

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS



**SUBGRUPOS SIMPLES
NUMERABLES DEL GRUPO PLENO
TOPOLÓGICO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICA

PRESENTA

MARIANA GARDUÑO REYES

ASESOR: DR. ADOLFO GUILLOT SANTIAGO

CIUDAD DE MÉXICO, 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mis padres, que jamás dudaron que lo lograría.

A mis hermanos, por ser siempre la mejor compañía. Jorge, Meye y especialmente a Jimena por su maravilloso trabajo arreglando mis dibujos feos.

A mi familia, por su apoyo constante e incondicional.

A mis profesores, por todo lo que me han enseñado y porque gracias a ellos estoy aquí. Miss Adri, Prof. Ruben, Luciano, Javier Fernandez, Pepe, Ángel, pero especialmente a Gaby, por convencerme de que podía cuando ya me había rendido.

Por supuesto, un agradecimiento especial para Adolfo, porque sin su paciencia y guía esto no hubiera sido posible.

A mis amigos, por hacer este camino mas ligero y divertido, especialmente a Karla, Isa, Joseph, Manu y Tona, por ser además un apoyo enorme en todo este proceso.

A Tania, mi psicóloga por enseñarme, con paciencia, las herramientas que me ayudaron a llegar hasta el final de este proceso.

Finalmente a las personas que me hubiera gustado me acompañaran hasta aquí y vieran este trabajo terminado. Espero que donde sea que estén, estén contentos y orgullosos.

Índice general

1. Introducción	1
2. Sistemas Cantor minimales	4
2.1. Los enteros p -ádicos	5
2.2. Homeomorfismos de una rotación	11
2.3. Propiedades generales de los sistemas	20
3. El grupo pleno topológico	24
4. Teoría ergódica	30
5. Grupos simples infinitos	36
Bibliografía	44

Capítulo 1

Introducción

En la teoría de grupos, el estudio de los grupos simples ha sido exhaustivo. En el caso finito éste puede rastrearse hasta los primeros trabajos de Galois quien demostró que, para los valores de n mayores a 4, los grupos alternantes A_n son simples y construye, para un p primo, los grupos $\mathrm{PSL}_2(p)$.

Más tarde, en el mismo siglo, Sylow nos presenta las primeras herramientas para la clasificación de estos grupos y no es sino hasta 1980 que dicha clasificación se considera terminada, aun cuando el grueso de la prueba se encontraba disperso en diferentes trabajos. Es a finales del siglo que Gorenstein, Lyons y Solomon, mediante el programa GLS, presentan el trabajo que reunirá en un solo lugar la prueba del teorema de clasificación de grupos simples finitos. El artículo “The status of the classification of the finite simple groups” por Michael Aschbacher [Asc04] nos da un panorama general del trabajo hecho hasta la fecha en lo referente al caso finito.

A pesar de que el caso finito ha sido ampliamente estudiado, cuando hablamos de grupos simples infinitos es hasta 1951 que Graham Higman exhibió la primera construcción para un grupo simple infinito finitamente generado. Posteriormente apareció el grupo de J. R. Thompson, el cual se construyó como un grupo de homeomorfismos del conjunto de Cantor o, de manera alternativa, como cierto grupo algebraico de automorfismos. El mismo Graham Higman es quien más adelante generalizó este ejemplo presentando una construcción más general para una familia de grupos simples numerables.

Es por lo anterior que el objetivo principal de este trabajo es introducir herra-

mientas teóricas que nos permiten obtener una cantidad infinita de grupos simples numerables a partir de los llamados sistemas Cantor minimales.

Fijando un conjunto de Cantor con el cual trabajar y un homeomorfismo, que por sus características particulares llamaremos “minimal”, tomaremos el grupo de aquellos homeomorfismos del Cantor que al ser evaluados se pueden ver como la aplicación de alguna iteración del homeomorfismo minimal. Es este grupo al que llamaremos el *grupo pleno topológico*.

Para el resultado principal demostraremos que el derivado del grupo pleno topológico de un sistema Cantor minimal es simple.

Es Hiroki Matui quien dio la pauta de inicio para este trabajo en su artículo “Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems” [Mat06]. En lo que se refiere a la simplicidad del derivado del grupo pleno topológico, se retoman y profundizan las pruebas dadas por S. Bezugly y K. Medynets en su artículo “Full groups, flip conjugacy, and orbit equivalence of Cantor minimal systems” [BM08], y corregidas en lo posterior por Yves de Cornulier en su trabajo “Groupes pleins-topologiques [d’après Matui, Jushenko, Monod, ...]” [dC13]. Además se habla de la relevancia que siguen jugando, aun en el caso infinito, los grupos simples de orden finito, en particular los grupos alternantes.

Se presentan también las construcciones de dos familias de sistemas Cantor minimales. La primera de estas familias cuenta con una cantidad numerable de ejemplos, uno por cada número primo, mientras que la segunda resulta ser más basta al obtener, por cada irracional, uno de estos sistemas. La construcción de esta última familia se basa en uno de los conocidos contraejemplos de Denjoy el cual retomamos de las notas “Dynamics: Introductory Lectures” escritas por el matemático John Milnor [Mil01] y parte de un homeomorfismo en la circunferencia, el cual desarrollaremos más allá del contexto del trabajo citado.

Es por lo expuesto que, en lo general, la presente tesis aborda todo lo necesario para construir una familia suficientemente grande de ejemplos de grupos simples infinitos. Con ellos será posible trabajar y ofrecer un punto de comparación contra los ejemplos ya existentes, mismos que se han trabajado en menor medida desde finales del siglo pasado y principios del siglo en curso. Tenemos por ejemplo el artículo “Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups” [JM13] donde, mediante la construcción retomada en este trabajo, se estudia en estos grupos la propiedad de ser promediabiles, la cual ha cobrado cierta relevancia

en el estudio de la teoría de grupos en los últimos años.

La relevancia de la presente tesis a desarrollar, se centra en la necesidad que existe, en el campo de la teoría de grupos, de la ampliación de los conocimientos y estudios que se tienen para el caso de los grupos simples infinitos y cómo de manera análoga al caso finito, es necesario contar con una cantidad suficiente de parámetros y referencias para el desarrollo posterior de la clasificación y estudio de los mismos.

Capítulo 2

Sistemas Cantor minimales

Para encaminar el presente trabajo, dedicaremos este capítulo a introducir los conjuntos con que estaremos desarrollando el resto de la teoría; además aquellos homeomorfismos que serán de interés para la tesis como base para la construcción de los grupos con los que se trabajará en lo posterior.

Muchos de nosotros estamos familiarizados con la clásica construcción, en los reales, del conocido “Conjunto de Cantor ternario” que se construye a partir del intervalo unitario cerrado y consta de aquellos puntos que en su expansión ternaria no poseen ningún uno. Dicho conjunto resulta ser un espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente desconexo, propiedades topológicas a partir de las cuales se puede dar una caracterización de lo que se entenderá por un conjunto de Cantor.

Un resultado que utilizaremos es que cualesquiera dos espacios métricos, compactos, perfectos y totalmente desconexos son homeomorfos y en consecuencia, cualquier espacio con estas propiedades es homeomorfo al conjunto de Cantor ternario. Esta demostración se puede encontrar en el libro “Topology” por Hocking y Young específicamente en su capítulo 2, subsección 2-15, teorema 2-97, junto a sus corolarios 2-98 y 2-99 [HY61].

De manera general, definimos que cualquier espacio topológico métrico χ es un *conjunto de Cantor* si es homeomorfo al conjunto de Cantor ternario, es decir, es compacto, perfecto y totalmente desconexo.

Consideremos entonces uno de estos conjuntos digamos χ , arbitrario pero fijo, dado en los términos ya mencionados y denotamos $H(\chi)$ al grupo de los homeomorfismos de χ en χ con la estructura de grupo dada con la composición.

Tomando un $\varphi \in H(\mathcal{X})$, consideraremos un par de conjuntos que serán útiles en el desarrollo posterior de la teoría.

Primero, para $x \in \mathcal{X}$, llamaremos la φ -órbita de x al conjunto:

$$\text{orb}_\varphi(x) = \{\varphi^n(x) | n \in \mathbb{Z}\},$$

mientras que al abierto:

$$\text{sop}(\varphi) = \{x \in \mathcal{X} | \varphi(x) \neq x\}$$

lo llamaremos el *soporte* de φ .

Entre los elementos de $H(\mathcal{X})$ existen algunos caracterizados por propiedades que, en este trabajo, consideraremos de importancia.

Diremos, por ejemplo, que un homeomorfismo $\varphi \in H(\mathcal{X})$ es *periódico* si existe una $n > 0$ tal que, para cualquier $x \in \mathcal{X}$ se tiene que $\varphi^n(x) = x$, es decir, $\varphi^n = 1$ considerando a 1 como la función identidad.

Concretamente, los homeomorfismos con los que trabajaremos son aquellos que cumplan la siguiente definición:

Definición 2.1. Diremos que $\varphi \in H(\mathcal{X})$ es *minimal* si para toda $x \in \mathcal{X}$, x tiene una φ -órbita densa.

Así para \mathcal{X} un conjunto de Cantor y $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un homeomorfismo minimal, denominaremos a la pareja (\mathcal{X}, φ) un *sistema Cantor minimal*.

Es importante para nosotros saber que los objetos que se acaban de introducir pueden ser aterrizados en ejemplos concretos dentro de la matemática con el fin de hacer la comprensión de las dinámicas de éstos más clara para el lector; por lo que a continuación presentaremos dos construcciones de los mismos. La primera de ellas desde el punto de vista algebraico y de la teoría de números y la segunda con una construcción geométrica a partir de uno de los conocidos contraejemplos de Denjoy. Cada uno de los cuales nos presenta familias numerables, de sistemas Cantor minimales.

2.1. Los enteros p -ádicos

El matemático alemán K. Hensel es el primero en estudiar a los números p -ádicos en 1904. Mas adelante en su artículo “What are p -adic numbers? what are

they used for?” [Roz13] el matemático U. A. Rozicov profundiza en la importancia de estos en el área de la teoría de números y como dan lugar al estudio del análisis p -ádico; el cual extiende sus aplicaciones en disciplinas como la física, las ciencias de la computación, el análisis numérico y simulaciones, la criptografía, la combinatoria, la genética, la teoría de autómatas y lenguajes formales por mencionar algunas.

Los enteros p -ádicos pueden ser pensados como la manera de escribir a los enteros en base p , para p un primo, con la particularidad de que estos tendrán una cantidad infinita de dígitos y en varios trabajos incluso se representan como sumas infinitas; sin importar la representación que demos, nos será posible definir entre ellos una norma que define, de manera natural, una métrica y así trabajar con la topología inducida por dicha métrica.

De esta manera dicho conjunto resulta tener una cantidad de propiedades únicas, por ejemplo, por cada primo p podemos generar un campo de números p -ádicos donde cualesquiera dos bolas son ajenas o una está contenida en la otra. Existen también, por supuesto, propiedades que perdemos como el orden; además, ninguno de estos campos es algebraicamente cerrado y sin embargo la norma definida en cada uno se puede extender, de manera natural, a sus cerraduras algebraicas.

En el artículo ya citado de Rozicov [Roz13] se define el valor p -ádico de un entero, este induce una norma p -ádica junto a su métrica y topología, sin embargo en nuestro trabajo queremos partir de cero para la construcción de nuestro conjunto de Cantor para ello consideramos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y construimos el conjunto de los enteros p -ádicos fijando un $p \in \mathbb{Z}$ primo y tomando el producto $\prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ como espacio topológico con la topología producto, en la cual cada factor $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ es espacio topológico con la topología discreta.

Veamos primero que para este espacio existe una métrica compatible con la topología, es decir, $\prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ es un espacio métrico.

Consideremos $x, y \in \prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, de modo que $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ y $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. Así la distancia entre x y y quedará definida de la siguiente forma:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i}, \text{ donde } \delta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = y_i, \\ 1 & \text{si } x_i \neq y_i. \end{cases}$$

Proposición 2.2. Afirmamos que la topología producto es igual a aquella inducida por la métrica dada.

Demostración. Comencemos tomando un básico de la topología producto,

$$U = U_1 \times \cdots \times U_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z},$$

y un punto $x \in U$, con $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. De manera que, para $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in U_i$; probaremos que $B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x) \subseteq U$.

Para $y \in B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x)$ tenemos que $d(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Usando la definición de $d(x, y)$ reescribimos, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i} < \frac{1}{2^{n+1}}$. Sabiendo que $\delta_i = 0$ ó $\delta_i = 1$ se sigue que, para cualquier $i \leq n$, $\delta_i = 0$.

En términos de nuestros puntos, para $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, por la definición de δ_i , si $i \leq n$ entonces $x_i = y_i$.

Habiendo tomado $x \in U$, tenemos que para $i \leq n$, $x_i \in U_i$ y por lo anterior $y_i \in U_i$, entonces $y \in U$ demostrando la contención que buscábamos.

Ahora tomemos un punto $x \in \prod_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, donde $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, y una bola de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de este punto, $B_\varepsilon(x)$. Para dicha $\varepsilon > 0$ sabemos que existe una $k \in \mathbb{N}^*$ tal que, $\sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$.

Si definimos

$$U = \{x_1\} \times \cdots \times \{x_k\} \times \prod_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z},$$

y tomamos $y \in U$, con $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, tendríamos que, para $i \leq k$, $y_i = x_i$, haciendo $\delta_i = 0$ y así $d(x, y) \leq \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. Habiendo escogido k de manera que $\sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$, se sigue que $d(x, y) < \varepsilon$ y, por tanto, $y \in B_\varepsilon(x)$, así $U \subseteq B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x)$ y por tanto son iguales.

Por lo ya demostrado podemos concluir que ambas topologías son, como afirmamos, equivalentes. \square

Definición 2.3. Los enteros p -ádicos, que denotaremos \mathbb{Z}_p , son el subconjunto de $\prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ dado en los siguientes términos:

Para un $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, diremos que, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{Z}_p$, si, para cualesquiera $r, s \in \mathbb{N}^*$ con $r > s$, se tiene que $x_r \equiv x_s \pmod{p^s}$

Proposición 2.4. \mathbb{Z}_p , con la topología inducida por la métrica, es un conjunto de Cantor.

Para la siguiente demostración tendremos un par cosas a considerar; primero para demostrar la compacidad de \mathbb{Z}_p usaremos el teorema 2-75 del libro de Hocking y Young [HY61], el cual nos dice que un espacio es compacto si es completo y totalmente acotado, también consideremos la definición de espacios totalmente acotados, dada en el ya mencionado libro, como aquellos espacios métricos X para los que, dada una $\varepsilon > 0$, existe una cantidad finita de conjuntos U_1, \dots, U_n los cuales cumplen que, $X = \cup_{i=1}^n U_i$ y para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{diam}(U_i) < \varepsilon$.

Demostración. Comencemos mostrando que es completo. Para ello tomemos una sucesión $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en \mathbb{Z}_p . Con $\mathbf{x}_k = (x_{ki})_{i \in \mathbb{N}^*}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Lo que deseamos es ver que ésta converge.

Proponemos $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_p$, con $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ y cuyas entradas se determinarán de la siguiente forma:

Para $n \in \mathbb{N}^*$, determinaremos la n -ésima entrada de \mathbf{y} , y_n , usando que $\frac{1}{2^n} > 0$. Por ser $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para cualesquiera r y $s \in \mathbb{N}$, si $r, s > N$ entonces $d(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s) < \frac{1}{2^n}$.

De esa forma para m y $l \in \mathbb{N}$, fijas y ambas mayores que N , sabemos que $d(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_m) < \frac{1}{2^n}$, por la definición de distancia, tendríamos que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i} < \frac{1}{2^n}$. Notemos que para que esta desigualdad se cumpla, sabiendo $\delta_i = 0$ ó $\delta_i = 1$, debe cumplirse que $\delta_i = 0$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Considerando $\mathbf{x}_l = (x_{li})_{i \in \mathbb{N}^*}$ y $\mathbf{x}_m = (x_{mi})_{i \in \mathbb{N}^*}$, se sigue que para toda para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_{li} = x_{mi}$; en particular, $x_{ln} = x_{mn}$. Definimos entonces $y_n = x_{ln}$.

Argumentemos por qué $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a \mathbf{y} :

Para $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Por cómo definimos a \mathbf{y} , tenemos que, para dicha n , existe una N tal que, para cualquier $r > N$, si $\mathbf{x}_r = (x_{ri})_{i \in \mathbb{N}^*}$ se tiene que $x_k = y_k$, para cualquier $k \in \{1, \dots, n\}$. Así, para $k \in \{1, \dots, n\}$, $\delta_k = 0$ de lo cual se sigue que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i} < \frac{1}{2^n}$. Por la definición dada de la distancia, $d(\mathbf{x}_r, \mathbf{y}) \leq \frac{1}{2^n}$ y en consecuencia, $d(\mathbf{x}_r, \mathbf{y}) \leq \varepsilon$. Podemos concluir entonces, la convergencia de la sucesión de Cauchy.

Para demostrar que además \mathbb{Z}_p es totalmente acotado, daremos una $\varepsilon > 0$ arbitraria. Sabemos que existe siempre una $N \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande, de manera que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Denotemos por A al conjunto de los elementos $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p$, con

$\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, tales que, para cualquier $k > N$, $x_k = 0$. Este conjunto resulta ser finito, dado que, para la elección de las primeras N entradas de \mathbf{x} existen a lo mas $\prod_{i=1}^N p^i$ combinaciones.

Así la familia $\mathcal{F} = \{B_{\frac{1}{N}}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in A\}$ es una familia finita de subconjuntos de \mathbb{Z}_p , donde cada bola tiene un diámetro menor a ε .

Al tomar un punto $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_p$, si $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, el punto $\mathbf{y}' = (y'_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, definido de manera que, para $i \in \{1, \dots, N\}$, $y'_i = y_i$ y para $i > N$, $y'_i = 0$, cumple a un mismo tiempo que $\mathbf{y}' \in A$ y $d(\mathbf{y}, \mathbf{y}') < \frac{1}{2^N}$, es decir, existe $\mathbf{y}' \in A$ tal que $\mathbf{y} \in B_{\frac{1}{N}}(\mathbf{y}')$. Esto nos dice que $\mathbb{Z}_p \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ y finalmente son iguales. Podemos concluir que nuestro conjunto es totalmente acotado.

Habiendo demostrado que es completo y totalmente acotado se sigue de la caracterización mencionada previa a la demostración, \mathbb{Z}_p es compacto.

Para demostrar que \mathbb{Z}_p es un conjunto de Cantor hace falta demostrar aun que es perfecto. Para ello consideremos un punto $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{Z}_p$ cualquiera. Para una $\varepsilon > 0$ arbitraria sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Para tal n consideremos $y_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ y $y_{n+1} \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$, como $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_p$, podemos afirmar que $y_{n+1} \equiv y_n \pmod{p^n}$. Además sabemos que existe $y_0 \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ tal que $y_0 \not\equiv y_{n+1} \pmod{p^n}$ y $y_0 \equiv y_n \pmod{p^n}$. Definamos el punto $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p$, con $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{Z}_p$, de manera que, para $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = y_i$ y para $i \in \mathbb{N}^*$, si $i > n$ entonces $x_i = y_0$.

Por ser $x_{n+1} = y_0$ y $y_0 \not\equiv y_{n+1} \pmod{p^n}$, $x_{n+1} \not\equiv y_{n+1} \pmod{p^n}$ y así $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.

Como para $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = y_i$. Se tendría entonces que $\delta_i = 0$ y en consecuencia $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i} < \frac{1}{2^n}$, es decir, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{1}{2^n}$. Por ser $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$.

Así tenemos $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{y})$, al ser ε arbitraria, al igual que \mathbf{y} , podemos concluir que todo punto en \mathbb{Z}_p es de acumulación, es decir, \mathbb{Z}_p es perfecto.

Probaremos que $\prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ es totalmente desconexo, esto nos llevará a concluir que \mathbb{Z}_p mismo lo es, al ser un subespacio de éste.

Consideremos un par de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Si $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ y $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, al ser puntos distintos tenemos que, debe existir una $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \not\equiv y_n \pmod{p^n}$.

Para $i \in \{1, \dots, n\}$ consideremos los conjuntos $U_i = \{x_i\}$, $V_i = \{y_i\}$ y los subconjuntos de $\prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$:

$$U = U_1 \times \dots \times U_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \text{ y } V = V_1 \times \dots \times V_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}.$$

Notemos que estos son abiertos y cerrados, que $\mathbf{x} \in U$ como $\mathbf{y} \in V$, coinciden con su cerradura y son disjuntos, por lo que separan a los puntos en $\prod_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ que tomamos de manera arbitraria.

Esto que demuestra que el espacio es totalmente desconexo, propiedad que hereda \mathbb{Z}_p .

Tenemos finalmente que \mathbb{Z}_p cumple con las propiedades dadas que caracterizan a los conjuntos de Cantor. \square

Para este conjunto de Cantor daremos un homeomorfismo que se calcula de manera sencilla.

Denotaremos al uno del conjunto como $\hat{1} = (1_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ y usaremos la estructura de grupo aditivo que se induce en el producto, dada la estructura aditiva de los factores.

De manera que el homeomorfismo del que hablamos es aquel que “suma uno”, definámoslo como:

$$\sigma : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p,$$

donde para $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p$ con $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$,

$$\sigma(\mathbf{x}) = (x_i + 1)_{i \in \mathbb{N}^*}.$$

Recordando que cada factor es cíclico, es decir, que en cada factor es generado por el 1 y usando la topología discreta, es fácil ver que la función definida es un homeomorfismo. Solo nos aseguraremos que las órbitas son densas en \mathbb{Z}_p .

Observación 2.5. Para $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ elementos de \mathbb{Z}_p y $n \in \mathbb{N}^*$, si $x_n = y_n$ entonces para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $x_i = y_i$.

Demostración. Paso base $n = 2$.

Suponiendo que $x_2 = y_2$, sabemos que, para $x_2 \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, existe un único $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tal que $x_2 \equiv x \pmod{p}$. Por la manera en que \mathbb{Z}_p está definido sabemos que $x_2 \equiv x_1$ y de la misma forma $y_2 \equiv y_1$ con x_1 y $y_1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Por ser $x_2 = y_2$ por hipótesis, se tiene que $x_2 \equiv y_1$. De la unicidad de x podemos concluir que $x_1 = x$ y de igual forma $y_1 = x$ por lo tanto $x_1 = y_1$. Lo que necesitábamos demostrar para el paso base.

Paso inductivo.

Supongamos que, si $x_n = y_n$ entonces, para cualquier $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $x_i = y_i$ y que $x_{n+1} = y_{n+1}$. Usando un argumento análogo al anterior tenemos que para

$x_{n+1} \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ existe un único $x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ tal que $x_{n+1} \equiv x \pmod{p^n}$. Por la manera en que \mathbb{Z}_p está definido, sabemos que $x_{n+1} \equiv x_n$, $y_{n+1} \equiv y_n$ con x_n , $y_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Por ser $x_{n+1} = y_{n+1}$ por hipótesis, se tiene que $x_{n+1} \equiv y_n$. De la unicidad de x podemos concluir que $x_n = x$ y de igual forma $y_n = x$, por lo tanto $x_n = y_n$ y por hipótesis de inducción, para cualquier $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $x_i = y_i$. Así, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = y_i$ como deseábamos. \square

Para probar la densidad de las órbitas, tomemos un elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p$ y su σ -órbita, $\text{orb}_\sigma(\mathbf{x})$. Necesitamos demostrar que para un elemento $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de \mathbb{Z}_p y $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma^k(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{y})$.

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Para dicha n fijémonos en las respectivas entradas x_n y $y_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de los puntos que tomamos. Por ser $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ cíclico, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n + k = y_n$. Al aplicar el homeomorfismo σ^k a \mathbf{x} , las siguientes igualdades se cumplen:

$$(\sigma^k(\mathbf{x}))_n = x_n + k = y_n.$$

Por el resultado anterior si el punto $\sigma^k(\mathbf{x})$ y el punto \mathbf{y} coinciden en su n -ésima entrada aseguramos que, para $i \in \{1, \dots, n\}$, $(\sigma^k(\mathbf{x}))_i = y_i$, por la definición de distancia, $d(\sigma^k(\mathbf{x}), \mathbf{y}) < \frac{1}{2^n}$ y por la elección de n , menor también que ε . Asegurando que $\sigma^k(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{y})$, como $\sigma^k(\mathbf{x}) \in \text{orb}_\sigma(\mathbf{x})$ podemos concluir la densidad de $\text{orb}_\sigma(\mathbf{x})$ en \mathbb{Z}_p . \square

Así, para cada p primo, la pareja (\mathbb{Z}_p, σ) es un sistema Cantor minimal.

2.2. Homeomorfismos minimales asociados a rotaciones irracionales

Nuestro siguiente ejemplo es de tipo geométrico en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , y esta basado en la construcción propuesta por Andrés Navas en la sección 1 del capítulo 3 del libro “Grupos de difeomorfismos en el círculo” [Nav07] donde se ilustra la importancia de las hipótesis del teorema de Denjoy, el cual en uno de sus corolarios nos dice que para un $f \in H(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, si f es C^2 entonces f tiene una órbita finita o f es minimal.

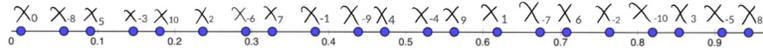


Figura 2.1: Puntos en el intervalo.

Se prueba mediante esta construcción que existe f en $H(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que f no tiene órbitas finitas y además tiene un conjunto de Cantor invariante. Retomaremos de las notas “Dynamics: introductory lectures” del matemático John Milnor [Mil01]; en su capítulo V sección 15B los pasos para dicha construcción y a partir de los podremos construir un sistema Cantor minimal partiendo de un irracional arbitrario α .

Siguiendo los pasos sentados por Milnor tomaremos, para cada $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto de los puntos x_k en el intervalo $[0, 1)$ con $x_k \equiv k\alpha \pmod{\mathbb{Z}}$.

A modo de ilustración, para el irracional $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ calcularemos de manera explícita algunos de los puntos de los que hablamos y veremos cómo estos se distribuyen en el intervalo $[0, 1)$.

$k = 2$	$k = -9$	$k = 6$
$2\alpha \approx 3.236 \equiv 0.236$	$9\alpha \approx -14.562 \equiv 0.437$	$6\alpha \approx 9.708 \equiv 0.708$
$x_2 \approx 0.236$	$x_{-9} \approx 0.437$	$x_6 \approx 0.708$

Para este irracional en específico podemos ver en la figura 2.1 que

$$x_0 < \dots < x_2 < \dots < x_{-9} < \dots < x_6 < \dots .$$

Estos puntos quedan distribuidos de manera densa en el intervalo y al fijarnos en su imagen bajo la proyección a la circunferencia \mathbb{R}/\mathbb{Z} se ven en ella como la órbita del 0 bajo la rotación de ángulo α .

Proposición 2.6. Para cualquier punto $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, su órbita bajo una rotación irracional es densa y en consecuencia la órbita de 0 también lo es.

Demostración. Consideremos un punto cualquiera $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y pensemos en su órbita bajo la rotación R_α .

Supongamos que ésta es finita, existe entonces un $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_\alpha^k(x) = x$, es decir, $x + k\alpha \equiv x \pmod{\mathbb{Z}}$ y así $k\alpha \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ ó $k\alpha = r$ con $r \in \mathbb{Z}$; esto implicaría

que $\alpha = \frac{r}{k}$, contradiciendo la irracionalidad de α . Así podemos decir que nuestra órbita es infinita.

Para llegar a una contradicción, supongamos que dicha órbita no es densa y consideremos el conjunto $U = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \text{orb}_{R_{\alpha\pi}}(x)$. En este conjunto tomaremos un intervalo $I \subseteq U$ abierto y maximal respecto a la contención y supondremos que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $R_{\alpha}^n(x) \notin I$. Además, tanto la órbita, su complemento y el intervalo I son conjuntos que la rotación mantiene invariantes.

Llamamos ε a la longitud del intervalo I con $\varepsilon > 0$; al fijarnos en imágenes directas bajo iteraciones. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $R_{\alpha}^n(I)$ es también un intervalo de longitud ε , pues la rotación preserva la longitud, así mismo este se mantiene contenido en U . Tendríamos entonces una cantidad numerable de intervalos de longitud ε distribuidos a lo largo de la circunferencia y contenidos en el complemento de la órbita.

Veamos que estos además deben ser ajenos: Si existieran $i, j \in \mathbb{N}$, con $i \neq j$, tales que $R_{\alpha}^i(I) \cap R_{\alpha}^j(I) \neq \emptyset$, tendríamos que hay un punto $y \in I$ para en cual una de sus iteraciones bajo la rotación es elemento también de I .

Podemos asegurar que $R_{\alpha}^k(y) \neq y$, pues de ser así y sería un punto periódico pero sabemos que en las rotaciones irracionales eso no puede suceder. Así, sabiendo que las rotaciones preservan la orientación y la distancia angular, el intervalo I no regresa en sí mismo, es decir, $R_{\alpha}^k(I) \neq I$.

Si $R_{\alpha}^k(I)$ e I son intervalos distintos que se intersectan e I es un intervalo maximal respecto a la contención dentro de U , se sigue que $R_{\alpha}^k(I) \cap \text{orb}_{R_{\alpha}}(x) \neq \emptyset$; esto resulta una contradicción, ya que $R_{\alpha}^k(I) \subseteq U$.

Podemos asegurar entonces que los intervalos cubren por completo la circunferencia y, en consecuencia, existe un $k \in \mathbb{N}$ para el que $x \in R_{\alpha\pi}^k(I)$. Así $(R_{\alpha}^k)^{-1}(x) \in I$ lo que contradice la elección del intervalo por lo que no puede existir un intervalo tal. Podemos concluir que la órbita de cualquier punto bajo la rotación es densa. \square

Para poder obtener nuestro conjunto de Cantor, vamos a “ensanchar” nuestros puntos, asociando a cada uno un intervalo $[a_k, b_k]$ de longitud l_k por cada $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} l_k = 1$.

Consideremos, en este caso, para cada $k \in \mathbb{Z}$ las longitudes l_k definidas de la siguiente manera:

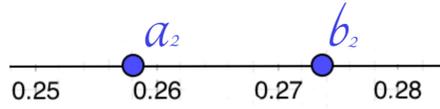


Figura 2.2: Intervalo $[a_2, b_2]$

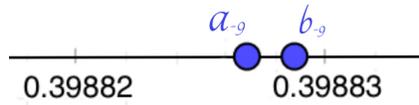


Figura 2.3: Intervalo $[a_{-9}, b_{-9}]$

$$l_k = \begin{cases} \frac{1}{2^{2k}} & \text{si } k \in \mathbb{Z}^+ \\ \frac{1}{2^{-2k+1}} & \text{si } k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \end{cases} .$$

Para asignar los intervalos definiremos primero un par de funciones, para $x \in [0, 1)$:

$$a(x) = \sum \{l_k | x_k < x\} \text{ y } b(x) = \sum \{l_k | x_k \leq x\}.$$

Definidas así podemos afirmar que nuestras funciones son monótonas. Para aquellas $x \in [0, 1)$ que cumplen que, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, $x \neq x_k$, $a(x) = b(x)$. Para tales x la longitud del intervalo $[a(x), b(x)]$ es 0 y en consecuencia dicho intervalo consta de un único punto. Para los puntos de la forma x_k para algún $k \in \mathbb{Z}$, denotaremos $a(x_k) = a_k$ y $b(x_k) = b_k$. Notemos que $b_k = a_k + l_k$ por lo que el intervalo $[a_k, b_k]$ tiene longitud l_k . Esto nos da nuestros intervalos asignados y cada uno con la longitud buscada.

Veamos cómo son algunos de estos intervalos para los puntos que localizamos en el intervalo anteriormente. Para $k = 2$ ilustramos el intervalo $[a_2, b_2]$ en la figura 2.2, igualmente para $k = -9$ tenemos la figura 2.3 y para $k = 6$ la figura 2.4.

Notemos que los intervalos $[a_k, b_k]$ además de ser disjuntos preservan el mismo orden con el que los puntos x_k y se distribuyen a lo largo del intervalo $[0, 1)$. Esto lo demostraremos a continuación.

Proposición 2.7. Para n y $n' \in \mathbb{Z}$, con $n \neq n'$, se tiene que $[a_n, b_n] \cap [a_{n'}, b_{n'}] = \emptyset$, más aun, si $n < n'$ entonces $b_n < a_{n'}$.

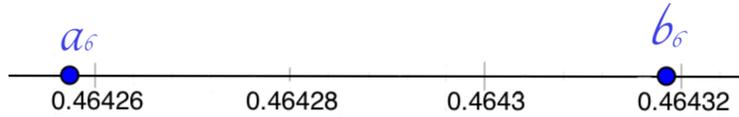


Figura 2.4: Intervalo $[a_6, b_6]$

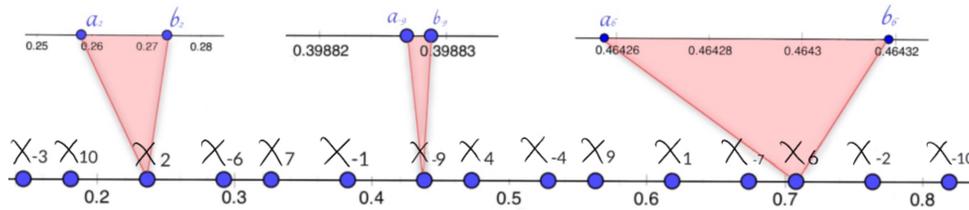


Figura 2.5: Intervalos

Demostración. Tomemos n y $n' \in \mathbb{Z}$ de manera que $x_n < x_{n'}$, tendremos entonces que, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, si $x_k < x_n$ entonces $x_k < x_{n'}$. Así $\{l_k | x_k < x_n\} \subset \{l_k | x_k < x_{n'}\}$ con $l_n \in \{l_k | x_k < x_{n'}\}$, pero $l_n \notin \{l_k | x_k < x_n\}$. Por lo que al sumar se cumpliría que $a_n < a_{n'}$, por lo que los extremos izquierdos de los intervalos respetan el orden.

Por la transitividad de la contención se tiene también que $\{l_k | x_k \leq x_n\} \subseteq \{l_k | x_k < x_{n'}\}$ y dado que el conjunto de los puntos de la forma x_k , para algún $k \in \mathbb{Z}$, es denso en el intervalo, sabemos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n < x_m < x_{n'}$. Así tendremos que $l_m \notin \{l_k | x_k \leq x_n\}$, pero $l_m \in \{l_k | x_k < x_{n'}\}$ y al sumar se tendrá que $b_n < a_{n'}$. \square

Esto permite concluir que nuestros intervalos son disjuntos y respetan el orden, tal como lo muestra la figura 2.5.

Tenemos hasta ahora que las funciones monótonas $a(x)$ y $b(x)$ generan, por cada punto $x_k \in [0, 1)$, subintervalos cuyas longitudes l_k suman 1 y respetan la distribución de dichos puntos. Para aquellos puntos en el intervalo que no son de la forma x_k , para algún k , las funciones nos generan un punto determinado de manera única por los intervalos de a su alrededor.

Con esto podemos definir una función que lleve los puntos de los intervalos $[a_k, b_k]$ en su respectivo x_k y a los “intervalos degenerados” que constan de un

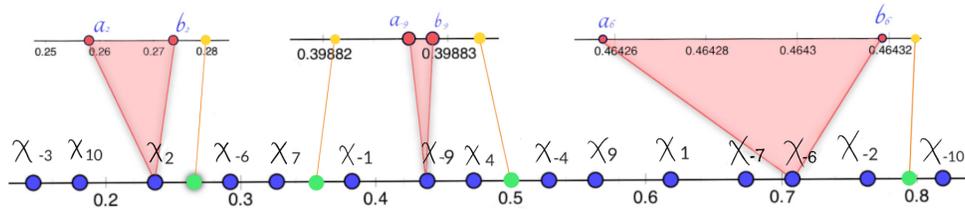


Figura 2.6: Mapeo punto-intervalo.

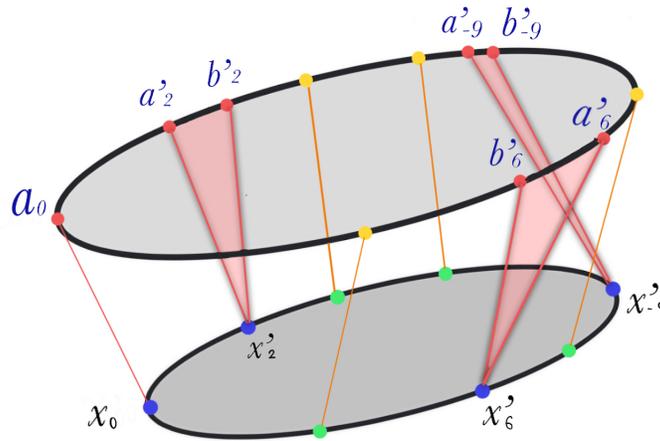


Figura 2.7: Mapeo g

único punto los mapee en la x asociada a éstos.

En la figura 2.6 vemos una representación visual de dicha función y esta resultará monótona también, gracias a que la distribución de los intervalos respeta el orden de los puntos x_k y es constante en dichos intervalos.

Hay entonces una única manera de extender la función el resto de la recta con un mapeo continuo $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cualquier $x \in [0, 1)$, $G([a(x), b(x)]) = x$ y tal que $G(x + 1) = G(x) + 1$ y así a través de la proyección $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ trasladar este mismo escenario a la circunferencia como se ilustra en la figura 2.7.

Serán aquellos puntos que se encuentran en el complemento de los intervalos sobre la circunferencia los que consideraremos como elementos del conjunto χ

Proposición 2.8. El conjunto χ es de Cantor.

Demostración. Recordando que este espacio lo estamos tomando con sus métri-

cas usuales y su topología inducida, para la compacidad veremos simplemente que χ es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}/\mathbb{Z} , el cual sabemos es compacto.

Notemos que nuestro conjunto esta formado únicamente de punto aislados por lo que este es cerrado y por ello también compacto.

Para argumentar que χ es perfecto, recordemos que al tomar las longitudes l_k de nuestros intervalos (a_k, b_k) éstas suman 1. Por lo que no podemos tener intervalos abiertos en el intervalo $[0, 1)$ que intersecten a uno de estos intervalos más pequeños y por tanto tengan alguno de sus extremos por elementos.

De lo anterior se sigue que, al ser nuestros intervalo ajenos, tanto el conjunto de sus extremos, como el de sus imágenes bajo la proyección son densos en el intervalo y lo serán también dentro de \mathbb{R}/\mathbb{Z} y en consecuencia dentro de χ con la topología inducida.

Teniendo un conjunto denso en χ , podemos afirmar que todos sus puntos son de acumulación y al ser también cerrado es entonces perfecto.

Nos queda justificar que nuestro conjunto es totalmente desconexo. Para ello usamos el argumento anterior una vez más, ahora sobre \mathbb{R}/\mathbb{Z} , donde entre cualesquiera dos puntos distintos podemos encontrar a la imagen bajo la proyección de uno de los intervalos $[a_k, b_k]$ y χ es el complemento de las imágenes de los mismos, por lo que éste no podría tener un subconjunto conexo.

Por tanto, χ es un conjunto de Cantor. □

Para terminar esta sección, construiremos un homeomorfismo minimal sobre este conjunto de Cantor.

Recordemos que en el ejemplo de \mathbb{Z}_p el homeomorfismo que usamos resultó ser aquel que “sumaba uno” y consideremos algo análogo que podríamos aplicar en este ejemplo.

Recordemos que las imágenes de los puntos x_k distribuidas sobre \mathbb{R}/\mathbb{Z} son la órbita del 0 bajo la rotación por un ángulo α . Así podemos pensar que al aplicar dicha rotación a los puntos, los subíndices de estos se recorren. Este movimiento nos guiará para definir en cada intervalo asociado funciones que envíen al intervalo $[a_k, b_k]$ en el intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ como ilustran las figuras 2.8 y 2.9.

Esto induce una única manera de rotar aquellos puntos fuera de los intervalos y un homeomorfismo φ de χ en χ que mueve también los puntos fuera de las imágenes de intervalos de manera única. Esta “rotación” φ es el homeomorfismo

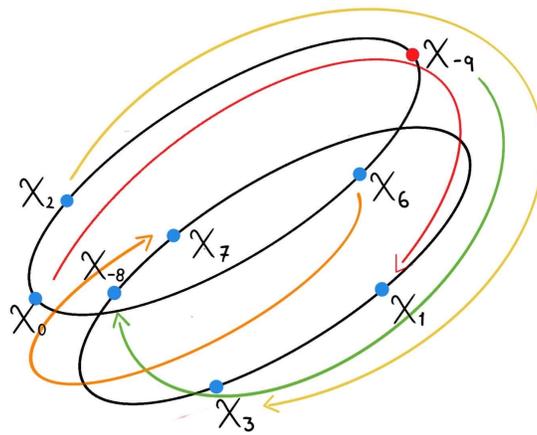


Figura 2.8: Desplazamiento de los puntos

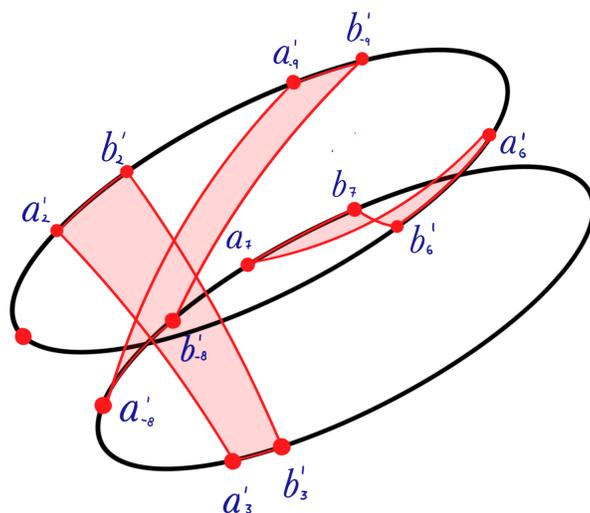


Figura 2.9: Desplazamiento de intervalos

que buscamos y se ve como la rotación de los puntos de nuestro conjunto de Cantor por el ángulo $\alpha\pi$.

Observación 2.9. φ es minimal.

Demostración. Sabiendo que las órbitas bajo la rotación son densas podemos concluir que los puntos de nuestro conjunto χ lo son también y nuestro homeomorfismo φ es, en consecuencia, minimal. \square

Con esto hemos presentado dos ejemplos de sistemas Cantor minimales uno numerable y otro no numerable en dos contextos distintos de la matemática.

Conociendo ya una cantidad considerable de ejemplos de dichos sistemas, continuaremos con el estudio de éstos y aquellas propiedades que serán de utilidad en lo posterior para el presente trabajo.

2.3. Propiedades generales de los sistemas

Comenzaremos la sección con un par de lemas, respecto a cómo estos homeomorfismos se comportan con los subconjuntos abiertos y cerrados del respectivo conjunto de Cantor.

Para $\varphi \in H(\chi)$ diremos que un punto $x \in \chi$ es *recurrente* si para todo $A \subseteq \chi$ abierto y cerrado, existe un $n > 0$ de tal manera que $\varphi^n(x) \in A$.

Lema 2.10. *Para $A \subseteq \chi$ abierto y cerrado, si todo punto de A es recurrente, entonces la función $\eta_A : A \rightarrow \mathbb{N}^*$, definida por:*

$$\eta_A(x) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^n(x) \in A\},$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Considerando que para toda $x \in A$, x es recurrente, existe siempre una $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{n_0}(x) \in A$. Así el conjunto

$$R_x = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^n(x) \in A\}$$

es no vacío y por ser \mathbb{N} bien ordenado, R_x tiene mínimo. Denotemos a ese mínimo $\eta_A(x)$.

Demostremos por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$A_k = \{x \in A \mid \eta_A(x) = k\}$$

es abierto y cerrado.

Paso base. Consideremos $A_1 = \{x \in A \mid \eta_A(x) = 1\}$, usando la definición de η_A podemos expresar a A_1 como el conjunto $\{x \in A \mid \varphi(x) \in A\}$. Expresado de esta manera, es fácil ver que $A_1 = A \cap \varphi^{-1}(A)$. Sabiendo tanto que A tanto es abierto y cerrado, como que φ es un homeomorfismo, deducimos que $\varphi^{-1}(A)$ es también abierto y cerrado, asimismo $A \cap \varphi^{-1}(A)$. Por tanto, A_1 es abierto y cerrado.

Paso Inductivo. Supongamos que, para toda $i \in \mathbb{N}^*$, si $i \leq k$ sucede que A_i es abierto y cerrado y probemos que A_{k+1} es también abierto y cerrado.

Por definición sabemos que

$$A_{k+1} = \{x \in A \mid \eta_A(x) = k+1\},$$

por lo que podemos expresarlo de la manera siguiente:

$$A_{k+1} = ((\varphi^{k+1})^{-1}(A) \cap A) \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Al ser φ un homeomorfismo, φ^{k+1} también lo es. De lo cual se sigue que, al ser A abierto y cerrado, $(\varphi^{k+1})^{-1}(A)$ y $(\varphi^{k+1})^{-1}(A) \cap A$ lo serán igualmente abiertos y cerrados. Además, teniendo por hipótesis de inducción que para cualquier $i \in \{1, \dots, k\}$, A_i es abierto y cerrado, $\bigcup_{i=1}^k A_i$ es abierto y cerrado.

Considerando todo lo anterior, por ser $(\varphi^{k+1})^{-1}(A) \cap A$ abierto y $\bigcup_{i=1}^k A_i$ cerrado,

$$((\varphi^{k+1})^{-1}(A) \cap A) \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i$$

es abierto.

Análogamente, por ser $(\varphi^{k+1})^{-1}(A) \cap A$ cerrado y $\bigcup_{i=1}^k A_i$ abierto,

$$((\varphi^{k+1})^{-1}(A) \cap A) \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i$$

es cerrado y finalmente A_{k+1} es, en consecuencia, abierto y cerrado.

Concluimos ya que para toda $k \in \mathbb{N}^*$, A_k es abierto y cerrado. Notando que $\eta_A^{-1}(\{k\}) = A_k$ tendríamos que para toda $k \in \mathbb{N}^*$, $\eta_A^{-1}(\{k\})$ es en particular abierto, es decir η_A es continua. \square

Demostrado lo anterior llamaremos a η_A la *función tiempo de primer retorno*.

Lema 2.11. *Sea (χ, φ) un sistema Cantor minimal. Si $A \subseteq \chi$ es abierto y cerrado, entonces el conjunto χ es la unión de las imágenes de A bajo las iteraciones de φ ,*

$$\chi = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(A).$$

Demostración. Primero recordemos que $A \subseteq \chi$. Sabiendo que para $i \in \mathbb{Z}$, $\varphi^i : \chi \rightarrow \chi$, se tiene que $\varphi^i(A) \subseteq \chi$, por tanto $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(A) \subseteq \chi$.

Ahora, por ser φ minimal, para $x \in \chi$ tenemos que $A \cap \text{orb}_\varphi(x) \neq \emptyset$, es decir, existe un x_0 tal que $x_0 \in A$ y $x_0 \in \text{orb}_\varphi(x)$. De esto último podemos asegurar la existencia de $k_0 \in \mathbb{Z}$, tal que $\varphi^{k_0}(x) = x_0$.

Tomando $k = -k_0$ tenemos que $k \in \mathbb{Z}$ y $\varphi^k(x_0) = x$ con $x_0 \in A$; entonces, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \varphi^k(A)$ y, por tanto, $x \in \cup_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(A)$.

Podemos concluir que $\cup_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(A) \subseteq \chi$ y en consecuencia $\chi = \cup_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(A)$.

Por lo tanto podemos ver a χ como la unión de las imágenes de A bajo las potencias enteras del homeomorfismo φ . \square

Lema 2.12. *Cualquier $x \in \chi$ es recurrente.*

Demostración. Consideremos, para $x \in \chi$, el conjunto:

$$Z(x) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi^n(x) \in A\},$$

por el resultado anterior tenemos que para toda $x \in \chi$, $Z(x) \neq \emptyset$. Lo que demostraremos es que, para cualquier elemento de χ , este conjunto no es acotado por arriba. Definamos, para $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto:

$$M_k = \{x \in \chi \mid \sup(Z(x)) \leq k\},$$

es decir, los elementos de χ para los que $Z(x)$ es acotado por arriba por k , tenemos entonces que si $x \in M_k$ y $r > k$ entonces $\varphi^r(x) \notin A$.

Supongamos que existe alguna $x \in \chi$ para la cual $Z(x)$ es acotado por arriba, tendríamos entonces que existe alguna $k \in \mathbb{Z}$ para la cual $M_k \neq \emptyset$. Dada la definición de M_k esto implicaría que, si $n > k$, $M_n \neq \emptyset$ pues $M_k \subseteq M_n$.

Ahora para un $m < k$ y $x \in M_k$, consideremos el elemento $\varphi^{k-m}(x)$ en χ y apliquemos a dicho elemento el homeomorfismo φ^r con $r > m$. Teniendo en cuenta que, por ser $r > m$, $r + (k - m) > k$ y recordando que $x \in M_k$, obtenemos que $\varphi^{r+(k-m)}(x) \notin A$; es decir, $\varphi^r(\varphi^{k-m}(x)) \notin A$ y, por tanto, $\sup(Z(\varphi^{k-m}(x))) \leq m$ y así $M_m \neq \emptyset$.

Lo anterior nos dice que de, existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $M_k \neq \emptyset$, por tricotomía tendríamos que, para todo $m \in \mathbb{Z}$, $M_m \neq \emptyset$. Tenemos entonces una familia \mathcal{F} de conjuntos cerrados distintos del vacío y anidados en χ :

$$\mathcal{F} = \{M_k \in \mathcal{P}(\chi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Por la compacidad de χ podemos concluir que la intersección de \mathcal{F} es distinta del vacío, $\cap_{k \in \mathbb{Z}} M_k \neq \emptyset$.

Tenemos entonces que existe $x \in \chi$ tal que para cualquier $i \in \mathbb{Z}$, $\varphi^i(x) \notin A$ pero por el lema anterior eso es una contradicción. Esta viene de suponer alguno de los

$M_k \neq \emptyset$, es decir suponer que, para algún $x \in \mathcal{X}$, $Z(x)$ es acotado por arriba y por tanto no lo son. De lo anterior podemos concluir que, para cualquier $x \in \mathcal{X}$, existe un $n > 0$ tal que $\varphi^n(x) \in A$. En particular para $x \in A$, x es recurrente.

Observemos que de manera similar podemos demostrar que dicho conjunto tampoco puede estar acotado inferiormente. \square

En el capítulo siguiente definiremos el grupo pleno topológico de un sistema Cantor minimal y usaremos estos resultados para encontrar algunos de los elementos del mismo.

Capítulo 3

El grupo pleno topológico

Teniendo a los conjuntos de Cantor y sus homeomorfismos minimales definidos e identificados, en este capítulo definiremos el grupo pleno topológico al homeomorfismo minimal en nuestro Cantor.

Definición 3.1. Para un sistema Cantor minimal (\mathcal{X}, φ) definimos su *grupo pleno topológico* denotado $[\varphi]$ de la siguiente forma.

Dado un $f \in H(\mathcal{X})$, $f \in [\varphi]$ si para cualquier $x \in \mathcal{X}$, $f(x) \in \text{orb}_\varphi(x)$.

Es claro que, tanto φ , como cualquiera de sus iteraciones son elementos del grupo. Exhibiremos otros elementos de éste.

Recordemos que para definir η_A usamos simplemente el hecho de que para un abierto y cerrado A , $\mathcal{X} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(A)$, por lo que, mientras esta hipótesis se satisfaga, podemos definir la función φ_A de la siguiente manera:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \varphi^{\eta_A(x)}(x) & \text{si } x \in A, \\ x & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Lema 3.2. φ_A es un elemento de $[\varphi]$ y, más aún, el homeomorfismo $g = \varphi^{-1} \varphi_A$ es periódico.

Demostración. Comencemos verificando que φ_A es inyectiva.

Tomemos x_1 y $x_2 \in \mathcal{X}$ tales que $\varphi_A(x_1) = \varphi_A(x_2)$. Veremos que no puede suceder que $x_1 \in A$ mientras $x_2 \in \mathcal{X} \setminus A$. Si suponemos lo anterior, se tendría que

$\varphi^{\eta_A(x_1)}(x_1) = x_2$ pero, al ser η_A la función de primer retorno, $\varphi^{\eta_A(x_1)}(x_1) \in A$ así que $x_2 \in A$, lo que contradice la hipótesis de x_2 .

Para el caso en el que x_1 y $x_2 \in \mathcal{X} \setminus A$ es claro que $x_1 = x_2$ y si tanto x_1 como $x_2 \in A$ tendríamos que $\varphi^{\eta_A(x_1)}(x_1) = \varphi^{\eta_A(x_2)}(x_2)$, si $\eta_A(x_1) \neq \eta_A(x_2)$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\eta_A(x_1) > \eta_A(x_2)$ y en consecuencia $\eta_A(x_1) > \eta_A(x_1) - \eta_A(x_2) > 0$.

Así $\varphi^{\eta_A(x_1) - \eta_A(x_2)}(x_1) = x_2$. Como $x_2 \in A$, $\varphi^{\eta_A(x_1) - \eta_A(x_2)}(x_1) \in A$, lo que es una contradicción, pues $\eta_A(x_1)$ es el tiempo de primer retorno de x_1 .

Esto nos dice que $\eta_A(x_1) = \eta_A(x_2)$ y $x_1 = \varphi^0(x_1) = \varphi^{\eta_A(x_1) - \eta_A(x_2)}(x_1) = x_2$.

Para ver que φ_A es suprayectiva, consideremos $x \in \mathcal{X}$. Si $x \notin A$, $\varphi_A(x) = x$.

En otro caso, si $x \in A$ tomemos $U(x) = \max\{u \in \mathbb{Z}^- \mid \varphi^u(x) \in A\}$. Haciendo $y = \varphi^{U(x)}(x)$ tenemos que $y \in A$ y $\eta_A(y) = -U(x)$, por la elección de $U(x)$ y dado que $x \in A$. Así $\varphi_A(y) = \varphi^{\eta_A(y)}(y) = \varphi^{-U(x)}(y) = \varphi^{-U(x)}(\varphi^{U(x)}(x)) = x$.

Ahora demostraremos que la restricción de φ_A a A es continua y de inversa continua. Sea $B \subseteq \mathcal{X}$ abierto, tenemos entonces que

$$\varphi_A^{-1}(B) = \{x \in A \mid \varphi_A(x) \in B\} = \{x \in A \mid \varphi^{\eta_A(x)}(x) \in B\} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} (\varphi^{\eta_A(x)})^{-1}(B).$$

Sabiendo que, para toda $a \in \mathbb{Z}$, φ^a es continua, tenemos que cada uniendo es abierto y su unión es abierta; lo que se puede demostrar de manera análoga para φ_A^{-1} . Por tanto $\varphi|_A$ es un homeomorfismo.

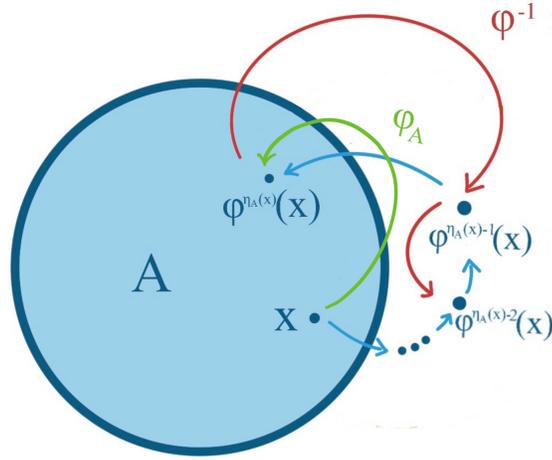
Ahora tomemos $x \in \mathcal{X}$. Deseamos ver que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi_A(x) = \varphi^k(x)$, lo que haremos separando dos casos posibles.

Si $x \in \mathcal{X} \setminus A$ entonces $\varphi_A(x) = x$, es decir, para $k = 0$ se tiene que $\varphi_A(x) = \varphi^0(x)$. Así $\varphi_A(x) \in \text{orb}_\varphi(x)$. Para el caso $x \in A$, tomamos $k = \eta_A(x)$ ya que $\varphi_A(x) = \varphi^{\eta_A(x)}(x)$ y $\varphi^{\eta_A(x)}(x) \in \text{orb}_\varphi(x)$. Se sigue de lo anterior que $\varphi_A(x) \in \text{orb}_\varphi(x)$. Concluimos que $\varphi_A \in [\varphi]$.

Para la periodicidad de $\varphi^{-1}\varphi_A$, veamos primero que para $x \in \mathcal{X}$, podemos encontrar siempre $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\varphi^{-1}\varphi_A)^k(x) = x$.

Si $x \in A$, por la definición de η_A , el homeomorfismo manda a x a la iteración previa al primer retorno de x a A como se puede ver en la figura 3.1, así $\varphi^{-1}\varphi_A(x) = \varphi^{-1}(\varphi^{\eta_A(x)}(x)) = \varphi^{\eta_A(x)-1}(x)$.

El elemento $\varphi^{\eta_A(x)-1}(x) \notin A$ por lo que al aplicarle $\varphi^{-1}\varphi_A$ una vez más se


 Figura 3.1: Caso 1, $x \in A$

tendría que

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1} \varphi_A)^2(x) &= \varphi^{-1} \varphi_A(\varphi^{-1} \varphi_A(x)) = \varphi^{-1} \varphi_A(\varphi^{\eta_A(x)-1}(x)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi^{\eta_A(x)-1}(x)) = \varphi^{\eta_A(x)-2}(x), \end{aligned}$$

pues φ_A fija a $\varphi^{\eta_A(x)-1}(x)$ ya que $\varphi^{\eta_A(x)-1}(x) \notin A$. Esto nos dice que al seguir aplicando el homeomorfismo $\varphi^{-1} \varphi_A$ regresamos sobre la órbita de x hasta volver a ésta tras $\eta_A(x)$ veces de aplicar φ^{-1} a x , es decir, $(\varphi^{-1} \varphi_A)^{\eta_A(x)}(x) = x$.

Para $x \notin A$ tenemos la figura 3.2, que nuevamente ilustra la situación. Para este caso, hará falta regresar con φ^{-1} sobre la órbita de x hasta entrar a A , por lo que usaremos nuevamente $U(x) = \max\{u \in \mathbb{Z}^- \mid \varphi^u(x) \in A\}$ y haciendo $y = \varphi^{U(x)}(x)$, tenemos que $y \in A$ y $\eta_A(y) = \eta_A(x) - U(x)$.

Sabiendo que $x \notin A$ y por la elección de $U(x)$, $(\varphi^{-1} \varphi_A)^{-U(x)}(x) = \varphi^{U(x)}(x) = y$, pues estamos regresando sobre la órbita de x hasta entrar a A .

Al aplicar el homeomorfismo $\varphi^{-1} \varphi_A$ tenemos una situación análoga a la del caso anterior, donde el homeomorfismo $\varphi^{-1} \varphi_A$ devuelve a y a la iteración anterior de φ , antes de su primer retorno a A .

De esta manera, como $\eta_A(y) = \eta_A(x) - U(x)$, $(\varphi^{-1} \varphi_A)^{\eta_A(x)-U(x)}(x) = x$.

Podemos concluir que para $x \in \mathcal{X}$ existe un $z \in A$ tal que $(\varphi^{-1} \varphi_A)^{\eta_A(z)}(x) = x$. De esta manera siendo \mathcal{X} un compacto y A un subconjunto cerrado de éste, con

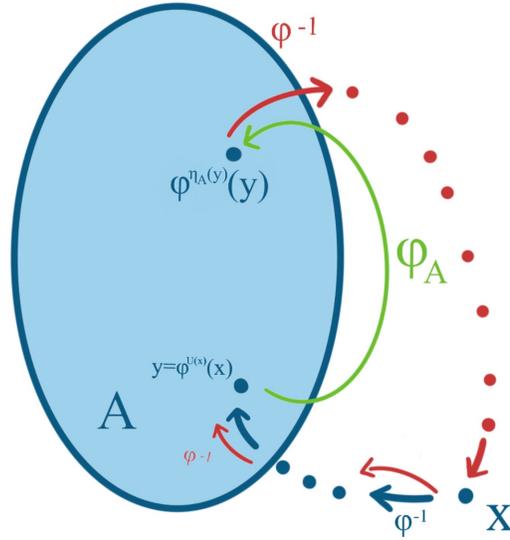


Figura 3.2: Caso 2, $x \notin A$

η_A continua, tomaremos $k = \sup\{\eta_A(x) | x \in A\}$, $(\varphi^{-1}\varphi_A)^{k!} = 1$ es decir, $\varphi^{-1}\varphi_A$ es periódico. \square

Antes de introducir algo de teoría extra demostraremos un lema que nos ayudará en los resultados principales. Este lema nos habla de las hipótesis necesarias que un homeomorfismo debe cumplir para poder descomponer nuestro conjunto como la unión disjunta de imágenes de un abierto y cerrado bajo las iteraciones del homeomorfismo y poder hablar de una función de primer retorno para éste así como el resto de los resultados que se desprenden de la existencia de la misma.

Lema 3.3. Sean $f \in H(\mathcal{X})$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Si, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, f^i no tiene puntos fijos, existe un abierto y cerrado U tal que, para cualesquiera $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$, $f^k(U) \cap f^j(U) = \emptyset$ y $\mathcal{X} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$.

En particular si $f^n = 1$ y f define una acción libre de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entonces las imágenes directas $f^i(U)$ forman una partición de \mathcal{X} .

Demostración. Veremos primero que, para $x \in \mathcal{X}$, existe una vecindad abierta y cerrada V_x disjunta de $\cup_{1 \leq i \leq n} f^i(V_x)$.

Tomemos $i \in \{1, \dots, n-1\}$ arbitraria y supongamos que cualquier vecindad V de x intersecta a $f^i(V)$; entonces, para una familia numerable de vecindades anidadas en x , tenemos una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ donde cada $x_k \in f^i(V) \cap V_k$. De esta manera tanto la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ como la sucesión $\{f^i(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergen a x .

Por la continuidad de f^i se tendría que $f^i(x) = x$, lo cual es una contradicción, ya que supusimos f^i sin puntos fijos. De esta manera, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, existe una vecindad V_i de x tal que $V_i \cap f^i(V_i) = \emptyset$ y tomando

$$V_x = \bigcap_{0 < i < n} V_i$$

se tiene la vecindad de x que buscábamos.

De la cubierta $\{V_x | x \in \mathcal{X}\}$, dada la compacidad de \mathcal{X} , podemos extraer una subcubierta finita $\{W_k | k \in \{1, \dots, m\}\}$. Notemos que dichos W_k cubren a todo el conjunto, al mismo tiempo que cada uno es ajeno a sus primeras $n-1$ imágenes directas. Así para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ definimos

$$X_k = W_k \setminus \bigcup_{0 < j < k, -n < i < n} f^i(W_j),$$

de manera que a cada W_k le quitamos los elementos que tiene en común con las imágenes bajo f desde $-n$ a n de todos los W_i anteriores a él. Nos aseguramos de mantener ajenas a las imágenes directas de estos con las imágenes directas de sus anteriores hasta la iteración $(n-1)$, para así poder tomar:

$$U = \bigcup_{1 \leq k \leq m} X_k.$$

Veremos que U satisface las condiciones buscadas. Por la construcción de U y la de cada uno de los X_k podemos asegurar que, dados i y $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $f^i(U) \cap f^j(U) = \emptyset$.

Demostremos entonces que $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$.

Es fácil ver que $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U) \subseteq \mathcal{X}$. Para la otra contención tomemos $x \in \mathcal{X}$ arbitraria, por ser $\{W_k | k \in \{1, \dots, m\}\}$ una subcubierta de \mathcal{X} , existe $k_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in W_{k_0}$, tenemos entonces dos casos:

- a) Si $x \notin \bigcup_{0 < j < k_0, -n < i < n} f^i(W_j)$ entonces $x \in X_{k_0}$, así $x \in f^0(U)$ y en consecuencia es elemento de $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$.

b) En el caso en que $x \in \cup_{0 < j < k_0, -n < i < n} f^i(W_j)$ se tiene que existen j e i , con $1 < j < k_0$ y $-n < i < n$, tales que $x \in f^i(W_j)$. De manera que podemos escoger $j_0 = \min\{j \in \{1, \dots, k_0\} \mid \text{existe } i \in \{-n, \dots, n\} \text{ tal que } x \in f^i(W_j)\}$ e i_0 tal que $x \in f^{i_0}(W_{j_0})$. Dado que j_0 era el mínimo con dicha propiedad, x no pudo ser removido con las imágenes anteriores del resto, y así $x \in f^{i_0}(X_{j_0})$.

Como $f^{i_0}(X_{j_0}) \subseteq f^{i_0}(U)$ y $f^{i_0}(U) \subseteq \cup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$ ya que f es un homeomorfismo, se tiene, una vez mas que $x \in \cup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$.

Por ser f un homeomorfismo y $U \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $f^i(U) \neq \emptyset$. Finalmente, si f define una acción libre sobre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\{f^i(U) \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ es partición de χ . \square

Este resultado nos permite encontrar, para cualquier homeomorfismo del grupo pleno, un abierto y cerrado U tal que dentro de éste, el homeomorfismo se comporta como φ y donde es posible definir una función de primer retorno continua y el homeomorfismo periódico asociado.

Capítulo 4

Teoría ergódica

Para continuar con la teoría a desarrollar y acercarnos a los resultados centrales del presente trabajo, introduciremos en el capítulo algunas definiciones y resultados tomados del libro “Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds” [Pol93]. Estos trabajos abordan de forma clara y directa todo lo relacionado con medidas invariantes bajo un homeomorfismo y formarán parte de la columna vertebral del grueso de nuestras argumentaciones.

Como sabemos, los objetos de estudio en teoría de la medida son los espacios de medida (X, \mathcal{B}) , donde X es un conjunto arbitrario y \mathcal{B} una σ -álgebra. En teoría ergódica nuestros objetos básicos además de los espacios métricos (X, \mathcal{B}) son también las *transformaciones medibles*, $T : X \rightarrow X$ con $T^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$, así como aquellas medidas de probabilidad, $m : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$, que se comportan de manera apropiada respecto a T en el siguiente sentido.

Definición 4.1. Una medida de probabilidad m en (X, \mathcal{B}) se dice *T -invariante* si, para cualquier $B \in \mathcal{B}$, $m(T^{-1}(B)) = m(B)$.

Es fácil ver que, si T es además biyectiva y su inversa es también medible, nuestra definición es equivalente a pedir que $m(B) = m(T(B))$, para cualquier $B \in \mathcal{B}$.

Es, entonces, natural e importante para nuestro trabajo preguntarnos cuándo estas medidas invariantes existen. La respuesta la encontramos en el siguiente lema, el cual corresponde al lema 1.2 del libro citado.

Lema 4.2. Si $T : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo de un espacio topológico compacto X y \mathcal{B} es su σ -álgebra de borelianos, existe al menos una medida T -invariante de X .

Demostración. Para esta prueba haremos referencia a la definición 6.1 y el teorema 6.5 del libro de Peter Walters “An introduction to ergodic theory” [Wal43]. En la primera se define la *topología débil** en el espacio de medidas para un espacio métrico y se demuestra, en dicho teorema, que si el espacio métrico es compacto, su espacio de medidas con esta topología también lo será.

De esta manera, si elegimos una medida $m : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$ cualquiera, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, podemos definir una medida m_n mediante la combinación afín

$$m_n = \frac{m + T^*m + (T^*)^2m + \cdots + (T^*)^{n-1}m}{n},$$

donde, para $k \in \mathbb{N}^*$ y $B \in \mathcal{B}$, $(T^*)^k m(B) = m((T^k)^{-1}(B))$.

Sabiendo que nuestro espacio de medidas es convexo para cada k , m_k es un elemento del mismo y usando la compacidad, podemos asegurar que existe un punto de acumulación \tilde{m} para la sucesión $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, es decir, existe una subsucesión $\{m_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\tilde{m} = \lim_{i \rightarrow \infty} m_{k_i}$.

Usando lo anterior y por la forma en que definimos a la medidas tendríamos que

$$\tilde{m} = \lim_{i \rightarrow \infty} m_{k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(m_{k_i} + \frac{m - (T^*)^{k_i}m}{k_i} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} T^* m_{k_i} = T^* \tilde{m},$$

de lo que podemos concluir que nuestra medida es T -invariante. \square

Para un conjunto de Cantor χ tomaremos la σ -álgebra de Borel, \mathcal{B}_χ , dada por su topología. Por lo que (χ, \mathcal{B}_χ) resulta ser un espacio de medida compacto, además φ es una transformación medible por ser un homeomorfismo.

Usaremos la notación $\mathcal{M}(\chi)$ para hablar del conjunto de las medidas de probabilidad para χ , es decir, aquellas para las cuales la medida de χ es uno. Sabemos ya que este conjunto es no vacío pues para cada $x \in \chi$ tenemos la medida definida, para cada $B \in \mathcal{B}_\chi$, por la siguiente regla de correspondencia:

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

Lo que además nos da una inyección de χ en $\mathcal{M}(\chi)$, asignando a cada x la medida δ_x .

Al subconjunto de $\mathcal{M}(\chi)$ cuyos elementos sean aquellas medidas φ -invariantes, lo denotaremos $\mathcal{M}_\varphi(\chi)$, el cual por nuestro lema 4.2 es distinto del vacío.

Para continuar son necesarias un par de definiciones.

Definición 4.3. Para $B \in \mathcal{B}_\chi$, definimos los *límites*

$$\mathcal{L}_\varphi^+(B) = \sup\{\sigma(B) \mid \sigma \in \mathcal{M}_\varphi(\chi)\} \text{ y } \mathcal{L}_\varphi^-(B) = \inf\{\sigma(B) \mid \sigma \in \mathcal{M}_\varphi(\chi)\}.$$

Proposición 4.4 (Lema de fragmentación). Para todo $\psi \in [\varphi]$ y $\varepsilon > 0$, hay siempre una $m \in \mathbb{N}$ y homeomorfismos $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m \in [\varphi]$, tales que, $\psi = \psi_1 \psi_2 \dots \psi_m$ y, para $i \in \{1, \dots, m\}$, $\mathcal{L}_\varphi^+(\text{sop}(\psi_i)) < \varepsilon$. Si además elegimos ψ de manera que para un entero $n \leq 1$, $\psi^n = 1$, entonces se puede probar que para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $\psi_i^n = 1$.

Demostración. Si existe un $n > 0$ tal que $\psi^n = 1$, afirmamos que todo elemento $x \in \chi$ posee una vecindad ψ -invariante arbitrariamente pequeña; además podemos encontrar vecindades de x tan pequeñas como queramos y ajenas a sus imágenes directas bajo ψ , las cuales, al ser ψ periódico, son una cantidad finita. Así al unir esta vecindad y sus imágenes tendremos una vecindad de x que es ψ -invariante. Podemos deducir entonces la existencia de una partición $\{U_j\}$ de abiertos y cerrados ψ -invariantes, tales que, para cualquier j , $\mathcal{L}_\varphi^+(U_j) < \varepsilon$. Esta induce una descomposición $\psi = \psi_1 \psi_2 \dots \psi_m$, donde, para cada j , ψ_j tiene un soporte contenido en U_j y existe un $n > 0$ tal que $\psi_j^n = 1$.

Ahora, si ψ no tiene una órbita finita, escogemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > \frac{1}{n}$; por el lema 3.3 sabemos que existe un abierto y cerrado U tal que, para cualquier $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $U \cap \psi^i(U) = \emptyset$. Esto nos dice que, para cualquier medida de probabilidad μ , $\mu(U) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, es decir, $\mathcal{L}_\varphi^+(U) < 1/n < \varepsilon$.

Por el mismo lema, sabemos que $\chi = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \psi^k(U)$, por lo que tenemos las hipótesis suficientes para usar el lema 3.2 y definir el homeomorfismo ψ_U . Denotando $\tau = \psi_U^{-1} \psi$ se tiene que $\psi = \psi_U \tau$. Notemos además que $\tau = (\psi^{-1} \psi_U)^{-1}$ y $\psi^{-1} \psi_U$ es periódico, por el caso anterior se puede descomponer. \square

Definición 4.5. A la factorización $\psi = \psi_1 \psi_2 \dots \psi_m$ la llamaremos una *fragmentación* de ψ .

Veamos ahora que, siempre que un abierto y cerrado de nuestro conjunto de Cantor sea mas pequeño que otro en términos de cualquier medida de probabilidad, podremos encontrar un homeomorfismo en el grupo pleno que inyecte el más pequeño en el más grande.

Lema 4.6. *Para (χ, φ) un sistema Cantor minimal y $A, B \subseteq \chi$ abiertos y cerrados si, para cualquier $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(\chi)$, $\mu(B) < \mu(A)$ existe entonces un $\alpha \in [\varphi]$ tal que $\alpha(B) \subseteq A$.*

Demostración. Definiremos primero la función $f = \delta_A - \delta_B$. Por hipótesis se tendría que para cualquier medida de probabilidad invariante μ , $\int f d\mu > 0$.

Afirmamos que, en este caso, deben existir $c > 0$ y $N_0 > 5$ tales que, para cualquier $N > N_0$ y $x \in \chi$,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\varphi^i(x)) > c.$$

Es decir, debe existir un real positivo c y una N_0 , para las cuales c acota inferiormente al promedio de las evaluaciones de f , al menos en las primeras N iteraciones de x bajo φ , para cualquier $N > N_0$.

De no suceder esto podríamos dar sucesiones $(c_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de reales, $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de naturales y $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de puntos en χ , tales que

$$\overline{\lim} c_k \leq 0 \text{ y } \frac{1}{N_k} \sum_{i=0}^{N_k-1} f(\varphi^i(x_k)) \leq c_k.$$

Con ello definimos la sucesión de medidas $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ con

$$\mu_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=0}^{N_k-1} \varphi_*^i \delta_{x_k},$$

donde, la función $\varphi_*^i \delta_{x_i}$, para un $i \in \{1, \dots, N-1\}$ y $k \in \mathbb{N}^*$ se calcula en $A \in \mathcal{B}_\chi$ como:

$$\varphi_*^i \delta_{x_i}(A) = \delta_{\varphi^i(x_k)}(A),$$

de manera que, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $\int f d\mu_k \leq 0$.

Sabiendo ya que el conjunto $\mathcal{M}(\chi)$ es compacto, se sigue que, la sucesión $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tiene un punto de acumulación μ en $\mathcal{M}_\varphi(\chi)$. Esta medida no solo es

invariante, también se cumplirá que, $\int f d\mu_k \rightarrow \int f d\mu$, debido a la elección de las sucesiones $(c_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ y $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Así $\int f d\mu \leq 0$, lo que resulta en una contradicción por cómo se definió la función f .

Lo anterior nos permite concluir la existencia de la cota c y el natural N_0 que podemos elegir mayor a 5. Esto nos dice también que, para cualquier $i \in \{1, \dots, N_0\}$, φ^i no puede tener puntos fijos y por el lema 3.3 tenemos un abierto y cerrado U para el cual, si $i, j \in \{1, \dots, N_0\}$ y $j \neq i$ entonces $\varphi^i(U) \cap \varphi^j(U) = \emptyset$. Además $\chi = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(U)$.

Usando η_U , la función primer tiempo de retorno a U , se puede encontrar una partición de abiertos y cerrados (V_l) de U donde $V_l = \{x \in U \mid \eta_U(x) = l\}$ y, para cualesquiera i y $j \in \{0, \dots, l-1\}$, $\varphi^i(V_l) \cap \varphi^j(V_l) = \emptyset$. Además sabemos que al hacer variar a i , las imágenes directas forman, también, una partición de U . A ésta se le conoce como la torre de Kakutani-Rokhlin.

Dicha partición se puede refinar en otra (U_j) , tal que, si $i \in \{0, \dots, \eta(U_j) - 1\}$, $\varphi^i(U_j)$ sea un subconjunto de $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ o bien $\chi \setminus (A \cup B)$; obteniendo así la siguiente descomposición para χ :

$$\chi = \bigsqcup_j \bigsqcup_{i \in \{0, \dots, \eta(U_j) - 1\}} \varphi^i(U_j).$$

Para un j arbitrario, tomaremos a_j cómo la cantidad de factores $\varphi^i(U_j)$ que se quedan totalmente contenidos en $A \setminus B$ y, de manera análoga, b_j es la cantidad de éstos que se queda totalmente contenida en $B \setminus A$ de manera que, para cada j ,

$$\frac{a_j - b_j}{\eta(U_j)} = \frac{1}{\eta(U_j)} \sum_{i=0}^{\eta(U_j)-1} f(\varphi^i(x)) \geq c > 0.$$

Podemos dar entonces una permutación τ_j en $\{0, \dots, \eta(U_j)\}$, de manera que, ésta permutación envíe los A_j en los B_j y fije todo fuera de éstos; dicha permutación definirá, de manera natural, un elemento $\alpha \in [\varphi]$ que preservará globalmente cada torre enviando a B en A .

Notemos que podemos asegurarnos que cada permutación τ_j resulte ser par ya que, por la elección de N_0 , se puede asegurar que, para cualquier j , $\eta(U_j) \geq 5$ y que tanto a_j como b_j son mayores que 2; podríamos entonces componer con una transposición de ser necesario y obtener el elemento α deseado. \square

Hasta ahora están sentadas las bases teóricas para avanzar en el siguiente capítulo al resultado central del presente trabajo. Este nos asegurará la existencia de grupos simples infinitos en el contexto presentado durante los capítulos previos; para lo cual haremos un recuento corto de lo que se conoce, en la generalidad, sobre grupos simples y la importancia del resultado a presentar.

Capítulo 5

Grupos simples infinitos

Para abordar el último de nuestros resultados y el teorema central del presente trabajo retomaremos primero algunos conceptos en teoría de grupos, entre ellos el de grupo simple y daremos un panorama general de por qué estos últimos resultan de especial interés en la matemática.

Recordemos que para un grupo cualquiera G , decimos que, un subgrupo K de G es un *subgrupo normal* si para cualquier $x \in G$ se cumple que $x^{-1}Kx \subseteq K$ y diremos que G es un *grupo simple*, si sus únicos subgrupos normales son 1 y G , donde $1 = \{e\}$ con e el neutro del grupo.

La perspectiva de interés en torno a los grupos simples es una de representación y clasificación de grupos. Para el caso finito, la clasificación de todos los grupos simples, misma que fue completada en el año 2008, ha sido uno de los proyectos de investigación más ambiciosos en la matemática del siglo 20.

El análisis y clasificación de los grupos finitos en general se resume a resolver el llamado “problema de extensión” donde, para dos grupos X y Y , deseamos encontrar todas las posibles extensiones de X por Y , es decir, todos aquellos grupos G donde exista un subgrupo normal H de G con

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 1,$$

de manera que $H \cong X$ y $G/H \cong Y$. Problema que resulta difícil de abordar en la generalidad y que se reduce nuevamente a atacar aquellos casos donde el grupo Y es un grupo simple.

En vista de lo anterior podemos decir que los grupos simples son el análogo

en la teoría de grupos de lo que son los números primos en la teoría de números, en términos de descomposición en factores más pequeños; y aún cuando no se tiene un resultado con la fuerza del teorema de factorización única en primos, los subgrupos simples de un grupo nos brindan cierto control en lo que se refiere a la estructura general de éste.

Aun cuando para el caso finito tenemos una completa y explícita clasificación de todos los grupos simples, el caso no finito ha probado ser un reto complicado de abordar con los pocos ejemplos que tenemos a la mano de ellos y lo complejo de sus construcciones. Existe, por ejemplo, la construcción de un grupo simple infinito y finitamente generado dada por Graham Higman como el cociente de un grupo infinito finitamente generado.

Es por ello que la meta planteada para este trabajo es presentar el resultado que, a partir de un sistema Cantor minimal, nos permitirá extraer un grupo simple infinito. Siendo que hemos dado una familia basta de estos sistemas tendremos, potencialmente, la misma cantidad de grupos simples infinitos.

Retomaremos primero, del caso finito, la demostración que nos permite probar que el grupo A_5 es un grupo simple. Esto como herramienta para visualizar como una extensión de esta idea se aplicará al caso no finito expuesto en lo posterior.

Proposición 5.1. El grupo A_5 es simple.

Demostración. Para esta prueba recordemos que, para $n > 2$, el grupo A_n es generado por los 3-ciclos, es decir, cualquier permutación τ puede escribirse como

$$\tau = c_1 c_2 \cdots c_k,$$

donde, cada c_i es un 3-ciclo de S_5 . Bastaría entonces ver que cualquier subgrupo normal de A_5 tiene como elementos a todos los 3 ciclos.

Si además $n > 4$, todos los 3-ciclos son conjugados en A_n . Así la demostración se reduce a mostrar que basta con que en un subgrupo normal haya un 3-ciclo.

Las demostraciones de los resultados mencionados pueden encontrarse en el libro “Algebra abstract and concrete” [Goo15] de Frederick M. Goodman, en su capítulo 10 sección 10.3 sobre simplicidad en grupos alternantes.

En particular, para $n = 5$, ambos resultados son ciertos. A_5 es generado por los 3-ciclos y los 3-ciclos son conjugados en A_5 .

Tomemos un subgrupo N normal de A_5 distinto del trivial, debe existir entonces una permutación $\tau \in N$ no trivial.

Por la descomposición en ciclos de la permutación τ se tendrán solamente tres casos:

1. $\tau = (abc)$.
2. $\tau = (abcde)$.
3. $\tau = (ab)(cd)$.

Para el caso 1, sabiendo que todos los 3-ciclos son conjugados en A_5 , por ser N normal tendríamos que todo 3-ciclo es elemento de N . Dado que los 3-ciclos generan a A_5 tendríamos que $A_5 \subseteq N$ y así $N = A_5$.

Para el caso 2, donde $\tau = (abcde)$, tomemos la permutación $\alpha = (ab)(cd) \in A_5$ y calculemos la conjugación $\tau' = \alpha\tau\alpha^{-1}$, la cual es un elemento de N por ser este normal.

$$\tau' = \alpha\tau\alpha^{-1} = (ab)(cd)(abcde)(ab)(cd) = (adceb).$$

Dado que N es un subgrupo y $\tau, \tau' \in N$, el producto $\tau\tau' \in N$ y

$$\tau\tau' = (abcde)(adceb) = (aec).$$

Esto nos dice que N tiene como elemento a un 3-ciclo y nos refiere al caso 1.

Para el caso 3 con $\tau = (ab)(cd)$, de manera análoga al caso anterior, tomaremos la permutación $\beta = (abe) \in A_5$ y la conjugación $\tau' = \beta\tau\beta^{-1} \in N$.

$$\tau' = \beta\tau\beta^{-1} = (abe)(ab)(cd)(aeb) = (be)(cd).$$

El producto $\tau\tau'$ es, en consecuencia, elemento de N y

$$\tau\tau' = (ab)(cd)(be)(cd) = (abe),$$

reduciendo el argumento una vez más al caso 1. □

En general, para un grupo G cualquiera, definimos, para los elementos $x, y \in G$, su *conmutador* como el elemento $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ y denotamos G' al grupo derivado, generado por los conmutadores.

Observación 5.2. Notemos ahora que cada 3-ciclo puede expresarse como un conmutador,

$$(abc) = (ab)(ac)(ab)^{-1}(ac)^{-1} = (ab)(ac)(ab)(ac) = [(ab), (ac)].$$

Dicha observación nos dejará establecer la analogía con nuestro resultado principal. Deseamos, como lo hicimos con los 3-ciclos en A_5 , probar que, si N es un subgrupo normal no trivial de $[\varphi]'$ sucede que, para cualesquiera $g, h \in [\varphi]$, el conmutador $[g, h] \in N$, así N contendría todos los conmutadores, llevándonos a que N tiene que ser todo el grupo $[\varphi]'$ y en consecuencia $[\varphi]'$ no tiene subgrupos normales propios.

Previo a nuestro resultado principal hablaremos, en un grupo arbitrario G , de la *cerradura normal* de un conjunto, denotada $S \subseteq G$, $\langle\langle S \rangle\rangle$. La cual se refiere al subgrupo normal de G más pequeño que contiene a S .

Por su definición, es fácil ver que, si $S \subseteq S' \subseteq G$ entonces $\langle\langle S \rangle\rangle \subseteq \langle\langle S' \rangle\rangle$. Queda demostrar simplemente una propiedad de esta respecto a las factorizaciones de los elementos del grupo.

Lema 5.3. *Para g y $h \in G$, si existen $g_1, \dots, g_s, h_1, \dots, h_r \in G$ tales que $g = g_1 g_2 \cdots g_s$ y $h = h_1 h_2 \cdots h_r$ entonces*

$$[g, h] \in \langle\langle \{[g_i, h_j] \mid i \in \{1, \dots, s\} \text{ y } j \in \{1, \dots, r\}\} \rangle\rangle.$$

Demostración. Comenzaremos con una inducción sobre s .

Paso base. Si $s=1$, lo que deseamos demostrar para $g \in G$ es que, si existen $h_1, \dots, h_r \in G$ tales que $h = h_1 h_2 \cdots h_r$ entonces

$$[g, h] \in \langle\langle \{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r\}\} \rangle\rangle,$$

esto lo haremos por inducción sobre r .

Paso base. Si $r = 1$, por la definición de la cerradura normal, es claro que $[g, h] \in \langle\langle \{[g, h]\} \rangle\rangle$.

Paso inductivo. Nuestra hipótesis de inducción nos dice que si existen $h_1, \dots, h_r \in G$ tales que $h = h_1 h_2 \cdots h_r$ entonces $[g, h] \in \langle\langle \{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r\}\} \rangle\rangle$.

Supongamos que existen $h_1, \dots, h_r, h_{r+1} \in G$ tales que $h = h_1 h_2 \cdots h_r h_{r+1}$ y denotemos $h' = h_1 h_2 \cdots h_r$; lo que tenemos entonces es que $h = h' h_{r+1}$ y observemos

que

$$\begin{aligned}
 [g, h] &= [g, h' h_{r+1}] = g(h' h_{r+1})g^{-1}(h' h_{r+1})^{-1} = gh' h_{r+1}g^{-1}h_{r+1}^{-1}h'^{-1} \\
 &= gh'g^{-1}gh_{r+1}g^{-1}h_{r+1}^{-1}h'^{-1} = gh'g^{-1}(gh_{r+1}g^{-1}h_{r+1}^{-1})h'^{-1} \\
 &= gh'g^{-1}[g, h_{r+1}]h'^{-1} = gh'g^{-1}h'^{-1}h'[g, h_{r+1}]h'^{-1} \\
 &= (gh'g^{-1}h'^{-1})h'[g, h_{r+1}]h'^{-1} = [g, h']h'[g, h_{r+1}]h'^{-1}. \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Como h' se descompone en exactamente r factores, por hipótesis de inducción, tendríamos que

$$[g, h'] \in \langle\langle\{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r\}\}\rangle\rangle.$$

Dado que la cerradura normal respeta la contención y

$$\{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r\}\} \subseteq \{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r, r+1\}\},$$

entonces

$$[g, h'] \in \langle\langle\{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r, r+1\}\}\rangle\rangle,$$

como $\langle\langle\{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r, r+1\}\}\rangle\rangle$ es normal,

$$h'[g, h_{r+1}]h'^{-1} \in \langle\langle\{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r, r+1\}\}\rangle\rangle.$$

Igualmente, por ser un subgrupo,

$$[g, h']h'[g, h_{r+1}]h'^{-1} \in \langle\langle\{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r, r+1\}\}\rangle\rangle,$$

así $[g, h] \in \langle\langle\{[g, h_j] \mid j \in \{1, \dots, r, r+1\}\}\rangle\rangle$; con lo que concluiríamos la inducción sobre r y el paso base de la inducción sobre s .

Paso inductivo. La hipótesis de inducción nos dice que, si existen g_1, \dots, g_s , y $h_1, \dots, h_r \in G$ con $g = g_1 g_2 \cdots g_s$ y $h = h_1 h_2 \cdots h_r$ entonces

$$[g, h] \in \langle\langle\{[g_i, h_j] \mid i \in \{1, \dots, s\} \text{ y } j \in \{1, \dots, r\}\}\rangle\rangle.$$

Supongamos que existen $g_1, \dots, g_s, g_{s+1}, h_1, \dots, h_r \in G$ con $g = g_1 g_2 \cdots g_s g_{s+1}$ y $h = h_1 h_2 \cdots h_r h_{r+1}$.

Como en el paso anterior, denotemos $g' = g_1 g_2 \cdots g_s$ así $g = g' g_{s+1}$ y

$$\begin{aligned}
 [g, h] &= [g' g_{s+1}, h] = (g' g_{s+1})h(g' g_{s+1})^{-1}h^{-1} = g' g_{s+1} h g_{s+1}^{-1} g'^{-1} h^{-1} \\
 &= g' g_{s+1} h g_{s+1}^{-1} h^{-1} h g'^{-1} h^{-1} = g'(g_{s+1} h g_{s+1}^{-1} h^{-1}) h g'^{-1} h^{-1} \\
 &= g'[g_{s+1}, h] h g'^{-1} h^{-1} = g'[g_{s+1}, h] g'^{-1} g' h g'^{-1} h^{-1} \\
 &= g'[g_{s+1}, h] g'^{-1} [g', h]. \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

De manera análoga como g' se descompone en s factores la hipótesis de inducción nos dice que $[g', h] \in \langle\langle\{[g_i, h_j] \mid i \in \{1, \dots, s\} \text{ y } j \in \{1, \dots, r\}\}\rangle\rangle$, como

$$\begin{aligned} \{[g_i, h_j] \mid i \in \{1, \dots, s\} \text{ y } j \in \{1, \dots, r\}\} \subseteq \\ \{[g_i, h_j] \mid i \in \{1, \dots, s, s+1\} \text{ y } j \in \{1, \dots, r\}\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

así $[g', h] \in \langle\langle\{[g_i, h_j] \mid i \in \{1, \dots, s+1\} \text{ y } j \in \{1, \dots, r\}\}\rangle\rangle$ y

$$g'[g_{s+1}, h]g'^{-1} \in \langle\langle\{[g_i, h_j] \mid i \in \{1, \dots, s+1\} \text{ y } j \in \{1, \dots, r\}\}\rangle\rangle.$$

Por ser subgrupo el producto de estos es también elemento de dicha cerradura normal, es decir,

$$[g, h] \in \langle\langle\{[g_i, h_j] \mid i \in \{1, \dots, s+1\} \text{ y } j \in \{1, \dots, r\}\}\rangle\rangle.$$

□

Tenemos finalmente todo lo necesario para abordar nuestro resultado principal y demostrar que, en cualquier sistema Cantor minimal, el derivado del grupo pleno topológico es simple.

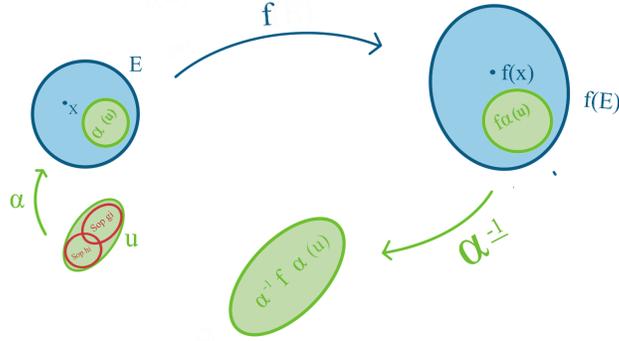
Teorema 5.4. *Para (χ, φ) un sistema Cantor minimal, $[\varphi]'$ es un grupo simple no trivial.*

Demostración. Comencemos tomando un subgrupo N de $[\varphi]'$ normal y no trivial, además de homeomorfismos g y $h \in [\varphi]$.

Para $f \in N$ distinto de la identidad, existe en χ un x tal que $x \neq f(x)$. Por ser f un homeomorfismo, debe existir un abierto y cerrado E no trivial de χ tal que $E \cap f(E) = \emptyset$.

Sabiendo que la función que asocia a cada $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(\chi)$ con $\mu(E)$ es continua y $L_\varphi^-(E) > 0$, tomaremos $\varepsilon = L_\varphi^-(E)$. Por la proposición 4.4, existen, para g y h , fragmentaciones g_1, \dots, g_s y h_1, \dots, h_r tales que $g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_s$, $h = h_1 \cdot h_2 \cdots h_r$ y tanto $\mathcal{L}_\varphi^+(\text{sop}(g_i))$ como $\mathcal{L}_\varphi^+(\text{sop}(h_j))$ sean ambos menores a $\frac{\varepsilon}{2}$.

El lema previo nos dice que el elemento $[g, h]$ pertenece a la cerradura normal del subgrupo generado por los elementos $[g_i, h_j]$, con $i \in \{1, \dots, s\}$ y $j \in \{1, \dots, r\}$; esto reduce la demostración a ver que, si $i \in \{1, \dots, s\}$ y $j \in \{1, \dots, r\}$, el elemento $[g_i, h_j] \in N$.


 Figura 5.1: Homeomorfismo α

Sean $i \in \{1, \dots, s\}$ y $j \in \{1, \dots, r\}$, definimos U como el abierto y cerrado $\text{sop}(g_i) \cup \text{sop}(h_j)$, notando que $\mathcal{L}_\varphi^+(U) < \varepsilon = \mathcal{L}_\varphi^+(E)$.

Podemos entonces, por el lema 4.6, encontrar un $\alpha \in [\varphi]$ tal que $\alpha(U) \subseteq E$; dado que N es normal tenemos que el homeomorfismo $q = \alpha^{-1}f\alpha \in N$. Lo que ilustra el diagrama 5.

Consideremos ahora el elemento $\hat{h}_j = [h_j, q] = h_j q h_j^{-1} q^{-1}$, afirmamos que $\hat{h}_j \in N$ ya que $h_j q h_j^{-1} \in N$, N es normal y el producto $(h_j q h_j^{-1}) q^{-1} \in N$ pues N es un subgrupo. Por un argumento análogo el elemento $[g_i, \hat{h}_j] \in N$.

Sabiendo que $\alpha(U) \subset E$, que, por elección de E , $E \cap f(E) = \emptyset$ y $q = \alpha^{-1}f\alpha$, se tiene que $U \cap q(U) = \emptyset$. De lo anterior y sabiendo que $U = \text{sop}(g_i) \cup \text{sop}(h_j)$, los elementos g_i^{-1} y $q h_j q$ conmutan. Así

$$\begin{aligned} [g_i, \hat{h}_j] &= g_i \hat{h}_j g_i^{-1} \hat{h}_j^{-1} = g_i (h_j q h_j^{-1} q^{-1}) g_i^{-1} (h_j q h_j^{-1} q^{-1})^{-1} \\ &= g_i (h_j q h_j^{-1} q^{-1}) g_i^{-1} (q h_j q^{-1} h_j^{-1}) = g_i h_j (q h_j^{-1} q^{-1}) g_i^{-1} (q h_j q^{-1}) h_j^{-1} \\ &= g_i h_j g_i^{-1} (q h_j^{-1} q^{-1}) (q h_j q^{-1}) h_j^{-1} = g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1} = [g_i, h_j], \end{aligned} \quad (5.4)$$

y por tanto $[g_i, h_j] \in N$ como deseábamos.

Podemos concluir entonces que todo subgrupo normal de $[\varphi]'$ no trivial contiene a $[\varphi]'$. Es decir, $[\varphi]'$ no tiene subgrupos normales propios por lo que $[\varphi]'$ es simple. \square

Este último resultado presenta la conclusión del presente trabajo, permitiéndonos obtener, por cada sistema Cantor minimal, un grupo simple a través del cálculo del derivado de su grupo pleno topológico; además nos presenta la oportunidad de profundizar en el resto de las propiedades que se cumplen dentro del mismo y las diferencias que se pueden encontrar en los diferentes grupos derivados para los ejemplos que se introdujeron en el primero de nuestros capítulos.

Así, con lo expuesto en el presente trabajo, podemos dar un paso adelante desde la presentación del grupo de Highman a una colección no numerable de grupos simples infinitos y que bajo las condiciones que Matui establece en el teorema 5.4 de su artículo “Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems” [Mat06] pueden ser también finitamente generados.

Bibliografía

- [Asc04] Michael Aschbacher. The status of the classification of the finite simple groups. *Notices of the AMS*, 51(7), 2004.
- [BM08] S. Bezuglyi y K. Medynets. Full groups, flip conjugacy, and orbit equivalence of Cantor minimal systems. *Colloquium Mathematicum*, 110(2):410–429, 2008.
- [dC13] Yves de Cornulier. Groupes pleins-topologiques [d’après Matui, Juschenko, Monod, ...]. *Séminaire Bourbaki*, (1064), 2013.
- [Goo15] Frederick M. Goodman. *Algebra abstract and concrete*. SemiSimple Press, 2015.
- [HY61] John G. Hocking y Gail S. Young. *Topology*. Addison-Wesley, 1961.
- [JM13] Kate Juschenko y Nicolas Monod. Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups. *Ann. of Math. (2)*, 178(2):775–787, 2013.
- [Mat06] Hiroki Matui. Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems. *World Scientific Publishing Company*, 17(2):231–251, 2006.
- [Mil01] John Milnor. Introductory dynamics lectures, octubre de 2001, <https://www.math.stonybrook.edu/~jack/DYNOTES/>
- [Nav07] Andrés Navas. *Grupos de difeomorfismos del círculo*, volume 13 of *Ensaaios Matemáticos*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.

- [Pol93] Mark Pollicott. *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*, volume 80 of *London Mathematical Society Lecture Notes*. Cambridge University press, 1993.
- [Roz13] U. A. Rozikov. What are p -adic numbers? *Asia Pacific Mathematics Newsletter*, 3(4), 2013.
- [Wal43] Peter Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, 1943.