



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIONES PRÁCTICAS DE MEDICIONES DE
CAMPO GRAVITACIONAL DE ALTA PRECISIÓN
ASISTIDAS POR GRAVÍMETRO CUÁNTICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

F Í S I C O

PRESENTA:

Efraín Ossmar Díaz Pérez

TUTOR:

Dr. Ricardo Méndez Fragoso

Ciudad de México, 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Efraín Ossmar Díaz Pérez. Ciudad de México, 2023

*Dedicado a:
Mis gatos: Chocolate, Gala, Loqui y Zant.
Los que ya no están y les prometí que lo lograría.*

*“—Hay dos especies de sabiduría: una incita a la acción, la otra la frena. ¿No crees, insigne Trurl, que la segunda es más honda? Porque sólo el pensamiento de alcance infinito puede prever las remotas consecuencias de una acción emprendida, unas consecuencias que pueden convertir en problemática la acción que las había suscitado. Ergo, la perfección puede consistir en la renuncia a la acción. Y la divergencia entre la sabiduría y la razón estriba en la capacidad de aquella para descubrir tal diferencia...”
Stanislaw Lem - Ciberiada (1965)*

Agradecimientos

Cada palabra en esta tesis ha sido construida a lo largo del tiempo desde el primer día de clases hasta el último. Esto es gracias a un gran número de personas y he aquí algunos nombres. Al Dr. Ricardo Méndez Fragoso le agradezco el conocimiento, el tiempo y la paciencia que me ha dado desde que se convirtió en mi mentor. Sin duda, sus enseñanzas son la piedra angular en mi futuro profesional.

En la licenciatura, del numeroso conjunto de asignaturas destacan tres nombres por ser inolvidables: el Dr. Alejandro Reyes Coronado cuya dinámica y valores con sus estudiantes definitivamente se queda para siempre, así como su personalidad que es un gran alivio emocional en tiempos adversos. Luego, el Dr. Angel Cecilio Sánchez que tiene la habilidad de motivar con la simple tranquilidad y emoción de sus clases. Y en tercer lugar, pero no menos importante, el Dr. Freddy Jackson Poveda Cuevas quien deja un memorable final de carrera con una excelente y amena forma de enseñar.

Así como mencioné, la construcción de estas palabras es gracias a personas que son pilares en mi formación tanto profesional como personal. La Fís. Isabel Y. Rojas Martínez, quien ha sido mi más grande amiga, le agradezco ser una excepcional y admirable compañera en este viaje desde su inicio. Los Fís. Brandon Alejandro Reyes Ferrer y Sebastián Alvarado Pérez, que al día de hoy persisten en mi cercanía, les doy gracias por ser una fuente de motivación y sobretodo por las risas infinitas. Además, Rodolfo Valdovinos y Sofía Sánchez, con quienes me encontré en la más reciente etapa de este trayecto y rápidamente se han convertido en esos amigos que quiero preservar de aquí en adelante, gracias por compartir conmigo tantos gustos y momentos.

También aquí mismo, por ser parte de esta etapa de mi vida, les agradezco a José de Jesús Falcón Vázquez, Manuel Emiliano Monreal Cancino, Xóchitl Rodríguez y Jesica González.

Y por último, las personas más cercanas a mí, quienes han estado constantemente pendiente de mi bienestar y con quienes mi deuda de gratitud es más que eterna; mi novia, Citalli Morquecho Torres, mi madre Ana Lilia Pérez Lazcano y mis hermanos Karim y Yara. Es gracias a ustedes que nunca paré de hacer lo que me gusta y con ello encontré mi camino a seguir.

También quiero agradecer el apoyo otorgado por los proyectos DGAPA-UNAM PAPIIT

IN-112721, PE-109423 y al proyecto FORDECYT 297126 “Desarrollo de Sensores Interferométricos Atómicos Basados en Tecnologías Cuánticas”.

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco teórico	5
2.1. Teoría de interferometría	6
2.1.1. Átomo de dos niveles de Rabi	6
2.1.2. Método de campos oscilantes separados de Ramsey	11
2.1.3. Análisis de cuantización de momento en interferometría atómica	11
2.2. Transiciones multifotón	15
2.2.1. Transiciones Raman estimuladas	16
3. Interferometría atómica	20
3.1. Interferometría con pulsos de luz periódicos	20
3.2. Medida del cambio de fase en presencia de campo gravitacional	25
3.2.1. Cálculo de tiro parabólico en un gradiente de campo gravitacional	26
4. Aplicaciones de un gravímetro de alta precisión	29
4.1. Modelo de capas de la Tierra	29
4.2. Modelo gravitacional de la Tierra	34
4.3. Modelo de una cavidad cercana a la superficie terrestre	35
4.3.1. Cavidad esférica	35
4.3.2. Cavidad cúbica	36
4.4. Modelo de una cavidad con gradiente de densidad	37
4.4.1. Forma rectangular	37
4.4.2. Forma esférica	38
4.4.3. Parámetros de cavidades como perturbación gravitacional	40
4.4.4. Perfiles de perturbación gravitacional	44
5. Conclusiones y discusión	48
5.1. Fuentes controladas en los errores de medición	48
5.2. Aportaciones de este trabajo	49
5.3. Perspectivas a futuro	49
Bibliografía	51

Introducción

En la búsqueda por explorar y desentrañar los conceptos fundamentales del universo y permitir el avance tecnológico, científicos se encuentran en el constante desarrollo de métodos de medida más precisos y/o exactos. Entre dichas herramientas innovadoras, los gravímetros atómicos se alzan como una pieza importante en el área de la metrología y de aplicación tecnológica de la mecánica cuántica. Primeramente demostrado por Kasevich y Chu, la interferometría atómica permite la obtención de medidas de alta sensibilidad en diferentes áreas de la metrología tal como la gravimetría [1, 2]. Como se verá a lo largo de este trabajo, este dispositivo cuenta con una alta precisión la medición de campos gravitacionales y, con ello, es posible hacer observaciones que complementan las medidas fenómenos naturales perceptibles con la tecnología de generaciones pasadas. Ejemplo de lo anterior es la capacidad de medir cambios en el campo gravitacional ocasionado por las mareas en lugares donde se cuenta con estos dispositivos [3].

La piedra angular de los gravímetros atómicos yace en la noción de que los átomos exhiben niveles de energía cuantizados y descritos por la Mecánica Cuántica. Además, ofrecen la posibilidad de proveer etiquetas adicionales para sus estados internos cuando los tiempos de medición son suficientemente largos en comparación con los tiempos de vida de los estados involucrados [4]. Dichos niveles de energía son altamente sensibles a influencias externas, incluyendo fuerzas inerciales. Como resultado, los gravímetros atómicos hacen uso de esa sensibilidad para obtener medidas de alta precisión de aceleraciones gravitacionales. El corazón de estos dispositivos es un interferómetro atómico, un sistema que emplea la naturaleza ondulatoria de los átomos para crear patrones de interferencia, análogo a los que emplean luz para producir la interferometría tradicional. La operación de un gravímetro atómico es un intrincado compás entre haces láser, campos magnéticos y cámaras de ultra alto vacío (10^{-11} Torr). Parte de estos fundamentos son la base que se explican en este trabajo.

El objetivo de esta Tesis es dar una explicación de los principios de interferometría atómica y cómo su funcionamiento es utilizado para la construcción de un gravímetro atómico. Los átomos usualmente enfriados a temperaturas cercanas al cero absoluto (límite Doppler para ^{87}Rb , $144 \mu\text{K}$), son manipulados por láseres altamente precisos que los guían por caminos específicos y modifican la fase asociada a sus estados internos.

Con éste método se construye una interferencia entre estados internos de materia, la cual puede ser usada para medir la aceleración gravitacional. Con el objetivo de observar las variaciones gravitacionales espaciales, los gravímetros deben alcanzar precisiones del orden de $20\mu Gal$ ($1 Gal = 0.01 m/s^2 = 0.001 g$) [5].

Para entrar en perspectiva, los gravímetros atómicos son capaces de detectar variaciones en la gravedad causadas por cambios en la elevación de sólo algunas decenas de centímetros, haciéndolos herramientas indispensables para la geodesia y la geofísica. Existe otro tipo de gravímetros que pueden alcanzar esta precisión como el gravímetro de cubo reflector en caída libre FG5 [6, 7] que no será discutido en este trabajo. Sin embargo, cabe mencionar que dichos dispositivos ofrecen mediciones relativas al dispositivo que se utiliza para su calibración, lo cual proporciona una de sus principales desventajas, aunque hay que aceptar que son relativamente compactos. En comparación, los gravímetros cuánticos ofrecen mediciones absolutas y hoy en día se están empezando a producir dispositivos de forma compacta y de fácil transportación.

El impacto de los gravímetros atómicos se extiende más allá de las técnicas de medida tradicionales. Estos dispositivos han permitido conducir pruebas de Física fundamental, verificando, por ejemplo, el principio de equivalencia en algunas partes por 10^8 átomos [8], piedra angular en la teoría de relatividad general de Einstein. Por otro lado, al comparar la aceleración gravitacional sobre diferentes elementos mediante un gravímetro, investigadores pueden identificar si los objetos experimentan los efectos de la gravedad de la misma forma, independientemente de su composición. Tales experimentos contribuyen a la comprensión de las bases fundamentales del universo y presentan un reto a nuestra percepción sobre la gravedad como una fuerza inmutable. En complemento con lo anterior, la medida de la gravedad tiene alta relevancia en metrología por diversas razones:

1. La definición del kilogramo, internacionalmente definida respecto a la masa de un objeto específico, el Prototipo Internacional del Kilogramo (IPK, por sus siglas en inglés). Sin embargo, esta definición traía consigo problemas debido al potencial cambio en el tiempo de la masa del IPK. La redefinición del kilogramo en 2018 está ligada a una constante fundamental de la naturaleza, la constante de Planck ($\hbar = 6.62607015 \times 10^{-34}$) expresada en unidades de $J \cdot s$ lo que es igual a $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ donde a su vez, el metro y segundo están definidos por la velocidad de la luz c y la frecuencia de transición $\Delta\nu_{Cs}$ del estado base de cesio 133 [9].

Con esto en mente, es posible ampliar los márgenes de medición al realizar medidas de la gravedad así como el desarrollo de técnicas para medir constantes fundamentales [10, 11].

2. Estandarización de medidas; Diferentes lugares en la Tierra experimentan ligeros cambios en aceleración gravitacional debidos a las variaciones en la forma, elevación y distribución de densidad. Para asegurar medidas consistentes y comparables alrededor del mundo, investigadores necesitan considerar dichas variaciones para presentar un estándar de medida usando datos gravitacionales precisos.

-
3. Estudios geofísicos; Las medidas gravitacionales son una fuente de información sobre la estructura interna de la Tierra, tal como la distribución de rocas, minerales y variación de densidad dentro del planeta. Esta información es crucial para la comprensión de los procesos geológicos, explotación de recursos, análisis de actividad sísmica y cartografía mediante gradiómetros [12].

Por otro lado, cuando el objetivo es construir un sistema que resulte en medidas de ultra-alta precisión, deben tomarse en cuenta todos aquellos factores que producen errores apreciables en la medición deseada. Algunos retos que deben ser afrontados son:

- a) Vibraciones y ruido ambiental; Los gravímetros atómicos son instrumentos altamente sensibles que pueden ser afectados por vibraciones y fluctuaciones ambientales, tales como el movimiento del suelo, vibraciones de edificios e interferencia electromagnética. Dichas perturbaciones pueden introducir ruido en la medida y afectar la precisión de los resultados [13–15].
- b) Fluctuaciones térmicas; Corrimientos en los niveles de energía de los átomos debidos a la radiación de cuerpo negro [16].
- c) Campos magnéticos inhomogéneos; En la estructura de diversos tipos de gravímetros se usan campos magnéticos para atrapar y manipular a los átomos. Inhomogeneidades o gradientes en dichos campos puede llevar a variaciones en el arreglo interferométrico y resultar en errores de medida [17].
- d) Ruido en la fase de los láseres; el uso de haces Raman retrorreflejados en interferómetros atómicos induce transiciones Raman fuera de resonancia, lo cual debe tomarse muy en cuenta para alcanzar la mejor precisión y estabilidad [18, 19].
- e) Caracterización de la nube atómica; La calidad de la nube de átomos, incluyendo su tamaño, densidad y temperatura, puede influir en la precisión de la medida. Desviaciones en las propiedades deseadas para la nube atómica pueden llevar a errores sistemáticos. Por ello para describir de mejor manera las dinámicas de las nubes en interacción con los láseres se requiere el desarrollo de nuevas herramientas teóricas para su modelización [20–22].
- f) Variaciones espaciales de la intensidad de los campos de radiación. La teoría electromagnética implementada en la descripción del gravímetro implica una idealización de las técnicas empleadas para generar los campos electromagnéticos. En la realidad aún existen imperfecciones que llevan a la presencia de las variaciones mencionadas. Para superar esto es necesario refinar la construcción de cada pieza del gravímetro reduciendo así el ruido en la medición final.

Así, este trabajo de Tesis presenta algunos aspectos importantes de la teoría detrás de la interferometría atómica empleada para la elaboración de un gravímetro cuántico. Si bien es cierto que no se es exhaustivo en la explicación de todas las partes de un gravímetro cuántico, si se describen las partes esenciales para entender su funcionamiento y el

origen de su precisión. De esta manera, este trabajo de Tesis se organiza en diferentes capítulos, de los cuales tres de ellos están dedicados a explicar el funcionamiento de la interferometría atómica detrás de un gravímetro cuántico y sus aplicaciones. Considerando el cálculo de poblaciones en transiciones atómicas estimuladas y el efecto del momento en la nube de átomos de acuerdo con una secuencia de pulsos $\pi/2 - \pi - \pi/2$. El nombre de estos pulsos y su secuencia se explicará en el Capítulo 2. Posterior a esto, en el Capítulo 3 se describe el arreglo esquemático de un interferómetro atómico en analogía con el interferómetro de Mach-Zehnder. En esta sección, se muestra el proceso necesario para calcular la fase acumulada y a su vez la relación de ésta con el campo gravitacional, concluyendo con la medición de una trayectoria parabólica de la nube atómica. Luego, se expone una de las aplicaciones de la gravimetría de alta precisión, misma que consiste en la detección de cavidades en la corteza Terrestre. Para ello, inicialmente son presentados los modelos gravitacionales de la Tierra cuya elección apropiada tendrá consecuencias en el espacio de parámetros de las posibles detecciones de cavidades. Posteriormente, se muestran los perfiles de perturbación para dos cavidades con diferentes formas, y a su vez son comparados para dar un análisis concluyente. Finalmente, en las conclusiones y discusión se hace énfasis en las aportaciones de este trabajo, así como sus potenciales aplicaciones.

Quiero terminar esta introducción remarcando el hecho de que en años recientes se han realizado avances importantes en aplicaciones de las tecnologías cuánticas a un grado que puedan tener aplicaciones en la vida cotidiana que antes eran consideradas únicamente de interés académico. Al mismo tiempo, en México se tienen diferentes grupos de investigación que se han interesado en generar una industria, por decirlo de alguna manera, alrededor de aplicaciones cuánticas. Desarrollos propios que puedan competir u obtener un lugar en la naciente industria de tecnologías cuánticas a nivel mundial. Precisamente es en ese nicho donde entra este trabajo, ya que para el desarrollo de éste me involucré con un grupo de investigación constituido por personal de diferentes instituciones llamado Grávido. Con ello, espero que esta Tesis sirva como un punto de partida en el estudio de las tecnologías cuánticas, en este caso un gravímetro cuántico, y de sus potenciales desarrollos futuros.

Marco teórico

En este capítulo serán detallados los conceptos necesarios para comprender el funcionamiento de un gravímetro mediante la construcción de un interferómetro atómico. Así, el primer paso para describir el funcionamiento de este dispositivo gravimétrico es comprender el funcionamiento de las variables involucradas para producir la interferencia. El objetivo de esta clase de sistemas es generar interferencia atómica de estados internos luego de inducir una separación espacial lograda mediante un retroceso de momento inducido por campos electromagnéticos, los cuales se usan para cambiar de estado a una fracción de los átomos involucrados, y con ello generar una superposición de estados. El preámbulo al avance teórico-experimental que hoy en día es explotado para la interferometría atómica es el desarrollo del método de campo oscilatorio separado de Ramsey, esta es la base de todo tipo de interferómetro atómico.

Así, el punto de partida fundamental de la interferometría atómica es que la luz puede ser usada para detectar el movimiento de los átomos mediante la medición de la fase entre los haces involucrados [23]. Cambios en la velocidad de las partículas son registrados como cambios en la frecuencia de resonancias atómicas debido al efecto Doppler. Para ilustrar esto, considérese un átomo de dos niveles en caída libre; la transición está preparada desde un estado hiperfino mediante un láser vertical. Para inducir de manera resonante la transición, la frecuencia del láser debe ser sintonizada para compensar el cambio de frecuencia debido al efecto Doppler inducido por la aceleración del átomo. El proceso de medición consiste en generar interferencia atómica entre estados los internos. El momento inducido en los átomos por el campo electromagnético, encargado de llevar a estos de un estado interno a otro, es lo que hace posible tener la separación espacial requerida para el proceso interferométrico.

En el límite donde el ancho de la línea de transición es lo suficientemente angosta en comparación con el cambio por efecto Doppler durante el tiempo de medida. A su vez, esta debe ser también angosta respecto a la frecuencia de Rabi característica del haz de preparación (frecuencia a la que las amplitudes de probabilidad de dos niveles de energía atómica fluctúan en un campo electromagnético oscilante). Con ello, la tasa de cambio en la compensación de la frecuencia del láser se vuelve sensible a la magnitud de la aceleración. Por lo cual, cambios pequeños en la aceleración desplazarán

la transición durante el tiempo de interrogación evitando que exista una transferencia de población de un nivel atómico a otro. Considerando lo anterior, hay desventajas del método descrito. En particular, es sensible a la velocidad inicial atómica, ya que sólo permite a una pequeña fracción de los átomos contribuir a la señal. Por otro lado, en el proceso el átomo es perturbado durante todo el tiempo de interacción mediante el campo electromagnético, es decir, se debe mantener la superposición atómica de manera directa puesto que, de otra manera, el sistema decaerá al estado de menor energía debido a la libertad de transición, esto inicialmente promovido por fluctuaciones intrínsecas de los niveles involucrados. Por lo tanto, es deseable tener un ambiente libre de perturbaciones para medidas de alta precisión. En las subsecuentes secciones veremos la forma de resolver los problemas anteriores.

2.1. Teoría de interferometría

Aquí será desarrollada la teoría para un interferómetro de pulsos de luz derivando la fórmula de Rabi, solución exacta de un átomo de dos niveles sujeto a un pulso cuadrado de radiación. Luego se muestra como dicha solución es usada para obtener expresiones para la técnica de campos oscilantes separados de Ramsey [24]. Las consideraciones en este proceso son que los grados de libertad externos como posición y momento están desacoplados de los grados de libertad internos ya que el pequeño retroceso mediante momento efectivo no causa que un átomo puesto en una superposición de estados se separe espacialmente.

Los efectos del retroceso por momento efectivo son introducidos combinando el espacio de Hilbert asociado a los grados de libertad internos con el espacio que describe las variables externas de posición y momento. Como se verá más adelante en este capítulo, para compensar la separación de los paquetes de onda debido al retroceso es naturalmente viable concluir con las secuencias de pulsos que llamaremos $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$, ó $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$. Finalmente, un nivel atómico adicional es introducido para discutir las transiciones estimuladas Raman y la transferencia adiabática entre estados base de un átomo de tres niveles. La transferencia de momento puede verse generada por la absorción y emisión estimulada de fotones, o por la interferencia del campo de polarización con los campos de preparación incidentes [25, 26].

2.1.1. Átomo de dos niveles de Rabi

El Hamiltoniano para un átomo de dos niveles acoplado a un campo electromagnético, en la ausencia de emisión espontánea, es

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| + \hbar\omega_b |b\rangle \langle b| - \vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

donde $|b\rangle$, ω_b , $|e\rangle$, ω_e indican los operadores y frecuencias de los estados base y excitado respectivamente, luego el campo electromagnético es

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos(\omega_l t + \varphi), \quad (2.2)$$

tal que $\vec{\mathbf{E}}_0$ expresa la amplitud y polarización del campo, ω_l indica la frecuencia de oscilación de la luz y φ la fase de la misma.

El término de acoplamiento de momento dipolar es $\mathcal{W}(t) = -\vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = -e\vec{r} \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$, donde \vec{r} está definido como el vector desde el núcleo del átomo hasta la posición del electrón. La evolución temporal de cualquier estado

$$|\Psi(t)\rangle = a_e(t) |e\rangle + a_b(t) |b\rangle \quad (2.3)$$

está dado por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$\hat{\mathcal{H}}(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle. \quad (2.4)$$

De esta manera, utilizando la ecuación de Schrödinger los coeficientes dependientes del tiempo obedecen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{a}_e(t) &= \hbar\omega_e a_e(t) + \mathcal{W}_{eb} a_b(t), \\ i\hbar \dot{a}_b(t) &= \mathcal{W}_{eb}^* a_e(t) + \hbar\omega_b a_b(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde

$$\mathcal{W}_{eb}(t) = \langle e | \hat{\mathcal{W}}(t) | b \rangle = \hbar\Omega \left(\frac{e^{i(\omega_l t + \varphi)} + e^{-i(\omega_l t + \varphi)}}{2} \right), \quad (2.6)$$

y la frecuencia de Rabi se define como

$$\Omega \equiv \frac{-\langle e | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_0 | b \rangle}{\hbar}. \quad (2.7)$$

Por simplicidad, se asume que la amplitud del campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}_0$ es constante cuando la luz está encendida. La oscilación rápida de $a_e(t)$ y $a_b(t)$ en las frecuencias atómicas ω_e y ω_b , respectivamente, puede ser expresada escribiendo

$$\begin{aligned} a_e(t) &= c_e(t) e^{-i\omega_e t}, \\ a_b(t) &= c_b(t) e^{-i\omega_b t}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde c_e y c_b son de variación lenta si $\Omega \ll \omega_e, \omega_b$. Sustituyendo las Ecs. (2.8) en las Ecs. (2.5) e integrando, se obtiene

$$c_e(t) = c_e(t_0) - i\Omega \int_{t_0}^t c_b(t') e^{i\omega_b t'} \left(\frac{e^{i(\omega_l t + \varphi)} + e^{-i(\omega_l t + \varphi)}}{2} \right) dt', \quad (2.9)$$

donde $\omega_{eb} \equiv \omega_e - \omega_b$. Debido a que $c_b(t')$ es una amplitud de variación lenta, el resultado de la integración del término fuera de resonancia $e^{i(\omega_{eb} + \omega_l)t'}$ será mucho más pequeño que la integral del término resonante, $e^{i(\omega_{eb} - \omega_l)t'}$. A este proceso se le llama la “Aproximación de Onda Rotante” (RWA, por sus siglas en inglés), y de aquí en adelante se considerará sólo el término resonante. Respecto a los coeficientes de variación lenta, la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\begin{aligned} i\dot{c}_e(t) &= \frac{\Omega}{2} e^{-i(\delta t + \varphi)} c_b(t) \\ i\dot{c}_b(t) &= \frac{\Omega^*}{2} e^{i(\delta t + \varphi)} c_e(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $\delta \equiv \omega_l - \omega_{eb}$ indica la sintonización. En la representación de espinores, donde $|e\rangle$ y $|g\rangle$ están dados por los espinores de estado $|+\rangle$ y $|-\rangle$, el Hamiltoniano es descrito por

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega e^{-i(\delta t + \varphi)} \\ \Omega^* e^{i(\delta t + \varphi)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Para sintonizaciones δ diferentes de cero, el Hamiltoniano que depende débilmente del tiempo puede ser transformado a un Hamiltoniano con alta dependencia temporal mediante la introducción de las variables $c_e(t) = d_e(t)e^{-i\delta t/2}$ y $c_b(t) = d_b(t)e^{i\delta t/2}$. Físicamente, esta transformación describe los estados cuánticos en términos de un marco de referencia que rota respecto al eje \hat{z} con frecuencia δ . De manera similar, la transformación previa desde la “Imagen” de Schrödinger a la de sistemas de referencia de “Interacción” puede ser vista como una transformación a un marco de referencia rotando con frecuencia ω_{eb} .

La transformación de un ket $|\Psi\rangle$ a un ket $|\Psi\rangle_R$ en un marco de referencia rotado un ángulo $-\delta t$ sobre el eje \hat{z} está dada por

$$D(\hat{z}, -\delta t) |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_R, \quad (2.12)$$

donde el operador de rotación $D(\hat{z}, -\delta t)$ tiene la representación

$$D(\hat{z}, -\delta t) \leftrightarrow e^{-i\sigma_z \delta t/2} = \begin{bmatrix} e^{i\delta t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta t/2} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

donde σ_z es una matriz de Pauli de spin.

La descripción de la ecuación de Schrödinger en el marco de referencia rotante es obtenida partiendo de la expresión

$$i\hbar \frac{d}{dt} (D^\dagger |\Psi\rangle_R) = \hat{\mathcal{H}} (D^\dagger |\Psi\rangle_R). \quad (2.14)$$

Operando por la izquierda con D , se obtiene

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle_R = \left[D \hat{\mathcal{H}} D^\dagger - i\hbar D \left(\frac{dD^\dagger}{dt} \right) \right] |\Psi\rangle_R. \quad (2.15)$$

El término entre paréntesis define $\widehat{\mathcal{H}}_R$, el cual toma la siguiente forma

$$\widehat{\mathcal{H}}_R = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} -\delta & \Omega e^{-i\varphi} \\ \Omega^* e^{i\varphi} & \delta \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Los eigenvalores del operador λ_{\pm} de $\widehat{\mathcal{H}}_R$ son

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{\hbar \Omega_r}{2}, \quad (2.17)$$

donde la frecuencia de Rabi fuera de resonancia es definida por la cantidad $\Omega_r \equiv \sqrt{|\Omega|^2 + \delta^2}$. Puesto que la fase general del estado cuántico es arbitraria, se asume que la fase inicial φ se combina con la fase de Ω para hacer real y positiva a esta última. Con ello, los eigenestados de $\widehat{\mathcal{H}}_R$ estarán dados por

$$\begin{aligned} |\lambda_+\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} |e\rangle_R e^{-i\varphi/2} + \sin \frac{\theta}{2} |b\rangle_R e^{i\varphi/2}, \\ |\lambda_-\rangle &= -\sin \frac{\theta}{2} |e\rangle_R e^{-i\varphi/2} + \cos \frac{\theta}{2} |b\rangle_R e^{i\varphi/2}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde θ está definida por las relaciones

$$\sin \theta = \frac{\Omega}{\Omega_r}, \quad \cos \theta = \frac{-\delta}{\Omega_r}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (2.19)$$

Las eigenenergías λ_{\pm} de los nuevos eigenestados $|\lambda_{\pm}\rangle$ incluyen los cambios de energía $\Delta E_{\pm} = (\lambda_{\pm} \mp \hbar|\delta|/2)$ debidos a la presencia de la luz, también llamada Efecto Stark AC. Con este tratamiento, la evolución temporal de un ket arbitrario tiene una expresión particularmente simple en la base de los nuevos eigenestados $|\lambda_{\pm}\rangle$. Supóngase que, en un tiempo t_0 , el átomo se encuentra en el estado

$$|\Psi(t_0)\rangle = c_e(t_0) |e\rangle + c_b(t_0) |b\rangle, \quad (2.20)$$

y un pulso de duración τ es aplicado. Debido a que los eigenestados están definidos en el marco de referencia rotante, lo primero es transformar el estado inicial al mismo marco de referencia mediante el operador de transformación en la Ec. (2.12). De esta manera, $|\Psi(t_0)\rangle_R$ es proyectado sobre la base de eigenestados. Las dos proyecciones evolucionan en el tiempo con sus frecuencias correspondientes. Al final del pulso, el estado del átomo en el marco rotante es

$$|\Psi(t_0 + \tau)\rangle_R = \left(e^{-i\lambda_+ \frac{\tau}{\hbar}} |\lambda_+\rangle \langle \lambda_+| + e^{-i\lambda_- \frac{\tau}{\hbar}} |\lambda_-\rangle \langle \lambda_-| \right) D(\vec{z}, -\delta t_0) |\Psi(t_0)\rangle. \quad (2.21)$$

Usando la inversa $D^{-1} = D^\dagger$ del operador de rotación mostrado en la Ec. (2.13) para expresar el vector del estado final en el esquema de interacción resulta

$$|\Psi(t_0 + \tau)\rangle = D^\dagger(\vec{z}, -\delta(t_0 + \tau)) |\Psi(t_0 + \tau)\rangle_R. \quad (2.22)$$

Combinando las Ecs. (2.21) y (2.22) con D en la Ec. (2.13), λ_{\pm} en la Ec. (2.17) y $|\lambda_{\pm}\rangle_R$ de las Ecs. (2.18),

$$c_e(t_0 + \tau) = e^{-i\delta\tau/2} \left\{ c_e(t_0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_r\tau}{2}\right) - i \cos\theta \sin\left(\frac{\Omega_r\tau}{2}\right) \right] + c_b(t_0) e^{-i(\delta t_0 + \varphi)} \left[-i \sin\theta \sin\left(\frac{\Omega_r\tau}{2}\right) \right] \right\} \quad (2.23a)$$

$$c_b(t_0 + \tau) = e^{i\delta\tau/2} \left\{ c_e(t_0) e^{i(\delta t_0 + \varphi)} \left[-i \sin\theta \sin\left(\frac{\Omega_r\tau}{2}\right) \right] + c_b(t_0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_r\tau}{2}\right) + i \cos\theta \sin\left(\frac{\Omega_r\tau}{2}\right) \right] \right\}. \quad (2.23b)$$

Las Ecs. (2.23a) y (2.23b) presentan las nuevas amplitudes de probabilidad después de un tiempo τ de ambos estados atómicos cuando el acoplamiento electromagnético es de amplitud constante. Dichas ecuaciones, en el esquema de interacción, son equivalentes a las Ecs. de Ramsey en el esquema de Schrödinger.

En ausencia del campo aplicado, $\Omega_r = |\delta|$, $\cos\theta = -\delta/|\delta|$ y $\sin\theta = 0$, por lo cual, las Ecs. (2.23a) y (2.23b) se reducen a la forma

$$\begin{aligned} c_e(t_0 + \tau) &= c_e(t_0) e^{-i\delta\tau/2} [\cos(|\delta|\tau/2) + i(\delta/|\delta|) \sin(|\delta|\tau/2)] = c_e(t_0) \\ c_b(t_0 + \tau) &= c_b(t_0) e^{i\delta\tau/2} [\cos(|\delta|\tau/2) - i(\delta/|\delta|) \sin(|\delta|\tau/2)] = c_b(t_0). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Lo anterior es debido a que las eigenenergías originales de los estados $|b\rangle$ y $|e\rangle$ ya han sido factorizadas en el esquema de interacción las frecuencias libres de precesión no aparecen en las Ecs. (2.24).

Otro ejemplo de las Ecs. (2.23) es considerar la aplicación de luz resonante con la transición ($\delta = 0$) a un átomo cuyo estado inicial es $|b\rangle$ a un tiempo t_0 . Considerando que $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$, $c_e(0) = 0$ y $c_b(0) = 1$, la Ec. (2.23a) se reduce a

$$c_e(\tau) = -i \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) e^{-i\varphi} \quad (2.25)$$

y la probabilidad de encontrar al átomo en el estado $|e\rangle$ es

$$|c_e(\tau)|^2 = \frac{1}{2} [1 - \cos\Omega\tau] \quad (2.26)$$

Así, el átomo oscila de forma *Rabi* entre $|b\rangle$ y $|e\rangle$ con frecuencia Ω , en congruencia con la definición de la frecuencia de Rabi dada por la Ec. (2.7). Si el campo aplicado se sale del margen de resonancia, la frecuencia de población se modifica a la cantidad Ω_r con la diferencia que el átomo no puede pasar al estado $|e\rangle$ con probabilidad unitaria.

2.1.2. Método de campos oscilantes separados de Ramsey

La teoría discutida previamente es la base para el primer ejemplo de interferometría atómica, introducida por Ramsey en 1950, y la cual es de utilidad para comprender el funcionamiento de los interferómetros actuales. Considérese un átomo con estado inicial $|b\rangle$, tal que $c_e(0) = 0$ y $c_b(0) = 1$. Luego de aplicar un pulso de excitación “ $\pi/2$ ”, es decir, un pulso cuya duración τ está definida por $\Omega_r\tau = \pi/2$, las Ecs. (2.23a) y (2.23b) resultan en las amplitudes de probabilidad

$$\begin{aligned} c_e(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\delta\tau/2}e^{-i\varphi}(-i\sin\theta), \\ c_b(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta\tau/2}(1+i\cos\theta). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Lo siguiente es apagar el campo de acoplamiento durante un tiempo T , durante el cual, las amplitudes de probabilidad del esquema de interacción permanecen sin cambio alguno de acuerdo a las Ecs. (2.24). Entonces, en un tiempo $\tau + T$, otro pulso $\pi/2$ es aplicado. De esta manera con un análisis final de las Ecs. (2.23a) y (2.23b) el resultado es

$$c_e(2\tau + T) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\delta\tau/2} \left[c_e(\tau)(1 - i\cos\theta) + c_b(\tau)e^{-i[\delta(\tau+T)+\varphi]} \right]. \quad (2.28)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.27) en la Ec. (2.28) resulta en

$$c_e(2\tau + T) = -i\sin\theta \left[\cos\left(\frac{\delta T}{2}\right) + \cos\theta \sin\left(\frac{\delta T}{2}\right) \right] e^{-i\delta T/2} e^{-i(\delta\tau+\varphi)}. \quad (2.29)$$

Así, la probabilidad de encontrar al átomo en $|e\rangle$ es

$$|c_e(2\tau + T)|^2 = \sin^2\theta \left[\cos\left(\frac{\delta T}{2}\right) + \cos\theta \sin\left(\frac{\delta T}{2}\right) \right]^2. \quad (2.30)$$

Si el láser es sintonizado cerca de la resonancia con $|\delta| \ll \Omega$, entonces $\cos\theta \simeq 0$, $\sin\theta \simeq 1$ y la población en el estado excitado oscilará de la forma

$$|c_e(2\tau + T)|^2 = \frac{1}{2}[1 + \cos(\delta T)]. \quad (2.31)$$

Puede notarse que la técnica de Ramsey presenta una “línea de resonancia” angosta, de ancho $\delta_{FWHM} = \pi/T$ así como una ambigüedad de módulo 2π .

2.1.3. Análisis de cuantización de momento en interferometría atómica

El formalismo presentado anteriormente fue desarrollado originalmente para escalas de excitación en radiofrecuencia y microondas. Si se requiere extender la técnica de Ramsey al dominio óptico, ambos aspectos, la extensión espacial de la fuente atómica y el

esparcimiento del momento transversal presentan problemas. En el campo de radiación existe una separación sub-micrométrica de los frentes de onda. Por otro lado, los haces de átomos típicos tienen una distribución suficientemente amplia de momento transversal, lo cual induce a que los átomos interactúen con diferentes fases relativas en regiones separadas del campo. Además, una fuente atómica con temperaturas bajas puede contener átomos cuya longitud de onda de *De Broglie* excede la escala óptica. Para este caso, la aproximación semi clásica pierde validez por lo que hablar de la “posición del átomo” relativa a una cresta particular de la onda incidente carece de sentido. Un enfoque para analizar interferómetros atómicos es considerar de manera explícita la propagación de paquetes de onda espaciales. En dicho enfoque, los cambios de fase interferométricos son calculados usando un conjunto de reglas que involucran los puntos de interacción átomo-luz y el tiempo de propagación libre en el espacio. Sin embargo, en vez de implementar la descripción de propagación espacial de paquetes de onda, es posible iniciar con un tratamiento cuántico donde dichos paquetes de onda son vistos como ondas planas. La transferencia de momento debida a la interacción del campo electromagnético es calculada para una componente dada de la onda plana, y la integral sobre todos los estados de momento en el ensamble atómico es obtenida al final. En esta base, cada estado atómico es descrito en términos de un producto tensorial entre el espacio de Hilbert que describe la energía interna del átomo y el espacio de Hilbert correspondiente a los grados de libertad externos

$$\begin{aligned} |e, \vec{p}_e\rangle &= |e\rangle \otimes |\vec{p}_e\rangle, \\ |b, \vec{p}_b\rangle &= |b\rangle \otimes |\vec{p}_b\rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Así, el Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| - \vec{d} \cdot \vec{E} \quad (2.33)$$

donde $\hat{\vec{p}}$ opera sobre la parte del momento en la base de estados. El término de interacción es modificado para incluir la dependencia espacial del campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi). \quad (2.34)$$

El nuevo término del operador de campo eléctrico, $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ puede ser reescrito con la relación de completitud

$$\begin{aligned} \mathbb{1} \cdot e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{x}} &= \int d^3\vec{p} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| \\ &= \int d^3\vec{p} |\vec{p} \pm \hbar\vec{k}\rangle\langle\vec{p}|. \end{aligned} \quad (2.35)$$

La dependencia espacial del campo eléctrico proyectada sobre la base de momentos se traduce en la absorción, o emisión, de un fotón con vector de onda \vec{k} que cambia el

momento total del átomo por una cantidad $\hbar\vec{k}$. Esta correspondencia uno a uno entre los grados de libertad internos y externos implica que la base de estados se simplifica a $|b, \vec{p}\rangle$ y $|e, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle$.

La evolución temporal de los ket's de cada estado puede reescribirse en términos de los coeficientes que varían lentamente $c_{e, \vec{p} + \hbar\vec{k}}(t)$ y $c_{b, \vec{p}}(t)$

$$|\Psi(t)\rangle = c_{e, \vec{p} + \hbar\vec{k}}(t) |e, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle e^{-i\left(\omega_e + \frac{|\vec{p} + \hbar\vec{k}|^2}{2m\hbar}\right)t} + c_{b, \vec{p}}(t) |b, \vec{p}\rangle e^{-i\left(\omega_b + \frac{|\vec{p}|^2}{2m\hbar}\right)t}. \quad (2.36)$$

Con esto, el desentonamiento obtiene términos adicionales

$$\delta = \omega_l - \left(\omega_{eb} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{k}}{m} + \frac{\hbar|\vec{k}|^2}{2m} \right) \quad (2.37)$$

que corresponden al efecto Doppler $\frac{\vec{p} \cdot \vec{k}}{m}$, y al corrimiento por retroceso de los fotones incidentes, $\frac{\hbar|\vec{k}|^2}{2m}$.

Cuando un fotón de momento $\hbar\vec{k}$ pone un átomo en una superposición coherente de dos estados de energía, el retroceso causará que las partes del átomo, cada una en uno de sus estados internos $|b\rangle$ y $|e\rangle$ sean separadas con una velocidad $\vec{v}_r = \hbar\vec{k}/m$. Si se usan fotones ópticos, el retroceso puede alcanzar hasta una distancia de 1 *cm*. Con este efecto presente, debe tomarse en cuenta que la interferencia no será observada a menos que las partes separadas durante el primer pulso $\pi/2$ sean recombinadas en un tiempo posterior.

La secuencia de pulsos más simple para construir un interferómetro es $\pi/2 - \pi - \pi/2$, demostrada por Kasevich y Chu en 1991, [1]. Si el momento del átomo es tal que se encuentra en resonancia con el campo de interacción, el primer pulso $\pi/2$ actúa como un divisor de haz, con la velocidad \vec{v}_r mencionada previamente. Luego de un tiempo T , el pulso π funciona como un espejo y dirige los paquetes de onda de tal manera que se superpongan al tiempo $2T$.

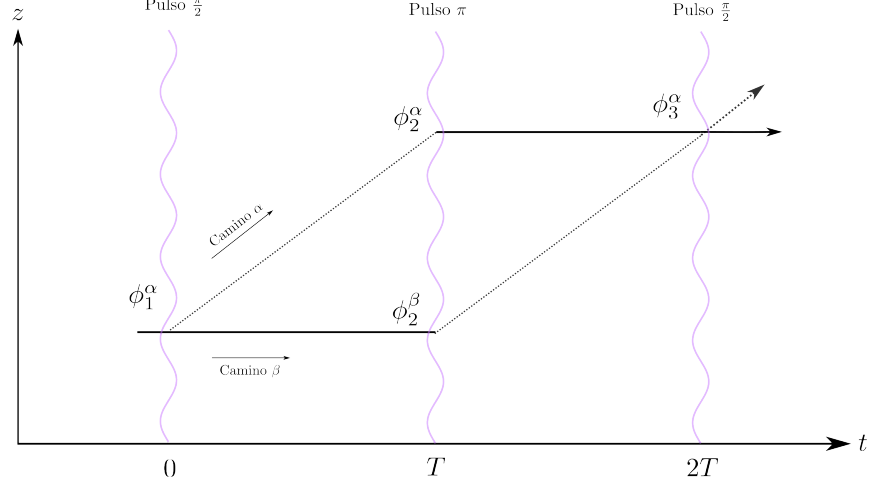


Figura 2.1: Diagrama de la secuencia de pulsos para el interferómetro atómico más simple. El eje vertical indica la posición en el eje z del átomo relativa a un marco de referencia. En este caso no se considera el campo gravitacional como se verá en el siguiente capítulo.

Las Ecs. (2.23a) y (2.23b) se emplean para analizar la secuencia de pulsos $\pi/2 - \pi - \pi/2$, misma que se muestra en la Figura 2.1. Por simplicidad, se considera $|\delta| \ll \Omega_r$, tal que $\cos \theta \simeq 0$ y $\sin \theta \simeq 1$. También se considera que Ω_r es la misma para los tres pulsos. Consecuentemente, si τ es la duración del pulso π , entonces los pulsos $\pi/2$ tendrán una duración $\tau/2$. Primeramente, las Ecs. (2.23a) y (2.23b) son simplificadas para el caso específico de un pulso π de duración τ

$$\begin{aligned} c_e(t_0 + \tau) &= -ic_b(t_0)e^{-i\delta\tau/2}e^{-i(\delta t_0 + \varphi)} \\ c_b(t_0 + \tau) &= -ic_e(t_0)e^{i\delta\tau/2}e^{i(\delta t_0 + \varphi)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

y para un pulso $\pi/2$ de duración $\tau/2$

$$\begin{aligned} c_e(t_0 + \tau/2) &= \frac{e^{-i\delta\tau/4}}{\sqrt{2}} \left[c_e(t_0) - ic_b(t_0)e^{-i(\delta t_0 + \varphi)} \right] \\ c_b(t_0 + \tau/2) &= \frac{e^{i\delta\tau/4}}{\sqrt{2}} \left[-ic_e(t_0)e^{i(\delta t_0 + \varphi)} + c_b(t_0) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Así, considérese un átomo que inicialmente se encuentra en $|b, \vec{p}\rangle$. El aspecto más importante en la interferometría con pulsos de luz en átomos es la fase de dichos átomos relativa a los campos involucrados. Se ha supuesto que el desentonamiento δ es constante en toda la secuencia de pulsos y la fase φ puede variar en cada pulso. Con esto en mente, la aplicación sucesiva de las Ecs. (2.38) y (2.39) para un pulso $\pi/2$ en un tiempo

t_1 , un pulso π al tiempo $t_2 = T + \tau/2 + t_1$ y un pulso $\pi/2$ en el tiempo $t_3 = 2T + 3\tau/2 + t_1$ resulta en la amplitud de probabilidad

$$c_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}}(t_3 + \tau/2) = -\frac{i}{2} e^{-i\delta\tau/2} e^{-i[\delta t_2 + \varphi(t_2)]} \left(1 - e^{i\delta\tau/2} e^{-i\Delta\varphi}\right), \quad (2.40)$$

donde

$$\Delta\varphi = \varphi(t_1) - 2\varphi(t_2) + \varphi(t_3). \quad (2.41)$$

Para cada tiempo t_i , $\varphi(t_i)$ es la fase de la luz relativa al átomo y a su vez la fase respectiva en un tiempo fijo como referencia. De esta forma, la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado es

$$|c_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}}(2T + 2\tau)|^2 = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Delta\varphi - \delta\tau/2)]. \quad (2.42)$$

De este resultado debe notarse que la suma de la fase, Ec. (2.41), no es una función del momento; átomos en diferentes estados de momento contribuirán de manera coherente a la señal de interferencia. Como consecuencia, el cambio de fase de una suma coherente sobre una cantidad de estados de momento será dado de igual manera por esta ecuación. Para los tiempos de los pulsos mencionados aquí, si se tiene un desentonamiento δ constante, y además de que la fase de los pulsos no cambia, entonces $\Delta\varphi = \delta\tau/2$, y de acuerdo a la Ec. (2.42), el átomo se hallará en el estado base al final del último pulso. Esta consideración es el proceso para tener una modulación de la población atómica en los diferentes estados mediante el cambio deliberado en la fase de los pulsos relativa a los átomos. A su vez, este efecto es la base para determinar medidas de fuerzas inerciales.

2.2. Transiciones multifotón

La implementación de las técnicas precedentes mediante pulsos requiere de un esquema de niveles atómicos donde el estado excitado es estable respecto al decaimiento radiactivo en la duración de la secuencia de pulsos. Con fuentes resultantes de enfriamiento láser, dicho tiempo puede alcanzar a ser de 1 s. Para el Cesio (Cs), el estado base hiperfino en la transición común de relojes atómicos $|F = 3, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ cumple con los requisitos mencionados. Además, la transición es poco sensible a campos magnéticos por lo que es factible su aislamiento de las perturbaciones externas. La sensibilidad al efecto Doppler de la transición monofotónica en radiofrecuencia que conecta los niveles mencionados es de sólo $\Delta\omega_D = (\nu/c)\omega_{eb}$, lo que corresponde a un desfase Doppler de 0.3 Hz para un átomo en movimiento con velocidad $v = 1 \text{ cm/s}$. Una sensibilidad considerablemente alta puede ser alcanzada mediante la inducción de transiciones Raman estimuladas de dos fotones entre esos niveles. Considérese un átomo de tres niveles como se muestra en la Figura 2.2. Este consiste en dos niveles hiperfinos del estado base con una separación ω_{eb} en radiofrecuencia, acoplados mediante transiciones ópticas a un estado $|i\rangle$. En principio se tiene una preparación inicial del átomo en

el estado $|b\rangle$. Dos haces contra-propagantes de frecuencias ω_1 y ω_2 inducen transiciones Raman al estado $|e\rangle$ si $\omega_1 - \omega_2 - \Delta\omega_D \simeq \omega_{eb}$ donde $\Delta\omega_D = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{v}$. Los haces, al ser de forma contrapropagante, resultan tener un factor $\Delta\omega_D \simeq 2\vec{k}_1 \cdot \vec{v}$ que proporciona una transición con una sensibilidad del doble a la observable en comparación con la transición óptica monofotónica.

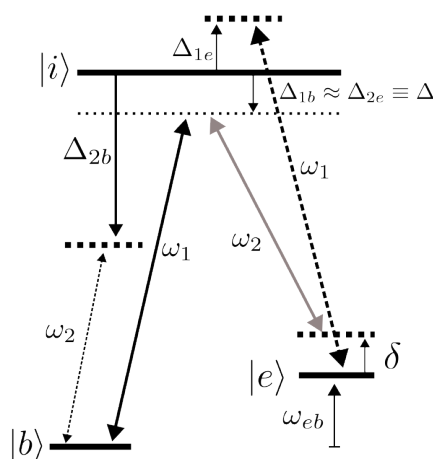


Figura 2.2: Átomo de tres niveles. Dos frecuencias ω_1 y ω_2 acoplan los estados $|b\rangle$ y $|e\rangle$ mediante un estado intermedio $|i\rangle$. Los desentonamientos de uno y dos fotones son Δ y δ , respectivamente. Se muestra además aquellos desfases adicionales por efecto Stark causados por la interacción de ω_1 y ω_2 con los niveles “incorrectos”, indicados por las líneas punteadas.

En este caso, no es necesario involucrar haces ultraestables para lograr un régimen libre de alta sensibilidad al efecto Doppler; sólo basta que la diferencia de frecuencias $\omega_1 - \omega_2$ tenga coherencia de fase con la transición en radiofrecuencia durante el tiempo de interrogación.

2.2.1. Transiciones Raman estimuladas

Para dar una descripción precisa de la modulación de población es necesario presentar la teoría de transiciones Raman de dos fotones sensibles a la velocidad. Así pues, los resultados más importantes de esta sección son:

1. En ciertos regímenes el sistema de tres niveles puede ser visto como uno de dos niveles acoplado con una frecuencia de Rabi efectiva dada por la tasa de transición entre los estados.

2. El estado interno del átomo está correlacionado con su momento.
3. La excitación Raman de dos fotones puede ser modelada mediante una onda viajera de frecuencia $\omega_1 - \omega_2 \simeq \omega_{eb}$ y un vector de propagación efectivo $\vec{k}_{ef} \equiv \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \approx 2\vec{k}_1$ cuando los haces son contrapropagantes.

La consideración clave en la siguiente descripción es que la desintonía de las frecuencias ω_1 y ω_2 desde la resonancia óptica es suficientemente grande tal que la emisión espontánea del nivel intermedio $|i\rangle$ pueda ser despreciada. Cuando el desentonamiento es amplio respecto al nivel intermedio, dicho nivel puede ser eliminado adiabáticamente de las ecuaciones en el esquema de interacción de Schrödinger, y la dinámica del sistema de tres niveles es reducida a su análogo de dos niveles.

El Hamiltoniano para el sistema de tres niveles es

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_i |i\rangle\langle i| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| - \vec{d} \cdot \vec{E}. \quad (2.43)$$

En este caso, el campo eléctrico contiene dos componentes en frecuencia

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega_1 t + \varphi_1) + \vec{E}_2 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.44)$$

Las frecuencias $\omega_1 \simeq \omega_i - \omega_b$ y $\omega_2 \simeq \omega_i - \omega_e$, mientras que la diferencia de frecuencia es $\omega_1 - \omega_2 \simeq \omega_{eb}$. Cuando los haces son contrapropagantes $\vec{k}_1 \simeq -\vec{k}_2$. Se ha despreciado de manera explícita la emisión espontánea de las excitaciones fuera de resonancia de la transición óptica.

De acuerdo al procedimiento seguido en la Sección 2.1.1 y a los coeficientes de amplitud de probabilidad en el esquema de interacción Ec. (2.36), sumando a estos un coeficiente para el nivel intermedio correspondiente $|i, \vec{p} + \hbar\vec{k}_1\rangle$ puede obtenerse un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden para $c_{b, \vec{p}}$, $c_{i, \vec{p} + \hbar\vec{k}_1}$ y $c_{e, \vec{p} + \hbar\vec{k}_{ef}}$. En el límite donde los desentonamientos $\omega_1 - (\omega_i - \omega_b)$ y $\omega_2 - (\omega_i - \omega_e)$ son mucho más grandes que las frecuencias de Rabi, los coeficientes $c(t)$ varían lentamente comparados con los términos con dependencia temporal explícita. Por lo tanto, puede eliminarse de forma adiabática todos los coeficientes para el estado intermedio. Así, se obtienen ecuaciones acopladas para un sistema de dos niveles en un campo de inducción externo. En la representación de espinores para $|e, \vec{p} + \hbar\vec{k}_{ef}\rangle$ y $|b, \vec{p}\rangle$, el Hamiltoniano que describe esta evolución temporal es

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar \begin{pmatrix} \Omega_e^{AC} & \frac{\Omega_{ef}}{2} e^{-i(\delta_{12}t + \varphi_{ef})} \\ \frac{\Omega_{ef}}{2} e^{i(\delta_{12}t + \varphi_{ef})} & \Omega_b^{AC} \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

donde se define

$$\Omega_e^{AC} \equiv \frac{|\Omega_e|^2}{4\Delta}, \quad \Omega_b^{AC} \equiv \frac{|\Omega_b|^2}{4\Delta}, \quad (2.46)$$

$$\delta_{12} \equiv (\omega_1 - \omega_2) - \left(\omega_{eb} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{k}_{ef}}{m} + \frac{\hbar |\vec{k}_{ef}|^2}{2m} \right), \quad (2.47)$$

$$\Omega_e \equiv -\frac{\langle i | \vec{d} \cdot \vec{E}_2 | e \rangle}{\hbar}, \quad \Omega_b \equiv -\frac{\langle i | \vec{d} \cdot \vec{E}_1 | b \rangle}{\hbar}, \quad (2.48)$$

$$\Omega_{ef} \equiv e^{-i\varphi_{ef}} \equiv \frac{\Omega_e^* \Omega_b}{2\Delta} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (2.49)$$

con el valor real de φ_{ef} elegido para hacer que Ω_{ef} sea un número real positivo. Aquí $\Delta \simeq \omega_1 - (\omega_i - \omega_b)$ es el desentonamiento de la resonancia óptica como se muestra en la Figura 2.2. El momento de retroceso surge de forma explícita en la correlación uno a uno entre el estado interno del átomo y su momento para los dos estados $|e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_{ef}\rangle$ y $|b, \vec{p}\rangle$ acoplados por el Hamiltoniano, y la dinámica del sistema es gobernada por la diferencia de frecuencia $\omega_1 - \omega_2$. El desentonamiento efectivo δ_{12} de la resonancia Raman contiene los términos de cambio de fase debidos al efecto Doppler y el momento de retroceso. El Hamiltoniano en la Ec. (2.45) es similar en forma al de la Ec. (2.11) para un sistema de dos niveles, excepto por los términos de efecto Stark en la diagonal principal. Dado un paso adicional, es posible transformarlo en un Hamiltoniano dependiente del tiempo en la forma exacta de $\hat{\mathcal{H}}_R$ en la Ec. (2.16) tal que la solución del mismo, Ecs. (2.23a) y (2.23b), puede ser aplicada directamente.

El paso adicional mencionado consiste en hacer una traslación uniforme en la escala de energía por un factor $-\hbar(\Omega_e^{AC} + \Omega_b^{AC})/2$. Esto es lo que antisimetriza los elementos de la diagonal principal en las cantidades $\pm \hbar \delta^{AC}/2$, donde $\delta^{AC} \equiv (\Omega_e^{AC} - \Omega_b^{AC})$, las cuales pueden ser combinadas con los términos $\mp \hbar \delta_{12}/2$ que surgen en la transformación al marco de referencia rotante. Luego de obtener las soluciones de las Ecs. (2.23a) y (2.23b), las energías son trasladadas de vuelta al multiplicar ambos coeficientes por un factor $e^{-i(\Omega_e^{AC} + \Omega_b^{AC})\tau/2}$. La solución para este sistema equivalente de dos niveles considerando efecto Stark es

$$c_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_{ef}}(t_0 + \tau) = e^{-i(\Omega_e^{AC} + \Omega_b^{AC})\tau/2} e^{-i\delta_{12}\tau/2} \left\{ c_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_{ef}}(t_0) \left[\cos\left(\frac{\Omega'_r \tau}{2}\right) - i \cos \theta \sin\left(\frac{\Omega'_r \tau}{2}\right) \right] + c_{b, \vec{p}}(t_0) e^{-i(\delta_{12}t_0 + \varphi_{ef})} \left[-i \sin \theta \sin\left(\frac{\Omega'_r \tau}{2}\right) \right] \right\}, \quad (2.50a)$$

$$c_b(t_0 + \tau) = e^{-i(\Omega_e^{AC} + \Omega_b^{AC})\tau/2} e^{i\delta_{12}\tau/2} \left\{ c_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_{ef}}(t_0) e^{i(\delta_{12}t_0 + \varphi_{ef})} \left[-i \sin \theta \sin\left(\frac{\Omega'_r \tau}{2}\right) \right] + c_b(t_0) \left[\cos\left(\frac{\Omega'_r \tau}{2}\right) + i \cos \theta \sin\left(\frac{\Omega'_r \tau}{2}\right) \right] \right\}, \quad (2.50b)$$

donde las cantidades que describen la evolución temporal en el marco de referencia rotante,

$$\Omega'_r \equiv \sqrt{\Omega_{ef}^2 + (\delta_{12} - \delta^{AC})^2}, \quad (2.51)$$

$$\sin \theta = \frac{\Omega_{ef}}{\Omega'_r}, \quad \cos \theta = -\frac{\delta_{12} - \delta^{AC}}{\Omega'_r}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (2.52)$$

son definidas en términos del desentonamiento corregido para el efecto Stark, mientras que los términos $e^{\pm i\delta_{12}\tau/2}$ y $e^{\pm i\delta_{12}t_0}$ que surgen al transformar los coeficientes al marco rotante, usan el desentonamiento principal δ_{12} . Las otras sustituciones para cambiar de excitaciones monofotónicas a bifotónicas son inmediatas; por ejemplo, basta con cambiar las cantidades $\vec{k} \rightarrow \vec{k}_{ef}$ para el vector de propagación y $\varphi \rightarrow \varphi_{ef}$ para la fase del láser.

Para concluir este Capítulo hay que recalcar que se pueden manipular las poblaciones de los estados utilizando pulsos láser. Esto se ve reflejado en que podemos invertir la poblaciones con un pulso que llamaremos π , Ec. (2.38), o dividir la nube en dos estados con un pulso que llamaremos $\pi/2$, Ec. (2.39). Con esto último se logra poner a los átomos en una superposición con poblaciones iguales en dos estados. Adicional a lo anterior hay que tomar en cuenta el cambio de momento que sufren los átomos por la interacción con la luz, pero como veremos más adelante hay manera de cancelar este efecto con la correcta secuencia de pulsos y al mismo tiempo realizar el proceso de interferometría. Estos pulsos son esenciales para realizar el proceso interferometría que se verá en el siguiente Capítulo.

Interferometría atómica

Hoy en día, el entendimiento y el control preciso de sistemas cuánticos nos ha permitido generar nuevas tecnologías. De hecho, a estos avances recientes en el desarrollo de dispositivos se le ha llamado la segunda revolución cuántica, debido a que ha llevado al terreno de aplicaciones prácticas muchos de los descubrimientos y experimentos que hace unas décadas se consideraban como meras curiosidades académicas [27]. Ejemplos de lo anterior se pueden ver en los avances de la metrología, donde ahora se tienen patrones de medición que no dependen de algún artefacto físico, sino de constantes universales de la naturaleza y el proceso de cómo medirlas [28]. En este capítulo explicaremos el experimento central que hay detrás de la producción de un gravímetro cuántico.

3.1. Interferometría con pulsos de luz periódicos

El proceso de interferometría atómica es muy similar al proceso equivalente en óptica, pero en lugar de utilizar luz se utiliza el camino que recorren los estados atómicos. Para ilustrar lo anterior explicaré brevemente el caso más cercano de interferometría tipo Mach–Zehnder con luz. El funcionamiento básico de este, es tener un haz de luz que pasa por un divisor de haz. Esto produce dos haces que rebotan en un espejo cada uno con la finalidad de que se recombinen en un segundo divisor de haz. Se ajusta el camino óptico de cada uno de los haces para que tengan el mismo recorrido y si estos tienen la misma cantidad de camino óptico no se ve ningún patrón de interferencia. Posteriormente, en uno de los caminos del interferómetro se coloca una muestra que deje pasar la luz. Debido a que la luz interactúa con un medio con distinto índice de refracción hay un cambio de camino óptico que produce un patrón de interferencia en el detector. Lo anterior se debe a que se introduce un cambio de fase respecto al haz original sin la muestra como se observa en la Figura 3.1.

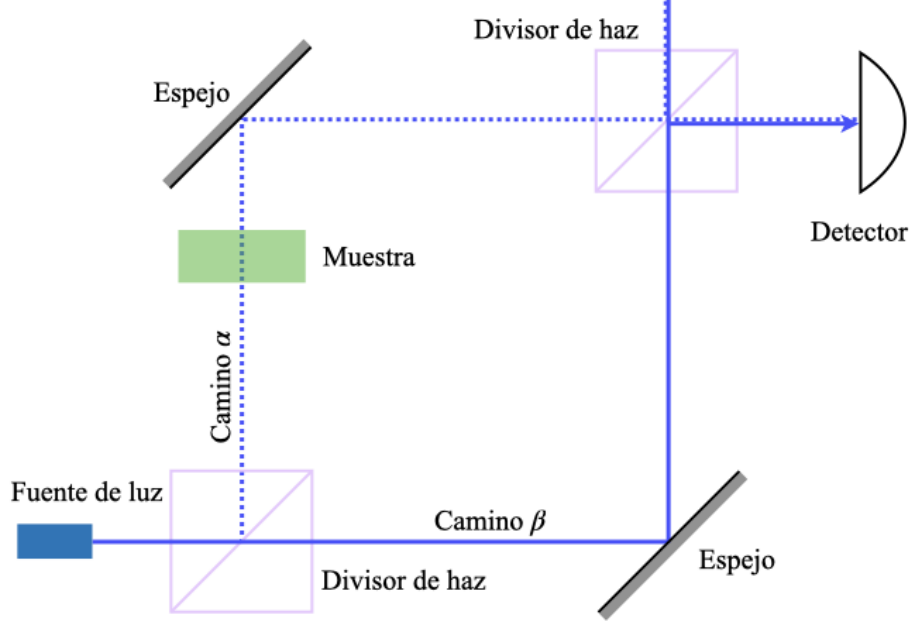


Figura 3.1: Esquema del interferómetro óptico tipo Mach-Zehnder.

Veamos ahora el caso de interferometría con átomos. Primero que nada hay que tomar en cuenta que la interacción de la luz con átomos tiene como consecuencia que éstos reciben un cambio de momento, además de los cambios en sus estados internos que tienen que considerarse para realizar la interferometría. El hecho anterior que se explica en el capítulo anterior se resume en la Tabla 3.1.

	Estado interno	Momento	Factor de fase ϕ_i
Transiciones de 1 fotón	$a \rightarrow b$	$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + \hbar\vec{k}$	$+(k_i z - \omega t_i - \phi) + \frac{\pi}{2}$
	$b \rightarrow b$	$\vec{p} + \hbar\vec{k} \rightarrow \vec{p}$	$-(k_i z - \omega t_i - \phi) + \frac{\pi}{2}$
	$a \rightarrow a$	$\vec{p} \rightarrow \vec{p}$	0
	$b \rightarrow b$	$\vec{p} + \hbar\vec{k} \rightarrow \vec{p} + \hbar\vec{k}$	0
Transiciones Raman	$a \rightarrow b$	$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + \hbar\vec{k}_{ef}$	$\phi_p^{ac} + (k_{ef} z_i - \omega_{ef} t_i - \phi_{ef}) + \frac{\pi}{2}$
	$b \rightarrow b$	$\vec{p} + \hbar\vec{k}_{ef} \rightarrow \vec{p}$	$\phi_p^{ac} - (k_{ef} z_i - \omega_{ef} t_i - \phi_{ef}) + \frac{\pi}{2}$
	$a \rightarrow a$	$\vec{p} \rightarrow \vec{p}$	$\phi_p^{ac} - \frac{1}{2}\phi_{dif}^{ac}$
	$b \rightarrow b$	$\vec{p} + \hbar\vec{k}_{ef} \rightarrow \vec{p} + \hbar\vec{k}_{ef}$	$\phi_p^{ac} + \frac{1}{2}\phi_{dif}^{ac}$

Tabla 3.1: Factores de fase en la interacción de los átomos con los haces de luz.

Para ello hay que considerar una nube de átomos que pueden colocarse en una superposición de estados y que no pueden decaer uno en el otro como los que se vieron en el Capítulo anterior. Primero consideremos que una nube de átomos es preparada en una trampa magneto-óptica. Dentro de ésta, la nube es impulsada desde una altura z_0 para comenzar el proceso de interferometría. Cabe mencionar que en este punto todos los átomos están en el mismo estado $|1\rangle$ y tienen momento p . Enseguida a este proceso, la nube es iluminada con un haz, llamado pulso $\pi/2$, que pone a la mitad de los átomos en otro estado interno $|2\rangle$ creando una superposición de estados, y además éstos últimos adquieren una cantidad extra de momento $p + \hbar k_{ef}$. Nótese que en este momento ya se tienen dos nubes correlacionadas como al inicio del interferómetro Mach–Zehnder. Posteriormente, a un tiempo T se utiliza otro pulso, llamado π , con la finalidad de invertir las poblaciones de los estados y momentos. La forma de actuar de este pulso es equivalente a los espejos en el interferómetro. Finalmente, en un tiempo $2T$ se utiliza otro pulso $\pi/2$ con la finalidad de recombinar ambas poblaciones. A lo largo de este proceso cada estado tuvo una interacción diferente con el campo gravitacional y ello produce que al momento de recombinar los estados se acumule una fase total. El resultado de esta técnica puede observarse en la Figura 3.2, donde es usada una secuencia de tres pulsos para dividir, reflejar y recombinar los estados de los átomos al cambiar sus estado internos. La fase antes mencionada tiene una dependencia gravitacional que se explicará más adelante en este capítulo. El hecho es tener un sistema con el que se pueda hacer interferometría como parte principal en el funcionamiento del gravímetro. De esta manera, la meta en cada medición es identificar la fase resultante al término de cada ciclo.

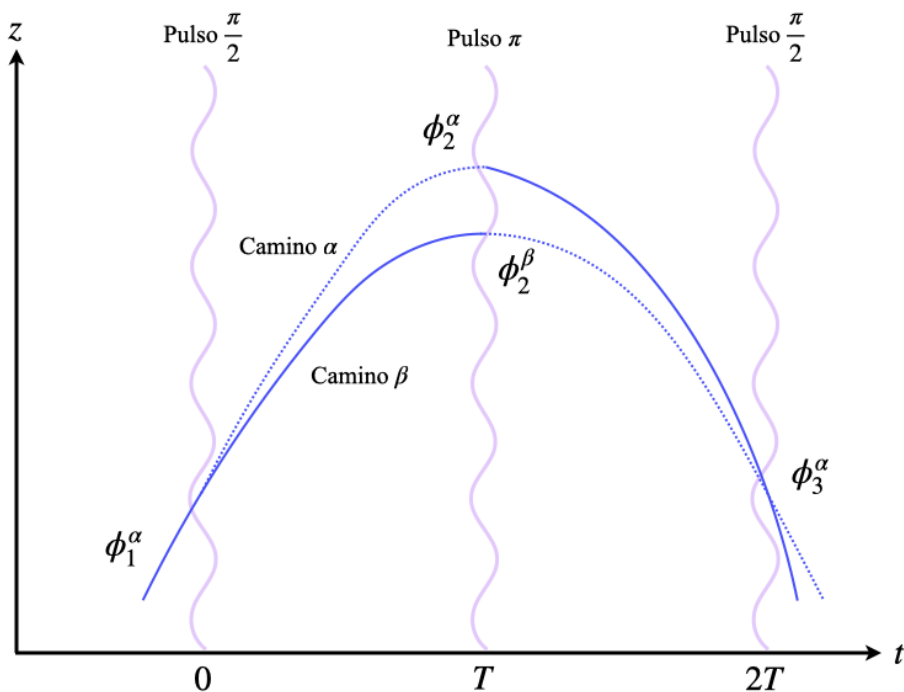


Figura 3.2: Esquema del proceso interferométrico con átomos que son lanzados hacia arriba en un tiro parabólico en una superposición de estados con un pulso $\pi/2$, a la mitad del trayecto intercambian sus estados con un pulso π , y finalmente se recombinan con un pulso $\pi/2$.

Cabe destacar que la analogía con el interferómetro de Mach-Zehnder es muy clara en cada uno de los pasos, pero en el caso de los átomos se manipulan sus estados internos y cantidad de movimiento. Así mismo, el campo gravitacional actúa como la muestra sobre la cual se quiere obtener una fase al final del proceso. Si bien es cierto que el campo gravitacional actúa sobre ambos caminos, el punto clave es que los pulsos actúan en diferentes momentos sobre cada una de las componentes o estados. Si no hubiese campo gravitacional, los átomos seguirían un movimiento rectilíneo uniforme y al momento de realizar la recombinación no habría una fase total acumulada. De hecho, como puede observarse en cada uno de los tiempos donde se lanzan los pulsos las nubes quedan con un momento diferente, pero al final del proceso estos cambios se cancelan con la finalidad de medir la fase total acumulada que se explicará un poco más adelante en este capítulo.

Otro punto a notar, es el hecho de que en el sentido estricto no se necesita que los átomos sean lanzados hacia arriba a manera de tiro parabólico. De hecho, el objetivo principal es que se tengan dos caminos y que a lo largo su trayectoria se haga una división de los estados, inviertan sus poblaciones y finalmente se recombinen, y que en todo momento estén interactuando con el campo gravitacional para acumular una

fase total. De esta manera, una alternativa se puede observar en la Figura 3.3 donde la nube de átomos se deja en caída libre para ser dividida, por un pulso $\pi/2$, en dos subgrupos que siguen trayectorias separadas, *camino α* y *camino β* . Posteriormente se lanza un pulso tipo π que invierte sus poblaciones y compensa la transferencia de momento producida por el pulso inicial a una de las componentes. Finalmente se utiliza un pulso $\pi/2$ para recombinar los estados y medir la fase total acumulada. En este caso el requisito es que tanto el intervalo entre cada uno de los pulsos sean iguales, lo cual no es un problema, ya que este tipo de sistemas son similares a como trabaja un reloj atómico.

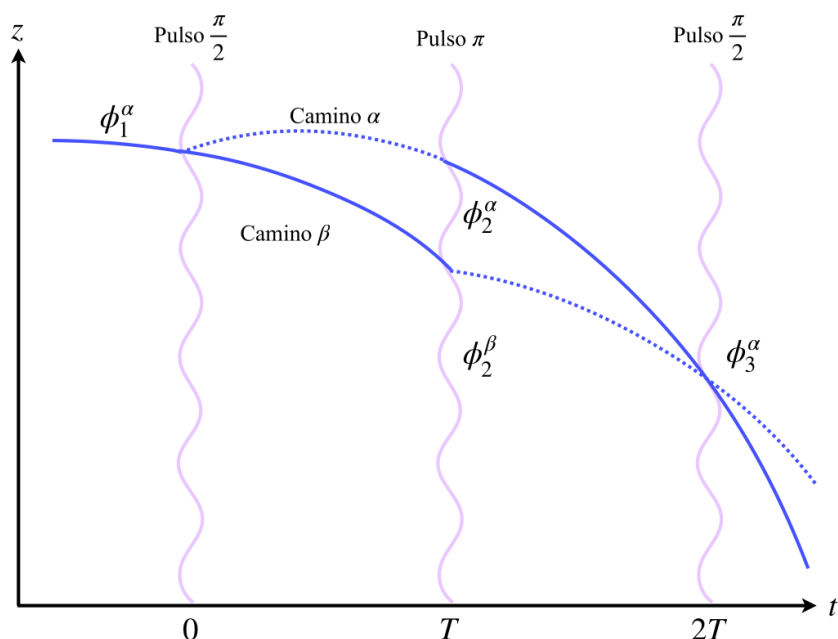


Figura 3.3: Esquema del proceso interferométrico con átomos en caída libre que son divididos con un pulso $\pi/2$, a la mitad del trayecto intercambian sus estados con un pulso π , y finalmente se recombinan con un pulso $\pi/2$.

Veamos ahora en que consiste la fase acumulada en el proceso de interferometría atómica. En cada paso del ciclo, las nubes atómicas acumulan elementos de fase observables en la señal de salida. La cantidad que nos proporcionará una medida es la diferencia de fase entre los dos caminos, caminos α y β . La contribución debida a la interacción de las nubes atómicas con los haces Raman que se muestran en las Figuras 3.2 y 3.3 es $\phi_i = k_{ef}z_i - \omega_{ef}t$, donde z_i es la posición del centro de masa al tiempo t_i . El signo de la fase dependerá del estado inicial de los átomos. Así, al rastrear todos los cambios de estado en cada camino resulta

$$\phi^\alpha = \phi_1^\alpha - \phi_2^\alpha + \phi_3^\alpha \quad (3.1)$$

$$\phi^\beta = \phi_2^\beta, \quad (3.2)$$

con lo cual la diferencia de fase debido a la interacción con los pulsos es

$$\Delta\phi_l = (\phi_1^\alpha - \phi_2^\alpha + \phi_3^\alpha) - \phi_2^\beta. \quad (3.3)$$

Cuando no hay un campo gravitacional, las trayectorias son líneas rectas y la simetría de la situación resulta en $\Delta\phi = 0$. Al introducir un campo gravitacional se rompe la simetría.

3.2. Medida del cambio de fase en presencia de campo gravitacional

La precisión de las mediciones es el aspecto más importante en el proceso de gravimetría. Esto trae consigo que se tenga que hacer una mejor descripción del campo gravitacional en la zona de medición. Es por ello que es necesario introducir la presencia de los gradientes gravitacionales para identificar los factores que afectan la medida en el proceso interferométrico.

Para realizar los cálculos se hará uso de las integrales de camino en Mecánica Cuántica, la cual involucra una serie de reglas para exponer los efectos de los pulsos de luz como divisores y reflectores de haz. Tales efectos se expresan como términos de fase, resumidos en la Tabla 3.1. De esta manera, asumimos un sistema de dos niveles con funciones de onda Ψ_a , Ψ_b y el estado inicial siendo una onda plana con momento p_0 y energía total E_0

$$\begin{aligned} \Psi_a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[\frac{i(p_0 z_0) - E_0 t_0}{\hbar}\right], \\ \Psi_b &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Debe considerarse dos caminos de interferometría clásicos que concluyen en un tiempo-espacio de detección (z_d, t_d) . El cambio neto en la diferencia de fase puede ser calculado mediante el siguiente algoritmo:

- Encuentra los dos caminos clásicos Γ_α y Γ_β que correspondan a un momento inicial p_0 tomando en cuenta los cambios debido a la interacción con los campos de luz. Los caminos deben encontrarse en el tiempo de detección t_d , aunque pueden originarse desde diferentes puntos z_0^α y z_0^β .
- Calcular la acción clásica de la forma

$$S_{cl} = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}[z(t), \dot{z}(t)] dt \quad (3.5)$$

a lo largo de cada camino y luego calcular la diferencia de fase de camino

$$\Delta\phi_{cl} = \frac{S_{cl}^\beta - S_{cl}^\alpha}{\hbar}. \quad (3.6)$$

Para cada trayectoria se tienen que tomar en cuenta los términos de fase correspondientes debido a las interacciones con los campos de luz (Tabla 3.1)

$$\Delta\phi_{cl} = \sum_{\text{camino } \beta} \phi_j^\beta - \sum_{\text{camino } \alpha} \phi_i^\alpha. \quad (3.7)$$

En el caso de la diferencia de fase que acumula la luz respecto de los pulsos Raman que produzcan los cambios en las poblaciones atómicas, se tiene que a lo largo del proceso se acumularán dos desfases de $\frac{\pi}{2}\Delta fT$ y uno de $\pi\Delta fT$, dando como resultado que en este caso el desfase es

$$\Delta\phi_{luz} = 2\pi\Delta fT. \quad (3.8)$$

También habría que tomar en cuenta que la fase adquirida por los puntos iniciales diferentes es

$$\Delta\phi_{sep} = p_0(z_0^\beta - z_0^\alpha)/\hbar. \quad (3.9)$$

- Finalmente, calcular la diferencia de fase total, de la forma

$$\Delta\phi_{tot} = \Delta\phi_{cl} + \Delta\phi_{luz} + \Delta\phi_{sep}. \quad (3.10)$$

El caso de la última fase se puede omitir debido a que al inicio del proceso interferométrico los estados parten de la misma posición. En el caso de $\Delta\phi_{cl}$ se explicará la forma de calcularla en la siguiente sección.

3.2.1. Cálculo de tiro parabólico en un gradiente de campo gravitacional

Antes de calcular las fases vale la pena hacer un paréntesis en el cálculo de la caída libre con mayor precisión que la que normalmente se ve en los cursos de física. Comencemos con la aproximación del potencial gravitacional cerca de la superficie terrestre. Tomando en cuenta que la dirección \hat{r} coincide con la del eje local \hat{k} se tiene que la aproximación gravitacional cerca de la superficie terrestre es

$$U = -\frac{GM_T m}{r} \implies U = -GM_T \frac{1}{(R_T + z)}, \quad (3.11)$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T es el radio medio de la Tierra. Considerando que $z \ll R_T$ podemos hacer la siguiente aproximación

$$U = -\frac{GM_T m}{R_T} \left(1 - \frac{z}{R_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R_T} \right)^2 \dots \right) \approx -U_0 + mg_0 z - m\gamma \frac{z^2}{2} \quad (3.12)$$

donde $U_0 = -\frac{GM_T m}{R_T}$ es la energía en la superficie de la Tierra que no hace ninguna aportación al movimiento por ser un término constante, $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9.81 m/s^2$ es la

aceleración en la aproximación lineal y $\gamma = \frac{GM_T}{R_T^3} = 3.082 \times 10^{-6} 1/s^2$ es la primera corrección a la aceleración cerca de la superficie terrestre. Podemos tirar el término U_0 debido a que es un término constante en la energía y no aporta a la dinámica. De esta manera, para un campo gravitacional considerando el gradiente lineal, el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L} = K - U = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mg_0z + \frac{m\gamma z^2}{2}, \quad (3.13)$$

donde z denota la altitud. Esto proporciona la ecuación de movimiento

$$\ddot{z} = -g_0 + \gamma z \quad (3.14)$$

Afortunadamente, esta ecuación tiene solución exacta. Considerando que la posición inicial z_0 y velocidad v_0 se tiene que la solución se puede escribir como

$$z(t) = \frac{g_0}{\gamma} + \left(z_0 - \frac{g_0}{\gamma}\right) \cosh(t\sqrt{\gamma}) + \frac{v_0}{\sqrt{\gamma}} \sinh(t\sqrt{\gamma}) \quad (3.15)$$

$$\dot{z}(t) = \sqrt{\gamma} \left(z_0 - \frac{g_0}{\gamma}\right) \sinh(t\sqrt{\gamma}) + v_0 \cosh(t\sqrt{\gamma}). \quad (3.16)$$

Las ecuaciones anteriores son una generalización del movimiento parabólico que se ve normalmente en los cursos, pero en este caso se tiene la corrección por el gradiente gravitacional. Si bien es cierto la corrección es muy pequeña, ésta sí influye en los cálculos de un gravímetro cuántico. Para recuperar las expresiones tradicionales basta con considerar tiempos pequeños, es decir, $t\sqrt{\gamma} \ll 1$:

$$\begin{aligned} z(t) &\approx \frac{g_0}{\gamma} + \left(z_0 - \frac{g_0}{\gamma}\right) \left(1 - \frac{t^2\gamma}{2} + \dots\right) + \frac{v_0}{\sqrt{\gamma}}(t\sqrt{\gamma} + \dots) \\ &= z_0 + v_0t + g_0\frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde el término $\frac{z_0\gamma t^2}{2}$ se ha despreciado debido a que z_0 comparado con R_T dentro del término γ resulta muy pequeño. Con las relaciones en las Ecs. (3.15) y (3.16) podemos calcular los cambios de fase que necesitamos para el gravímetro.

Con los cálculos anteriores podemos hacer el cálculo de la fase total acumulada durante el proceso de medición gravimétrica.

Para calcular la fase total acumulada hay que hacer la integral de camino tomando en cuenta la parte que tiene que ver con el gradiente gravitacional en la Ec. (3.13), es decir,

$$\phi = \frac{1}{\hbar} \int \frac{m\dot{z}^2}{2} - mg_0z + \frac{m\gamma z^2}{2} dt. \quad (3.18)$$

Esta integral se tiene que hacer tomando las ecuaciones que vienen en las Ecs. (3.15) y (3.16). Para los átomos que van por el camino α se tiene que la integral de esta fase es

$$\phi^\alpha = \frac{1}{\hbar} \int_0^T \mathcal{L}(z_1, v_1^\alpha) dt + \frac{1}{\hbar} \int_T^{2T} \mathcal{L}(z_2, v_2^\alpha) dt \quad (3.19)$$

donde z_1 es la posición de la nube donde se da el pulso $\pi/2$; v_1^α es la velocidad inicial de la mitad de la nube que se va por el camino α que este caso es $\frac{\hbar k_{ef}}{m} + v_0$, con v_0 la velocidad inicial que tiene la nube de átomos; z_2^α es la altura que tiene la nube que se fue por el camino α cuando se da el pulso π ; y v_2^α es la velocidad que tiene la nube cuando se da el pulso π que en este caso es $\frac{\hbar k_{ef}}{m} + v_2$, con v_2 que se obtiene de la Ec. (3.16) al tiempo T . En el caso de la trayectoria que se va por el camino β basta con tomar la expresión anterior haciendo los cambios $\alpha \rightarrow \beta$, utilizar los momentos divididos por m que vienen en la Tabla 3.1 y la expresión en la Ec. (3.16) para calcular las velocidades en los tiempos inicial y T . Posteriormente se calculan las integrales y se calcula la diferencia de fase entre los caminos α y β . Las cuentas son un poco largas, pero se pueden simplificar utilizando la aproximación de tiempos cortos, al igual que se hizo con la Ec. (3.17). De esta manera se obtiene que en primera aproximación la fase acumulada es

$$\Delta\phi_{cl} = -k_{ef}gT^2 \quad (3.20)$$

El punto central de este proceso es que hay una dependencia entre g y la diferencia de fase que adquieren los átomos al interactuar con los pulsos de luz. En metrología, el proceso de compensar la fase relativa en un experimento para optimizar la medición es una de las tareas más importantes. Por ejemplo, en la fabricación de un reloj atómico de tipo fuente, el objetivo es encontrar el desfase óptimo que produzca la mayor fluorescencia, o resonancia, con la transición hiperfina del cesio 133 (^{133}Cs) [29]. De esta manera, combinando la expresión anterior y tomando la Ec. (3.8), los cambios de fase a tomar en cuenta, de tal manera que se obtenga que la fase de la luz compense el desfase a lo largo del camino de los átomo en el campo gravitacional debe ser $\Delta\phi_{cl} + \Delta\phi_{luz} = 0$. De esta manera obtenemos que

$$g = \frac{2\pi\Delta f}{k_{ef}T} . \quad (3.21)$$

Recordemos que todos estos parámetros se pueden medir, ya que Δf es el desfase de los pulsos Raman emitidos cada tiempo T , y k_{ef} es el número de onda para realizar las transiciones que se explicó en el capítulo anterior.

Aplicaciones de un gravímetro de alta precisión

La función básica de un gravímetro es medir la aceleración gravitacional en el punto donde se hace la medición. Así, los datos obtenidos por el operador deben ser interpretados para dar la información requerida a aquellos que tengan un propósito definido. En esta sección, revisaremos diversos casos de interés en los que puede ser utilizado un gravímetro de alta precisión, identificando su utilidad de acuerdo a la precisión alcanzada por el dispositivo y la requerida para su aplicación.

4.1. Modelo de capas de la Tierra

Es de gran importancia conocer la estructura interna de la Tierra cuando se tratan temas como las oscilaciones libres y las mareas terrestres en Geofísica mientras que en Astronomía es de interés el estudio de la precesión y nutación Terrestre.. En este caso, es importante identificar dicha estructura interna debido a que las técnicas de gravimetría tienen una base de aplicación acorde a la estructura de la corteza terrestre que se pretenda estudiar.

Comúnmente la percepción de la forma del planeta Tierra indica una estructura esférica dada la curvatura empírica al moverse sobre la superficie Terrestre. Con esto en mente, cuando Newton desarrolló la Ley de gravitación universal fue posible obtener una estimación de la masa y volumen de la Tierra. La consecuencia de estos resultados es la afirmación de una densidad total aparente del planeta, dada por:

$$\rho_{\oplus} = \frac{M_{\oplus}}{V_{\oplus}}. \quad (4.1)$$

donde el símbolo \oplus denota al planeta Tierra. Con esta densidad se puede determinar un modelo inicial de la estructura interna de la Tierra. Este modelo supone una esfera con densidad constante ρ_{\oplus} , y aunque esto no es preciso, puede ser útil para mostrar

el comportamiento de la gravedad como campo central predominante en el interior del planeta. De acuerdo a las observaciones astronómicas posteriores, con fines de explicar el origen de los planetas, surge la hipótesis del modelo de acreción de la Tierra [30–32]. Al comparar las abundancias relativas de los elementos menos volátiles en torno al Sol y meteoritos del tipo condritas carbonáceas, se identifica una gran concordancia en los valores. Esta es la base del modelo condrítico de la Tierra [33], el cual sostiene que el planeta está formado principalmente de dicho material meteórico. Con esto en mente es necesario modificar el modelo de distribución de la densidad para determinar con mayor precisión el campo gravitacional en la superficie. El cambio requerido implica imponer condiciones de cambios de densidad a lo largo del radio terrestre, de tal forma que:

$$\begin{aligned}\rho(0) &= \rho_0, \\ \rho(R_{\oplus}) &= \rho_{sup},\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde ρ_0 es la densidad del núcleo y ρ_{sup} es la densidad de la corteza. Suponiendo que la estructura interna es isotrópica y cambia linealmente con el radio, la distribución de densidades queda de la forma

$$\rho(r) = (\rho_{sup} - \rho_0) \frac{r}{R_{\oplus}} + \rho_0.\tag{4.3}$$

Diversas investigaciones sismológicas de la estructura interna se han visto optimizados con el avance de las técnicas de análisis de señales y computacionales. Gracias a tales avances fue posible la construcción de varios modelos de la Tierra. Sin embargo, con el surgimiento de modelos diferentes hubo una dificultad para elegir el más adecuado. Con este precedente se crea el Comité del Modelo Estándar de la Tierra (SEMC, por sus siglas en inglés). El objetivo era, tal como el nombre lo indica, definir el modelo estándar de referencia para la estructura de la Tierra. Después de varios encuentros de discusión y modelos presentados, elaborados con técnicas computacionales y conjuntos de datos diferentes, pero con una concordancia de resultados excepcional ($\sim 0.2\%$), se tuvo la certeza de que era posible definir el modelo deseado. De esta manera, la propuesta de A.M. Dziewonski y D.L. Anderson [34] fue la más aceptada gracias a las consideraciones del modelo como el amortiguamiento, expresado en el factor de calidad Q de los datos empleados. El esquema final del modelo provee una formulación analítica para las velocidades sísmicas, densidad y valor de Q como función del radio Terrestre [34]. En consecuencia, se desarrolló el modelo PREM que toma en cuenta la estructura de la Tierra por capas. Este se puede observar en la Figura 4.1, y para esta descripción se tomó como base los datos originales descritos en el trabajo de Dziewonski y Anderson, haciendo la aproximación de densidades lineales sin perder generalidad. Aquí puede apreciarse que existen cinco capas principales a considerar. La densidad es proporcional y decreciente al radio debido al cambio de presión que ejercen las capas exteriores sobre las interiores. La última capa, que tiene como frontera a la superficie, es la que se conoce como “Corteza Terrestre” y abarca los últimos 80 *km* antes de la distancia máxima al núcleo. Es en esta capa donde se desarrolla la vida humana y, por lo tanto, es donde hay interés para realizar mediciones gravimétricas.

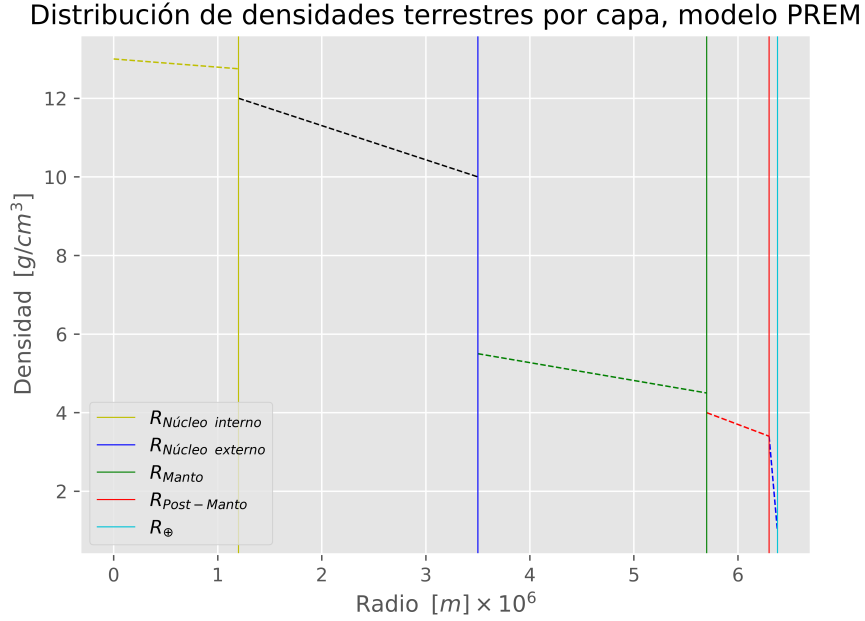


Figura 4.1: Distribución de aceleraciones por capa del modelo estándar de referencia Terrestre. De acuerdo con los datos obtenidos por Dziewonski y Anderson fue realizado un ajuste lineal para cada capa descrita por los autores, resultando en la gráfica presente.

Con la distribución de densidades es posible calcular las aceleraciones gravitacionales en cada una de las capas. Así, la Figura 4.2a muestra la distribución de aceleraciones en la Tierra de acuerdo a los tres modelos de la densidad descritos previamente. Dos de estos obtenidos de forma teórica (ρ_{lineal}) o semi-empírica (ρ_{cte}), y el tercero de manera experimental (ρ_{PREM}). Para este trabajo, los datos del modelo PREM están resumidos en la Figura 4.1. Lo que se muestra en la imagen es un ajuste lineal en la densidad para cada capa que describe el trabajo de Dziewonski y Anderson. En dicho escrito presentan una gráfica de las densidades calculadas con base en datos experimentales de medidas de modos vibracionales en el interior de la Tierra. Estas densidades son mostradas respecto al radio Terrestre. Considerando tal gráfica, el ajuste en la densidad de la i -ésima capa es de la forma

$$\rho_i(r) = \frac{\rho_{fin} - \rho_{in}}{R_{fin} - R_{in}}(r - R_{in}) + \rho_{in} = m_i(r - R_{in}) + \rho_{in}, \quad (4.4)$$

donde ρ_{fin} y ρ_{in} son las densidad final e inicial, respectivamente. R_{fin} y R_{in} son el radio final e inicial que corresponden a las medidas de la densidad mencionadas previamente. Estas cantidades fueron identificadas de los datos que proporciona la gráfica de Dziewonski y Anderson para poder realizar el ajuste lineal. Luego, para calcular las aceleraciones como son vistas en la Figura 4.2a basta con hacer uso de la Ley de Gauss calculando la masa encerrada por una superficie de radio r , esto se ve como la suma de

la masa de cada capa hasta el radio dado. La siguiente expresión resume lo mencionado

$$a_i(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \left(\int_{R_0}^{R_1} \rho_1(r')r'^2 dr' + \int_{R_1}^{R_2} \rho_2(r')r'^2 dr' + \dots + \int_{R_{i-1}}^r \rho_i(r')r'^2 dr' \right), \quad (4.5)$$

para calcular la i -ésima aceleración de la Ec. (4.5) fueron usadas las densidades de la forma establecida en la Ec. (4.4). Una manera de resumir lo anterior es

$$\rho_i(r) = \begin{cases} \rho_1(r) & r \in [0, 1200] & \text{Núcleo interior} \\ \rho_2(r) & r \in [1200, 3500] & \text{Núcleo exterior} \\ \rho_3(r) & r \in [3500, 5700] & \text{Manto} \\ \rho_4(r) & r \in [5700, 6300] & \text{Manto posterior} \\ \rho_5(r) & r \in [6300, 6380] & \text{Corteza terrestre} \end{cases} \quad (4.6)$$

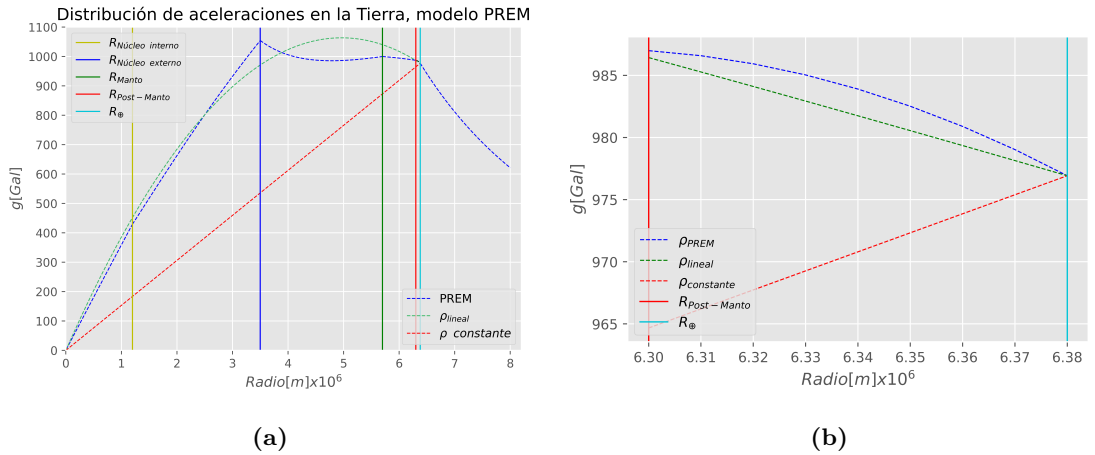


Figura 4.2: (a) Distribución de aceleraciones en las diferentes capas de la Tierra. Cada segmento (línea punteada azul) fue calculado con los datos para la densidad presentes en la Figura 4.1. Además, se muestra un modelo con densidad lineal sin capas (línea punteada verde) así como un modelo con densidad constante del interior de la Tierra (línea punteada roja). (b) Aceleraciones en lo ancho de la corteza Terrestre. Es mostrada la aceleración calculada con el modelo PREM así como los dos modelos previamente mencionados.

Existe un gran símil entre el PREM y el modelo de densidad lineal, pero sólo en el sentido esquemático. El parecido está en la forma del incremento parabólico en las primeras dos capas llegando al máximo de aceleración gravitacional en la tercera capa. Debe tomarse en cuenta que la humanidad se desarrolla fuera de la corteza terrestre pero la sustentabilidad depende de lo que existe dentro de esta última capa. Por ejemplo, la

mina más profunda está aproximadamente a 4 km debajo del nivel del mar, o los pozos de extracción petrolera están a unos cuantos de kilómetros debajo de la superficie¹. De esta forma, el rango para medidas gravitacionales se reduce drásticamente.

En lo ancho de la corteza terrestre, como se muestra en la Figura 4.2b, de acuerdo a los modelos de densidad de la Tierra, el cambio en la aceleración gravitacional es de, a lo más, 10 *Gal*. Es decir, tomando como referencia un valor promedio de 9.80 m/s^2 (980 *Gal*) en 80 km de espesor existe una variación de la primera cifra decimal.

Por otro lado, al tomar en cuenta la escala de desarrollo humano, lo cual es apreciable en la Figura 4.3a. Si la mina más profunda está a 4 km debajo del nivel del mar y la ciudad más alta es La Paz, Bolivia a 3,869 m sobre el nivel del mar. Entonces es necesario analizar un esquema de localización del gravímetro. Con esto en mente, el cambio de la aceleración gravitacional desde el punto más profundo de desarrollo humano hasta la ciudad más alta es de 2 *Gal*. Esto es notable para la referencia mencionada como una perturbación de la segunda cifra decimal. Con esta línea de razonamiento, la escala humana, dada una posición geográfica del dispositivo, es de algunos metros de magnitud. Una situación para ilustrar esto es suponer un edificio promedio con 40 m sobre el nivel del mar y 10 m de profundidad si se mide la gravedad en la altura máxima y se compara con la medida del punto más profundo, hay una diferencia de aproximadamente 0.012 *Gal*.

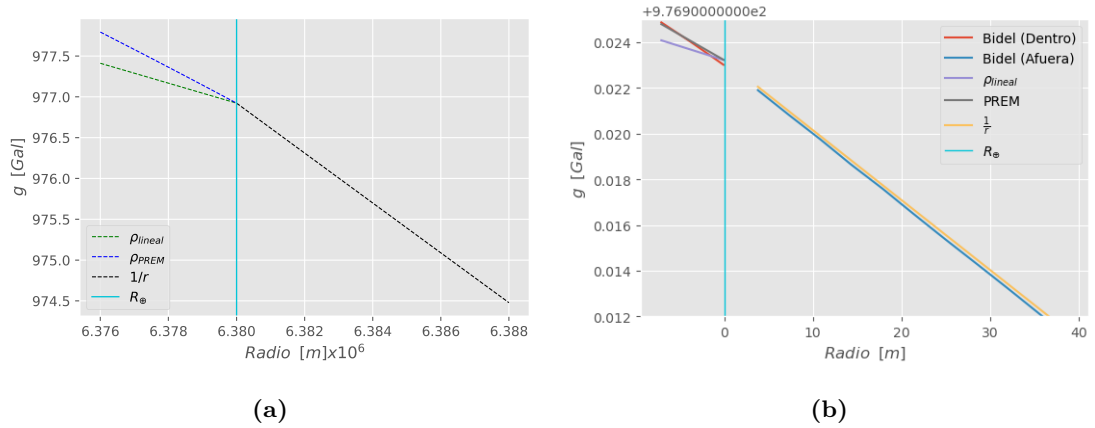


Figura 4.3: (a) Aceleración gravitacional desde 4 km debajo de la superficie hasta 8 km sobre el nivel del mar. (b) Aceleración gravitacional desde 4 m debajo de la superficie hasta una altura de 40 m. Se muestra una coincidencia del modelo teórico con el trabajo de Bidel et al., 2013 [37]

Al suponer la densidad con forma lineal, más específicamente de la forma en la Ec. (4.3), puede ser observado un comportamiento similar al PREM en la capa más cercana

¹El record de excavación humana es el pozo de Kola en Rusia con una profundidad de 12,262 km realizado en los años 70's [35, 36].

a la superficie, en especial la de interés para las medidas gravitacionales a escala de desarrollo humano. Considerando que el cambio indicado está en la tercera cifra decimal, un dispositivo con esa precisión o mayor deberá tomar en cuenta el modelo empleado para la descripción de los resultados.

El propósito aplicado del gravímetro es detectar perturbaciones en el campo gravitacional de la Tierra y quien analice los datos obtenidos debe determinar la causa de tal perturbación. Así, una de las posibles respuestas para un cambio en la aceleración puede ser la presencia de cavidades en el interior de la Tierra. Para llegar a esta conclusión es necesario analizar qué tanto afecta la existencia de una cavidad vacía a la medida de referencia g_0 .

Para esto, lo siguiente es calcular el orden de magnitud del cambio en la aceleración respecto a g_0 por la presencia de una cavidad vacía en el interior de la Tierra cerca de la superficie.

4.2. Modelo gravitacional de la Tierra

De la ley de Gauss en su forma integral para una distribución de masa uniforme

$$\oint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{int}, \quad (4.7)$$

considérese que la Tierra es totalmente esférica, de radio R y con densidad uniforme ρ_0 . Ahora, supongamos una superficie de Gauss S esférica de radio r , centrada en la Tierra. Tal que $r > R$

Entonces, la ley de Gauss queda como:

$$g_0 4\pi r^2 = -4\pi GM_{\oplus}. \quad (4.8)$$

Despejando g_0 de

$$g_0 = -\frac{GM_{\oplus}}{r^2}, \quad (4.9)$$

con $M_{\oplus} = \frac{4\pi}{3}\rho_{\oplus}R_{\oplus}^3$. Por lo tanto,

$$g_0(r) = -\frac{4\pi}{3}\rho_{\oplus}G\frac{R_{\oplus}^3}{r^2}. \quad (4.10)$$

o bien, en su forma vectorial

$$\vec{g}_0(r) = -\frac{4\pi}{3}\rho_{\oplus}G\frac{R_{\oplus}^3}{r^2}\hat{e}_r. \quad (4.11)$$

Ahora, tomando $r = R_{\oplus} + z$, con $z \ll R_{\oplus}$ podemos despreciar la curvatura de la tierra, lo cual implica que el vector unitario \hat{e}_r es ahora \hat{e}_z .

4.3. Modelo de una cavidad cercana a la superficie terrestre

4.3.1. Cavidad esférica

Inicialmente debe considerarse un punto de comparación. Por lo tanto, tomemos en cuenta una cavidad esférica de radio r a profundidad P como se muestra en la Figura 4.4.

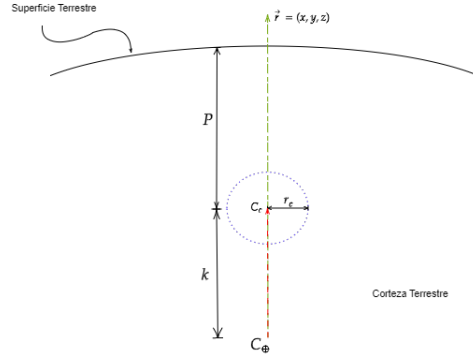


Figura 4.4: Esquema de una cavidad esférica de radio r a una profundidad P . Este modelo puede representar la presencia de espacios vacíos en el subsuelo como sumideros o depresiones geológicas.

El hecho de encontrarse cerca de la superficie, indica que podemos aplicar el resultado de la sección anterior. Así, la aceleración de la gravedad será

$$\vec{g}(z) = g_0(z)\hat{e}_z \quad (4.12)$$

La expresión anterior requirió una distribución radial de masa. Es decir, sin irregularidades angulares en la estructura. Si ahora suponemos una cavidad esférica en la estructura, de modo que la “masa” faltante tenga la misma distribución que la masa presente. Gracias a la linealidad sobre M_{int} en la ley de Gauss, puede escribirse el resultado para $\vec{g}(\vec{r})$ con $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ como:

$$\vec{g}(\vec{r}) = g_0\hat{e}_z - GM_c \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3}, \quad (4.13)$$

con $M_c = -\frac{4\pi}{3}\rho_{\oplus}r^3$, la masa faltante de la cavidad, lo cual se indica con el signo negativo. Y $\vec{r}_c = -P\hat{e}_z$ el centro de la cavidad a profundidad P . De esta forma, la expresión está determinada por

$$\vec{g}(x, y, z) = g_0(z)\hat{e}_z + G\rho_{\oplus} \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + (z + P)\hat{e}_z}{(x^2 + y^2 + (z + P)^2)^{3/2}}. \quad (4.14)$$

Dado el proceso de interferometría descrito, el resultado de la medición es la aceleración gravitacional en la dirección \hat{e}_z . En pocas palabras, la Ec. (4.14) indica el valor de \vec{g} en todas las direcciones pero el dispositivo sólo medirá en \hat{e}_z . Por lo tanto, la componente que analizaremos es $\vec{g} \cdot \hat{e}_z$ o bien

$$g(x, y, z) = g_0(z) + G\rho_{\oplus} \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{(z + P)}{(x^2 + y^2 + (z + P)^2)^{3/2}}. \quad (4.15)$$

4.3.2. Cavidad cúbica

Debido a que las cavidades existentes no son esféricas en su totalidad, consideremos otra geometría como la de un cubo de arista L a profundidad P como se muestra en la Figura 4.5. De esta manera podemos estimar las cotas que se pueden encontrar entre estas dos formas geométricas.

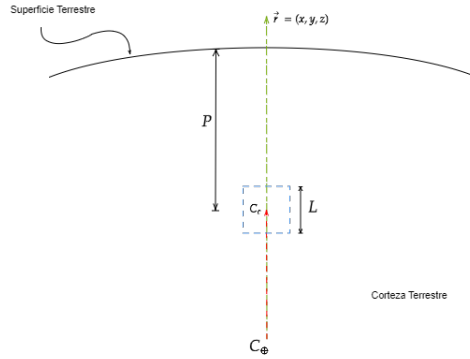


Figura 4.5: Esquema cavidad cúbica de lado L a una profundidad P .

Los resultados de este tipo de cavidades pueden ser comparadas con aquellas de forma esférica para determinar la diferencia más notable entre ambos tipos. Con el fin de dar una descripción de las cavidades cúbicas, tal como antes, escribimos la ley de Gauss:

$$\vec{g}(\vec{r}) = g_0(\vec{r})\hat{e}_z - G \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3} dM_c \quad (4.16)$$

así, $dM_c = -\rho_{\oplus} dx_c dy_c dz_c$ determina la expresión general.

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{r}) &= g_0(z)\hat{e}_z \\ &+ G\rho_{\oplus} \int_{P-\frac{L}{2}}^{P+\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(x-x_c)\hat{e}_x + (y-y_c)\hat{e}_y + (z-z_c)\hat{e}_z}{\left((x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2\right)^{3/2}} dx_c dy_c dz_c, \end{aligned} \quad (4.17)$$

en este caso, debe notarse que la densidad en la Ec. (4.17) es constante, esto no describe una situación completamente real pero sirve para dar un esquema de lo que se puede esperar en la comparación de resultados entre cavidades. Por otro lado, al igual que la consideración de antes, la componente que será analizada es $\vec{g} \cdot \hat{e}_z$, la cual se reduce a

$$g(\vec{r}) = g_0(z) + G\rho_{\oplus} \int_{P-\frac{L}{2}}^{P+\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(z-z_c)}{\left((x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2\right)^{3/2}} dx_c dy_c dz_c \quad (4.18)$$

4.4. Modelo de una cavidad con gradiente de densidad

En la realidad, las anomalías gravitacionales no siempre se deben a cavidades sino a la presencia de diversos materiales en la corteza por lo que hay que añadir diferentes valores de la densidad. Además, acorde a lo ya visto en la discusión sobre los modelos gravitacionales de la Tierra, para la precisión deseada en el dispositivo gravimétrico es necesario tomar en cuenta la descripción más detallada, en este caso el PREM. Este considera una densidad que depende del radio Terrestre, lo cual es necesario para mostrar una comparación a la situación real.

4.4.1. Forma rectangular

Retomando la expresión para el campo gravitacional con una cavidad

$$\vec{g}(\vec{r}) = g_0(\vec{r})\hat{e}_z - G \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3} dM_c ,$$

esta vez $dM_c = -\rho(x_c, y_c, z_c) dx_c dy_c dz_c$. Es decir, la densidad es una función de la posición en el material. Con esto, la expresión general queda:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{r}) &= g_0(z)\hat{e}_z \\ &+ G \int_{P-\frac{L}{2}}^{P+\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(x-x_c)\hat{e}_x + (y-y_c)\hat{e}_y + (z-z_c)\hat{e}_z}{\left((x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2\right)^{3/2}} \rho(\vec{r}_c) dx_c dy_c dz_c \end{aligned} \quad (4.19)$$

Al igual que antes, nuestro interés se encuentra en la componente normal a la superficie, $\vec{g}(x, y, z) \cdot \hat{e}_z$

$$g(x, y, z) = g_0(z) + G \int_{P-\frac{L}{2}}^{P+\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(z - z_c)}{\left((x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2\right)^{3/2}} \rho(\vec{r}_c) dx_c dy_c dz_c, \quad (4.20)$$

así, una vez identificada la componente que será medida, puede separarse el término correspondiente a la presencia de la cavidad. Este término es entonces

$$\delta g = G \int_{P-\frac{L}{2}}^{P+\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(z - z_c)}{\left((x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2\right)^{3/2}} \rho(\vec{r}_c) dx_c dy_c dz_c. \quad (4.21)$$

La Ec. (4.17) es útil en el cálculo de perfiles gravimétricos de cavidades y como afectan a la medida central de acuerdo a parámetros de profundidad y posición.

4.4.2. Forma esférica

Igual que antes, el propósito es calcular la magnitud del campo gravitacional a una distancia dada entre el punto de medida y una cavidad a profundidad P dentro de la corteza Terrestre. Para esto, nuevamente consideramos la expresión

$$\vec{g}(\vec{r}) = g_0(\vec{r})\hat{e}_z - G \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3} dM_c,$$

En este caso, el espacio de integración es, tal como en la sección 4.3.1, una cavidad de forma esférica en la corteza terrestre. Inicialmente podemos suponer el caso general tomando en cuenta el marco de referencia desde el centro de la Tierra C_\oplus como se muestra en la Figura 4.6. Sea $C_c = (i, j, k)$ el centro de la cavidad de radio R_c , la ecuación a la cual corresponde tal geometría es

$$R_c^2 = (x_c - i)^2 + (y_c - j)^2 + (z_c - k)^2, \quad (4.22)$$

donde (x_c, y_c, z_c) son los puntos dentro de la esfera. De esta manera la expresión para el cálculo de la aceleración de la gravedad es

$$\vec{g}(\vec{r}) = g_0(z)\hat{e}_z + G \int_{X_c} \int_{Y_c} \int_{Z_c} \frac{(x - x_c)\hat{e}_x + (y - y_c)\hat{e}_y + (z - z_c)\hat{e}_z}{\left((x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2\right)^{3/2}} \rho(\vec{r}_c) dz_c dy_c dx_c, \quad (4.23)$$

donde X_c, Y_c y Z_c representan los límites de integración correspondientes a cada coordenada en el orden específico. Cada uno determinado por el espacio acotado por la cavidad en coordenadas cartesianas. Así, cada conjunto es

$$\begin{aligned} Z_c &\in \left[-\sqrt{R_c^2 - [(x_c - i)^2 + (y_c - j)^2]} + k, \sqrt{R_c^2 - [(x_c - i)^2 + (y_c - j)^2]} + k \right], \\ Y_c &\in \left[-\sqrt{R_c^2 - (x_c - i)^2} + j, \sqrt{R_c^2 - (x_c - i)^2} + j \right], \\ X_c &\in [i - R_c, i + R_c]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Al igual que antes, la componente de la aceleración que será medida es la proyección vertical $g(x, y, z) \cdot \hat{e}_z$, por lo que la expresión de interés será

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{r}) &= g_0(z) \\ &+ G \int_{X_c} \int_{Y_c} \int_{Z_c} \frac{(z - z_c)}{\left((x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \right)^{3/2}} \rho(\vec{r}_c) dz_c dy_c dx_c. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para reducir la complejidad del problema y poder compararlo con los resultados anteriores, podemos suponer que el punto de medida de la aceleración se encuentra alineado con el centro de la cavidad. Con esta afirmación el problema se reduce al de la Figura 4.4, con la diferencia de que la densidad no es constante y es necesario tomar en cuenta el gradiente de masa real para obtener una mejor precisión en la medida reflejada en el gravímetro. Las expresiones más importantes de esta sección son las Ecs. (4.20) y (4.25). Con estos resultados podemos hacer diversos cálculos variando la posición de la cavidad y la densidad de ésta para identificar la magnitud de perturbaciones gravitacionales en el valor de referencia medido por un gravímetro.

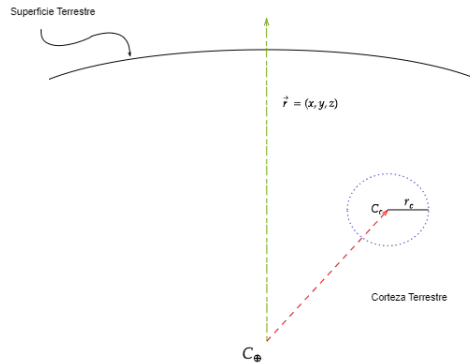


Figura 4.6: Esquema cavidad esférica fuera del origen

4.4.3. Parámetros de cavidades como perturbación gravitacional

En aras de un enfoque pragmático en este proyecto, es necesario dar una descripción del margen de utilidad del dispositivo. El propósito de esta sección es definir el espacio de parámetros (R_c, P) tales que las variaciones en la aceleración de la gravedad sean mayores que $1\mu Gal$, o bien $\delta g \geq 1\mu Gal$. Para esto debemos referirnos a un caso general donde se pretende obtener la medida gravitacional en un punto sobre la superficie Terrestre considerando la presencia de una cavidad de radio R_c a una profundidad P . Con el modelo Terrestre a densidad constante, es decir, aquel que es consecuencia de la Ec. (4.1): $\rho_{\oplus} = M_{\oplus}/V_{\oplus}$. De esta manera, se tiene que el campo gravitacional en la superficie Terrestre con la presencia de una cavidad esférica de radio R_c a una profundidad P está dado por

$$\vec{g} = GM_{\oplus} \left(\left(\frac{R_c}{R_{\oplus}} \right)^3 \frac{1}{P^2} - \frac{1}{R_{\oplus}^2} \right) \hat{e}_r, \quad (4.26)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton, M_{\oplus} y R_{\oplus} son la masa y el radio de la Tierra, respectivamente, y R_c es el radio de la cavidad a una profundidad P . Esta ecuación es calculada mediante la Ley de Gauss, el principio de superposición y tomando en cuenta que se tiene una densidad homogénea.

Con la Ec. (4.26) podemos determinar el espacio donde las medidas gravitacionales superen la precisión requerida. Esto se logra separando los términos en la expresión, inicialmente identificando la cota superior del campo $g_0 = GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2$, de esta manera la Ec. (4.26) puede escribirse de la forma

$$\vec{g} = -g_0 \left(1 - \frac{R_c^3}{R_{\oplus} P^2} \right) \hat{e}_r. \quad (4.27)$$

De lo anterior, el término $g_0 \frac{R_c^3}{R_{\oplus} P^2}$ puede ser tratado como una perturbación de la cota superior g_0 . Así, dicha perturbación gravitacional puede usarse para determinar la precisión requerida en el dispositivo para entrar al margen de error donde cambios en la gravedad son perceptibles y cuya causa es de interés para este trabajo. Para ello definimos

$$\delta g = g_0 \frac{R_c^3}{R_{\oplus} P^2}, \quad (4.28)$$

donde δg es la magnitud de la perturbación gravitacional, la cual dependerá de las variables R_c y P . Así, dada la magnitud de δg es posible determinar el espacio de parámetros (R_c, P) donde además, en coherencia con la realidad, debe cumplirse que $P \geq R_c$.

Para una precisión de $1\mu Gal = 1 \times 10^{-8} m/s^2$, el espacio de parámetros se ve como en la Figura (4.7). En ésta se muestra que el rango de profundidades (P) y radios de una cavidad (R_c) tal que el resultado de la perturbación gravitacional ejercida sea mayor o igual a $1\mu Gal$.

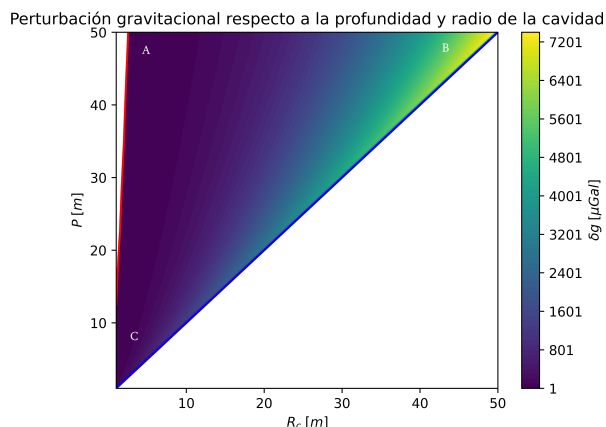


Figura 4.7: Rango de magnitud de la profundidad (P) a la que se debe colocar una cavidad de radio (R_c) para obtener una perturbación de más de $1 \mu Gal$.

En la gráfica de la Figura 4.7 pueden ser resaltados diversos aspectos de acuerdo a la zona en la que se encuentren los parámetros de radio y profundidad. Inicialmente es notable un área en blanco por debajo de la función identidad. Esta área es excluida del espacio de medidas registradas por el hecho de que cualquier cavidad con un radio mayor a su profundidad será apreciable a simple vista en la superficie Terrestre. Por otro lado, para radios muy cercanos a $0 m$, aproximadamente a partir de los $15 m$ de profundidad existe una zona de medida también excluida del espacio de parámetros, esta vez debido a que las medidas teóricas registradas, para ese conjunto de variables, serán menores a $1 \mu Gal$. Así, una vez separando las zonas menos relevantes podemos hablar de lo que se encuentra dentro del espacio de interés, dado por la precisión requerida en la práctica. Inicialmente describimos la zona A como aquellas cavidades que tienen una amplia profundidad pero cuentan con el radio para perturbar la medida gravitacional, lo suficiente para ser notables en un dispositivo gravimétrico. De acuerdo a la gráfica, la magnitud de las medidas en esta zona es de alrededor de $800 \mu Gal$, lo que equivale a un cambio en la cuarta cifra decimal de la medida central. Esta zona es la más afectada de acuerdo a la densidad que sea implementada para exponer el modelo terrestre con el que se lleve a cabo este análisis (para este caso debe recordarse que fue usado un modelo terrestre con densidad constante). Luego, la zona B indica aquellas cavidades lejanas al punto de medida pero con radios cercanos a la misma magnitud que su profundidad, podemos ver esto como un espacio amplio por debajo del dispositivo, en la realidad podría ser desde una cueva hasta un depósito de agua. En esta zona de parámetros se tiene la mayor perturbación gravitacional a la medida principal. Sin embargo, la combinación de sus dimensiones las hace fácilmente detectables aún sin técnicas gravimétricas. De la misma forma se tiene el área de medida C, donde se pueden tener cavidades con radios pequeños situadas cerca de la superficie. Como es apreciable en la gráfica, la magnitud en la perturbación de este tipo de cavidades supone una equivalencia con las de la zona A (profundas pero con radios relativamente

pequeños). Para identificar la diferencia entre estos casos, puede ser estudiado el perfil gravimétrico de la cavidad, así, de acuerdo a la forma de este puede ser determinado si se trata de una cavidad profunda y grande, o pequeña y cercana a la superficie. Antes de dar ese análisis es necesario dar una descripción cercana a la realidad puesto que el propósito de este trabajo es determinar el margen de aplicación de un dispositivo gravimétrico.

La discusión previa sobre el espacio de parámetros tenía como consideración central una densidad constante en el modelo Terrestre, esto sirvió para comprender las bases de lo que se desea obtener en términos generales tomando en cuenta la densidad real de la Tierra. De esta manera, para un modelo teórico general, y más cercano a la realidad, puede suponerse una densidad de la Tierra de la forma como se muestra en la Ec. (4.4), obtenida con los datos del PREM tal como es mencionado en esa sección. El comportamiento apreciado de dicha densidad es de funcionalidad lineal respecto al radio de la Tierra. Por otro lado, la Ec. (4.25) indica el campo gravitacional en presencia de una cavidad considerando una densidad variable, esta expresión es la forma general de la Ec. (4.26) y análogamente podemos separar los términos de la primera identificando la parte perturbacional como

$$\delta g = G \int_{X_c} \int_{Y_c} \int_{Z_c} \frac{(z - z_c)}{\left((x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \right)^{3/2}} \rho(\vec{r}_c) dz_c dy_c dx_c, \quad (4.29)$$

la cual es la magnitud en la dirección \hat{e}_z de la perturbación gravitacional en el punto (x, y, z) ejercida por una cavidad centrada en el punto $C_c = (i, j, k)$ respecto al centro de la Tierra. Con esto en mente, y con el objetivo de comparar los resultados con el caso de densidad constante, puede suponerse que el punto de medida y el centro de la cavidad se encuentran en el mismo eje coordenado, en este caso nos interesa saber como afecta la profundidad a la medida de δg por lo que consideramos que el punto de medida es $(0, 0, z)$ y la cavidad está centrada en $C_c = (0, 0, k)$. Sin embargo, estas coordenadas están dadas respecto al centro de la Tierra, y para indicar una situación en la realidad es necesario considerar que el punto de medida estará en la superficie terrestre. Así, las coordenadas serán entonces $(0, 0, R_\oplus)$ y la profundidad de la cavidad estará dada por $P = R_\oplus - k$, por lo tanto las coordenadas de su centro serán $C_c = (0, 0, R_\oplus - P)$ teniendo así como parámetro a la profundidad P . El radio de la cavidad está implícito en el espacio de integración (X_c, Y_c, Z_c) de la expresión para δg , cada conjunto del espacio es en su forma general, como los mostrados en la Ec. (4.24). Al tomar las consideraciones mencionadas previamente sobre el punto de medida y el centro de la cavidad, la Ec. (4.29) y el espacio de integración son reducidos a la forma

$$\delta g = G \int_{X_c} \int_{Y_c} \int_{Z_c} \frac{(R_\oplus - z_c)}{\left(x_c^2 + y_c^2 + (R_\oplus - z_c)^2 \right)^{3/2}} \rho(\vec{r}_c) dz_c dy_c dx_c, \quad (4.30)$$

con

$$\begin{aligned}
 Z_c &\in \left[-\sqrt{R_c^2 - [x_c^2 + y_c^2]} + R_\oplus - P, \sqrt{R_c^2 - [x_c^2 + y_c^2]} + R_\oplus - P \right], \\
 Y_c &\in \left[-\sqrt{R_c^2 - x_c^2}, \sqrt{R_c^2 - x_c^2} \right], \\
 X_c &\in [-R_c, R_c].
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

La densidad $\rho(\vec{r}_c)$ es una función lineal que depende de la distancia al centro de la Tierra. En específico, para el espacio de parámetros que se menciona un poco más adelante, fue usada la densidad de la corteza terrestre $\rho_5(r)$, de la forma

$$\rho_5(r) = m_5(r - R_8) + \rho_8,
 \tag{4.32}$$

donde $m_5 = -0.0338028 \text{ kg/m}^4$, $R_8 = 6.3 \times 10^6 \text{ m}$ es el radio donde inicia la Corteza Terrestre y $\rho_8 = 3400 \text{ kg/m}^3$ como la densidad inicial de la misma capa. Así fue posible realizar una gráfica de la perturbación gravitacional donde las variables son la profundidad y el radio de una cavidad en presencia de un gradiente de densidad de acuerdo a los datos del PREM, como se puede apreciar en la Figura (4.8). A simple vista puede notarse que la forma es similar al espacio de parámetros calculado con densidad constante; las zonas en blanco fueron excluidas siguiendo el mismo proceso. El área debajo de la identidad representa cavidades con radios mayores a su profundidad, por lo tanto descartadas del espacio. La zona con radios cercanos a cero y profundidades lejanas indica medidas de la perturbación menores a $1 \mu\text{Gal}$, las cuales serán imperceptibles para la precisión teórica definida en este caso. Una vez mencionado esto, las diferencias notables están en las zonas A y B. La primera de éstas tiene un inicio posterior al mostrado cuando la densidad es constante, es decir, el gradiente de densidad aumentó las configuraciones de (R_c, P) cuya medida es menor a $1 \mu\text{Gal}$. Esto es útil puesto que es posible reducir la ambigüedad en cuanto a las cavidades que generen la misma perturbación pero con diferentes parámetros de radio y profundidad, en específico aquellas que se encuentran en la zona C.

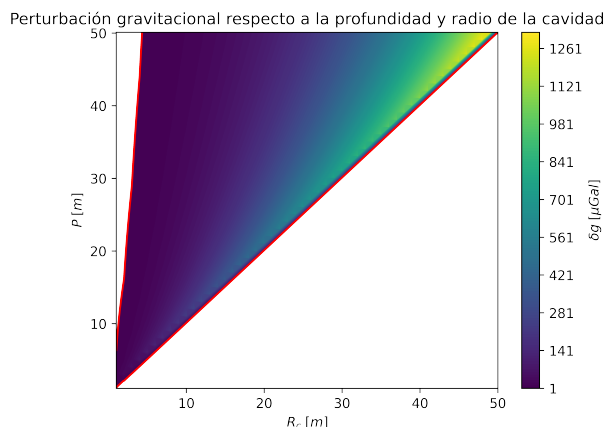


Figura 4.8: Rango de magnitud de la profundidad (P) a la que se debe colocar una cavidad de radio (R_c) para obtener una perturbación de más de $1 \mu Gal$.

Por otro lado, la zona B tuvo una disminución de magnitud respecto a la presencia de densidad constante. Aún así, el orden de magnitud se mantuvo y de igual manera las cavidades con estos parámetros serán detectables fácilmente. De esta manera queda descrito el rango de posibles configuraciones de radio y profundidad que corresponden a una precisión de $1 \mu Gal$ o mayor a ésta. Sin embargo, una mayor utilidad es determinar las características de aquello que provoca la perturbación en la medida gravitacional, dígase por ejemplo, la forma de una cavidad por debajo de la superficie Terrestre. Para esto debe ser analizado como afecta la presencia de dicho espacio vacío no sólo en un punto de medida por encima de la cavidad sino en todo un área alrededor de tal punto.

4.4.4. Perfiles de perturbación gravitacional

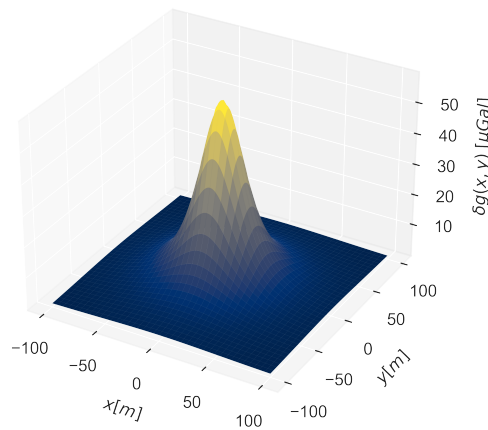
Así pues, el propósito actual es identificar como afectan los parámetros de una cavidad determinada a la forma en el perfil de medida; realizando un mapeo de medidas teórico a lo largo y ancho de una zona sobre la posición de dicha cavidad. De hecho, para poder observar el cambio es obligatorio comparar el perfil obtenido con otro de diferente naturaleza. Por lo cual serán definidas dos tipos de cavidades con igual profundidad pero diferente forma, conservando el volumen del espacio vacío para ser consistente con la medida gravitacional efectiva. Con esto en mente, la expresión a implementar para este análisis es la Ec. (4.29). En este caso, no hay reducciones notables en la expresión puesto que el punto de medida es de la forma (x, y, R_{\oplus}) donde (x, y) constituye un área sobre la superficie Terrestre. De igual manera, se mantiene la expresión para la densidad, Ec. (4.32), con el fin de describir la misma composición del entorno. Teniendo en cuenta lo anterior, las cavidades que serán expuestas tienen las siguientes características:

$$\text{Cavidad cúbica} = \begin{cases} P = 30 \text{ m} & \text{Profundidad} \\ L_c = 20 \text{ m} & \text{Largo de arista.} \end{cases} \quad (4.33)$$

$$\text{Cavidad esférica} = \begin{cases} P = 30 \text{ m} & \text{Profundidad} \\ R_c = 12.40 \text{ m} & \text{Radio,} \end{cases} \quad (4.34)$$

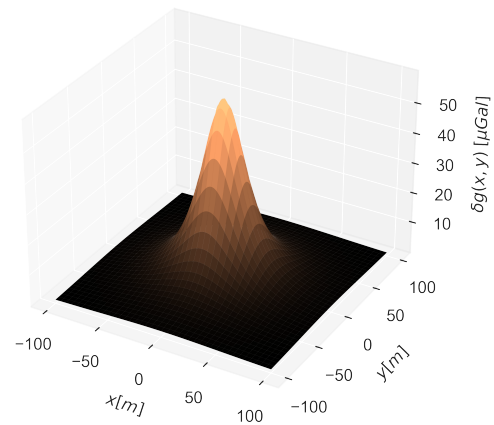
Para los dos tipos de cavidad el área designada desde donde se “tomarán” las medidas gravitacionales es de 100 m de largo en la coordenada x por 100 m de ancho en la dirección y . Una vez definida el área de medida y los parámetros de las cavidades, basta con implementar la Ec. (4.21) en el caso de la forma cúbica y la Ec. (4.29) para la cavidad esférica. Con todo lo anterior en cuenta, los perfiles resultantes se muestran en la Figura 4.9.

Perfil de perturbación gravimétrico de cavidad cúbica



(a)

Perfil de perturbación gravimétrico de cavidad esférica



(b)

Figura 4.9: (a) Perfil gravitacional de una cavidad cúbica a 30 m debajo de la superficie Terrestre. (b) Perfil gravitacional de una cavidad esférica a 30 m debajo de la superficie Terrestre.

A primera impresión puede decirse que los perfiles son aparentemente idénticos, esto es al notar la escala y la forma de ambos resultados. No obstante, para dar una descripción más detallada de la forma de los perfiles puede tomarse en ambos casos un corte del perfil gravimétrico con el fin de comparar la magnitud de la perturbación en cada punto del recorrido. Así, lo que se muestra en la Figura 4.10a es un corte en el perfil de perturbación gravimétrico de la Figura 4.9a, específicamente en el plano YZ cuando $x = 0$. Aquí puede apreciarse que la magnitud máxima de la perturbación es alcanzada en el punto $(0, 0)$, el cual, al mismo tiempo es la proyección del centro de la cavidad en el plano XY . Este comportamiento se repite en el caso del corte de la cavidad esférica, mostrado en la Figura 4.10b. Cabe mencionar que el parámetro del radio en la cavidad esférica fue calculado con el propósito de preservar el volumen de masa “faltante” al definir el tamaño de la cavidad cúbica; esto ayuda a tener una comparación

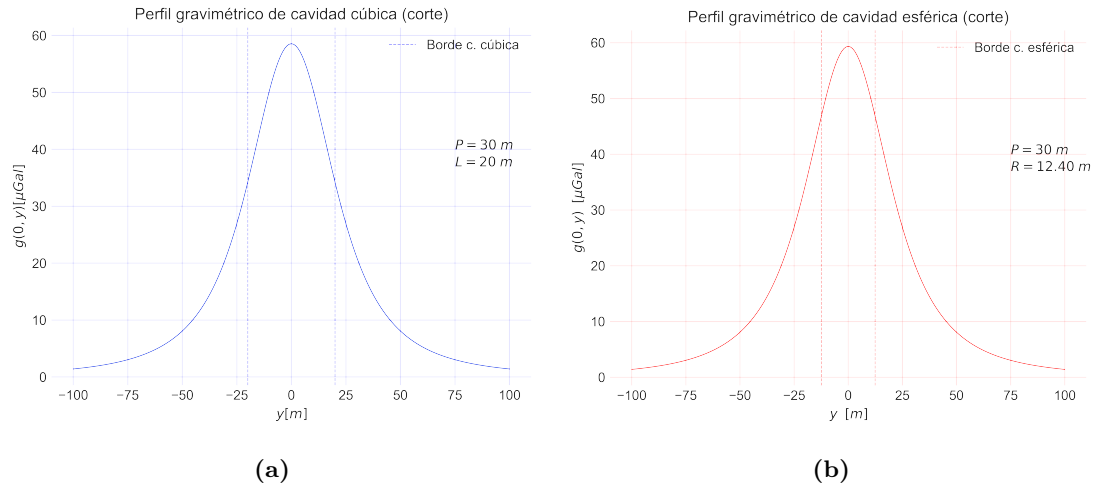


Figura 4.10: (a) Perfil gravitacional de una cavidad cúbica a 30 m debajo de la superficie Terrestre. (b) Perfil gravitacional de una cavidad esférica a 30 m debajo de la superficie Terrestre.

más uniforme en cuanto a la naturaleza de la presencia de las cavidades. Para las dos cavidades el máximo no sobrepasa los 60 μGal y el comportamiento a lo largo de la trayectoria de medida tiene la misma forma en la función decreciente. No obstante, para poder observar el cambio es necesario hacer la comparación de la medida en cada punto de la línea de medida. Para esto, basta con calcular la diferencia uno a uno de los valores en dicho conjunto de puntos. Esto último es lo que se muestra en la Figura 4.11. Ahí se puede distinguir el verdadero cambio entre la presencia de una cavidad cúbica a la misma pero con forma esférica. Sin embargo, el hecho más relevante en esta situación es que la máxima diferencia obtenida no sobrepasa los 0.8 μGal . Esto supone un problema mayor si la precisión del dispositivo implementado para las medidas gravitacionales es de a lo más 1 μGal . Esto se refiere a que tras un análisis de las medidas obtenidas no sería posible distinguir la forma precisa de la cavidad

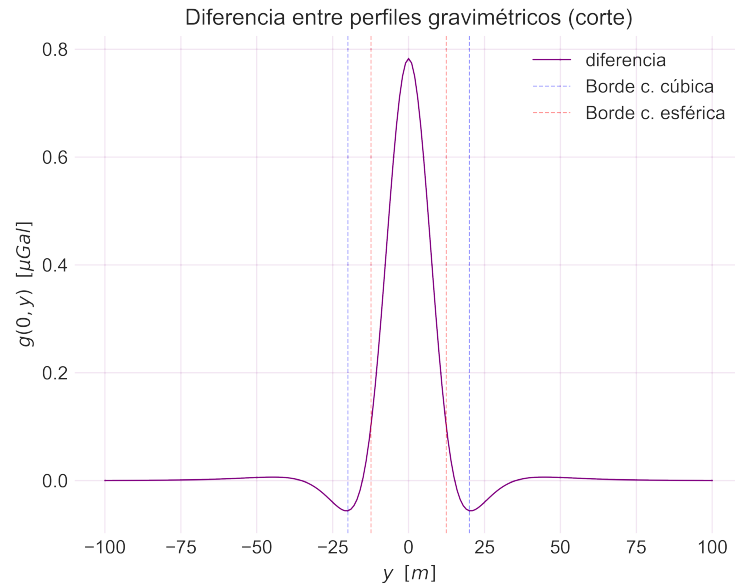


Figura 4.11: Diferencia entre los perfiles de las cavidades esférica y cúbica

Conclusiones y discusión

En este capítulo será descrito el análisis de los resultados obtenidos en las secciones anteriores haciendo énfasis desde una perspectiva en metrología y su precisión. De acuerdo al propósito de realizar una explicación sobre lo que implica trabajar con un gravímetro cuántico; primeramente es necesario notar la relevancia del funcionamiento detrás del dispositivo en estudio. La teoría de interferometría descrita en el Capítulo 2 resume la parte fenomenológica en un nivel académico especializado. Sin embargo, es de vital importancia expresar de manera formal dicha sección, puesto que es un proceso fundamental para la gran precisión que se alcanza con la tecnología actual. Es en el Capítulo 3 el concepto de interferometría es aterrizado en comprensión de una analogía con un dispositivo conocido, el interferómetro de Mach-Zehnder. Esto es una parte útil para aumentar la comprensión del proceso base del gravímetro. Así mismo, la descripción del proceso de medida infiere posibles variables de error considerando el proceso de medida en cada componente de la fase total.

5.1. Fuentes controladas en los errores de medición

El algoritmo descrito en la sección 3.2 presenta el método para calcular la diferencia de fase de acuerdo a los pulsos aplicados en el tiempo de vuelo. El punto central del gravímetro es medir la diferencia de fase acumulada a lo largo de la trayectoria que siguen las nubes atómicas de acuerdo a la evolución temporal de los estados internos al interactuar con los campos de luz. El primer aporte a la diferencia de fase es aquella que es resultado del movimiento sobre la trayectoria en un tiro parabólico o en caída libre de las nubes de átomos. Éste es el análogo a calcular el camino óptico de los haces que constituyen el interferómetro de Mach-Zehnder. Así pues, para obtener la fase asociada al movimiento, es necesario conocer la trayectoria que siguen las nubes mencionadas; esto es lo ya descrito en la sección 3.2.1, no obstante para llevar a cabo este procedimiento es obligatorio considerar un modelo gravitacional adecuado para obtener las ecuaciones deseadas. Con esto en mente, la forma de los modelos gravitacionales están dados de acuerdo a su distribución y composición de masa. El Capítulo 4 es la

comparación útil de tres posibles modelos de densidad terrestre. Como es de esperar, un modelo simple con densidad constante deja un amplio margen de error cuando se trata de medir perturbaciones gravitacionales. Luego entonces, un modelo con densidad lineal se acerca a la realidad del PREM que es una composición de gradientes de densidad lineal. Las medidas de perturbaciones gravitacionales cuando se usa el PREM en un régimen local de una única densidad lineal dejan claro que esta última es una buena aproximación cuando se trata de problemas a escala humana y a su vez reduce la complejidad de los cálculos numéricos involucrados. Además, a lo largo del proceso se pudieron identificar los parámetros asociados a las perturbaciones como profundidad y tamaño. Es por esto que la aproximación de un gradiente gravitacional lineal es importante para reducir una fuente de error localizada en la suposición del modelo gravitacional implementado. Considerando lo anterior, se puede decir que el avance en la descripción del modelo terrestre tiene consecuencias positivas en el desarrollo de tecnologías cuánticas como la presente en esta Tesis, que combina el alcance metrológico de un reloj atómico con la capacidad de medir una caída con alta precisión.

5.2. Aportaciones de este trabajo

En el presente escrito fue posible una descripción concisa del funcionamiento de un gravímetro cuántico, comprendiendo antes la técnica de interferometría asociada al proceso de medida. Luego, de acuerdo a los modelos gravitacionales terrestres utilizados, fue mostrado el rango de aplicación en la detección de impurezas debajo de la superficie terrestre. Esto deja ver la diferencia y el posible error que existiría de no considerar una descripción adecuada del medio en el que se realiza la medición gravitacional. A la par, se desarrolló un método para identificar impurezas en la corteza terrestre haciendo uso del PREM para dar un inicio a una referencia teórica de las medidas gravitacionales que se pueden obtener en la práctica mediante el gravímetro de muy alta precisión. La construcción de sistemas de medida con el alcance mencionado dejan ver la evolución del avance tecnológico respecto a su contraparte teórica. Esto es, por ejemplo, hoy en día se hace uso de lo que antes eran meras curiosidades académicas para la elaboración de técnicas de medida de alta precisión.

5.3. Perspectivas a futuro

Hacer un modelo tipo tomográfico a partir de mediciones experimentales para inferir las estructuras debajo de la superficie terrestre, pero dentro de la corteza y en el rango de aplicaciones de interés humano. Cuando el prototipo de gravímetro cuántico esté terminado habrá que hacer comparaciones entre la precisión predicha por este trabajo y las que se obtengan experimentalmente. A su vez, el desarrollo de éste dispositivo promueve la práctica de técnicas no invasivas de análisis geológico. Pudiendo así detectar yacimientos mineros y acuíferos dentro de los parámetros establecidos. El uso

de dichas técnicas tendría un amplio conjunto de ventajas logísticas, por su precisión y rapidez. Además, el desarrollo de estos dispositivos de muy alta precisión permitirá seguir desarrollando otros nuevos en medio de lo que hoy se podría conocer como la segunda revolución cuántica.

Por otro lado, los retos a combatir en la práctica son variados como la decoherencia persistente en sistemas cuánticos, asociada a factores externos. Mejorar las técnicas de aislamiento es el enfoque necesario en este aspecto. Así mismo, el complejo desarrollo de tecnologías cuánticas puede ser otro factor a considerar. El surgimiento de descripciones como la presentada en este trabajo puede ayudar a compartir el estado del arte a grupos que tengan algo que aportar a futuros proyectos. Así mismo, el continuo avance en técnicas en metrología se puede alcanzar una vez que se ha comprendido y mejorado el funcionamiento de dispositivos cuánticos, que a su vez pueden generar otros más complejos, constituidos por los más “simples”. Ejemplo de lo anterior es una composición de dos gravímetros cuánticos en serie que den paso a la elaboración de un gradiómetro¹, con la esperanza de ir a precisiones todavía mayores dentro de dispositivos relativamente compactos.

¹Un gradiómetro es un dispositivo que proporciona tanto el valor del campo gravitacional como el de su gradiente, ambos con muy alta precisión.

Bibliografía

- [1] Mark Kasevich and Steven Chu. Atomic interferometry using stimulated raman transitions. *Physical Review Letters*, 67:181–184, 1991. [1](#), [13](#)
- [2] A. Peters, K. Y. Chung, and S. Chu. High-precision gravity measurements using atom interferometry. *Metrologia*, 38:25–61, 2001. [1](#)
- [3] Lin Zhou, Zong Yuan Xiong, Wei Yang, Biao Tang, Wen Cui Peng, Yi Bo Wang, Peng Xu, Jin Wang, and Ming Sheng Zhan. Measurement of local gravity via a cold atom interferometer. *Chinese Physics Letters*, 28, 2011. [1](#)
- [4] Ch J. Bordé. Atomic interferometry with internal state labelling. *Physics Letters A*, 140:10–12, 1989. [1](#)
- [5] V. N. Baryshev and I. Yu. Blinov. Application of atomic interferometers in gravimetry. *Measurement Techniques*, 57:1333–1337, 3 2015. [2](#)
- [6] J Hinderer, M Amalvict, D Crossley, J-J Leveque, L Rivera, and B Luck. Tides, earthquakes and ground noise as seen by the absolute gravimeter fg5 and its superspring; comparison with a superconducting gravimeter and a broadband seismometer. *Metrologia*, 39:495–501, 10 2002. [2](#)
- [7] L Vitushkin, M Becker, Z Jiang, O Francis, T M van Dam, J Faller, J-M Chartier, M Amalvict, S Bonvalot, N Debeglia, S Desogus, M Diament, F Dupont, R Falk, G Gabalda, C G L Gagnon, T Gattacceca, A Germak, J Hinderer, O Jamet, G Jeffries, R Kker, A Kopaev, J Liard, A Lindau, L Longuevergne, B Luck, E N Maderal, J Mkinen, B Meurers, S Mizushima, J Mrlina, D Newell, C Origlia, E R Pujol, A Reinhold, Ph Richard, I A Robinson, D Ruess, S Thies, M Van Camp, M Van Ruymbek, M F de Villalta Compagni, and S Williams. Results of the sixth international comparison of absolute gravimeters, icag-2001. *Metrologia*, 39:407–424, 10 2002. [2](#)
- [8] G. Rosi, G. D’Amico, L. Cacciapuoti, F. Sorrentino, M. Prevedelli, M. Zych, Č. Brukner, and G. M. Tino. Quantum test of the equivalence principle for atoms in coherent superposition of internal energy states. *Nature Communications*, 8:15529, 6 2017. [2](#)

- [9] General conference on weights and measures. Number 1, page 472. National Institute of Standards and Technology, 2018. [2](#)
- [10] D. S. Weiss, B. C. Young, and S. Chu. Precision measurement of h/m cs based on photon recoil using laser-cooled atoms and atomic interferometry. *Applied Physics B Lasers and Optics*, 59:217–256, 9 1994. [2](#)
- [11] Conny Glaser, Florian Karlewski, Julien Kluge, Jens Grimmel, Manuel Kaiser, Andreas Günther, Helge Hattermann, Markus Krutzik, and József Fortágh. Absolute frequency measurement of rubidium transitions. *Physical Review A*, 102:012804, 7 2020. [2](#)
- [12] Ben Stray, Andrew Lamb, Aisha Kaushik, Jamie Vovrosh, Anthony Rodgers, Jonathan Winch, Farzad Hayati, Daniel Boddice, Artur Stabrawa, Alexander Niggelbaum, Mehdi Langlois, Yu-Hung Lien, Samuel Lellouch, Sanaz Roshanmanesh, Kevin Ridley, Geoffrey de Villiers, Gareth Brown, Trevor Cross, George Tuckwell, Asaad Famarzi, Nicole Metje, Kai Bongs, and Michael Holynski. Quantum sensing for gravity cartography. *Nature*, 602:590–594, 2 2022. [3](#)
- [13] S Merlet, J Le Gouët, Q Bodart, A Clairon, A Landragin, F Pereira Dos Santos, and P Rouchon. Operating an atom interferometer beyond its linear range. *Metrologia*, 46:87–94, 2 2009. [3](#)
- [14] Anne Louchet-Chauvet, Tristan Farah, Quentin Bodart, André Clairon, Arnaud Landragin, Sébastien Merlet, and Franck Pereira Dos Santos. The influence of transverse motion within an atomic gravimeter. *New Journal of Physics*, 13:065025, 6 2011.
- [15] Matthias Hauth, Christian Freier, Vladimir Schkolnik, Achim Peters, H. Wziontek, and M. Schilling. *Atom interferometry for absolute measurements of local gravity*, volume 188, pages 557–586. IOS Press Ebooks, 2014. [3](#)
- [16] O. Firstenberg, M. Shuker, R. Pugatch, D. R. Fredkin, N. Davidson, and A. Ron. Theory of thermal motion in electromagnetically induced transparency: Effects of diffusion, doppler broadening, and dicke and ramsey narrowing. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 77, 2008. [3](#)
- [17] Xuejian Wu, Zachary Pagel, Bola S. Malek, Timothy H. Nguyen, Fei Zi, Daniel S. Scheirer, and Holger Müller. Gravity surveys using a mobile atom interferometer. *Science Advances*, 5, 9 2019. [3](#)
- [18] A. Gauguet, T. E. Mehlstäubler, T. Lévêque, J. Le Gouët, W. Chaibi, B. Canuel, A. Clairon, F. Pereira Dos Santos, and A. Landragin. Off-resonant raman transition impact in an atom interferometer. *Physical Review A*, 78:043615, 10 2008. [3](#)

-
- [19] J. Le Gouët, P. Cheinet, J. Kim, D. Holleville, A. Clairon, A. Landragin, and F. Pereira Dos Santos. Influence of lasers propagation delay on the sensitivity of atom interferometers. *The European Physical Journal D*, 44:419–425, 9 2007. [3](#)
- [20] Christian J. Bordé. Theoretical tools for atom optics and interferometry. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IV - Physics*, 2:509–530, 4 2001. [3](#)
- [21] Ch J. Bordé. Atomic clocks and inertial sensors. *Metrologia*, 39:435–463, 2002.
- [22] Stefano Cusumano, Andrea Mari, and Vittorio Giovannetti. Interferometric quantum cascade systems. *Physical Review A*, 95:27–30, 2017. [3](#)
- [23] Kathryn Moler, David S. Weiss, Mark Kasevich, and Steven Chu. Theoretical analysis of velocity-selective raman transitions. *Physical Review A*, 45:342–348, 1992. [5](#)
- [24] Norman F. Ramsey. A molecular beam resonance method with separated oscillating fields. *Physical Review*, 78:695–699, 6 1950. [6](#)
- [25] Paul R. Berman. *Atom Interferometry*, volume 53. Academic Press, 1997. [6](#)
- [26] Harold J. Metcalf and Peter van der Straten. Laser cooling and trapping, 2000. [6](#)
- [27] Jonathan P. Dowling and Gerard J. Milburn. Quantum technology: the second quantum revolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 361:1655–1674, 8 2003. [20](#)
- [28] BIPM. *General Conference on Weights and Measures*. BIPM, 2018. [20](#)
- [29] Vladislav Gerginov and Gregory Hoth. Nist's cesium fountain atomic clocks, May 2023. [28](#)
- [30] W. Ward. Planetary accretion. pages 337–360, 1996. [30](#)
- [31] John C B Papaloizou and Caroline Terquem. Planet formation and migration. *Reports on Progress in Physics*, 69:119–180, 1 2006.
- [32] Michael Woolfson. *The Formation of the Solar System*. Imperial Collage Press, 11 2014. [30](#)
- [33] S. R. Taylor. Chondritic earth model. *Nature*, 202:281–282, 4 1964. [30](#)
- [34] Adam M. Dziewonski and Don L. Anderson. Preliminary reference earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25:297–356, 6 1981. [30](#)
- [35] Ye.A. Kozlovsky. *The Superdeep well of the Kola Peninsula*. Springer Verlag, 1987. [33](#)

- [36] K. Fuchs, Kozlovsky. E.A., A.I. Krivtsov, and M.D. Zoback. *Super-Deep Continental Drilling and Deep Geophysical Sounding*. Springer Verlag, 1990. [33](#)
- [37] Yannick Bidel, Olivier Carraz, Renée Charrière, Malo Cadoret, Nassim Zahzam, and Alexandre Bresson. Compact cold atom gravimeter for field applications. *Applied Physics Letters*, 102:144107, 4 2013. [33](#)