



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – INSTRUMENTACIÓN

EL MÉTODO DE ESPECTRO ANGULAR PARA EL ANÁLISIS EFICIENTE DE LA  
REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ULTRASONIDO EN EL DISEÑO DE  
SENSORES DE GAS.

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ALEJANDRO ERASMO ORTEGA Y AGUILAR ÁLVAREZ

TUTORES PRINCIPALES  
DR. AUGUSTO GARCÍA VALENZUELA, ICAT  
DR. GABRIEL EDUARDO SANDOVAL ROMERO, ICAT  
COMITÉ TUTOR  
DR. PEDRO JESUS ACEVEDO CONTLA, IIMAS  
DR. PABLO RENDON GARRIDO, ICAT  
DR. ROBERTO VELASCO SEGURA, ICAT

CIUDAD DE MÉXICO. DICIEMBRE 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. RASCÓN ESTEBANÉ CALEB ANTONIO  
Secretario: DR. CEBALLOS HERRERA DANIEL ENRIQUE  
1er. Vocal: DR. GARCÍA VALENZUELA AUGUSTO  
2do. Vocal: DR. SANDOVAL ROMERO GABRIEL EDUARDO  
3er. Vocal: DR. VELASCO SEGURA ROBERTO

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad de México, México

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Augusto García Valenzuela

---

**FIRMA**

# CONTENIDO

CONTENIDO .....	3
RESUMEN .....	4
1 INTRODUCCIÓN .....	5
2 MARCO TEÓRICO .....	10
2.1 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN Y DE ESTADO.....	10
2.2 ECUACIÓN DE ONDA.....	15
2.3 REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN ENTRE DOS MEDIOS CON INTERFAZ PLANA .....	19
2.4 MEMBRANA ENTRE DOS MEDIOS.....	25
2.5 REFLECTANCIA, TRANSMITANCIA Y ÁNGULOS DE INCIDENCIA ESPECIALES .....	31
2.6 ONDAS ACÚSTICAS DIFRACTANTES; LA INTEGRAL DE RAYLEIGH .....	37
3 EL MÉTODO DE ESPECTRO ANGULAR.....	45
3.1 TRANSFORMADA DE FOURIER.....	45
3.2 PROPAGACIÓN DE SONIDO A PARTIR DE UN PLANO .....	48
3.3 REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN .....	52
3.4 DISCRETIZACIÓN DEL CÁLCULO CON EL ASM Y CASO BIDIMENSIONAL.....	57
4 VALIDACIÓN DEL ASM PARA PROPAGACIÓN Y REFLEXIÓN DE HACES ACÚSTICOS .....	60
4.1 COMPARACIÓN CONTRA OTROS MÉTODOS COMPUTACIONALES .....	60
4.2 COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES.....	68
5 DISEÑO DE SENSORES ACÚSTICOS PARA DETECCIÓN DE GASES .....	71
5.1 EVALUACIÓN DE LA REFLEXIÓN DE UN HAZ ULTRASÓNICO EN EL AIRE PARA LA DETECCIÓN DE GASES .....	71
5.2 PROTOTIPO: DESARROLLO Y PRUEBAS .....	77
CONCLUSIONES.....	84
BIBLIOGRAFÍA .....	86
Apéndice 1 CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS .....	95
Apéndice 2 DEMOSTRACIONES DE LAS ECUACIONES (2.10) Y (2.11) .....	98
Apéndice 3 EL ASM APLICADO A CAMPOS VECTORIALES .....	100

# RESUMEN

En la actualidad existen pocos procedimientos con los cuales se pueda simular de manera precisa y rápida fenómenos de reflexión y transmisión en acústica. El modelo de onda plana, en general, no es apropiado para tratar este tipo de problemas, ya que, en la mayoría de los casos, las distancias y dimensiones involucradas serán aproximadamente de la misma magnitud que la longitud de onda del campo acústico, por lo que los efectos de difracción serán relevantes. Algunos modelos para calcular la difracción de haces de sonido, como la integral de Rayleigh, no son apropiados en problemas de reflexión y transmisión; aplicar los coeficientes de reflexión y transmisión de onda plana directamente en este caso introduciría un error por sí mismo. Sin embargo, el método del espectro angular, por tratarse de una expansión de ondas planas, pueden emplear dichos coeficientes de manera natural.

Debido a esto, en el presente trabajo se examina el uso del método del espectro angular para simular la reflexión de haces de ultrasonido en aire desde una membrana delgada que separa el aire de una mezcla de aire y otro gas. La principal ventaja de este método es su alta velocidad y eficiencia, lo que es de mucha utilidad como por ejemplo para cálculos de diseño de sensores. El código para el método del espectro angular implementado en esta tesis se valida con un código de la integral de Rayleigh en una simulación de propagación pura. Además, se comparan los cálculos de reflexión de un haz de ultrasonido utilizando el método del espectro angular con resultados numéricos obtenidos con el método de elementos finitos y mediciones experimentales, encontrando buena concordancia en ambos casos.

Posteriormente, se utiliza el método del espectro angular para estimar la sensibilidad de las señales de reflexión especular a variaciones en la composición del medio de incidencia en función del ángulo de incidencia. Se investiga la posible sensibilidad cuando existe un ángulo crítico, un ángulo de coincidencia y cuando hay interferencia entre el haz incidente y el reflejado, encontrándose condiciones en las que una señal de reflexión que utiliza un emisor/receptor de ultrasonido comercial económico a 40 kHz, en una configuración simple, ofrece una sensibilidad suficientemente alta adecuada para monitorear la calidad del aire en interiores.

Se construyó un prototipo de sensor de dióxido de carbono basado en las predicciones mencionadas, que mostró una buena sensibilidad y que alcanza una resolución de detección de  $\text{CO}_2$  de 60 PPM, la cual es comparable con la de sensores de  $\text{CO}_2$  comerciales basados en tecnologías de estado sólido. Sin embargo el tiempo de respuesta del sensor ultrasónico es más rápido.

# 1 INTRODUCCIÓN

Las ondas acústicas, ya sea propagándose libremente en un medio, guiadas o como ondas superficiales, se pueden utilizar de diferentes maneras para fines de detección. Un problema de interés general hoy en día, es monitorear la calidad del aire en interiores para preservar un ambiente saludable. La acumulación en el interior de determinados gases distintos del aire puede ser motivo de alarma. Por ejemplo, el aumento en la concentración de  $\text{CO}_2$  en el interior puede indicar que hay demasiadas personas respirando el mismo aire simultáneamente y, por lo tanto, se necesita una mejor ventilación [1 - 3]. Un aumento en el  $\text{CO}_2$  también podría indicar que hay un incendio cercano en curso y se requiere una acción inmediata. Si aumenta la concentración de metano, propano o hidrógeno en el aire, puede indicar que hay una fuga de gas cercana y que existe riesgo de explosión.

Existen numerosos sensores de gas en el mercado hoy en día para determinar la concentración de diferentes gases en el aire, y así monitorear su calidad o detectar diferentes tipos de fugas de gas [4 - 22]. Sin embargo, si el propósito es básicamente detectar desviaciones de una composición de aire ideal, cualquiera que fuere la razón, podría ser necesario un sensor no específico. Entonces, este tipo de sensores deben ser estudiados para desarrollar nuevas posibilidades que sean más simples, más eficientes y menos costosas.

Por ejemplo, el uso de ondas acústicas para monitorear la calidad del aire en interiores ofrece las formas más simples de detectar variaciones en la composición del mismo. De hecho, la impedancia acústica característica y la velocidad del sonido en un gas dependen de su composición y, por lo tanto, cualquiera de las propiedades puede usarse como una medida indirecta de la concentración de los componentes del gas. Efectivamente, ya se han propuesto algunos sensores compactos, económicos y de alta resolución que traducen un cambio en la velocidad del sonido, debido a un cambio en la concentración de  $\text{CO}_2$ , en una señal eléctrica medible [23 - 27], afirmando una resolución de hasta 1 PPM. No obstante, los dispositivos propuestos se basan en un resonador cerrado con el emisor y el detector colocados en su interior, lo que requiere un sistema de bombeo para introducir y sacar el aire exterior del resonador. Uno puede preguntarse si es posible crear dispositivos más simples con suficiente sensibilidad para aplicaciones similares. Por lo tanto, vale la pena estudiar variaciones del caso anterior. Por ejemplo, se pueden pensar alternativas más flexibles basadas en reflejar un haz de ultrasonido desde una membrana delgada rodeada del aire ambiente. A menudo, la reflexión de ondas se puede utilizar para la detección remota sin contacto [28 - 31]. La amplitud del haz reflejado dependerá de las propiedades acústicas de la

membrana y de los medios de incidencia y transmisión. Los campos de ultrasonido en un detector, colocados a lo largo de la dirección de reflexión especular y mirando hacia atrás, dependerán de la existencia de un ángulo de coincidencia para la membrana, un ángulo crítico y de la posible interferencia entre los campos de ultrasonidos incidente y reflejado. Si tales ideas ofrecen suficiente sensibilidad para las aplicaciones de detección de gases, y si son factibles en la práctica o no, no está claro de inmediato, y esta es la principal motivación del presente documento.

Una primera aproximación para estimar los cambios en la reflexión del ultrasonido desde una interfaz plana es suponer que un haz de este ultrasonido se refleja como una onda plana. Bajo circunstancias específicas, el coeficiente de reflexión de este tipo de ondas chocando sobre una interfaz plana puede cambiar rápidamente con el ángulo de incidencia o con la velocidad de las ondas en el medio de incidencia o transmisión, por ejemplo, en el ángulo crítico [32 - 39] o en el de coincidencia [40 - 42], cuando estos se presentan.

Sin embargo, en la práctica, no se pueden usar ondas planas sino haces difractados de ancho finito. Así, lo que podría considerarse una alta sensibilidad del coeficiente de reflexión en onda plana para un ángulo de incidencia o para las propiedades de la incidencia y los medios externos, generalmente será menor, quizás mucho menor, cuando se utiliza un haz de difracción.

Cuando la longitud de onda es muy pequeña en comparación con las dimensiones del emisor y la distancia entre la interfaz, el emisor y el receptor, como es el caso en óptica, los efectos de difracción pueden ser mínimos, pero en las ondas de ultrasonido viajando por el aire, en el intervalo de frecuencia entre 20 y 80 kHz, la longitud de onda es entre 17 y 4 mm. Por lo tanto, en arreglos prácticos previstos para el monitoreo de reflexión de ultrasonido, la distancia entre la fuente y el detector no será mucho mayor que la longitud de onda, y los efectos de difracción, con su correspondiente interferencia, serán importantes [43 - 49].

Hay diferentes formas de simular la propagación, la reflexión y la transmisión de haces difractantes. Las soluciones numéricas basadas en el método de elemento finito (Finite Element Method, FEM, por sus siglas en inglés) son posibles siempre que el volumen de interés no sea demasiado grande comparado con la longitud de onda, de lo contrario los cálculos se vuelven demasiado costosos en tiempo y recursos computacionales [50 - 55]. Los métodos analíticos como la integral de Rayleigh [56] son útiles para calcular la radiación y propagación de campos acústicos en medios homogéneos; sin embargo, la integral de Rayleigh no se puede aplicar a los problemas de reflexión. La razón es que descompone los campos incidentes en ondas esféricas, y no se disponen de métodos analíticos para calcular la reflexión y transmisión de ondas esféricas desde interfaces planas. En este caso, el método del espectro angular [57] (Angular Spectrum Method, ASM, por sus siglas

en inglés) es claramente más conveniente. Además de haber sido ya utilizado para simular los efectos de difracción en óptica permitiendo un modelado eficiente de difracción fuera del eje de propagación con alta precisión [58 - 61], también ha sido utilizado con éxito en el campo de la acústica [62 - 72]; y tiene la ventaja de poder aplicarse fácilmente a la reflexión y transmisión de haces acústicos desde interfaces planas, ya que este método expande el campo acústico en un continuo de ondas planas; cada una de estas es capaz de producir una onda reflejada y una transmitida que pueden ser calculadas de forma sencilla utilizando la ley de Snell y los bien conocidos coeficientes de transmisión y reflexión para ondas planas.

Extender el ASM a problemas de reflexión y transmisión de haces bien definidos desde interfaces planas consiste básicamente en utilizarlo para calcular los campos radiados por la fuente y el proveniente de una fuente imagen, que se suma para satisfacer las condiciones de frontera en la interfaz. Las condiciones de frontera para cada onda plana en la interfaz se satisfacen sumando las ondas planas reflejadas y transmitidas con amplitudes dadas por los coeficientes de reflexión y transmisión de ondas planas, respectivamente [73 - 77].

El objetivo de este trabajo es múltiple. Por un lado, validar un marco matemático conveniente para simular la reflexión y la transmisión de haces de ultrasonido difractantes en una interfaz plana. Aunque el ASM ha sido empleado en el campo de la acústica tal y como se mencionó anteriormente, hasta donde se pudo indagar en el presente trabajo, no se encuentran casos en los cuales se incluyan problemas de reflexión y transmisión. Por lo que es necesario primeramente conocer la precisión del ASM al tratar dichos problemas, lo cual no resulta obvio. Conjeturar extendiendo en base a resultados de óptica no sería confiable, ya que en tal caso las distancias entre la fuente y el detector con la interfaz son mucho mayores a la longitud de onda de la luz (considerando luz en el espectro visible) lo que, en el caso acústico en general no es cierto.

Por otro lado, un objetivo más de esta tesis es usar este método en el diseño de sensores para aplicaciones de detección de calidad del aire, estimando la sensibilidad alcanzable en el cambio de la composición de una muestra mediante la reflexión de un haz ultrasónico sobre una membrana delgada, que separa dicha muestra de otra muestra de control. Este punto es una de las principales motivaciones del presente trabajo, ya que en la actualidad no se cuenta de herramientas de diseño eficientes con las que, con relativa facilidad, se pueda modelar la señal generada por sensores ultrasónicos en gases y, en general en fluidos. Por ejemplo, una herramienta muy utilizada actualmente son las simulaciones numéricas por el método de elemento finito [78 - 82]. Sin embargo, con este método es necesario calcular el campo acústico en todo el volumen entre el emisor y la región de interés; en contraste, con el ASM, de ser suficientemente



preciso, se podrían lograr simulaciones mucho más eficientes ya que sería posible solo calcular el campo acústico en la apertura del detector. De esta manera, el ASM podría ser utilizado para simular la señal en arreglos o sensores pensados para monitorear la composición de un gas, o en general de un fluido, y estimar la sensibilidad como función de todos los parámetros del sensor o arreglo experimental.

El último objetivo es utilizar el ASM para analizar y diseñar un sensor para el monitoreo de calidad de aire en ambientes cerrados y con ello diseñar y construir un prototipo funcional para comprobar la viabilidad del método, así como su eficacia.

En la actualidad existen diversos sensores acústicos de gas económicos y bastante eficientes. Cabe mencionar el descrito en [24], cuyo propósito es la detección de “contaminantes” en el aire, específicamente  $\text{CO}_2$ ; su funcionamiento se basa en un oscilador cuya frecuencia está controlada por un filtro, consistente en un par transmisor-receptor de ultrasonidos mantenidos a una distancia constante y que operan en el rango de 40 kHz. Las variaciones en la concentración de  $\text{CO}_2$  serán proporcionales a las variaciones en la frecuencia del oscilador, o ruido de fase, que a su vez serán consecuencia del cambio en la velocidad de propagación del sonido provocada por la variación en  $\text{CO}_2$ . De lo anterior se desprende que medir las diferencias de frecuencia es equivalente a medir la concentración de  $\text{CO}_2$ .

El diseño de este sensor es relativamente sencillo y además declaran alcanzar una resolución de 3 PPM, aunque como inconveniente se tiene que utilizar electrónica más sensible a la temperatura ya que debe controlarla minuciosamente, a fin de que las variaciones en la frecuencia dependan solo de las variaciones en la concentración de  $\text{CO}_2$ . Este ejemplo muestra que todo diseño puede llegar a tener inconvenientes que dependiendo de la situación podrían llegar a ser importantes, por lo que es necesario tener una gama amplia de posibilidades de donde escoger la opción más conveniente para cada caso.

Por lo anterior, vale la pena estudiar sensores cuyo principio de funcionamiento sea diferente; por ejemplo, los basados en el cambio de la amplitud de la señal, como es el caso presente, ya que en primera instancia la electrónica necesaria es más sencilla y no son tan dependientes de la temperatura.

Algunos resultados están publicados en un artículo de conferencia en geometría bidimensional y para una interfaz gas-gas sin membrana física: A. Ortega-Aguilar, R. Velasco-Segura, A. García-Valenzuela, G. E. Sandoval-Romero, “Numerical simulation of ultrasound oblique reflection in a 2D gas-gas interface,” Proc. Mtgs. Acoust. 42, 022003 (2020) [83]. El caso tridimensional incluyendo una membrana sólida separando dos semiespacios de diferentes fluidos se aborda en el artículo: A. Ortega-Aguilar, R. Velasco-Segura, A. García-Valenzuela, G. E. Sandoval-

Romero, “An efficient analysis of oblique reflection of airborne ultrasound beams from thin membranes for gas sensing”, J. Acoust. Soc. Am. 152 (6), (2022). <https://doi.org/10.1121/10.0016580> [84]. Parte de esta tesis está basada, y extiende las dos referencias mencionadas, además de reportar la realización y evaluación experimental de un sensor de calidad de aire en interiores.

## 2 MARCO TEÓRICO

Este capítulo está dedicada a aportar los conocimientos esenciales sobre ondas acústicas para entender la investigación realizada en esta tesis. Por lo tanto, no pretende ser exhaustivo, pero sí dejar lo más claro posible los temas que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

Aunque en sólidos las ondas acústicas pueden ser tanto longitudinales como transversales, en fluidos solo tienen carácter longitudinal, siendo este último tipo el único que sea tratado ya que nuestro objetivo va dirigido a gases. Asimismo, solo se contemplarán ondas planas en medios con viscosidad nula y los efectos gravitacionales, así como los de cualquier otra fuerza de cuerpo, serán despreciables. También se asume que no existe transferencia calórica en la propagación de las ondas acústicas.

En la primera subsección se desarrollarán los postulados de conservación-balance en fluidos, mismos que se utilizarán para derivar la ecuación de onda, lo cual será visto en la segunda sección. En la tercera sección se deducirán los coeficientes de reflexión y transmisión para onda plana a partir de las condiciones en la frontera de una interfaz entre dos medios, mismos que serán cruciales a lo largo de este trabajo. Posteriormente se volverán a derivar los coeficientes de reflexión y transmisión, pero considerando los efectos de una membrana sólida y delgada (con respecto a la longitud de onda del campo acústico) colocada en la interfaz entre medios. Por último, se presentará un método por el cual se puede hacer una representación más realista de los campos acústicos, conocido como la integral de Rayleigh, en el que se incorporan los efectos de la difracción en dichos campos. Adicionalmente, en el Apéndice 1 se exponen algunos conceptos básicos de mecánica de fluidos que podrían ayudar a comprender mejor ciertos puntos de esta sección.

### 2.1 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN Y DE ESTADO

A continuación, se procede a derivar las ecuaciones de conservación en fluidos, que a su vez serán empleadas para derivar la ecuación de onda en acústica.

Se empezará por la ecuación de conservación de la masa, también conocida como ecuación de continuidad. Primeramente, considérese un volumen de control arbitrario  $V$  y asúmase que en el interior de dicho volumen no existen fuentes ni sumideros de masa. Por el principio de conservación de la masa se puede afirmar que la razón de cambio temporal de la masa en el interior de  $V$  es igual al flujo neto

de masa que atraviesa la superficie  $A$  que delimita a  $V$ . Matemáticamente esto se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \vec{u} \cdot \hat{n} dA, \quad (2.1)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario normal a  $dA$  cuyo sentido apunta al exterior de  $V$ . La justificación de la integral de la parte derecha de la ecuación (2.1) se debe a que en general la densidad  $\rho$  será función tanto del tiempo como de la posición; integrar esta función en todos los puntos interiores a  $V$  dará la masa total contenida en el volumen de control.

Por otro lado, la explicación del lado derecho es la siguiente: debido a que el vector de velocidad de partícula  $\vec{u}$  no tiene porque ser normal a la superficie, se debe aplicar el producto escalar para obtener el flujo de masa a través de cada elemento de área, esto garantiza que solo la componente normal de  $\vec{u}$  con respecto a  $\hat{n}$  se tome en cuenta. El signo negativo se debe a que cuando existe alguna componente de  $\vec{u}$  que se dirija al interior de  $V$ , hay un incremento de masa, sin embargo, el producto escalar  $\rho \vec{u} \cdot \hat{n}$  será negativo ya que el ángulo entre vectores rebasará los  $90^\circ$ .

La ecuación (2.1) es la forma integral de la ecuación de continuidad. Para convertirla en su forma diferencial primeramente se observa que, en el término de la izquierda el volumen no depende del tiempo ya que se trata de un volumen de control; debido a ello y por la regla de integración de Leibniz, la derivada de la integral se convierte en la integral de la derivada:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.2)$$

Además, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss al lado derecho de (2.1), se puede convertir la integral de superficie en una integral de volumen, quedando:

$$- \oint_S \rho \vec{u} \cdot \hat{n} dA = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV. \quad (2.3)$$

Agrupando ambos términos resulta:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV = 0. \quad (2.4)$$

Nótese que el volumen de integración  $V$  es arbitrario, por lo que la igualdad anterior se debe cumplir en cualquier lugar del espacio y para todos los tamaños de

volumen. La única forma para que esto sea posible, es que el integrando también sea nulo, con lo que resulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (2.5)$$

Siendo esta última expresión la forma diferencial de la ecuación de continuidad. Otra forma de expresarla es primeramente expandir el término de la divergencia:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \\ &= u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

obteniendo así:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.7)$$

Haciendo uso de la ecuación (A1.3) se llega a:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.8)$$

A continuación, se derivará la ecuación de conservación de momentum. Suponiendo un volumen de control y condiciones iguales al caso anterior, se puede asumir que la razón de cambio temporal del momentum en el interior de  $V$  será el resultado de todas las fuerzas externas que actúen sobre  $V$  más el momentum del flujo neto de las partículas que atraviesan la superficie que delimita a  $V$ .

Las fuerzas externas pueden ser de dos tipos: fuerzas superficiales como la producida por la presión o las fuerzas cortantes debidas a la viscosidad, o fuerzas de cuerpo tales como las producidas por campos de fuerza (gravedad, electromagnético). Sin embargo, como se mencionó al principio se considerará que tanto la viscosidad como las fuerzas de cuerpo se pueden despreciar, por lo que la única fuerza externa a tomar en cuenta es aquella producida por la presión. Matemáticamente, esto se puede expresar de forma integral como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV = - \oint_S P \hat{n} dA - \oint_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA, \quad (2.9)$$

siendo ésta la forma integral de la ecuación de conservación de momentum. Los signos negativos del lado derecho de la ecuación (2.9) se deben, como en el caso

de la ecuación de continuidad, a que el sentido de  $\hat{n}$  apunta hacia el exterior de  $V$ , opuesto a la convención de sentido positivo de la fuerza producto de la presión y del flujo de partículas.

Para convertir (2.9) a su forma diferencial se introducirán un par de corolarios cuyas demostraciones se llevan a cabo en el Apéndice 2, y los cuales son:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \oint_S \varphi \hat{n} dA, \quad (2.10)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{G} + \vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} (\vec{G} \cdot \hat{n}) dA, \quad (2.11)$$

para cualquier función escalar  $\varphi$  y cualesquiera dos funciones vectoriales  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$ .

Sustituyendo en la ecuación (2.9) las ecuaciones (2.10) y (2.11) con  $\varphi = P$ ,  $\vec{F} = \rho \vec{u}$  y  $\vec{G} = \vec{u}$  se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV = - \int_V \nabla P dV - \int_V (\nabla \cdot \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)) \rho \vec{u} dV. \quad (2.12)$$

Con los mismos razonamientos que los empleados en el caso de la ecuación de continuidad (la derivada del miembro izquierdo puede entrar en la integral, todos los términos se pueden unir en una sola integral y la validez de la ecuación resultante para cualquier volumen de control hace necesario que la anulación de la integral implique la anulación del integrando), la ecuación anterior se puede simplificar a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{u}) \rho \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho \vec{u} + \nabla P &= 0, \\ \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{u} (\vec{u} \cdot \nabla \rho) + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla P &= 0, \\ \vec{u} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla \rho) \right) + \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) + \nabla P &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Los términos del primer paréntesis se anulan en virtud de la ecuación de continuidad (2.7), obteniendo así la forma diferencial de la ecuación de conservación de momentum:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) + \nabla P = 0. \quad (2.14)$$

Haciendo uso de la ecuación (A1.3) se puede llegar a una forma aún más simplificada, donde aparece la derivada material:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla P = 0. \quad (2.15)$$

Por último, se obtendrá la ecuación de estado. Una ecuación de este tipo es simplemente una relación entre variables termodinámicas; una especialmente útil en este caso, debido al hecho de involucrar variables empleadas en acústica, es  $P = (\rho, s)$ , es decir, la presión  $P$  como función de la densidad  $\rho$  y la entropía  $s$ . Sin embargo, si se considera un sistema sin pérdidas (fluidos no viscosos y sin transferencia calórica, como se mencionó al principio), la entropía permanece constante y la presión es función solo de la densidad. Debido a que la forma de dicha ecuación será diferente si el medio consiste de un gas o de un líquido, es conveniente expresarla como una serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio, siendo éste el punto donde los valores de la presión y la densidad son aquellos que se tienen en ausencia de perturbaciones acústicas, y que en lo subsiguiente se referirá a ellos como  $P_0$  y  $\rho_0$  respectivamente. De esta manera obtenemos:

$$P = P_0 + A \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \frac{B}{2!} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \frac{C}{3!} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^3 + \dots \quad (2.16)$$

Los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ... se determinan a partir de experimentos o de otros análisis. Asumiendo que las variaciones de la densidad serán muy pequeñas, el coeficiente más importante será  $A$ . Para evaluarlo, se introduce la velocidad del sonido  $c$ , que se define como:

$$c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{s=\text{cte.}},$$

o equivalentemente, para procesos isoentrópicos:

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho}. \quad (2.17)$$

La velocidad del sonido puede considerarse como una nueva variable termodinámica, ya que se deriva de otras cantidades termodinámicas. Diferenciado la ecuación (2.16) se obtiene:

$$c^2 = \frac{A}{\rho_0} + \frac{B}{\rho_0} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{C}{2! \rho_0} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \dots \quad (2.18)$$

En el límite  $\rho \rightarrow \rho_0$ ,  $c^2$  se convierte en una constante, denotada como  $c_0^2$ . Por lo tanto, el coeficiente  $A$  es igual a  $\rho_0 c_0^2$ , que es el módulo volumétrico adiabático del fluido para pequeñas desviaciones del punto de equilibrio.

Introduciendo este valor de  $A$  en la ecuación (2.16), y haciendo las sustituciones:

$$\delta P = P - P_0, \quad (2.19a)$$

$$\delta \rho = \rho - \rho_0, \quad (2.19b)$$

la ecuación de estado isoentrópica resultante es:

$$\delta P = c_0^2 \delta \rho \left[ 1 + \frac{B}{2!A} \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) + \frac{C}{3!A} \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^2 + \dots \right], \quad (2.20)$$

siendo  $\delta P$  y  $\delta \rho$  los excesos de presión y densidad con respecto al punto de equilibrio. Cabe resaltar que la ecuación (2.20) es válida solo cuando  $\rho \rightarrow \rho_0$ , es decir cuando  $\delta \rho \rightarrow 0$ .

En general, se deberían considerar adicionalmente una ecuación de conservación de energía y una relación termodinámica de entropía; sin embargo, debido a que se analizan sistemas sin viscosidad y sin transferencia de calor (es decir, fluidos sin pérdidas), esto no es necesario.

Las ecuaciones (2.5), (2.14) y (2.20) constituye un conjunto cerrado en las variables  $\rho$ ,  $P$  y  $\vec{u}$  con las cuales se puede obtener la ecuación de onda. Este será el tema de la próxima sección.

## 2.2 ECUACIÓN DE ONDA

La ecuación de continuidad, de momentum y de estado vistas en el capítulo anterior son no lineales; sin embargo, se pueden linealizar haciendo uso de la llamada aproximación de pequeña señal. Esta aproximación limita el análisis a ondas de amplitud relativamente pequeña, pero es necesaria para obtener la ecuación de onda más sencilla, es decir, una ecuación de onda lineal. Además, se utiliza ampliamente debido a que es una descripción adecuada de los fenómenos acústicos más comunes.

Dicha aproximación consiste básicamente en suponer que los cambios en las variables empleadas son pequeñas cantidades de primer orden. Lo que esto significa es que cada uno de estos cambios es pequeño en comparación con una cantidad estática apropiada de las mismas dimensiones. Asimismo, en este análisis se asumirá que inicialmente el fluido se encontraba en reposo, es decir,  $P = P_0$ ,  $\rho = \rho_0$  y  $u = 0$ ; también que el fluido, en un inicio, es totalmente homogéneo, lo que significa que tanto  $P_0$  como  $\rho_0$  son independientes de la posición.

Se empezará por asumir que  $\delta \rho$  en (2.19b) sea muy pequeño comparado con  $\rho_0$ , específicamente:



$$|\delta\rho| \ll \rho_0. \quad (2.21)$$

Esta desigualdad implica, según la ecuación (2.20), que las variaciones en la presión acústica sean:

$$|\delta P| \ll c_0^2 \rho_0. \quad (2.22)$$

La restricción sobre la velocidad de partícula se puede obtener a partir de la ecuación (2.14). Para simplificar el problema, es conveniente utilizar un sistema coordenado auxiliar cuyo uno de sus ejes, supongamos el  $x$ , este alineado con el gradiente de presión en un punto arbitrario. En tal sistema coordenado, las componentes vectoriales en  $y$  y  $z$  se anulan, por lo que la ecuación (2.14) se reduce, después de tomar el valor absoluto, a:

$$\left| \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right) \right| = \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| \quad (2.23)$$

que para un punto en específico, la derivada parcial se vuelve total. Multiplicando ambos lados por  $dx$ , considerando las relaciones (2.19a) y (2.21), y simplificando:

$$\left| \rho_0 \left( du_x \frac{dx}{dt} + \left( u_x \frac{dx}{dx} + u_y \frac{dx}{dy} + u_z \frac{dx}{dz} \right) du_x \right) \right| = |d(\delta P)|, \quad (2.24)$$

$$|\rho_0(2u_x du_x)| = |d(\delta P)|,$$

ya que las derivadas  $\frac{dx}{dy}$  y  $\frac{dx}{dz}$  se anulan debido a que las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  son independientes entre sí, y  $\frac{dx}{dt} = u_x$ . Integrando y tomando en cuenta la relación (2.22):

$$|\rho_0 u_x^2| = |\delta P| \ll c_0^2 \rho_0. \quad (2.25)$$

Para el caso en que el fluido este inicialmente en reposo y restringido el análisis a ondas planas sin pérdidas se puede afirmar que  $u_x = u$ , por lo que después de despejar se llega a:

$$|u| \ll c_0. \quad (2.26)$$

A continuación, se utilizarán las relaciones (2.21), (2.22) y (2.26) para linealizar las ecuaciones (2.7), (2.14) y (2.20). El procedimiento consiste en eliminar aquellos términos de orden dos o superior, refiriéndose esto a los términos en los cuales dos o más de las variables  $\delta\rho$ ,  $\delta P$  o  $u$  aparezcan multiplicándose, con el argumento de que el producto de éstas será tan pequeño que se puede despreciar.

Empezando por la ecuación de continuidad y sustituyendo en ella las ecuaciones (2.19a) se obtiene:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \delta \rho + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u} + \delta \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.27)$$

Una cuestión que surge al observar la ecuación anterior es cómo tratar las derivadas. El tercer y cuarto término están multiplicados por la misma derivada (el gradiente, la divergencia y todos los operadores vectoriales son básicamente derivadas espaciales), por lo que es evidente que el tercero será mucho mayor; sin embargo, el primero y el segundo constan de derivadas diferentes, ¿cómo saber si alguna de ellas es mucho mayor a la otra? Por el momento se afirmará sin demostrar que las derivadas temporales tanto de  $\delta \rho$ ,  $\delta P$  y  $u$  se relacionan con sus respectivas derivadas espaciales mediante la relación:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| = |c_0 \nabla \otimes f|, \quad (2.28)$$

donde  $f$  representa cualquiera de las tres variables empleadas y  $\nabla \otimes$  cualquier operador vectorial. Con esto en cuenta, es fácil ver que el segundo y cuarto término son de orden dos. Eliminándolos, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.29)$$

Realizando la misma sustitución en la ecuación de momentum se obtiene:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \delta \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \delta \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla \delta P = 0. \quad (2.30)$$

Con los mismos argumentos del caso anterior, se puede concluir que el segundo y tercer término son de orden dos y el cuarto de tercero, por lo que se pueden eliminar. De esta manera se obtiene que la ecuación de momentum linealizada es:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \delta P = 0. \quad (2.31)$$

Es sencillo ver, aplicando la relación (2.21) que la ecuación de estado linealizada es:

$$\delta P = c_0^2 \delta \rho. \quad (2.32)$$

El paso final es combinar las tres ecuaciones linealizadas y obtener la ecuación de onda lineal. Si se van a adoptar  $\vec{u}$  y  $\delta P$  como las variables de campo primarias (la convención habitual), el primer paso es eliminar  $\delta \rho$ . Despejando  $\delta \rho$  en la ecuación (2.32), derivando con respecto del tiempo y sustituyendo este resultado en la ecuación (2.29) se obtiene:

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} + c_0^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.33)$$

Combinando las ecuaciones (2.31) y (2.33) se llega a la ecuación de onda lineal ya sea en función de  $\delta P$  o  $\vec{u}$ . A continuación, se obtendrá la ecuación de onda en función de  $\delta P$ .

Aplicando la divergencia a (2.31) y derivando con respecto del tiempo a (2.33) se obtiene respectivamente:

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla^2 \delta P = 0, \quad (2.34a)$$

$$\frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} + c_0^2 \rho_0 \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{u})}{\partial t} = 0. \quad (2.34b)$$

Suponiendo que existen las segundas derivadas cruzadas y son continuas en el dominio de interés tanto de  $\delta P$  como de  $\vec{u}$  (suposición sensata dado que las propiedades en un punto de un fluido deben ser similares a los puntos de su vecindad), y aplicando el teorema de Clairaut (también conocido como teorema de las derivadas mixtas), se concluye que:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{u})}{\partial t}, \quad (2.35)$$

obteniendo así el resultado deseado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 \delta P, \\ \nabla^2 \delta P - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

De forma similar se puede obtener la ecuación de onda linealizada para el campo de velocidades  $\vec{u}$ , con la diferencia que a la ecuación (2.33) se le aplicaría el gradiente (no la divergencia) y la derivada temporal a la ecuación (2.31), con lo que resulta:

$$\nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.37)$$

donde el laplaciano de una magnitud vectorial es el vector cuyas componentes rectangulares son los laplacianos de las componentes rectangulares del vector original.

Las soluciones para la ecuación de onda como la (2.36) o la (2.37), son ondas planas monocromáticas, del tipo:

$$u = F(t - x/c_0) + G(t + x/c_0), \quad (2.38)$$

donde  $F$  y  $G$  son cualquier función que por lo menos pueda diferenciarse dos veces y suponiendo ondas que solo viajan a lo largo del eje  $x$ . Considerando una onda que solo viaja hacia la dirección positiva de  $x$  (es decir,  $G = 0$ ) y tomando sus derivadas respecto a cada una de sus variables, se puede obtener la siguiente relación:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \frac{F'}{c_0} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = F'$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = c_0 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \quad (2.39)$$

Esta es la misma relación utilizada para linealizar las ecuaciones de conservación. Sin embargo, no sería válido emplear en una demostración, argumentos cuya veracidad depende de la veracidad de la premisa. La justificación de la ecuación (2.28) proviene de la ecuación de onda no linealizada resultante de combinar las ecuaciones de conservación con todos sus términos. Aunque la complejidad matemática aumenta en gran medida, se han obtenido soluciones para casos especiales como el de asumir que el fluido en cuestión es un gas perfecto sin pérdidas y considerando solo ondas planas que viajan en una sola dirección. En tales circunstancias, la solución para la ecuación de onda no lineal es:

$$u = F \left( t - \frac{x}{c_0 + \beta u} \right), \quad (2.40)$$

donde  $\beta$  es una constante que depende de los calores específicos (a presión y a volumen constante) del medio en cuestión. Es claro que si aplicamos la relación (2.26) a la ecuación anterior, y diferenciando  $u$  con respecto a  $t$  y  $x$  como se hizo antes, obtendremos la ecuación (2.28).

## 2.3 REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN ENTRE DOS MEDIOS CON INTERFAZ PLANA

Cuando una onda acústica, que inicialmente viaja a través de un medio con determinadas propiedades, se encuentra con otro medio de propiedades diferentes, es de esperar que los campos de presión y velocidad de partícula de dicha onda, sufran modificaciones. De hecho, estas modificaciones darán origen a los fenómenos de reflexión y transmisión, los cuales deberán ser consistentes con las ecuaciones de conservación de fluidos en todo lugar y en particular, en la interfaz entre los distintos medios. Las restricciones impuestas a la presión y a la velocidad de partícula como resultado de esto se conocen como condiciones a la frontera, que a continuación se derivarán.

Comenzando por la ecuación de continuidad linealizada (ecuación (2.29)). En cualquier zona interfacial se puede construir una superficie con forma de caja de pastillas, como se muestra en la Fig. 2.1. El teorema de la divergencia de Gauss puede aplicarse a  $\nabla \cdot \vec{u}$  sobre el volumen encerrado por esta superficie (siendo éste un volumen de control), obteniendo:

$$\rho_0 \int \nabla \cdot \vec{u} \, dv = \rho_0 \oint_S \vec{u} \cdot \hat{n} \, dA = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv$$

$$\rho_0 \left[ \oint_{S_1} \vec{u} \cdot \hat{n}_1 \, dA + \oint_{S_2} \vec{u} \cdot \hat{n}_2 \, dA + \oint_{S_3} \vec{u} \cdot \hat{n}_3 \, dA \right] = - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dv.$$

El hacer tender la altura  $h$  de dicho volumen a cero hace que la masa contenida dentro del mismo también tienda a cero y que el último término del lado izquierdo se anule, por lo que  $S_1$  tenderá a  $S_2$ . Teniendo en cuenta los sentidos opuestos de  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$ , se concluye:

$$u_{1\perp} = u_{2\perp}, \quad (2.41)$$

es decir, la componente normal a la interfaz de la velocidad de partícula es continua ahí.

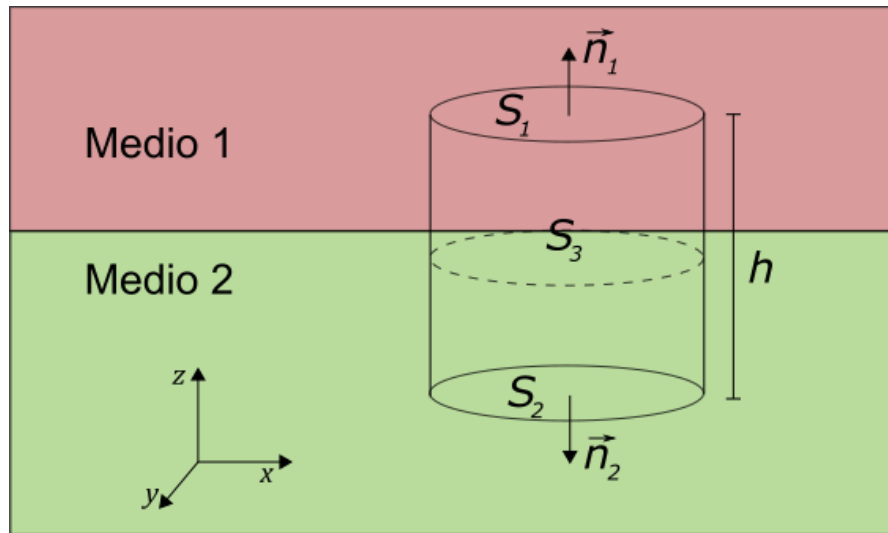


Fig. 2.1 Interfaz entre dos medios diferentes. Se observa también un volumen de control, en un cilindro de altura  $h$ , cuyas bases son las superficies  $S_1$  y  $S_2$ , y su área lateral  $S_3$ .

En este punto cabe hacer una aclaración. Matemáticamente hablando, no es cierto que el hecho de que  $h$  tienda a cero (y por lo tanto también el volumen) implique que la masa tienda a cero. Se podría hablar de una densidad de masa superficial; de hecho, en electromagnetismo se habla de densidad de carga y de corriente superficiales. Esto se debe al hecho de que el modelo electromagnético no necesita

definir dimensiones mínimas para la unidad de carga eléctrica (aunque físicamente sí las tenga); sin embargo, en mecánica de fluidos sí es necesario asumir un tamaño mínimo para las partículas de fluido. Como se menciona en el Apéndice 1, son “colecciones de moléculas lo suficientemente grandes como para que las propiedades macroscópicas de dichas partículas, que a su vez serán resultado del promedio de las moléculas individuales que contengan, no difieran significativamente entre ellas”, lo que implica que al hacer tender el volumen a cero la masa también tienda a cero.

El siguiente paso es satisfacer la ecuación de momentum linealizada (ecuación (2.31)) en la frontera. Utilizando el mismo volumen del caso anterior (Fig. 2.1) e integrando se obtiene:

$$\rho_0 \int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV = - \int_V \nabla P dV.$$

Aplicando el corolario (2.10) al lado derecho de la ecuación se llega a:

$$\rho_0 \int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV = - \oint_S P \hat{n} dA = - \hat{k}(P_1 S_1 - P_2 S_2) - \oint_{S_3} P \hat{n} dA.$$

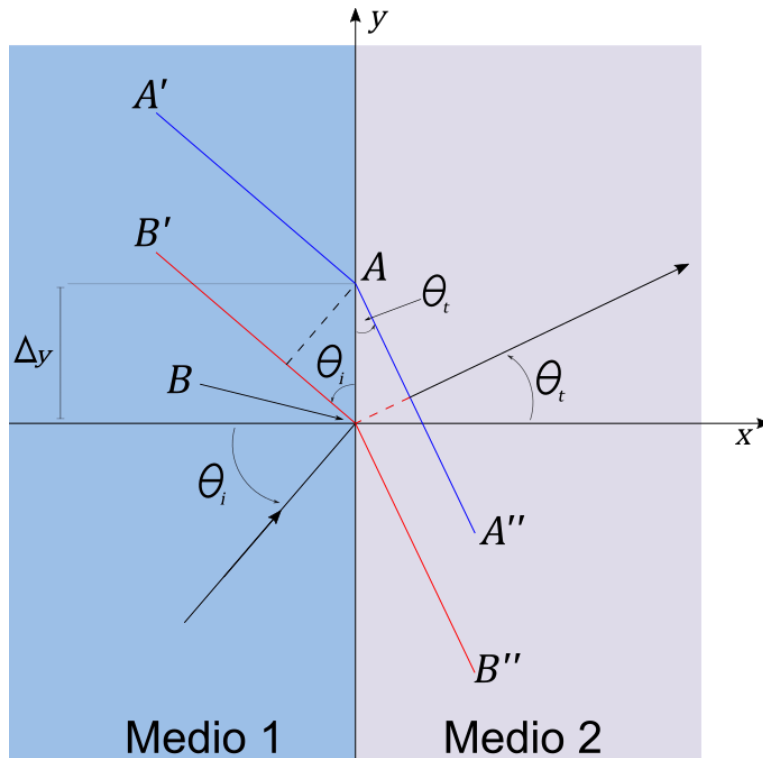


Fig. 2.2 Onda incidente y transmitida en la interfaz entre dos medios. Se puede apreciar la refracción y el consecuente cambio de ángulo ( $\theta_i$  en el medio 1 y  $\theta_t$  en el 2) entre dichas ondas. En la figura se muestran dos frentes de onda: B'-B-B'' y A'-A-A''.

Haciendo tender la altura  $h$  a cero y con los mismos argumentos del caso anterior se concluye:

$$P_1 = P_2, \quad (2.42)$$

lo que significa que la presión es continua en la interfaz.

A continuación, se procederá a analizar la onda reflejada, así como la transmitida. Aunque la literatura sobre el tema es extensa, vale la pena ver dos características importantes de estas ondas: la dirección en que se propagan y su magnitud.

En una onda plana, su dirección de propagación es la misma que la de un vector perpendicular a su frente de onda (para ondas representadas por funciones periódicas, este vector coincide en dirección con el vector de onda  $\vec{k}$ ). Sin embargo, por convención, en problemas de reflexión y transmisión se hace referencia al ángulo que forma la dirección de propagación de la onda con un vector perpendicular a la interfaz.

En la Fig. 2.2 se observan la onda incidente, con ángulo de incidencia  $\theta_i$ , y la onda transmitida, con ángulo de transmisión  $\theta_t$  (por claridad se omite la onda reflejada). El eje  $y$  marca la interfaz que separa el medio 1 (propiedades  $\rho_1$  y  $c_1$ ) del medio 2 (propiedades  $\rho_2$  y  $c_2$ ). El eje  $x$  es normal a la interfaz. Interesaría conocer  $\theta_t$  en función de  $\theta_i$ .

En el medio 1, al frente de onda  $BB'$  le tomará un tiempo  $\Delta t$  en llegar al lugar que ahora ocupa el frente de onda  $AA'$ , por lo que la distancia entre ellos (línea punteada negra) es de  $c_1\Delta t$ . Con relaciones geométricas sencillas se puede llegar a:

$$c_1\Delta t = \Delta y \text{ sen } \theta_i, \quad (2.43)$$

donde  $\Delta y$  es la sección de la interfaz limitada por sus intersecciones con los frentes de onda  $AA'$  y  $BB'$ .

Con los mismos razonamientos que en el caso anterior, los frentes de onda  $AA''$  y  $BB''$  en el medio 2 están separados una distancia  $c_2\Delta t$  (línea punteada roja), con lo que se llega a:

$$c_2\Delta t = \Delta y \text{ sen } \theta_t. \quad (2.44)$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones y después del álgebra apropiada es fácil obtener:

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{c_1} = \frac{\text{sen } \theta_t}{c_2}, \quad (2.45)$$

conocida como la ley de refracción o ley de Snell.

En la Fig. 2.3 se puede observar la onda reflejada (para evitar confusión, se han omitido los frentes de onda de la incidente, solo se muestra su dirección de propagación, pero en cualquier caso son iguales a los de la Fig. 2.2). La distancia entre los frentes de onda  $AA''$  y  $BB''$  de la onda reflejada, representada por la línea punteada, debe cumplir la relación:

$$c_1 \Delta t = \Delta y \sen \theta_r, \quad (2.46)$$

que es la misma relación de la onda incidente. En consecuencia, se concluye:

$$\theta_i = \theta_r, \quad (2.47)$$

conocida como la ley de la reflexión especular.

Una vez obtenida la relación de la dirección de las ondas reflejada y transmitida con respecto a la onda incidente se procede a obtener las relaciones de magnitud. Para ello se definirán los coeficientes de reflexión  $R$  y de transmisión  $T$  de la siguiente manera:

$$R = \frac{\delta P^-}{\delta P^+}, \quad (2.48)$$

$$T = \frac{\delta P^{tr}}{\delta P^+}, \quad (2.49)$$

donde  $\delta P^+$ ,  $\delta P^-$  y  $\delta P^{tr}$  son las magnitudes de presión acústica de las ondas incidente, reflejada y transmitida respectivamente. Estas presiones deben satisfacer la relación (2.42), es decir, la presión debe ser continua en la interfaz, por lo tanto:

$$\delta P^+ + \delta P^- = \delta P^{tr}, \quad (2.50)$$

y dividiendo entre  $\delta P^+$  y expresando el resultado en términos de los coeficientes de reflexión y de transmisión se obtiene:

$$1 + R = T. \quad (2.51)$$

Aplicando ahora la relación (2.41), que afirma que la componente normal de la velocidad de partícula es continua en la interfaz. En una onda plana, la dirección de la velocidad de partícula coincide con la dirección de propagación de la onda, por lo que la relación (2.41) se puede expresar en términos de los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión de la siguiente manera:

$$u^+ \cos \theta_i + u^- \cos \theta_r = u^{tr} \cos \theta_t. \quad (2.52)$$



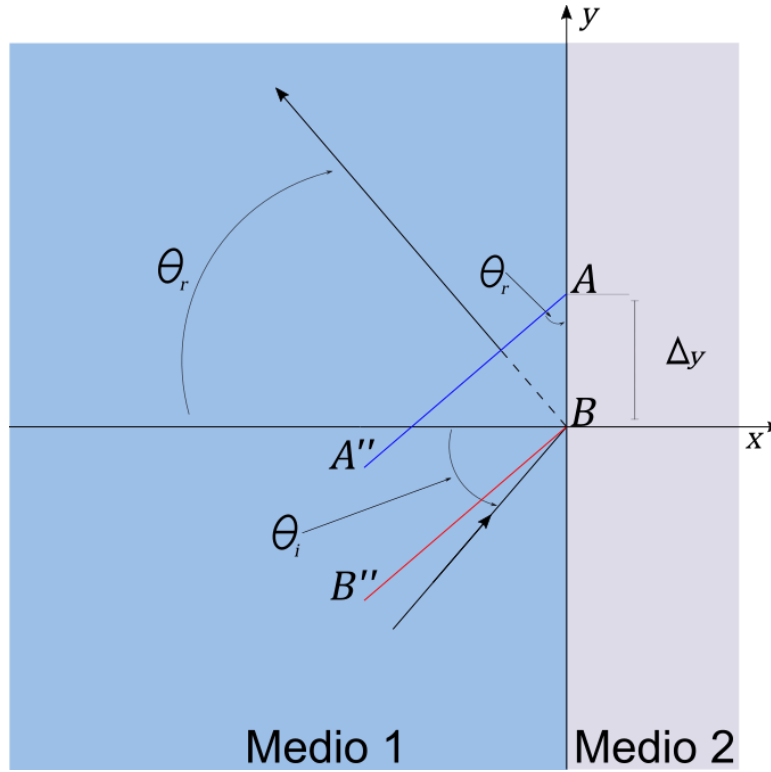


Fig. 2.3 Onda incidente y reflejada en la interfaz entre dos medios. Los ángulos de incidencia  $\theta_i$  y de reflexión  $\theta_r$  son iguales. En la figura se muestran dos frentes de onda: B''-B' y A''-A.

Debido a que  $R$  y  $T$  están expresados en función de presiones, es necesario expresar esta última ecuación de la misma manera. Esto se logra combinando las ecuaciones (2.29) y (2.32) obteniendo:

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} + \rho_0 c_0 \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.53)$$

que para el caso en que solo haya propagación en la dirección del eje  $x$  se reduce a:

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.54)$$

Las soluciones de onda plana para  $u$  están dadas por la ecuación (2.38), donde  $F$  (las variables del argumento tienen signo opuesto) representa una onda desplazándose hacia la dirección positiva de  $x$ , y  $G$  (las variables del argumento tienen el mismo signo) una que se desplaza hacia la dirección negativa. Eligiendo  $F$  y sustituyéndola en (2.54), obtenemos por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} - \rho_0 c_0 \frac{dF}{d(t - x/c_0)} = 0. \quad (2.55)$$

Multiplicando por la diferencial de tiempo, integrando y despejando se llega a:

$$\delta P = \rho_0 c_0 F = \rho_0 c_0 u = Z_0 u, \quad (2.56)$$

donde la constante de integración es cero ya que cuando  $u = 0$ ,  $\delta P = 0$ . El valor  $Z_0 = \rho_0 c_0$  es conocido como impedancia característica; obsérvese que si se hubiera elegido  $G$  en vez de  $F$ , al sustituirla en (2.54) se hubiera obtenido  $Z_0 = -\rho_0 c_0$ ; es decir, la dirección en que se propaga la onda cambia el signo de  $Z_0$ . Despejando  $u$  de (2.56) y sustituyendo en (2.52) se tiene:

$$\frac{\delta P^+}{\rho_1 c_1} \cos \theta_i + \frac{\delta P^-}{\rho_1 c_1} \cos \theta_r = \frac{\delta P^{tr}}{\rho_2 c_2} \cos \theta_t. \quad (2.57)$$

Dividiendo entre  $\delta P^+$ , aplicando las relaciones (2.47), (2.48), (2.49) y factorizando se llega a:

$$(1 - R) \frac{\cos \theta_i}{\rho_1 c_1} = T \frac{\cos \theta_t}{\rho_2 c_2}. \quad (2.58)$$

Combinando las ecuaciones (2.51) y (2.58) y expresando los resultados en términos de las impedancias características (por simplicidad se suprime el subíndice cero y se sustituye por el del medio correspondiente), se obtienen los coeficientes de reflexión y transmisión:

$$R = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}, \quad (2.59)$$

$$T = \frac{2 Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}. \quad (2.60)$$

Antes de concluir esta sección, se debe mencionar que los coeficientes aquí derivados solo son aplicables para el caso de fluidos. El caso de sólidos, aunque de gran importancia en ciertos campos, no será considerado en este trabajo debido a que está fuera de los objetivos del mismo.

## 2.4 MEMBRANA ENTRE DOS MEDIOS

Los coeficientes de reflexión y transmisión derivados en la subsección anterior aplican para el caso idealizado en que la masa de la interfaz es cero. Si ese no fuera el caso, es de esperar que esta diferencia altere las características tanto de la onda reflejada como de la transmitida. El caso más general sería tratar el problema como tres medios adyacentes cuyas interfaces carecen de masa y aplicar los coeficientes (2.59) y (2.60). Por supuesto, habría que considerar el hecho de múltiples reflexiones e interferencias entre las ondas, tanto reflejadas como transmitidas, en

cada uno de los medios. Sin embargo, como se mencionó antes, con estos coeficientes solo sería posible cuando los medios fueran todos fluidos. No obstante, cuando solo el segundo medio es sólido y es lo suficientemente delgado, se puede hacer una aproximación del comportamiento de la onda reflejada y transmitida en los medios fluidos con sencillez matemática. Los problemas así tratados, que de otra manera adquirirían gran complejidad, se pueden resolver aplicando prácticamente los mismos coeficientes de reflexión y transmisión con un término añadido.

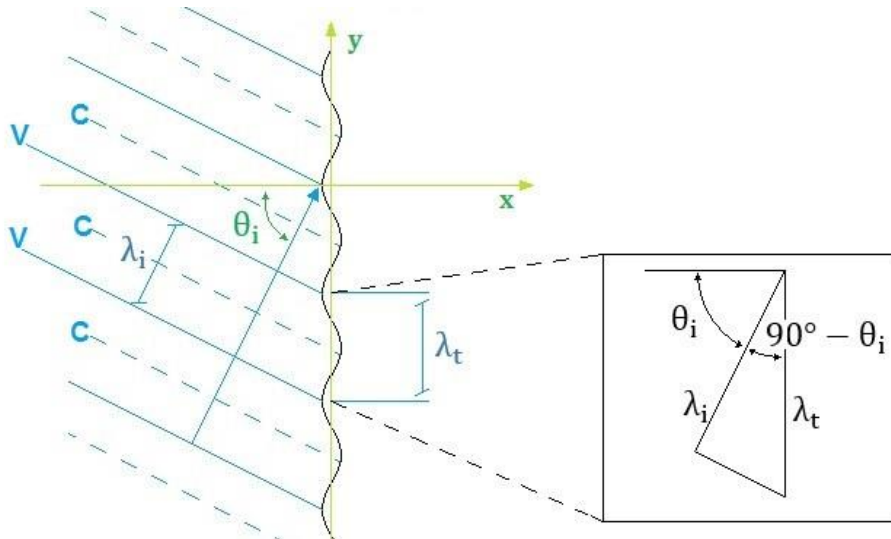


Fig. 2.4 Interfaz entre dos medios con membrana. Se observa que la onda incidente deforma la membrana dando lugar a que en ésta se produzca una onda cuya longitud de onda es  $\lambda_t$ .

A continuación, se analizará cualitativamente el comportamiento de este medio sólido (que en lo sucesivo se referirá a él como membrana) al estar sometido a la acción de una onda acústica con incidencia oblicua con respecto a él. Por simplicidad, se supondrá ondas acústicas armónicas, pero los resultados son aplicables a cualquier tipo. Con esta suposición se puede formalizar la condición necesaria para que el modelo sea válido; se dijo anteriormente que la membrana debía ser delgada, pero específicamente se debe cumplir que el espesor  $\ell$  de la membrana sea muy pequeño respecto a la longitud de onda, es decir:  $\ell \ll \lambda$ .

En la Fig. 2.4 se observa una membrana que se ubica a lo largo del eje  $y$ . Esta se deforma periódicamente hacia la dirección positiva de  $x$  cuando incide, en ese punto, un frente de onda de alta presión (es decir, una cresta "C" de la onda) y hacia la dirección negativa de  $x$  cuando incide un frente de onda de baja presión (un valle "V" de la onda). Estas deformaciones generan una onda transversal que se propagará a lo largo de la membrana en la dirección del eje  $y$  (que a su vez contribuirá a generar la onda acústica que se propague del otro lado de ella) cuya

longitud de onda  $\lambda_t$  está relacionada con la longitud de onda incidente,  $\lambda_i$ , por la ecuación:

$$\lambda_t = \frac{\lambda_i}{\cos(90^\circ - \theta_i)} = \frac{\lambda_i}{\cos(90^\circ)\cos(-\theta_i) - \sin(90^\circ)\sin(-\theta_i)} = \frac{\lambda_i}{\sin\theta_i}, \quad (2.61)$$

donde  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia. Debido a que la frecuencia de estas ondas es la misma, sus velocidades estarán relacionadas por el mismo tipo de ecuación que la (2.61), es decir:

$$c_t = \frac{c_i}{\sin\theta_i}. \quad (2.62)$$

Estas relaciones serán importantes principalmente cuando se analice la membrana tomando en cuenta sus propiedades elásticas.

Primeramente, se analizará el caso, más sencillo, en que las propiedades elásticas de la membrana se pueden despreciar, con el fin de facilitar el entendimiento de la física involucrada y a manera de introducción para el caso más complejo de una membrana elástica. Se comenzará por un balance de fuerzas sobre la membrana (en lugar de la condición en la frontera de las presiones), con lo que se tiene, para cada sección infinitesimal de área  $dS$ :

$$(\rho_S \dot{u}_{memb})dS = (\delta P^+ + \delta P^- - \delta P^{tr})dS, \quad (2.63)$$

donde  $\delta P^+$ ,  $\delta P^-$  y  $\delta P^{tr}$  son la onda de presión incidente, reflejada y transmitida respectivamente,  $\dot{u}_{memb}$  la aceleración de la sección  $dS$  de la membrana y  $\rho_S$  es la densidad de masa superficial (masa/área). Obsérvese que si  $\rho_S = 0$ , la ecuación (2.63) se reduciría a la ecuación (2.50).

Recordando las restricciones impuestas sobre la función de posición de partícula,  $\varphi(\vec{X}, t)$ , vistas en la subsección 2.1, y para ser consistentes con las mismas, se debe cumplir que la capa de fluido justo a la izquierda de la membrana tenga la misma velocidad que la membrana, al igual que la capa de fluido justo a la derecha de la membrana, es decir:

$$u_{memb} = u^+ \cos\theta_i + u^- \cos\theta_r = (u^+ + u^-) \cos\theta_i, \quad (2.64a)$$

$$u_{memb} = u^{tr} \cos\theta_t. \quad (2.64b)$$

Combinando la ecuación (2.64b) y la ecuación (2.56) y derivando el resultado con respecto del tiempo se obtiene:

$$\dot{u}_{memb} = \dot{u}^{tr} \cos\theta_t = \frac{\cos\theta_{tr}}{Z_2} \delta P^{tr}. \quad (2.65)$$

Sustituyendo el valor de  $\dot{u}_{memb}$  de (2.65) en (2.63) y simplificando se llega a:

$$\delta P^+ + \delta P^- = \frac{\rho_S \cos \theta_{tr}}{Z_2} \delta P^{tr} + \delta P^{tr}. \quad (2.66)$$

Para el caso armónico,  $\delta P^{tr} = i\omega \delta P^{tr}$ ; dividiendo entre  $\delta P^+$  y considerando las ecuaciones (2.48) y (2.49) se tiene:

$$1 + R = \left(1 + \frac{i\omega \rho_S \cos \theta_{tr}}{Z_2}\right) T. \quad (2.67)$$

Combinando las ecuaciones (2.64a) y (2.64b) para eliminar el término  $u_{memb}$ , utilizando nuevamente la ecuación (2.56) y dividiendo entre  $\delta P^+$ :

$$(1 - R) \frac{\cos \theta_i}{Z_1} = T \frac{\cos \theta_{tr}}{Z_2}. \quad (2.68)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2.67) y (2.68) para  $R$  y  $T$  se llega a los coeficientes deseados:

$$R = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_{tr} + i\omega \rho_S \cos \theta_i \cos \theta_{tr}}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_{tr} + i\omega \rho_S \cos \theta_i \cos \theta_{tr}}, \quad (2.69)$$

$$T = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_{tr} + i\omega \rho_S \cos \theta_i \cos \theta_{tr}}. \quad (2.70)$$

Cabe resaltar que los coeficientes (2.69) y (2.70) son los mismos que (2.59) y (2.60) excepto por el término adicional  $i\omega \rho_S \cos \theta_i \cos \theta_{tr}$ .

Obsérvese en la ecuación (2.70) que a medida que aumenta  $\rho_S$ ,  $T$  tiende a disminuir. Este comportamiento es conocido como "ley de masas" que básicamente dice que cuanto mayor es la densidad de un material, menos probable es que vibre cuando se ve influenciado por una onda de sonido.

Ahora se analizará el caso más general, es decir, tomando en cuenta las propiedades elásticas de la membrana. Esto dará como resultado que cada sección del panel este sujeta a una fuerza restitutiva que tienda a devolverle su forma original, lo cual hará que la membrana misma se comporte como un oscilador y, por lo tanto, es de esperar que posea propiedades intrínsecas que solo dependan de las características de la misma.

Para este fin, se considerará una membrana modelada como un plato de Euler-Bernoulli (también conocido como modelo de Kirchhof-Love). En tal modelo se define la rigidez de flexión (resistencia a doblarse) como:

$$B = \frac{E \ell^3}{12(1 - \sigma^2)}, \quad (2.71)$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $\sigma$  el coeficiente de Poisson y  $\ell$  el espesor del panel. Con el fin de simplificar la ecuación (2.71) se introduce sin demostración la velocidad de propagación de una onda longitudinal en una membrana en cualquier dirección,  $c_L$ , la cual está dada por:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho_V(1 - \sigma^2)}}, \quad (2.72)$$

donde  $\rho_V = m/V = \rho_S/\ell$  es la densidad de la membrana. Despejando  $E$  de la ecuación (2.72) y sustituyendo en la ecuación (2.71),  $B$  puede expresarse como:

$$B = \frac{\rho_S \ell^2 c_L^2}{12}. \quad (2.73)$$

Por otro lado, tomando el mismo modelo de Euler-Bernoulli, la ecuación de movimiento de flexión de una membrana que no está sujeto a ninguna fuerza externa, está dada por:

$$\rho_S \frac{\partial^2 \vec{\varepsilon}}{\partial t^2} + B \nabla^4 \vec{\varepsilon} = 0, \quad (2.74)$$

donde, en general,  $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x(x, y, z, t) \hat{\mathbf{i}} + \varepsilon_y(x, y, z, t) \hat{\mathbf{j}} + \varepsilon_z(x, y, z, t) \hat{\mathbf{k}}$  es una función vectorial que describe el desplazamiento de cada punto de la membrana (y por lo tanto  $\varepsilon_t = u_{memb}$ ) y  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ . Sin embargo, si se asume que solo habrá desplazamiento en la dirección  $x$ , y este desplazamiento solo es función de  $y$  y  $t$  (es decir,  $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x(y, t) \hat{\mathbf{i}}$ ), la ecuación (2.74) se simplifica a:

$$\rho_S \varepsilon_{tt} + B \varepsilon_{yyyy} = 0. \quad (2.75)$$

Para determinar si la ecuación anterior puede describir movimiento ondulatorio de flexión, se supone una solución que represente una onda armónico-temporal del tipo:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega(t - y/c_b)}, \quad (2.76)$$

donde  $c_b$  es la velocidad de propagación de la supuesta onda flexión. Sustituyendo la ecuación (2.75) en la (2.76) se obtiene:

$$\rho_S (i\omega)^2 + B \left(-\frac{i\omega}{c_b}\right)^4 = 0, \quad (2.77)$$

y despejando  $c_b$  de esta última expresión se llega a:

$$c_b = \left( \frac{B\omega^2}{\rho_S} \right)^{1/4} = \sqrt{\frac{\ell c_L f \pi}{\sqrt{3}}}. \quad (2.78)$$

Esto significa que ondas de flexión del tipo descrito por la ecuación (2.76) son soluciones factibles de la ecuación (2.75), siempre que la velocidad de propagación de dicha onda,  $c_b$ , esté dada por la ecuación (2.78). Cabe resaltar que la velocidad  $c_b$  de la onda de flexión variará con la frecuencia y por lo tanto es dispersiva.

Ahora bien, cuando la membrana está sujeta a la acción de un campo acústico se deben satisfacer las mismas ecuaciones que en el caso anterior, el cual se supuso dominado por la masa, pero esta vez agregando las propiedades elásticas. Con esto, la ecuación (2.63) se transforma en:

$$(\rho_S \varepsilon_{tt} + B \varepsilon_{yyyy}) dS = (\delta P^+ + \delta P^- - \delta P^{tr}) dS, \quad (2.79)$$

recordando que  $\varepsilon_t = u_{memb}$  y por lo tanto  $\dot{u}_{memb} = \varepsilon_{tt}$ . El sistema representado por la ecuación (2.79) es uno forzado. Si el campo acústico es armónico como estamos suponiendo, la solución para  $\varepsilon$  debe serlo también; sin embargo, en esta ocasión la onda de flexión estará sujeta a las condiciones del campo acústico, por lo que su velocidad de propagación estará dada por la ecuación (2.62), y sus soluciones serán de la forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega(t - y/c_t)}. \quad (2.80)$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (2.79) y expresando el resultado en función de  $u_{memb}$  se llega a:

$$u_{memb} \left( i\omega\rho_S + \frac{B}{i\omega [c_t/\omega]^4} \right) = \delta P^+ + \delta P^- - \delta P^{tr}. \quad (2.81)$$

Factorizando  $i\omega\rho_S$ , despejando  $B$  de la ecuación (2.78) y sustituyendo el resultado en la ecuación anterior se obtiene:

$$u_{memb} \left( i\omega\rho_S + \frac{(i\omega\rho_S)B}{(i\omega\rho_S)i\omega [c_t/\omega]^4} \right) = \delta P^+ + \delta P^- - \delta P^{tr},$$

$$i\omega\rho_S u_{memb} \left( 1 - \frac{(c_b^4 \rho_S / \omega^2)}{\rho_S \omega^2 [c_t/\omega]^4} \right) = \delta P^+ + \delta P^- - \delta P^{tr},$$

$$i\omega\rho_S u_{panel} \left( 1 - \left[ \frac{c_b}{c_t} \right]^4 \right) = \delta P^+ + \delta P^- - \delta P^{tr},$$

y como  $u_{memb}$  y  $\delta P^{tr}$  se relacionan mediante la ecuación (2.65) y recordando las relaciones (2.48) y (2.49):

$$\left(1 + \frac{i\omega\rho_S \cos\theta_{tr}}{Z_2} \left[1 - \left(\frac{c_b}{c_t}\right)^4\right]\right) T = 1 + R. \quad (2.82)$$

Debido a que el incluir las propiedades elásticas no afecta la condición a la frontera de la velocidad de partícula, la segunda relación a usar para completar el sistema de ecuaciones será la dada por la ecuación (2.68). Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2.68) y (2.82) obtenemos para  $R$  y  $T$ :

$$R = \frac{Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_{tr} + i\omega\rho_S \cos\theta_i \cos\theta_{tr} \left(1 - \left(\frac{c_b}{c_t}\right)^4\right)}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_{tr} + i\omega\rho_S \cos\theta_i \cos\theta_{tr} \left(1 - \left(\frac{c_b}{c_t}\right)^4\right)}, \quad (2.83)$$

$$T = \frac{2Z_2 \cos\theta_i}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_{tr} + i\omega\rho_S \cos\theta_i \cos\theta_{tr} \left(1 - \left(\frac{c_b}{c_t}\right)^4\right)}. \quad (2.84)$$

Obsérvese que, dependiendo de las propiedades físicas de la membrana (en específico  $\rho_S$  y  $B$ ), de la frecuencia de la onda incidente y el ángulo de incidencia, puede darse que  $c_b = c_t$ , en cuyo caso el término  $i\omega\rho_S \cos\theta_i \cos\theta_{tr} \left(1 - \left(\frac{c_b}{c_t}\right)^4\right)$  se anula y los coeficientes (2.83) y (2.84) se reducen a los coeficientes (2.59) y (2.60). En tal situación, conocida como efecto de coincidencia, la membrana se vuelve prácticamente “invisible” al campo acústico.

## 2.5 REFLECTANCIA, TRANSMITANCIA Y ÁNGULOS DE INCIDENCIA ESPECIALES

Vale la pena discutir un poco sobre el significado físico de los coeficientes de reflexión y transmisión. En general, estos coeficientes serán números complejos que indicarán cómo se relaciona la onda incidente con respecto a las ondas reflejada y transmitida. Usualmente los coeficientes estarán expresados en forma polar, donde la magnitud representará la proporción de la amplitud de la onda en cuestión (reflejada o transmitida) con respecto de la onda incidente, y la fase el retardo existente entre ellas.

Como se desprende de las ecuaciones (2.48) y (2.49), al multiplicar la onda incidente por estos coeficientes se obtienen las ondas reflejada y transmitida. Aunque en acústica estas ondas generalmente representan variaciones de presión,



bien pueden representar variaciones de la velocidad de partícula o incluso de la densidad del medio.

Sin embargo, en muchas ocasiones es importante conocer la energía transportada por dichas ondas. Para tal fin se define la intensidad de sonido,  $I$ , en una determinada dirección, como el promedio temporal del flujo de energía (flujo de energía significa energía por unidad de tiempo o potencia) a través de un área cuya normal apunta en dicha dirección. Matemáticamente la intensidad se expresa como:

$$I = \frac{1}{t_{\text{prom.}}} \int_0^{t_{\text{prom.}}} (\delta P \vec{u}) dt, \quad (2.85)$$

donde el producto  $(\delta P \vec{u})$  es el flujo de energía instantáneo por unidad de área y  $t_{\text{prom.}}$ , el tiempo en el cual se promedia, dependerá del tipo de onda considerada; para ondas periódicas  $t_{\text{prom.}}$  será igual al periodo de la onda.

La ecuación (2.85) se puede simplificar para el caso de ondas planas utilizando la ecuación (2.56), con lo que se obtiene:

$$I = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{1}{t_{\text{prom.}}} \int_0^{t_{\text{prom.}}} \delta P^2 dt = \frac{\delta P_{\text{rms}}^2}{\rho_0 c_0}, \quad (2.86)$$

donde  $\delta P_{\text{rms}}$  es la raíz de la media cuadrática de la presión:

$$\delta P_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{t_{\text{prom.}}} \int_0^{t_{\text{prom.}}} \delta P^2 dt}. \quad (2.87)$$

La potencia de una onda que incida sobre un área será la integral de la componente normal de la intensidad con respecto a dicha área:

$$W = \int_S I \cdot \hat{n} dA, \quad (2.88)$$

que para una onda plana se reduce simplemente a  $W = IA$ .

En fenómenos de reflexión y transmisión se definen la reflectancia  $r$  y la transmitancia  $\tau$  como la relación entre la potencia de la onda reflejada y transmitida respectivamente, con respecto a la potencia de la onda incidente, es decir:

$$r = \frac{W_R}{W_I} = \frac{I_R A_R}{I_I A_I}, \quad (2.89)$$

$$\tau = \frac{W_T}{W_I} = \frac{I_T A_T}{I_I A_I} \quad (2.90)$$

Las distintas intensidades se pueden calcular a partir de las ecuaciones (2.48), (2.49) y (2.86). Sin embargo, para calcular el área se debe analizar un poco la situación. Considérese un haz acústico que incide sobre una interfaz y que a su vez generará un haz reflejado y otro transmitido como se observa en la Fig. 2.5. Estos tres haces coinciden en áreas similares, con dimensiones similares en la interfaz y que es igual al producto  $(\Delta y)(\Delta z)$  ( $\Delta z$  es una distancia que apunta hacia el observador y no aparece en la figura). El área transversal de cada uno de los haces será:

$$A_I = (\Delta y)(\Delta z) \cos \theta_i, \quad A_R = (\Delta y)(\Delta z) \cos \theta_r, \quad A_T = (\Delta y)(\Delta z) \cos \theta_{tr}. \quad (2.91)$$

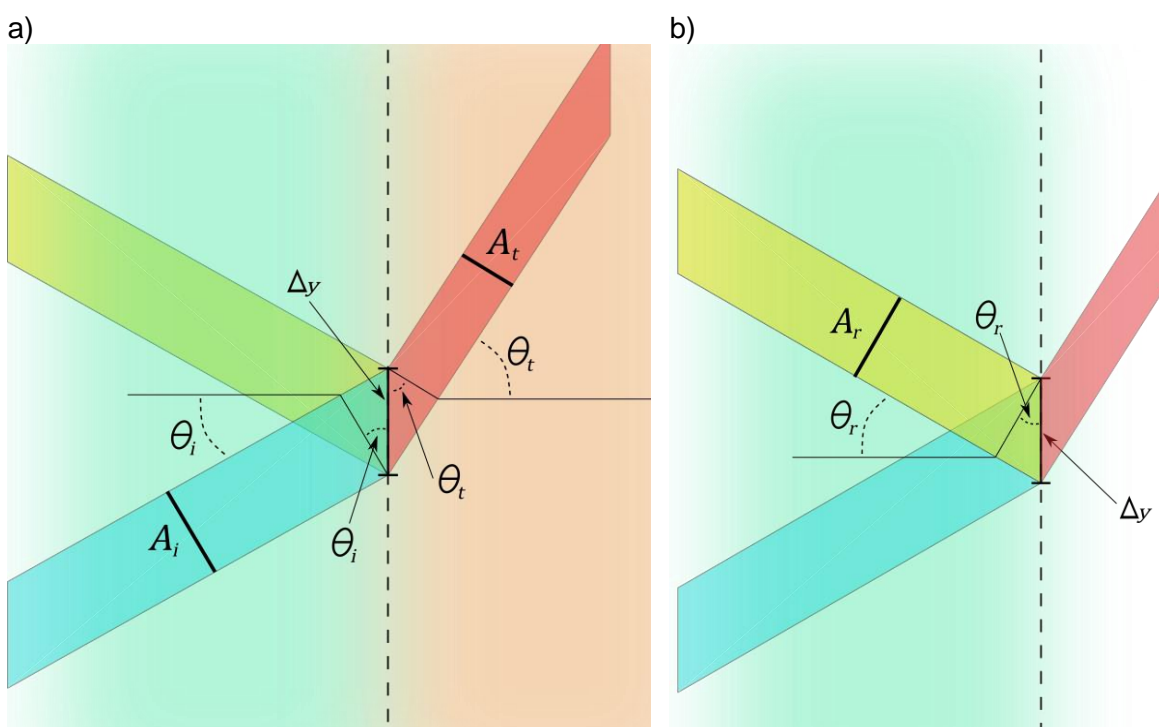


Fig. 2.5 Interfaz entre dos medios donde se aprecia un haz incidente, uno reflejado y otro transmitido. Para mayor claridad, en a) se especifican las magnitudes relevantes del haz incidente y transmitido y en b) solo las del haz reflejado.

Por la ecuación (2.47) se sabe que el ángulo de incidencia es igual al reflejado, por lo tanto  $A_I = A_R$ . Sustituyendo las relaciones (2.91) en (2.90) se obtiene la reflectancia y la transmitancia para onda plana:

$$r = \frac{(\Delta y)(\Delta z) \cos \theta_i}{(\Delta y)(\Delta z) \cos \theta_i} \frac{\frac{(R\delta P_{rms})^2}{\rho_1 c_1}}{\frac{\delta P_{rms}^2}{\rho_1 c_1}} = R^2, \quad (2.92)$$

$$\tau = \frac{(\Delta y)(\Delta z) \cos \theta_{tr}}{(\Delta y)(\Delta z) \cos \theta_i} \frac{\frac{(T\delta P_{rms})^2}{\rho_2 c_2}}{\frac{\delta P_{rms}^2}{\rho_1 c_1}} = \frac{\cos \theta_{tr} Z_1}{\cos \theta_i Z_2} T^2. \quad (2.93)$$

Para concluir, se muestran gráficas de los coeficientes complejos de reflexión y transmisión, así como de la reflectancia y transmitancia.

Al graficar estos valores con respecto al ángulo de incidencia se pueden apreciar algunos puntos de interés que es importante comentar. Para tal fin, se muestran la magnitud y la fase del coeficiente de reflexión en las Fig. 2.6a y Fig. 2.6b respectivamente, y de forma similar, las del coeficiente de transmisión en las Fig. 2.7a y Fig. 2.7b.

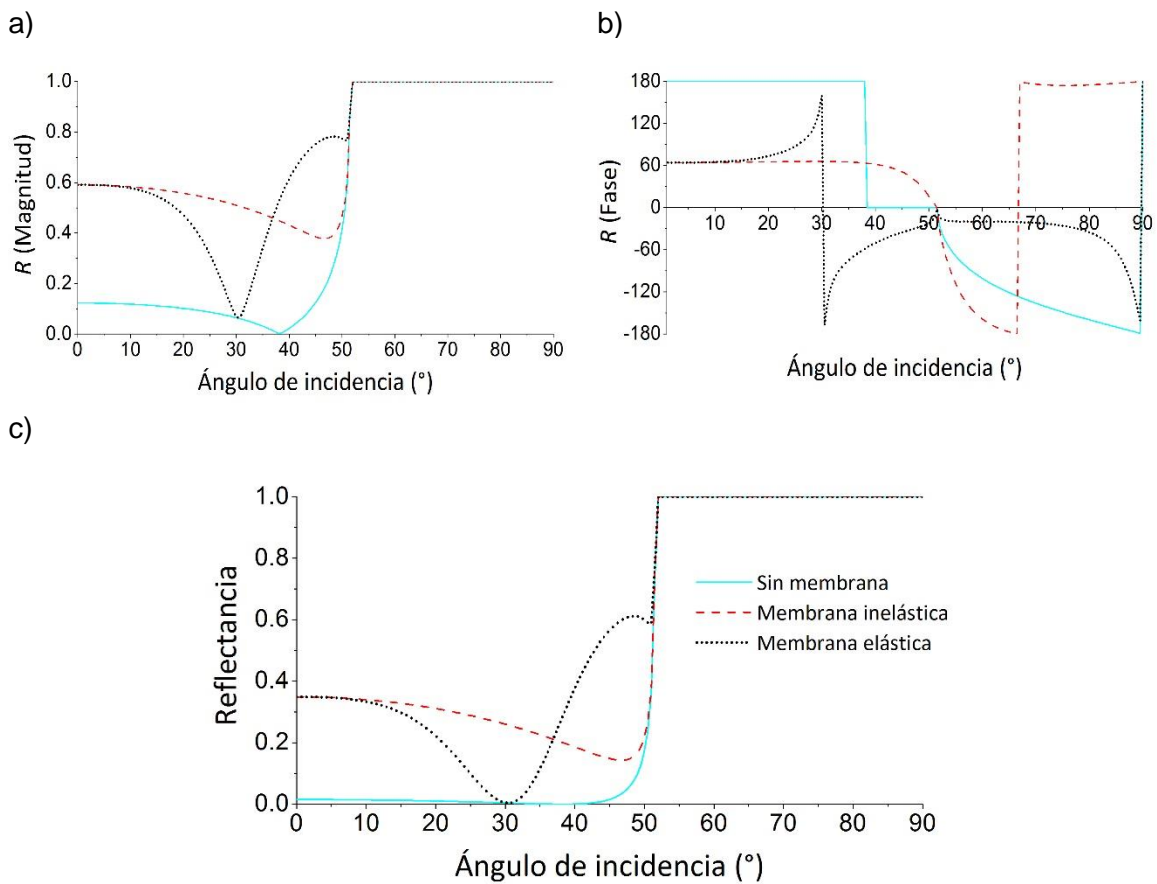


Fig. 2.6 a) Magnitud y b) fase de los coeficientes de reflexión, así como la c) reflectancia.

En las gráficas se ha considerado dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) como medio 1 y aire como medio 2. En ellas aparecen tres curvas, cada una representativa de los casos antes vistos: dos medios sin ningún tipo físico de separación entre ellos (ecuaciones (2.59) y (2.60)), dos medios separados por una membrana inelástica (ecuaciones (2.69) y (2.70)) y finalmente, separados por una membrana elástica (ecuaciones (2.83) y (2.84)).

Analizando primeramente la curva correspondiente al caso sin membrana (línea azul), se puede observar que poco antes de los 40°, el coeficiente de reflexión se anula; el ángulo de incidencia donde esto ocurre se conoce como ángulo de intromisión,  $\theta_0$ , y ocurre, según se puede deducir de la ecuación (2.59), cuando

$$Z_2 \cos \theta_i = Z_1 \cos \theta_{tr}. \quad (2.94)$$

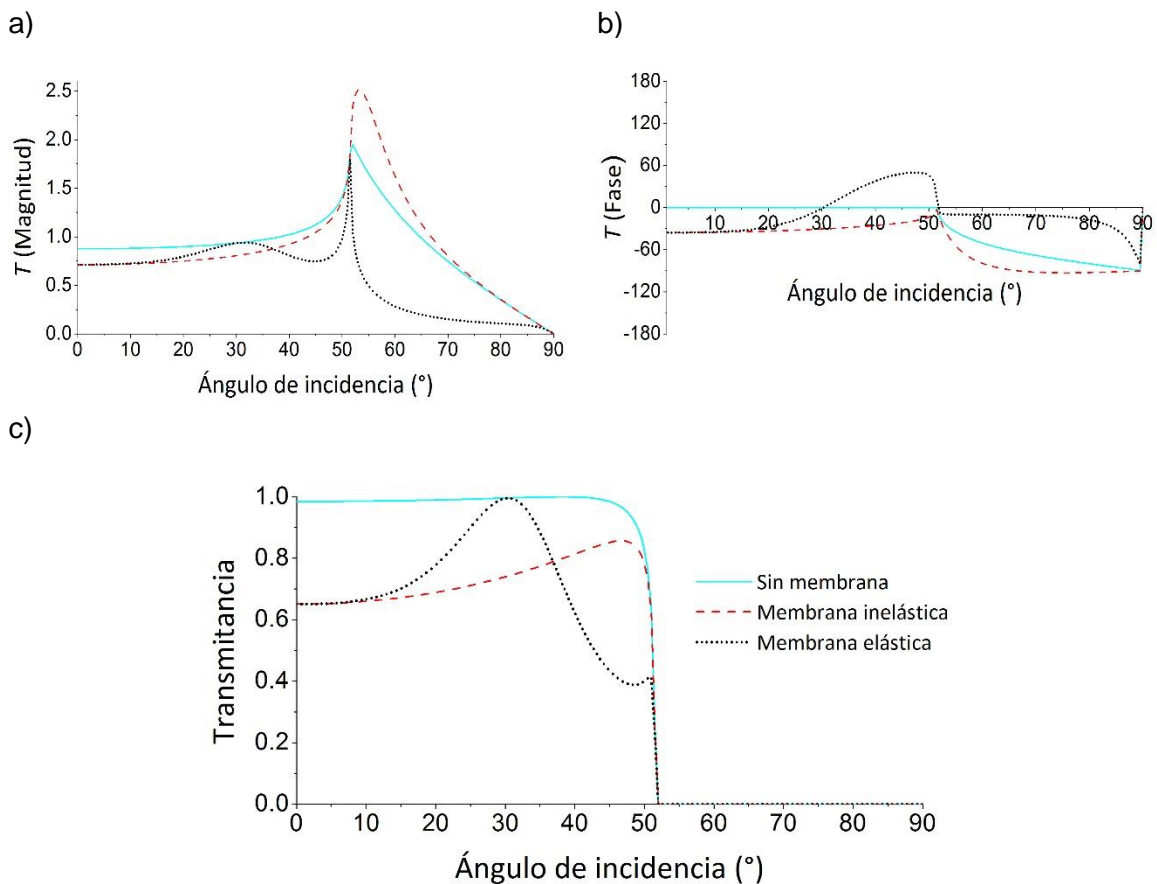


Fig. 2.7 a) Magnitud y b) fase de los coeficientes de transmisión, así como la c) transmitancia. Obsérvese que, a diferencia de la magnitud del coeficiente de transmisión, la transmitancia nunca excede el valor de 1.

Combinando la igualdad anterior con la ley de Snell y algunas relaciones trigonométricas básicas, se puede calcular el valor del ángulo de intromisión, siendo este:

$$\theta_0 = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^2 - 1}{\sqrt{\left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^2 - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2}} \right]. \quad (2.95)$$

A ángulos un poco menores de  $50^\circ$ , se observa que la magnitud empieza a aumentar muy rápidamente hasta llegar un punto, un poco mayor a los  $50^\circ$ , en donde se iguala a uno. Este ángulo es conocido como ángulo crítico,  $\theta_{cr}$ , y ocurre cuando  $\theta_{tr}$  es igual a  $90^\circ$ ; su valor está determinado por la ecuación:

$$\theta_{cr} = \text{sen}^{-1} \left( \frac{c_1}{c_2} \right). \quad (2.96)$$

A partir de este ángulo, ninguna energía se transmite al medio 2 y como consecuencia se produce el fenómeno conocido como reflexión total interna. Sin embargo, aunque no hay transmisión de energía, sí existen campos de presión en el medio 2, necesarios para satisfacer las condiciones de continuidad en la frontera, que decaen exponencialmente conforme se alejan de la interfaz. Estos campos dan origen a lo que se conoce como ondas evanescentes.

Cabe mencionar que tanto el ángulo de intromisión como el crítico no siempre ocurrirán, dependerá de los valores de  $c_1$ ,  $Z_1$ ,  $c_2$  y  $Z_2$ .

Observando ahora las curvas correspondientes al caso de la membrana elástica (línea punteada negra) y la inelástica (línea de guiones roja) se puede apreciar que a ángulos por debajo de los  $20^\circ$  y por encima de los  $50^\circ$  son casi coincidentes; la impedancia acústica de la membrana, mucho mayor comparada con la de cualquiera de los gases utilizados en esta simulación, refleja la mayoría de la onda incidente. Sin embargo, entre los  $20^\circ$  y  $50^\circ$ , el comportamiento de la curva de la membrana elástica se aleja del de la membrana inelástica, y en contraparte, se acerca al de la curva sin membrana, y de hecho igualándose en un ángulo cercano a  $30^\circ$ . Este es el efecto de coincidencia que se menciona al final de la subsección anterior y en este ángulo, tanto los coeficientes de reflexión y transmisión, así como la reflectancia y la transmitancia, coincidirán en los casos de membrana elástica y el caso sin membrana. Como en los casos del ángulo crítico y de intromisión, no siempre ocurrirá el efecto de coincidencia, aunque en este caso dependerá, aparte de las propiedades de los medios, también de las propiedades de la membrana.

Algo importante que se debe mencionar es que existe otro ángulo donde ocurre el mismo tipo de efecto, es decir que los coeficientes de reflexión y transmisión se igualen, y que además también ocurre en el caso de la membrana inelástica: en el ángulo crítico. Como se mencionó, cuando ocurre que hay ángulo crítico, el ángulo de transmisión es igual a  $90^\circ$ ; sustituyendo este valor en las ecuaciones (2.59),

(2.69) y (2.83) por un lado y en las ecuaciones (2.60), (2.70) y (2.84) por el otro, se puede observar que se igualan.

La frecuencia y las propiedades de la membrana empleadas para generar las gráficas de las Fig. 2.6 y Fig. 2.7 fueron:

Módulo de Young, $E$	40,000,000 Pa
Coefficiente de Poisson, $\sigma$	0.165
Densidad, $\rho$	2.7 kg/m <sup>3</sup>
Frecuencia, $f$	40 kHz

Estos valores no hacen referencia a ningún material en particular. De hecho, es difícil encontrar un sólido cuya densidad sea tan baja. Sin embargo, se escogieron de esta manera para resaltar los fenómenos que se presentan al incluir una membrana y en particular el efecto de coincidencia.

## 2.6 ONDAS ACÚSTICAS DIFRACTANTES; LA INTEGRAL DE RAYLEIGH

Antes de comenzar con la derivación de la integral de Rayleigh es importante introducir algunos conceptos que servirán para el desarrollo de esta subsección. El vector de velocidad de partícula del que se ha hablado con anterioridad se puede dividir en una parte irrotacional y otra rotacional introduciendo el potencial escalar  $\varphi$  y el potencial vectorial  $\vec{\Psi}$  de la siguiente manera:

$$\vec{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \vec{\Psi}. \quad (2.97)$$

Para entender el significado de la ecuación (2.97) hay que recordar que el rotacional es un operador que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto; por otro lado, la divergencia de cualquier punto ubicado en un flujo vectorial que describa un movimiento circular será cero, ya que para cualquier volumen de control el flujo neto entrante será igual al saliente. Asimismo, es fácil demostrar que el rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es cero y también se verifica que la divergencia de cualquier rotacional se anula.

Considerando lo anterior, y aplicando el rotacional a la ecuación (2.97) tenemos:

$$\nabla \times \vec{u} = \nabla \times \nabla\varphi + \nabla \times \nabla \times \vec{\Psi} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Psi}, \quad (2.98)$$

por lo que se puede concluir que cualquier flujo rotacional que haya, debe estar incluido en el término  $\nabla \times \vec{\Psi}$  y solo en dicho término. Sin embargo, cabría la

posibilidad que este término incluyera flujo irrotacional; para determinar que eso no es posible, ahora se aplica la divergencia a la misma ecuación (2.97) llegando a:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \nabla \times \vec{\Psi} = \nabla^2 \varphi, \quad (2.99)$$

por lo que todo fluido irrotacional estará incluido en el término  $\nabla \varphi$ , y solo en ese término.

Ahora considérese el problema de resolver la ecuación de onda para ondas no planas, específicamente ondas esféricas. Matemáticamente, el problema aumentará en complejidad, por lo que es conveniente, para simplificarlo lo más posible, resolver la ecuación para un campo escalar en vez de vectorial. Escoger  $\delta P$  en vez de  $\vec{u}$  podría parecer la opción natural. Sin embargo, como se verá más adelante, en algunas ocasiones es deseable poder pasar de las soluciones de un campo, digamos  $\delta P$ , al otro de forma sencilla; algo parecido a la ecuación (2.56), que relaciona la presión con la velocidad de partícula fácilmente, también se puede obtener para ondas no planas utilizando la ecuación (2.97), que se puede reducir a:

$$\vec{u} = \nabla \varphi, \quad (2.100)$$

eliminando el término rotacional, ya que la mayoría de los fenómenos estudiados en acústica son irrotacionales. Sustituyendo la ecuación (2.100)(2.97) en la ecuación (2.31), integrando y despejando se obtiene:

$$\delta P = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.101)$$

Ahora bien, aunque se puede obtener la solución para la ecuación de onda en función de  $\delta P$  y calcular  $\vec{u}$  mediante las ecuaciones (2.100) y (2.101), es más sencillo obtener la solución para  $\varphi$  y después calcular  $\delta P$  y  $\vec{u}$  con las mismas ecuaciones, tal y como se hará en este trabajo.

Escogiendo un sistema coordenado esférico, debido a la simetría con respecto al ángulo polar y azimutal, la ecuación de onda solo dependerá de la variable radial  $r$ . En dicho sistema coordenado y solo con la variable  $r$ , la ecuación de onda toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Mediante manipulaciones algebraicas se puede reacomodar la ecuación (2.102) para que adopte la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.103)$$

Es fácil verificar la equivalencia entre la ecuación (2.102) y la (2.103), simplemente desarrollando, en esta última, las derivadas del producto ( $r\varphi$ ). Si se toma como una nueva variable al producto ( $r\varphi$ ), la ecuación (2.103) tendría exactamente la misma forma que la (2.36) o la (2.37) cuyas soluciones son ondas planas del tipo de la ecuación (2.38), por lo tanto:

$$r\varphi = F(t - r/c_0) + G(t + r/c_0),$$

$$\varphi = \frac{F(t - r/c_0)}{r} + \frac{G(t + r/c_0)}{r}. \quad (2.104)$$

El primer término de la ecuación (2.104) representa una onda saliente, esféricamente divergente. La amplitud disminuye de forma inversamente proporcional a  $r$ . El segundo término representa una onda entrante, esféricamente convergente; a medida que  $r$  disminuye, la amplitud de la onda aumenta.

Excluyendo el segundo término de la ecuación (2.104), es decir, considerando solo ondas salientes, se llegaría a la expresión más general para la radiación acústica de un monopolo, el cual puede entenderse como una fuente esférica o esfera pulsante o vibrante que genera un campo acústico. Aplicando la ecuación (2.100) y (2.101) se obtiene, respectivamente, la velocidad de partícula y la presión del monopolo, las cuales es:

$$\vec{u} = -\frac{F(t - r/c_0)}{r^2} - \frac{F'(t - r/c_0)}{c_0 r}, \quad (2.105)$$

$$\delta P = -\rho_0 \frac{F'(t - r/c_0)}{r}. \quad (2.106)$$

La importancia de estudiar este caso radica en que resulta fácil asociar a la función  $F$  una propiedad física del sistema, la cual es el volumen desplazado o flujo volumétrico. Este volumen desplazado, para un monopolo de radio  $a$ , se calcula de la siguiente manera:

$$Q(t) = 4\pi a^2 \vec{u}(a, t), \quad (2.107)$$

es decir, el área de la esfera por la velocidad a la que se desplaza dicha área al vibrar. Utilizando la ecuación (2.105) valuada en  $r = a$  como condición en la frontera se llega a:



$$Q(t) = -4\pi \left[ F(t - a/c_0) + \frac{a}{c_0} F'(t - a/c_0) \right]. \quad (2.108)$$

El volumen desplazado por un monopolo puntual se encuentra al calcular el límite de la ecuación (2.108) cuando  $a$  tiende a cero, con lo que se obtiene:

$$\lim_{a \rightarrow 0} Q(t) = -4\pi F(t), \quad (2.109)$$

y por lo tanto, las expresiones para  $F$  y su derivada son:

$$F = -\frac{Q(t)}{4\pi}, \quad (2.110)$$

$$F' = -\frac{Q'(t)}{4\pi}. \quad (2.111)$$

Sustituyendo este valor de  $F$  en la ecuación (2.104), y después de remplazar  $t$  por el argumento  $(t - r/c_0)$ , se obtiene el potencial escalar para el caso del monopolo puntual:

$$\varphi = -\frac{Q(t - r/c_0)}{4\pi r}. \quad (2.112)$$

Sustituyendo la ecuación (2.112) en la (2.106) se obtiene la presión radiada, siendo:

$$\delta P = \frac{\rho_0 Q'(t - r/c_0)}{4\pi r}. \quad (2.113)$$

Como  $\rho_0 Q'$  es el flujo de masa por unidad de tiempo, o aceleración de masa (unidades  $kg/s^2$ ), vemos que la presión en cualquier punto  $r$  del campo está determinada por la aceleración de masa del monopolo puntual. El retardo  $r/c_0$  representa el tiempo requerido para que la onda viaje desde la fuente hasta el punto de campo  $r$ . El factor de disminución de amplitud  $1/r$  se debe a la dispersión esférica de la onda. La cantidad  $Q$  (o a veces  $Q'$ ) se llama la fuerza del monopolo. El monopolo puntual juega un papel importante en aplicaciones prácticas. Por ejemplo, a una frecuencia lo suficientemente baja, un altavoz montado en un gabinete cerrado rígido puede actuar como un monopolo puntual. Si la fuente a analizar no es pequeña, se puede dividir en elementos infinitesimales, actuando cada uno como un monopolo puntual, como se muestra en la Fig. 2.8. La radiación total recibida en un determinado punto del campo  $x, y, z$ , es entonces la suma de las radiaciones de los monopolos puntuales individuales, es decir:

$$\delta P(x, y, z, t) = \rho_0 \int_V \frac{Q'_v(x', y', z'; t - R/c_0)}{4\pi R} dx' dy' dz', \quad (2.114)$$

donde  $Q'_v$  es la fuerza de la fuente por unidad de volumen (y por lo tanto sus unidades son  $1/s^2$ ),  $V$  es el volumen radiante, conformado por todos los monopolos puntuales individuales, y  $R$  la distancia entre un monopolo puntual individual del volumen radiante  $(x', y', z')$  y un punto cualquiera  $(x, y, z)$  del dominio de definición, es decir:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (2.115)$$

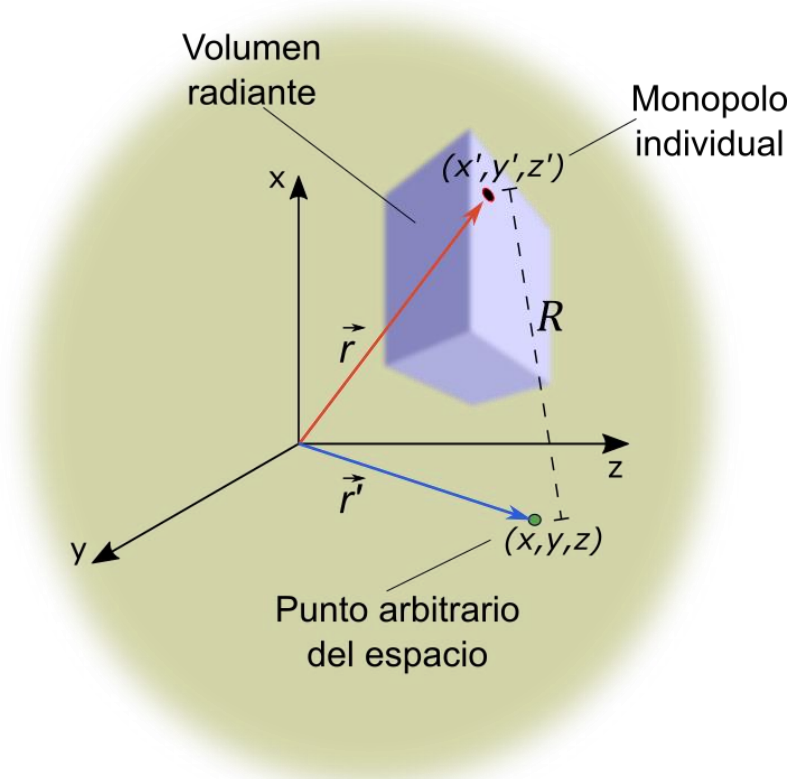


Fig. 2.8 El paralelepípedo de la figura representa un cuerpo radiante que puede ser considerado como un conjunto de monopolos puntuales. El campo acústico total será la suma del campo producido por cada uno de ellos.

Si las fuentes se distribuyen sobre un área  $S$  en lugar del volumen  $V$ , la integral de volumen en la ecuación (2.114) se reemplaza por una integral de superficie. Eligiendo el sistema de coordenadas de manera que el área  $S$  esté en el plano  $x, y$ , es decir  $z = 0$ , la presión viene dada por:

$$\delta P(x, y, z, t) = \rho_0 \int_S \frac{Q'_s(x', y'; t - R/c_0)}{4\pi R} dx' dy' \quad (2.116)$$

donde ahora  $Q'_s$  es la fuerza de la fuente por unidad de área (sus unidades son  $m/s^2$ ) y  $R$  dada según la ecuación (2.115) solo que en este caso  $z' = 0$ , es decir:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}. \quad (2.117)$$

Un caso particular de la ecuación (2.116) es cuando la radiación se restringe a un solo hemisferio, frente al plano de la fuente, y dicha radiación proviene de un pistón, de forma arbitraria pero bidimensional, colocado en un plano rígido; una bocina montada en una caja acústica cuyo diámetro sea pequeño comparado con las dimensiones de la caja podría ser un ejemplo. La solución para este caso es conocida como la integral de Rayleigh.

En tal situación, cada monopolo puntual irradia hacia un espacio hemisférico (no un espacio esférico completo); el factor  $4\pi$  en la ecuación (2.107) que da el volumen desplazado por el monopolo se reemplaza por  $2\pi$  y, en consecuencia, la ecuación (2.116) también se modifica. Otro punto a tener en cuenta es acerca de la función  $Q'_s$ ; cada sección infinitesimal del pistón actuará como un monopolo individual, por lo que el volumen desplazado por cada uno de ellos estará dado por la ecuación (2.107) tomando la velocidad en cada punto igual a la velocidad del pistón en dicho punto  $u_p$ ; la derivada temporal de esta ecuación es la aceleración volumétrica de cada monopolo y al dividirla entre su área infinitesimal se obtiene la aceleración volumétrica por unidad de área  $Q'_s$ , que es simplemente la aceleración del pistón  $u'_p$ , a la cual se le debe cambiar el argumento  $t$  por  $(t - R/c_0)$ , como se hizo antes. Con estas consideraciones, la integral de Rayleigh resulta ser:

$$\delta P(x, y, z, t) = \rho_0 \int_S \frac{u'_p(x', y'; t - R/c_0)}{2\pi R} dS, \quad (2.118)$$

con  $R$  como en la ecuación (2.117) y  $S$  el área del pistón. Aunque la ecuación (2.118) es una solución exacta, la integración es generalmente difícil de realizar. Excepto por unos pocos problemas que se pueden resolver analíticamente, la integración se debe resolver numéricamente.

Antes de concluir esta parte se llevará a cabo el planteamiento del caso del pistón circular, que a pesar de no poder obtenerse una solución analítica final salvo considerando ciertas restricciones, es un modelo que describe muchos casos reales y que además se utilizará más adelante en este trabajo.

Además, se limitará a vibraciones armónicas del pistón, es decir:  $u_p = u_0 e^{i\omega t}$ , con  $u_0$  y  $\omega$  constantes; con lo anterior, la ecuación (2.118), después de hacer el cambio de argumento y derivar con respecto del tiempo, se transforma en:

$$\delta P(x, y, z, t) = \frac{ik\rho_0 c_0 u_0 e^{i\omega t}}{2\pi} \int_S \frac{e^{-ikR}}{R} dS, \quad (2.119)$$

con  $k = \omega/c_0$ . El pistón, de radio  $a$ , se ubicará en el plano  $x, y$  y su centro coincidirá con el origen del sistema coordenado, como se observa en la Fig. 2.9. El procedimiento consistirá en dividir el pistón en monopolos distribuidos en anillos concéntricos de anchura infinitesimal, cada uno de los cuales producirá una cierta presión en un punto  $P$  arbitrario del espacio, y al integrarlos se obtendrá la presión total en dicho punto. Asimismo, por la geometría del problema, es conveniente utilizar coordenadas esféricas  $\sigma, \psi$  y  $\theta$  (se utiliza para el radio la variable  $\sigma$  en vez de  $r$  para evitar confundir con  $\vec{r}$ ).

El cálculo del campo de presiones se llevará a cabo solo en el plano  $x, z$ , debido a que el problema presenta simetría azimutal, es decir, cualquier plano que contenga al eje  $z$  tendrá exactamente la misma distribución de presiones. Esto se puede constatar suponiendo un cambio del sistema coordenado  $x, y, z$  a uno nuevo  $x', y', z'$  mediante una rotación alrededor del eje  $z$ ; para un punto cualquiera  $(a, 0, b)$ , tanto en el sistema original y como en primado, la distribución de los monopolos individuales que constituyen al pistón será la misma, por lo que la presión también lo será.

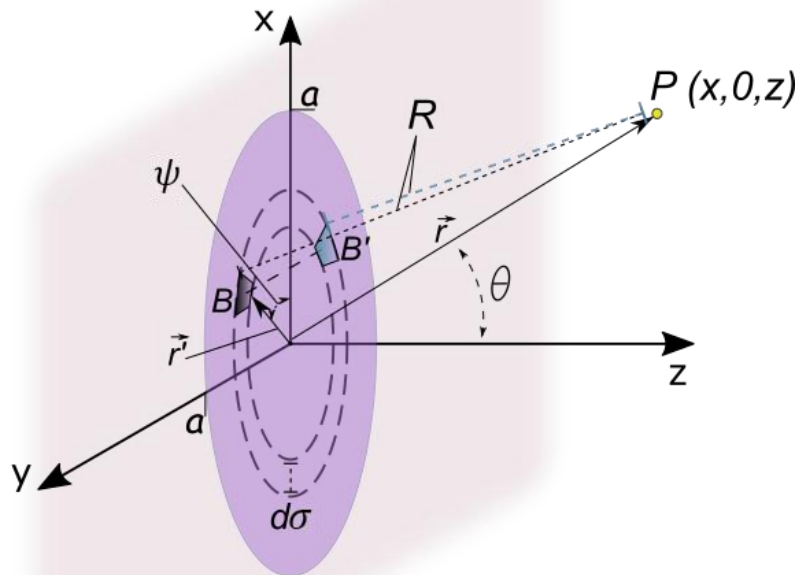


Fig. 2.9 Pistón radiante montado en un baffle rígido. Obsérvese que el baffle restringe la radiación al lado derecho del pistón.

Ahora bien, la distancia  $\vec{r}$  entre el origen y el punto  $P$  está dada por:

$$\vec{r} = |\vec{r}|\text{sen } \theta \hat{\mathbf{i}} + |\vec{r}|\text{cos } \theta \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.120)$$

y la distancia  $\vec{r}'$  entre el origen y un monopolo individual del pistón es:

$$\vec{r}' = \sigma \text{cos } \psi \hat{\mathbf{i}} + \sigma \text{sen } \psi \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.121)$$

Por lo tanto, la distancia  $R$  entre cada monopolo y  $P$  será:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(|\vec{r}|\text{sen } \theta - \sigma \text{cos } \psi)^2 + (\sigma \text{sen } \psi)^2 + (|\vec{r}|\text{cos } \theta)^2},$$

$$R = \sqrt{|\vec{r}|^2 + \sigma^2 - 2|\vec{r}|\sigma \text{sen } \theta \text{cos } \psi}. \quad (2.122)$$

Nuevamente por simetría se puede hacer otra simplificación. En la Fig. 2.9 se observan dos monopolos, uno  $B$  ubicado a una distancia  $\sigma$  del origen y a un ángulo azimutal  $\psi$  y otro  $B'$  a la misma distancia, pero a un ángulo azimutal  $-\psi$ ; de la ecuación (2.122) se verifica que la distancia  $R$  de ambos monopolos es la misma y por lo tanto el efecto de ambos será igual; la presión en  $P$  debida a cada par de monopolos en estas circunstancias simplemente será la presión debida a uno solo de ellos multiplicada por dos. Por lo tanto, solo es necesario integrar cada anillo hasta la mitad o, dicho de otra forma, integrar  $\psi$  de 0 a  $\pi$  y multiplicar el resultado por 2.

Con todo lo anterior, y tomando la diferencial de superficie como  $dS = \sigma d\sigma d\psi$ , se llega a que la integral para el pistón circular es:

$$\delta P(x, y, z, t) = \frac{ik\rho_0 c_0 u_0 e^{i\omega t}}{\pi} \int_0^\pi \int_0^a \sigma \frac{e^{-ikR}}{R} d\sigma d\psi, \quad (2.123)$$

con  $R$  definida como en la ecuación (2.122). Como se mencionó anteriormente, por lo general la ecuación (2.123) deberá resolverse de forma numérica, sin embargo, si lo que interesa es conocer el campo de presiones en lugares alejados del pistón, específicamente cuando  $|\vec{r}| \gg a$ , pueden hacerse simplificaciones que permitan resolver la integral analíticamente. A pesar de que esta solución, conocida como solución del campo lejano, es una aproximación, utilizándola con buen criterio es bastante precisa. Aunque el presente trabajo ya no se presentará dicha solución, en [56] hay un análisis bastante detallado.

## 3 EL MÉTODO DE ESPECTRO ANGULAR

El método del espectro angular (ASM) es una técnica matemática para modelar la propagación de un campo ondulatorio en un semiespacio a partir del valor del campo (o algunas de sus componentes en caso de campos vectoriales) en todo un plano infinito. Básicamente consiste describir dicho fenómeno ondulatorio mediante una suma infinita de ondas planas monocromáticas. Sus orígenes matemáticos se encuentran en el campo de la óptica de Fourier, pero se ha aplicado ampliamente en el campo de la acústica.

Este método, además de modelar los efectos de la difracción, se ha ampliado para aplicarlo a casos no monocromáticos (pulsos acústicos) e incluir los efectos de atenuación, refracción y dispersión. Varios investigadores también han ampliado el modelo para incluir los efectos no lineales de la propagación acústica de amplitud finita (propagación en los casos en que la velocidad del sonido no es constante, pero depende de la presión acústica instantánea).

En el presente trabajo se aplicará el ASM para modelar y simular los efectos de reflexión y transmisión. Se podrá ver que dicho método es especialmente eficaz para tratar estos fenómenos, debido al hecho de que los coeficientes de reflexión y transmisión se derivan a partir del modelo de onda plana, por lo que se pueden aplicar directamente en la suma infinita de ondas utilizada por este método.

El propósito del presente capítulo es explicar con detalle en que consiste el ASM. La primera sección tratará sobre conceptos generales de la transformada de Fourier, ya que como se verá, ésta es esencial para el método; en la segunda sección se desarrollará el formalismo matemático del ASM y posteriormente se mostrarán las adecuaciones que se hicieron a éste para poderlo utilizar en problemas de reflexión y transmisión. Se concluirá el capítulo describiendo cómo emplear el ASM en el caso de campos vectoriales.

### 3.1 TRANSFORMADA DE FOURIER

Como es sabido, si se tiene una función  $F$  cuyo dominio sea el tiempo, su transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt,$$

con la que se obtiene una función cuyo dominio es el de la frecuencia angular  $\omega$ . De manera similar, se puede regresar al dominio temporal utilizando la transformada inversa de Fourier la cual está definida como:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Este par de transformadas son bien conocidas y ampliamente utilizadas en el análisis de señales en el tiempo. Sin embargo, mediante sencillas manipulaciones algebraicas, se puede pasar de los dominios temporal y frecuencial a otro par de dominios, totalmente equivalentes a éstos pero que implican fenómenos ondulatorios, los cuales son el dominio espacial y el dominio  $k$  (el número de onda definido como  $k = \omega/c$ ).

Considerando un desplazamiento ondulatorio en la dirección  $x$  a una frecuencia  $\omega$  y a la velocidad  $c_x$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{c_x}{c_x}\omega\right) &= \mathcal{F}(c_x k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_x}{c_x} F\left(\frac{c_x}{c_x}t\right) e^{-i\frac{c_x}{c_x}\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} c_x F\left(\frac{x}{c_x}\right) e^{-ik_x x} dx, \\ \mathcal{U}(k_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-ik_x x} dx, \end{aligned} \quad (3.1)$$

con  $\mathcal{U}(k_x) = \mathcal{F}(c_x k_x)$  y  $U(x) = c_x F\left(\frac{x}{c_x}\right)$ .

Con manipulaciones similares, se puede obtener la transformada inversa de Fourier en este nuevo par de dominios:

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(k_x) e^{ik_x x} dk_x. \quad (3.2)$$

Asimismo, si se tiene una función que dependa de dos variables, se puede aplicar la transformada de Fourier a ambas de manera sucesiva:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-ik_x x} dx \right] e^{-ik_y y} dy \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

cuya respectiva transformada inversa es:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(k_x, k_y) e^{ik_x x} dk_x \right] e^{ik_y y} dk_y$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (3.4)$$

En el análisis de Fourier convencional se tiene una propiedad que relaciona la transformada de una función con la transformada de la derivada de dicha función, la cual es:

$$\mathcal{F}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right) = i\omega \mathcal{F}(s(t)).$$

De manera similar se tiene:

$$\mathcal{U}\left(\frac{dU(x, y)}{dx}\right) = ik_x \mathcal{U}(U(x, y)). \quad (3.5)$$

En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dU(x, y)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(k_x, k_y) e^{ik_y y} \frac{d(e^{ik_x x})}{dx} dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} (ik_x \mathcal{U}(k_x, k_y)) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \end{aligned}$$

Lo cual, por la definición de la transformada de Fourier, implica que  $ik_x \mathcal{U}(k_x, k_y)$  sea la transformada de  $\frac{dU(x, y)}{dx}$ . Con razonamientos análogos también se concluye que:

$$\mathcal{U}\left(\frac{d^2 U(x, y)}{dx^2}\right) = -k_x^2 \mathcal{U}(U(x, y)), \quad (3.6)$$

$$\mathcal{U}\left(\frac{d^2 U(x, y)}{dy^2}\right) = -k_y^2 \mathcal{U}(U(x, y)), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{U}\left(\frac{d^2 U(x, y)}{dx dy}\right) = -k_x k_y \mathcal{U}(U(x, y)). \quad (3.8)$$



## 3.2 PROPAGACIÓN DE SONIDO A PARTIR DE UN PLANO

De la misma manera que en el análisis de Fourier convencional se puede descomponer una señal en sus distintos elementos de frecuencia, en este nuevo par de dominios se puede descomponer una onda en las diversas ondas planas que la conforman. Estas ondas planas constituyentes tienen la misma frecuencia, pero diversas direcciones. Si se describe al campo de presión acústico como una variable dependiente tanto del tiempo como de la posición y tomando en cuenta solo ondas monocromáticas, se puede llegar de la ecuación de onda a la ecuación de Helmholtz:

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2 p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = e^{-i\omega t} \nabla^2 P - \frac{P}{v^2} \frac{\partial^2 (e^{-i\omega t})}{\partial t^2} = \nabla^2 P + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 P = \nabla^2 P + k_0^2 P = 0.$$

Esta última ecuación, al desarrollar el laplaciano en coordenadas rectangulares, queda expresada como:

$$\frac{\partial^2 P(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, z)}{\partial z^2} + k_0^2 P(x, y, z) = 0. \quad (3.9)$$

Aplicando la transformada de Fourier con respecto a  $x$  y  $y$  se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) \mathcal{P}(k_x, k_y, z) = 0. \quad (3.10)$$

Donde  $\mathcal{P}$  es la transformada de Fourier con respecto a  $x$  y  $y$  de  $P$ . Ahora, si se sustituye  $k_0^2 - k_x^2 - k_y^2$  por  $k_z^2$  se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + k_z^2 \mathcal{P}(k_x, k_y, z) = 0. \quad (3.11)$$

Esta ecuación corresponde a la de un oscilador armónico cuyas soluciones son de la forma  $e^{\pm ik_z z}$ . Considerando al campo acústico como ondas que se desplazan desde el origen hacia la parte positiva de  $z$ , solo la solución  $e^{ik_z z}$  será válida. Por lo tanto, la solución general de la ecuación (3.11) es:

$$\mathcal{P}(k_x, k_y, z) = f(k_x, k_y) e^{ik_z z}, \quad (3.12)$$

donde  $f(k_x, k_y)$  es una función aún por determinar. Aplicando la transformada inversa de Fourier a la ecuación (3.12) obtenemos la presión en función de las coordenadas espaciales:

$$P(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} (f(k_x, k_y) e^{ik_z z}) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y,$$

$$P(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y. \quad (3.13)$$

Esta última ecuación afirma que un campo acústico arbitrario en el semiespacio  $z > 0$  se puede representar por un espectro de ondas planas, ya que  $f(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$  es una onda plana de amplitud  $f$  propagándose en la dirección del vector de onda  $\vec{k}_0 = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}$ .

Por otro lado, calculando la transformada de Fourier de  $P(x, y, z)$  mediante la ecuación (3.3) e igualándola a la ecuación (3.12), se obtiene:

$$f(k_x, k_y) e^{ik_z z} = \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (3.14)$$

Si se supone que el valor de  $P$  en cada punto del plano  $z = 0$  es conocido, entonces el problema de determinar el valor de  $f(k_x, k_y)$  se reduce a evaluar la ecuación (3.14) con la condición a la frontera:  $P(x, y, z) = P(x, y, z = 0) = P_t(x, y)$  en  $z = 0$ . De esta manera se obtiene:

$$f(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} P_t(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (3.15)$$

En otras palabras, la función  $f(k_x, k_y)$  se encuentra conociendo la condición en la frontera para  $P$  en  $z = 0$  [85]. En general, esta condición en la frontera dependerá de la forma que tenga el pistón. Hay dos casos de especial interés: el pistón de forma rectangular y el pistón de forma circular.

Con un pistón rectangular centrado en el origen, de dimensiones  $2a$  a lo largo del eje  $x$  y  $2b$  a lo largo del eje  $y$ , que se encuentra en el plano  $z = 0$ , y cuya condición a la frontera es:

$$P_t = \begin{cases} P_0 = \text{cte.} & \text{si } |x| \leq a, |y| \leq b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}, \quad (3.16)$$

(Fig. 3.1) se obtiene:

$$f(k_x, k_y) = \int_{-b}^b \int_{-a}^a P_0 e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy,$$

$$f(k_x, k_y) = P_0 \left[ \frac{e^{iak_x} - e^{-iak_x}}{ik_x} \right] \int_{-b}^b e^{iky} dy = P_0 \left[ \frac{e^{iak_x} - e^{-iak_x}}{ik_x} \right] \left[ \frac{e^{ibk_y} - e^{-ibk_y}}{ik_y} \right].$$

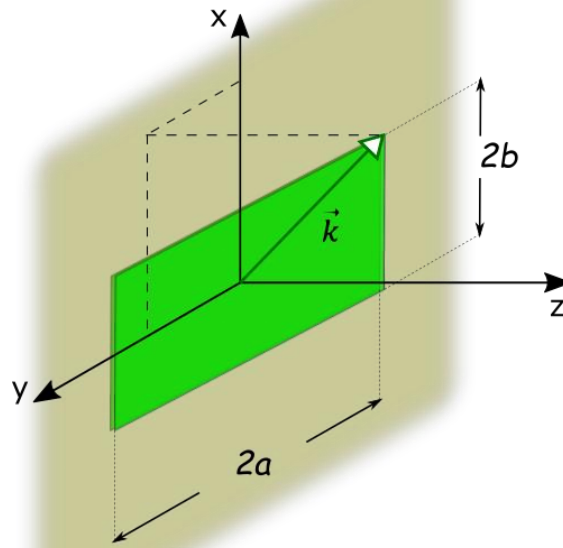


Fig. 3.1 Pistón rectangular de ancho  $2b$  y largo  $2a$ .

Y recordando la identidad  $e^{iw} - e^{-iw} = 2i \operatorname{sen}(w)$ , se llega a:

$$f(k_x, k_y) = 4abP_0 \frac{\operatorname{sen}(ak_x)}{ak_x} \frac{\operatorname{sen}(bk_y)}{bk_y} = 4abP_0 \operatorname{sinc}(ak_x) \operatorname{sinc}(bk_y). \quad (3.17)$$

Con un pistón circular centrado en el origen, de radio  $a$  que se encuentra en el plano  $z = 0$  y asumiendo constante la presión en  $x^2 + y^2 \leq a^2$  ( $P_t = P_0$ ) y cero en cualquier otra parte, es decir:

$$P_t = \begin{cases} P_0 = \text{cte.} & x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}, \quad (3.18)$$

(Fig. 3.2) se obtiene:

$$f(k_x, k_y) = \iint_{S_0} P_0 e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy.$$

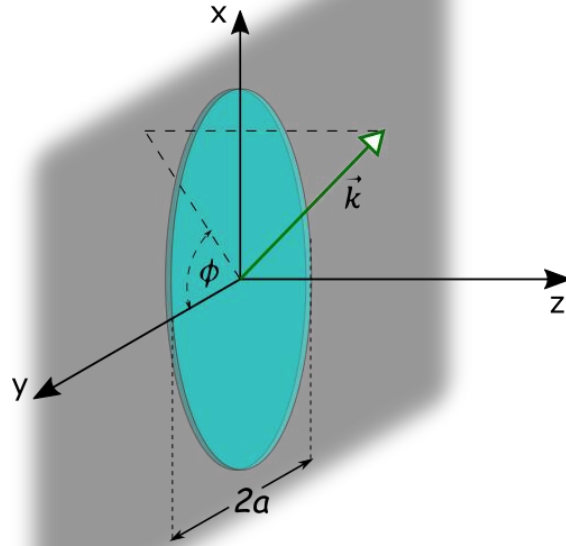


Fig. 3.2 Pistón circular de radio  $a$ .

Con el fin de resolver esta integral se cambia a coordenadas cilíndricas  $\rho, \phi'$  con  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; en consecuencia  $x = \rho \cos(\phi')$ ,  $y = \rho \sin(\phi')$ . También se tiene que  $k_x = k_0 \sin(\theta)\cos(\phi)$ ,  $k_y = k_0 \sin(\theta)\sin(\phi)$ . Por lo tanto:

$$f(k_x, k_y) = \int_0^a \int_0^{2\pi} P_0 e^{-ik_0 \rho \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \rho d\phi' d\rho.$$

Ya que por la identidad trigonométrica  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ , el exponente se reduce a:

$$\begin{aligned} & -k_0 \rho \sin(\theta) (\cos(\phi)\cos(\phi') + \sin(\phi)\sin(\phi')) = \\ & -k_0 \rho \sin(\theta) (\cos(\phi)\cos(-\phi') - \sin(\phi)\sin(-\phi')) = -k_0 \rho \sin(\theta) \cos(\phi - \phi'). \end{aligned}$$

También se observa que:

$$\begin{aligned} e^{i w \cos(\phi - \phi')} &= J_0(w) - 2[J_2(w)\cos 2(\phi - \phi') - J_4(w)\cos 4(\phi - \phi') + \dots] \\ &+ 2i[J_1(w)\cos(\phi - \phi') - J_3(w)\cos 3(\phi - \phi') + \dots], \end{aligned}$$

donde  $J_n(w)$  es una función Bessel de primera clase y de orden  $n$ . Usando esta expansión la integración sobre  $\phi'$  está prácticamente hecha. Todos los términos se anulan excepto  $J_0$ . Recordando que  $J_0(-x) = J_0(x)$ , la integral sobre  $\rho$  se obtiene con facilidad obteniendo:

$$f(k_x, k_y) = P_0 \int_0^a 2\pi J_0(k_0 \rho \sin(\theta)) \rho d\rho$$

$$f(k_x, k_y) = 2\pi a^2 P_0 \frac{J_1(k_0 a \sin(\theta))}{k_0 a \sin(\theta)} = 2\pi a^2 P_0 \frac{J_1(a \sqrt{k_x^2 + k_y^2})}{a \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}. \quad (3.19)$$

### 3.3 REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

El campo acústico generado por una fuente en una región donde haya dos medios con impedancias acústicas diferentes, y que se encuentre a un ángulo  $\theta$  con respecto a la normal de la interfaz entre dichos medios, puede descomponerse en tres partes: un campo incidente y un campo reflejado, cuya suma resultara en el campo acústico del medio 1, y un campo transmitido en el medio 2.

El campo incidente  $P_i$  se calcula según lo visto en la sección anterior con el origen del sistema de referencias ubicado en la fuente, condicionada su existencia solo donde se encuentre el medio 1.

El campo reflejado  $P_r$  es equivalente a un campo acústico cuya fuente se encuentra ubicada en la imagen especular de la fuente original, tomando como eje de reflexión la interfaz y propagándose en un ambiente idéntico al medio 1; como en el incidente, el campo generado por esta fuente imagen solo es válido en el dominio de este medio.

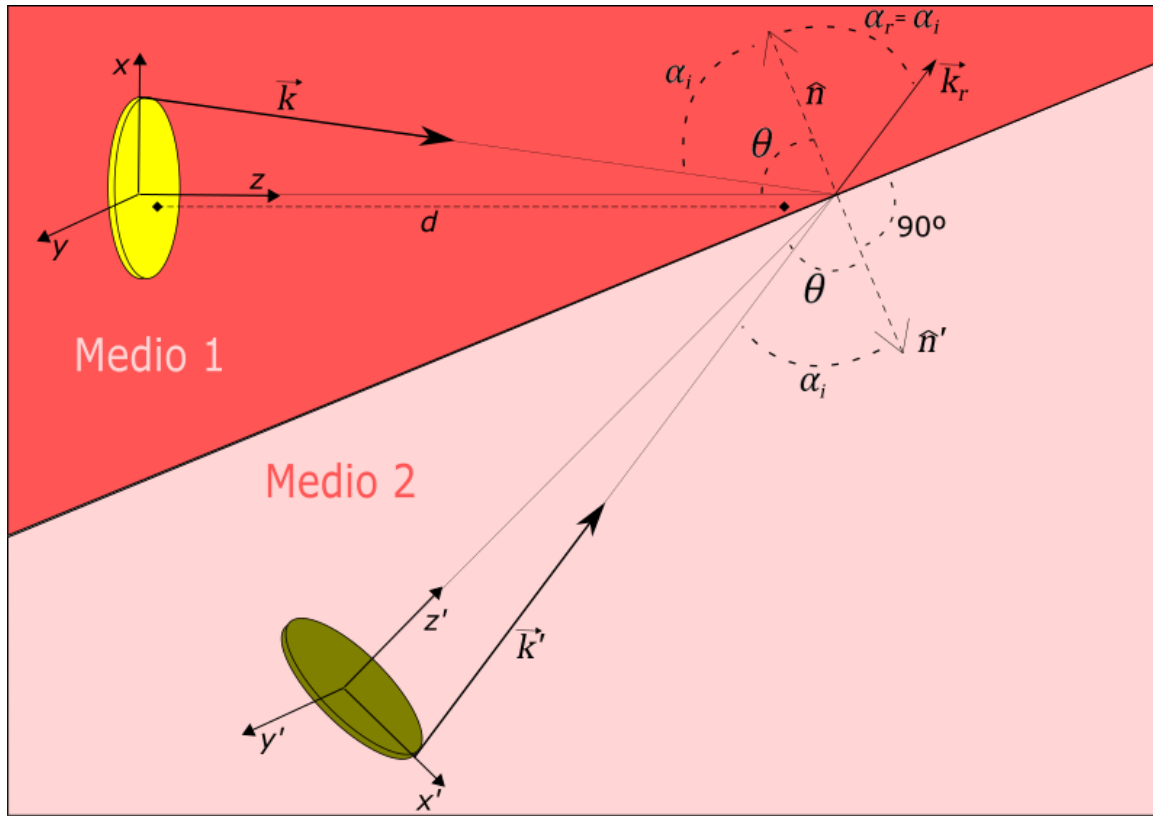
Para facilitar el cálculo del campo reflejado se hace uso de un nuevo sistema coordenado, que resulta de trasladar al sistema original a la posición de la fuente imagen; posteriormente éste se rota contra reloj un ángulo igual a  $180^\circ - 2\theta$  alrededor del eje  $y'$  en el plano  $x'z'$  y finalmente se refleja con respecto al plano  $y'z'$ , como se puede observar en la Fig. 3.3. Esta serie de transformaciones dan como resultado:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(180^\circ - 2\theta) & 0 & -\sin(180^\circ - 2\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(180^\circ - 2\theta) & 0 & \cos(180^\circ - 2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + d\sin(2\theta) \\ y \\ z - d(1 + \cos(2\theta)) \end{pmatrix},$$

que se reduce a:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & 0 & \sin(2\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(2\theta) & 0 & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + d\sin(2\theta) \\ y \\ z - d(1 + \cos(2\theta)) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

El campo reflejado está descrito en este sistema de referencia mediante la integral:



### Cambio de coordenadas paso a paso

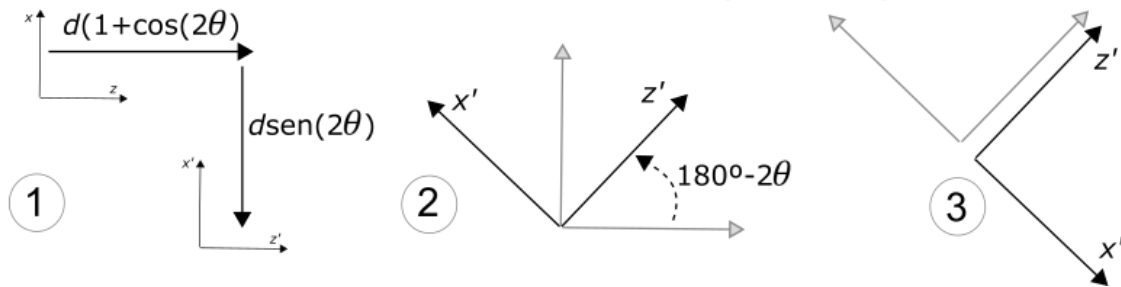


Fig. 3.3 Fuente imagen empleada para el cálculo del campo reflejado. En la parte de abajo se muestran los pasos que se aplicaron para cambiar del sistema coordenado de la fuente original al de la fuente imagen (sistema primado).

$$P_r(x', y', z') = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} r(\alpha_i) f(k_{x'}, k_{y'}) e^{i(k_{x'}x' + k_{y'}y' + k_{z'}z')} dk_{x'} dk_{y'}, \quad (3.21)$$

donde  $r(\alpha_i)$  es el coeficiente de reflexión de onda plana correspondiente a un vector de onda cuyo ángulo entre éste y la normal a la interfaz es  $\alpha_i$ . Este ángulo  $\alpha_i$  se puede expresar en función del vector de onda y el vector normal unitario a la interfaz  $\hat{n}$  mediante el producto escalar entre éstos. Expresando al vector normal unitario como  $\hat{n} = -\text{sen}(\theta)\hat{i} + 0\hat{j} + \text{cos}(\theta)\hat{k}$  se obtiene:

$$\alpha_i = \cos^{-1} \left[ \frac{k_z \text{cos}(\theta) - k_x \text{sen}(\theta)}{\|\vec{k}\|} \right]. \quad (3.22)$$

El valor de  $r(\alpha_i)$  se calcula con la fórmula usual:

$$r(\alpha_i) = \frac{Z_2 \cos(\alpha_i) - Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin(\alpha_i)\right)^2}}{Z_2 \cos(\alpha_i) + Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin(\alpha_i)\right)^2}} \quad (3.23)$$

donde  $Z_i = \rho_i c_i$  es la impedancia acústica correspondiente al  $i$ -ésimo término.

La componente  $k_{z'}$  del vector de onda se calcula como:  $k_{z'} = \sqrt{\|\vec{k}'\|^2 - k_{x'}^2 - k_{y'}^2}$ ; y debido a que tanto el campo incidente como el reflejado se propagan en el mismo medio se tiene:  $\|\vec{k}'\| = \|\vec{k}\| = \omega/c_1 = 2\pi/\lambda_1$ .

El campo transmitido se puede calcular a partir del incidente, pero con la condición de que solo existe en el medio 2 y multiplicado por el coeficiente de transmisión. Además, y muy importante, debe tomarse en cuenta el efecto de la refracción, lo cual consiste, por la ley de Snell, en la conservación de la componente tangencial a la interfaz del vector de onda.

Con este fin, es conveniente utilizar un sistema coordenado ubicado con dos de sus ejes (sean  $x'$ ,  $y'$ ) sobre el plano definido por la interfaz. La conveniencia de dicho sistema coordenado se verá a continuación.

Como se ve en la Fig. 3.4, el nuevo sistema coordenado resulta de trasladar al sistema original una distancia  $d$  sobre el eje  $z$  y posteriormente rotarlo un ángulo  $\theta$  en sentido del reloj en el plano  $x'z'$ , con lo que se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & 0 & -\sin(-\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\theta) & 0 & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - d \end{pmatrix},$$

que se reduce a:

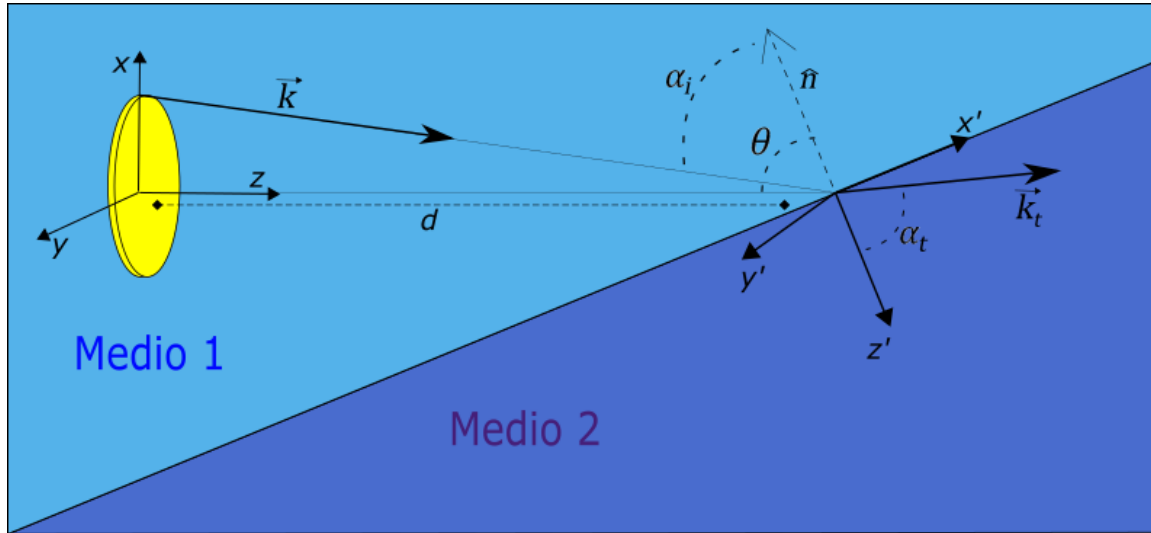
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - d \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

y por lo tanto, la transformada inversa está dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

El campo incidente está descrito en el sistema de referencia original como:

$$P_i(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y. \quad (3.26)$$



Cambio de coordenadas paso a paso

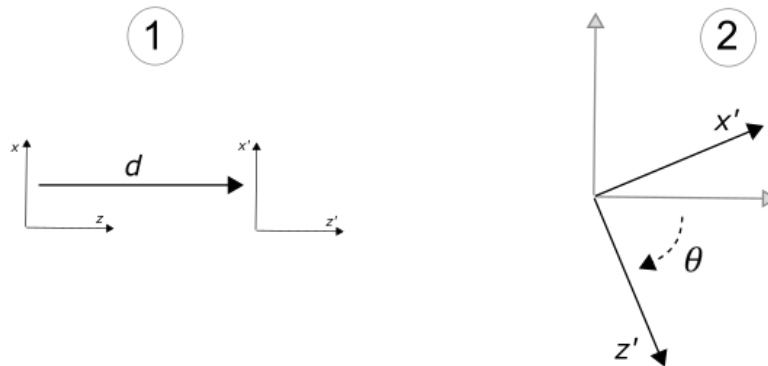


Fig. 3.4 Sistema coordenado empleado para el cálculo del campo transmitido. En la parte de abajo se muestran los pasos que se aplicaron para cambiar del sistema coordenado original al nuevo (sistema primado).

Expresando la ecuación (3.26) en el nuevo sistema coordenado mediante (3.25) se obtiene:

$$P_i(x', y', z') = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, k_y) e^{i(k_x[x'\cos\theta - z'\sin\theta] + k_y y' + k_z[x'\sin\theta + z'\cos\theta + d])} dk_x dk_y,$$

y reordenando términos se llega a:

$$P_i(x', y', z') = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, k_y) e^{i((k_x \cos\theta + k_z \sin\theta)x' + k_y y' + (k_z \cos\theta - k_x \sin\theta)z' + k_z d)} dk_x dk_y. \quad (3.27)$$



Por otro lado, las componentes de cualquier vector, y en particular las de un vector de onda dado, se transforman en el nuevo sistema coordenado mediante la matriz:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

que es igual a la ecuación (3.24) excepto por la ausencia del término  $-d$  en la segunda matriz de la izquierda; esto se debe al hecho de que las componentes de un vector no se ven afectadas por traslaciones. De lo anterior se obtienen las igualdades:

$$\begin{aligned} \text{a) } k'_x &= k_x \cos\theta + k_z \sin\theta, \\ \text{b) } k'_y &= k_y, \\ \text{c) } k'_z &= k_z \cos\theta - k_x \sin\theta, \end{aligned} \quad (3.29)$$

que al sustituirlas en la ecuación (3.27) (términos  $(k_x \cos\theta + k_z \sin\theta)$  y  $(k_z \cos\theta - k_x \sin\theta)$  en el exponente) se obtiene:

$$P_i(x', y', z') = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, k_y) e^{i(k'_x x' + k'_y y' + k'_z z')} e^{ik_z d} dk_x dk_y. \quad (3.30)$$

Se observa que en este nuevo sistema coordenado  $k'_x$  y  $k'_y$  son tangenciales a la interfaz, y por lo tanto se conservaran cuando la onda se transmita al medio 2. Para reproducir el efecto de la refracción solo es necesario sustituir en la ecuación (3.30)  $k'_z$  por:

$$k_{z2} = \sqrt{\left(2\pi/\lambda_2\right)^2 - k'^2_x - k'^2_y}. \quad (3.31)$$

Ahora se observa la conveniencia de utilizar un sistema coordenado como el elegido; el problema de reproducir el fenómeno de refracción se reduce a reemplazar uno de los componentes del vector de onda. Finalmente, multiplicando el integrando de la ecuación (3.30) por el coeficiente de transmisión de onda plana:

$$t(\alpha_i) = \frac{2Z_2 \cos(\alpha_i)}{Z_2 \cos(\alpha_i) + Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin(\alpha_i)\right)^2}}, \quad (3.32)$$

se obtiene el campo transmitido  $P_t$  el cual es:

$$P_t(x', y', z') = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} t(\alpha_i) f(k_x, k_y) e^{i(k'_x x' + k'_y y' + k_{z2} z')} e^{ik_z d} dk_x dk_y, \quad (3.33)$$

con el ángulo  $\alpha_i$  definido como en la ecuación (3.22).

### 3.4 DISCRETIZACIÓN DEL CÁLCULO CON EL ASM Y CASO BIDIMENSIONAL

En general, las integrales (3.13) y (3.15) son difíciles de resolver analíticamente, sin embargo, se pueden aproximar a una integración numérica discreta de Riemann, que a su vez puede ser incorporada en algún programa computacional. En tal aproximación, las integrales se convierten en sumatorias: el intervalo infinito de integración se reemplaza por uno finito ( $L$  en el dominio  $x, y$  y  $K$  en el dominio  $k_x, k_y$ ) el cual se divide en un cierto número de partes ( $2M$  en el dominio  $x, y$  y  $2N$  en el dominio  $k_x, k_y$ ); los elementos diferenciales  $dx, dy, dk_x$  y  $dk_y$  se convierten en incrementos  $\Delta x = \Delta y = L/2M$  y  $\Delta k_x = \Delta k_y = K/2N$ , con lo que se obtiene:

$$P(x, y, z) \approx \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N f(k_{x_j}, k_{y_i}) e^{i(k_{x_j}x + k_{y_i}y + k_{z_z}z)} \Delta k_x \Delta k_y, \quad (3.34)$$

$$k_{x_j} = j \frac{K}{2N} \quad k_{y_i} = i \frac{K}{2N}$$

$$f(k_x, k_y) \approx \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M P_t(x_j, y_i) e^{-i(k_x x_j + k_y y_i)} \Delta x \Delta y, \quad (3.35)$$

$$x_j = j \frac{L}{2M} \quad y_i = i \frac{L}{2M}$$

donde  $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_{x_j}^2 - k_{y_i}^2}$  en la ecuación (3.34). Es claro que entre mayores sean los intervalos  $L$  y  $K$  y el número de divisiones  $2M$  y  $2N$ , mayor será la precisión del resultado numérico, y no solo eso, el valor de  $L$  determinará el espacio donde nuestra solución es válida; en este punto hay que profundizar un poco más: en el dominio temporal, la transformada de Fourier es el caso límite de los coeficientes de la serie de Fourier cuando el periodo tiende a infinito. Es decir, en la expresión:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right) e^{in\omega_0 t}, \quad (3.36)$$

(donde el término entre paréntesis representa los coeficientes de la serie de Fourier y  $\omega_0 = 2\pi/T$  es la frecuencia de la armónica fundamental) se hace que  $T \rightarrow \infty$ . En tal caso, la densidad de las armónicas se incrementa y el espaciamiento  $\omega_0$  se

aproxima a la diferencial  $d\omega$ ; el número de armónicas crece ilimitadamente y  $(n\omega_0)$  se convierte en una variable continua  $\omega$ . Así, la expresión (3.36) se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.37)$$

El término entre paréntesis es la transformada de Fourier. Si, al querer calcular la transformada en forma numérica, se convierte la integral en una sumatoria con límites finitos, conforme a lo expuesto se convertirá en una señal periódica con  $T = 2\pi/d\omega \cong 2\pi/\Delta\omega = 2\pi A/B$ , donde  $\Delta\omega = B/A$ ,  $B$  es el intervalo tomado en la sumatoria y  $A$  el número de subdivisiones en el rango de la sumatoria, es decir entre  $B/2$  y  $-B/2$ . Esto significa que, a cada intervalo de tiempo igual al periodo, se repetirá la señal. Una forma de evitar estas señales "fantasma" es asumiendo que los resultados de los cálculos solo tendrán validez en intervalos de tiempo no mayores a  $T$ .

En el caso que se está tratando, donde se utiliza el dominio espacial, se puede definir un periodo espacial  $T_e$  que es la distancia o intervalo espacial en el cual la señal se repite y, en analogía al caso temporal, se obtiene mediante la ecuación:  $T_e = 2\pi/dk \cong 2\pi/\Delta k = 4\pi N/K$ . Por lo tanto, el valor de  $T_e$  impondrá un límite a las dimensiones del área o volumen donde se quiera calcular el campo de presión; incluso, estas dimensiones pueden aún ser menores, para reducir lo más posible traslapamientos entre el campo real con el de las repeticiones.

También es posible emplear un espacio bidimensional en el ASM en vez de tridimensional con el fin de minimizar cálculos. Es claro que los resultados diferirán del caso tridimensional, pero pueden brindar una idea general del tipo de respuesta que cabría esperar.

La forma de llevar a cabo esto es definiendo desde un principio un espacio de dos dimensiones  $(x, z)$  y partiendo de la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 P(x, z) + k_0^2 P(x, z) = 0, \quad (3.38)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) P(x, z) = 0. \quad (3.39)$$

Aplicando la transformada de Fourier una sola vez sobre  $x$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 - k_x^2 \right) \mathcal{P}(k_x, z) = 0, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}(k_x, z)}{\partial z^2} + k_z^2 \mathcal{P}(k_x, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(k_x, z) = f(k_x) e^{ik_z z}, \quad (3.41)$$

donde:  $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$ . Calculando la transformada inversa de  $\mathcal{P}(k_x, z)$  obtenemos  $P(x, z)$ :

$$P(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_x) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x, \quad (3.42)$$

y para  $z = 0$  tenemos:

$$P(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_x) e^{i(k_x x)} dk_x, \quad (3.43)$$

que es la transformada inversa de Fourier de  $f(k_x)$ , por lo tanto:

$$f(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, 0) e^{-i(k_x x)} dx. \quad (3.44)$$

Para  $P(x, z) = P_0$  constante y un ancho de emisor de  $2b$  tenemos:

$$f(k_x) = \int_{-b}^{+b} P_0 e^{-i(k_x x)} dx = \left[ -\frac{P_0 e^{-i(k_x x)}}{ik_x} \right]_{-b}^{+b}$$

$$f(k_x) = \frac{P_0}{ik_x} (e^{ik_x b} - e^{-ik_x b}) = \frac{P_0}{ik_x} (2i \operatorname{sen}(k_x b)) = 2P_0 b \operatorname{sinc}(k_x b). \quad (3.45)$$

Sustituyendo  $f(k_x)$  en la integral de la presión obtenemos:

$$P(x, z) = \frac{P_0 b}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(k_x b) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x. \quad (3.46)$$

## 4 VALIDACIÓN DEL ASM PARA PROPAGACIÓN Y REFLEXIÓN DE HACES ACÚSTICOS

Para evaluar la precisión del ASM, se realizaron varias comparaciones con otras técnicas de cálculo y con datos experimentales. Se comenzó determinando la similitud entre el ASM y la integral de Rayleigh considerando propagación de sonido en aire. Posteriormente se realizó otra simulación de similares características, pero esta vez utilizando FEM. Como prueba siguiente, se calculó la señal reflejada en función del ángulo de incidencia en dos interfaces diferentes con FEM y ASM. Finalmente, se compararon los datos experimentales de una señal de reflexión de un haz ultrasónico sobre una placa de aluminio, contra simulaciones de ASM, en función del ángulo de incidencia. Los detalles de estas pruebas se explican a continuación aclarando que en todas ellas, la frecuencia acústica empleada fue de 40,000 Hz.

### 4.1 COMPARACIÓN CONTRA OTROS MÉTODOS COMPUTACIONALES

Como primera prueba, referida aquí como simulación 0, se eligió un caso de propagación en el espacio libre de un haz de ultrasonido viajando en el aire. El dominio consiste en un cuadrado definido como:

$$(x, z) \in [-0.05 \text{ m}, 0.05 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 0.1 \text{ m}], \quad y = 0, \quad (4.1)$$

y la velocidad del sonido es  $c_1 = 343 \text{ m/s}$ . La condición de frontera de la velocidad de partícula, en  $z = 0$ , está dada por:

$$u_0 = \begin{cases} 1 \text{ m/s} & \text{si } x^2 + y^2 < (0.01 \text{ m})^2, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Con estos datos se calculó el campo de presiones en el dominio mencionado mediante la integral de Rayleigh (ecuación (2.123)) considerando un pistón circular vibrando armónicamente, con la mayor precisión que pudimos obtener de la computadora utilizada. Luego, el campo de presión calculado en  $z = 0$  se utilizó como condición en la frontera para que el ASM calculara el mismo campo de presión.

Como se menciona en la subsección 3.4, en el cálculo numérico de ASM, las integrales de Fourier se reemplazan por sumatorias, los límites de integración toman valores finitos  $K$  y se dividen en un número finito de partes  $N$ , obteniendo la ecuación (3.34); aumentar  $N$  para un valor fijo de  $K$  equivale a aumentar la cantidad de ondas componentes en la sumatoria, consiguiendo así mayor precisión. Para ilustrar la convergencia de nuestra implementación de ASM, los campos de presión radiados a lo largo del eje  $z$ , calculados con la integral de Rayleigh, se compararon con los campos de presión calculados con el ASM en el mismo intervalo, comenzando con una precisión baja ( $N = 50$ ) y aumentando hasta que convergiera con el método de Rayleigh. Esta comparación se realizó utilizando la función diferencia  $E$  definida como:

$$E = \frac{\int_0^{0.1} |P_{ASM} - P_{Rayleigh}| dz}{\int_0^{0.1} |P_{Rayleigh}| dz}, \quad (4.3)$$

y manteniendo  $K$  constante a un valor de  $K = 8\pi/\lambda \approx 2,931 \text{ m}^{-1}$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda del sonido para esta prueba.

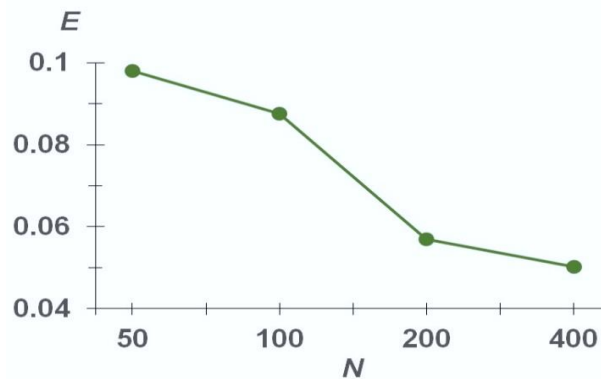


Fig. 4.1 Gráfica de la función diferencia  $E$  contra  $N$ .

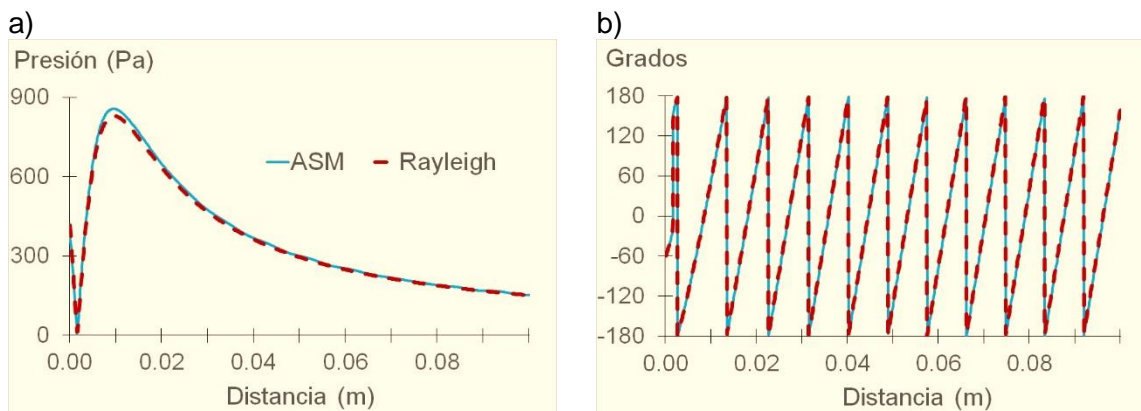


Fig. 4.2 Comparación de la magnitud, a), y la fase, b), de la presión entre la integral de Rayleigh y el ASM a lo largo del eje  $z$ .

La Fig. 4.1 muestra el gráfico de  $E$  como función de  $N$ ; se observa que a medida que  $N$  aumenta,  $E$  disminuye, lo que sugiere que ASM tiende a converger. Las Fig. 4.2 muestran las presiones, magnitud y fase respectivamente, a lo largo del eje  $z$  de la integral de Rayleigh y de ASM con  $N = 400$ . Por último, la figura Fig. 4.3 muestra los campos de presión, magnitud y fase, calculado con ambos métodos en todo el dominio definido por la ecuación (4.1), también con  $N = 400$ .

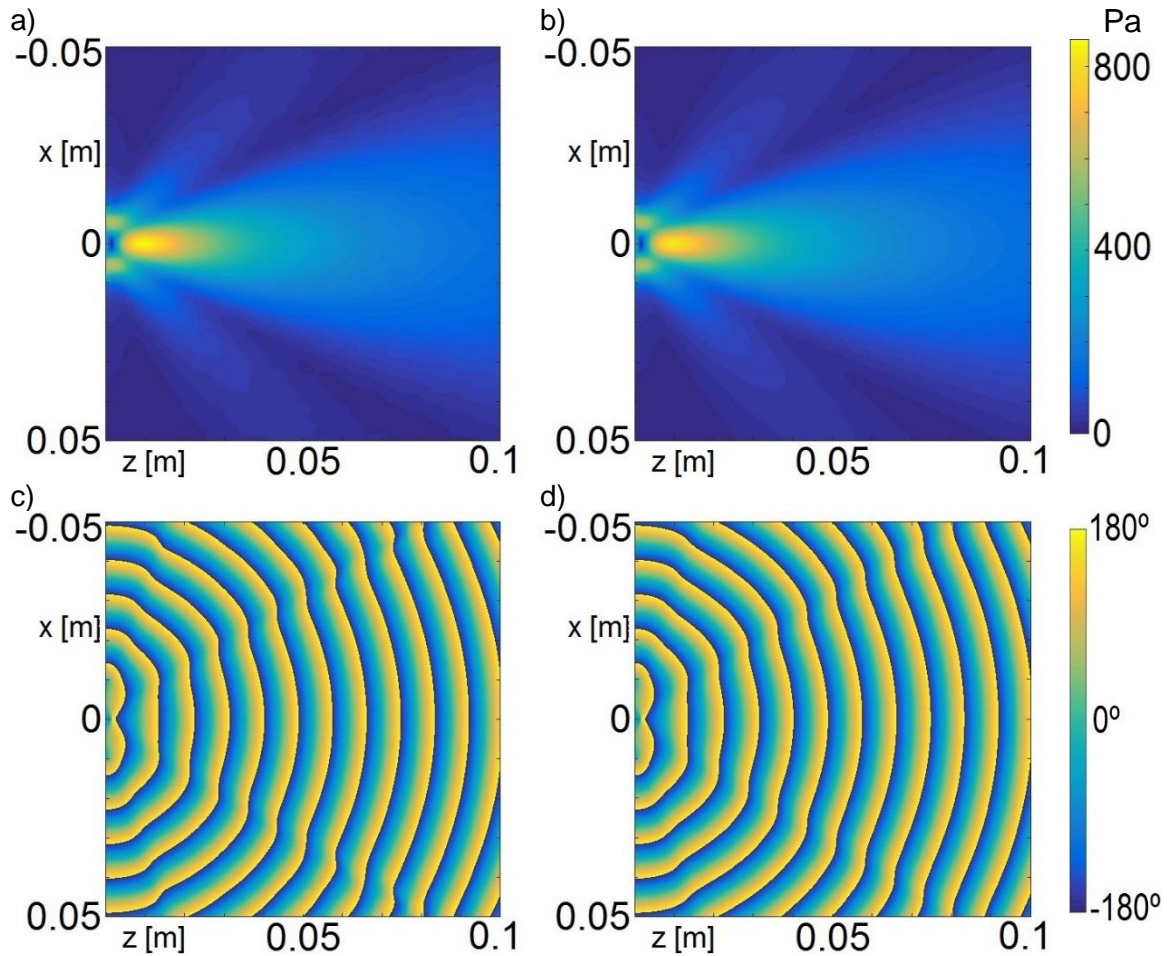


Fig. 4.3 Comparación de la magnitud (a, b) y la fase (c, d) de la presión entre la integral de Rayleigh y el ASM sobre el plano  $xz$ . Las gráficas (a, c) corresponden al ASM y (b, d) a la integral de Rayleigh.

Para las siguientes simulaciones se tomaron como referencia los resultados 3D obtenidos del paquete HEF-Acoustics. HEF-acoustics es una implementación FEM que resuelve una ecuación de Helmholtz, basada en FEniCS [86], en este caso usando una base de Lagrange de primer orden [87 - 90].

La primera de ellas, referida aquí como simulación 1, también fue un caso de propagación de un haz ultrasónico en el aire. El dominio es un cilindro:

$$x^2 + y^2 < (0.03 \text{ m})^2, \quad z \in [0 \text{ m}, 0.045 \text{ m}], \quad (4.4)$$

con velocidad del sonido  $c_1 = 343$  m/s, y una condición de frontera  $enz = 0$ , dada por:

$$P = \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)/2(0.01\text{ m})^2} \text{ Pa} & \text{si } x^2 + y^2 < r_E^2, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (4.5)$$

con  $r_E = 0.01$  m. En el caso de la simulación con FEM, se agregó espacio adicional alrededor del dominio definido por la ecuación (4.4), con el fin de atenuar la onda que se propague más allá del cilindro y reduciendo así reflejos espurios desde sus bordes. Asimismo, se realizó una simulación con la misma condición de frontera especificada en la ecuación (4.5) con el ASM, donde no se necesitaron condiciones adicionales. En este caso y en el resto de las simulaciones de ASM reportadas en este documento, el valor de  $N$  fue mayor a 400.

En las Fig. 4.4 y Fig. 4.5 comparamos los campos de presión calculados con FEM y ASM en una sección del plano  $xy$  a una distancia  $z = 0.045$  m del emisor. Los gráficos muestran una buena correspondencia.

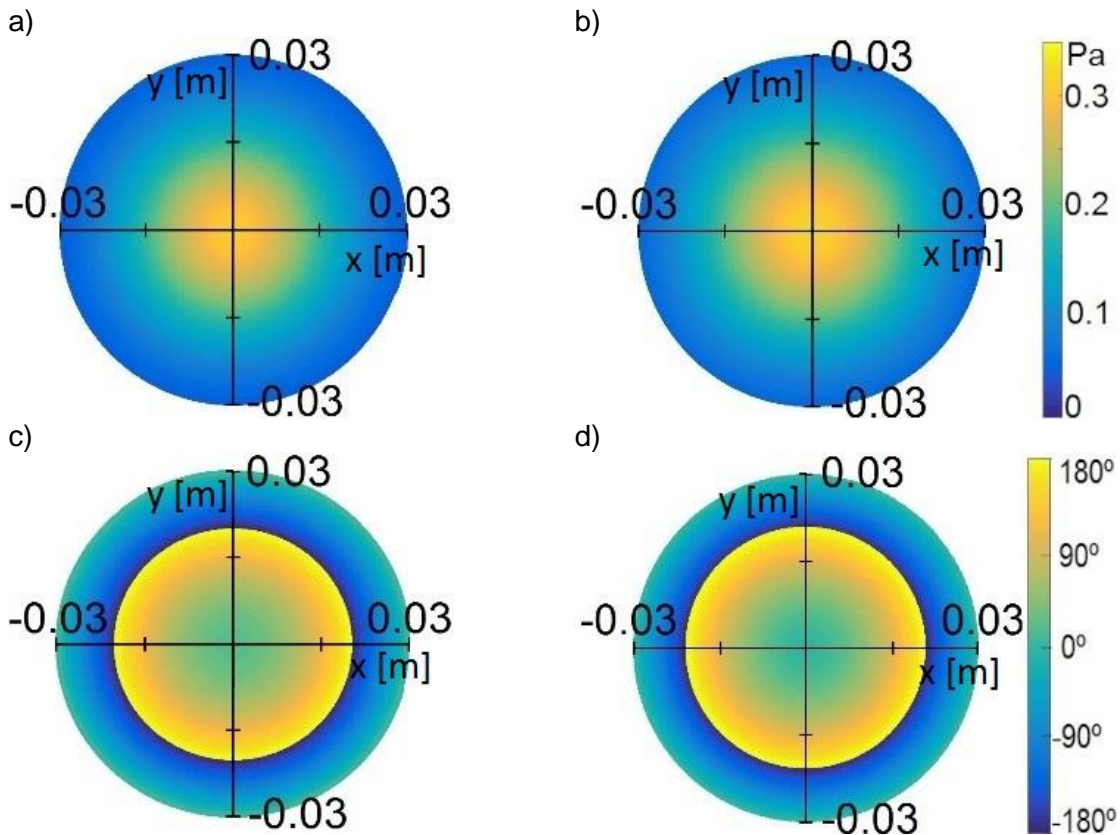


Fig. 4.4 Comparación del lóbulo central de la presión compleja entre ASM (b), (d) y FEM (a), (c), después de propagarse 4.5 cm (0.045 m). El origen en las gráficas corresponde al eje acústico. Los resultados se muestran en magnitud (a), (b) y fase (c), (d).



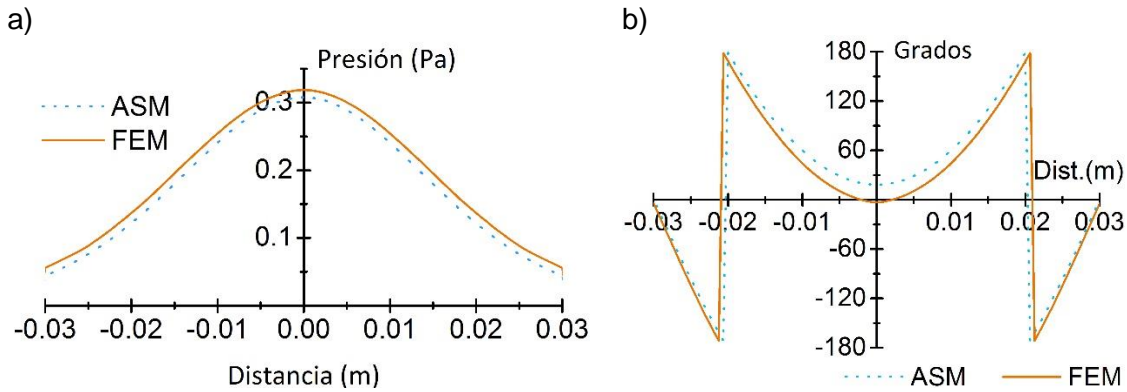


Fig. 4.5 Debido a que los resultados mostrados en la Fig. 4.4 no dependen del ángulo polar, se presentan nuevamente graficados contra la coordenada polar. a) Magnitud, b) fase.

Se realizaron dos grupos más de simulaciones para validar la implementación del ASM, denominadas aquí simulaciones 2 y 3. La geometría elegida para estas simulaciones se describe en la Fig. 4.6. Corresponde a la reflexión de un haz ultrasónico en una interfaz gas-gas sin considerar ninguna membrana que separe ambos medios. Se calculó el campo de presión promedio a través de la apertura de un detector colocado en la posición especular del emisor como se observa en la Fig. 4.6. En ambas simulaciones, el ángulo  $\theta$  se varió de  $17^\circ$  a  $68^\circ$  en pasos de  $1^\circ$ . Los valores de todos los parámetros utilizados se enumeran en la Tabla I. Debido a las limitaciones de la implementación de FEM, se consideró un valor único para la densidad de masa  $\rho$  en todo el dominio y se supuso que solo la velocidad del sonido cambiaría en la interfaz.

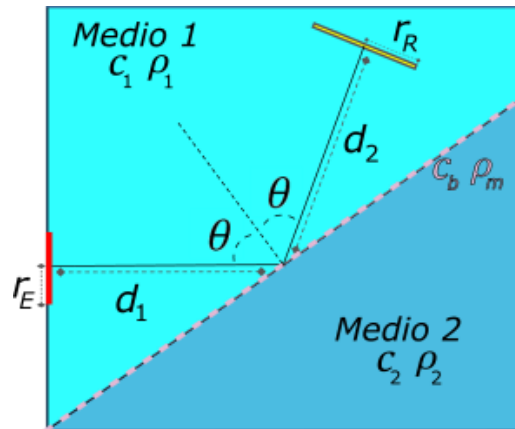


Fig. 4.6 Geometría del sistema simulado y del experimental. Los valores  $c_b$  y  $\rho_m$  se aplican sólo a los casos que tienen membrana.

La señal en el receptor se calculó como la presión promedio sobre este, con la fórmula:

$$S = \frac{1}{N_R} \sqrt{\left( \sum_{n=1}^{N_R} P_n \right) \left( \sum_{n=1}^{N_R} P_n \right)^*}, \quad (4.6)$$

donde  $N_R$  es el número de puntos en que se divide la apertura del receptor debido a la discretización espacial utilizada en las simulaciones, y  $P_n$  es la presión en cada uno de estos puntos.

Los gráficos de  $S$  contra  $\theta$  para ambas simulaciones, FEM y ASM, se muestran en la Fig. 4.7. La diferencia en el área bajo la curva entre ambas es inferior al 13%, lo que puede considerarse como una buena correspondencia. Además, se ha incluido en esta figura una simulación de la señal de reflexión de onda plana con fines de comparación. Dicha señal se ha normalizado de tal manera que su área bajo la curva coincida con la de la simulación de ASM. El tiempo que le tomó al FEM generar los datos en la Fig. 4.7 fue de 8 h y 53 min, mientras que con el ASM, en una computadora similar, fue solo de algunos minutos.

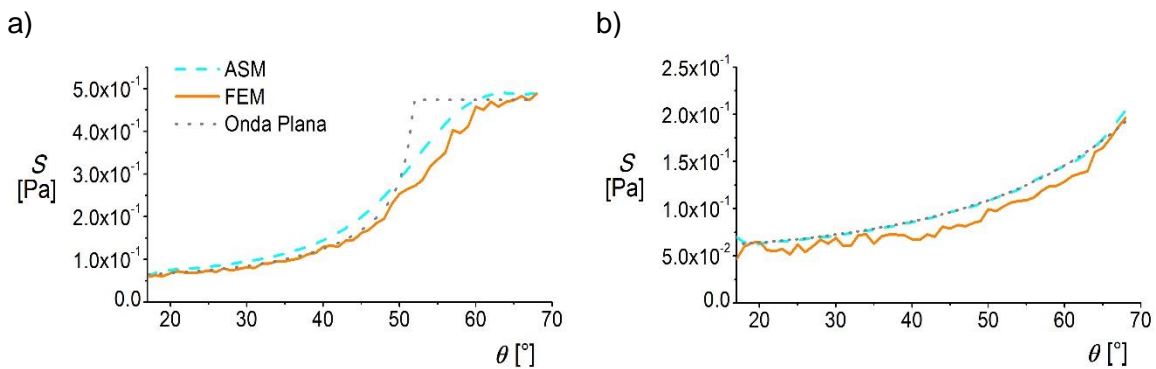


Fig. 4.7  $S$  en función de  $\theta$  para (a) Sim. 2 y (b) Sim. 3. Se incluye una solución de onda plana normalizada.

La Fig. 4.8 consiste en la parte real de las presiones calculadas mediante el ASM en un dominio formado por un cuadrado de 0.1 m de lado en el plano  $xy$ , con los mismos datos que la simulación 2 y con un ángulo de incidencia de  $60^\circ$ . Aquí se muestra una de las ventajas del ASM frente a otros métodos de cálculo: su capacidad para separar los componentes que componen un campo de presión. La superposición de los campos incidente y reflejado [Fig. 4.8(a) y Fig. 4.8(b)] genera el campo total en el medio 1, lo que explica el patrón de interferencia observado en la parte central de la Fig. 4.8(d). La Fig. 4.8(e) muestra la misma simulación, pero generada con FEM donde se puede apreciar la similitud entre ambos métodos.

Adicionalmente, también se calculó el campo de presiones en varios ángulos de incidencia más y con las mismas condiciones, encontrando buena similitud entre ambos métodos. Sin embargo, cabe destacar un conjunto de simulaciones hechas tanto en interfaz aire- $\text{CO}_2$  como en interfaz  $\text{CO}_2$ -aire, donde el ángulo de incidencia se varió entre los  $10^\circ$  y los  $80^\circ$  en pasos de  $1^\circ$  en un dominio consistente en un cuadrado de 0.15 m por lado, y lo más importante es que, a diferencia de las simulaciones 2 y 3, se consideró las densidades de masa reales de las sustancias en cada medio. Debido a ello se esperaba que los cálculos del ASM difirieran de los

de FEM, como consecuencia de las limitaciones de este último mencionadas anteriormente.

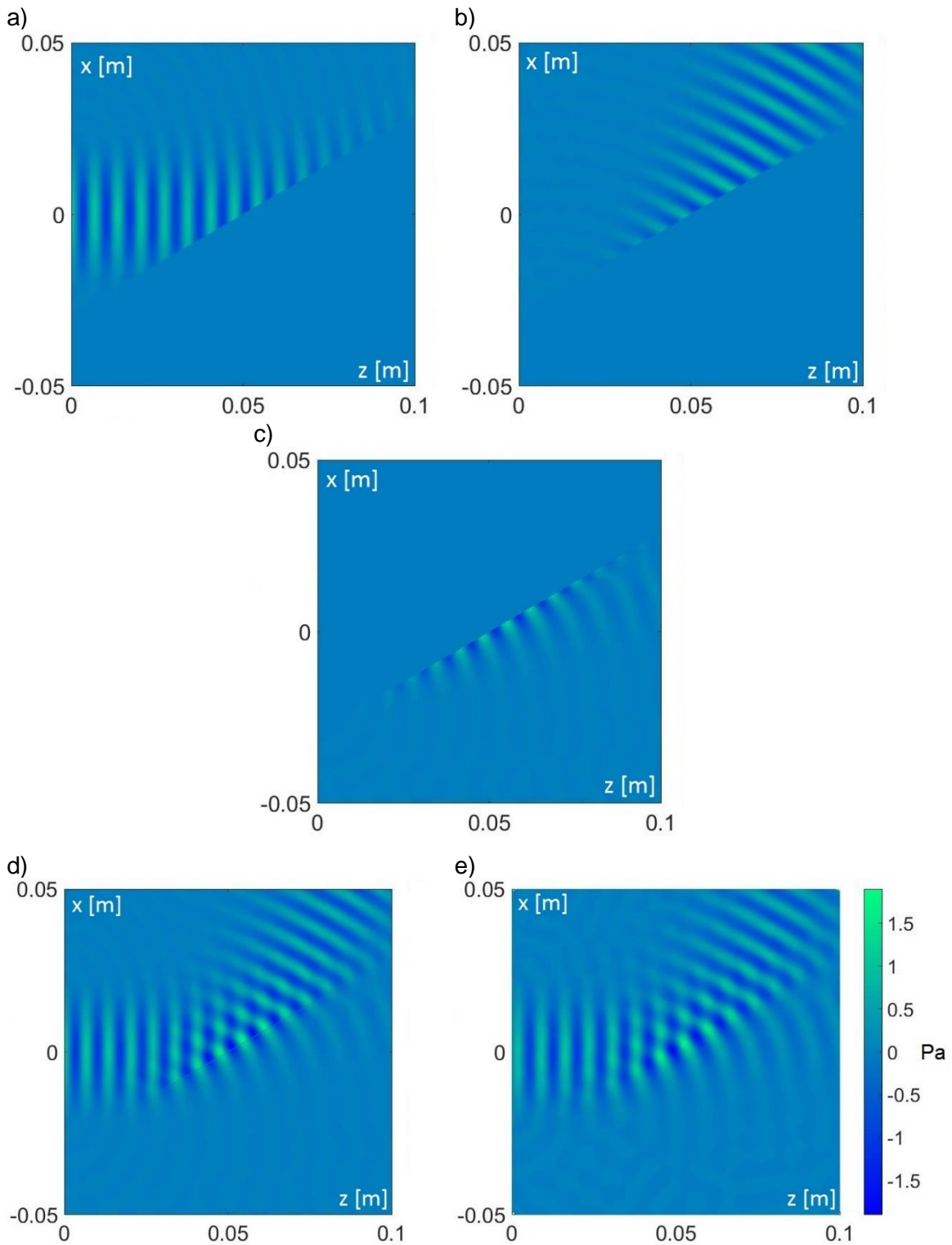


Fig. 4.8 Resultados numéricos (parte real) de los diferentes campos de presión que conforman al campo total a un ángulo de incidencia de  $60^\circ$ : (a) campo incidente, (b) campo reflejado, (c) campo transmitido, (d) campo total, (e) simulación FEM.

En las Fig. 4.9 y Fig. 4.10 se muestran algunas de ellas, las cuales fueron elegidas por considerarse de interés al tratarse de ángulos destacados. Según las ecuaciones (2.95) y (2.96), en la interfaz aire-CO<sub>2</sub> el ángulo de intromisión se presenta en  $\theta_0 = 52.18^\circ$  y no presenta ángulo crítico; en la interfaz CO<sub>2</sub>-aire, el ángulo de intromisión es  $\theta_0 = 38.22^\circ$  y el ángulo crítico es  $\theta_{cr} = 51.54^\circ$ . Las gráficas de la Fig. 4.9 corresponden a una interfaz aire-CO<sub>2</sub> a ángulos de incidencia de  $49^\circ$  (muy cercano al ángulo de intromisión predicho por el modelo de onda plana) y  $72^\circ$ , mientras que las gráficas de la Fig. 4.10 corresponden a una interfaz CO<sub>2</sub>-aire a ángulos de incidencia de  $36^\circ$  (igualmente cercano al ángulo de intromisión) y  $72^\circ$  (superior al ángulo crítico y que por lo tanto se halla en la zona de reflexión total interna).

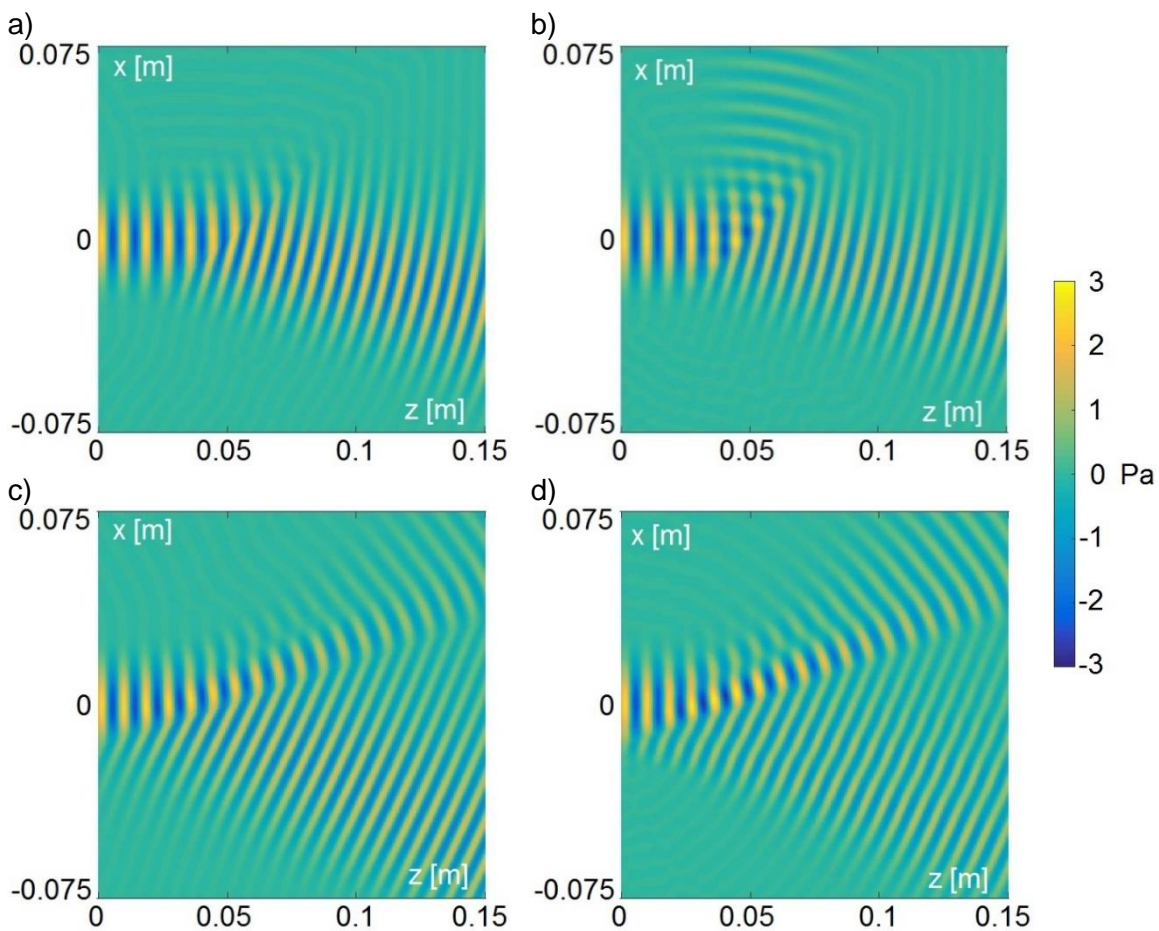


Fig. 4.9 Campos de presión (parte real) de una interfaz aire-CO<sub>2</sub> a ángulos de incidencia de  $49^\circ$  (a, b) y  $72^\circ$  (c, d). El ASM se empleó en las gráficas a, c y el FEM en las gráficas b, d.

Aunque al ángulo de incidencia de  $72^\circ$  ambos métodos presentan una buena concordancia en las dos interfaces, hay que resaltar el hecho de la diferencia notable en la intensidad del haz reflejado a ángulos cercanos al de intromisión. Sin embargo, por lo visto en la sección 2.5, se puede concluir que el ASM es más consistente al modelo de onda plana que el FEM, lo que indica, por lo menos en

este caso, una mayor precisión del ASM, ya que, a pesar de los efectos de difracción, se esperaría que el campo de presión verdadero, es decir el que se obtendría experimentalmente, se asemejara al predicho por el modelo de onda plana.

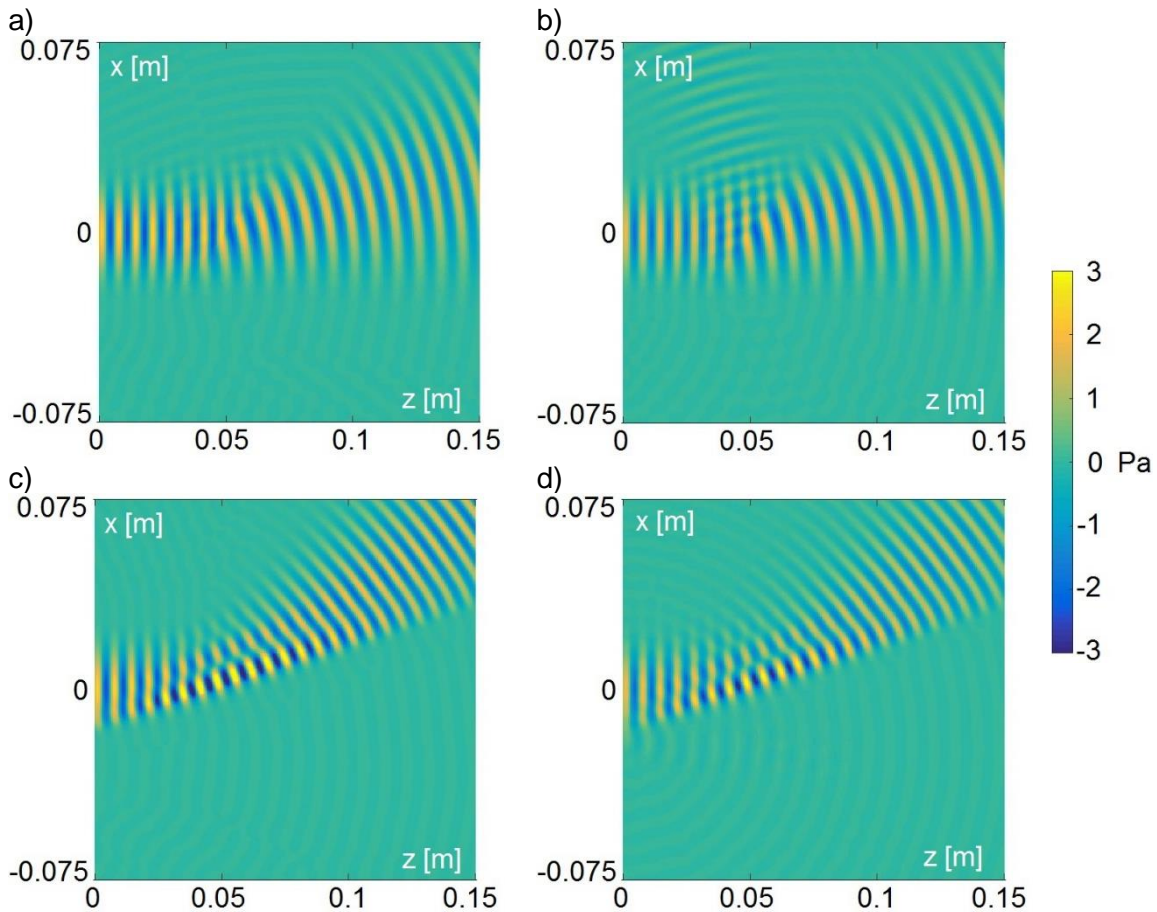


Fig. 4.10 Campos de presión (parte real) de una interfaz CO<sub>2</sub>-aire a ángulos de incidencia de 36° (a, b) y 72° (c, d). El ASM se empleó en las gráficas a, c y el FEM en las gráficas b, d.

## 4.2 COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES

Se utilizaron dos transductores piezoeléctricos estándar de 40 kHz para emitir y medir una señal de reflexión especular en una lámina de aluminio plana de 10  $\mu\text{m}$  de espesor en función del ángulo de incidencia. La señal de reflexión se midió cada 2° entre 40° y 84°. La señal de reflexión obtenida en cada ángulo fue la tensión pico a pico generada en el receptor y medida con un osciloscopio. Luego se realizó una simulación de las mediciones utilizando el ASM considerando los parámetros del problema. Los parámetros utilizados para la simulación y correspondientes a la membrana son  $c_b$ , la velocidad de la onda de flexión, y  $\rho_m$ , la masa por unidad de

área [56]. Los valores utilizados se dan en la Tabla I como simulación 4. La condición de frontera en el plano de salida del emisor  $z = 0$  para este caso fue:

$$P = \begin{cases} 1 \text{ Pa} & \text{si } x^2 + y^2 < r_E^2, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Tanto los datos simulados como los experimentales se normalizaron para que su valor sea 1 en el ángulo de incidencia de  $40^\circ$ . Para poder comparar ambos datos, los valores de la simulación se interpolaron con una función *spline* estándar y se desplazaron lateralmente para eliminar un error sistemático en la medición del ángulo de incidencia. Los resultados se representan en la Fig. 4.11. Se puede apreciar que existe una buena correspondencia cualitativa entre la simulación y los datos experimentales. Después de los  $60^\circ$  podemos apreciar tres máximos y mínimos locales en casi la misma ubicación angular en ambas curvas, a excepción del último mínimo que está a unos  $3^\circ$  de distancia entre ambos gráficos. Además, puede observarse una menor amplitud de las oscilaciones en la curva experimental en comparación con las de la curva teórica.

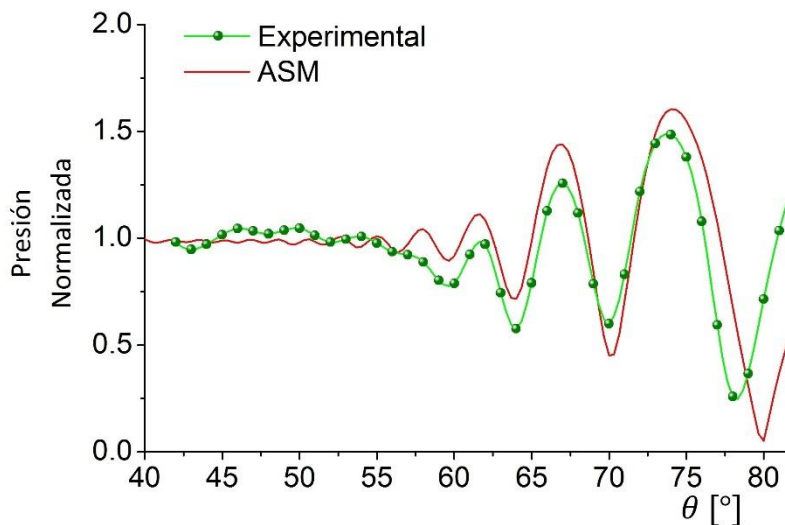


Fig. 4.11 Comparación del ASM con las mediciones experimentales.

La razón de estas desviaciones se debe probablemente a las diferencias entre el arreglo experimental real y los cálculos teóricos. En los cálculos teóricos se asumió que el detector es transparente a los ultrasonidos y su presencia no modifica los campos acústicos. Además, en el caso del experimento, el detector y el emisor estaban sostenidos por brazos tubulares que reflejan parte del ultrasonido e introducen algunas señales espurias. Y, por último, se debe considerar que la membrana de aluminio utilizada para obtener los datos de la señal de reflexión tenía dimensiones finitas, por lo que es de esperar que a grandes ángulos de incidencia los campos de ultrasonido hayan alcanzado los bordes de la membrana y por lo tanto no contribuyan al campo reflejado

Tabla I Parámetros utilizados en las simulaciones y las mediciones experimentales llevadas a cabo para probar la validez del ASM en las secciones 4.1 y 4.2. Los valores designados con el símbolo “—” no son aplicables para el caso.

	Sim. 2	Sim. 3	Sim. 4	Exp. 1	Unidades
$\rho_1$	1	1	1.21	1.21	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_2$	1	1	1.21	1.21	kg/m <sup>3</sup>
$c_1$	268.6	343	343	343	m/s
$c_2$	343	268.6	343	343	m/s
$d_1$	0.05	0.05	0.075	0.075	m
$d_2$	0.05	0.05	0.2	0.2	m
$r_E$	0.02	0.02	0.005	0.005	m
$r_R$	0.015	0.015	0.005	0.005	m
$c_b$	—	—	62.56	62.56	m/s
$\rho_m$	—	—	0.027	0.027	kg/m <sup>2</sup>
$\theta^a$	(17-68, 1)	(17-68, 1)	(40-84, 2)	(40-84, 2)	°
Método	ASM/FEM	ASM/FEM	ASM	—	—
Cond. Front.	Ec. (4.5)	Ec. (4.5)	Ec. (4.7)	—	—

<sup>a</sup> El formato es (rango, paso).

## 5 DISEÑO DE SENSORES ACÚSTICOS PARA DETECCIÓN DE GASES

Como se indicó en la introducción, uno de los objetivos de estudiar la precisión del ASM para calcular señales de reflexión ultrasónica, es para su uso en el análisis de métodos de detección de gases, específicamente para detectar variaciones en la concentración de  $\text{CO}_2$  en el aire. En esta sección se mostrará cómo se puede utilizar el ASM para el diseño de sensores de gas. Primeramente, y partiendo de la configuración observada en la Fig. 4.6, se realizarán diversas simulaciones en las que se variarán las distancias emisor-interfaz ( $d_1$ ) y receptor-interfaz ( $d_2$ ), así como el ángulo de incidencia ( $\theta$ ). Una vez llevado a cabo esto, se compararán y se determinará cuál de todos esos arreglos podría servir como sensor de  $\text{CO}_2$ , y si hay varias posibilidades, determinar la más viable. Posteriormente, una vez escogida una posibilidad, se procederá a construir un prototipo y se reportará los resultados que se obtengan para evaluar su desempeño.

### 5.1 EVALUACIÓN DE LA REFLEXIÓN DE UN HAZ ULTRASÓNICO EN EL AIRE PARA LA DETECCIÓN DE GASES

Para empezar, se debe establecer cómo se correlacionará el campo acústico, que a fin de cuentas será la medida a detectar, con la concentración de  $\text{CO}_2$  en el aire. Como se mencionó, la configuración experimental propuesta para este análisis se describe en la Fig. 4.6; en este caso, ambos medios son gases y hay una membrana delgada que los separa. Uno de los dos gases es una mezcla de aire y  $\text{CO}_2$ , cuya velocidad del sonido,  $c$ , y densidad de masa volumétrica  $\rho$ , dependen de la correspondiente concentración de  $\text{CO}_2$ ,  $C$ , expresada como relación molar, es decir, el cociente del número de moles de  $\text{CO}_2$  entre el número total de moles de la mezcla (también podría emplearse la relación volumétrica si  $P$  y  $T$  son constantes). Las variables  $c$  y  $\rho$  se relacionan con  $C$  mediante las fórmulas [91 - 94]:

$$\rho = \frac{P}{RT} (CM_{\text{CO}_2} + (1 - C)M_{\text{Aire}}) \quad (5.1)$$

y



$$c = \sqrt{RT \frac{C C_{p_{CO_2}} + (1 - C) C_{p_{Aire}}}{(C M_{CO_2} + (1 - C) M_{Aire}) (C [C_{p_{CO_2}} - R] + (1 - C) [C_{p_{Aire}} - R])}}, \quad (5.2)$$

donde  $P$  y  $T$  son la presión y la temperatura de la mezcla,  $R$  la constante universal de los gases,  $M_{CO_2}$ ,  $M_{Aire}$  y  $C_{p_{CO_2}}$ ,  $C_{p_{Aire}}$  las masas molares y las capacidades caloríficas a presión constante respectivamente, y los subíndices indican si corresponden a aire o a  $CO_2$ .

Por lo tanto, un cambio en  $C$  provocará un cambio en  $c$  y  $\rho$ ; esto a su vez cambiará el haz reflejado y finalmente la señal  $S$ , que es la medida experimental. Para evaluar la eficiencia del sistema detectando cambios de  $C$  a través de cambios en  $S$ , se define la sensibilidad mediante la fórmula:

$$\eta = \left( \frac{1}{S_{ref}} \right) \left( \frac{S - S_{ref}}{C - C_{ref}} \right), \quad (5.3)$$

donde el subíndice “ref” denota un valor de referencia, que en todos los casos reportados aquí corresponde al cero por ciento de concentración de  $CO_2$ . Con esto, el cambio mínimo medible en la concentración  $(\Delta C)_{min}$  se puede expresar en términos del cambio mínimo medible en  $S$ , es decir  $(\Delta S)_{min}$ , de la siguiente manera:

$$(\Delta C)_{min} = \frac{(\Delta S)_{min}}{\eta S_{ref}}. \quad (5.4)$$

Claramente, valores mayores de  $|\eta|$  serán más favorables. Dado que los cambios relevantes en la concentración  $C$ , en general son pequeños, una resolución adecuada para detectar cambios sería del orden de 0.0005 de fracción volumétrica [95]; por lo que el objetivo del presente trabajo será poder detectar cambios de esta magnitud en el aire en calma, siendo esta una décima parte del límite máximo de concentración de  $CO_2$  permitida en interiores antes de que algunos problemas de salud puedan ser motivo de preocupación, que es 0.005, que también se expresa como 0.5% o 5000 PPM [96]. Se sabe que  $(\Delta S)_{min}/S_{ref}$  está experimentalmente en el orden de entre 0.01 y 0.001, dependiendo de la electrónica utilizada. Esto significa que, para lograr la resolución deseada en la detección de  $C$ , la magnitud mínima de la sensibilidad  $|\eta|$  debe estar entre 2, si  $(\Delta S)_{min}/S_{ref} = 0.001$ , y 20, si es 0.01.

Hay varios escenarios posibles para la detección de gas utilizando la configuración de reflexión especular de la Fig. 4.6. El criterio utilizado para seleccionar los valores de parámetros tales como  $d_1$ ,  $d_2$  y  $\theta$  fue analizar la sensibilidad alcanzable en una configuración práctica de los tres escenarios posibles que aquí se consideran de interés; estos son la existencia de un ángulo crítico, los fenómenos de coincidencia

en la membrana y la interferencia en la apertura del receptor entre los campos acústicos incidente y reflejado. El primero será sensible únicamente a los cambios en los medios 1 o 2, el segundo dependerá de las propiedades elásticas de la membrana de separación entre los medios, y el tercero dependerá de las posiciones relativas del receptor y el emisor con respecto a la interfaz. En los dos últimos casos, la señal será sensible a los cambios de concentración solo del medio 1.

Los valores de los parámetros para analizar dichos escenarios se listan en la Tabla II como simulaciones 5,6 y 7 y los resultados correspondientes se presentan en las Fig. 5.1, Fig. 5.2 y Fig. 5.3. Cada una de estas figuras consta de tres gráficas. En dos de ellas, aparece la señal medida contra el ángulo de incidencia de dos concentraciones distintas, una para aire con concentración de CO<sub>2</sub> de 0%, y otra para aire con una concentración de 0.5 %.

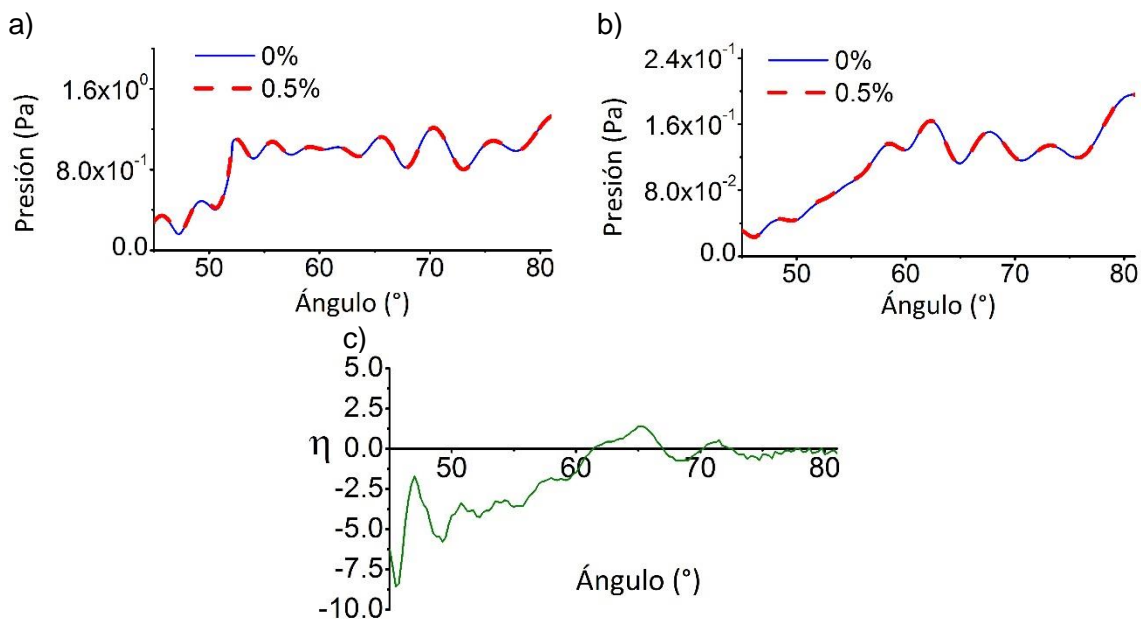


Fig. 5.1 Interfaz entre mezcla (aire/CO<sub>2</sub>)-neón sin membrana cuyo ángulo crítico es de aproximadamente 52° (Sim. 5): (a) onda plana, (b) onda difractada, (c) sensibilidad. Los porcentajes en los incisos a y b se refieren a CO<sub>2</sub>.

En una de las gráficas se muestra la presión promedio en el plano del detector suponiendo que incide una onda plana simple mientras que la otra supone un haz acústico real que se difracta, generado con el ASM, con el objetivo de exponer las diferencias entre ambas. Podemos observar una diferencia de magnitud entre los gráficos de onda plana predichos y los de un haz de ultrasonido de difracción. Además, se notan algunas diferencias cualitativas importantes. Esto demuestra que para investigar y diseñar cualquier tipo de sensor basado en la reflexión especular de un haz de ultrasonido transportado por aire no podemos utilizar en general un simple análisis de ondas planas.

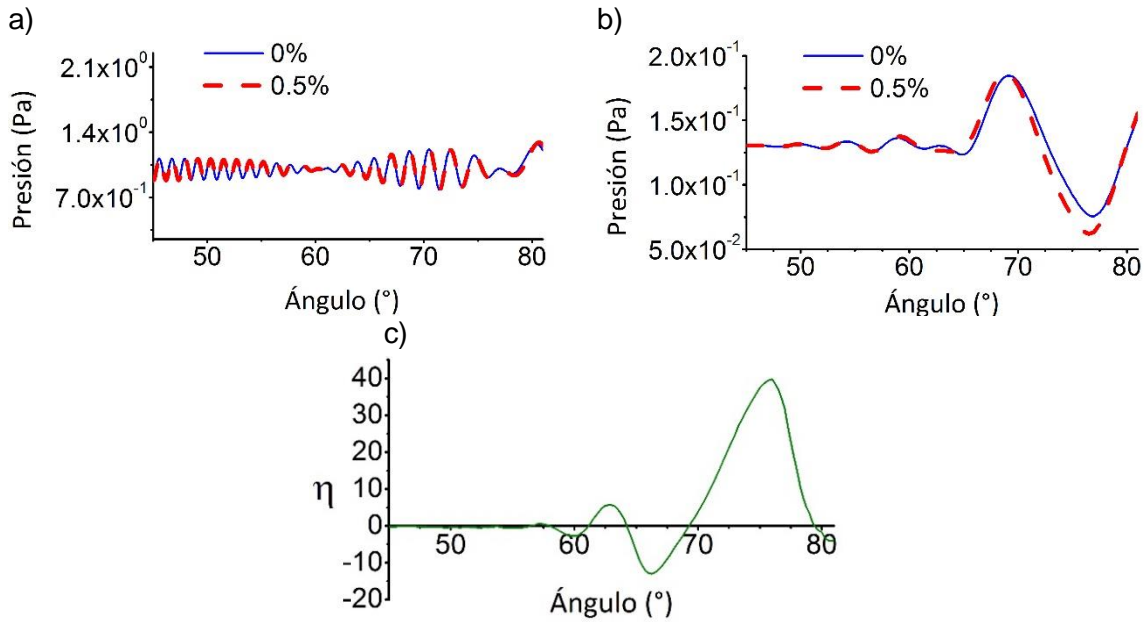


Fig. 5.2 Interfaz entre mezcla (aire/CO<sub>2</sub>)-neón con membrana cuyo ángulo de coincidencia es de aproximadamente 80° (Sim. 6): (a) onda plana, (b) onda difractada, (c) sensibilidad. Los porcentajes en los incisos a y b se refieren a CO<sub>2</sub>.

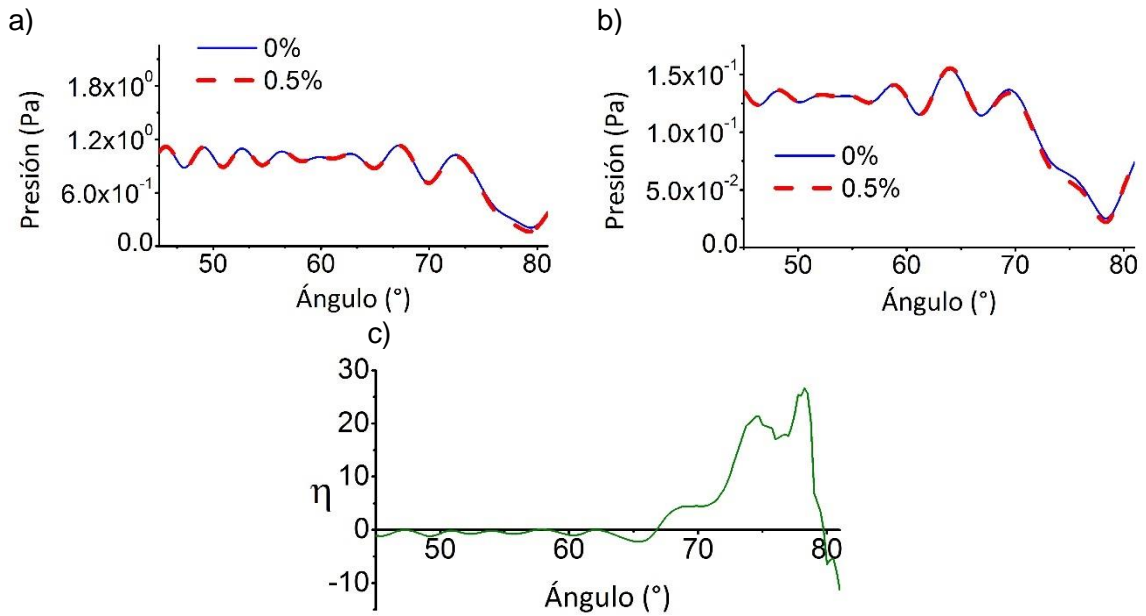


Fig. 5.3 Interfaz entre mezcla (aire/CO<sub>2</sub>)- CO<sub>2</sub> sin membrana cuyo ángulo de coincidencia es de aproximadamente 80° (Sim. 7): (a) onda plana, (b) onda difractada, (c) sensibilidad. Los porcentajes en los incisos a y b se refieren a CO<sub>2</sub>.

La tercera gráfica consiste en la sensibilidad calculada a partir de las dos concentraciones de la gráfica de onda difractada. Aunque estrictamente esta sería la sensibilidad solo para el par de concentraciones utilizado, se puede suponer que, para pequeños cambios en la concentración de CO<sub>2</sub>, el cambio en la señal es, en

una buena aproximación, proporcional al cambio de dicha concentración. Por lo tanto, se puede considerar que la sensibilidad calculada es una buena aproximación de la sensibilidad para cualquier concentración de  $\text{CO}_2$  en el rango de entre 0% a 0.5%.

Es posible ver en todos los casos considerados, un rango de ángulos dentro de los cuales  $|\eta|$  toma valores superiores a 2. Por lo tanto, si el ruido electrónico permite una resolución en variaciones de señal de  $(\Delta S)_{\min}/S_{\text{ref}} = 0.001$ , se puede lograr la resolución deseada de 0.0005 de fracción volumétrica en la concentración de  $\text{CO}_2$ . Se debe señalar que en el caso de un ángulo crítico simple sin membrana (Fig. 5.1), la magnitud de la sensibilidad  $|\eta|$  cae muy por debajo de 2 al introducir cualquier membrana físicamente realizable.

Sin embargo, si  $(\Delta S)_{\min}/S_{\text{ref}} = 0.01$  se necesitará que  $|\eta|$  este por encima de 20. Se puede ver en las Fig. 5.2, Fig. 5.3 y Fig. 5.4 que esta condición se cumple dentro de un rango de ángulos de incidencia entre  $70^\circ$  y  $85^\circ$ . El caso de la Fig. 5.4 destaca como el montaje más práctico ya que supone una lámina de aluminio sin imponer ninguna condición especial con respecto a los fenómenos de coincidencia y los dos espesores asumidos para los gráficos parecen prácticos. El mecanismo principal detrás de las altas sensibilidades que se ven en esta gráfica es la interferencia entre los haces de ultrasonido incidentes y reflejados. Las Fig. 4.8(d) y Fig. 4.8(e) nos ayudan a comprender la interferencia que se produce. Allí podemos apreciar claramente que dentro de cierto volumen finito alrededor de donde choca el haz incidente con la interfaz, tanto este como el haz reflejado se superponen e interfieren.

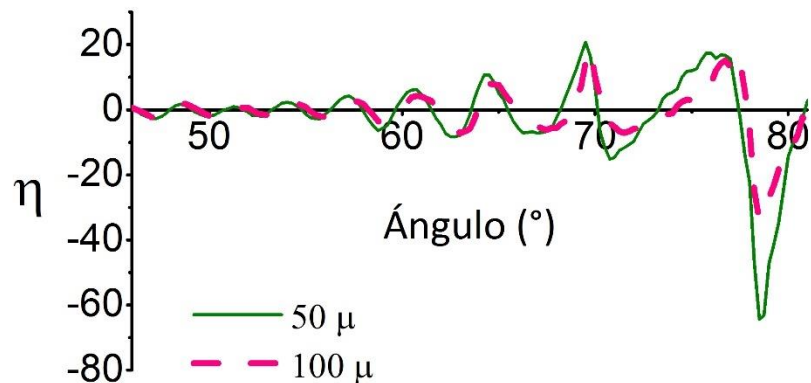


Fig. 5.4 Sensibilidad para interfaz entre mezcla (aire/ $\text{CO}_2$ )-aire con membrana de aluminio de espesores: (a)  $50 \times 10^{-6} \text{ m}$ , (b)  $100 \times 10^{-6} \text{ m}$ .

Para el ejemplo de la Fig. 5.4, las distancias entre emisor-lámina y detector-lámina se eligieron para que fueran de 21 y 7 cm respectivamente. Tomar la separación emisor-lámina más grande que la de detector-lámina tiene como objetivo asegurar

que el haz incidente tenga una amplitud importante en la apertura del detector para permitir la interferencia del campo incidente y reflejado allí.

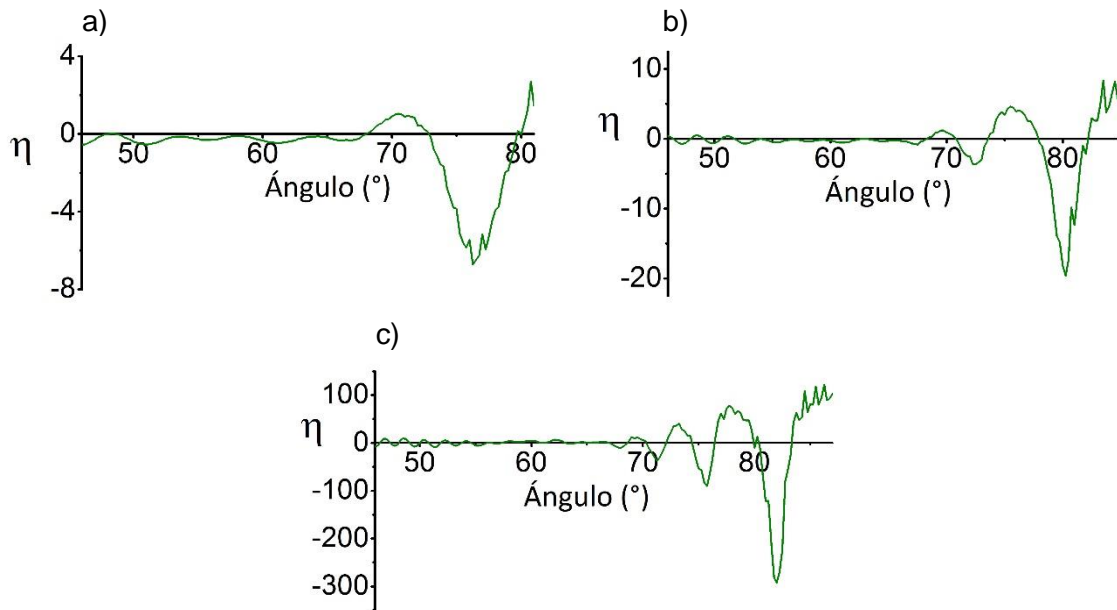


Fig. 5.5 Sensibilidad para interfaz entre mezcla (aire/CO<sub>2</sub>)-aire con membrana de aluminio de espesor  $100 \times 10^{-6} \text{ m}$  a distintas distancias emisor-interfaz  $\times$  receptor-interfaz: a)  $7 \times 7 \text{ cm}$ , b)  $14 \times 14 \text{ cm}$ , c)  $21 \times 21 \text{ cm}$ .

Tabla II Parámetros utilizados para las simulaciones correspondientes a la geometría descrita en la Fig. 4.6. Los valores designados con el símbolo “—” no son aplicables para el caso.

	Sim. 5	Sim. 6	Sim. 7	Unidades
$\rho_1^a$	(1.20, 1.21)	(1.20, 1.21)	(1.20, 1.21)	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_2$	0.9	0.9	1.20	kg/m <sup>3</sup>
$c_1^a$	(343.17, 342.63)	(343.17, 342.63)	(343.17, 342.63)	m/s
$c_2$	435	435	343.17	m/s
$d_1$	0.21	0.07	0.21	m
$d_2$	0.07	0.21	0.07	m
$r_E$	0.01	0.01	0.01	m
$r_R$	0.01	0.01	0.01	m
$c_b^b$	—	348.29	348.29	m/s
$\rho_m$	—	0.27	0.135	kg/m <sup>2</sup>
$\theta^c$	(45-81, 1)	(45-81, 1)	(45-81, 1)	°
Método	ASM	ASM	ASM	—
Cond. Front.	Ec. (4.7)	Ec.(4.7)	Ec. (4.7)	—

<sup>a</sup> Los valores corresponden a concentraciones de CO<sub>2</sub> en aire de 0% y 0.5%. El formato es (0%, 0.5%).

<sup>b</sup> El valor corresponde a un ángulo de coincidencia de aproximadamente 80°.

<sup>c</sup> El formato es (rango, paso).

En la Fig. 5.5 se exploró el caso en el que las distancias de la lámina al emisor y al detector son las mismas y se consideraron tres valores diferentes para ello (7, 14 y 21 cm). Se puede observar en estas gráficas que hay un pico de sensibilidad a

grandes ángulos de incidencia y que cuanto más alejados están el emisor y el detector, mayor es la magnitud máxima de la sensibilidad. Este ejemplo indica que la interferencia también se logra con grandes ángulos de incidencia incluso si la distancia al emisor y al detector son iguales. Por supuesto, en la práctica se debe sopesar entre el tamaño físico del arreglo y la máxima sensibilidad. Al parecer, el mejor candidato, tomando en cuenta tamaño, simplicidad de configuración y una sensibilidad de magnitud superior a 20, es el ejemplo de la Fig. 5.4.

## 5.2 PROTOTIPO: DESARROLLO Y PRUEBAS

Como paso final de este trabajo, se pondrá en práctica el método de ASM para diseñar un prototipo de sensor de dióxido de carbono y comprobar si el mismo es lo suficientemente sensible, simple y de bajo costo como para considerar su implementación a nivel comercial.

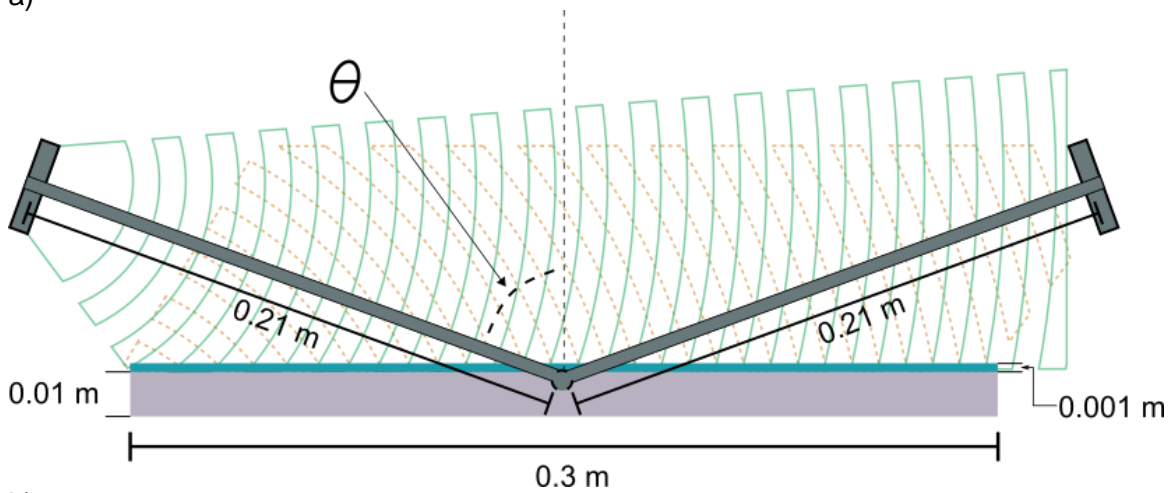
En la subsección anterior (5.1) se concluyó que, de los distintos arreglos estudiados en este trabajo, el del ejemplo de la Fig. 5.4 era el mejor. Sin embargo, tomando en cuenta el material con el que se dispone en el laboratorio a trabajar, básicamente piezas para arreglos ópticos de la marca Thorlabs, sería difícil dicho arreglo. Por lo tanto, se optó por el arreglo empleado para la Fig. 5.5, es decir, aquel cuyas distancias emisor-interfaz y receptor-interfaz son ambas 21 cm, y que además también tiene una buena sensibilidad un poco arriba de los 80°. Una vez decidido esto, se procedió a armarlo, obteniendo el dispositivo que se muestra en la Fig. 5.5.

Una diferencia importante entre la simulación y el arreglo real es la interfaz. En la simulación se emplea como membrana una lámina de aluminio de 100  $\mu\text{m}$  de grosor. Sin embargo, en el arreglo real se emplea una lámina de 1 mm de grosor adherida a una placa cuadrada de 1 cm de grosor y 30 cm de lado con perforaciones, ambas de aluminio. A pesar de ello, se consideró que lo anterior no modificaría substancialmente la sensibilidad, ya que como se observa en la Fig. 5.4, el aumento en el grosor no cambia la ubicación del pico máximo de sensibilidad, y de hecho incrementa su magnitud. La razón de poner la lámina sobre la placa fue para tapar las perforaciones en la placa de pruebas ópticas (*breadboard*), las cuales sí podrían modificar el campo acústico, y en consecuencia la sensibilidad.

La metodología a seguir consistió básicamente en determinar cómo variaba el campo acústico reflejado conforme variaba la concentración de  $\text{CO}_2$ . Conectando uno de los transductores, el emisor, a un generador para que produjera una onda sinusoidal de 40 kHz, la frecuencia de operación de los transductores, y el otro, el

receptor, a un osciloscopio para que visualizará la onda reflejada, el arreglo estaba listo para empezar a realizar pruebas.

a)



b)

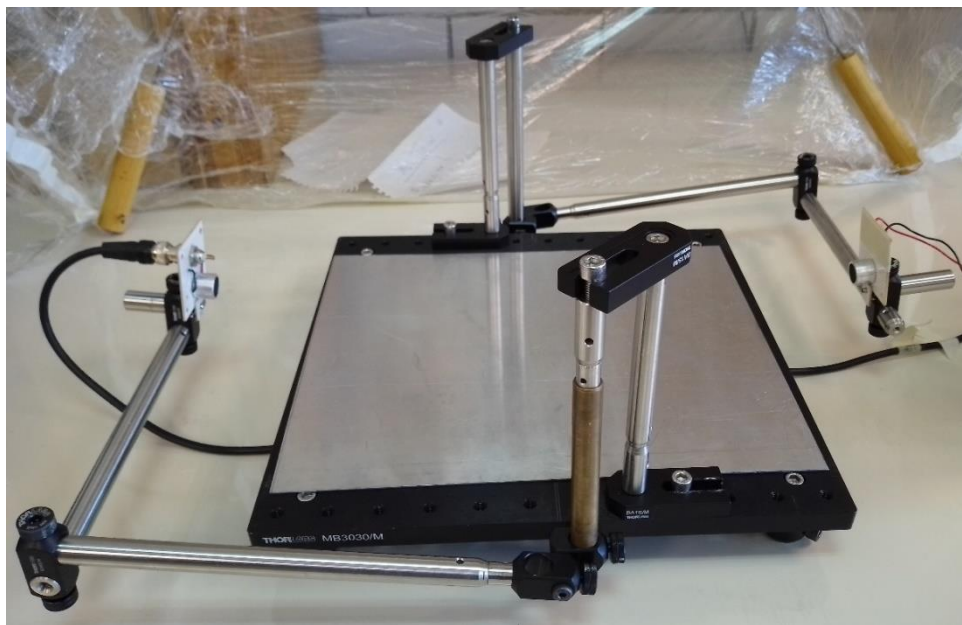


Fig. 5.5 a) Diagrama esquemático del dispositivo empleado para la detección de CO<sub>2</sub>. b) Fotografía del mismo.

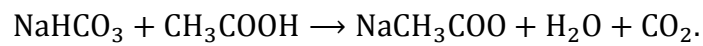
Cabe mencionar que, para poder obtener los datos, el osciloscopio se conectó a una computadora mediante una interfaz digital programada con LabVIEW y elaborada por el MI Jorge Alberto Uc Martín, que registraba el voltaje RMS en función del tiempo.

Los brazos que sujetan tanto al emisor como al receptor se ajustaron a un ángulo con respecto a la normal a la placa de 82°, alrededor del cual ocurre el máximo de sensibilidad según la simulación; a partir de este ángulo, se empezó a variar la posición con el fin de hallar el máximo de sensibilidad real. Con el fin de garantizar

que ambos transductores se encontraran en posición especular, se utilizó un láser para la alineación.

Para la forma en que se realizarían las pruebas había dos alternativas, cada una de ellas con ciertas ventajas, pero también con inconvenientes. La primera era en el interior de una cámara anecoica, proporcionada gracias a la ayuda del Dr. Roberto Velasco Segura. La gran ventaja de esta opción es que se eliminaban todas las reflexiones indeseables que pudieran provenir de las paredes; sin embargo, tenía el inconveniente de necesitar mucho dióxido de carbono para lograr cambios porcentuales significativos en el medio. La segunda alternativa era conseguir o construir una especie de cajón en el cual meter el dispositivo de medición pero que tendría el problema de las reflexiones indeseables antes mencionado. Al final se optó por la segunda alternativa, pensando que el campo acústico resultante con las reflexiones indeseables, variaría de forma similar al cambio de concentración de CO<sub>2</sub>, al caso en que no estuvieran presentes dichas reflexiones. Para ello, se empleó un cajón hecho de acrílico del que ya se disponía en el laboratorio.

El dióxido de carbono empleado en las pruebas se obtuvo a partir de la reacción que se produce al mezclar bicarbonato de sodio con vinagre (ácido acético), lo cual da como resultado acetato de sodio, agua y dióxido de carbono:



El CO<sub>2</sub> se inyectaba en el cajón y empezaba la toma de datos, mismos que se iban cotejando con las lecturas de un detector de CO<sub>2</sub> comercial modelo SR-510 usado como referencia en las pruebas, cuyo alcance de medición de la concentración de dióxido de carbono iba desde 0 a 9,999 PPM.

Una vez llevada a cabo cada prueba, los datos obtenidos se trataban de la siguiente manera: dados dos datos consecutivos en tiempo en la serie original, se promediaban y se obtenía un nuevo valor de voltaje, obteniendo así una nueva serie de datos; esto con el fin de suavizar la señal y limpiarla de ruido. Evidentemente, entre más veces se repitiera este procedimiento, la señal resultante sería más suave; en este caso, se promedió 60 veces. Asimismo, todas las lecturas se normalizaron con respecto al voltaje RMS obtenido con “aire puro”, es decir, la lectura antes de inyectar el CO<sub>2</sub>.

En un principio, se pensó en implementar un pequeño ventilador dentro del cajón de acrílico con el fin de acelerar la difusión del CO<sub>2</sub> y tener una mezcla más homogénea; sin embargo; en la práctica resultó en una menor resolución, posiblemente debido a la turbulencia que se producía. La Fig. 5.6 muestra el resultado de esta prueba; la gráfica llamada “Original” (línea roja) muestra la señal tal como se obtuvo del osciloscopio y la llamada “Promediada” (línea negra) la señal



después de haberle aplicado el proceso antes mencionado. El  $\text{CO}_2$  se inyectó aproximadamente en  $t = 250$ . Se puede observar que la gráfica es bastante monótona.

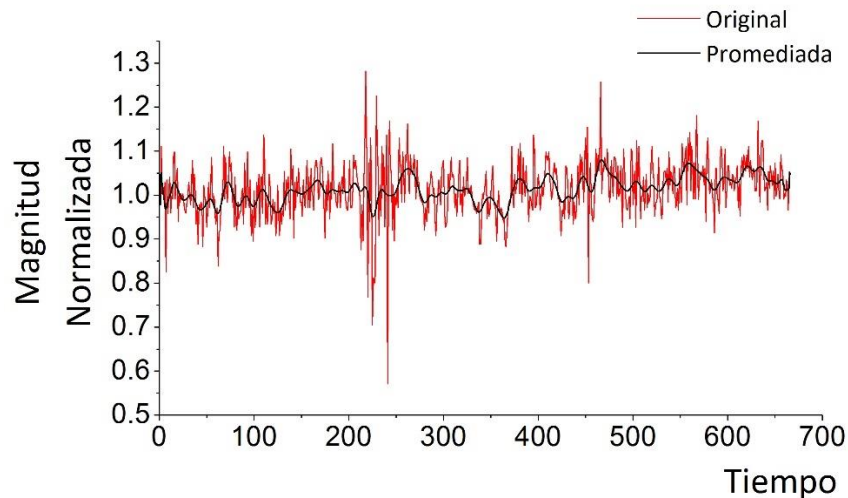


Fig. 5.6 Lectura de sensibilidad contra tiempo en la cual se agrega el  $\text{CO}_2$  en  $t = 250$ . La curva de color rojo es la lectura tal cual como la da el osciloscopio y la negra es la curva promediada.

Conforme se realizaron más pruebas, se pudo concluir que el máximo de sensibilidad ocurría en  $80^\circ$  con una incertidumbre de  $\pm 1^\circ$ . De la misma manera, se pudo observar una correlación entre el tamaño del pico que ocurría al inyectar el  $\text{CO}_2$  con la cantidad de éste.

En la Fig. 5.7 se muestra lo antes dicho: tres lecturas tomadas en el ángulo de incidencia mencionado, pero con concentraciones de  $\text{CO}_2$  que van aumentando.

Cabe destacar que, ante pequeños cambios en el ángulo se modificaba de forma drástica la señal, como se puede observar en la Fig. 5.8, una lectura tomada a  $83^\circ$  y en la cual se inyecta el  $\text{CO}_2$  en aproximadamente  $t = 400$  y la concentración del mismo varía entre 540 y 7,700 PPM. Nótese que el pico resultante está invertido.

Resulta interesante calcular la incertidumbre que podría tener un sensor basado en este dispositivo. Tomando como referencia la gráfica cuyo rango va desde 520 hasta 1,950 PPM (la curva azul de la Fig. 5.7) y suponiendo un cambio lineal de la magnitud relativa de la señal con respecto a la concentración de  $\text{CO}_2$  se puede derivar lo siguiente:

Al estar normalizada la señal, su valor antes de añadirse el  $\text{CO}_2$  debería ser 1, sin embargo, el valor oscila alrededor de 1 siendo la magnitud de esa variación aproximadamente de 0.03; se considerará este valor como la incertidumbre intrínseca del prototipo. Al agregar el  $\text{CO}_2$ , el valor inicial de la señal cae hasta 0.53 y luego se recupera, es decir, una variación de 0.47. Por lo tanto, la resolución es de  $0.03/0.47=0.063$ . El intervalo de  $\text{CO}_2$  es de  $1,950-520=1,420$ ; con la resolución

antes mencionada, el dispositivo podría medir cambios en la concentración de  $\text{CO}_2$  de 90 PPM.

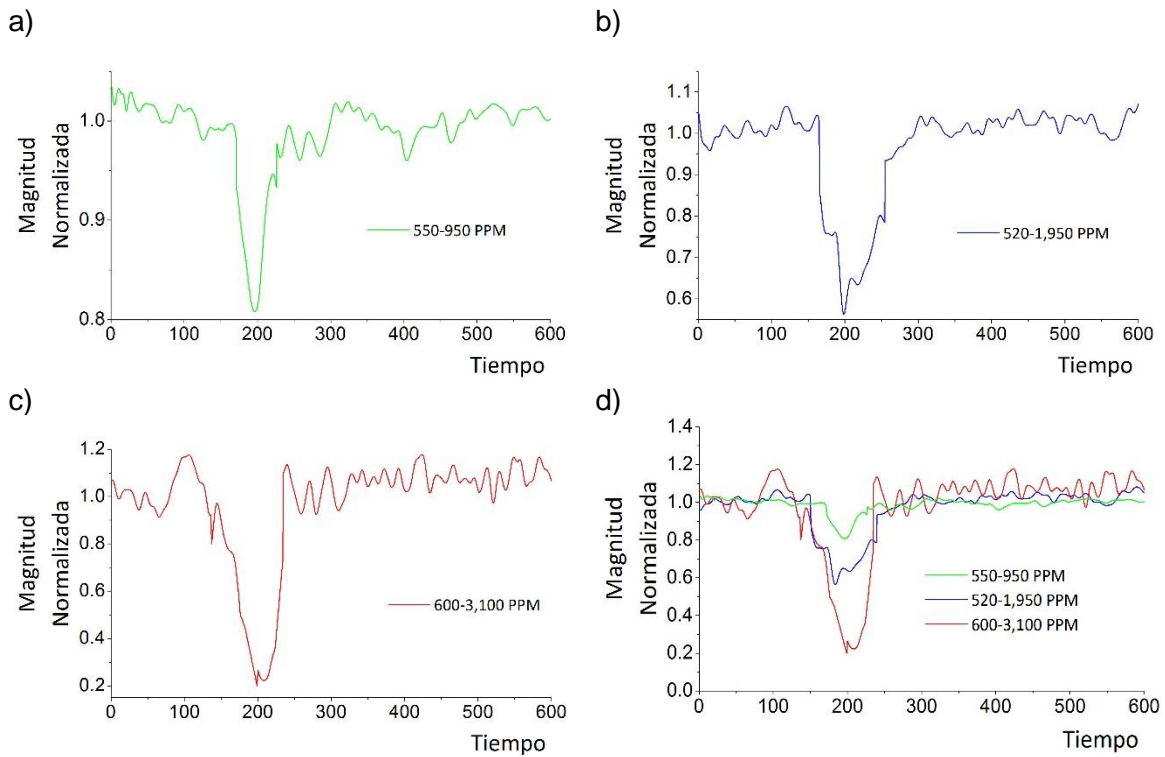


Fig. 5.7 Tres lecturas de diferentes rangos de concentración de  $\text{CO}_2$  correspondientes al ángulo de mayor sensibilidad ( $80^\circ$ ). En el inciso d) se muestran las tres gráficas superpuestas y en la misma escala.

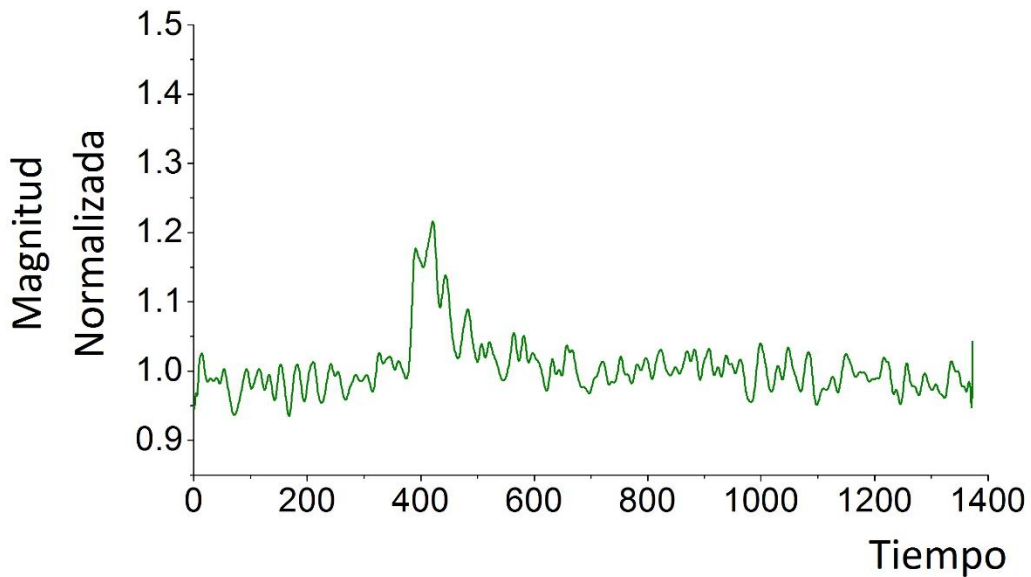


Fig. 5.8 Lectura tomada a un ángulo de incidencia de  $83^\circ$ .

Hay que notar que el hecho de promediar la muestra tal y como se lleva a cabo en el presente trabajo no es más que una clase de lo que en estadística se conoce

como filtro de media móvil, el cual suaviza una serie de datos sustituyendo varios valores de la serie, definidos dentro de un lapso, por el promedio de dichos valores [100]. Este proceso es equivalente al de un filtro pasa-bajos y entre más veces se repita el proceso, menor será la frecuencia de corte del filtro. Una limitación de un filtro de media móvil es que distorsiona los datos originales al eliminar puntos de ambos extremos, aunque esto no es una preocupación seria si los puntos en cuestión son solo ruido. Más importante es la distorsión que se produce en la altura de la señal, ya que el aplicar este proceso repetidamente, la reduce sistemáticamente promediando valores que son en su mayoría más pequeños que la señal máxima.

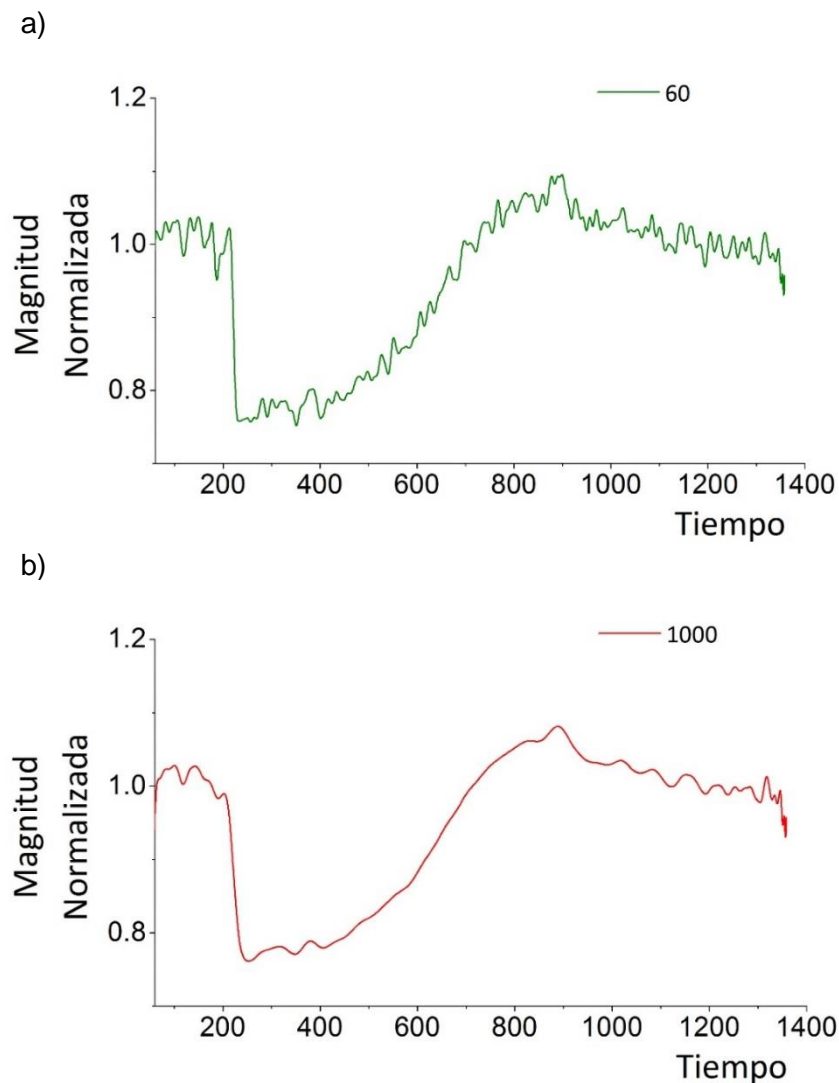


Fig. 5.9 Comparación de la misma lectura, pero promediada 60 (a) y 1,000 veces (b).

La Fig. 5.9 muestra lo antes mencionado: la curva verde de dicha figura ha sido promediada 60 veces y la roja 1,000. La supresión de las frecuencias más altas es lo que da como resultado una curva más suavizada. Sin embargo, cuando la lectura

consta de pocos puntos, promediarla podría significar la pérdida total de información, pero cuando las lecturas corresponden a periodos muy largos de tiempo, la forma básica de la curva se mantiene.

Repitiendo el cálculo para determinar el cambio máximo de CO<sub>2</sub> que podría medir el dispositivo considerando esta última gráfica para comprobar si hay alguna mejora con el aumento de suavizado de la señal, y tomando en cuenta que el rango de variación de CO<sub>2</sub> en dicha gráfica fue desde 600 hasta 1,200 PPM, tenemos los siguientes resultados:

	Promediada 60 veces	Promediada 1,000 veces
Variaciones máximas de la curva (incertidumbre)	0.042	0.027
Variación de la curva al agregar CO <sub>2</sub>	0.25	
Intervalo de CO <sub>2</sub>	600 PPM	
Cambios detectables en la concentración de CO <sub>2</sub>	100 PPM	64 PPM

Puede observarse que, al suavizar la curva, hubo una mejora significativa en los cambios mínimos detectables por el dispositivo, alcanzando un valor cercano a 60 PPM.

# CONCLUSIONES

Se investigó la idoneidad y validez del uso del método del espectro angular (ASM) con algunas adiciones para la simulación de fenómenos de reflexión de campos acústicos en forma de haces de ultrasonido en aire. La motivación de este estudio fue la necesidad de disponer de herramientas de cálculo eficiente para el diseño de sensores de ultrasonido en fluidos con los que se pudiera modelar adecuadamente los fenómenos de difracción los cuales, en acústica, cobran gran relevancia.

La validez y precisión del ASM se verificó mediante comparaciones de cálculos realizados con dicho método y cálculos de la integral de Rayleigh, simulaciones FEM y con datos experimentales. Con la integral de Rayleigh solo es posible calcular la propagación de un haz de ultrasonido a través de un semiespacio uniforme. En este caso se compararon las presiones sobre el eje  $z$ , desde 0 hasta 10 cm, de un haz de ultrasonido en aire emitido por una fuente circular con radio de 1 cm, ubicado en el plano  $xy$  del sistema de referencia y cuyo centro coincidía con el origen del mismo, y a una frecuencia de 40 kHz. La longitud de onda a la mencionada frecuencia en aire es de 8.6 mm por lo que la distancia considerada para la prueba fue de 11.6 longitudes de onda. La diferencia, definida según la ecuación (4.3), entre el cálculo con la integral de Rayleigh y el ASM fue de 0.1 cuando la discretización de las sumatorias del ASM fue de  $N = 50$ , y fue disminuyendo de manera monótona hasta que se alcanzó una diferencia de 0.05 cuando la discretización fue de  $N = 400$ , con  $N$  definido según la ecuación (3.34). En el caso de cálculo por FEM, sí es posible simular reflexión y transmisión de un haz de ultrasonido por una interfaz plana, por lo que se comparó la presión promedio, definida por la ecuación (4.6), y calculada tanto por FEM como por ASM, en la apertura de un receptor enfrente de una interfaz plana, según la geometría de la Fig. 4.6, y a diversos ángulos de incidencia. Se graficaron dichos valores contra el ángulo de incidencia generando curvas similares a la reflectancia de onda plana y se calculó el área bajo la curva de cada una de ellas; se encontró que la diferencia entre ambas fue inferior al 13%. Asimismo, se realizó una simulación de ASM consistente en un barrido en ángulo en una situación de reflexión utilizando también la geometría de la Fig. 4.6, pero en una interfaz aire-aire y empleando una lámina de aluminio como separación entre los medios, y se comparó con una prueba experimental con las mismas condiciones, hallándose una buena similitud.

Una ventaja que presenta ASM sobre FEM es, que en este último es indispensable calcular el campo de presión en todo punto de una malla dentro de un volumen que incluye al emisor, receptor e interfase de reflexión. En el ASM no es necesario calcular el campo en todo un volumen. De hecho, se puede utilizar para calcular el

campo en un solo punto del espacio, lo que lo hace mucho más eficiente para simular señales de reflexión o transmisión de campos de ultrasonido en fluidos

Las ventajas que ofrece ASM sobre otros tipos de simulaciones son su simplicidad de implementación en códigos de computadora y la velocidad de cálculo, como se menciona en la Sección 4.1. El cálculo de la señal de la reflexión como función del ángulo de incidencia cuando un haz ultrasónico incide en una interfaz plana llevó casi 9 h con FEM, mientras que ASM tomó algunos minutos, en parte debido al hecho de que se puede calcular la amplitud del campo únicamente sobre la apertura del detector. Además, como se vio en la sección 3.3, el ASM puede simular también fenómenos de transmisión.

En segundo lugar, se ilustró que el ASM se puede utilizar fácilmente para diseñar y desarrollar nuevos sensores de gas. En particular, se presentaron ejemplos que constan de un emisor y un detector, a diferentes distancias del punto de reflexión y con diferentes medios, que confirman la viabilidad de desarrollar un sensor de dióxido de carbono simple mediante la reflexión de un haz de ultrasonidos desde una membrana delgada expuesta al aire ambiente. Se descubrió que no es difícil alcanzar la sensibilidad requerida para detectar variaciones en el  $\text{CO}_2$  con suficiente resolución para monitorear la calidad del aire en interiores. Entre los tres escenarios diferentes considerados, se identificó un caso particular con un compromiso adecuado entre sensibilidad, tamaño y simplicidad, concluyendo que, entre los tres fenómenos físicos investigados para la detección de gases, el mecanismo que ofrece la mayor sensibilidad y simplicidad para medir variaciones de la concentración de  $\text{CO}_2$  en aire en reposo es la interferencia entre los rayos incidente y reflejado en la apertura del detector. También se concluye que un simple análisis de ondas planas, en general, no será adecuado para estimar la sensibilidad o modelar configuraciones de reflexión para la detección de gases.

Finalmente, se construyó un prototipo basado en las predicciones del ASM, el cual tuvo una buena sensibilidad a un ángulo de incidencia de  $80^\circ$  y que, con métodos sencillos de filtrado de la señal, podría llegar a detectar cambios en la concentración de  $\text{CO}_2$  de 60 PPM. Dicho prototipo resultó económico y fácil de implementar; además, no parece difícil, con una electrónica más sofisticada, poder alcanzar mejores resoluciones.

Sin embargo, se debe señalar que el sistema de detección investigado en realidad detecta variaciones de la velocidad del sonido o de la densidad del aire. Por tanto, se puede detectar cualquier otro gas que cambie estos parámetros. De hecho, el sensor no será selectivo para ningún gas. Por lo tanto, podría considerarse como un monitor general de la calidad del aire o utilizarse como alarma de fuga de gas. Por supuesto, se debe buscar algún tipo de compensación de temperatura y humedad ya que la velocidad del sonido también es función de éstas.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] World Health Organization, WHO Guidelines for Indoor Air Quality: Selected Pollutants (World Health Organization, Regional Office for Europe, Copenhagen, Denmark, 2010).
- [2] M. Kampa, E. Castanas, “Human health effects of air pollution”, *Environ. Pollut.*, 151 (2008), pp. 362-367
- [3] A. Seaton, D. Godden, W. MacNee, K. Donaldson Particulate air pollution and acute health effects *Lancet*, 345 (1995), pp. 176-178
- [4] T. Yasuda, S. Yonemura, A. Tani, “Comparison of the characteristics of small commercial NDIR CO<sub>2</sub> sensor models and development of a portable CO<sub>2</sub> measurement device”, *Sensors* 12(3), 3641–3655 (2012).
- [5] J. J. Cepa, R. M. Pavón, P. Caramés, M. G. Alberti, “A review of gas measurement practices and sensors for tunnels”, *Sensors* 2023, 23, 1090. <https://doi.org/10.3390/s23031090>
- [6] N. Barsan, D. Koziej, U. Weimar, “Metal oxide-based gas sensor research: How to?”, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Volume 121, Issue 1, 30 January 2007. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2006.09.047>
- [7] R Kumar, O Al-Dossary, G Kumar, A Umar, “Zinc Oxide Nanostructures for NO<sub>2</sub> Gas–Sensor Applications: A Review”, *Nano-Micro Lett.* 7, 97–120 (2015). <https://doi.org/10.1007/s40820-014-0023-3>
- [8] S.R. Morrison, “Selectivity in semiconductor gas sensors”, *Sensors and Actuators*, Volume 12, Issue 4, November–December 1987. [https://doi.org/10.1016/0250-6874\(87\)80061-6](https://doi.org/10.1016/0250-6874(87)80061-6)
- [9] J Zhang, X Liu, G Neri, N Pinna, “Nanostructured Materials for Room-Temperature Gas Sensors”, *Advanced Materials*, Volume 28, Issue 5, February 3, 2016. <https://doi.org/10.1002/adma.201503825>
- [10] K Arshak, E Moore, GM Lyons, J Harris, S Clifford, “A review of gas sensors employed in electronic nose applications”, *Sensor Review*, Vol. 24 No. 2, 2004. <https://doi.org/10.1108/02602280410525977>
- [11] W. Yuan, G. Shi, “Graphene-based gas sensors”, *Journal of Materials Chemistry A*, Issue 35, 2013.
- [12] N. Yamazoe, G. Sakai, K. Shimano, “Oxide Semiconductor Gas Sensors”. *Catalysis Surveys from Asia* 7, 63–75 (2003). <https://doi.org/10.1023/A:1023436725457>

- [13] M. W. Ahn, K. S. Park, J. H. Heo, J. G. Park, D. W. Kim, K. J. Choi, J. H. Lee, S. H. Hong, "Gas sensing properties of defect-controlled ZnO-nanowire gas sensor", *Appl. Phys. Lett.* 93, 263103 (2008).  
<https://doi.org/10.1063/1.3046726>
- [14] X. Liu, S. Cheng, H. Liu, S. Hu, D. Zhang, H. Ning, "A survey on gas sensing technology", *Sensors* 2012, 12(7), 9635-9665.  
<https://doi.org/10.3390/s120709635>
- [15] N. Yamazoe, "Toward innovations of gas sensor technology," *Sens. Actuators B: Chem.* 108(1-2), 2–14 (2005).
- [16] A. Kumar, R. Prajesh, "The potential of acoustic wave devices for gas sensing applications," *Sens. Actuators A: Phys.* 339, 113498 (2022).
- [17] Fine, G.F.; Leon, M.; Cavanagh, L.M.; Afonja, A.; Binions, R. Metal oxide semi-conductor gas sensors in environmental monitoring. *Sensors* 2010, 10, 5469–5502.
- [18] Mandayo, G.G.; Herrán, J.; Castro-Hurtado, I.; Castaño, E. Performance of a CO<sub>2</sub> impedimetric sensor prototype for air quality monitoring. *Sensors* 2011, 11, 5047–5057.
- [19] Wei, Q.; Luo, W.D.; Liao, B.; Liu, Y.; Wang, G. Study of the characteristics of Ag doped CuO-BaTiO<sub>3</sub> CO<sub>2</sub> sensors. *Sensors* 2002, 2, 166–179.
- [20] Chu C.S.; Lo, Y.L. Fiber-optic carbon dioxide sensor based on fluorinated xerogels doped with HPTS. *Sens. Actuators B* 2008, 129, 120–125.
- [21] Chen, S.; Yamaguchi, T.; Watanabe, K. A Simple, Low-Cost Non-Dispersive Infrared CO<sub>2</sub> Monitor. In *Proceedings of the ISA/IEEE Sensor for Industry Conference, Houston, TX, USA, 19–21 November 2002*; pp. 107–110.
- [22] H. Nazemi, A. Joseph, J. Park, A. Emadi Advanced micro-and nano-gas sensor technology: a review *Sensors*, 19 (2019), p. 1285
- [23] L. Zipser, F. Wächter, H. Franke, "Acoustic gas sensors using airborne sound properties," *Sens. Actuators B: Chem.* 68(1-3), 162–167 (2000).
- [24] B. Hök, A. Blücker, J. Löfving, "Acoustic gas sensor with ppm resolution," *Sensor Rev.* 20, 139 (2000).
- [25] L Zipser, Fluidic-acoustic gas sensors *Sensors and Actuators, B*, 7 (1992), pp. 592-595
- [26] L Zipser, F Wächter, "Acoustic sensor for ternary gas analysis", *Sensors and Actuators, B*, 26–27 (1995), pp. 195-198



- [27] L Zipser, H Franke, "Acoustic sensor for aerosol measurements", Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 1998 Oct.5–8, Sendai, Japan, 1 (1998), pp. 517-519
- [28] M. Verweij, B. Treeby, K. Van Dongen, L. Demi, "Simulation of ultrasound fields," *Comp. Biomed. Phys.* 2, 465–499 (2014).
- [29] J. Y. Han, "Low-cost multi-touch sensing through frustrated total internal reflection", Proceedings of the 18th annual ACM symposium on User interface software and technology October 2005.  
<https://doi.org/10.1145/1095034.1095054>
- [30] C. Li, V. M. Lubecke, O. Boric-Lubecke, J. Lin, "A Review on Recent Advances in Doppler Radar Sensors for Noncontact Healthcare Monitoring", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Volume: 61, Issue: 5, 2013. <https://doi.org/10.1109/TMTT.2013.2256924>
- [31] R. Márquez-Islas, A. Pérez-Pacheco, L. B. Salazar-Nieva, A. Acevedo-Barrera, E. Mendoza-García, A. García-Valenzuela, "Optical device and methodology for optical sensing of hemolysis in hypotonic media," *Meas. Sci. Technol.* 31(9), 095701 (2020).
- [32] A. García-Valenzuela, M. Peña-Gomar, C. Fajardo-Lira, "Measuring and sensing a complex refractive index by laser reflection near the critical angle," *Opt. Eng.* 41(7), 1704–1716 (2002).
- [33] M. C. Peña-Gomar, A. García-Valenzuela, "Reflectivity of a Gaussian beam near the critical angle with external optically absorbing media," *Appl. Opt.* 39(28), 5131–5137 (2000).
- [34] J. Villatoro, A. García-Valenzuela, "Measuring optical power transmission near the critical angle for sensing beam deflection," *Appl. Opt.* 37(28), 6648–6653 (1998).
- [35] P. S. Huang, S. Kiyono, O. Kamada, "Angle measurement based on the internal-reflection effect: A new method," *Appl. Opt.* 31(28), 6047–6055 (1992).
- [36] T. Kohno, N. Ozawa, K. Miyamoto, T. Musha, "High precision optical surface sensor," *Appl. Opt.* 27(1), 103–108 (1988).
- [37] M. de Angelis, S. De Nicola, P. Ferraro, A. Finizio, G. Pierattini, "Liquid refractometer based on interferometric fringe projection," *Opt. Commun.*, 175 (4/6), 315 –321 (2000).
- [38] L. Hui, X. Shusen, "Measurement method of the refractive index of biotissue by total internal reflection," *Appl. Opt.*, 35 1793 –1795 (1996).

- [39] P. R. Jarvis, G. H. Meeten, "Critical-angle measurement of refractive index of absorbing materials: an experimental study," *J. Phys. E* 19, 296–298 (1986).
- [40] M. D. Shaw, B. E. Anderson, "On the measurement of airborne, angular-dependent sound transmission through supercritical bars", *The Journal of the Acoustical Society of America* 132, EL257 (2012).  
<https://doi.org/10.1121/1.4748269>
- [41] B. E. Anderson, M. D. Shaw, B. M. Harker, "Extraction of plate bending stiffness from coincidence angles of sound transmission measurements (L)", *J. Acoust. Soc. Am.* 137 (1), January 2015.  
<http://dx.doi.org/10.1121/1.4904522>
- [42] M. D. Shaw, "On the measurement of angular dependent sound transmission through airborne supercritical plates", Master of Science Thesis, Brigham Young University, 2011.
- [43] M. D. Shaw, B. E. Anderson, "On the measurement of airborne, angular-dependent sound transmission through supercritical bars," *J. Acoust. Soc. Am.* 132(4), EL257–EL263 (2012).
- [44] J. R. Dickens, D. A. Bender, D. E. Bray, "A critical-angle ultrasonic technique for the inspection of wood parallel-to-grain," *Wood Fiber Sci.* 28(3), 380–388 (1996).
- [45] I. Lie, M. E. Tanase, "A Sing-Around Ultrasonic Low Power Flowmeter", *WSEAS Int. Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS and CONTROL*, Venice, Italy, November 2-4, 2005.
- [46] S. Mehta, P. Antich, "Measurement of shear-wave velocity by ultrasound critical-angle reflectometry (UCR)," *Ultrasound Med. Biol.* 23(7), 1123–1126 (1997).
- [47] G. Fitzpatrick, B. Hildebrand, "Near surface flaw detection by ultrasonic critical angle imaging," *J. Nondestr. Eval.* 3(4), 201–220 (1982).
- [48] B. E. Anderson, W. J. Hughes, S. A. Hambric, "On the steering of sound energy through a supercritical plate by a near-field transducer array," *J. Acoust. Soc. Am.* 123(5), 2613–2619 (2008).  
<https://doi.org/10.1121/1.2890738>
- [49] M. D. Shaw, "On the measurement of angular dependent sound transmission through airborne supercritical plates," M.S. thesis, Brigham Young University, Provo, UT, 2011.
- [50] L. L. Thompson, "A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.* 119(3), 1315–1330 (2006).

- [51] J. T. Katsikadelis, *Boundary Elements: Theory and Applications* (Elsevier, Amsterdam, 2002).
- [52] S. Kirkup, "The boundary element method in acoustics: A survey," *Appl. Sci.* 9(8), 1642 (2019).
- [53] Ainsworth, M. (2004). "Discrete dispersion relation for hp-version finite element approximation at high wave number," *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Numer. Anal.* <https://doi.org/10.1137/S0036142903423460> 42(2), 553–575.
- [54] Antoine, X. (2002). "An algorithm coupling the OSRC and FEM for the computation of an approximate scattered acoustic field by a non-convex body," *Int. J. Numer. Methods Eng.* 54(7), 1021–1041.
- [55] Astley, R. J. (2000). "Infinite elements for wave problems: A review of current formulations and an assessment of accuracy," *Int. J. Numer. Methods Eng.* [https://doi.org/10.1002/1097-0207\(20001110\)49:7<951:AID-NME989>3.0.CO;2-T](https://doi.org/10.1002/1097-0207(20001110)49:7<951:AID-NME989>3.0.CO;2-T) 49, 951–976.
- [56] D. T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics* (Wiley, New York, 2001).
- [57] Zeng X and McGough RJ (2008) Evaluation of the angular spectrum approach for simulations of near-field pressures. *Journal of the Acoustical Society of America* 123: 68–76.
- [58] Haoyu Wei, Xin Liu, Xiang Hao, Edmund Y. Lam, Yifan Peng<sup>1</sup>, Modeling off-axis diffraction with the least-sampling angular spectrum method, *Optica*, Vol. 10, No. 7, July 2023.
- [59] L. Huang, X. Chen, H. Mühlenbernd, H. Zhang, et al, "Three-dimensional optical holography using a plasmonic metasurface", *Nat Commun* 4, 2808 (2013). <https://doi.org/10.1038/ncomms3808>
- [60] C. J. Mann, L. Yu, C. M. Lo, M. K. Kim, "High-resolution quantitative phase-contrast microscopy by digital holography", *Optics Express* Vol. 13, Issue 22, pp. 8693-8698 (2005). <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.008693>
- [61] A. Salandrino, N. Engheta, "Far-field subdiffraction optical microscopy using metamaterial crystals: Theory and simulations", *Phys. Rev. B* 74, 075103 – Published 15 August 2006. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.075103>
- [62] R. C. Waag, J. A. Campbell, J. Ridder, P. R. Mesdag, "Cross-Sectional Measurements and Extrapolations of Ultrasonic Fields", *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 32 (1): 26–35 (1985).

- [63] D. P. Orofino, P. C. Pedersen, "Efficient angular spectrum decomposition of acoustic sources. I. Theory," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* 40(3), 238–249 (1993).
- [64] D. P. Orofino, P. C. Pedersen, "An Angular Spectrum Technique for Calculating Receiver Output Signals for Pulse-Echo Ultrasound Insonification of Elastic Plates", *IEEE 1992 Ultrasonics Symposium Proceedings*. <https://doi.org/10.1109/ULTSYM.1992.275916>
- [65] Peter R. Stepanishen, Kim C. Benjamin, "Forward and backward projection of acoustic fields using FFT methods". *The Journal of the Acoustical Society of America*. *Acoustical Society of America (ASA)*. 71 (4): 803–81, (1982).
- [66] Christopher J. Vecchio, Peter A. Lewin, "Finite amplitude acoustic propagation modeling using the extended angular spectrum method". *The Journal of the Acoustical Society of America*. *Acoustical Society of America (ASA)*. 95 (5): 2399–2408, (1994).
- [67] Chris Vecchio, Peter A. Lewin, Acoustic propagation modeling using the extended angular spectrum method. *14th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. IEEE, (1992).
- [68] P. Ted Christopher, Kevin J. Parker, "New approaches to nonlinear diffractive field propagation". *The Journal of the Acoustical Society of America*. *Acoustical Society of America (ASA)*. 90 (1): 488–499, (1991).
- [69] Roger J. Zemp, Jahangir Tavakkoli, Richard S. C. Cobbold, "Modeling of nonlinear ultrasound propagation in tissue from array transducers". *The Journal of the Acoustical Society of America*. *Acoustical Society of America (ASA)*. 113 (1): 139–152, (2003).
- [70] Christopher John Vecchio, *Finite Amplitude Acoustic Propagation Modeling Using the Extended Angular Spectrum Method (PhD)*. *Dissertation Abstracts International*, (1992).
- [71] Mark E. Schafer, Peter A. Lewin, "Transducer characterization using the angular spectrum method". *The Journal of the Acoustical Society of America*. *Acoustical Society of America (ASA)*. 85 (5): 2202–2214, (1989).
- [72] Christopher J. Vecchio, Mark E. Schafer, Peter A. Lewin, "Prediction of ultrasonic field propagation through layered media using the extended angular spectrum method". *Ultrasound in Medicine & Biology*. Elsevier BV. 20 (7): 611–622, (1994).
- [73] H. Son, K. Oh, "Light propagation analysis using a translated plane angular spectrum method with the oblique plane wave incidence", *J. Opt. Soc. Am. A* 32(5), 949–954 (2015).

- [74] E. Huggins, "Introduction to Fourier optics," *Phys. Teach.* 45(6), 364–368 (2007).
- [75] A. García-Valenzuela, R. Diaz-Urbe, "Detection limits of an internal reflection sensor for the optical beam deflection method," *Appl. Opt.* 36(19), 4456–4462 (1997).
- [76] J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", 2° ed. (McGraw-Hill, 1996).
- [77] K. Matsushima, H. Schimmel, F. Wyrowski, "Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes by use of the angular spectrum of plane waves," *J. Opt. Soc. Am. A* 20, 1755–1762 (2003).
- [78] M. Vorländer, "Computer simulations in room acoustics: Concepts and uncertainties", *J. Acoust. Soc. Am.* 133, 1203–1213 (2013).  
<https://doi.org/10.1121/1.4788978>
- [79] T. Okuzono, T. Otsuru, R. Tomiku, N. Okamoto, "A finite-element method using dispersion reduced spline elements for room acoustics simulation", *Applied Acoustics*, Volume 79, 2014.  
<https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2013.12.010>
- [80] T. Łodygowski, W. Sumelka, "Limitations in application of finite element method in acoustic numerical simulation", *Journal of Theoretical and applied Mechanics*, 44, 4, 2006.
- [81] L. Lehmann, S. Langer, D. Clasen, "Scaled boundary finite element method for acoustics", *Journal of Computational Acoustics* Vol. 14, No. 04, 2006. <https://doi.org/10.1142/S0218396X06003141>
- [82] T. Frommelt, D. Gogel, M. Kostur, P. Talkner, P. Hanggi, A. Wixforth, "Flow patterns and transport in Rayleigh surface acoustic wave streaming: combined finite element method and raytracing numerics versus experiments", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Volume: 55, Issue: 10, 2008.  
<https://doi.org/10.1109/TUFFC.928>
- [83] A. Ortega-Aguilar, R. Velasco-Segura, A. García-Valenzuela, G. E. Sandoval-Romero, "Numerical simulation of ultrasound oblique reflection in a 2D gas-gas interface," *Proc. Mtgs. Acoust.* 42, 022003 (2020).
- [84] A. Ortega-Aguilar, R. Velasco-Segura, A. García-Valenzuela, G. E. Sandoval-Romero, "An efficient analysis of oblique reflection of airborne ultrasound beams from thin membranes for gas sensing", *J. Acoust. Soc. Am.* 152 (6), December 2022. <https://doi.org/10.1121/10.0016580>
- [85] R. E. Collin, "Antennas and radiowave propagation", McGraw Hill, 1ª edición, 1985.

- [86] FEniCSx. (s.f.). FEniCS Project. <https://fenicsproject.org/>
- [87] R. Velasco-Segura and C. U. Martínez-Lule, "A Helmholtz equation implementation for finite element method based on Fenics project," *J. Acoust. Soc. Am.* 150(4), A92 (2021).
- [88] M. S. Alnaes, J. Blechta, J. Hake, A. Johansson, B. Kehlet, A. Logg, C. Richardson, J. Ring, M. E. Rognes, G. N. Wells, "The fenics Project version 2017.2.0," *Arch. Numer. Softw.* 3(100), 9–23 (2015).
- [89] J. O. Rangel-Flores, "Estudio numérico de régimen de baja frecuencia en medición de absorción en cámara reverberante, aplicado al problema de ruido urbano en viviendas" ("Numerical study of low frequency regime in measurement of absorption in reverberant chamber, applied to the problema of urban noise in houses"), Bachelors dissertation, Facultad de Ingeniería Universidad Nacional Autónoma de México (2019), <https://repositorio.unam.mx/contenidos/3511773> (Last viewed September 10, 2022).
- [90] O. A. Bustamante, E. Romero-Vivas, R. Velasco-Segura, "Numerical study of an acoustic leaky wave antenna," *J. Acoust. Soc. Am.* 148(4), 2777 (2020).
- [91] T. Löfqvist, J. Delsing, K. Sokas, "Speed of sound measurements in gas-mixtures at varying composition using an ultrasonic gas flow meter with silicon based transducers," in *International Conference on Flow Measurement* (May 12–14, 2003).
- [92] A. J. Hicks, "A Study of the Speed of Sound in Pure Gases and Binary Gas Mixtures", Bachelor Thesis, University of Central Arkansas, 2013.
- [93] D. L. Martín, "Caracterización termodinámica por velocidad del sonido de mezclas binarias y multicomponentes de interés para la industria del gas", Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid, 2019.
- [94] M. Suchenek, T. Borowski, "Measuring Sound Speed in Gas Mixtures Using a Photoacoustic Generator", *Int J Thermophys* (2018) 39:11. <https://doi.org/10.1007/s10765017-2335-2>
- [95] R. Prill, "Why measure carbon dioxide inside buildings," *Washington State University Extension Energy Program WSUEEP07 No. 3* (2000).
- [96] ASTM Committee D-22 on Sampling and Analysis of Atmospheres, Subcommittee D22. 05 on Indoor Air, D6245 Standard Guide for Using Indoor Carbon Dioxide Concentrations to Evaluate Indoor Air Quality and Ventilation (ASTM, West Conshohocken, PA, 2018).
- [97] I. H. Shames, *Mecánica de Fluidos*, McGRAW-HILL, Tercera Edición, 1995.

- [98] X. O. Olivella, C. A. de Saracíbar Bosch, Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros, Ediciones UPC, Segunda Edición, 2002.
- [99] J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, Fundamentos de la Teoría Electromagnética, Addison-Wesley Iberoamericana, Cuarta Edición 1996.
- [100] Y. Chou, "Statistical Analysis: With Business & Economic Applications", Holt Rinehart Winston, 2nd edition, 1975.

# Apéndice 1 CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Se entiende por medio continuo un conjunto infinito de partículas que forman parte, por ejemplo, de un fluido, que va a ser estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico (nivel atómico o molecular). En consecuencia, se asume que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas. Estas partículas se pueden considerar como colecciones de moléculas lo suficientemente grandes como para que las propiedades macroscópicas de dichas partículas, que a su vez serán resultado del promedio de las moléculas individuales que contengan, no difieran significativamente entre ellas.

La descripción del movimiento del medio continuo puede llevarse a cabo mediante funciones matemáticas que describan la posición de cada partícula (llamada también punto material) a lo largo del tiempo. Se define como configuración del medio continuo en el instante  $t$ , denotado por  $\Omega_t$ , al lugar geométrico de las posiciones que ocupan en el espacio los puntos materiales en dicho instante. En contraste con un punto material, un punto espacial es un punto fijo en el espacio.

A un cierto instante  $t = t_0$  del intervalo de tiempo de interés (generalmente  $t_0 = 0$ ) se le denomina instante de referencia y a la configuración de las partículas del sistema de interés en dicho instante  $\Omega_0$  se la denomina configuración inicial, material o de referencia. Las coordenadas que en ese instante tenga una determinada partícula se denominarán coordenadas materiales y quedarán denotadas por el vector de posición:  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ; y las coordenadas que tenga la misma partícula en cualquier otro tiempo posterior a  $t_0$  se denominarán coordenadas espaciales y su vector de posición se denotará:  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

El movimiento de las partículas del medio continuo puede describirse ahora por la evolución de sus coordenadas espaciales (o de su vector de posición) a lo largo del tiempo. Matemáticamente esto requiere conocer una función que para cada partícula (identificada por una etiqueta) proporcione sus coordenadas espaciales  $x_i$  (o su vector de posición espacial  $\vec{x}$ ) en los sucesivos instantes de tiempo. Como etiqueta que caracterice unívocamente a cada partícula pueden elegirse sus coordenadas materiales  $X_i$  obteniéndose las ecuaciones del movimiento:



$$\begin{aligned}\vec{x} &= \Phi(\text{partícula}, t) = \varphi(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t), \\ x_i &= \Phi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\},\end{aligned}\tag{A1.1}$$

que proporcionan las coordenadas espaciales en función de las materiales; y las ecuaciones del movimiento inversas:

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \Phi^{-1}(\vec{x}, t) = \vec{X}(\vec{x}, t), \\ X_i &= \Phi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\},\end{aligned}\tag{A1.2}$$

que proporcionan las coordenadas materiales en función de las espaciales [97] [98].

De lo anterior se puede entender que particularizando la expresión  $\vec{x} = \Phi(\vec{X}, t)$  para un valor fijo de las coordenadas materiales  $\vec{X}$ , se obtiene la ecuación de la trayectoria de la partícula etiquetada como  $\vec{X}$ .

Existen ciertas restricciones matemáticas para garantizar la existencia de  $\Phi$  y de  $\Phi^{-1}$  así como su correcto significado físico. Estas restricciones son:

- $\Phi(\vec{X}, t_0) = \vec{X}$  puesto que, por definición,  $\vec{X}$  es el vector de posición en el instante de referencia  $t = t_0$  (condición de consistencia).
- $\Phi \in C^1$  (la función  $\Phi$  es continua y con derivadas continuas en cada punto e instante).
- $\Phi$  es biunívoca (para garantizar que dos partículas no ocupan simultáneamente el mismo punto del espacio y que una partícula no ocupa simultáneamente dos puntos distintos del espacio).
- Se debe cumplir que el determinante Jacobiano sea mayor a cero,  $J = \det \left| \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \right| > 0$ . La interpretación física de esta condición es que todo volumen diferencial ha de ser siempre positivo, lo que implica que la densidad de las partículas sea siempre positiva.

La descripción matemática de las propiedades de las partículas del medio continuo puede hacerse mediante dos formas alternativas: la descripción material (llamada también lagrangiana) y la descripción espacial (conocida como euleriana). Ambas descripciones se diferencian esencialmente por el tipo de argumento (coordenadas materiales o coordenadas espaciales) que aparece en las funciones matemáticas que describen las propiedades del medio continuo. Como antes, si se utiliza la descripción material para describir cierta propiedad (por ejemplo, la densidad  $\rho(\vec{X}, t)$ ) y se fija  $\vec{X}$ , se está siguiendo a una partícula determinada. Análogamente, si empleamos la descripción espacial ( $\rho(\vec{x}, t)$ ) y se asigna un cierto valor al argumento  $\vec{x}$ , se obtiene la evolución de dicha propiedad para las distintas partículas que van pasando por dicho punto del espacio a lo largo del tiempo; por otro lado, al fijar el argumento tiempo en la descripción espacial se obtiene una distribución

instantánea (como una fotografía) de la propiedad en el espacio. Es evidente que las ecuaciones del movimiento directas (A1.1) e inversas (A1.2) permiten pasar de una descripción a otra.

En vista de lo anterior, es claro que utilizar una u otra de las distintas descripciones (material o espacial) de las propiedades, llevará a distintas definiciones de las derivadas temporales de las mismas. Consideremos una cierta propiedad y sus descripciones material y espacial  $\Gamma(\vec{X}, t) \Leftrightarrow \gamma(\vec{x}, t)$ . Podemos definir la derivada local como la variación de la propiedad respecto al tiempo en un punto fijo del espacio; si se dispone de la descripción espacial de la propiedad esta derivada se puede escribirse matemáticamente como:  $\frac{\partial \gamma(\vec{x}, t)}{\partial t}$ . De la misma manera, la derivada material se define como la variación de la propiedad respecto al tiempo siguiendo una partícula (punto material) específica; dicha derivada puede describirse matemáticamente como:  $\frac{\partial \Gamma(\vec{X}, t)}{\partial t}$ .

Sin embargo, si se parte de la descripción espacial de la propiedad  $\gamma(\vec{x}, t)$  y se consideran implícitas en la misma las ecuaciones del movimiento,  $\gamma(\vec{x}, t) = \gamma(\vec{x}(\vec{X}, t), t) = \Gamma(\vec{X}, t)$ , puede obtenerse la derivada material a partir de la descripción espacial, como:

$$\frac{d}{dt} \gamma(\vec{x}(\vec{X}, t), t) = \frac{\partial \Gamma(\vec{X}, t)}{\partial t}.$$

La justificación de la igualdad anterior es la siguiente: como se mencionó antes, si se mantiene constante  $\vec{X}$ , los distintos valores que adopte  $\vec{x}(\vec{X}, t)$  serán los puntos que constituyan la trayectoria de una misma partícula; en dicho caso, la función  $\gamma$  debe coincidir con  $\Gamma$  en todo  $t$ . Por lo tanto, la derivada total de  $\gamma$  coincidirá con la derivada parcial de  $\Gamma$ , en la cual, por definición,  $\vec{X}$  es constante.

En la literatura, es común utilizar la notación  $\frac{D}{Dt}$  en vez de  $\frac{d}{dt}$  para resaltar el hecho de que se trata de la derivada material; usando esta notación y desarrollando el término de la izquierda mediante el teorema del incremento del cálculo diferencial se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \gamma(\vec{x}(\vec{X}, t), t) = \frac{\partial \gamma(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial \vec{x}} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \gamma(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

y considerado la definición de la velocidad como la derivada respecto al tiempo de las ecuaciones de movimiento (A1.1),

$$\frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \vec{U}(\vec{X}(\vec{x}, t), t) = \vec{u}(\vec{x}, t),$$

obtenemos:

$$\frac{D}{Dt}\gamma(\vec{x}(\vec{X}, t), t) = \frac{\partial\gamma(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\gamma(\vec{x}, t). \quad (\text{A1.3})$$

La ecuación (A1.3) define implícitamente la derivada convectiva  $\vec{u} \cdot \nabla(*)$  como la diferencia entre las derivadas material y local de la propiedad. El término convección se aplica en mecánica de medios continuos a fenómenos relacionados con el transporte de masa (o de partículas). Cabe resaltar que si no hay convección ( $\vec{u} = 0$ ) la derivada convectiva desaparece y las derivadas local y material coinciden [98].

La obtención de la derivada material a partir de la descripción espacial puede generalizarse para cualquier propiedad ya sea de carácter escalar, vectorial o tensorial.

Se concluye esta breve introducción con unas últimas definiciones:

- Cuando la derivada local de cierta propiedad es nula,  $\frac{\partial\gamma(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0$ , o lo que es lo mismo, que su descripción espacial no depende del tiempo, entonces dicha propiedad es estacionaria.
- Se habla de superficie o volumen material al referirse a un determinado lugar geométrico móvil en el espacio constituido siempre por las mismas partículas (puntos materiales).
- Si lo que se tiene es un lugar geométrico fijo en el espacio, entonces nos referimos a superficies o volúmenes de control.

## Apéndice 2 DEMOSTRACIONES DE LAS ECUACIONES (2.10) Y (2.11)

En este apéndice se demostrarán los corolarios empleados en la sección 2.1. Se empezará por la ecuación (2.10), la cual es:

$$\int_V \nabla\varphi \, dV = \oint_S \varphi \vec{n} \, dA.$$

La ecuación anterior se demuestra desarrollando primeramente, la parte izquierda de la igualdad, siendo en coordenadas rectangulares:

$$\int_V \nabla\varphi \, dV = \int_V \left( \hat{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) dV = \hat{i} \left( \int_V \frac{\partial\varphi}{\partial x} \, dV \right) + \hat{j} \left( \int_V \frac{\partial\varphi}{\partial y} \, dV \right) + \hat{k} \left( \int_V \frac{\partial\varphi}{\partial z} \, dV \right).$$

Por otra parte y según el teorema de la divergencia de Gauss, tenemos que para una función vectorial  $\vec{F}$  cualquiera:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA,$$

donde  $\vec{n} = \hat{i} n_x + \hat{j} n_y + \hat{k} n_z$ . En particular, para la función  $\vec{F} = \hat{i} \varphi$  (es decir  $F_x = \varphi$ ,  $F_y = 0$ ,  $F_z = 0$ ), se tiene que:

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV = \oint_S \varphi n_x dA.$$

De la misma manera, pero empleando ahora, primeramente, la función  $\vec{F} = \hat{j} \varphi$  y después la función  $\vec{F} = \hat{k} \varphi$ , resulta:

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial y} dV = \oint_S \varphi n_y dA, \quad \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z} dV = \oint_S \varphi n_z dA.$$

Sustituyendo estas tres últimas igualdades en el desarrollo inicial del gradiente y reordenando términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{i} \left( \oint_S \varphi n_x dA \right) + \hat{j} \left( \oint_S \varphi n_y dA \right) + \hat{k} \left( \oint_S \varphi n_z dA \right) &= \oint_S \varphi (\hat{i} n_x + \hat{j} n_y + \hat{k} n_z) dA \\ &= \oint_S \varphi \vec{n} dA, \end{aligned}$$

con lo que se demuestra (2.10).

A continuación, se demostrará la ecuación (2.11) siendo ésta:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{G} + \vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} (\vec{G} \cdot \vec{n}) dA.$$

Expandiendo el lado derecho de la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{F} (\vec{G} \cdot \vec{n}) dA &= \hat{i} \oint_S F_x (\vec{G} \cdot \vec{n}) dA + \hat{j} \oint_S F_y (\vec{G} \cdot \vec{n}) dA + \hat{k} \oint_S F_z (\vec{G} \cdot \vec{n}) dA \\ &= \hat{i} \oint_S ((F_x \vec{G}) \cdot \vec{n}) dA + \hat{j} \oint_S ((F_y \vec{G}) \cdot \vec{n}) dA + \hat{k} \oint_S ((F_z \vec{G}) \cdot \vec{n}) dA, \end{aligned}$$

y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss a cada uno de los tres términos se llega a:

$$= \hat{i} \int_V \nabla \cdot (F_x \vec{G}) dV + \hat{j} \int_V \nabla \cdot (F_y \vec{G}) dV + \hat{k} \int_V \nabla \cdot (F_z \vec{G}) dV.$$

A su vez, cada uno de estos tres términos se puede expandir. Expandiendo el primero resulta:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{i}} \int_V \nabla \cdot (F_x \vec{G}) dV &= \hat{\mathbf{i}} \int_V \left( \frac{\partial(F_x G_x)}{\partial x} + \frac{\partial(F_x G_y)}{\partial y} + \frac{\partial(F_x G_z)}{\partial z} \right) dV \\ &= \hat{\mathbf{i}} \int_V \left( F_x \frac{\partial G_x}{\partial x} + F_x \frac{\partial G_y}{\partial y} + F_x \frac{\partial G_z}{\partial z} + G_x \frac{\partial F_x}{\partial x} + G_y \frac{\partial F_x}{\partial x} + G_z \frac{\partial F_x}{\partial x} \right) dV \\ \hat{\mathbf{i}} \int_V \nabla \cdot (F_x \vec{G}) dV &= \hat{\mathbf{i}} \int_V (F_x \nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) F_x) dV.\end{aligned}$$

Realizando expansiones similares en los términos restantes y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned}&= \hat{\mathbf{i}} \int_V (F_x \nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) F_x) dV + \hat{\mathbf{j}} \int_V (F_y \nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) F_y) dV \\ &\quad + \hat{\mathbf{k}} \int_V (F_z \nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) F_z) dV \\ &= \int_V (\nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)) (F_x \hat{\mathbf{i}}) dV + \int_V (\nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)) (F_y \hat{\mathbf{j}}) dV \\ &\quad + \int_V (\nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)) (F_z \hat{\mathbf{k}}) dV \\ &= \int_V [(\nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)) (F_x \hat{\mathbf{i}}) + (\nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)) (F_y \hat{\mathbf{j}}) + (\nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)) (F_z \hat{\mathbf{k}})] dV \\ &= \int_V [(\nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)) (F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}})] dV = \int_V (\nabla \cdot \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)) \vec{F} dV,\end{aligned}$$

quedando demostrado (2.11).

## Apéndice 3 EL ASM APLICADO A CAMPOS VECTORIALES

Hasta ahora, la descripción de las ondas acústicas se ha desarrollado a partir del campo de presiones, el cual es un campo escalar. Sin embargo, cabría preguntarse si el mismo desarrollo podría hacerse considerando el campo de velocidades de partícula, que se trata de un campo vectorial. La respuesta es afirmativa; de hecho, en el caso electromagnético, en el que también se utiliza ampliamente el ASM, los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son vectoriales.

Un campo escalar se describe por medio de una función que asigna un valor a cada punto del espacio, o mejor dicho del dominio de definición, con lo que queda perfectamente determinado. Sin embargo, en un campo vectorial, al tratar con magnitudes a las que se les asocia una dirección, se tendrán tantas funciones como dimensiones haya en el dominio de definición; en el caso tridimensional, el cual será el tratado aquí, serían tres. Un campo como este, que describe una magnitud  $F$  quedaría entonces representado por la ecuación:  $F = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$ , donde cada una de las  $F_i$  sería una función que en general dependería de  $x, y, z$ .

Por lo tanto, en un principio, se podría pensar que para aplicar el ASM a un campo vectorial sería necesario aplicar las ecuaciones (3.13) y (3.15) a cada una de estas funciones como si fueran independientes entre sí. No obstante, no se debe olvidar que la ecuación (3.13) consiste en una expansión de ondas planas; la manera de garantizar que sean planas es, en el caso de ondas transversales, que la dirección de la magnitud empleada para describir el campo vectorial sea perpendicular al vector de onda, como en el caso electromagnético; para ondas longitudinales, que es el caso de interés en acústica, la dirección de la magnitud debe ser paralela al vector de onda. Como se verá en seguida, hay una relación en acústica que asegura lo anterior, pero impondrá ciertas restricciones que harán que las  $F_i$  no sean independientes y estén relacionadas.

Las ecuaciones linealizadas de continuidad, momentum y de estado vistas en el capítulo 2, se pueden combinar para dejar una ecuación en función de  $\vec{u}$ :

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A3.1})$$

Considerando un flujo irrotacional, es decir  $\nabla \times \vec{u} = 0$  y utilizando la relación vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}, \quad (\text{A3.2})$$

se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A3.3})$$

La ecuación  $\nabla \times \vec{u} = 0$  es la relación antes mencionada que asegura una expansión de ondas planas. Suponiendo soluciones de la forma  $\vec{u} = \vec{U}(x, y, z)e^{-i\omega t}$  para la ecuación (A3.3), se llega a:

$$\nabla^2 \vec{U} + k_0^2 \vec{U} = 0, \quad (\text{A3.4})$$

$$\nabla \times \vec{U} = 0, \quad (\text{A3.5})$$

con  $\vec{U}(x, y, z) = U_x(x, y, z)\vec{i} + U_y(x, y, z)\vec{j} + U_z(x, y, z)\vec{k}$ . Desarrollando estas ecuaciones en coordenadas rectangulares tenemos:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \vec{U} = 0, \quad (\text{A3.6})$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0, \quad (\text{A3.7})$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} = 0, \quad (\text{A3.8})$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} = 0. \quad (\text{A3.9})$$

Aplicando la transformada de Fourier con respecto tanto a  $x$  como a  $y$  tenemos:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) \right] \vec{u}(k_x, k_y, z) = 0, \quad (\text{A3.10})$$

$$k_y \mathcal{U}_z(k_x, k_y, z) + i \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{U}_y(k_x, k_y, z) = 0, \quad (\text{A3.11})$$

$$k_x \mathcal{U}_z(k_x, k_y, z) + i \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{U}_x(k_x, k_y, z) = 0, \quad (\text{A3.12})$$

$$k_x \mathcal{U}_y(k_x, k_y, z) - k_y \mathcal{U}_x(k_x, k_y, z) = 0. \quad (\text{A3.13})$$

La solución para la ecuación (A3.10) es:

$$\vec{u}(k_x, k_y, z) = \vec{f}(k_x, k_y) e^{ik_z z}, \quad (\text{A3.14})$$

con  $k_z^2 = k_0^2 - k_x^2 - k_y^2$ . Sustituyendo (A3.14) en (A3.11), (A3.12) y (A3.13) tenemos:

$$k_y f_z(k_x, k_y) = k_z f_y(k_x, k_y), \quad (\text{A3.15a})$$

$$k_x f_z(k_x, k_y) = k_z f_x(k_x, k_y), \quad (\text{A3.15b})$$

$$k_x f_y(k_x, k_y) = k_y f_x(k_x, k_y). \quad (\text{A3.15c})$$

De estas últimas ecuaciones se concluye que:

$$\vec{f} \times \vec{k} = 0. \quad (\text{A3.16})$$

La ecuación (A3.16) es consecuencia de la restricción impuesta al campo de velocidades de partícula por la anulación del rotacional en la ecuación (A3.5). También se observa que, dado el valor de  $\vec{k}$ , solo se necesita conocer uno de los componentes de  $\vec{f}$  y los otros dos se pueden derivar a partir de ese; es decir, solo hay una variable independiente.

En este punto se debe aclarar una cuestión importante con respecto al carácter de la ecuación (A3.16). El vector  $\vec{k}$ , en general, es un vector complejo. Su parte real definirá los planos de fase constante y la velocidad de fase, y la imaginaria los planos de amplitud constante y la constante de atenuación; de hecho, la parte imaginaria es necesaria para describir las ondas evanescentes [99]. La condición de paralelismo entre el vector de onda y la velocidad de partícula hace referencia a la dirección en la que se propaga la onda, es decir, la parte real de  $\vec{k}$ ; por lo que en las ecuaciones (A3.15a), (A3.15a), (A3.15a) y (A3.16) se debe considerar solo la parte real de  $\vec{k}$ . Asimismo, el vector  $\vec{f}$  también será complejo pero su significado será distinto y en este caso es más fácil entenderlo considerando la forma polar del mismo. La magnitud representará la amplitud de una onda real y su fase el retardo con respecto a otras ondas, que en el caso del ASM es con respecto a las otras ondas que conforman la expansión de ondas planas. Ahora bien, para satisfacer la condición de paralelismo, ¿qué parte de  $\vec{f}$ , real, imaginaria o ambas, se debe considerar en el producto vectorial de (A3.16)?

Para poder contestar esa pregunta, primero hay que saber si para una misma onda, sus distintas componentes pueden estar fuera de fase. De hecho, en el caso electromagnético así ocurre, dando origen a los distintos tipos de polarización: lineal, circular y elíptica. Pero en el caso de ondas longitudinales esto no es posible.

La razón radica en el hecho de que  $\vec{u}$  es un vector que varía tanto en tiempo como en posición, y esa variación podría ser tanto en magnitud como en dirección. Para satisfacer la restricción de onda plana longitudinal,  $\vec{u}$  debe ser paralelo en todo momento y en todo lugar a  $\text{Re}(\vec{k})$ , un vector fijo e independiente del tiempo. Si las componentes de  $\vec{u}$  estuvieran fuera de fase, originaría necesariamente que el vector de velocidad de partícula cambiara de dirección; sin embargo, solo hay una dirección paralela a  $\text{Re}(\vec{k})$ , por lo que en algún momento la restricción de paralelismo sería violada. En el caso electromagnético esto es posible debido a que se trata de una onda transversal, donde la restricción consiste en que  $\vec{E}$  sea perpendicular a  $\text{Re}(\vec{k})$ ; consecuentemente, una infinidad de direcciones satisfará esa restricción.



De lo anterior se concluye que las tres componentes de  $\vec{u}$  están en fase y, por tanto, lo mismo ocurrirá con  $\vec{f}$ . Esto implica que su dirección sea constante y que la fase sea irrelevante. Dado un punto fijo en el espacio, la magnitud de  $\vec{u}$  variará entre un valor máximo y uno mínimo, pero manteniendo siempre la misma dirección; la fase solo introducirá un retardo en el tiempo en el que alcanza dichos valores.

Retomando la cuestión sobre el producto vectorial de la ecuación (A3.16), lo apropiado sería tomar el módulo de las partes real e imaginaria de cada una de las componentes de  $\vec{f}$ . Sin embargo, ya que cada una de las ecuaciones (A3.15a) consiste en una relación de proporcionalidad entre los módulos de las componentes de  $\vec{f}$ , y la constante de proporcionalidad es un número real, la misma relación de proporcionalidad aplicará entre las partes reales e imaginarias de las componentes, por lo que en el producto vectorial deberán considerarse ambas partes de  $\vec{f}$ , tanto real como imaginaria.

Para finalizar la derivación del campo de velocidades de partícula mediante el ASM, se toma la transformada inversa de Fourier sobre la ecuación (A3.14) obteniendo:

$$\vec{U}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(k_x, k_y) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} dk_x dk_y, \quad (\text{A3.17})$$

donde  $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ . La ecuación anterior representa tres integrales, una por cada dirección espacial, es decir:

$$U_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_x(k_x, k_y) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} dk_x dk_y, \quad (\text{A3.18a})$$

$$U_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_y(k_x, k_y) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} dk_x dk_y, \quad (\text{A3.18b})$$

$$U_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_z(k_x, k_y) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} dk_x dk_y, \quad (\text{A3.18c})$$

donde falta por determinar  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$ . Como se vio en las ecuaciones (A3.15a), solo una de ellas es independiente (supondremos que es  $f_z$ ) y las otras se calculan a partir de ésta. Por lo tanto,  $f_z$  se calcula a partir de la condición a la frontera en  $z = 0$  y con la ecuación:

$$f_z(k_x, k_y) = \iint_S U_z(x, y, z = 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (\text{A3.19})$$

Las otras dos componentes de  $\vec{f}$  están dadas por (A3.15a) y (A3.15a):

$$f_y = \frac{k_y}{k_z} f_z, \quad (\text{A3.20a})$$

$$f_x = \frac{k_x}{k_z} f_z. \quad (\text{A3.20b})$$

Cuando  $k_0^2 < k_x^2 + k_y^2$ ,  $\text{Re}(k_z) = 0$  y por lo tanto las ecuaciones (A3.20a) no podrán aplicarse. La relación (A3.15a) solo podrá dar una proporción entre  $f_x$  y  $f_y$ .

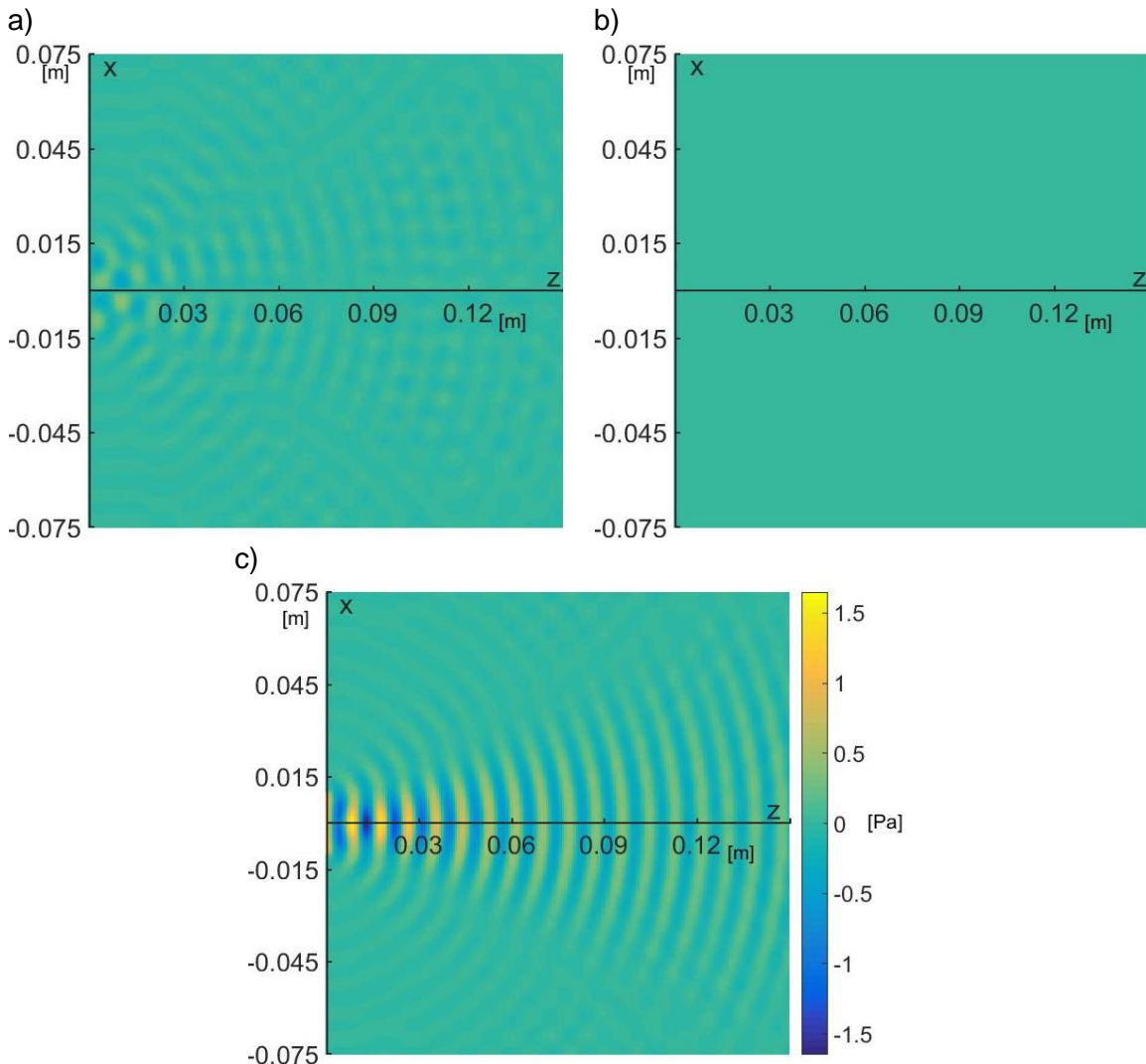


Fig. A3.1 Componentes del campo de velocidad de partícula en el plano  $xz$ ,  $y = 0$ . a)  $u_x$ , b)  $u_y$ , c)  $u_z$ .

En estos casos no podrá calcularse  $\vec{f}$  de dichas ondas, por lo que la expansión será incompleta. Ciertamente es que estas ondas son evanescentes y solo afectarán al campo cercano, pero se debe reconocer que lo anterior introduce un error a los resultados.

Para concluir, se muestran un par de simulaciones del campo de velocidad de partícula obtenidas mediante este método. Para éstas, se consideró como fuente un pistón circular de radio igual a 0.01 m y que el medio de propagación fuera aire ( $c = 343$  m/s). El origen del sistema coordenado se ubicó en el centro del pistón, el cual yace sobre el plano  $xy$ , y la condición a la frontera es la dada por la ecuación (4.2).

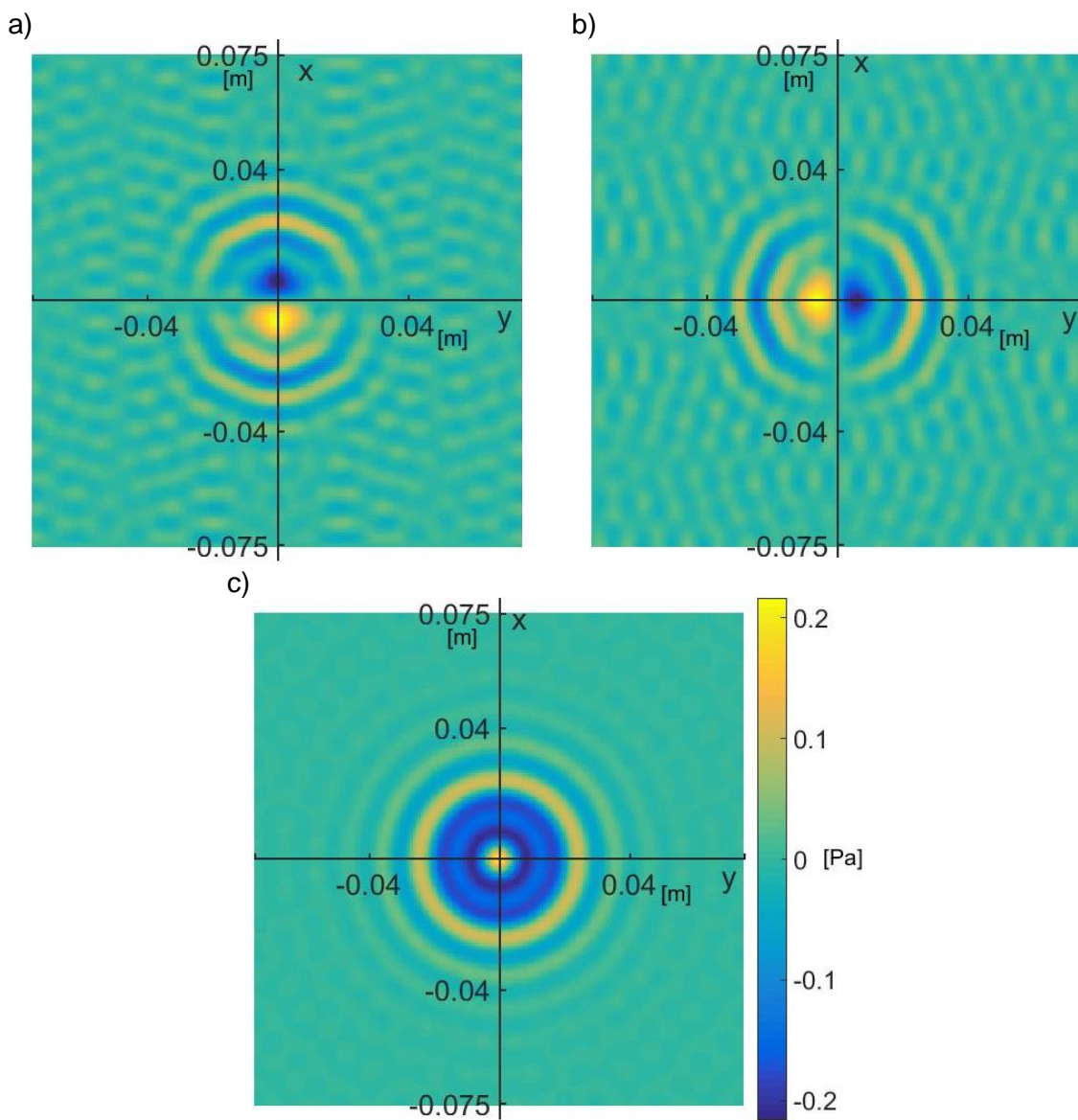


Fig. A3.2 Componentes del campo de velocidad de partícula en el plano  $xy$ ,  $z = 0.02$ . a)  $u_x$ , b)  $u_y$ , c)  $u_z$ .

Las simulaciones muestran las tres componentes del campo de velocidades en dos regiones o dominios diferentes: primeramente, la simulación en el dominio definido por  $(x, z) \in [-0.075 \text{ m}, 0.075 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 0.15 \text{ m}]$ ,  $y = 0$ , Fig. A3.1 y posteriormente, la simulación en el dominio  $(x, y) \in [-0.075 \text{ m}, 0.075 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 0.15 \text{ m}]$ ,  $z = 0.02$ , Fig. A3.2.

Aunque para poder evaluar apropiadamente la exactitud de estas simulaciones se necesitaría de un análisis más detallado, en principio los resultados son coherentes y acorde a lo esperado.