\mu) + b_{23}^\mu \right\},$$

la cual finalmente se traduce a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ABC r_2}^\mu = i e \left(C_{abc} - C'_{abc} \right) \left\{ D_{\rho^-} [s_{23}] r_{23}^\gamma z_{14\gamma} L^\mu(x_1, x_3) + D_{\rho^+} [s_{41}] r_{14}^\gamma z_{32\gamma} L^\mu(x_3, x_1) \right. \\ \left. + D_{\rho^-} [s_{23}] r_{23}^\gamma r_{14\gamma} L^\mu(\bar{q}_2, x_3) + D_{\rho^+} [s_{41}] r_{14}^\gamma r_{23\gamma} L^\mu(x_1, \bar{q}_2) \right. \\ \left. + (1 + i\gamma) D_{\rho^-} [s_{23}] D_{\rho^+} [s_{41}] \beta_0 \left(q \cdot r_{14} r_{23}^\mu - q \cdot r_{23} r_{14}^\mu \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Note que la información de las constantes de acoplamiento está factorizada completamente en C_{abc} y C'_{abc} , las cuales dependen de $g_{\rho\pi\pi}$, g_ρ , $g_{\rho'\pi\pi}$ y g_ρ y cuyos valores fueron encontrados previamente en el Cap. 3 y resumidos en el Cuadro 3.6.

4.3.4. Canal D

El cuarto canal, es uno de los más relevantes para la descripción de los datos experimentales de BaBar [17] del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$. Este canal corresponde aquel cuyas contribuciones vienen mediadas a través de los mesones ρ (ρ') y ω como estados intermedios y al que se ha denominado como Canal D. Los diagramas de Feynman correspondientes a este canal se ilustran en la Fig. 4.5.

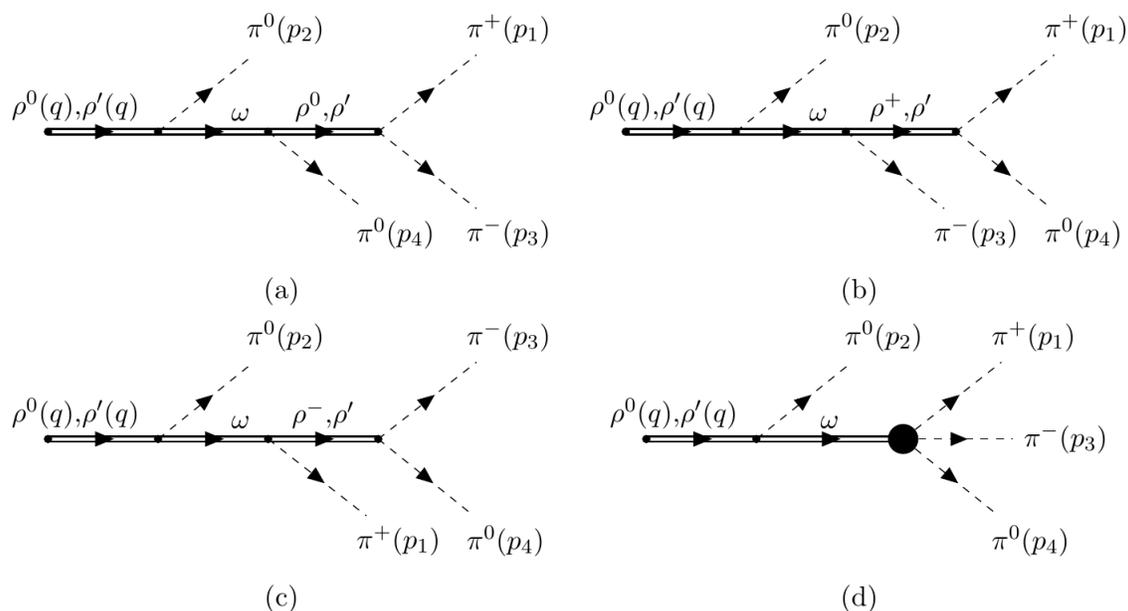


Figura 4.5: Diagramas de Feynman para el Canal D para el proceso de producción a 4π : $\rho \rightarrow \omega\pi \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$

Note que se incluyen en estos diagramas términos adicionales correspondientes al mesón ρ' , además de un diagrama que incluye el término de contacto, ya que como se vio en el análisis del Cap. 3, estos términos son relevantes para mantener la consistencia en los valores de sus correspondientes constantes de acoplamiento. Otro aspecto importante que mencionar es que para este canal, el acoplamiento $\omega - \rho(\rho') - \pi$ juega un rol importante.

Este acoplamiento queda determinado a partir de la siguiente Lagrangiana de interacción,

$$\mathcal{L}_\omega = g_{\omega\rho\pi} \delta_{ab} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\mu \omega_\nu \partial_\lambda \rho_\sigma^a \pi^b, \quad (4.76)$$

Nuevamente, la descripción de las amplitudes para cada diagrama se hace de manera individual. Primero, la amplitud más general y simplificada para el diagrama (a), Fig. ??, queda descrita como:

$$\mathcal{M}_{D_r}^{(a)\mu} = -2ie \left(C_d + e^{i\theta} C'_d \right) \left(g_{\rho\pi\pi} g_{\omega\rho\pi} D_{\rho^0}[s_{13}] + g_{\rho'\pi\pi} g_{\omega\rho'\pi} D_{\rho'}[s_{13}] \right) \hat{V}_\omega^\mu, \quad (4.77)$$

donde $e^{i\theta}$ corresponde a la fase relativa entre ρ y ρ' , que inicialmente se considera a 180° . Sin embargo, por lo visto en el Cap. 3, Sec. 3.7, donde se estudia el proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\gamma$, la fase relativa tiene un efecto considerable sobre el canal del mesón ω . Por esta razón, para este canal en particular se debe considerar con una fase relativa, hasta el momento desconocida. Luego, es necesario definir las variables que contienen a las constantes de acoplamiento como:

$$C_d = \frac{g_{\omega\rho\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}[q] D_\omega[q-p_2], \quad C'_d = \frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}[q] D_\omega[q-p_2], \quad (4.78)$$

y la estructura genérica \hat{V}_ω^μ , con el objetivo de simplificar la escritura, queda definido por:

$$\hat{V}_\omega^\mu = \epsilon_{\alpha\eta\beta\sigma} \epsilon^{\mu\gamma\chi\sigma} q^\gamma p_1^\alpha p_2^\chi p_3^\eta p_4^\beta. \quad (4.79)$$

Siguiendo la misma estructura que para el caso anterior, la amplitud para el diagrama (b) de la Fig. 4.5, puede ser escrita como:

$$\mathcal{M}_{D_r}^{(b)\mu} = -2ie \left(C_d + e^{i\theta} C'_d \right) \left(g_{\rho\pi\pi} g_{\omega\rho\pi} D_{\rho^+}[s_{41}] + g_{\rho'\pi\pi} g_{\omega\rho'\pi} D_{\rho'}[s_{41}] \right) \hat{V}_\omega^\mu. \quad (4.80)$$

Luego, para el diagrama (c), Fig.4.5, análogo al caso anterior, la amplitud es:

$$\mathcal{M}_{D_r}^{(c)\mu} = -2ie \left(C_d + e^{i\theta} C'_d \right) \left(g_{\rho\pi\pi} g_{\omega\rho\pi} D_{\rho^-}[s_{43}] + g_{\rho'\pi\pi} g_{\omega\rho'\pi} D_{\rho'}[s_{43}] \right) \hat{V}_\omega^\mu. \quad (4.81)$$

y la amplitud del término de contacto, diagrama (d) de la Fig.4.5, queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{D_r}^{(d)\mu} = -6ie \left(C_d + e^{i\theta} C'_d \right) g_{3\pi} \hat{V}_\omega^\mu. \quad (4.82)$$

Notando que existen términos comunes entre las amplitudes, la amplitud del Canal D total queda definida como la suma de las amplitudes individuales, es decir

$$\mathcal{M}_{D_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathcal{M}_{D_r}^{(a)\mu} + \mathcal{M}_{D_r}^{(b)\mu} + \mathcal{M}_{D_r}^{(c)\mu} + \mathcal{M}_{D_r}^{(d)\mu},$$

la cual finalmente se traduce a la siguiente expresión:

$$\mathcal{M}_{D_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -ie \left(C_d + e^{i\theta} C'_d \right) \mathcal{A}[(q - p_2)^2] \hat{V}_\omega^\mu, \quad (4.83)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[(q - p_2)^2] = & 6g_{3\pi} + 2g_{\rho\pi\pi} g_{\omega\rho\pi} \left(D_{\rho^0}[s_{13}] + D_{\rho^+}[s_{41}] + D_{\rho^-}[s_{43}] \right) \\ & + 2g_{\rho'\pi\pi} g_{\omega\rho'\pi} \left(D_{\rho'}[s_{13}] + D_{\rho'}[s_{41}] + D_{\rho'}[s_{43}] \right). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Es evidente que la expresión dada en la ec. (4.83) es invariante de norma por sí misma, basta con poner atención al término \hat{V}_ω^μ , ya que al contraer con q^μ , se tiene que:

$$q_\mu \mathcal{M}_{D_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) \propto q_\mu \hat{V}_\omega^\mu = \epsilon_{\alpha\eta\beta\sigma} \epsilon^{\mu\gamma\chi\sigma} q_\mu q^\gamma p_1^\alpha p_2^\chi p_3^\eta p_4^\beta = 0, \quad (4.85)$$

ya que a pesar de que q es par bajo el intercambio de índices μ y γ , el tensor de Levi-Civita es impar ante dicho intercambio de cualquiera de sus índices.

Por otra parte, es necesario aplicar la simetría de Bose-Einstein (BE)(intercambio de piones neutros) a todos los diagramas del Canal D, Fig.4.5, lo cual se hace intercambiando

$p_2 \leftrightarrow p_4$. La amplitud resultante bajo este cambio es:

$$\mathcal{M}_{D_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) = i e \left(C_d^{\text{BE}} + e^{i\theta} C_d'^{\text{BE}} \right) \mathcal{A}[(q - p_4)^2] \hat{V}_\omega^{\text{BE}\mu}. \quad (4.86)$$

donde, la variables que contienen a las constantes de acoplamiento se modifican,

$$C_d^{\text{BE}} = \frac{g_{\omega\rho\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}[q] D_\omega[q - p_4], \quad C_d'^{\text{BE}} = \frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}[q] D_\omega[q - p_4]. \quad (4.87)$$

Por otra parte, se tiene ahora que:

$$\hat{V}_\omega^{\text{BE}\mu} = \epsilon_{\alpha\eta\beta\sigma} \epsilon^{\mu\gamma\chi\sigma} q^\gamma p_1^\alpha p_2^\eta p_3^\beta p_4^\chi. \quad (4.88)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[(q - p_4)^2] = & 6 g_{3\pi} + 2 g_{\rho\pi\pi} g_{\omega\rho\pi} \left(D_{\rho^0}[s_{13}] + D_{\rho^+}[s_{21}] + D_{\rho^-}[s_{23}] \right) \\ & + 2 g_{\rho'\pi\pi} g_{\omega\rho'\pi} \left(D_{\rho'}[s_{13}] + D_{\rho'}[s_{21}] + D_{\rho'}[s_{42}] \right). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Note que este canal tiene una fuerte dependencia de las constantes de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$, $g_{\omega\rho'\pi}$, g_ρ , $g_{\rho'}$, $g_{\rho\pi\pi}$, $g_{\rho'\pi\pi}$, $g_{3\pi}$ y la fase relativa θ , cuyos valores han sido determinados a partir del análisis presentado en el Cap. 3 y resumidos en el Cuadro 3.6 y que serán de utilidad en la descripción de la sección eficaz exclusiva de este canal y la sección eficaz total del proceso de producción a cuatro piones.

4.3.5. Canal E

El quinto canal involucra al mesón vectorial axial a_1 y al mesón ρ (ρ') como estados intermedios y cuyos diagramas de Feynman han sido ilustrados en la Fig 4.6. La forma más sencilla de la Lagrangiana efectiva para la interacción fuerte entre $a_1(q) - \rho(k) - \pi(p)$ (donde q , k y p son los correspondientes cuádrimomentos) puede ser escrita como [289]:

$$\mathcal{L}_{a_1} = 2 g_{a_1\rho\pi} \left(\rho_\mu a_1^\mu q \cdot k - \partial_\nu \rho^\mu \partial_\mu a_1^\nu \right). \quad (4.90)$$

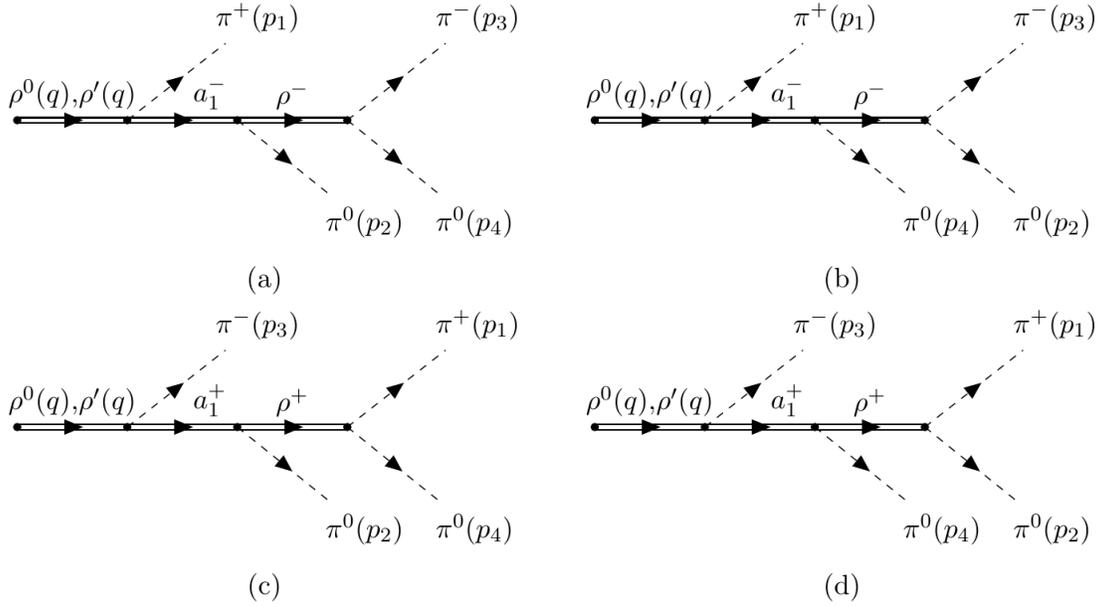


Figura 4.6: Diagramas de Feynman para el canal E del proceso a 4π : $\rho \rightarrow \pi a_1 \rightarrow \pi \rho \pi \rightarrow 4\pi$

La descripción de las amplitudes para este canal se hace de manera análoga que en los casos anteriores. Para el diagrama (a) de la Fig. 4.6, la amplitud puede escribirse como:

$$\mathcal{M}_{E\tau}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -e \left(C_e^{\mu\chi} - C_e'^{\mu\chi} \right) \Lambda_{1\chi\lambda} D_{a_1}^{\lambda\alpha}[q - p_1] \Omega_{1\alpha\beta} D_{\rho^-}^{\beta\eta}[s_{43}] r_{43\eta}, \quad (4.91)$$

donde, para simplificar la escritura, se han definido los siguientes términos:

$$C_e^{\mu\chi} = \frac{(g_{a_1\rho\pi})^2 g_{\rho\pi\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}^{\mu\chi}[q], \quad C_e'^{\mu\chi} = \frac{g_{a_1\rho'\pi} g_{\rho a_1\pi} g_{\rho\pi\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}^{\mu\chi}[q], \quad (4.92)$$

y

$$\begin{aligned} \Lambda_{1\chi\lambda} &= q \cdot (q - p_1) g_{\chi\lambda} - q_\lambda (q - p_1)_\chi, \\ \Omega_{1\alpha\beta} &= (q - p_1) \cdot s_{43} g_{\alpha\beta} - (q - p_1)_\beta s_{43\alpha}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

La simplificación de la ec. 4.91 puede hacerse en diferentes pasos, primero es fácil mostrar

que:

$$\Lambda_{1\chi\lambda} D_{a_1}^{\lambda\alpha}[q-p_1] = -i \Lambda_1^{\chi\alpha} D_{a_1}[q-p_1], \quad D_{a_1}[q-p_1] = \frac{1}{(q-p_1)^2 - m_{a_1}^2 + i m_{a_1} \Gamma_{a_1}}, \quad (4.94)$$

ya que la parte longitudinal del propagador es proporcional a $\Lambda_{1\chi\lambda} \times (q-p_1)^\lambda = 0$. Luego, usando conservación de corriente y la simetría de isospín, las partes longitudinales de los propagadores $D_{\rho^0}^{\mu\chi}[q]$ y $D_{\rho^-}^{\beta\eta}[s_{43}]$ pueden cancelarse. Así, la amplitud para el diagrama (a), Fig. 4.6, se resume a lo siguiente:

$$\mathcal{M}_{E_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i e \left(C_e - C'_e \right) D_{\rho^-}[s_{43}] D_{a_1}[q-p_1] r_{43}^\beta \Lambda_1^{\mu\alpha} \Omega_{1\alpha\beta}, \quad (4.95)$$

con las constantes

$$C_e = \frac{(g_{a_1\rho\pi})^2 g_{\rho\pi\pi} m_{\rho^0}^2}{g_\rho} D_{\rho^0}[q], \quad C_e = \frac{g_{a_1\rho'\pi} g_{\rho a\pi} g_{\rho\pi\pi} m_{\rho'}^2}{g_{\rho'}} D_{\rho'}[q]. \quad (4.96)$$

Siguiendo la misma idea para el resto de los diagramas, bajo el intercambio de piones neutros, diagrama (b) de la Fig. 4.6, la amplitud es escrita como:

$$\mathcal{M}_{E_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) = -e \left(C_e^{\mu\chi} - C_e'^{\mu\chi} \right) \Lambda_{1\chi\lambda} D_{a_1}^{\lambda\alpha}[q-p_1] \Omega_{2\alpha\beta} D_{\rho^-}^{\beta\eta}[s_{23}] r_{23\eta}. \quad (4.97)$$

cuya simplificación puede escribirse como:

$$\mathcal{M}_{E_r}^\mu(p_1, p_4, p_3, p_2) = -i e \left(C_e - C'_e \right) D_{\rho^-}[s_{23}] D_{a_1}[q-p_1] r_{23}^\beta \Lambda_1^{\mu\alpha} \Omega_{2\alpha\beta}, \quad (4.98)$$

donde

$$\Omega_{2\alpha\beta} = (q-p_1) \cdot s_{23} g_{\alpha\beta} - (q-p_1)_\beta s_{23\alpha}, \quad (4.99)$$

Bajo el intercambio de piones cargados, diagrama (c) de la Fig. 4.6, la amplitud puede escri-

birse como:

$$\mathcal{M}_{Er}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) = -e \left(C_e^{\mu\chi} - C_e'^{\mu\chi} \right) \Lambda_{3\chi\lambda} D_{a_1}^{\lambda\alpha} [q - p_3] \Omega_{3\alpha\beta} D_{\rho^-}^{\beta\eta} [s_{41}] r_{14\eta}, \quad (4.100)$$

donde ahora se definen las estructuras:

$$\begin{aligned} \Lambda_{3\chi\lambda} &= q \cdot (q - p_3) g_{\chi\lambda} - q_\lambda (q - p_3)_\chi, \\ \Omega_{3\alpha\beta} &= (q - p_3) \cdot s_{41} g_{\alpha\beta} - (q - p_3)_\beta s_{41\alpha} \end{aligned} \quad (4.101)$$

La simplificación de la amplitud resulta ser:

$$\mathcal{M}_{Er}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) = -i e \left(C_e - C_e' \right) D_{\rho^+} [s_{41}] D_{a_1} [q - p_3] r_{14}^\beta \Lambda_3^{\mu\alpha} \Omega_{3\alpha\beta}. \quad (4.102)$$

Finalmente para este canal, la amplitud del diagrama (d), Fig. 4.6, queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{Er}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) = -e \left(C_e^{\mu\chi} - C_e'^{\mu\chi} \right) \Lambda_{3\chi\lambda} D_{a_1}^{\lambda\alpha} [q - p_3] \Omega_{4\alpha\beta} D_{\rho^+}^{\beta\eta} [s_{21}] r_{12\eta}, \quad (4.103)$$

que al simplificar, se tiene que:

$$\mathcal{M}_{Er}^\mu(p_3, p_4, p_1, p_2) = -i e \left(C_e - C_e' \right) D_{\rho^+} [s_{21}] D_{a_1} [q - p_3] r_{12}^\beta \Lambda_3^{\mu\alpha} \Omega_{4\alpha\beta}. \quad (4.104)$$

con

$$\Omega_{4\alpha\beta} = (q - p_3) \cdot s_{21} g_{\alpha\beta} - (q - p_3)_\beta s_{21\alpha}. \quad (4.105)$$

Note que la descripción de las amplitudes para este canal dependen de las constantes de acoplamiento del mesón a_1 , específicamente de $g_{a_1\rho\pi}$ y $g_{a_1\rho'\pi}$, así como del ancho de decaimiento que puede ser tomado como una constante. La constante de acoplamiento $g_{a_1\rho\pi}$ es determinada de manera independiente (Ver Apéndice D) a través del decaimiento $a_1 \rightarrow \rho\pi$. El correspondiente acoplamiento para ρ' , dada la falta de información experimental, es difícil

de estimar. Una manera de dar un posible valor es a través de un ajuste, es decir, dejarlo como parámetro libre junto a β_0 y estimar un posible valor. Otra posibilidad es haciendo la hipótesis de que $g_{a_1\rho\pi} = g_{a_1\rho'\pi}$. Los valores para los acoplamientos restantes en estas amplitudes, $g_{\rho\pi\pi}$, g_ρ y $g_{\rho'}$ se conocen gracias al análisis realizado en el Cap. 3 y sus valores son reportados en el Cuadro 3.6. Esto será relevante en el análisis de la sección eficaz total del proceso de producción a cuatro piones.

4.3.6. Canal F

El sexto canal, denominado como Canal F involucra al mesón vectorial ρ (ρ') y a los mesones escalares σ (600) y $f_0(980)$ como estados intermedios que decaen a dos piones como se ilustra en los diagramas de la Fig 4.7.

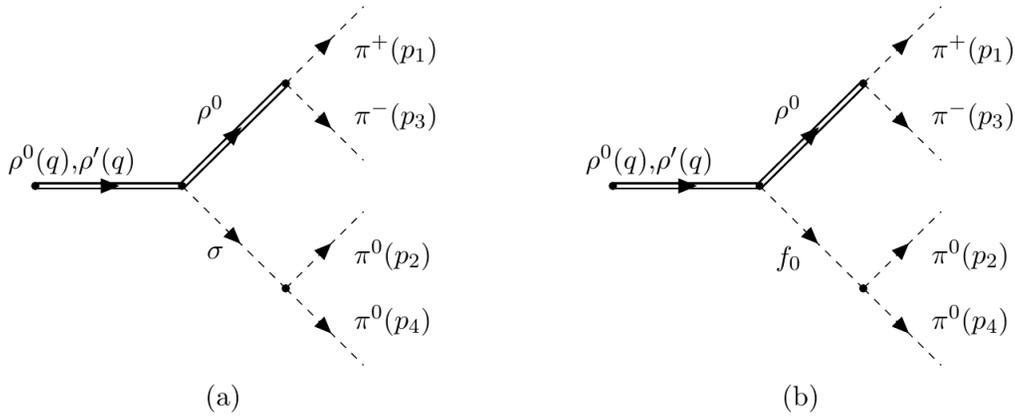


Figura 4.7: Diagramas de Feynman para el Canal C en el proceso de producción a 4π : $\rho \rightarrow \rho\sigma(f_0) \rightarrow 4\pi$

Este canal, en particular, carece de intercambios de piones neutros y cargados ya que provienen del mismo vértice y, además, se ha ignorado el vértice que involucra al mesón ρ^0 a par de piones neutros. Por otra parte, la interacción entre una partícula vectorial (V), una

partícula pseudo-escalar (P) y un escalar (S) está parametrizada por la Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_S = g_{V_1 V_2 S} V_{1\mu} V_2^\mu S + g_{SP_1 P_2} S P_1 P_2, \quad (4.106)$$

donde $g_{V_1 V_2 S}$ y $g_{SP_1 P_2}$ son las constantes de acoplamiento efectivas.

La descripción de las amplitudes para este canal se hace de manera individual partiendo por el diagrama (a), Fig. 4.7, y cuya la amplitud puede ser escrita como:

$$\mathcal{M}_{F_{\sigma r}}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i e \left(C_{\sigma f}^{\mu\alpha} - C'_{\sigma f}{}^{\mu\alpha} \right) D_\sigma[s_{24}] K_{\alpha\beta} D_{\rho^0}^{\beta\eta}[s_{31}] r_{31\eta} \quad (4.107)$$

donde se definen los siguientes términos:

$$\begin{aligned} C_{\sigma f}^{\mu\alpha} &= \frac{g_{\sigma\pi\pi} g_{\rho\rho\sigma} g_{\rho\pi\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}^{\mu\alpha}[q], & C'_{\sigma f}{}^{\mu\alpha} &= \frac{g_{\sigma\pi\pi} g_{\rho'\rho\sigma} g_{\rho\pi\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}^{\mu\alpha}[q], \\ D_\sigma[s_{24}] &= \frac{1}{s_{24}^2 - m_\sigma^2 + i m_\sigma \Gamma_\sigma}, & K_{\alpha\beta} &= q \cdot s_{31} g_{\alpha\beta} - q_\beta s_{31\alpha}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

con $D_\sigma[s_{24}]$ asociado al propagador del pión.

Para simplificar la expresión dada en la ec. (4.3.6), se hace uso de la conservación de corriente y la simetría de isospín. Esto permite cancelar las partes longitudinales de los propagadores $D_{\rho^0}^{\mu\alpha}[q]$ y $D_{\rho^0}^{\beta\eta}[s_{31}]$. La expresión simplificada es:

$$\mathcal{M}_{F_{\sigma r}}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e \left(C_{\sigma f} - C'_{\sigma f} \right) D_\sigma[s_{24}] D_{\rho^0}[s_{31}] K^\mu{}_\beta r_{31}^\beta \quad (4.109)$$

donde ahora se tiene que:

$$C_{\sigma f} = \frac{g_{\sigma\pi\pi} g_{\rho\rho\sigma} g_{\rho\pi\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}[q], \quad C'_{\sigma f} = \frac{g_{\sigma\pi\pi} g_{\rho'\rho\sigma} g_{\rho\pi\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}[q]. \quad (4.110)$$

Note que la expresión anterior es invariante de norma por sí misma. Haciendo la contracción

de la amplitud con q^μ , se puede mostrar que:

$$q_\mu \mathcal{M}_{F_{\sigma r}}^\mu(p_q, p_2, p_3, p_4) \propto q_\mu K^\mu{}_\beta r_{31}^\beta = (q \cdot s_{31} q \cdot r_{31} - q \cdot r_{31} q \cdot s_{31}) = 0. \quad (4.111)$$

A partir de la relación de VMD, la constante de acoplamiento $g_{\rho\rho\sigma} = -(e/g_\rho) g_{\rho\sigma\gamma}$ (Ver Apéndice [D](#)). Por otra parte, $g_{\rho\sigma\gamma} = 0.63 \pm 0,15 \text{ GeV}^{-1}$ es determinada a través del proceso de decaimiento $\rho \rightarrow \sigma\gamma$, mientras que $g_\rho = 4,962$ fue determinada a través del análisis del Cap. [3](#), por lo que se puede determinar a la constante $g_{\rho\rho\sigma}$ sin problemas. La constante de acoplamiento $g_{\sigma\pi\pi} = 3.69 \pm 1.6$ puede ser determinada a través del proceso de decaimiento $\sigma \rightarrow \pi\pi$.

El caso para el diagrama (b), Fig. [4.7](#), se trabaja de manera similar. Para este caso, el mesón σ es remplazado por el mesón f_0 , lo que provoca remplazar el correspondiente propagador y constantes de acoplamiento, es decir:

$$\mathcal{M}_{F_{f_0 r}}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i e \left(C_{f_0 f}^{\mu\alpha} - C'_{f_0 f}{}^{\mu\alpha} \right) D_{f_0}[s_{24}] K_{\alpha\beta} D_{\rho^0}^{\beta\eta}[s_{31}] r_{31\eta}, \quad (4.112)$$

donde ahora se tiene que:

$$C_{f_0 f}^{\mu\alpha} = \frac{g_{f_0\pi\pi} g_{\rho\rho f_0} g_{\rho\pi\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}^{\mu\alpha}[q], \quad C'_{f_0 f}{}^{\mu\alpha} = \frac{g_{f_0\pi\pi} g_{\rho' f_0} g_{\rho\pi\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}^{\mu\alpha}[q]. \quad (4.113)$$

Usando los mismos argumentos que para el caso anterior, la amplitud se puede simplificar a la expresión:

$$\mathcal{M}_{F_{f_0}}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e \left(C_{f_0 f} - C'_{f_0 f} \right) D_{f_0}[s_{24}] D_{\rho^0}[s_{31}] K^\mu{}_\beta r_{31}^\beta. \quad (4.114)$$

con

$$C_{f_0 f} = \frac{g_{f_0\pi\pi} g_{\rho\rho f_0} g_{\rho\pi\pi}}{g_\rho} m_{\rho^0}^2 D_{\rho^0}[q], \quad C'_{f_0 f} = \frac{g_{f_0\pi\pi} g_{\rho' f_0} g_{\rho\pi\pi}}{g_{\rho'}} m_{\rho'}^2 D_{\rho'}[q], \quad (4.115)$$

y

$$D_{f_0}[s_{24}] = \frac{1}{s_{24}^2 - m_{f_0}^2 + i m_{f_0} \Gamma_{f_0}}. \quad (4.116)$$

Las correspondientes constantes de acoplamiento para el mesón $f(980)$ se toman iguales a las del mesón σ , lo cual podría tener posibles efectos de grandes incertidumbres en la sección eficaz en el régimen de bajas energías.

4.3.7. Canal G

Finalmente, el séptimo y último canal, denominado Canal G, que se considera en este trabajo es uno no resonante para los mesones ρ y ρ' . Este canal viene mediado a través de la emisión de dos piones por parte del fotón correspondiente a la parte leptónica, seguido por la emisión de partículas escalares como estados intermedios, σ o $f_0(980)$, las cuales decaen finalmente a dos piones, ilustrado en la Fig [4.8](#).

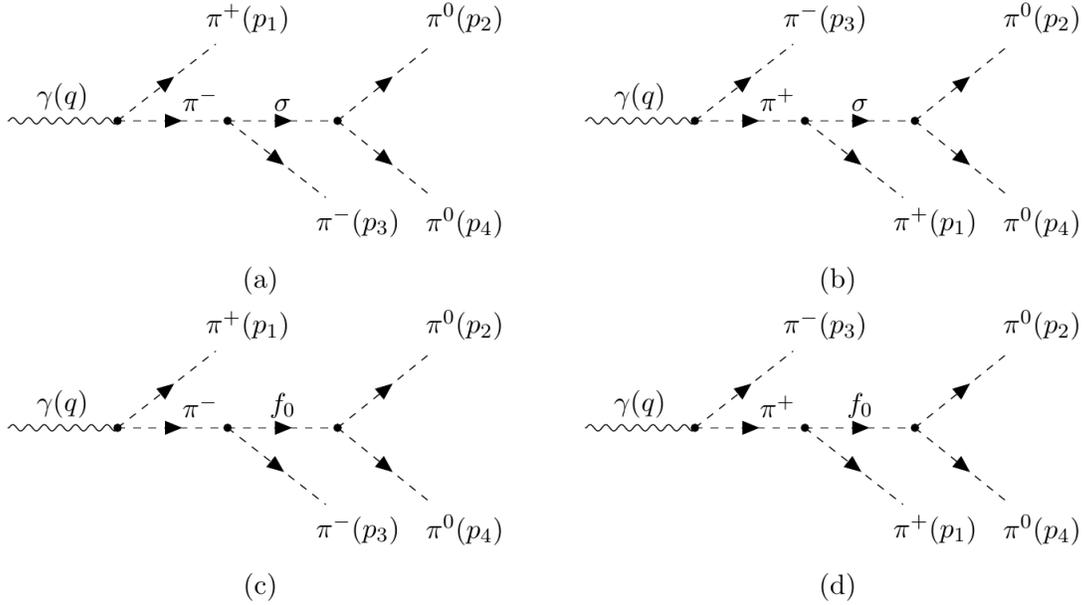


Figura 4.8: Diagramas de Feynman para el Canal G del proceso de producción a 4π : $\pi\pi\sigma(f_0) \rightarrow 4\pi$

Note que la emisión de los piones neutros viene a partir del vértice particular con el mesón escalar, esto limita a solo tener intercambio de piones cargados. Para el diagrama (a) de la Fig. 4.8, la amplitud puede ser escrita como:

$$\mathcal{M}_{G_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e (g_{\sigma\pi\pi})^2 D_\sigma(s_{42}) \frac{(q - 2p_1)^\mu}{(q - p_1)^2 - m_{\pi^-}^2}. \quad (4.117)$$

Análogo al caso realizado en el Canal C, usando simetría de isoespín, se tiene que: $(q - p_1)^2 - m_{\pi^-}^2 = x_1 \cdot q$, con $x_1 = q - 2p_1$. Por lo que la simplificación para esta amplitud queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{G_r}^\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = i e (g_{\sigma\pi\pi})^2 D_\sigma[s_{42}] \frac{x_1^\mu}{x_1 \cdot q}. \quad (4.118)$$

Bajo el intercambio de piones cargados, y siguiendo las mismas consideraciones anteriores para el propagador del pión cargado, la amplitud del diagrama (b), Fig. 4.8, queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{G_r}^\mu(p_3, p_2, p_1, p_4) = -i e (g_{\sigma\pi\pi})^2 D_\sigma[s_{42}] \frac{x_3^\mu}{x_3 \cdot q}, \quad (4.119)$$

donde previamente se definió a $x_3 = q - 2p_3$.

Note que las amplitudes individualmente no son invariantes de norma por sí mismas. Sin embargo, la suma de ambas amplitudes sí crea una amplitud totalmente invariante de norma, la cual queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{G_r}^\mu = i e (g_{\sigma\pi\pi})^2 D_\sigma[s_{42}] L^\mu(x_1, x_3), \quad (4.120)$$

con $D_\sigma[s_{42}]$ previamente definido en la ec. 4.108 y la estructura invariante $L^\mu(\alpha, \beta)$ fue definida en la ec. (4.73).

Ahora, existe la posibilidad que este canal pueda ser mediado por el mesón f_0 (980) como estado intermedio, ver Fig. 4.8 diagramas (c-d). La descripción de los diagramas (c) y (d) (intercambio de piones cargados) puede hacerse siguiendo la misma idea usada en la descripción previa para de los diagramas (a) y (b). La diferencia principal radica en la modi-

ficación en el propagador de las masas, ancho de decaimiento y constantes de acoplamiento asociadas ahora al mesón f_0 . La suma de amplitudes de los diagramas (c) y (d) da como resultado, otra vez, una amplitud invariante de norma, escrita como:

$$\mathcal{M}_{G_r}^\mu = i e (g_{f_0\pi\pi})^2 D_{f_0}[s_{42}] L^\mu(x_1, x_3), \quad (4.121)$$

con $D_{f_0}[s_{42}]$ definido en la ec. (4.116). Nuevamente, como ya se menciona anteriormente, la información de las constantes de acoplamiento y parámetros de los mesones escalares σ y f_0 no está bien determinados a falta de información experimental, lo que produce una fuente de incertidumbre. Sin embargo, se espera que esta falta de precisión no afecte demasiado en la predicción del MDM del mesón ρ , ya que se espera que estas contribuciones sean pequeñas en comparación con las contribuciones de los canales previos.

Finalmente como nota para el lector, en este estudio se considera que el ancho de decaimiento del mesón $\rho(770)$ es dependiente de energía, es decir

$$\Gamma_\rho(q^2) = \frac{(\sqrt{q^2})^{-5} (\lambda[q^2, m_\pi^2, m_\pi^2])^{3/2}}{m_\rho^{-5} (\lambda[m_\rho^2, m_\pi^2, m_\pi^2])^{3/2}} \Gamma_\rho, \quad (4.122)$$

con $\lambda[a, b, c] \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$. Esto en principio es valido para las demás partículas, no obstante para el caso del mesón ω , su ancho de decaimiento es demasiado pequeño como para que pueda tener un efecto considerable. Para los mesones a_1 , σ y f_0 , dadas las incertidumbres experimentales, los anchos de decaimiento están dados en términos de ciertos rangos de energía, por lo que se toma un ancho promedio para estos mesones.

4.4. Sección eficaz del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2 \pi^0 \pi^+ \pi^-$

El cálculo de la sección eficaz para los procesos de aniquilación $e^+ e^- \rightarrow$ hadrones es de suma importancia para el cálculo de las principales contribuciones hadrónicas a $g - 2$ del muón, a_μ^{had} . Sin embargo, para el principal propósito de este trabajo, el cálculo de la

sección eficaz del proceso $e^+(k_+) e^-(k_-) \rightarrow \pi^+(p_1) \pi^0(p_2) \pi^-(p_3) \pi^0(p_4)$ es importante para la determinación del MDM del mesón ρ .

Partiendo de la expresión dada en PDG [169], ec. (4.16), despreciando las masas de los electrones ($m_e = 0$), la expresión para sección eficaz puede definirse como:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\overline{\mathcal{M}_T}|^2}{4 \sqrt{(k_+ \cdot k_-)^2}} \delta^4 \left(q - \sum_{i=1}^n p_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}. \quad (4.123)$$

donde el cuadrado de la amplitud $|\overline{\mathcal{M}_T}|^2$ está definido a partir de la expresión:

$$|\overline{\mathcal{M}_T}|^2 = \frac{1}{s^2} l_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \quad (4.124)$$

El factor $1/s^2$ viene a partir de la expresión del propagador de fotón, mientras que el término $h^{\mu\nu} = J^\mu J^{\nu\dagger}$ es el tensor asociado a la parte hadrónica. Por otro lado, $l_{\mu\nu}$ es el tensor asociado a la parte leptónica, definido por la expresión:

$$l_{\mu\nu} = l_\mu l_\nu^\dagger = e^2 \left(k_{+\mu} k_{-\nu} + k_{-\mu} k_{+\nu} - \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right). \quad (4.125)$$

Note que la parte hadrónica tiene que considerar a todas las amplitudes de los siete diferentes canales descritos con anterioridad. Así, la amplitud al cuadrado $|\overline{\mathcal{M}_T}|^2$ considera las amplitudes al cuadrado de los diferentes canales más las interferencias de los mismos.

Por otra parte, la elección de las variables cinemáticas esta basada en la Ref. [273], donde se trabaja el espacio fase covariante a n cuerpos, el cual se resume en el Apéndice D. Para el caso $n = 4$, es necesario multiplicar la expresión de la sección eficaz por un factor estadístico igual a $\frac{1}{(2\pi)^{12}}$. Esto hace que la expresión obtenida para la sección eficaz a partir de la Ref. [273] coincida con la expresión dada en PDG, ec. (4.123) para un proceso de dispersión a cuatro cuerpos. En términos de las variables cinemáticas, la expresión utilizada para la

sección eficaz total puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \sigma(s) = & \int_{s_{1-}}^{s_{1+}} ds_1 \int_{s_{2-}}^{s_{2+}} ds_2 \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} du_1 \int_{u_{2-}}^{u_{2+}} du_2 \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0, \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} dt_1 \int_{t_{2-}}^{t_{2+}} dt_2 \\ & \times \frac{|\mathcal{M}|^2}{4(2\pi)^8 \sqrt{(k_+ \cdot k_-)^2}} \text{FEF}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Las expresiones para los límites de las variables $t_2, t_1, t_0, u_2, u_1, s_2$ y s_1 y el factor de espacio fase FEF se muestran explícitamente en el Apéndice C, Sec. C.7, las cuales están basadas en la cinemática dada en la Ref. [273].

Los resultados para la sección eficaz de este proceso, ec. (4.126), se obtienen a través de la integración numérica en FORTRAN con ayuda de la sub-rutina Vegas [246]. Sin embargo, esta integración numérica solo puede hacerse si se conocen todos los parámetros involucrados en la sección eficaz, provenientes de los diferentes canales del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+ \pi^-$. Por lo que, surge la necesidad de conocer una serie de constantes de acoplamiento, sumado al hecho que la descripción del proceso incluye al mesón ρ' . Sin embargo, aquí se vuelve relevante el análisis realizado en el Cap. 3, ya que muchos de los valores numéricos para una serie de acoplamientos fueron obtenidos (Ver Cuadros 3.7 y 3.6). Por otro lado, las constantes de acoplamiento que involucran a los mesones a_1, σ y f_0 se han calculado de manera individual (Ver Apéndice D). Se puede decir entonces que la obtención de un resultado numérico para la sección eficaz total del proceso se puede realizar satisfactoriamente. A continuación se mostrarán algunos de los resultados obtenidos.

4.4.1. Sección eficaz para los canales A, B y C del proceso $e^+ e^- \rightarrow$

$$2\pi^0 \pi^+ \pi^-$$

Dados los datos experimentales publicados por BABAR [136] para la sección eficaz el proceso $e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+ \pi^-$, uno puede comparar las contribuciones que tienen los diferentes canales descritos anteriormente. El primer resultado que se muestra es la contribución de los canales mediados a través del mesón ρ . Esta contribución está construida a partir de

las amplitudes de los canales A, B y C, resumidas en las ecs. (4.72) y (4.75), donde se ha dejado a β_0 como parámetro libre. En el trabajo de Czyz ,et.al. [276], muestran cual es la contribución de su denominado canal ρ en comparación con los datos preliminares de BABAR [16] para la sección eficaz del proceso de producción a cuatro piones. En su aproximación, utilizan una especie de constante de acoplamiento global, la cual se ajusta a los datos experimentales así como los anchos de decaimiento para los mesones ρ y ρ' . Por otra parte, en el trabajo de y Gudiño et. al. [15], la descripción del proceso a cuatro piones se hace bajo el contexto de VMD, algo similar al presentado en este trabajo. Sin embargo, se tomaron como referencia a los datos experimentales preliminares de BABAR [16]. Además, las constantes de acoplamiento para el mesón ρ' han sido fijadas bajo la hipótesis de que las razones de las constantes de acoplamiento anulan la información de la resonancia a la que perteneces y por tanto son iguales a las del mesón ρ . El resto de las constantes de acoplamiento involucradas en esta contribución fueron calculadas a partir de evaluaciones individuales para decaimientos del mesón ρ . Por tanto, los resultados aquí mostrados no pueden ser directamente comparables con los trabajos antes mencionados ya que, en primer lugar y como punto relevante a lo largo de este trabajo, los valores de las constantes de acoplamiento se ha fijado a partir de un análisis que involucra un cierto número de procesos de decaimiento y secciones eficaces (Ver Cap. 3). Luego, se ha mostrado que en conjunto, los canales A, B y C forman una amplitud invariante de norma, por lo que su contribución individual a la sección eficaz total no puede ser mostrada. En la Fig. 4.9, se muestra el resultado teórico obtenido para la contribución de los canales A, B y C a la sección eficaz total del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ para valores de $\beta_0 = 1, 2$ y 3 , esto con la finalidad de mostrar que tan sensible es esta observable al dicho parámetro. Note que la contribución de los canales A, B y C se vuelve relevante a partir de energías aproximadas $\sqrt{s} > 1.3$ GeV. Además, note que el valor más óptimo a considerar en la descripción del proceso para el parámetro libre es $\beta_0 = 2$, ya que su contribución se ajusta mejor a la descripción de los datos experimentales a partir de $\sqrt{s} > 1.6$. Esto es importante, ya que se espera que esta

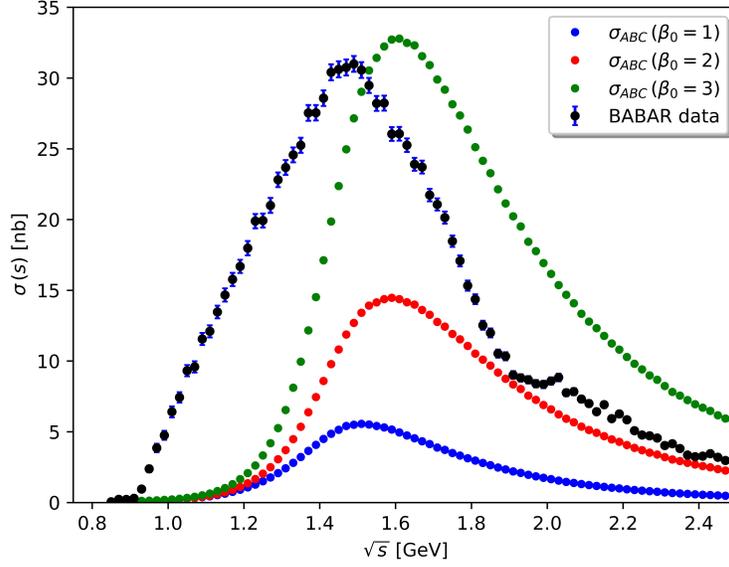


Figura 4.9: Contribución de los canales A, B (con $\beta_0 = 1, 2, 3$) y C a la sección eficaz total del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2 \pi^0 \pi^+ \pi^-$ comparado respecto a los datos experimentales de BABAR [17].

contribución cobra relevancia en la descripción de la sección eficaz total a partir de ese rango de energía. Las contribuciones para los casos $\beta_0 = 1$ y 3 muestran la sensibilidad de esta observable al parámetro β_0 . Por un lado, la contribución a $\beta_0 = 1$ queda muy por debajo de los datos experimentales, mientras que la contribución obtenida a $\beta = 3$ queda por encima de los datos experimentales a energías superiores de $\sqrt{s} > 1.6$. Este punto es interesante, ya que nos dice que el ajuste al valor de β_0 debe estar alrededor de dos, y por lo mencionado anteriormente, se sabe que β_0 está directamente relacionado con el MDM del mesón ρ .

4.4.2. Sección eficaz para el proceso $e^+ e^- \rightarrow 2 \pi^0 \pi^+ \pi^-$ a través del mesón ω

El denominado Canal D es aquel cuya contribución está mediada a través del mesón ω . Las amplitudes que describen este canal están dadas en las ecs. (4.83) y (4.86), las cuales quedan determinadas por una serie de constantes de acoplamiento; $g_{\omega\rho\pi}$, $g_{\omega\rho'\pi}$, g_ρ , $g_{\rho'}$, $g_{\rho\pi\pi}$, $g_{\rho'\pi\pi}$, $g_{3\pi}$ y así como de la fase relativa entre los mesones ρ y ρ' , asociada al valor del ángulo

θ . Gracias al análisis realizado en Cap.3, todos los valores para estas constantes de acoplamientos han sido determinados a través de diferentes modos de decaimiento, primeramente insensibles al mesón ρ' , y luego con la inclusión del decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$, se incluyen las contribuciones del mesón ρ' y el término de contacto (proporcional al acoplamiento $g_{3\pi}$). La inclusión de la información para las secciones eficaces de los procesos $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ (medida por SND [251], CMD2 [92], BABAR [88] y BESII [252]) y el proceso $e^+e^- \rightarrow \omega\pi \rightarrow 2\pi^0\gamma$ (medida por SND [250, 253, 254] y CDM2 [255]), se volvió relevante para la obtención de los resultados presentados en los Cuadros 3.6 y 3.7. Tomando las expresiones dadas en las ecs. (4.83) y (4.86), uno puede calcular la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ a través del canal del mesón ω (con ayuda de la cinemática dada en el Apéndice D).

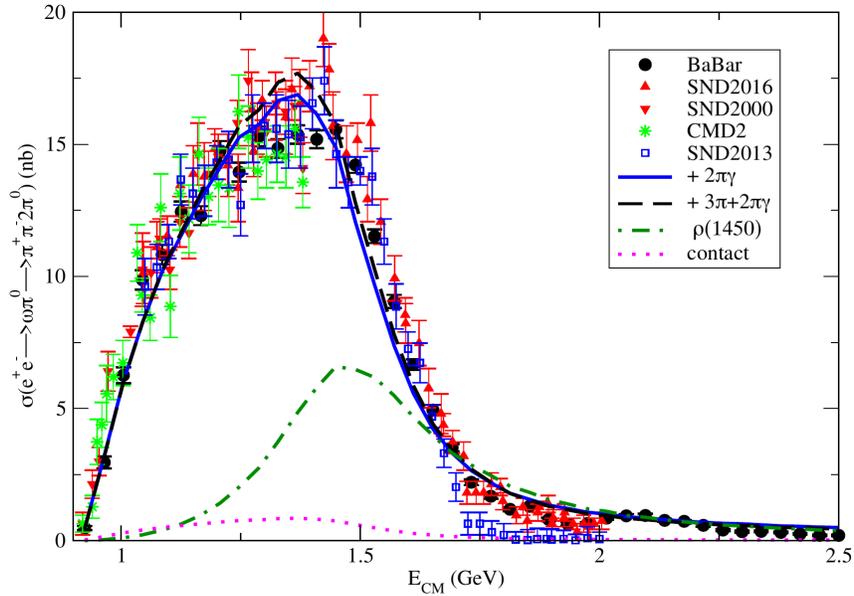


Figura 4.10: Mediciones de la sección eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ de diferentes experimentos (BABAR [17], SND [250, 253, 254] y CMD2 [255]) como función de la energía del centro de masa E_{CM} con incertidumbres estáticas. Los datos medidos en otras desintegraciones distintas de $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ se escalan por el apropiado branching ratio. La línea sólida azul corresponde a la evaluación del modelo considerando los valores para parámetros dados en el Cuadro 3.7, mientras que la línea negra punteada corresponde a la evaluación del modelo considerando los valores de los parámetros dados en el Cuadro 3.6

En la Fig.4.10, se muestran los resultados teóricos encontrados usando los valores para las

constantes de acoplamiento conocidas, Cuadros 3.6 (línea entrecortada) y 3.7 (línea sólida). También se muestra el conjunto de datos experimentales presentados por BABAR [17]. Los datos para SND [250, 253, 254] y CMD2 [255] corresponden a datos escalados ya que fueron obtenidos a partir de la medición de la sección eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi\pi\gamma$. Observe que existe una buena descripción de los datos utilizando cualquiera de los dos conjuntos de parámetros. También se muestra la contribución del mesón ρ' (línea discontinua verde) para ilustrar su relevancia, ya que juega un papel importante, no trivial, para el término de interferencia, la fase θ , y por tanto para explicar adecuadamente los datos. Por otra parte, también se muestra la contribución no resonante ($g_{3\pi}$) procedente de la desintegración del mesón ω (término de contacto), la cual puede verse afectada por el procedimiento de sustracción del fondo seguido por los experimentos. Es importante mencionar que este canal juega un papel importante en la descripción de la sección eficaz total del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ total [17], ya que se trata de la contribución dominante a bajas energías de la cual se podría extar información relevante.

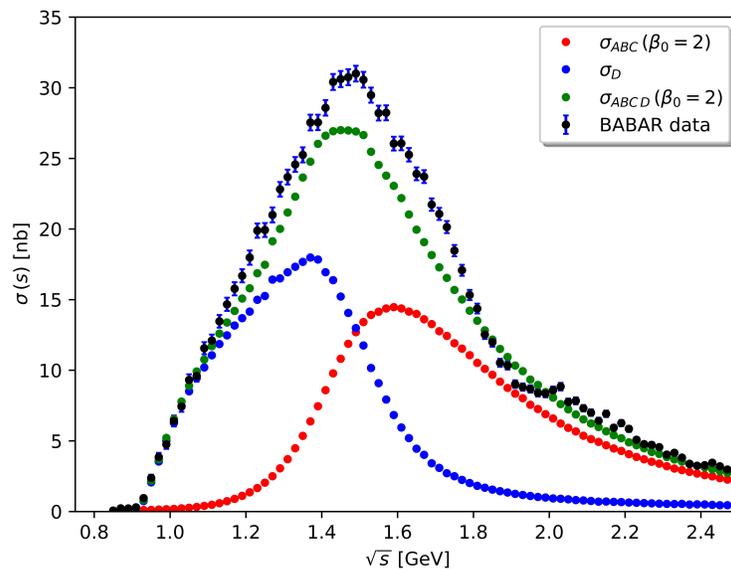


Figura 4.11: Contribución de los canales A, B (con $\beta_0 = 2$), C y D a la sección eficaz total del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ comparados respecto a los datos experimentales de BABAR [17].

Tomando como referencia el valor $\beta_0 = 2$, en la Fig. 4.11, se muestra la contribución que

resulta de a partir de los canales A, B, C y D. Note que parece que la descripción bajo VMD de estos cuatro primeros canales es adecuada para describir de forma adecuada la sección eficaz experimental del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$. Sin embargo, es evidente que es necesario incluir la contribución de los canales restantes (E, F y G). Dicha contribución se espera sea pequeña pero relevante en la descripción de los datos experimentales.

4.4.3. Resultados para la sección eficaz total.

Ahora, es necesario presentar los resultados para la sección eficaz total. En la Fig. 4.12, se muestra la sección eficaz individual obtenida para los diferentes canales junto a la contribución total proveniente de la suma de todos los canales (considerando las diferentes interferencias entre ellos). Para el caso de los canales A, B y C, ya se ha mencionado que la descripción para el caso particular $\beta_0 = 2$ se asemeja más a los datos experimentales dentro del rango de energía $\sqrt{s} > 1.6$ GeV. Dado que estos son los canales que contribuyen más a altas energías, el resultado de la interferencia con otros canales no tiene variaciones considerables. También se ha mostrado que la contribución del mesón ω , Canal D, tiene relevancia en el régimen de bajas energías y que la contribución de los mesones ρ y ρ' tiene una interferencia destructiva, ya que la sección eficaz para este canal decae rápidamente hasta alcanzar un mínimo.

Los canales que presentan mayores incertidumbres son aquellos que involucran a los mesones a_1 , σ y f_0 , es decir, los canales E, F y G. Primeramente porque los parámetros de los mismos (masa puntual y ancho de decaimiento) no están bien establecidos experimentalmente. Por ejemplo, para el caso del mesón $\sigma(600)$, en PDG [169], la masa queda establecida en un rango de energía alrededor de los 400-600 MeV, mientras que su ancho de decaimiento está establecido alrededor de 100-800 MeV. Para el caso del mesón $a_1(1260)$, a pesar de que se tiene una masa puntual de 1230 ± 40 MeV, la incertidumbre en el ancho de decaimiento es relevante, ya que tiene un rango de energía que va de 250-600 MeV y lo mismo sucede en el caso del mesón $f_0(980)$, donde la masa puntual es de 990 ± 20 pero su ancho de decaimiento

varia en el rango de 10-100 MeV. Por esta razón es que se han tomado como valores de referencia a las masas promedio y anchos de decaimiento promedio para dichos mesones; a_1 , σ y f_0 .

Por otra parte, las constantes de acoplamiento que involucran a los mesones ρ , a_1 , σ y f_0 , han sido calculadas individualmente (Ver Apéndice E). Sin embargo, a falta de información experimental para los diferentes modos de decaimiento de los mesones σ , a_1 , f_0 y ρ' hace que no todas las constantes de acoplamiento puedan ser determinadas a partir de los principios de VMD. Una solución que se ha propuesto es que algunas de ellas sean iguales a otras, por ejemplo, las constantes de acoplamiento que involucran al mesón f_0 con otros mesones se han tomado iguales a las del mesón σ . También aquellas que involucran a los mesones ρ' y a_1 son tomadas iguales a aquellas que involucran a ρ y a_1 . Una alternativa factible para evitar estas suposiciones sería dejarlos como parámetros libres y ajustarlas junto con el parámetro β_0 a los datos experimentales de la sección eficaz total del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$.

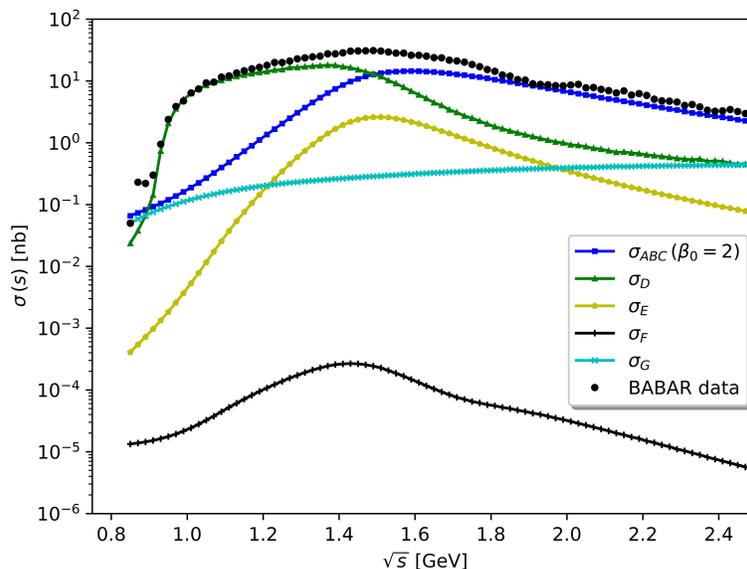


Figura 4.12: Resultado para las diferentes secciones eficaces para los diferentes canales que involucran a los mesones ρ , ρ' , ω , a_1 , σ y f_0 (La contribución del mesón ρ se resume en los canales A, B ($\beta_0 = 2$) y C que en conjunto forman una amplitud invariante de norma) para la descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$. Los resultados son comparados respecto a los datos experimentales de BABAR [17]

El resultado final para la sección eficaz total del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ se muestra en la Fig. 4.13. Justo como se puede observar, el resultado para la sección eficaz es sensible al cambio en el valor del parámetro β_0 , análogo a lo observado en los canales A, B y C mostrados con anterioridad.

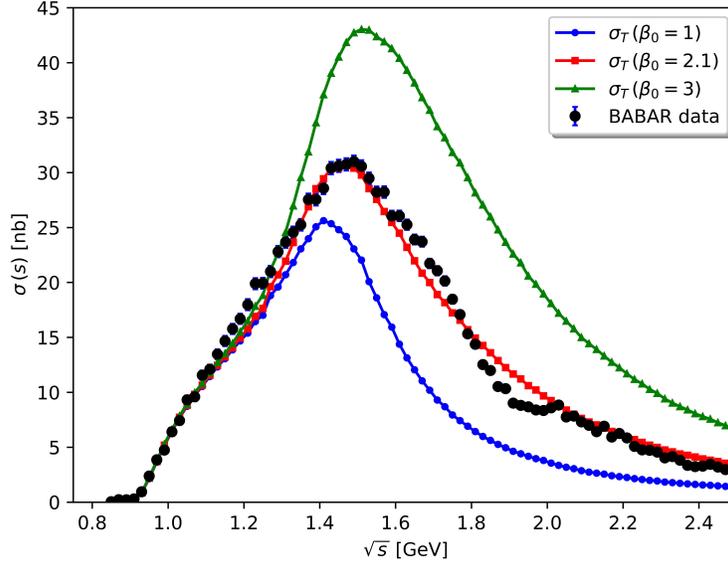


Figura 4.13: Resultados para la sección eficaz total del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$, obtenida a partir de la suma de todos los canales presentados a lo largo de este trabajo que son necesarios en la descripción del proceso. Dichos resultados son comparados con los datos experimentales de BABAR [17].

En la Fig. anterior se puede ver que la elección $\beta_0 = 2.1$ reproduce dentro de las barras de error los resultados experimentales. Sin embargo existen pequeñas diferencias que no se entienden del todo, por ejemplo: la brecha que existe alrededor de $s = 1.2$ GeV, la predicción teórica no se ajusta del todo a los datos experimentales, lo mismo sucede alrededor de $s = 1.6$ GeV. Se podría pensar que la diferencia se debe a efectos de otras resonancias que no se incluyen dentro de este análisis, ya sea en conjunto con los mesones ρ , ρ' provenientes del fotón o en lugares como el decaimiento del mesón ω a un mesón ρ y un π en el canal del mesón ω (Canal D), ya que la interferencia de estas resonancias podría ser considerable y mejorar los resultados en esta región.

En la Fig. 4.14, se muestra la región de baja energía, < 1 GeV, donde se puede observar

que los datos experimentales son bien reproducidos bajo los resultados obtenidos a partir de nuestra descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$.

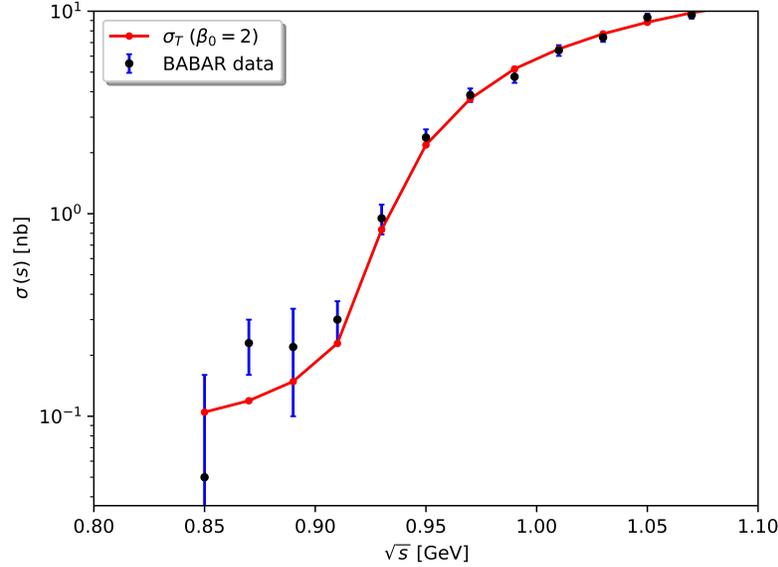


Figura 4.14: Resultado preliminar para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\pi^+\pi^-$ obtenida para la región de bajas energías, de 0.6 a 1.1 GeV, en comparación con los resultados experimentales de BABAR [17]

4.5. Factor de Forma eléctrico y el MDM

Se sabe que la magnitud del momento dipolar magnético está directamente relacionada al parámetro β_0 en unidades de $\frac{e}{2m_\rho^2}$. Sin embargo, para garantizar que dicho parámetro esté en unidades de carga eléctrica e adecuadas, es necesario renormalizar. Esto se consigue con ayuda del factor de forma de carga eléctrica para el mesón ρ , ($F_\rho(q^2)$). Este factor se obtiene a través de las reglas de Feynman utilizadas en la descripción del Canal B, ec. (4.39). Utilizando sólo el primer término del vértice entre los tres mesones ρ , se tiene que:

$$F_\rho(q^2) = \frac{g_{\rho\pi\pi} m_\rho^2}{g_\rho} \frac{1}{q^2 - m_\rho^2 + i m_\rho \Gamma_\rho(q)} - \frac{g_{\rho'\pi\pi} m_{\rho'}^2}{g_{\rho'}} \frac{1}{q^2 - m_{\rho'}^2 + i m_{\rho'} \Gamma_{\rho'}(q)}. \quad (4.127)$$

Esta expresión debe cumplir con la condición de que en el límite $q^2 \rightarrow 0$, $F_\rho(q^2) \rightarrow -1$; lo cual nos dice que la relación entre las constantes de acoplamiento es:

$$\frac{g_{\rho\pi\pi}}{g_\rho} - \frac{g_{\rho'\pi\pi}}{g_{\rho'}} = 1. \quad (4.128)$$

Usando los valores encontrados en el Cap. 3, Tabla 3.6, la igualdad mostrada en la ec. 4.128 no se cumple ya que el lado derecho de dicha expresión es igual a 0.772. Por tanto, es necesario hacer una renormalización al grupo de canales A, B y C, que en conjunto son invariantes de norma. Esto garantiza que la carga eléctrica sea exactamente igual a 1 y, por tanto, el parámetro β_0 , así como los demás multipolos, estén en unidades de carga e correctas. Por lo tanto, considerando el valor $\beta = 2.1$ usado en la descripción de la sección eficaz, se tiene que:

$$|\bar{\mu}| = \frac{1}{0.772} \beta_0 = \frac{1}{0.772} (2.1) = 2.72 \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]. \quad (4.129)$$

Este es el resultado obtenido para el momento dipolar magnético del mesón ρ , considerando los valores centrales para todas las constantes de acoplamiento involucradas así como los valores puntuales de las diferentes masas de las partículas involucradas en los diferentes canales que conforman la descripción del proceso $e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+ \pi^-$. Las conclusiones generales para este capítulo serán presentadas en el Cap. 6.

Capítulo 5

Decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ y el MDM del muón ($g - 2$)

En este capítulo, se hace la descripción del proceso de decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$, fijando especialmente la atención a la parte dependiente del modelo. Luego, se calcula el factor de corrección electromagnético $G_{\text{EM}}(t)$ dentro de la región definida por las incertidumbres de los parámetros involucrados y posteriormente se obtiene la correspondiente contribución a $\Delta a_\mu^{\text{HVP,LO}}$.

Como ya se mencionó anteriormente en la Introducción de este trabajo, el momento dipolar magnético del muón es un escenario interesante en el que la precisión experimental y teórica se encuentran actualmente bajo un gran escrutinio. En abril del 2021, el experimento g-2 del Fermilab E898 [18-21] publicó su primer resultado para momento magnético del muón $a_\mu \equiv (g_\mu - 2)/2$ basado en los datos de Run-1. Cuando se combina este resultado con la medición anterior del experimento E821 (BNL) [22], el resultado tiene una tensión de 4.2σ respecto al valor teórico reportado en el White Paper [12] de la Iniciativa Teórica Muon $g - 2$ [14]. Sin embargo, el tema no termina aquí, el nuevo resultado de FNAL en Fermilab correspondiente a los datos de Run-1/2/3 [23], al comparar con la predicción del 2020 [12], arroja una discrepancia de 5σ uno respecto al otro. No obstante, aún se espera

un aumento significativo de la estadística, lo que exige un esfuerzo teórico para llegar a un manejo sólido de las diferentes contribuciones. Por otra parte, se sabe que la contribución hadrónica principal viene a través de la polarización de vacío (HVP,LO), que presenta las mayores incertidumbres y las cuales son del mismo orden que las experimentales, por lo que una mejor descripción teórica es de suma importancia. Además, se ha mencionado que la determinación de esta contribución suele definirse en términos de un enfoque dispersivo que utiliza datos de procesos e^+e^- [12, 14]. También se ha mencionado previamente que los cálculos realizados en *lattice* están alcanzando cierta región de precisión, aunque todavía existen diferencias en las predicciones que hay que comprender [63]. Por tanto, se espera que los futuros experimentos para $g - 2$ en J-PARC [60], PSI [61] y Fermilab [62] den un paso significativo dentro de esta contribución particular.

Por otra parte, la estimación del momento dipolar magnético del muón basada en datos del leptón τ^- , requiere de la incorporación de las correcciones de todas las contribuciones que rompen la hipótesis de CVC. En particular, para determinar la contribución hadrónica principal, $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$, determinada a partir del modo de decaimiento a dos piones, se requiere incorporar a la corrección Δa_μ todas las fuentes de rompimiento de isospín $R_{\text{IB}}(t)$. Esta tiene en cuenta las correcciones de: espacio fase, radiación del estado final, electromagnética y la corrección debida a los factores de forma. También se deben tomar en cuenta las correcciones electro-débiles de cortas distancias S_{EW} [74-78]. Dichas correcciones han sido calculadas anteriormente [13], y se sabe que la principal fuente de incertidumbre procede de la relación entre los factores de forma [79, 80] y del término asociado a la corrección electromagnética [13]. Es por esta razón que esta parte del trabajo está centrada en la obtención una de estas correcciones, la electromagnética, a través del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^+\pi^-\nu_\tau\gamma$ (no visto experimentalmente). Debido a la falta de información experimental, esta debe ser estimada teóricamente.

En la descripción de este decaimiento a través de la aproximación quiral (ChPT) a orden $\mathcal{O}(p^4)$ [3, 4], se obtuvo que la contribución de la corrección electromagnética para

$\Delta a_\mu^{(HVP,LO)}$ es del orden de -10×10^{-11} . Sin embargo, más recientemente, bajo una descripción quiral con resonancias [7] se ha encontrado que la contribución puede ser del orden de $(-15.9^{+5.7}_{-16.0}) \times 10^{-11}$ a $\mathcal{O}(p^4)$ y de $(-76 \pm 46) \times 10^{-11}$ a $\mathcal{O}(p^6)$, lo cual confirma las estimaciones previas al correspondiente orden $\mathcal{O}(p^4)$, pero a orden $\mathcal{O}(p^6)$, se tiene una gran contribución dependiente del modelo utilizado, con grandes incertidumbres. Una descripción del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau l^+ l^-$, bajo la misma aproximación quiral, se ha realizado para estudiar la masa invariante del di-leptón, mostrando los efectos de la contribución dependiente de modelo [290]. Por otro lado, también se cuenta con una descripción para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ basado en la aproximación de VMD, en la cual se encontró y se menciona que la parte dependiente del modelo puede ser relevante en ciertas observables como: el espectro del fotón y en la distribución del invariante de masa del dipión [8, 9]. Además de que se identificó como fuente principal al mesón ω como estado intermedio. Tras la inclusión de las correcciones virtuales, una parametrización para el factor electromagnético fue obtenida, lo que dio lugar a una contribución para $\Delta a_\mu^{HVP,LO}$ de -37×10^{-11} [8]. Un análisis exhaustivo nuevamente considerando los datos experimentales para el decaimiento del leptón τ^- a dos piones es necesario. Por ello, en esta parte del trabajo se hace una nueva revisión del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$, siguiendo la misma línea de trabajo como en las Refs. [8, 9], poniendo especial atención a la parte dependiente de modelo donde además, como se discute más adelante, se incluye la contribución del mesón ρ' . Por otra parte, el momento di-polar del mesón del mesón ρ y los acoplamientos entre los mesones ρ , ρ' , ω y π son relevantes en la descripción del proceso $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$. Estos son parámetros libres cuyos valores ya han sido obtenidos previamente en el Cap. 3. Por otro lado, para mostrar la contribución de la parte dependiente de modelo en otras observables, se calcula la distribución de la masa invariante de di-mesón (además de la distribución angular), eligiendo una energía de corte para el fotón apropiada y un valor preciso para el acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$. Luego, el factor de corrección radiativa para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$, $G_{EM}(t)$, es calculado dentro de la región definida por las incertidumbres de dichos parámetros y la correspondiente contribución

para $\Delta a_\mu^{HVP,LO}$ es obtenida. Al final se presenta una discusión sobre los resultados.

5.1. Decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$

Estableciendo la notación: $\tau^-(P) \rightarrow \pi^-(p_-) \pi^0(p_0) \nu_\tau(q) \gamma(k, \epsilon^*)$ para la descripción del proceso radiativo, donde los correspondientes cuadrimentos están escritos entre paréntesis y ϵ^* es el correspondiente tensor de polarización del fotón. Definiendo ciertas variables auxiliares en términos de los cuadrimentos: $Q \equiv p_0 - p_-$, $k_- \equiv p_- + p_0$, $k_+ \equiv k_- + k$ y las variables invariantes $t = k_-^2 = (p_0 + p_-)^2$ y $t' = k_+^2 = (k_- + k)^2 = t + 2k_- \cdot k$. La amplitud total, en el límite de simetría de isospín ($m_{\pi^-} = m_{\pi^0}$), para el proceso de decaimiento radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ puede ser escrita de forma general como [4, 291]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = e G_F V_{ud}^* \epsilon^{*\mu} & \left[F_\nu \bar{u}(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (m_\tau + \not{P} - \not{k}) \gamma_\mu u(P) \right. \\ & \left. + (V_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}) \bar{u}(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(P) \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde la primera línea corresponde a la radiación del leptón τ^- y $F_\nu = Q_\nu \frac{f_+[t]}{2P \cdot k}$, siendo $f_+[t]$ el factor de forma hadrónico definido a través del elemento de matriz $\langle \pi^0 \pi^- | \bar{d} \gamma^\mu u | 0 \rangle = f_+[t] (p_- - p_0)^\mu$. La invariancia de norma ($\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + k_\mu$) implica las identidades de Ward

$$k^\mu V_{\mu\nu} = (p_- - p_0)_\nu f_+[t], \quad k^\mu A_{\mu\nu} = 0. \quad (5.2)$$

Los tensores $V_{\mu\nu}$ y $A_{\mu\nu}$, corresponden a las contribuciones Vectorial y Axial de la transición $W^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \gamma$ respectivamente. Imponiendo la ec. (5.2) y la invariancia de Lorentz, se tiene la siguiente expresión para el tensor Vectorial $V_{\mu\nu}$ dependiente de estructura:

$$V_{\mu\nu} = -f_+[t'] \frac{p_-^\mu}{p_- \cdot k} (Q - k)_\nu - f_+[t'] g_{\mu\nu} + \frac{f_+[t'] - f_+[t]}{k_- \cdot k} k_{-\mu} Q_\nu + \hat{V}_{\mu\nu}, \quad (5.3)$$

con

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\mu\nu} \equiv & v_1 p_- \cdot k F_{\mu\nu}[p_-] + v_2 p_0 \cdot k F_{\mu\nu}[p_0] \\ & + v_3 p_0 \cdot k p_- \cdot k L_\mu(p_-, p_0) p_{-\nu} + v_4 p_0 \cdot k p_- \cdot k L_\mu(p_-, p_0) k_{+\nu},\end{aligned}$$

mientras que la parte axial queda definida por el tensor

$$\begin{aligned}A_{\mu\nu} = & i a_1 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Q^\rho k^\sigma + i a_2 k_{+\nu} \epsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} k^\lambda p_-^\rho p_0^\sigma \\ & + i a_3 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k_+^\sigma + i a_4 (p_0 + k)_\nu \epsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} k^\lambda p_-^\rho p_0^\sigma,\end{aligned}$$

donde, otra vez, se hace uso de las estructuras invariantes de norma $F_{\mu\nu}[p]$ y $L_\mu(\alpha, \beta)$ definidas anteriormente en las ecs. (4.35) y (4.73) del Cap.4, respectivamente. Las estructuras tensoriales $V_{\mu\nu}$ y $A_{\mu\nu}$ dependen de los factores de forma vectoriales (v_i) y axiales (a_i) respectivamente. Tomando en cuenta de que $t' = (P - q)^2 = t + 2 k_- \cdot k$, el teorema de Low [11] manifiesta que:

$$V_{\mu\nu} = -f_+[t] \frac{p_{-\mu}}{p_- \cdot k} Q_\nu - f_+[t] F_{\mu\nu}[p_-] + 2 \frac{d f_+[t]}{d t} p_0 \cdot k L_\mu(p_0, p_-) Q_\nu. \quad (5.4)$$

5.1.1. Amplitud de decaimiento en el contexto de VMD

La amplitud para el proceso radiativo $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ en el contexto de VMD se obtiene de forma similar a como se hizo en las Refs. [8, 9]. La única y principal diferencia es la forma en la que se trabaja para exhibir la invariancia de norma explícitamente, aislando la parte que contribuye a la identidad de Ward en el vértice $\rho\rho\gamma$ y cómo contribuyen a la estructura general de la ec. (5.1). En la Fig. 5.1, se muestran los diagramas que contribuyen a la parte sin estructura independiente y dependiente de modelo. Las amplitudes pueden ser descritas individualmente como:

Radiación del leptón τ

La amplitud para la radiación del leptón τ^- , diagrama (a) de la Fig. 5.1, puede escribirse como:

$$\mathcal{M}_{(a)} = i \frac{e G_F V_{ud}^*}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} G_\rho Q_\lambda D_\rho^{\chi\lambda}[k_-] \bar{u}(q) \gamma_\chi (1 - \gamma_5) \frac{1}{\not{P} - \not{k} - m_\tau} \not{\epsilon}^* u(P), \quad (5.5)$$

donde, $D_\rho^{\mu\nu}[k_-]$ representa al propagador del mesón ρ , $g_{\rho\pi\pi}$ es el acoplamiento $\rho - \pi - \pi$, G_ρ es el acoplamiento débil determinado a partir del acoplamiento $W - \rho$, G_F es la constante de Fermi y V_{ud}^* es el correspondiente elemento de matriz CKM. Después de desarrollar algunos términos, la amplitud puede ser escrita como:

$$\mathcal{M}_{(a)} = -i C Q_\lambda \left[\underbrace{D_\rho^{\chi\lambda}[k_-] \frac{P \cdot \epsilon}{P \cdot k}}_{a_1} - \underbrace{D_\rho^{\alpha\lambda}[k_-] \frac{1}{2 P \cdot k} (k_\alpha \epsilon^\chi - \epsilon_\alpha k^\chi + i k^\beta \epsilon^\mu \epsilon^\chi_{\alpha\beta\mu})}_{a_2} \right] l_\chi,$$

donde $C \equiv \frac{e G_F V_{ud}^*}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} G_\rho$, y la corriente leptónica queda definida por la expresión: $l_\chi \equiv \bar{u}(q) \gamma_\chi (1 - \gamma_5) u(P)$. Los términos etiquetados como a_2 son invariantes de norma por sí mismos, mientras que los términos etiquetados como a_1 necesitan de una combinación de otros términos para ser invariante de norma.

Radiación del estado intermedio ρ

El diagrama (b) de la Fig. 5.1 muestra la emisión del fotón a partir del estado intermedio, mesón ρ . Esta contribución contiene la información de la estructura electromagnética del vértice $\rho\rho\gamma$, en particular la información del momento dipolar magnético del mesón ρ justo como se ha visto en el Cap. 4, el cual contribuye a la parte dependiente de modelo. La amplitud correspondiente para este diagrama queda escrita como:

$$\mathcal{M}_{(b)} = -C Q_\lambda D_\rho^{\nu\lambda}[k_-] \Gamma_{\alpha\mu\nu} \epsilon^{*\alpha} D_\rho^{\chi\mu}[k_+] l_\chi, \quad (5.6)$$

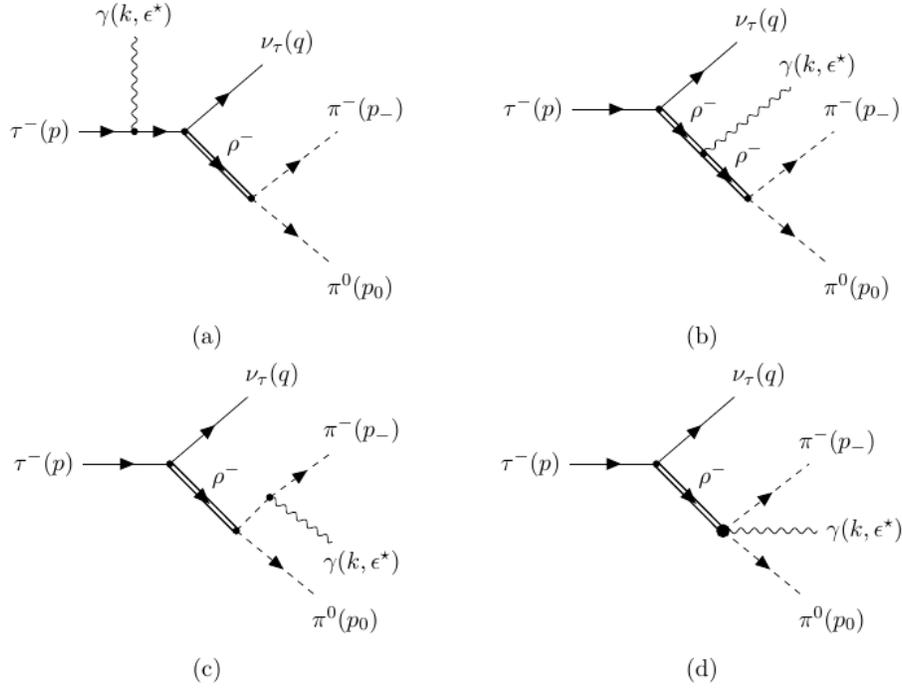


Figura 5.1: Principales diagramas que contribuyen a la parte sin estructura independiente y dependiente de modelo para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$.

donde $\Gamma_{\alpha\mu\nu}$ es el vértice electromagnético $\rho\rho\gamma$, con la carga eléctrica e factorizada. Por lo visto en el Cap. 4, Sec. 4.3, se sabe que este vértice debe cumplir con la identidad de Ward:

$$k^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu} = \left[iD_{\mu\nu}^\rho[k_+] \right]^{-1} - \left[iD_{\mu\nu}^\rho[k_-] \right]^{-1}. \quad (5.7)$$

Bajo la inclusión de correcciones absorbtivas al vértice electromagnético y propagador, en el límite quiral (para las partículas en el lazo): $\Gamma^{\alpha\mu\nu} = (1 + i\gamma) \Gamma_{\alpha\mu\nu}^0$ con $\gamma \equiv \frac{\Gamma}{m_\rho}$ y $\Gamma_{\alpha\mu\nu}^0$ definido para este caso como:

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu}^0 = (k_+ + k_-)_\alpha g_{\mu\nu} + \beta_0 (k_\mu g_{\nu\alpha} - k_\nu g_{\alpha\mu}) - k_{+\mu} g_{\nu\alpha} - k_{-\nu} g_{\alpha\mu}, \quad (5.8)$$

el cual está escrito en términos de los correspondientes cuadrimentos que describen a este proceso en particular, con $\beta(0)$ el momento dipolar magnético del mesón ρ en unidades de $e/2m_\rho$. El valor canónico del MDM usado para partículas sin estructura como el bosón W

es $\beta_0 = 2$. En el Cap. 4 se ha mostrado que el valor encontrado para μ_ρ , así como para las diferentes predicciones teóricas inspirados en QCD, Cuadro 1.2, apuntan a un valor alrededor de ese orden para el mesón ρ .

Por otra parte, es necesario trabajar la relación entre el vértice electromagnético y los propagadores para hacer explícita la invariancia de norma de la amplitud. Los detalles pueden parecer irrelevantes, ya que las reglas de Feynman correspondientes se construyeron siguiendo esa condición. Sin embargo, es de interés mostrar cuales son las partes independientes y dependientes de modelo. Dado que el momento dipolar magnético entra en la parte dependiente de modelo, la parte independiente se puede aislar y se puede dejar como parámetro libre al MDM del mesón ρ . Esto se hace con la idea de observar sus posibles efectos en las observables del proceso. Partiendo de la identidad de Ward, ec. (5.7), se puede mostrar que la diferencia de propagadores inversos es igual a:

$$\left[i D_{\mu\nu}^\rho[k_+] \right]^{-1} - \left[i D_{\mu\nu}^\rho[k_-] \right]^{-1} = (1 + i\gamma) \left[g_{\mu\nu} (k_+ + k_-) \cdot k - k_{+\mu} k_{+\nu} + k_{-\mu} k_{-\nu} \right]. \quad (5.9)$$

Sin embargo, en la amplitud $\mathcal{M}_{(b)}$, se tiene la estructura $\epsilon^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu}$, la cual puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \epsilon^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu} &= \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} \left[\left[i D_{\mu\nu}^\rho[k_+] \right]^{-1} - \left[i D_{\mu\nu}^\rho[k_-] \right]^{-1} \right] \\ &+ (1 + i\gamma) \left[-\epsilon^\alpha F_{\alpha\nu}[k_+] k_{+\mu} - \epsilon^\alpha F_{\alpha\mu}[k_-] k_{-\nu} + \epsilon_\alpha \beta_0 (k_\mu g_{\nu\alpha} - k_\nu g_{\mu\alpha}) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Al sustituir en la amplitud $\mathcal{M}_{(b)}$ y hacer las correspondientes simplificaciones, la amplitud queda escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(b)} &= i C Q_\lambda \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} \left[D_\rho^{\chi\lambda}[k_-] - D_\rho^{\chi\lambda}[k_+] \right] l_\chi - C (1 + i\gamma) Q_\lambda D_\rho^{\nu\lambda}[k_-] \\ &\times \left[-\epsilon^\alpha F_{\alpha\nu}[k_+] k_{+\mu} - \epsilon^\alpha F_{\alpha\mu}[k_-] k_{-\nu} + \epsilon^\alpha \beta_0 (k_\mu g_{\nu\alpha} - k_\nu g_{\mu\alpha}) \right] D_\rho^{\chi\mu}[k_+] l_\chi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Radiación del pión

La amplitud que describe la radiación proveniente del pión cargado, diagrama (c) en Fig. 5.1, puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_{(c)} = i C \frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} (Q - k)_\lambda D_\rho^{\chi\lambda}[k_+] l_\chi. \quad (5.12)$$

Término de contacto

La amplitud del término de contacto, diagrama (d), Fig. 5.1, queda descrita por la expresión :

$$\mathcal{M}_{(d)} = i C \epsilon_\lambda D_\rho^{\chi\lambda}[k_+] l_\chi. \quad (5.13)$$

Las amplitud que resulta de la combinación de las amplitudes para los diagramas (a)-(d), Fig. 5.1, se puede escribir de forma general como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = e G_F V_{ud}^* \epsilon^{*\mu} \left\{ f_+[t] L_\mu(p, p_-) Q_\nu + (f_+[t'] - f_+[t]) L_\mu(k_+, p_-) Q_\nu \right. \\ \left. - \frac{f_+[t]}{2 P \cdot k} \left[F_{\mu\nu}[Q] Q \cdot k + i Q^\alpha k^\beta \epsilon_{\nu\alpha\beta\mu} \right] - f_+[t'] F_{\mu\nu}[p_-] + \hat{V}_{\mu\nu} \right\} l^\nu, \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde se ha hecho uso de la relación $G_\rho g_{\rho\pi\pi}/\sqrt{2} = m_\rho^2$ y $l^\nu \equiv \bar{u}(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(P)$. Por otro lado, como se vio anteriormente, la estructura $\hat{V}_{\mu\nu}$, ec. (5.4), queda determinada a partir de los factores de forma v_i 's, los cuales, para este modelo, están definidos como:

$$\begin{aligned} v_1 = -v_2 = \beta_0 \frac{[f_+[t'] - f_+[t]]}{2 k_- \cdot k}, \quad v_3 = 0, \\ v_4 = 2 \left(\frac{\beta_0}{2} - 1 \right) \frac{(1 + i\gamma) (f_+[t'] - f_+[t])}{m_\rho^2 k_- \cdot k}, \end{aligned}$$

Es importante mencionar que aquí se ha usado la forma más sencilla para definir el factor de forma, es decir, $f_+[t] \equiv f_\rho[t] = m_\rho^2/(m_\rho^2 - t - i\gamma t)$, con $\gamma \equiv \Gamma_\rho(t)/m_\rho$. Además, se satisface la relación: $\frac{(f_+[t'] - f_+[t])}{2 k_- \cdot k} = (1 + i\gamma) \frac{f_+[t] f_+[t']}{m_\rho^2}$. Por otra parte, los factores v_i provienen de la emisión del fotón a través del mesón ρ , ya que son proporcionales a β_0 , y a los términos

fuera de capa de masa del mesón ρ . Además, el valor $\beta_0 = 2$ muestra la propiedad de hacer v_4 nulo. Aunque β_0 es un parámetro libre para un estado compuesto como lo es el mesón ρ , este valor particular de $\beta_0 = 2$ se predice para el momento dipolar del bosón de norma W , y normalmente se toma como base para este tipo de cálculos.

La identificación de la parte independiente de modelo, de acuerdo con el teorema de Low [11], se hace tomando solamente las contribuciones de orden $O(k^{-1})$ y $O(k^0)$. Así, la amplitud de Low queda definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Low} = e G_F V_{ud}^* \epsilon^\mu \left\{ f_+[t] L_\mu(P, p_-) Q_\nu + 2 p_0 \cdot k L_\mu(p_0, p_-) \frac{d f_+[t]}{d t} Q_\nu \right. \\ \left. - \frac{f_+[t]}{2 P \cdot k} \left[F_{\mu\nu}[Q] Q \cdot k + i Q^\alpha k^\beta \epsilon_{\nu\alpha\beta\mu} \right] - f_+[t] F_{\mu\nu}[p_-] \right\} l^\nu, \end{aligned} \quad (5.15)$$

la cual, como era de esperarse, resulta ser la misma que para los resultados obtenidos previamente en la descripciones de VMD [8, 9] y χ_{pT} [4, 7], con $\hat{V}_{\mu\nu}$ y $A_{\mu\nu}$ nulos.

Por otra parte, el factor de forma $f_+[t]$ puede ser extraído directamente de la distribución invariante de masa para los dos piones a partir del decaimiento no radiativo (Ver Apéndice F), el cual puede ser descrito a través de las contribuciones tipo Breit-Wigner de los mesones vectoriales $\rho(770)$, $\rho(1450)$ y $\rho(1700)$ [292] como:

$$f_+[t] = \frac{1}{1 + \beta + \gamma} \left\{ f_\rho[t] + \beta f_{\rho'}[t] + \gamma f_{\rho''}[t] \right\}, \quad (5.16)$$

donde $\beta = B_0 e^{i f_b}$ y $\gamma = G_0 e^{i f_g}$ definen magnitudes y fases relativas. Los parámetros obtenidos a partir del ajuste de los datos experimentales de Belle [249] pueden ser consultados en el Cuadro F.1 del Apéndice F donde también se muestran que los acoplamientos involucrados para el modelo, ec. (F.16). Estos acoplamientos están relacionados por (Ver Apéndice F para más detalles):

$$\frac{\beta}{1 + \beta + \gamma} = \frac{m_\rho^2}{m_{\rho'}^2} \frac{G_{\rho'} g_{\rho'\pi\pi}}{G_\rho g_{\rho\pi\pi}}, \quad \frac{\gamma}{1 + \beta + \gamma} = \frac{m_\rho^2}{m_{\rho''}^2} \frac{G_{\rho''} g_{\rho''\pi\pi}}{G_\rho g_{\rho\pi\pi}}. \quad (5.17)$$

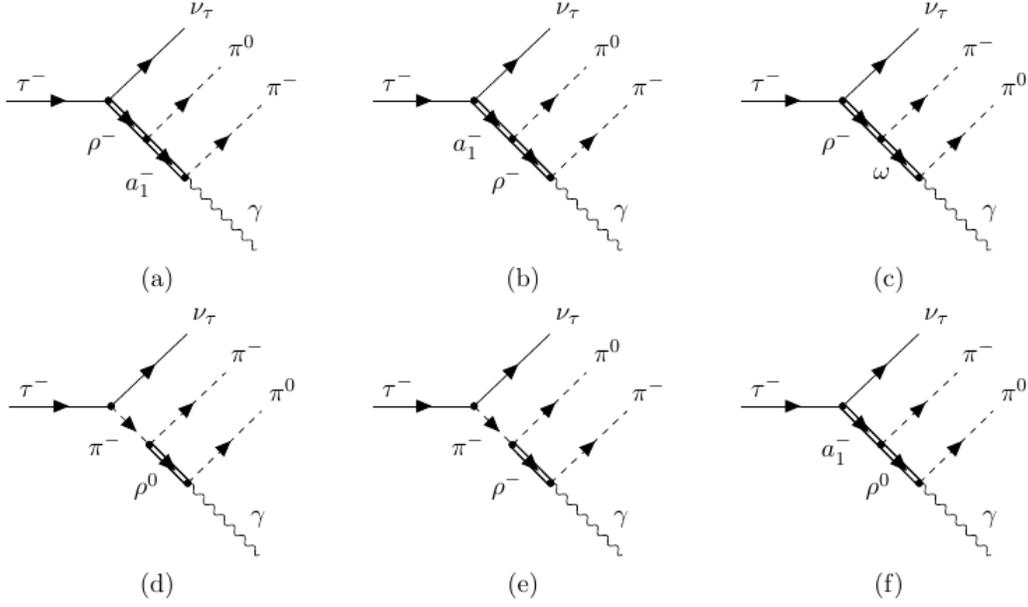


Figura 5.2: Contribuciones dependientes de modelo para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$. La contribución relevante en este caso es aquella que viene mediada a través del mesón ω (b).

5.1.2. Contribuciones Dependientes de Modelo (MD)

En la Fig. 5.2, se muestran los diagramas puramente dependientes del modelo para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$, los cuales vienen definidos a través de la presencia de los estados intermedios: $a_1(1260)$, $\omega(782)$ y π . Con anterioridad, se ha mostrado que el canal relevante es aquel que incluye al mesón ω como estado intermedio [8, 9], diagrama (c) de la Fig. 5.2. Por lo tanto, considerando al tensor $A_{\mu\nu} = 0$, solo es necesario concentrarse en la descripción de este canal en particular. La amplitud de esta contribución puede ser escrita como:

$$\mathcal{M}_\omega = \frac{V_{ud}^* G_F}{\sqrt{2}} G_\rho g_{\omega\pi\gamma} g_{\omega\rho\pi} \epsilon_{\alpha\beta\mu\delta} k^\delta \epsilon^{*\mu} p_0^\alpha D_\omega^{\beta\lambda}[p_0 + k] \epsilon_{\phi\lambda\chi\sigma} (p_0 + k)^\phi p_-^\chi D_\rho^{\sigma\nu}[k_+] l_\nu, \quad (5.18)$$

donde $D_\omega^{\beta\lambda}[p_0 + k]$ y $D_\rho^{\sigma\delta}[k_+]$ son los correspondientes propagadores de los mesones vectoriales ω y ρ , respectivamente. Note que, tras la contracción de los correspondientes tensores de

Levi-Civita, sólo los términos proporcionales a la métrica en los propagadores sobreviven. Tomando nuevamente la relación $G_\rho g_{\rho\pi\pi}/\sqrt{2} = m_\rho^2$ y, por la ec. (3.7) obtenida en el Cap.3, Sec.3.3, se sabe que: $g_{\omega\pi\gamma} = e g_{\omega\rho\pi}/g_\rho$, por lo que la amplitud toma la siguiente forma general:

$$\mathcal{M}_\omega = e G_F V_{ud}^* \epsilon^{*\mu} \hat{V}_{\mu\nu}^{(\omega)} \rho^\nu, \quad (5.19)$$

donde $\hat{V}_{\mu\nu}^{(\omega)}$ contribuye directamente al tensor $\hat{V}_{\mu\nu}$ con los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} v_1^\omega &= -C_\omega f_\omega[(p_0 + k)^2] f_o[t'] (p_0 + 2k) \cdot p_0, & v_2^\omega &= C_\omega f_\omega[(p_0 + k)^2] f_o[t'] (p_0 + k) \cdot p_-, \\ v_3^\omega &= C_\omega f_\omega[(p_0 + k)^2] f_+[t'], & v_4^\omega &= -C_\omega f_\omega[(p_0 + k)^2] f_o[t']. \end{aligned} \quad (5.20)$$

El propagador para el mesón ω y la constante C_ω quedan definidos por las expresiones:

$$f_\omega(q^2) \equiv \frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 - q^2 - im_\omega\Gamma_\omega}, \quad C_\omega = \frac{g_{\omega\rho\pi}^2}{m_\omega^2 g_\rho g_{\rho\pi\pi}}. \quad (5.21)$$

Por otra parte, el factor de forma $f_o[t']$ debe ser construido bajo una estructura similar a $f_+[t]$ (Ver Apéndice F para los detalles), es decir :

$$f_o[t'] = \frac{1}{1 + \beta_1} \left\{ f_\rho[t'] + \beta_1 f_{\rho'}[t'] \right\}, \quad (5.22)$$

donde $\beta_1 = B_1 e^{i\theta}$, relacionado con las constantes de acoplamiento del modelo y la fase relativa θ entre los mesones ρ y ρ' , mientras que $B_1 = |(m_\rho/m_{\rho'})^2 (G_{\rho'}/G_\rho) (g_{\omega\rho'\pi}/g_{\omega\rho\pi})|$ (el término $G_{\rho'}/G_\rho$ queda determinado a través de los parámetros de $f_+[t]$, ec. (F.16)). Note que el parámetro θ , asociado al ángulo de la fase relativa entre los mesones ρ y ρ' en la descripción de los procesos $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ y $e^+ e^- \rightarrow 2\pi^0 \pi^+ \pi^-$, es el mismo que se utiliza aquí. Además, también note que $f_o[t']$ involucra diferentes para parámetros asociados a la contribución del mesón ρ' . Para evaluar las contribuciones correspondientes, se utilizan nuevamente los valores obtenidos en el Capítulo 3 para las diferentes constantes de acoplamiento, reportadas en el Cuadro 3.4. Luego, se ha tomado el valor de $\beta_0 = 2$ como base para el momento dipolar

magnético del mesón ρ .

5.1.3. Distribución de masa invariante del dipión

En el decaimiento radiativo real, la parte divergente infrarroja debe cancelarse al incluir correcciones radiativas virtuales. En ausencia de tales correcciones, puede utilizarse un corte en la energía del fotón para evitar ese régimen divergente. Una forma de implementar dicho corte es introduciendo una masa ficticia a nivel cinemático, de tal forma que la energía del fotón no pueda ser inferior a este corte. En ese contexto, se ha demostrado que la distribución de masa invariante del dipión es una observable útil para estudiar la dinámica subyacente

4.

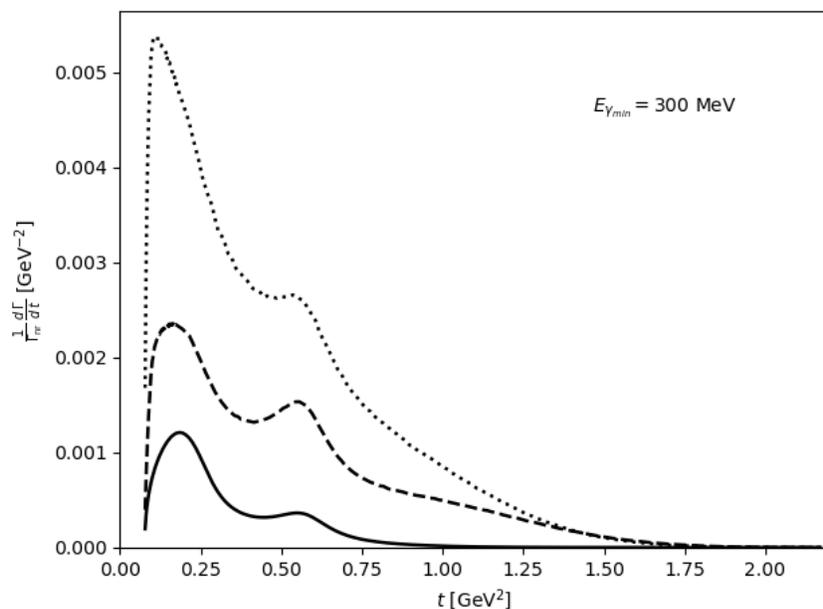


Figura 5.3: Distribución de masa invariante del dipión, normalizado con el ancho de decaimiento no radiativo (Γ_{nr}), usando un corte en la energía del fotón $E_{\gamma_{min}} = 300 \text{ MeV}$. La línea punteada corresponde a la distribución invariante total, la línea entrecortada corresponde a la distribución considerando la contribución exclusiva del mesón ρ' en el canal ω , y la línea sólida es la contribución que se obtiene al considerar la amplitud de Low.

En la Fig. 5.3 se muestra la distribución de masa invariante del dipión para la amplitud radiativa completa (MI + MD), y las contribuciones individuales que viene de las diferentes

interferencias entre las partes MI y el canal ω , considerando tanto al mesón ρ como al mesón ρ' como estados intermedios, además de que dicha observable se normaliza a la anchura de decaimiento no radiativo (Γ_{nr}). Se utiliza un corte para la energía del fotón de $E_{\gamma_{\text{min}}} = 300$ MeV, implementado como una masa ficticia a nivel cinemático, de tal manera que la energía del fotón no pueda ir más abajo de ese corte.

La línea punteada corresponde a la distribución de masa invariante del dipión total (MI + MD), mientras que la línea entrecortada corresponde a la contribución exclusivamente del mesón ρ' en el canal del mesón ω y la línea sólida corresponde a la distribución MI exclusivamente.

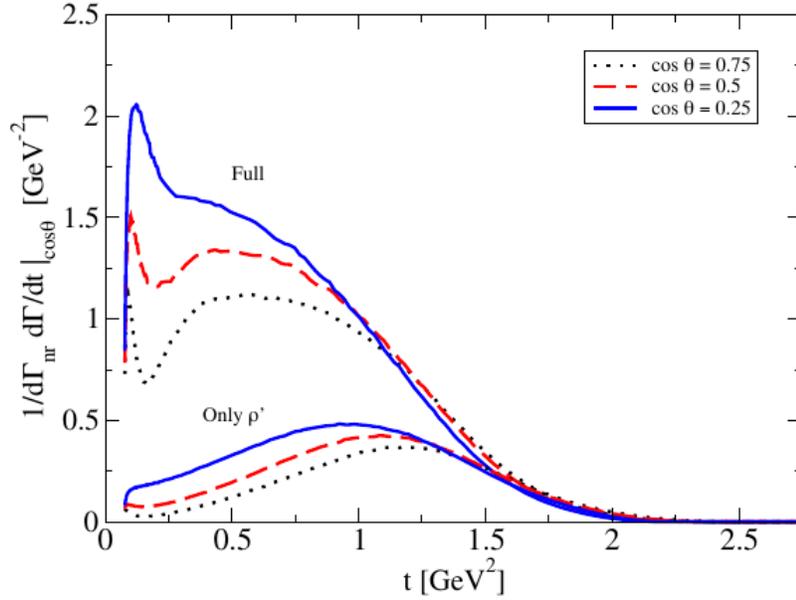


Figura 5.4: Distribución de masa invariante del dipión, normalizado con el ancho de decaimiento no radiativo (Γ_{nr}), usando un corte en la energía del fotón $E_{\gamma_{\text{min}}} = 300$ MeV. La línea punteada corresponde a la distribución invariante total, la línea entrecortada corresponde a la distribución considerando la contribución exclusiva del mesón ρ' en el canal ω , y la línea sólida es la contribución que se obtiene al considerar la amplitud de Low.

Por otra parte, la distribución asociada para la emisión del pión cargado a un ángulo particular con respecto al momento del dipión en el marco de referencia del leptón τ también puede ser explorada. En la Fig. 5.4, se muestra la distribución de masa invariante del dipión debida exclusivamente al canal del mesón ω , normalizada a la anchura de decaimiento no

radiativa (Γ_{nr}), para varios ángulos de emisión del pión cargado (líneas superiores). Las líneas inferiores consideran solamente la contribución del mesón ρ' sobre el canal del mesón ω para los correspondientes ángulos. Note que se favorecen los ángulos pequeños y que las estructuras resonantes individuales se pueden identificar de manera independiente.

5.2. Correcciones radiativas para la polarización de vacío hadrónico y MDM del muón

El ancho de decaimiento diferencial a cuatro cuerpos está dada por [4]:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2m_\tau} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(P - p_- - p_0 - k - q) \frac{d^3 p_-}{(2\pi)^3 2E_-} \frac{d^3 p_0}{(2\pi)^3 2E_0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_\gamma}, \quad (5.23)$$

donde al integrar sobre el tri-momentos del fotón y del neutrino y usando la relación

$$\frac{d^3 p_-}{2E_-} \frac{d^3 p_0}{2E_0} = \frac{\pi^2}{4m_\tau^2} dt du dx, \text{ se tiene que:}$$

$$d\Gamma = \frac{1}{32(2\pi)^6 m_\tau^3} \left[\int \frac{d^3 q}{2E_\nu} \frac{d^3 k}{2E_\gamma} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(P - p_- - p_0 - k - q) \right] dt du dx, \quad (5.24)$$

con $t = (p_- + p_0)^2$, $u = (P - p_-)^2$ y $x = (k + q)^2$. Al trabajar al orden principal en la expansión de Low, en el límite de isoespín ($m_u = m_d$), se tiene que la amplitud tiene la forma:

$$\mathcal{M} = e \varepsilon^{\star\mu}(k) \mathcal{M}_{\pi\pi}^{(0)} \left(\frac{p_{-\mu}}{p_- \cdot k} - \frac{P_\mu}{P \cdot k} \right) + \mathcal{O}(k^0), \quad (5.25)$$

donde

$$\mathcal{M}_{\pi\pi}^{(0)} = G_F V_{ud}^* \sqrt{S_{EW}} f_+[t] (p_- - p_0)_\nu \bar{u}(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(P), \quad (5.26)$$

es la amplitud del orden principal para el decaimiento no radiativo que incluye las correcciones radiativas de cortas distancias (S_{EW}). Es decir, a $\mathcal{O}(k^{-1})$, la amplitud para el decaimiento radiativo es proporcional a la amplitud del decaimiento no radiativo de acuerdo al teorema de Low [11].

Por otra parte, la cinemática nos dice que la amplitud al cuadrado del proceso no radiativo a dos piones, $|\overline{\mathcal{M}_{\pi\pi}^{(0)}}|^2$, está completamente caracterizada por dos variables, las cuales se pueden elegir como el cuadrado del invariante de masa del sistema de los piones $t = (p_- + p_0)^2$ y el invariante del sistema $\nu_\tau - \pi^0$, $u = (q - p_0)^2$, es decir,

$$|\overline{\mathcal{M}_{\pi\pi}^{(0)}}|^2 = 2 G_F^2 |V_{ud}|^2 \left\{ |f_+[t]|^2 D^+(t, u) + \mathcal{O}(k) \right\}, \quad (5.27)$$

donde la función principal queda definida como:

$$D^+(t, u) = 2u^2 - 2(m_\tau^2 + m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2 - t)u + \frac{m_\tau^2}{2}(m_\tau^2 - t) + 2m_{\pi^-}^2 m_{\pi^0}^2. \quad (5.28)$$

La elección de la variable t es inmediata ya que los factores de forma dependen de esta variable, en cambio, la elección de la segunda variable no lo es. La elección de u se debe a que esta relacionada directamente con la energía del pión cargado, $u = (P - p_-)^2$.

Por otra parte, el espectro hadrónico del decaimiento del leptón τ a dos piones, corregido por las correcciones radiativas $\mathcal{O}(\alpha)$, se construye a partir de tres contribuciones:

$$\frac{d\Gamma(\tau_{2\pi(\gamma)})}{dt} = \frac{d\Gamma^0}{dt} + \frac{d\Gamma_v^1}{dt} + \frac{d\Gamma_r^1}{dt}. \quad (5.29)$$

Los superíndices sobre los términos del lado derecho, ec. (5.29), denotan el correspondiente orden en α , mientras que los sub-índices v y r hacen referencia al tipo de correcciones, virtuales y reales respectivamente. Cuando se trabaja con el espectro inclusivo de fotones, la integración sobre todas las energías de fotones reales debe hacerse en el último término. Así, de acuerdo con las Refs. [3, 4], tras reagrupar los efectos de todas las correcciones radiativas, el espectro corregido puede reescribirse como:

$$\frac{d\Gamma(\tau_{2\pi(\gamma)})}{dt} = \frac{G_F^2 m_\tau^3 S_{EW} |V_{ud}|^2}{384 \pi^3} \beta_{\pi^+}^3 \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2t}{m_\tau^2}\right) |f_+[t]|^2 G_{EM}(t), \quad (5.30)$$

donde β_{π^+} es la velocidad del pión en el marco de referencia de reposo del dipión. Los efectos de correcciones de cortas distancias para la razón de decaimiento radiativo se codifican en S_{EW} , que incluye la re-sumación de los logaritmos dominantes, correcciones subdominantes [293], y la suma de los efectos de las interacciones fuertes [78]. El factor $G_{EM}(t)$ introducido en la ec. 5.30 contiene todos los efectos de las correcciones electromagnéticas de largas distancias de orden $\mathcal{O}(\alpha)$ y la cual es el objetivo principal de esta parte del trabajo. En términos de las razones que aparecen en la ec. 5.29, esta función se define como:

$$G_{EM}(t) = 1 + \frac{\frac{d\Gamma_v^1}{dt} + \frac{d\Gamma_r^1}{dt}}{\frac{d\Gamma^0}{dt}}. \quad (5.31)$$

Esta función es finita en el límite de fotones infrarrojos ya que los términos divergentes en las correcciones virtuales y reales se anulan entre sí. La función electromagnética $G_{EM}(t)$ depende de los detalles del modelo utilizado para describir las interacciones de los fotones con los hadrones. Los teoremas de Burnett y Kroll y Zakharov, Kondratyuk y Ponomarev [294, 295] son de utilidad, ya que permiten dividir el espectro dipiónico del decaimiento radiativo $\tau \rightarrow \pi\pi\nu_\tau\gamma$ en sus partes independientes (MI) y dependientes (MD) del modelo:

$$\frac{d\Gamma_r^1}{dt} = \frac{d\Gamma_r^1(\text{MI})}{dt} + \frac{d\Gamma_r^1(\text{MD})}{dt}. \quad (5.32)$$

El primer término contiene la divergencia infrarroja en la energía del fotón que es necesaria para cancelar el término divergente correspondiente en la corrección virtual. Es independiente del modelo en el sentido de que sólo contribuye la estructura hadrónica ya presente en la desintegración no radiativa. Este término término tiene su origen en los fotones emitidos por las cargas de τ^- y π^- como si se tomaran como partículas puntuales.

La estructura electromagnética de los hadrones y otros acoplamientos de fotones a hadrones dependientes del modelo entran en el segundo término de la ec. (5.32), que es regular para fotones infrarrojos. En la Ref. [4], las contribuciones dependientes del modelo se trataron en el marco de la teoría quiral perturbativa complementada con términos anómalos quirales.

Según sus resultados, los términos dependientes del modelo afectan a los valores de $G_{\text{EM}}(t)$ en un 0.5 % en la mayor parte de la región de t . Como se reconoció en la Ref. [4], no debe esperarse que algunas de sus contribuciones axiales dependientes del modelo sigan siendo adecuadas cuando se realiza la extrapolación a grandes momentos (como los que se encuentran en decaimientos de τ). Por otro lado, dado que la energía liberada a los hadrones en la desintegración $\tau \rightarrow \pi\pi\nu\gamma$ puede ser tan grande como m_τ , algunas de las resonancias ligeras bien establecidas pueden producirse como estados intermedios en su capa de masa.

Dadas todas estas consideraciones, en la Ref. [248] se ha utilizado un modelo de VMD para estudiar los efectos de las contribuciones dependientes del modelo en diferentes observables asociados con el decaimiento radiativo $\tau \rightarrow \pi\pi\nu_\tau\gamma$. Se encontró que algunas de estas observables dependen del modelo las cuales muestran diferencias importantes con respecto a los resultados de la Ref. [4]. Estas diferencias se deben esencialmente a la producción y desintegración del mesón vectorial $\omega(782)$ como estado intermedio en el decaimiento $\tau \rightarrow \pi\pi\nu_\tau\gamma$. En esta sección, se exploran algunas de las consecuencias de tales contribuciones en VMD a la parte dependiente del modelo de las correcciones radiativas de larga distancia.

Usando la descomposición mostrada en la ec. (5.32), la función electromagnética $G_{\text{EM}}(t)$ se puede dividir, tal y como se propone en la Ref. [4], como:

$$G_{\text{EM}}(t) = G_{\text{EM}}^0(t) + G_{\text{EM}}^{\text{rest}}(t), \quad (5.33)$$

donde el primer término denota la pieza independiente de modelo, mientras que el segundo término incluye los términos dependientes de modelo. En esta parte del trabajo, para estimar la función $G_{\text{EM}}^0(t)$ se usan las expresiones calculadas en la Ref. [4], la cual se ha probado que es correcta y por tanto se pone atención en la evaluación del segundo término de la ec. (5.33) basado en VMD descrito anteriormente.

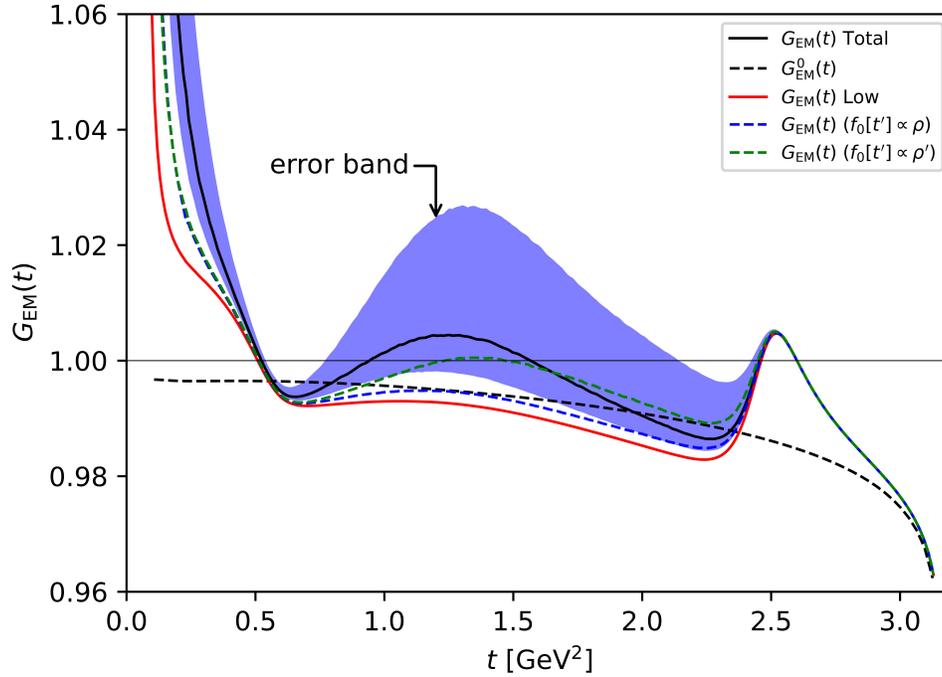


Figura 5.5: Función $G_{EM}(t)$ que incluye las partes independientes y dependientes de modelo (línea sólida negra). La región sombreada azul queda definida a partir de la inclusión de las incertidumbres para los parámetros del mesón ρ' . También se incluyen las contribuciones de Low (línea sólida roja), la contribución que solo incluye al mesón ρ' en el canal ω (línea entrecortada verde), el resultado para la función $G_{EM}^0(t)$ (línea entrecortada negra).

En la Fig. [5.5](#) se muestra la función electromagnética que incluye las partes MI y MD fijando todos los parámetros libres que se tiene en el ancho de decaimiento radiativo del proceso $\tau \rightarrow \pi\pi\nu_\tau\gamma$ y el momento dipolar magnético del mesón ρ a $\beta(0) = 2$. Se consideran las contribuciones de los mesones ρ y ρ' en el canal omega al que se le denomina $G_{EM}(t)$ Total (línea sólida) y se define una región sombreada considerando las respectivas incertidumbres asociadas a los parámetros del mesón ρ' . También se incluye el resultado para la función $G_{EM}^0(t)$ (línea entrecortada negra) y la función $G_{EM}(t)$ que corresponde a las contribuciones de la amplitud de Low (línea sólida roja) y las contribuciones de los mesones ρ (línea azul entrecortada) y ρ' (línea verde entrecortada) exclusivas sobre el canal del mesón ω .

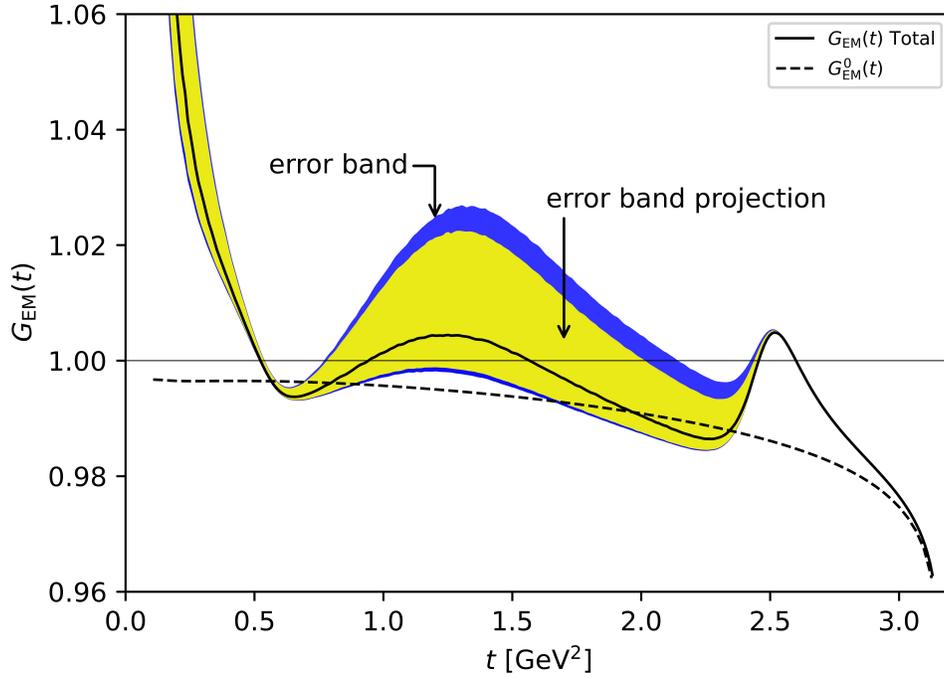


Figura 5.6: Función $G_{EM}(t)$ considerando la región delimitada por las incertidumbres de ρ' (banda sombreada azul). Además, se incluye una región de proyección (banda sombreada amarilla) considerando una mejora del 20% en el valor de las constantes de acoplamiento del mesón ρ' ($g_{\omega\rho'\pi}$, $g_{\rho'\pi\pi}$). También se incluye el resultado para la función $G_{EM}^0(t)$.

En la Fig. 5.6, se muestra la función electromagnética $G_{EM}(t)$ para las incertidumbres actuales sobre los parámetros encontrados para el mesón ρ' (región sombreada azul) tal cual se mostro anteriormente en la Fig. 5.5. Además se incluye una región de proyección (región interior amarilla) la cual considera una mejora del 20% de las incertidumbres para los parámetros $g_{\omega\rho'\pi}$ y $g_{\rho'\pi\pi}$, que puede ser alcanzable teniendo un mejor control sobre los parámetros que describen al proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ y su correspondiente distribución angular.

Con lo anterior, se procede a calcular las contribuciones a $\Delta a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ asociada al factor de corrección electromagnética $G_{EM}(t)$ tomando en cuenta diferentes contribuciones de interés, así como la contribución para la función $G_{EM}^0(t)$.

5.2.1. Correcciones de rompimiento de isoespín para $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$

Como ya se había mencionado en la Introducción de este trabajo, la evaluación de la contribución principal para la polarización de vacío hadrónica (HVP) puede hacerse por medio de la relación de dispersión [66, 67]:

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{t_{thr}}^{\infty} dt K(t) \sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}}^0(t), \quad (5.34)$$

donde $K(t)$ es el kernel a bajas energías, el cual incrementa su contribución para $E < M_\rho$ y cuya expresión resulta ser igual a

$$K(t) = \frac{x^2}{2}(2-x^2) + \frac{(1+x^2)(1+x)^2}{x^2} \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{(1+x)}{(1-x)} x^2 \ln(x), \quad (5.35)$$

con

$$x = \frac{1 - \beta_\mu}{1 + \beta_\mu}, \quad \beta_\mu = \sqrt{1 - 4m_\mu^2/t}, \quad (5.36)$$

y $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}}^0(t)$ es la sección eficaz desnuda [1]. Además, se puede relacionar la función espectral hadrónica de los decaimientos del leptón τ^- con la sección eficaz hadrónica e^+e^- incluyendo las correcciones radiativas y los efectos de rompimiento de isoespín (IB). Para el estado final a dos piones, se tiene que [3, 4, 13]:

$$\sigma_{\pi\pi}^0 = \left[\frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{dt} \right] \frac{R_{\text{IB}}(t)}{S_{\text{EW}}}, \quad (5.37)$$

donde

$$K_\Gamma(t) = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^3}{384 \pi^3} \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2t}{m_\tau^2}\right), \quad \text{y} \quad K_\sigma = \frac{\pi \alpha^2}{3t}. \quad (5.38)$$

¹Aunque la radiación del estado final pertenecería a HVP,NLO, siempre se incluye en HVP,LO (y no en HVP,NLO) ya que eliminar esta radiación de los datos medidos es inviable. Por lo tanto, también se necesita un factor de radiación de estado final (FSR) en las correcciones radiativas.

Las correcciones de rompimiento de isoespin, R_{IB} , quedan definidas por:

$$R_{\text{IB}}(t) = \frac{\text{FSR}(t)}{G_{\text{EM}}(t)} \frac{\beta_{\pi^+\pi^-}^3}{\beta_{\pi^+\pi^0}^3} \left| \frac{F_V[t]}{f_+[t]} \right|^2. \quad (5.39)$$

El término S_{EW} codifica las correcciones radiativas electrodébiles de cortas distancias [74-78], mientras que el término $\text{FSR}(t)$ tiene en cuenta la radiación de los piones en el estado final [79, 80]. Por otra parte, el término de corrección electromagnética $G_{\text{EM}}(t)$, ya fue discutido en la Sec. 5.2, mientras que el término $\beta_{\pi^+\pi^-}^3/\beta_{\pi^+\pi^0}^3$ corresponde al factor de espacio fase. El último termino en $R_{\text{IB}}(t)$ es la razón entre el factor de forma neutro ($F_V[t]$) y el factor de forma cargado ($f_+[t]$) del pión.

Para estudiar el efecto de la corrección por R_{IB} sobre $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$, se tiene que evaluar la siguiente expresión:

$$\Delta a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{t_1}^{t_2} dt K(t) \left[\frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{dt} \right] \left[\frac{R_{\text{IB}}}{S_{\text{EW}}} - 1 \right]. \quad (5.40)$$

Sin embargo, dado que el trabajo está centrado sobre la corrección radiativa electromagnética principalmente, tomando $S_{\text{EW}} = 1$, $\frac{\beta_{\pi^+\pi^-}^3}{\beta_{\pi^+\pi^0}^3} = 1$ y $\left| \frac{F_V(t)}{f_+(t)} \right|^2 = 1$, omitiendo el término $\text{FSR}(t)$, los efectos del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ no visto, pueden ser estimados por:

$$\Delta a_\mu^{\text{HVP,LO}}|_{G_{\text{EM}}(t)} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^{t_{\text{max}}} dt K(t) \left[\frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{dt} \right] \left[\frac{1}{G_{\text{EM}}(t)} - 1 \right]. \quad (5.41)$$

En el Cuadro 5.1, se muestran los resultados para $\Delta a_\mu^{\text{HVP,LO}}|_{G_{\text{EM}}(t)}$, considerando las diferentes contribuciones para $G_{\text{EM}}(t)$: (i) considera la contribución de la función $G_{\text{EM}}^0(t)$, (ii) $G_{\text{EM}}(t)$ (Low) es la función electromagnética que considera la contribución de la amplitud de Low junto con $G_{\text{EM}}^0(t)$, (iii) $G_{\text{EM}}(t)$ (SI) toma en cuenta la contribución independientes de estructura más la función $G_{\text{EM}}^0(t)$, (iv) $G_{\text{EM}}(t)$ (Full) toma en cuenta las contribuciones MI, MD y la función $G_{\text{EM}}^0(t)$ considerando exclusivamente la contribución del mesón ρ en

	$G_{\text{EM}}(t)$	$\Delta a_{\mu}^{\text{HVP,LO}} (\times 10^{-11})$
(i)	$G_{\text{EM}}^0(t)$	18.3
(ii)	$G_{\text{EM}}(t)$ (Low)	-12
(iii)	$G_{\text{EM}}(t)$ (SI)	-15
(iv)	$G_{\text{EM}}(t)$ (Full)	$-38.3^{+2.8}_{-3.2}$
(v)	$G_{\text{EM}}(t)$ (Full+ ρ')	$-94.2^{+32.3}_{-91.9}$
(vi)	$G_{\text{EM}}(t)$ (Projection)	$-94.2^{+28.2}_{-66}$

Cuadro 5.1: $\Delta a_{\mu}^{\text{HVP,LO}}|_{G_{\text{EM}}(t)}$ ($\times 10^{-11}$) para varias contribuciones de la función electromagnética $G_{\text{EM}}(t)$.

el canal ω , (v) $G_{\text{EM}}(t)$ (Full + ρ') considera las contribuciones del caso anterior más la contribución del mesón ρ' y una fase relativa entre ρ y ρ' para el canal ω , además de tomar en cuenta las incertidumbres individuales para los correspondientes parámetros del mesón ρ' involucrados, sin incluir sus posibles correlaciones mostradas en la Fig. 3.9 del Cap. 3. Por último, $G_{\text{EM}}(t)$ (Projection) es el resultado obtenido para una reducción proyectada del 20 % en las incertidumbres de las constantes de acoplamiento $g_{\omega\rho'\pi}$ y $g_{\rho'\pi\pi}$ mientras se mantiene el valor central fijo. Los resultados aquí obtenidos para $\Delta a_{\mu}^{\text{HVP,LO}}|_{G_{\text{EM}}(t)}$ considerado (i), (ii) y (iii) son consistentes con los resultados obtenidos en trabajos previos (ver por ejemplo las Refs. 4, 7-9). El resultado considerado en (iv) es consistente con la estimación previa de -37×10^{-11} 8. Esta gran contribución del canal del canal ω está bien controlada, con incertidumbres relativamente pequeñas asociadas principalmente a las incertidumbres del acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$. El resultado considerando en (v) se vuelve anómalamente grande y puede señalar la ruptura de la aproximación, ya que exigiría un análisis más profundo, como se ha señalado, del origen de las principales incertidumbres del mesón ρ' y su interacción con el mesón ω a través del acoplamiento $g_{\omega\rho'\pi}$. El valor obtenido para este caso se parece un poco a $-(76 \pm 46) \times 10^{-11}$ obtenido a $\mathcal{O}(p^6)$ en una descripción quiral con resonancias 7.

Capítulo 6

Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis:

En el Cap. 3, se ha explorado el papel del mesón ρ' en observables de baja energía mediante el análisis de un conjunto de modos de decaimiento y secciones eficaces. En un primer paso, se determinaron los parámetros del modelo que involucra a los mesones ligeros a partir de diez modos de decaimiento que no son sensibles al mesón ρ' . Esto proporcionó la base para la región esperada de estos parámetros y sirvió como referencia para la evolución de su comportamiento a medida que se agregaban observables sensibles al mesón ρ' . La incorporación del proceso de decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$, considerando solo al mesón ρ como estado intermedio, indujo una fuerte desviación para el acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$ respecto a los valores obtenidos previamente. Los otros acoplamientos involucrados: g_ρ , $g_{\rho\pi\pi}$ y g_ω , también reflejaron esta tensión (salto en estos parámetros en la Fig.?? en el valor del eje x2). Al extender la descripción incorporando al mesón ρ' y un término de contacto como lo prescribe la anomalía WZW, este parámetro se ajustó a los resultados previos obtenidos a partir de los datos experimentales (en la Fig.??, valor del eje x3). Al incorporar los datos de la sección eficaz de $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ (medidos por SND, CMD2, BABAR y BESIII) y de $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ (medidos por SND y CMD2), se puede restringir aún más la región de validez de los parámetros para el mesón ρ' . El análisis mostró que la sensibilidad a la fase relativa y a los parámetros del

ρ' . La restricción en la relación entre los parámetros, codificada en A_1 , fue muy útil para situar los parámetros dentro de la región físicamente esperada. El comportamiento de los parámetros $g_{\omega\rho'\pi}$ y $g_{3\pi}$ reflejó una dependencia del proceso, ya que favorecieron diferentes valores para $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ en comparación con la sección eficaz de $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$. Esto puede deberse a la diferente precisión experimental y a la región de energía explorada por cada proceso. Además, dado que $g_{3\pi}$ es una contribución no resonante, puede verse afectado por el procedimiento de sustracción del fondo seguido por los experimentos. En general, se observa que el comportamiento del acoplamiento $g_{\rho\omega\pi}$ fue muy estable al incluir la contribución del mesón ρ' y el término de contacto, favoreciendo un valor de $g_{\rho\omega\pi} = 11.314 \pm 0.383 \text{GeV}^{-1}$ para todos los datos experimentales. Esto es importante, ya que este parámetro tiene implicaciones en otros observables relacionados con la física de precisión. Como una aplicación, los resultados fueron utilizados en el cálculo de la sección eficaz de $e^+e^- \rightarrow 4\pi$ desarrollado a lo largo del Cap. 4 para la determinación de manera indirecta del momento dipolar magnético del mesón ρ , μ_ρ usando los datos experimentales medidos por BABAR. Los datos se describieron adecuadamente, lo que demuestra la importancia de incluir las contribuciones del mesón ρ' y el término de contacto. Los resultados también fueron aplicados en la descripción del proceso $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau\gamma$. Este análisis ha mostrado la importancia del mesón ρ' y ha proporcionado una región confiable para sus parámetros. Sin embargo, este no es un análisis exhaustivo, ya que no se incluyeron otros procesos como las desintegraciones del leptón τ^- , pero sienta las bases para ampliarlos en otros procesos de bajas energías, al tiempo que señala regiones definidas para los parámetros.

En el Cap. 4, se ha estudiado el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ con la finalidad de estudiar y calcular teóricamente la sección eficaz en función del parámetro β_0 , la cual se compara posteriormente con los datos experimentales de BABAR [empty citation], y permite obtener de manera indirecta un valor para el momento dipolar magnético del mesón ρ . Este fue el propósito fundamental del capítulo, ya que como se menciona anteriormente, a pesar

de la basta cantidad de modelos y predicciones teóricas que se tienen para el MDM del mesón ρ , en la actualidad se carece de información experimental de dicha cantidad. Nuestro análisis consistió primeramente en el desarrollo de los distintos canales permitidos para la descripción del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, donde los mediadores son los mesones π , ω , a_1 , σ , f_0 , ρ y ρ' , y cuyas amplitudes fueron construidas invariantes de norma electromagnética individualmente o bien como parte de un conjunto para el caso de aquellas que están mediadas por el mesón ρ . Según se discute en las Refs. [empty citation], la sección eficaz mediada por los canales a través del mesón ρ a bajas energías (< 1.5 GeV) están muy por debajo de los resultados experimentales y por el contrario, a altas energías (> 1.5 GeV) se tiene un excedente. Es por esta razón la importancia de incluir al mesón ρ' , ya que con esto, ambos problemas son resueltos. Para nuestra descripción, este mesón entra de forma natural al rango de energías que se están considerando. Sin embargo, para poder trabajar con este mesón es necesario conocer las distintas constantes de acoplamiento que se presentan a lo largo de los diferentes canales. Algunas de ellas fueron encontradas en el análisis del Cap. 3 y cuyos valores fueron tomados directamente para el análisis de los canales A, B, C y D de este capítulo y cuya descripción para la sección eficaz parece ser lo bastante buena. Sin embargo, la parte complicada resulta cuando se consideran a los canales E, F y G, ya que estos canales involucran a los mesones a_1 , σ y f_0 y su información experimental de sus parámetros (masa puntual y anchos de decaimiento) son bastante malos, así como también se carece de la información experimental de sus modos de decaimiento. Lo mismo sucede con el mesón ρ' , a pesar de que su masa puntual y su ancho de decaimiento está bien establecido, la información experimental de los diferentes modos de decaimiento es nula, lo que complica el análisis de las constantes de acoplamiento que involucran la interacción de ρ' con los mesones σ , f_0 y a_1 .

Por otra, en la descripción de la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, se ha encontrado que el canal que tiene una mayor contribución en el régimen de bajas energías (0.65 a 1.4 GeV) es el canal mediado por el mesón ω (Canal D). Para energías superiores a 1.4,

la aportación principal viene a través de los canales A, B y C descritos como un conjunto invariante de norma y que particularmente traen la información multipolar del vértice de tres mesones ρ (Canal B). Esto facilita la descripción del proceso, ya que se ha dejado a β_0 como parámetro libre, el cual está directamente relacionado con el MDM del mesón ρ . Esto permitió hacer un ajuste a los datos experimentales de BABAR dando como resultado un valor de $\beta_0 = 2$. Bajo la normalización adecuada, el resultado para el MDM del mesón ρ es $|\mu_\rho| = 2,59 [e/2M_\rho]$. Este es el resultado más importante del capítulo, ya que es una actualización del resultado previo mostrado en la Ref. [empty citation].

En el Cap. 5, se ha estudiado el proceso de decaimiento radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$, cuya principal contribución dependiente de modelo, el denominado canal ω , muestra que la distribución de masa invariante del dipión en ángulos particulares de la emisión del pión cargado es sensible a los estados resonantes individuales. Además, se ha calculado la interferencia de este canal con la contribución independiente de estructura conocida, y se ha obtenido la función electromagnética $G_{EM}(t)$, cuya principal fuente de incertidumbre se identificó con los parámetros del mesón ρ' . Con esto, se ha obtenido la corrección electromagnética a la estimación del momento dipolar magnético del muón. La contribución principal concuerda con las determinaciones anteriores independientemente del modelo. La parte dependiente de modelo involucra dos fuentes principales, el momento dipolar magnético del mesón ρ , cuyo valor se fija en $\beta_0 = 2$, y el llamado canal ω , siendo este último la principal contribución, con incertidumbres relativamente pequeñas considerando sólo el mesón ρ . Nuestros resultados confirman el hallazgo previo [empty citation] de que grandes efectos dependientes de modelo estaban en juego y era la razón de la desviación observada con respecto a la aproximación Chiral en $O(p^4)$ [4]. La contribución del canal ω se hace anómalamente grande al incluir la contribución del mesón ρ' (con grandes incertidumbres también). En vista de la aproximación de fotones suaves, esto puede apuntar a una posible ruptura de la aproximación. Estimaciones utilizando la metodología de χ_{PT} con resonancias a $O(p^6)$ [empty citation], descubrieron que los términos de orden superior eran importantes, señalando la relevancia

del mesón ω y otras contribuciones, aunque con un manejo diferente de las incertidumbres debido a las propias aproximaciones del modelo. El factor de forma utilizado en las estimaciones aparece en las funciones del numerador y denominador que definen $G_{EM}(t)$. Así, su efecto pasa a ser subdominante y no debería marcar diferencias en los resultados obtenidos anteriormente.

Apéndice A

Traza de matrices Gamma y Sección Eficaz

A.1. Notación y Convención

Tensor Métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Coordenada contravariante:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}), \quad (\text{A.1})$$

Coordenada covariante:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\mathbf{x}),$$

Producto escalar:

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

Derivadas:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right),$$

Cuadriderivadas:

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu.$$

A.2. Solución de ondas planas

La solución de ondas planas para la ecuación de Dirac es:

$$(\gamma^\mu i \partial_\mu) \psi(x) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} [u(p) e^{-ip \cdot x} + \bar{v}(p) e^{ip \cdot x}], \quad (\text{A.3})$$

en la representación quirial (ver ec. (??)) son expresadas como:

$$u_r(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_r \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_r \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2}} \begin{bmatrix} (1 - \frac{\sigma \cdot p}{E+m}) \xi_r \\ (1 + \frac{\sigma \cdot p}{E+m}) \xi_r \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$v_r = \begin{bmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta_r \\ \sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \eta_r \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2}} \begin{bmatrix} (1 - \frac{\sigma \cdot p}{E+m}) \eta_r \\ -(1 + \frac{\sigma \cdot p}{E+m}) \eta_r \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$(\text{A.6})$$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta_r = i \sigma_2 \varepsilon_r^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon_r^*. \quad (\text{A.7})$$

Satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \not{p} &\equiv p_\mu \gamma^\mu, \\ (\not{p} - m) u(p) &= 0, \quad (\not{p} + m) v(p) = 0, \\ \bar{u}(p) (\not{p} - m) &= 0, \quad \bar{v}(p) (\not{p} + m) = 0, \\ u_s^\dagger(p) u_r(p) &= v_s^\dagger(p) v_r(p) = 2 E \delta_{rs}, \\ \bar{u}_s(p) u_r(p) &= -\bar{v}_s(p) v_r(p) = 2 m \delta_{rs}, \\ \bar{u}_s(p) v_r(p) &= \bar{v}_s(p) u_r(p) = 0, \\ \sum_{r=\pm 1/2} u_r(p) \bar{u}_r(p) &= \not{p} + m, \quad \sum_{r=\pm 1/2} v_r(p) \bar{v}(p) = \not{p} - m. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2.1. Igualdad de Gordon

$$\bar{u}_s(p') \gamma^\mu u_r(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}_s(p') [(p+p')^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p'-p)_\nu] u_r(p), \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{u}_s(p') \gamma^\mu \gamma^5 u_r(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}_s(p') [(p'-p)^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p'+p)_\nu] \gamma^5 u_r(p). \quad (\text{A.10})$$

A.3. Matrices γ de Dirac

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \\ \gamma^5 &= i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\frac{i}{4!} \sum \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \\ (\gamma^5)^2 &= 1, \quad \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \\ \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \sigma^{0i} = i \alpha^i, \quad \sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \sigma^k, \\ \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 &= \gamma^\mu, \quad \gamma^0 (\gamma^5)^\dagger \gamma^0 = -\gamma^5, \\ \gamma^0 (\gamma^5 \gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 &= \gamma^5 \gamma^\mu, \quad \gamma^0 (\sigma^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = \sigma^{\mu\nu}, \\ \gamma^5 \gamma_\sigma &= -\frac{i}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho &= g^{\mu\nu} \gamma^\rho - g^{\mu\rho} \gamma^\nu + g^{\nu\rho} \gamma^\mu - i \gamma^5 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.4. Conjugación de Carga de Matrices

$$\begin{aligned} C &= i \gamma^2 \gamma^0, \quad C^T = C^\dagger = -C, \quad C C^\dagger = 1, \quad C^2 = -1, \\ C \gamma^{\mu T} C^{-1} &= -\gamma^\mu, \quad C \gamma^{5T} C^{-1} = \gamma^5, \\ C (\gamma^5 \gamma^\mu)^T C^{-1} &= \gamma^5 \gamma^\mu, \quad C \sigma^{\mu\nu T} C^{-1} = -\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.5. Representación quiral (Weyl)

$$\alpha = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \beta = \gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \gamma = \beta\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

A.6. Representación Pauli-Dirac

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}, \beta = \gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma = \beta\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 9 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Escribiendo las funciones de onda en las representaciones de Weyl y Pauli-Dirac como Φ_W , Φ_D , están mutuamente conectadas por:

$$\Phi_D = S\Phi_W, \gamma_D = S\gamma_W S^{-1}, S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

A.7. Traza de Matrices γ

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4, \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_\mu \not{A} \gamma^\mu = -2 \not{A}, \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_\mu \not{A} \not{B} \gamma^\mu = 4(A \cdot B) \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma_\mu \not{A} \not{B} \not{C} \gamma^\mu = -2 \not{C} \not{B} \not{A}, \quad (\text{A.21})$$

$$\gamma_\mu \not{A} \not{B} \not{C} \not{D} \gamma^\mu = 2[\not{D} \not{A} \not{B} \not{C} + \not{C} \not{B} \not{A} \not{D}], \quad (\text{A.22})$$

$$\text{Tr}[1] = 4, \quad \text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] = (-1)^n \text{Tr}[\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}], \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4 g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.26})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4 [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}], \quad (\text{A.27})$$

$$+\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = -4 i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4 i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.28})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = [\text{Tr}][\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = 0. \quad (\text{A.29})$$

A.8. Tensor antisimétrico LeviCivita

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & : ijk = \text{permutación par de } 123, \\ -1 & : ijk = \text{permutación impar de } 123, \\ 0 & : \text{si dos índices cualesquiera son iguales} \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & : \mu\nu\rho\sigma = \text{permutación par de } 123, \\ -1 & : \mu\nu\rho\sigma = \text{permutación impar de } 123, \\ 0 & : \text{si dos índices cualesquiera son iguales} \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -\det [g^{\lambda\lambda'}], \quad \lambda = \mu\nu\rho\sigma, \quad \lambda = \alpha\beta\gamma\delta, \\ \varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha}{}^{\beta\gamma\delta} &= -\det [g^{\lambda\lambda'}], \quad \lambda = \nu\rho\sigma, \quad \lambda = \beta\gamma\delta, \\ \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} &= -2 (g^{\rho\nu} g^{\sigma\delta} - g^{\rho\delta} g^{\sigma\nu}), \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} &= -6 g^{\sigma\delta}, \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

A.9. Suma de polarizaciones para partículas vectoriales

Los cuadvectores de polarización $\varepsilon^\mu(\lambda)$, ($\lambda = 0, \dots, 3$) en el marco de referencia en reposo están definidos por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^\mu(0) &= (1, 0, 0, 0) : \text{polarización escalar,} \\
 \varepsilon^\mu(1) &= (0, 1, 0, 0) : \text{polarización transversal,} \\
 \varepsilon^\mu(2) &= (0, 0, 1, 0) : \text{polarización transversal,} \\
 \varepsilon^\mu(3) &= (0, 0, 0, 1) : \text{polarización longitudinal.}
 \end{aligned}
 \tag{A.33}$$

En el sistema de coordenadas donde el cuadvimomento de la partícula está dado por:

$$q^\mu = (\omega, 0, 0, |\mathbf{q}|). \tag{A.34}$$

Los cuatro vectores de polarización se potencian a:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^\mu(s) &= \left(\frac{\omega}{m}, 0, 0, \frac{|\mathbf{q}|}{m} \right), \\
 \varepsilon^\mu(+) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, +i, 0), \\
 \varepsilon^\mu(-) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0), \\
 \varepsilon^\mu(l) &= \left(\frac{|\mathbf{q}|}{m}, 0, 0, \frac{|\omega|}{m} \right).
 \end{aligned}
 \tag{A.35}$$

La segunda y tercera línea, denominadas polarizaciones circulares, son alternativas para las componentes transversales. Los vectores de polarización cumplen la condición de ortogonalidad,

$$\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon_\mu^*(\lambda') = g^{\lambda\lambda'}, \tag{A.36}$$

y la condición de completitud es:

$$\sum_{\lambda=\text{all}} g^{\lambda\lambda'} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^{*\nu}(\lambda') = g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.37})$$

A.10. Vectores de polarización para una partícula real/virtual

Los vectores de polarización de una partícula ($\varepsilon^\mu(\lambda)$) son ortogonales al momento q^μ de la partícula.

$$q_\mu \varepsilon^\mu(\lambda) = 0. \quad (\text{A.38})$$

Sólo se permiten las polarizaciones transversales para el fotón real, y satisfacen:

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^i(\lambda) \varepsilon^j(\lambda) = \delta_{ij} - \frac{q^i q^j}{|\mathbf{q}|^2}. \quad (\text{A.39})$$

Para el caso de un bosón vectorial masivo,

$$\sum_{\lambda=\pm, l} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^\nu(\lambda) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m^2}\right). \quad (\text{A.40})$$

El requisito de la restricción de la ec. (A.38) elimina la polarización escalar y la condición de completitud se convierte en la ec. (A.40).

Para fotones virtuales con momento temporaloides (es decir, $q^2 > 0$), la discusión anterior puede extenderse simplemente reemplazando m por $\sqrt{q^2}$.

Para momentos espacialoides ($q^2 < 0$), la polarización longitudinal se hace temporaloide reemplazando la masa con $\sqrt{-q^2}$. En consecuencia, la métrica para la suma de polarizaciones debe modificarse para mantener la condición de completitud:

$$\sum_{\lambda=\pm 1, l \rightarrow 0} (-1)^{\lambda+1} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^{*\nu}(\lambda) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right). \quad (\text{A.41})$$

Apéndice B

Reglas de Feynman

Regla de Feynman 1: Líneas externas: Se adjuntan funciones de onda a los fermiones (anti-fermiones) o vectores de polarización de bosones para cada partícula entrante o saliente (Fig. B.1). A veces se omiten los índices del espinores para los fermiones. Los espinores de Dirac

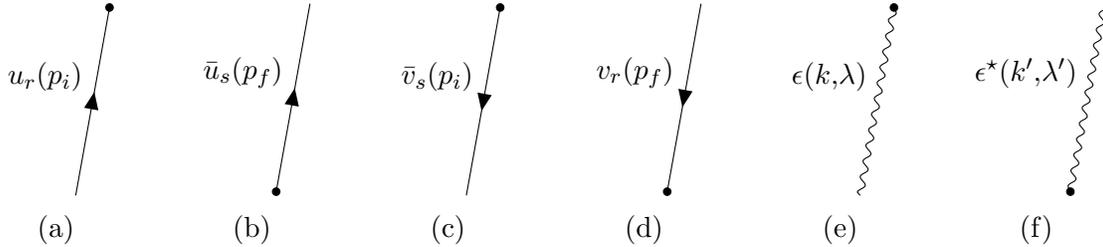


Figura B.1: Las funciones de onda para los estados inicial o final para: los fermiones (a)-(b), anti-fermiones (c)-(d) y vectores de polarización para bosones (e)-(f).

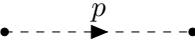
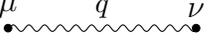
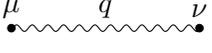
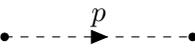
satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) &= \not{p} + m, \\ \sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) &= \not{p} - m, \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde se introduce la notación $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$. Mientras que los vectores de polarización satisfacen:

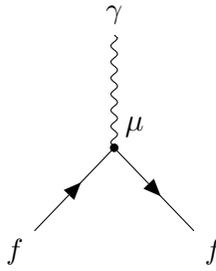
$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(p, \lambda) \epsilon_\nu^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \tag{B.2}$$

Regla de Feynman 2: Líneas internas: A cada línea interna, se le adjunta uno de los propagadores dependiendo de la especie de partícula. Para los fermiones, el signo del momento sigue el de una flecha.

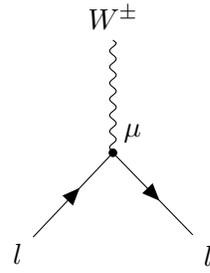
<p>Fermión</p>  $\rightarrow \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}$	<p>Escalar</p>  $\rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2 + i m \Gamma}$
<p>Fotón</p>  $\rightarrow -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$	<p>Bosón W^\pm</p>  $\rightarrow i \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}$
<p>Vector</p>  $\rightarrow i \left(\frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_V^2 - i m_V \Gamma_V}}{q^2 - m_V^2 + i m_V \Gamma_V} \right)$	<p>Higgs Escalar</p>  $\rightarrow \frac{i}{p^2 - m_H^2 + i\epsilon}$

Regla de Feynman 3: Vértices de fermiones y bosones de norma: Para los vértices de fermiones y bosones de norma, se adjuntan constantes de acoplamiento y factores γ apropiados. El fotón se acopla a la corriente electromagnética con carga $Q_f e$ y es de tipo

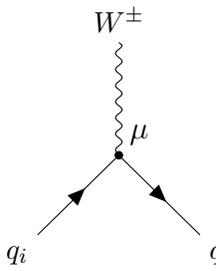
vectorial. Q_f viene dado por:



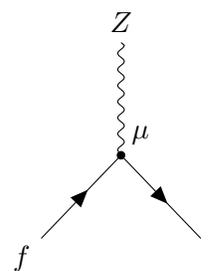
$$= -i Q_f e \gamma^\mu,$$



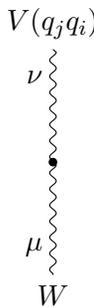
$$= -i \frac{g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5),$$



$$= -i \frac{g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{ji},$$



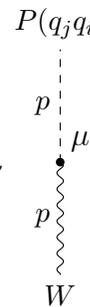
$$= -i \frac{g_Z}{2} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma^5),$$



$$= i \frac{g_W V_{ji}}{2\sqrt{2}} g_V g_{\mu\nu},$$



$$= i \frac{g_W V_{ji}}{2\sqrt{2}} g_A g_{\mu\nu}$$

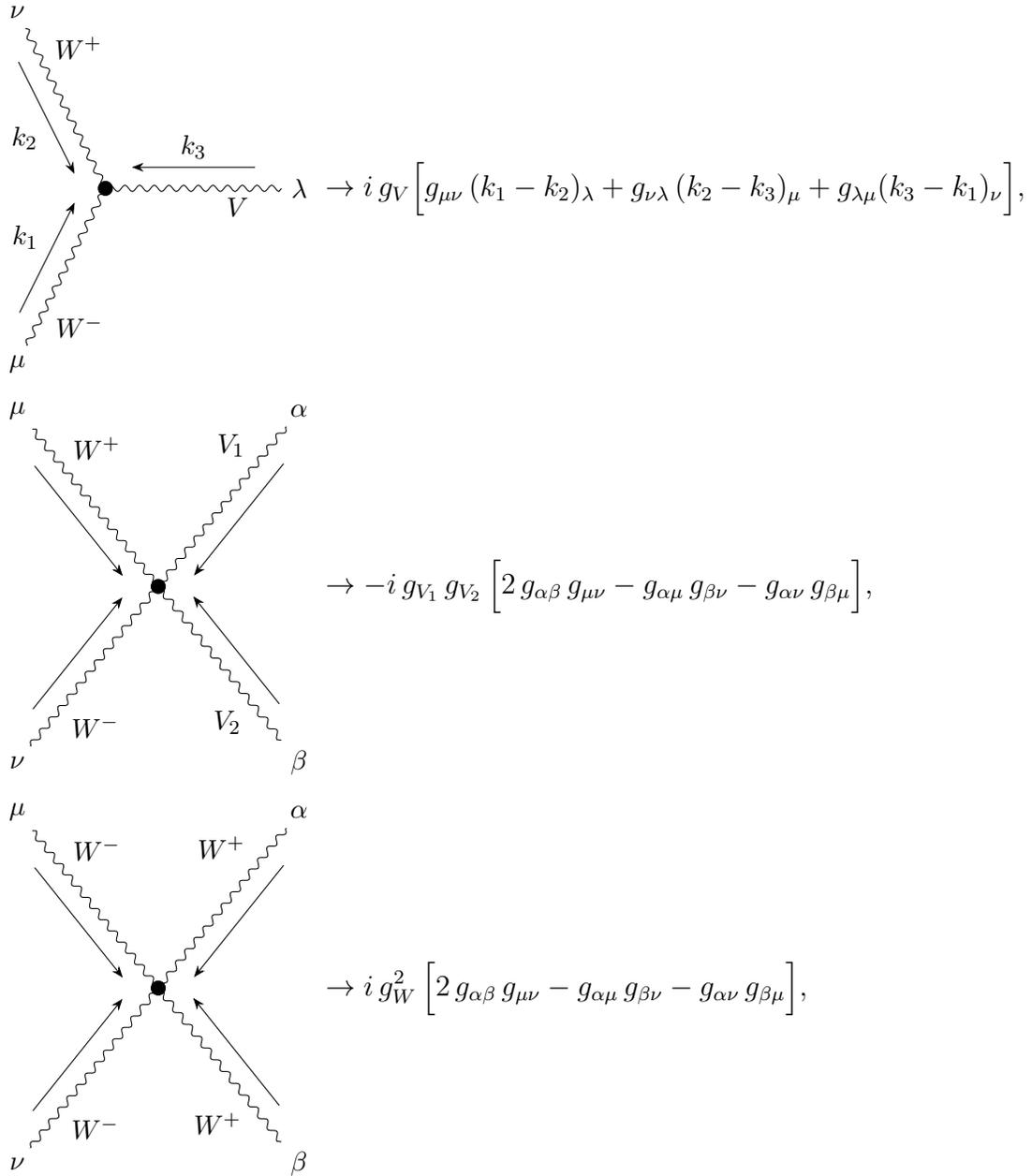


$$= i \frac{g_W V_{ji}}{2\sqrt{2}} g_P p_\mu,$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } = i g_{VPP'} (p - p')_\mu, \\
 & \text{Diagram 2: } = i e g_{VPP'} g_{\mu\nu}, \\
 & \text{Diagram 3: } = -i Q_P (p - p')_\mu, \\
 & \text{Diagram 4: } = i e g_{VV'P} \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} p^\alpha p'^\beta,
 \end{aligned}$$

Regla de Feynman 4: Acoplamiento no lineal de los bosones gauge: Debido a la naturaleza no abeliana de la teoría electrodébil, los bosones gauge tienen autoacoplamientos dados en las Ecs. (1.56) y (1.58). Sus gráficas de Feynman se muestran en Figura 1.5. Obsérvese que no hay acoplamientos γZZ ni ZZZ . En la figura, todos los se consideran

hacia el interior.



donde $g_V = e$ para $V = \gamma$ o $g_V = e \cot \theta_W$ para $V = Z$ y $g_W = e / \sin \theta_W$.

Apéndice C

Cinemática

Para calcular las observables de decaimientos de la forma $i \rightarrow f$, es necesario describir su cinemática, la cual dependerá esencialmente del número de partículas en el estado final f . En este trabajo solo se trabaja con decaimientos a dos, tres y cuatro cuerpos. Por tanto, se hace una breve descripción cinemática de los mismos aunque la cinemática de un decaimiento a dos cuerpos sea trivial.

C.1. La razón diferencial de decaimiento

La amplitud invariante \mathcal{M} para el decaimiento $i \rightarrow f$ está definida en términos de la matriz S dada por:

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4\left(p_i - \sum_f p_f\right) \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \mathcal{M}, \quad (\text{C.1})$$

donde $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$ y $p_f = (E_f, \vec{p}_f)$ son los cuádrimomentos de las partículas iniciales y finales respectivamente. Para describir este proceso, la razón diferencial de decaimiento es:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2E_i} |\mathcal{M}|^2 \delta^4\left(p_i - \sum_f p_f\right) \prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f} N, \quad (\text{C.2})$$

con N el factor estadístico que viene de incluir un factor $\frac{1}{n!}$ si existen n partículas idénticas en el estado final,

$$N = \prod_{k=\text{tipos de partículas}} \frac{1}{n_k!}. \quad (\text{C.3})$$

Por simplicidad, se trabaja en el sistema de referencia en el cual la partícula que decae se encuentra en reposo (sistema de reposo), en este sistema de referencia, $E_i = m_i$. Y restringiendo al caso de probabilidades de decaimiento no polarizadas,

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2s_i + 1} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2, \quad (\text{C.4})$$

con $s_i = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ el espín de la partícula inicial. Por otro lado, cinemáticamente $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ depende únicamente de los invariantes de Lorentz que se puedan formar con los cuadrimomentos de las partículas involucradas, los cuales a su vez dependen de un conjunto de variables cinemáticas independientes.

C.2. Decaimientos a dos cuerpos

El caso más trivial es cuando se considera un decaimiento a dos cuerpos, siguiendo la notación de PDG [\[169\]](#), se tiene que considerar el caso: $P(P, M) \rightarrow P_1(p_1, m_1)P_2(p_2, m_2)$, donde, en el sistema en reposo de P , la razón diferencial de decaimiento es:

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{|\mathbf{p}_1|}{M^2} d\Omega, \quad (\text{C.5})$$

donde

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M}, \quad (\text{C.6})$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2M} \sqrt{\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)},$$

con $\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma$ la función de Källén y $d\Omega = d\phi_1 d \cos \theta_1$ el ángulo sólido de la partícula 1. El invariante de masa $M = E_{cm}$, puede ser determinado de la energía y cuadrivector usando

$$\begin{aligned} E_{cm} &= [(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2]^{1/2}, \\ &= [m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

C.3. Decaimientos a tres cuerpos

Considere el decaimiento $P(P, M) \rightarrow P_1(p_1, m_1) P_2(p_2, m_2) P_3(p_3, m_3)$, donde se denotan sus correspondientes cuadrivectores y masas entre paréntesis. Para este proceso, la conservación de cuadrivector establece que $P = p_1 + p_2 + p_3$, y la razón diferencial de decaimiento, en el sistema en reposo de P , esta dada por:

$$d^9 \Gamma_P(P_1 P_2 P_3) = \frac{(2\pi)^4}{2M} \frac{1}{|\mathcal{M}_P(P_1 P_2 P_3)|^2} \delta^4\left(p - \sum_{j=1}^3 p_j\right) \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 p_j}{(2\pi^3 2E_j)} N. \quad (\text{C.8})$$

Para este caso. utilizando conservación de cuadrivector, el número de productos escalares se reduce a tres, por ejemplo: $p_1 \cdot p_2$, $p_1 \cdot p_3$ y $p_2 \cdot p_3$.

. Además, se pueden parametrizar a dos variables cinemáticas:

1. E_2 , la energía de P_2 en el sistema en reposo de la partícula inicial,
2. E_3 , la energía de P_3 en el mismo sistema de referencia.

En términos de estas variables, los productos escalares son:

$$P \cdot p_1 = M^2 - M(E_2 + E_3), \quad (\text{C.9})$$

$$P \cdot p_2 = M E_2, \quad (\text{C.10})$$

$$P \cdot p_3 = M E_3, \quad (\text{C.11})$$

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} (M^2 - m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) - M E_3, \quad (\text{C.12})$$

$$p_1 \cdot p_3 = \frac{1}{2}(M^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) - M E_2, \quad (\text{C.13})$$

$$p_2 \cdot p_3 = -\frac{1}{2}(M^2 - m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + M (E_2 + E_3). \quad (\text{C.14})$$

$$(\text{C.15})$$

Es evidente que la probabilidad de decaimiento no polarizada depende cinemáticamente de E_2 y E_3 , es decir

$$|\overline{\mathcal{M}_P(P_1 P_2 P_3)}|^2 = f(E_2, E_3). \quad (\text{C.16})$$

La integración parcial de la razón diferencial de decaimiento, ec. (C.8), es trivial,

$$d^2 \Gamma_P(P_1 P_2 P_3) = \frac{N}{(4\pi)^3 M} |\overline{\mathcal{M}_P(P_1 P_2 P_3)}|^2 dE_2 dE_3. \quad (\text{C.17})$$

La región cinemática accesible para este decaimiento es:

$$\left\{ m_3 \leq E_3 \leq \frac{m^2 - (m_1 + m_2)^2 + m_3^2}{2M}, E_2^-[E_3] \leq E_2 \leq E_2^+[E_3] \right\}, \quad (\text{C.18})$$

donde las funciones $E_2^\pm[E_3]$ están definidas por:

$$E_3^\pm[E_3] = \frac{(M - E_3)(M^2 - m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2M E_3)}{2(M^2 + m_3^2 - 2M E_3)} + \frac{\sqrt{E_3^2 - m_3^2}}{2(M^2 + m_3^2 - 2M E_3)} \quad (\text{C.19})$$

$$\times [(M^2 - m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2M E_3)^2 - 4m_2^2(M^2 + m_3^2 - 2M E_3)].$$

Si el orden de integración sobre E_2 y E_3 se invierte, el dominio va a ser diferente. Dicho dominio de integración se obtiene al hacer $2 \leftrightarrow 3$ en las ecs. (C.18) y (C.19).

En ocasiones es conveniente describir el decaimiento $P \rightarrow P_1 P_2 P_3$ en términos de invariantes de Lorentz [169]. En este caso, escogiendo 1. $s_{12} = (p_1 + p_2)^2$, el cuadrado del invariante de masa del sistema $P_1 P_2$.

2. $s_{13} = (p_1 + p_3)^2$, el cuadrado del invariante de masa del sistema $P_1 P_3$.

En el sistema en reposo de P , estos invariantes se pueden escribir en términos de las energías

E_2 y E_3 , es decir,

$$\begin{aligned} s_{12} &= M^2 + m_3^2 - 2 M E_3, \\ s_{13} &= M^2 + m_2^2 - 2 M E_2. \end{aligned} \tag{C.20}$$

Los elementos diferenciales del espacio fase están relacionados por el Jacobiano de las transformaciones dadas en la ec. (C.20),

$$dE_2 dE_3 = \left| \frac{\partial(E_2, E_3)}{\partial(s_{12}, s_{13})} \right| ds_{12} ds_{13} = \frac{ds_{12} ds_{13}}{4 M^2}. \tag{C.21}$$

La amplitud de probabilidad es ahora un función de s_{12} y s_{13} , y la razón diferencial de decaimiento esta dada por:

$$d^2\Gamma_P(P_1 P_2 P_3) = \frac{N}{4(4\pi)^3 M^3} \overline{|\mathcal{M}_P(P_1 P_2 P_3)|^2} ds_{12} ds_{13}. \tag{C.22}$$

Integrando sobre s_{13} y luego sobre s_{12} , el dominio queda definido como:

$$\left\{ (m_1 + m_2)^2 \leq s_{12} \leq (M - m_3)^2, s_{13}^-[s_{12}] \leq s_{13} \leq s_{13}^+[s_{12}] \right\}, \tag{C.23}$$

donde

$$\begin{aligned} s_{13}^\pm[s_{12}] &= \frac{1}{2 s_{13}} \left\{ 2(M^2 + m_1^2 - s_{12}) s_{1@} - (M^2 - m_3^2 - s_{12})(s_{12} - m_1^2 + m_2^2) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\lambda(M^2, m_3^2, s_{12})\lambda(s_{12}, m_1^2, m_2^2)} \right\}. \end{aligned} \tag{C.24}$$

Si el orden de integración se invierte, el dominio se obtienen camniando $2 \Leftrightarrow 3$ en las ecs. (C.23) y (C.24).

Expresando los productos escalares en términos de s_{12} y s_{13} , se tiene que:

$$P \cdot p_1 = \frac{1}{2} (s_{12} + s_{13} - m_2^2 - m_3^2), \tag{C.25}$$

$$P \cdot p_2 = \frac{1}{2} (M^2 + m_2^2 - s_{13}), \quad (\text{C.26})$$

$$P \cdot p_3 = \frac{1}{2} (M^2 + m_3^2 - s_{12}), \quad (\text{C.27})$$

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} (s_{12} - m_1^2 - m_2^2), \quad (\text{C.28})$$

$$p_1 \cdot p_3 = \frac{1}{2} (s_{13} - m_1^2 - m_3^2), \quad (\text{C.29})$$

$$p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{2} (M^2 + m_1^2 - s_{12} - s_{13}). \quad (\text{C.30})$$

La ventaja de trabajar con variables cinemáticas invariantes de Lorentz es que la amplitud de probabilidad de decaimiento no polarizada será explícitamente invariante bajo transformaciones de Lorentz, y por tanto, independiente del sistema de referencia.

C.4. Decaimientos a cuatro cuerpos

La cinemática de los decaimientos a cuatro cuerpos no es trivial debido al número de variables que se involucran. Considerando el decaimiento $P(P, M) \rightarrow P_1(p_1, m_1)P_2(p_2, m_2)P_3(p_3, m_3)P_4(p_4, m_4)$ donde la conservación de cuadrimomento dice que: $P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$. En el sistema en reposo de P , la razón diferencial de decaimiento es:

$$d^{12}\Gamma_P(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}_P(P_1P_2P_3P_4)|^2 \delta^4\left(P - \sum_{j=1}^4 p_j\right) \prod_{j=1}^4 \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j} N, \quad (\text{C.31})$$

para simplificar el cálculo, la integración parcial de está se lleva a cabo en diferentes sistemas de referencia con ayuda de la invariancia de Lorentz.

La amplitud de probabilidad depende de once invariantes de Lorentz; $P \cdot p_1$, $P \cdot p_2$, $P \cdot p_3$, $P \cdot p_4$, $p_1 \cdot p_2$, $p_1 \cdot p_3$, $p_1 \cdot p_4$, $p_2 \cdot p_3$, $p_2 \cdot p_4$, $p_3 \cdot p_4$ y $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma p_4^\delta$. Usando la conservación de cuadrimomento, el número de productos escalares se reduce a seis, los cuales son, por ejemplo: $p_1 \cdot p_2$, $p_1 \cdot p_3$, $p_1 \cdot p_4$, $p_2 \cdot p_3$, $p_2 \cdot p_4$, $p_3 \cdot p_4$. Note además, que la amplitud de probabilidad para este caso va a depender del tensor de Levi-Civita. Así, es conveniente introducir las

siguientes combinaciones de cuádrimomentos: $p_{12} = p_1 + p_2$, $q_{12} = p_1 - p_2$, $p_{34} = p_3 + p_4$ y $q_{34} = p_3 - p_4$.

Con la adecuada elección de la orientación de los ejes de coordenadas, en el sistema en reposo de P , siempre es posible reducir las doce variables del espacio fase a sólo nueve. Sin embargo, de acuerdo con la conservación de cuádrimomento, se tienen cuatro relaciones entre las componentes de los momentos, $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = M$ y $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$, de esta manera, de las nueve variables, cinco son únicamente independientes. De acuerdo con la ref. [empty citation], se pueden elegir las siguientes variables:

1. $s_{12} = p_{12}^2$, el cuadrado del invariante de masa del sistema $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$.
2. $s_{34} = p_{34}^2$, el cuadrado del invariante de masa del sistema $\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$.
3. θ_1 , el ángulo formado por el trimomento de la partícula P_1 en el sistema en reposo del sistema P_1P_2 con respecto a la dirección P_1P_2 en el sistema de reposo de la partícula P .
4. θ_3 , el ángulo formado por el trimomento de la partícula P_3 en el sistema en reposo del sistema P_3P_4 con respecto a la dirección de P_3P_4 en el sistema de reposo de la partícula P ,
5. ϕ , el ángulo entre los planos definidos por los sistemas P_1P_2 y P_3P_4 en el sistema de reposo de P .

Para ser más específicos, sea \mathbf{p}_1 el trimomento de la partícula P_1 en el sistema de reposo de $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ y \mathbf{p}_3 el trimomento de P_3 en el sistema de reposo de $\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$. Además, sea \hat{n}_{12} , un vector unitario en la dirección del sistema $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ en el sistema de reposo de P , \hat{n}_1 el vector unitario a lo largo de la proyección de \mathbf{p}_1 perpendicular a \hat{n}_{12} , y sea \hat{n}_3 un vector unitario a lo largo de la proyección de \mathbf{p}_3 perpendicular a \hat{n}_{12} . Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_1 &= \frac{\hat{n}_{12} \cdot \bar{p}_1}{|\mathbf{p}_1|}, \\
 \cos \theta_3 &= -\frac{\hat{n}_{12} \cdot \bar{p}_3}{|\mathbf{p}_3|} \\
 \cos \phi &= \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_3, \\
 \sin \phi &= (\hat{n}_1 \times \hat{n}_{12}) \cdot \hat{n}_3.
 \end{aligned} \tag{C.32}$$

Los invariantes de Lorentz quedan definidos por:

$$p_{12}^2 = s_{12},$$

$$p_{34}^2 = s_{34},$$

$$q_{12}^2 = 2(m_1^2 + m_2^2) - s_{12},$$

$$q_{34}^2 = 2(m_3^2 + m_4^2) - s_{34},$$

$$p_{12} \cdot q_{12} = m_1^2 - m_2^2,$$

$$p_{34} \cdot q_{34} = m_3^2 - m_4^2,$$

$$p_{12} \cdot p_{34} = \frac{1}{2}(M^2 - s_{12} - s_{34}),$$

$$p_{12} \cdot q_{34} = p_{12} \cdot p_{34} \frac{m_3^2 - m_4^2}{s_{34}} - \chi \beta_{34} \cos \theta_3,$$

$$p_{34} \cdot q_{12} = p_{12} \cdot p_{34} \frac{m_1^2 - m_2^2}{s_{12}} + \chi \beta_{12} \cos \theta_1,$$

$$q_{12} \cdot q_{34} = p_{12} \cdot p_{34} \frac{m_1^2 - m_2^2}{s_{12}} \frac{m_3^2 - m_4^2}{s_{34}} + \frac{m_3^2 - m_4^2}{s_{34}} \chi \beta_{12} \cos \theta_1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{s_{12}} \chi \beta_{34} \cos \theta_3 \\ - \beta_{12} \beta_{34} \left[\sqrt{s_{12} s_{34}} \sin \theta_1 \sin \theta_3 \cos \phi + p_{12} \cdot p_{34} \cos \theta_1 \cos \theta_3 \right]$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_{12}^\mu p_{34}^\nu q_{12}^\rho q_{34}^\sigma = \sqrt{s_{12} s_{34}} \beta_{12} \beta_{34} \chi \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \phi, \quad (\text{C.33})$$

donde

$$\beta_{12} = \frac{\lambda^{1/2}(s_{12}, m_1^2, m_2^2)}{s_{12}},$$

$$\beta_{34} = \frac{\lambda^{1/2}(s_{34}, m_3^2, m_4^2)}{s_{34}}, \quad (\text{C.34})$$

$$\chi = \left[(p_{12} \cdot p_{34})^2 - s_{12} s_{34} \right]^{1/2} = \frac{\lambda^{1/2}(M^2, s_{12}, s_{34})}{2}.$$

El resto de los productos escalares están definidos por:

$$P \cdot p_{12} = \frac{1}{2}(M^2 + s_{12} - s_{34}), \quad (\text{C.35})$$

$$P \cdot p_{34} = \frac{1}{2}(M^2 - s_{12} + s_{34}), \quad (\text{C.36})$$

$$P \cdot q_{12} = (m_1^2 - m_2^2) \left(1 + \frac{p_{12} \cdot p_{34}}{s_{12}} \right) + \chi \beta_{12} \cos \theta_1, \quad (\text{C.37})$$

$$P \cdot q_{34} = (m_3^2 - m_4^2) \left(1 + \frac{p_{12} \cdot p_{34}}{s_{12}} \right) + \chi \beta_{34} \cos \theta_3. \quad (\text{C.38})$$

La probabilidad de decaimiento no polarizada va a depender de cinco variables cinemáticas independientes, es decir, es una función

$$\overline{|\mathcal{M}_P(P_1 P_1 P_3 P_4)|^2} = F(s_{12}, s_{34}, \cos \theta_1, \cos \theta_3, \phi). \quad (\text{C.39})$$

La integración de la razón diferencial de decaimiento no es trivial. El elemento diferencial del espacio fase $d^3 p_j / 2E_j$ es un invariante de Lorentz ya que:

$$\frac{d^3 p_j}{2E_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p_j^\alpha p_{j\alpha} - m_j^2) \theta(p_j^0) d^4 p_j = \int_0^\infty \delta(p_j^\alpha p_{j\alpha} - m_j^2) d^4 p_j. \quad (\text{C.40})$$

Esta propiedad es de mucha utilidad, pues la integración parcial se puede realizar en diferentes sistema de referencia donde la integración no sea muy complicada, por ejemplo: para los elementos diferenciales del espacio fase de las partículas \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 , ($d^3 p_1 / 2E_1$, $d^3 p_2 / 2E_2$), se realiza en el sistema de reposo del sistema $\mathcal{P}_\infty \mathcal{P}_\epsilon$, mientras que el elemento diferencial del espacio fase para las partículas \mathcal{P}_\ominus y \mathcal{P}_Δ ($d^3 p_3 / 2E_3$, $d^3 p_4 / 2E_4$), se hace en el sistema de reposo $\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_4$.

Una vez realizado el cálculo, se encuentra que la razón diferencial de decaimiento a cuatro cuerpos tiene la siguiente forma:

$$d^5 \Gamma_P(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{N \chi \beta_{12} \beta_{34}}{4 (4\pi)^6 M^3} \overline{|\mathcal{M}_P(P_1 P_2 P_3 P_4)|^2} ds_{12} ds_{34} d \cos \theta_1 d \cos \theta_3 d\phi, \quad (\text{C.41})$$

cuyo espacio fase físicamente accesible queda definido por:

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_{34} \leq (M - m_3 - m_4)^2, \quad (\text{C.42})$$

$$(m_3 + m_4)^2 \leq s_{34} \leq (M - \sqrt{s_{12}})^2, \quad (\text{C.43})$$

$$-1 \leq \cos \theta_1 \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta_3 \leq 1, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi. \quad (\text{C.44})$$

En caso de que las variables s_{12} , s_{34} , θ_1 , θ_3 y ϕ no sean las variables más adecuadas para describir algunos de los decaimientos a cuatro cuerpos, el cambio de variables a x_1 , x_2 , x_3 , x_4 y x_5 viene dado por las transformaciones:

$$\begin{aligned}
x_1 &= g_1(s_{12}, s_{34}, \cos \theta_1, \cos \theta_3, \phi) \\
x_2 &= g_2(s_{12}, s_{34}, \cos \theta_1, \cos \theta_3, \phi) \\
x_3 &= g_3(s_{12}, s_{34}, \cos \theta_1, \cos \theta_3, \phi) \\
x_4 &= g_4(s_{12}, s_{34}, \cos \theta_1, \cos \theta_3, \phi) \\
x_5 &= g_5(s_{12}, s_{34}, \cos \theta_1, \cos \theta_3, \phi)
\end{aligned} \tag{C.45}$$

y las transformaciones inversas por:

$$\begin{aligned}
s_{12} &= h_{12}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\
s_{34} &= h_{34}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\
\cos \theta_1 &= h_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\
\cos \theta_3 &= h_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\
\phi &= h_\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),
\end{aligned} \tag{C.46}$$

Ahora, la amplitud de decaimiento no polarizada es una función de las nuevas variables y los elementos diferenciales del espacio fase en cada uno de los conjuntos de variables quedan relacionados por medio del Jacobiano de la transformación

$$ds_{12} ds_{34} d \cos \theta_1 d \cos \theta_3 d\phi = \left| \frac{\partial(s_{12}, s_{34}, \cos \theta_1, \cos \theta_3, \phi)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)} \right| dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5, \tag{C.47}$$

En términos de las nuevas variables canónicas independientes, la razón diferencial de decaimiento queda definida por:

$$d^5 \Gamma_P(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{n \chi \beta_{12} \beta_{34}}{4 (4\pi)^6 M^3} \left| \frac{\partial(s_{12}, s_{34}, \cos \theta_1, \cos \theta_3, \phi)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)} \right| |\overline{\mathcal{M}}|^2 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5, \tag{C.48}$$

y la región de espacio fase accesible está definida por:

$$\begin{aligned}
\text{mín}(x_5) &\leq x_5 \leq \text{máx}(x_5), \\
\text{mín}(x_4) &\leq x_4 \leq \text{máx}(x_4), \\
\text{mín}(x_3) &\leq x_3 \leq \text{máx}(x_3), \\
\text{mín}(x_2) &\leq x_2 \leq \text{máx}(x_2), \\
\text{mín}(x_1) &\leq x_1 \leq \text{máx}(x_1),
\end{aligned}
\tag{C.49}$$

donde la parte complicada está en determinar estos mínimos y máximos.

C.5. Espacio fase para procesos de producción con n partículas en el estado final

Siguiendo el trabajo de R. Kumma [**empty citation**], se hace un leve resumen sobre el estudio y determinación de la sección eficaz para un proceso de producción con n partículas en el estado final. En general, para procesos de producción de la forma

$$A(q_1) + A(q_2) \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i(p_i),
\tag{C.50}$$

la integral de espacio fase a evaluar está dada por:

$$\mathcal{P}_n = \left[\prod_{i=1}^n \int d^4 p_i \delta(p_i^2 + m_i^2) \right] \delta^4 \left(Q - \sum_{i=1}^n p_i \right) F(q_1, q_2; p_i),
\tag{C.51}$$

con $Q = q_1 + q_2$; $F(q_1, q_2; p_i)$ el módulo al cuadrado de la amplitud del proceso. Para este caso, se definen $(3n - 4)$ variables cinemáticas invariantes de Lorentz, las cuales especifican un punto en el espacio fase en términos de todos los $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ productos escalares del tipo $P_i \cdot P_j$ ($j \neq k$) formados con los cuadrimentos q_1 , q_2 y p_i . Estos cuadrimentos

definen a las variables invariantes de Lorentz como:

$$s \equiv s_0 = Q^2, \quad t_0 = (q_1 - p_1)^2, \quad s_r = (Q - \sum_{i=1}^r p_i)^2, \quad (\text{C.52})$$

$$u_r = (Q - p_{r+1})^2, \quad t_r = (q_1 - p_{r+1})^2, \quad 1 \leq r \leq n-2, \quad (\text{C.53})$$

donde p_r denota el cuadrimomento de la r -ésima partícula; u_0 y s_{n-1} se definen como:

$$u_0 = s_1, \quad s_{n-1} = m_n^2.$$

La integral del espacio fase \mathcal{P}_n se transforma en una integral definida de rango $(3n-5)$, dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &= \frac{1}{2} \pi \{ \lambda(s, M_1^2, M_2^2) \}^{-\frac{1}{2}} \{ s [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)]^{-\frac{1}{2}} \}^{n-2} \\ &\times \prod_{r=1}^{n-2} \int_{s_{r-}}^{s_{r+}} ds_r \prod_{r=1}^{n-2} \left[\int_{u_{r-}}^{u_{r+}} du_r [\lambda(s, s_r, s'_r) \lambda(s, m_{r+1}^2, u_r)]^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &\times \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0 \prod_{r=1}^{n-2} \left[\int_{t_{r-}}^{t_{r+}} dt_r [(1 - \xi_r^2) (1 - \eta_r^2) (1 - \varsigma_r^2)]^{-\frac{1}{2}} F(s_r; u_r; t_r) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

donde

$$\begin{aligned} s'_r &= \left(\sum_{i=1}^r p_i \right)^2 = s_r + (r-1)s + \sum_{i=1}^r m_i^2 - \sum_{j=1}^r u_{j-1}, \\ \xi_r &= \left[(s + M_1^2 - M_2^2)(s + s'_r - s_r) - 2s(rM_1^2 + \sum_{i=1}^r m_i^2 - \sum_{j=1}^r t_{j-1}) \right] [\lambda(s, M_1^2, M_2^2) \lambda(s, s_r, s'_r)]^{-\frac{1}{2}}, \\ \eta_r &= \left[2s(s_r + m_{r+1}^2 - s_{r+1}) - (s + m_{r+1}^2 - u_r)(s + s_r - s'_r) \right] [\lambda(s, m_{r+1}^2, u_r) \lambda(s, s_r, s'_r)]^{-\frac{1}{2}}, \\ \omega_r &= \left[(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_{r+1}^2 - u_r) - 2s(M_1^2 + m_{r+1}^2 - t_r) \right] [\lambda(s, M_1^2, M_2^2) \lambda(s, m_{r+1}^2, u_r)]^{-\frac{1}{2}}, \\ \varsigma_r &= (\omega_r - \xi_r \eta_r) [(1 - \xi_r^2) (1 - \eta_r^2)]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

con $\lambda(a, b, c) = (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2cb)$ y los límites de integración de las variables s_r , u_r y t_r son:

$$\begin{aligned}
s_{r-} &= \left(\sum_{i=r+1}^n m_i \right)^2, & s_{r+} &= (\sqrt{s_{r-1}} - m_r)^2, & 1 \leq r \leq n-2, \\
u_{r\pm} &= s + m_{r+1}^2 - \frac{(s_r + m_{r+1}^2 - s_{r+1})(s + s_r - s'_r)}{2s_r} \pm \frac{[\lambda(s_r, m_{r+1}^2, s_{r+1})\lambda(s, s_r, s'_r)]^{\frac{1}{2}}}{2s_r}, \\
&\text{para } 1 \leq r \leq n-2, \\
t_{r\pm} &= M_1^2 + m_{r+1}^2 - \frac{(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_{r+1}^2 - u_r)}{2s} + \frac{[\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, m_{r+1}^2, u_r)]^{\frac{1}{2}}}{2s} \chi_{r\pm} \\
&\text{para } 0 \leq r \leq n-2,
\end{aligned} \tag{C.56}$$

donde

$$\begin{aligned}
\chi_{r\pm} &= \xi_r \eta_r \pm [(1 - \xi_r^2)(1 - \eta_r^2)]^{\frac{1}{2}}, & \text{para } r > 0, \\
&= \pm 1, & \text{para } r = 0.
\end{aligned} \tag{C.57}$$

La sección eficaz de dispersión o producción para este caso esta dado por la ec. (C.54) por un factor multiplicativo [empty citation]:

$$\sigma(s) = \mathcal{J}(s) \mathcal{P}_n, \tag{C.58}$$

donde $\mathcal{J}(s)$ es una cosntante que depende de la energía del centro de masa ($\sqrt{s} = Q$). Sin embargo, la expresión para la sección eficaz diferencial que se utiliza en este trabajo fue tomada directamente de PDG [169], cuya expresión esta dada por:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \overline{|\mathcal{M}_T|^2}}{4 \sqrt{(q_1 \cdot q_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} d\Phi_n(Q; p_1, \dots, p_n), \tag{C.59}$$

donde

$$d\Phi_n(Q; p_1, \dots, p_n) = \delta^4\left(Q - \sum_{i=1}^n p_i\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \tag{C.60}$$

con M_1 y M_2 las masas de las partículas incidentes.

La diferencia entre las expresiones para la sección eficaz diferencial entre el trabajo de R. Kumar [empty citation], ec. C.51, y la dada en PDG [169], ec. (C.60) viene dada en esta constante $\mathcal{J}(s)$. Al comparar, para que los resultados sean compatibles, la expresión dada en la ec. (C.54) debe ser multiplicada por un factor

$$\frac{1}{(2\pi)^{3n} 4 \sqrt{(q_1 \cdot q_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}, \quad (\text{C.61})$$

esto con la idea de poder comparar con datos o referencias experimentales que utilizan la convención de PDG, justo como se hace en el Cap. 3.

C.6. Caso $n = 3$

Como primer caso particular, se desarrolla el caso $n = 3$, necesario para el desarrollo del Cap. 3 en las Secciones ?? y ?? donde se tratan a los procesos $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ y $e^+e^- \rightarrow 2\pi\gamma$. Tratando el proceso de la forma más general posible, tomando un proceso de dispersión genérico, por ejemplo: $e^-(y_1) e^+(y_2) \rightarrow A^+(z_1) B^0(z_2) C^-(z_3)$, donde se han denotando a sus correspondientes cuadrimentos entre paréntesis. Sea $Q = y_1 + y_2$, $y_1^2 = M_1^2$ y $y_2^2 = M_2^2$ para las partículas iniciales, $z_1^2 = m_1^2$, $z_2^2 = m_2^2$ y $z_3^2 = m_3^2$, el espacio fase para este caso queda determinado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3 = & \frac{1}{2}\pi \left\{ \lambda(s, M_1^2, M_2^2) \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ s \left[\lambda(s, M_1^2, M_2^2) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ & \times \int_{s_{1-}}^{s_{1+}} ds_1 \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} du_1 \left[\lambda(s, s_1, s_1') \lambda(s, m_2^2, u_1) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ & \times \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0 \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} dt_1 \left[(1 - \xi_1^2) (1 - \eta_1^2) (1 - \varsigma_1^2) \right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

donde se definen las variables cinemáticas:

$$s \equiv s_0 = Q^2, \quad s_1 = (Q - p_1)^2, \quad u_1 = (Q - p_2)^2, \quad (\text{C.63})$$

$$t_0 = (y_1 - p_1)^2, \quad t_1 = (y_1 - p_2)^2, \quad (\text{C.64})$$

Luego, de acuerdo a las definiciones dadas en la ec. (C.55), se tiene que:

$$u_0 \equiv s_1, \quad (\text{C.65})$$

$$s_2 = m_3^2 \quad (\text{C.66})$$

$$s'_1 = s_1 + m_1^2 - u_0, \quad (\text{C.67})$$

$$\xi_1 = [(s + M_1^2 - M_2^2)(s + s'_1 - s_1) - 2s(M_1^2 + m_1^2 - t_0)] [\lambda(s, M_1^2, M_2^2) \lambda(s, s_1, s'_1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.68})$$

$$\eta_1 = [2s(s_1 + m_2^2 - s_2) - (s + m_2^2 - u_1)(s + s_1 - s'_1)] [\lambda(s, m_2^2, u_1) \lambda(s, s_1, s'_1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.69})$$

$$\omega_1 = [(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_2^2 - u_1) - 2s(M_1^2 + m_2^2 - t_1)] [\lambda(s, M_1^2, M_2^2) \lambda(s, m_2^2, u_1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.70})$$

$$\varsigma_1 = (\omega_1 - \xi_1 \eta_1) [(1 - \xi_1^2)(1 - \eta_1^2)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.71})$$

Los límites de integración quedan definidos por:

$$s_{1-} = (m_2 + m_3)^2, \quad (\text{C.72})$$

$$s_{1+} = (\sqrt{s} - m_1)^2, \quad (\text{C.73})$$

$$u_{1\pm} = s + m_2^2 - \frac{(s_1 + m_2^2 - s_2)(s + s_1 - s'_1)}{2s_1} \pm \frac{\sqrt{\lambda(s_1, m_2^2, s_2) \lambda(s, s_1, s'_1)}}{2s_1}, \quad (\text{C.74})$$

$$t_{0\pm} = M_1^2 + m_1^2 - \frac{(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_1^2 - u_0)}{2s} + \frac{\sqrt{\lambda(s, M_1^2, M_2^2) \lambda(s, m_1^2, u_0)}}{2s} \chi_{0\pm}, \quad (\text{C.75})$$

$$\chi_{0\pm} = \pm 1, \quad (\text{C.76})$$

$$t_{1\pm} = M_1^1 + m_2^2 - \frac{(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_2^2 - u_1)}{2s} + \frac{\sqrt{\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, m_2^2, u_1)}}{2s} \chi_{1\pm}, \quad (\text{C.77})$$

$$\chi_{1\pm} = \xi_1 \eta_1 \pm \sqrt{(1 - \xi_1^2)(1 - \eta_1^2)}, \quad (\text{C.78})$$

$$(\text{C.79})$$

y la sección eficaz queda determinada por la expresión:

$$\sigma(s) = \int_{s_-}^{s_+} ds \int_{s_{1-}}^{s_{1+}} ds_1 \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} du_1 \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0 \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} dt_1 \frac{|\overline{\mathcal{M}_T}|^2}{4(2\pi)^5 \sqrt{(q_1 \cdot q_2) - M_1^2 M_2^2}} \text{FEF}, \quad (\text{C.80})$$

con

$$\begin{aligned} \text{FEF} &= \frac{1}{2} \pi \{ \lambda(s, M_1^2, M_2^2) \}^{-\frac{1}{2}} \{ s [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)]^{-\frac{1}{2}} \} \\ &\times [\lambda(s, s_1, s'_1) \lambda(s, m_2^2, u_1)]^{-\frac{1}{2}} [(1 - \xi_1^2) (1 - \eta_1^2) (1 - \zeta_1^2)]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

C.7. Caso $n = 4$

Este caso en particular es importante y necesario para la descripción de las diferentes secciones eficaces descritas en el Cap 4 para procesos de producción a cuatro cuerpos. Sea el caso genérico: $e^+(q_1)e^-(q_2) \rightarrow A^+(p_1) B^0(p_2) C^-(p_3) D^0(p_4)$ a describir, con $Q = q_1 + q_2$, $q_1^2 = M_1^2$, $q_2^2 = M_2^2$ las masas de las partículas incidentes y $p_1^2 = m_1^2$, $p_2^2 = m_2^2$, $p_3^2 = m_3^2$ y $p_4^2 = m_4^2$ las masas de las partículas resultantes. Utilizando la expresión dada en la ec. (C.54), el espacio fase esta dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4 &= \frac{\pi}{2} \{ \lambda(s, M_1^2, M_2^2) \}^{-\frac{1}{2}} \{ s [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)]^{-\frac{1}{2}} \}^2 \int_{s_{1-}}^{s_{1+}} ds_1 \int_{s_{2+}}^{s_{2+}} ds_2 \\ &\times \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} du_1 [\lambda(s, s_1, s'_1) \lambda(s, m_2^2, u_1)]^{-\frac{1}{2}} \int_{u_{2-}}^{u_{2+}} du_2 [\lambda(s, s_2, s'_2) \lambda(s, m_3^2, u_2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0 \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} dt_1 [(1 - \xi_1^2) (1 - \eta_1^2) (1 - \zeta_1^2)]^{-\frac{1}{2}} \int_{t_{2-}}^{t_{2+}} dt_2 [(1 - \xi_2^2) (1 - \eta_2^2) (1 - \zeta_2^2)]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

Las variables cinemáticas quedan definidas por:

$$\begin{aligned} s &\equiv s_0 = Q^2, & t_0 &= (q_1 - p_1)^2, & s_1 &= (Q - p_1)^2, & s_2 &= (Q - p_1 - p_2), \\ u_1 &= (Q - p_2)^2, & u_2 &= (Q - p_3)^2, & t_1 &= (q_1 - p_2)^2, & t_2 &= (q_1 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

donde, por definición se tiene que $u_0 = s_1$ y $s_3 = m_4^2$ y

$$s'_1 = s_1 + m_1^2 - u_0, \quad (\text{C.84})$$

$$s'_2 = s_2 + s + m_1^2 + m_2^2 - u_0 - u_1, \quad (\text{C.85})$$

$$\xi_1 = [(s + M_1^2 - M_2^2)(s + s'_1 - s_1) - 2s(M_1^2 + m_1^2 - t_0)] [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, s_1, s'_1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.86})$$

$$\xi_2 = [(s + M_1^2 - M_2^2)(s + s'_2 - s_2) - 2s(2M_1^2 + m_1^2 + m_2^2 - t_0 - t_1)] [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, s_2, s'_2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.87})$$

$$\eta_1 = [2s(s_1 + m_2^2 - s_2) - (s + m_2^2 - u_1)(s + s_1 - s'_1)] [\lambda(s, m_2^2, u_1)\lambda(s, s_1, s'_1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.88})$$

$$\eta_2 = [2s(s_2 + m_3^2 - s_3) - (s + m_3^2 - u_2)(s + s_2 - s'_2)] [\lambda(s, m_3^2, u_2)\lambda(s, s_2, s'_2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.89})$$

$$\omega_1 = [(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_2^2 - u_1) - 2s(M_1^2 + m_2^2 - t_1)] [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, m_2^2, u_1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.90})$$

$$\omega_2 = [(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_3^2 - u_2) - 2s(M_1^2 + m_3^2 - t_2)] [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, m_3^2, u_2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.91})$$

$$\varsigma_1 = (\omega_1 - \xi_1 \eta_1) [(1 - \xi_1^2)(1 - \eta_1^2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.92})$$

$$\varsigma_2 = (\omega_2 - \xi_2 \eta_2) [(1 - \xi_2^2)(1 - \eta_2^2)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.93})$$

Los correspondientes límites de integración son:

$$s_{1-} = (m_2 + m_3 + m_4), \quad (\text{C.94})$$

$$s_{1+} = (\sqrt{s} - m_1)^2, \quad (\text{C.95})$$

$$s_{2-} = (m_3 + m_4)^2, \quad (\text{C.96})$$

$$s_{2\pm} = (\sqrt{s_1} - m_2)^2, \quad (\text{C.97})$$

$$u_{1\pm} = s + m_2^2 - \frac{(s_1 + m_2^2 - s_2)(s + s_1 - s'_1)}{2s_1} \pm \frac{[\lambda(s_1, m_2^2, s_2)\lambda(s, s_1, s'_1)]^{\frac{1}{2}}}{2s_1}, \quad (\text{C.98})$$

$$u_{2\pm} = s + m_3^2 - \frac{(s_1 + m_3^2 - s_3)(s + s_2 - s'_2)}{2s_2} \pm \frac{[\lambda(s_2, m_3^2, s_3)\lambda(s, s_2, s'_2)]^{\frac{1}{2}}}{2s_2}, \quad (\text{C.99})$$

$$t_{0\pm} = M_1^2 + m_1^2 - \frac{(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_1^2 - u_0)}{2s} + \frac{[\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, m_1^2, u_0)]^{\frac{1}{2}}}{2s} \chi_{0\pm} \quad (\text{C.100})$$

$$\chi_{0\pm} = \pm 1, \quad (\text{C.101})$$

$$t_{1\pm} = M_1^2 + m_2^2 - \frac{(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_2^2 - u_1)}{2s} + \frac{[\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, m_2^2, u_1)]^{\frac{1}{2}}}{2s} \chi_{1\pm} \quad (\text{C.102})$$

$$\chi_{1\pm} = \xi_1 \eta_1 \pm [(1 - \xi_1^2)(1 - \eta_1^2)]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.103})$$

$$t_{2\pm} = M_1^2 + m_3^2 - \frac{(s + M_1^2 - M_2^2)(s + m_3^2 - u_2)}{2s} + \frac{[\lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, m_3^2, u_2)]^{\frac{1}{2}}}{2s} \chi_{2\pm} \quad (\text{C.104})$$

$$\chi_{2\pm} = \xi_2 \eta_2 \pm [(1 - \xi_2^2)(1 - \eta_2^2)]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.105})$$

$$(\text{C.106})$$

Finalmente la sección eficaz queda definida por:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \int_{s_-}^{s_+} ds \int_{s_{1-}}^{s_{1+}} ds_1 \int_{s_{2-}}^{s_{2+}} ds_2 \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} du_1 \int_{u_{2-}}^{u_{2+}} du_2 \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0 \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} dt_1 \int_{t_{2-}}^{t_{2+}} dt_2 \\ &\times \frac{|\mathcal{M}|^2}{4(2\pi)^8 \sqrt{(q_1 \cdot q_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} \text{FEF}, \end{aligned} \quad (\text{C.107})$$

donde el factor de espacio fase a cuatro cuerpos queda definido por:

$$\begin{aligned} \text{FEF} &= \frac{\pi}{2} \{ \lambda(s, M_1^2, M_2^2) \}^{-\frac{1}{2}} \{ s [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)]^{-\frac{1}{2}} \}^2 [\lambda(s, s_1, s'_1)\lambda(s, m_2^2, u_1)]^{-\frac{1}{2}} \\ &[\lambda(s, s_2, s'_2)\lambda(s, m_3^2, u_2)]^{-\frac{1}{2}} [(1 - \xi_1^2)(1 - \eta_1^2)(1 - \zeta_1^2)]^{-\frac{1}{2}} [(1 - \xi_2^2)(1 - \eta_2^2)(1 - \zeta_2^2)]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{C.108})$$

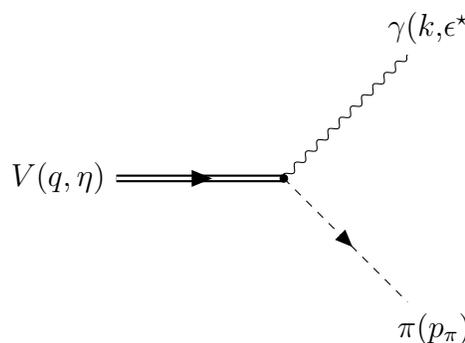
Apéndice D

Más constantes de acoplamiento

En este apéndice se hace una breve revisión de las constantes de acoplamiento, no incluidas en el análisis de parámetros hadrónicos del Cap.?? pero que son necesarias en el Cap.?? de este trabajo. Sin embargo, es necesario presentar primero una lista de valores experimentales de ciertas cantidades físicas como masa y ancho de decaimiento de las partículas que son usadas a lo largo de este trabajo de tesis. Todos los valores experimentales fueron tomados de la versión más reciente de PDG [169].

D.1. Decaimiento $V \rightarrow \pi\gamma$: Acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$

La constante de acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$ puede ser calculada usando el proceso $V \rightarrow \pi\gamma$, cuya amplitud está dada por:


$$\rightarrow \mathcal{M} = -g_{V\pi\gamma} \eta_\mu \varepsilon^{\beta\nu\alpha\mu} k_\beta q_\alpha \epsilon_\nu^*. \quad (\text{D.1})$$

donde q, η_μ , son el cuadrimomento y el vector de polarización para el mesón vectorial (V) y k, ϵ^* son el cuadrimomento y vector de polarización para el fotón. Calculando el ancho del decaimiento a dos cuerpos (Ver Apéndice ??, Sec. ??) $V \rightarrow \pi\gamma$ y despejando la constante de acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$, se obtiene la expresión:

$$g_{V\pi\gamma} = \sqrt{12 \pi \Gamma_{V \rightarrow \pi\gamma} \left(\frac{2 m_V}{m_V^2 - m_\pi^2} \right)^3}, \quad (\text{D.2})$$

con la que se obtienen una serie de valores para la constante de acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$, Cuadro [D.1](#), considerando diferentes procesos.

Proceso	Acoplamiento	Valor
$\rho^- \rightarrow \pi^- \gamma$	$g_{\rho^- \pi^- \gamma}$	0.22 ± 0.02
$\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$	$g_{\rho^0 \pi^0 \gamma}$	0.24 ± 0.02
$\omega^- \rightarrow \pi^0 \gamma$	$g_{\omega \pi^0 \gamma}$	0.69 ± 0.07

Cuadro D.1: Valores obtenidos para la constante de acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$ a través de diferentes procesos.

D.2. Decaimiento $\sigma \rightarrow \pi\pi$: Acoplamiento $g_{\sigma\pi\pi}$

La amplitud para el proceso $\sigma \rightarrow \pi^+\pi^-$, definida a través del acoplamiento de tres partículas escalares queda definido simplemente como:

$$\rightarrow \mathcal{M} = -g_{\sigma\pi\pi}. \quad (\text{D.3})$$

Al calcular el ancho de decaimiento del mesón σ a dos piones en el límite de isoespín¹, despejando la constante de acoplamiento $g_{\sigma\pi\pi}$, se obtiene la siguiente expresión:

$$g_{\sigma\pi^+\pi^-} = \left(16 \pi \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi^+\pi^-} \frac{m_\sigma^2}{\sqrt{m_\sigma^2 - 4m_\pi^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{D.4})$$

Debido a que se requiere el valor de la constante de acoplamiento más general, es necesario considerar la relación:

$$\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} = \frac{3}{2} \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi^+\pi^-}, \quad (\text{D.5})$$

por lo que la expresión final para la constante de acoplamiento es:

$$g_{\sigma\pi\pi} = \left(\frac{32}{3} \pi \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} \frac{m_\sigma^2}{\sqrt{m_\sigma^2 - 4m_\pi^2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{D.6})$$

cuyo valor numérico resulta ser:

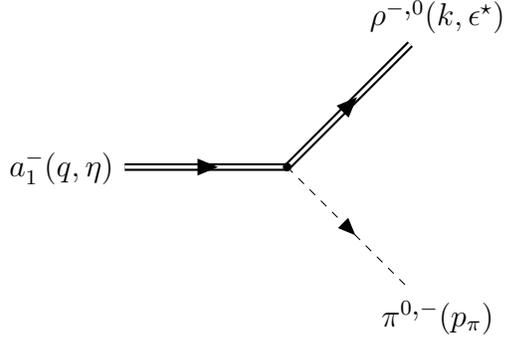
$$g_{\sigma\pi\pi} = 3.69 \pm 1.6 \text{ GeV} \quad (\text{D.7})$$

D.3. Decaimiento $a_1 \rightarrow \rho\pi$: Acoplamiento $g_{a_1\rho\pi}$

El valor para la constante de acoplamiento $g_{a_1\rho\pi}$ puede obtenerse a través de los procesos de decaimiento $a^- \rightarrow \rho^- \pi^0$ y $a_1^- \rightarrow \rho^0 \pi^-$. Sin embargo, trabajando nuevamente en el límite de isoespín para la masa de los piones, dado que se ha considerado que la masa de los mesones ρ cargados y neutros tienen la misma masa para este caso, la amplitud del proceso

¹Masas de piones cargados y neutros iguales ($m_{\pi^+} = m_{\pi^-}$)

queda definida como:



$$\rightarrow \mathcal{M} = -2 g_{a_1 \rho \pi} (k \cdot q \eta_\mu \epsilon^{*\mu} - k^\mu q^\nu \eta_\mu \epsilon_\nu^*), \quad (\text{D.8})$$

donde $q \eta_\mu$ y $k (\epsilon^{*\nu})$ son los correspondientes cuadrimomentos (vectores de polarización) para los mesones a_1^- y ρ respectivamente.

Calculando el ancho de decaimiento correspondiente, la expresión al despejar la constante de acoplamiento $g_{a_1 \rho \pi}$ es:

$$g_{a_1 \rho \pi} = \left(\frac{12 \pi \Gamma_{a_1^- \rightarrow \rho^-, 0 \pi^{0,-}}}{\lambda^{1/2}(m_{a_1}^2, m_\rho^2, m_\pi^2)} \frac{2 m_{a_1}^2}{(m_{a_1}^2 + m_\rho^2 - m_\pi^2)^2 + 2 m_{a_1}^2 m_\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.9})$$

donde $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$ la función de Källén. Luego, usando los valores experimentales necesarios, se tiene que el valor numérico para la constante de acoplamiento esta dentro del rango 2.55-3.95 GeV, esto se debe al valor del ancho de decaimiento para el mesón a_1 . Sin embargo, para este caso, tomando el valor promedio, se tiene que el valor para la constante $g_{a_1 \rho \pi}$ es:

$$g_{a_1 \rho \pi} = 3.25 \pm 0.3 \text{ GeV} \quad (\text{D.10})$$

D.4. Decaimiento $\rho \rightarrow \rho\sigma$: Acoplamiento $g_{\rho\rho\sigma}$

A diferencia de otras constantes de acoplamiento, $g_{\rho\rho\sigma}$ no puede ser obtenida directamente de un decaimiento, sin embargo, se puede considerar el proceso de decaimiento $\rho \rightarrow \rho\sigma$, Fig. [D.1](#) (a) y bajo el contexto de VMD, uno de los mesones ρ viene de la hadronización del fotón en el proceso $\rho\sigma\gamma$, Fig. [D.1](#) (b), para luego identificar cuanto vale la constante de

acoplamiento $g_{\rho\rho\sigma}$ en términos de las constantes $g_{\rho\sigma\gamma}$ y g_ρ .



Figura D.1: Desde el punto de vista de VMD, el proceso $\rho \rightarrow \rho\sigma$ puede verse como el proceso radiativo $\rho \rightarrow \sigma\gamma$ seguido de la hadronización del fotón a un mesón ρ .

Para el caso del proceso $\rho \rightarrow \rho\sigma$, Fig. [D.1](#) (a), el elemento de matriz esta dado por:

$$\mathcal{M}_{(a)} = -g_{\rho\rho\sigma} \varepsilon^\mu \eta_\mu^*, \quad (\text{D.11})$$

donde ε^μ y η_μ^* corresponden a los vectores de polarización de los mesones ρ inicial y final respectivamente. Por otro lado, el elemento de matriz del proceso $\rho \rightarrow \sigma\gamma$, seguido de la hadronización del fotón a un mesón ρ , Fig. [D.1](#) (b), está dado por:

$$\mathcal{M}_{(b)} = g_{\rho\sigma\gamma} \left(\frac{e m_\rho^2}{g_\rho} \right) \frac{\varepsilon^\mu \eta_\mu^*}{q^2}, \quad (\text{D.12})$$

con q el momento del mesón ρ inicial.

Al igual estos dos elementos de matriz, ec. [\(D.11\)](#) y ec. [\(D.12\)](#), la constante $g_{\rho\rho\sigma}$ queda definida por:

$$g_{\rho\rho\sigma} = -\frac{e m_\rho^2}{q^2} \frac{g_{\rho\sigma\gamma}}{g_\rho}. \quad (\text{D.13})$$

La expresión para la constante $g_{\rho\sigma\gamma}$ se obtiene a través del ancho de decaimiento experimental del proceso $\rho \rightarrow \sigma\gamma$

$$g_{\rho\sigma\gamma} = \frac{3}{\alpha} \Gamma_{\rho \rightarrow \sigma\gamma} \left(\frac{2 m_\rho}{m_\rho^2 - m_\sigma^2} \right)^3, \quad (\text{D.14})$$

donde $\alpha \approx 1/137$ es la constante de estructura fina y el valor numérico de la constante $g_{\rho\sigma\gamma}$

es:

$$g_{\rho\sigma\gamma} = 0.63 \pm 0.15 \text{ GeV}^{-1}. \quad (\text{D.15})$$

Apéndice E

Expansión multipolar de la función vértice

En el Cap. ??, sec. ??, se hace una relación entre las observables en la función de vértice relativista dada en la ec. (??) con los momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico. En este apéndice, siguiendo los argumentos de la ref. [285], la función vértice tratada aquí es un elemento de matriz para la corriente eléctrica entre los estados inicial y final de un bosón vectorial con momento p , espín s y helicidad h .

$$g_{VWW} \Gamma_{h',h}^\mu \equiv g_{VWW} \langle p' s' h' | J^\mu(0) | p s h \rangle. \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{h',h}^\mu &= i (\varepsilon_{h'}^*)_\beta V^{\mu\alpha\beta} (\varepsilon_h)_\alpha \stackrel{(p^2=p'^2=,^2)}{=} - \left[G_1^V (p + p')^\mu (\varepsilon_{h'}^* \cdot \varepsilon_h) \right. \\ &\quad \left. + G_2^V \{ \varepsilon_{h'}^{*\mu} (q \cdot \varepsilon_h) - \varepsilon_h^\mu (q \cdot \varepsilon_{h'}^*) \} + G_3^V (p + p')^\mu (q \cdot \varepsilon_{h'}^*) (q \cdot \varepsilon_h) / m^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Sea $q^\mu = (p + p')^\mu$, se tiene que:

$$G_1^V(q^2) = 1 + \frac{1}{2} \lambda_V \frac{q^2}{m^2}, \quad G_2^V(q^2) = 1 + \kappa_V + \lambda_V, \quad G_3^V(q^2) = -\lambda_V. \quad (\text{E.3})$$

E.0.1. Marco de Breit

Trabajando en el llamado marco de Breit, donde los momentos de las partículas entrantes y salientes se expresan como¹:

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, 0, 0, p), \quad E = \sqrt{p^2 + m^2}, \\ p'^\mu &= (E', 0, 0, -p), \quad E' = \sqrt{p^2 + m'^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Elegiendo los momentos \mathbf{p} , \mathbf{p}' para que estén en el plano $x - z$. Los vectores de polarización en el marco de Breit se expresan como sigue:

$$\begin{aligned} q &= p - p' = (0, 0, 0, 2p) \rightarrow & q^2 &= -4p^2, \\ \varepsilon_+ &= -2^{-1/2} (0, 1, +i, 0), & \varepsilon'_+ &= \varepsilon_- = 2^{-1/2} (0, 1, +i, 0), \\ \varepsilon_- &= 2^{-1/2} (0, 1, -i, 0), & \varepsilon'_- &= \varepsilon_+ = -2^{-1/2} (0, 1, +i, 0), \\ \varepsilon_0 &= (p/m, 0, 0, E/m), & \varepsilon'_0 &= (p/m, 0, 0, -E/m). \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Entonces, tras cálculos sencillos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0+}^- &= -\frac{2pE}{m} G_2, \\ \Gamma_{00}^0 &= -2E \left[G_1 + \frac{2p^2}{m^2} \left(G_1 - G_2 - \frac{2E^2}{m^2} G_3 \right) \right], \\ \Gamma_{-+}^0 &= 2E G_1. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Otros $\Gamma_{h'h}^\mu$ pueden calcularse de forma similar, pero no se necesitan aquí.

E.0.2. Momento Magnético

El momento magnético μ se define clásicamente por su energía en el campo magnético \mathbf{B} .

$$E = -\mu \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{E.7})$$

¹El signo de los momentos definidos en el marco de Breit es consistente con los tratamientos en las refs. [\[285\]](#), [\[296\]](#)

$$H_{\text{mag}} = e \int d^3 x J^\mu A_\mu = -e \int d^3 x \mathbf{J}(0, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(0, \mathbf{x}), \quad (\text{E.8})$$

donde se ha fijado $t = 0$ y $A^0(0, \mathbf{x}) = 0$. Sea el potencial electromagnético de la forma:

$$\mathbf{A} = C \frac{\mathbf{e}_x - i \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} e^{-iq \cdot x}, \quad \mathbf{q} = 2 \mathbf{p} = 2p \mathbf{e}_z. \quad (\text{E.9})$$

El campo magnético esta dado por:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -i \mathbf{q} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} = \frac{1}{i|\mathbf{q}|} (B_y, -B_x, 0). \quad (\text{E.10})$$

Sustituyendo la ec. (E.10) en la ec. (E.8) e igualando con la ec. (E.7), se obtiene que:

$$\mu_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\mu_x - i \mu_y) = \lim_{|q| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{q}|} \int d^3 x e J_-(0, \mathbf{x}) e^{-iq \cdot x}. \quad (\text{E.11})$$

Aplicando el teorema de Wigner-Eckart [297], se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu &\equiv \langle s s_z = s | \mu_z | s s_z = s \rangle = \langle s s | 10 s s \rangle \langle s | | \mu | | s \rangle, \\ \langle s s'_z | \mu_- | s s_z \rangle &= \langle s s' | 1 - 1 s s_z \rangle \langle s | | \mu | | s \rangle \\ &= \lim_{|q| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{q}|} \int d^3 x \langle s s'_z | e J_-(0, \mathbf{x}) | s s_z \rangle e^{-iq \cdot x} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

El lado derecho de la ec. (E.12) se relaciona con la función vértice $\Gamma_{h',h}^-$ a través de la ec. (E.1). La función vértice relativista se ha expresado como la amplitud de helicidad en el marco de Breit. En este marco, la dirección del momento del estado final es a lo largo del eje z negativo, y por tanto $h = s_z$, $h' = -s'_z$. Lo que lleva a:

$$\Gamma_{h',h}^\mu / 2E = \langle -\mathbf{p} h' | J^\mu(0) | \mathbf{p} h \rangle / 2E \xrightarrow{|\mathbf{q}|/m \rightarrow 0} (-1)^{s'+s'_z} \int d^3 x \langle s' s'_z | J^\mu | s s_z \rangle e^{-iq \cdot x}. \quad (\text{E.13})$$

El factor $2E$ es el factor de normalización relativista. El factor $(-1)^{s'+s'_z}$ surge de la rotación del eje de cuantización final en 180° . Denotando el operador de rotación como $R_y(\theta)$, se tiene

que:

$$\begin{aligned}
|s', s'_z\rangle &= R_y(\pi)|s' h'\rangle = \sum_{\lambda} |s' \lambda\rangle \langle s' \lambda| R_y(\pi)|s', h'\rangle = \sum_{\lambda} d_{\lambda h'}^{s'}(\pi)|s' \lambda\rangle \\
&= (-1)^{s'-h'}|s' - h'\rangle = (-1)^{s'+s'_z}|s' - h'\rangle,
\end{aligned} \tag{E.14}$$

donde $d_{h' h}^s$ es la matriz de rotación. De la ec. (E.12), se obtiene que:

$$\mu = \frac{\langle s s | 1 0 s s \rangle}{\langle s s'_z | 1 - 1 s s_z \rangle} \lim_{|q| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{q}|} \int d^3 x \langle |s s'_z| e J_-(0, \mathbf{x}) |s s_z\rangle e^{-iqr}. \tag{E.15}$$

Sustituyendo la ec. (E.13) en la expresión anterior y utilizando la expresión para Γ_{0+}^- dada en la ec. (E.6), se obtiene finalmente que:

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\langle s s | 1 0 s s \rangle}{\langle s 0 | 1 - 1 s + \rangle} \lim_{|q| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{q}|} (-1) \frac{e}{2 E} \Gamma_{0+}^-, \\
&= \frac{e}{2 m} G_2 = \frac{e}{2 m} (1 + \kappa_{\gamma} + \lambda_{\gamma})
\end{aligned} \tag{E.16}$$

E.1. Momento Cuadrupolar

En el tratamiento no relativista, el momento cuadrupolar esta definido como:

$$\begin{aligned}
Q &= \int d^3 x \langle s s_z = s | (3 z^2 - r^2) \rho(\mathbf{x}) |s s_z = s\rangle, \\
&= 2 \int d^3 x \langle s s | r^2 \rho(\mathbf{x}) P_2(\cos \theta) |s s\rangle,
\end{aligned} \tag{E.17}$$

donde $P_2(\cos \theta)$ es el polinomio de Legendre de segundo orden y $\rho(\mathbf{x}) = e J_0(0, \mathbf{x})$ es el operador de densidad de carga normalizado como:

$$e = \int d^3 x \langle s s | \rho(\mathbf{x}) |s s\rangle. \tag{E.18}$$

La expresión ec. (E.17) está contenida en el lado derecho de la ec. (E.13). Por otra parte, $\rho(\mathbf{x}) = e J_0(0, \mathbf{x})$ y el factor exponencial pueden expandirse como funciones de funciones

esféricas de Bessel y polinomios de Legendre de $\cos \theta$. Por lo tanto, la tarea restante consiste en expandir el lado izquierdo de la ec. (E.13) en términos de multipolos.

E.1.1. Expansión Multipolar

Siguiendo la notación de la ref. [296] donde se elaboró una fórmula general para la expansión multipolar de la función vértice relativista. El elemento matricial de la corriente electromagnética entre los estados $|\mathbf{p}' s', \lambda'\rangle$ y $|\mathbf{p} s, \lambda\rangle$ donde $s s', \lambda \lambda'$ son el espín y la helicidad de los estados inicial y final, toma una forma especialmente sencilla en el marco de Breit bajo la suposición de la invariancia bajo P y T. Dado que el momento cuadrupolar eléctrico se origina a partir de una distribución no uniforme de la carga, uno está interesado en la componente temporal de la corriente ($\rho = e J_0$), la cual se comporta como un escalar bajo una operación de rotación. La correspondiente función vértice se expresa como²:

$$\Gamma_{h',h}^0 = \langle \mathbf{p}' s' h' | j^0(0) | \mathbf{p} s h \rangle = (-1)^{2s'} \sum_{j=0} \begin{pmatrix} s' & J & s \\ h' & 0 & h \end{pmatrix} Q_j(s', s) \quad (\text{E.19})$$

donde Q_J es una función real si es invariante bajo T y depende de J, s', s pero no de h', h , como resultado del teorema de Wigner-Eckart. Por otro lado, la amplitud desaparece si $h' + h \neq 0$ debido a la conservación del momento angular (J_3). Sólo los términos con $J = \text{par o impar}$, dependiendo de la paridad relativa de los estados inicial y final contribuyen en la suma en la ec. (E.19) debido a que la paridad y la invariancia bajo rotación se da a través de 180° en el eje y . El símbolo $3j$ está relacionado con los coeficientes de Clebsch-

²Las funciones vértice correspondientes a las componentes espaciales $J_\pm = \mp(J_1 \pm i J_2)$ tienen una expresión similar (ver ref. [296]). Para $m = m', J_3$ desaparece en el marco de Breit debido a la conservación de la corriente.

Gordan mediante:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle. \quad (\text{E.20})$$

Esto desaparece a menos que $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ y $|j_i - j_j| \leq j_k \leq j_i + j_j$ (relación triangular).

Para la función de vértice $\gamma W W$ de triple acoplamiento de norma (TGC), es necesario fijar

$m = m', s' = s = 1$ y la ec. (E.19) se simplifica a

$$\Gamma_{h',h}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h' & 0 & h \end{pmatrix} Q_0 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ h' & 0 & h \end{pmatrix} Q_2. \quad (\text{E.21})$$

Los términos con $J > 2$ no contribuyen debido a la relación triangular. Para relacionar el momento cuadrupolar Q con la función de vértice, es necesario resolver para Q_0 y Q_2 .

Usando

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{1}{30}}, \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

y sustituyendo las expresiones para Γ_{00}^0 y Γ_{-+}^0 , ec. (E.6), en el lado izquierdo de la ec. (E.21),

se obtiene que:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{-+}^0) = 2\sqrt{3} E \left[G_1 + \frac{2p^2}{3m^2} \left\{ G_1 - G_2 - \frac{2E^2}{m^2} G_3 \right\} \right] \\ Q_2 &= \sqrt{\frac{10}{3}} (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{-+}^0) = -\sqrt{\frac{10}{3}} \frac{4Ep^2}{m^2} \left[G_1 - G_2 - \frac{2E^2}{m^2} G_3 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

sustituyendo las expresiones dadas en la ec. (E.3) dentro de la ec. (E.23) y considerando el factor de normalización relativista $2E$, la ec. (E.23) en el límite no relativista queda

expresada como:

$$\begin{aligned}\frac{e Q_0}{2 E} &\rightarrow \sqrt{3} e \left[1 + \lambda \frac{2 p^2}{m^2} + \frac{2 p^2}{3 m^2} \left\{ \left(1 + \lambda \frac{2 p^2}{m^2} \right) - (1 + \kappa + \lambda) + 2 \lambda \right\} \right] \\ \frac{e Q_2}{2 E} &\rightarrow -\sqrt{\frac{40}{3}} \frac{e p^2}{m^2} \left[1 + \lambda \frac{2 p^2}{m^2} - (1 + \kappa + \lambda) + 2 \lambda \right].\end{aligned}\quad (\text{E.24})$$

Tambi3n es necesario expandir el lado derecho de la ec. (E.13) de forma id3ntica que en la ec. (E.21), teniendo as3:

$$(-1)^{1+s'_z} \int d^3 x \langle 1 s'_z | J^0(0, \mathbf{x}) | 1 s_z \rangle e^{-i q \cdot x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h' & 0 & h \end{pmatrix} Q_0^{\text{NR}} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ h' & 0 & h \end{pmatrix} Q_2^{\text{NR}}, \quad (\text{E.25})$$

donde Q_0^{NR} y Q_2^{NR} pueden ser obtenidos a partir de la sustituci3n de

$$e^{-i q \cdot r} = \sum_{J=0}^{\infty} (-i)^J (2J+1) j_J(|\mathbf{q}|r) P_J(\cos \theta), \quad (\text{E.26})$$

en el lado izquierdo de la ec. (E.25). Para $s_z = s'_z = 1$ ($h = -h' = 1$), se tiene que:

$$Q_J^{\text{NR}}(q^2) = \frac{(2J+1)(-i)^J}{\begin{pmatrix} 1 & J & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \int d^3 x \langle 11 | \rho(\mathbf{c}) P_J(\cos \theta) | 11 \rangle j_J(|\mathbf{q}|r). \quad (\text{E.27})$$

Expandiendo en las funciones esf3ricas de Bessel hasta $|\mathbf{q}|^2$,

$$j_0(|\mathbf{q}|r) \approx 1 - |\mathbf{q}|^2 r^2/6 = 1 - 2 p^2 r^2/3, \quad j_2(|\mathbf{q}|r) \approx |\mathbf{q}|^2 r^2/15 = 4 p^2 r^2/15, \quad (\text{E.28})$$

y usando las expresiones dadas en las ec. (E.17) y ec. (E.18), se tiene que:

$$Q_0^{\text{NR}} = \sqrt{3} e \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right\}, \quad Q_2^{\text{NR}} = -\sqrt{\frac{40}{3}} Q p^2 \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right\} \quad (\text{E.29})$$

Identificando la ec. (E.24) con Q_2^{NR} en el límite cuando $p^2 \rightarrow 0$, finalmente se obtiene que el momento cuadrupolar queda definido como:

$$Q = -\frac{e}{m^2} (\kappa - \lambda). \quad (\text{E.30})$$

Apéndice F

Factor de Forma para el canal omega en el proceso $\tau^- \rightarrow \pi\pi\nu_\tau\gamma$

En el contexto del modelo VMD, el decaimiento $\tau \rightarrow \pi\pi\gamma$ ($\tau_{2\pi}$), de acuerdo con G-paridad, se produce por medio de resonancias hadrónicas vectoriales V_j^- ($J^P = 1^-$). Estas resonancias se crean como estados intermedios (virtuales) las cuales decaen al estado hadrónico final $\pi^- \pi^0$, (ver Fig. [F.1](#)). Para el caso del decaimiento $\tau_{2\pi}$, los estados intermedios son: $\rho^-(770)$, $\rho^-(1450)$, $\rho^-(1700)$, $\omega(782)$,... Sin embargo, es bien conocido que este decaimiento esta fuertemente dominado por la producción del mesón vectorial $\rho^-(770)$, por lo que es razonable considerar solo la contribución de este mesón.

Por otro lado, el dominio del cuadrado del momento transferido incluye el punto $t = m_\rho^2$. En este punto en particular, el propagador del mesón ρ , al orden más bajo en la teoría de perturbaciones diverge. Sin embargo, lo que se hace para eliminar dicha divergencia es incluir correcciones absorbtivas a un lazo [\[298\]](#), las cuales surgen principalmente de lazos con mesones $\pi^- \pi^0$. Dichas correcciones la propagador se pueden incluir fácilmente en el cálculo de la corriente hadrónica, h_α , separando el estado hadrónico $|\rho^-\rangle$ en sus componentes transversal y longitudinal, la cual queda determinada por:

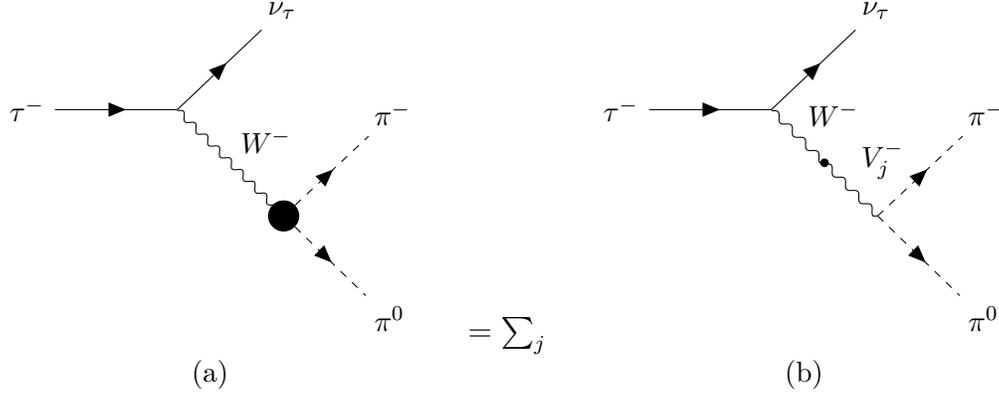


Figura F.1: Diagramas de Feynman para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ en el modelo VMD. Los estados intermedios V_j^- denotan resonancias hadrónicas cargadas con $J^P = 1^-$.

$$\begin{aligned}
h_\alpha &= \langle \pi^- \pi^0 | \bar{d} \gamma_\alpha u | 0 \rangle = f_+(t) (p_{\pi^-} + p_{\pi^0})_\alpha + f_-(t) (p_{\pi^-} - p_{\pi^0})_\alpha, \\
&= \sum_{s_\rho} \left[\frac{\langle \pi^- \pi^0 | \rho^- \rangle_T}{t - m_\rho^2 + i \text{Im} \Pi^T(t)} \langle \rho^- | \bar{d} \gamma_\alpha u | 0 \rangle + \frac{\langle \pi^- \pi^0 | \rho^- \rangle_L}{m_\rho^2 - i \text{Im} \Pi^L(t)} \langle \rho^- | \bar{d} \gamma_\alpha u | 0 \rangle \right] + \dots, \tag{F.1}
\end{aligned}$$

donde $\text{Im} \Pi^T(t)$ y $\text{Im} \Pi^L(t)$ son las piezas transversal y longitudinal de la parte absorbiva de la corrección a la autoenergía a un lazo, respectivamente [298], las cuales están definidas por:

$$\begin{aligned}
\text{Im} \Pi^T(t) &= \sqrt{t} \Gamma_\rho(t) = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{48\pi} t \beta_{\pi^-\pi^0}^3 \theta(t - [m_{\pi^-} + m_{\pi^0}]^2), \\
\text{Im} \Pi^L(t) &= -\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{16\pi} \frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}^2}{t} \beta_{\pi^-\pi^0} \theta(t - [m_{\pi^-} + m_{\pi^0}]^2), \tag{F.2}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Delta_{\pi^-\pi^0} &= m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2, \\
\beta_{\pi^-\pi^0} &= \frac{\lambda^{1/2}(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)}{t}. \tag{F.3}
\end{aligned}$$

Los elementos de matriz $\langle \pi^- \pi^0 | \rho^- \rangle_{T/L}$ y $T/L \langle \rho^- | \bar{d} \gamma_\alpha u | 0 \rangle$ se parametrizan de acuerdo con la covariancia de Lorentz, lo cual define las constantes de acoplamiento de las interacciones

$\rho^- \pi^- \pi^0$ y $W^- \rho^-$,

$$\begin{aligned} \langle \pi^- \pi^0 | \rho^- \rangle_{T/L} &= g_{\rho^- \pi^- \pi^0} (p_{\pi^-} - p_{\pi^0}) \cdot \epsilon^{T/L}(p_\rho, s_\rho), \\ {}_{T/L} \langle \rho^- | \bar{d} \gamma_\alpha u | 0 \rangle &= G_{\rho^-} \left[\epsilon_\alpha^{T/L}(p_\rho, s_\rho) \right]^*. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Las fases de los estados vectoriales, $|\pi^- \pi^0\rangle$ y $|\rho^-\rangle_{T/L}$, se escogen de manera que los acoplamientos $g_{\rho\pi\pi}$ y G_ρ sean reales positivos. Por otro lado, las componentes transversal $\epsilon^T(p_\rho, s_\rho)$ y longitudinal $\epsilon^L(p_\rho, s_\rho)$ del vector de polarización del mesón vectorial ρ^- (770) satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{s_\rho} [\epsilon_\alpha^T(p_\rho, s_\rho)]^* \epsilon_\beta^T(p_\rho, s_\rho) &= -g_{\alpha\beta} + \frac{(p_\rho)_\alpha (p_\rho)_\beta}{p_\rho^2} \equiv T_{\alpha\beta}(p_\rho), \\ \sum_{s_\rho} [\epsilon_\alpha^L(p_\rho, s_\rho)]^* \epsilon_\beta^L(p_\rho, s_\rho) &= \frac{(p_\rho)_\alpha (p_\rho)_\beta}{p_\rho^2} \equiv L_{\alpha\beta}(p_\rho). \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Los tensores $T_{\alpha\beta}(p_\rho)$ y $L_{\alpha\beta}(p_\rho)$ son los denominados proyectores transversal y longitudinal, respectivamente, y cumplen la relación:

$$T_{\alpha\beta}(p_\rho) + L_{\alpha\beta}(p_\rho) = g_{\alpha\beta}. \quad (\text{F.6})$$

El cálculo de los factores de forma $f_+[t]$ y $f_-[t]$ se desarrolla en términos de la ec. (F.1), los cuales quedan determinados por:

$$\begin{aligned} f_+[t] &= \frac{G_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2 - t - i\text{Im} \Pi^T(t)}, \\ f_-[t] &= - \left[\frac{G_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2 - t - i\text{Im} \Pi^T(t)} - \frac{G_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2 - i\text{Im} \Pi^L(t)} \right] \frac{\Delta_{\pi^- \pi^0}}{t}. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Note que en el límite de isoespín, $f_-[t] = 0$ ($\Delta_{\pi^- \pi^0} = m_{\pi^-} - m_{\pi^0} = 0$). Sin embargo, las expresiones anteriores para los factores de forma también pueden ser obtenidas a partir de aplicar las reglas de Feynman correspondientes al diagrama de la Fig. (F.1) (b). En este caso, de acuerdo a la Ref. [298], el propagador del mesón vectorial ρ^- (770) que se debe emplear

es:

$$D_{\alpha\beta}[p_\rho] = -\frac{i T_{\alpha\beta}(p_\rho)}{t - m_\rho^2 + i\text{Im} \Pi^T(t)} + \frac{i L_{\alpha\beta}(p_\rho)}{m^2 - i\text{Im} \Pi^L(t)}. \quad (\text{F.8})$$

Para simplificar, tomando el límite de la simetría de isoespín, haciendo hincapié de que los efectos que inducen el rompimiento de la simetría de isoespín son despreciables, el factor de forma que gobierna el decaimiento $\tau_{2\pi}$ se puede escribir como:

$$f_+[t] = \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - t - i\sqrt{t}\Gamma_\rho(t)}. \quad (\text{F.9})$$

Para $t = 0$, se satisface la condición de normalización $f_+[0] = 1$. La distribución del cuadrado del invariante de masa del sistema hadrónico final y la función espectral toman la forma :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^{(0)}(\pi^-\pi^0)}{dt} &= \frac{G_F |V_{ud}|^2 m_\tau^3}{384 \pi} \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 - \frac{2t}{m_\tau^2}\right) \beta_{\pi^-\pi^0}^3 |f_+[t]|^2, \\ v_-(t) &= \frac{1}{24} \beta_{\pi^-\pi^0}^3 |f_+[t]|^2. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Considerando las contribuciones de los mesones vectoriales $\rho^-(1450)$ y $\rho^-(1700)$ para el factor de forma, $f_+[t]$ se puede calcular usando reglas de Feynman al diagrama (b) de la Fig. [F.1](#), cuya amplitud es proporcional al mismo de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_b = i \frac{e G_F V_{ud}}{\sqrt{2}} Q_\lambda \left\{ G_\rho g_{\rho\pi\pi} D_\rho^{\mu\lambda}(k_-) + G_{\rho'} g_{\rho'\pi\pi} D_{\rho'}^{\mu\lambda}(k_-) + G_{\rho''} g_{\rho''\pi\pi} D_{\rho''}^{\mu\lambda}(k_-) \right\} l_\mu, \quad (\text{F.11})$$

donde se han definido a las variables $k_- = (p_{\pi^0} + p_{\pi^-})$, $Q_\lambda = (p_{\pi^0} - p_{\pi^-})_\lambda$ y $l_\mu = \bar{u}(p_{\nu_\tau}) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(P_\tau)$ corresponde a la parte leptónica asociada al par $\tau^- - \nu_\tau$.

En el límite de isoespín, el propagador de los mesones vectoriales tiene la siguiente expresión general:

$$D_V^{\alpha\beta}[p] = -i \left(\frac{g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{m_V^2} (1 + i\gamma)}{p^2 - m_V^2 + i\gamma p^2} \right), \quad (\text{F.12})$$

donde $\gamma \equiv \Gamma_V/m_V$. Luego, al factorizar el término $G_\rho g_{\rho\pi\pi}/m_\rho^2$ en la ec. [\(F.11\)](#) y contrayendo los diferentes propagadores con Q_λ , en el límite de isoespín, el factor de forma $f_+[t]$ puede

identificarse como:

$$f_+[t] = \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - t - i\gamma t} + \frac{G_{\rho'} g_{\rho'\pi\pi}}{G_\rho g_{\rho\pi\pi}} \frac{m_\rho^2}{m_{\rho'}^2 - t - i\gamma' t} + \frac{G_{\rho''} g_{\rho''\pi\pi}}{G_\rho g_{\rho\pi\pi}} \frac{m_\rho^2}{m_{\rho''}^2 - t - i\gamma'' t}. \quad (\text{F.13})$$

Imponiendo la condición de normalización $f_+[0] = 1$, la expresión para el factor de forma puede resumirse a:

$$f_+[t] = \frac{1}{1 + \beta + \gamma} \left\{ f_\rho[t] + \beta f_{\rho'}[t] + \gamma f_{\rho''}[t] \right\}, \quad (\text{F.14})$$

donde

$$f_{\rho^i}[t] = \frac{m_{\rho^i}^2}{m_{\rho^i}^2 - t - i\gamma^i t}. \quad (\text{F.15})$$

Las respectivas constantes de acoplamiento para los mesones ρ' y ρ'' , quedan resumidas en términos de los parámetros β y γ , como:

$$\frac{\beta}{1 + \beta + \gamma} = \frac{m_\rho^2}{m_{\rho'}^2} \frac{G_{\rho'} g_{\rho'\pi\pi}}{G_\rho g_{\rho\pi\pi}} \quad \frac{\gamma}{1 + \beta + \gamma} = \frac{m_\rho^2}{m_{\rho''}^2} \frac{G_{\rho''} g_{\rho''\pi\pi}}{G_\rho g_{\rho\pi\pi}} \quad (\text{F.16})$$

Incluyendo una fase relativa entre las resonancias, los parámetros β y γ quedan definidos de la siguiente forma:

$$\beta = B_0 e^{i f_b}, \quad \gamma = G_0 e^{i f_g}. \quad (\text{F.17})$$

Por otro lado, la Colaboración Belle [249] reportó una clara señal para la resonancia ρ'' ($\rho(1700)$) en el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$. En la Fig. F.2 (a), se muestra un ajuste para el cuadrado del factor de forma, ec. (F.14), a los datos experimentales de Belle, donde se han dejado como parámetros libres a las masas, anchos de decaimiento y fases relativas. En el Cuadro F.1 se muestran los valores obtenidos para dichos parámetros libres.

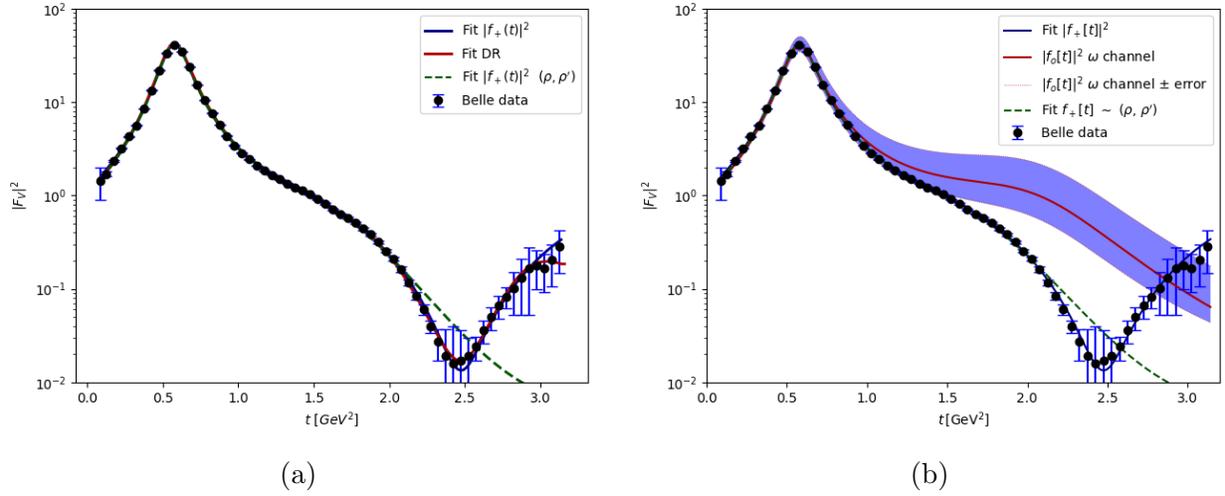


Figura F.2: (a) Factor de forma del pión extraído de datos experimentales al decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ de la Colaboración Belle [249]. Las diferentes curvas corresponden a ajustes en diferentes aproximaciones que incluyen a las resonancias ρ , ρ' y ρ'' . La azul corresponde a nuestra aproximación, la línea roja corresponde al ajuste en relaciones de dispersión (DR) y la línea verde corresponde al ajuste cuando $f_+[t]$ solo incluye a las resonancias ρ y ρ' [292]. (b) De forma ilustrativa se compara el cuadrado de $f_+[t]$ con el cuadrado del factor de forma $f_o[t]$ para el canal ω , la banda azul corresponde al error asociado a los diferentes acoplamientos.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m_ρ	0.7747 GeV	Γ_ρ	0.14612 GeV
$m_{\rho'}$	1.3832 GeV	$\Gamma_{\rho'}$	0.56532 GeV
$m_{\rho''}$	1.8680 GeV	$\Gamma_{\rho''}$	0.39408 GeV
B_0	-0.40281	f_b	1.1321
G_0	-0.17245	f_g	$4,3756 \times 10^{-8}$

Cuadro F.1: Valores para los parámetros libres obtenidos del ajuste al cuadrado del factor de forma $f_+[t]$.

Para la descripción de la parte independiente de estructura del proceso $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ bajo VMD (Ver Cap.5), el uso del factor de forma $f_+[t]$ es correcto, ya que en dicha parte, se exhibe una clara dependencia del mesón ρ . Sin embargo, las contribuciones de la parte dependiente de modelo presentan como estados intermedios a los mesones $a_1(1260)$, $\omega(782)$ y π , donde se ha mostrado con anterioridad [8-10], que el canal relevante es aquel que incluye

al mesón ω . Una diferencia importante que se hace en este trabajo respecto a las versiones previas, es que para este canal del mesón ω , el factor de forma $f_+[t]$ obtenido previamente debe ser modificado, ya que los acoplamientos involucrados claramente son diferentes. Sin embargo, la falta de información experimental no permite hacer un análisis de dicho factor de forma como para el caso de $f_+[t]$. Por otra parte, en el Cap. 3, se ha mostrado que la inclusión del mesón ρ' en la descripción de los procesos $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ y $e^+e^- \rightarrow \omega\pi \rightarrow 4\pi$, es de suma importancia para tener una buena descripción de los datos experimentales de sus respectivas secciones eficaces, además de que se exhibe la sensibilidad e importancia de la fase relativa y los parámetros del mesón ρ' [299]. Con esto en mente, y dada la falta de información experimental del mesón ρ'' y sus acoplamientos, la amplitud del canal ω (ver Cap. 5) que incluye a ρ' y su fase es:

$$\mathcal{M}_\omega = e V_{ud} G_F \epsilon^\mu \hat{V}_{\mu\sigma}^{(\omega)} \left\{ G_\rho g_{\omega\rho\pi} D_\rho^{\sigma\nu}(k_+) + e^{i\theta} G_{\rho'} g_{\omega\rho'\pi} D_{\rho'}^{\sigma\nu}(k_+) \right\} l_\nu, \quad (\text{F.18})$$

donde $\hat{V}_{\mu\sigma}^{(\omega)}$ queda definido a partir de las estructuras dadas en la ec. ?? que contribuye al tensor $\hat{V}_{\mu\nu}$ definido en la ec. (5.4). Procediendo de la misma manera que para el caso del factor de forma $f_+[t]$, factorizando las constantes $G_\rho g_{\omega\rho\pi}/m_\rho^2$ en la ec. (F.18) y contrayendo los propagadores con $\hat{V}_{\mu\sigma}^{(\omega)}$, por propiedades de los tensores de LeviCivita, el nuevo factor de forma puede ser identificado como:

$$f_o[t'] = \frac{m_\rho^2}{m^2 - t' - i\gamma t'} + e^{i\theta} \frac{G_{\rho'} g_{\omega\rho'\pi}}{G_\rho g_{\omega\rho\pi}} \frac{m_\rho^2}{m_{\rho'}^2 - t' - i\gamma' t'}, \quad (\text{F.19})$$

el cual, bajo la condición de normalización $f_o[0] = 1$, puede ser escrito como:

$$f_o[t'] = \frac{1}{1 + \beta_1} \left\{ f_\rho[t'] + \beta_1 f_{\rho'}[t'] \right\}, \quad (\text{F.20})$$

donde

$$\beta_1 = B_1 e^{i\theta} = \frac{m_\rho^2}{m_{\rho'}^2} \frac{G_{\rho'}}{G_\rho} \frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\omega\rho\pi}} e^{i\theta}. \quad (\text{F.21})$$

Para estimar el parámetro B_1 , los valores para las diferentes constantes de acoplamiento y la fase relativa θ que involucran al mesón ρ' , pueden ser tomados del Cuadro 3.4. Sin embargo, no se tiene control sobre los acoplamientos que involucran a la parte electro-débil, es decir, se desconocen los valores de las constantes $G_{\rho'}$ y G_ρ .

Una manera de fijar el valor para dichas constantes, G_{V^-} , es por medio de la relación establecida por la simetría de isoespín 300

$$G_{V^-} = \frac{\sqrt{2} m_V^2}{g_V}, \quad (\text{F.22})$$

donde, como se vio en el Cap. 3, el acoplamiento g_V puede ser extraído a partir de los modos de decaimiento $V \rightarrow ll$ (Ver Tabla 3.4). Sin embargo, dada la buena descripción teórica del factor de forma $f_+(t)$ a los datos experimentales de Belle, de la relación dada en la ec. (F.16), se tiene que:

$$\frac{G_{\rho'}}{G_\rho} = \left| \frac{\beta}{1 + \beta + \gamma} \right| \frac{g_{\rho\pi\pi}}{g_{\rho'\pi\pi}} \frac{m_{\rho'}^2}{m_\rho^2}. \quad (\text{F.23})$$

Sustituyendo en la ec. (F.21), la constante B_1 queda determinada en términos de las constantes de acoplamiento, es decir,

$$B_1 = \left| \frac{\beta}{1 + \beta + \gamma} \right| \frac{g_{\rho\pi\pi}}{g_{\rho'\pi\pi}} \frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\omega\rho\pi}}. \quad (\text{F.24})$$

Tomando los valores para las constantes de acoplamiento $g_{\rho\pi\pi}$, $g_{\rho'\pi\pi}$, $g_{\omega\rho\pi}$ y $g_{\omega\rho'\pi}$ del Cuadro 3.4 y dado que $\beta = B_0 e^{i f_b}$, a partir del ajuste a los datos de Belle al factor de forma, Cuadro F.1, se tienen los valores para B_0 y f_b . El signo menos en B_0 se puede absorber en la fase, es decir, tomando $f_b = 1,1321 + \pi$, por lo que se tiene que:

$$\left| \frac{B_0 e^{i f_b}}{1 + B_0 e^{i f_b} + G_0 e^{i f_g}} \right| = 0.536407. \quad (\text{F.25})$$

Sustituyendo en la ec. (F.24), se tiene que: $B_1 = 0,178305$.

De forma ilustrativa, en la Fig. (F.2) (b) se muestra el factor de forma $|f_o[t]|^2$ en conjunto

con $|f_+[t]|^2$, así como los datos experimentales de la Colaboración Belle. Note que, como era de esperarse, existe una diferencia considerable entre ambos factores de forma construidos. Primero por que $f_o[t]$ solo depende de dos resonancias (ρ, ρ') mientras que $f_+[t]$ depende de tres resonancias (ρ, ρ' y ρ'') y está ajustado a un cierto número de parámetros libres. Por otra parte, el ajuste de parámetros libres de $f_o[t]$ debería estar asociado a la información experimental del proceso de decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi\pi\nu_\tau$ a través del canal omega, sin embargo, a falta de información experimental esto no es posible. Por otro lado, la banda azul está asociada a los errores de los acoplamientos $g_{\rho\pi\pi}, g_{\rho'\pi\pi}, g_{\omega\rho\pi}, g_{\omega\rho'\pi}$ así como a la fase relativa θ (Ver Cuadro 3.4). De la Fig. 3.9, es fácil ver que la correlación entre los acoplamientos que determinan B_1 es nula, es decir, los acoplamientos son independientes uno de otro. Así, tomando sus máximos y sus mínimos, se puede maximizar o minimizar la constante B_1 dependiendo si se quiere una cota superior o inferior para $f_o[t]$. Esté punto es importante, ya que dichos errores son relevantes para el cálculo de la corrección radiativa $G_{EM}(t)$, (Ver Cap.5), así como para determinar los errores para Δa_μ a $g - 2$ del muón.

Finalmente, es importante mencionar que la amplitud del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ está directamente relacionado a la componente isovectorial de la sección eficaz $\sigma(e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-)$ a través de una rotación de isospín, lo que en principio dice que el factor de forma del pión puede ser extraído utilizando ambos conjuntos de datos. Sin embargo, existen discrepancias entre las diferentes medidas experimentales que pueden deberse a la subestimación de las incertidumbres sistemáticas. Por un lado, la amplitud medida en experimentos $e^+ e^-$ [93, 94, 97-100, 105, 301-306] es ligeramente inferior a la que viene de decaimientos del leptón τ^- [71, 249, 307, 308], y la discrepancia no puede explicarse completamente mediante el cálculo de los efectos que violan isospín [3, 13, 22]. Además del barrido energético adoptado en la mayoría de las medidas experimentales para procesos de dispersión $e^+ e^-$, algunos experimentos recientes utilizan el llamado método de retorno radiativo, esto con el fin de extraer la sección eficaz $\sigma(e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-)$ a partir de los datos de $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$, comprobando dife-

rentes rangos de energía para el invariante de masa de dos piones a través del fotón radiado (comúnmente denominada radiación de estado inicial, ISR) [108, 309-315]. El claro ejemplo son los datos de BABAR [100, 105], que utilizan este método, los cuales han reducido la tensión con las mediciones experimentales para decaimientos del leptón τ^- , sin embargo, las discrepancias se mantienen con los datos de KLOE para el caso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$. Por otro lado, usando las correcciones de ruptura de isospín [3, 13, 22], la predicción a partir de los datos de e^+e^- es $\text{Br}(\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau) = (24.94 \pm 0.25)$ [316], que es 2.1σ menor que la media que viene a partir de mediciones de decaimientos de τ^- , $\text{Br}(\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau) = (25.49 \pm 0.09)$ [169]. Para los datos experimentales de BABAR, la discrepancia es de aproximadamente 1.2σ , mientras que par KLOE es de 2.7σ [316]. Este es un punto importante, ya que el cálculo de las correcciones de rompimiento de isospín para este canal son un ingrediente esencial para la estimación de la contribución hadrónica Δa_μ a $g - 2$ del muón a partir de los datos experimentales del leptón τ^- .

Bibliografía

- ¹R. Hofstadter, “Nuclear and Nucleon Scattering of High-Energy Electrons”, [Annual Review of Nuclear Science](#) **7**, 231-316 (1957).
- ²R. Alemany, M. Davier y A. Hocker, “Improved determination of the hadronic contribution to the muon $(g - 2)$ and to $\alpha(M_Z^2)$ Using new data from hadronic τ decays”, [The European Physical Journal C-Particles and Fields](#) **2**, 123-135 (1998).
- ³V. Cirigliano, G. Ecker y H. Neufeld, “Isospin violation and the magnetic moment of the muon”, [Physics Letters B](#) **513**, 361-370 (2001).
- ⁴V. Cirigliano, G. Ecker y H. Neufeld, “Radiative τ decay and the magnetic moment of the muon”, [Journal of High Energy Physics](#) **2002**, 002 (2002).
- ⁵G. Ecker, J. Gasser, A. Pich y E. De Rafael, “The role of resonances in chiral perturbation theory”, [Nuclear Physics B](#) **321**, 311-342 (1989).
- ⁶G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich y E. De Rafael, “Chiral lagrangians for massive spin-1 fields”, [Physics Letters B](#) **223**, 425-432 (1989).
- ⁷J. A. Miranda y P. Roig, “New τ -based evaluation of the hadronic contribution to the vacuum polarization piece of the muon anomalous magnetic moment”, [Phys. Rev. D](#) **102**, 114017 (2020).
- ⁸F. Flores-Báez, A. Flores-Tlalpa, G. L. Castro y G. T. Sánchez, “Long distance radiative corrections to the decay $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ ”, [Phys. Rev. D](#) **74**, 071301 (2006).

- ⁹A. Flores-Tlalpa, F. Flores-Baéz, G. López Castro y G. Toledo Sánchez, “Model-dependent radiative corrections to $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu$ revisited”, [Nuclear Physics B - Proceedings Supplements](#) **169**, Proceedings of the Ninth International Workshop on Tau Lepton Physics, 250-254 (2007).
- ¹⁰A. Flores-Tlalpa, G. L. Castro y G. T. Sánchez, “Radiative two-pion decay of the tau lepton”, [Phys. Rev. D](#) **72**, 113003 (2005).
- ¹¹F. E. Low, “Bremsstrahlung of Very Low-Energy Quanta in Elementary Particle Collisions”, [Phys. Rev.](#) **110**, 974-977 (1958).
- ¹²T. Aoyama et al., “The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model”, [Physics Reports](#) **887**, The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model, 1-166 (2020).
- ¹³M. Davier, A. Hoecker, G. L. Castro, B. Malaescu, X. H. Mo, G. T. Sánchez, P. Wang, C. Z. Yuan y Z. Zhang, “The discrepancy between τ^- and $e^+ e^-$ spectral functions revisited and the consequences for the muon magnetic anomaly”, [The European Physical Journal C](#) **66**, 127-136 (2010).
- ¹⁴“Muon $g - 2$ Theory Initiative”, <https://muon-gm2-theory.illinois.edu/>.
- ¹⁵D. G. Gudiño y G. T. Sánchez, “Determination of the magnetic dipole moment of the rho meson using four-pion electroproduction data”, [International Journal of Modern Physics A](#) **30**, 1550114 (2015).
- ¹⁶V. Druzhinin, “Study of e^+e^- annihilation at low energies”, [arXiv preprint arXiv:0710.3455](#), [10.48550/arXiv.0710.3455](#) (2007).
- ¹⁷J. P. Lees et al. (BABAR Collaboration), “Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ cross section using initial-state radiation at BABAR”, [Phys. Rev. D](#) **96**, 092009 (2017).
- ¹⁸B. Abi et al. (Muon $g - 2$ Collaboration), “Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm”, [Phys. Rev. Lett.](#) **126**, 141801 (2021).

- ¹⁹T. Albahri et al. (The Muon $g - 2$ Collaboration), “Magnetic-field measurement and analysis for the Muon $g - 2$ Experiment at Fermilab”, [Phys. Rev. A **103**, 042208 \(2021\)](#).
- ²⁰T. Albahri et al. (Muon $g - 2$ Collaboration), “Beam dynamics corrections to the Run-1 measurement of the muon anomalous magnetic moment at Fermilab”, [Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 044002 \(2021\)](#).
- ²¹T. Albahri et al. (Muon $g - 2$ Collaboration), “Measurement of the anomalous precession frequency of the muon in the Fermilab Muon $g - 2$ Experiment”, [Phys. Rev. D **103**, 072002 \(2021\)](#).
- ²²G. W. Bennett et al. (Muon $g-2$ Collaboration), “Final report of the E821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL”, [Phys. Rev. D **73**, 072003 \(2006\)](#).
- ²³D. Aguillard, T. Albahri, D. Allspach, A. Anisenkov, K. Badgley, S. Baeßler, I. Bailey, L. Bailey, V. Baranov, E. Barlas-Yucel et al., “Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm”, [arXiv preprint arXiv:2308.06230](#), <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.06230> (2023).
- ²⁴M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu y Z. Zhang, “Reevaluation of the hadronic vacuum polarisation contributions to the Standard Model predictions of the muon $g - 2$ and $\alpha(m_Z^2)$ using newest hadronic cross-section data”, [Eur. Phys. J. **C77**, 827 \(2017\)](#).
- ²⁵A. Keshavarzi, D. Nomura y T. Teubner, “Muon $g - 2$ and $\alpha(M_Z^2)$: a new data-based analysis”, [Phys. Rev. **D97**, 114025 \(2018\)](#).
- ²⁶G. Colangelo, M. Hoferichter y P. Stoffer, “Two-pion contribution to hadronic vacuum polarization”, [JHEP **02**, 006 \(2019\)](#).
- ²⁷M. Hoferichter, B.-L. Hoid y B. Kubis, “Three-pion contribution to hadronic vacuum polarization”, [JHEP **08**, 137 \(2019\)](#).
- ²⁸M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu y Z. Zhang, “A new evaluation of the hadronic vacuum polarisation contributions to the muon anomalous magnetic moment and to $\alpha(m_Z^2)$ ”, [Eur. Phys. J. **C80**, \[Erratum: Eur. Phys. J. **C80**, 410 \(2020\)\], 241 \(2020\)](#).

- ²⁹A. Keshavarzi, D. Nomura y T. Teubner, “The $g - 2$ of charged leptons, $\alpha(M_Z^2)$ and the hyperfine splitting of muonium”, [Phys. Rev. **D101**, 014029 \(2020\)](#).
- ³⁰A. Kurz, T. Liu, P. Marquard y M. Steinhauser, “Hadronic contribution to the muon anomalous magnetic moment to next-to-next-to-leading order”, [Phys. Lett. **B734**, 144-147 \(2014\)](#).
- ³¹B. Chakraborty et al. (Fermilab Lattice, LATTICE-HPQCD, MILC), “Strong-Isospin-Breaking Correction to the Muon Anomalous Magnetic Moment from Lattice QCD at the Physical Point”, [Phys. Rev. Lett. **120**, 152001 \(2018\)](#).
- ³²S. Borsanyi et al. (Budapest-Marseille-Wuppertal), “Hadronic vacuum polarization contribution to the anomalous magnetic moments of leptons from first principles”, [Phys. Rev. Lett. **121**, 022002 \(2018\)](#).
- ³³T. Blum, P. A. Boyle, V. Gülpers, T. Izubuchi, L. Jin, C. Jung, A. Jüttner, C. Lehner, A. Portelli y J. T. Tsang (RBC, UKQCD), “Calculation of the hadronic vacuum polarization contribution to the muon anomalous magnetic moment”, [Phys. Rev. Lett. **121**, 022003 \(2018\)](#).
- ³⁴D. Giusti, V. Lubicz, G. Martinelli, F. Sanfilippo y S. Simula (ETM), “Electromagnetic and strong isospin-breaking corrections to the muon $g - 2$ from Lattice QCD+QED”, [Phys. Rev. **D99**, 114502 \(2019\)](#).
- ³⁵E. Shintani e Y. Kuramashi, “Study of systematic uncertainties in hadronic vacuum polarization contribution to muon $g - 2$ with 2+1 flavor lattice QCD”, [Phys. Rev. **D100**, 034517 \(2019\)](#).
- ³⁶C. T. H. Davies et al. (Fermilab Lattice, LATTICE-HPQCD, MILC), “Hadronic-vacuum-polarization contribution to the muon’s anomalous magnetic moment from four-flavor lattice QCD”, [Phys. Rev. **D101**, 034512 \(2020\)](#).

- ³⁷A. Gérardin, M. Cè, G. von Hippel, B. Hörz, H. B. Meyer, D. Mohler, K. Ottnad, J. Wilhelm y H. Wittig, “The leading hadronic contribution to $(g - 2)_\mu$ from lattice QCD with $N_f = 2 + 1$ flavours of $O(a)$ improved Wilson quarks”, [Phys. Rev. **D100**, 014510 \(2019\)](#).
- ³⁸C. Aubin, T. Blum, C. Tu, M. Golterman, C. Jung y S. Peris, “Light quark vacuum polarization at the physical point and contribution to the muon $g - 2$ ”, [Phys. Rev. **D101**, 014503 \(2020\)](#).
- ³⁹D. Giusti y S. Simula, “Lepton anomalous magnetic moments in Lattice QCD+QED”, [PoS **LATTICE2019**, 104 \(2019\)](#).
- ⁴⁰K. Melnikov y A. Vainshtein, “Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment revisited”, [Phys. Rev. **D70**, 113006 \(2004\)](#).
- ⁴¹F. Jegerlehner, “The Anomalous Magnetic Moment of the Muon”, [Springer Tracts Mod. Phys. **274**, 1-693 \(2017\)](#).
- ⁴²M. Knecht, S. Narison, A. Rabemananjara y D. Rabetiariivony, “Scalar meson contributions to a_μ from hadronic light-by-light scattering”, [Phys. Lett. **B787**, 111-123 \(2018\)](#).
- ⁴³G. Eichmann, C. S. Fischer y R. Williams, “Kaon-box contribution to the anomalous magnetic moment of the muon”, [Phys. Rev. **D101**, 054015 \(2020\)](#).
- ⁴⁴P. Roig y P. Sánchez-Puertas, “Axial-vector exchange contribution to the hadronic light-by-light piece of the muon anomalous magnetic moment”, [Phys. Rev. **D101**, 074019 \(2020\)](#).
- ⁴⁵P. Masjuan y P. Sánchez-Puertas, “Pseudoscalar-pole contribution to the $(g_\mu - 2)$: a rational approach”, [Phys. Rev. **D95**, 054026 \(2017\)](#).
- ⁴⁶G. Colangelo, M. Hoferichter, M. Procura y P. Stoffer, “Dispersion relation for hadronic light-by-light scattering: two-pion contributions”, [JHEP **04**, 161 \(2017\)](#).

- ⁴⁷M. Hoferichter, B.-L. Hoid, B. Kubis, S. Leupold y S. P. Schneider, “Dispersion relation for hadronic light-by-light scattering: pion pole”, [JHEP **10**, 141 \(2018\)](#)].
- ⁴⁸A. Gérardin, H. B. Meyer y A. Nyffeler, “Lattice calculation of the pion transition form factor with $N_f = 2 + 1$ Wilson quarks”, [Phys. Rev. **D100**, 034520 \(2019\)](#)].
- ⁴⁹J. Bijnens, N. Hermansson-Truedsson y A. Rodríguez-Sánchez, “Short-distance constraints for the HLbL contribution to the muon anomalous magnetic moment”, [Phys. Lett. **B798**, 134994 \(2019\)](#)].
- ⁵⁰G. Colangelo, F. Hagelstein, M. Hoferichter, L. Laub y P. Stoffer, “Longitudinal short-distance constraints for the hadronic light-by-light contribution to $(g - 2)_\mu$ with large- N_c Regge models”, [JHEP **03**, 101 \(2020\)](#)].
- ⁵¹V. Pauk y M. Vanderhaeghen, “Single meson contributions to the muon’s anomalous magnetic moment”, [Eur. Phys. J. **C74**, 3008 \(2014\)](#)].
- ⁵²I. Danilkin y M. Vanderhaeghen, “Light-by-light scattering sum rules in light of new data”, [Phys. Rev. **D95**, 014019 \(2017\)](#)].
- ⁵³G. Colangelo, M. Hoferichter, A. Nyffeler, M. Passera y P. Stoffer, “Remarks on higher-order hadronic corrections to the muon $g - 2$ ”, [Phys. Lett. **B735**, 90-91 \(2014\)](#)].
- ⁵⁴T. Blum, N. Christ, M. Hayakawa, T. Izubuchi, L. Jin, C. Jung y C. Lehner, “The hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment from lattice QCD”, [Phys. Rev. Lett. **124**, 132002 \(2020\)](#)].
- ⁵⁵T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita y M. Nio, “Complete Tenth-Order QED Contribution to the Muon $g - 2$ ”, [Phys. Rev. Lett. **109**, 111808 \(2012\)](#)].
- ⁵⁶T. Aoyama, T. Kinoshita y M. Nio, “Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron”, [Atoms **7**, 28 \(2019\)](#)].

- ⁵⁷A. Czarnecki, W. J. Marciano y A. Vainshtein, “Refinements in electroweak contributions to the muon anomalous magnetic moment”, [Phys. Rev. **D67**, \[Erratum: Phys. Rev. **D73**, 119901 \(2006\)\], 073006 \(2003\)](#).
- ⁵⁸C. Gnendiger, D. Stöckinger y H. Stöckinger-Kim, “The electroweak contributions to $(g - 2)_\mu$ after the Higgs boson mass measurement”, [Phys. Rev. **D88**, 053005 \(2013\)](#).
- ⁵⁹G. Colangelo, M. Davier, A. El-Khadra, M. Hoferichter, C. Lehner, L. Lellouch, T. Mibe, B. Roberts, T. Teubner, H. Wittig et al., “Prospects for precise predictions of a_{μ} in the Standard Model”, [arXiv preprint arXiv:2203.15810, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.15810> \(2022\)](#).
- ⁶⁰M. Abe et al., “A new approach for measuring the muon anomalous magnetic moment and electric dipole moment”, [Progress of Theoretical and Experimental Physics **2019**, 053C02, \[10.1093/ptep/ptz030\]\(https://doi.org/10.1093/ptep/ptz030\) \(2019\)](#).
- ⁶¹M. Aiba, A. Amato, A. Antognini, S. Ban, N. Berger, L. Caminada, R. Chislett, P. Crivelli, A. Crivellin, G. D. Maso et al., “Science case for the new high-intensity muon beams hmb at psi”, [arXiv preprint arXiv:2111.05788 \(2021\)](#).
- ⁶²“Potential Fermilab Muon Campus and Storage Ring Experiments”, [Virtual workshop hosted at Fermilab, Batavia, IL \(2021\)](#).
- ⁶³S. Borsanyi y Others., “Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice QCD”, [Nature **593**, 51-55 \(2021\)](#).
- ⁶⁴T. Blum, N. Christ, M. Hayakawa, T. Izubuchi, L. Jin, C. Jung, C. Lehner y C. Tu, *Hadronic light-by-light contribution to the muon anomaly from lattice QCD with infinite volume QED at physical pion mass*, 2023.
- ⁶⁵A. Bazavov et al., “Light-quark connected intermediate-window contributions to the muon $g-2$ hadronic vacuum polarization from lattice QCD”, [Physical Review D **107**, \[10.1103/physrevd.107.114514\]\(https://doi.org/10.1103/physrevd.107.114514\) \(2023\)](#).

- ⁶⁶Bouchiat, Claude y Michel, Louis, “La résonance dans la diffusion méson méson le moment magnétique anormal du méson”, [J. Phys. Radium **22**, 121 \(1961\)](#).
- ⁶⁷S. J. Brodsky y E. de Rafael, “Suggested Boson-Lepton Pair Couplings and the Anomalous Magnetic Moment of the Muon”, [Phys. Rev. **168**, 1620-1622 \(1968\)](#).
- ⁶⁸M. Davier, S. Eidelman, A. Höcker y Z. Zhang, “Confronting spectral functions from ee annihilation and τ decays: consequences for the muon magnetic moment”, [The European Physical Journal C-Particles and Fields **27**, 497-521 \(2003\)](#).
- ⁶⁹B. R. et al. (ALEPH Collaboration), “Measurement of the axial-vector τ spectral functions and determination of $\alpha_s(M_\tau^2)$ from hadronic τ decays”, [The European Physical Journal C - Particles and Fields **4**, 409-431 \(1998\)](#).
- ⁷⁰A. K. et al. (The OPAL Collaboration), “Measurement of the strong coupling constant α_s and the vector and axial-vector spectral functions in hadronic tau decays”, [The European Physical Journal C - Particles and Fields **7**, 571-593 \(1999\)](#).
- ⁷¹S. Anderson et al. (CLEO Collaboration), “Hadronic structure in the decay $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ ”, [Phys. Rev. D **61**, 112002 \(2000\)](#).
- ⁷²Y.-S. Tsai, “Decay Correlations of Heavy Leptons in $e^+ + e^- \rightarrow l^+ + l^-$ ”, [Phys. Rev. D **4**, 2821-2837 \(1971\)](#).
- ⁷³Y.-S. Tsai, “Erratum: Decay correlations of heavy leptons in $e^+ + e^- \rightarrow l^+ + l^-$ ”, [Phys. Rev. D **13**, 771-771 \(1976\)](#).
- ⁷⁴W. J. Marciano y A. Sirlin, “Electroweak radiative corrections to τ decay”, [Phys. Rev. Lett. **61**, 1815-1818 \(1988\)](#).
- ⁷⁵H. Baer, J. Ohnemus y J. F. Owens, “Next-to-leading-logarithm calculation of direct photon production”, [Phys. Rev. D **42**, 61-71 \(1990\)](#).
- ⁷⁶E. Braaten, S. Narison y A. Pich, “QCD analysis of the tau hadronic width”, [Nuclear Physics B **373**, 581-612 \(1992\)](#).

- ⁷⁷R. Decker y M. Finkemeier, “Short and long distance effects in the decay $\tau \rightarrow \pi\nu_\tau(\gamma)$ ”, [Nuclear Physics B **438**, 17-53 \(1995\)](#).
- ⁷⁸J. Erler, “Electroweak radiative corrections to semileptonic τ decays”, [Revista mexicana de física **50**, 200-202 \(2004\)](#).
- ⁷⁹J. Schwinger, *Particles, Sources, And Fields, Volume 3*, Taylor and Francis Group (CRC Press, 1998).
- ⁸⁰M. Drees y K.-I. Hikasa, “Scalar top production in e^+e^- annihilation”, [Physics Letters B **252**, 127-134 \(1990\)](#).
- ⁸¹F. Jegerlehner y R. Szafron, “ $\rho^0 - \gamma$ mixing in the neutral channel pion form factor $F_\pi^{(e)}(s)$ and its role in comparing e^+e^- with τ spectral functions”, [The European Physical Journal C **71**, 1632 \(2011\)](#).
- ⁸²G. Colangelo, M. Hoferichter, B. Kubis y P. Stoffer, “Isospin-breaking effects in the two-pion contribution to hadronic vacuum polarization”, [Journal of High Energy Physics **2022**, 32 \(2022\)](#).
- ⁸³M. Davier, A. Höcker, B. Malaescu, C. Z. Yuan y Z. Zhang, “Update of the ALEPH non-strange spectral functions from hadronic τ decays”, [The European Physical Journal C **74**, 2803 \(2014\)](#).
- ⁸⁴C. Chen, C.-G. Duan y Z.-H. Guo, “Triple-product asymmetry in the radiative two-pion tau decay”, [Journal of High Energy Physics **2022**, 144 \(2022\)](#).
- ⁸⁵M. N. Achasov et al., “Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ process cross section with the SND detector at the VEPP-2000 collider in the energy region $0.525 < \sqrt{s} < 0.883$ GeV”, [Journal of High Energy Physics **2021**, 113 \(2021\)](#).
- ⁸⁶M. Ablikim et al., “Corrigendum to “Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross section between 600 and 900 MeV using initial state radiation” [Phys. Lett. B 753 (2016) 629–638]”, [Physics Letters B **812**, 135982 \(2021\)](#).

- ⁸⁷M. Ablikim, M. Achasov, P. Adlarson, S. Ahmed, M. Albrecht, M. Alekseev, A. Amoroso, F. An, Q. An, Y. Bai et al., “Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ cross section from 0.7 GeV to 3.0 GeV via initial-state radiation”, [arXiv preprint arXiv:1912.11208](#), [10.48550/arXiv.1912.11208](#) (2019).
- ⁸⁸J. P. Lees et al. (BABAR Collaboration), “Study of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ using initial state radiation with BABAR”, [Phys. Rev. D **104**, 112003 \(2021\)](#).
- ⁸⁹B.-L. Hoid, M. Hoferichter y B. Kubis, “Hadronic vacuum polarization and vector-meson resonance parameters from $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ ”, [The European Physical Journal C **80**, 988 \(2020\)](#).
- ⁹⁰D. Stamen, D. Hariharan, M. Hoferichter, B. Kubis y P. Stoffer, “Kaon electromagnetic form factors in dispersion theory”, [The European Physical Journal C **82**, 432 \(2022\)](#).
- ⁹¹3. Collaboration, F. V. Ignatov et al., *Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross section from threshold to 1.2 GeV with the CMD-3 detector*, 2023.
- ⁹²R. Akhmetshin et al., “Update: A reanalysis of hadronic cross section measurements at CMD-2”, [Physics Letters B **578**, 285-289 \(2004\)](#).
- ⁹³V. M. Aul’chenko et al., “Measurement of the pion form factor in the range 1.04-1.38 GeV with the CMD-2 detector”, [82, 743-747 \(2005\)](#).
- ⁹⁴“Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross section with the CMD-2 detector in the 370-520-MeV energy range”, [JETP Letters **84**, 413-417 \(2006\)](#).
- ⁹⁵M. N. Achasov et al. (SND), “Update of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross-section measured by SND detector in the energy region $400\text{-MeV} \leq \sqrt{s} \leq 1000\text{-MeV}$ ”, [J. Exp. Theor. Phys. **103**, 380-384 \(2006\)](#).
- ⁹⁶M. Achasov et al., “Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ process cross section with the SND detector at the VEPP-2000 collider in the energy region $0.525 \leq \sqrt{s} \leq 0.883$ GeV”, [Journal of High Energy Physics **2021**, 10.1007/JHEP01\(2021\)113 \(2021\)](#).

- ⁹⁷F. Ambrosino et al., “Measurement of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma(\gamma))$ and the dipion contribution to the muon anomaly with the KLOE detector”, [Physics Letters B **670**, 285-291 \(2009\)](#).
- ⁹⁸F. Ambrosino et al., “Measurement of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$ from threshold to 0.85 GeV² using initial state radiation with the KLOE detector”, [Physics Letters B **700**, 102-110 \(2011\)](#).
- ⁹⁹D. Babusci et al., “Precision measurement of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma)$ and determination of the $\pi^+\pi^-$ contribution to the muon anomaly with the KLOE detector”, [Physics Letters B **720**, 336-343 \(2013\)](#).
- ¹⁰⁰J. P. Lees et al. (BABAR Collaboration), “Precise measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-(\gamma)$ cross section with the initial-state radiation method at BABAR”, [Phys. Rev. D **86**, 032013 \(2012\)](#).
- ¹⁰¹M. Ablikim et al., “Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross section between 600 and 900 MeV using initial state radiation”, [Physics Letters B **753**, 629-638 \(2016\)](#).
- ¹⁰²T. K. Pedlar et al. (CLEO Collaboration), “Precision Measurements of the Timelike Electromagnetic Form Factors of Pion, Kaon, and Proton”, [Phys. Rev. Lett. **95**, 261803 \(2005\)](#).
- ¹⁰³F. Campanario, H. Czyż, J. Gluza, T. Jeliński, G. Rodrigo, S. Tracz y D. Zhuridov, “Standard model radiative corrections in the pion form factor measurements do not explain the a_μ anomaly”, [Phys. Rev. D **100**, 076004 \(2019\)](#).
- ¹⁰⁴B. Collaboration, *Study of additional radiation in the initial-state-radiation processes $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ and $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ in the BABAR experiment*, 2023.
- ¹⁰⁵B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), “Precise Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ Cross Section with the Initial State Radiation Method at BABAR”, [Phys. Rev. Lett. **103**, 231801 \(2009\)](#).

- ¹⁰⁶A. Anastasi et al. (The KLOE-2 collaboration), “Combination of KLOE $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma(\gamma))$ measurements and determination of $a_\mu^{\pi^+\pi^-}$ in the energy range $0.10 < s < 0.95$ GeV²”, [Journal of High Energy Physics **2018**, 173 \(2018\)](#).
- ¹⁰⁷G. Abbiendi, A. Arbuzov, S. Banerjee, D. Biswas, E. Budassi, G. Colangelo, H. Czyż, M. Davier, A. Denig, A. Driutti et al., “Mini-Proceedings of the STRONG2020 Virtual Workshop on”Space-like and Time-like determination of the Hadronic Leading Order contribution to the Muon $g-2$ ”, [arXiv preprint arXiv:2201.12102, 10.48550/arXiv.2201.12102 \(2022\)](#).
- ¹⁰⁸S. Actis et al., “Quest for precision in hadronic cross sections at low energy: Monte Carlo tools vs. experimental data.”, [The European Physical Journal C **66**, 585-686 \(2010\)](#).
- ¹⁰⁹T. Blum, “Lattice Calculation of the Lowest-Order Hadronic Contribution to the Muon Anomalous Magnetic Moment”, [Phys. Rev. Lett. **91**, 052001 \(2003\)](#).
- ¹¹⁰D. Bernecker y H. B. Meyer, “Vector correlators in lattice QCD: Methods and applications”, [The European Physical Journal A **47**, 148 \(2011\)](#).
- ¹¹¹T. Blum, P. A. Boyle, V. Gülpers, T. Izubuchi, L. Jin, C. Jung, A. Jüttner, C. Lehner, A. Portelli y J. T. Tsang (RBC and UKQCD Collaborations), “Calculation of the Hadronic Vacuum Polarization Contribution to the Muon Anomalous Magnetic Moment”, [Phys. Rev. Lett. **121**, 022003 \(2018\)](#).
- ¹¹²C. Aubin, T. Blum, M. Golterman y S. Peris, “Muon anomalous magnetic moment with staggered fermions: Is the lattice spacing small enough?”, [Phys. Rev. D **106**, 054503 \(2022\)](#).
- ¹¹³C. T. H. Davies, C. DeTar, A. X. El-Khadra, S. Gottlieb, D. Hatton, A. S. Kronfeld, S. Lahert, G. P. Lepage, C. McNeile, E. T. Neil, C. T. Peterson, G. S. Ray, R. S. Van de Water y A. Vaquero (Fermilab Lattice, HPQCD, and MILC Collaborations), “Windows on the hadronic vacuum polarization contribution to the muon anomalous magnetic moment”, [Phys. Rev. D **106**, 074509 \(2022\)](#).

- ¹¹⁴G. Colangelo, A. El-Khadra, M. Hoferichter, A. Keshavarzi, C. Lehner, P. Stoffer y T. Teubner, “Data-driven evaluations of Euclidean windows to scrutinize hadronic vacuum polarization”, [Physics Letters B **833**, 137313 \(2022\)](#).
- ¹¹⁵M. Cè, A. Gérardin, G. von Hippel, R. J. Hudspith, S. Kuberski, H. B. Meyer, K. Miura, D. Mohler, K. Ottnad, S. Paul, A. Risch, T. San José y H. Wittig, “Window observable for the hadronic vacuum polarization contribution to the muon $g - 2$ from lattice QCD”, [Phys. Rev. D **106**, 114502 \(2022\)](#).
- ¹¹⁶C. Alexandrou, S. Bacchio, P. Dimopoulos, J. Finkenrath, R. Frezzotti, G. Gagliardi, M. Garofalo, K. Hadjiyiannakou, B. Kostrzewa, K. Jansen, V. Lubicz, M. Petschlies, F. Sanfilippo, S. Simula, C. Urbach y U. W. and, “Lattice calculation of the short and intermediate time-distance hadronic vacuum polarization contributions to the muon magnetic moment using twisted-mass fermions”, [Physical Review D **107**, 10.1103/physrevd.107.074506 \(2023\)](#).
- ¹¹⁷C. Aubin, T. Blum, C. Tu, M. Golterman, C. Jung y S. Peris, “Light quark vacuum polarization at the physical point and contribution to the muon $g - 2$ ”, [Phys. Rev. D **101**, 014503 \(2020\)](#).
- ¹¹⁸C. Lehner y A. S. Meyer, “Consistency of hadronic vacuum polarization between lattice QCD and the R ratio”, [Phys. Rev. D **101**, 074515 \(2020\)](#).
- ¹¹⁹G. Wang, T. Draper, K.-F. Liu e Y.-B. Yang, “Muon $g-2$ with overlap valence fermions”, [Physical Review D **107**, 10.1103/physrevd.107.034513 \(2023\)](#).
- ¹²⁰T. Blum, P. A. Boyle, M. Bruno, D. Giusti, V. Gülpers, R. C. Hill, T. Izubuchi, Y. -. Jang, L. Jin, C. Jung, A. Jüttner, C. Kelly, C. Lehner, N. Matsumoto, R. D. Mawhinney, A. S. Meyer y J. T. Tsang, *An update of Euclidean windows of the hadronic vacuum polarization*, 2023.

- ¹²¹P. Masjuan, A. Miranda y P. Roig, “ τ data-driven evaluation of Euclidean windows for the hadronic vacuum polarization”, [arXiv preprint arXiv:2305.20005](#), [10.48550/arXiv.2305.20005](#) (2023).
- ¹²²D. Boito, M. Golterman, K. Maltman y S. Peris, “Evaluation of the three-flavor quark-disconnected contribution to the muon anomalous magnetic moment from experimental data”, [Phys. Rev. D **105**, 093003 \(2022\)](#).
- ¹²³A. Crivellin, M. Hoferichter, C. A. Manzari y M. Montull, “Hadronic Vacuum Polarization: $(g - 2)_\mu$ versus Global Electroweak Fits”, [Phys. Rev. Lett. **125**, 091801 \(2020\)](#).
- ¹²⁴A. Keshavarzi, W. J. Marciano, M. Passera y A. Sirlin, “Muon $g - 2$ and $\Delta\alpha$ connection”, [Phys. Rev. D **102**, 033002 \(2020\)](#).
- ¹²⁵B. Malaescu y M. Schott, “Impact of correlations between a_μ and α_{QED} on the EW fit”, [The European Physical Journal C **81**, 46 \(2021\)](#).
- ¹²⁶G. Colangelo, M. Hoferichter y P. Stoffer, “Constraints on the two-pion contribution to hadronic vacuum polarization”, [Physics Letters B **814**, 136073 \(2021\)](#).
- ¹²⁷M. Cè y Others., “The hadronic running of the electromagnetic coupling and the electroweak mixing angle from lattice QCD”, [Journal of High Energy Physics **2022**, 220 \(2022\)](#).
- ¹²⁸M. Passera, W. J. Marciano y A. Sirlin, “The muon $g - 2$ and the bounds on the Higgs boson mass”, [Phys. Rev. D **78**, 013009 \(2008\)](#).
- ¹²⁹C. Carloni Calame, M. Passera, L. Trentadue y G. Venanzoni, “A new approach to evaluate the leading hadronic corrections to the muon $g-2$ ”, [Physics Letters B **746**, 325-329 \(2015\)](#).
- ¹³⁰G. Abbiendi et al., “Measuring the leading hadronic contribution to the muon $g-2$ via μe scattering”, [The European Physical Journal C **77**, 139 \(2017\)](#).

- ¹³¹G. Abbiendi, *Letter of Intent: the MUonE project*, inf. téc., The collaboration has not yet a structure, therefore the names above are for the moment an indication of contacts. (CERN, Geneva, 2019).
- ¹³²P. Banerjee et al., “Theory for muon-electron scattering @ 10 ppm”, [The European Physical Journal C **80**, 591 \(2020\)](#).
- ¹³³M. Bruno, T. Izubuchi, C. Lehner y A. Meyer, “On isospin breaking in τ decays for $(g-2)_\mu$ from Lattice QCD”, [PoS LATTICE2018, 135 \(2019\)](#).
- ¹³⁴H. R. Grigoryan y A. V. Radyushkin, “Structure of vector mesons in a holographic model with linear confinement”, [Phys. Rev. D **76**, 095007 \(2007\)](#).
- ¹³⁵P. A. M. Dirac, “Forms of Relativistic Dynamics”, [Rev. Mod. Phys. **21**, 392-399 \(1949\)](#).
- ¹³⁶A. F. Krutov, R. G. Polezhaev y V. E. Troitsky, “Magnetic moment of the ρ meson in instant-form relativistic quantum mechanics”, [Phys. Rev. D **97**, 033007 \(2018\)](#).
- ¹³⁷J. He, B. Juliá-Díaz e Y.-b. Dong, “Electromagnetic form factors of pion and rho in the three forms of relativistic kinematics”, [Physics Letters B **602**, 212-217 \(2004\)](#).
- ¹³⁸E. P. Biernat y W. Schweiger, “Electromagnetic ρ -meson form factors in point-form relativistic quantum mechanics”, [Phys. Rev. C **89**, 055205 \(2014\)](#).
- ¹³⁹F. Cardarelli, I. Grach, I. Narodetskii, G. Salmè y S. Simula, “Electromagnetic form factors of the ρ meson in a light-front constituent quark model”, [Physics Letters B **349**, 393-399 \(1995\)](#).
- ¹⁴⁰J. P. B. C. de Melo y T. Frederico, “Covariant and light-front approaches to the ρ - meson electromagnetic form factors”, [Phys. Rev. C **55**, 2043-2048 \(1997\)](#).
- ¹⁴¹B. L. G. Bakker, H.-M. Choi y C.-R. Ji, “The vector meson form factor analysis in light-front dynamics”, [Phys. Rev. D **65**, 116001 \(2002\)](#).
- ¹⁴²W. Jaus, “Consistent treatment of spin-1 mesons in the light-front quark model”, [Phys. Rev. D **67**, 094010 \(2003\)](#).

- ¹⁴³H.-M. Choi y C.-R. Ji, “Electromagnetic structure of the ρ meson in the light-front quark model”, [Phys. Rev. D **70**, 053015 \(2004\)](#).
- ¹⁴⁴D. Djukanovic, E. Epelbaum, J. Gegelia y U.-G. Meißner, “The magnetic moment of the ρ -meson”, [Physics Letters B **730**, 115-121 \(2014\)](#).
- ¹⁴⁵W. Qian, S. Jia, Y. Li y J. P. Vary, “Light mesons within the basis light-front quantization framework”, [Phys. Rev. C **102**, 055207 \(2020\)](#).
- ¹⁴⁶J.-L. Zhang, G.-Z. Kang y J.-L. Ping, “ ρ meson generalized parton distributions in the Nambu-Jona-Lasinio model”, [Phys. Rev. D **105**, 094015 \(2022\)](#).
- ¹⁴⁷M. E. Carrillo-Serrano, W. Bentz, I. C. Cloët y A. W. Thomas, “ ρ meson form factors in a confining Nambu-Jona-Lasinio model”, [Phys. Rev. C **92**, 015212 \(2015\)](#).
- ¹⁴⁸Y.-L. Luan, X.-L. Chen y W.-Z. Deng, “Meson electro-magnetic form factors in an extended Nambu–Jona-Lasinio model including heavy quark flavors”, [Chinese Physics C **39**, 113103 \(2015\)](#).
- ¹⁴⁹A. Samsonov, “Magnetic moment of the ρ -meson in QCD sum rules: α_s -corrections”, [Journal of High Energy Physics **2003**, 061 \(2004\)](#).
- ¹⁵⁰T. Aliev, A. Özpineci y M. Savcı, “Magnetic and quadrupole moments of light spin-1 mesons in light cone QCD sum rules”, [Physics Letters B **678**, 470-476 \(2009\)](#).
- ¹⁵¹D. Melikhov y S. Simula, “Electromagnetic form factors in the light-front formalism and the Feynman triangle diagram: Spin-0 and spin-1 two-fermion systems”, [Phys. Rev. D **65**, 094043 \(2002\)](#).
- ¹⁵²V. Simonis, “Magnetic properties of ground-state mesons.”, [The European Physical Journal A **52**, 90 \(2016\)](#).
- ¹⁵³A. S. Bagdasaryan, S. V. Esaibegian y N. L. Ter-Isaakian, “Form-factors of Mesons and Meson Resonances at Small and Intermediate Momentum Transfers Q^2 in the Relativistic Quark Model”, [Yad. Fiz. **42**, 440-452 \(1985\)](#).

- ¹⁵⁴A. M. Badalian e Y. A. Simonov, “Magnetic moments of mesons”, [Phys. Rev. D **87**, 074012 \(2013\)](#).
- ¹⁵⁵B.-D. Sun e Y.-B. Dong, “ ρ meson unpolarized generalized parton distributions with a light-front constituent quark model”, [Phys. Rev. D **96**, 036019 \(2017\)](#).
- ¹⁵⁶F. T. Hawes y M. A. Pichowsky, “Electromagnetic form factors of light vector mesons”, [Phys. Rev. C **59**, 1743-1750 \(1999\)](#).
- ¹⁵⁷W. Andersen y W. Wilcox, “Lattice Charge Overlap I. Elastic Limit of Pi and Rho Mesons”, [Annals of Physics **255**, 34-59 \(1997\)](#).
- ¹⁵⁸M. A. Ivanov, Y. L. Kalinovsky y C. D. Roberts, “Survey of heavy-meson observables”, [Phys. Rev. D **60**, 034018 \(1999\)](#).
- ¹⁵⁹J. N. Hedditch, W. Kamleh, B. G. Lasscock, D. B. Leinweber, A. G. Williams y J. M. Zanotti, “Pseudoscalar and vector meson form factors from lattice QCD”, [Phys. Rev. D **75**, 094504 \(2007\)](#).
- ¹⁶⁰M. S. Bhagwat y P. Maris, “Vector meson form factors and their quark-mass dependence”, [Phys. Rev. C **77**, 025203 \(2008\)](#).
- ¹⁶¹F. X. Lee, S. Moerschbacher y W. Wilcox, “Magnetic moments of vector, axial, and tensor mesons in lattice QCD”, [Phys. Rev. D **78**, 094502 \(2008\)](#).
- ¹⁶²H. L. L. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutiérrez-Guerrero, C. D. Roberts y D. J. Wilson, “ π and ρ mesons, and their diquark partners, from a contact interaction”, [Phys. Rev. C **83**, 065206 \(2011\)](#).
- ¹⁶³B. J. Owen, W. Kamleh, D. B. Leinweber, M. S. Mahub y B. J. Menadue, “Light meson form factors at near physical masses”, [Phys. Rev. D **91**, 074503 \(2015\)](#).
- ¹⁶⁴M. Pitschmann, C.-Y. Seng, M. J. Ramsey-Musolf, C. D. Roberts, S. M. Schmidt y D. J. Wilson, “Electric dipole moment of the ρ meson”, [Phys. Rev. C **87**, 015205 \(2013\)](#).

- ¹⁶⁵O. Solovjeva y O. Teryaev, “Determination of the properties of vector mesons in external magnetic field by quenched SU(3) lattice QCD”, [Journal of High Energy Physics **2017**, 142 \(2017\)](#).
- ¹⁶⁶C. Shi, J. Li, P.-L. Yin y W. Jia, “Unpolarized generalized parton distributions of light and heavy vector mesons”, [Phys. Rev. D **107**, 074009 \(2023\)](#).
- ¹⁶⁷V. Y. Haurysh y V. V. Andreev, “ ρ -Meson Form-factors in Point form of Poincaré-Invariant Quantum Mechanics”, [Few-Body Systems, 29-62 \(2021\)](#).
- ¹⁶⁸O. V. Teryaev, “Gravitational form factors and nucleon spin structure”, [Frontiers of Physics **11**, 111207 \(2016\)](#).
- ¹⁶⁹R. L. Workman et al. (Particle Data Group), “Review of Particle Physics”, [PTEP **2022**, 083C01 \(2022\)](#).
- ¹⁷⁰S. Godfrey y N. Isgur, “Mesons in a relativized quark model with chromodynamics”, [Phys. Rev. D **32**, 189-231 \(1985\)](#).
- ¹⁷¹A. Donnachie y H. Mirzaie, “Evidence for two $\rho'(1600)$ resonances”, [Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **33**, 407-417 \(1987\)](#).
- ¹⁷²A. Abele et al., “High-mass ρ -meson states from $\bar{p}d$ -annihilation at rest into $pi^- \pi^0 \pi^0 p$ spectator”, [Physics Letters B **391**, 191-196 \(1997\)](#).
- ¹⁷³A. Abele et al. (The CRYSTAL BARREL Collaboration), “ 4π -decays of scalar and vector mesons”, [The European Physical Journal C - Particles and Fields **21**, 261-269 \(2001\)](#).
- ¹⁷⁴A. Donnachie y A. B. Clegg, “Comparative analysis of τ -lepton decay and electron-positron annihilation”, [Phys. Rev. D **51**, 4979-4991 \(1995\)](#).
- ¹⁷⁵N. N. Achasov y A. A. Kozhevnikov, “ ρ' 's in analyzing e^+e^- annihilation: Mark III, LASS, and ARGUS data”, [Phys. Rev. D **55**, 2663-2671 \(1997\)](#).

- ¹⁷⁶B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), “ $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$, $K^+K^-\pi^+\pi^-$, and $K^+K^-K^+K^-$ cross sections at center-of-mass energies 0.5–4.5 GeV measured with initial-state radiation”, [Phys. Rev. D **71**, 052001 \(2005\)](#).
- ¹⁷⁷F. Iachello, A. Jackson y A. Lande, “Semi-phenomenological fits to nucleon electromagnetic form factors”, [Physics Letters B **43**, 191-196 \(1973\)](#).
- ¹⁷⁸G. Höhler, E. Pietarinen, I. Sabba-Stefanescu, F. Borkowski, G. Simon, V. Walther y R. Wendling, “Analysis of electromagnetic nucleon form factors”, [Nuclear Physics B **114**, 505-534 \(1976\)](#).
- ¹⁷⁹S. L. Glashow, “Partial-symmetries of weak interactions”, [Nuclear Physics **22**, 579-588 \(1961\)](#).
- ¹⁸⁰S. Weinberg, “A Model of Leptons”, [Phys. Rev. Lett. **19**, 1264-1266 \(1967\)](#).
- ¹⁸¹A. Salam, “Weak and Electromagnetic Interactions.”, [pp 367-77 of Elementary Particle Theory. Svartholm, Nils \(ed.\). New York, John Wiley and Sons, Inc., 1968. \(1969\)](#).
- ¹⁸²P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”, [Phys. Rev. Lett. **13**, 508-509 \(1964\)](#).
- ¹⁸³G. 'tHooft, “Renormalization of massless Yang-Mills fields”, [Nuclear Physics B **33**, 173-199 \(1971\)](#).
- ¹⁸⁴G. Hooft, “Renormalizable Lagrangians for massive Yang-Mills fields”, [Nuclear Physics B **35**, 167-188 \(1971\)](#).
- ¹⁸⁵O. W. Greenberg, “Spin and Unitary-Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons”, [Phys. Rev. Lett. **13**, 598-602 \(1964\)](#).
- ¹⁸⁶M. Y. Han e Y. Nambu, “Three-Triplet Model with Double SU(3) Symmetry”, [Phys. Rev. **139**, B1006-B1010 \(1965\)](#).
- ¹⁸⁷D. J. Gross y F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories”, [Phys. Rev. Lett. **30**, 1343-1346 \(1973\)](#).

- ¹⁸⁸D. J. Gross y F. Wilczek, “Asymptotically Free Gauge Theories. I”, [Phys. Rev. D **8**, 3633-3652 \(1973\)](#).
- ¹⁸⁹H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?”, [Phys. Rev. Lett. **30**, 1346-1349 \(1973\)](#).
- ¹⁹⁰S. L. Glashow, J. Iliopoulos y L. Maiani, “Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry”, [Phys. Rev. D **2**, 1285-1292 \(1970\)](#).
- ¹⁹¹M. Antonelli et al., “Flavor physics in the quark sector”, [Physics Reports **494**, 197-414 \(2010\)](#).
- ¹⁹²L. Wolfenstein, “Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix”, [Phys. Rev. Lett. **51**, 1945-1947 \(1983\)](#).
- ¹⁹³F. J. Gilman e Y. Nir, “Quark Mixing: the CKM Picture”, [Annual Review of Nuclear and Particle Science **40**, 213-238 \(1990\)](#).
- ¹⁹⁴A. J. Buras, M. Jamin y P. H. Weisz, “Leading and next-to-leading QCD corrections to ϵ -parameter and $B^0 - \bar{B}^0$ mixing in the presence of a heavy top quark”, [Nuclear Physics B **347**, 491-536 \(1990\)](#).
- ¹⁹⁵H. Fritzsch, M. Gell-Mann y H. Leutwyler, “Advantages of the color octet gluon picture”, [Physics Letters B **47**, 365-368 \(1973\)](#).
- ¹⁹⁶S. Weinberg, “Non-Abelian Gauge Theories of the Strong Interactions”, [Phys. Rev. Lett. **31**, 494-497 \(1973\)](#).
- ¹⁹⁷A. S. Kronfeld y C. Quigg, “Resource Letter QCD-1: Quantum chromodynamics”, [American Journal of Physics **78**, 1081-1116 \(2010\)](#).
- ¹⁹⁸T. Muta, *Foundations Of Quantum Chromodynamics* (World Scientific, 1998).
- ¹⁹⁹M. Gell-Mann, “THE EIGHTFOLD WAY: A THEORY OF STRONG INTERACTION SYMMETRY”, [10.2172/4008239 \(1961\)](#).

- ²⁰⁰L. Faddeev y V. Popov, “Feynman diagrams for the Yang-Mills field”, [Physics Letters B **25**, 29-30 \(1967\)](#).
- ²⁰¹A. Pich, “Aspects of quantum chromodynamics”, [Particle Physics, 53 \(2000\)](#).
- ²⁰²J. Gasser y H. Leutwyler, “Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark”, [Nuclear Physics B **250**, 465-516 \(1985\)](#).
- ²⁰³C. Abel et al., “Measurement of the Permanent Electric Dipole Moment of the Neutron”, [Phys. Rev. Lett. **124**, 081803 \(2020\)](#).
- ²⁰⁴C. G. Callan, “Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory”, [Phys. Rev. D **2**, 1541-1547 \(1970\)](#).
- ²⁰⁵K. Symanzik, “Small distance behaviour in field theory and power counting”, [Communications in Mathematical Physics **18**, 227-246 \(1970\)](#).
- ²⁰⁶R. Field y D. Pines, *Applications Of Perturbative Qcd* (Avalon Publishing, 1995).
- ²⁰⁷T. Muta, *Foundations Of Quantum Chromodynamics: An Introduction To Perturbative Methods In Gauge Theories*, World Scientific Lecture Notes In Physics (World Scientific Publishing Company, 1987).
- ²⁰⁸W. Weise, “Hadronic aspects of photon-nucleus interactions”, [Physics Reports **13**, 53-92 \(1974\)](#).
- ²⁰⁹M. R. Frank y P. C. Tandy, “Gauge invariance and the electromagnetic current of composite pions”, [Phys. Rev. C **49**, 478-488 \(1994\)](#).
- ²¹⁰M. R. Frank, “Nonperturbative aspects of the quark-photon vertex”, [Phys. Rev. C **51**, 987-998 \(1995\)](#).
- ²¹¹M. R. Frank y C. D. Roberts, “Model gluon propagator and pion and ρ -meson observables”, [Phys. Rev. C **53**, 390-398 \(1996\)](#).
- ²¹²W. J. MARCIANO, “The Standard Model and Beyonda”, [Annals of the New York Academy of Sciences **461**, 367-383 \(1986\)](#).

- ²¹³Y. Nambu, “Possible Existence of a Heavy Neutral Meson”, [Phys. Rev. **106**, 1366-1367 \(1957\)](#).
- ²¹⁴J. J. Sakurai, *Currents and Mesons* (The University of Chicago Press, 1969).
- ²¹⁵C. N. Yang y R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”, [Phys. Rev. **96**, 191-195 \(1954\)](#).
- ²¹⁶N. M. Kroll, T. D. Lee y B. Zumino, “Neutral Vector Mesons and the Hadronic Electromagnetic Current”, [Phys. Rev. **157**, 1376-1399 \(1967\)](#).
- ²¹⁷M. Gell-Mann y F. Zachariasen, “Form Factors and Vector Mesons”, [Phys. Rev. **124**, 953-964 \(1961\)](#).
- ²¹⁸D. Laurié, *Particles and fields* (Interscience Publishers, John Wiley & Sons Inc, 1968).
- ²¹⁹H. O’Connell, B. Pearce, A. Thomas y A. Williams, “Rho-omega mixing, vector meson dominance and the pion form-factor”, [Progress in Particle and Nuclear Physics **39**, 201-252 \(1997\)](#).
- ²²⁰M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki y T. Yanagida, “Is the ρ Meson a Dynamical Gauge Boson of Hidden Local Symmetry?”, [Phys. Rev. Lett. **54**, 1215-1218 \(1985\)](#).
- ²²¹T. Fujiwara, T. Kugo, H. Terao, S. Uehara y K. Yamawaki, “Non-Abelian Anomaly and Vector Mesons as Dynamical Gauge Bosons of Hidden Local Symmetries”, [Progress of Theoretical Physics **73**, 926-941 \(1985\)](#).
- ²²²U.-G. Meissner, “Low-energy hadron physics from effective chiral Lagrangians with vector mesons”, [Physics Reports **161**, 213-361 \(1988\)](#).
- ²²³E. A. Kuraev y Z. K. Silagadze, “Once more about the $\omega \rightarrow 3\pi$ contact term”, [Phys. Atom. Nucl. **58**, 1589-1596 \(1995\)](#).
- ²²⁴Ö. Kaymakçalan, S. Rajeev y J. Schechter, “Non-Abelian anomaly and vector-meson decays”, [Phys. Rev. D **30**, 594-602 \(1984\)](#).

- ²²⁵E. Kuraev y Z. Silagadze, “Minimal embedding of vector mesons in the low energy effective chiral lagrangian”, [Physics Letters B **292**, 377-383 \(1992\)](#).
- ²²⁶J. Prades, “Massive spin-1 field chiral Lagrangian from an extended Nambu-Jona-Lasinio model of QCD”, [Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **63**, 491-505 \(1994\)](#).
- ²²⁷S. Scherer y M. R. Schindler, *A Primer for Chiral Perturbation Theory*, vol. 830, Lecture Notes in Physics (Springer, 2012).
- ²²⁸S. Scherer y M. R. Schindler, *Chiral perturbation theory*, 2022.
- ²²⁹A. Manohar y H. Georgi, “Chiral quarks and the non-relativistic quark model”, [Nuclear Physics B **234**, 189-212 \(1984\)](#).
- ²³⁰H. Leutwyler, “Theoretical chiral dynamics”, en [Chiral Dynamics](#) (World Scientific, 2001), págs. 3-17.
- ²³¹G. 't Hooft, “Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies”, [Phys. Rev. Lett. **37**, 8-11 \(1976\)](#).
- ²³²C. Callan, R. Dashen y D. Gross, “The structure of the gauge theory vacuum”, [Physics Letters B **63**, 334-340 \(1976\)](#).
- ²³³R. Crewther, “Chirality selection rules and the U(1) problem”, [Physics Letters B **70**, 349-354 \(1977\)](#).
- ²³⁴G. Hooft, “A planar diagram theory for strong interactions”, [Nuclear Physics B **72**, 461-473 \(1974\)](#).
- ²³⁵J. Goldstone, A. Salam y S. Weinberg, “Broken Symmetries”, [Phys. Rev. **127**, 965-970 \(1962\)](#).
- ²³⁶J. Gasser y H. Leutwyler, “Chiral perturbation theory to one loop”, [Annals of Physics **158**, 142-210 \(1984\)](#).
- ²³⁷S. Weinberg, “Phenomenological Lagrangians”, [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **96**, 327-340 \(1979\)](#).

- ²³⁸S. Coleman, J. Wess y B. Zumino, “Structure of Phenomenological Lagrangians. I”, [Phys. Rev. **177**, 2239-2247 \(1969\)](#).
- ²³⁹M. Gell-Mann, R. J. Oakes y B. Renner, “Behavior of Current Divergences under $SU_3 \times SU_3$ ”, [Phys. Rev. **175**, 2195-2199 \(1968\)](#).
- ²⁴⁰J. Bijnens y G. Ecker, “Mesonic Low-Energy Constants”, [Annual Review of Nuclear and Particle Science **64**, 149-174 \(2014\)](#).
- ²⁴¹U. Wenger y H. Wittig (Flavour Lattice Averaging Group (FLAG)), “FLAG Review 2021”, [The European Physical Journal C **82**, 869 \(2022\)](#).
- ²⁴²J. Gasser, M. Sainio y A. Švarc, “Nucleons with chiral loops”, [Nuclear Physics B **307**, 779-853 \(1988\)](#).
- ²⁴³F. Riazuddin, *A Modern Introduction to Particle Physics* (World Scientific, 2011).
- ²⁴⁴Q. Ho-Kim y X.-Y. Pham, *Elementary Particles and Their Interactions. Concepts and Phenomena* (Springer, 1998).
- ²⁴⁵C. O. da Silva y P. L. Natti, “Modelo de quarks e sistemas multiquarks”, [Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 175-187 \(2007\)](#).
- ²⁴⁶G. Peter Lepage, “A new algorithm for adaptive multidimensional integration”, [Journal of Computational Physics **27**, 192-203 \(1978\)](#).
- ²⁴⁷D. G. Gudiño y G. T. Sánchez, “The $\omega\rho\pi$ coupling in the VMD model revisited”, [International Journal of Modern Physics A **27**, 1250101 \(2012\)](#).
- ²⁴⁸K. W. Edwards et al. (CLEO Collaboration), “Resonant structure of $\tau \rightarrow 3\pi\pi^0\nu_\tau$ and $\tau \rightarrow \omega\pi\nu_\tau$ decays”, [Phys. Rev. D **61**, 072003 \(2000\)](#).
- ²⁴⁹M. Fujikawa et al. (The Belle Collaboration), “High statistics study of the $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ decay”, [Phys. Rev. D **78**, 072006 \(2008\)](#).
- ²⁵⁰M. N. Achasov et al., “Updated measurement of the $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ cross section with the SND detector”, [Phys. Rev. D **94**, 112001 \(2016\)](#).

- ²⁵¹M. N. Achasov et al., “Study of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ in the energy region \sqrt{s} below 0.98 GeV”, [Phys. Rev. D **68**, 052006 \(2003\)](#).
- ²⁵²M. Ablikim et al. (BESIII), “Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ Cross Section from 0.7 GeV to 3.0 GeV via Initial-State Radiation”, [arXiv, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.11208> \(2019\)](#).
- ²⁵³M. Achasov et al., “The process $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ up to 1.4 GeV”, [Physics Letters B **486**, 29-34 \(2000\)](#).
- ²⁵⁴M. N. Achasov et al., “Study of $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ in the energy range 1.05-2.00 GeV with the SND detector”, [Phys. Rev. D **88**, 054013 \(2013\)](#).
- ²⁵⁵R. Akhmetshin et al., “Study of the process $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ in c.m. energy range 920-1380 MeV at CMD-2”, [Physics Letters B **562**, 173-181 \(2003\)](#).
- ²⁵⁶M. N. Achasov, A. Y. Barnyakov, A. A. Baykov, K. I. ABeloborodov et al., “Measurement of the Cross Section for the Process $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ with the SND Detector”, [Physics of Atomic Nuclei **84**, 55-58 \(2021\)](#).
- ²⁵⁷J. Wess y B. Zumino, “Consequences of anomalous ward identities”, [Physics Letters B **37**, 95-97 \(1971\)](#).
- ²⁵⁸E. Witten, “Global aspects of current algebra”, [Nuclear Physics B **223**, 422-432 \(1983\)](#).
- ²⁵⁹F. Ambrosino et al., “Study of the process $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$ in the ϕ -meson mass region with the KLOE detector”, [Physics Letters B **669**, 223-228 \(2008\)](#).
- ²⁶⁰V. M. Aulchenko et al., “The process $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$ near the ϕ resonance”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics **90**, 927-938 \(2000\)](#).
- ²⁶¹M. N. Achasov et al., “Study of the $\pi\pi$ mass spectra in the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ at $\sqrt{s} \simeq 1020$ MeV”, [Phys. Rev. D **65**, 032002 \(2002\)](#).
- ²⁶²M. Sánchez, G. Toledo e I. Heredia De La Cruz, “Taming the long distance effects in the $D_s^+ \rightarrow \pi^+\ell^-\ell^+$ decay”, [Phys. Rev. D **106**, 073002 \(2022\)](#).

- ²⁶³P. Lichard, “Three-pion reactions in dilepton production from hadron gas”, [Phys. Rev. D **49**, 5812-5823 \(1994\)](#).
- ²⁶⁴P. Lichard, “Vector meson dominance and the π^0 transition form factor”, [Phys. Rev. D **83**, 037503 \(2011\)](#).
- ²⁶⁵A. Bramon, R. Escribano y M. Scadron, “Radiative $V \rightarrow P\gamma$ transitions and η - η' mixing”, [Physics Letters B **503**, 271-276 \(2001\)](#).
- ²⁶⁶R. Escribano y E. Royo, “ π^0 - η - η' mixing from $V \rightarrow P\gamma$ and $P \rightarrow V\gamma$ decays”, [Physics Letters B **807**, 135534 \(2020\)](#).
- ²⁶⁷P. Roig, A. Guevara y G. López Castro, “ $VV'P$ form factors in resonance chiral theory and the $\pi - \eta - \eta'$ light-by-light contribution to the muon $g - 2$ ”, [Phys. Rev. D **89**, 073016 \(2014\)](#).
- ²⁶⁸V. Mateu y J. Portolés, “Form factors in the radiative pion decay”, [The European Physical Journal C **52**, 325-338 \(2007\)](#).
- ²⁶⁹M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu y Z. Zhang, “Erratum to: A new evaluation of the hadronic vacuum polarisation contributions to the muon anomalous magnetic moment and to $\alpha(m_Z^2)$ ”, [The European Physical Journal C **80**, 410 \(2020\)](#).
- ²⁷⁰N. N. Achasov y A. A. Kozhevnikov, “Masses, branching ratios, and full widths of heavy ρ' , ρ'' and ω' , ω'' resonances”, [Phys. Rev. D **62**, 117503 \(2000\)](#).
- ²⁷¹S. Rudaz, “Anomalies, vector mesons and the $\omega \rightarrow 3\pi$ contact term”, [Physics Letters B **145**, 281-284 \(1984\)](#).
- ²⁷²C. A. Dominguez, “Chiral anomalies and Effective Vector Meson Lagrangian beyond the tree level”, [Modern Physics Letters A **02**, 983-989 \(1987\)](#).
- ²⁷³R. Kumar, “Covariant Phase-Space Calculations of n -Body Decay and Production Processes”, [Phys. Rev. **185**, 1865-1875 \(1969\)](#).

- ²⁷⁴J. L. Gutiérrez Santiago y G. López Castro, “Contribution of exclusive $(\pi^0\pi^0, \pi^0\eta, \eta\eta)\gamma$ channels to the leading order HVP of the muon $g - 2$ ”, [Phys. Rev. D **106**, 073009 \(2022\)](#).
- ²⁷⁵G. Ecker y R. Unterdorfer, “Four-pion production in e^+e^- annihilation”, [The European Physical Journal C-Particles and Fields **24**, 535-545 \(2002\)](#).
- ²⁷⁶H. Czyż, J. H. Kühn y A. Wapienik, “Four-pion production in τ decays and e^+e^- annihilation: An update”, [Phys. Rev. D **77**, 114005 \(2008\)](#).
- ²⁷⁷A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth y D. Wackerth, “Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow WW \rightarrow 4$ fermions in double-pole approximation-the RacoonWW approach”, [Nuclear Physics B **587**, 67-117 \(2000\)](#).
- ²⁷⁸S. Jadach, W. Płaczek, M. Skrzypek, B. Ward y Z. Was, “The Monte Carlo event generator YFSWW3 version 1.16 for W-pair production and decay at LEP2/LC energies”, [Computer Physics Communications **140**, 432-474 \(2001\)](#).
- ²⁷⁹S. Mele, “Physics of W bosons at LEP”, [Physics Reports **403-404**, 255-270 \(2004\)](#).
- ²⁸⁰K. Hagiwara, R. Peccei, D. Zeppenfeld y K. Hikasa, “Probing the weak boson sector in $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ ”, [Nuclear Physics B **282**, 253-307 \(1987\)](#).
- ²⁸¹K. Hagiwara, S. Ishihara, R. Szalapski y D. Zeppenfeld, “Low energy effects of new interactions in the electroweak boson sector”, [Phys. Rev. D **48**, 2182-2203 \(1993\)](#).
- ²⁸²G. Gounaris et al., “Triple gauge boson couplings”, [10.48550/arXiv.hep-ph/9601233 \(1996\)](#).
- ²⁸³S. Schael et al., “Electroweak measurements in electron-positron collisions at W-boson-pair energies at LEP”, [Physics Reports **532**, 119-244 \(2013\)](#).
- ²⁸⁴M. Bilenky, J. Kneur, F. Renard y D. Schildknecht, “Trilinear couplings among the electroweak vector bosons and their determination at LEP2”, [Nuclear Physics B **409**, 22-68 \(1993\)](#).

- ²⁸⁵K. J. Kim e Y.-S. Tsai, “Magnetic Dipole and Electric Quadrupole Moments of the W^\pm Meson”, [Phys. Rev. D **7**, 3710-3721 \(1973\)](#).
- ²⁸⁶G. T. Sánchez, Tesis doct. (Centro de Investigación y Estudios Avanzados, IPN, 1999).
- ²⁸⁷J. F. Nieves y P. B. Pal, “Electromagnetic properties of neutral and charged spin-1 particles”, [Phys. Rev. D **55**, 3118-3130 \(1997\)](#).
- ²⁸⁸J. Kühn, “The tau lepton: Particle physics in a nutshell”, [Nuclear Physics B - Proceedings Supplements **76**, Tau Lepton Physics, 21-42 \(1999\)](#).
- ²⁸⁹N. Isgur, C. Morningstar y C. Reader, “The a_1 in τ decay”, [Phys. Rev. D **39**, 1357-1369 \(1989\)](#).
- ²⁹⁰J. L. Gutiérrez Santiago, G. López Castro y P. Roig, “Lepton-pair production in dipion τ lepton decays”, [Phys. Rev. D **103**, 014027 \(2021\)](#).
- ²⁹¹J. Bijnens, G. Ecker y J. Gasser, “Radiative semileptonic kaon decays”, [Nuclear Physics B **396**, 81-118 \(1993\)](#).
- ²⁹²D. G. Dumm y P. Roig, “Dispersive representation of the pion vector form factor in $\tau \rightarrow \pi\pi\nu_\tau$ decays”, [The European Physical Journal C **73**, 2528 \(2013\)](#).
- ²⁹³X. C. Xie, Q. P. Li y S. Das Sarma, “Density of states and thermodynamic properties of a two-dimensional electron gas in a strong external magnetic field”, [Phys. Rev. B **42**, 7132-7147 \(1990\)](#).
- ²⁹⁴T. H. Burnett y N. M. Kroll, “Extension of the Low Soft-Photon Theorem”, [Phys. Rev. Lett. **20**, 86-88 \(1968\)](#).
- ²⁹⁵V. I. Zakharov, L. A. Kondratyuk y L. A. Ponomarev, “Bremsstrahlung and determination of electromagnetic parameters of particles”, [Yad. Fiz. **8**, 783-792 \(1968\)](#).
- ²⁹⁶L. Durand, P. C. DeCelles y R. B. Marr, “Lorentz Invariance and the Kinematic Structure of Vertex Functions”, [Phys. Rev. **126**, 1882-1898 \(1962\)](#).

- ²⁹⁷E. P. Wigner, “On the Matrices Which Reduce the Kronecker Products of Representations of S. R. Groups”, en [The Collected Works of Eugene Paul Wigner: Part A: The Scientific Papers](#), ed. por A. S. Wightman (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1993), págs. 608-654.
- ²⁹⁸G. López Castro y G. Toledo Sánchez, “Gauge invariance and finite width effects in radiative two-pion τ lepton decay”, [Phys. Rev. D **61**, 033007 \(2000\)](#).
- ²⁹⁹G. Ávalos, A. Rojas, M. Sánchez y G. Toledo, “Role of the $\rho(1450)$ in low-energy observables from an analysis in the meson dominance approach”, [Phys. Rev. D **107**, 056006 \(2023\)](#).
- ³⁰⁰L. OKUN, “CHAPTER 21 - Standard model of the electroweak interaction”, en [Leptons and Quarks](#), ed. por L. OKUN, North-Holland Personal Library (Elsevier, Amsterdam, 1984), págs. 185-198.
- ³⁰¹L. Barkov, A. Chilingarov, S. Eidelman, B. Khazin, M. Lelchuk, V. Okhapkin, E. Pakhtusova, S. Redin, N. Ryskulov, Y. Shatunov, A. Shekhtman, B. Shwartz, V. Sidorov, A. Skrinsky, V. Smakhtin y E. Solodov, “Electromagnetic pion form factor in the timelike region”, [Nuclear Physics B **256**, 365-384 \(1985\)](#).
- ³⁰²D. Bisello et al., “The pion electromagnetic form factor in the time-like energy range $1.35 \leq \sqrt{s} \leq 2.4\text{GeV}$.”, [Physics Letters B **220**, 321-327 \(1989\)](#).
- ³⁰³A. Aloisio et al., “Measurement of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)$ and extraction of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$ below 1 GeV with the KLOE detector”, [Physics Letters B **606**, 12-24 \(2005\)](#).
- ³⁰⁴M. N. Achasov et al., “Study of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ in the energy region $400 < \sqrt{s} < 1000$ MeV”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics **101**, 1053-1070 \(2005\)](#).
- ³⁰⁵R. Akhmetshin et al., “High-statistics measurement of the pion form factor in the ρ -meson energy range with the CMD-2 detector”, [Physics Letters B **648**, 28-38 \(2007\)](#).

- ³⁰⁶“Update of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross section measured by the spherical neutral detector in the energy region $400 < \sqrt{s} < 1000$ MeV”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics **103**, 380-384 \(2006\)](#).
- ³⁰⁷T. A. Collaboration, “Measurement of the spectral functions of vector current hadronic tau decays”, [Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **76**, 15-33 \(1997\)](#).
- ³⁰⁸S. Schael et al., “Branching ratios and spectral functions of τ decays: Final ALEPH measurements and physics implications”, [Physics Reports **421**, 191-284 \(2005\)](#).
- ³⁰⁹S. Binner, J. Kühn y K. Melnikov, “Measuring $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ using tagged photons”, [Physics Letters B **459**, 279-287 \(1999\)](#).
- ³¹⁰G. Rodrigo, H. Czyż, J. Kühn y M. Szopa, “Radiative return at NLO and the measurement of the hadronic cross section in electron-positron annihilation”, [The European Physical Journal C-Particles and Fields **24**, 71-82 \(2002\)](#).
- ³¹¹H. Czyz, A. Grzelinska, J. Kühn y G. Rodrigo, “The radiative return at Φ - and B-factories: small-angle photon emission at next-to-leading order”, [The European Physical Journal C - Particles and Fields **27**, 563-575 \(2003\)](#).
- ³¹²H. Czyż, A. Grzelińska, J. H. Kühn y G. Rodrigo, “The radiative return at Φ - and B-factories: FSR at next-to-leading order”, [The European Physical Journal C - Particles and Fields **33**, 333-347 \(2004\)](#).
- ³¹³H. Czyż, A. Grzelińska, J. H. Kühn y G. Rodrigo, “Radiative return at Φ - and B-factories: FSR for muon pair production at next-to-leading order”, [The European Physical Journal C - Particles and Fields **39**, 411-420 \(2005\)](#).
- ³¹⁴H. Czyż, A. Grzelińska, J. Kühn y G. Rodrigo, “Electron-positron annihilation into three pions and the radiative return.”, [The European Physical Journal C - Particles and Fields **47**, 617-624 \(2006\)](#).
- ³¹⁵V. P. Druzhinin, S. I. Eidelman, S. I. Serednyakov y E. P. Solodov, “Hadron production via e^+e^- collisions with initial state radiation”, [Rev. Mod. Phys. **83**, 1545-1588 \(2011\)](#).

³¹⁶M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu y Z. Zhang, “Reevaluation of the hadronic contributions to the muon g-2 and to $\alpha(M_Z^2)$ ”, [The European Physical Journal C **71**, 10.1140/epjc/s10052-010-1515-z](#) (2011).